

**WAGNER ANDRÉ DOS SANTOS CONCEIÇÃO**

**Estudo da transferência de calor em fluidos não-  
newtonianos em dutos circulares e não-circulares**

**FLORIANÓPOLIS**

**2002**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA E ENGENHARIA DE  
ALIMENTOS**

**Estudo da transferência de calor em fluidos não-  
newtonianos em dutos circulares e não-circulares**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Alimentos do Centro Tecnológico da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Alimentos.

Orientador : Prof. Dr. José Antonio Ribeiro Souza

**WAGNER ANDRÉ DOS SANTOS CONCEIÇÃO**

**FLORIANÓPOLIS  
2002**

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Dr. José Antonio Ribeiro Souza, pela orientação e apoio na realização deste trabalho.

Ao professor Dr. Cid Marcos Gonçalves Andrade do departamento de engenharia química da Universidade Estadual de Maringá pelas sugestões sobre a tese.

A Universidade Estadual de Maringá pelo material bibliográfico cedido.

Ao Daniel secretário da pós-graduação da engenharia de alimentos e à Rogéria e ao Ildo, chefes de expediente do departamento de engenharia química e engenharia de alimentos.

Em especial aos amigos Jean Carlos Uliano, Elizeu Maciel, Ronald Olavo Schwanke, Guilherme Buss, Lorian Livia Vicenzi, Tirzhá Lins Porto Dantas, Cintia Nagaya, Frederic Dabbas, que mostram ser verdadeiros amigos nas diversas ocasiões, demonstrando o seu grande companheirismo e amizade.

E a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram na realização e conclusão deste trabalho.

***Dedico***

*A Mônica, pelo carinho e  
companhia e aos meus pais e  
irmãos por me apoiarem em  
todos os momentos da minha  
vida.*

## RESUMO

Sistemas de trocas térmicas são de grande importância na indústria de alimentos. O objetivo principal deste trabalho é fazer uma revisão de correlações para transferência de calor em fluidos não-newtonianos em dutos circulares e não-circulares, que são apresentadas em artigos, e ainda não foram divulgadas adequadamente, e também propor modificações em algumas correlações.

As correlações foram comparadas, sempre que possível, com os dados experimentais da literatura para condições de temperatura de parede constante e fluxo de calor constante, e condições de escoamento laminar e turbulento, considerando-se as condições geométricas em dutos circulares e não-circulares.

Este trabalho apresenta modificações em correlações já existentes, como para transferência de calor em dutos circulares com temperatura de parede constante e termicamente desenvolvido, e transferência de calor em dutos não-circulares com temperatura de parede constante e termicamente em desenvolvimento, e transferência de calor em dutos não-circulares com fluxo de calor constante e termicamente em desenvolvimento, as modificações propostas neste trabalho apresentam um bom desempenho comparadas com dados experimentais e correlações mais antigas.

Através da comparação entre as correlações apresentadas para transferência de fluxo de calor constante e termicamente desenvolvido em dutos circulares, com os dados experimentais, demonstra-se que para este caso a dependência é exclusiva de um único parâmetro, que é o índice de comportamento do escoamento.

A análise das correlações para temperatura de parede constante e termicamente em desenvolvimento, com os dados experimentais, demonstram a importância de se levar em consideração o índice de consistência do fluido.

A transferência de calor em dutos não-circulares, mesmo sendo dependente de duas dimensões, apresenta correlações simples e as aproximações de correlações de dutos circulares, também apresentaram bons resultados.

As correlações que prevêm o comportamento da transferência de calor em regime turbulento são dependentes do número de *Reynolds* e *Prandtl* generalizado, definido para fluidos não-newtonianos, porém a sua definição é arbitrária e varia de acordo com cada autor.

## ABSTRACT

Thermal exchanges systems are very important in the food industry. The objective of this study is to do a review of correlations for heat transfer in non-Newtonian fluids in circular ducts and non-circular, that are presented in articles, and still not adequately divulged, and also to consider modifications in some correlations.

The correlations had been compared, that always possible, with the experimental data of literature for conditions of constant temperature of wall and constant flow of heat, and conditions of laminar and turbulent draining, considering the geometric conditions in circular and non-circular ducts.

This work presents modifications in existing correlations already, as for heat transfer in circular ducts with constant temperature of wall and termically developed, and heat transfer in non-circular ducts with constant temperature of wall and termically in development, and transference of heat in non-circular ducts with constant flow of heat and termically in development, modifications proposals in this work presents a good performance compared with experimental data and older correlations.

Through the comparison between the correlations presented for constant flow transfer of heat and termically developed in circular ducts, with the experimental data, one demonstrates that for this in case that the dependence is exclusive of an only parameter, that is the index of behavior of the draining.

The analysis of the correlations for temperature of constant wall and termically in development, with the experimental data, demonstrates the importance of taking in consideration the consistency index of the fluid.

The heat transfer in non-circular ducts, exactly being dependent of two dimensions, presents simple correlations and the approaches of correlations of circular ducts, had also presented good results. The correlations that foresee the behavior of the transference of heat in turbulent regimen are dependents of the generalized *Prandlt* and *Reynolds* number, defined for non-Newtonian fluids, however its definition is arbitrary and varies each author in accordance with.

## SIMBOLOGIA

$a$	metade da largura do duto
$a_1, a_2$	coeficientes do perfil de velocidade que dependem da geometria do duto
$a^*$	constante geométrica para duto retangular
$A$	variação de temperatura com a distancia
$A_p$	área de transferência de calor da parede
$b$	metade da altura do duto
$b^*$	constante geométrica para duto retangular
$C_p$	calor específico
$C_o$	constante
$D$	diâmetro
$D_h$	diâmetro hidráulico
$Gz$	número de <i>Graetz</i>
$Gz_m$	número de <i>Graetz</i> baseado na vazão mássica
$h$	coeficiente de transferência de calor
$k$	condutividade térmica
$K$	índice de consistência do fluido
$L_h$	comprimento da entrada hidrodinâmica
$L_t$	comprimento da entrada térmico
$n$	índice de comportamento do escoamento
$Pe$	número de <i>Peclet</i>
$Pr$	número de <i>Prandlt</i>
$Pr_a$	número de <i>Prandlt</i> aparente
$Pr_{eff}$	número de <i>Prandlt</i> efetivo
$Pr_g$	número de <i>Prandlt</i> generalizado
$Pr'$	número de <i>Prandlt</i> introduzido por METZNER
$q$	fluxo térmico
$q_{entrada-axial}$	fluxo térmico na entrada na posição axial
$q_{entrada-radial}$	fluxo térmico de calor na entrada na posição radial
$q_{p-radial}$	fluxo térmico na parede na posição radial
$q_{saída-axial}$	fluxo térmico de calor na saída na posição axial

$q_{saída-radial}$	fluxo térmico de calor na saída na posição radial
$q_{total}$	taxa de fluxo de calor total
$r$	posição radial
$R$	raio do tubo
$Re$	número de <i>Reynolds</i>
$Re_a$	número de <i>Reynolds</i> aparente
$Re_{eff}$	número de <i>Reynolds</i> efetivo
$Re_g$	número de <i>Reynolds</i> generalizado
$Re'$	número de <i>Reynolds</i> introduzido por METZNER
$Re^*$	número de <i>Reynolds</i> generalizado por KOZICKI
$T$	temperatura
$T_o$	temperatura de entrada
$T_c$	temperatura no centro do duto
$T_p$	temperatura na parede
$\bar{T}$	temperatura média do escoamento
$\bar{u}$	velocidade média da mistura
$u_o$	velocidade de entrada
$u_c$	velocidade no centro do duto
$u_{max}$	velocidade máxima
$x_{th}^+$	distância térmica axial adimensional
$z$	posição axial
$Z^*$	coordenada adimensional periférica
$\alpha$	difusividade térmica
$\alpha^*$	razão aparente
$\Delta r$	espessura para uma distancia radial $r$ do centro
$\Delta z$	variação do comprimento do tubo
$\gamma_{p,av}$	gradiente médio de velocidade retangular ou circular na parede do duto
$\phi$	perfil de velocidade adimensional
$\sigma$	distância adimensional a partir da parede
$\tau_o$	tensão inicial de cisalhamento para o plástico de Bingham
$\tau$	tensão de cisalhamento



$\theta$	temperatura adimensional
$\mu$	viscosidade dinâmica
$\eta$	viscosidade aparente
$\rho$	densidade
$\nabla p$	gradiente de pressão

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	1
<b>2. FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS</b> .....	3
2.1 Lei da potência.....	4
2.2 Escoamento laminar.....	5
2.2.1 Perfil termicamente em desenvolvimento.....	5
2.2.2 Perfil termicamente desenvolvido.....	6
2.3 Grupos adimensionais.....	6
<b>3. FLUXO DE CALOR CONSTANTE</b> .....	8
3.1 Regime laminar termicamente desenvolvido.....	8
3.1.1 Correlação de GRIGULL.....	8
3.1.2 Correlação de BIRD.....	9
3.1.3 Correlação de MIZUSHINA.....	12
3.1.3 Correlação de DATTA.....	15
3.2 Regime laminar termicamente em desenvolvimento.....	18
3.2.1 Correlação de MATSUSHISA-BIRD.....	18
3.2.2 Correlação de MIZUSHINA.....	18
3.2.3 Correlação de CHURCHILL-USAGI.....	19
3.2.4 Correlação de CHURCHILL-OZOE.....	19
3.2.5 Correlação de BASSET - WELTY.....	20
3.2.6 Correlação de BIRD.....	20
3.3 Comparação entre as correlações.....	22
3.4 Discussão dos Resultados.....	29
<b>4. TEMPERATURA DE PAREDE CONSTANTE</b> .....	32
4.1 Regime laminar termicamente desenvolvido.....	32
4.1.1 Correlação de BIRD.....	32
4.1.2 Modificação de KAYS.....	36
4.2 Regime laminar termicamente em desenvolvimento.....	38
4.2.1 Correlação de PIGFORD.....	38
4.2.2 Correlação de BIRD.....	39
4.2.3 Correlação de JOSHI- BERGLES.....	42
4.3 Comparação entre as correlações.....	42
4.4 Discussão dos Resultados.....	43
<b>5. TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM DUTOS NÃO-CIRCULARES</b> .....	45
5.1 Condições limites.....	45
5.2 Grupos adimensionais e soluções generalizadas.....	45
5.3 Perfil de velocidade.....	47
5.4 Fatores de Correção.....	48
5.5 Regime laminar e termicamente desenvolvido.....	49
5.6 Regime laminar e termicamente em desenvolvimento.....	49
5.6.1 Modificação de BIRD.....	50
5.7 Comparação entre as correlações.....	50
5.8 Discussão dos Resultados.....	53
<b>6. TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM REGIME TURBULENTO</b> .....	55
6.1 Fator de atrito.....	55
6.2 Fluxo de calor constante na parede e termicamente em desenvolvimento.....	56
6.2.1 Correlação de METZNER-FRIEND.....	56
6.2.2 Correlação de CLAPP.....	56
6.2.3 Correlação de YOO.....	56
6.2.4 Correlação de HARTNETT e RAO.....	57
6.3 Comparação entre as correlações.....	57
6.4 Discussão dos Resultados.....	58
<b>7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b> .....	59
7.1 Conclusões.....	59
7.2 Sugestões para trabalhos futuros.....	60
<b>8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	61

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo da transferência de calor em fluidos não-newtonianos em dutos circulares e não circulares tem como sua principal aplicação, sistemas de troca térmica.

Fluidos como molho de tomate, leite condensado, soluções de açúcar, purê de banana, etc. são não-newtonianos. A transferência de calor em fluidos não-newtonianos geralmente é analisado, através de equações empíricas relacionadas com grupos adimensionais.

Uma notável característica de muitos fluidos não-newtonianos é que suas propriedades reológicas são muito sensíveis à temperatura e à transferência de calor; por exemplo em um tubo aquecido, a viscosidade varia fortemente com a posição axial.

A dinâmica de fluidos em transferência de calor em regime laminar ou turbulento através de dutos não circulares é de grande interesse por causa de sua ampla aplicação, a obtenção de trocadores de calor mais compactos. A análise hidrodinâmica e de transferência de calor em dutos não-circulares é geralmente mais complicado, que no caso de dutos circulares. Por exemplo, a determinação do fator de atrito e a transferência de calor totalmente desenvolvida em dutos não circulares requer uma análise bidimensional em contraste com a unidimensional dos dutos circulares (HARTNETT, 1989).

O desenvolvimento de equipamentos que envolvam transferência de calor em fluidos não-newtonianos é de enorme importância, e sua eficiência depende acima de tudo da confiança das equações que explicam a transferência de calor (LUNA, 1987).

O objetivo geral do presente trabalho é apresentar das correlações existentes na literatura e também propor modificações em algumas correlações para transferência de calor em dutos circulares e não-circulares para fluidos não-newtonianos, como também a comparação das diversas correlações e determinar suas faixas de uso, para uma melhor orientação no desenvolvimento de projetos de troca térmicas. Este trabalho é uma tentativa de compilar correlações de fluidos não-newtonianos, comparando com dados experimentais da literatura para condições térmicas, temperatura de parede constante e fluxo de calor constante, e

condições de fluxo, laminar e turbulento, como condições geométricas, dutos circulares e não-circulares, sempre que possível.

Há uma escassez de dados nos livros textos. Existe pouca precisão na apresentação das correlações.

## 2. FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS

A teoria clássica trata da mecânica dos fluidos e da transferência de calor em líquidos newtonianos. A expressão que relaciona a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação para fluidos newtonianos, apresenta um comportamento linear, e pode ser representada da seguinte forma

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.1)$$

onde a constante de proporcionalidade  $\mu$  é denominada viscosidade dinâmica ou, mais simplesmente, viscosidade do fluido. Infelizmente, o comportamento da maioria dos líquidos usados nas indústrias químicas e de alimentos não é descrito adequadamente por este modelo. A maioria dos líquidos reais exibem o comportamento não-newtoniano, o que significa dizer que a tensão de cisalhamento não é linearmente proporcional ao gradiente de velocidade.

METZNER(1965) apresenta uma classificação dos fluidos em três grupos:

1. líquidos puramente viscosos
2. líquidos viscoelásticos
3. fluidos com  $\mu$  dependente do tempo

A relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação em um fluido real é parte da ciência reológica. A Figura 2.1 demonstra alguns exemplos do comportamento reológico dos fluidos. Um comportamento simples é mostrado na curva A, uma linha reta passando pela origem. Fluidos que seguem este comportamento linear são denominados newtonianos. Gases e muitos líquidos simples são fluidos newtonianos. As outras curvas mostradas na Figura 2.1 representam o comportamento reológico dos líquidos denominados não-newtonianos. Alguns líquidos, apresentam uma resistência, até a entrada em movimento, de uma tensão de cisalhamento denominada  $\tau_0$ , alcançando assim um fluxo linear com a taxa de deformação. A curva B é um exemplo desta relação. Líquidos representados por este comportamento são denominados plásticos de Bingham. A curva C representa os pseudoplásticos; a curva passa pela origem, e apresenta uma forma cônvexa para baixas tensões, e torna-se próxima de uma reta em grandes tensões. A curva D representa o fluido dilatante. A curva é côncava

para baixo em baixas tensões e possui uma forma linear em grandes tensões (McCABE, 1993).

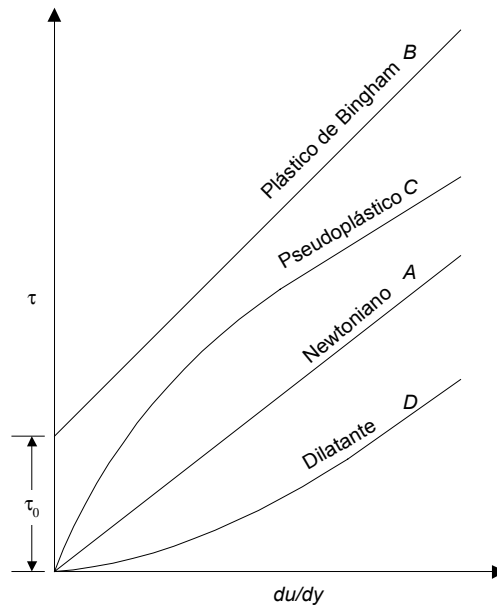


Figura 2.1 - Tensão de cisalhamento por gradiente de velocidade

## 2.1 Lei da potência

Fluidos não-newtonianos podem ser representados por uma equação simples

$$\tau = K \left( \frac{du}{dy} \right)^n \quad (2.2)$$

na equação 2.2, desenvolvida por OSTWALD-DE WAELE, atualmente conhecido como lei de potência, que é um modelo de dois parâmetros,  $K$  é chamado de índice de consistência do fluido e  $n$  índice de comportamento do escoamento.

O modelo da lei de potência é mais frequentemente usado na mecânica dos fluidos e na transferência de calor em fluidos não-newtonianos. Isto tem sido bem comprovado em predições para um grande número de pseudoplásticos e fluidos dilatantes (KAKAÇ, 1987).

No caso do plástico de Bingham

$$\tau = \tau_0 + \mu \left( \frac{du}{dy} \right) \quad (2.3)$$

a equação 2.3 é frequentemente empregado para fluidos que exibem uma tensão inicial  $\tau_0$ .

## 2.2 escoamento laminar

Quando um fluido escoar sobre a superfície de um corpo sólido, a distribuição de velocidade e de temperatura na vizinhança da superfície influencia fortemente a transferência de calor. A entrada de um fluido em um duto apresenta diferentes situações, mostradas a seguir.

### 2.2.1 Perfil termicamente em desenvolvimento

Considere o escoamento de um fluido dentro de um duto, como esta ilustrado na Figura 2.2. A transferência de calor para o fluido começa após uma seção isotérmica acalmante, na qual há uma seção isotérmica para permitir o desenvolvimento da velocidade antes de o fluido penetrar na zona de transferência de calor. Nos fluidos que tem um número de Prandtl alto, como os óleos, o comprimento da entrada hidrodinâmica é muito pequeno em comparação com o comprimento da entrada térmica (ÖZİŞIK, 1990).

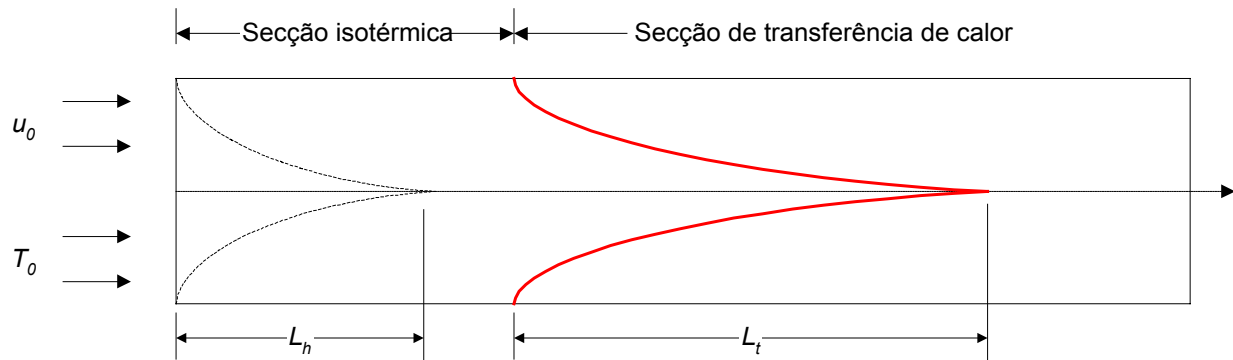


Figura 2.2 – Regime laminar termicamente em desenvolvimento

$L_h$  – Comprimento da entrada hidrodinâmica

$L_t$  – Comprimento da entrada térmica

$u_0$  – velocidade de entrada do fluido

$T_0$  – temperatura de entrada do fluido

### 2.2.2 Perfil termicamente desenvolvido

Quando a transferência de calor se inicia imediatamente após a entrada de um fluido em um duto, como está na Figura 2.3, tanto a camada limite hidrodinâmica como a camada limite térmica começam a se desenvolver imediatamente, e nestas circunstâncias, a transferência de calor entre o fluido e as paredes, é muito mais elaborada, pois a distribuição de velocidades varia na direção axial e também na normal a essa direção (ÖZİŞIK, 1990).

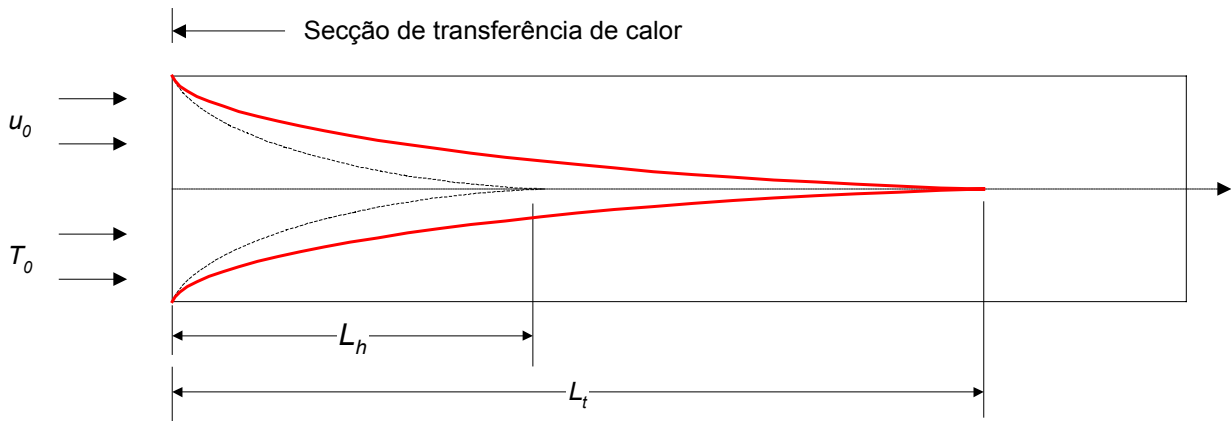


Figura 2.3 – Regime laminar termicamente desenvolvido

## 2.3 Grupos adimensionais

Os grupos adimensionais são muito usados para determinação de transferência de calor em dutos. Os grupos adimensionais são arbitrariamente definidos por diversos Autores, um exemplo disso é a variação de números de Reynolds encontrados na literatura. As relações adimensionais abaixo são usadas para dutos circulares onde tem-se

$\bar{u}$  – velocidade média de mistura

$\rho$  - densidade

$c_p$  – capacidade calorífica

$D_h$  – Diâmetro hidráulico

$\eta$  - viscosidade aparente

1. Número de *Reynolds*

$$Re = \frac{\rho \bar{u} D_h}{\eta} \quad (2.4)$$



2. Número de *Reynolds* generalizado

$$Re_g = \frac{\rho \bar{u}^{2-n} D_h^n}{K} \quad (2.5)$$

3. Número de *Reynolds* efetivo

$$Re_{eff} = \frac{8^{1-n} Re_g}{\left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n} \quad (2.6)$$

4. Número de *Reynolds* aparente

$$Re_a = 8^{1-n} Re_g \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^{1-n} \quad (2.7)$$

6. Número de *Reynolds* introduzido por METZNER (1959)

$$Re' = \frac{\rho \bar{u}^{2-n} D_h^{n-1}}{K 8^{n-1}} \quad (2.8)$$

5. Número de *Prandlt*

$$Pr = \frac{\eta c_p}{k} \quad (2.9)$$

6. Número de *Prandlt* generalizado

$$Pr_g = \frac{Kc_p}{k} \left(\frac{\bar{u}}{D_h}\right)^{n-1} \quad (2.10)$$

7. Número de *Prandlt* efetivo

$$Pr_{eff} = \frac{Kc_p}{k} \left(\frac{8\bar{u}}{D_h}\right)^{n-1} \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n \quad (2.11)$$

8. Número de *Prandlt* aparente

$$Pr_a = \frac{Kc_p}{k} \left(\frac{8\bar{u}}{D_h}\right)^{n-1} \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^{n-1} \quad (2.12)$$

9. Número de *Prandlt* introduzido por METZNER (1959)

$$Pr' = \frac{Kc_p}{k} \left(\frac{8\bar{u}}{D_h}\right)^{n-1} \quad (2.13)$$

A equação 2.5 é frequentemente encontrada para escoamento sobre superfícies como placas e cilindros. A equação 2.4 é definida para caso de fluidos newtonianos.

### 3. FLUXO DE CALOR CONSTANTE

#### 3.1 Regime laminar termicamente desenvolvido

##### 3.1.1 Correlação de GRIGULL

GRIGULL(1956) partiu da equação dada para transferência de calor em regime desenvolvido laminar num tubo com fluxo constante de calor:

$$\frac{u}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3.1)$$

$T$  – temperatura

$\alpha$  - difusividade térmica

Como condição de contorno toma-se a fluxo térmico constante, no tubo onde o fluido se desloca durante todo o aquecimento. Deste modo esta condição equivale a uma linearização da temperatura de processo, considerando um longo tempo em um comprimento  $z$  do tubo:

$$T = T_1(r) + Az \quad (3.2)$$

$z$  – posição axial

$A = \frac{dT}{dz}$  - variação de temperatura com a distância

Assim sendo  $A$  se torna uma constante na equação 3.1, deste modo torna-se esta uma diferencial parcial ordinária com uma solução possível, onde  $T_1$  se torna um fator independente de  $z$ , então  $T_1$  é uma temperatura inferior à média na corrente de fluido que deve ser considerada também.

A equação de velocidade é dada por:

$$u(r) = \frac{K}{2^n(n+1)} \nabla p R^{n+1} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{n+1} \right] \quad (3.3)$$

A velocidade máxima é dada no centro do tubo ( $r=0$ ), então:

$$u_{max} = \frac{K}{2^n(n+1)} \nabla p R^{n+1} \quad (3.4)$$

$R$  – raio do tubo

$r$  - posição radial

$\nabla p$  – gradiente de pressão

O perfil de velocidade plenamente desenvolvido para fluidos não-newtonianos pode ser:

$$u(r) = u_{max} \frac{n+1}{n+3} \quad (3.5)$$

Substituindo a equação 3.3 na equação 3.1 é possível chegar a uma relação para a distribuição radial da temperatura que é demonstrada tomando a consideração de uma temperatura de entrada fixa enquanto no eixo uma temperatura finita prevalece, deste modo:

$$T(r) = \frac{u_{max} AR^2}{4\alpha} \left[ \frac{4}{(n+3)^2} - 1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{4}{(n+3)^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{n+3} \right] \quad (3.6)$$

É possível através das equação 3.3 e 3.6, e utilizando as próprias diferenças centrais dos valores de temperatura calculados na direção da condutividade térmica, determinar uma temperatura média de mistura usado a seguinte equação:

$$\bar{T} = \frac{2\pi \int_0^R T(r)u(r)r\rho c_p dr}{\pi R^2 \rho c_p \bar{u}} \quad (3.7)$$

O numero de *Nusselt* pode ser considerado:

$$Nu = \frac{2R \left( \frac{dT}{dr} \right)_R}{\bar{T}} \quad (3.8)$$

Calculando o número de *Nusselt* considerando um longo tempo escolhido. Então a expressão de *Nusselt* fica da seguinte forma:

$$Nu = - \frac{2(n+1)^2}{5+n - \frac{2}{n+3} - \frac{4+(n+3)^2}{n+5} - \frac{(n+3)^2}{4}} \quad (3.9)$$

### 3.1.2 Correlação de BIRD

A equação de balanço para transferência de calor é dada por BIRD (1959)

$$\rho c_p u(z) \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.10)$$

com várias grandezas envolvidas no balanço de energia em um duto circular aquecido. É preciso primeiramente definir as grandezas adimensionais como:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{q_0 \frac{R}{k}} \quad (3.11)$$

$$\phi = \frac{u(r)}{u_{max}} \quad (3.12)$$

$$\xi = \frac{r}{R} \quad (3.13)$$

$$\zeta = \frac{z}{R} \quad (3.14)$$

$$Pe = \frac{\rho c_p R u_{max}}{k} \quad (3.15)$$

Então a equação é

$$Pe \phi \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) \quad (3.17)$$

Com as seguintes condições de contorno

$$\xi = 0: \quad \Theta = \text{Finito} \quad (3.18)$$

$$\xi = 1: \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 1 \quad (3.19)$$

$$2\pi R z q_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho c_p (T - T_0) u r dr d\theta \quad (3.20)$$

ou

$$\frac{\zeta}{Pe} = \int_0^1 \Theta \phi \xi d\xi \quad (3.21)$$

A ultima condição de contorno é um balanço de energia sobre a tubulação, estabelecendo que a diferença entre a entrada de calor seja de 0 até z. Então fazendo agora o seguinte aproximação

$$\Theta(\xi, \zeta) = C_0 \zeta + \Psi(\xi) \quad (3.22)$$

Por meio do uso de uma constante  $C_0$  na expressão de balanço equação 3.22 assim reorganizando a equação diferencial em função de  $\Psi(\xi)$

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d\Psi}{d\xi} \right) - C_0 Pe \phi = 0 \quad (3.23)$$

Sendo que  $\phi = 1 - \xi^{s+1}$ ; deste modo após duas integrações seguidas em relação a  $\xi$  resulta:

$$\Psi = C_0 Pe \left[ \frac{1}{4} \xi^2 - \frac{1}{(s+3)^2} \xi^{s+3} \right] + C_1 \ln \xi - C_2 \quad (3.24)$$

Através das condições de contorno, as constantes podem ser determinadas:

$$C_1 = 0 \quad (3.25)$$

$$C_0 = \frac{2}{Pe} \left( \frac{s+3}{s+1} \right) \quad (3.26)$$

$$C_2 = \frac{(s+3)^2 - 8}{4(s+1)(s+3)(s+5)} \quad (3.27)$$

Assim sendo finalmente a distribuição de temperatura adimensional é dada por

$$\Theta = 2 \left( \frac{s+3}{s+1} \right) \frac{\zeta}{Pe} + \frac{1}{2} \left( \frac{s+3}{s+1} \right) \left[ \xi^2 - \frac{4\xi^{s+3}}{(s+3)^2} - \frac{(s+3)^3 - 8}{2(s+3)^2(s+5)} \right] \quad (3.28)$$

Com o auxílio da equação 3.28 de distribuição de temperatura, usando também a equação de número de *Nusselt* dado por GRIGULL (1956):

$$Nu = \frac{2\alpha R}{k} = \frac{2R}{k} \frac{q}{T_p - \bar{T}} \quad (3.29)$$

$$Nu = \frac{2}{\Theta_p - \bar{\Theta}} \quad (3.30)$$

$$Nu = \frac{8(s+1)(s+3)(s+5)}{s^3 + 13s^2 + 43s + 31} \quad (3.31)$$

Sendo que  $s=1/n$ , tem-se

$$Nu = \frac{8(5n+1)(3n+1)}{31n^2 + 12n + 1} \quad (3.32)$$

### 3.1.3 Correlação de MIZUSHINA

Na condição de fluxo de calor constante na parede, o gradiente de temperatura na direção do escoamento, em qualquer ponto do fluido, é constante e igual ao gradiente axial da temperatura média do fluido (KAYS, 1955). Isto é,

$$\frac{\partial T(r, z)}{\partial z} = \frac{d\bar{T}}{dz} = \text{constante} \quad (3.33)$$

Este resultado implica em que, com o fluxo de calor constante na parede, a temperatura média do escoamento  $\bar{T}(z)$ , na região termicamente desenvolvida, cresce linearmente com a distância  $z$  ao longo do tubo.

Na região hidrodinamicamente desenvolvida, a equação de energia, no escoamento laminar de um fluido incompressível, dentro de um tubo circular, com dissipação viscosa da energia desprezível, é dada por:

$$\frac{1}{\alpha} u(r) \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.34)$$

Quando a equação 3.33 for introduzida na equação 3.34, o termo  $\partial^2 T / \partial z^2$  se anula para  $\partial T / \partial z$  constante, e se obtém a seguinte equação diferencial ordinária para  $T(r)$ :

$$\frac{1}{\alpha} u(r) \frac{d\bar{T}(z)}{dz} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) \quad (3.35)$$

A temperatura adimensional e dada por

$$\theta(r) = \frac{T(r, z) - T_p(z)}{\bar{T}(z) - T_p(z)} \quad (3.36)$$

$T_p$  – temperatura na parede

Esta equação escreve-se em termos da temperatura adimensional  $\theta(r)$ , definida pela equação 3.35, como

$$\frac{1}{\alpha} u(r) \frac{d\bar{T}(z)}{dz} (\bar{T}(z) - T_p(z))^{-1} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\theta}{dr} \right) \quad (3.37)$$

Onde o perfil de velocidades plenamente desenvolvido para fluidos newtonianos  $u(r)$  é dado por

$$u(r) = 2u_{max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3.38)$$

A equação 3.37 e a equação 3.38 são combinadas e escritas como

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Theta}{dr} \right) = Ar \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \text{ em } 0 < r < R \quad (3.39)$$

Onde a constante  $A$  é definida por

$$A = \frac{2u_{max}}{\alpha [\bar{T}(z) - T_p(z)]} \frac{d\bar{T}(z)}{dz} = \text{constante} \quad (3.40)$$

As condições de contorno para equação 3.39 são

$$\frac{d\Theta}{dr} = 0 \text{ em } r = 0 \quad (3.41)$$

$$\Theta = 0 \text{ em } r = R \quad (3.42)$$

A primeira condição de contorno afirma que  $\Theta$  é simétrica em torno do eixo do tubo, e a segunda resulta da definição de  $\Theta$  dada pela equação 3.36, pois  $\Theta$  deve ser zero nas paredes.

A equação 3.39 é semelhante a equação de condução de calor estacionário, em coordenadas cilíndricas, e pode ser integrada facilmente, sujeita às condições de contorno, para dar:

$$\Theta(r) = -AR^2 \left[ \frac{3}{16} + \frac{1}{16} \left( \frac{r}{R} \right)^4 - \frac{1}{4} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3.43)$$

A constante desconhecida  $A$  que aparece nesta equação pode ser determinada empregando-se a definição de temperatura média global do fluido.

De acordo com a definição da temperatura média global do fluido, dada por

$$\bar{\Theta} = \frac{\int_0^R u(r)\Theta(r)2\pi r dr}{u_{max}\pi R^2} \quad (3.44)$$

Combinando as equações 3.43 e 3.36 na equação 3.44

$$\bar{\Theta} = -\frac{11}{96} AR^2 \quad (3.45)$$

Considerando que  $\bar{\Theta}$  é igual a 1, então

$$AR^2 = -\frac{96}{11} \quad (3.46)$$

Introduzindo este resultado de  $AR^2$  na equação 3.43

$$\Theta(r) = \frac{96}{11} \left[ \frac{3}{16} + \frac{1}{16} \left( \frac{r}{R} \right)^4 - \frac{1}{4} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3.47)$$

A equação 3.47 é o perfil de temperatura adimensional, na convecção forçada, em um tubo circular, na região hidrodinâmica e termicamente desenvolvida, com a condição de contorno de fluxo de calor constante na parede.

Dado o perfil de temperatura no fluido, o coeficiente de transferência de calor  $h$  é obtido diretamente de sua definição

$k$  - condutividade térmica

$$h = -k \left. \frac{d\Theta}{dr} \right|_{r=R} \quad (3.48)$$

Então

$$h = \frac{48}{11} \frac{k}{D} \quad (3.49)$$

Rearranjando na forma de *Nusselt*

$$Nu = \frac{hD}{k} = 4,364 \quad (3.50)$$

A sugestão de MISHUSHINA (1967) é aplicar um fator de correção de LEVEQUE e PIGFORD (citados em CRAIG e CHRISTIANSEN, 1962) que leve em consideração o índice de comportamento de escoamento  $n$ , para melhor determinar a transferência de calor em regime plenamente desenvolvido em fluidos não-newtonianos

$$\frac{Nu_{\text{não-newtoniano}}}{Nu_{\text{newtoniano}}} = \text{fator} \quad (3.51)$$

$$\frac{Nu_n}{Nu_{n=1}} = \text{fator} = \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{\frac{1}{3}} = \Delta^{\frac{1}{3}} \quad (3.52)$$

Então, usando o fator de correção na equação 3.50 tem-se

$$Nu = 4,364 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{\frac{1}{3}} = 4,364 \Delta^{\frac{1}{3}} \quad (3.53)$$

JOSHI e BERGLES (1980b) indicam que para  $n=0,1$  a  $1$ , o erro obtido para a equação 3.53 é de mais ou menos 1,1%.



### 3.1.3 Correlação de DATTA

É a correlação mais recente ainda não discutida na literatura. DATTA (1999) desenvolveu esta correlação analítica para sistemas de aquecimento de alimentos em dutos circulares.

Através de um pequeno tubo de comprimento  $\Delta z$  e espessura  $\Delta r$  para uma distancia radial  $r$  do centro de balanço de calor pode ser expresso como:

$$q_{total} = q_{entrada-axial} + q_{entrada-radial} - q_{saida-axial} - q_{saida-radial} \quad (3.54)$$

ou

$$0 = 2\pi\Delta r u \rho c_p T|_z + 2\pi k|_{r+\Delta r} \Delta z \left. \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right|_{r+\Delta r} \Delta r - 2\pi\Delta r u \rho c_p T|_{z+\Delta z} - 2\pi k|_r \Delta z \left. \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right|_r \Delta r \quad (3.55)$$

A equação 3.55 ficara do seguinte modo  $q_{radial} = kA(\Delta T/\Delta r)$  como  $T$  aumenta com  $r$ .

$$ru\rho c_p \frac{T|_{x+\Delta x} - T|_x}{\Delta x} = k \frac{r \left. \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right|_{r+\Delta r} - r \left. \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right|_r}{\Delta r} \quad (3.56)$$

rearranjando

$$ru\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.57)$$

ou

$$\frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{ru} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.58)$$

Isto foi demonstrado por PRASAD (1987) que  $\partial T/\partial z$  é independente de  $r$  para um trocador de calor, excluindo as regiões de entrada e saída. Similarmente,  $\alpha$  poder ser considerado constante para uma região finita de troca de calor. A velocidade laminar  $u$  pode ser expressa para fluidos não-newtonianos como:

$$u = u_c \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\left( \frac{1+n}{n} \right)} \right] \quad (3.59)$$

$u_c$  – velocidade no centro do duto

A equação 3.58 pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) r u = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) u_c \left( r - \frac{r^{\left(\frac{1}{n}+2\right)}}{R^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}} \right)$$

rearranjando

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) u_c \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^{\left(\frac{1}{n}+3\right)}}{\left(\frac{1}{n}+3\right) R^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}} \right) + B_1 \quad (3.60)$$

$$T = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) u_c \left( \frac{r^2}{4} - \frac{r^{\left(\frac{1}{n}+3\right)}}{\left(\frac{1}{n}+3\right)^2 R^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}} \right) + B_1 \ln r + B_2$$

Desde que  $T$  seja finito para  $r=0$ ,  $B_1=0$ . Daí,

$$T = T_c + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) u_c \left( \frac{r^2}{4} - \frac{r^{\left(\frac{1}{n}+3\right)}}{\left(\frac{1}{n}+3\right)^2 R^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}} \right) \quad (3.61)$$

e

$$T_p = T_c + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) u_c R^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{n^2}{(3n+1)^2} \right) \quad (3.62)$$

$T_c$  – temperatura no centro do duto

A temperatura média de mistura de um tubo pode ser obtida usando a seguinte expressão (HOLMAN, 1986):

$$\bar{T} = \frac{\int_0^R \rho 2\pi r u c_p T dr}{\int_0^R \rho 2\pi r u c_p dr}$$

reorganizando

$$\bar{T} = \frac{\int_0^R r u T dr}{\int_0^R r u dr} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^R ruTdr &= \int_0^R ru \left[ T_c + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} u_c \left\{ \frac{r^2}{4} - \frac{r^{\left(\frac{1}{n}+3\right)}}{\left(\frac{1}{n}+3\right)^2 R^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}} \right\} \right] dr \\
&= \int_0^R r \left( 1 - \frac{r^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}}{R^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}} \right) \left[ T_c + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} u_c \left\{ \frac{r^2}{4} - \frac{r^{\left(\frac{1}{n}+3\right)}}{\left(\frac{1}{n}+3\right)^2 R^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}} \right\} \right] dr \\
&= \frac{1}{2} u_c R^2 \left[ T_c + \frac{n+1}{3n+1} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} u_c R^2 \frac{n+1}{5n+1} \left\{ \frac{1}{8} - \frac{n^3}{(3n+1)^3} \right\} \right], \quad (3.64)
\end{aligned}$$

$$\int_0^R rudr = u_c \int_0^R r \left( 1 - \frac{r^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}}{R^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}} \right) dr = \frac{1}{2} u_c R^2 \frac{n+1}{3n+1} \quad (3.65)$$

Substituindo as expressões das equações 3.64 e 3.65 na equação 3.63 tem-se

$$T_p = T_c + \frac{3n+1}{5n+1} \frac{u_c}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} R^2 \left[ \frac{1}{8} - \frac{n^3}{(3n+1)^3} \right] \quad (3.64)$$

A troca de calor na parede, pode ser escrita

$$q_p = hA_p(T_p - \bar{T}) = kA_p \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (3.65)$$

$$Nu = 2R \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R}}{T_p - \bar{T}} \quad (3.66)$$

Então

$$T_p - \bar{T} = \frac{u_c}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} R^2 \left[ \frac{1}{4} - \frac{n^2}{(3n+1)^2} - \frac{3n+1}{5n+1} \left\{ \frac{1}{8} - \frac{n^3}{(3n+1)^3} \right\} \right] \quad (3.67)$$

logo

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{u_c}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^{\left(\frac{1}{n}+2\right)}}{\left(\frac{1}{n}+3\right) R^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}} \right]_{r=R} = \frac{1}{2} \frac{u_c}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} R \frac{n+1}{3n+1} \quad (3.68)$$

Combinando as equações 3.68 e 3.67 com a equação 3.66 tem-se

$$Nu = \frac{\frac{n+1}{3n+1}}{\frac{1}{4} - \frac{n^2}{(3n+1)^2} - \frac{3n+1}{5n+1} \left( \frac{1}{8} - \left( \frac{n}{3n+1} \right)^3 \right)} \quad (3.69)$$

## 3.2 Regime laminar termicamente em desenvolvimento

### 3.2.1 Correlação de MATSUSHISA-BIRD

MATSUSHISA e BIRD (1965) desenvolveram para aquecimento uniforme de fluidos não-newtonianos, a seguinte solução analítica onde o número de Graetz, é uma solução clássica da convecção laminar forçada, dentro de um tubo circular

$$Gz = \frac{\pi}{4} Re Pr \frac{D}{z} \quad (3.70)$$

$$Nu = 1,411 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{\frac{1}{3}} Gz^{\frac{1}{3}} \quad (3.71)$$

BASSETT e WELTY (1975) usaram esta correlação de MATSUSHISA e BIRD para seus experimentos, e obtiveram um erro mínimo quadrático de até  $\pm 18\%$ .

### 3.2.2 Correlação de MIZUSHINA

MIZUSHINA(1967) conduziu estudos experimentais com fluidos não-newtonianos considerando a região termicamente em desenvolvimento. Os dados foram comparados com a seguinte solução analítica proposta pelo mesmo

$$Nu = 1,41 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{\frac{1}{3}} Gz^{\frac{1}{3}} \quad (3.72)$$

Esta correlação só é válida para  $Gz > 32$ .

### 3.2.3 Correlação de CHURCHILL-USAGI

Na formulação das equações para transferência de calor em dutos circulares, as seguintes hipóteses foram admitidas:

- i. O fluxo é constante e assimétrico.
- ii. A condução axial é desprezada.
- iii. As propriedades dos fluidos como  $K$  e  $\rho$  são dependentes da temperatura, enquanto  $k$ ,  $C_p$  e  $n$  são independentes da temperatura.

A equação de balanço de energia é dado por

$$\rho u(z)c_p \frac{\partial T}{\partial z} + \rho u(r)c_p \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (3.73)$$

As condições de contorno para este problema são:

Para o perfil de velocidade

$$u(z) = 0 \quad \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_c = 0 \quad (3.74)$$

Para o perfil de temperatura

$$\left( k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_p = q_p \quad \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_c = 0 \quad (3.75)$$

A partir de todas estas informações CHURCHILL e USAGI (1972) chegaram à seguinte correlação

$$Nu = 4,36 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ 1 + \left( 0,376 \left( \frac{\pi}{2Gz} \right)^{-\frac{1}{3}} \right)^6 \right]^{\frac{1}{6}} \quad (3.76)$$

Segundo JOSHI e BERGLES(1980a) esta correlação para  $n=0,75$  a  $0,25$  e  $Gz < 785,4$ , apresentou um erro quadrático de 2 a 3%.

### 3.2.4 Correlação de CHURCHILL-OZOE

CHURCHILL e OZOE (1973) desenvolveram a seguinte correlação analítica para fluxo laminar com convecção forçada para placas ou tubos.

$$Nu = 4,36 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{\frac{1}{3}} \left( 1 + \left( 0,381 \left( \frac{\pi}{2Gz} \right)^{-0,303} \right)^8 \right)^{\frac{1}{8}} \quad (3.77)$$

### 3.2.5 Correlação de BASSET - WELTY

BASSET e WELTY (1975) utilizaram como fluido uma solução de polióxido variando  $n=0,362$ ,  $0,446$  e  $0,757$ , obtiveram a seguinte correlação através de dados experimentais ajustando a equação à melhor curva;

$$\Delta = \frac{3n+1}{4n} \quad (3.78)$$

$$Nu = 1,85Gz^{\frac{1}{3}-0,03\left(\frac{1}{\Delta}\right)^n} \quad (3.79)$$

### 3.2.6 Correlação de BIRD

BIRD (1977) propôs uma solução para transferência de calor com temperatura constante em regime laminar e termicamente em desenvolvimento em dutos circulares.

O balanço de energia é dado pela seguinte aproximação para problemas de transferência de calor em dutos circulares:

$$\rho c_p u_{max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{s+1} \right] \frac{\partial T}{\partial z} = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (3.80)$$

Considerando o limite de  $z \rightarrow 0$  três aproximações foram sugeridas:

- i. Os efeitos de curvatura são um problema ignorado, considerando assim a parede plana; a distância a partir da parede será considerada como  $y=R-r$ .
- ii. O fluido é considerado um prolongamento da superfície de transferência de calor, de  $y=0$  até  $y=\infty$ .
- iii. Um perfil de velocidade linear é admitido, como uma inclinação conhecida determinada através do gradiente de velocidade na parede.

Consequentemente, a partir das considerações acima pode-se obter uma aproximação para velocidade em função de  $y$

$$\bar{u}(y) = \frac{u_0 y}{R} \quad (3.81)$$

e

$$u_0 = u_{max}(s+1) = \bar{u}(s+3) \quad (3.82)$$

Então a equação 3.80 de balanço pode ser rescrita como

$$u_0 \frac{y}{R} \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.83)$$

Condições de contorno podem ser sugeridas a partir de que  $r = R$ , seja um termo fixo para o fluxo de calor, isto facilita o trabalho através de uma equação diferencial  $q_y = -k(\partial T/\partial y)$ , obtendo a partir da divisão da equação 3.83 pela equação diferencial uma nova equação diferencial em relação a  $y$  que relaciona fluxo térmico

$$u_o \frac{1}{R} \frac{\partial q_y}{\partial z} = \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y} \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \quad (3.84)$$

As relações adimensionais que facilitam a resolução

$$\psi = \frac{q_y}{q_1} \quad (3.85)$$

$$\sigma = \frac{y}{R} \quad (3.86)$$

$$\zeta = \frac{\alpha z}{u_o R^2} \quad (3.87)$$

$$s = \frac{1}{n} \quad (3.88)$$

Logo, a equação de balanço de energia pode ser descrita na seguinte forma adimensional:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right) \quad (3.89)$$

As condições de contorno adimensionais para a resolução da equação 3.89 são:

$$\zeta = 0 \quad \psi = 0 \quad (3.90)$$

$$\sigma = 1 \quad \psi = 1 \quad (3.91)$$

$$\sigma = \infty \quad \psi = 0 \quad (3.92)$$

Este problema pode ser resolvido usando o método de combinação de variáveis. Um postulado que  $\psi = \psi(\chi)$ , onde a nova variável independente  $\chi$  é:

$$\chi = \frac{\sigma}{\sqrt[3]{9\zeta}} \quad (3.93)$$

Então teremos a seguinte equação diferencial

$$\chi \frac{d^2 \psi}{d\chi^2} + (3\chi^3 - 1) \frac{d\psi}{d\chi} = 0 \quad (3.94)$$

Conhecendo as condições  $\psi(0) = 1$  e  $\psi(\infty) = 0$ , a solução é:

$$\psi = \frac{\int_x^\infty \chi e^{-\chi^3} d\chi}{\int_0^\infty \chi e^{-\chi^3} d\chi} = \frac{3}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_x^\infty \chi e^{-\chi^3} d\chi \quad (3.95)$$

O perfil de temperatura pode ser obtido pela seguinte integração

$$\int_T^{T_0} dT = -\frac{1}{k} \int_y^\infty q_y dy \quad (3.96)$$

E sua forma adimensional pode ser dada por

$$\Theta(\sigma, \zeta) = \frac{T - T_0}{q_1 \frac{R}{k}} \quad (3.97)$$

$$\Theta(\sigma, \zeta) = \sqrt[3]{9\zeta} \int_x^\infty \psi d\chi \quad (3.98)$$

$$\Theta(\sigma, \zeta) = \frac{\sqrt[3]{9\zeta}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left[ \frac{e^{-\chi^3}}{3} - \chi \int_x^\infty \chi e^{-\chi^3} d\chi \right] \quad (3.99)$$

Deste modo tem-se que o número de *Nusselt* é

$$Nu = 2 \frac{R}{k} \left( \frac{q_1}{T(y=0) - T_0} \right) = \frac{2}{\Theta(0, \zeta)} \quad (3.100)$$

Substituindo a equação 3.99 na equação 3.100 tem-se

$$Nu = \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{9\alpha z}{(s+3)\bar{u}R^2}}} \quad (3.101)$$

$$Nu = 1,302 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{\frac{1}{3}} Gz^{\frac{1}{3}}$$

### 3.3 Comparação entre as correlações

CHO e HARTNETT (1982) realizaram ensaios experimentais com soluções de ácido poliacrílico (carbopol) um fluido puramente viscoso e com óxido de polietileno (polióxido) e poliácridamida (separan) que representam as soluções com comportamento viscoelástico, tendo como condição, fluxo uniforme de calor. Os coeficientes de transferência de calor para estas soluções de polímeros foram



medidos através de um sistema de dutos circulares com o diâmetro interno de 0,98cm e 1,30cm.

As propriedades reológicas dos fluidos como os índices  $n$  e  $K$ , que são necessários para determinação dos números de *Reynolds* e *Prandtl*, foram obtidos através das medidas em viscosímetro de tubo capilar.

O número de *Nusselt* para as soluções de carbopol, polióxido e separan são calculados como uma função do número de *Graetz*. Os resultados foram para número de *Graetz* menores que 33, pois este é o limite teórico para transferência de calor em fluxo laminar totalmente desenvolvido.

Os dados experimentais foram extraídos do trabalho de CHO e HARTNETT (1982).

Assim sendo, fazendo a comparação dos dados experimentais com as correlações descritas neste trabalho, temos as tabelas e as figuras abaixo.

Nu(Exp) – Dados experimentais

Nu (1) – Correlação de BIRD - equação 3.32

Nu (2) – Correlação de MIZUSHINA – equação 3.53

Nu (3) – Correlação de DATTA – equação 3.69

Nu (4) – Correlação de GRIGULL – equação 3.9

Tabela 3.1 – Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar totalmente desenvolvido, Carbopol  $n=0,733$ ,  $Re_a = 42,6$  e  $Pr_a = 231$ .

Gz	Nu (Exp)	Nu (1)	Nu (2)	Nu(3)	Nu (4)
12,5-33	4,66	4,51	4,48	4,51	4,24

Tabela 3.2 – Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar totalmente desenvolvido, Polióxido  $n=0,764$ ,  $Re_a = 147,7$  e  $Pr_a = 74,3$ .

Gz	Nu (Exp)	Nu (1)	Nu (2)	Nu(3)	Nu (4)
14,5-33	4,59	4,49	4,47	4,49	4,26

Tabela 3.3 – Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar totalmente desenvolvido, Separan  $n=0,787$ ,  $Re_a = 212$  e  $Pr_a = 42,2$ .

Gz	Nu (Exp)	Nu (1)	Nu (2)	Nu(3)	Nu (4)
12,8-30	4,67	4,48	4,46	4,48	4,27

Também foram obtidos dados na região onde se tem um regime térmico em desenvolvimento.

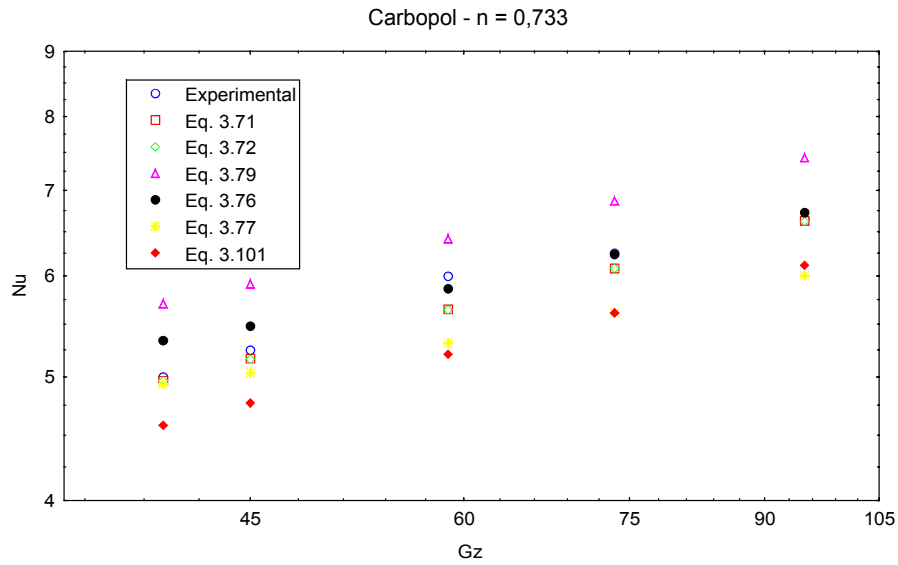


Figura 3.1 - Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar termicamente em desenvolvimento com fluxo de calor constante e  $Gz$  variando de 35 a 100,  $Re_a = 42,6$  e  $Pr_a = 231$ .

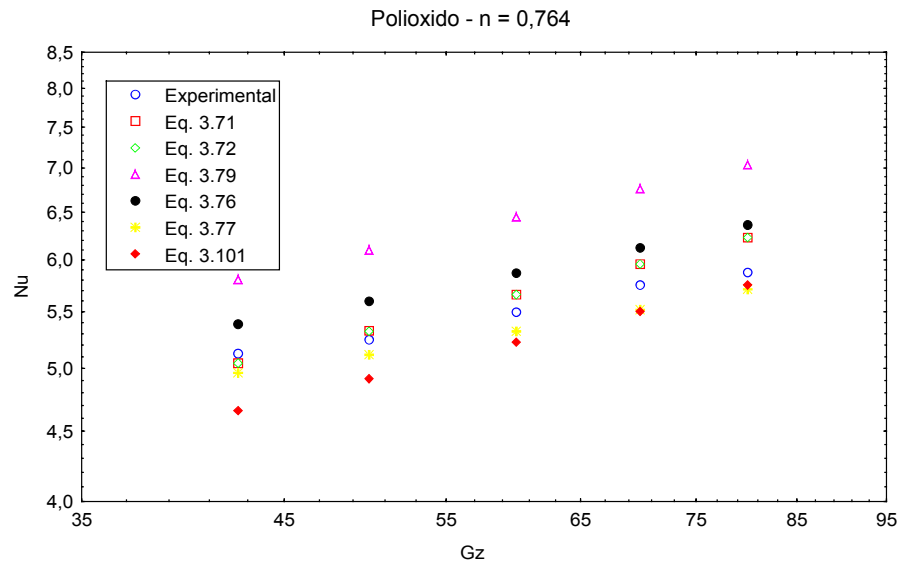


Figura 3.2 - Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar termicamente em desenvolvimento com fluxo de calor constante e  $Gz$  variando de 35 a 100,  $Re_a = 147$  e  $Pr_a = 74,3$ .

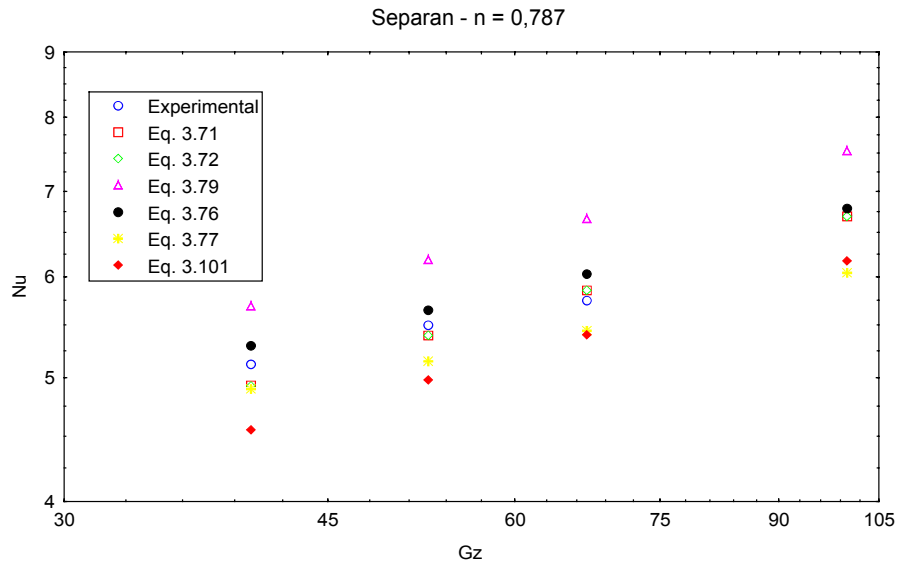


Figura 3.3 - Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar termicamente em desenvolvimento com fluxo de calor constante e  $Gz$  variando de 35 a 100,  $Re_a = 212$  e  $Pr_a = 42,2$ .

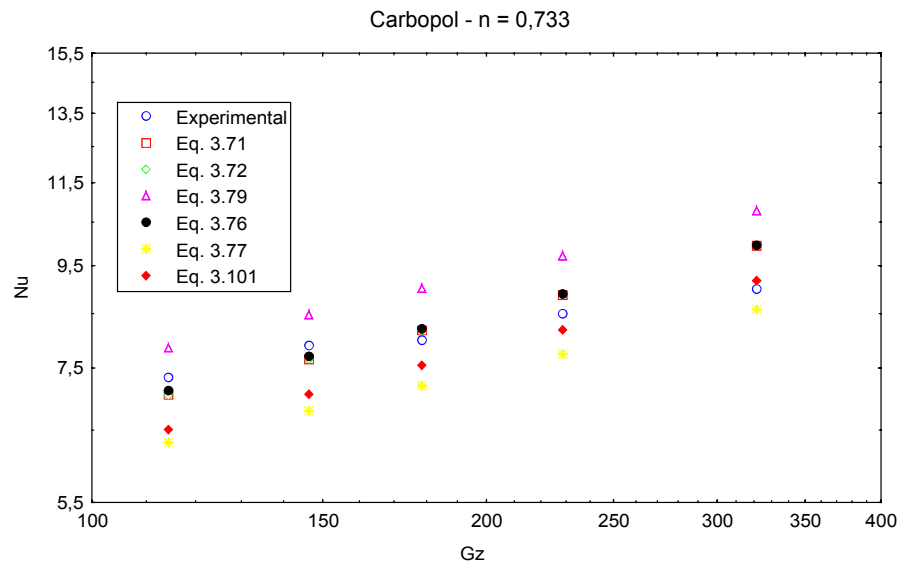


Figura 3.4 - Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar termicamente em desenvolvimento com fluxo de calor constante e  $Gz$  variando de 100 a 400,  $Re_a = 42,6$  e  $Pr_a = 231$ .

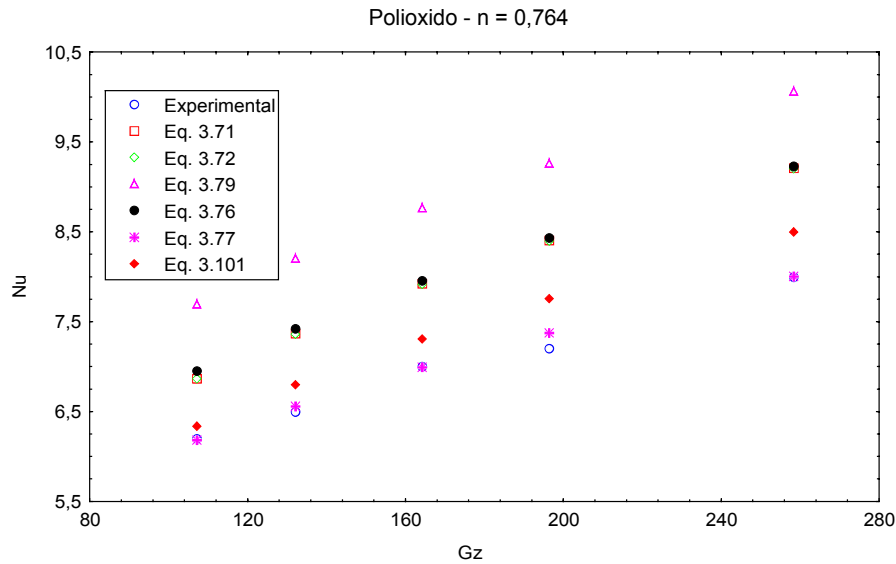


Figura 3.5 - Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar termicamente em desenvolvimento com fluxo de calor constante e  $Gz$  variando de 100 a 300,  $Re_a = 147$  e  $Pr_a = 74,3$ .

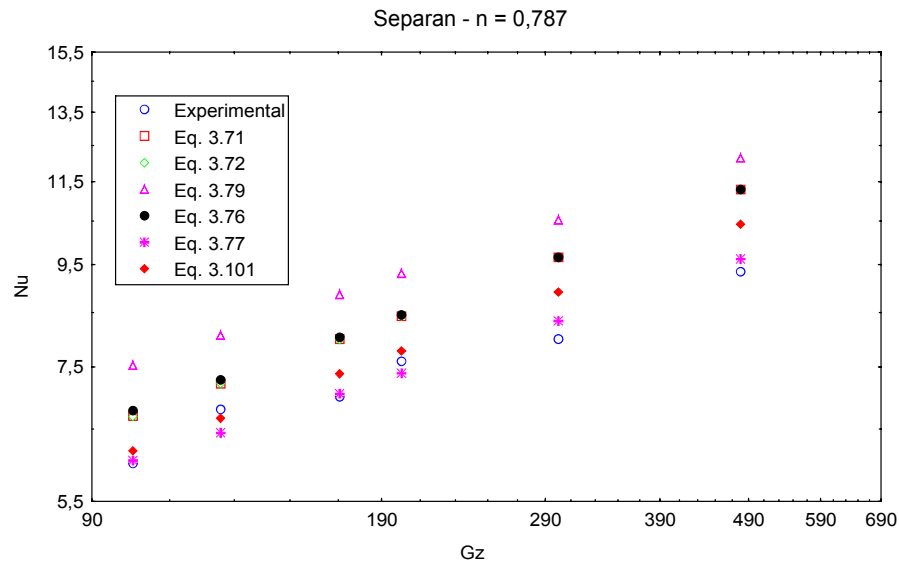


Figura 3.6 - Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar termicamente em desenvolvimento com fluxo de calor constante e  $Gz$  variando de 100 a 500,  $Re_a = 212$  e  $Pr_a = 42,2$ .

BASSET e WELTY (1975) obtiveram dados experimentais para fluxo laminar forçado em um duto circular com fluxo de calor constante. Para realizar este objetivo,

os polímeros carboxi metil celulose sódica (CMC) e óxido de polietileno (polióxido) foram usados em varias concentrações, preparando soluções aquosas e obtendo uma série de pseudoplásticos. As propriedades reológicas foram determinadas usando um viscosímetro rotacional. As figuras abaixo apresentam estes dados.

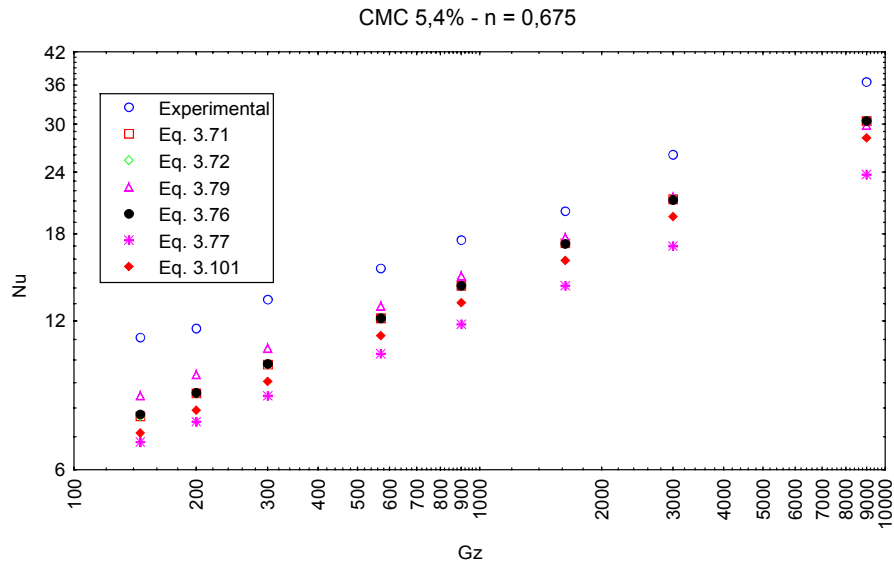


Figura 3.7 - Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar termicamente em desenvolvimento com fluxo de calor constante, tendo uma vazão mássica de 0,1027kg/s e diâmetro interno de 2,68cm.

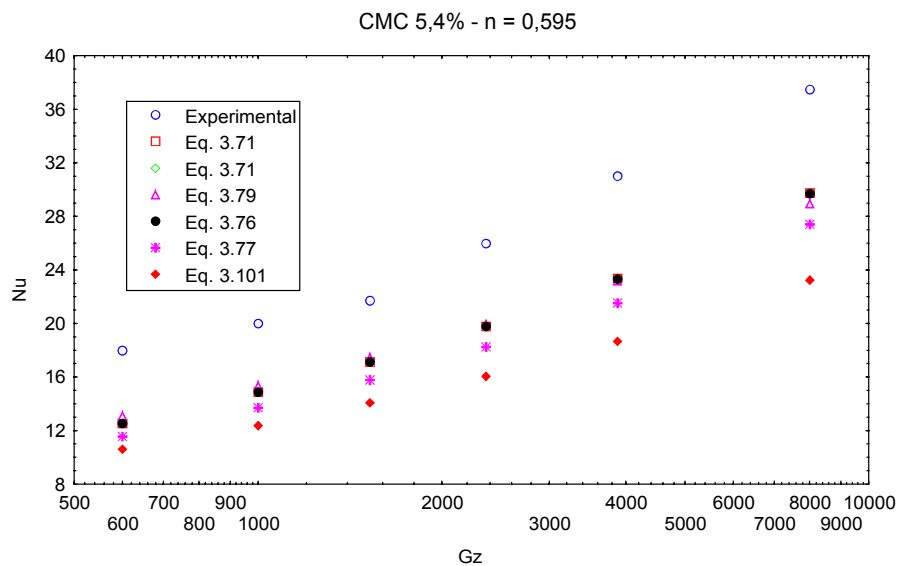


Figura 3.8 - Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar termicamente em desenvolvimento com fluxo de calor constante, tendo uma vazão mássica de 0,2679kg/s e diâmetro interno de 1,384cm.

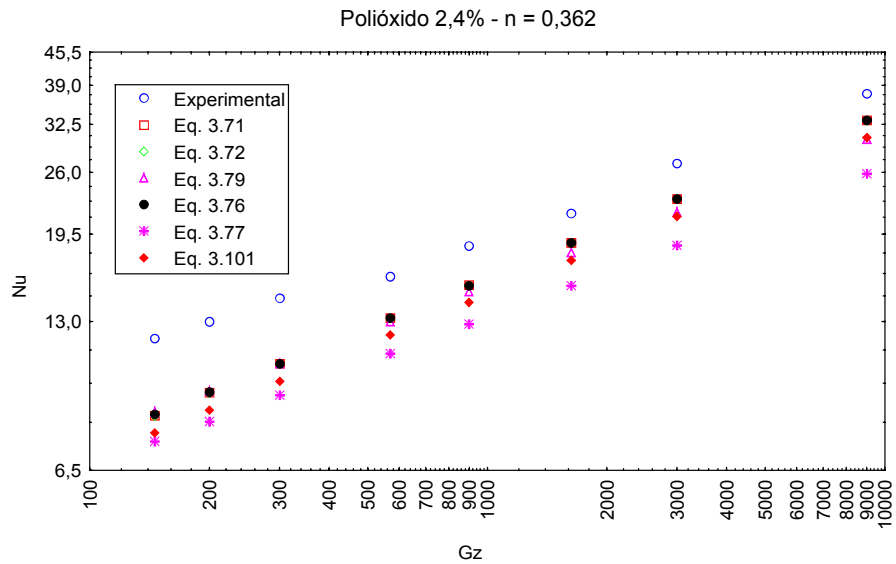


Figura 3.9 - Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar termicamente em desenvolvimento com fluxo de calor constante, tendo uma vazão mássica de 0,1025kg/s e diâmetro interno de 2,68cm.

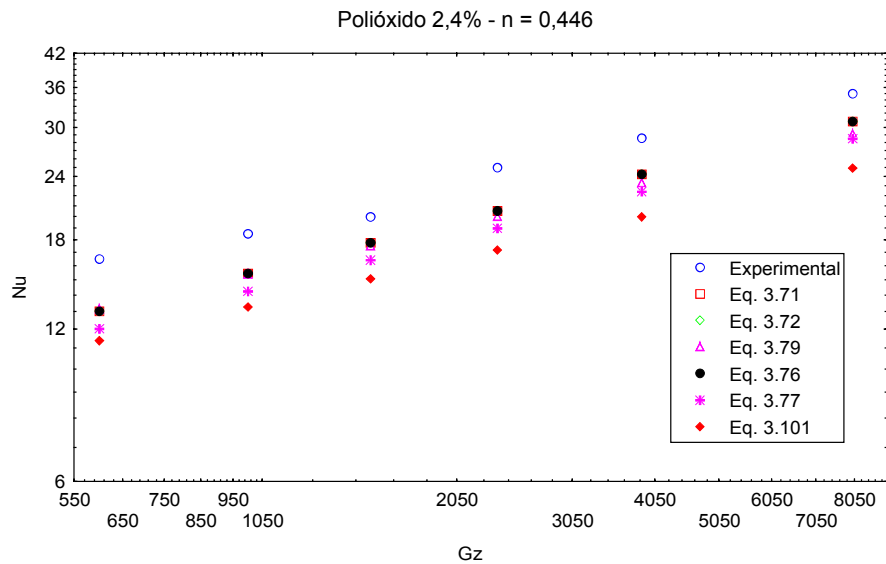


Figura 3.10 - Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar termicamente em desenvolvimento com fluxo de calor constante, tendo uma vazão mássica de 0,2841kg/s e diâmetro interno de 1,384cm.

### 3.4 Discussão dos Resultados

Através das Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3 que são específicas para transferência de calor em fluxo laminar totalmente desenvolvido foi possível determinar os erros médios quadráticos.

Tabela 3.4 – Comparação entre as correlações e os dados experimentais com número de *Graetz* variando de 12 a 33.

Correlação		Erro médio quadrático	
DATTA	eq. 3.69	2,00%	4,00%
BIRD	eq. 3.32	2,00%	4,00%
MIZUSHINA	eq. 3.53	2,50%	4,50%
GRIGULL	eq. 3.9	7,20%	10,00%

A análise feita para transferência de calor em regime laminar e termicamente em desenvolvimento, foi feita através da Figura 3.1 a 3.10.

Tabela 3.5 – Comparação entre as correlações e os dados experimentais com número de *Graetz* variando de 35 a 100.

Correlação		Erro médio quadrático	
BIRD-MATSUSHISA	eq. 3.71	2,3%	3%
MIZUSHINA	eq. 3.72	2,4%	3%
BASSET-WELTY	eq. 3.79	9,9%	14,4%
CHURCHILL-USAGI	eq. 3.76	2,80%	6,20%
BIRD	eq. 3.101	5,75%	10,88%
CHURCHILL-OZOE	eq. 3.77	3,26%	8,10%

Tabela 3.6 – Comparação entre as correlações e os dados experimentais com número de *Graetz* variando de 100 a 325.

Correlação		Erro médio quadrático	
BIRD-MATSUSHISA	eq. 3.71	4,87%	14,00%
MIZUSHINA	eq. 3.72	4,85%	13,75%
BASSET-WELTY	eq. 3.79	12,20%	26,00%
CHURCHILL-USAGI	eq. 3.76	4,70%	14,50%
BIRD	eq. 3.101	4,50%	7,27%
CHURCHILL-OZOE	eq. 3.77	0,75%	10,30%

Tabela 3.7 – Comparação entre as correlações e os dados experimentais com número de Graetz acima de 400.

Correlação		Erro médio quadrático	
BIRD-MATSUSHISA	eq. 3.71	17,50%	32,51%
MIZUSHINA	eq. 3.72	17,60%	32,60%
BASSET-WELTY	eq. 3.79	18,91%	31,04%
CHURCHILL-USAGI	eq. 3.76	17,50%	32,56%
BIRD	eq. 3.101	24,16%	43,59%
CHURCHILL-OZOE	eq. 3.77	30,00%	41,00%

A correlação de GRIGULL apresenta o maior erro devido a ser a única correlação para transferência de calor em regime laminar e termicamente desenvolvido que apresenta um perfil de temperatura linear. As equações apresentam um bom desempenho mesmo só dependendo de  $n$ , o índice de comportamento do escoamento.

Fica demonstrado através das Tabelas 3.6 e 3.7 que quanto maior for o valor de *Graetz* maior será o erro obtido. No intervalo de número de *Graetz* de 35 a 100 as melhores correlações foram BIRD-MATSUSHISA e MIZUSHINA, no intervalo de 100 a 325, BIRD foi a melhor e acima de 400 foram BIRD-MATSUSHISA, MIZUSHINA e BASSET-WELTY.

As correlações de BIRD-MATSUSHISA, MIZUSHINA e BIRD apresentam uma forma muito parecida onde o termo de *Graetz* é elevado a um terço, enquanto as de CHURCHILL-USAGI e CHURCHILL-OZOE já apresentam uma nova forma de calcular os valores de *Nusselt* o número de *Graetz* aparece corrigido não apenas por um terço, a correlação de BASSET-WELTY é uma aproximação de dados experimentais.

Através das Tabelas 3.5, 3.6 e 3.7, foi possível observar que para a correlação de BIRD-MATSUSHISA o erro ficou próximo do descrito por BASSET-WELTY que é um erro mínimo quadrático de até  $\pm 18\%$ , mas isto só é válido para número de *Graetz* inferior a 400.

A correlação de CHURCHILL e USAGI (1972) no intervalo do número de *Graetz* 35 a 100 apresenta um erro próximo ao descrito por JOSHI e BERGLES(1980a), mas para *Graetz* acima 100 o erro fica fora desta faixa, pois a equação apresenta na verdade é uma modificação da equação de MIZUSHINA para regime laminar termicamente desenvolvido.



Então a partir das tabelas de comparação é possível determinar uma faixa de ação para as melhores correlações.

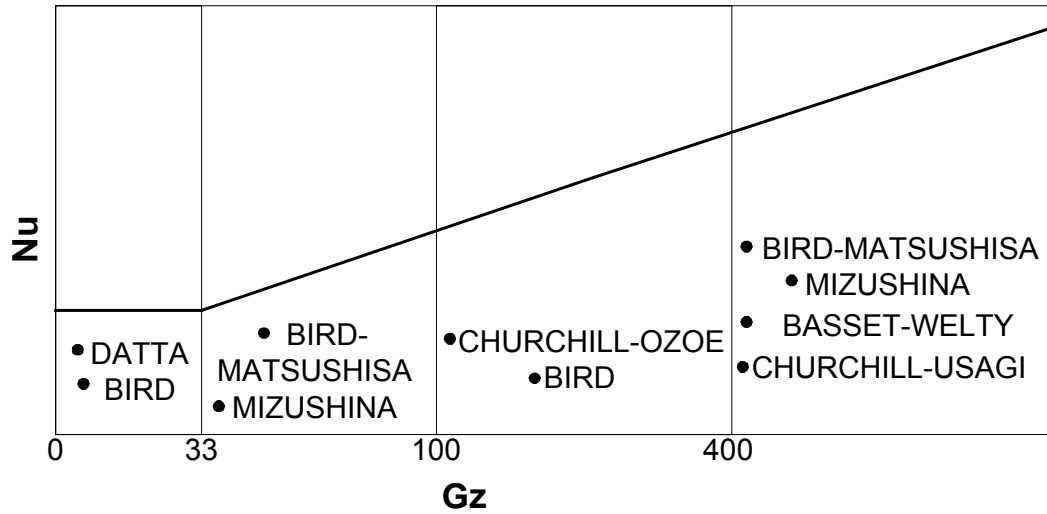


Figura 3.11 – Faixa de uso das correlações para transferência de calor para fluidos não-newtonianos em dutos circulares

## 4. TEMPERATURA DE PAREDE CONSTANTE

### 4.1 Regime laminar termicamente desenvolvido

#### 4.1.1 Correlação de BIRD

A aproximação feita por BIRD (1977) para problemas de transferência de calor em dutos circulares pode ser dada pela seguinte equação de balanço de energia:

$$\rho c_p u_{max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{s+1} \right] \frac{\partial T}{\partial z} = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (4.1)$$

Assumindo as seguintes condições:

$$r = 0 \quad T = \text{finito} \quad (4.2)$$

$$r = R \quad T = T_1 \quad (4.3)$$

$$z \rightarrow -\infty \quad T = T_0 \quad (4.4)$$

$$z \rightarrow +\infty \quad T = T_1 \quad (4.5)$$

Quando se tem um valor de  $R$  elevado, uma aproximação para condução radial pode ser feita, e a velocidade axial pode-se determinada como velocidade média de mistura  $u_z$ , e  $\Delta T_0 = T_0 - T_1$  como variação de temperatura

Introduzindo as seguintes formas dimensionais

$$\Theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} \quad (4.6)$$

$$\xi = \frac{r}{R} \quad (4.7)$$

$$\zeta = \frac{\alpha z}{\bar{u} R^2} \quad (4.8)$$

$$Pe = \frac{\rho c_p \bar{u} R}{k} \quad (4.9)$$

$$s = \frac{1}{n} \quad (4.10)$$

$$\phi = \frac{s+3}{s+1} (1 - \xi^{s+1}) \quad (4.11)$$

$$X_1 = 1 - \xi^{s+1} \quad (4.12)$$

$$B = -\beta_1^2 \frac{s+3}{s+1} \quad (4.13)$$

Pode empregar também um perfil de velocidade dimensional como sendo:

$$\phi(\xi) = \frac{\bar{u}}{Q} = \left( \frac{s+1}{s+3} \right) (1 - \xi^{s+1}) \quad (4.14)$$

Então a equação de balanço de energia pode ser descrita na seguinte forma dimensional:

$$\phi(\xi) \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} \quad (4.15)$$

Como o número de *Peclet* para fluidos não-newtonianos é auto, pois eles apresentam uma baixa condutividade térmica, então o termo devido a condução axial pode ser ignorado.

Logo

$$\phi(\xi) \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) \quad (4.16)$$

Aplicando o método de separação de variáveis:

$$\Theta(\xi, \zeta) = X(\xi)Z(\zeta) \quad (4.17)$$

E inserindo este termo na equação diferencial 4.16. Dividindo também por  $XZ$ :

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\zeta} = \frac{1}{\phi X \xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dX}{d\xi} \right) \quad (4.18)$$

Ambos lados da equação são constantes, que podem ser denotados como  $-\beta^2$ . Daí tem-se duas equações diferenciais:

$$\frac{dZ}{d\zeta} = -\beta^2 Z \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dX}{d\xi} \right) + \beta^2 \phi X = 0 \quad (4.20)$$

A segunda condição de contorno é dada por:

$$X'(0) = 0 \quad (4.21)$$

$$X'(1) = 0 \quad (4.22)$$

A equação  $X$  estabelece uma autofunções  $X_i$  correspondente para estabelecer autovalores  $\beta_i$ . A solução completa deve ser então uma combinação linear do produto formado na equação 4.17:

$$\Theta(\xi, \zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i(\xi) e^{-\beta_i^2 \zeta} \quad (4.23)$$

Para determinar o termo  $A_i$  é necessário que  $\Theta = 1$  e  $\zeta = 0$ . Após o uso da condição em que  $\zeta=0$  na equação 4.23, multiplica-se ambos os lados por  $X_i(\xi)\phi(\xi)\xi d\xi$  e integra-se de  $\xi=0$  a  $\xi=1$ . Então, quando a função produz um fator  $X_i(\xi)$  ortogonais entre  $\xi=0$  e  $\xi=1$  a relação influencia a função  $\phi(\xi)\xi$  pode ser obtido finalmente:

$$A_i = \frac{\int_0^1 X_i \phi \xi d\xi}{\int_0^1 X_i^2 \phi \xi d\xi} \quad (4.24)$$

As equações 4.22 e 4.23 constituem uma solução formal para o problema.

No caso da equação do número de Nusselt, pode ser dada para este caso como

$$Nu = \frac{2hR}{k} = \frac{2R \left( -k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}}{k(\bar{T} - T_p)} = -2 \frac{\left( \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=1}}{\bar{\Theta}} \quad (4.25)$$

No, qual  $T_p = T_1$  e  $\bar{\Theta} = (T - T_1) / (T_c - T_1)$ . A partir da equação 4.23 pode ser determinado

$$\left( \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=1} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\beta_i^2 \zeta} X_i'(1) \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Theta} &= \frac{\int_0^1 \phi(\xi) \Theta(\xi, \zeta) \xi d\xi}{\int_0^1 \phi(\xi) \xi d\xi} = 2 \frac{\int_0^1 \phi(\xi) \Theta(\xi, \zeta) \xi d\xi}{\int_0^1 \phi(\xi) \xi d\xi} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\beta_i^2 \zeta} \int_0^1 \phi(\xi) X_i(\xi) \xi d\xi \\ &= -2 \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\beta_i^2 \zeta} \int_0^1 \frac{1}{\beta_i^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dX_i}{d\xi} \right) d\xi \\ &= -2 \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\beta_i^2 \zeta} \frac{1}{\beta_i^2} \xi \frac{dX_i}{d\xi} \Big|_0^1 = -2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\beta_i^2} e^{-\beta_i^2 \zeta} X_i'(1) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Através das equações 4.26 e 4.27 o número de Nusselt pode ser descrito como

$$Nu = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-\beta_i^2 \zeta} X'_i(1)}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\beta_i^2} e^{-\beta_i^2 \zeta} X'_i(1)} \quad (4.28)$$

A expressão do número de *Nusselt* é válida para todos os valores de  $z$ . Entretanto, a fim de usar este resultado, todos os autovalores e autofunções devem ser conhecidos.

Para valores grandes de  $z$  (ou  $\zeta$ ) a equação 4.20 pode ser simplificada consideravelmente, visto que somente o primeiro termo de cada somatória é necessário:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} Nu = \beta_1^2 \quad (4.29)$$

De acordo com este resultado necessita-se calcular somente os primeiros autovalores para o problema de valor de limite na equação 4.20.

Para a solução deste problema pode-se utilizar o procedimento desenvolvido por HILDEBRAND(1962).

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda r(x)y = 0 \quad (4.30)$$

A determinação de  $\lambda_1$  que pode ser obtido devido à seguinte aproximação

$$\lambda_1^{(n)} = \frac{\int_a^b r(x) f_n(x) y_n(x) dx}{\int_a^b r(x) [f_n(x)]^2 dx} \quad (4.31)$$

Deve-se determinar  $X(\xi)$ , a equação 4.20 deve ser rearranjada

$$\frac{1}{B} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dX}{d\xi} \right) = (1 - \xi^{s+1})(1 - \xi^{s+1})\xi \quad (4.32)$$

Integrando a equação acima tem-se

$$\frac{\xi}{B} \frac{dX}{d\xi} = \frac{\xi^2}{2} - \frac{2\xi^{s+3}}{s+3} + \frac{\xi^{2s+4}}{2s+4} + C_1 \quad (4.33)$$

Aplicando a condição de contorno  $X'(0)=0$

$$C_1 = 0 \quad (4.34)$$

Logo

$$\frac{\xi}{B} \frac{dX}{d\xi} = \frac{\xi^2}{2} - \frac{2\xi^{s+3}}{s+3} + \frac{\xi^{2s+4}}{2s+4} \quad (4.35)$$

Integrando novamente

$$\frac{X}{B} = \frac{\xi^2}{4} - \frac{2\xi^{s+3}}{(s+3)^2} + \frac{\xi^{2s+4}}{(2s+4)^2} + C_2 \quad (4.36)$$

Aplicando a seguinte condição de contorno  $X(1)=0$ , então

$$C_2 = -\frac{1}{4} + \frac{2}{(s+3)^2} - \frac{1}{(2s+4)^2} \quad (4.37)$$

Substituindo  $B$  e  $C_2$  na equação 4.36

$$X = -\beta_1^2 \left( \frac{s+3}{s+1} \right) \left( -\frac{1}{4} + \frac{2}{(s+3)^2} - \frac{1}{(2s+4)^2} + \frac{\xi^2}{4} - \frac{2\xi^{s+3}}{(s+3)^2} + \frac{\xi^{2s+4}}{(2s+4)^2} \right) \quad (4.38)$$

Conhecendo  $X(\xi)$ , e possível aplicar a solução de HILDEBRAND (1962)

$$\beta_1^2 = \frac{\int_0^1 -\xi(1-\xi^{s+1})^2 \left( \frac{s+3}{s+1} \right) \left( -\frac{1}{4} + \frac{2}{(s+3)^2} - \frac{1}{(2s+4)^2} + \frac{\xi^2}{4} - \frac{2\xi^{s+3}}{(s+3)^2} + \frac{\xi^{2s+4}}{(2s+4)^2} \right) d\xi}{\int_0^1 \xi(1-\xi^{s+1}) \left( \left( \frac{s+3}{s+1} \right) \left( -\frac{1}{4} + \frac{2}{(s+3)^2} - \frac{1}{(2s+4)^2} + \frac{\xi^2}{4} - \frac{2\xi^{s+3}}{(s+3)^2} + \frac{\xi^{2s+4}}{(2s+4)^2} \right) \right)^2 d\xi}$$

Resolvendo a equação anterior, tem-se o número de *Nusselt*

$$Nu = \beta_1^2 = \frac{AB}{\frac{C+D}{2+s}} \quad (4.39)$$

$$A = 6(11+5s)(5+2s)(7+s)(4+s)(s+3)$$

$$B = (3s^4 + 55s^3 + 322s^2 + 755s + 617)$$

$$C = 30s^8 + 1111s^7 + 17624s^6 + 154465s^5 + 815040s^4 + 2652697s^3$$

$$D = 5212264s^2 + 5668639s + 2619890$$

Sendo que  $s=1/n$ .

#### 4.1.2 Modificação de KAYS

Segundo KAYS (1966) a região hidrodinâmica e termicamente desenvolvida, pode ser resolvida para condição de temperatura constante. Para temperatura constante na superfície o gradiente da temperatura na interface é

$$\frac{\partial T_c}{\partial z} = \frac{dT_c}{dz} = 0 \quad (4.40)$$

E a taxa de desenvolvimento de temperatura em relação a  $z$  é

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_c - T}{T_c - \bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dz} \quad (4.41)$$

No escoamento hidrodinamicamente desenvolvido, a equação de balanço energia, no escoamento laminar de um fluido incompressível, dentro de um tubo circular, com dissipação viscosa da energia desprezível, é dada como:

$$\frac{1}{\alpha} u(r) \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4.42)$$

Aplicando as condições descritas nas equações (4.40) e (4.41), considerando também que pode ser considerado a condução relativa radial um fator de pouca importância  $\partial^2 T / \partial z^2 = 0$ , tem-se a seguinte forma diferencial

$$\frac{u(r)}{\alpha} \frac{T_c - T}{T_c - \bar{T}} \frac{d\bar{T}(z)}{dz} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) \quad (4.43)$$

Aplicando as seguintes condições de contorno

$$T = T_c \quad \text{para } r = r_0 \quad (4.44)$$

$$\frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{para } r = 0 \quad (4.45)$$

Um caminho para resolver esta equação é o usar o método de sucessivas aproximações. Como uma primeira aproximação deve-se previamente derivar o perfil de temperatura de uma solução de taxa constante de calor e substituir por  $(T_c - T)/(T_c - \bar{T})$ . Visto que assim a solução é um polinômio em  $r$ , a equação pode ser logo integrada em relação a  $r$  para produzir um novo perfil de temperatura. O novo perfil é substituído de volta, e integrado novamente e assim tem se outro perfil. Para cada perfil uma temperatura média de mistura pode ser estimada pela integração, e então um valor do número de *Nusselt* pode ser estimado. O processo é repetido até que o valor do número de *Nusselt* aproxime-se a um limite. Para este caso é

$$Nu = 3,658 \quad (4.46)$$

Então usando o fator de correção já descrito na equação 3.52 tem-se

$$Nu = 3,658 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{\frac{1}{3}} = 3,658 \Delta^{\frac{1}{3}} \quad (4.47)$$

## 4.2 Regime laminar termicamente em desenvolvimento

### 4.2.1 Correlação de PIGFORD

Se as propriedades  $k$  e  $C_p$  são constantes, se a energia térmica gerada no fluido é sem importância, e se a energia de condução de calor e o fluxo do fluido são limitados nas direções axial e radial, respectivamente, então a equação que descreve a transferência de calor para escoamento de fluidos em estado estacionário laminar em um tubo circular é

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{u\rho c_p r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \quad (4.48)$$

A equação 4.48 é admissível para resolução se as velocidades e as densidades são conhecidas ou se são determinados as funções radiais. Assumindo que a densidade do fluido independe do raio do tubo, desta maneira a solução deve ser obtida em função do número de *Graetz* para um perfil parabólico de velocidade.

A solução da equação 4.48 é obtida assumindo uma transferência de calor controlada em uma camada laminar próxima à parede do tubo e que a distribuição desenvolvida pela velocidade seja linear nesta camada. Estas estimativas foram usadas por LEVEQUE<sup>1</sup> apud CHRISTIANSEN e CRAIG (1962) para obtenção de soluções para isotermas de fluidos newtonianos e PIGFORD<sup>2</sup> apud CHRISTIANSEN e CRAIG(1962) obteve uma solução para isotermas de fluidos não-newtonianos.

LEVEQUE(1928)

$$Nu = 1,75Gz^{\frac{1}{3}} \quad (4.49)$$

PIGFORD(1952)

$$Nu = 1,75 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{\frac{1}{3}} Gz^{\frac{1}{3}} \quad (4.50)$$

Segundo METZNER(1957) para um intervalo do número de *Graetz* de 100 a 2000 e variando  $n$  de 0,18 a 0,70, o erro médio é de 13,5%.

CHRISTIANSEN e CRAIG (1962) usaram a correlação de PIGFORD, e assim obtiveram resultados satisfatórios para número de *Graetz* maior que 20 e  $n > 0,10$ .

<sup>1</sup> LEVEQUE, M. A. Amn. Mines, 13, p. 201-212, 1928.

<sup>2</sup> PIRGFORD, R. L. **Nonisothermal flow and heat transfer inside vertical tubes**. Chem. Eng. Progr. Symp., serie 17, n. 51, p. 79-89, 1955.



METZNER(1965) propôs a seguinte correção levando em consideração o índice de consistência do fluido  $K$ , e o índice de consistência que sofre ação da parede do duto  $K_p$

$$Nu = 1,75 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{\frac{1}{3}} Gz^{\frac{1}{3}} \left( \frac{K}{K_p} \right)^{0,14} \quad (4.51)$$

#### 4.2.2 Correlação de BIRD

BIRD (1987) propôs a seguinte solução para transferência de calor com temperatura constante em regime laminar e termicamente em desenvolvimento em dutos circulares.

O balanço de energia é dado pela seguinte aproximação para problemas de transferência de calor em dutos circulares:

$$\rho c_p u_{max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{s+1} \right] \frac{\partial T}{\partial z} = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (4.52)$$

Assumindo as seguintes condições:

$$r = 0 \quad T = \text{finito} \quad (4.53)$$

$$r = R \quad T = T_1 \quad (4.54)$$

$$z \rightarrow -\infty \quad T = T_0 \quad (4.55)$$

$$z \rightarrow +\infty \quad T = T_1 \quad (4.56)$$

Para um valor de  $R$  grande, uma aproximação da condução radial escalar pode ser feita, com a velocidade axial pode-se determinar a velocidade média de mistura  $\bar{u}$ , e  $\Delta T_c = T_c - T_1$  como variação de temperatura

Introduzindo as seguintes formas dimensionais

$$\Theta = \frac{T - T_1}{T_c - T_1} \quad (4.57)$$

$$\xi = \frac{r}{R} \quad (4.58)$$

$$\zeta = \frac{\alpha z}{\bar{u} R^2} \quad (4.59)$$

$$Pe = \frac{\rho c_p \bar{u} R}{k} \quad (4.60)$$

$$s = \frac{1}{n} \quad (4.61)$$

$$\phi = \frac{s+3}{s+1} (1 - \xi^{s+1}) \quad (4.62)$$

Então a equação de balanço de energia pode ser descrita na seguinte forma dimensional:

$$\phi(\xi) \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2} \quad (4.63)$$

Para grandes números de  $Pe$  típico de polímeros, por causa de sua baixa condutividade térmica, o termo de condução axial pode ser negligenciado, e uma condição de contorno na direção  $z$  pode ser excluída. As dimensões das condições de contorno para a resolução da equação 4.64 são:

$$\zeta = 0 \quad \Theta = 1 \quad (4.64)$$

$$\zeta = 1 \quad \Theta = 0 \quad (4.65)$$

$$\xi = 1 \quad \Theta = \text{finito} \quad (4.66)$$

Para o limite de  $z \rightarrow 0$  três aproximações podem ser sugeridas:

- i. Os efeitos de curvatura são um problema ignorado, considerando a parede plana; a distância a partir da parede será considerada como  $y=R-r$ .
- ii. O fluido é considerando um prolongamento da superfície de transferência de calor, de  $y=0$  até  $y=\infty$ .
- iii. Um perfil de velocidade linear é admitido, com uma inclinação conhecida determinada através do gradiente de velocidade na parede.

Sendo que a distância adimensional da parede pode ser expressa como  $\sigma = y/R = 1 - \xi$ , assim sendo as três condições contorno se tornam:

$$\left. \frac{d\phi}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} \sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \sigma^2} \quad (4.67)$$

$$\zeta = 0 \quad \Theta = 1 \quad (4.68)$$

$$\sigma = 0 \quad \Theta = 0 \quad (4.69)$$

$$\sigma = \infty \quad \Theta = 1 \quad (4.70)$$

Para fluidos não-newtonianos a solução de  $(d\phi/d\sigma)_{\sigma=0}$  é exatamente  $(s+3)$ , a partir da equação 4.62. Devido a difícil solução é postulado uma solução na forma  $\Theta = \Theta(\chi)$ , onde  $\chi$  é uma nova variável, proveniente de uma combinação de variáveis independentes:

$$\chi = \frac{\sigma}{\sqrt[3]{9 \frac{\zeta}{s+3}}} \quad (4.71)$$

Então a equação diferencial pode ser descrita como

$$\frac{d^2\Theta}{d\chi^2} + 3\chi^2 \frac{d\Theta}{d\chi} = 0 \quad (4.72)$$

Como  $\Theta(0) = 0$  e  $\Theta(\infty)=1$ . A solução é

$$\Theta = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \int_0^\chi e^{-\bar{\chi}^3} d\bar{\chi} \quad (4.73)$$

Este é o perfil de temperatura na forma adimensional.

Para o cálculo de transferência de calor em tubos é conveniente trabalhar com o termo de coeficiente de transferência de calor local  $h$ , definida por

$$q_{p-radial} = h(\bar{T} - T_p) \quad (4.74)$$

Na qual  $q_{p-radial}$  é o fluxo de calor radial,  $T_p$  é a temperatura de parede e  $\bar{T}$  é a temperatura média de mistura, definida por

$$\bar{T} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \bar{u} T(r, z) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R \bar{u} r dr d\theta} \quad (4.75)$$

Usando os coeficiente adimensional de transferência de calor, o número de *Nusselt*,  $Nu=2hR/k$ , é rearanjado. Para este problema  $\bar{T} = T_0$  e  $T_p=T_1$ , deste modo o número de *Nusselt* é

$$Nu = \frac{2q_p R}{k(T_0 - T_1)} = \frac{2R}{k} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} \quad (4.76)$$

Então a equação 4.73 é substituída na equação 4.76 e tem-se

$$Nu = 2 \frac{d\Theta}{d\chi} \Big|_{\chi=0} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \sqrt[3]{\frac{s+3}{9\zeta}} = 1,08 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{\frac{1}{3}} Gz^{\frac{1}{3}} \quad (4.77)$$

#### 4.2.3 Correlação de JOSHI- BERGLES

A solução gerada foi obtida numericamente para um tubo circular por JOSHI e BERGLES (1980b) e comparada com seus experimentos com fluidos não-newtonianos que tem índice variando de  $0,2 \leq n \leq 1$ . Na sua solução numérica, considera  $n$  como uma constante.

$$Nu = 3,66 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{\frac{1}{3}} \left( 1 + (0,424Gz^{0,34})^3 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.78)$$

#### 4.3 Comparação entre as correlações

Comparando graficamente as equações para transferência de calor em regime laminar termicamente desenvolvido e temperatura da parede constante, com os dados de BIRD (1977) calculados computacionalmente obtém-se as curvas da Figura 4.1.

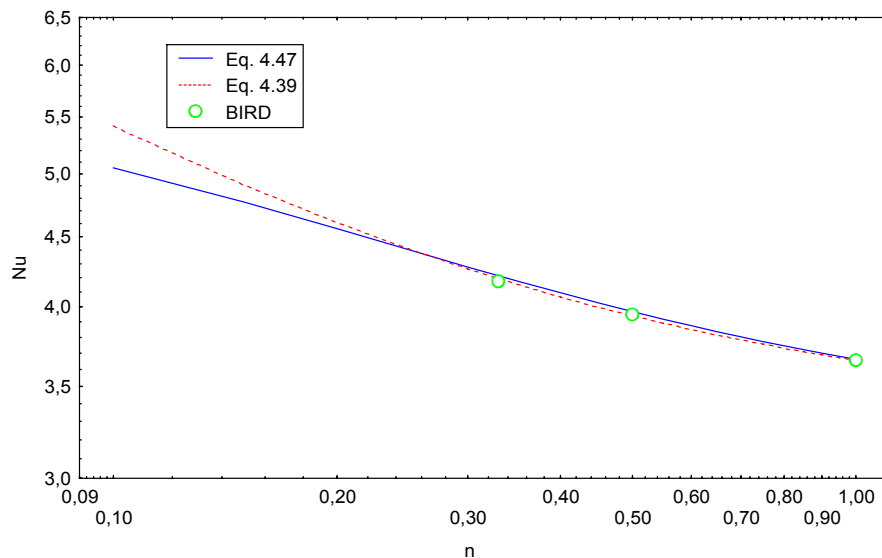


Figura 4.1 – Comparação entre as correlações apresentadas e os dados apresentados por BIRD.

CHRISTIANSEN e CRAIG (1962) realizaram experimentos em dutos de cobre de 1, 1,5 e 2 polegadas, com solução de 3% de sódio carboxi metil celulose (CMC) com  $n$  igual a 0,67. Foram os primeiros a trabalhar com a razão entre consistência no meio e na parede ( $K/K_w$ ), proposta por METZNER (1965).

As correlações 4.77 e 4.78 também receberam o fator de correção proposto por METZNER (1965) na Figura 4.2.

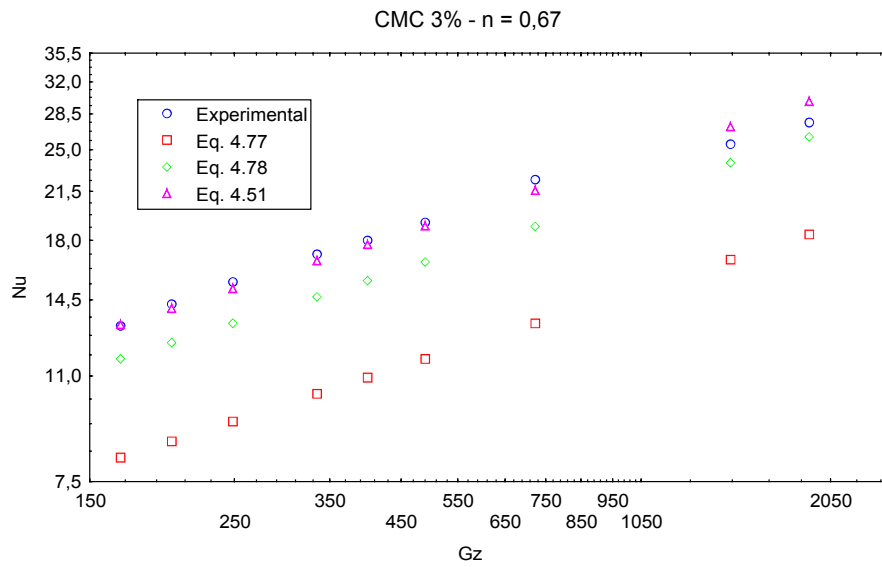


Figura 4.2 – Transferência de calor em regime laminar e termicamente em desenvolvimento com temperatura de parede constante.

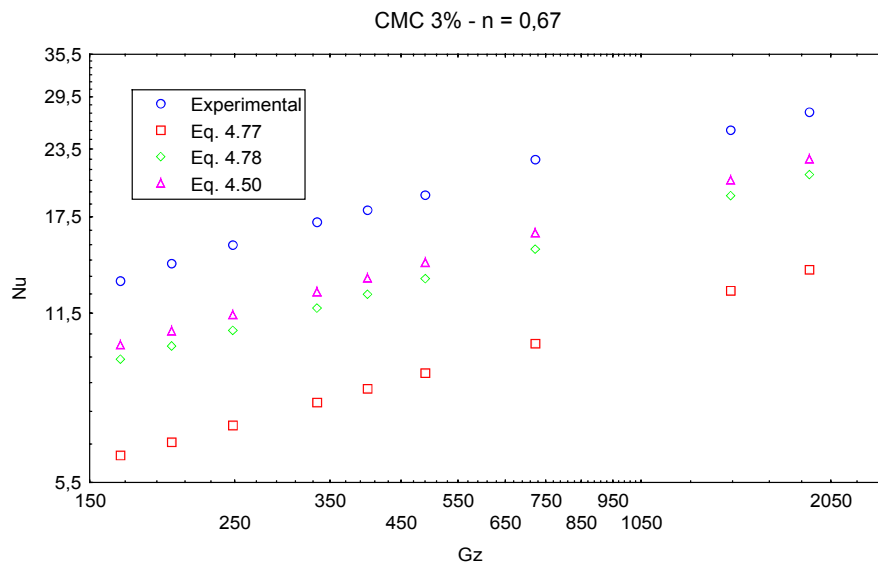


Figura 4.3 – Transferência de calor em regime laminar e termicamente em desenvolvimento com temperatura de parede constante, desprezando o índice de consistência.

#### 4.4 Discussão dos Resultados

Através da Figura 4.1 é possível verificar o comportamento das correlações para transferência de calor em regime laminar e temperatura de parede constante e termicamente desenvolvido.

Tabela 4.1- Comparação entre as correlações e os dados calculados computacionalmente.

Correlação		Erro médio quadrático
Modificação de KAYS	eq. 4.47	0,34%
BIRD	eq. 4.39	0,71%

A transferência de calor em regime laminar e termicamente em desenvolvimento com temperatura de parede constante, analisada através da Figura 4.2 e 4.3.

Tabela 4.2 – Comparação entre as correlações e os dados experimentais da Figura 4.2.

Correlação		Erro médio quadrático
PIGFORD-METZNER	eq. 4.51	3,00%
BIRD	eq. 4.77	62,00%
JOSHI- BERGLES	eq. 4.78	13,65%

Tabela 4.3 - Comparação entre as correlações e os dados experimentais da Figura 4.3.

Correlação		Erro médio quadrático
PIGFORD	eq. 4.50	32,50%
BIRD	eq. 4.77	114,30%
JOSHI- BERGLES	eq. 4.78	41,63%

Não é possível determinar com certeza a melhor correlação para transferência de calor com temperatura de parede constante em regime totalmente desenvolvido, mesmo com os resultados da equação modificada de KAYS (1966) apresentado um resultado melhor que a de BIRD (1987); há escassez de dados para uma afirmativa desta.

Através das Tabelas 4.2 e 4.3, demonstra-se a importância de levar em consideração o índice de consistência do fluido, nas correlações de transferência de calor.

## 5. TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM DUTOS NÃO-CIRCULARES

As medições de taxa de transferência de calor não são praticáveis para fluxo de fluidos não-newtonianos em dutos não-circulares (METZNER, 1965).

As características geométricas dos dutos afetam diferentemente a transferência de calor em fluidos não-newtonianos (HARTNETT e KOSTIC, 1989).

No caso de fluidos não-newtonianos, as predições teóricas rendem desvios muito grandes para transferência de calor em condições de fluxo laminar muito baixas. É fato que a avaliação experimental das medidas de transferência de calor além de baixas predições pode refletir uma inadequação em um modelo analítico (HARTNETT e KOSTIC, 1989).

### 5.1 Condições limites

Há um número infinito de possibilidades de condições de contorno térmicas que descrevem a temperatura e o fluxo de calor. Estas podem impor limites para fluxo de fluidos em dutos não-circulares. A transferência de calor é fortemente dependente das condições de contorno térmicas em um regime de fluxo laminar embora em grande parte dependendo menos do regime de fluxo turbulento, particularmente para fluidos com número de *Prandtl* muito grande. Deste modo restringe-se a três classes principais as condições de contorno térmicas:

- i. Temperatura constante imposta sobre os limites do fluido, denominada agora como condição *T*.
- ii. Fluxo de calor axial constante, com temperatura de parede local periférica constante impondo um limite para o fluido, e a condição *H1*.
- iii. Fluxo de calor constante impondo axialmente e perifericamente a ambos um limite para o fluido, a condição *H2*.

### 5.2 Grupos adimensionais e soluções generalizadas

Soluções através de equações diferenciais produzem problemas a serem geralmente apresentado em termos de grupos adimensionais, o qual pode ser determinado através de atribuições as equações governamentais e às correspondentes condições de contorno adimensionais.

Os principais grupos adimensionais para força de atrito e transferência de calor para fluidos newtonianos e não-newtonianos são agora dados.

1. Coordenada adimensional periférica

$$Y^* = \frac{y}{D_h} \qquad Z^* = \frac{z}{D_h} \qquad (5.1)$$

2. Distância térmica axial adimensional

$$x_{th}^+ = \frac{z}{D_h Re^+ Pr^+} \qquad (5.2)$$

3. Número de *Graetz* baseado no diâmetro hidráulico

$$Gz = \frac{1}{x_{th}^+} = \frac{Re Pr}{\frac{z}{D_h}} \qquad (5.3)$$

4. Número de *Graetz* baseado na vazão mássica

$$Gz_m = \frac{\dot{m} c_p}{zk} = \frac{(1 + \alpha^*)^2}{4\alpha^*} \frac{1}{x_{th}^+} \qquad (5.4)$$

5. Velocidade adimensional

$$u^* = \frac{u}{\bar{u}} \qquad (5.5)$$

6. Número de *Nusselt*

$$Nu = \frac{hD_h}{k} \qquad (5.6)$$

7. Número de *Reynolds* baseada na viscosidade aparente

$$Re = \frac{\rho \bar{u} D_h}{\eta} \qquad (5.7)$$

8. Número de *Reynolds* generalizado

$$Re^+ = \frac{\rho \bar{u}^{2-n} D_h^n}{K} \qquad (5.8)$$

9. Número de *Reynolds* generalizado por Kozicki

$$Re^* = \frac{\rho \bar{u}^{2-n} D_h^n}{8^{n-1} K \left( b^* + \frac{a^*}{n} \right)^n} \qquad (5.9)$$

10. Número de *Peclet*

$$Pe = \frac{\rho c_p \bar{u} D_h}{k} = Re Pr = Re^+ Pr^+ \qquad (5.10)$$

Os valores de  $a^*$  e  $b^*$  dependem da geometria do tubo. A Tabela 5.1 apresenta estes valores para um canal retangular como uma função de sua razão



aparente  $\alpha^* = 2b/2a$ . É interessante notar que  $a^*$  e  $b^*$  são 0,25 e 0,75 para dutos circulares (KOZICKI, 1971).

Tabela 5.1 – Constantes geométricas  $a^*$  e  $b^*$  para dutos retangulares

$\alpha^*$	$a^*$	$b^*$	$c$
1,00	0,2121	0,6771	14,227
0,95	0,2123	0,6774	14,235
0,90	0,2129	0,6785	14,261
0,85	0,2139	0,6803	14,307
0,80	0,2155	0,6831	14,378
0,75	0,2178	0,6870	14,476
0,70	0,2208	0,6921	14,605
0,65	0,2248	0,6985	14,772
0,60	0,2297	0,7065	14,980
0,55	0,2360	0,7163	15,236
0,50	0,2439	0,7278	15,548
0,45	0,2538	0,7414	15,922
0,40	0,2659	0,7571	16,368
0,35	0,2809	0,7750	16,895
0,30	0,2991	0,7954	17,512
0,25	0,3212	0,8183	18,233
0,20	0,3475	0,8444	19,071
0,15	0,3781	0,8745	20,042
0,10	0,4132	0,9098	21,169
0,05	0,4535	0,9513	22,447
0,00	0,5000	1,0000	24,000

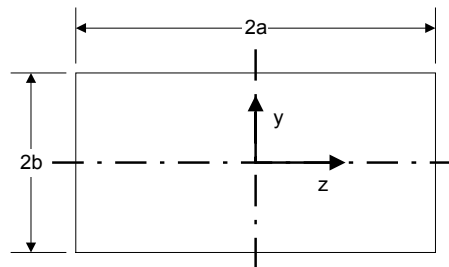


Figura 5.1 – Geometria de dutos retangulares

### 5.3 Perfil de velocidade

SCHECHTER (1961) obteve uma distribuição de velocidade para fluidos não-newtonianos em canais não-circulares aplicando princípios variacionais:

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{1}{4} \left( 1 - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right) \left( a_1 + a_2 \left( \frac{y}{2b} \right)^2 \right) \quad (5.11)$$

Tabela 5. 2 – Constantes para fluxos em dutos quadráticos

$n$	$a_1$	$a_2$	$fRe^+$
1	6,00	0,00	24,00
0,75	5,770	4,598	13,98
0,50	5,3673	12,683	8,01

Os valores de  $a_1$  e  $a_2$  são funções do índice  $n$  da lei de potência como é mostrado na Tabela 5.2. Visto que o perfil de velocidade não é explícito o índice  $n$  da lei de potência. Isso é particularmente adequado para aplicação do cálculo analítico da equação de energia.

SKELLAND (1967) apresenta para fluidos não-newtonianos, uma solução analítica simples utilizável para fluidos que seguem a lei da potência em placas paralelas e dutos retangulares com duas faces aquecidas:

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{2n+1}{2} \left( 1 - \left( \frac{y}{b} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad (5.12)$$

#### 5.4 Fatores de Correção

O gradiente médio de velocidade retangular ou circular na parede do duto pode ser expresso como

$$\gamma_{p,av} = \frac{\frac{a^* + b^* n}{8\bar{u}}}{\frac{D_h}{D_h}} = \frac{1+3n}{8\bar{u}} \quad , \text{ para duto circular} \quad (5.13)$$

$$\gamma_{p,av} = \frac{\frac{a^* + b^* n}{8\bar{u}}}{\frac{D_h}{D_h}} = \frac{1+2n}{8\bar{u}} \quad , \text{ para placas paralelas} \quad (5.14)$$

Por essa razão, na região de entrada o número de Nusselt para fluidos não-newtonianos em um duto retangular pode ser expresso como

$$Nu(\alpha^*, n) = \left( \frac{a^* + b^* n}{n} \right)^{\frac{1}{3}} Nu(\text{circular}, n = 1) \quad (5.15)$$

onde  $Nu(\text{circular}, n=1)$  corresponde a fluidos Newtonianos em dutos circulares.

Por causa da impossibilidade de igualar as condições de contorno térmica de duto retangular a uma circular, é necessário usar a equação 5.16 e uma outra forma

$$Nu(\alpha^*, n) = \left( \frac{a^* + b^* n}{(a^* + b^*) n} \right)^{\frac{1}{3}} Nu(\alpha^*, n=1) \quad (5.16)$$

onde  $Nu(\alpha^*, n=1)$  e o correspondente do número de *Nusselt* com o mesmo  $\alpha^*$  e as condições de contorno térmicas.

### 5.5 Regime laminar e termicamente desenvolvido

O número de *Nusselt* totalmente desenvolvido para fluidos newtonianos no caso de transferência de calor uniforme nas quatro paredes úteis. Esta aproximação proposta por SHAH e LONDON(1978) gera um erro de até  $\pm 0,1\%$ .

$$Nu = 7,541(1 - 2,610\alpha^* + 4,970\alpha^{*2} - 5,119\alpha^{*3} + 2,702\alpha^{*4} - 0,548\alpha^{*5}) \quad (5.17)$$

Para fluxo de calor axial constante nas quatro paredes, com temperatura de parede local periférica constante, o número de *Nusselt* para fluidos newtonianos é dado por

$$Nu = 8,235(1 - 2,0421\alpha^* + 3,0853\alpha^{*2} - 2,4765\alpha^{*3} + 1,0578\alpha^{*4} - 0,1861\alpha^{*5}) \quad (5.18)$$

Através da correlação acima SHAH e LONDON(1978), conseguiram erros de até  $\pm 0,03\%$ .

### 5.6 Regime laminar e termicamente em desenvolvimento

Para fluxo de fluidos não-newtonianos em dutos retangulares as condições indicadas dependem do perfil de velocidade.

Deste modo prolonga-se a solução de problemas através de Graetz-Nusselt para um fluido não-newtoniano, sendo usado um perfil de velocidade adequado.

BIRD (1977) desenvolveu correlações para fluxo térmico em desenvolvimento em dutos retangulares para fluidos não-newtonianos.

Temperatura constante da parede

$$Nu = \frac{4}{9^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left( \frac{\bar{u} b^2}{\alpha z} \left( -\frac{d\phi}{d\sigma} \right) \Big|_{\sigma=1} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.19)$$

Fluxo de calor constante na parede

$$Nu = \frac{4\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{9^{\frac{1}{3}}} \left( \bar{u}b^2 \left( -\frac{d\phi}{d\sigma} \right) \Big|_{\sigma=1} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.20)$$

### 5.6.1 Modificação de BIRD

Partindo das seguintes considerações adimensionais

$$\sigma = \frac{y}{b} \quad (5.21)$$

$$\phi(\sigma) = \frac{u}{U} \quad (5.22)$$

Então, aplicando o perfil de velocidade de SKELLAND (1967)

$$\frac{d\phi}{d\sigma} \Big|_{\sigma=1} = -\frac{(2n+1)(n+1)}{2n} \quad (5.23)$$

Substituindo a o perfil de velocidade (equação 5.23) na equação 5.20, então para temperatura constante da parede em duto retangular com duas paredes adiabáticas

$$Nu = 0,8546Gz^{\frac{1}{3}} \left( \frac{(2n+1)(n+1)}{2n} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.24)$$

Se o mesmo for feito mas se o perfil for substituído na equação 5.19, então para fluxo de calor constante na parede em duto retangular com duas paredes adiabáticas

$$Nu = 1,033Gz^{\frac{1}{3}} \left( \frac{(2n+1)(n+1)}{2n} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.25)$$

### 5.7 Comparação entre as correlações

CHANG (1998) realizou estudos experimentais e numéricos com fluidos não-newtonianos em duto retangular horizontal com duas paredes adiabáticas e duas paredes com fluxo uniforme de calor em regime laminar e termicamente em desenvolvimento, o fluido usado foi soluções de poliacrilamida (separan) e  $\alpha^*$  igual a 0,5.

As correlações para transferência de calor em regime laminar e termicamente em desenvolvimento em dutos circulares apresentadas no Capítulo 3 foram

corrigidas através do fator de correção da equação 5.15 para poderem ser comparadas com a correlação dada pela equação 5.25.

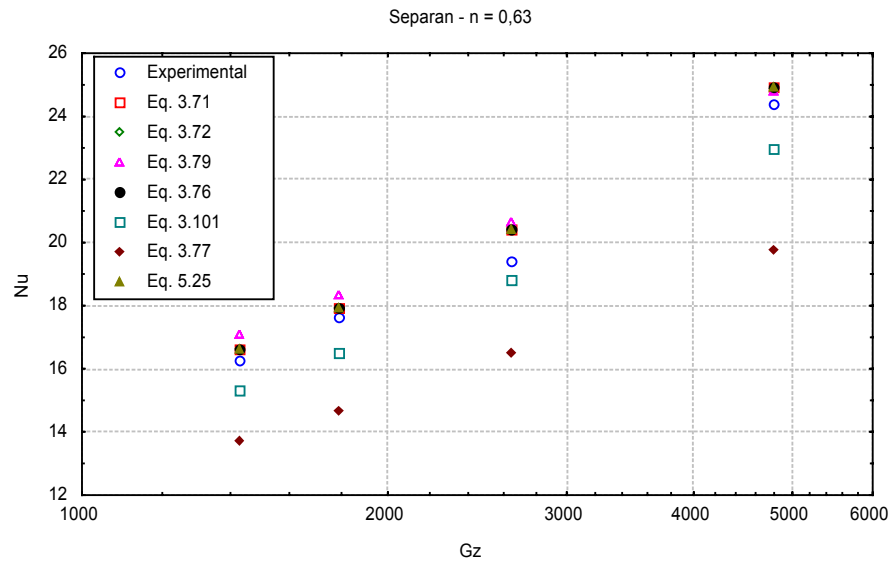


Figura 5.2 - Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar termicamente em desenvolvimento com fluxo de calor constante e  $Gz$  variando de 1000 a 5000,  $Re_a = 1974$  e  $Pr_a = 42,9$ .

HARTNETT e KOSTIC(1985) realizaram experimentos em dutos retangulares de  $1,8 \times 0,9$ cm de seção, com diâmetro hidráulico de 1,2cm. O fluido usado foi solução de policrilamida(separan).

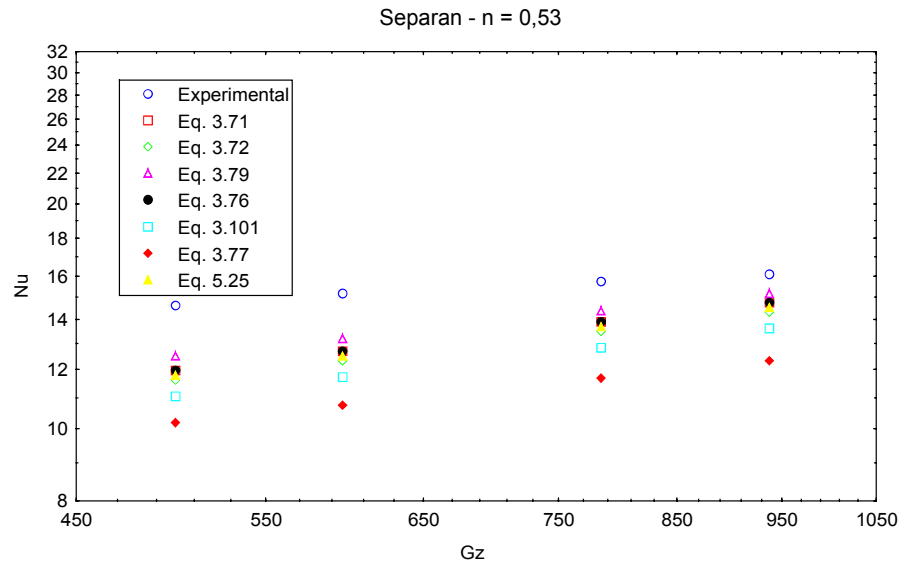


Figura 5.3 - Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar termicamente em desenvolvimento, com fluxo de calor constante e com  $Gz$  variando de 450 a 1050,  $Re_a = 314$  e  $Pr_a = 79$ .

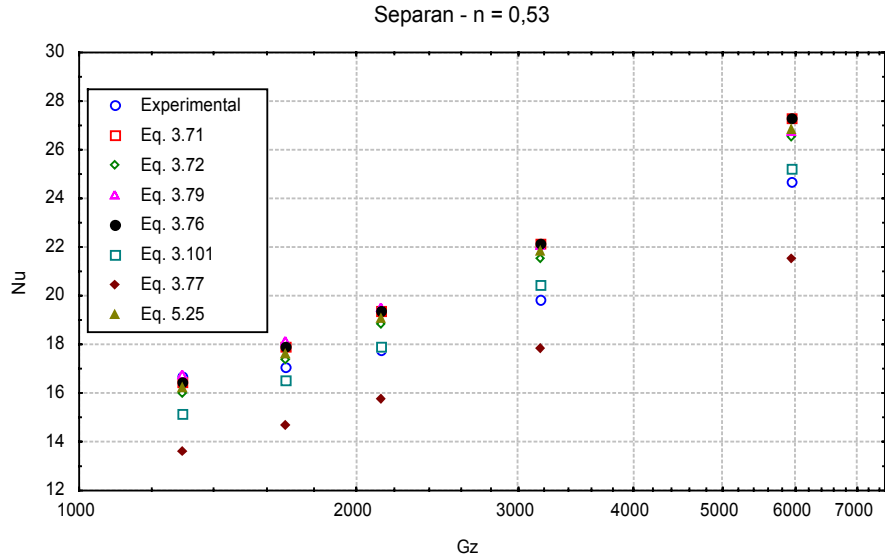


Figura 5.4 - Comparação entre os dados experimentais com as correlações para fluxo laminar termicamente em desenvolvimento, com fluxo de calor constante e com  $Gz$  variando de 1000 a 7000,  $Re_a = 314$  e  $Pr_a = 79$ .

### 5.8 Discussão dos Resultados

Para fluxo de transferência de calor em dutos retangulares foram feitas as seguintes análises, as correlações apresentadas no capítulo 3 para transferência de calor em regime laminar com fluxo de calor constante e termicamente em desenvolvimento foram corrigidas a sua geometria através da equação 5.15.

Tabela 5.3 – Comparação entre as correlações e dados experimentais para número de *Graetz* de 1000 a 7000, descrito nas Figuras 5.2 e 5.4.

Correlação		Erro médio quadrático	
BIRD-MATSUSHISA	eq. 3.71	2,85%	7,60%
MIZUSHINA	eq. 3.72	2,77%	7,64%
BASSET-WELTY	eq. 3.79	4,43%	7,47%
CHURCHILL-USAGI	eq. 3.76	2,70%	6,91%
BIRD	eq. 3.101	3,57%	5,10%
CHURCHILL-OZOE	eq. 3.77	13,25%	16,70%
BIRD modificado	eq. 5.25	2,84%	6,55%

Tabela 5.4 - Comparação entre as correlações e dados experimentais para número de *Graetz* de 400 a 1000, descrito na Figura 5.3.

Correlação		Erro médio quadrático	
BIRD-MATSUSHISA	eq. 3.71	13,60%	
MIZUSHINA	eq. 3.72	16,90%	
BASSET-WELTY	eq. 3.79	10,44%	
CHURCHILL-USAGI	eq. 3.76	16,00%	
BIRD	eq. 3.101	20,27%	
CHURCHILL-OZOE	eq. 3.77	27,24%	
BIRD modificado	eq. 5.25	14,94%	

Fica claro que o uso do fator de correção de geometria apresentam bons resultados para BIRD-MATSUSHISA, MIZUSHINA e CHURCHILL-USAGI, e a modificação de BIRD também apresenta um bom desempenho.

Fica claro que para o intervalo de número de *Graetz* de 1000 a 7000 o erro nas correlações são menores, do que no intervalo de 400 a 1000, isto porque é difícil determinar o intervalo no qual o regime passa de desenvolvido para em desenvolvimento, diferentemente de tubos circulares onde se tem um ponto de referência que é de *Graetz* igual a 32. Em dutos não-circulares este ponto não é

facilmente determinado, ou seja pode para o caso descrito de duas paredes aquecidas, esta região de *Graetz* de 400 a 1000 ser uma área de transição.



## 6. TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM REGIME TURBULENTO

Utilizando-se de análise feitas para transporte turbulento de calor, massa e momento para fluidos newtonianos é possível desenvolver correlações para fluidos não-newtonianos (METZNER, 1965).

Em geral, por meio, de uma aproximação o problema de fluxo turbulento em não-newtonianos depende do fator de atrito (DAVIES, 1972).

Uma característica importante de fluidos não-newtonianos é que estão suscetíveis à degradação quando sujeitas a tensão de cisalhamento. Assim, as soluções aquosas de polímeros que fluem em regime turbulento através dos tubos circulares por períodos de tempo longos submetem-se a mudanças de propriedades, como resultado desta degradação, e este, por sua vez, pode acarretar a perda de carga e a transferência de calor (CHO e HARTNETT, 1982).

### 6.1 Fator de atrito

Neste primeiro caso, aplicando a definição do fator de atrito de Fanning, que para fluxo em dutos circulares que é

$$f = \frac{16 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)}{Re_a} \quad (6.1)$$

$f$  é uma função não só de  $Re_a$  (equação 2.7) mas também de  $n$ . Segundo os resultados experimentais apresentados por SKELLAND (1967) esta equação se adapta para regime laminar.

Uma grande contribuição para estudos com fluidos não-newtonianos em regime de fluxo turbulento foram realizados por DODGE e METZNER(1959), que propuseram uma correlação para fator de atrito em regime de fluxo turbulento:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{4}{n^{0,75}} \log \left( Re' f^{1-\frac{n}{2}} \right) - \frac{0,4}{n^{1,2}} \quad (6.2)$$

esta equação esta sujeita a seguinte restrição:  $(PrRe^2)f > 500000$ . É função de  $Re'$  (equação 2.8).

## 6.2 Fluxo de calor constante na parede e termicamente em desenvolvimento

### 6.2.1 Correlação de METZNER-FRIEND

Em 1959, METZNER e FRIEND (1959) calcularam o número de *Stanton* em função do fator de atrito e do número de  $Pr_a$  (equação 2.12), aplicando a formulação geral de *Reichardt* para a analogia entre a transferência de calor e a transferência do momento no fluxo turbulento:

$$St_a = \frac{Nu}{Re_a Pr_a} = \frac{\frac{f}{2}}{1,20 + 11,8 \sqrt{\frac{f}{2}} (Pr_a - 1) Pr_a^{\frac{1}{3}}} \quad (6.3)$$

As predições desta correlação estão de acordo com dados experimentais obtidos com soluções aquosas de carbopol e xarope de milho. Foram obtidos erros de até  $\pm 25\%$  para fluidos que seguem a lei da potência com o índice de comportamento do escoamento variando de  $0,39 \leq n \leq 1,0$ .

### 6.2.2 Correlação de CLAPP

CLAPP(1963) utilizando corridas experimentais com transferência de calor em regime turbulento utilizando fluidos não-newtonianos; obteve erros de até  $\pm 4,5\%$ , usando uma generalização da forma bem conhecida de DITTUS-BOELTER que é usada nas equações para fluidos newtonianos:

$$Nu = 0,023(9350)^{0,8} \left(1 - \left(\frac{1}{n^n}\right)\right) Re_{eff}^{\left(\frac{0,8}{n^n}\right)} Pr_{eff}^{0,4} \quad (6.4)$$

Foram utilizadas as definições de  $Re_{eff}$  (equação 2.6) e  $Pr_{eff}$  (equação 2.11).

### 6.2.3 Correlação de YOO

YOO(1974), desenvolveu trabalho experimental em regime turbulento onde pode observar que o número de *Nusselt* para fluidos não-newtonianos era muito maior que o número de *Nusselt* da água para o mesmo número de *Reynolds*. Isto pode ser atribuído ao fato de que os números de *Prandtl* destes líquidos não-newtonianos eram da ordem de 3-300. Usando todos estes dados, YOO desenvolveu uma correlação empírica para prever transferência de calor em regime turbulento em líquidos não-newtonianos:

$$St_a Pr_a^{\frac{2}{3}} = \frac{Nu Pr_a^{\frac{2}{3}}}{Re_a Pr_a} = 0,0152 Re_a^{-0,155} \quad (6.5)$$

Segundo YOO o erro é de até 3%, para valores de  $n$  variando de 0,2 a 0,9 e número de *Reynolds* entre 3000-90000.

#### 6.2.4 Correlação de HARTNETT e RAO

HARTNETT e RAO (1987) propuseram uma nova equação para produzir uma predição da transferência de calor em dutos circulares bem como para dutos retangulares, sendo mencionados erros de até  $\pm 20\%$ .

$$Nu = (0,0081 + 0,0149n) Re_a^{0,8} Pr_a^{0,4} \quad (6.6)$$

### 6.3 Comparação entre as correlações

YOO (apud CHO e HARTNETT, 1982) realizou ensaios experimentais com soluções de ácido poliacrílico(carbopol), com índice  $n$  variando de 0,24 a 0,9 e número de  $Pr$  variando de 30 a 300. YOO também valeu-se de dados experimentais de outros autores.

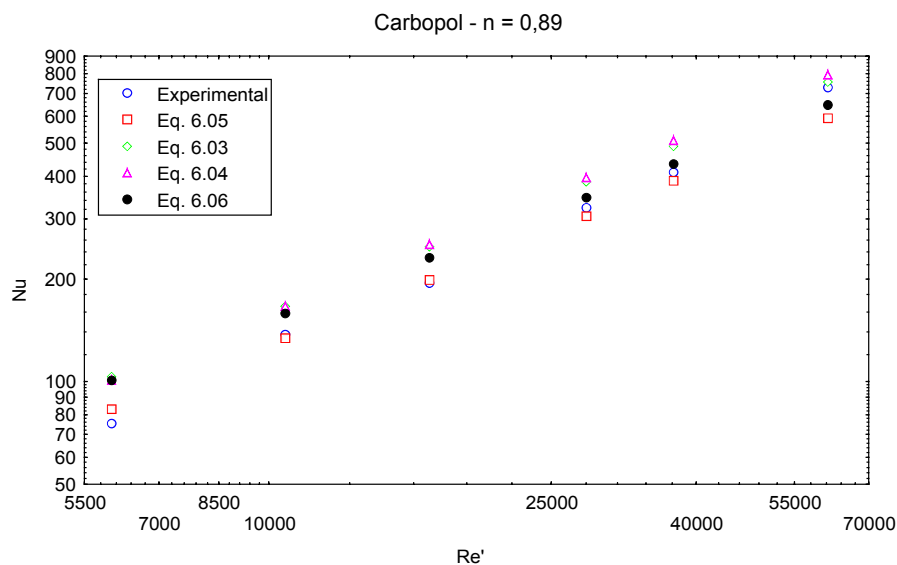


Figura 6.1 – Comparação entre os dados experimentais e as correlações para regime turbulento.

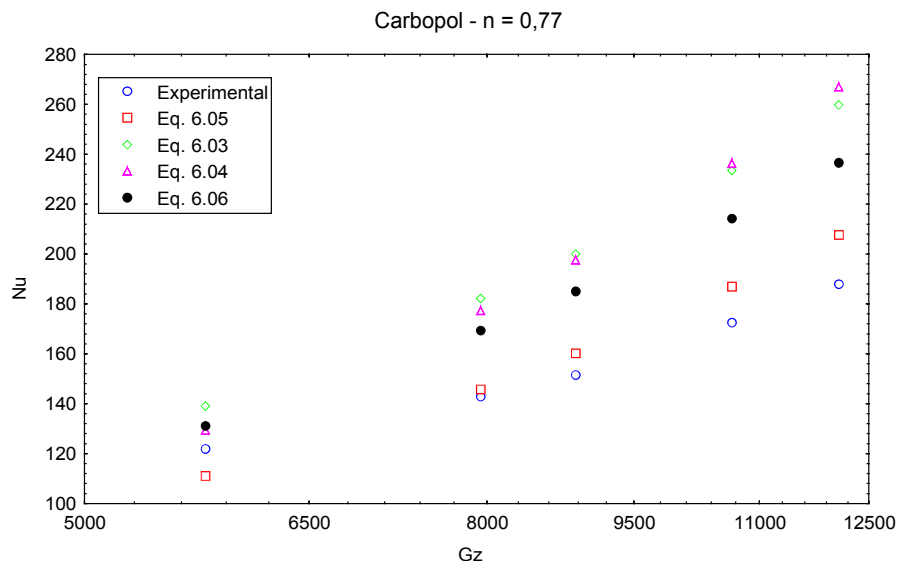


Figura 6.2 – Comparação entre os dados experimentais e as correlações para regime turbulento.

### 6.4 Discussão dos Resultados

Analisando a Figura 6.1 e 6.2, as correlações obtiveram os seguintes erros médio quadráticos.

Tabela 6.1 - Comparação entre as correlações e dados experimentais

Correlação		Erro médio quadrático		Erro literatura
METZNER-FRIEND	eq. 6.3	17,12%	22,38%	25,00%
CLAPP	eq. 6.4	18,59%	21,03%	4,50%
YOO	eq. 6.5	6,87%	8,00%	3,00%
HARTNETT e RAO	eq. 6.6	13,21%	16,14%	20,00%

Comparando com o erro descrito na literatura com os obtidos a partir das Figura 6.1 e 6.2 apenas a correlação de CLAPP apresenta uma diferença muito grande, as demais se encontram dentro do previsto.

O melhor resultado apresentado foi da correlação de YOO, por ser esta uma correlação empírica, pois esta é definida a partir de dados experimentais.

## 7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

### 7.1 Conclusões

O presente trabalho tenta determinar a faixa de aplicação das correlações para transferência de calor com suas respectivas condições de contorno valendo-se de dados experimentais da literatura como também apresenta modificações em algumas correlações.

BIRD foi o autor que mais desenvolveu correlações para transferência de calor, mesmo assim, estas não haviam sido testadas com dados experimentais. Em sua maioria as correlações propostas por BIRD apresentaram um bom desempenho.

A correlação de GRIGULL para transferência de calor em dutos circulares e termicamente desenvolvido, apresenta o maior erro em relação as demais devido a ser a única que usa um perfil linear de temperatura.

Para transferência de calor em dutos circulares com temperatura de parede constante em regime laminar e termicamente desenvolvido, até o presente trabalho só existiam soluções numéricas. Este trabalho apresenta uma proposta de modificação para correlação de KAYS, e uma solução para a correlação de BIRD.

Comparando os dados experimentais para transferência de calor em dutos circulares com temperatura de parede constante em regime laminar e termicamente em desenvolvimento com as correlações, fica clara a importância do índice de consistência do fluido na determinação de valores mais próximos dos experimentais.

A transferência de calor em dutos não-circulares, mesmo sendo dependente de duas dimensões, apresenta correlações simples e as aproximações de correlações de dutos circulares, também apresentaram bons resultados, como é visto para caso da transferência de calor em dutos retangulares com fluxo de calor constante em regime laminar e termicamente em desenvolvimento. A partir de correlações BIRD, foi possível desenvolver correlações para aquecimento em duas faces.

As correlações para transferência de calor em regime turbulento apresentam um erro compatível com o previsto na literatura, menos para o caso da correlação de CLAPP, que é uma modificação da correlação de DITTUS-BOELTER para fluidos newtonianos.

## **7.2 Sugestões para trabalhos futuros**

Realizar ensaios experimentais nas diversas situações descritas neste trabalho mas com fluidos específicos da indústria de alimentos.

Estudar-se a influência do índice de consistência em todas as correlações apresentadas, e determinar seu grau de importância.

Desenvolver novas correlações para cada condição apresentada neste trabalho, que sejam mais especificamente para transferência de calor em dutos circulares com temperatura de parede constante em regime laminar e termicamente em desenvolvimento.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASSET, C. E.; WELTY, J. R.; Non-newtonian heat transfer in the thermal entrance region of uniformly heated, horizontal pipes. **AIChE Journal**, vol. 21, nº 4, p. 699-706, 1975.

BIRD, R. B.; Zur Theorie des varmeübergangs an nicht-newtonsche flüssigkeiten bei laminarer rohrströmung. **Chemie-Ing.-Techn.**, nº 9, p. 569-572, 1959.

BIRD, R. B.; **Dinamics of polymeric liquids**. John Wiley & Sons, Inc., 1<sup>a</sup> ed., 1977.

BIRD, R. B.; **Dinamics of polymeric liquids**. John Wiley & Sons, Inc., 2<sup>a</sup> ed., 1987.

CHANG, P. Y.; CHOU, F. C.; TUNG, C. W.; Heat transfer mechanism for newtonian and non-newtonian fluids in 2:1 rectangular ducts. **International J. of Heat and Mass Transfer**, vol. 41, 3841-3856, 1998.

CHO, Y. I.; HARTNETT, J. P.; Non-newtonian fluids in circular pipe flow. **Advances in Heat Transfer**, vol. 15, 1982.

CHRISTIANSEN, E. B.; CRAIG, S. E.; Heat transfer to pseudoplastic fluids in laminar flow. **AIChE Journal**, vol. 8, nº 2, p. 154-160, 1962.

CHURCHILL, S. W.; OZOE, H.; Correlations for laminar forced convection with uniform heating in flow over a plate and in developing and fully developed flow in a tube. **Journal of Heat Transfer**, vol. 95, p. 78-84, 1973.

CHURCHILL, S. W.; USAGI, R.; A general expression for the correlation of rates of transfer and other phenomena. **AIChE Journal**, vol. 18, nº 6, p. 1121-1128, 1972.

CLAPP, R. M.; Turbulent heat transfer in pseudoplastic non-newtonian fluids. **International Communications in Heat and Mass Transfer Conf.**, p. 652-661, 1963.

DATTA, A. K.; Heat transfer in laminar flow of non-newtonian fluid in tubes. **Journal of Food Engineering**, vol. 39, p. 285-287, 1999.

DODGE, D. W.; METZNER, A. B.; Turbulent flow of non-newtonian systems. **AIChE Journal**, vol. 5, p. 189-204, 1959.

GRIGULL, U.; Wärmeübergang an nicht-newtonsche flüssigkeiten bei laminarer rohrströmung. **Chemie-Ing.-Techn.**, nº 9, p. 553-556, 1956.

HARTNETT; J. P. ; RAO, B. K.; Heat transfer and pressure drop for purely viscous non-newtonian fluids in turbulent flow through rectangular passages. **Wärme Stoffübertrag**, vol. 21, p. 261-272, 1987.

HARTNETT; J. P. ; KOSTIC M. Heat transfer to a viscoelastic fluids in laminar flow through a rectangular channel. **International Journal Heat and Mass Transfer**, vol. 28, nº 6, p. 1147-1155, 1985.

HARTNETT; J. P. ; KOSTIC M. Heat transfer to Newtonian and Non-newtonian fluids in rectangular ducts. **Advances in Heat Transfer**, vol. 19, p. 59-142, 1989.

HILDEBRAND, F. B.; **Advanced calculus for applications**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, p. 200-206, 1962.

HOLMAN, J. P.; **Heat transfer**. McGraw Hill, 6<sup>a</sup> ed., 1986.

KAYS, W. M.; Numerical solutions for laminar-flow heat transfer in circular tubes. **Transactions of the ASME**, vol. 77, p. 1265-1280, 1955.

KAYS, W. M.; **Convective heat and mass transfer**. McGraw-Hill, Inc., 1966.

KAKAÇ, S; SHAH, R. K.; AUNG, W.; **Handbook of single-phase convective heat transfer**. John Wiley & Sons, Inc., 1987.

KOZICKI, W.; TIU, C.; Improved parametric characterization of flow geometries. **Can. J. Chem. Eng.** vol. 21, p. 562-569, 1971.

JOSHI, S. D.; BEGLES, A. E. Experimental study of laminar heat transfer to in-tube flow of non-newtonian fluids. **Journal of Heat Transfer**, vol 102, p. 397-401, 1980a.

JOSHI, S. D.; BEGLES, A. E. Analytical study of laminar heat transfer to in-tube flow of non-newtonian fluids. **AIChE Symposium Series**, vol 76, nº 199, p. 270-281, 1980b.

LUNA, G. R.; TORRES, J.; Heat transfer to non-newtonian fluid foods under laminar flow conditions in horizontal tubes. **Journal of Food Science**, vol. 52, nº 4, p. 975-979, 1987.

McCABE, W. L.; SMITH, J. C.; HARRIOTT, P.; **Unit operations of chemical engineering**. 4<sup>th</sup> ed., New York, McGraw-Hill, 1985.

MATSUSHISA, S.; BIRD, R. B.; Analytical and numerical solutions for laminar flow of the non-newtonian Ellis fluid. **AIChE Journal**, vol. 11, p. 588-603, 1965.

METZNER, A. B.; VAUGHN, R. D.; HOUGHTON, G. L.; Heat transfer in non-newtonian fluids. **AIChE Journal**, vol. 3, nº 1, p. 92-100, 1957.

METZNER, A. B.; FRIEND; P. S.; Heat transfer to turbulent non-newtonian fluids. **Ind. Eng. Chem. Journal**, vol. 51, p. 879-892, 1959.

METZNER, A. B.; Heat transfer in non-newtonian fluids. **Advances in Heat Transfer**, vol. 12, p. 357-397, 1965.



MIZUSHINA, T.; ITO, R.; KURIAKE, Y.; YAHIKAZAWA, K; Boundary layer heat transfer in a circular tube to newtonian and non-newtonian fluids. **Kagaku Kogaku**, vol. 31, p. 250-255, 1967.

ÖZIŞIK, M. N.; **Transferência de calor: Um texto básico**. Editora Guanabara, 1990.

PRASAD, R. C.; Analytical solution for a double-pipe heat exchanger with non-adiabatic condition at the outer surface. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, nº 14, p. 665-672, 1987.

SCHECHTER, R. S.; On the steady flow of a non-newtonian fluid in cylinder ducts. **AIChE Journal**, vol. 7, p. 445-456, 1961.

SHAH, R. K; LONDON, A. L.; Laminar flow forced convection in ducts. **Advances in Heat Transfer**, suppl. 1, 1978.

SKELLAND, A. H. P.; **Non-newtonian flow and heat transfer**. John Wiley, Inc., 1967.