

Universidade Federal de Santa Catarina  
Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica

Homogeneização de uma Equação  
de Reação-Difusão em Domínios  
Perfurados com Pequenos Buracos

Airton Kist

Orientador: Prof. Dr. Joel Santos Souza

Florianópolis

Março de 2001

Universidade Federal de Santa Catarina  
Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica

Homogeneização de uma Equação de  
Reação-Difusão em Domínios Perfurados com  
Pequenos Buracos

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

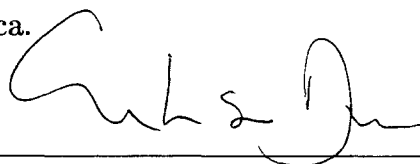
Airton Kist  
Florianópolis  
Março de 2001

# Homogeneização de uma Equação de Reação-Difusão em Domínios Perfurados com Pequenos Buracos

por

Airton Kist

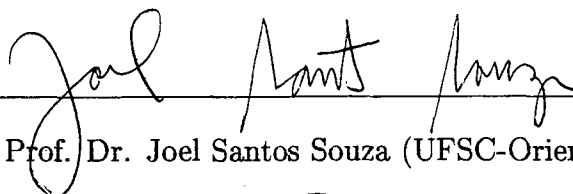
Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre”,  
Área de Concentração Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma  
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica.



Celso Melchíades Dória

Coordenador

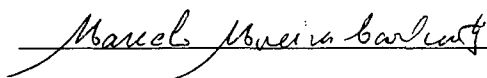
Comissão Examinadora



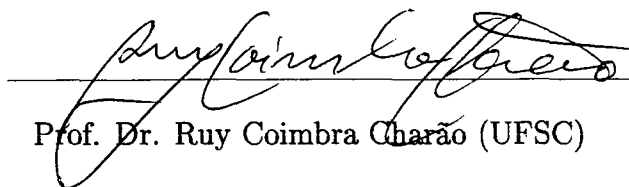
Prof. Dr. Joel Santos Souza (UFSC-Orientador)



Prof. Dr. Bóris Vitor Kapitonov (LNCC/MCT)



Prof. Dr. Marcelo M. Cavalcanti (UEM)



Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC)

À minha esposa, Denise

Ao meu Pai, Canisio

À minha Mãe, Lucena

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pela realização deste singelo, porém mui significativo trabalho. Agradeço a Denise, minha esposa, pelo sacrifício que fez para que eu pudesse concretizar esta realização.

Agradeço aos meus pais e irmãos, em especial ao Ernani, que começou comigo a graduação, e ao Milton, que durante nove anos foi também meu colega, pelo apoio e incentivos em todos os momentos.

Agradeço aos professores: Joel, pela orientação, pelo apoio e amizade; Ruy Charão, Boris, e Marcelo, que fizeram parte da banca examinadora desta dissertação, pelas sugestões apresentadas.

Agradeço também aos colegas de Graduação e Pós-Graduação: Anderson, Andresa, Christian, Claiton, Daniel, Danilo, Dirceu, Fábio, Graziela, Janice, João Luiz, Juliano, Maria Inez, Milton, Patrícia, Paulo e Rafael; pelo companheirismo, amizade e ânimos comunicados, tão importantes no caminhar desta jornada.

Agradeço, por fim, ao CNPq, pelo suporte financeiro concedido durante um ano.

A todos, o meu obrigado.

# Resumo

Esta dissertação é dedicada principalmente à homogeneização de uma equação de reação-difusão não linear com condição de fronteira de Dirichlet homogênea em um domínio contendo pequenos buracos periodicamente distribuídos na direção de cada eixo coordenado. (Para buracos de tamanho crítico - por exemplo, no caso tridimensional - os obstáculos têm um tamanho da ordem de  $\epsilon^3$  e estão localizados em nós de uma malha de tamanho  $\epsilon$ .) As demonstrações estão baseadas no quadro abstrato introduzido por Doina Cioranescu e François Murat para o estudo da homogeneização de problemas elípticos em domínios com pequenos buracos, que é fundamentado no uso adequado de funções testes adaptadas à geometria do problema.

# Abstract

This work is mainly devoted to the homogenization of a non-linear reaction-difusion equation with homogeneous Dirichlet boundary condition in a domain containing tiny holes periodically distributed in each direction of the axis. (For holes of critical size - for example, in the three-dimensional case - the obstacles have a size of  $\epsilon^3$  and are located at the nodes of a regular mesh of size  $\epsilon$ .) The proofs are performed in the abstract framework introduced by Doina Cioranescu and François Murat for the study of homogenization of elliptic problems in domains with tiny holes, which is based on the use of suitable test functions adapted to the geometry of the problem.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Equação de reação-difusão em domínios com pequenos buracos</b>	<b>13</b>
1.1 Existência de solução fraca . . . . .	14
1.2 Unicidade da solução fraca . . . . .	27
1.3 Regularidade da solução $u_\epsilon$ . . . . .	31
<b>2 Resultados preliminares</b>	<b>35</b>
2.1 Contexto geométrico . . . . .	35
2.2 Alguns resultados de compacidade . . . . .	38
<b>3 Resultado de homogeneização da equação de reação-difusão</b>	<b>41</b>
<b>4 Resultados de correção</b>	<b>55</b>
<b>5 O caso dos buracos menores que o tamanho crítico</b>	<b>65</b>
<b>Apêndice</b>	<b>68</b>
A.1 Cálculo vetorial . . . . .	68
A.2 Análise funcional . . . . .	70
A.3 Espaços $L^P$ . . . . .	73
A.4 Espaços de Sobolev . . . . .	77
A.5 Imersões em espaços de Sobolev . . . . .	80
A.6 Funções absolutamente contínuas . . . . .	82



A.7 Medidas de Radon (ou medidas de ordem zero) . . . . .	83
<b>Referências</b>	<b>86</b>

# Introdução

A modelagem matemática de inúmeros fenômenos que ocorrem com frequência na natureza demanda o conhecimento preciso do sistema físico envolvido. Em diversas aplicações o sistema é caracterizado pelo seu aspecto multi-escala, ou seja, o seu comportamento macroscópico é resultante da superposição de fenômenos que ocorrem em diversas escalas inferiores. O tratamento matemático destes sistemas pode ser feito utilizando-se técnicas da teoria de homogeneização. Exemplos onde esta situação surge com frequência podem ser encontrados em várias áreas do conhecimento. Em particular, citamos:

1. Os meios porosos são exemplos canônicos da aplicação da ciência multi-escala. A modelagem de escoamentos (monofásicos e multifásicos) acoplados a dispersão de contaminantes, transporte de calor e massa e deformações/tensões em formações geológicas heterogêneas são processos naturalmente multi-escala. A correta descrição de processos que ocorrem na escala de campo (quilômetros) tais como macro-dispersão em reservatórios de petróleo bem como transporte de contaminantes em aquíferos está fortemente atrelada ao atendimento dos diversos fenômenos que ocorrem nas escalas inferiores. Exemplos: na escala do poro ( $mm$ ), onde valem as equações da Mecânica do Contínuo; na escala de laboratório e ( $cm$ ), onde vale a lei de Darcy....
2. Na Mecânica dos Materiais, vários modelos macroscópicos de plasticidade em metais são fortemente correlacionados com fenômenos microscópicos relativos ao movimento de discordâncias que ocorrem na microestrutura cristalográfica

do material. De forma análoga, fenômenos de plasticidade em meios granulares estão fortemente ligados a fenômenos de fricção na estrutura microscópica granular.

3. Em Mecânica do Dano, o estabelecimento das correlações entre variáveis termodinâmicas internas de estados que descrevem o processo de degranulação do material está diretamente relacionado com o surgimento de frações de vazios, fraturas na escala microscópica, típica da estrutura cristalográfica dos metais.
4. Na área de climatologia e meteorologia o acoplamento entre modelos de previsão climática globais macroscópicos com modelos regionais microscópicos (como exemplo, relativos à precipitação e temperaturas locais) envolve o entendimento de um processo multi-escala conhecido como *downscaling*.
5. Em mecânica de fluidos, o fenômeno de turbulência está associado ao movimento de flutuação das partículas de fluido em torno da velocidade média da corrente fluida. A influência da perturbação relacionada com a flutuação sobre o comportamento do fluido a nível macroscópico envolve o estabelecimento de um modelo multi-escala.
6. Propriedades macroscópicas de materiais compostos tais como condutividades térmicas, mecânicas e elétricas são resultantes de fenômenos microestruturais que ocorrem na escala microscópica.
7. A área de biologia estrutural é inerentemente multi-escala. Por exemplo, o correto entendimento do campo de forças que atua na estrutura e arranjo de proteínas está fortemente correlacionado com os dados relativos às seqüências de DNA sendo também fortemente governado pelas forças atômicas que atuam na microfísica. Além disso, o estudo de propagação de populações e epidemias em ecossistemas envolve fenômenos multi-escala que são advindos do acoplamento entre interações globais e locais entre as espécies.

8. Na área de farmacologia, o transporte macroscópico de drogas nos organismos vivos é fortemente determinado pela micro-físico-química resultante das complexas interações que ocorrem entre fármacos e células.

Como vimos anteriormente, a teoria de homogeneização é uma técnica que possibilita várias aplicações destacando-se entre elas a modelagem de fenômenos físicos. Esta técnica permite modelar fenômenos de transporte e difusão numa escala macroscópica através de informações numa escala microscópica. Como exemplo, o escoamento de um fluido, em um rio ou em um lago, com obstáculos, onde estes obstáculos seriam constituídos por uma região com árvores. Numa escala “microscópica”, de alguns metros, as equações que descrevem um tal escoamento, são as equações de Navier-Stokes, numa geometria muito complicada. Entretanto, fenômenos de grande interesse ocorrem numa escala de quilômetros, escala macroscópica. As equações desse escoamento nesta escala podem ser bem mais tratáveis quando escritas em termos de grandezas médias, onde os efeitos locais de flutuação são incorporados a certos parâmetros desses novos modelos. Busca-se então obter exatamente o correto tratamento, na escala macroscópica, de efeitos não lineares descritos pela equação de Navier-Stokes numa escala microscópica.

O Tratamento Matemático, em geral, do método de homogeneização se dá em duas abordagens. Um exemplo da primeira é visto em J.L. Lions [26], onde estuda-se o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon = f, & \text{em } \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon \text{ satisfazendo a certas condições de fronteira,} \end{cases} \quad (1)$$

em que  $\Omega_\epsilon$  denota um domínio aberto limitado “perfurado” do  $\mathbb{R}^N$ , obtido de  $\Omega$  por extração de um certo número de orifícios distribuídos periodicamente com período  $\epsilon > 0$ . Problemas deste tipo aparecem no estudo da torção elástica de um tronco cilíndrico com  $r$  cavidades ou furos. É claro que, para cada  $\epsilon > 0$ , poderíamos resolver o problema (1) usando métodos variacionais, no entanto, o procedimento dependeria de  $\epsilon$ , ou melhor, o espaço no qual se aplicariam os métodos dependeria de

$\epsilon$ . Por outro lado, a obtenção de uma solução aproximada de (1), para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, demandaria muito esforço do ponto de vista da análise numérica e computacional. É necessário, portanto, um método que nos proporcione uma solução aproximada do problema (1) e que não dependa de  $\epsilon$ . Para isto fazemos uso do método de homogeneização.

Para que obtenhamos a homogeneização do problema (1) realizamos um desenvolvimento de ordem qualquer em  $\epsilon$  para  $u_\epsilon$ :

$$u_\epsilon(x) = u_0(x, y) + \epsilon u_1(x, y) + \epsilon^2 u_2(x, y) + \cdots + \epsilon^j u_j(x, y) + \cdots$$

onde  $y = \frac{x}{\epsilon}$ ,  $x$  representa uma variável macroscópica e  $y$  uma variável microscópica.

As funções  $u_0, u_1, u_2, \dots$  são construídas independentes de  $\epsilon$ , de tal forma que se tenha algum controle de erro, isto é:

$$\|u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \cdots + \epsilon^m u_m)\| \leq C \epsilon^m,$$

com uma norma adequada, ou ainda, o erro seja de ordem  $\epsilon^m$ , num espaço de Sobolev sobre  $\Omega_\epsilon$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Assim podemos afirmar que a solução aproximada do problema (1) será:

$$u_0 + \epsilon u_1 + \cdots + \epsilon^m u_m.$$

A determinação das funções  $u_j$  da expansão assintótica se dá impondo-se a condição de que  $u_\epsilon$  seja solução do problema (1) e com isto resolve-se, para cada potência de  $\epsilon$ , problemas similares ao problema (1) com a vantagem de estes problemas agora serem definidos não mais em  $\Omega_\epsilon$ , porém em todo  $\Omega$ . Assim são construídas as funções  $u_j(x, y)$  da expansão assintótica com  $x \in \Omega$  (isto é, definidas em todo  $\Omega$ ).

Esta seria a abordagem através da expansão assintótica. Para uma referência ver também E. Sanches-Palência [40]. Fazendo-se uso desta abordagem obtém-se alguma correlação entre os efeitos microscópicos e macroscópicos de fenômenos envolvendo

escoamento de fluidos.

Um exemplo da segunda abordagem é visto nos trabalhos [11] e [9], onde não se utiliza uma expansão assintótica para  $u_\epsilon$ .

Em [11], em 1982, Doina Cioranescu e François Murat, no estudo abstrato da homogeneização de problemas elípticos consideraram o seguinte problema:

Encontrar  $u_\epsilon$  solução de:

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon = f, & \text{em } \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon = 0, & \text{sobre } \Gamma_\epsilon, \end{cases} \quad (2)$$

onde  $f$  é dada no espaço de Sobolev  $H^{-1}(\Omega)$ .

Denota-se por  $\tilde{u}_\epsilon$  a extensão de  $u_\epsilon$ , a todo  $\Omega$ , definida por:

$$\tilde{u}_\epsilon = \begin{cases} u_\epsilon, & \text{em } \Omega_\epsilon \\ 0, & \text{nos buracos } T_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} T_i^\epsilon, \end{cases}$$

foi mostrado neste artigo que:

$$\tilde{u}_\epsilon \rightharpoonup u, \text{ fraco, em } H_0^1(\Omega), \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0,$$

onde  $\tilde{u}_\epsilon$  é a única solução do problema (2), para cada  $\epsilon > 0$ , fixado, estendida por zero nos buracos, e  $u$  é a única solução do problema homogeneizado:

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (3)$$

onde  $\mu$  é uma medida de Radon não negativa pertencente a  $H^{-1}(\Omega)$ . Esta medida aparece neste estudo e está ligada ao comportamento da capacidade do conjunto  $T_\epsilon$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Impõe-se para isto a condição de que os buracos sejam “pequenos”, isto é,  $a_{T_i^\epsilon}$ , o diâmetro dos buracos seja assintoticamente menor ou igual ao “diâmetro

crítico"  $a_\epsilon$ , dado por:

$$a_\epsilon = \begin{cases} \delta_\epsilon \exp(-C_0/\epsilon^2) & \text{para } N = 2 \\ C_0 \epsilon^{N/(N-2)} & \text{para } N \geq 3, \end{cases}$$

onde  $C_0 > 0$  está fixado, e  $\epsilon^2 \log \delta_\epsilon \rightarrow 0$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Esta condição possibilita a construção de um quadro funcional de hipóteses, sobre os buracos, que é fundamental na demonstração dos resultados. No caso acima,  $\mu$  será uma constante estritamente positiva, quando o diâmetro dos buracos for o crítico. Neste caso, o termo de ordem zero adicional,  $\mu u$ , aparece na equação limite.

Mostra-se ainda, em [11], resultados de correção, ou seja:

$$\tilde{u}_\epsilon = w_\epsilon u + R_\epsilon, \quad \text{com } R_\epsilon \rightarrow 0, \text{ forte, em } H_0^1(\Omega),$$

isto é,  $w_\epsilon u$  é uma boa aproximação para a solução de (2).

No artigo apresentado por D. Cioranescu, P. Donato, F. Murat e E. Zuazua em [9], de 1991, estuda-se a homogeneização da equação da onda:

$$\begin{cases} u_\epsilon'' - \Delta u_\epsilon = f_\epsilon & \text{em } \Omega_\epsilon \times (0, T), \quad T > 0 \\ u_\epsilon = 0 & \text{sobre } \Gamma_\epsilon \times (0, T) \\ u_\epsilon(x, 0) = u_\epsilon^0 & \text{em } \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon'(x, 0) = u_\epsilon^1 & \text{em } \Omega_\epsilon, \end{cases} \quad (4)$$

com  $u_\epsilon^0 \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$ ,  $u_\epsilon^1 \in L^2(\Omega_\epsilon)$ ,  $f_\epsilon \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$ , e:

$$\begin{cases} \tilde{u}_\epsilon^0 \rightharpoonup u_0, & \text{fraco, em } H_0^1(\Omega), \\ \tilde{u}_\epsilon^1 \rightharpoonup u_1, & \text{fraco, em } L^2(\Omega), \\ \tilde{f}_\epsilon \rightharpoonup f, & \text{fraco, em } L^1(0, T; L^2(\Omega)) \end{cases}$$

Em [9], mostra-se também que:

$\tilde{u}_\epsilon \xrightarrow{*} u$ , fraco-estrela, em  $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ ,

onde  $\tilde{u}_\epsilon$  é a única solução do problema (4), para cada  $\epsilon > 0$ , fixado, estendida por zero nos buracos, e  $u$  é a única solução do problema homogeneizado:

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \mu u = f & \text{em } \Omega \times (0, T), T > 0 \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0 & \text{em } \Omega \\ u'(x, 0) = u_1 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (5)$$

onde  $\mu$  é uma medida de Radon não negativa, sendo positiva quando o diâmetro dos buracos é o diâmetro crítico. Estuda-se ainda, neste artigo, resultados de correção, isto é:

$$R_\epsilon \rightarrow 0, \text{ forte, em } C^0([0, T]; W_0^{1,1}(\Omega)).$$

Um outro exemplo interessante é visto em G. Allaire [1], de 1989, e em [2], de 1990, onde se faz a homogeneização de problemas envolvendo escoamentos com obstáculos.

No trabalho apresentado em [2], considera-se o seguinte sistema de Stokes:

$$(S_\epsilon) \begin{cases} \text{Encontrar } (u_\epsilon, p_\epsilon) \in [H_0^1(\Omega_\epsilon)]^N \times [L^2(\Omega_\epsilon)/\mathbb{R}]; \\ \nabla p_\epsilon - \Delta u_\epsilon = f, \text{ em } \Omega_\epsilon \\ \text{div } u_\epsilon = 0, \text{ em } \Omega_\epsilon. \end{cases}$$

O sistema  $(S_\epsilon)$  dá a descrição do fluxo de um fluido viscoso, incompressível, no domínio  $\Omega_\epsilon$ , sob a ação de uma força exterior  $f$ , com condições de fronteira de Dirichlet, sem deslizamento. A viscosidade e a densidade do fluido estão sendo considerados iguais a 1. A velocidade do fluxo é representada por  $u_\epsilon$ , e a pressão do fluido por  $p_\epsilon$ . A força  $f \in [L^2(\Omega)]^N$ , sendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , um aberto limitado regular, e  $\Omega_\epsilon = \Omega - \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} T_i^\epsilon$ ,  $T_i^\epsilon \subset \Omega$  conjuntos fechados (buracos).



Considera-se ainda o seguinte sistema, definido em todo domínio  $\Omega$ , que descreve a Lei de Brinkman:

$$(S_0) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } (u, p) \in [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}]; \\ \nabla p - \Delta u + Mu = f, \text{ em } \Omega \\ \text{div } u = 0, \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

onde  $M$  é uma matriz simétrica e positiva que depende da forma dos buracos  $T_i^\epsilon$ ,  $Mu$  é um termo linear da velocidade de ordem zero.

Considera-se também, em todo domínio  $\Omega$ , o sistema de Stokes:

$$(S) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } (u, p) \in [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}]; \\ \nabla p - \Delta u = f, \text{ em } \Omega \\ \text{div } u = 0, \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

E por fim, considera-se o sistema definido em todo  $\Omega$ , que descreve a Lei de Darcy:

$$(D) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } (u, p) \in [L^2(\Omega)]^N \times [H^1(\Omega)/\mathbb{R}] \\ u = M^{-1}(f - \nabla p), \text{ em } \Omega \\ \text{div } u = 0, \text{ em } \Omega \\ u \cdot \eta = 0, \text{ em } \Gamma. \end{cases}$$

O Problema Homogeneizado consiste em se tomar o limite do problema  $(S_\epsilon)$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Obtém-se então os seguintes resultados, considerando-se o tamanho dos buracos e com algumas hipóteses sobre os mesmos.

Definindo-se  $a_\epsilon$  como o diâmetro “crítico” dos buracos,  $a_{T_i^\epsilon}$  como o diâmetro dos buracos temos, em suma, três situações:

1. Quando o diâmetro dos buracos é da mesma ordem que o diâmetro “crítico”, isto é,  $a_{T_i^\epsilon} \cong a_\epsilon$ , temos

$$(\tilde{u}_\epsilon, P_\epsilon(p_\epsilon)) \rightharpoonup (u, p), \text{ fraco, em } [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}],$$

onde  $(u, p)$  é a única solução de  $(S_0)$ ,  $P_\epsilon$  é uma extensão da pressão  $p_\epsilon$ , e  $\tilde{u}_\epsilon$  é a extensão por 0 em  $\Omega - \Omega_\epsilon$ , ou seja, sintetizando teríamos:

$$S_\epsilon \rightarrow S_0 \text{ (Lei de Brinkman), quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

2. Quando o diâmetro dos buracos é assintoticamente menor que o “crítico”, isto é,  $a_{T_i^\epsilon} < a_\epsilon$  (buracos pequenos), temos:

$$(\tilde{u}_\epsilon, P_\epsilon(p_\epsilon)) \rightarrow (u, p), \text{ forte, em } [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}],$$

onde  $(u, p)$  é a única solução de  $(S)$ .

Sintetizando, teríamos:

$$S_\epsilon \rightarrow S \text{ (Stokes), quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

3. Quando o diâmetro dos buracos é assintoticamente maior que o “crítico” (buracos grandes), isto é,  $a_{T_i^\epsilon} > a_\epsilon$ , porém reservando-se determinadas proporções, isto é,  $a_{T_i^\epsilon} < \epsilon$  temos:

$$\left(\frac{\tilde{u}_\epsilon}{\sigma_\epsilon}, P_\epsilon(p_\epsilon)\right) \rightarrow (u, p), \text{ forte, em } [L^2(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}],$$

onde  $(u, p)$  é a única solução de  $(D)$  e  $\sigma_\epsilon = \frac{a_\epsilon}{a_{T_i^\epsilon}}$ .

Sintetizando, teríamos:

$$S_\epsilon \rightarrow D \text{ (Lei de Darcy), quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Agora aqui, neste trabalho, passamos a estudar a homogeneização de uma equação de reação-difusão não-linear, com condição de fronteira de Dirichlet homogênea, em domínios perfurados com “pequenos” buracos. Para isto, seja  $\Omega$  um domínio limitado

fixado do  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ). Denotamos por  $\Omega_\epsilon$  o domínio obtido removendo-se de  $\Omega$  o conjunto  $T_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} T_i^\epsilon$ , onde  $T_i^\epsilon$  são “pequenos” subconjuntos fechados de  $\Omega$ , ou seja,

$$\Omega_\epsilon = \Omega - \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} T_i^\epsilon.$$

Aqui,  $\epsilon > 0$  denota um parâmetro que toma seus valores em uma seqüência (um net) que tende para zero enquanto que  $N(\epsilon)$  tende para o infinito. Finalmente, seja  $T > 0$  fixado. Consideremos a seguinte equação de reação-difusão não linear

$$\begin{cases} u'_\epsilon - \beta \Delta u_\epsilon + |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon = -\alpha^2 u_\epsilon + f_\epsilon & \text{em } Q_\epsilon = \Omega_\epsilon \times (0, T) \\ u_\epsilon = 0 & \text{em } \Sigma_\epsilon = \Gamma_\epsilon \times (0, T), \Gamma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon \\ u_\epsilon(x, 0) = u_\epsilon^0(x) & \text{em } \Omega_\epsilon, \end{cases}$$

onde  $\beta$  é uma constante real positiva,  $\rho$  um número real positivo e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

O estudo desta equação foi motivado pela equação de reação-difusão que aparece em Brézis [4]:

$$\begin{cases} u' - M \Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ + \text{Condições de contorno e dado inicial} \end{cases}$$

onde  $u(x, t)$  é um vetor de  $m$  componentes,  $M$  é uma matriz diagonal  $m \times m$ , e  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação não linear.

Estamos considerando uma equação vetorial não acoplada o que faz com que seja suficiente o estudo da equação em apenas uma de suas componentes. Assim estudaremos esta equação apenas em sua forma escalar.

Estas equações de reação-difusão modelam fenômenos que aparecem em variados campos da ciência tais como: química, biologia, neurofisiologia, epidemiologia, combustão, genética de população, etc.

O estudo da homogeneização da equação de reação-difusão é feito utilizando-se algumas técnicas estabelecidas, desde 1977, por Luc Tartar (ver [46]).

O trabalho que desenvolvemos aqui segue nos moldes de [11] e está fundamentalmente baseado em [9].

Em toda a apresentação do presente trabalho, os conjuntos  $\Omega_\epsilon$  serão supostos satisfazerem as condições do quadro funcional abstrato introduzido por Doina Cioranescu e François Murat [8] (ver hipóteses (2.1) abaixo) para o estudo da homogeneização de problemas elípticos em domínios perfurados com “pequenos” buracos, com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas. O caso modelo (veja Figura 1 abaixo), para o nosso estudo, é provido por um domínio periodicamente perfurado (com um período  $2\epsilon$  na direção de cada eixo coordenado) por buracos de diâmetro  $a_{T_\epsilon}$ , onde  $a_{T_\epsilon}$  é assintoticamente igual ao “tamanho crítico”  $a_\epsilon$ .

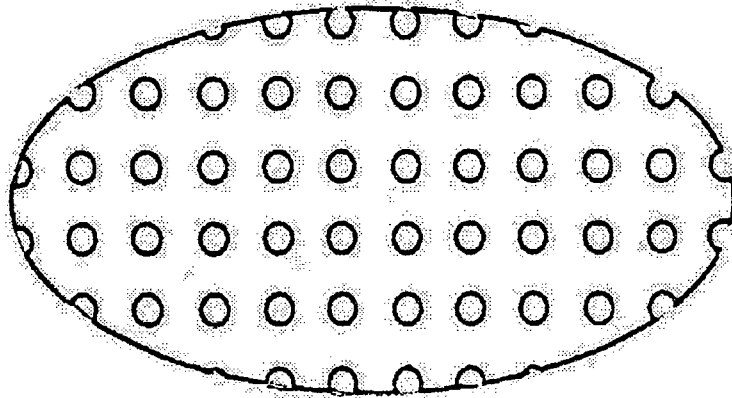


Figura 1:

Este tamanho crítico  $a_\epsilon$  é dado por

$$a_\epsilon = \begin{cases} \delta_\epsilon \exp(-C_0/\epsilon^2) & \text{para } N = 2 \\ C_0 \epsilon^{N/(N-2)} & \text{para } N \geq 3 \end{cases}$$

onde  $C_0 > 0$  é fixado e  $\epsilon^2 \log \delta_\epsilon \rightarrow 0$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$  (veja [9], Capítulo 2).

Esta condição é fundamental na construção do quadro abstrato de hipóteses sobre os buracos. As demonstrações contidas neste trabalho estão baseadas na existência de tal quadro funcional de hipóteses.

Ressaltamos que a principal dificuldade deste trabalho reside no fato de, devido as hipóteses sobre os dados do problema, conseguir-se apenas uma convergência fraca no termo  $\Delta u_\epsilon$ , o que nos leva a lançar mão do quadro abstrato de hipóteses construído por D. Coanorescu e F. Murat para que seja possível a passagem ao limite neste termo. Observamos ainda que para o tratamento deste problema outras técnicas seriam possíveis como a compacidade compensada ou o Método de Bloch-Waves (Ver [12]).

Este trabalho é somente concebido para dados de fronteira de Dirichlet homogêneos. Observamos que o caso de condições de fronteira de Neumann homogêneas conduz a resultados completamente diferentes, com tamanho crítico sendo, neste caso,  $a_\epsilon = \epsilon$  (veja D. Cioranescu e P. Donato [8] para homogeneização deste problema).

O presente trabalho está organizado como segue:

O Capítulo 1 está dividido em três partes. Na Secção 1.1 apresentamos o problema a ser homogeneizado e obtemos uma solução no domínio  $\Omega_\epsilon$ , para cada  $\epsilon$  fixado. Na Secção 1.2 demonstramos que a solução encontrada na Secção 1.1 é única. Na Secção 1.3 demonstramos resultados de regularidade da solução.

O Capítulo 2 está dividido em duas partes. Na Secção 2.1, relembramos o quadro funcional abstrato de [11] sobre a geometria dos buracos. Na Secção 2.2, apresentamos alguns resultados de compacidade.

O Capítulo 3, apresenta o principal resultado deste trabalho, o Teorema 3.1, que nos dá a convergência do processo de homogeneização da equação de reação-difusão. A semicontinuidade inferior da correspondente energia é também demonstrada.

O Capítulo 4 apresenta apenas uma secção, que trata do estabelecimento e demonstração do resultado de correção da equação de reação-difusão.

O Capítulo 5, constituído também de somente uma secção, considera o caso onde o tamanho dos buracos é menor que o tamanho crítico.

Finalmente, o Apêndice A é dedicado à apresentação de alguns resultados básicos.

# Capítulo 1

## Equação de reação-difusão em domínios com pequenos buracos

Neste capítulo estudaremos (as condições para a existência e a unicidade) o problema de Cauchy proposto para a equação

$$u'_\epsilon - \beta \Delta u_\epsilon + |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon = -\alpha^2 u_\epsilon + f_\epsilon, \quad \rho > 0.$$

Faremos uso do Método standard de Faedo-Galerkin. Iniciaremos com a demonstração da existência de solução, a seguir estudaremos as condições para que haja unicidade, e trataremos também de resultados de regularidade. Enunciaremos, agora, o problema básico que será o assunto deste capítulo.

**Problema 1.** Seja  $\Omega_\epsilon$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ),  $\Gamma_\epsilon$  a fronteira de  $\Omega_\epsilon$ , que tomaremos regular (lipschitziana),  $\rho$  um número real positivo,  $\beta$  um número real positivo,  $\alpha$  um número real,  $Q_\epsilon$  o cilindro  $\Omega_\epsilon \times (0, T)$ ,  $\Sigma_\epsilon = \Gamma_\epsilon \times (0, T)$  a fronteira lateral de  $Q_\epsilon$ ,  $f_\epsilon : Q_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\epsilon > 0$  fixado. Encontrar  $u_\epsilon : Q_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{cases} u'_\epsilon - \beta \Delta u_\epsilon + |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon = -\alpha^2 u_\epsilon + f_\epsilon & \text{em } Q_\epsilon = \Omega_\epsilon \times (0, T) \\ u_\epsilon = 0 & \text{em } \Sigma_\epsilon = \Gamma_\epsilon \times (0, T), \Gamma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon \\ u_\epsilon(x, 0) = u_\epsilon^0(x) & \text{em } \Omega_\epsilon \end{cases} \quad (1.1)$$

**Observação 1.1** Note que estamos representando por  $u'_\epsilon$  a derivada de  $u_\epsilon(x, t)$  em relação a  $t$ .  $\square$

## 1.1 Existência de solução fraca

Antes de iniciarmos a resolução do Problema 1, faremos alguns comentários sobre a sua formulação, pois como foi posta é extremamente vaga. O ponto crucial da formulação é saber em que sentido  $u'_\epsilon - \beta \Delta u_\epsilon + |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon + \alpha^2 u_\epsilon$  é igual a  $f_\epsilon$ , em  $Q_\epsilon$ . Responder a esta pergunta equivale a dar a definição de solução  $u_\epsilon$  da equação em questão. Diremos, ainda de maneira vaga, que  $u'_\epsilon - \beta \Delta u_\epsilon + |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon + \alpha^2 u_\epsilon = f_\epsilon$  num sentido fraco, a ser precisado posteriormente, em contraposição a igualdade pontual quase sempre em  $Q_\epsilon$ . Outra observação que fazemos é a respeito da condição  $u_\epsilon = 0$  em  $\Sigma_\epsilon$ , que também será entendida ao determinarmos o espaço correto onde será encontrada a solução  $u_\epsilon$ . Finalmente, chamamos a atenção para o fato de que a escolha de  $u_\epsilon^0$  e  $f$  vai determinar o espaço aonde será encontrada a solução  $u_\epsilon$  do Problema 1, como pode ser constatado examinando-se o enunciado do Teorema 1.1, que apresenta a solução do referido problema.

**Teorema 1.1** *Seja  $\Omega_\epsilon$  como acima, e as funções  $f_\epsilon$  e  $u_\epsilon^0$  satisfazendo as seguintes hipóteses:*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\epsilon^0 \in H_0^1(\Omega_\epsilon) \cap H^2(\Omega_\epsilon) \\ f'_\epsilon = f'_{1\epsilon} + f'_{2\epsilon} \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\epsilon)) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon)), \\ \text{com } f'_{1\epsilon} \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\epsilon)) \text{ e } f'_{2\epsilon} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon)) \\ f_\epsilon(0) \in L^2(\Omega_\epsilon) \\ \rho \leq \frac{2}{N-2}, \quad N \geq 3, \quad \rho \text{ um número real qualquer quando } N = 2. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Então existe uma função  $u_\epsilon : Q_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições:

$$u_\epsilon \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon)) \quad (1.3)$$

$$u'_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon)) \quad (1.4)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_\epsilon - \beta \Delta u_\epsilon + |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon = -\alpha^2 u_\epsilon + f_\epsilon \quad \text{em } Q_\epsilon = \Omega_\epsilon \times (0, T) \\ u_\epsilon(x, 0) = u_\epsilon^0(x) \quad \text{em } \Omega_\epsilon. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

**Observação 1.2** A formulação variacional da equação de reação-difusão (1.5) é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\epsilon} u_\epsilon(x, t) v(x) dx + \beta ((u_\epsilon(t), v)) + \int_{\Omega_\epsilon} |u_\epsilon(x, t)|^\rho u_\epsilon(x, t) v(x) dx + \\ \alpha^2 \int_{\Omega_\epsilon} u_\epsilon(x, t) dx = \int_{\Omega_\epsilon} f(x, t) v(x) dx, \quad \text{em } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\epsilon), \end{array} \right.$$

onde  $((\cdot, \cdot))$  é a forma de Dirichlet

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

**Observação 1.3** Representa-se por  $u(t)$  a aplicação que leva  $x$  em  $u(x, t)$ . Assim, a condição inicial  $u(x, 0)$  pode ser representada por  $u(0) = u^0$ , omitindo-se  $x$ , a derivada  $\frac{\partial u}{\partial t}$  ou  $u'_t$  representa-se por  $u'$ .  $\square$



**Observação 1.4** Supondo (1.3), (1.4) e (1.5)<sub>1</sub> satisfeitas vemos que faz sentido (1.5)<sub>2</sub>. De fato, conclui-se de (1.3) que  $u_\epsilon \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$  e de (1.4) segue-se que  $u'_\epsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$ . Portanto, do Teorema A.3.6 do Apêndice A.3, resulta que  $u_\epsilon$  é contínua com valores em  $L^2(\Omega_\epsilon)$ , isto é,  $u_\epsilon \in C^0([0, T]; L^2(\Omega_\epsilon))$ , fazendo sentido calcular  $u_\epsilon(0)$ . Além disso, conclui-se, através de um teorema de regularidade, que  $u_\epsilon \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega_\epsilon))$ .  $\square$

**Observação 1.5** De (1.3) obtém-se informações sobre o comportamento da solução  $u_\epsilon$  na fronteira lateral  $\Sigma_\epsilon$  do cilindro  $Q_\epsilon$ . Para isto é suficiente notar que  $u_\epsilon(t) \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$  quase sempre, logo possui traço nulo.  $\square$

**Observação 1.6** Se  $p = \rho + 2$ , o conjugado  $p'$  de  $p$  será  $p' = \frac{\rho + 2}{\rho + 1}$  e verifica-se facilmente<sup>1</sup> que se  $v \in L^p(\Omega_\epsilon)$  então  $|v|^\rho v \in L^{p'}(\Omega_\epsilon)$ , isto é,  $v \rightarrow |v|^\rho v$  é uma aplicação de  $L^p(\Omega_\epsilon)$  em  $L^{p'}(\Omega_\epsilon)$ , para  $p = \rho + 2$ .

Do teorema de imersão de Sobolev temos que  $H_0^1(\Omega_\epsilon) \subset L^q(\Omega_\epsilon)$ , para  $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ ,  $N \geq 3$ , com imersão contínua. Como  $p = \rho + 2 \leq \frac{2N}{N-2} = q$ , e  $\Omega_\epsilon$  limitado, segue-se que  $L^q(\Omega_\epsilon) \subset L^p(\Omega_\epsilon)$ , por conseguinte  $H_0^1(\Omega_\epsilon) \subset L^q(\Omega_\epsilon) \subset L^p(\Omega_\epsilon)$ . Assim, sendo (1.3) verdadeira, conclui-se facilmente que

$$|u_\epsilon|^\rho u_\epsilon \in L^\infty(0, T; L^{p'}(\Omega_\epsilon)). \quad (1.6)$$

$\square$

*Demonstração do Teorema 1.1:* A demonstração a ser desenvolvida consiste em aproximar a solução que se deseja encontrar, por soluções de problemas análogos, porém em dimensão finita. A dificuldade reside em demonstrar-se que esta seqüência de soluções obtidas em dimensão finita, converge para a solução do Teorema 1.1. Este

---

<sup>1</sup>De fato,  $\int_{\Omega_\epsilon} ||v|^\rho v|^{p'} = \int_{\Omega_\epsilon} ||v|^\rho v|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} = \int_{\Omega_\epsilon} (|v|^{\rho+1})^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} = \int_{\Omega_\epsilon} |v|^{\rho+2} = \int_{\Omega_\epsilon} |v|^p < \infty$ .

método foi empregado originalmente por Faedo e Galerkin.

O método de aproximação de Faedo-Galerkin consiste das seguintes etapas:

- (i) Construção de soluções aproximadas em sub-espços de dimensão finita.
- (ii) Estimativas a priori sobre as soluções aproximadas.
- (iii) Passagem ao limite das soluções aproximadas.
- (iv) Verificação da condição inicial.

### Etapa (i) - Construção das soluções aproximadas

Observando que  $H_0^1(\Omega_\epsilon) \cap H^2(\Omega_\epsilon)$  é um espaço de Hilbert separável, então resulta que existe uma seqüência de vetores

$$w_{\epsilon 1}, w_{\epsilon 2}, \dots, w_{\epsilon m}, \dots$$

satisfazendo as seguintes condições:

- $w_{\epsilon j} \in H_0^1(\Omega_\epsilon) \cap H^2(\Omega_\epsilon)$  para todo  $j$ ;
- para cada  $m$  fixo os vetores  $w_{\epsilon 1}, w_{\epsilon 2}, \dots, w_{\epsilon m}$  são linearmente independentes;
- as combinações lineares finitas dos  $w_{\epsilon j}$  são densas em  $H_0^1(\Omega_\epsilon) \cap H^2(\Omega_\epsilon)$ .

Seja  $W_{\epsilon m} = [w_{\epsilon 1}, w_{\epsilon 2}, \dots, w_{\epsilon m}]$  o subespaço  $m$ -dimensional de  $H_0^1(\Omega_\epsilon) \cap H^2(\Omega_\epsilon)$ , gerado pelos  $m$  primeiros vetores.

Vamos a seguir determinar uma solução aproximada da solução procurada, sob a forma

$$u_{\epsilon m}(t) = \sum_{j=1}^m g_{\epsilon jm}(t) w_{\epsilon j}(x)$$

sendo os  $g_{\epsilon jm}$  determinados pelas seguintes condições:

$$\begin{aligned} (u'_{\epsilon m}(t), w_{\epsilon j}) + \beta((u_{\epsilon m}(t), w_{\epsilon j})) + (|u_{\epsilon m}|^\rho u_{\epsilon m}, w_{\epsilon j}) = \\ = -\alpha^2(u_{\epsilon m}(t), w_{\epsilon j}) + (f_\epsilon(t), w_{\epsilon j}), \quad \text{para } 1 \leq j \leq m, \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde o parêntese  $(\cdot, \cdot)$  representa o produto escalar no  $L^2(\Omega_\epsilon)$  e  $((\cdot, \cdot))$  é a forma de Dirichlet definida anteriormente.

Estabeleceremos, agora, as condições iniciais do sistema (1.7). Tomou-se  $u_\epsilon^0 \in H_0^1(\Omega_\epsilon) \cap H^2(\Omega_\epsilon)$ , logo pode-se aproximá-la pelos  $w_{\epsilon j}$ , isto é, existem  $\beta_{jm} \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , tais que

$$u_{\epsilon m}^0 = \sum_{j=1}^m \beta_{jm} w_{\epsilon j} \text{ converge para } u_\epsilon^0 \text{ em } H_0^1(\Omega_\epsilon) \cap H^2(\Omega_\epsilon).$$

Portanto, uma condição inicial natural para o sistema (1.7) é:

$$u_{\epsilon m}(0) = u_{\epsilon m}^0, \text{ isto é, } g_{\epsilon jm}(0) = \beta_{jm}, \text{ para } 1 \leq j \leq m. \quad (1.8)$$

O sistema (1.7), (1.8), sendo os  $w_{\epsilon j}$  linearmente independentes, pode ser escrito numa forma adequada à aplicação do Teorema de existência de Carathéodory [35], Apêndice 2. Resulta que existe uma solução  $\{g_{\epsilon jm}\}_{1 \leq j \leq m}$ , definida num intervalo  $(0, t_{\epsilon m})$  de  $(0, T)$ . As estimativas a priori demonstradas a seguir, permitirão prolongar a solução ao intervalo  $(0, T)$ . (Ver Apêndice 2, de [35].)

### Etapa (ii) - Estimativas a priori

A primeira estimativa a priori é obtida da seguinte maneira. Multiplique a equação (1.7) por  $g'_{j\epsilon m}(t)$  e some estas equações para  $j = 1, 2, \dots, m$  obtendo-se:

$$\begin{aligned} (u'_{\epsilon m}(t), u'_{\epsilon m}(t)) + \beta((u_{\epsilon m}(t), u'_{\epsilon m}(t))) + (|u_{\epsilon m}(t)|^p u_{\epsilon m}(t), u'_{\epsilon m}(t)) = \\ = -\alpha^2(u_{\epsilon m}(t), u'_{\epsilon m}(t)) + (f_\epsilon(t), u'_{\epsilon m}(t)). \end{aligned} \quad (1.9)$$

**Observação 1.7** Note que pela Fórmula de Green,

$$\begin{aligned} ((u_{\epsilon m}(t), u'_{\epsilon m}(t))) &= \int_{\Omega} \nabla u_{\epsilon m} \cdot \nabla u'_{\epsilon m} dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u_{\epsilon m}) \cdot u'_{\epsilon m} dx \\ &= - \int_{\Omega} \Delta u_{\epsilon m} u'_{\epsilon m} dx = -(\Delta u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}). \quad \square \end{aligned}$$

Fazendo  $t = 0$  em (1.9) então pela Observação 1.7, pela desigualdade triangular e aplicando a desigualdade de Schwarz, resulta

$$\begin{aligned}
|u'_{\epsilon m}(0)|^2 &= \beta(\Delta u_{\epsilon m}(0), u'_{\epsilon m}(0)) - (|u_{\epsilon m}(0)|^\rho u_{\epsilon m}(0), u'_{\epsilon m}(0)) \\
&\quad - \alpha^2(u_{\epsilon m}(0), u'_{\epsilon m}(0)) + (f_\epsilon(0), u'_{\epsilon m}(0)) \\
&\leq \beta|(\Delta u_{\epsilon m}(0), u'_{\epsilon m}(0))| + (|u_{\epsilon m}(0)|^\rho u_{\epsilon m}(0), u'_{\epsilon m}(0))| \\
&\quad + \alpha^2|(u_{\epsilon m}(0), u'_{\epsilon m}(0))| + |(f_\epsilon(0), u'_{\epsilon m}(0))| \\
&\leq \beta|\Delta u_{\epsilon m}(0)||u'_{\epsilon m}(0)| + \|u_{\epsilon m}(0)\|^{\rho+1} |u'_{\epsilon m}(0)| \\
&\quad + \alpha^2|u_{\epsilon m}(0)||u'_{\epsilon m}(0)| + |f_\epsilon(0)||u'_{\epsilon m}(0)|
\end{aligned}$$

e assim

$$|u'_{\epsilon m}(0)| \leq \beta|\Delta u_{\epsilon m}(0)| + \|u_{\epsilon m}(0)\|^{\rho+1} + \alpha^2|u_{\epsilon m}(0)| + |f_\epsilon(0)|. \quad (1.10)$$

**Observação 1.8** Vamos examinar o termo  $|u_{\epsilon m}(0)|^p$  ( $p = \rho + 1$ ) da desigualdade, (1.10), acima.

Sabe-se do teorema de imersão de Sobolev que  $H_0^1(\Omega_\epsilon) \subset L^q(\Omega_\epsilon)$ , para  $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ ,  $N \geq 3$ , sendo esta imersão contínua, conseqüência da Desigualdade de Sobolev. Temos por hipótese  $\rho \leq \frac{2}{N-2}$  o que implica que  $p = \rho + 1 \leq \frac{N}{N-2} = q$ , resultando  $L^q(\Omega_\epsilon) \subset L^p(\Omega_\epsilon)$ .

Note que  $p = \rho + 1$  e  $u_\epsilon^0$  foi tomado em  $H_0^1(\Omega_\epsilon) \cap H^2(\Omega_\epsilon)$ , isto é,  $u_\epsilon^0 \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$ , logo, do teorema de imersão de Sobolev, obtém-se  $u_\epsilon^0 \in L^q(\Omega_\epsilon)$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ , sendo  $\|u_\epsilon^0\|_{L^q(\Omega_\epsilon)} \leq C\|u_\epsilon^0\|_{H_0^1(\Omega_\epsilon)}$ . Como  $p = \rho + 1 \leq \frac{N}{N-2} = q$ , e  $\Omega_\epsilon$  limitado, segue-se que  $u_\epsilon^0 \in L^p(\Omega_\epsilon)$ . Assim, sendo  $u_{\epsilon m}^0$  convergente para  $u_\epsilon^0$  em  $H_0^1(\Omega_\epsilon) \cap H^2(\Omega_\epsilon)$ , obtém-se, do teorema de imersão de Sobolev, que  $u_{\epsilon m}^0$  é convergente para  $u_\epsilon^0$  em  $L^q(\Omega_\epsilon)$ , logo em  $L^p(\Omega_\epsilon)$ , isto é,

$$\|u_{\epsilon m}^0\|_{L^p(\Omega_\epsilon)}^p \text{ converge para } \|u_\epsilon^0\|_{L^p(\Omega_\epsilon)}^p. \quad \square$$

Desta observação, retornando à (1.10), conclui-se

$$|u'_{\epsilon m}(0)| \leq C + \beta|\Delta u_{\epsilon m}(0)| + \alpha^2|u_{\epsilon m}(0)| + |f_{\epsilon}(0)|.$$

Das hipóteses (1.2) do teorema, conclui-se que

$$|u'_{\epsilon m}(0)| \leq C.$$

Portanto

$$u'_{\epsilon m}(0) \text{ é limitada em } L^2(\Omega_{\epsilon}) \text{ independentemente de } m. \quad (1.11)$$

O que faremos a seguir é derivar ambos os membros da equação aproximada (1.7) em relação a  $t$ , para obtermos

$$\begin{aligned} (u''_{\epsilon m}(t), w_{\epsilon j}) + \beta((u'_{\epsilon m}(t), w_{\epsilon j})) + (\rho + 1)(|u_{\epsilon m}(t)|^{\rho} u'_{\epsilon m}(t), w_{\epsilon j}) = \\ = -\alpha^2(u'_{\epsilon m}(t), w_{\epsilon j}) + (f'_{\epsilon}(t), w_{\epsilon j}) \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Agora, multiplicando-se a equação (1.12) por  $g'_{j\epsilon m}(t)$  e somando estas equações para  $j = 1, 2, \dots, m$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} (u''_{\epsilon m}(t), u'_{\epsilon m}(t)) + \beta((u'_{\epsilon m}(t), u'_{\epsilon m}(t))) + (\rho + 1)(|u_{\epsilon m}(t)|^{\rho} u'_{\epsilon m}(t), u'_{\epsilon m}(t)) = \\ = -\alpha^2(u'_{\epsilon m}(t), u'_{\epsilon m}(t)) + \langle f'_{\epsilon}(t), u'_{\epsilon m}(t) \rangle, \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|u'_{\epsilon m}(t)|^2 + 2\beta||u'_{\epsilon m}(t)||^2 + 2(\rho + 1)||u_{\epsilon m}(t)|^{\rho}||u'_{\epsilon m}(t)|^2 + 2\alpha^2|u'_{\epsilon m}(t)|^2 = \\ = 2\langle f'_{\epsilon}(t), u'_{\epsilon m}(t) \rangle. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Integrando (1.13) de 0 a  $t < t_{\epsilon m}$ , e usando novamente a desigualdade de Schwarz e a desigualdade elementar  $2ab \leq a^2 + b^2$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
|u'_{em}(t)|^2 &+ 2\beta \int_0^t \|u'_{em}(s)\|^2 ds + 2(\rho + 1) \int_0^t \|u_{em}(s)\|^\rho \|u'_{em}(s)\|^2 ds + 2\alpha^2 \int_0^t |u'_{em}(s)|^2 ds \\
&= 2 \int_0^t (f'_{1\epsilon}(s) + f'_{2\epsilon}(s), u'_{em}(s)) ds + |u'_{em}(0)|^2 \\
&= 2 \int_0^t \left[ (f'_{1\epsilon}(s), u'_{em}(s)) + \langle f'_{2\epsilon}(s), u'_{em}(s) \rangle_{H^{-1}(\Omega_\epsilon), H_0^1(\Omega_\epsilon)} \right] ds + |u'_{em}(0)|^2 \\
&\leq 2 \int_0^t |f'_{1\epsilon}(s)| \|u'_{em}(s)\| ds + 2 \int_0^t \|f'_{2\epsilon}(s)\| \|u'_{em}(s)\| ds + |u'_{em}(0)|^2 \\
&= \int_0^t 2 (|f'_{1\epsilon}(s)|)^{\frac{1}{2}} (|f'_{1\epsilon}(s)|)^{\frac{1}{2}} |u'_{em}(s)| ds + \int_0^t 2 \frac{1}{\sqrt{\beta}} \|f'_{2\epsilon}(s)\| \sqrt{\beta} \|u'_{em}(s)\| ds \\
&\quad + |u'_{em}(0)|^2 \\
&\leq \int_0^t |f'_{1\epsilon}(s)| ds + \int_0^t |f'_{1\epsilon}(s)| \|u'_{em}(s)\|^2 ds + \frac{1}{\beta} \int_0^t \|f'_{2\epsilon}(s)\|^2 ds \\
&\quad + \beta \int_0^t \|u'_{em}(s)\|^2 ds + |u'_{em}(0)|^2
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos da desigualdade acima e observando (1.2) e (1.11) resulta que

$$\begin{aligned}
|u'_{em}(t)|^2 + \beta \int_0^t \|u'_{em}(s)\|^2 ds + 2(\rho + 1) \int_0^t \|u_{em}(s)\|^\rho \|u'_{em}(s)\|^2 ds + 2\alpha^2 \int_0^t |u'_{em}(s)|^2 ds \\
\leq C_1 + C_2 \int_0^t |u'_{em}(s)|^2 ds.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Note que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes que não dependem de  $m$ .

De (1.14) conclui-se que

$$|u'_{em}(t)|^2 \leq C_1 + C_2 \int_0^t |u'_{em}(s)|^2 ds,$$

de onde pelo Lema de Gronwall, conclui-se que

$$|u'_{em}(t)| \leq C, \tag{1.15}$$

onde  $C$  é uma constante independente de  $m$ , para  $t \in (0, t_{em})$ .

Retornando a (1.14), tendo em mente (1.15), obtém-se

$$\beta \int_0^t \|u'_{em}(s)\|^2 ds + 2(\rho + 1) \int_0^t \|u_{em}(s)\|^\rho \|u'_{em}(s)\|^2 ds + 2\alpha^2 \int_0^t |u'_{em}(s)|^2 ds \leq C, \quad (1.16)$$

onde  $C$  é uma constante independente de  $m$ , para  $t \in (0, t_{em})$ .

Conclui-se do teorema de prolongamento de equações diferenciais ordinárias, e das estimativas (1.15) e (1.16) que a solução aproximada  $u_{em}(t)$  existe de fato no intervalo  $(0, T)$ . Assim (1.15) e (1.16) são válidas independentemente de  $m$ , para todo  $t$  em  $(0, T)$ . Conclui-se daí que

$$u'_{em}(t) \text{ pertence a um limitado de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon)) \text{ independentemente de } m. \quad (1.17)$$

$$u'_{em}(t) \text{ pertence a um limitado de } L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon)) \text{ independentemente de } m. \quad (1.18)$$

Como  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon)) \hookrightarrow L^1(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$  temos que  $u'_{em}$  é limitada em  $L^1(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$ .

Note que

$$u_{em}(t) = u_{em}(0) + \int_0^t u'_{em}(s) ds.$$

Então,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|u_{em}(t)\| &\leq \|u_{em}(0)\| + \left\| \int_0^T u'_\epsilon(s) ds \right\| \\ &\leq \|u_\epsilon(0)\| + \int_0^T \|u'_{em}(s)\| ds. \end{aligned}$$

Assim, temos que  $u_{em}$  é absolutamente contínua em  $[0, T]$ , com valores em  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ , sendo

$u_{em}$  limitada em  $C^0([0, T]; H_0^1(\Omega_\epsilon)) \hookrightarrow L^\infty((0, T); H_0^1(\Omega_\epsilon))$  independentemente de  $m$ .

Portanto,

$$u_{\epsilon m}(t) \text{ pertence a um limitado de } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon)) \text{ independentemente de } m. \quad (1.19)$$

### Resumo das Estimativas Obtidas

- $u_{\epsilon m}$  é limitada em  $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$
- $|u_{\epsilon m}|^\rho u_{\epsilon m}$  é limitada em  $L^\infty(0, T; L^{p'}(\Omega_\epsilon))$ ,  $p' = \frac{\rho + 2}{\rho + 1}$
- $u'_{\epsilon m}$  é limitada em  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$
- $u'_{\epsilon m}$  é limitada em  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$ .

Uma vez obtida a solução aproximada em  $(0, T)$ , resta-nos obter o limite destas soluções e provar que este limite é a solução mencionada no enunciado do Teorema 1.1, o que será o nosso objetivo na etapa seguinte.

### Etapa (iii) - Passagem ao limite

Das estimativas (1.19) e (1.17), resulta então que existe uma subsequência  $\{u_{\epsilon\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  de  $\{u_{\epsilon m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ , com as seguintes propriedades

$$u_{\epsilon\nu} \xrightarrow{*} u_\epsilon, \text{ fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon)), \quad (1.20)$$

e

$$u'_{\epsilon\nu} \xrightarrow{*} u'_\epsilon, \text{ fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon)). \quad (1.21)$$

Note que o dual de  $L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$  é  $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$  e que o dual de  $L^1(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$  é  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$ . Aqui identificamos, via Teorema de Representação de Riesz,  $L^2(\Omega_\epsilon)$  com seu dual.



A convergência (1.20) equivale a dizer que para toda  $w \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$  tem-se:

$$\int_0^T \langle u_{\epsilon\nu}(t), w(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle u_\epsilon(t), w(t) \rangle dt. \quad (1.22)$$

Em particular quando  $w \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$  ou  $w \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$ . Note que,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa o par dualidade  $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon)), L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$ . Da convergência (1.21), para toda  $w \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$ , tem-se

$$\int_0^T (u'_{\epsilon\nu}(t), w(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u'_\epsilon(t), w(t)) dt. \quad (1.23)$$

De (1.20) conclui-se que  $u_\epsilon \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$  e de (1.21) que  $u'_\epsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$

Para passarmos o limite na equação aproximada (1.7) resta examinarmos a parte correspondente da não linearidade,  $|u_{\epsilon\nu}|^\rho u_{\epsilon\nu}$ .

Obtivemos que  $\{u_{\epsilon m}\}$  é limitada em  $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$  e que  $\{u'_{\epsilon m}\}$  é limitada em  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$ . Assim, do Teorema A.5.3 (Teorema de compacidade de Aubion-Lions), fazendo  $B_0 = H_0^1(\Omega_\epsilon)$  e  $B = B_1 = L^p(\Omega_\epsilon)$ , com  $p \in [1, q]$ , sendo  $q$  tal que  $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ , devido ao Teorema A.5.2 (Teorema de Rellich-Kondrachov), resulta que existe uma subsequência, ainda denotada pelo mesmo símbolo  $\{u_{\epsilon m}\}$ , tal que

$$u_{\epsilon m} \rightarrow u_\epsilon, \text{ forte, em } L^p(0, T; L^p(\Omega_\epsilon)) = L^p(Q_\epsilon), \quad (1 < p < \infty),$$

e passando a uma subsequência, (se necessário for), obtemos que:

$$u_{\epsilon m} \rightarrow u_\epsilon, \text{ quase sempre, em } Q_\epsilon.$$

Agora, sendo a função  $s \mapsto |s|^\rho s$  contínua, resulta que

$$|u_{\epsilon m}|^\rho u_{\epsilon m} \rightarrow |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon, \text{ quase sempre, em } Q_\epsilon. \quad (1.24)$$

Como  $\{u_{\epsilon m}\}$  é limitada em  $L^\infty(0, T; L^q(\Omega_\epsilon))$  (pois  $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon)) \hookrightarrow L^\infty(0, T; L^q(\Omega_\epsilon))$ ),

e

$$\| |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon \|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 = \|u_\epsilon\|_{L^{2\rho+2}}^{\rho+1} \leq C \|u_\epsilon\|_{L^q(\Omega_\epsilon)}^{\rho+1} < \infty,$$

pois  $2\rho + 2 \leq q$ , resulta que

$$|u_{\epsilon m}|^\rho u_{\epsilon m} \text{ é limitada em } L^2(Q_\epsilon). \quad (1.25)$$

De (1.24), (1.25) e do Lema de Lions (Corolário A.3.1), vem

$$|u_{\epsilon m}|^\rho u_{\epsilon m} \rightharpoonup |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon, \text{ fraco, em } L^2(Q_\epsilon). \quad (1.26)$$

A convergência (1.26) equivale a dizer que para toda  $w \in L^2(Q_\epsilon)$  tem-se

$$\int_0^T (|u_{\epsilon m}(t)|^\rho u_{\epsilon m}(t), w(t)) dt \rightarrow \int_0^T (|u_\epsilon(t)|^\rho u_\epsilon(t), w(t)) dt \quad (1.27)$$

De (1.26) conclui-se que  $|u_\epsilon|^\rho u_\epsilon \in L^2(Q_\epsilon)$ .

A próxima etapa é demonstrar que  $u_\epsilon$  é solução da equação (1.5)<sub>1</sub>, no sentido de  $\mathcal{D}'(0, T)$ .

De fato, fixando-se  $m_0$  e considerando-se  $\nu > m_0$ , multiplicando-se a equação aproximada (1.7) por  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$  e integrando-se de 0 a  $T$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^T (u'_{\epsilon\nu}(t), v)\theta(t) dt + \beta \int_0^T ((u_{\epsilon\nu}(t), v))\theta(t) dt + \int_0^T (|u_{\epsilon\nu}(t)|^\rho u_{\epsilon\nu}(t), v)\theta(t) dt + \\ + \alpha^2 \int_0^T (u_{\epsilon\nu}(t), v)\theta(t) dt = \int_0^T (f_\epsilon(t), v)\theta(t) dt, \end{aligned}$$

para toda  $v \in W_{\epsilon m_0}$ .

Tomando-se o limite quando  $\nu$  tende para o infinito, e observando-se (1.22), (1.23) e (1.27), conclui-se que

$$\int_0^T (u'_\epsilon(t), v)\theta(t)dt + \beta \int_0^T ((u_\epsilon(t), v))\theta(t)dt + \int_0^T (|u_\epsilon(t)|^\rho u_\epsilon(t), v)\theta(t)dt + \alpha^2 \int_0^T (u_\epsilon(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T (f_\epsilon(t), v)\theta(t)dt, \quad (1.28)$$

para toda  $v \in W_{\epsilon m_0}$  e  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ .

Sendo os  $W_{\epsilon m_0}$  densos em  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ , conclui-se que (1.28) é válida para toda  $v \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$  e  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ . Isto demonstra (1.5)<sub>1</sub> no sentido de  $\mathcal{D}'(0, T)$ , isto é

$$(u'_\epsilon(t), v) + \beta((u_\epsilon(t), v)) + (|u_\epsilon(t)|^\rho u_\epsilon(t), v) + \alpha^2(u_\epsilon(t), v) = (f_\epsilon(t), v),$$

para toda  $v \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$ .

Conclui-se que a  $u_\epsilon(t)$  encontrada através do Método de Faedo-Galerkin, satisfaz (1.3), (1.4) e (1.5)<sub>1</sub>. Falta apenas verificar que ela também satisfaz (1.5)<sub>2</sub>.

#### Etapa (iv) - Verificação da condição inicial

Já vimos que faz sentido calcular  $u_\epsilon(0)$ . De (1.22) e (1.23), tomando  $\theta \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$  tal que  $\theta(0) = 1$  e  $\theta(T) = 0$  e  $v \in L^2(\Omega_\epsilon)$ , obtém-se:

$$\int_0^T (u'_{\epsilon v}(t), v)\theta(t)dt \rightarrow \int_0^T (u'_\epsilon(t), v)\theta(t)dt$$

e

$$\int_0^T (u_{\epsilon v}(t), v)\theta'(t)dt \rightarrow \int_0^T (u_\epsilon(t), v)\theta'(t)dt,$$

para toda  $v \in L^2(\Omega_\epsilon)$ . Adicionando membro a membro, conclui-se que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[(u_{\epsilon v}(t), v)\theta(t)]dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}[(u_\epsilon(t), v)\theta(t)]dt,$$

isto é,

$$(u_{\epsilon v}(0), v) \rightarrow (u_\epsilon(0), v)$$

para toda  $v \in L^2(\Omega_\epsilon)$ , ou seja,

$$u_{\epsilon\nu}(0) \rightharpoonup u_\epsilon(0), \text{ fraco, em } L^2(\Omega_\epsilon).$$

Por construção têm-se que  $u_{\epsilon\nu}(0) = u_{\epsilon\nu}^0$  converge fortemente, para  $u_\epsilon^0$ , em  $H_0^1(\Omega_\epsilon) \cap H^2(\Omega_\epsilon)$ , logo fortemente em  $L^2(\Omega_\epsilon)$ , portanto fraco em  $L^2(\Omega_\epsilon)$ , e assim, pela unicidade do limite, resulta que

$$u_\epsilon(0) = u_\epsilon^0.$$

□

## 1.2 Unicidade da solução fraca

Nesta secção demonstraremos, com as hipóteses do Teorema 1.1, que a solução encontrada é única.

**Teorema 1.2** *Supondo válidas as hipóteses do Teorema 1.1, suponha*

$$\rho \leq \frac{2}{N-2} \quad e \quad N \geq 3.$$

*Então a solução do Teorema 1.1 é única.*

**Observação 1.9** Quando  $N = 2$  a demonstração da unicidade faz-se para  $\rho$  um número real qualquer seguindo o mesmo argumento, pois pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, tem-se que  $H_0^1(\Omega_\epsilon) \hookrightarrow L^q(\Omega_\epsilon)$ , para todo  $q \in [1, +\infty)$ . □

*Demonstração:* Para demonstrarmos a unicidade (para  $N \geq 3$ ), consideremos duas soluções  $u_1$  e  $u_2$  dadas pelo Teorema 1.1, e façamos  $w = u_1 - u_2$ . Então resulta que  $w$  satisfaz às seguintes condições:

$$\begin{cases} (w'(t), v) + \beta((w(t), v)) + \alpha^2(w(t), v) = -(|u_1(t)|^\rho u_1(t) - |u_2(t)|^\rho u_2(t), v), \\ w_\epsilon(0) = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

para toda  $v \in H_0^1(\Omega_\epsilon) \cap H^2(\Omega_\epsilon)$ , no sentido de  $\mathcal{D}'(0, T)$ .

Resta-nos demonstrar que a solução  $w = w(t)$  do problema (1.29) é a função nula, quase sempre, em  $Q_\epsilon$ .

Fazendo  $v = w(t)$  em (1.29), obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \beta \|w(t)\|^2 + \alpha^2 |w(t)|^2 = -(|u_1(t)|^\rho u_1(t) - |u_2(t)|^\rho u_2(t), w(t))$$

Integrando-se de 0 a  $s$ ,  $0 < s < T$ , conclui-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |w(s)|^2 + \beta \int_0^s \|w(t)\|^2 dt + \alpha^2 \int_0^s |w(t)|^2 dt = \\ = - \int_0^s (|u_1(t)|^\rho u_1(t) - |u_2(t)|^\rho u_2(t), w(t)) dt. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Examinemos agora o segundo membro desta igualdade.

Antes porém observemos o que resulta da hipótese  $\rho \leq \frac{2}{N-2}$ .

Sabe-se do teorema de imersão de Sobolev que  $H_0^1(\Omega_\epsilon) \subset L^q(\Omega_\epsilon)$ , para  $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ ,  $N \geq 3$ , sendo esta imersão contínua. (Tendo sido feita a hipótese  $\rho \leq \frac{2}{N-2}$ , para o caso da unicidade, estamos exatamente nas condições acima descritas.)

Retornando ao segundo membro da igualdade (1.30) obtém-se:

$$\frac{1}{2} |w(t)|^2 + \beta \int_0^s \|w(t)\|^2 dt + \alpha^2 \int_0^s |w(t)|^2 dt \leq \int_0^s |(|u_1(t)|^\rho u_1(t) - |u_2(t)|^\rho u_2(t), w(t))| dt.$$

Sendo  $|u_1(t)|^\rho u_1(t)$ ,  $|u_2(t)|^\rho u_2(t)$  pertencentes a  $L^{p'}(\Omega_\epsilon)$  e  $w(t) \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$ , em particular  $w(t) \in L^p(\Omega_\epsilon)$  (pela Observação 1.6), a desigualdade de Hölder nos autoriza a calcular a integral

$$\int_{\Omega_\epsilon} \left| |u_1(t)|^\rho u_1(t) - |u_2(t)|^\rho u_2(t) \right| |w(t)| dx. \quad (1.31)$$

**Observação 1.10** Seja  $F(\lambda) = |\lambda|^\rho \lambda$ , então  $F'(\lambda) = \rho|\lambda|^{\rho-1} \frac{\lambda}{|\lambda|} \lambda + |\lambda|^\rho$ , isto é,  $F'(\lambda) = (\rho + 1)|\lambda|^\rho$ , e assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$|F(u) - F(v)| = |F'(\xi)||u - v|, \text{ com } \xi = u + \theta(v - u), \text{ } 0 < \theta < 1.$$

Como

$$|F'(\xi)| = (\rho + 1)|u + \theta(v - u)|^\rho \leq (\rho + 1)[|u| + |u| + |v|]^\rho \leq 2^\rho(\rho + 1)(|u| + |v|)^\rho$$

(Usamos que  $(a + b)^\rho \leq 2^\rho(\max\{a, b\})^\rho$ .) Logo,  $F'(\xi) \leq 2^{2\rho}(\rho + 1)(|u|^\rho + |v|^\rho)$ , e portanto

$$|F(u) - F(v)| \leq 2^{2\rho}(\rho + 1)(|u|^\rho + |v|^\rho)|u - v|. \quad \square$$

Logo, da Observação 1.10, segue-se que a integral (1.31) é dominada por

$$C_\rho \int_{\Omega_\epsilon} [||u_1(t)|^\rho + |u_2(t)|^\rho]|u_1(t) - u_2(t)||w(t)|dx. \quad (1.32)$$

Tem-se que  $H_0^1(\Omega_\epsilon) \hookrightarrow L^q(\Omega_\epsilon)$ , com  $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ , ou seja,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{N} = 1. \quad (1.33)$$

Mas por hipótese  $\rho \leq \frac{2}{N-2}$ , ou seja,  $\rho N \leq q$ , resultando do teorema de imersão de Sobolev que  $|u_1(t)|^\rho$  e  $|u_2(t)|^\rho$  pertencem a  $L^N(\Omega_\epsilon)$ , pois a norma  $L^N(\Omega_\epsilon)$  destas funções é dominada pelas respectivas normas  $L^q(\Omega_\epsilon)$ , que por sua vez são dominadas pelas normas  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ , em virtude da imersão contínua de  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$  em  $L^q(\Omega_\epsilon)$ . Além disso tem-se  $w(t)$  pertencente a  $L^2(\Omega_\epsilon)$  e  $w(t) \in L^q(\Omega_\epsilon)$ , pelo teorema de imersão de Sobolev. Resulta então que podemos aplicar a desigualdade de Hölder à integral

(1.32), observando (1.33), e assim a integral, de 0 a  $s$ , de (1.32) fica dominada por:

$$\int_0^s (\| |u_1(t)|^\rho \|_{L^N(\Omega_\epsilon)} + \| |u_2(t)|^\rho \|_{L^N(\Omega_\epsilon)}) |w(t)|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \|w(t)\|_{L^q(\Omega_\epsilon)} dt. \quad (1.34)$$

De um argumento usado acima, resulta que  $\| |u_1(t)|^\rho \|_{L^N(\Omega_\epsilon)}$ ,  $\| |u_2(t)|^\rho \|_{L^N(\Omega_\epsilon)}$  são dominadas pelas respectivas normas em  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$  de  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ , quase sempre em  $[0, T]$ . Portanto, possuem o supremo essencial finito. Assim resulta que a integral (1.34) reduz-se a

$$C \int_0^s |w(t)|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \|w(t)\|_{L^q(\Omega_\epsilon)} dt. \quad (1.35)$$

Usando novamente a imersão contínua de  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$  em  $L^q(\Omega_\epsilon)$ , (1.35) é dominada por

$$C \int_0^s |w(t)|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \|w(t)\|_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} dt = \int_0^s \frac{C}{\sqrt{\beta}} |w(t)|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \sqrt{\beta} \|w(t)\|_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} dt. \quad (1.36)$$

Usando a desigualdade elementar,  $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ , resulta que (1.36) é dominada por

$$\int_0^s \frac{C^2}{2\beta} |w(t)|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 dt + \int_0^s \frac{\beta}{2} \|w(t)\|_{H_0^1(\Omega_\epsilon)}^2 dt. \quad (1.37)$$

Substituindo (1.37) em (1.30), obtemos

$$\frac{1}{2} |w(s)|^2 + \frac{\beta}{2} \int_0^s \|w(t)\|^2 dt + \alpha^2 \int_0^s |w(t)|^2 dt \leq C \int_0^s |w(t)|^2 dt,$$

e assim

$$|w(s)|^2 \leq C \int_0^s |w(t)|^2 dt,$$

então, pela desigualdade de Gronwall, resulta que  $w(t)$  é nula, quase sempre, em  $(0, T)$ .  $\square$

### 1.3 Regularidade da solução $u_\epsilon$

**Teorema 1.3** *A solução do Teorema 1.1 possui a seguinte regularidade*

$$u_\epsilon \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega_\epsilon)).$$

*Demonstração:* Demonstraremos esta regularidade para o caso  $\rho \leq \frac{2}{N-2}$  e  $N \geq 3$ .

Seja  $\{u_{\epsilon m}\}_{m \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de soluções aproximadas que aproxima a solução  $u_\epsilon$  de (1.5). Então, se  $m, n \in \mathbb{N}$ , com  $m > n$ , da equação aproximada (1.7), temos

$$\begin{aligned} (u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t), v) + \beta((u_{\epsilon m}(t) - u_{\epsilon n}(t), v)) + (|u_{\epsilon m}(t)|^\rho u_{\epsilon m}(t) - |u_{\epsilon n}(t)|^\rho u_{\epsilon n}(t), v) + \\ + \alpha^2(u_{\epsilon m}(t) - u_{\epsilon n}(t), v) = 0 \quad \forall v \in W_{\epsilon m}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Tomando  $v = u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t)$  na equação (1.38), temos:

$$\begin{aligned} |u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t)|^2 + \beta \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{\epsilon m}(t) - u_{\epsilon n}(t)\|^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_{\epsilon m}(t) - u_{\epsilon n}(t)|^2 = \\ = -(|u_{\epsilon m}(t)|^\rho u_{\epsilon m}(t) - |u_{\epsilon n}(t)|^\rho u_{\epsilon n}(t), u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t)) \end{aligned}$$

Integrando de 0 a  $s$ ,  $0 < s < T$ , e usando a desigualdade triangular, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^s |u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t)|^2 dt + \beta \frac{1}{2} \|u_{\epsilon m}(s) - u_{\epsilon n}(s)\|^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} |u_{\epsilon m}(s) - u_{\epsilon n}(s)|^2 = \\ = \beta \frac{1}{2} \|u_{\epsilon m}(0) - u_{\epsilon n}(0)\|^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} |u_{\epsilon m}(0) - u_{\epsilon n}(0)|^2 \\ - \int_0^s (|u_{\epsilon m}(t)|^\rho u_{\epsilon m}(t) - |u_{\epsilon n}(t)|^\rho u_{\epsilon n}(t), u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t)) dt \\ \leq \beta \frac{1}{2} \|u_{\epsilon m}(0) - u_{\epsilon n}(0)\|^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} |u_{\epsilon m}(0) - u_{\epsilon n}(0)|^2 \\ + \int_0^s (|u_{\epsilon m}(t)|^\rho u_{\epsilon m}(t) - |u_{\epsilon n}(t)|^\rho u_{\epsilon n}(t), u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t)) dt \end{aligned} \quad (1.39)$$

Examinemos o segundo membro desta igualdade.

Os termos  $\|u_{\epsilon m}(0) - u_{\epsilon n}(0)\|$  e  $|u_{\epsilon m}(0) - u_{\epsilon n}(0)|$  convergem para zero em  $\mathbb{R}$ , pois,  $u_{\epsilon m}(0)$  converge para  $u_\epsilon^0$ , forte, em  $H_0^1(\Omega_\epsilon) \cap H^2(\Omega_\epsilon)$ .



Pelas mesmas imersões usadas na unicidade, sendo  $|u_{\epsilon m}(t)|^\rho u_{\epsilon m}(t)$ ,  $|u_{\epsilon n}(t)|^\rho u_{\epsilon n}(t) \in L^p(\Omega_\epsilon)$  e  $u_{\epsilon m}(t) - u_{\epsilon n}(t) \in L^p(\Omega_\epsilon)$ , então a desigualdade de Hölder nos autoriza a calcular a integral

$$\int_{\Omega_\epsilon} \left| |u_{\epsilon m}(t)|^\rho u_{\epsilon m}(t) - |u_{\epsilon n}(t)|^\rho u_{\epsilon n}(t) \right| |u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t)| dx$$

a qual, pela Observação 1.10, é dominada por

$$C_\rho \int_{\Omega_\epsilon} \left[ |u_{\epsilon m}(t)|^\rho + |u_{\epsilon n}(t)|^\rho \right] |u_{\epsilon m}(t) - u_{\epsilon n}(t)| |u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t)| dx \quad (1.40)$$

Tem-se a imersão de  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$  em  $L^q(\Omega_\epsilon)$  com  $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ , ou ainda,  $\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{N} = 1$ .

Como  $\rho \leq \frac{2}{N-2}$  ou  $\rho N \leq q$ , resulta, do teorema de imersão de Sobolev, que  $|u_{\epsilon m}(t)|^\rho$  e  $|u_{\epsilon n}(t)|^\rho$  pertencem a  $L^N(\Omega_\epsilon)$ . Além disso tem-se  $u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t)$  pertencente a  $L^2(\Omega_\epsilon)$  e  $u_{\epsilon m}(t) - u_{\epsilon n}(t) \in L^q(\Omega_\epsilon)$ , pelos mesmos argumentos usados na unicidade. Portanto podemos aplicar a desigualdade de Hölder à integral (1.40), obtendo-se assim que a integral (1.40) é dominada por:

$$\int_0^s \left( \| |u_{\epsilon m}(t)|^\rho \|_{L^N(\Omega_\epsilon)} + \| |u_{\epsilon n}(t)|^\rho \|_{L^N(\Omega_\epsilon)} \right) \| u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t) \|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \cdot \| u_{\epsilon m}(t) - u_{\epsilon n}(t) \|_{L^q(\Omega_\epsilon)} dt. \quad (1.41)$$

De um argumento usado na unicidade, resulta que  $\| |u_{\epsilon m}(t)|^\rho \|_{L^N(\Omega_\epsilon)}$  e  $\| |u_{\epsilon n}(t)|^\rho \|_{L^N(\Omega_\epsilon)}$  são dominadas pelas respectivas normas em  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$  de  $u_{\epsilon m}(t)$  e  $u_{\epsilon n}(t)$ , quase sempre, em  $[0, T]$ . Portanto possuem o supremo essencial finito. Assim, resulta então que a integral (1.41) reduz-se a

$$C \int_0^s \| u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t) \|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \| u_{\epsilon m}(t) - u_{\epsilon n}(t) \|_{L^q(\Omega_\epsilon)} dt. \quad (1.42)$$

Pela imersão contínua de  $H_0^1(\Omega)$  em  $L^q(\Omega)$ , temos que (1.42) é dominada por

$$C \int_0^s \| u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t) \|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \| u_{\epsilon m}(t) - u_{\epsilon n}(t) \|_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} dt. \quad (1.43)$$

Agora, substituindo (1.43) em (1.39), e usando a desigualdade elementar  $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_0^s |u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t)|^2 dt + \beta \frac{1}{2} \|u_{\epsilon m}(s) - u_{\epsilon n}(s)\|^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} |u_{\epsilon m}(s) - u_{\epsilon n}(s)|^2 \\
& \leq \beta \frac{1}{2} \|u_{\epsilon m}(0) - u_{\epsilon n}(0)\|^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} |u_{\epsilon m}(0) - u_{\epsilon n}(0)|^2 \\
& \quad + C \int_0^s |u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t)|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \|u_{\epsilon m}(t) - u_{\epsilon n}(t)\|_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} dt \\
& \leq \beta \frac{1}{2} \|u_{\epsilon m}(0) - u_{\epsilon n}(0)\|^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} |u_{\epsilon m}(0) - u_{\epsilon n}(0)|^2 \\
& \quad + \int_0^s |u'_{\epsilon m}(t) - u'_{\epsilon n}(t)|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 dt + C \int_0^s \|u_{\epsilon m}(t) - u_{\epsilon n}(t)\|_{H_0^1(\Omega_\epsilon)}^2 dt
\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
\|u_{\epsilon m}(s) - u_{\epsilon n}(s)\|^2 & \leq \|u_{\epsilon m}(0) - u_{\epsilon n}(0)\|^2 + C_1 |u_{\epsilon m}(0) - u_{\epsilon n}(0)|^2 \\
& \quad + C_2 \int_0^s \|u_{\epsilon m}(t) - u_{\epsilon n}(t)\|^2 dt.
\end{aligned}$$

Então, pela desigualdade de Gronwall,

$$\|u_{\epsilon m}(s) - u_{\epsilon n}(s)\|^2 \leq \gamma_{m,n} e^{C_2 \cdot T}$$

para todo  $s \in (0, T)$ , onde  $\gamma_{m,n} = (\|u_{\epsilon m}(0) - u_{\epsilon n}(0)\|^2 + C_1 |u_{\epsilon m}(0) - u_{\epsilon n}(0)|^2)$ . Como

$$\gamma_{m,n} \rightarrow 0, \text{ quando } m, n \rightarrow \infty,$$

temos que:

$$\max_{s \in [0, T]} \|u_{\epsilon m}(s) - u_{\epsilon n}(s)\| \rightarrow 0, \text{ quando } m, n \rightarrow \infty.$$

Assim  $\{u_{\epsilon m}\}_{m \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência de Cauchy em  $C^0([0, T]; H_0^1(\Omega_\epsilon))$ , o que implica que  $u_{\epsilon m} \rightarrow u_\epsilon$ , forte, em  $C^0([0, T]; H_0^1(\Omega_\epsilon))$ .  $\square$

**Observação 1.11** Aplicando o Método de Faedo-Galerkin, obtemos que a solução aproximada  $u_{\epsilon m}$ , para  $\epsilon > 0$  fixado, satisfaz:

$$\|u'_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\epsilon))} \leq C, \text{ e } \|u'_{\epsilon m}\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega_\epsilon))} \leq C, \quad (1.44)$$

onde

$$C = C(\|f_\epsilon(0)\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}, \|u_\epsilon^0\|_{H^1_0(\Omega_\epsilon) \cap H^2(\Omega_\epsilon)}, \|f'_\epsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega_\epsilon)) + L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\epsilon))}),$$

independentemente de  $m$ , para cada  $\epsilon > 0$  fixado, e assim, de (1.2)<sub>1</sub>, (1.44) e Lema 1.1 de Teman [47], página 250, obtemos que:

$$\|u_{\epsilon m}\|_{C^0([0,T];H^1_0(\Omega_\epsilon))} \leq C, \quad (1.45)$$

independente de  $m$ , para cada  $\epsilon > 0$  fixado.

# Capítulo 2

## Resultados preliminares

Este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira parte (Subsecção 2.1) descrevemos a geometria do problema e o quadro abstrato de hipóteses introduzido por D. Cioranescu e F. Murat [11] no qual o presente trabalho está baseado. Na Subsecção 2.2 trataremos de resultados de compacidade nos espaços  $L^p(0, T; X)$ , sendo  $X$  um espaço de Banach.

### 2.1 Contexto geométrico

Em vez de fazermos hipóteses geométricas diretas sobre os buracos  $T_i^\epsilon$ , adotamos aqui o quadro funcional abstrato introduzido por D. Cioranescu e F. Murat [11] onde a hipótese sobre a geometria dos buracos é feita admitindo-se a existência de uma família adequada de funções testes. Precisamente, suporemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Existe uma seqüência de funções } (w_\epsilon, \mu_\epsilon, \gamma_\epsilon) \text{ tais que:} \\
(i) \quad w_\epsilon \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \|w_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_0 \\
(ii) \quad w_\epsilon = 0 \text{ em } T_\epsilon \\
(iii) \quad w_\epsilon \rightharpoonup 1, \text{ fracamente, em } H^1(\Omega), \text{ e q.s. em } \Omega \\
(iv) \quad -\Delta w_\epsilon = \mu_\epsilon - \gamma_\epsilon \text{ onde } \mu_\epsilon, \gamma_\epsilon \in H^{-1}(\Omega) \\
\quad \mu_\epsilon \rightarrow \mu, \text{ fortemente, em } H^{-1}(\Omega) \text{ e} \\
\quad \langle \gamma_\epsilon, \nu_\epsilon \rangle_\Omega = 0 \text{ para todo } \nu_\epsilon \in H_0^1(\Omega) \\
\quad \text{tal que } \nu_\epsilon = 0 \text{ em } T_\epsilon.
\end{array} \right. \quad (2.1)$$

Em (2.1), e daqui em diante,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$  denotará o par dualidade entre  $H^{-1}(\Omega)$  e  $H_0^1(\Omega)$ , enquanto que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega_\epsilon}$  denotará a dualidade entre  $H^{-1}(\Omega_\epsilon)$  e  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ .

**Observação 2.1** Para exemplos onde as hipóteses de (2.1) são satisfeitas ver [9], [11] e [20], Capítulo 1.  $\square$

Do quadro abstrato de hipóteses (2.1) o seguinte resultado pode ser demonstrado:

**Lema 2.1** *Se (2.1) é satisfeita, a distribuição  $\mu$  que aparece em (iv) é dada por*

$$\langle \mu, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi |\nabla w_\epsilon|^2 dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.2)$$

Assim  $\mu$  é uma medida de Radon positiva como também um elemento de  $H^{-1}(\Omega)$ . Além disso,  $\mu(\Omega)$  é finita.

*Demonstração:* Seja  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  então da hipótese (2.1)(iv) e (iii) temos que

$$\langle -\Delta w_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle = \langle \mu_\epsilon - \gamma_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle = \langle \mu_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle - \langle \gamma_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle = \langle \mu_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle \rightarrow \langle \mu, \varphi \rangle$$

Deduz-se então que

$$\langle -\Delta w_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle \rightharpoonup \langle \mu, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Agora, integrando-se por partes obtém-se que

$$\begin{aligned}\langle -\Delta w_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle &= \int_{\Omega} \nabla w_\epsilon \cdot \nabla(\varphi w_\epsilon) dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla w_\epsilon|^2 \varphi dx + \int_{\Omega} w_\epsilon \nabla w_\epsilon \cdot \nabla \varphi dx,\end{aligned}$$

o segundo termo tende a zero, pois, da hipótese (2.1)(iii),  $\nabla w_\epsilon$  tende a zero, fraco, em  $L^2(\Omega)$ , e  $w_\epsilon$  tende a 1, forte em  $L^2(\Omega)$ , devido ao teorema de Rellich-Kondrachov.

Assim, resulta que

$$\int_{\Omega} |\nabla w_\epsilon|^2 \varphi dx \rightarrow \langle \mu, \varphi \rangle.$$

□

Agora, apresentaremos um resultado de 1950, devido a J. Deny, que é fundamental para o que desejamos.

**Teorema 2.1** *Seja  $\Omega$  um conjunto aberto do  $\mathbb{R}^N$ , e  $\mu$  uma medida de Radon positiva tal que  $\mu \in H^{-1}(\Omega)$ . Seja  $v \in H_0^1(\Omega)$ , então temos que  $v \in L^1(\Omega, d\mu)$ , e*

$$\langle \mu, v \rangle_\Omega = \int_{\Omega} v d\mu. \quad (2.3)$$

*Demonstração:* Ver [6]. □

Isto permite-nos definir, sem ambigüidade, o espaço

$$V = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu) \quad (2.4)$$

que é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} uv d\mu. \quad (2.5)$$

Finalmente, para qualquer  $v \in L^2(\Omega_\epsilon)$  define-se  $\tilde{v}$  como a extensão de  $v$  por zero

fora de  $\Omega_\epsilon$ , isto é,

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in \Omega_\epsilon \\ 0 & \text{se } x \in T_\epsilon. \end{cases} \quad (2.6)$$

Temos o seguinte resultado sobre a semicontinuidade inferior da energia relacionada à homogeneização de problemas elípticos.

**Teorema 2.2** *Suponha que (2.1) seja satisfeita e considere a seqüência  $z_\epsilon$  tal que*

$$\begin{cases} z_\epsilon \in H_0^1(\Omega) \\ z_\epsilon = 0, \text{ em } T_\epsilon \\ z_\epsilon \rightharpoonup z, \text{ fracamente, em } H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.7)$$

Então

$$\begin{cases} z \in V \\ \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |\nabla z_\epsilon|^2 dx \geq \int_\Omega |\nabla z|^2 dx + \int_\Omega |z|^2 d\mu. \end{cases} \quad (2.8)$$

Além disso, quando  $z_\epsilon$  também satisfaz

$$\int_\Omega |\nabla z_\epsilon|^2 dx \rightarrow \int_\Omega |\nabla z|^2 dx + \int_\Omega |z|^2 d\mu \quad (2.9)$$

tem-se

$$\begin{cases} z_\epsilon = w_\epsilon z + r_\epsilon \\ r_\epsilon \rightarrow 0, \text{ fortemente, em } W_0^{1,1}(\Omega). \end{cases} \quad (2.10)$$

Finalmente, se  $z \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , a convergência de  $r_\epsilon$ , em (2.10), acontecerá na topologia forte de  $H_0^1(\Omega)$ .

*Demonstração:* Ver [11] e [21].  $\square$

## 2.2 Alguns resultados de compacidade

Agora, apresentaremos alguns resultados de compacidade, para isto sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços de Banach reflexivos tais que  $X \subset Y$ , com imersão contínua e densa.

Denotemos por  $X'$  (resp.  $Y'$ ) o espaço dual de  $X$  (resp.  $Y$ ) e por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X, X'}$ , (resp.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y, Y'}$ ) o par dualidade entre  $X$  e  $X'$  (resp.  $Y$  e  $Y'$ ). Utilizaremos o seguinte espaço introduzido em [28], Capítulo 3, Parágrafo 8.4:

$$C_s^0(0, T; Y) = \{f \in L^\infty(0, T; Y) : t \mapsto \langle f(t), v \rangle_{Y, Y'} \text{ contínua de } [0, T] \text{ em } \mathbb{R}, \\ \text{para qualquer } v \in Y' \text{ fixado } \}$$

Então temos os seguintes resultados:

**Lema 2.2** *Considere uma seqüência  $g_\epsilon$  tal que*

$$\begin{cases} g_\epsilon \rightharpoonup g, & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; X) \\ g_\epsilon \rightarrow g, & \text{forte, em } C^0(0, T; Y). \end{cases}$$

*Então  $g_\epsilon$  converge forte para  $g$  em  $C_s^0([0, T]; X)$ , isto é, para todo  $v \in X'$ , a função*

$$h_\epsilon : t \mapsto \langle g_\epsilon(t), v \rangle_{X, X'}$$

*pertence a  $C^0([0, T])$  e satisfaz*

$$h_\epsilon \rightarrow h, \quad \text{forte, em } C^0([0, T]),$$

*onde  $h$  é definida por:*

$$h : t \mapsto \langle g(t), v \rangle_{X, X'}.$$

*Demonstração:* Ver [9], página 10.  $\square$

**Proposição 2.1** *Seja  $v_\epsilon$  uma seqüência tal que*

$$\begin{cases} v_\epsilon \rightharpoonup v, & \text{fracamente, em } L^1(0, T; X) \\ v'_\epsilon \rightharpoonup v', & \text{fracamente, em } L^1(0, T; Y). \end{cases} \quad (2.11)$$

*Então,*

$$v_\epsilon \rightarrow v, \quad \text{fortemente, em } C^0([0, T]; Y). \quad (2.12)$$



*Demonstração:* Ver [9], página 11.  $\square$

**Proposição 2.2** *Assuma que (2.1) seja satisfeita e considere a seqüência de funções  $v_\epsilon$  em  $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon)) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$  satisfazendo*

$$\begin{cases} \tilde{v}_\epsilon \rightharpoonup^* v, & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \tilde{v}'_\epsilon \rightharpoonup^* v', & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (2.13)$$

*Então,*

$$\langle \theta, \tilde{v}_\epsilon(\cdot) \rangle_\Omega \rightarrow \langle \theta, v(\cdot) \rangle_\Omega, \text{ fortemente, em } C^0([0, T]), \quad (2.14)$$

*para qualquer  $\theta \in H^{-1}(\Omega)$ , e por outro lado*

$$v \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)).$$

*Demonstração:* Ver [9], página 13.  $\square$

## Capítulo 3

# Resultado de homogeneização da equação de reação-difusão

O objetivo deste capítulo é demonstrar o resultado de homogeneização da equação de reação-difusão (Teorema 3.1). A semicontinuidade inferior da energia também será demonstrada (Teorema 3.2).

Após termos obtido a solução da equação de reação-difusão no domínio  $\Omega_\epsilon$ , para  $\epsilon > 0$ , fixado, vamos obter neste capítulo a solução desta equação em todo o domínio  $\Omega$ . Vamos, para isto, fazer  $\epsilon \rightarrow 0$ . Isto é o que chamamos de resultado de homogeneização, que é apresentado no seguinte Teorema.

**Teorema 3.1** *Suponha que (2.1) seja satisfeita e considere as seqüências dos dados satisfazendo:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_\epsilon^0 \rightharpoonup u^0, \text{ fracamente, em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ \tilde{f}_\epsilon \rightharpoonup f, \text{ fracamente, em } L^1(0, T; L^2(\Omega)) \\ \text{com } \tilde{f}'_\epsilon \text{ e } \tilde{f}_\epsilon(0) \text{ uniformemente limitadas, respectivamente em} \\ L^1(0, T; L^2(\Omega)) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \text{ e } L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Então, a seqüência de soluções  $u_\epsilon$  de (1.1) satisfaz

$$\begin{cases} \tilde{u}_\epsilon \rightharpoonup^* u, & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \tilde{u}'_\epsilon \rightharpoonup^* u', & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ \tilde{u}'_\epsilon \rightharpoonup u', & \text{fracamente, em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{cases} \quad (3.2)$$

onde  $u = u(x, t)$  é a única solução da equação de reação-difusão homogeneizada

$$\begin{cases} u' - \beta \Delta u + \beta \mu u + |u|^\rho u + \alpha^2 u = f, & \text{em } Q = \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{em } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \Gamma = \partial\Omega \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{em } \Omega \\ u \in C^0([0, T]; V), \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $V = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu)$  e  $\mu$  é uma medida de Radon dada pelo Lema (2.1).

**Observação 3.1** Em virtude da definição (2.5) do produto escalar  $a(\cdot, \cdot)$  de  $V$ , a formulação variacional da equação de reação-difusão (3.3)<sub>1</sub> é:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_\Omega u(x, t)v(x)dx + \beta a(u(t), v) + \int_\Omega |u(x, t)|^\rho u(x, t)v(x)dx + \\ \alpha^2 \int_\Omega u(x, t)dx = \int_\Omega f(x, t)v(x)dx, & \text{em } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall v \in V \\ u \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases}$$

Note que de acordo com o Teorema 2.2, a função  $u^0$  (que é o limite fraco em  $H_0^1(\Omega)$  das funções  $\tilde{u}_\epsilon^0$  que se anulam sobre os buracos  $T_\epsilon$ ) pertence a  $V$ , portanto não existe contradição entre as duas asserções  $u(0) = u^0$  e  $u \in C^0([0, T]; V)$ . Por outro lado, observe que os resultados clássicos (ver por exemplo [28]) garantem a existência e a unicidade de soluções de (3.3). De fato, a unicidade é garantida na larga classe  $L^\infty(0, T; V) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ .

Finalmente note que  $\tilde{f}_\epsilon$  é assumida convergir fraco em  $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , que é uma hipótese mais forte que ser limitada neste espaço.  $\square$

*Demonstração:* Procederemos a demonstração em cinco etapas

**1ª etapa - Estimativas a priori**

De (1.44) e (1.45) segue-se que existe uma subseqüência  $\{u_{\epsilon m}\}_{m \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\begin{cases} u_{\epsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u_{\epsilon}, & \text{fraco-estrela, em } L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega_{\epsilon})) \\ u'_{\epsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_{\epsilon}, & \text{fraco-estrela, em } L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega_{\epsilon})) \\ u'_{\epsilon m} \rightharpoonup u'_{\epsilon}, & \text{fracamente, em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega_{\epsilon})). \end{cases} \quad (3.4)$$

Assim, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, temos:

$$\begin{cases} \|u_{\epsilon}\|_{L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_{\epsilon m}\|_{L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega_{\epsilon}))} \leq C, & \forall \epsilon > 0 \\ \|u'_{\epsilon}\|_{L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u'_{\epsilon m}\|_{L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega_{\epsilon}))} \leq C, & \forall \epsilon > 0 \\ \|u'_{\epsilon}\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u'_{\epsilon m}\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega_{\epsilon}))} \leq C, & \forall \epsilon > 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

onde  $C$  não depende de  $\epsilon$  devido as condições em (3.1). Assim temos

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\epsilon} \text{ é limitada em } L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)), & \text{independentemente de } \epsilon > 0 \\ \tilde{u}'_{\epsilon} \text{ é limitada em } L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)), & \text{independentemente de } \epsilon > 0 \\ \tilde{u}'_{\epsilon} \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), & \text{independentemente de } \epsilon > 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Então, existe uma subseqüência, ainda denotada pelo mesmo símbolo, tal que:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\epsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} u, & \text{fraco-estrela, em } L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ |\tilde{u}_{\epsilon}|^{\rho} \tilde{u}_{\epsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} |u|^{\rho} u, & \text{fraco-estrela, em } L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \\ \tilde{u}'_{\epsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} u', & \text{fraco-estrela, em } L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \\ \tilde{u}'_{\epsilon} \rightharpoonup u', & \text{fracamente, em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{cases} \quad (3.7)$$

Novamente, pelo Teorema de Aubin-Lions e pelo Lema de Lions, de (3.7)<sub>1</sub> e (3.7)<sub>2</sub>, e da limitação de  $|\tilde{u}_{\epsilon}|^{\rho} \tilde{u}_{\epsilon}$  em  $L^2(Q)$ , temos que

$$|\tilde{u}_{\epsilon}|^{\rho} \tilde{u}_{\epsilon} \rightharpoonup |u|^{\rho} u, \text{ fraco, em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.8)$$

repetindo o argumento usado para passar o limite no termo não linear. Por outro lado, em vista da Proposição 2.2 temos

$$u \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap W^{1, 2}(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (3.9)$$

**2ª etapa - Passagem ao limite na equação (1.1)<sub>1</sub>**

Compondo a equação de reação-difusão com a função  $\psi(t)w_\epsilon(x)\varphi(x)$ , onde  $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  e  $w_\epsilon$  como no quadro abstrato (2.1), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle u'_\epsilon, \psi(t)w_\epsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\epsilon} + \langle -\beta\Delta u_\epsilon, \psi(t)w_\epsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\epsilon} + \\ + \langle |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon, \psi(t)w_\epsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\epsilon} + \langle \alpha^2 u_\epsilon, \psi(t)w_\epsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\epsilon} = \\ = \langle f_\epsilon, \psi(t)w_\epsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\epsilon}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Q_\epsilon}$  denota a dualidade de  $L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$  e  $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$ .

Integrando por partes, na variável  $x$ , o segundo termo do primeiro membro de (3.10), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle -\beta\Delta u_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} &= \beta \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \nabla(\psi w_\epsilon \varphi) dx dt = \\ &= \beta \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi \nabla w_\epsilon \varphi dx dt + \beta \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \langle -\beta\Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} &= \beta \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \nabla(\psi u_\epsilon \varphi) dx dt = \\ &= \beta \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi \nabla u_\epsilon \varphi dx dt + \beta \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (3.12)$$

então segue-se que

$$\begin{aligned} \beta \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi \nabla w_\epsilon \varphi dx dt = \\ = \langle -\beta\Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} - \beta \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} \langle -\beta \Delta u_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} &= \langle -\beta \Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} - \\ &\quad - \beta \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt + \beta \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Agora, substituindo (3.14) em (3.10), temos

$$\begin{aligned} \langle u'_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} &+ \langle -\beta \Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} - \beta \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt + \\ &+ \beta \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla \varphi dx dt + \langle |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon, \psi(t) w_\epsilon(x) \varphi(x) \rangle_{Q_\epsilon} \\ &+ \langle \alpha^2 u_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} = \langle f_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

### Análise dos termos de (3.15)

**1º termo.** Aplicando o Teorema de Fubini no primeiro termo, obtemos

$$\langle u'_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} = \int_0^T \int_\Omega \tilde{u}'_\epsilon \psi w_\epsilon \varphi dx dt = \int_\Omega w_\epsilon \varphi \left( \int_0^T \psi \tilde{u}'_\epsilon dt \right) dx. \quad (3.16)$$

Mas, pela hipótese (2.1)(iii), e pelo Teorema de Relich-Kondrachoff (inclusão compacta de  $H^1(\Omega)$  em  $L^2(\Omega)$ ), para uma subsequência, que ainda denotaremos pelo mesmo símbolo, temos

$$w_\epsilon \rightarrow 1, \text{ fortemente, em } L^2(\Omega) \quad (3.17)$$

e da limitação de  $\tilde{u}'_\epsilon$  em  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , independentemente de  $\epsilon > 0$ , para uma subsequência, temos

$$\int_0^T \psi \tilde{u}'_\epsilon dt \rightharpoonup \int_0^T \psi u' dt, \text{ fracamente, em } H_0^1(\Omega). \quad (3.18)$$

Assim, de (3.17) e (3.18) temos a seguinte convergência em (3.16):

$$\langle u'_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} \rightarrow \int_{\Omega} \varphi \left( \int_0^T \psi u' dt \right) dx. \quad (3.19)$$

**2º termo.** Agora, considere a função  $\mathcal{U}_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$  definida por  $\mathcal{U}_\epsilon = \int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt$ . As convergências (3.7) implicam que a seqüência  $\mathcal{U}_\epsilon$  satisfaz:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_\epsilon(x) \rightharpoonup \int_0^T \psi u dt, & \text{fracamente, em } H_0^1(\Omega), \text{ e fortemente em } L^2(\Omega) \\ \mathcal{U}_\epsilon(x) = 0, & \text{em } T_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} T_i^\epsilon. \end{cases} \quad (3.20)$$

Em vista da hipótese (2.1)(iv),  $-\Delta w_\epsilon = \mu_\epsilon - \gamma_\epsilon$ , e aplicando o Teorema de Fubini, temos:

$$\begin{aligned} \langle -\beta \Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} &= \langle \beta(\mu_\epsilon - \gamma_\epsilon), \psi u_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} = \\ &= \left\langle \beta(\mu_\epsilon - \gamma_\epsilon), \left( \int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \right) \varphi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &= \left\langle \beta \mu_\epsilon, \left( \int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \right) \varphi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

uma vez que  $\langle \gamma_\epsilon, \varphi \mathcal{U}_\epsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0$ .

Assim, de (3.20) e hipótese (2.1)(iv), obtemos a seguinte convergência em (3.21)

$$\langle -\beta \Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} \rightarrow \left\langle \beta \mu, \left( \int_0^T \psi u dt \right) \varphi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad (3.22)$$

**3º termo.** Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos:

$$\beta \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt = \beta \int_{\Omega} \nabla w_\epsilon \cdot \left( \int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \right) \nabla \varphi dx. \quad (3.23)$$

Pela hipótese (2.1)(iii), para uma subsequência, que ainda denotaremos pelo mesmo símbolo, vemos que

$$\nabla w_\epsilon \rightharpoonup 0, \text{ fracamente, em } L^2(\Omega),$$

e de (3.20), obtemos a seguinte convergência em (3.23):

$$\beta \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt \rightarrow 0. \quad (3.24)$$

**4º termo.** Aplicando o Teorema de Fubini

$$\beta \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla \varphi dx dt = \beta \int_\Omega w_\epsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \left( \int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \right) dx. \quad (3.25)$$

De (3.20)<sub>1</sub>, para uma subsequência, ainda denotada pelo mesmo símbolo, vemos que:

$$\nabla \left( \int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \right) \rightharpoonup \nabla \left( \int_0^T \psi u dt \right), \text{ fracamente, em } [L^2(\Omega)]^N. \quad (3.26)$$

Assim, de (3.17) e (3.26) obtemos a seguinte convergência em (3.25):

$$\beta \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla \varphi dx dt \rightarrow \beta \int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla \left( \int_0^T \psi u dt \right) dx. \quad (3.27)$$

**5º termo.** Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos:

$$\langle |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} = \int_\Omega w_\epsilon \varphi \left( \int_0^T \psi |\tilde{u}_\epsilon|^\rho \tilde{u}_\epsilon dt \right) dx. \quad (3.28)$$

Da convergência (3.8), para uma subsequência, ainda denotada pelo mesmo símbolo, temos a seguinte convergência

$$\int_0^T \psi |\tilde{u}_\epsilon|^\rho \tilde{u}_\epsilon dt \rightharpoonup \int_0^T \psi |u|^\rho u dt, \text{ fracamente, em } L^2(\Omega). \quad (3.29)$$

Assim de (3.29) e (3.17) obtemos a seguinte convergência em (3.28)

$$\langle |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} \rightarrow \int_\Omega \varphi \left( \int_0^T \psi |u|^\rho u dt \right) dx \quad (3.30)$$



**6º termo.** Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos:

$$\langle \alpha^2 u_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} = \alpha^2 \int_{\Omega} w_\epsilon \varphi \left( \int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \right) dx. \quad (3.31)$$

De (3.20) e (3.17) obtemos a seguinte convergência em (3.31)

$$\langle \alpha^2 u_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} \rightarrow \alpha^2 \int_{\Omega} \varphi \left( \int_0^T \psi u dt \right) dx. \quad (3.32)$$

**7º termo.** Também aplicando o Teorema de Fubini, temos que

$$\langle f_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} = \int_{\Omega} w_\epsilon \varphi \left( \int_0^T \psi \tilde{f}_\epsilon dt \right) dx, \quad (3.33)$$

e da hipótese (3.1)<sub>2</sub> temos que

$$\int_0^T \psi \tilde{f}_\epsilon dt \rightharpoonup \int_0^T \psi f dt, \text{ fracamente, em } L^2(\Omega). \quad (3.34)$$

Portanto, de (3.17) e (3.34), obtemos a seguinte convergência em (3.33):

$$\langle f_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} \rightarrow \int_{\Omega} \varphi \left( \int_0^T \psi f dt \right) dx. \quad (3.35)$$

Agora é fácil passar o limite em cada termo de (3.15). Usando o Teorema de Fubini e o Teorema de Deny (ver Teorema (2.1)), obtemos

$$\begin{aligned} & \left\langle \int_{\Omega} u' \varphi dx, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0,T)} + \left\langle \beta \int_{\Omega} \varphi u d\mu, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0,T)} \\ & + \left\langle \beta \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0,T)} + \left\langle \int_{\Omega} \varphi |u|^p u dx, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0,T)} \\ & + \left\langle \alpha^2 \int_{\Omega} \varphi u dx, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0,T)} = \left\langle \int_{\Omega} f \varphi dx, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0,T)}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Como  $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$  é arbitrário, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u' \varphi dx + \beta \int_{\Omega} \varphi u d\mu + \beta \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \varphi |u|^{\rho} u dx \\ + \alpha^2 \int_{\Omega} \varphi u dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \end{aligned} \quad (3.37)$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

Em vista de (3.9), e da densidade de  $\mathcal{D}(\Omega)$  em  $V$  (ver [9], Apêndice) temos que (3.37) pode ser estendida para toda função  $v \in V$ .

Assim fica demonstrada (3.3)<sub>1</sub> no sentido fraco.

### 3ª etapa - Verificação da condição inicial e unicidade

Quanto à verificação do dado inicial, isto é, que  $u(x, 0) = u^0(x)$ , assim como da unicidade, seguem-se de um argumento análogo ao que foi usado na demonstração do Teorema 1.1.

### 4ª etapa - Regularidade da solução

Analogamente ao feito no Teorema de Regularidade (Teorema 1.3), uma vez que  $u_{\epsilon} \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega))$ , (também  $\tilde{u}_{\epsilon} \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega))$ ) segue-se que

$$\tilde{u}_{\epsilon} \in C^0([0, T]; V).$$

### 5ª etapa - Final da demonstração

Demonstramos, pela extração de uma subsequência (ainda denotada por  $\{u_{\epsilon}\}$ ), que a subsequência  $\{u_{\epsilon}\}$  satisfaz (3.2), com o limite

$$u \in L^{\infty}(0, T; V) \cap W^{1, \infty}(0, T; [L^2(\Omega)]^N) \cap W^{1, 2}(0, T; [H_0^1(\Omega)]^N).$$

e  $u$  satisfazendo (3.3).

A unicidade da solução de (3.3) permite-nos deduzir que a seqüência inteira satisfaz (3.2).

Isto termina a demonstração do Teorema 3.1.  $\square$

O próximo passo é demonstrar um resultado de convergência pontual (no tempo) e a propriedade de semicontinuidade inferior da energia. Antes porém vamos fazer algumas observações.

**Observação 3.2** Para a obtenção da energia associada à equação

$$u'_\epsilon - \beta \Delta u_\epsilon + |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon + \alpha^2 u_\epsilon = f_\epsilon$$

vamos incorporar o termo não linear,  $|u_\epsilon|^\rho u_\epsilon$  ao segundo membro e chamá-lo então de  $g_\epsilon$ , ou seja,  $g_\epsilon = f_\epsilon - |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon$ . Com isso a equação acima toma a seguinte forma

$$u'_\epsilon - \beta \Delta u_\epsilon + \alpha^2 u_\epsilon = g_\epsilon \tag{3.38}$$

onde  $g_\epsilon = g_\epsilon(x, t, u)$ .

Temos que  $|u_\epsilon|^\rho u_\epsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$  (pela Observação 1.6) e  $f_\epsilon \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$ , então  $g_\epsilon \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$ , pois  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon)) \subset L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$ .

Temos também que  $g'_\epsilon = (f_\epsilon - |u_\epsilon|^\rho u_\epsilon)' = f'_\epsilon - \rho |u_\epsilon|^{\rho-1} \frac{u_\epsilon}{|u_\epsilon|} u'_\epsilon + |u_\epsilon|^\rho u'_\epsilon = f'_\epsilon - (\rho + 1) |u_\epsilon|^\rho u'_\epsilon$ .

O próximo passo é descobrir em que espaço estará  $g'_\epsilon$ . Para isso, analisemos o termo  $|u_\epsilon|^\rho u'_\epsilon$ . Por um argumento usado anteriormente se  $q$  é o índice do teorema de imersão de Sobolev, escreve-se  $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ , ou  $\frac{1}{q} + \frac{1}{N} = \frac{1}{2}$ . Por hipótese  $\rho \leq \frac{2}{N-2}$  ou  $\rho N \leq q$ , resultando, do teorema de imersão de Sobolev, que  $|u_\epsilon(t)|^\rho \in L^N(\Omega_\epsilon)$ . Tem-se ainda que  $u'_\epsilon(t)$  pertence a  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$  logo pertence a  $L^q(\Omega_\epsilon)$ , pelo teorema de imersão de Sobolev. Logo, aplicando a desigualdade de Hölder, para  $\frac{1}{q} + \frac{1}{N} = \frac{1}{2}$ , conclui-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} ||u_\epsilon|^\rho u'_\epsilon|^2 dx &= \int_{\Omega_\epsilon} |u_\epsilon|^{2\rho} |u'_\epsilon|^2 dx \leq \left( \int_{\Omega_\epsilon} |u_{i\epsilon}|^{2\rho \frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} \left( \int_{\Omega_\epsilon} |u'_{i\epsilon}|^{2\frac{q}{2}} dx \right)^{\frac{2}{q}} \\ &= \left( \int_{\Omega_\epsilon} |u_{i\epsilon}|^{\rho N} dx \right)^{\frac{2}{N}} \left( \int_{\Omega_\epsilon} |u'_{i\epsilon}|^q dx \right)^{\frac{2}{q}} < \infty, \end{aligned}$$

pois  $\frac{2}{q} + \frac{2}{N} = 1$  e  $\rho N \leq q$  o que implica que  $H_0^1(\Omega_\epsilon) \hookrightarrow L^q(\Omega_\epsilon) \hookrightarrow L^{\rho N}(\Omega_\epsilon)$ . Donde  $|u_\epsilon(t)|^\rho u'_\epsilon(t) \in L^2(\Omega_\epsilon)$ , e por (1.3) e (1.4) conclui-se que  $|u_\epsilon|^\rho u'_\epsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon)) \subset L^1(0, T; L^2(\Omega_\epsilon)) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$ . Portanto

$$g'_\epsilon \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\epsilon)) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$$

Da mesma forma a equação homogeneizada

$$u' - \beta \Delta u + \beta \mu u + |u|^\rho u + \alpha^2 u = f$$

assume a forma seguinte

$$u' - \beta \Delta u + \beta \mu u + \alpha^2 u = g, \quad (3.39)$$

com  $g \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$  e  $g' \in L^1(0, T; L^2(\Omega)) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .  $\square$

Assim, podemos agora enunciar o teorema que estabelecerá a convergência pontual e a propriedade de semicontinuidade inferior da energia:

**Teorema 3.2** *Suponha que as hipóteses do Teorema 3.1 sejam satisfeitas. Então, para qualquer  $t \in [0, T]$ , fixado, temos:*

$$\tilde{u}_\epsilon(t) \rightharpoonup u(t), \text{ fracamente, em } H_0^1(\Omega). \quad (3.40)$$

$$\int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} |u_\epsilon(x, t)|^2 dx. \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} |u(x, s)|^2 d\mu(x) ds &\leq \\ &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega_{\epsilon}} |\nabla u_{\epsilon}(x, s)|^2 dx ds. \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$E(t) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} E_{\epsilon}(t), \quad (3.43)$$

onde a energia  $E_{\epsilon}(\cdot)$  (energia associada à equação (3.38)), para qualquer  $t \in [0, T]$ , é definida por:

$$E_{\epsilon}(t) = \frac{1}{2} |u_{\epsilon}(t)|_{L^2(\Omega_{\epsilon})}^2 + \beta \int_0^t |\nabla u_{\epsilon}(s)|_{[L^2(\Omega_{\epsilon})]^N}^2 ds + \alpha^2 \int_0^t |u_{\epsilon}(s)|_{L^2(\Omega_{\epsilon})}^2 ds,$$

e a energia  $E(t)$  (energia associada à equação (3.39))

$$E(t) = \frac{1}{2} |u(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \int_0^t |\nabla u(s)|_{[L^2(\Omega)]^N}^2 ds + \beta \int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\Omega, d\mu)}^2 ds + \alpha^2 \int_0^t |u(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

*Demonstração:* De (3.7) temos que

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\epsilon} &\overset{*}{\rightharpoonup} u, \quad \text{fraco-estrela, em } L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \tilde{u}'_{\epsilon} &\overset{*}{\rightharpoonup} u', \quad \text{fraco-estrela, em } L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

Então, pela Proposição 2.2 temos que

$$\langle \varphi, \tilde{u}_{\epsilon}(\cdot) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \langle \varphi, u_{\epsilon}(\cdot) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \text{forte, em } C^0([0, T]), \quad \forall \varphi \in H^{-1}(\Omega).$$

Em particular,  $\forall t \in [0, T]$ , temos

$$\langle \varphi, \tilde{u}_{\epsilon}(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \rightarrow \langle \varphi, u_{\epsilon}(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)},$$

isto é

$$\tilde{u}_{\epsilon}(t) \rightharpoonup u(t), \quad \text{fracamente, em } H_0^1(\Omega), \quad \forall t \in [0, T],$$

o que nos dá (3.41).

Uma vez que  $H_0^1(\Omega)$  está imerso compactamente em  $L^2(\Omega)$ , temos, da convergência (3.41), que existe uma subsequência, ainda denotada pelo mesmo símbolo,  $\tilde{u}_\epsilon$ , tal que

$$\tilde{u}_\epsilon \rightarrow u, \text{ forte, em } L^2(\Omega),$$

o que implica que para cada  $t \in [0, T]$ , fixado,

$$|\tilde{u}_\epsilon(t)|_{L^2(\Omega)} \rightarrow |u(t)|_{L^2(\Omega)} \text{ em } \mathbb{R},$$

isto é,

$$|u(t)|_{L^2(\Omega)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |u_\epsilon(t)|_{L^2(\Omega)},$$

e daí resulta em

$$|u(t)|_{L^2(\Omega)}^2 = [\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |u_\epsilon(t)|_{L^2(\Omega)}]^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |u_\epsilon(t)|_{L^2(\Omega)}^2,$$

o que nos dá (3.42).

Para provar (3.43), note que para cada  $t \in [0, T]$ , temos  $\tilde{u}_\epsilon(t) = 0$  em  $T_\epsilon$  e  $\tilde{u}_\epsilon(t) \in H_0^1(\Omega)$ . Por (3.41)  $\tilde{u}_\epsilon(t) \rightharpoonup u(t)$ , fraco, em  $H_0^1(\Omega)$ , para cada  $t \in [0, T]$ . Então pelo Teorema 2.2 temos que

$$\begin{cases} u(t) \in V \\ \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 d\mu(x) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon(x, t)|^2 dx, \end{cases} \quad (3.44)$$

para cada  $t \in [0, T]$  fixado.

Integrando (3.44) de 0 a  $t$ ,  $t \in [0, T]$  obtemos

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} |u(x, s)|^2 d\mu(x) ds \leq \int_0^t \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon(x, s)|^2 dx ds$$

Pelo Lema de Fatou, temos

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} |u(x, s)|^2 d\mu(x) ds \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon(x, s)|^2 dx ds$$

o que prova (3.42).

Finalmente, para obter (3.43), observe que, de (3.41) temos que

$$\int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\epsilon}} |u_{\epsilon}(x, t)|^2 dx = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\epsilon}} |u_{\epsilon}(x, t)|^2 dx.$$

Integrando de 0 a  $T$  e aplicando o Lema de Fatou temos

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u(x, s)|^2 dx ds \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega_{\epsilon}} |u_{\epsilon}(x, s)|^2 dx ds. \quad (3.45)$$

Agora, somando (3.41), (3.42) e (3.45) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx + \beta \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx ds + \beta \int_0^t \int_{\Omega} |u(x, s)|^2 d\mu(x) ds + \alpha^2 \int_0^t \int_{\Omega} |u(x, s)|^2 dx ds \\ & \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\epsilon}} |u_{\epsilon}(x, t)|^2 dx + \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \beta \int_0^t \int_{\Omega_{\epsilon}} |\nabla u_{\epsilon}(x, s)|^2 dx ds + \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha^2 \int_0^t \int_{\Omega_{\epsilon}} |u_{\epsilon}(x, s)|^2 dx ds \\ & \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Omega_{\epsilon}} |u_{\epsilon}(x, t)|^2 dx + \beta \int_0^t \int_{\Omega_{\epsilon}} |\nabla u_{\epsilon}(x, s)|^2 dx ds + \alpha^2 \int_0^t \int_{\Omega_{\epsilon}} |u_{\epsilon}(x, s)|^2 dx ds \right) \end{aligned}$$

e assim obtemos

$$E(t) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} E_{\epsilon}(t),$$

o que nos dá (3.42).  $\square$

# Capítulo 4

## Resultados de correção

Este Capítulo é dedicado ao estabelecimento e demonstração do resultado de correção, da equação de reação-difusão. A demonstração segue na direção do artigo de D. Cioranescu [8]. Uma das principais etapas da demonstração do resultado de correção é a convergência forte da energia em  $C^0([0, T])$ . Assim, antes de enunciarmos tal resultado, passaremos à demonstração da convergência forte da energia em  $C^0([0, T])$ .

**Proposição 4.1** *Suponha que as hipóteses do Teorema 3.1 sejam satisfeitas, e considere a seqüência de dados  $u_\epsilon^0, g_\epsilon$  tal que*

$$\tilde{g}_\epsilon \rightarrow \tilde{g}, \text{ fortemente, em } L^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) \quad (4.1)$$

então:

$$E_\epsilon(t) \rightarrow E(t), \text{ fortemente, em } C^0([0, T]). \quad (4.2)$$

*Demonstração:* Temos as seguintes identidades:

$$E_\epsilon(t) = E_\epsilon(0) + \int_0^t \langle g_\epsilon(x, s), u_\epsilon(x, s) \rangle_{\Omega_\epsilon} ds, \quad (4.3)$$

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \langle g(x, s), u(x, s) \rangle_\Omega ds, \quad (4.4)$$



com

$$E_\epsilon(0) = \frac{1}{2} \|u_\epsilon^0\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 \quad \text{e} \quad E(0) = \frac{1}{2} \|u^0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Em virtude de (3.1)<sub>1</sub> e da hipótese (4.1), temos

$$\int_0^t \langle g_\epsilon(x, s), u_\epsilon(x, s) \rangle_{\Omega_\epsilon} ds \rightarrow \int_0^t \langle g(x, s), u(x, s) \rangle_{\Omega} ds, \quad (4.5)$$

para qualquer  $t \in [0, T]$ . Por outro lado, (3.41) implica que

$$E_\epsilon(0) \rightarrow E(0) \quad (4.6)$$

Portanto,

$$E_\epsilon(t) \rightarrow E(t), \quad \text{para qualquer } t \in [0, T]; \quad (4.7)$$

o que é apenas uma convergência pontual no tempo.

Para obter-se a convergência uniforme da energia, usaremos o Teorema de Ascoli-Arzelá (Teorema A.2.2). Assim, precisaremos mostrar que a família de energias  $\{E_\epsilon(t)\}_{\epsilon>0}$  é equicontínua. De fato, dado qualquer  $t \in [0, T]$ , e  $h > 0$  suficientemente pequeno temos:

$$\begin{aligned} |E_\epsilon(t+h) - E_\epsilon(t)| &= \left| \int_t^{t+h} \langle \tilde{g}_\epsilon(x, s), \tilde{u}_\epsilon(x, s) \rangle_{\Omega} ds \right| \\ &\leq \int_t^{t+h} |\langle \tilde{g}_\epsilon(x, s), \tilde{u}_\epsilon(x, s) \rangle_{\Omega_\epsilon}| ds \\ &\leq \int_t^{t+h} \|\tilde{g}_\epsilon(s)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\tilde{u}_\epsilon(s)\|_{H_0^1(\Omega)} ds \\ &\leq \|\tilde{u}_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} \int_t^{t+h} \|\tilde{g}_\epsilon(s)\|_{H^{-1}(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Como  $\tilde{u}_\epsilon$  é limitada em  $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$  e  $\tilde{g}_\epsilon$  converge fortemente em  $L^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , isto implica que

$$|E_\epsilon(t+h) - E_\epsilon(t)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } h \rightarrow 0, \quad \text{uniformemente em } \epsilon, \quad (4.8)$$

o que mostra que a família de funções  $\{E_\epsilon(t)\}_{\epsilon>0}$  é equicontínua.

Logo, de (4.7), (4.8) e do Teorema de Ascoli-Arzelá, segue-se (4.2).  $\square$

Definamos agora,

$$e_\epsilon(v)(t) = \frac{1}{2}|v(t)|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 + \beta \int_0^t |\nabla v(s)|_{[L^2(\Omega_\epsilon)]^N}^2 ds + \alpha^2 \int_0^t |v(s)|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 ds, \quad (4.9)$$

para  $v \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega_\epsilon))$ , e

$$\begin{aligned} e(v)(t) = & \frac{1}{2}|v(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \int_0^t |\nabla v(s)|_{[L^2(\Omega)]^N}^2 ds \\ & + \beta \int_0^t \langle \mu v(s), v(s) \rangle_\Omega ds + \alpha^2 \int_0^t |v(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned} \quad (4.10)$$

para  $v \in C^0([0, T]; V)$ .

A partir destas definições, apresentamos o seguinte resultado.

**Proposição 4.2** *Suponha que as hipóteses da Proposição 4.1 sejam satisfeitas. Então*

$$e_\epsilon(u_\epsilon - w_\epsilon \varphi)(\cdot) \longrightarrow e(u - \varphi)(\cdot), \text{ fortemente, em } C^0([0, T]) \quad (4.11)$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(0, T; \mathcal{D}(\Omega))$ .

*Demonstração:* Temos que:

$$\begin{aligned} e_\epsilon(u_\epsilon - w_\epsilon \varphi)(t) = & e_\epsilon(u_\epsilon)(t) + e_\epsilon(w_\epsilon \varphi)(t) - \int_\Omega \tilde{u}_\epsilon(x, t) w_\epsilon(x) \varphi(x, t) dx \\ & - 2\beta \int_0^t \int_\Omega \nabla \tilde{u}_\epsilon(x, s) \cdot \nabla (w_\epsilon(x) \varphi(x, s)) dx ds \\ & - 2\alpha^2 \int_0^t \int_\Omega \tilde{u}_\epsilon(x, s) w_\epsilon(x) \varphi(x, s) dx ds. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Passaremos sucessivamente ao limite em cada termo do lado direito da equação (4.12).

**1º termo.** Como  $e_\epsilon(u_\epsilon)(t) = E_\epsilon(t)$ , temos da Proposição 4.1 que:

$$e_\epsilon(u_\epsilon)(\cdot) \rightarrow e(u)(\cdot), \text{ fortemente, em } C^0([0, T]). \quad (4.13)$$

**2º termo.** Derivando-se no tempo mostra-se que a função  $|w_\epsilon \varphi(\cdot)|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2$  é limitada em  $W^{1, \infty}(0, T) \hookrightarrow C^0([0, T])$  com imersão compacta, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov.

Assim, usando (2.1)(iii), obtemos que:

$$|w_\epsilon \varphi(\cdot)|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 = |w_\epsilon \varphi(\cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow |\varphi|_{L^2(\Omega)}^2, \text{ fortemente, em } C^0([0, T]), \quad (4.14)$$

e também que

$$\int_0^t |w_\epsilon \varphi(s)|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 ds \rightarrow \int_0^t |\varphi(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \text{ fortemente, em } C^0([0, T]) \quad (4.15)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \beta \int_0^t |\nabla(w_\epsilon \varphi(s))|_{[L^2(\Omega_\epsilon)]^N}^2 ds &= \beta \int_0^t |\nabla(w_\epsilon \varphi(s))|_{[L^2(\Omega)]^N}^2 ds \\ &= \beta \int_0^t (\nabla(w_\epsilon \varphi(s)), \nabla(w_\epsilon \varphi(s))) ds \\ &= \beta \int_0^t \langle -\operatorname{div}[\nabla(w_\epsilon \varphi(s))], w_\epsilon \varphi(s) \rangle ds \\ &= \beta \int_0^t \langle -\operatorname{div}[\nabla w_\epsilon \varphi(s) + w_\epsilon \nabla \varphi(s)], w_\epsilon \varphi(s) \rangle ds \\ &= -\beta \int_0^t \langle \operatorname{div}(\nabla w_\epsilon) \varphi(s) + \nabla w_\epsilon \cdot \nabla \varphi(s) + \operatorname{div}(\nabla \varphi(s)) w_\epsilon + \nabla w_\epsilon \cdot \nabla \varphi(s), w_\epsilon \varphi(s) \rangle ds \\ &= -\beta \int_0^t \langle \Delta w_\epsilon \varphi(s) + 2\nabla w_\epsilon \cdot \nabla \varphi(s) + \Delta \varphi(s) w_\epsilon, w_\epsilon \varphi(s) \rangle ds \\ &= -\beta \int_0^t \langle \Delta w_\epsilon \varphi(s), w_\epsilon \varphi(s) \rangle ds - 2\beta \int_0^t (\nabla w_\epsilon \cdot \nabla \varphi(s), w_\epsilon \varphi(s)) ds \\ &\quad - \beta \int_0^t (\Delta \varphi(s) w_\epsilon, w_\epsilon \varphi(s)) ds \\ &= -\beta \int_0^t \langle \Delta w_\epsilon \varphi(s), w_\epsilon \varphi(s) \rangle_\Omega ds - 2\beta \int_0^t \int_\Omega \nabla w_\epsilon \cdot \nabla \varphi(s) w_\epsilon \varphi(s) dx ds \\ &\quad - \beta \int_0^t \int_\Omega \Delta \varphi(s) |w_\epsilon|^2 \varphi(s) dx ds \end{aligned}$$

Em vista de (2.1)(iii) e (iv), podemos passar o limite em cada termo do lado direito, e observando que cada termo é limitado em  $W^{1,\infty}(0, T)$ , obtemos:

$$-\beta \int_0^t \int_{\Omega} \Delta \varphi(s) |w_{\epsilon}|^2 \varphi(s) dx ds \rightarrow -\beta \int_0^t \int_{\Omega} \Delta \varphi(s) \varphi(s) dx ds, \quad (4.16)$$

fortemente, em  $C^0([0, T])$ ;

$$-2\beta \int_0^t \int_{\Omega} \nabla w_{\epsilon} \cdot \nabla \varphi(s) w_{\epsilon} \varphi(s) dx ds \rightarrow 0, \text{ fortemente, em } C^0([0, T]). \quad (4.17)$$

Usando (2.1)(iv), temos que

$$\begin{aligned} \langle -\Delta w_{\epsilon} \varphi(s), w_{\epsilon} \varphi(s) \rangle_{\Omega} &= \langle -\Delta w_{\epsilon}, w_{\epsilon} \varphi^2(s) \rangle_{\Omega} = \langle \mu_{\epsilon} - \gamma_{\epsilon}, w_{\epsilon} \varphi^2(s) \rangle_{\Omega} \\ &= \langle \mu_{\epsilon}, w_{\epsilon} \varphi^2(s) \rangle_{\Omega} \rightarrow \langle \mu_i, \varphi^2(s) \rangle_{\Omega}, \end{aligned}$$

fortemente, em  $C^0([0, T])$ .

Portanto,

$$-\beta \int_0^t \langle \Delta w_{\epsilon} \varphi(s), w_{\epsilon} \varphi(s) \rangle_{\Omega} ds \rightarrow -\beta \int_0^t \langle \mu_i, \varphi^2(s) \rangle_{\Omega} ds, \quad (4.18)$$

fortemente em  $C^0([0, T])$ .

Agora, combinando (4.14)-(4.18), obtemos que:

$$e_{\epsilon}(w_{\epsilon} \varphi(\cdot)) \rightarrow e(\varphi)(\cdot), \text{ fortemente, em } C^0([0, T]). \quad (4.19)$$

**3º termo.** Como  $\tilde{u}_{\epsilon}$  é limitada em  $W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$  (ver (3.2)), a função

$$t \mapsto \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, t) w_{\epsilon}(x) \varphi(x, t) dx$$

é limitada em  $W^{1,\infty}(0, T)$ , assim relativamente compacto em  $C^0([0, T])$ . Isto implica que

$$\int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, t) w_{\epsilon}(x) \varphi(x, t) dx \rightarrow \int_{\Omega} u(x, t) \varphi(x, t) dx \text{ forte, em } C^0([0, T]). \quad (4.20)$$

4º termo. Considerando este termo, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) \cdot \nabla (w_{\epsilon}(x) \varphi(x, s)) dx ds &= - \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) \operatorname{div}[\nabla (w_{\epsilon}(x) \varphi(x, s))] dx ds \\ &= - \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) \operatorname{div}[\nabla w_{\epsilon}(x) \varphi(x, s) + w_{\epsilon}(x, s) \nabla \varphi(x, s)] dx ds \\ &= - \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) [\operatorname{div}(\nabla (w_{\epsilon}(x) \varphi(x, s)) + \nabla w_{\epsilon}(x) \cdot \nabla \varphi(x, s) + \nabla w_{\epsilon}(x) \cdot \nabla \varphi(x, s) \\ &\quad + w_{\epsilon}(x) \operatorname{div}(\nabla \varphi(x, s))] dx ds \\ &= - \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) [\Delta w_{\epsilon}(x) \varphi(x, s) + 2 \nabla w_{\epsilon}(x) \nabla \cdot \varphi(x, s) + w_{\epsilon}(x) \Delta \varphi(x, s)] dx ds \\ &= - \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) \Delta w_{\epsilon}(x) \varphi(x, s) dx ds - 2 \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) \nabla w_{\epsilon}(x) \cdot \nabla \varphi(x, s) dx ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) w_{\epsilon}(x) \Delta \varphi(x, s) dx ds \\ &= \int_0^t \langle -\Delta w_{\epsilon}(x) \varphi(x, s), \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) \rangle_{\Omega} ds - 2 \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) \nabla w_{\epsilon}(x) \cdot \nabla \varphi(x, s) dx ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) w_{\epsilon}(x) \Delta \varphi(x, s) dx ds. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Consideremos, agora, a função:

$$t \mapsto -2 \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) \nabla w_{\epsilon}(x) \cdot \nabla \varphi(x, s) dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) w_{\epsilon} \Delta \varphi(x, s) dx ds.$$

De (3.2),  $\tilde{u}_{\epsilon}$  é limitada em  $W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$ . Assim a família de funções em questão é limitada em  $W^{1,\infty}(0, T)$ , portanto relativamente compacta em  $C^0([0, T])$ , pois  $W^{1,\infty}(0, T)$  está imerso compactamente em  $C^0([0, T])$ . Isto implica que

$$\begin{aligned} -2 \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) \nabla w_{\epsilon}(x) \cdot \nabla \varphi(x, s) dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) w_{\epsilon} \Delta \varphi(x, s) dx ds \\ \rightarrow - \int_0^t \int_{\Omega} u_{\epsilon}(x, s) \Delta \varphi(x, s) dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u_{\epsilon}(x, s) \cdot \nabla \varphi(x, s) dx ds, \end{aligned} \quad (4.22)$$

fortemente, em  $C^0([0, T])$ .

Considere agora o termo remanescente  $\langle -\Delta w_\epsilon, \tilde{u}_\epsilon(t)\varphi(t) \rangle_\Omega$ . Temos por (2.1)(iv), que:

$$\langle -\Delta w_\epsilon, \tilde{u}_\epsilon(t)\varphi(t) \rangle_\Omega = \langle \mu_\epsilon - \gamma_\epsilon, \tilde{u}_\epsilon(t)\varphi(t) \rangle_\Omega = \langle \mu_\epsilon, \tilde{u}_\epsilon(t)\varphi(t) \rangle_\Omega$$

uma vez que  $\tilde{u}_\epsilon\varphi(t) = 0$  nos buracos  $T^\epsilon$ .

Por outro lado, usando o fato que  $W^{1,2}(0, T) \hookrightarrow C^0([0, T])$  com imersão compacta, temos que

$$\langle -\Delta w_\epsilon, \tilde{u}_\epsilon(t)\varphi(t) \rangle_\Omega \rightarrow \langle \mu_i, u(t)\varphi(t) \rangle_\Omega, \text{ fortemente, em } C^0([0, T]). \quad (4.23)$$

Portanto

$$\int_0^t \langle -\Delta w_\epsilon, \tilde{u}_\epsilon(s)\varphi(s) \rangle_\Omega ds \rightarrow \int_0^t \langle \mu_i\varphi(s), u(s) \rangle_\Omega ds, \text{ forte, em } C^0([0, T]). \quad (4.24)$$

**5º termo.** O último termo de (4.12) segue imediatamente de (4.20), ou seja,

$$-2\alpha^2 \int_0^t \int_\Omega \tilde{u}_\epsilon(x, s)w_\epsilon(x)\varphi(x, s)dxds \rightarrow -2\alpha^2 \int_0^t \int_\Omega u(x, s)\varphi(x, s)dxds, \quad (4.25)$$

fortemente, em  $C^0([0, T])$ .

Agora, de (4.12), (4.13), (4.19), (4.20), (4.22), (4.24) e (4.25), obtemos (4.11). A demonstração da Proposição 4.2 agora está completa.  $\square$

A seguir apresentamos o resultado de correção.

**Teorema 4.1** *Assuma que as hipóteses da Proposição 4.1 sejam satisfeitas. Se  $u$  denota a única solução do problema homogeneizado (3.3), então a sequência de soluções*

$\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$  do problema (1.1) satisfaz:

$$\tilde{u}_\epsilon \rightarrow u, \text{ fortemente, em } C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \quad (4.26)$$

$$\tilde{u}_\epsilon = w_\epsilon u + r_\epsilon, \text{ com} \quad (4.27)$$

$$r_\epsilon \rightarrow 0, \text{ fortemente, em } L^2([0, T]; W_0^{1,1}(\Omega)). \quad (4.28)$$

Além disso, se  $u \in C^0([0, T]; C^1(\bar{\Omega}))$ , então

$$r_\epsilon \rightarrow 0, \text{ fortemente, em } L^2([0, T]; H_0^1(\Omega)). \quad (4.29)$$

*Demonstração:* Observemos, agora que devido a (3.7) e a Proposição 2.1 obtemos facilmente que

$$\tilde{u}_\epsilon \rightarrow u, \text{ fortemente, em } C^0([0, T]; L^2(\Omega)),$$

e portanto (4.26) está demonstrada. Agora do Teorema 3.1 sabemos que  $u \in C^0([0, T]; V)$ .

Isto permite-nos considerar uma seqüência  $\varphi_k$  em  $\mathcal{D}(Q)$  tal que

$$\varphi_k \rightarrow u, \text{ fortemente, em } C^0([0, T]; V), \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (4.30)$$

Da Proposição 4.2 temos:

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \|\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + 2\beta \int_0^T |\nabla(\tilde{u}_\epsilon(s) \right. \\ \left. - w_\epsilon \varphi_k(s))|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 2\alpha^2 \int_0^T |\tilde{u}_\epsilon(s) - w_\epsilon \varphi_k(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right\} \leq \\ \leq 3\|e(u - \varphi_k)\|_{L^\infty(0, T)}, \end{aligned}$$

e, assim

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \|\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + 2\beta \int_0^T |\nabla(\tilde{u}_\epsilon(s) \right. \\ \left. - w_\epsilon \varphi_k(s))|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 2\alpha^2 \int_0^T |\tilde{u}_\epsilon(s) - w_\epsilon \varphi_k(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
& \|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u)\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} = \\
& = \|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u) - \nabla(w_\epsilon \varphi_k) + \nabla(w_\epsilon \varphi_k)\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \\
& = \|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k) + \nabla(w_\epsilon(\varphi_k - u))\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \\
& \leq \|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k)\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} + \|\nabla(w_\epsilon(\varphi_k - u))\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \\
& \leq C\|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla w_\epsilon(\varphi_k - u)\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \\
& \quad + \|w_\epsilon \nabla(\varphi_k - u)\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \\
& \leq C\|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C\|\nabla w_\epsilon\|_{[L^2(\Omega)]^N} \cdot \|\varphi_k - u\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \\
& \quad + C\|w_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\varphi_k - u\|_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Por (2.1), (4.30), (4.31) e (4.32) concluimos que:

$$\nabla r_\epsilon = \nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u) \rightarrow 0, \text{ fortemente, em } L^2([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Assim (4.28) está demonstrado.

Vamos finalmente considerar o caso onde  $u \in C^0([0, T]; C^1(\bar{\Omega}))$ . Em tal caso, a seqüência aproximante  $\varphi_k$  pode ser escolhida de modo a satisfazer, além de (4.30), a hipótese

$$\varphi_k \rightarrow u, \text{ fortemente, em } C^0([0, T]; C^1(\bar{\Omega})).$$

Neste caso, podemos estimar  $\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u)$  em  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  e não somente em  $L^2(0, T; L^1(\Omega))$ , como feito anteriormente em (4.32). De fato temos:

$$\begin{aligned}
& \|\nabla(w_\epsilon(\varphi_k - u))\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \\
& \leq \|\nabla w_\epsilon(\varphi_k - u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|w_\epsilon \nabla(\varphi_k - u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
& \leq C\|\nabla w_\epsilon\|_{[L^2(\Omega)]^N} \cdot \|\varphi_k - u\|_{C^0([0,T];C^0(\bar{\Omega}))} + C\|w_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\varphi_k - u\|_{C^0([0,T];C^1(\bar{\Omega}))}.
\end{aligned}$$



Similarmente a (4.32), isto implica

$$\nabla r_\epsilon = \nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u) \rightarrow 0, \text{ fortemente, em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

o que dá o resultado desejado (4.29).  $\square$

**Observação 4.1** - De modo similar mostra-se a seguinte convergência

$$r_\epsilon \rightarrow 0, \text{ fortemente, em } C^0([0, T]; L^2(\Omega)). \quad (4.33)$$

$\square$

# Capítulo 5

## O caso dos buracos menores que o tamanho crítico

Neste capítulo vamos considerar o caso particular onde os buracos são menores que o tamanho crítico. Isto corresponde a assumir que a função  $w_\epsilon$  do quadro abstrato (2.1) converge fortemente em  $H^1(\Omega)$ , o que implica  $\mu = 0$ . Neste caso, todos os resultados dos Capítulos 3 e 4 são verdadeiros.

Assumiremos que os buracos  $T_\epsilon$  são tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Existe uma seqüência de funções testes } w_\epsilon \text{ satisfazendo} \\ (i) \quad w_\epsilon \in H^1(\Omega), \quad \|w_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_0 \\ (ii) \quad w_\epsilon = 0 \text{ em } T_\epsilon \\ (iii) \quad w_\epsilon \rightarrow 1, \text{ fortemente, em } H^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (5.1)$$

**Observação 5.1** - As hipóteses (5.1) dizem que o tamanho dos buracos  $a_{T_\epsilon}$  é menor que o tamanho crítico dado na página 11, isto é, que

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon^2 \log a_{T_\epsilon} \rightarrow -\infty, \quad \text{se } N = 2 \\ \frac{\epsilon^{N/(N-2)}}{a_{T_\epsilon}} \rightarrow +\infty, \quad \text{se } N = 3. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

A principal diferença entre as hipóteses de (2.1) e (5.1) é que, em (5.1)(iii), assu-

mimos a convergência forte de  $w_\epsilon$ . No presente caso, (2.1)(iv) é obviamente satisfeita com  $\gamma_\epsilon = 0$ ,  $\mu_\epsilon = -\Delta w_\epsilon$  e  $\mu = 0$ .

Exemplos em que (5.1) é satisfeita podem ser encontrados em [9].

Sob as hipóteses em (5.1), todos os resultados dos capítulos 3 e 4 são obviamente verdadeiros, mas a convergência forte dos dados agora implica em convergência forte das soluções.

**Teorema 5.1** *Suponha que (5.1) seja satisfeita e considere a seqüência de dados que satisfaz (3.1). Então a seqüência  $u_\epsilon$  de soluções de (1.1) satisfaz*

$$\begin{cases} \tilde{u}_\epsilon \rightharpoonup^* u, & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \tilde{u}'_\epsilon \rightharpoonup^* u', & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ \tilde{u}'_\epsilon \rightarrow u', & \text{fracamente, em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{cases} \quad (5.3)$$

e

$$\tilde{u}_\epsilon(t) \rightarrow u(t), \quad \text{fracamente, em } H_0^1(\Omega),$$

para todo  $t \in [0, T]$ , onde o limite  $u$  é a única solução de:

$$\begin{cases} u' - \beta \Delta u + |u|^\rho u = -\alpha^2 u + f, & \text{em } Q = \Omega \times (0, T) \\ u = 0, & \text{em } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u^0(x), & \text{em } \Omega \\ u \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)). \end{cases} \quad (5.4)$$

Além disso, se os dados satisfazem (4.1) e (4.2) e  $u$  é regular, então

$$\tilde{u}_\epsilon \rightarrow u \quad \text{fortemente, em } L^2([0, T]; H_0^1(\Omega)). \quad (5.5)$$

*Demonstração:* A demonstração da primeira parte do Teorema 5.1 (passagem ao limite em 3.1) é uma mera reescrita das demonstrações dos Teoremas 3.1 e 3.2.

Para demonstrar (5.5) procederemos como na demonstração do Teorema 4.1. Seja

$\varphi_k \in \mathcal{D}(Q)$  uma seqüência verificando (4.30). Temos

$$\begin{aligned} \|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - u)\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} &\leq \|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon\varphi_k)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\quad + \|\nabla((1 - w_\epsilon)\varphi_k)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\quad + \|\nabla(\varphi_k - u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Raciocinando como na demonstração do Teorema 4.1, e usando agora a convergência forte de  $w_\epsilon$  para 1, em  $H^1(\Omega)$ , no segundo termo após a desigualdade (5.6) ( esta é a novidade importante aqui), obtemos facilmente (5.5).  $\square$

# Apêndice

Neste apêndice apresentaremos alguns resultados que foram utilizados nos capítulos anteriores. Omitiremos as demonstrações por se tratarem de resultados conhecidos.

## A.1 Cálculo vetorial

### Vetor euclidiano $N$ -dimensional e norma

Seja  $\mathbb{R}^N$  o *Espaço Euclidiano*  $N$ -dimensional.

Para  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ , a *norma* de  $x$ , denotada por  $\|x\|$ , é definida como

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

### Produto interno e Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Dados dois vetores  $x, y \in \mathbb{R}^N$ , denotamos o *produto interno* de  $x$  por  $y$  como

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^N x_i y_i.$$

Naturalmente que pode-se escrever a norma de  $x$  como

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

A *Desigualdade de Cauchy-Schwarz* afirma que para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^N$  temos

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$$

com a igualdade valendo se, e somente se,  $x$  for um múltiplo escalar de  $y$ , ou um deles

for o vetor nulo.

### Função Escalar e Campo Vetorial

Uma função  $u$  cujo domínio é um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  e cuja imagem está contida em  $\mathbb{R}$ , isto é,  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , é dita uma *função escalar*. Por outro lado a aplicação  $U : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  que associa a cada vetor  $x$  no seu domínio  $\Omega$  um vetor  $U(x)$ , é denominada um *campo vetorial*.

### Gradiente, Divergente e Laplaciano

Se  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável, então o *gradiente* de  $u$ , denotado por  $\nabla u$  é definido como o vetor do  $\mathbb{R}^N$  dado por

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Se  $U(x) = (u_1(x), \dots, u_N(x))$  é um campo vetorial de classe  $C^1$ , definimos o *divergente* de  $U(x)$ , denotado por

$$\operatorname{div} U = \nabla \cdot U = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

onde  $\nabla$  é o operador definido como  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right)$ .

O *Laplaciano* é definido como

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2,$$

e é denotado por  $\Delta u$ .

### Identities úteis

Se  $u, v$  são funções de classe  $C^1$ ,  $c$  uma constante real, e  $U, V$  campos vetoriais também de classe  $C^1$ , então as seguintes relações podem ser facilmente demonstradas.

1.  $\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v$
2.  $\nabla(cu) = c\nabla u$
3.  $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$
4.  $\operatorname{div}(U + V) = \operatorname{div}U + \operatorname{div}V$
5.  $\operatorname{div}(uU) = u \underset{\nabla U}{\operatorname{div}U} + U \cdot \underset{\nabla u}{\nabla u}$

## A.2 Análise funcional

**Notação.** Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços de Banach. Designaremos por  $\mathcal{L}(X, Y)$  o espaço dos operadores lineares e contínuos de  $X$  em  $Y$ , munido com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \in X} \{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}.$$

**Teorema A.2.1** *Se uma seqüência eqüicontínua de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge simplesmente num subconjunto denso  $D \subset X$ , então  $f_n$  converge uniformemente em cada parte compacta  $K \subset X$ .*

*Demonstração:* Ver [19], p. 327.  $\square$

**Teorema A.2.2 (Ascoli-Arzelá)** *Seja  $K \subset \mathbb{R}$  compacto. Toda seqüência eqüicontínua e simplesmente limitada de funções  $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$  possui uma subseqüência uniformemente convergente.*

*Demonstração:* Ver [19], p. 329.  $\square$

### Teorema de Banach-Steinhaus

**Teorema A.2.3 (Banach-Steinhaus)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach. Seja  $\{T_i\}_{i \in I}$  uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de  $X$  em  $Y$ . Suponhamos que

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Então

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \infty$$

Dito de outro modo, existe uma constante  $C$  tal que

$$\|T_i(x)\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in X, \quad \forall i \in I.$$

*Demonstração:* Ver [4] p. 16.  $\square$

**Corolário A.2.1** *Seja  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $X, Y$  Banach. Suponha que para cada  $x \in X$  existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) =: T(x)$ . Então temos*

$$(i) \sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty$$

$$(ii) T \in \mathcal{L}(X, Y)$$

$$(iii) \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$$

*Demonstração:* Ver [4] p. 17.  $\square$

### Propriedades da topologia fraca $\sigma(X, X')$

Seja  $X$  um espaço de Banach. Denotaremos por  $X'$  o dual topológico de  $X$ , isto é,  $X'$  é o espaço dos funcionais lineares contínuas de  $X$  em  $\mathbb{R}$ , munido com a norma do dual

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X} \{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}.$$

Quando  $f \in X'$  e  $x \in X$  geralmente denotaremos  $\langle f, x \rangle$  no lugar de  $f(x)$ . Diz-se que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um produto escalar na dualidade  $X', X$ .

**Notação.** Dada uma seqüência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  em  $X$ , designaremos por  $x_n \rightharpoonup x$  a convergência de  $x_n$  para  $x$ , na topologia fraca  $\sigma(X, X')$ .



**Teorema A.2.4** *Seja  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência em  $X$ . Então:*

- (i)  $x_n \rightarrow x$  em  $\sigma(X, X')$  se, e somente se,  $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall f \in X'$
- (ii) Se  $x_n \rightarrow x$  fortemente, então  $x_n \rightarrow x$  fracamente em  $\sigma(X, X')$
- (iii) Se  $x_n \rightarrow x$  fracamente em  $\sigma(X, X')$ , então  $\|x_n\|$  é limitada e  $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$
- (iv) Se  $x_n \rightarrow x$  fracamente em  $\sigma(X, X')$  e se  $f_n \rightarrow f$  fortemente em  $X'$  (isto é  $\|f_n - f\|_{X'} \rightarrow 0$ ), então  $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ .

*Demonstração:* Ver [4] p. 37.  $\square$

#### A topologia fraca\* $\sigma(X', X)$

Seja  $X$  um espaço de Banach, seja  $X'$  seu dual e seja  $X''$  seu bidual, isto é, o dual, de  $X'$  munido com a norma

$$\|\xi\|_{X''} = \sup_{f \in X'} \{|\langle \xi, f \rangle| : \|f\| \leq 1\}.$$

**Notação.** Dada uma seqüência  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  em  $X'$  designaremos por  $f_n \xrightarrow{*} f$  a convergência de  $f_n$  para  $f$  na topologia fraca\*  $\sigma(X', X)$

**Teorema A.2.5** *Seja  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência em  $X'$ . Então:*

- (i)  $f_n \xrightarrow{*} f$  em  $\sigma(X', X)$  se, e somente se,  $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \quad \forall x \in X$
- (ii) Se  $f_n \rightarrow f$  fortemente, então  $f_n \xrightarrow{*} f$  fracamente em  $\sigma(X', X'')$   
Se  $f_n \xrightarrow{*} f$  em  $\sigma(X', X'')$ , então  $f_n \xrightarrow{*} f$  em  $\sigma(X', X)$
- (iii) Se  $f_n \xrightarrow{*} f$  em  $\sigma(X', X)$  então  $\|f_n\|$  é limitada e  $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$
- (iv) Se  $f_n \xrightarrow{*} f$  em  $\sigma(X', X)$  e se  $x_n \rightarrow x$  fortemente em  $X$  (isto é  $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$ ), então  $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ .

*Demonstração:* Ver [4] p. 41.  $\square$

**Teorema A.2.6 (Alaoglu-Bourbaki)** O conjunto  $B_{X'} = \{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$ , é compacto na topologia fraca\*  $\sigma(X', X)$ .

*Demonstração:* Ver [4] p. 43.  $\square$

## A.3 Espaços $L^p$

**Definição e propriedades elementeres dos espaços  $L^p$**

Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  aberto.

Para  $1 \leq p < \infty$  define-se

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Para  $p = \infty$  define-se

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e existe uma constante } C > 0 \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

Os espaços  $L^p$ , para  $1 \leq p < \infty$  e  $L^\infty$  são espaços de Banach com a seguinte norma, respectivamente,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)| = \inf \{C : |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Para  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

## Desigualdade de Hölder

**Teorema A.3.1 (Desigualdade de Hölder)** *Suponhamos que  $p_i \geq 1$ ,  $i = 1, \dots, m$  são tais que*

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1.$$

*Se  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$  para  $i = 1, \dots, m$  então temos que  $\prod_{i=1}^m f_i \in L^1(\Omega)$  e ainda*

$$\int_{\Omega} \left| \prod_{i=1}^m f_i(x) \right| dx \leq \prod_{i=1}^m \left( \int_{\Omega} |f_i(x)|^{p_i} dx \right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

## Desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções $L^2(\Omega)$

Sejam  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções de quadrado integrável. Então

$$|(u, v)_{L^2(\Omega)}| = \left| \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \right| \leq \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\| \|v\|$$

## Resultados de integração

**Teorema A.3.2** *Seja  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de funções em  $L^p(\Omega)$  e  $f \in L^p(\Omega)$ , tais que  $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ . Então existe uma subseqüência  $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que*

(i)  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  q.s. em  $\Omega$ ,

(ii)  $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \forall k$  e q.s. em  $\Omega$ , com  $h \in L^p(\Omega)$ .

**Teorema A.3.3 (Lema de Fatou)** *Seja  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de funções de  $L^1(\Omega)$  tal que*

(i) *Para cada  $n$ ,  $u_n(x) \geq 0$  q.s. em  $\Omega$*

(ii)  $\sup_n \int_{\Omega} u_n(x) dx < \infty$ .

Para cada  $x \in \Omega$  seja  $u(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$ . Então  $u \in L^1(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} u(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x) dx.$$

**Teorema A.3.4 (Densidade)** O espaço  $C_c(\Omega)$ , espaço das funções contínuas em  $\Omega$  com suporte compacto em  $\Omega$ , é denso em  $L^1(\Omega)$ , isto é, para toda  $u \in L^1(\Omega)$  e para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $v \in C_c(\Omega)$  tal que  $\|u - v\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon$ .

**Teorema A.3.5 (Fubini)** Suponhamos que  $F \in L^1((0, T) \times \Omega)$ , então para quase todo  $t \in (0, T)$ ,

$$F(t, x) \in L^1_x(\Omega) \quad e \quad \int_{\Omega} F(t, x) dx \in L^1_t((0, T)).$$

Igualmente, para quase todo  $x \in \Omega$ ,

$$F(t, x) \in L^1_t((0, T)) \quad e \quad \int_0^T F(t, x) dt \in L^1_x(\Omega).$$

Portanto se verifica

$$\int_0^T \int_{\Omega} F(t, x) dx dt = \int_{\Omega} \int_0^T F(t, x) dt dx = \int_{(0, T) \times \Omega} F(t, x) dt dx.$$

A seguir enunciaremos um Teorema que usamos freqüentemente nos capítulos anteriores.

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços de Banach sendo  $X \hookrightarrow Y$  continuamente. Denote

$$W(O, T) = \left\{ v \in L^p(0, T; X) : v' = \frac{dv}{dt} \in L^p(0, T; Y) \right\} \quad 1 \leq p < \infty.$$

Definindo em  $W(0, T)$  a norma

$$\|v\|_{W(0,T)}^p = \int_0^T \|v(t)\|_X^p dt + \int_0^T \left\| \frac{dv}{dt} \right\|_Y^p dt$$

segue-se que  $W(0, T)$  é um espaço de Banach.

**Teorema A.3.6** *Se  $v \in W(0, T)$ , então  $v \in C^0([0, T]; Y)$ , isto é, se  $v \in W(0, T)$ , então  $v$  é igual em quase todo ponto de  $(0, T)$ , a uma função contínua em  $[0, T]$ , com valores em  $B$ .*

*Demonstração:* Pode ser encontrada em [33].  $\square$

O próximo teorema é um teorema de Strauss, útil no estudo de equações diferenciais parciais não-lineares.

**Teorema A.3.7** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto limitado, e  $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de funções reais e mensuráveis em  $\Omega$ . Sejam  $F_\nu$  e  $G_\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , funções da reta na reta tais que  $F_\nu \circ u_\nu$ ,  $G_\nu \circ u_\nu$  sejam mensuráveis de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ . Suponhamos:*

- (i)  $F_\nu \circ u_\nu$  converge para  $v$ , q.s. em  $\Omega$ .
- (ii)  $\int |F_\nu \circ u_\nu(x)| |G_\nu \circ u_\nu(x)| dx < C$ , para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ .
- (iii)  $G_\nu$  converge para  $+\infty$ , quando  $F_\nu$  converge para  $+\infty$ .

Então,

- (a)  $v \in L^1(\Omega)$
- (b)  $F_\nu \circ u_\nu$  converge para  $v$ , em  $L^1(\Omega)$ .

*Demonstração:* Pode ser encontrada em [33].  $\square$

No nosso trabalho necessitamos deste teorema no caso particular em que  $F(s) = |s|^\rho s$ ,  $\rho > 0$ , como aparece no seguinte Corolário.

**Corolário A.3.1 (Lema de Lions)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto limitado. Sejam  $g_n, g \in L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$  satisfazendo às condições:*

(i)  $g_n \rightarrow g$ , quase sempre em  $\Omega$ .

(ii)  $\|g_n\|_{L^p(\Omega)} < C$ , para todo  $n$ .

Então,

(a)  $g_n \rightarrow g$ , em  $L^q(\Omega)$  sendo  $1 \leq q < p$

(b)  $g_n \rightharpoonup g$  fraco em  $L^p(\Omega)$ .

*Demonstração:* Pode ser encontrada em [33].  $\square$

## A.4 Espaços de Sobolev

### Derivada fraca ou generalizada

Dada uma função  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^N$ , diz-se que  $v_i \in L^p(\Omega)$  é a *derivada fraca* (ou *generalizada*) de  $u$  em relação a componente  $x_i$  da variável  $x$ , se

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i(x) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Notação:**  $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ .

Podemos ter então derivadas fracas de ordens mais altas.

Em geral para  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}},$$

onde  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ .

**Observação A.4.1** Podemos então calcular o Divergente e o Gradiente no sentido fraco.

### O espaço $W^{m,p}(\Omega)$

O *espaço de Sobolev*  $W^{m,p}(\Omega)$  é o espaço vetorial de todas as funções  $u \in L^p(\Omega)$  tais que para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^N$ , com  $|\alpha| \leq m$ ,  $D^\alpha u$  pertence a  $L^p(\Omega)$  ( $m$  inteiro,  $1 \leq p \leq \infty$ ), sendo  $D^\alpha u$  a derivada de  $u$  no sentido fraco ou generalizado. Resumidamente

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

$W^{m,p}$  é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Quando  $p = 2$ ,  $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

### O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Seja  $\mathcal{D}(\Omega)$  o espaço das funções de classe  $C^\infty$ , com suporte compacto contido em  $\Omega$ . O fecho de  $\mathcal{D}(\Omega)$  em  $W^{m,p}(\Omega)$  é denotado por  $W_0^{m,p}(\Omega)$

Quando  $p = 2$  escreve-se  $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ .

### O espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Suponha que  $1 \leq p < \infty$  e  $q$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Representa-se por  $W^{-m,q}(\Omega)$  o dual topológico de  $W_0^{m,p}(\Omega)$ .

O dual topológico de  $H_0^m(\Omega)$  representa-se por  $H^{-m}(\Omega)$ .

### Desigualdade de Poincaré-Friedrichs

Seja  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^N$ . Se  $v \in H_0^1(\Omega)$ , então

$$|v|_{L^2(\Omega)} \leq C|\nabla v|_{[L^2]^N},$$

onde  $C$  é uma constante que depende somente de  $\Omega$ .

A demonstração é bem conhecida e pode ser encontrada em [4] ou [31] pag.91.

Como consequência desta desigualdade, considera-se a norma de  $H_0^1(\Omega)$ ,

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = |\nabla v|_{L^2(\Omega)},$$

sendo  $\|v\|_{H^1(\Omega)}$  e  $|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$  equivalentes.

O espaço  $H_0^1(\Omega)$  também é um espaço de Hilbert com o seguinte produto escalar

$$((u, v)) = \left( \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Este produto escalar e esta norma serão denotados respectivamente por  $((\cdot, \cdot))$  e  $\|\cdot\|$ .

### Teorema da Divergência e Fórmula de Green

Seja  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^N$ , com fronteira de classe  $C^1$ . Então valem as seguintes fórmulas

(i)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F(x)) dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \eta(x) dx, \quad F \in [H^1(\Omega)]^N$$

(ii)

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx, \quad v \in H_0^1(\Omega), u \in H^2(\Omega).$$



**Teorema A.4.1 (Desigualdade de Gronwall)** *Suponhamos que  $u$ ,  $v$  e  $w$  são funções positivas satisfazendo*

$$w(t) \leq v(t) + \int_0^t u(s)w(s)ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

*Então teremos que*

$$w(t) \leq v(t) + \int_0^t u(s)v(s)e^{\int_s^t u(r)dr} ds.$$

*Demonstração:* Ver [38], p.13.  $\square$

**Corolário A.4.1** *Com as hipóteses do Teorema A.4.1, assumindo que  $v$  é uma função crescente, teremos que*

$$w(t) \leq v(t)e^{\int_0^t u(s)ds}.$$

*Em particular se  $v(t) = C = \text{constante}$ , teremos*

$$w(t) \leq Ce^{\int_0^t u(s)ds}.$$

*Demonstração:* Ver [38], p.14.  $\square$

## A.5 Imersões em espaços de Sobolev

Sejam  $V$  e  $H$  espaços de Hilbert, sendo  $V$  munido com a norma  $\|\cdot\|$  e  $H$  com a norma  $|\cdot|$ . Suponha que  $V \subseteq H$  e seja

$$\iota : V \rightarrow H$$

a injeção canônica de  $V$  em  $H$  que a cada  $v \in V$  faz corresponder  $\iota(v)$  como elemento de  $H$ . Diz-se simplesmente que o operador linear  $\iota$  é o *operador de imersão* de  $V$  em  $H$ .

Diz-se que a *imersão*  $\iota : V \rightarrow H$  é *contínua*, quando existe uma constante  $C > 0$ , tal que

$$\|v\|_H \leq C\|v\|_V, \quad \forall v \in V$$

Um exemplo simples é o caso  $V = H_0^1(\Omega)$  e  $H = L^2(\Omega)$  ou  $V = H^1(\Omega)$  e  $H = L^2(\Omega)$ , ou ainda  $V = H^m(\Omega)$  e  $H = L^2(\Omega)$ .

Diz-se que a *imersão*  $\iota : V \rightarrow H$  é *compacta*, quando a imagem dos limitados de  $V$ , por  $\iota$ , são conjuntos relativamente compactos de  $H$ , isto é, conjuntos cujo fecho é compacto em  $H$ , ou equivalentemente, diz-se que a *imersão*  $\iota : V \rightarrow H$  é *compacta* se seqüências limitadas em  $V$  são levadas por  $\iota$  em seqüências que têm subseqüência convergente em  $H$ .

O objetivo aqui é enunciar alguns resultados importantes de imersão

**Teorema A.5.1** *Seja  $\Omega$  um aberto de classe  $C^1$  com fronteira  $\Gamma$  limitada e seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Então,*

*se  $1 \leq p < N$ , tem-se que  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$  onde  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ ,*

*se  $p = N$ , tem-se que  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \forall q \in [p, +\infty)$ ,*

*se  $p > N$ , tem-se que  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ ,*

*com injeções contínuas.*

### Teoremas de Compacidade

**Teorema A.5.2 (Rellich-Kondrachov)** *Suponha que  $\Omega$  seja um aberto limitado do  $\mathbb{R}^N$  de classe  $C^1$ . Então,*

*se  $p < N$ , tem-se que  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, p^*)$  onde  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ ,*

*se  $p = N$ , tem-se que  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \forall q \in [1, +\infty)$ ,*

*se  $p > N$ , tem-se que  $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ ,*

com injeções compactas.

*Demonstração:* Ver [4].□

**Teorema A.5.3 (Aubin-Lions)** *Sejam  $1 < p_i < \infty, i = 1, 2$  e  $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$  espaços de Banach reflexivos ( $\hookrightarrow$  indica injeção compacta e densa). Se  $0 < T < \infty$ , seja*

$$W = \{v \in L^{p_1}(0, T; B_0), v' \in L^{p_2}(0, T; B_1)\}.$$

Onde a norma de  $v \in W$  é dada por

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_1}(0, T; B_0)} + \|v'\|_{L^{p_2}(0, T; B_1)}.$$

Então,

(i)  $W$  é um espaço de Banach,

(ii)  $W \hookrightarrow L^{p_1}(0, T; B)$ .

**Teorema A.5.4 (Sobolev)** *Se  $1 \leq p \leq N$ , tem-se  $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  para  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ , sendo a injeção contínua.*

*Demonstração:* Ver [38], pp. 120. □

## A.6 Funções absolutamente contínuas

**Definição A.6.1** *Uma função  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é dita absolutamente contínua quando, para cada  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$ , tal que para toda coleção finita  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$  de subintervalos de  $[a, b]$  dois a dois disjuntos satisfazendo a condição*

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta,$$

*tem-se necessariamente,*

$$\sum_{k=1}^n |u(b_k) - u(a_k)| < \epsilon.$$

É claro que toda função absolutamente contínua é uniformemente contínua e portanto contínua. No entanto a recíproca não é verdadeira pois existem funções uniformemente contínuas que não são absolutamente contínuas.

**Teorema A.6.1** *Se  $u \in L^1(a, b)$  então as integrais indefinidas de  $u$  são absolutamente contínuas.*

*Demonstração:* Ver [32], p. 140.  $\square$

**Teorema A.6.2** *A derivada  $u$ , de uma função absolutamente contínua  $v$ , é integrável em  $[a, b]$ , e para todo  $x \in [a, b]$ , tem-se*

$$\int_a^x u(t) dt = v(x) - v(a).$$

*Em outras palavras, se  $v$  é absolutamente contínua ela é uma integral indefinida de sua derivada.*

*Demonstração:* Ver [32], p. 145.  $\square$

## A.7 Medidas de Radon (ou medidas de ordem zero)

Seja  $K$  um subconjunto compacto de  $\Omega$ . O espaço

$$C_c(\Omega) = \{\varphi \in C(\Omega) : \text{supp } \varphi \subseteq K\},$$

munido com a norma

$$\|\varphi\|_K = \max \{|\varphi(t)| : t \in K\},$$

é um espaço de Banach.

**Definição A.7.1** *Se  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência em  $C_c(\Omega)$ , escreveremos  $\varphi_n \rightarrow 0$*

se

(i) Existe um conjunto compacto  $K \subset \Omega$  contendo o suporte de  $\varphi_n$ , para todo  $n$ ;

(ii)  $\varphi_n \rightarrow 0$ , uniformemente, em  $\Omega$ .

Diremos então que  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tende para zero, em (ou no sentido de)  $C_c(\Omega)$ .

**Definição A.7.2** Uma medida de Radon<sup>1</sup> real  $\mu$ , em  $\Omega$ , é uma forma linear em  $C_c(\Omega)$ , que é contínua no sentido em que  $\{\varphi_n\}_n \subset C_c(\Omega)$  e  $\varphi \rightarrow 0$ , juntos, implicam  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\varphi_n) = 0$ .

Analogamente define-se medida de Radon complexa.

É fácil verificar que uma forma linear em  $C_c(\Omega)$  satisfaz as condições da Definição 2, se, e somente se, a cada conjunto compacto  $K$  em  $\Omega$ , corresponder um número  $m_K$  tal que

$$\|\mu(\varphi)\| \leq m_K \|\varphi\|_\infty,$$

para cada  $\varphi \in C_c(\Omega)$ , com suporte contido em  $K$ .

**Definição A.7.3** Uma medida de Radon real  $\mu$ , em  $\Omega$ , é *positiva* no seguinte sentido: para toda  $\varphi \in C_c(\Omega)$ , com  $\varphi(x) \geq 0$ , para todo  $x \in \Omega$ ,

$$\int_{\Omega} \varphi(x) d\mu(x) \geq 0.$$

Nesse caso

$$\mu(\varphi) = \sup\{\mu(\psi) : \psi \in C_{c+}(\Omega), \psi \leq \varphi\},$$

para cada  $\varphi$  em  $C_{c+}(\Omega)$ , conjunto das funções positivas em  $C_c(\Omega)$ .

## São exemplos de medidas de Radon

- medida de Lebesgue

---

<sup>1</sup>Ver [14]

- medida atômica
- densidades
- medida de Lebesgue-Stieltjes .

# Referências Bibliográficas

- [1] Allaire, G. - Homogénéisation des équations de Navier-Stokes. Thèse, Université Paris VI, (1989).
- [2] Allaire, G. - Homogenization of Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes. DDMT/DEDR/IRD-CEN, SACLAY-YVETE, Paris, (1990).
- [3] Brahim,S.-Otsmane; Francfort, G. A. and Murat, F. - Correctors for the homogenization of the wave and heat equations. *J. Math. Pures et Appl.* **71:3** 197-231, (1992).
- [4] Brézis, H. - Análisis funcional, Teoría y aplicaciones. Alianza Editorial, S.A., Madrid, (1984).
- [5] Brézis, H. -Operateurs maximaux monotones et semigroups de contractions dans les spaces de Hilbert. North Holland Publishing Co., Amsterdam, (1973).
- [6] Brézis, H.; Browder, F.E. - Some properties of higher order Sobolev spaces, *J. Math. Pures et Appl.* **61**, p. 242-259, (1982.)
- [7] Brahim-Otsmane, S.; Francfort, G.A.; Murat, F. -Correctores for the homogenization of the wave end heat equations. *J. Math. Pures et Appl.*, 71, no. 3, pp. 197-231, (1992).
- [8] Cioranescu, D.; Donato, P. - Exact internal controllability in perforated domains *J. Math. Pures et Appl.* **68**, 185-213, (1989).

- [9] Cioranescu, D.; Donato, P.; Murat, F.; Zuazua, E. - Homogenization and correctors for the wave equation in domains with small holes, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **18**, 251-293, (1991).
- [10] Cioranescu, D.; Donato, P.; Zuazua, E. - Exact boundary controllability for the wave equation in domains with small holes. *J. Math. Pures et Appl.*, 71, pp. 343-377, (1992).
- [11] Cioranescu, D.; Murat, F. - Un terme étrange venu d'ailleurs. *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications* (H. Brézis and J. L. Lions, eds), Collège de France Seminar, vol. II e III, *Research Notes in Mathematics*, vol. 60 e 70, Pitman, 93-138 e 154-178, (1982).
- [12] Conca, C.; Planchard, J.; Vanninathan, M. - *Fluids and periodic structures*, Research in Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York, (1995).
- [13] Diestel, J.; Uhl, J.J. - *Vector Measures*. *Mathematical Surveys*, 15, American Mathematical Society, Providence, (1977).
- [14] Edwards, R.E. - *Functional analysis: theory and applications*. Dover Publications, INC. New York, (1995).
- [15] Finn, R. - Mathematical questions relating to viscous fluid flow in an exterior domain. *Rock Mountain Journal of Mathematics*, vol. 3, 1, pp. 107-140, (1973).
- [16] Gomes, A.M. - *Semigrupos não lineares e equações diferenciais nos espaços de Banach*. *Textos de Métodos Matemáticos*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1992).
- [17] Grum-Rehome, M. - Caractérisation du sons différentiel d'intégrandes convexes dans les espaces de Sobolev. *J. Math. Pures et Appl.*, 56, pp. 149-156, (1977).
- [18] Ho, L.F. - Observabilité frontière de l'équation des ondes. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 302, pp. 443-446, (1986).



- [19] Lima, E.L. -Curso de análise vol. 1, IMPA, CNPq, Projeto Euclides, (1992)
- [20] Kacimi, H. - Homogénéisation de problèmes de Dirichlet avec des petitstous  
Thèse de 3éme cycle, Université Paris VI, (1987).
- [21] Kacimi, H.; Murat, F. - Estimation de l'erreur dans des problèmes de Dirichlet  
où apparaît un terme e'trange, *Partial Differential Equations and the Calculus of  
Variations* (F. Colombini, A. Marino, L. Modica and S. Spagnolo), vol.II, *Essays  
in Honor of Ennio de Giorgi*, Birkhäuser, Boston, 612-693, (1989).
- [22] Kohn, R.V.; Vogelius, M. - A new model for thin plates with rapidly varying  
thickness II: a convergence proof. *Quant. Appl. Math.*, 43, pp. 1-22, (1985).
- [23] Ladyzhenskaya, O.A. - The mathematical theory of viscous incompressible flow.  
Gordon and Breach, (1969).
- [24] Ladyzhenskaya, O.A; Visik, M.I. - Boundary value problems for partial differen-  
tial equations and certain classes of operator. *Uspehi Mat. Nauki (NS)*, 11, n.  
672, pp. 41-97, (1956).
- [25] Lesmes, J. - Teoria das distribuições e equações diferenciais. *Monografias de  
Matemática*, IMPA, Rio de Janeiro, (1972).
- [26] Lions, J.L. - Asymptotic expansions in perforated media with a periodic struc-  
ture, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **10:1**, 125-140, (1980).
- [27] Lions, J.L. - Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles.  
Press de l'Université de Montreal, Montreal. (1965).
- [28] Lions, J.L.; Magenes, E. - Problèmes aux limites non homogènes et applications,  
Vol. 1, Dunod, Paris, (1968).
- [29] Lions, J.L. - Quelques méthodes de résolution des problèmes non linéaires. Dun-  
od, Paris, (1969).

- [30] Medeiros, L.A. - Exact controllability for the wave equations - HUM. 37º Seminário Brasileiro de Análise, Maio, (1993).
- [31] Medeiros, L.A.; Miranda, M.M. - Iniciação aos espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1989).
- [32] Medeiros, L.A.; Mello, E.A. - Teoria da integração. IM - UFRJ, Rio de Janeiro, (1979).
- [33] Medeiros, L.A. - Iniciação às equações diferenciais parciais não lineares - Notas de aula. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1976).
- [34] Medeiros, L.A.; Rivera P.H. - Iniciação aos espaços de Sobolev. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1977).
- [35] Medeiros, L.A.; Rivera P.H. - Espaços de Sobolev e equações diferenciais parciais, textos de métodos matemáticos. . IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1975).
- [36] Miranda, M.M. - Traço para o dual dos espaços de Sobolev. Bol. Soc. Paran. Mat. (2ª série), vol. n. 2, pp. 103-120, (1988).
- [37] Riesz, F. - Sur la convergence en Moyene. Acta Sci. Math., vol. 4, pp. 58-64, 182-185, (1928).
- [38] Rivera, J.E.M. - Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais. Série: textos avançados, LNCC, Petrópolis, Rio de Janeiro. (1999).
- [39] Sanches-Palência, E. - Boundary-value problems in domains containing perforated walls, Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications (H. Brézis and J. L. Lions) Collège de France Seminar, vol. III, Research Notes in Mathematics 70 Pitman London, 309-325,(1982).
- [40] Sanches-Palência, E. - Non-homogeneous media and vibration theory. Lecture notes in physics, 127, Berlin end New York, Springer Verlang, (1980).

- [41] Saut, J.C. - Some remarks on the limit of viscoelastic fluids as the relaxation time tends to zero. In Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, edited by E. Kröner and Kirchgässner, Lecture notes in Physics, vol. 249, mai 86, Springer Verlag, Berlin and New York, pp. 364-369, (1986).
- [42] Souza, J.S. - Homogenization of the heat equation in open sets perforated with tiny holes - HUM. 49<sup>o</sup> Seminário Brasileiro de Análise, (1999).
- [43] Souza, J.S. - Homogenization of the heat equation in open sets perforated with tiny holes - DOIS. 50<sup>o</sup> Seminário Brasileiro de Análise, (1999).
- [44] Stampacchia, G. - Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. Presses de l'Université de Montréal, (1966).
- [45] Tartar, L. - Convergence of the homogenization process. Appendix of [40].
- [46] Tartar, L. - Cours Peccot au Collège de France mar (1977), partially written in: F. Murat, *H-Convergence*, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique de l'Université d'Alger, duplicated, pp. 34, (1978).
- [47] Teman, Roger. - Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis North-Holland, Amsterdam, (1984).