Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

# -Álgebras de Clifford-
# Uma Construção Alternativa

Ana Paula da Cunda Corrêa da Silva

Florianópolis
Abril de 1999

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

# -Álgebras de Clifford-
# Uma Construção Alternativa

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Ana Paula da Cunda Corrêa da Silva
Florianópolis
Abril de 1999

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Prof. Dr. Celso Melchíades Dória
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Celso Melchíades Dória (UFSC-Orientador)

Profa. Dra. Cydara Ripoll (UFRGS)

Prof. Dr. Andrzej Solecki (UFSC)

Prof. Dr. Oscar Ricardo Janesch (UFSC)

**Florianópolis, 28 de abril de 1999.**

A meu esposo Fernando
A meu filho Daniel

# Agradecimentos

- Ao meu marido e filho que sempre apoiaram minhas iniciativas, proporcionando condições para que meus objetivos fossem alcançados.
- À CAPES pelo suporte financeiro durante estes dois anos de mestrado e todo o período de nivelamento.
- Aos colegas Marcos Calçada, Maria Inez Cardoso, Márcio Villela, Osvaldo J. de Campos, Claiton P. Massarolo, Dirceu Bagio, Fábio Dorini e Andresa Pescador, pelo incentivo a cada momento durante os três anos de convívio e pela amizade a mim dispensada;
- Ao meu amigo Jorge Paulino Filho pelo apoio incondicional no decorrer do curso;
- Ao meu orientador, Professor Celso M. Dória;
- À secretária Elisa pelo eficiente apoio logístico;
- À Professora Albertina Zatelli pela atenção dedicada a mim, desde o período da graduação.

# Conteúdo

# Capítulo 1

# Introdução

Em 1878, *William Kingdon Clifford* publicou o artigo *Applications of Grassmann's Extensive Algebra* no qual definiu uma Álgebra gerada por

$$1, a_1, ..., a_n$$

sujeito as condições

$$a_i^2 = 1,\ a_i a_j = -a_j a_i.$$

Assim como nas Álgebras Exteriores já definidas por Grassmann, sua álgebra tem dimensão $2^n$.

As Álgebras de Clifford tem aplicação, entre outras, na teoria spinorial. *Richard Brauer* e *Hermann Weyl*[5], em seu trabalho intitulado *Spinor in n Dimensions, (1934)* utilizaram as Álgebras de Clifford para obter representações matriciais para o grupo das rotações em dimensão $n$.

Já em 1954, *Claude Chevalley* generalizou a teoria das Álgebras de Clifford e suas aplicações, considerando uma forma quadrática $Q$ definida em um espaço vetorial $V$ de dimensão finita sobre um corpo de característica arbitrária, até mesmo dois [5]. Alguns anos mais tarde, *B.L.van der Waerden* [4] simplificou as construções de Chevalley.

As estruturas de Álgebra Exterior e Álgebra de Clifford se relacionam por um isomorfismo de espaço vetorial. Se a forma quadrática a que se refere Chevalley é degenerada ($Q(v) = 0,\ \forall v \in V$), a Álgebra de Clifford de $V$ é a própria Álgebra Exterior para o espaço $V$.

Sabemos que as Álgebras Exteriores são construídas como imagem do operador alternado [seção (2.7.2)]. *Alexander Yastrebov* [2] construiu uma Álgebra $C_Q$ para um espaço vetorial $V$ como imagem de um operador alternado $A_Q$, definindo sobre $C_Q$ um produto $(\cdot)$, tal que $C_Q = Im(A_Q, \cdot)$ é isomorfa como álgebra à Álgebra de Clifford para $V$. É a construção deste operador e do isomorfismo entre $C_Q$ e a Álgebra de Clifford que se refere este trabalho.

No segundo capítulo, definimos as estruturas algébricas e propriedades necessárias aos capítulos seguintes. O terceiro é reservado a construção das Álgebras de Clifford pelo procedimento habitual, e a relação existente entre estas e as Álgebras Exteriores. Finalmente, no quarto capítulo tratamos do objetivo principal deste trabalho, que é definir o operador alternado que depende da forma quadrática e definir o isomorfismo entre a Álgebra de Clifford e a imagem deste operador.

# Capítulo 2

# Preliminares

No presente capítulo estão selecionados resultados e definições necessárias no decorrer do trabalho. Inicialmente definiremos formas bilineares e quadráticas sobre espaços vetoriais e, a seguir, a estrutura de Álgebra sobre um corpo $K$ . Seguimos com a definição de Produto Tensorial e a construção das álgebras Tensoriais e Exteriores.

## 2.1 Formas Bilineares e Quadráticas

### 2.1.1 Formas Bilineares

**Definição 2.1.** Seja $V$ um espaço vetorial sobre um corpo $K$. Então um em $V$ é uma aplicação $f : V \to K$ tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

e

$$f(ax) = af(x)$$

para todo $a \in K$, $\forall x, y \in V$.

Esses funcionais constituem o **espaço vetorial dual** a $V$ denotado por $V^*$, com estrutura definida pelas relações

(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;

(ii) $(af)(x) = af(x)$.

Tal espaço será chamado simplesmente **espaço dual** de $V$.

Considere $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}$ base de $V$ e as aplicações

$$e_i^* : V \to K, 1 \leq i \leq n;$$

tal que

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

**Proposição 2.1.** *Se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base de $V$, então $\{e_i^*, ..., e_n^*\}$ é uma base para $V^*$ sobre $K$.*

**Prova:** Seja $f \in V^*$, $f(e_i) = a_i \in K$, $1 \leq i \leq n$, então

$$\sum_{j=1}^{n} a_i e_j^*(e_i) = a_i = f(e_i).$$

Como uma função linear é determinada pela sua restrição a base, temos que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$, de onde segue que $\{e_i^*, ..., e_n^*\}$ gera $V^*$.

Se $\sum_i a_i e_i^* = 0$, então $a_j = \sum a_i e_i^*(e_j) = 0$. Logo, $\{e_i^*, ..., e_n^*\}$ é linearmente independente.

Portanto, $\{e_i^*, ..., e_n^*\}$ é base de $V^*$. □

A base $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ é chamada **base dual** de $\{e_1, ..., e_n\}$.

**Definição 2.2.** Uma **forma bilinear** em $V$ é uma função

$$B : V \times V \to K$$

$$(x, y) \mapsto B(x, y)$$

tal que para todo $x, y, x', y' \in V$, $a \in K$

(i) $B(x + x', y) = B(x, y) + B(x', y)$;

(ii) $B(x, y + y') = B(x, y) + B(x, y')$;

(iii) $B(ax, y) = aB(x, y) = B(x, ay)$.

**Observação.** As formas bilineares são comumente denotadas por $<,>$.

*Exemplos:*

1. O produto interno canônico em $\mathbb{R}^k$:

$$<,>: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

2. $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , definida por $B((x,y),(x',y')) = -xx' + yy'$ As condições da definição (2.2) podem ser agrupadas em uma condição equivalente:

$$B(a_1x_1 + a_2x_2, b_1y_1 + b_2y_2) = \sum_{i,j=1}^{2} a_ib_jB(x_i, y_j)$$

que por indução se estende a:

$$B(\sum_{i=1}^{m} a_ix_i, \sum_{j=1}^{m} b_jy_j) = \sum_{i,j=1}^{m} a_ib_jB(x_i, y_j).$$

Por (2.1.1), podemos associar uma matriz à forma bilinear. Considerando $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de $V$ sobre $K$, então

$$B(u,v) = u^tBv$$

onde $u = \sum_{i=1}^{n} a_ie_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} b_je_j$, e

$$B = \begin{pmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_1,e_2) & \cdots & B(e_1,e_n) \\ B(e_2,e_1) & B(e_2,e_2) & \cdots & B(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_n,e_1) & B(e_n,e_2) & \cdots & B(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

$B$ é chamada *matriz relativa a base* $\{e_1, ..., e_n\}$.

**Definição 2.3.** Seja $V$ um espaço vetorial sobre um corpo $K$ e

$$B : V \times V \to K$$

uma forma bilinear. Dizemos que:

a) $B$ é **simétrica** (ou **produto escalar**) se $B(u,v) = B(v,u)$, $\forall u, v \in V$;

b) $B$ é **alternada** se $B(v,v) = 0$ $\forall v \in V$;

c) $B$ é **não-degenerada** se a matriz $B$ é invertível.

Se $B$ é simétrica e $B(u,v) = 0$ dizemos que $u$ é ortogonal a $v$ e indicamos por $u \perp v$. Esta relação de ortogonalidade é uma relação simétrica pois $u \perp v$ se, e só se $v \perp u$.

Se $B$ é alternada então $B(u,v) = -B(v,u)$, ou seja, $B$ é anti-simétrica.

A Geometria obtida por uma forma bilinear simétrica é chamada *Geometria Ortogonal* e a associada a uma forma bilinear alternada, *Geometria Simplética.*

### 2.1.2 Formas Quadráticas

**Definição 2.4.** Uma **forma quadrática** $Q$ associada à forma bilinear simétrica $B : V \times V \to K$ é uma aplicação definida por

$$\begin{aligned} Q : V &\to K \\ v &\mapsto B(v,v) \end{aligned}$$

**Proposição 2.2.** *Seja $Q : V \to K$ forma quadrática associada a forma bilinear simétrica $B : V \times V \to K$. Então*

*a)* $2B(u,v) = Q(u+v) - Q(u) - Q(v)$;

*b)* $Q(av) = a^2 Q(v)$

**Prova:** a) A equação

$$2B(u,v) = Q(u+v) - Q(u) - Q(v) \tag{2.1}$$

é obtida pela polarização do argumento e pela bilinearidade de $B$:

$$\begin{aligned} Q(u+v) &= B(u+v, u+v) \\ &= B(u,u) + B(v,v) + B(u,v) + B(v,u) \\ &= Q(u) + Q(v) + 2B(u,v) \end{aligned}$$

b) A relação

$$Q(av) = a^2 Q(v)$$

se verifica pois

$$Q(av) = B(av, av) = a^2 B(v,v) = a^2 Q(v).$$

□

Assim, a forma bilinear simétrica é unicamente determinada pela sua forma quadrática e vice-versa.

As formas quadráticas são definidas sobre corpos arbitrários, mas nos deteremos às formas quadráticas definidas sobre corpos de característica diferente de dois.[5]

De modo análogo à forma bilinear, podemos associar uma matriz $Q^*$ a forma quadrática. Pela definição de $Q$, dada uma base $\{e_1, ..., e_n\}$ do espaço vetorial $V$ tem-se

$$Q(v) = B(v, v) = v^t \cdot B \cdot v$$

onde

$$B = \begin{pmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_1, e_2) & \cdots & B(e_1, e_n) \\ B(e_2, e_1) & B(e_2, e_2) & \cdots & B(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_n, e_1) & B(e_n, e_2) & \cdots & B(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Pela relação (2.1),

$$B(e_i, e_j) = \frac{1}{2}[Q(e_i + e_j) - Q(e_i) - Q(e_j)]$$

Em particular, $B(e_i, e_i) = Q(e_i)$. Assim, a matriz $B$ tem entradas

$$q_{ij} = \frac{1}{2}[Q(e_i + e_j) - Q(e_i) - Q(e_j)]$$

e

$$q_{ii} = Q(e_i).$$

Em termos das coordenadas dos vetores $v \in V$ relativas a uma base $b$ de $V$, a forma quadrática é expressa como um polinômio homogêneo do segundo grau [13]. Considerando $u = (a_1, a_2, ..., a_n)$, então, por (2.1.2),

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i q_{ij} a_j.$$

**Teorema 2.1.** *(Teorema de Silvester) Seja $Q : V \to \mathbb{R}$ forma quadrática em um espaço vetorial real $V$ de dimensão finita $n$, então existem inteiros $r$ e $s$, $r \leq s \leq n$ que dependem unicamente de $Q$ tal que*

$$Q = \sum_{i=1}^{r} {x_i}^2 - \sum_{j=r+1}^{s} {x_j}^2 \tag{2.2}$$

O número $\sigma = r - s$ é chamado **assinatura** da forma quadrática.

**Prova:** Ver [7]. $\square$

O Teorema de Silvester será aplicado na classificação das Álgebras de Clifford (seção (3.3)).

**Definição 2.5.** Uma forma quadrática $Q : V \to K$ é **não-degenerada** se a matriz $B$ é invertível.

**Definição 2.6.** Uma forma quadrática $Q : V \to \mathbb{R}$ é dita:

(i) **positiva-definida** se $Q(v) > 0,\ \forall v \neq 0$;

(ii) **negativa-definida** se $Q(v) < 0,\ \forall v \neq 0$.

## 2.2 Álgebras sobre corpos

**Definição 2.7.** Um anel associativo $A$ é uma **álgebra** $\mathcal{A}$ sobre um corpo $K$ se $A$ é espaço vetorial sobre $K$, tal que para todo $a, b \in A$ e $\alpha \in K$,

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b). \tag{2.3}$$

As definições de homomorfismos, isomorfismos, ideais, etc., para anel generalizam-se à estrutura de álgebra, adicionando a condição que devem preservar a estrutura de espaço vetorial.[8]

A relação (2.3) é a conexão entre as estruturas de anel e de espaço vetorial de $A$.

**Definição 2.8.** Um subconjunto $B$ de uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma **subálgebra** de $\mathcal{A}$ se é um subanel do anel $A$ e um subespaço do espaço vetorial $A$.

**Definição 2.9.** Seja $I$ um ideal na álgebra $\mathcal{A}$. A **álgebra quociente** ou **álgebra fatorial** com respeito a $I$ é o quociente $\mathcal{A}/I$ com estrutura de anel e de espaço vetorial.

**Definição 2.10.** Seja $I$ um ideal em $\mathcal{A}$. O **homomorfismo canônico** ou **projeção canônica** é o homomorfismo

$$\begin{aligned} j : \mathcal{A} &\to \mathcal{A}/I \\ a &\mapsto a + I = \{a + i;\ i \in I\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

**Teorema 2.2.** *(Teorema do homomorfismo) Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ álgebras sobre um corpo $K$, e $I$ ideal em $\mathcal{A}$. Considere o homomorfismo de álgebra*

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

*e a projeção canônica*

$$\begin{aligned} j : \mathcal{A} &\to \mathcal{A}/I \\ a &\mapsto a + I \end{aligned}$$

*Se $I \subset ker(f)$, onde $ker(f)$ é o núcleo de $f$, então existe um homomorfismo*

$$f^* : \mathcal{A}/I \to \mathcal{B}$$

*tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{f} & \mathcal{B} \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ \mathcal{A}/I & \xrightarrow{f^*} & Im(f) \end{array}$$

*Diagrama* 1.1

**Prova:** Considere a aplicação

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{A}/I &\to Im(f) \\ a + I &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

(i) $f^*$ está bem definida, isto é, $f^*$ independe do representante da classe. De fato, dados $n, m \in \mathcal{A}$ tal que $n + I = m + I$, então

$$n - m \in I \subset ker(f)$$

de onde segue que $0 = f(n-m) = f(n) - f(m) \Leftrightarrow f(n) = f(m)$. Decorre então que

$$f^*(n + I) = f(n) = f(m) = f^*(m + I)$$

.

(ii) O diagrama 2.1 comuta: dado $a \in \mathcal{A}$,

$$i \circ f^* \circ j(a) = i \circ f^*(a + I) = i(f(a)) = f(a).$$

Da própria definição, $f^*$ é um homomorfismo. □

**Definição 2.11.** Uma álgebra $\mathcal{A}$ é chamada **graduada** se $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^{(i)}$ onde $\mathcal{A}^{(i)}$ é um submódulo[6] de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^{(i)}\mathcal{A}^{(j)} \subseteq \mathcal{A}^{(i+j)}$.

Cada $\mathcal{A}^{(i)}$ é chamado **parte homogênea (ou monômio)** de comprimento (ou grau) $i$.

Como exemplo, temos as álgebras de graduação $\mathbb{Z}_2$ (ou $\mathbb{Z}_2$-graduadas). Uma álgebra $\mathcal{A}$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada se $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(0)} + \mathcal{A}^{(1)}$ ,onde $\mathcal{A}^{(0)}, \mathcal{A}^{(1)}$ são submódulos de $\mathcal{A}$ tal que a multiplicação satisfaz:

$$\mathcal{A}^{(i)} \cdot \mathcal{A}^{(j)} \subseteq \mathcal{A}^{(i+j)}, \ (i + j)(mod 2).$$

Decorre que $\mathcal{A}^{(0)}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^{(1)}$ é um submódulo sobre $\mathcal{A}^{(0)}$.

## 2.3 A Álgebra real dos quatérnios

O conjunto $\mathbb{H}$ dos **Quatérnios** é por definição o conjunto dos elementos da forma

$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \;\; a_i \in \mathbb{R}, \;\; i = 0, 1, 2, 3$$

satisfazendo as seguintes relações;

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ ij &= k = -ji \\ jk &= i = -kj \\ ki &= j = -ik. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Definimos em $\mathbb{H}$ um produto (ou multiplicação quaterniônica)

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ (q_1, q_2) &\mapsto q_1 \cdot q_2 \end{aligned}$$

induzido pelas relações acima, de onde segue que, se $q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ e $q_2 = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$, então

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 = (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + \\ + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_3 b_2 - a_2 b_3) i + (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1) j + \\ + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_2 b_1 - a_1 b_2) k. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Pelo produto acima, podemos concluir que $\mathbb{H}$ não é comutativo com relação à multiplicação quaterniônica.

**Definição 2.12.** Em $\mathbb{H}$ a operação **conjugação** é dada por

$$\bar{q} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k.$$

**Definição 2.13.** O **módulo** de um quatérnio $q$ é dado por:

$$||q||^2 = q\bar{q} = a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2.$$

**Definição 2.14.** Dado $q \in \mathbb{H}$, $a_0$ é a sua **parte real** $(Re(q))$ e $a_1 i + a_2 j + a_3 k$ a **parte imaginária** $(Im(q))$.

Definindo sobre $\mathbb{H}$ a operação adição:

$$+ : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$
$$(q_1, q_2) \mapsto q_1 + q_2 = a_0 + b_o + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k \quad (2.7)$$

podemos afirmar que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ tem estrutura de anel, com unidade

$$1 = 1 + 0i + 0j + 0k.$$

Todo elemento $q \in \mathbb{H}$ não nulo tem inverso

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}.$$

Com a multiplicação por escalar definida por:

$$\lambda q = \lambda a_0 + \lambda a_1 i + \lambda a_2 j + \lambda a_3 k$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{H}$ tem a estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Logo, $\mathbb{H}$ é uma álgebra de divisão chamada **Álgebra dos Quatérnios** , onde $\mathbb{H}$ é a letra inicial do sobrenome de *Willian Hamilton*, que descobriu os quatérnios com seu produto e relações (1844)[4].

**Proposição 2.3.** *$\mathbb{R}$ é o centro de $\mathbb{H}$, isto é, um quatérnio comuta com todo quatérnio se, e somente se, é real.*

**Prova:** $(\Longrightarrow)$
Seja $q = a + bi + cj + dk$. Supondo que $q$ comuta com todo quatérnio, então também comuta com $i$, isto é, $iq = qi$, ou equivalente

$$ai - b + ck - dj = ai - b - ck + dj$$

implicando que $2(ck - dj) = 0 \Rightarrow c = d = 0$.

Analogamente, supondo que $q$ comuta com $j$, então $b = 0$. Logo $q = a \in \mathbb{R}$.

$(\Longleftarrow)$
Sendo $q$ real, é óbvio pois $\mathbb{R}$ é comutativo. □

Com a estrutura de espaço vetorial, $\mathbb{H}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^4$ com as seguintes identificações:

$$1 \equiv (1,0,0,0), \; i \equiv (0,1,0,0), \; j \equiv (0,0,1,0), \; k \equiv (0,0,0,1).$$

Como espaço vetorial, $\mathbb{H}$ é gerado por $\{1, i, j, k\}$, e como álgebra, por $\{1, j\}$. Temos em $\mathbb{H}$ uma decomposição natural $\mathbb{H} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ dada por

$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = \underbrace{(a_0 + a_1 i)}_{z_1} + \underbrace{(a_2 + a_3 i)}_{z_2} j = z_0 + z_1 j.$$

Pelo produto (2.6) em $\mathbb{H}$ tem-se:

$$(z_0 + z_1 j)(w_0 + w_1 j) = (z_0 w_0 - z_1 \bar{w}_1) + (z_0 w_1 + z_1 \bar{w}_0) j \qquad (2.8)$$

que induz a representação

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \mathbb{H}_1 j \qquad (2.9)$$

considerando a subálgebra $\mathbb{H}_0$ gerada por $\{1, i\}$, isomorfa a $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}_1$ o $\mathbb{H}_0$-módulo[6] gerado por $\{1, j\}$.

Comparando com o produto em $\mathbb{C}$, a expressão acima difere apenas na conjugação dos termos que multiplicam $z_1$, que surgem pela não comutatividade de $\mathbb{H}$ em relação a multiplicação quaterniônica.

Seja $q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ e $q_2 = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ em $\mathbb{H}$. Considerando as seguintes identificações

$$1 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$j \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, k \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é possível interpretar a multiplicação quaterniônica como multiplicação usual de matrizes $2 \times 2$ complexas ($\mathbb{C}(2)$) pela ação a direita

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \mathbb{H}_1 j &\to \mathbb{C}(2) \\ (z + wj) &\mapsto \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (2.10)$$

A anti-comutatividade de $\mathbb{H}$ implica que a ação a esquerda é exatamente a transposta $\sigma^t$.

## 2.4 Produto Tensorial

O produto Tensorial de espaços vetoriais é empregado em diversos ramos da Matemática, especialmente geometria diferencial e teoria das representações.

Dados $V, W$ espaços vetoriais sobre um corpo $K$, de dimensão finita, considere $V \times W$ e o grupo abeliano livre $F$ tendo $V \times W$ como base, onde seus elementos têm a forma

$$n_1(x_1, y_1) + ... + n_r(x_r, y_r), \; n_i \in K, \; x_i \in V, \; , y_i \in W; r \in \mathbb{N}$$

com a operação usual de produto cartesiano.

Seja $G$ o subgrupo de $F$ gerado por todos os elementos da forma

(i) $(x + x', y) - (x, y) - (x', y), \quad x, x' \in V, \; y \in W;$

(ii) $(x, y + y') - (x, y) - (x, y'), \quad x, y \in V, \; y' \in W;$

(iii) $(ax, y) - a(x, y), \quad a \in K, \; x \in V, \; y \in W;$

(iv) $(x, ay) - a(x, y), \quad a \in K, \; x \in V, \; y \in W.$

e construa o quociente $F/G$. Denominamos $F/G$ o **produto tensorial** de $V$ e $W$, que é denotado por $V \otimes_K W$, onde $x \otimes y = (x, y) + G$.

Considere $j : F \to F/G$ o homomorfismo canônico. Como $F$ é gerado por $V \times W$, $F/G$ é gerado pela imagem por $j$ dos elementos $(x, y) \in V \times W$, ou seja, elementos da forma $j(x, y) = x \otimes y$. Tem-se então que

$$(x + x') \otimes y = (x + x', y) + G = (x, y) + (x', y) + G = x \otimes y + x' \otimes y.$$

De modo análogo,

$$x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y',$$

e

$$k(x \otimes y) = (kx) \otimes y = x \otimes (ky).$$

Assim, $V \otimes_K W$ tem estrutura de espaço vetorial, gerado pelos elementos $x \otimes y$. Sendo $V$ e $W$ espaços vetoriais de dimensão finita sobre $K$, considere $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}$ e $\{f_i, 1 \leq i \leq n\}$ bases de $V$ e $W$, respectivamente. Então, para quaisquer $x \in V$, $y \in W$ onde $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ e $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j$, decorre que $V \otimes_K W$ é gerado pelos elementos $e_i \otimes f_j$.

Considerando a seguinte operação em $V \otimes_K W$ :

**Proposição 2.4.** *(Propriedade Universal do Produto Tensorial) Seja $F$ o grupo abeliano gerado por $V \times W$, e $P$ grupo abeliano livre tal que $f : F \to P$ é um homomorfismo satisfazendo as seguintes condições:*

*a)* $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y), \ \forall x, x' \in V, \ y \in W;$

*b)* $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y'), \ \forall x \in V, \ y, y' \in W$

*c)* $\alpha f(x, y) = f(\alpha x, y) = f(x, \alpha y), \ \forall x \in V, \ y \in W, \alpha \in K.$

*Então existe um único homomorfismo*

$$f^* : V \otimes_K W = F/G \to P$$

*tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & P \\ F/G \arrow[ur, "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

*Diagrama* 1.2

**Prova:** Considere a aplicação

$$\begin{aligned} f^* : F/G &\to P \\ x \otimes y &\mapsto f(x, y). \end{aligned}$$

$f^*$ está bem definida. Com efeito, dados $(x, y), (z, w)$ em $F$ tal que $(x, y) + G = (z, w) + G$, então $(x, y) - (z, w) \in G$. Como $G$ é gerado por elementos da forma (2.4),

$$0 = f((x, y) - (z, w)) = f(x, y) - f(z, w) = f^*(x \otimes y) - f^*(z \otimes w),$$

isto é, $f^*(x \otimes y) = f^*(z \otimes w)$.

Resta mostrar que $G \subset ker(f)$. Como $G$ é gerado por elementos da forma (2.4), então, sendo $f$ homomorfismo,

(i) $f(x+x',y) - f(x,y) - f(x',y) = 0$;

(ii) $f(x,y+y') - f(x,y) - f(x,y') = 0$;

(iii) $\alpha f(x,y) - f(\alpha x,y) - f(x,\alpha y) = 0$,

isto é, $f(a) = 0$, $\forall a \in G$. Logo, $G \subset ker(f)$.

Como $M \times N$ gera $F$, $f^*$ é único. □

A construção do produto tensorial apresentada pode ser estendida ao produto tensorial de $k$ fatores $M_1 \times M_2 \times ... \times M_k$ de forma análoga, sendo neste caso linear em cada um dos fatores (multilinearidade).

**Proposição 2.5.** *Sejam $V, W, S$ espaços vetoriais sobre $K$. Então existem isomorfismos*

*a)* $V \otimes W \to W \otimes V$;

*b)* $(V \otimes W) \otimes S \to V \otimes W \otimes S \to V \otimes (W \otimes S)$;

*c)* $(V \oplus W) \otimes S \to (V \otimes S) \oplus (W \otimes S)$;

*d)* $K \otimes V \to V$,

*tais que*

*a)* $x \otimes y \to y \otimes x$;

*b)* $(x \otimes y) \otimes z \to x \otimes y \otimes z \to x \otimes (y \otimes z)$;

*c)* $(x+y) \otimes z \to (x \otimes z) + (y \otimes z)$;

*d)* $k \otimes x \to kx$.

**Prova:** Ver [12]

□

O item (b) justifica a notação $V \otimes W \otimes S$ para $(V \otimes W) \otimes S$ e $V \otimes (W \otimes S)$.

Podemos estender a definição de produto tensorial de espaços vetoriais à álgebras.

Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ álgebras sobre um corpo $K$. Pela definição de álgebra, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ têm estrutura de espaços vetoriais sobre $K$. Então podemos construir $\mathcal{A} \otimes_K \mathcal{B}$ que é um espaço vetorial.

Considere a aplicação,

$$\begin{aligned} f : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{A} \times \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \\ (x, y, z, w) &\mapsto xz \otimes yw, \end{aligned} \tag{2.11}$$

que é linear em cada fator. Pela proposição (2.4), e item (b) da proposição (2.5), $f$ induz o homomorfismo

$$f^* : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes_K (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A} \otimes_K \mathcal{B},$$

que corresponde a aplicação $K$-bilinear [12]

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \times (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) &\rightarrow \mathcal{A} \otimes_K \mathcal{B} \\ (x \otimes y, z \otimes w) &\mapsto xz \otimes yw. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Assim definimos um produto em $\mathcal{A} \otimes_K \mathcal{B}$ e com isto podemos concluir que $\mathcal{A} \otimes_K \mathcal{B}$ tem estrutura de $K$-álgebra..

## 2.5 Complexificação de uma álgebra

Dada uma álgebra $\mathcal{A}$ com unidade sobre um corpo $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, a **complexificação** $\mathcal{A}^c$ de $\mathcal{A}$ é definida por $\mathcal{A}^c = \mathcal{A} \otimes_K \mathbb{C}$, cuja multiplicação é determinada por

$$(a \otimes z)(b \otimes w) = ab \otimes zw. \tag{2.13}$$

A menos que seja necessário explicitar o corpo, usaremos a notação $\otimes$ para $\otimes_K$.

Podemos identificar $\mathcal{A}^c$ com $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ pela decomposição natural

$$\mathcal{A}^c \equiv (\mathcal{A} \otimes 1) \oplus (\mathcal{A} \otimes i)$$

com a correspondência

$$a \otimes 1 + b \otimes i \Longleftrightarrow (a, b). \tag{2.14}$$

Considerando a identificação acima, podemos verificar a multiplicação em $\mathcal{A}^c$. Dados $(a,b), (a',b')$ em $\mathcal{A}^c$,

$$\begin{aligned}(a,b)(a',b') &= (a \otimes 1 + b \otimes i)(a' \otimes 1 + b' \otimes i)\\ &= aa' \otimes 1 + bb' \otimes i^2 + ba' \otimes i + ab' \otimes i\\ &= (aa' - bb', ba' + ab').\end{aligned}$$

Assim, a menos de isomorfismos, definimos $\mathcal{A}^c = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ com a multiplicação dada pela expressão acima que é exatamente a passagem dos reais para os complexos.

Outra espécie de complexificação é através do produto tensorial graduado, que definiremos a seguir.

**Definição 2.15.** Dadas duas álgebras graduadas $\mathcal{A} = \mathcal{A}^0 \oplus \mathcal{A}^1$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}^0 \oplus \mathcal{B}^1$ sobre um corpo $K$, a **álgebra produto tensorial graduado** $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ sobre $K$ é definida por

$$\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

onde a multiplicação é dada por

$$(a \otimes x^i)(y^j \otimes b) = (-1)^{ij} a y^j \otimes x^i b. \tag{2.15}$$

O produto tensorial graduado de álgebras graduadas também tem uma graduação $\mathbb{Z}_2$ natural:

$$\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B} = (\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^0 \oplus (\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^1 \tag{2.16}$$

onde

$$(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^0 = (\mathcal{A}^0\otimes\mathcal{B}^0)\oplus(\mathcal{A}^1\otimes\mathcal{B}^1)$$
$$(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^1 = (\mathcal{A}^0\otimes\mathcal{B}^1)\oplus(\mathcal{A}^1\otimes\mathcal{B}^0).$$

A diferença entre a complexificação simples e a graduada está apenas na multiplicação. Tomando $\mathcal{B} = \mathbb{C}$ com a identificação $\mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, onde $(0,1) \equiv i$, podemos observar claramente o que acontece. Identificamos $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathbb{C}$ com $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ pela correspondência $(a\otimes 1)+(b\otimes i) \longleftrightarrow (a,b)$. Levando em conta a graduação $\mathcal{A} = \mathcal{A}^0 + \mathcal{A}^1$, tem-se que, dados

$$\begin{array}{ccc} a = a^0 + a^1, & & b = b^0 + b^1, \\ z = z^0 + z^1 & \text{e} & w = w^0 + w^1 \end{array}$$

e suas respectivas conjugações:

$$\begin{array}{ccc} \bar{a} = a^0 - a^1, & & \bar{b} = b^0 - b^1, \\ \bar{z} = z^0 - z^1 & \text{e} & \bar{w} = w^0 - w^1, \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
(a,b)(z,w) &= (a\otimes 1)+(b\otimes i)\cdot(z\otimes 1+w\otimes i)\\
&= [(a^0+a^1)\otimes 1+(b^0+b^1)\otimes i]\cdot[((z)^0+(z)^1)\otimes 1+\\
&+((w)^0+(w)^1)\otimes i]=\\
&= [a^0\otimes 1+a^1\otimes 1+b^0\otimes i+b^1\otimes i]\cdot[(z)^0\otimes 1+\\
&+(z)^1\otimes 1+(w)^0\otimes i+(w)^1\otimes i]\\
&= a^0(z)^0\otimes 1+a^1(z)^1\otimes 1+a^0(z)^1\otimes 1+a^1(z)^0\otimes 1+\\
&+b^0(w)^0\otimes i^2+b^1(w)^0\otimes i^2-b^1(w)^1\otimes i^2-b^0(w)^1\otimes i^2+\\
&+b^0(z)^0\otimes i-b^0(z)^1\otimes i+\\
&+b^1(z)^0\otimes 1-b^1(z)^1\otimes i+a^0(w)^0\otimes i+a^0(w)^1\otimes i+\\
&+a^1(w)^0\otimes i+a^1(w)^1\otimes i=\\
&= \underbrace{(a^0z^0+a^0z^1+a^1z^0+a^1z^1)}_{=az}\otimes 1-\\
&- \underbrace{(b^0w^0-b^0w^1+b^1w^0-b^1w^1)}_{=b\bar{w}}\otimes 1+\\
&+ \underbrace{(a^0w^0+a^0w^1+a^1w^0+a^1w^0+a^1w^1)}_{=aw}\otimes i+\\
&+ \underbrace{(b^0z^0-b^0z^1+z^0b^1-z^1b^1)}_{=\bar{z}b}\otimes i=\\
&= az\otimes 1-bw\otimes 1+aw\otimes i+zb\otimes i\\
&= (az-b\bar{w})\otimes 1+(aw+\bar{z}b)\otimes i\\
&= (az-b\bar{w},aw+b\bar{z}).
\end{aligned}
$$

Pelo produto acima, pode-se observar que a complexificação simples difere da graduada na multiplicação, onde na graduada os elementos multiplicados por $b$ sofrem a ação da conjugação.

**Observações:**

(i) A complexificação simples de $\mathbb{C}$ resulta numa álgebra diferente de $\mathbb{H}$ em que existem divisores de zero. Pela identificação $\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$,

$$(1,i)(i,1)=(1\cdot i-i\cdot 1, i\cdot i+1\cdot 1)=(0,0)=0.$$

(ii) $\mathbb{H}=\mathbb{C}\hat{\otimes}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$.

Identificando $\mathbb{H}=\mathbb{C}\hat{\otimes}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ com $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, onde consideramos $\mathbb{C}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$, então:

$$(z,w)\cdot(z',w')=(zz'-w\bar{w}')\otimes 1+(zw'+\bar{z}'w)\otimes i.$$

Como identificamos $\mathbb{H}\cong\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$, o produto quaterniônico é exatamente o produto tensorial graduado em $\mathbb{H}=\mathbb{C}\hat{\otimes}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. Logo, $\mathbb{H}\cong\mathbb{C}\hat{\otimes}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$.

(iii) $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ tem estrutura de álgebra considerando $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H} = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ onde o produto em $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ é o mesmo em $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$:

$$(q_1, q_2)(r_1, r_2) = (q_1 r_1 - q_2 r_2, q_2 r_1 + q_1 r_2), \forall q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{H}.$$

**Proposição 2.6.** *Existe um isomorfismo entre as álgebras* $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H} = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ *e* $\mathbb{C}(2)$ .

**Prova:** Considerando $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, temos a representação usual de $\mathbb{H}$

$$\begin{aligned} &\sigma : \mathbb{H} \to \mathbb{C}(2) \\ &(z, w) \mapsto \sigma(z, w) = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}, (z, w) \in \mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Para obter uma representação de $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$, basta tomar a extensão complexa de $\sigma$:

$$\psi : \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \to \mathbb{C}(2)$$
$$\psi((z, w), (u, v)) = \sigma(z, w) + \sigma(u, v) i$$

ou seja,

$$\psi((z, w), (u, v)) = \begin{pmatrix} z + ui & w + vi \\ -\bar{w} - \bar{v}i & \bar{z} + \bar{u}i \end{pmatrix}$$

(i) $\psi$ é linear sobre $\mathbb{C}$: seja $\lambda \in \mathbb{C}$, $v = ((z, w), (u, v))$, então

$$\begin{aligned} \psi\{\lambda[(z, w), (u, v)]\} &= \sigma(\lambda(z, w)) + \sigma(\lambda(u, v)) i \\ &= \begin{pmatrix} \lambda z & \lambda w \\ -\lambda \bar{w} & \lambda \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda u & \lambda v \\ -\lambda \bar{v} & \lambda \bar{u} \end{pmatrix} i \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(z + ui) & \lambda(w + vi) \\ \bar{\lambda}(-\bar{w} - \bar{v}i) & \bar{\lambda}(\bar{z} + \bar{u}i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + [\sigma(z, w) + \sigma(u, v) i] \\ &= \lambda \psi((z, w)(u, v)) \end{aligned}$$

(ii) $\psi$ preserva a multiplicação:

$$
\begin{aligned}
\psi[((z,w),(u,v))\cdot((z',w'),(u',v'))] = \\
&= (\sigma(z,w)+\sigma(u,v)i)(\sigma(z',w')+\sigma(u',v')i) \\
&= \sigma(z,w)\sigma(z',w')+\sigma(z,w)\sigma(u',v')i+ \\
&+\sigma(u,v)\sigma(z',w')i-\sigma(u,v)\sigma(u',v') \\
&= [\sigma(z,w)\sigma(z',w')-\sigma(u,v)\sigma(u',v')]+ \\
&+[\sigma(z,w)\sigma(u',v')+\sigma(u,v)\sigma(z',w')]i
\end{aligned}
$$

Como $\sigma$ é a representação da álgebra $\mathbb{H}$:

$$
\begin{aligned}
&=\sigma[(z,w)(z',w')-(u,v)(u',v')]+\sigma[(z,w)(u',v')+(u,v)(z',w')]i \\
&=\psi\{[(z,w)(u,v)][(z',w')(u',v')]\}.
\end{aligned}
$$

(iii) $ker(\psi)=0$: Seja $((z,w)(u,v))\in ker(\psi)$. Então

$$
\psi((z,w),(u,v)=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} z+ui & w+vi \\ -\bar{w}-\bar{v}i & \bar{z}+\bar{u}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Equivalentemente

$$
\begin{cases} z+ui=0 \Rightarrow \bar{z}-\bar{u}i=0 \\ \bar{z}+\bar{u}i=0 \Rightarrow \bar{z}+\bar{u}i=0 \Rightarrow \bar{z}=0 \text{ e } u=0 \end{cases} \tag{2.18}
$$

Logo, $\psi$ é injetiva

(iv) $dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})=4$ e $dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(2))=4$, que mostra a sobrejetividade da $\psi$.

Portanto $\psi$ é um isomorfismo.

□

## 2.6 Álgebra Tensorial

A definição do Produto tensorial de espaços vetoriais sobre um corpo $K$ induz a definição de *Álgebra Tensorial*, que é o ponto inicial para definir muitas outras álgebras, entre elas, as álgebras exteriores.

Seja $V$ um espaço vetorial sobre um corpo $K$. Considere

$$V^{(i)} = \underbrace{V \otimes V \otimes ... \otimes V}_{i \text{ vezes}}, \; i = 1, 2, ... \tag{2.19}$$

e $V^{(0)} = K$ . Considere também os isomorfismos:

$$\begin{aligned} \pi : K \otimes V^{(n)} &\to V^{(n)} \\ k \otimes x &\mapsto kx \end{aligned} \tag{2.20}$$

e

$$\begin{aligned} \pi' : V^{(n)} \otimes K &\to V^{(n)} \\ x \otimes k &\mapsto xk \end{aligned} \tag{2.21}$$

Assim, podemos assumir que existe um único isomorfismo

$$\varphi : V^{(m)} \otimes V^{(n)} \to V^{(m+n)}$$
$$(x_1 \otimes ... \otimes x_m) \otimes (x_{m+1} \otimes ... x_{m+n}) \mapsto x_1 \otimes ... \otimes x_m \otimes x_{m+1} \otimes ... x_{m+n} \tag{2.22}$$

e definir

$$T(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{(i)} = K \oplus V \oplus V^{(2)} \oplus ... \tag{2.23}$$

Com as operações induzidas do produto tensorial, $T(V)$ tem estrutura de de anel e de espaço vetorial sobre $K$.

*Afirmação 1.* $T(V)$ é uma álgebra sobre o corpo $K$.

**Prova:** Como os elementos de $T(V)$ são somas finitas de termos da forma $kx$ e $x_1 \otimes ... \otimes x_i$, é suficiente provar a existência do elemento unidade e a associatividade.

(i) Existência da unidade: Seja $k \in K$, $x \in T(V)$. Então por (2.20) e (2.21)

$$(k1)x = kx = x(k1), \tag{2.24}$$

de onde segue que $1x = x1 = x$.

(ii) Associatividade : Seja $x = x_1 \otimes ... \otimes x_m$, $y = y_1 \otimes ... \otimes y_n$ e $z = z_1 \otimes ... \otimes z_p$ onde $m, n, p > 0$. Pela definição de $\varphi$ :

$$\begin{aligned}(x \otimes y) \otimes z &= [(x_1 \otimes ... \otimes x_m) \otimes (y_1 \otimes ... \otimes y_n)] \otimes (z_1 \otimes ... \otimes z_p) \\ &= (x_1 \otimes ... \otimes x_m \otimes y_1 \otimes ... y_n) \otimes (z_1 \otimes ... \otimes z_p) = \\ &= x_1 \otimes ... \otimes x_m \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_n \otimes z_1 \otimes ... \otimes z_p.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$x \otimes (y \otimes z) = x_1 \otimes ... \otimes x_m \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_n \otimes z_1 \otimes ... \otimes z_p \tag{2.25}$$

de onde segue que $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$.

Portanto, $T(V)$ é uma $K$-álgebra. □

A $K$-álgebra $T(V)$ é denominada **Álgebra Tensorial** para o espaço vetorial $V$.

A Álgebra Tensorial $T(V)$ é uma álgebra graduada. Neste caso, $T(V)$ é graduada por seus submódulos $V^{(i)}$ onde $V^{(i)} \otimes V^{(j)} \subset V^{(i+j)}$.

**Proposição 2.7.** *(Propriedade Universal da Álgebra Tensorial) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre o corpo $K$, e*

$$f : V \to \mathcal{A}$$

*um homomorfismo. Então existe um único homomorfismo*

$$f^* : T(V) \to \mathcal{A}$$

*tal que o diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & \mathcal{A} \\ T(V) \arrow[ur, "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

*Diagrama* 1.3

**Prova:** Considere os homomorfismos:

$$\begin{aligned} f^{(0)} : K &\to \mathcal{A} \\ k &\mapsto k1, \end{aligned} \tag{2.26}$$

e

$$\begin{aligned} f^{(n)} : V^{(n)} &\to \mathcal{A},\ n = 1, 2, ... \\ x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_n &\mapsto f(x_1) \cdot ... \cdot f(x_i). \end{aligned}$$

Tomando $f^*$ como o homomorfismo

$$f^* : T(V) \to \mathcal{A}$$

que coincide com $f^{(n)}$ em $V^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, ...$, $f^*$ é um homomorfismo de álgebra. Como $V$ gera $T(V)$, $f^*$ é o único homomorfismo de $T(V)$ em $\mathcal{A}$ que coincide com $f$ em $V$. □

## 2.7 As Álgebras Exteriores

### 2.7.1 Introdução

As Álgebras Exteriores ou Grassmanianas, denotadas por $\Lambda$, são de grande importância na geometria diferencial e topologia diferencial. Foram introduzidas em 1844 por *Hermann Gunther Grassmann* [4] numa linguagem difícil misturando suas explicações com teorias filosóficas. Ele considerou o seguinte problema: dado um espaço vetorial $V$ sobre um corpo $K$, como ampliá-lo a uma álgebra $\mathcal{A}$ gerada por $V$, onde se adiciona a propriedade $v^2 = 0$ para todo $v \in V$? Mais ainda, como fazê-lo do modo mais geral possível?

Em 1867, *Hermann Hankel*[4] clareou as idéias de Grassmann, a começar por uma interpretação geométrica dos produtos alternados de vetores.

Dado um espaço vetorial sobre um corpo $K$, construiremos $\Lambda$ de duas maneiras. A primeira define $\Lambda(V)$ como imagem do operador alternado

$$Alt : T(V) \to T(V)$$

onde $T(V)$ é a álgebra tensorial de $V$, definindo um produto $\wedge$ em $\Lambda(V)$ pela fórmula

$$w \wedge v = Alt(w \otimes v), \ w, v \in V.$$

A segunda forma é através da álgebra fatorial $T(V)/I$ onde $I$ é o ideal gerado pelos elementos (ou tensores) do tipo $x \otimes x$.

### 2.7.2 A Álgebra Exterior como imagem de um operador alternado

Seja $V$ um espaço vetorial sobre um corpo $K$. Define-se como **p-tensor** em $V$ uma função

$$T : V^{\times p} = \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{p \ vezes} \to K$$

multilinear, isto é, a condição de linearidade se verifica em cada uma das componentes da seguinte forma:

$$T(v_1, ..., v_j + \alpha v_j', ..., v_p) = T(v_1, ..., v_j, v_{j+1}, ..., v_p) + \alpha T(v_1, ..., v_j', ..., v_p)$$

onde os $v_i's$ estão em $V$ e $\alpha \in K$.

**Exemplos:**

a) Se $p = 1$, os 1-tensores são os funcionais lineares em $V$.

b) O produto escalar canônico em $\mathbb{R}^k$ é um $2-tensor$.

c) O determinante de uma matriz $k \times k$ é um $k - tensor$. De fato, seu determinante é multilinear com respeito aos vetores-linha(coluna).

Denotaremos o conjunto de todos os $p-tensores$ em $V$ por $\mathfrak{T}^p(V^*)$. Temos por exemplo $\mathfrak{T}^1(V^*)$ como o espaço dual de $V$.

*Afirmação 2.* $\mathfrak{T}^p(V^*)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $K$.

**Prova:** De fato, somas e multiplicações de funções multilineares por escalares são também multilineares, o que concede a $\mathfrak{T}^p(V^*)$ a estrutura de espaço vetorial sobre $K$.

□

Assim sendo, podemos definir o produto tensorial de tensores da seguinte forma: dados $T \in \mathfrak{T}^p(V^*)$ e $S \in \mathfrak{T}^q(V^*)$, $T \otimes S$ é definido pela fórmula:

$$(T \otimes S)(v_1, ..., v_p, v_{p+1}, ..., v_{p+q}) = T(v_1, ..., v_p) \cdot S(v_{p+1}, ..., v_{p+q}).$$

O produto tensorial induz uma estrutura de álgebra associativa sobre $\mathfrak{T}(V^*)$, que não é comutativa:

$$(T \otimes S)(v_1, ..., v_p, v_{p+1}, ..., v_{p+q}) = T(v_1, ..., v_p) \cdot S(v_{p+1}, ..., v_{p+q})$$

e

$$(S \otimes T)(v_1, ..., v_p, v_{p+1}, ..., v_{p+q}) = S(v_1, ..., v_q) \cdot T(v_{q+1}, ..., v_{p+q}).$$

Pelo teorema seguinte, mostramos que podemos estender $V^*$ a $\mathfrak{T}^p(V^*)$.

**Teorema 2.3.** *Seja $k$ a dimensão de $V$ e $\{\phi_1, ..., \phi_k\}$ uma base para $V^*$. Então os p-tensores $\{\phi_{i_1} \otimes ... \otimes \phi_{i_p},\ 1 \leq i_1, ..., i_p \leq k\}$ formam uma base para $\mathfrak{T}^p(V^*)$. Conseqüentemente, $dim\mathfrak{T}^p(V^*) = k^p$.*

**Prova:** Seja $\{v_1, ..., v_k\}$ uma base ortonormal em $V$, e $\{\phi_1, ..., \phi_k\}$ base dual em $V^*$, isto é,

$$\phi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} .$$

Se $I = (i_1, ..., i_p)$ é uma seqüência de inteiros entre 1 e $k$, denotamos

$$\phi_I = \phi_{i_1} \otimes ... \otimes \phi_{i_p}$$

e $v_I = (v_{i_1}, ..., v_{i_p})$. Se $I$ e $J$ são seqüências de índices, então, por definição,

$$\phi_I(v_J) = \phi_{i_1} \otimes ... \otimes \phi_{i_p}(v_{j_1}, ..., v_{j_p}).$$

Pela definição de produto tensorial,

$$\phi_I(v_J) = \phi_{i_1}(v_{j_1}) \cdot \phi_{i_2}(v_{j_2}) \cdot ... \cdot \phi_{i_p}(v_{j_p})$$

de onde segue que

$$\phi_I(v_J) = \begin{cases} 1 & \text{se } I = J \\ 0 & \text{se } I \neq J \end{cases}$$

Os $\phi_I$'s são independentes, pois se $\sum_I a_I \phi_I = 0$ então

$$0 = \sum_I a_I \phi_I(v_J) = a_J$$

para cada $J$.

Tem-se, então, para um $p$-tensor $T$,

$$\begin{aligned} T(v_1, ..., v_p) &= T(\sum_{i_r} \phi_{i_1} v_{i_1}, ..., \sum_{i_k} \phi_{i_k} v_{i_k}) = \\ &= \sum_{i_1, ..., i_p} \phi_{i_1} ... \phi_{i_k} T(v_{i_1}, ..., v_{i_k}) = \\ &= \sum_{i_1, ..., i_p} T_{i_1, ..., i_p} \phi_{i_1} \otimes ... \otimes \phi i_k \end{aligned}$$

Dados dois $p$-tensores $T$ e $S$, $T = S$ se e somente se $T(v_J) = S(v_J)$ para toda seqüência de índices $J$. Segue então que $\{\phi_I\}$ gera $\mathcal{T}^p(V^*)$

□

**Definição 2.16.** Um $p$-tensor $T$ é dito **alternado** se

$$T(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_p) = -T(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_p)$$

*Observação:* Consideraremos que os 1-tensores são alternados.

*Exemplo:* O determinante de uma matriz $k \times k$ é um tensor alternado.

A fim de caracterizar as mudanças de posição das variáveis em $p$-tensores, que chamaremos daqui em diante de **transposições**, utilizamos as permutações dos seus índices. Para isto, denotamos por $S_p$ o grupo das permutações dos números de 1 a $p$. Dada uma permutação $\pi \in S_p$, esta será **par** ou **ímpar**, dependendo se o número de transposições de índices for par ou ímpar.

Sendo assim, $(-1)^\pi$ denotará $+1$ ou $-1$ dependendo se $\pi$ for par ou ímpar, respectivamente.

Existe uma ação do grupo das permutações $S_p$ sobre $\mathfrak{I}^p(V^*)$

$$\begin{aligned} S_p \times \mathfrak{I}^p &\to \mathfrak{I}^p \\ (\pi, T) &\mapsto T^\pi, \end{aligned} \tag{2.27}$$

onde

$$T^\pi(v_1, ..., v_p) = T(v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(p)}).$$

As permutações nos fornecem uma maneira de ordenar os índices de forma crescente. Assim, dados um $p$-tensor alternado e uma permutação $\pi \in S_p$, temos que

$$T^\pi = (-1)^\pi T$$

Observa-se que se $\pi$ for par, $T^\pi = T$.

Pela ação de $S_p$ sobre $\mathfrak{I}^p(V^*)$,

$$(\sigma, T^\pi) \mapsto (T^\pi)^\sigma = (\pi \circ \sigma, T), \ \sigma \in S_p.$$

Segue então que

$$(T^\pi)^\sigma = T^{\pi \circ \sigma}$$

Podemos construir tensores alternados através de um $p$-tensor $T$, definindo o operador multilinear linear $Alt(T)$ da seguinte forma:

$$Alt(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^\pi T^\pi. \tag{2.28}$$

*Alt* é de fato alternado: para toda permutação $\sigma$,

$$\begin{aligned} [Alt(T)]^\sigma &= [\frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^\pi T^\pi]^\sigma = \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^\pi T^{\pi \circ \sigma} = \\ &= \frac{1}{p!} (-1)^\sigma \sum_{\pi \in S_p} (-1)^{\pi \circ \sigma} T^{\pi \circ \sigma} = \\ &= (-1)^\sigma Alt(T), \end{aligned}$$

pois $(-1)^{\pi}(-1)^{\sigma} = (-1)^{\pi\circ\sigma}$ e

$$\sum_{\pi \in S_p} (-1)^{\pi\circ\sigma} T^{\pi\circ\sigma} = \sum_{\tau \in S_p} (-1)^{\tau} T^{\tau} \ (S_p \text{ é grupo}).$$

Se $T$ é alternado, $Alt(T)$ é uma projeção, pois neste caso, obtém-se $p!$ somandos iguais a $T$ (a ordem de $S_p$ é $p!$).

O conjunto dos $p$-tensores alternados formam um subespaço vetorial $\Lambda^p(V^*)$ de $\mathfrak{T}^p(V^*)$.

O produto tensorial de tensores alternados pode não ser alternado.

No subespaço $\Lambda(V^*)$, podemos definir um produto denotado por $\wedge$ que chamamos **produto exterior** do seguinte modo: dados $T \in \Lambda^p(V^*)$ e $S \in \Lambda^q(V^*)$

$$T \wedge S = Alt(T \otimes S).$$

Note que $T \wedge S \in \Lambda^{p+q}(V^*)$.

A propriedade distributiva em relação à adição e multiplicação por escalares se verifica. De fato, dados $T \in \Lambda^p(V^*)$, $S \in \Lambda^q(V^*)$, $R \in \Lambda^t(V^*)$, e $a \in K$,

$$aT \wedge (S + R) = Alt(aT \otimes (S + R)).$$

Pela linearidade e distributividade do produto tensorial, juntamente com a linearidade do operador $Alt$:

$$\begin{aligned} Alt(aT \otimes (S + R)) &= Alt[a(T \otimes S) + a(T \otimes R)] = \\ &= aAlt(T \otimes S) + aAlt(T \otimes R) = \\ &= a(T \wedge S) + a(T \wedge R). \end{aligned}$$

O produto exterior também satisfaz a associatividade. Para prová-la, necessitamos do seguinte lema:

**Lema 2.1.** *Se* $Alt(T) = 0$ *então* $T \wedge S = S \wedge T = 0$, $\forall S$.

**Prova:** Sabemos que se $T \in \Lambda^p(V^*)$ e $S \in \Lambda^q(V^*)$ então $T \otimes S$ é um $p+q$-tensor. Seja $G$ o subgrupo de $S_{p+q}$ isomorfo a $S_p$ das permutações que fixam os índices $p+1, ..., p+q$. Logo temos uma correspondência entre $G$ e $S_{p+q}$ que leva $\pi \in G$ em $\pi' \in S_{p+q}$ onde $\pi'$ fixa $p+1, ..., p+q$, ou seja,

$$\pi(1, 2, .., p) \mapsto (\pi(1), ..., \pi(p), p+1, ..., p+q) = \pi'.$$

Essa correspondência nos leva a afirmar que $(-1)^{\pi} = (-1)^{\pi'}$ e $(T \otimes S)^{\pi} = T^{\pi'} \otimes S$:

$$(T \otimes S)^{\pi}(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}) = (-1)^{\pi} T(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}) \cdot S(v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}) =$$
$$= T^{\pi'} \otimes S,$$

de onde segue que

$$\sum_{\pi \in S_{p+q}} (-1)^{\pi} (T \otimes S)^{\pi} = [\sum_{\pi' \in G} (-1)^{\pi'} T^{\pi'}] \otimes S = Alt(T) \otimes S = 0.$$

Por outro lado, o subgrupo $G$ decompõe $S_{p+q}$ em uma união disjunta de classes laterais à direita:

$$G \circ \sigma = \{\pi \circ \sigma,\ \pi \in G\}$$

e assim, para cada classe lateral determinada por $\sigma$ em $S_{p+q}$

$$\sum_{\pi \in G} (-1)^{\pi \circ \sigma} (T \otimes S)^{\pi \circ \sigma} = (-1)^{\sigma} [\sum_{\pi \in G} (-1)^{\pi} (T \otimes S)^{\pi}]^{\sigma} = 0.$$

Como $T \wedge S = Alt(T \otimes S)$ é a soma desses somatórios sobre as classes laterais de $G$, conclui-se que $T \wedge S = 0$. Analogamente $S \wedge T = 0$. □

Tendo provado o Lema anterior, estamos em condições de provar a associatividade do produto exterior.

**Teorema 2.4.** *O produto exterior é associativo, isto é,*

$$(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R)$$

*o que justifica a notação $T \wedge S \wedge R$.*

**Prova:** Pela linearidade do operador $Alt$

$$\begin{aligned} (T \wedge S) \wedge R - Alt(T \otimes S \otimes R) &= Alt[(T \wedge S) \otimes R] - Alt(T \otimes S \otimes R) \\ &= Alt[(T \wedge S) \otimes R - T \otimes S \otimes R] \\ &= Alt[(T \wedge S - T \otimes S) \otimes R]. \end{aligned}$$

Lembrando que $T \wedge S$ é alternado, $Alt(T \wedge S) = T \wedge S$ e então

$$\begin{aligned} Alt[(T \wedge S) - (T \otimes S)] &= Alt(T \wedge S) - Alt(T \otimes S) \\ &= T \wedge S - Alt(T \otimes S) \\ &= T \wedge S - T \wedge S \\ &= 0 \end{aligned}$$

Do lema anterior, segue que

$$Alt\{[(T \wedge S) - T \otimes S] \otimes R\} = (T \wedge S - T \otimes S) \wedge R = 0.$$

e

$$(T \wedge S) \wedge R = Alt(T \otimes S \otimes R).$$

Analogamente se mostra que $T \wedge (S \wedge R) = Alt(T \otimes S \otimes R)$ de onde se conclui que

$$(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R).$$

Conclusão: $\Lambda(V)$ torna-se , com o produto exterior, uma álgebra. □

O próximo passo é encontrar uma base para $\Lambda^p(V^*)$.

Se $T$ é um $p$-tensor, então podemos escrevê-lo como combinação linear da base $\{\phi_{i_1} \otimes ... \otimes \phi_{i_p} : 1 \leq i_1, ..., i_p \leq k\}$

$$T = \sum_{i=1}^{k} t_{i_1,...,i_p} \phi_{i_1} \otimes ... \otimes \phi_{i_p}$$

onde $\{\phi_1, ..., \phi_k\}$ é uma base para $V^*$.

Se $T$ é um $p-$tensor alternado, então pela linearidade do operador $Alt$

$$T = Alt(T) = \sum t_{i_1,...,i_p} Alt(\phi_{i_1} \otimes ... \otimes \phi_{i_p}) = \sum t_{i_1,...,i_p} \phi_{i_1} \wedge ... \wedge \phi_{i_p},$$

que nos mostra que $\{\phi_{i_1} \wedge ... \wedge \phi_{i_p}, 1 \leq i \leq k\}$ gera $\Lambda^p(V^*)$. No entanto, vamos mostrar que eles não são independentes. Por exemplo, $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$.

Denotaremos os tensores alternados $\phi_{i_1} \wedge ... \wedge \phi_{i_p}$ por $\phi_I$, onde $I = \{i_1, ..., i_p\}$.

**Proposição 2.8.** *Sejam $\phi$, $\psi \in \Lambda^p(V^*)$, então*

*a)* $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$;

*b)* $\phi \wedge \phi = 0$.

**Prova:** a) $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$

Supondo $\phi$ e $\psi$ funcionais lineares em $V$, então $\phi, \psi \in \Lambda^1(V^*)$. Neste caso, o operador $Alt$ tem uma forma muito simples:

$$\phi \wedge \psi = Alt(\phi \otimes \psi) = \frac{1}{2}[(-1)^{\sigma_0} \phi \otimes \psi + (-1)^{\sigma_2} \psi \otimes \phi] = \frac{1}{2}[\phi \otimes \psi - \psi \otimes \phi]$$

onde $\sigma_0$ é a identidade e $\sigma_1$ é a transposição $(1,2)$. Assim,

$$\phi \wedge \psi = \frac{1}{2}[\phi \otimes \psi - \psi \otimes \phi].$$

Analogamente, $\psi \wedge \phi = \frac{1}{2}[\psi \otimes \phi - \phi \otimes \psi]$ de onde se conclui que:

$$\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi.$$

b) $\phi \wedge \phi = 0$

Segue do item anterior.

$\square$

Da anti-comutatividade do produto exterior, podemos observar as seguintes relações sobre o conjunto de geradores $\{\phi_I\}$.

(1) se dois índices $I$ e $J$ diferem unicamente em suas ordens, aplicações iteradas da anti-comutatividade nos mostram que $\phi_I = \pm\phi_J$;

(2) se existem índices iguais em $I$ então $\phi_I = 0$.

Com isso, podemos eliminar os casos acima no conjunto gerador, reconhecendo somente os $\phi_I's$ para os quais a seqüência de índices é estritamente crescente: $1 \leq i_1 \leq ... \leq i_p \leq k$.

Agora podemos concluir o seguinte teorema:

**Teorema 2.5.** *Se $\{\phi_1, ..., \phi_k\}$ é uma base dual para $V^*$, então $\{\phi_I = \phi_{i_1} \wedge ... \wedge \phi_{i_p},\ 1 \leq i_1 \leq ... \leq i_p \leq k\}$ é uma base para $\Lambda^p(V^*)$.*

**Prova:** O conjunto $\{\phi_I = \phi_{i_1} \wedge ... \wedge \phi_{i_p},\ 1 \leq i_1, ..., i_p \leq k\}$ gera $\Lambda^p(V^*)$ conforme mostramos anteriormente. Resta verificar que os $\phi_I's$ são independentes. Para qualquer seqüência $I = (i_1, ..., i_p)$, seja $v_I = (v_{i_1}, ..., v_{i_p})$ base de $V$ e $T \in \Lambda^p(V^*)$. Então

$$0 = \sum t_{i_1,...,i_p} \phi_I(v_J) = \sum t_{i_1,...,i_p} Alt(\phi_{i_1} \otimes ... \otimes \phi_{i_p})(v_J) = t_{i_1,...,i_p}.$$

$\square$

Conseqüentemente, $dim(\Lambda^p(V^*)) = \binom{k}{p}_I = \frac{k!}{p!(k-p)!}$.

**Corolário 2.1.** *O produto exterior satisfaz a seguinte relação de anti-comutatividade:*

$$T \wedge S = (-1)^{pq} S \wedge T,$$

*sempre que* $T \in \Lambda^p(V^*)$ *e* $S \in \Lambda^q(V^*)$.

**Prova:** Supondo que a seqüência de índices $I$ tem comprimento $p$ e $J$ tem comprimento $q$, dados $\phi_I \in \Lambda^p(V^*)$ e $\phi_J \in \Lambda^q(V^*)$, temos pela anticomutatividade do produto exterior

$$\begin{aligned}
\phi_I \wedge \phi_J &= Alt(\phi_I \otimes \phi_J) \\
&= Alt(-1)^{pq}(\phi_{j_1} \otimes ... \otimes \phi_{j_q} \otimes \phi_{i_1} \otimes ... \otimes \phi_{i_p}) \\
&= (-1)^{pq} Alt(\phi_{j_1} \otimes ... \otimes \phi_{j_q} \otimes \phi_{i_1} \otimes ... \otimes \phi_{i_p}) \\
&= (-1)^{pq}(\phi_J \wedge \phi_I).
\end{aligned}$$

Justifica-se o produto $pq$ na potência de $(-1)$ pelo fato que cada $\phi_{j_r}$ é transposto $p$ vezes. Como são $q$ elementos $\phi_{j_r}$, ocorrem $pq$ transposições. □

Como $x \wedge x = 0$, $\forall x \in \Lambda(V^*)$, se $p > k$, $k = dim\, V$, então pelo menos algum elemento se repete o que acarreta em$\Lambda^p(V^*) = 0$. Segue que a seqüência de espaços vetoriais $\Lambda^1(V^*)$, $\Lambda^2(V^*)$,... termina em $\Lambda^k(V^*)$. Definimos $\Lambda^0(V^*) = K$ interpretando-o como as funções constantes em $V$, e o produto exterior de um elemento do corpo $K$ com qualquer tensor em $\Lambda^p(V^*)$ como a multiplicação por escalar usual. Assim, o produto exterior $\wedge$ produz uma álgebra não comutativa

$$\Lambda(V) = \Lambda^0(V^*) \oplus \Lambda^1(V^*) \oplus ... \oplus \Lambda^k(V^*)$$

a que chamamos **Álgebra Exterior de** $V^*$, onde o elemento identidade $1 \in \Lambda^0(V^*)$. Podemos observar pela própria definição, que a álgebra exterior é graduada.

### 2.7.3 A Álgebra Exterior como uma álgebra fatorial

A Álgebra Exterior de $V$ pode se definida de maneira mais geral como

$$\Lambda(V) = T(V)/I$$

onde $T(V)$ é a álgebra tensorial de $V$ e $I$ é o ideal em $T(V)$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes x$, $x \in V$. Pela definição, os elementos de $V$ são de grau um, ou seja, pertencem a $V^{(1)}$, então $I \cap V = \{0\}$.

Dado o homomorfismo canônico $j : T(V) \to T(V)/I$, a restrição de $j$ a $V$ é injetiva. Com isto, podemos identificar $V$ com sua imagem $j(V)$ e vê-lo como um subconjunto de $\Lambda(V) = T(V)/I$. Como $V$ gera $T(V)$ como álgebra, $V$ gera $\Lambda(V)$. Observe que através do homomorfismo canônico, todos os elementos da forma $x \otimes x$ são levados na classe $\bar{0}$.

*Afirmação 3.* $\Lambda(V) = T(V)/I$ é uma álgebra graduada.

**Prova:** Como o ideal $I$ é gerado por elementos homogêneos $x \otimes x$, $I$ é homogêneo no sentido que tomando $I^{(i)} = I \cap V^{(i)}$, $I = \bigoplus I^{(i)}$. Então $\Lambda(V)$ é graduada pelos subconjuntos $E^{(i)} = (V^{(i)} + I)/I$, isto é, $\Lambda(V) = \bigoplus E^{(i)}$ e $E^{(i)} \cdot E^{(j)} \subset E^{(i+j)}$. □

**Proposição 2.9.** *(Propriedade Universal da Álgebra Exterior). Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre um corpo $K$ e*

$$f : V \to \mathcal{A}$$

*um homomorfismo tal que $f(x) \cdot f(x) = 0$, $\forall x \in V$. Então existe um único homomorfismo*

$$\varphi : \Lambda(V) \to \mathcal{A}$$

*que estende $f$.*

**Prova:** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre $K$ e o homomorfismo $f : V \to \mathcal{A}$ tal que $f(x)f(x) = 0, \forall x \in V$. A propriedade universal de $T(V)$ nos fornece a aplicação $f^* : T(V) \to \mathcal{A}$ estendendo a função $f$ de $V$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & \mathcal{A} \\
T(V) \arrow[ur, "f^*"'] &
\end{tikzcd}$$

*Diagrama* 1.4

Segue que $f^*(x \otimes x) = f(x)f(x)$, $x \in V$. Uma vez que $f(x)^2 = 0$, então $f^*(x \otimes x) = 0$. Conseqüentemente, $I \subset ker(f^*)$. Portanto, $f^*$ descende a um homomorfismo

$$\varphi : T(V)/I = \Lambda(V) \to \mathcal{A}$$

tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "j"'] & \mathcal{A} \\
T(V)/I \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

*Diagrama* 1.5

Como $\Lambda(V)$ é gerado por $V$, $\varphi$ é único. $\square$

A proposição acima nos garante que dado um espaço vetorial sobre um corpo $K$, a álgebra exterior definida como fatorial é a mesma construída como imagem do operador alternado.

# Capítulo 3

# As Álgebras de Clifford

## 3.1 Introdução

As Álgebras de Clifford foram introduzidas inicialmente em 1878 por *Willian Kingdom Clifford* (1845 – 1879) em seu artigo *Aplicação da Álgebra Grassmaniana* publicado no primeiro volume do *American Journal of Mathematics.*

A primeira aplicação das álgebras de Clifford foi dada por *R. Lipschitz* em 1884, mas foi *Claude Chevalley* quem generalizou a teoria das Álgebras de Clifford para espaços vetoriais de dimensão finita, munidos de formas quadráticas $Q$ definidas sobre corpos arbitrários, considerando até mesmo os corpos de característica dois([5]).

Neste capítulo, será definida a Álgebra de Clifford, com sua caracterização universal e dimensão, bem como sua classificação seguindo processos indutivos.

A Álgebra de Clifford de um espaço vetorial $V$ sobre um corpo $K$ é uma álgebra associativa que depende de uma forma quadrática em $V$, gerada como álgebra por 1 e $V$, contendo cópias isomorfas de $V$ e do corpo $K$.

### 3.1.1 Definição

Dado um espaço vetorial $V$ sobre um corpo $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimensão finita, considere uma forma bilinear simétrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$$

onde $u, v \in V$, e a *forma quadrática* $Q : V \to K$ associada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Lembramos que dados $u, v \in V$, $Q(u) = \langle u, u \rangle$ e a relação abaixo se verifica:

$$2\langle u, v \rangle = Q(u + v) - Q(u) - Q(v). \tag{3.1}$$

Dado um par $(V, Q)$, a Álgebra de Clifford denotada por $Cl(V, Q)$ é uma $K$-álgebra contendo $K \oplus V$, gerada pela relação

$$v^2 = v * v = -Q(v) \cdot 1_K \in K \tag{3.2}$$

definida para todo $v \in V$. A expressão acima é condição suficiente para obter o produto $*$ no espaço vetorial $K \oplus V$ com base $\{1, e_1, e_2, ..., e_n\}$ onde $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}$ é base de $V$. Este produto, no entanto, nem sempre é fechado.

Note que para $v, w \in V$, tem-se

$$\begin{aligned}(v+w)^2 &= -Q(v+w)1 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow v^2 + v \cdot w + w \cdot v + w^2 = -Q(v)1 - 2\langle v, w\rangle 1 - Q(w)1,\end{aligned}$$

ou seja,

$$v \cdot w + w \cdot v = -2\langle v, w\rangle 1, \qquad \forall v, w \in V. \tag{3.3}$$

*Observações:*

(1) O termo *Clifford* veio em substituição ao termo *geométrico*[4].

(2) O sinal negativo em (3.2) é convencional.

A construção da Álgebra de Clifford para um espaço vetorial $V$ sobre um corpo $K$ parte de cópias isomorfas de $V$ e $K$. Portanto, inicia-se com $K \oplus V$.

### 3.1.2 Exemplos

**1.** $V = \mathbb{R}$, e $Q(x) = x^2$

Neste caso, $K = \mathbb{R}$ e $V = \mathbb{R}$. Logo, iniciamos com $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

O espaço $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ contém cópia do corpo $\mathbb{R}$ e de $V = \mathbb{R}$ identificando-os com os elementos $(x, 0)$ e $(0, v)$ $\forall v \in V$. O elemento neutro $1$ é identificado com o par $(1, 0)$ e o elemento gerador de $V$ com $e_1 = (0, 1)$.

Considerando $\{1, e_1\}$ base de $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, devemos obter as seguintes condições:

(1) $1 * 1 = 1$

(2) $1 * e_1 = e_1 * 1 = e_1$

(3) $(e_1) * (e_1) = (e_1)^2 = -1$

Assim, para quaisquer elementos $u = (x_1 \cdot 1) + (y_1 \cdot e_1)$ e $v = (x_2 \cdot 1) + (y_2 \cdot e_1)$ em $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, devemos obter

$$
\begin{aligned}
(x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot e_1) * (x_2 \cdot 1 + y_2 \cdot e_1) &= \\
&= x_1 x_2 (1) + x_1 y_2 (e_1) + y_1 x_2 (e_1) + y_1 y_2 (e_1)^2 = \\
&= (x_1 x_2 - y_1 y_2) \cdot 1 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) \cdot e_1
\end{aligned}
$$

Observe que este produto é exatamente a multiplicação em $\mathbb{C}$.
*Conclusão:* $Cl(\mathbb{R}, x^2) = \mathbb{C}$.

**2.** $V = \mathbb{R}$, $Q(x) = -x^2$

De forma análoga ao exemplo anterior, adicionamos o fator $\mathbb{R}$, obtendo $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ com as seguintes identificações:

$$1 \equiv (1,0), \quad \text{e} \quad e \equiv (0,1).$$

obtendo as seguintes relações:

(i) $1^2 = 1$;

(ii) $e^2 = 1$.

Supondo $u, v \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $u = x \cdot 1 + y \cdot e$ e $v = x' \cdot 1 + y' \cdot e$, $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ obtém-se o produto

$$
\begin{aligned}
u \cdot v &= xx' + xy' \cdot e + yx' \cdot e + yy' = \\
&= (xx' + yy') \cdot 1 + (xy' + yx') \cdot e
\end{aligned}
$$

que difere do produto em $\mathbb{C}$. Neste instante, estamos definindo um novo produto em $\mathbb{R}$.

Podemos obter uma representação matricial para essa álgebra. Seja a aplicação

$$
\begin{aligned}
T_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\
(x, y) &\mapsto T_{(a,b)}
\end{aligned}
$$

e considere

$$
\begin{aligned}
\rho : (\mathbb{R}^2, \cdot) &\to (M_2(\mathbb{R}), \cdot) \\
(a, b) &\mapsto T_{(a,b)}
\end{aligned}
$$

onde o produto em $\mathbb{R}^2$ é definido pela expressão acima.

**Afirmação:** $\rho$ é uma representação de álgebra.

Assim temos a identificação

$$u = x1 + ye \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

onde os geradores são:

$$1 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad e \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

Portanto $Cl(\mathbb{R}, -x^2) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

**3.** $V = \mathbb{R}^2$, $Q((x,y)) = x^2 + y^2$

Adicionando o corpo $\mathbb{R}$ como primeiro fator obtém-se $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^3$, onde devemos construir um produto que satisfaça as condições

(1) $1 * 1 = 1$

(2) $e_1 * e_1 = (e_1)^2 = -1 = -Q(e_1)$

(3) $e_2 * e_2 = (e_2)^2 = -1 = -Q(e_2)$

(4) $e_i * 1 = 1 * e_i = e_i$ onde $i = 1, 2$

(5) $e_1 * e_2 = -(e_2 * e_1)$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica em $\mathbb{R}^3$.

Neste caso, $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ com o produto $(*)$ não é fechado. De fato, supondo $e_1 * e_2 \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$, então existem $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$e_1 * e_2 = \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2.$$

Multiplicando a expressão acima por $e_1$ obtém-se:

$$-e_2 = \lambda_0 \cdot e_1 - \lambda_1 + \lambda_2 (e_1 * e_2)$$

ou equivalentemente

$$e_1 * e_2 = \frac{-1}{\lambda_2} e_2 - \frac{\lambda_0}{\lambda_2} e_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

de onde se conclui que $\lambda_2 = \frac{-1}{\lambda_2}$, ou seja, $(\lambda_2)^2 = -1$, que não ocorre $(\lambda_2 \in \mathbb{R})$.

Logo, $e_1 * e_2$ não pode ser definido como elemento de $\mathbb{R}^3$. Então adicionando um novo fator $\mathbb{R}$, obtém-se $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^4$ onde a base é acrescida do elemento $e_3 = e_1 * e_2$, isto é,

$$(1,0,0,0) = 1, (0,1,0,0) = e_1, (0,0,1,0) = e_2, (0,0,0,1) = e_3 = e_1 * e_2.$$

Com isso, todas as relações acima são satisfeitas:

1) $e_1 * e_2 = -e_2 * e_1$

**Prova.** De fato, como no fator $\mathbb{R}^2$ a forma quadrática é positiva,

$$Q(xe_1 + ye_2) = x^2 + y^2,$$

então

$$x^2 + y^2 = Q(xe_1 + ye_2) = x^2 + y^2 + xy(e_1 * e_2 + e_2 * e_1).$$

Como $e_1 * e_2 + e_2 * e_1 = 0$, segue que $e_1 * e_2 = -e_2 * e_1$. □

(2) $e_3 * e_3 = (e_3)^2 = -1$

**Prova.** $(e_3)^2 = e_1 * e_2 * e_1 * e_2 = -e_1 * e_2 * e_2 * e_1 = e_1 * e_1 = -1.$ □

Conclui-se então que $Cl(\mathbb{R}^2, x^2 + y^2)$ é isomorfa a $\mathbb{R}^4$ como espaço vetorial cujos elementos da base satisfazem as relações:

(1) $1^2 = 1$

(2) $(e_i)^2 = -1$, $1 \leq i \leq 3$

(3) $e_i * e_j = -e_j * e_1$, $1 \leq i, j \leq 3$

Observando as relações acima com as seguintes identificações:

$$e_1 * e_2 = i, e_1 = j, e_2 = ij = k,$$

temos que o produto entre os elementos de $\mathbb{R}^4$

$$x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \qquad \text{e} \qquad y = y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$$

é dado pela fórmula:

$$\begin{aligned} x \cdot y = (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) \cdot 1 + (x_0y_1 + y_0x_1 + x_3y_2 - x_2y_3)e_1 + \\ + (x_0y_2 + x_2y_0 + x_1y_3 - x_3y_1)e_2 + \\ + (x_0y_3 + x_3y_0 + x_2y_1 - x_1y_2)e_3, \end{aligned} \tag{3.6}$$

que nos fornece exatamente a multiplicação quaterniônica. Então $Cl(\mathbb{R}^2, x^2 + y^2)$ é isomorfa como álgebra à Álgebra dos Quatérnios.

**4.** $V = \mathbb{R}^2$, $Q((x,y)) = -x^2 - y^2$

A Álgebra de Clifford $Cl(\mathbb{R}^2, -x^2 - y^2)$, é obtida de modo similar ao caso $Cl(\mathbb{R}^2, x^2 + y^2)$. Vamos supor que $Cl(\mathbb{R}^2, -x^2 - y^2)$ seja gerada pela base $\{1, e_1, e_2\}$, onde

a) $1^2 = 1 * 1 = -Q(1) = 1$;

b) ${e_1}^2 = 1$;

c) ${e_2}^2 = 1$;

d) $e_1 * e_2 = -e_2 * e_1$.

De modo análogo ao exemplo (3), o elemento $e_1 * e_2$ não pertence a $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$, e então adicionamos outro fator $\mathbb{R}$, obtendo

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^4.$$

Pelas identificações

$$\begin{aligned} 1 \equiv (1,0,0,0),\ e_1 \equiv (0,1,0,0), \\ e_2 \equiv (0,0,1,0),\ e_3 \equiv (0,0,0,1) \end{aligned}$$

tem-se:

a) $e_1 * e_2 = -e_2 * e_1$, pois

$$\begin{aligned} Q(xe_1 + ye_2) &= -(xe_1 + ye_2)^2 = \\ &= -x^2 - y^2 - xy(e_1 * e_2 + e_2e_1) \end{aligned}$$

que implica em $e_1 * e_2 + e_2e_1 = 0$. Logo,

$$e_1 * e_2 = -e_1 * e_2.$$

b) $e_3 * e_3 = -1$:

$$e_3 * e_3 = e_1 * e_2 * e_1 * e_2 = -e_1 * e_2 * e_2 * e_1 = -{e_1}^2 * {e_2}^2 = -1$$

Sejam $u = x + ye_1 + ze_2 + we_3$, e $v = x' + y'e_1 + z'e_2 + w'e_3$. Então, pelas condições acima,

$$\begin{aligned} u * v = xx' + yy' + zz' - ww' + (xy' + yx' + wz' - zw')e_1 + \\ + (xz' + zx' - wy' + yw')e_2 + (wx' + xw' + zy' - yz')e_3 \end{aligned}$$

De forma análoga ao exemplo 2, temos uma representação matricial para $Cl(\mathbb{R}^2, -x^2 - y^2)$ da qual decorre:

$$\begin{aligned} 1 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad &\text{e} \quad , e_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ e_2 \equiv = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad &\text{e} \quad e_1 e_2 = e_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A representação matricial genérica de $Cl(\mathbb{R}^2, -x^2 - y^2)$ é dada por

$$xI + ye_1 + ze_2 + we = \begin{pmatrix} x + z & y - w \\ y + w & x - z \end{pmatrix}$$

Como qualquer matriz real pode ser colocada nessa forma, concluímos que $Cl(\mathbb{R}^2, -x^2 - y^2) \cong M_2(\mathbb{R})$.

## 3.2 A Álgebra de Clifford como Álgebra Fatorial

A construção das Álgebras de Clifford como álgebras fatoriais é baseada no caso mais geral de multiplicação associativa que é o produto tensorial. Ao tomarmos o ideal $I$ da Álgebra tensorial $T(V)$ gerado pelos elementos da forma $v^2 + Q(v)1 = 0$, pelo quociente de $T(V)$ por $I$, todos os elementos do ideal passarão a ser $\bar{0}$. Esta é a idéia geral da construção da Álgebra de Clifford como Álgebra fatorial.

Seja $V$ um espaço vetorial sobre um corpo $K$, com produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e $Q : V \to K$ a forma quadrática associada. Considere a álgebra tensorial de $V$,

$$T(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{(i)}, \tag{3.7}$$

que é gerada por $V$.

**Definição 3.1.** Seja $I_Q$ o ideal de $T(V)$ gerado pelos elementos da forma

$$v \otimes v + Q(v)1, \ v \in V. \tag{3.8}$$

Então a Álgebra de Clifford $Cl(V, Q)$ é o quociente

$$Cl(V, q) = T(V)/I_Q \tag{3.9}$$

Segue da definição que a Álgebra de Clifford contém cópias isomorfas do corpo $K$ e do espaço vetorial $V$.

Através da próxima proposição, as Álgebras de Clifford são caracterizadas universalmente.

**Proposição 3.1.** *Seja $\mathcal{A}$ álgebra com unidade $f : V \to \mathcal{A}$ uma aplicação linear com tal que*

$$f(x) \cdot f(x) = -Q(x)1 \tag{3.10}$$

*para todo $x \in V$. Então $f$ estende-se unicamente a um homomorfismo de álgebra $\tilde{f} : Cl(V, Q) \to \mathcal{A}$ tal que $\tilde{f} \circ \imath = f$, $\imath$ injeção de $V$ em $T(V)$.*

*Prova.* Pela propriedade universal da Álgebra Tensorial, a aplicação linear $f : V \to \mathcal{A}$ estende-se a um único homomorfismo de álgebra

$$f_{\otimes} : T(V) \to \mathcal{A},$$

tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & \mathcal{A} \\ T(V) \arrow[ur, "f_\otimes"'] & \end{tikzcd}$$

*Diagrama* 3.1

Assim, dados $u, v \in V$, então $f_\otimes(u \otimes v) = f(u) \cdot f(v)$. Como por hipótese, $f(x) \cdot f(x) + Q(x)1 = 0$, então

$$\begin{aligned} f_\otimes(x \otimes x + Q(x)1) &= f_\otimes(x \otimes x) + f_\otimes(Q(x)1) = \\ &= f(x) \cdot f(x) + Q(x)1 = 0 \end{aligned}$$

Logo $(x \otimes x) + Q(x)1 \in ker(f_\otimes)$, isto é, $I_Q \subset ker(f_\otimes)$. Pelo teorema (2.2), existe um homomorfismo

$$\tilde{f} : T(V)/I_Q \to \mathcal{A}$$

tal que $\tilde{f} \circ j = f_\otimes$, onde $j : T(V) \to T(V)/I_Q$ é a projeção canônica. Como $V$ gera $T(V)/I_Q$, $f_\otimes$ descende a $Cl(V, Q)$.

$$\begin{tikzcd} T(V) \arrow[r, "f_\otimes"] \arrow[d, "j"'] & \mathcal{A} \\ T(V)/I_Q \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

*Diagrama* 3.2

□

De agora em diante faremos a abreviação $Cl(V)$ para $Cl(V, Q)$ sempre que não houver dúvida de quem é a forma quadrática $Q$.

Como primeira aplicação da proposição 3.1, vamos mostrar a $\mathbb{Z}_2$-graduação de $Cl$. Considere o automorfismo

$$\alpha : Cl(V) \to Cl(V)$$

que é a extensão da aplicação $\alpha(v) = -v$ em $V$. Já que $\alpha^2 = Id$, existe uma decomposição

$$Cl(V) = Cl^0(V) \oplus Cl^1(V) \tag{3.11}$$

onde $Cl^i(V) = \{v \in Cl(V) \mid \alpha(v) = (-1)^i v\}$. Como $\alpha(a_1 \cdot a_2) = \alpha(a_1) \cdot \alpha(a_2)$ nós temos

$$Cl^i(V) \cdot Cl^j(V) \subseteq Cl^{i+j}(V) \tag{3.12}$$

onde os índices são tomados módulo 2, ou seja, $Cl(V)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Escolhendo-se uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ para $V$, podemos escrever $Cl(V)$ em termos de geradores e relações. De fato, $Cl(V)$ é a álgebra sobre $\mathbb{R}$ gerada por $\{e_1, ..., e_n\}$ sujeita às relações

- $e_i^2 = -Q(e_i)1$;
- $e_i e_j = -e_j e_i$ para $i \neq j$

Em particular, segue que todo elemento de $Cl(V)$ pode ser escrito unicamente como soma de monômios da forma

$$e_{i_1} \cdots e_{i_r}, \ 1 \leq i \leq n.$$

Logo, a dimensão de $Cl(V)$ como espaço vetorial é $2^n$, onde $n$ é a dimensão de $V$ sobre o corpo $K$.

## 3.3 Classificação das Álgebras de Clifford

Daqui em diante $Cl_{r,s}$ denotará $Cl(\mathbb{R}^{r+s}, Q)$ onde

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2$$

Nos casos especiais $r = 0$ ou $s = 0$ adotaremos a notação : $Cl_r \equiv Cl_{r,0}$ e $Cl_s^* \equiv Cl_{0,s}$.

Através de alguns resultados, podemos construir uma tabela de Álgebras de Clifford de qualquer ordem, seguindo um processo indutivo.

Conforme os exemplos na seção anterior, temos que:

a) $Cl_1 \cong \mathbb{C}$;

b) $Cl_1{}^* \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$;

c) $Cl_2 \cong \mathbb{H}$;

d) $Cl_2{}^* \cong M_2(\mathbb{R})$.

**Proposição 3.2.** *Existem isomorfismos*

$$Cl_{n+2}^* \cong Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} Cl_2^* \tag{3.13}$$
$$Cl_{n+2} \cong Cl_n^* \otimes_{\mathbb{R}} Cl_2. \tag{3.14}$$

*Prova.* Seja $\{e_1, e_2, \cdots, e_{n+2}\}$ uma base ortonormal para $\mathbb{R}^{n+2}$ com o produto interno euclidiano. Sejam $e_1', \cdots, e_n'$ geradores para $Cl_n$ e $e_1'', e_2''$ os geradores usuais de $Cl_2^*$. Defina uma aplicação $f : \mathbb{R}_*{}^{n+2} \to Cl_n \otimes Cl_2^*$ onde $\mathbb{R}_*{}^{n+2}$ indica a forma quadrática em $\mathbb{R}^{n+2}$, dada por

$$f(e_i) = \begin{cases} e_i' \otimes e_1'' e_2'', & \text{se } 1 \le i \le n; \\ 1 \otimes e_{i-n}'', & \text{se } i = n+1 \text{ ou } n+2; \end{cases}$$

e estenda linearmente. Agora note que para $1 \le i, j \le n$ , nós temos

$$\begin{aligned} f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) &= (e_i' \otimes e_1''e_2'')(e_j' \otimes e_1''e_2'') \\ &\quad + (e_j' \otimes e_1''e_2'')(e_i' \otimes e_1''e_2'') \\ &= e_i'e_j' \otimes (-1) + e_j'e_i' \otimes (-1) \\ &= (e_i'e_j' + e_j'e_i') \otimes (-1) \\ &= 2\delta_{ij} 1 \otimes 1. \end{aligned}$$

E se $n+1 \leq \alpha, \beta \leq n+2$ temos

$$\begin{aligned} f(e_\alpha)f(e_\beta) + f(e_\beta)f(e_\alpha) &= (1 \otimes e''_{\alpha-n})(1 \otimes e''_{\beta-n}) \\ &+ (1 \otimes e''_{\beta-n})(1 \otimes e''_{\alpha-n}) \\ &= 1 \otimes (e''_{\alpha-n}e''_{\beta-n} + e''_{\beta-n}e''_{\alpha-n}) = 2\delta_{\alpha\beta} 1 \otimes 1. \end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned} f(e_i)f(e_\alpha) + f(e_\alpha)f(e_i) &= (e'_i \otimes e''_1 e''_2)(1 \otimes e''_{\alpha-n}) \\ &+ (1 \otimes e''_{\alpha-n})(e'_i \otimes e''_1 e''_2) \\ &= e'_i \otimes (e''_1 e''_2 e''_{\alpha-n} + e''_{\alpha-n} e''_1 e''_2) \\ &= e'_i \otimes (e''_1 e''_2 e''_{\alpha-n} - e''_1 e''_2 e''_{\alpha-n}) = 0 \end{aligned}$$

já que $e''_{\alpha-n} = e_1$ ou $e_2$.

Logo

$$\begin{aligned} f(x)f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^{n+2} x_i e_i\right) f\left(\sum_{j=1}^{n+2} x_j e_j\right) \\ &= \{\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) + \sum_{i=n+1}^{n+2} x_i f(e_i)\}\{\sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) + \sum_{j=n+1}^{n+2} x_j f(e_j)\} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j f(e_i)f(e_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{n+2} x_i x_j f(e_i)f(e_j) \\ &+ \sum_{i=n+1}^{n+2}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j f(e_i)f(e_j) + \sum_{i,j=n+1}^{n+2} x_i x_j f(e_i)f(e_j) \\ &= \sum_{i<j} x_i x_j (f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i)) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{n+2} x_i x_j \underbrace{(f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i))}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(e_i)^2 \\ &= \sum_{i<j} x_i x_j (f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i)) + \sum_{i=1}^{n+2} x_i^2 f(e_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 1 \otimes 1 + \sum_{i=n+1}^{n+2} x_i^2 1 \otimes 1 = \left(\sum_{i=1}^{n+2} x_i^2\right) 1 \otimes 1. \end{aligned}$$

ou seja, $f(x)f(x) = -q(x) 1 \otimes 1, \forall x \in \mathbb{R}^{n+2}$. Portanto, pela propriedade universal, $f$ estende-se a um homomorfismo de álgebra $\tilde{f} : Cl^*_{n+2} \to Cl_n \otimes Cl^*_2$. Já que $\tilde{f}$ mapeia sobrejetivamente sobre um conjunto qualquer de geradores para $Cl_n \otimes Cl_2^*$, ele deve ser sobrejetivo. Como $dim(Cl_{n+2}^*) = dim(Cl_n \otimes Cl_2^*)$, concluímos que $\tilde{f}$ deve ser um isomorfismo. Isto prova (3.13). A prova de (3.14) é totalmente análoga. De fato, podemos inclusive tomar a mesma aplicação $f$ só que com $e_i' \in Cl_n^*$, $1 \le i \le n$, e $e_1'', e_2'' \in Cl_2$. □

**Proposição 3.3.** *Existem isomorfismos de álgebra*

$$M_n(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} M_m(\mathbb{R}) \cong M_{mn}(\mathbb{R}) \qquad \forall m, n \tag{3.15}$$
$$M_n(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cong M_n(\mathbb{K}), \qquad \textit{para } \mathbb{K} = \mathbb{C} \textit{ ou } \mathbb{H} \textit{ e } \forall n \tag{3.16}$$
$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \tag{3.17}$$
$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong M_2(\mathbb{C}) \tag{3.18}$$
$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong M_4(\mathbb{R}) \tag{3.19}$$

*Prova.* Sejam $\{e_{ij}\}_{1 \le i,j \le n}$, $\{\tilde{e}_{ij}\}_{1 \le i,j \le m}$ e $\{E_{ij}\}_{1 \le i,j \le mn}$ conjuntos de matrizes que têm todas as entradas nulas com exceção da $i, j$-ésima entrada que vale 1. Elas formam bases (de espaço vetorial) de $M_n(\mathbb{R})$, $M_m(\mathbb{R})$ e $M_{mn}(\mathbb{R})$, respectivamente.

Considere a aplicação linear que age do seguinte modo nos elementos da base de $M_n(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} M_m(\mathbb{R})$:

$$e_{ij} \otimes \tilde{e}_{kl} \to E_{(k-1)n+i,(l-1)n+j}$$

(é claro que $\{e_{ij} \otimes \tilde{e}_{kl}\}_{1 \le i,j \le n \; 1 \le k,l \le m}$ é uma base de $M_n(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} M_m(\mathbb{R})$).

Só precisamos mostrar que ela é injetiva para ver que é uma bijeção. Assim, se

$$E_{(k-1)n+i,(l-1)n+j} = E'_{(k'-1)n+i',(l'-1)n+j'}$$

então

$$|k - k'|n = |i - i'| \tag{$*$}$$
$$|l - l'|n = |j - j'| \tag{$**$}$$

Suponha que $k \neq k'$. Então por $(*)$ temos que $|i - i'| \ge n$. Entretanto, já que $1 \le i, i' \le n$, nós devemos ter $|i - i'| \le n - 1$, e portanto é absurdo supor que $k \neq k'$. Mas se $k = k'$, obrigatoriamente por $(*)$, $i = i'$ também. Da mesma forma conclui-se que $l = l'$ e $j = j'$. Logo nossa aplicação é bijetiva.

Resta verificar que a aplicação é um homomorfismo de álgebra. Esta verificação pode ser feita apenas nos elementos da base:

$$\begin{aligned}
(e_{ij} \otimes \tilde{e}_{kl})(e_{i'j'} \otimes \tilde{e}_{k'l'}) &= e_{ij}e_{i'j'} \otimes \tilde{e}_{kl}\tilde{e}_{k'l'} = \delta_{ji'}e_{ij'} \otimes \delta_{lk'}\tilde{e}_{kl'} \\
&= \delta_{ji'}\delta_{lk'}e_{ij'} \otimes \tilde{e}_{kl'} \\
&\longmapsto \delta_{ji'}\delta_{lk'}E_{(k-1)n+i,(l'-1)n+j'} \\
&= \delta_{(l-1)n+j,(k'-1)n+i'}E_{(k-1)n+i,(l'-1)n+j'} \\
&= E_{(k-1)n+i,(l-1)n+j}E_{(k'-1)n+i',(l'-1)n+j'}
\end{aligned}$$

onde foi usado o fato $e_{ij}e_{i'j'} = \delta_{i'j}e_{ij'}$ (e analogamente para $\tilde{e}_{ij}$ e $E_{ij}$). Isto é verdade porque

$$(e_{ij}e_{i'j'})_{kl} = \sum_t (e_{ij})_{kt}(e_{i'j'})_{tl} = \sum_t \delta_{ik}\delta_{jt}\delta_{ti'}\delta_{j'l} = \delta_{ik}\delta_{ji'}\delta_{jl'}.$$

Logo $e_{ij}e_{i'j'} = \delta_{ji'}e_{ij'}$.

Verificaremos (3.16) no caso em que $K = \mathbb{C}$. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ A \otimes 1 + B \otimes i &\longmapsto A + iB \end{aligned}$$

Que ela é uma bijeção é óbvio. Vejamos que ela é um homomorfismo:

$$\begin{aligned} (A \otimes 1 + B \otimes i)(C \otimes 1 + D \otimes i) = \\ &= AC \otimes 1 + AD \otimes i + BC \otimes i - BD \otimes 1 \\ &= (AC - BD) \otimes 1 + (AD + BC) \otimes i \\ &\longmapsto (AC - BD) + (AD + BC)i = (A + iB)(C + iD). \end{aligned}$$

A seguir daremos explicitamente os isomorfismos (3.17), (3.18), e (3.19), sem demonstrá-los (não é difícil prová-los uma vez que os temos, mas requer-se um certo trabalho). O isomorfismo (3.17) é o seguinte

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ (0,1) &\longmapsto \tfrac{1}{2}(1 \otimes 1 + i \otimes i) \\ (0,1) &\longmapsto \tfrac{1}{2}(1 \otimes 1 - i \otimes i) \end{aligned}$$

Lembre-se que existe um homomorfismo $\psi : \mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C})$ que leva $a + bj$ em $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)$, $(a, b \in \mathbb{C})$. Considere então a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} &\longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \\ 1 \otimes q_1 + i \otimes q_2 &\longmapsto Q_1 + iQ_2 \end{aligned}$$

onde $Q_1 = \psi(q_1)$ e $Q_2 = \psi(q_2)$. Este é o isomorfismo de (3.18). Por último, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} &\longrightarrow M_4(\mathbb{R}) \\ q_1 \otimes q_2 &\longmapsto \imath(\psi(q_1)\bar{\psi}(q_2)) \end{aligned}$$

onde $\bar{\psi} : \mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C})$ é a aplicação $\bar{\psi}(a + bj) = \left(\begin{smallmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$, e $\imath : M_2(\mathbb{C}) \to M_4(\mathbb{R})$ é o monomorfismo canônico. Com isso temos o isomorfismo (3.19). □

Defina $q_{\mathbb{C}}(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j^2$ e $\mathbb{C}l_n \cong Cl(\mathbb{C}^n, q_{\mathbb{C}})$.

**Proposição 3.4.** *Temos os seguintes isomorfismos*

$$Cl(\mathbb{C}^{r+s}, q \otimes \mathbb{C}) \cong Cl_{r,s} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \tag{3.20}$$
$$\mathbb{C}l_n \cong Cl_{0,n} \otimes \mathbb{C} \tag{3.21}$$

*onde* $q(v) = \sum_{i=1}^{r} v_i^2 + \sum_{i=r+1}^{r+s} -v_i^2$ *e* $q \otimes \mathbb{C}$ *é a sua complexificação.*

**Prova.** Para mostrar (3.20) vamos utilizar a propriedade (3.10) que caracteriza universalmente as Álgebras de Clifford. Com efeito, considere a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^{r+s} &\longrightarrow Cl_{r,s} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ v + iw &\longmapsto v \otimes 1 + w \otimes i \end{aligned}$$

onde $v, w \in \mathbb{R}^{r+s}$. Então é claro que $f$ é linear e vale:

$$\begin{aligned} f(v+wi)f(v+wi) &= (v \otimes 1 + w \otimes i)(v \otimes 1 + w \otimes i) \\ &= v^2 1 \otimes 1 + (vw + wv) 1 \otimes i - w^2 1 \otimes 1 \\ &= (v^2 + 2i\langle v, w\rangle - w^2) 1 \otimes 1 \\ &= -q \otimes \mathbb{C}(v + wi) 1 \otimes 1. \end{aligned}$$

Logo $f$ estende-se a um homomorfismo $\tilde{f} : Cl(\mathbb{C}^{r+s}, q \otimes \mathbb{C}) \mapsto Cl_{r,s} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Como $f$ é obviamente uma bijeção, segue-se que $\tilde{f}$ é im isomorfismo. A verificação de (3.21) é direta:

$$\mathbb{C}_n \cong Cl_{n,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong Cl_{n-1,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \cdots \cong Cl_{0,n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

□

**Proposição 3.5.** *Para todo* $n \geq 0$*, nós temos o isomorfismo:*

$$\mathbb{C}l_{n+2} \cong \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2 \tag{3.22}$$

*Prova.* Seja $\{e_1, \cdots, e_{n+2}\}$ uma base ortonormal para $\mathbb{R}^{n+2}$. Considere então a aplicação linear real

$$\psi : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2$$

tal que

$$\psi(e_j) = \begin{cases} ie_j \otimes e_{n+1}e_{n+2}, & \text{se } 1 \leq j \leq n \\ 1 \otimes e_j, & \text{se } j = n+1 \text{ ou } n+2. \end{cases}$$

Agora note que

(i) $1 \leq j \leq n$

$$\psi(e_j)\psi(e_j) = (ie_j \otimes e_{n+1}e_{n+2})^2 = -e_j^2 \otimes -1 = -\|e_j\|^2 1 \otimes 1.$$

(ii) $j = n+1$ ou $n+2$

$$\psi(e_j)\psi(e_j) = (1 \otimes e_j)(1 \otimes e_j) = e_j^2 1 \otimes 1 = -\|e_j\|^2 1 \otimes 1.$$

Como vimos na prova da proposição 3.2, (i) e (ii) são suficientes para garantir que

$$\psi(x) \cdot \psi(x) = -q(x) 1 \otimes 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{n+2}.$$

Logo pela proposição 3.1, $\psi$ estende-se a um homomorfismo $\tilde{\psi} : Cl_{n+2} \to \mathbb{C}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2$ que é sobrejetivo. Ele também é injetivo, pois o domínio e a imagem desta aplicação têm a mesma dimensão. □

**Proposição 3.6.** *Temos os isomorfismos de álgebra:*

$$\mathbb{C}l_{2n} \cong M_{2^n}(\mathbb{C}), \quad (n \geq 1) \tag{3.23}$$

$$\mathbb{C}l_{2n+1} \cong M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n}(\mathbb{C}), \quad (n \geq 0) \tag{3.24}$$

*Prova.* (por indução) De fato, temos

$$\mathbb{C}l_2 \cong Cl_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$$

onde o último isomorfismo é (3.16). Logo (3.23) é verdade se $n = 1$. Suponha que (3.23) vale para $n = k$. Então por (3.20) e (3.13)

$$\begin{aligned} \mathbb{C}l_{2(k+1)} &\cong \mathbb{C}l_{2k} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2 \cong M_{2^k}(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2 \\ &\cong M_{2^k}(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) \cong M_{2^k 2}(\mathbb{C}) = M_{2^{(k+1)}}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

ou seja, $\mathbb{C}l_{2(k+1)} \cong M_{2^{(k+1)}}(\mathbb{C})$. Logo acabamos de provar (3.23).

Quanto à (3.24) temos para $n = 0$

$$\mathbb{C}l_1 \cong Cl_1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

onde o último isomorfismo é (3.17).

Suponha que (3.24) é verdade para $n = k$. Então por (3.13) e (3.20) tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{C}l_{2(k+1)+1} &\cong \mathbb{C}l_{2k+1} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2 \cong \mathbb{C}l_{2k+1} \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) \\ &\cong (M_{2^k}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^k}(\mathbb{C})) \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) \cong M_{2^{k+1}}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^{k+1}}(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

ou seja, $\mathbb{C}l_{2(k+1)+1} \cong M_{2^{k+1}}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^{k+1}}(\mathbb{C})$. □

Agora já estamos em condições de justificar a tabela:

| $n$ | $Cl_n$ | $Cl_n^*$ | $\mathbb{C}l_n$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ | $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ |
| 2 | $\mathbb{H}$ | $M_2(\mathbb{R})$ | $M_2(\mathbb{C})$ |
| 3 | $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ | $M_2(\mathbb{C})$ | $M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$ |
| 4 | $M_2(\mathbb{H})$ | $M_2(\mathbb{H})$ | $M_4(\mathbb{C})$ |
| 5 | $M_4(\mathbb{C})$ | $M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$ | $M_4(\mathbb{C}) \oplus M_4(\mathbb{C})$ |
| 6 | $M_8(\mathbb{R})$ | $M_4(\mathbb{H})$ | $M_8(\mathbb{C})$ |
| 7 | $M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$ | $M_8(\mathbb{C})$ | $M_8(\mathbb{C}) \oplus M_8(\mathbb{C})$ |
| 8 | $M_{16}(\mathbb{R})$ | $M_{16}(\mathbb{R})$ | $M_{16}(\mathbb{C})$ |

A coluna (III) é óbvia a partir da proposição 3.6.
1.I, 2.I, 1.II e 2.II já foram calculadas anteriormente nos exemplos.

$$Cl_3 \cong Cl_1^* \otimes Cl_2 \cong (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \tag{3.I}$$

$$Cl_3^* \cong Cl_1 \otimes Cl_2^* \cong \mathbb{C} \otimes M_2(\mathbb{R}) \cong M_2(\mathbb{C}) \tag{3.II}$$

$$Cl_4 \cong Cl_2^* \otimes Cl_2 \cong M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \cong M_2(\mathbb{C}) \tag{4.I}$$

$$Cl_4^* \cong Cl_2 \otimes Cl_2^* \cong \mathbb{C} \otimes M_2(\mathbb{R}) \cong M_2(\mathbb{C}) \tag{4.II}$$

$$\begin{aligned} Cl_5 &\cong Cl_3^* \otimes Cl_2 \cong M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{H} \cong M_2(\mathbb{R}) \otimes (\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}) \\ &\cong M_2(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \cong M_4(\mathbb{C}) \end{aligned} \tag{5.I}$$

$$Cl_5^* \cong Cl_3 \otimes Cl_2^* \cong (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \otimes M_2(\mathbb{R}) \cong M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H}) \tag{5.II}$$

$$\begin{aligned} Cl_5 &\cong Cl_4^* \otimes Cl_2 \cong M_2(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{H} \cong M_2(\mathbb{R}) \otimes (\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}) \\ &\cong M_2(\mathbb{R}) \otimes M_4(\mathbb{R}) \cong M_8(\mathbb{R}) \end{aligned} \tag{6.I}$$

$$\begin{aligned} Cl_6^* &\cong Cl_4 \otimes Cl_2^* \cong M_2(\mathbb{H}) \otimes M_2(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{H} \otimes M_2(\mathbb{R})) \otimes M_2(\mathbb{R}) \\ &\cong \mathbb{H} \otimes M_4(\mathbb{R}) \cong M_4(\mathbb{H}) \end{aligned} \tag{6.II}$$

$$Cl_7 \cong Cl_5^* \otimes Cl_2 \cong (M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})) \otimes \mathbb{H} \cong M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R}) \tag{7.I}$$

$$\begin{aligned}Cl_7^* &\cong Cl_5 \otimes Cl_2^* \cong M_4(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{H} \cong M_4(\mathbb{R}) \otimes (\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}) \\ &\cong M_4(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \cong (M_4(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{R})) \otimes \mathbb{C} \\ &\cong M_8(\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}) \cong M_8(\mathbb{C})\end{aligned} \tag{7.II}$$

$$\begin{aligned}Cl_8 &\cong Cl_6^* \otimes Cl_2 \cong (M_4(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{H}) \cong M_4(\mathbb{R}) \otimes (\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}) \\ &\cong M_4(\mathbb{R}) \otimes M_4(\mathbb{R}) \cong M_{16}(\mathbb{R})\end{aligned} \tag{8.I}$$

$$Cl_8^* \cong Cl_6 \otimes Cl_2^* \cong M_8(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{R}) \cong M_{16}(\mathbb{R}) \tag{8.II}$$

**Proposição 3.7.** *Para todo $n \geq 0$ vale*

$$Cl_{n+8} \cong Cl_n \otimes Cl_8 \tag{3.25}$$

$$Cl_{n+8}^* \cong Cl_n^* \otimes Cl_8^* \tag{3.26}$$

*Prova.* Nesta prova utilizamos a proposição 3.2 várias vezes:

$$\begin{aligned}Cl_{n+8} &\cong Cl_{n+6}^* \otimes Cl_2 \cong Cl_{n+4} \otimes Cl_2^* \otimes Cl_2 \\ &\cong Cl_{n+2}^* \otimes Cl_2 \otimes Cl_2^* \otimes Cl_2 \\ &\cong Cl_n \otimes Cl_2^* \otimes Cl_2 \otimes Cl_2^* \otimes Cl_2 \\ &\cong Cl_n \otimes M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \otimes M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \\ &\cong Cl_n \otimes (M_2(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{R})) \otimes (\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}) \\ &\cong Cl_n \otimes M_4(\mathbb{R}) \otimes M_4(\mathbb{R}) \\ &\cong Cl_n \otimes M_{16}(\mathbb{R}) \cong Cl_n \otimes Cl_8(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

A demonstração de (3.26) é exatamente análoga. □

**Observação.** A partir da tabela I e da proposição 3.7 podemos construir uma tabela de álgebras de Clifford de qualquer ordem. Entretanto, para os nossos propósitos a tabela I já é suficiente e por isso não nos preocuparemos com os casos $n \geq 9$.

## 3.4 A Relação entre as Álgebras de Clifford e as Álgebras Exteriores

Mesmo sendo as álgebras exteriores construídas independentemente de formas quadráticas, existe uma relação entre estas e as Álgebras de Clifford. A conexão é feita através da álgebra tensorial e suas filtrações. Assim, seja

$$\tilde{\mathcal{F}}_r = \sum_{s \leq r} V^{(s)}$$

constituído de somas de monômios de comprimento menor ou igual a $r$. Como o produto de elementos de $\tilde{\mathcal{F}}_r$ e de $\tilde{\mathcal{F}}_t$ resulta em fatores de comprimentos no máximo $r + t$, então

$$\tilde{\mathcal{F}}_r \otimes \tilde{\mathcal{F}}_t \subset \tilde{\mathcal{F}}_{r+t}.$$

Pela projeção canônica $j : T(V) \to T(V)/I_Q$, $j(\tilde{\mathcal{F}}_i) = \mathcal{F}_i$, tem-se uma *Filtração* natural de $Cl(V)$ por subespaços lineares

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset ... \subset Cl(V)$$

que tem a propriedade $\mathcal{F}_i \cdot \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_{i+j}$.

**Definição 3.2.** Dados $\mathcal{F}_i$ nas condições acima, define-se a *álgebra graduada associada*

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n / \mathcal{F}_{n-1}$$

com a multiplicação induzida.

**Proposição 3.8.** *Os espaços vetoriais $\Lambda(V)$ e $Cl(V)$ são canonicamente isomorfos e tal isomorfismo é compatível com as filtrações.*

*Prova.* Considere a aplicação

$$\begin{aligned} f : V \times \cdots \times V &\longrightarrow Cl(V) \\ (v_1, \cdots, v_r) &\longmapsto \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(r)} \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde $\sigma$ percorre o grupo das permutações $S_r$ de ordem $r$ e $(-1)^{\sigma}$ é o sinal de $\sigma$. Como $f$ é r-linear e anti-simétrica ela induz uma aplicação linear

$$\tilde{f} : \Lambda^r(V) \longrightarrow Cl(V)$$

cuja imagem está em $\mathcal{F}_r$. Compondo $\tilde{f}$ com a projeção $\mathcal{F}_r \to \mathcal{F}_r/\mathcal{F}_{r-1}$ obtemos a mesma aplicação da última proposição. Portanto $\tilde{f}$ é injetiva e a soma direta destas aplicações é um isomorfismo compatível com as filtrações . $\square$

# Capítulo 4

# Álgebras de Clifford: uma construção alternativa

## 4.1 Introdução

No capítulo 2 abordamos a Álgebra Exterior ou Grassmaniana de um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $K$, através de duas construções. Na primeira, vimos a Álgebra Exterior como imagem do operador alternado $Alt : T(V) \to T(V)$, munido do produto (exterior) $\wedge$ definido pela fórmula

$$w \wedge v = Alt(w \otimes v), \quad w, v \in V.$$

A segunda construção apresenta a Álgebra Exterior como uma álgebra fatorial $T(V)/I$, onde $T(V)$ é a álgebra tensorial de $V$ e $I$ o ideal gerado por elementos da forma $x \otimes x, \ x \in V$.

Pela Propriedade Universal, existe um isomorfismo de álgebras entre $T(V)/I$ e $Im(Alt)$ que faz com que o diagrama abaixo seja comutativo:

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[r, "Alt"] \arrow[d, "p"'] & Im(Alt) \subset T(V) \arrow[dl, "p|_{Im(Alt)}"] \\
T(V)/I &
\end{tikzcd}$$

Diagrama 4.1

onde $p$ é o homomorfismo canônico.

O capítulo anterior nos mostra a Álgebra de Clifford $Cl(V,Q)$ como a álgebra fatorial $Cl(V,Q) = \frac{T(V)}{J_Q}$, onde $J_Q$ é o ideal gerado por elementos do tipo $x \otimes x + Q(x) \cdot 1$.

**Convenção:** Será adotado o sinal positivo em (3.2), tornando o ideal $J_Q$ gerado por elementos da forma $x \otimes x - Q(x)1$.

O objetivo central deste capítulo é construir a Álgebra de Clifford através da imagem de um operador *que dependa da forma quadrática* e exerça a mesma função do operador alternado no Diagrama 3.1. Isto significa construir um operador

$$\tilde{A}_Q : T(V) \to T(V)$$

que faça o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[r, "\tilde{A}_Q"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & Im(\tilde{A}_Q) \subset T(V) \arrow[dl, "p|_{Im(\tilde{A}_Q)}"] \\
T(V)/J_Q &
\end{tikzcd}$$

Diagrama 4.2

$\tilde{p} : T(V) \to T(V)/J_Q$ é o homomorfismo canônico.

Portanto o nosso objetivo é definir $\tilde{A}_Q$ e provar que $p|_{Im(\tilde{A}_Q)}$ é um isomorfismo entre as álgebras $Cl(V,Q)$ e $Im(\tilde{A}_Q)$.

Primeiramente, construiremos o operador alternado $\tilde{A}_Q$ definindo-o por uma expressão em termos de produto exterior. Feito isto, com algumas considerações resultantes da definição de $\tilde{A}_Q$ e sua imagem, estaremos em condições de demonstrar o teorema principal deste capítulo que afirma o isomorfismo entre as álgebras $Cl(V,Q) = \frac{T(V)}{J_Q}$ e $Im(\tilde{A}_Q) = C_Q$.

## 4.2 A construção da Alternada de Clifford

Seja $\psi_p : V^{\times p} = \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{p \text{ vezes}} \to T^p(V) = V^{(p)}$ função $p$-linear, $p \leq 2$, definida recursivamente pelas fórmulas:

$$\psi_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) + < x_1, x_2 >; \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \psi_p(x_1, \ldots, x_p) &= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1} x_i \otimes \psi_{p-1}(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p) + \\ &+ \frac{2}{p}\sum_{u<v}(-1)^{u+v+1} < x_u, x_v > \times \psi_{p-2}(x_1, \ldots, \hat{x}_u, \ldots, \hat{x}_v, \ldots, x_p) \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $\hat{x}_i$ indica que o vetor $x_i$ é ignorado entre os argumentos $(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p)$, e $< \cdot, \cdot >$ é a forma bilinear simétrica (ou produto escalar) associado à forma quadrática $Q$.

Seja também a projeção $\tau : V^{\times p} \to T^p(V) = V^{(p)}$ definida pela fórmula

$$\tau(x_1, \ldots, x_p) = x_1 \otimes \ldots \otimes x_p,$$

isto é, $\tau$ leva o argumento no correspondente somando

$$T^i(V) = V^{(i)} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{i \text{ vezes}}$$

da Álgebra Tensorial $T(V)$.

Pela propriedade universal de $T^p(V)$ existe um único homomorfismo

$$\tilde{A}_p : T(V) \to T^p(V)$$

fazendo o diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} V^{\times p} \arrow[r, "\psi_p"] \arrow[d, "\tau"'] & T(V) \\ T^p(V) \arrow[ur, "\tilde{A}_p"'] & \end{tikzcd}$$

*Diagrama* 4.3

isto é, $\psi_p(x_1, ..., x_p) = \tilde{A}_p(\tau(x_1, ..., x_p)) = \tilde{A}_p(x_1 \otimes ... \otimes x_p)$, o que nos induz à seguinte definição:

**Definição 4.1.** Uma função $p$-linear $\tilde{A}_Q : T(V) \to T(V)$ é chamada **Alternada de Clifford** se está definida nas componentes homogêneas de $T(V)$ pela fórmula:

$$\tilde{A}_Q(t) = t \quad \text{, se } t \in K \oplus V \tag{4.3}$$

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes x_2) = \frac{1}{2}(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) + < x_1, x_2 >; \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_p) &= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1} x_i \otimes \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \hat{x}_i ... \otimes x_p) + \\ &+ \frac{2}{p}\sum_{u<v}(-1)^{u+v+1} < x_u, x_v > \times \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \hat{x}_u ... \hat{x}_v ... \otimes x_p) \end{aligned} \tag{4.5}$$

**Observação.** Se $Q \equiv 0$, então $\tilde{A}_Q$ coincide com o operador *Alt* definido em (2.28), Seção (2.7.2), e assim $C_Q$ é a própria Álgebra Exterior para $V$.

Para uma melhor visualização da Alternada de Clifford, observe o caso $p \leq 3$ descrito abaixo.

$$\begin{aligned} \tilde{A}_Q(t) &= t, \ t \in K \oplus V \\ \tilde{A}_Q(x_1 \otimes x_2) &= \frac{1}{2}(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) + < x_1, x_2 > \\ \tilde{A}_Q(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) &= \frac{1}{3}[x_1 \otimes \tilde{A}_Q(x_2 \otimes x_3) - x_2 \otimes \tilde{A}_Q(x_1 \otimes x_3) + \\ &+ x_3 \otimes \tilde{A}_Q(x_1 \otimes x_2)] + \frac{2}{3}[(< x_1, x_2 > \times \tilde{A}_Q(x_3)) - \\ &- (< x_1, x_3 > \times \tilde{A}_Q(x_2)) + (< x_2, x_3 > \times \tilde{A}_Q(x_1)] \end{aligned}$$

Segue que

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = \frac{1}{3}\{x_1 \otimes [\frac{1}{2}(x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2) + < x_2, x_3 >] -$$
$$- x_2 \otimes [\frac{1}{2}(x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1) + < x_1, x_3 >] +$$
$$+ x_3 \otimes [\frac{1}{2}(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) + < x_1, x_2 >]\} +$$
$$+ \frac{2}{3}[< x_1, x_2 > x_3 - < x_1, x_3 > x_2 + < x_2, x_3 > x_1]$$

Aplicando propriedades de produto tensorial:

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 - x_1 \otimes x_3 \otimes x_2) +$$
$$+ \frac{1}{3}x_1 \otimes < x_2, x_3 > - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(x_2 \otimes x_1 \otimes x_3 - x_2 \otimes x_3 \otimes x_1) +$$
$$+ \frac{1}{3}x_2 \otimes < x_1, x_3 > + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(x_3 \otimes x_1 \otimes x_2 - x_3 \otimes x_2 \otimes x_1) +$$
$$+ \frac{1}{3}x_3 \otimes < x_1, x_2 > + \frac{2}{3}[< x_1, x_2 > x_3 - < x_1, x_3 > x_2 +$$
$$+ < x_2, x_3 > x_1]$$

Denotando as permutações de $S_3$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

segue:

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = \frac{1}{3!}\sum_{\sigma \in S_3}(-1)^{\sigma}(x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes x_{\sigma(3)}) +$$
$$+ < x_2, x_3 > x_1 - < x_1, x_3 > x_2 + < x_1, x_2 > x_3] + \frac{2}{3}[< x_1, x_2 > x_3 - < x_1,$$

Observa-se facilmente neste exemplo que, se $Q \equiv 0$, $\tilde{A}_Q = Alt$.

**Proposição 4.1.** *As seguintes identidades se verificam:*

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes y \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) =$$
$$= < y, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ...\hat{y} \otimes \hat{y} ... \otimes x_p) \qquad (4.6)$$

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes y \otimes z \otimes ... \otimes x_p) + \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes z \otimes y \otimes ... \otimes x_p) =$$
$$= 2 < y, z > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ...\hat{y} \otimes \hat{z} ... \otimes x_p). \quad (4.7)$$

**Prova.** Para provar a equação (4.6), usamos indução sobre o índice $p$.

(i) Se $p = 2$, pela equação (4.4)

$$\tilde{A}_Q(y \otimes y) = \frac{1}{2}(y \otimes y - y \otimes y) + < y, y > = < y, y > 1$$

(ii) *Hipótese de indução:* Supor que a equação (4.6) é válida se existe um produto de $(p-1)$ fatores no argumento de $\tilde{A}_Q$ , isto é,

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes y \otimes y \otimes ... \otimes x_{p-1}) = < y, y > \tilde{A}_Q \underbrace{(x_1 \otimes ...\hat{y} \otimes \hat{y} ... \otimes x_{p-1})}_{p-3 \ fatores}$$

Agora, substituindo $y = x_{k+1} = x_{k+2}$ na definição de $\tilde{A}_Q$ envolvendo $p$ fatores, obtém-se

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes y \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) = \\
&= \frac{1}{p}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k} x_i \otimes \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ...\hat{x}_k... \otimes x_p)\right) + \right.\\
&+ \left((-1)^{k+1+1} y \otimes \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p)\right) + \\
&+ \left((-1)^{k+2+1} y \otimes \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p)\right) + \\
&+ \left(\sum_{i=k+3}^{p}(-1)^{i+1} x_i \otimes \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ...\hat{x}_i... \otimes x_p)\right) + \\
&\left. + \frac{2}{p}\left(\sum_{u=1}^{k}(-1)^{u+k+1+1} < x_u, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ...\hat{x}_u... \otimes x_k \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p)\right)\right] + \\
&+ \frac{2}{p}\sum_{u=1}^{k}(-1)^{u+k+2+1} < x_u, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ...\hat{x}_u... \otimes x_k \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) + \\
&+ \frac{2}{p}(-1)^{k+1+k+2+1} < y, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) + \\
&+ \frac{2}{p}\sum_{v=k+3}^{k+1+v+1} < y, x_v > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ...\hat{x}_v... \otimes x_p) + \\
&+ \frac{2}{p}\sum_{v=k+3}^{p}(-1)^{k+2+v+1} < y, x_v > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ...\hat{x}_v... \otimes x_p) + \\
&+ \frac{2}{p}\sum_{u<v;u,v\neq k+1,k+2}^{p}(-1)^{u+v+1} < x_u, x_v > \tilde{A}_Q(x_1, ...\hat{x}_u...x_k \otimes y \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes \\
&\otimes ...\hat{x}_v... \otimes x_p) \qquad (4.8) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

e, reduzindo os termos semelhantes,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes y \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) = \\
&= \frac{1}{p}(-1)^{k+2} y \otimes \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) + \\
&+ \frac{1}{p}(-1)^{k+3} y \otimes \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) + \\
&+ \sum_{i=1, i \neq k+2, k+3}^{p} (-1)^{i+1} x_i \otimes \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \hat{x}_i \otimes y \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) + \\
&+ \frac{2}{p} \sum_{u=1}^{k} (-1)^{u+k+2+1} < x_u, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \hat{x}_u ... \otimes x_k \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes \\
&\otimes x_p) + \frac{2}{p}(-1)^{k+1+k+2+1} < y, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) + \\
&+ \frac{2}{p} \sum_{v=k+3}^{k+1+v+1} < y, x_v > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \hat{x}_v ... \otimes x_p) + \\
&+ \frac{2}{p} \sum_{v=k+3}^{p} (-1)^{k+2+v+1} < y, x_v > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \hat{x}_v ... \\
&... \otimes x_p) + \frac{2}{p} \sum_{\substack{u<v \\ u,v \neq k+1, k+2}}^{p} (-1)^{u+v+1} < x_u, x_v > \times \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \hat{x}_u ... \otimes x_k \otimes \\
&\otimes y \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \hat{x}_v ... \otimes x_p)
\end{aligned}
$$

Como o produto escalar é simétrico, o primeiro e o segundo termos se anulam, assim como o quarto e o quinto, o sétimo e o oitavo. Então:

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes y \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{\substack{i=1 \\ 1 \neq k+1, k+2}}^{p} (-1)^{i+1} x_i \otimes \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \hat{x}_i ... \otimes y \otimes y \otimes ... \otimes x_p) +$$

$$+ \frac{2}{p}(-1)^{2k+4} < y, y > \times \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) +$$

$$+ \frac{2}{p} \sum_{\substack{u<v \\ u,v \neq k+1, k+2}}^{p} (-1)^{u+v+1} < x_u, x_v > \times$$

$$\times \tilde{A}_Q \underbrace{(x_1, ... \hat{x}_u ... x_k \otimes y \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \hat{x}_v ... \otimes x_p)}_{(p-2) \; elementos} \tag{4.9}$$

Aplicando a hipótese de indução no primeiro e terceiro termos da expressão acima:

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes y \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{\substack{i=1 \\ 1 \neq k+1, k+2}}^{p} (-1)^{i+1} x_i \otimes < y, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \hat{x}_i ... \otimes x_k \otimes x_{k+3} \otimes$$

$$\otimes ... \otimes x_p) + \frac{2}{p} < y, y > \times \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) +$$

$$+ \frac{2}{p} \sum_{\substack{u<v \\ u,v \neq k+1, k+2}} (-1)^{u+v+1} < x_u, x_v > \times \tilde{A}_Q(x_1, ... \hat{x}_u ... \hat{x}_v ... x_k \otimes$$

$$\otimes x_k \otimes x_{k+3} \otimes .... \otimes x_p) =$$

$$= \frac{2}{p} < y, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes ... \otimes x_p) +$$

$$+ \frac{p-2}{p} < y, y > \left[ \frac{1}{p-2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k+1, k+2}}^{p} x_i \otimes \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \hat{x}_i ... \otimes x_k \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes \right.$$

$$\otimes x_p) + \frac{2}{p-2} \sum_{\substack{u<v \\ u,v \neq k+1, k+2}} (-1)^{u+v+1} < x_u, x_v > \times$$

$$\left. \times \tilde{A}_Q(x_1, ... \hat{x}_u ... \hat{x}_v ... x_k \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) \right]$$

Como, pela definição (4.1), a expressão entre os colchetes é exatamente $\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p)$, temos

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes y \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) = \\
&= \frac{2}{p} < y, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) + \\
&+ \frac{p-2}{p} < y, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes y \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p) = \\
&=< y, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_k \otimes y \otimes y \otimes x_{k+3} \otimes ... \otimes x_p)
\end{aligned}
$$

A equação (4.7) pode ser obtida da equação (4.6) por meio da polarização do argumento:

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes (y+z) \otimes (y+z) \otimes ... \otimes x_p) = \\
=< y+z, y+z > \tilde{A}(x_1 \otimes ... \widehat{y+z}, \widehat{y+z} ... \otimes x_p) =
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

$$
\begin{aligned}
= 2 < y, z > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes \widehat{y+z}, \widehat{y+z} ... \otimes x_p) + \\
+ < y, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes \widehat{y+z}, \widehat{y+z} ... \otimes x_p) + \\
< z, z > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes \widehat{y+z}, \widehat{y+z} ... \otimes x_p)
\end{aligned}
$$

Pela multilinearidade de $\tilde{A}_Q$ no argumento polarizado,temos também

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes (y+z) \otimes (y+z) \otimes ... \otimes x_p) = \\
&= \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes y \otimes y \otimes ... \otimes x_p) + \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes z \otimes z \otimes ... \otimes x_p) + \\
&+ \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes y \otimes z \otimes ... \otimes x_p) + \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes z \otimes y \otimes ... \otimes x_p)
\end{aligned}
$$

Aplicando a equação (4.6) no primeiro e segundo termo da equação, obtém-se

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes (y+z) \otimes (y+z) \otimes ... \otimes x_p) = \\
&=< y, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes \hat{y}, \hat{y} ... \otimes x_p) + < z, z > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \hat{z}, \hat{z} ... \otimes x_p) + \\
&+ \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes y \otimes z \otimes ... \otimes x_p) + \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes z \otimes y \otimes ... \otimes x_p)
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Agora, igualando as expressões (4.10) e (4.11),

$$
\begin{aligned}
2 < y, z > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes \widehat{y+z} \otimes \widehat{y+z} ... \otimes x_p) + \\
< y, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes \widehat{y+z} \otimes \widehat{y+z} ... \otimes x_p) + \\
+ < z, z > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes \widehat{y+z} \otimes \widehat{y+z} ... \otimes x_p) =
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

$$
\begin{aligned}
< y, y > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes \hat{y} \otimes \hat{y} ... \otimes x_p) + \\
+ < z, z > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \hat{z} \otimes \hat{z} ... \otimes x_p) \\
+ \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes y \otimes z \otimes ... \otimes x_p) + \\
+ \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes z \otimes y \otimes ... \otimes x_p)
\end{aligned}
$$

Observando que

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes \widehat{y+z} \otimes \widehat{y+z} ... \otimes x_p) = -\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes \hat{y} \otimes \hat{z} \otimes ... \otimes x_p)$$

e, reduzindo os termos semelhantes, concluímos a equação(4.7):

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes y \otimes z \otimes ... \otimes x_p) + \\
+ \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes z \otimes y \otimes ... \otimes x_p) = \\
= 2 < y, z > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_p).
\end{aligned}
$$

□

**Observação.** As identidades (4.6) e (4.7) generalizam a relação

$$u \cdot v + v \cdot u = 2 < u, v >$$

da Seção (3.1).

Sabe-se que dados $v, w \in V$, o produto exterior $v \wedge w$ em $A(V)$ é definido como o operador *Alt* aplicado ao produto tensorial $v \otimes w$,

$$v \wedge w = Alt(v \otimes w)$$

Também podemos expressar a Alternada de Clifford em termos do produto exterior. É o que afirma a proposição a seguir.

**Proposição 4.2.** *Para as componentes homogêneas, tem-se*

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_p) = x_1 \wedge ... \wedge x_p + \sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]} \sum_{\sigma \in S_{p,k}} < x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} > ...$$
$$... < x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)} > x_{\sigma(2k+1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(p)} \tag{4.13}$$

*onde as permutações $\sigma \in S_{p,k}$ são caracterizadas pelas propriedades*

$$\sigma(1) < \sigma(3) < ... < \sigma(2k-1) \tag{4.14}$$
$$\sigma(2t-1) < \sigma(2t),\ t = 1, ..., k \tag{4.15}$$
$$\sigma(2k+1) < \sigma(2k+2) < ... < \sigma(p) \tag{4.16}$$

*Prova.* Considere a seguinte função $p$-linear:

$$\begin{aligned} \varphi_p : V^{\times p} &\longrightarrow T(V) \\ (x_1, ..., x_p) &\longmapsto x_1 \wedge ... \wedge x_p + \\ &+ \sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]} \sum_{\sigma \in S_{p,k}} < x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} > ... < x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)} > x_{\sigma(2k+1)} \wedge \\ &... \wedge x_{\sigma(p)} \end{aligned}$$

isto é, $\varphi(x_1, ..., x_p)$ é a parte direita da expressão (4.13).

Na definição de $\psi_p$, o primeiro somatório resulta exatamente no operador *Alt* aplicado ao produto dos fatores envolvidos. Assim, para demonstrar a proposição (4.2), é necessário verificar a igualdade $\psi_p = \varphi_p$.

Alguns lemas envolvendo ortogonalidade de argumentos serão necessários para a prova desta proposição.

**Lema 4.1.** *Se os vetores $x_1, ..., x_{i-1}, y$ são mutuamente ortogonais, então:*

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, ..., x_p) =< y, y > \varphi_{p-2}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+2}, ..., x_p) \tag{4.17}$$

*Prova.* O primeiro passo é aplicar a definição de $\varphi$, sendo necessário considerar os vários casos que ocorrem de acordo com as posições $i$ e $i+1$ dos fatores iguais a $y$, e encontrar no somatório os somandos que desaparecem.

Consideremos os seguintes casos:

(1) $i, i+1 \in \{\sigma(2k+1), ..., \sigma(2k+2), ..., \sigma(p)\}$;

(2) $i, i+1 \in \{\sigma(1), ..., \sigma(2k)\}$;

(3) $i+1 \in \{\sigma(1), ..., \sigma(2k)\}$, $i \in \{\sigma(2k+1), ..., \sigma(p)\}$;

(4) $i \in \{\sigma(1), ..., \sigma(2k)\}$, $i+1 \in \{\sigma(2k+1), ..., \sigma(p)\}$.

<u>**Caso 1:**</u>$i, i+1 \in \{\sigma(2k+1), ..., \sigma(2k+2), ..., \sigma(p)\}$
Neste caso, todos os somandos desaparecem, pois $y \wedge y = 0$:

$$\begin{aligned}\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, ..., x_p) = x_1 \wedge ... \wedge x_p + \\ < y, y > \sum_{k=1}^{[p/2]} \sum_{\sigma \in S_{p,k}} < x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} > ... < x_{\sigma(r)}, x_{\sigma(2r+1)} > ... \\ ... < x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)} > x_{\sigma(2k+1)} \\ \wedge ... \wedge \underbrace{y \wedge y}_{=0} \wedge ... \wedge x_{\sigma(p)}\end{aligned} \quad (4.18)$$

<u>**Caso 2:**</u> $i, i+1 \in \{\sigma(1), ..., \sigma(2k)\}$
Devemos considerar os subcasos que cobrem todas as possibilidades:

(a) $i \in \{\sigma(2), \sigma(4), ..., \sigma(2k)\}$

(b) $i+1 \in \{\sigma(2), \sigma(4), ..., \sigma(2k)\}$, $(\sigma(2t-1), \sigma(2t)) \neq (i, i+1)$

(c) $i = \sigma(2t-1)$, $i+1 = \sigma(2t+1)$;

(d) $i = \sigma(2t-1)$, $i+1 = \sigma(2t)$.

É claro que todas as situações acima aparecem pois apesar de $x_1, ..., x_i - 1, y$ serem mutuamente ortogonais, quando houver a transposição de índices, não necessariamente obtém-se o produto escalar dessas variáveis entre si.

(a) <u>$i \in \{\sigma(2), \sigma(4), ..., \sigma(2k)\}$</u>
Neste caso, $i \leq \sigma(2k)$. Suponha, por exemplo, $\sigma(4) = i$, $k > 4$. Então

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, ..., x_p) = x_1 \wedge ... \wedge x_p +$$

$$+\sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]} \sum_{\sigma \in S_{p,k}} < x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} >< x_{\sigma(3)}, y > ... < x_{\sigma(k)}, x_{\sigma(k+1)} > ...$$

$$... < x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)} > x_{\sigma(2k+1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(p)}$$

Pela propriedade (4.15), $\sigma(2t-1) < \sigma(2t)$, $t = 1, ..., k$. Como $i$ é do tipo $2t$, para algum $t$, existirá um fator $< x_{\sigma(2t-1)}, x_i >$. Como $2t - 1 < i$, $x_i = y$, e por hipótese, $x_{\sigma(2t-1)}, x_i$ são mutuamente ortogonais, então cada somando se anula.

(b) $i + 1 \in \{\sigma(2), \sigma(4), ..., \sigma(2k)\}$, $(\sigma(2t-1), \sigma(2t)) \neq (i, i+1)$

Analogamente ao caso anterior, cada somando tem um fator

$$< x_{\sigma(2t-1)}, x_{i+1} >=< x_{\sigma(2t-1)}, y >,$$

onde $2t - 1 < i$, e $(\sigma(2t-1), \sigma(2t)) \neq (i, i+1)$. Estes fatores se anulam pela mesma razão.

(c) $i = \sigma(2t-1)$, $i + 1 = \sigma(2r+1)$

Na condição acima, cada somando tem a forma

$$(-1)^\sigma < x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} > \cdots < x_i, x_{\sigma(2t)} > \cdots$$

$$\cdots < x_{\sigma(i+1)}, x_{2r} > \cdots < x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)} > x_{\sigma(2k+1)} \wedge ...$$

$$... \wedge x_{i-1} \wedge x_{2k+1} \wedge ... \hat{x}_{\sigma(2t)} ... \hat{x}_{2r} \cdots \wedge x_{\sigma(p)}$$

onde $x_i = x_{i+1} = y$.

Considerando permutações $\sigma$ e $\sigma'$ em $S_p$, onde $\sigma'$ é obtida de $\sigma$ por meio de uma inversão $\sigma(2t) \to \sigma(2r)$, então obtém-se somandos iguais com sinais opostos

$$< x_{\sigma(2t-1)}, x_{\sigma(2t)} >=< y, x_{2t} >$$

$$< x_{\sigma(2t-1)}, x_{\sigma'(2t)} >=< x_{\sigma(2t-1)}, x_{\sigma(2r)} >=< y, x_{2r} > .$$

Logo, os somandos correspondentes se anulam

(d) $i = \sigma(2t-1)$, $i + 1 = \sigma(2t)$

Neste caso, todo somando tem a forma

$$(-1)^\sigma < x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} > ...$$

$$< x_{\sigma(2t-1)}, x_{2t} > \cdots < x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)} > x_{\sigma(2k+1)} \wedge ...$$

$$\cdots \wedge x_{\sigma(p)}$$

onde $x_{\sigma(2t-1)} = x_{\sigma(2t)} = y$. Seja $\sigma \in S_{p-2,k-1}$ o conjunto das permutações de $p-2$, $k-1$ satisfazendo as equações (4.14)-(4.16). Consideremos a permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \hat{i} & \widehat{i+1} & \cdots & p \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(2t-1) & \sigma(2t) & \cdots & \sigma(p) \end{pmatrix} \in S_{p-2,k-1}.$$

Na expressão

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, .., x_p)$$

os somandos abaixo não desaparecem:

$$\begin{aligned} < y, y > \sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]} \sum_{\sigma \in S_{p-2,k-1}} (-1)^{\sigma} < x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} > \cdots < x_{\sigma(2k-3)}, x_{\sigma(k+2)} > \cdot \\ \cdot x_{\sigma(2k-1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(p-2)} = \\ =< y, y > \varphi_{p-2}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+2}, .., x_p) \quad (4.19) \end{aligned}$$

Para o **Caso 3** e **Caso 4** nós mostramos que para todo somando do tipo 3, podemos encontrar um somando oposto do tipo 4, e vice-versa. Todos os somandos correspondentes ao Caso 3 têm a forma:

$$\begin{aligned} (-1)^{\sigma} < x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} > \cdots < x_{\sigma(i+1)}, x_{\sigma(2t)} > \cdots \\ \cdots < x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)} > x_1 \wedge ... \wedge \\ \wedge x_{\sigma(i-1)} \wedge x_i \wedge \cdots \hat{x}_{\sigma(2t)} \cdots \wedge x_{\sigma(p)}, \quad (4.20) \end{aligned}$$

onde $x_i = x_{i+1} = y$, pois $i + 1 \in \{\sigma(1), \sigma(3), ..., \sigma(2k-1)\}$. No caso 4, todos os somandos tem a forma

$$\begin{aligned} (-1)^{\tilde{\sigma}} < x_{\tilde{\sigma}(1)}, x_{\tilde{\sigma}(2)} > \cdots < x_{\tilde{\sigma}(i)}, x_{\tilde{\sigma}(2r)} > \cdots \\ \cdots < x_{\tilde{\sigma}(2k-1)}, x_{\tilde{\sigma}(2k)} > x_1 \wedge ... \wedge \\ \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \hat{x}_{\tilde{\sigma}(2r)} \cdots \wedge x_{\tilde{\sigma}(p)}, \quad (4.21) \end{aligned}$$

onde $x_i = x_{i+1} = y$. Isto ocorre também porque $i \in \{\sigma(1), \sigma(3), ..., \sigma(2k-1)\}$. Seja $r = t$ e $\tilde{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha$, se $\alpha \neq i, i+1$. Como $(-1)^{\sigma} = -(-1)^{\tilde{\sigma}}$, então as expressões (4.20) e (4.21) se cancelam. Portanto temos que a igualdade das expressões (4.19) e $\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, .., x_p)$.

□

**Lema 4.2.** *Se os vetores* $x_1, ..., x_{i-1}$ *são mutuamente ortogonais e os vetores* $y, z$ *são ortogonais a* $x_1, ..., x_{i-1}$, *então*

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, z, x_{i+2}, ..., x_p) + \varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, z, y, x_{i+2}, ..., x_p) = 2 < y, z > \varphi_{p-2}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+2}, ..., x_p)$$

*Se os vetores* $y, z$ *são mutuamente ortogonais, então:*

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, z, x_{i+2}, ..., x_p) = -\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, z, y, x_{i+2}, ..., x_p) \quad (4.22)$$

*Prova.* A equação (4.22) é demonstrada através da polarização do argumento $y$ em (4.17):

$$\begin{aligned}\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, (y+z), (y+z), x_{i+2}, ..., x_p) &= \\ &=< y+z, y+z > \varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+2}, ..., x_p) = \\ &=< y, y > \varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+2}, ..., x_p) + \\ &+ 2 < y, z > \varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+2}, ..., x_p) + \\ &+ < z, z > \varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+2}, ..., x_p) \quad (4.23)\end{aligned}$$

Por outro lado, a função $\varphi_p$ é linear, logo:

$$\begin{aligned}\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y+z, y+z, x_{i+2}, ..., x_p) &= \\ &= \varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, y+z, x_{i+2}, ..., x_p) + \\ &+ \varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, z, y+z, x_{i+2}, ..., x_p) = \\ &= \varphi_p(x_1, ..., y, z, ..., x_p) + \varphi_p(x_1, ..., y, y, ..., x_p) + \\ &+ \varphi_p(x_1, ..., z, y, ..., x_p) + \varphi_p(x_1, ..., z, z, ..., x_p) = \\ &= \varphi_p(x_1, ..., y, z, ..., x_p) + < y, y > \varphi_p(x_1, ..., x_p) + \\ &+ \varphi_p(x_1, ..., z, y, ..., x_p) + < z, z > \varphi_p(x_1, ..., x_p) \quad (4.24)\end{aligned}$$

Igualando as expressões (4.23) e (4.24), obtém-se o resultado

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, z, x_{i+2}, ..., x_p) + \varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, z, y, x_{i+2}, ..., x_p) = 2 < y, z > \varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+2}, ..., x_p)$$

A equação (4.22) decorre da ortogonalidade entre $y$ e $z$, isto é, $< y, z >= 0$. Assim,

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, z, x_{i+2}, ..., x_p) = -\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, z, y, x_{i+2}, ..., x_p) \quad (4.25)$$

□

Observa-se que a troca de posições dos elementos do argumento sob a ação de $\tilde{A}_Q$ pode ser obtida do mesmo modo como a permutação de geradores da Álgebra de Clifford $(e_i e_j) = -(e_j e_i)$.

**Lema 4.3.** *Para todo argumento, as relações abaixo se verificam:*

$$\varphi_p(x_1,...,x_{i-1},y,y,x_{i+2},...,x_p) =< y,y > \varphi_{p-2}(x_1,...,x_{i-1},x_{i+2},...,x_p) \tag{4.26}$$

*e*

$$\varphi_p(x_1,...,x_{i-1},y,z,x_{i+2},...,x_p) + \varphi_p(x_1,...,x_{i-1},z,y,x_{i+2},...,x_p) = \tag{4.27}$$

$$= 2 < y,z > \varphi_{p-2}(x_1,...,x_{i-1},x_{i+2},...,x_p) \tag{4.28}$$

*Prova.* Para a equação (4.26), é suficiente considerar dois casos: quaisquer dois dos vetores do conjunto $\{x_1,...,x_{i-1},y\}$ são mutuamente ortogonais ou linearmente dependentes(colineares).

a) Se o conjunto $\{x_1,...,x_{i-1},y\}$ é ortogonal, então (4.26) é imediata pelo Lema (4.1).

b) Para o caso de existir pelo menos dois vetores colineares em

$$\{x_1,...,x_{i-1},y\},$$

utilizaremos o princípio de indução para $p$.

- $\underline{p=2}$: a equação (4.26) se verifica pela definição de $\varphi$:

$$\varphi_2(y,y) = \underbrace{y \wedge y}_{=0} + < y,y >=< y,y > 1 \tag{4.29}$$

- Hipótese de Indução: Suponha que a equação (4.26) seja verdadeira para $(p-2)$:

$$\varphi_{p-2}(x_1,...,x_{i-1},y,y,...,x_{p-2}) =< y,y > \varphi_{p-4}(x_1,...,x_{i-1},x_{i+2},...,x_p).$$

Vamos construir a sequência de intervalos

$$[\alpha_1,\beta_1] \supset [\alpha_2,\beta_2] \supset ...$$

do seguinte modo:

(1) $x_{\alpha_1}$ é o primeiro dos vetores $x_1,...,x_{i-1},y$ que é colinear com um destes;

(2) $x_{\beta_1}$ é o primeiro desses vetores que é colinear com $x_{\alpha_1}$;

(3) $x_{\alpha_2}$ é o primeiro dos vetores $x_{\alpha_1+1}, ..., x_{\beta_1}$ que é colinear com um deles.

(4) $x_{\beta_2}$ é o primeiro dos vetores, que é colinear com $x_{\alpha_2}$,

e assim por diante.

Os vetores $x_1, x_2, ..., x_\alpha, ..., x_k$, onde $k$ é o índice imediatamente abaixo de $\beta$, são mutuamente ortogonais. Já os vetores $x_\beta$ e $x_{\beta-1}$ são ortogonais a esses vetores. Nestas condições, podemos utilizar o Lema (4.2) mudando a posição dos vetores $x_\alpha$ até a posição imediatamente seguinte de $x_\beta$. Esta mudança altera o sinal negativo da Equação (4.22) $(\beta - 1 - \alpha)$ vezes, de onde se obtém:

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, ..., x_p) = \\ = (-1)^{(\beta-1-\alpha)} \varphi_p(x_1, ..x_{\hat{\alpha}}, ..., x_\beta, x_\alpha, x_{\beta-1}, x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, ..., x_p) \quad (4.30)$$

Pela construção, podemos observar que a sequência de intervalos é finita :

$$[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset ...[\alpha, \beta].$$

Também se observa que o conjunto $\{x_1, ..., x_\alpha, ..., x_{\beta-1}\}$ é ortogonal.Neste caso, pelo Lema (4.2), tem-se

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, ..., x_p) = \\ = (-1)^{(\beta-1-\alpha)} \varphi_p(x_1, ..\hat{x_\alpha}, ..., x_{\beta-1}, .., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, ..., x_p)$$

Como, por construção, $x_\alpha, x_\beta$ são colineares, então $x_\beta = cx_\alpha$ para algum $c \in K$. Com isto, temos duas possibilidades:

(i) $\beta \leq i - 1$:

Como $\{x_1, ..., x_\alpha\}$ é ortogonal, então pela multilinearidade de $\varphi_p$ e pelo Lema (4.1)

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, ..., x_p) = \\ = (-1)^{\beta-1-\alpha} c < x_\alpha, x_\alpha > \times \\ \times \varphi_{p-2}(x_1, ..., \hat{x}_\alpha, \hat{x_\alpha}, x_{\beta-1}, x_{\beta+1}, ..., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, ..., x_p).$$

Pela hipótese de indução,

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, ..., x_p) = \\ = (-1)^{\beta-1-\alpha} < x_\alpha, x_\alpha >< y, y > \times \\ \times \varphi_{p-4}(x_1, ..., \hat{x}_\alpha, \hat{x_\alpha}, x_{\beta-1}, x_{\beta+1}, ...\hat{y}, \hat{y}, x_{i-1}, x_{i+2}, ..., x_p) \\ = (-1)^{\beta-1-\alpha} < x_\alpha, x_\beta >< y, y > \times \\ \times \varphi_{p-2}(x_\alpha, x_\beta, x_1, ..., \hat{x}_\alpha, \hat{x_\alpha}, x_{\beta-1}, x_{\beta+1}, ...\hat{y}, \hat{y}, x_{i-1}, x_{i+2}, ..., x_p)$$

Pelo Lema (4.2)

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, ..., x_p) = \\ =< y, y > \varphi_{p-2}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+2}, ..., x_p) \tag{4.31}$$

A potência $(-1)^{\beta-1-\alpha}$ é compensada quando se aplica o Lema (4.2) para a troca de posições de $x_\alpha, x_\beta$ nos argumentos.

(ii) $\beta = i$

Neste caso, $x_\beta = y$ e conseqüentemente, $x_\alpha = \lambda y, \lambda \in K$. Assim,

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, \underbrace{y}_{x_\beta}, y, x_{i+2}, ..., x_p) = \\ = (-1)^{\beta-1-\alpha}\varphi_p(x_1, ..., \hat{x_\alpha}, ...x_{i-1}, \lambda y, y, x_{i+2}, ..., x_p) \tag{4.32}$$

Pelos Lemas (4.1) , (4.2) e a equação (4.2),como os vetores $x_1, ..., x_{i-1}, x_\alpha = y$ são mutuamente ortogonais,

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, ..., x_p) = \\ = (-1)^{\beta-1-\alpha}\lambda < y, y > \varphi_{p-2}(x_1, ..., \hat{x}_\alpha, ..., x_{i-1}, \underbrace{y}_{x_{\beta+1}}, x_{i+2}, ..., x_p) \\ = (-1)^{\beta-1-\alpha} < y, y > \varphi_{p-2}(x_1, ..., \hat{x}_\alpha, ..., x_{i-1}, \lambda y, x_{i+2}, ..., x_p) \\ = (-1)^{\beta-1-\alpha} < y, y > \varphi_{p-2}(x_1, ..., \hat{x_\alpha}, ..., x_{i-1}, x_\alpha, x_{i+2}, ..., x_p)$$

Pelo Lema (4.2),

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, ..., x_p) = \\ =< y, y > \varphi_{p-2}(x_1, ..., x_\alpha, ..., x_{i-1}, x_{i+2}, ..., x_p)$$

Novamente, a potência de $(-1)$ é compensada pelas aplicações repetidas do Lema (4.2) em $x_\alpha$.

Conclui-se, então que

$$\varphi_p(x_1, ..., x_{i-1}, y, y, x_{i+2}, ..., x_p) = \\ =< y, y > \varphi_{p-2}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+2}, ..., x_p)$$

para todo argumento.

Para provar a relação (4.27), usamos a polarização do argumento $y$ em (4.26):

$$\begin{aligned}
&\varphi_p(x_1, ..., (y+z), (y+z), ..., x_p) = \\
&\quad =< y+z, y+z > \varphi_{p-2}(x_1, ..., \widehat{y+z}, \widehat{y+z}, ..., x_p) = \\
&\quad =< y, y > \varphi_{p-2}(x_1, ..., \widehat{y+z}, \widehat{y+z}, ..., x_p) + \\
&\quad + < z, z > \varphi_{p-2}(x_1, ..., \widehat{y+z}, \widehat{y+z}, ..., x_p) + \\
&\quad + 2 < y, z > \varphi_{p-2}(x_1, ..., \widehat{y+z}, \widehat{y+z}, ..., x_p)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Por outro lado, pela multilinearidade de $\varphi_p$ e equação (4.27),

$$\begin{aligned}
&\varphi_p(x_1, ..., (y+z), (y+z), ..., x_p) = \\
&\quad =< y, y > \varphi_{p-2}(x_1, ..., \hat{y}, \hat{y}, ..., x_p) + \\
&\quad + < z, z > \varphi_{p-2}(x_1, ..., \hat{z}, \hat{z}, ..., x_p) + \\
&\quad + \varphi_p(x_1, ..., y, z, ..., x_p) + \qquad + \varphi_p(x_1, ..., z, y, ..., x_p)
\end{aligned}$$

Igualando as expressões (4.33) e (4.34),

$$\begin{aligned}
&\varphi_p(x_1, ..., y, z, ..., x_p) + \varphi_p(x_1, ..., z, y, ..., x_p) = \\
&\qquad = 2 < y, z > \varphi_{p-2}(x_1, ..., x_{i-2}, x_{i+2}, ..., x_p)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

□

Com os lemas (4.1), (4.2) e (4.3) podemos voltar à prova da Proposição (4.2), lembrando as seguintes relações a serem provadas:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_p) = x_1 \wedge ... \wedge x_p + \sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]} \sum_{\sigma \in S_{p,k}} < x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} > ... \\
... < x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)} > x_{\sigma(2k+1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(p)}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

onde as permutações $\sigma \in S_{p.K}$ são caracterizadas pelas propriedades

$$\sigma(1) < \sigma(3) < ... < \sigma(2k-1) \tag{4.36}$$

$$\sigma(2t-1) < \sigma(2t), \ t = 1, ..., k \tag{4.37}$$

$$\sigma(2k+1) < \sigma(2k+2) < ... < \sigma(p) \tag{4.38}$$

A idéia aqui é provar a igualdade entre as funções $\psi_p$ e $\varphi_p$. Temos duas possibilidades: $x_1, ..., x_p$ mutuamente ortogonais, ou existe pelo menos um par de vetores colineares.

**Caso 1**: Se $x_1, ..., x_p$ são ortogonais entre si, então

$$< x_u, x_v >= 0$$

$\forall u, v \in \{1, 2, ..., p\}$. Conseqüentemente,

$$\frac{2}{p} \sum_{u<v} (-1)^{u+v+1} < x_u, x_v > \psi_{p-2}(x_1, ..., \hat{x}_u, ..., \hat{x}_v, ..., x_p) = 0$$

Como o primeiro somatório é exatamente o operador $Alt$ aplicado ao tensor $(x_1 \otimes ... \otimes x_p)$:

$$\psi_p(x_1, ..., x_p) = x_1 \wedge ... \wedge x_p.$$

**Caso 2**: Vamos usar indução em $p$, e o fato que $\psi_p$ e $\varphi_p$ têm a mesma simetria (equações (4.6) - (4.7)) e (4.26) - (4.27).

- $p = 2$: A igualdade se verifica para $p = 2$:

$$\begin{aligned} &\varphi_2(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = \\ &\qquad Alt(x_1 \otimes x_2) = \frac{1}{2}(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) + < x_1, x_2 >= \\ &\qquad\qquad \psi_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{4.39}$$

- Hipótese de indução: Suponhamos, então que $\psi_{p-2} = \varphi_{p-2}$

  Seja $x_i$ o primeiro dos vetores $x_1, ..., x_p$ que é colinear com um destes vetores, e $x_j$ o primeiro colinear com $x_i$. Temos então que $x_j = kx_i$, para algum $k \in K$. Pelos Lemas (4.1) e (4.2) aplicado repetidas vezes,

$$\begin{aligned} \psi_p(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_p) &= \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_i \otimes ... \otimes x_j \otimes ... \otimes x_p) = \\ &= (-1)^{i+j+1} \tilde{A}_Q(x_i \otimes x_j \otimes x_1 \otimes ... \otimes \hat{x}_i \otimes ... \otimes \hat{x}_j \otimes ... \otimes x_p) \end{aligned} \tag{4.40}$$

  Pelo Lema (4.3),

$$\begin{aligned} &\psi_p(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_p) = \\ &\quad = (-1)^{i+j+1} k < x_i, x_i > \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes \hat{x}_i \otimes ... \otimes \hat{x}_j \otimes ... \otimes x_p) = \\ &\quad =< x_i, x_j > (-1)^{i+j+1} \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes \hat{x}_i \otimes ... \otimes \hat{x}_j \otimes ... \otimes x_p) = \\ &\quad + < x_i, x_j > (-1)^{i+j+1} \psi_{p-2}(x_1 \otimes ... \otimes \hat{x}_i \otimes ... \otimes \hat{x}_j \otimes ... \otimes x_p) = \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução,

$$\psi_p(x_1, ...x_i, ...x_j, ..., x_p) =< x_i, x_j > (-1)^{i+j+1}\varphi_{p-2}(x_1, ..., \hat{x}_i...\hat{x}_j, ..., x_p)$$

Pelo Lema (4.3),

$$\psi_p(x_1, ...x_i, ...x_j, ..., x_p) = (-1)^{i+j+1}\varphi_{p-2}(x_i, x_j, x_1, ..., \hat{x}_i...\hat{x}_j, ..., x_p)$$

Aplicando o Lema (4.2) sucessivamente,

$$\psi_p(x_1, ...x_i, ...x_j, ..., x_p) = \varphi_{p-2}(x_1, ..., x_i...x_j, ...x_p)$$

□

O nosso principal objetivo é identificar a imagem do operador $\tilde{A}_Q(T(V))$ e assim verificar o isomorfismo entre as álgebras $Im(\tilde{A}_Q)$ e $Cl(V, Q) = T(V)/J_Q$.

Tendo provadas as proposições e lemas anteriores, podemos observar:

(1) Se os vetores $x_1, ..., x_p$ são mutuamente ortogonais, então

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_p) = Alt(x_1 \otimes ... \otimes x_p) = x_1 \wedge ... \wedge x_p$$

*Prova.* De fato, pela proposição (4.2)

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_p) = x_1 \wedge ... \wedge x_p + \sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]} \sum_{\sigma \in S_{p,k}} < x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} > ...$$
$$... < x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)} > x_{\sigma(2k+1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(p)}. \tag{4.41}$$

Como os vetores $x_i, x_j,\ i = 1, 2, ..., p$ são ortogonais,
$< x_i, x_j >= 0\ \forall i, j$, de onde segue que

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_p) = x_1 \wedge ... \wedge x_p$$

□

(2) Para qualquer familia de vetores $x_1, ..., x_p$, temos:

$$\tilde{A}_Q(x_1 \wedge ... \wedge x_p) = x_1 \wedge ... \wedge x_p$$

*Prova.* Temos duas possibilidades: $x_1, ..., x_p$ são mutuamente ortogonais ou pelo menos um par de vetores é linearmente dependente. Para o caso dos vetores serem mutuamente ortogonais, vamos utilizar a definição de produto exterior:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_Q(x_1 \wedge ... \wedge x_p) &= \tilde{A}_Q\left(\frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma_p}\right) = \\ &= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p}(-1)^\sigma \tilde{A}_Q(x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma_p}) \qquad (4.42)\end{aligned}$$

Segue da Observação (1) que

$$\tilde{A}_Q(x_1 \wedge ... \wedge x_p) = \underbrace{\frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p}}_{(*)}(-1)^\sigma (x_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma_p}) = x_1 \wedge ... \wedge x_p$$

(*)*Essa parte é compensada pela anti-simetria do produto exterior.*

Logo,

$$\tilde{A}_Q(x_1 \wedge ... \wedge x_p) = x_1 \wedge ... \wedge x_p.$$

Se existir pelo menos um par de vetores $x_i, x_j$ colineares, construímos $x'_i, x'_j$ ortogonais e assim,

$$\begin{aligned}&x_1 \wedge ... \wedge x_i \wedge ... \wedge x_j \wedge ... \wedge x_p = \\ &\qquad = x_1 \wedge ... \wedge x'_i \wedge ... \wedge x'_j \wedge ... \wedge x_p. \qquad (4.43)\end{aligned}$$

Pela observação (1) obtém-se

$$\begin{aligned}&\tilde{A}_Q(x_1 \wedge ... \wedge x_i \wedge ... \wedge x_j \wedge ... \wedge x_p) = \\ &\qquad = \tilde{A}_Q(x_1 \wedge ... \wedge x'_i \wedge ... \wedge x'_j \wedge ... \wedge x_p) = \\ &\qquad = x_1 \wedge ... \wedge x_i \wedge ... \wedge x_j \wedge ... \wedge x_p. \qquad (4.44)\end{aligned}$$

□

Na realidade, dada a forma quadrática $Q$, a Observação (2) nos mostra a inclusão:

$$\Lambda^p(V) \subset \tilde{A}_Q(T^p(V)) \qquad (4.45)$$

Agora, pela Proposição (4.2),

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_p) = x_1 \wedge ... \wedge x_p +$$

$$+\sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]} \sum_{\sigma \in S_{p,k}} < x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} > ... < x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)} > \underbrace{x_{\sigma(2k+1)} \wedge}_{(p-2k)\ termos}$$

$$... \wedge x_{\sigma(p)}$$

de onde decorre a inclusão

$$\tilde{A}_Q(T^p(V)) \subset \bigoplus_{k=0}^{[p/2]} \Lambda^{p-2k}(V) \tag{4.46}$$

Como $\Lambda^{p-2k}(V) \subset \Lambda^p(V)$, segue das inclusões (4.45) e (4.46) a igualdade (de espaços vetoriais)

$$\tilde{A}_Q(T(V)) = \Lambda(V) \tag{4.47}$$

Concluímos, então, que para qualquer forma quadrática $Q = \langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$Im(\tilde{A}_Q) = \Lambda(V).$$

Assim, se $Q$ é não-degenerada, então

$$\tilde{A}_Q(T^p(V)) = \bigoplus_{k=0}^{[p/2]} \Lambda^{p-2k}(V) \tag{4.48}$$

De fato,

(1) $\underline{\bigoplus_{k=0}^{[p/2]} \Lambda^{p-2k}(V) \subset \tilde{A}_Q(T^p(V))}$

Dada uma base ortogonal $\{x_1, ..., x_p\}$ de $V$, os elementos de

$$\bigoplus_{k=0}^{[p/2]} \Lambda^{p-2k}(V)$$

são somas de elementos da forma

$$x_1 \wedge ... \wedge x_{p-2k}.$$

Seja $y$ um vetor ortogonal a $x_1, ..., x_{p-2k}$. Vamos acrescentar ao tensor $x_1 \otimes ... \otimes x_p$ o fator $y$ $2k$ vezes. Pela Proposição (4.1),

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_{p-2k} \otimes \underbrace{y \otimes y \otimes ... \otimes y}_{2k \text{ vezes}}) =< y, y >^k \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_{p-2k})$$

Segue a observação (1) que

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_p) =< y, y >^k x_1 \wedge ... \wedge x_{p-2}.$$

Então

$$x_1 \wedge ... \wedge x_{p-2k} =< y, y >^{-k} \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_{p-2k}) \tag{4.49}$$

Como por construção, $y$ é ortogonal a $x_1, ..., x_{p-2k}$, pela Proposição (4.1)

$$x_1 \wedge ... \wedge x_{p-2k} =< y, y >^{-k} < y, y >^k \tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_p) \tag{4.50}$$

(2) $\underline{\tilde{A}_Q(T^p(V)) \subset \bigoplus_{k=0}^{[p/2]} \Lambda^{p-2k}(V)}$

Esta inclusão é óbvia, já que provamos a Igualdade (4.47).

Note que se $Q \equiv 0$, então, pela definição de $\tilde{A}_Q$

$$\tilde{A}_Q(x_1 \otimes ... \otimes x_p) = Alt(x_1 \otimes ... \otimes x_p) = x_1 \wedge ... \wedge x_p, \tag{4.51}$$

isto é, $\tilde{A}_Q = Alt$ e $\tilde{A}_Q(T^p(V)) = \Lambda^p(V)$.

**Proposição 4.3.** *A Alternada de Clifford $\tilde{A}_Q$ é uma projeção, isto é, $\tilde{A}_Q^2 = \tilde{A}_Q$.*

*Prova.* Seja $t \in T^p(V)$, e $\{x_i, 1 \leq i \leq n\}$ base ortogonal de $V$. Pela inclusão

$$\tilde{A}_Q(T^p(V) \subset \bigoplus_{k=0}^{[p/2]} \Lambda^{p-2k}(V),$$

então

$$\tilde{A}_Q(t) \in \bigoplus_{k=0}^{[p/2]} \Lambda^{p-2k}(V),$$

ou seja, $\tilde{A}_Q(t)$ é soma de termos do tipo $x_{i_1} \wedge ... \wedge x_{i_r}$, $1 \leq r \leq n$. Pela observação (1),

$$x_{i_1} \wedge ... \wedge x_{i_r} = \tilde{A}_Q(x_{i_1} \otimes ... \otimes x_{i_p}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} = \tilde{A}_Q(\tilde{A}_Q(x_{i_1} \otimes ... \otimes x_{i_p})) = & \\ & = \tilde{A}_Q(x_{i_1} \wedge ... \wedge x_{i_r}) = \\ & = x_{i_1} \wedge ... \wedge x_{i_r} = \\ & = \tilde{A}_Q(x_{i_1} \otimes ... \otimes x_{i_p}) \end{aligned} \tag{4.52}$$

Estendendo linearmente a $T(V)$, $\tilde{A}_Q(\tilde{A}_Q(t)) = \tilde{A}_Q(t)$.

□

Vamos considerar $Im(\tilde{A}_Q) = (\Lambda(V), \cdot) = C_Q$, onde $(\cdot)$ é definido como um produto em $C_Q$ pela fórmula

$$w \cdot v = \tilde{A}_Q(w \otimes v), \ w, v \in \Lambda(V).$$

**Afirmação:** $(C_Q, \cdot)$ é uma álgebra.

*Prova.* Da teoria de $\Lambda(V)$ vem que $C_Q = \Lambda(V)$ tem estrutura de espaço vetorial. Basta então verificar a condição

$$a(u \cdot v) = (au) \cdot v = u \cdot (av), \ \forall u, v \in \Lambda(V) \text{e } a \in K$$

Assim,pela linearidade de $\tilde{A}_Q$ e do produto tensorial,

$$a(u \cdot v) = a\tilde{A}_Q(u \otimes v) = \tilde{A}_Q(a(u \otimes v) = \tilde{A}_Q(au \otimes v) = (au) \cdot v$$

Por outro lado,

$$a(u \cdot v) = \tilde{A}_Q(u \otimes av) = u \cdot (av)$$

Logo,$(C_Q, \cdot)$ é uma álgebra. □

**Proposição 4.4.** *Considere $(C_Q, \cdot)$ com seus elementos que são combinações lineares de produtos do tipo $x_1 \wedge ... \wedge x_p$, de vetores $x_1, ..., x_p$ mutuamente ortogonais. Então*

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot (...x_p))) = x_1 \wedge ... \wedge x_p. \tag{4.53}$$

*Prova.* Usaremos indução sobre o índice $p$

a) $p = 2$:

$$
\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \tilde{A}_Q(x_1 \otimes x_2) = \\
&= \frac{1}{2}(x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) - < x_1, x_2 >= \\
&= Alt(x_1 \otimes x_2) = x_1 \wedge x_2
\end{aligned} \tag{4.54}
$$

b) Hipótese de indução: Supõe-se a relação válida para $p-1$

Por definição,

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot (...x_p))) = \tilde{A}_Q(x_1 \otimes (x_2 \cdots x_p)).$$

Pela hipótese de indução em $(x_2 \cdot (x_3 \cdots x_p))$,

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot (...x_p))) = \tilde{A}_Q(x_1 \otimes (x_2 \wedge ... \wedge x_p)).$$

Aplicando a definição do produto exterior:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}_Q(x_1 \otimes (x_2 \wedge ... \wedge x_p)) = \\
&= \tilde{A}_Q \left( x_1 \otimes \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\sigma \in S_{p-1}} (-1)^\sigma (x_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(p)}) \right) = \\
&= \frac{1}{(p-1)!} \tilde{A}_Q \left( x_1 \otimes \sum_{\sigma \in S_{p-1}} (-1)^\sigma x_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(p)}) \right) = \\
&= \frac{1}{(p-1)!} \left( \sum_{\sigma \in S_{p-1}} (-1)^\sigma x_1 \wedge x_{\sigma(2)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(p)} \right) = \\
&= x_1 \wedge ... \wedge x_p
\end{aligned} \tag{4.55}
$$

onde a potência em $(-1)$ desaparece, pela anti-simetria do produto exterior.

□

Considerando o produto $(\cdot)$ em $C_Q$, podemos concluir o isomorfismo entre as álgebras $C_Q$ e $Cl(V, Q)$:

**Teorema 4.1.** *A Álgebra $C_Q$ é isomorfa à Álgebra de Clifford $Cl(V, Q)$.*

*Prova.* Considerando $\tilde{A}_Q|_V : V \to Im(\tilde{A}_Q) \subset T(V)$, tem-se

$$\tilde{A}_Q|_V(u) \cdot \tilde{A}_Q|_V(u) = u \cdot u = \langle u, u \rangle = Q(u) \cdot 1.$$

$C_Q$ é uma álgebra associativa com unidade $(1 \cdot u = u \cdot 1 = u)$.

Nessas condições, pela caracterização universal das Álgebras de Clifford, $\tilde{A}_Q|_Q$ se estende unicamente a um homomorfismo de álgebra

$$\varphi : Cl(V, Q) \to (C_Q, \cdot)$$

tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[r, "\tilde{A}_Q|_V"] \arrow[d, "j"'] & (C_Q, \cdot) \\
Cl(V, Q) \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

*Diagrama* 4.4

<u>*V gera $C_Q$:*</u>

Seja $\{e_i 1 \leq i \leq n\}$ base de $V$. Sabemos que $T(V)$ é gerado por elementos da forma

$$e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r}.$$

Pela definição do produto $(\cdot)$ e a Proposição (4.4),

$$e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdots e_{i_r} = \tilde{A}_Q(e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r}).$$

Considere $I = (i_1, ..., i_r)$ seqüência de índices e $a_I = a_{i_1} \cdots a_{i_r}$. Dado $v \in T(V)$, então

$$v = \sum_I a_I(e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r}),$$

e

$$\begin{aligned}\tilde{A}_Q\left(\sum_I a_I(e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r})\right) = & \\ &= \sum_I a_I \tilde{A}_Q(e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r}) \\ &= \sum_I a_I(e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdots e_{i_r}) \qquad (4.56)\end{aligned}$$

Portanto, $V$ gera $C_Q$. Conseqüentemente,

$$dim(C_Q, \cdot) = 2^n = dim(Cl(V, Q))$$

o que nos fornece a sobrejetividade de $\varphi$. Conclui-se então que $\varphi$ é isomorfismo. □

Assim, podemos concluir que as podem ser construídas como imagem de um operador alternado, reforçando o isomorfismo de espaço vetorial que existe entre as Álgebras de Clifford e as Álgebras Exteriores.

# Bibliografia


[1] A.Conde, *Aplicações a topologia via operadores Elípticos*,Universidade de São Carlos, São Carlos, 1988

[2] A. Yastrebov, *On a Construction of the Cliffordean Algebra*, Yaroslavl State Pedagogical University, Yaroslavl, 1994.

[3] B. Lawson e M.L. Michelson, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.

[4] B.L. van de Waerden, *A History of Algebra*, MSRI Publications, Springer-Verlag, 1985.

[5] C.Chevalley, *The Algebraic Theory of Spinors*, Columbia University Press, New York,1954.

[6] C. P. Milles, *Anéis e Módulos*, IME, Universidade Federal de São Paulo, São Paulo,1972.

[7] G.Birkhoff e Saunders MacLane,*Algebra*, The MacMillan Company, New York,1967.

[8] I.N.Herstein,*Topics in Algebra*, John Wiley e Sons,Inc., New York,1975.

[9] I.R.Porteus, *Clifford Algebras and the Classical Groups* , Cambridge University Press, New York, 1995.

[10] Marcos Calçada, Tese de Mestrado:*Invariantes de Seiberg-Witten e a Topologia das Variedades de dimensão 4*,UFSC,1998.

[11] Martinho Araújo, Tese de Mestrado:*Construção de Álgebras Reais de Clifford*, UFSC, 1988.

[12] M.F.Atiyah e I.G.MacDonald, *Introducción al álgebra conmutativa*, Editorial Reverté S.A, Barcelona,1980.

[13] N. Jacobson, *Basic Algebra vol.I,II*, W.H.Freeman and Company, New York, 1985.

[14] V. Guillemin e A. Pollack, *Differential Topology*,Prentice-Hall, Inc., New Jersey,1974.