

WADAED UTURBEY DA COSTA

**MODELAGEM DE EFEITOS INTERTEMPORAIS NO FLUXO
DE POTÊNCIA ÓTIMO: ABORDAGEM DO GERENCIAMENTO
PELO LADO DA DEMANDA**

FLORIANÓPOLIS

2002

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**MODELAGEM DE EFEITOS INTERTEMPORAIS NO FLUXO
DE POTÊNCIA ÓTIMO: ABORDAGEM DO GERENCIAMENTO
PELO LADO DA DEMANDA**

Tese submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica

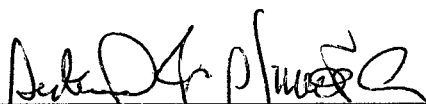
WADAED UTURBEY DA COSTA

Florianópolis, Maio de 2002.

MODELAGEM DE EFEITOS INTERTEMPORAIS NO FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO: ABORDAGEM DO GERENCIAMENTO PELO LADO DA DEMANDA

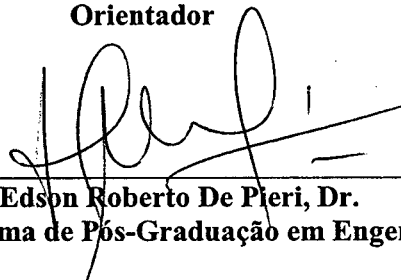
Wadaed Uturbey da Costa

‘Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Sistemas de Energia, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’



Prof. Antonio José Alves Simões Costa, Ph.D.

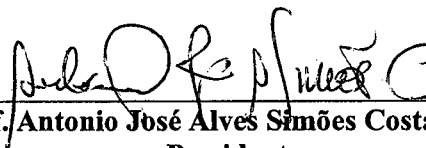
Orientador



Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr.

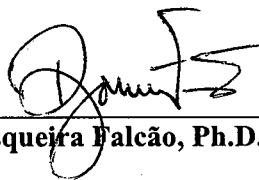
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Banca Examinadora:

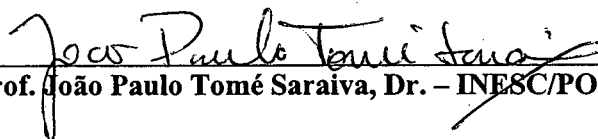


Prof. Antonio José Alves Simões Costa, Ph.D.

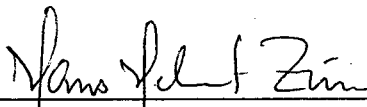
Presidente



Prof. Djalma Mosqueira Falcão, Ph.D. – COPPE/UFRJ



Prof. João Paulo Tomé Saraiva, Dr. – INESC/PORTO



Prof. Hans Helmut Zürn, Ph.D.



Prof. Edson Luiz Da Silva, Dr.Eng.

Ao Luis, companheiro de todas as horas.
Aos meus pais, Elsa e Ángel, e aos meus
irmãos Yamil e Miguel Ángel, por todo o
apoio e o amor transmitidos.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, o Prof. Antonio J. A. Simões Costa, meu profundo agradecimento pela valiosa orientação, a amizade e a confiança e apoio irrestritos desde o início desta jornada.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, pelos conhecimentos transmitidos e pelo clima de cooperação profissional.

Aos eminentes integrantes da Banca Examinadora pela revisão criteriosa e o generoso estímulo.

A todos os colegas e amigos do LABSPOT, pela acolhida e o clima de amizade e harmonia.

À Denise, Marlise e Fabrícia, e ao Richard, Daniel, Marcos, Marcelo e Wilson, pelo apoio administrativo.

A minhas queridas amigas Elizete e Andréa, por todo o carinho e apoio recebido ao longo desta caminhada.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao Brasil, terra hospitaleira e generosa.

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

MODELAGEM DE EFEITOS INTERTEMPORAIS NO FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO: ABORDAGEM DO GERENCIAMENTO PELO LADO DA DEMANDA

WADAED UTURBEY DA COSTA

Maio/ 2002

Orientador: Antonio J. A. Simões Costa, Ph.D.

Área de Concentração: Sistemas de Energia.

Palavras-chave: Gerenciamento pelo Lado da demanda, Fluxo de Potência Ótimo Dinâmico, Método de Pontos Interiores, Despacho Hidrotérmico.

Número de Páginas: 157

Esta tese trata do gerenciamento pelo lado da demanda (GLD). Considera-se a modificação do padrão de uso da energia através do gerenciamento da carga empregando sinais de preço aos quais o consumidor pode adaptar sua demanda. Formula-se um modelo que permite determinar estes sinais em um contexto de maximização do benefício social. Cargas que respondem a preço são modeladas através de funções-benefício, empregando os conceitos de elasticidade-preço e de elasticidade-preço cruzada no tempo. Este último permite representar efeitos intertemporais do comportamento do consumidor. O modelo é operacionalizado através de um fluxo de potência ótimo dinâmico (FPOD) formulado de uma forma geral, que permite incluir os fatores de intertemporalidade tanto nas restrições do problema quanto na função-objetivo. Este FPOD é implementado através do Método Primal-dual de Pontos Interiores e aplicado a sistemas termelétricos e hidrotérmicos. Propõe-se ainda uma técnica de solução do sistema linear que explora a estrutura de esparsidade através de técnicas de blocagem. Para os sistemas termelétricos, a matriz do sistema linear, quando organizada em blocos, possui estrutura igual à estrutura da matriz de admitância da rede elétrica. Já nos sistemas hidrotérmicos, esta matriz reflete a estrutura da rede elétrica juntamente com a estrutura do sistema de reservatórios em cascata. Os conceitos desenvolvidos e os algoritmos implementados são testados tendo por base subsistemas realísticos correspondentes às regiões Sul e Sudeste do sistema interconectado brasileiro.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

MODELING INTERTEMPORAL EFFECTS IN THE OPTIMAL POWER FLOW: AN APPROACH TO DEMAND SIDE MANAGEMENT.

WADAED UTURBEY DA COSTA

May/ 2002

Advisor: Antonio J. A. Simões Costa, Ph.D.

Area of concentration: Energy Systems.

Keywords: Demand Side Management, Dynamic Optimal Power Flow, Interior Point Methods, Short Term Hydrothermal Coordination.

Number of pages: 157

This thesis deals with Demand Side Management (DSM) activities through load management via price signals. An optimal power flow framework is proposed as a tool to establish the price signals according to which consumers may adapt their demand in a maximum welfare framework. Price-responsive loads are modeled through benefit functions, employing the concepts of price-elasticity and cross time price-elasticity. The latter concept allows the representation of intertemporal effects in consumer behavior. A general Dynamic Optimal Power Flow (DOPF) is proposed, which allows the representation of intertemporal factors as problem constraints, as well as in the objective function. This DOPF is applied to thermal systems as well as to hydrothermal systems via Primal-dual Interior Point methods. The proposed technique to solve the linear system of equations of the Primal-dual method exploits the topological structure of the problem. For thermal systems, the coefficient matrix of that linear system, when organized in blocks, has the structure of the electrical network bus admittance matrix. For hydrothermal systems, the blocked coefficient matrix reflects the structure of the electrical network together with the structure of the cascaded reservoirs. Realistic electrical networks corresponding to the South and Southeast Brazilian interconnected power system are used to illustrate typical results that can be obtained through the proposed methodology.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Introdução	1
	<i>O Gerenciamento pelo Lado da Demanda - GLD</i>	1
	<i>O Ambiente Atual de Aplicação do GLD</i>	3
	<i>Fatores Intertemporais da Demanda</i>	5
1.2	Revisão Bibliográfica	6
	<i>Estruturas Tarifárias: Preço Instantâneo da Energia</i>	6
	<i>Os Consumidores nos Novos Mercados</i>	7
	<i>GLD e Despacho Econômico</i>	8
1.3	O Tema de Tese	10
1.4	Contribuições da Tese	10
1.5	Estrutura da Tese	11
2	Representação de Consumidores e Produtores de Energia	13
2.1	Introdução	13
2.2	Elasticidade Preço e Elasticidade Preço Cruzada	13
2.3	Curvas de Demanda e de Oferta, Funções Benefício e Funções Custo	16
	<i>Equivalência das Representações em Termos de Funções Benefício ou Custo e Curvas de Demanda ou Oferta</i>	17
2.4	Exemplo: Curvas de Demanda ou Oferta Lineares e Funções Benefício ou Custo Quadráticas	18
2.5	Conclusões	20
3	Sinais Econômicos para o GLD	21
3.1	Introdução	21
3.2	Formulações Alternativas do Modelo de Referência	22
	<i>Minimização do Custo de Produção</i>	23
	<i>Maximização do Benefício Social</i>	24

	<i>Equivalência entre a Minimização de Custos de Produção com Restrição de Curva Inversa de Demanda e a Maximização do Benefício Social</i>	24
	<i>Sobre a Solução de PO1</i>	26
3.3	Fatores de Intertemporalidade	26
	<i>Algumas Restrições de Operação dos Participantes</i>	27
3.4	Modelo de Referência para o Gerenciamento pelo Lado da Demanda - GLD	29
3.5	Sinais Econômicos em um Modelo Descentralizado	31
3.6	Sinais Econômicos em um Modelo Centralizado	35
3.7	Interpretação dos Multiplicadores β	36
	<i>Restrição de Igualdade de Consumo, (r1)</i>	36
	<i>Restrição de Desigualdade de Consumo, (r2)</i>	38
3.8	Conclusões	40
4	GLD em Sistemas Termelétricos via Fluxo de Potência Ótimo Dinâmico	42
4.1	Introdução	42
4.2	O FPO Dinâmico num Contexto de GLD	44
	<i>O Problema Modificado para Aplicação do Método de Pontos Interiores</i>	46
	<i>Condições de Otimalidade de KKT</i>	49
4.3	Solução das Condições de Otimalidade	50
	<i>Redução do Sistema Linear de Equações</i>	52
	<i>Solução do Sistema Linear Reduzido</i>	57
4.4	GLD com Interrupção de Carga: Restrições de Consumo de Desigualdade	62
4.5	Conclusões	62
5	Coordenação Hidrotérmica e GLD	64
5.1	Introdução	64
5.2	GLD e Coordenação Hidrotérmica de Curto Prazo	66
5.2.1	Usinas Hidrelétricas	67
5.2.2	Metas Estabelecidas no Planejamento de Médio Prazo	68
	<i>Volume ao Final do Horizonte de Curto Prazo</i>	69
	<i>Função de Custo Futuro</i>	69
5.2.3	Formulação do Problema	71
	<i>Com Meta de Volume ao Final do Horizonte de Curto Prazo</i>	71

	<i>Com Função de Custo Futuro</i>	75
5.3	Solução da Formulação Através da Meta de Volume Final	76
5.3.1	Problema Modificado para Aplicação do Método de Pontos Interiores	76
5.3.2	Condições de Otimalidade	79
5.3.3	Solução das Condições de Otimalidade	81
	<i>Redução do Sistema Linear</i>	82
	<i>Solução do Sistema Reduzido</i>	86
5.4	Solução da Formulação Através da Função de Custo Futuro	91
5.5	Conclusões	92
6	Resultados	94
6.1	Introdução	94
6.2	GLD em Sistemas Termelétricos	94
6.2.1	Impacto da Elasticidade-preço da Demanda	95
	<i>Descrição dos Cenários de GLD Simulados</i>	95
	<i>Resultados Obtidos: Limites de Tomada de Carga não Ativos</i>	98
	<i>Resultados Obtidos: Limites de Tomada de Carga Ativos</i>	101
6.2.2	GLD Incluindo Cargas Sujeitas a Interrupção	104
6.3	GLD em Sistema Hidrotérmicos	108
6.3.1	GLD Visando Favorecer uma Meta Energética	108
6.3.2	Impacto da Elasticidade-preço da Demanda no Despacho Hidrotérmico Baseado na Função de Custo Futuro	119
6.4	Conclusões	125
7	Conclusões e Recomendações	126
	Referências Bibliográficas	129
A	Considerações sobre Estrutura de Dados e Esparsidade no Despacho Hidrotérmico	135
B	GLD em Sistemas Hidrotérmicos: Solução da Formulação com Função de Custo Futuro	141
C	Dados dos Sistemas Teste	149

Introdução

1.1 Introdução

O Gerenciamento pelo Lado da Demanda - GLD

Com o crescimento populacional e industrial, a demanda de energia elétrica tende a aumentar rapidamente. Porém, em muitas situações pode não ser economicamente vantajoso simplesmente adicionar capacidade de geração. A redução da carga ou a modificação do padrão de consumo é uma alternativa viável ao alcance de uma empresa para resolver seus problemas operacionais, quando defrontada com situações problemáticas. Evidentemente, esta modificação da carga deve ser realizada em acordo com os consumidores, de modo a não prejudicar seus próprios interesses. Estes esquemas de modificação do consumo são conhecidos como gerenciamento pelo lado da demanda (GLD).

O GLD, em geral, se refere a programas que visam modificar o nível de consumo através do melhoramento da eficiência energética, ou que objetivam a modificação do padrão de uso da eletricidade por intermédio do gerenciamento da carga (YGGE, 1998, BILLINTON e FOTUHI-FIRUZABAD, 1999). Muitos problemas de transmissão e a maioria dos de distribuição podem ser solucionados com um efetivo gerenciamento da demanda (FAHRIOGLU e ALVARADO, 1999).

Os programas de GLD procuram estimular o consumo nos períodos mais favoráveis e/ou reduzi-lo nos períodos mais críticos. Em muitas situações, o consumo pode ser deslocado de um período para outro em que as condições de atendimento da demanda são mais favoráveis. Na Figura 1.1 apresenta alguns dos efeitos buscados pelas concessionárias (CIGRÉ, 1991).

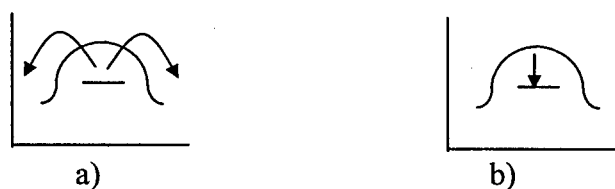


Figura 1. 1 – Modificações da curva de carga buscadas pelo GLD: deslocamento do consumo dos períodos de pico de carga para períodos de menor demanda, preenchendo os vales, b) diminuição dos picos de demanda.

Usualmente as atividades de GLD são classificadas em diretas e indiretas. No gerenciamento direto da carga, a concessionária de energia controla as cargas: ela determina quais as cargas a serem alimentadas, reduzidas ou desconectadas em períodos de tempo específicos, estando o esquema sujeito a restrições especificadas num contrato com o consumidor. Já no gerenciamento indireto da demanda, procura-se mudar os hábitos de consumo. As estratégias empregadas variam desde campanhas educacionais, passando pelo estabelecimento de padrões de eficiência para os equipamentos e vão até o emprego de sinais de preço de energia aos quais o consumidor responde. Neste último caso os consumidores tentam alocar sua demanda nos períodos menos caros, de forma a reduzir seus custos de energia.

Os objetivos estratégicos e operacionais principais procurados pelas concessionárias de energia com a aplicação de GLD são, por um lado, a postergação de instalações de geração, transmissão e/ou distribuição. Por outro lado, procura-se obter uma operação mais eficiente do sistema elétrico, como por exemplo a melhoria da confiabilidade do sistema, a melhoria do fator de potência, a redução dos requisitos de reserva girante e a redução dos custos de produção de energia (BORENSTEIN e CAMARGO, 1997).

As concessionárias de energia em diferentes países têm se interessado crescentemente pelo gerenciamento pelo lado da demanda. Parte deste interesse pode ser

atribuído ao reconhecimento de que a prática tradicional de oferecer a todos os usuários um nível alto de confiabilidade de serviço, juntamente com preços fixados com muita antecedência, só é possível com custos extremamente altos (BHATTACHARYA e BOLLEN, 1999). Algumas experiências de GLD podem ser ressaltadas (McGEE, 2000). No Brasil foi criado o Programa de Combate ao Desperdício de Energia Elétrica - PROCEL, que tem atuado principalmente em campanhas educacionais de consumidores e desenvolvido projetos de melhoria da eficiência energética, que favorecem o uso de equipamentos de eficiência elevada. O foco do GLD no Uruguai tem sido o gerenciamento da carga: controle de aquecedores de água, tarifas de tempo de uso e iluminação pública. Na África do Sul têm-se implementado programas de GLD para consumidores residenciais (aquecimento de água) e para grandes consumidores industriais (tarifas de interrupção e preços em tempo real) (ESKOM).

Tradicionalmente as atividades de GLD têm sido desenvolvidas pelas concessionárias de energia com diferentes graus de envolvimento das agências governamentais e do setor privado. Entretanto, os anos 90 tem sido cenário de grandes transformações no setor elétrico, que estão modificando o ambiente de aplicação de GLD.

O Ambiente Atual de Aplicação do GLD

Muitos países iniciaram, ou estão considerando, a reestruturação de seus setores elétricos, abrindo a indústria à competição. Está em curso um processo de desverticalização da indústria no qual a geração, a transmissão e a distribuição estão sendo colocadas sob a responsabilidade de entidades independentes. De forma semelhante, diferentes tarefas estão sendo separadas e abertas à competição (geração de potência ativa, geração de potência reativa, suprimento de perdas de transmissão, reserva girante, etc.), sempre que isto for possível ou conveniente. O acesso ao sistema de transmissão tem sido aberto a todos os participantes do mercado, condição necessária para viabilizar a transformação (ILIC e GALIANA, 1998).

As forças por trás destes movimentos são variadas, e de diferente peso relativo segundo cada caso. Em alguns países, a principal motivação foi a vigência de tarifas exageradamente altas que não refletiam os verdadeiros custos. Em outros, foi a ineficiência das empresas estatais, juntamente com a impossibilidade do estado de efetuar novos investimentos necessários na indústria, por não dispor de recursos financeiros suficientes

(BARKOVICH e HAWK, 1996, RUDNICK, 1996). Diferentemente de outras indústrias, as inovações tecnológicas não têm determinado modificações substanciais nos princípios básicos de organização do setor elétrico. Porém, elas têm possibilitado a formação de economias de pequena escala na geração, tornando portanto factível a competição na geração. Os avanços na tecnologia das comunicações e da computação tem dado o suporte necessário à organização dos novos mercados (RUDNICK, 1996).

O grau de desregulamentação e desverticalização dos serviços e o grau de competição introduzido são diferentes em cada caso. Duas filosofias distintas têm sido adotadas nesta transformação: uma que defende a operação centralizada do sistema através de um *pool* de empresas, e outra filosofia, mais liberal, que apóia o modelo de mercado operando em livre concorrência descentralizado baseado em transações bilaterais entre os participantes (HOGAN, 1992, WU *et al*, 1994, OREN *et al*, 1995, GEDRA, 1999). As implementações de mercado existentes abrangem desde uma estrutura onde toda a operação do sistema é centralizada no *pool*, até os mercados mistos *pool*/bilateral. Nestes últimos, a energia é comercializada através de contratos bilaterais de médio/longo prazos entre produtores e usuários finais ou seus agentes, e um *pool* ou mercado instantâneo interage com o mercado bilateral para proporcionar confiabilidade e viabilizar a operação do sistema de transmissão (HUNEAULT *et al*, 1999).

Um objetivo comum a todas as reformas é a obtenção de preços que reflitam a verdadeira situação do mercado a cada momento. Em todos os mercados instantâneos de energia em operação hoje, algum mecanismo de preço instantâneo único obtido de um despacho econômico foi implementado. Tanto na estrutura *pool* quanto nos mercados mistos *pool*/bilaterais, este preço instantâneo constitui a base do preço de comercialização da energia através do *pool*. Nos mercados baseados num *pool* de empresas, toda a energia se comercializa através dele. Já nos mercados mistos, a energia comercializada através do *pool* é uma fração do total, correspondendo à fração das transações de curto prazo e da energia de regulação. A maior parte da energia é comercializada em forma bilateral (HUNEAULT *et al*, 1999).

Em alguns dos mercados instantâneos de energia implementados o consumidor participa na determinação do preço no mesmo. Nestes casos, geralmente o preço é determinado através de um despacho econômico baseado nas ofertas de compra e venda efetuadas pelos participantes, tendo-se assim um leilão de energia (NORDPOOL, ALVEY, 1998). As maiores diferenças entre o despacho centralizado tradicional e o despacho de

geração competitiva dos mercados instantâneos são: a substituição de custos por ofertas de preço e a consideração da dependência da demanda com o preço. Esta dependência da demanda com o preço torna-a um possível controle no despacho econômico, podendo assim ser despachada junto com a geração (WEBER *et al.*, 1998).

É amplamente aceito que as tarifas de energia devem refletir os custos marginais reais para viabilizar os programas de GLD com base em sinais de preço, garantindo a resposta dos consumidores (BUNN, 2000, McGEE, 2000). Portanto, em um ambiente de preços instantâneos de energia, o GLD pode emergir naturalmente (McGEE 2000). ETO *et al.* (2001) declaram ainda que a operação bem sucedida de um mercado em livre concorrência é caracterizada pela existência de resposta significativa de demanda perante preço. Estes autores agregam que nos atuais mercados de energia elétrica evidencia-se pouca ou nenhuma resposta da demanda. Adicionalmente indicam que os programas de gerenciamento de demanda existentes, sejam de interrupção de carga ou de tarifação em tempo real, constituem a forma mais efetiva de implementação da resposta da demanda ao preço no curto prazo.

Fatores Intertemporais da Demanda

A demanda de energia elétrica durante um intervalo de tempo e o preço da energia no mesmo intervalo estão relacionadas: a demanda durante o intervalo diminui se o preço naquele intervalo aumenta. O efeito contrário acontece se o preço diminui, isto é, a demanda no intervalo aumenta. Além do mais, existe um efeito cruzado no tempo: a demanda durante um dado intervalo pode tender a se deslocar para intervalos de tempo de menor preço [DAVID e LI, 1993, ILIC e GALIANA, 1998, KIRSCHEN *et al.*, 2000). A adequada representação destas características de resposta são fundamentais, devido ao fato de influenciar diretamente o preço da energia. Ambos os efeitos de dependência da demanda com o preço podem ser representados através dos conceitos de elasticidade-preço e de elasticidade-preço cruzada (NICHOLSON, 1995).

1.2 Revisão Bibliográfica

Estruturas Tarifárias: Preço Instantâneo da Energia

As estruturas de tarifas dinâmicas ou diferenciadas no tempo, aquelas que são calculadas perto do tempo de aplicação, têm sido consideradas há várias décadas na literatura como sendo o sinal adequado para o gerenciamento da demanda.

SANGHVI (1989) descreve algumas experiências de aplicação de diversos tipos de tarifas dinâmicas na indústria tradicional. Considera as tarifas de interrupção, as tarifas variáveis no tempo (TOU, *time of use*), as tarifas para blocos crescentes de consumo, as tarifas em tempo real e as tarifas para desenvolvimento econômico e incentivos industriais. A resposta dos consumidores é variada. Inclui o uso temporário de geradores próprios, a modificação do padrão de consumo, a exploração das etapas de armazenamento de produção e, algumas vezes, a redução do consumo.

Em TABORS *et al.* (1989) é apresentado o resultado de uma pesquisa sobre as tarifas em tempo real utilizadas pelas concessionárias de energia na indústria tradicional. É indicado que alguns componentes do preço instantâneo *-spot price-* tem sido implementados, de diversas formas.

As tarifas em tempo real ou instantâneas, ou *spot price*, constituem a base da implementação dos mercados instantâneos. Neste sentido, uma contribuição importante é dada por SCHWEPPE *et al.* (1988), no qual é apresentada uma aplicação da teoria econômica marginalista à operação dos sistemas de potência. Na referência, caracteriza-se um mercado livre de energia baseado em preços instantâneos horários, onde se comercializa energia entre consumidores independentes e a concessionária regulamentada pelo governo, ou de propriedade deste. O preço instantâneo para comprar e vender a energia é determinado pelas condições de compra e venda nesse instante. Ele é definido em termos dos custos marginais do combustível e manutenção da geração, da capacidade de geração, das perdas na rede de transmissão e da capacidade da mesma. A definição considera também o efeito agregado do padrão de consumo e, finalmente, a reconciliação de receita.

Os Consumidores nos Novos Mercados

A participação dos consumidores nos novos mercados instantâneos de energia tem sido formalizada em muitos casos.

No mercado elétrico da Inglaterra e do País de Gales (EPEW-*Electricity Pool of England and Wales*), que é organizado segundo a filosofia de *pool*, foi adotado um mecanismo chamado *Demand-Side Bidding - DSB*. Neste esquema, os grandes consumidores oferecem a possibilidade de verem reduzidas suas cargas diretamente pelo *pool*, e recebem pagamento no caso de efetivar-se a redução (STRBAC *et al.*, 1996). Nesta referência, propõe-se considerar a redistribuição da carga em lugar de simplesmente a redução, já que não parece razoável esperar que os consumidores reduzam sua carga planejada de uma forma regular, sem ter a possibilidade de recuperá-la. A redução de carga é um recurso adequado para outro tipo de situações, tais como satisfazer as exigências de reserva girante ou participar no controle de frequência, mas não para a determinação do preço marginal do sistema. Os autores identificam a característica da redistribuição da carga com o conceito de elasticidade cruzada da demanda. Neste sentido, é apresentado um modelo para obter a geração ótima e a distribuição de carga, considerando que ela pode ser redistribuída ao longo do período e não apenas reduzida. A abordagem é a de um problema de otimização linear, onde são minimizadas as ofertas de geração e de *DSB*. A rede elétrica é representada através de uma única barra.

No Nordpool, o mercado instantâneo implementado na Noruega, Suécia, Dinamarca e Finlândia, as empresas industriais e os grandes consumidores são participantes do mercado. Eles participam da formação do preço instantâneo no *pool* através de suas ofertas de consumo em função do preço (NORDPOOL, TABORS, 1996).

Face à realidade descrita anteriormente, torna-se necessário representar o comportamento dos consumidores frente ao preço instantâneo.

Em BAUGHMAN e SIDDIQI (1991), as cargas sensíveis a preço são representadas através de *curvas inversas de demanda* -demanda em função de preço-. No artigo, são comparadas duas formas de fixação do preço instantâneo da potência reativa: uma considera fatores de penalidade e a outra utiliza um fluxo de potência ótimo com o modelo AC da rede elétrica. É considerado o efeito da elasticidade da demanda de potência ativa em relação ao preço da mesma, e também uma elasticidade cruzada, que reflete a dependência entre a demanda de potência ativa e o preço da potência reativa. A demanda

de potência reativa é representada de forma análoga. Não é modelado o efeito da dependência cruzada no tempo da demanda com o preço. É indicado que os coeficientes das curvas de demanda podem ser determinados a partir de curvas de carga disponíveis na concessionária.

Em BALDICK *et al.* (1992) o consumidor é representado através de uma *função benefício* quadrática. É proposto que os parâmetros da mesma sejam estimados empregando informação de faturamentos recentes e atualizados periodicamente.

Em SCHWEPPE *et al.* (1988) são apresentadas várias expressões para as *funções benefício* dos consumidores: quadráticas, logarítmicas, potenciais e exponenciais, juntamente com as respectivas *curvas de demanda*. Nelas, é utilizado o conceito de elasticidade preço da demanda. Para as funções quadráticas são apresentadas as expressões que consideram a elasticidade preço cruzada no tempo.

DAVID e LI (1993) empregam as *curvas de demanda* para modelar o comportamento do consumidor. São consideradas tanto a elasticidade preço da demanda como a elasticidade preço cruzada no tempo. É proposto determinar o preço instantâneo através de um fluxo de potência ótimo com o objetivo de maximizar o benefício social. O problema é resolvido em forma iterativa, atualizando a demanda em cada iteração em vista do preço obtido no fluxo de potência ótimo. São discutidos resultados para um sistema de sete barras.

WEBER *et al.* (1998) apresentam a modificação de um FPO tradicional, no qual se minimizam custos de geração, para incluir cargas dependentes do preço. A informação das mesmas é apresentada em forma de *curvas de demanda* de potência ativa e reativa. As mesmas são construídas a partir das *funções benefício* para a demanda de potência ativa e reativa. Não são considerados os efeitos de intertemporalidade.

GLD e Despacho Econômico

O gerenciamento de carga baseado em sinais de preço e o despacho econômico estão intimamente relacionados. Recentemente pesquisadores têm direcionado seus esforços na procura de modelos que permitam a representação da dependência da demanda com o preço no despacho econômico.

Em HUNEALULT *et al.* (1998) são apresentadas, de uma forma geral, três possíveis formulações do despacho econômico de geração e demanda, todas elas através de um

problema de otimização. A primeira é um problema de programação linear, no qual se utiliza a abordagem recentemente discutida de maximização do benefício social (*social welfare*), sujeito às restrições de balanço de potência e limites máximos e mínimos de geração e demanda. Não são consideradas as cargas sensíveis a preço e a rede é representada em barra única. As outras duas formulações apresentam a abordagem tradicional de minimização de custos de produção e a abordagem de maximização do benefício social, ambas com a consideração das cargas dependentes do preço. No primeiro caso, a informação sobre estas cargas é apresentada nas restrições do problema, na forma de curvas inversas de demanda. Quando se visa maximizar o benefício social, a função objetivo é a diferença entre o benefício dos consumidores e o custo de produção. A informação das cargas dependentes do preço está contida na função benefício dos consumidores. Estas duas formulações são equivalentes, já que a dependência entre demanda e preço pode ser representada tanto na forma de curva de demanda como de função benefício (WONNACOTT, 1979).

Em BAUGHMAN e SIDDIQI (1991), DAVID e LI (1993) e WEBER *et al.* (1998) é empregada a abordagem de minimização de custos, com as curvas de demanda nas restrições do problema. Já SCHWEPPE *et al.* (1988) e BALDICK *et al.* (1992) utilizam a abordagem de maximizar (minimizar) o benefício social (custo social).

Em relação às ferramentas para efetuar o despacho, tem-se que o despacho econômico clássico centra-se no balanço “instantâneo” de carga, não sendo consideradas as interações no tempo nem as restrições de transmissão. Quando são consideradas as interações no tempo surge o despacho econômico dinâmico (ROSS e KIM, 1980, WOOD, 1982) e, de forma alternativa, quando são consideradas as restrições de transmissão tem-se o fluxo de potência ótimo (FPO). Recentemente foi apresentado o fluxo de potência ótimo dinâmico (FPOD), no qual são consideradas as intertemporalidades e também as restrições de transmissão (KIMBALL, 1997, IRISARRI *et al.*, 1998).

NEJDAWI *et al.* (1998) utilizam o FPOD desenvolvido em KIMBALL (1997), para resolver o despacho quando existem cargas que respondem a preço, sendo as mesmas modeladas como restrições de energia.

O FPO foi também empregado por MAJUMDAR *et al.* (1996) e BHATTACHARYA *et al.* (2000) como ferramenta de apoio ao projeto de contratos de interrupção em programas de gerenciamento direto de carga.

1.3 O Tema de Tese

A análise precedente evidencia a urgência de se considerar, para a correta operação do mercado de energia elétrica no cenário atual, a dependência da demanda com o preço. Depreende-se do que foi exposto a premente necessidade por modelos de despacho que representem adequadamente o comportamento dos participantes do mercado, incluindo os aspectos de intertemporalidade relevantes ao sistema em estudo.

Observa-se que as atividades de GLD baseadas em sinais de preço, quando corretamente projetadas, permitem operacionalizar a resposta do consumidor. Podem ser portanto visualizadas como recursos para incrementar o envolvimento dos consumidores visando viabilizar a operação dos mercados implementados.

Este trabalho visa a determinação dos sinais econômicos adequados a serem enviados aos consumidores que participam em programas de GLD, de forma que sua demanda seja determinada com máxima eficiência econômica. O GLD é abordado como um problema de alocação de uma certa quantidade de energia demandada objetivando a operação ótima do sistema elétrico num horizonte de curto prazo.

Formula-se um modelo de referência utilizando um Fluxo de Potência Ótimo Dinâmico (FPOD), que define condições de operação ideais procuradas por qualquer tipo particular de regulamentação (PÉREZ-ARRIAGA e MESEGUER, 1997). O FPOD permite representar fatores de intertemporalidade que caracterizam a resposta do consumidor.

1.4 Contribuições da Tese

O FPOD como proposto em KIMBALL (1997) permite representar restrições intertemporais, definidas como restrições sobre variáveis do problema correspondentes a dois ou mais intervalos de tempo. Tais restrições relacionam variáveis associadas a diferentes intervalos do horizonte de operação considerado. Por outro lado, deve-se observar que determinadas estruturas da função-objetivo podem produzir o mesmo efeito. Em outras palavras: variáveis correspondentes a intervalos diferentes do horizonte de operação podem ser relacionadas através de restrições intertemporais e/ou através da própria função-objetivo.

Neste trabalho, o FPOD é generalizado para permitir representar efeitos intertemporais através da função-objetivo do problema de otimização. Esta capacidade é de particular importância devido a que permite modelar adequadamente o comportamento do consumidor por intermédio da sistematização do tratamento da elasticidade-preço cruzada da demanda.

A abordagem desenvolvida é aplicada a sistemas termelétricos e hidrotérmicos. Existem contribuições na literatura em relação à representação de cargas que dependem de preço no despacho econômico com geração térmica (DAVID e LI, 1993, WEBER *et al.*, 1999, BOMPARD *et al.*, 2000). Porém, as representações adotadas são limitadas devido ao fato de não considerar a elasticidade-preço cruzada no tempo ou não enfatizá-la sistemática e metodologicamente. Já a representação de demanda que depende de preço no despacho hidrotérmico de curto prazo não é considerada na literatura.

A resolução do problema de otimização é viabilizada aplicando o Método Primal-dual de Pontos Interiores. Explora-se a estrutura topológica do problema, empregando uma formulação particular do sistema linear a resolver em cada iteração. As variáveis são organizadas em blocos, de forma que a matriz do sistema apresenta a estrutura da matriz de admitâncias da rede elétrica. Esta abordagem foi proposta por CLEMENTS (1998) para o FPO na sua formulação clássica (um intervalo de despacho), sendo neste trabalho estendida para o FPOD e em particular para o despacho hidrotérmico.

1.5 Estrutura da Tese

O Capítulo 2 considera a representação de consumidores e produtores de energia através de curvas de demanda e oferta, além de funções benefício e custo. São definidos os conceitos de elasticidade-preço e de elasticidade-preço cruzada utilizados nas representações mencionadas.

O Capítulo 3 apresenta o modelo conceitual que permite identificar os sinais de preço para o GLD, que viabilizam as condições de operação desejadas, ideais, de um sistema elétrico. Este modelo é formulado como um problema de otimização com o objetivo de maximizar o benefício social líquido. Diversos multiplicadores de Lagrange envolvidos são interpretados num contexto de GLD.

No Capítulo 4 formula-se o modelo descrito anteriormente aplicando o Método Primal-dual de Pontos Interiores, para sistemas termelétricos. Apresenta-se o FPOD

generalizado para a inclusão de efeitos de acoplamentos intertemporais na função-objetivo do problema.

O Capítulo 5 considera a implementação do modelo conceitual de GLD em sistemas com geração de origem térmica e hidráulica. O despacho hidrotérmico é resolvido de uma forma global, sem efetuar separação dos problemas térmico e hidráulico, empregando o FPOD.

Os resultados obtidos mediante a aplicação da metodologia proposta de GLD em sistemas teste de pequeno porte são apresentados no Capítulo 6.

Finalmente, o Capítulo 7 apresenta as conclusões gerais e recomendações para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Representação de Consumidores e Produtores de Energia

2.1 Introdução

Em todo mercado, o preço é o foco das interações entre compradores e vendedores. Assim, o comportamento de ambos os agentes frente às variações de preço deve ser adequadamente representado. Na teoria microeconômica, este comportamento é caracterizado através das curvas de demanda e oferta ou, de forma equivalente, com funções benefício e custo, respectivamente. Neste capítulo, são inicialmente definidos dois conceitos importantes para a descrição da demanda e da oferta: o conceito de elasticidade preço e o de elasticidade preço cruzada. São consideradas ambas as representações dos participantes acima mencionadas. Finalmente, como exemplo, são apresentadas as funções a serem utilizadas nos capítulos posteriores. Outras possíveis expressões para as funções benefício ou custo e as respectivas curvas de demanda ou oferta podem ser encontradas em SCHWEPPE *et al.* (1988).

2.2 Elasticidade-Preço e Elasticidade-Preço Cruzada

De uma forma geral, a elasticidade entre duas grandezas A e B é definida em microeconomia (NICHOLSON, 1995), como o quociente entre a mudança percentual de A e a respectiva mudança percentual de B . Assim, definem-se a elasticidade preço da demanda de energia elétrica e também a elasticidade preço da oferta de energia, como:

$$\varepsilon_d (\varepsilon_g) = \frac{\text{Variação percentual da quantidade demandada (ofertada)}}{\text{Variação percentual no preço da quantidade demandada (ofertada)}} \quad (2.1)$$

De outra forma:

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta p_d / p_{do}}{\Delta \rho / \rho_o} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta p_g / p_{go}}{\Delta \rho / \rho_o} \quad (2.3)$$

onde:

ε_d : elasticidade-preço da demanda;

ε_g : elasticidade-preço da oferta;

p_d : quantidade de energia demandada;

p_g : quantidade de energia ofertada;

ρ : preço da energia;

p_{do} : demanda no instante em que é medida a elasticidade;

p_{go} : oferta no instante em que é medida a elasticidade;

ρ_o : preço da energia quando a demanda é p_{do} e a oferta é p_{go} .

De forma semelhante, a relação entre a demanda ou a oferta de um bem ou serviço e o preço de outro bem ou serviço é descrita através do conceito de elasticidade cruzada (NICHOLSON, 1995). Assim:

$$\varepsilon_{cr} = \frac{\text{Variação percentual da demanda (oferta) de um bem ou serviço}}{\text{Variação percentual no preço de outro bem ou serviço}} \quad (2.4)$$

Este conceito é aplicável nos mercados elétricos, quando se considera que as demandas ou ofertas em intervalos de despacho diferentes podem ser interpretadas como produtos distintos. Desta forma, pode-se definir para a energia elétrica a elasticidade preço da demanda cruzada no tempo e a elasticidade-preço da oferta cruzada no tempo.

$$\varepsilon_{cr,d} = \frac{\Delta p_d(t_i) / p_{do}}{\Delta \rho(t_j) / \rho_o} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{cr,g} = \frac{\Delta p_g(t_i)/p_{go}}{\Delta \rho(t_j)/\rho_o} \quad (2.6)$$

onde:

$\varepsilon_{cr,d}$: elasticidade-preço cruzada da demanda;

$\varepsilon_{cr,g}$: elasticidade-preço cruzada da oferta;

$p_d(t)$: demanda no intervalo t ;

$p_g(t)$: oferta no intervalo t ;

$\rho(t)$: preço da energia no intervalo t ;

p_{do} : demanda no instante em que é medida a elasticidade;

p_{go} : oferta no instante em que é medida a elasticidade;

ρ_o : preço da energia quando a demanda é p_{do} e a oferta é p_{go} .

Os coeficientes de elasticidade acima definidos dependem de vários fatores e são, em geral, variáveis no tempo. Para a maioria dos bens de consumo, o aumento do preço gera uma diminuição da demanda. Assim, a elasticidade-preço da demanda é um número negativo. Este é o comportamento da demanda de energia elétrica. Já o comportamento da oferta é diferente. Espera-se que, para preços menores a quantidade ofertada seja menor, desta forma a elasticidade-preço da oferta resulta positiva.

Quando considerada a elasticidade cruzada, os comportamentos são distintos aos anteriores. A demanda durante um intervalo de despacho tende a diminuir quando o preço em outro intervalo diminui, já que a mesma tenta se trasladar para o intervalo de menor preço. A elasticidade-preço cruzada da demanda é então um número positivo. Para a oferta o fenômeno é o contrário: o produtor prefere produzir nos períodos de maior preço. A produção num intervalo tende a aumentar quando o preço em outro intervalo diminui, já que a produção procura se trasladar para o intervalo de maior preço. Conclui-se que a elasticidade-preço cruzada da oferta é um número negativo.

A elasticidade-preço reflete a habilidade ou a possibilidade do consumidor ou produtor de se adaptar às mudanças de preço. Diversos fatores influenciam o padrão de elasticidade dos participantes. Por exemplo, existem processos industriais que permitem a armazenagem do produto em etapas intermediárias de fabricação para a utilização em tempos posteriores. Este é o caso típico da indústria petroquímica, da manufatura de aço e daqueles processos de fabricação que empregam várias linhas de produção

interdependentes. Por outro lado, dentro de qualquer processo industrial ou edifício comercial, existem equipamentos que podem ser desligados temporariamente pelo consumidor sem afetar a atividade. Recentemente, consumidores de diversos ramos da indústria têm adotado sistemas de co-geração de energia próprios (COGERAÇÃO, 2002). Estes sistemas se referem à produção simultânea de energia elétrica e térmica. O excesso de calor proveniente da queima do combustível, para produzir o vapor de acionamento da turbina, é aproveitado para a utilização em sistemas de aquecimento, resfriamento ou no próprio processo industrial, em lugar de ser despejado na atmosfera, ou em rios ou lagos. Durante os períodos de funcionamento da co-geração, os consumidores se tornam parcial ou totalmente autônomos em relação à energia elétrica, podendo inclusive exportar o excesso de produção para a rede pública.

2.3 Curvas de Demanda e de Oferta, Funções Benefício e Funções Custo

As curvas de demanda e de oferta expressam o preço em função da quantidade demandada e ofertada, respectivamente.

$$p = p(p_d) \quad (2.7)$$

$$p = p(p_g) \quad (2.8)$$

As relações inversas são as chamadas curvas inversas de demanda e de oferta (NICHOLSON, 1995, WONNACOTT, 1979).

$$p_d = p_d(p) \quad (2.9)$$

$$p_g = p_g(p) \quad (2.10)$$

As curvas acima mencionadas descrevem o comportamento dos participantes através dos coeficientes de elasticidade definidos anteriormente.

O conceito subjacente ao de demanda é o de utilidade marginal, ou benefício marginal (WONNACOTT, 1979). A utilidade marginal é definida, de uma forma geral, como a satisfação que é obtida pelo consumo de uma unidade adicional de um bem ou serviço. Assim, o preço, que é a ordenada na curva de demanda, indica a utilidade marginal. De forma análoga, a ordenada na curva de oferta (preço) indica o custo marginal.

As considerações anteriores sugerem uma outra forma de representar a dependência das cargas com o preço, que emprega as funções benefício do consumidor e as funções

custo do produtor. As primeiras indicam o benefício ou utilidade total que recebe o consumidor da atividade desenvolvida em função da demanda. As funções custo representam os custos de produção em função da quantidade ofertada. Tem-se assim:

$$B = B(p_d) \quad (2.11)$$

$$C = C(p_g) \quad (2.12)$$

onde B é a função benefício do consumidor e C é a função custo do produtor.

Equivalência das Representações em Termos de Função Benefício ou Custo e Curva de Demanda ou Oferta

Ambas as representações, curvas de demanda ou oferta e função benefício ou custo, são equivalentes quando se supõe que os consumidores ou produtores, em forma individual, determinam seu consumo de uma forma ótima. Os consumidores determinam sua demanda resolvendo o problema de maximizar a diferença entre o benefício e seus custos de energia:

$$\text{Maximizar} \quad B(p_d) - \rho \cdot p_d \quad (2.13)$$

Para os produtores, a oferta é determinada considerando que devem maximizar a diferença entre o obtido como resultado das vendas e seus custos de produção:

$$\text{Maximizar} \quad \rho \cdot p_g - C(p_g) \quad (2.14)$$

Da aplicação das condições de otimalidade de primeira ordem aos problemas de otimização (2.13) e (2.14) são obtidas as curvas de demanda e de oferta, respectivamente. As mencionadas condições, apresentadas em (2.15) e (2.16), estabelecem que o preço da energia é igual ao benefício marginal e ao custo marginal, respectivamente. Observa-se que estas equações exprimem preço em função da demanda e da oferta, sendo, por definição, as curvas de demanda e de oferta respectivamente.

$$\nabla_{p_d} B(p_d) = \rho \quad (2.15)$$

$$\nabla_{p_g} C(p_g) = \rho \quad (2.16)$$

2.4 Exemplo: Curvas de Demanda ou Oferta Lineares e Funções Benefício ou Custo Quadráticas

As funções benefício e custo buscam representar o benefício global ou o custo global das atividades envolvidas. O modelo matemático empregado deve descrever adequadamente os processos. Em geral, as curvas inversas de demanda são decrescentes, já que refletem a *lei das utilidades marginais decrescentes* (WONNACOTT, 1979): o consumo dos primeiros bens gera maior satisfação que o consumo dos seguintes. Para alguns bens estas curvas podem ser crescentes no início, mas em seguida sempre decrescerão.

As curvas inversas de oferta são crescentes, pois refletem a *lei dos retornos decrescentes* (WONNACOTT, 1979): se mais de um fator de produção é empregado enquanto os outros são mantidos constantes, o produto marginal desse fator deve diminuir. De forma semelhante ao caso da demanda, para alguns bens esta curva pode ser inicialmente decrescente, mas logo depois sempre será crescente.

Para a demanda e oferta de energia elétrica, é razoável considerar que as curvas de demanda são decrescentes sempre e as curvas de oferta sempre crescentes.

Segue-se, de (2.15) e (2.16) que funções benefício ou custo quadráticas correspondem a curvas inversas de demanda ou oferta lineares.

Dadas as características acima mencionadas, podem-se escrever as relações abaixo, para cada consumidor e para cada produtor, para um dado horizonte de despacho que é dividido em n_T intervalos menores:

Consumidor:

Curva inversa de demanda:

$$\mathbf{p}_d = \mathbf{p}_{do} + \mathbf{S}_d \cdot \rho \quad (2.17)$$

Função benefício:

$$B(\mathbf{p}_d) = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{p}_d - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{p}_d^T \cdot \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{p}_d \quad (2.18)$$

Produtor:

Curva inversa de oferta:

$$\mathbf{p}_g = \mathbf{p}_{go} + \mathbf{S}_g \cdot \rho \quad (2.19)$$

Função custo:

$$C(\mathbf{p}_g) = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{p}_g + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{p}_g^T \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{p}_g \quad (2.20)$$

onde:

- n_T : número de intervalos de tempo de despacho;
- ρ : vetor dos preços da energia em cada intervalo de despacho, $(n_T \times 1)$;
- $\mathbf{p}_d(\mathbf{p}_g)$: vetor da demanda (oferta) em cada intervalo de despacho, $(n_T \times 1)$;
- $\mathbf{p}_{do}(\mathbf{p}_{go})$: demanda (oferta) que não responde a preço, $(n_T \times 1)$;
- $\mathbf{S}_d(\mathbf{S}_g)$: matriz de sensibilidade da demanda(oferta) em relação ao preço, $(n_T \times n_T)$.
Seus elementos são proporcionais à elasticidade da demanda (oferta): os elementos diagonais estão relacionados com a elasticidade preço e os elementos fora da diagonal com a elasticidade preço cruzada no tempo;
- $\mathbf{B}_2(\mathbf{C}_2)$: matrizes de coeficientes quadráticos, $(n_T \times n_T)$;
- $\mathbf{B}_1(\mathbf{C}_1)$: vetores de coeficientes lineares, $(n_T \times 1)$.

As expressões apresentadas a seguir caracterizam a relação entre curva de demanda ou oferta e função benefício ou custo. As mesmas podem ser verificadas a partir de (2.15) e (2.16).

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2 &= -\mathbf{S}_d^{-1} \\ \mathbf{B}_1 &= \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{p}_{do} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2 &= \mathbf{S}_g^{-1} \\ \mathbf{C}_1 &= -\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{p}_{go} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Deve-se observar que, quando a elasticidade-preço cruzada da demanda e da oferta não são significativas, as matrizes S_d , S_g , B_2 , e C_2 são diagonais. Desta forma, as equações (2.17) até (2.20) são separáveis para cada intervalo de tempo.

2.5 Conclusões

Neste capítulo, foram apresentadas duas formas equivalentes de representação dos participantes do mercado. Estas são, por um lado, as curvas de demanda e de oferta e, por outro lado, as funções benefício dos consumidores e as funções custo dos produtores. Ambas as formas utilizam os conceitos de elasticidade-preço e de elasticidade-preço cruzada para descrever a relação entre quantidade e preço.

Finalmente, foi apresentado o caso em que a demanda e a oferta de energia é expressa através de curvas de demanda e de oferta lineares e funções benefício e custo quadráticas.

Capítulo 3

Sinais Econômicos para o GLD

3.1 Introdução

O problema central abordado neste trabalho é a determinação dos sinais econômicos adequados a serem enviados aos consumidores que participam em programas de GLD, de forma que sua demanda seja determinada com máxima eficiência econômica. Visualiza-se o GLD como um problema de alocação de uma certa quantidade de energia demandada visando a operação ótima do sistema elétrico num horizonte de curto prazo.

A metodologia adotada é a utilizada em SCHWEPPE *et al.* (1998), PÉREZ-ARRIAGA (1994) e PÉREZ-ARRIAGA e MESEGUER (1997). Formula-se um modelo de referência para a indústria elétrica que permite definir as condições de operação ideais para atingir a máxima eficiência econômica, que deveria ser procurada por qualquer tipo particular de regulamentação de um setor elétrico. Neste modelo de referência as decisões de consumo e de produção são tomadas de forma centralizada, visando o benefício social líquido associado ao consumo e à produção de energia elétrica.

Posteriormente, para um dado paradigma de regulamentação particular do setor, devem-se identificar os sinais econômicos que geram um comportamento coincidente com as condições ótimas de referência. Consideram-se duas estruturas para o setor. Em primeiro lugar, um modelo de mercado descentralizado em condições de livre concorrência para oferta e demanda, com remuneração em base a preços, no qual devem ser definidos os sinais a serem enviados tanto aos consumidores quanto aos produtores. Como um segundo

tipo de aplicação, considera-se o paradigma baseado no suprimento a mínimo custo social, no qual as decisões de geração são centralizadas enquanto que as de demanda são descentralizadas, de forma que devem ser determinados os sinais para os consumidores independentes. Esta última poderia ser a situação de uma concessionária que compra energia no mercado atacadista e/ou gera sua própria energia, e procura avaliar o gerenciamento de seus consumidores.

Deve-se observar que as diferentes formas de representação de produtores e consumidores, apresentadas no Capítulo 2, geram formulações alternativas do problema de referência. Estas são, porém, equivalentes. Este capítulo inicia mostrando, como exemplo, a equivalência entre a formulação do problema de referência baseada em curvas de demanda dos consumidores e a baseada em funções benefício.

Neste trabalho são considerados os efeitos da rede elétrica na operação do sistema elétrico, de forma que a ferramenta empregada para efetuar o despacho econômico na implementação do modelo de referência é o fluxo de potência ótimo (FPO). Portanto, o FPO deve ser formulado para realizar conjuntamente o despacho da potência demandada e da potência gerada.

3.2 Formulações Alternativas do Modelo de Referência

As representações da informação da dependência da demanda com o preço apresentadas no capítulo anterior, curvas de demanda e funções benefício do consumidor, dão lugar a formulações alternativas do modelo de referência.

Quando se empregam curvas inversas de demanda, observa-se que estas representam restrições adicionais ao FPO clássico com o objetivo de minimizar custos de produção. Esta é a abordagem utilizada em (DAVID e LI, 1993, BAUGHMAN e SIDDIQUI, 1997 e WEBER *et al*, 1998).

Já no caso das funções benefício do consumidor, a informação da dependência da demanda com o preço inclui-se na função objetivo do FPO. A abordagem é a de maximizar o benefício social (*social welfare*), ou, de forma equivalente, minimizar o custo social (SCHWEPPE *et al*, 1988, BALDICK *et al*, 1992 e NEJDAMI *et al*, 1998).

Minimização do Custo de Produção

O problema de otimização, denotado por **PO1**, que visa minimizar o custo de produção de energia elétrica respeitando as curvas inversas de demanda dos consumidores é apresentado a seguir.

Problema PO1:

$$\text{Minimizar} \quad C(p_g) \quad (3.1)$$

sujeito a:

$$g(x, p_g, p_d) = 0$$

$$f(x, p_g, p_d) \leq 0$$

e:

$$p_d = p_d(\rho)$$

$$\underline{p}_d \leq p_d \leq \overline{p}_d$$

onde:

- g : restrições de igualdade de balanço de potência;
- f : restrições de desigualdade de limites operacionais (fluxos nas linhas, tensão nas barras, potência máxima e mínima de geração, etc);
- x : estados do sistema: tensões complexas nas barras;
- p_g : potências geradas, ativas e reativas;
- p_d : potências demandadas, ativa e reativa;
- ρ : preço da energia, que inclui tanto o preço da potência ativa quanto o da reativa;
- $\underline{p}_d, \overline{p}_d$: limites inferiores e superiores de demanda.

Maximização do Benefício Social

No problema denotado **PO2** apresentado em (3.2), a informação de dependência da carga com o preço é dada na forma de função benefício, sendo portanto incluída na função objetivo. Visa-se a minimização do custo social líquido de suprimento de energia (que equivale a maximizar o benefício social líquido) definido como a diferença entre os custos de produção de energia, $C(p_g)$, e o benefício dos consumidores, $BC(p_d)$.

Problema PO2:

$$\text{Minimizar} \quad C(p_g) - BC(p_d) \quad (3.2)$$

sujeito a:

$$g(x, p_g, p_d) = 0$$

$$f(x, p_g, p_d) \leq 0$$

Equivalência entre a Minimização de Custos de Produção com Restrição de Curva Inversa de Demanda e a Maximização do Benefício Social

O despacho de demanda e geração através da minimização de custos, problema **PO1**, e o despacho através da minimização do custo social, problema **PO2**, são equivalentes no sentido que definem o mesmo ponto ótimo de operação.

Para verificar esta equivalência deve-se observar as condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) em ambos os casos. Apresentam-se a seguir as funções Lagrangeanas e as respectivas condições de otimalidade de ambos os problemas.

Para PO1:

$$L = C(p_g) + \lambda^T \cdot g(x, p_g, p_d) + \pi^T \cdot f(x, p_g, p_d) \quad (3.3)$$

KKT:

$$\nabla_x L = \lambda^T \cdot \nabla_x g(x, p_g, p_d) + \pi^T \cdot \nabla_x f(x, p_g, p_d) = 0 \quad (3.4-a)$$

$$\nabla_{p_g} L = \nabla_{p_g} C - \lambda_g + \pi_g = 0 \quad (3.4-b)$$

$$\nabla_{\lambda} L = g(x, p_g, p_d) = 0 \quad (3.4-c)$$

$$\pi^T \cdot f(x, p_g, p_d) = 0 \quad \pi_i \geq 0 \quad (3.4-d)$$

$$p_d = p_d(\rho) \quad (3.4-e)$$

$$P_d^m \leq p_d \leq P_d^M \quad (3.4-f)$$

Para PO2:

$$L = C(p_g) - BC(p_d) + \lambda^T \cdot g(x, p_g, p_d) + \pi^T \cdot f(x, p_g, p_d) \quad (3.5)$$

KKT:

$$\nabla_x L = \lambda^T \cdot \nabla_x g(x, p_g, p_d) + \pi^T \cdot \nabla_x f(x, p_g, p_d) = 0 \quad (3.6-a)$$

$$\nabla_{p_g} L = \nabla_{p_g} C - \lambda_g + \pi_g = 0 \quad (3.6-b)$$

$$\nabla_{p_d} L = -\nabla_{p_d} B + \lambda_d + \pi_d = 0 \quad (3.6-c)$$

$$\nabla_{\lambda} L = g(x, p_g) = 0 \quad (3.6-d)$$

$$\pi^T \cdot f(x, p_g, p_d) = 0 \quad \pi_i \geq 0 \quad (3.6-e)$$

Os sistemas de equações (3.4) e (3.6) diferem em que (3.4-e) e (3.4-f) -curva inversa de demanda e restrição de canalização de demanda- estão presentes somente em PO1. Eles também diferem em que (3.6-c) -gradiente em relação à demanda- está presente apenas em PO2. Por outro lado, a curva de demanda está determinada pela solução da maximização do benefício obtido pelo consumidor no cenário no qual atua, que neste caso, corresponde ao seguinte problema:

$$\text{Minimizar} \quad \rho_d \cdot p_d - BC(p_d) \quad (3.7)$$

Sujeito a:

$$\underline{p}_d \leq p_d \leq \bar{p}_d$$

Assim, a curva de demanda do consumidor neste mercado é dada por (3.8):

$$\nabla_{p_d} BC = \rho_d + \pi_d \quad (3.8)$$

Observa-se que esta curva de demanda é igual à condição de otimalidade em **PO2** em relação à demanda, dada por (3.6-c), quando o preço da demanda coincide com multiplicador de Lagrange das restrições de balanço de carga em **PO2**, $\rho_d = \lambda$.

Deve-se observar que (3.6-c) expressa preço em função de demanda, sendo que para obter a curva inversa de demanda (3.4-e) é suficiente expressar a demanda p_d como função do preço.

Para finalizar, a restrição (3.4-f) de **PO1** pode ser considerada como incluída em $f(x, p_g, p_d)$ no problema **PO2**. Assim, as formulações são equivalentes.

Sobre a Solução de PO1

A solução do problema **PO1** pode ser abordada de duas formas. A expressão da demanda $p_d(\rho)$ pode ser substituída nas funções g e f , desta forma é possível utilizar algoritmos de FPO disponíveis. Este procedimento é adotado em WEBER *et al.* (1998). Uma outra abordagem é a de utilizar um algoritmo iterativo. Neste caso, um FPO com carga fixa é resolvido a cada iteração para determinar o preço. Posteriormente, a demanda é atualizada em função do preço obtido, e torna-se a resolver o FPO com a nova demanda. Esta metodologia é utilizada em DAVID e LI (1993).

3.3 Fatores de Intertemporalidade

Quando o benefício do consumidor e os custos de produção em um intervalo de despacho podem ser expressos em função da demanda e da oferta no mesmo intervalo, ambos **PO1** e **PO2** podem ser resolvidos para cada intervalo do horizonte de operação de forma independente, da mesma forma que o despacho econômico clássico. Porém, nos sistemas de potência existem fatores de intertemporalidade que afetam a operação do mesmo (KIMBALL, 1997, ILIC e GALIANA, 1998). Um exemplo destes é o efeito da elasticidade-preço cruzada da demanda e da oferta, definidas no capítulo anterior. Nestes casos, o despacho deve ser resolvido globalmente para um horizonte de tempo maior, no qual as interações no tempo estejam bem definidas.

Quando a elasticidade-preço cruzada da demanda e/ou da oferta são significativas, as funções benefício e/ou custo não são separáveis para cada intervalo de despacho, de

forma que as condições de otimalidade de primeira ordem de KKT não podem ser formuladas para cada intervalo de forma independente. Esta característica dificulta a resolução das condições de KKT, como é estudado no próximo capítulo.

Algumas Restrições de Operação dos Participantes

Por outro lado, certas limitações ou condições de operação dos consumidores e dos produtores geram também vínculos entre os intervalos usuais de despacho e devem portanto ser estabelecidas de forma global para o horizonte de operação considerado. Estas são denominadas como “restrições intertemporais”, sendo algumas descritas a seguir.

- **Restrições de consumo:** Frequentemente, os consumidores devem produzir uma quantidade de produto especificado ao longo de um dado horizonte de tempo, sendo que a alocação da demanda nos intervalos específicos do horizonte não está inicialmente definida. Pode-se pensar em um programa de GLD que vise otimizar a alocação deste consumo beneficiando ao sistema elétrico de forma global. Esta situação pode-se representar através de uma restrição de igualdade de energia (3.9), que indica a quantidade de energia e_{Di} a ser consumida pelo participante i ao longo do horizonte de tempo:

$$\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_{i,t}} = e_{Di} \quad i = 1, \dots, n_D \quad (3.9)$$

O horizonte de tempo é dividido em n_T intervalos de despacho, $p_{d_{i,t}}$ é a potência consumida pelo participante i no intervalo t , τ_t é a duração do intervalo t e n_D é o número de consumidores com carga sujeita a GLD.

Em algumas situações, um consumidor pode oferecer a possibilidade de que parte de sua carga seja reduzida diretamente pela empresa fornecedora de energia ou, sob a nova estrutura do setor, pelo operador do sistema. Este é o chamado gerenciamento direto da carga, no qual os consumidores concordam em terem reduzida sua carga em troca de vantagens tarifárias. O instante no qual é feita a redução é determinado pela concessionária, devendo ser anunciado com uma antecedência especificada no

contrato. O valor da interrupção atribuído pela concessionária depende da antecedência com a qual deve anunciá-la. Quanto maior a antecedência, menor será o valor da interrupção para a concessionária e o custo para o consumidor também será menor.

Esta situação pode ser modelada através de restrições de energia do tipo restrição de desigualdade unilateral:

$$\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_{i,t}} \leq \bar{e}_{D_i} \quad i = 1, \dots, n_D \quad (3.10)$$

Observa-se que a expressão (3.9) indica que toda a energia e_{D_i} deve ser consumida durante o período n_T . Já a expressão (3.10) estabelece apenas um limite superior para o consumo, sendo que este último pode ser inferior a \bar{e}_{D_i} .

- **Restrições de tomada de carga dos turbogeradores:** Esta condição responde a limitações físicas dos geradores, pelas quais a potência gerada pode aumentar ou diminuir entre intervalos sucessivos em taxas máximas limitadas. Assim:

$$\underline{\Delta p}_g \leq p_{g_{i,t+1}} - p_{g_{i,t}} \leq \overline{\Delta p}_g \quad i = 1, \dots, n_G \quad (3.11)$$

onde $p_{g_{i,t}}$ é a potência gerada pelo gerador i no intervalo t e n_G é o número de geradores. O valor dos limites depende da condição de operação do turbogerador: partida, parada ou operação normal.

- **Contratos de compra de combustível (take-or-pay contracts):** Nestes contratos a empresa geradora compromete-se a comprar uma quantidade mínima de combustível durante um período de tempo (WOOD e WOLLENBERG, 1996). Caso não cumpra o compromisso, deve pagar uma quantidade mínima especificada no contrato. Esta condição pode também ser modelada como uma restrição de energia:

$$\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{g_{i,t}} \geq \underline{e}_{G_i} \quad i = 1, \dots, n_G \quad (3.12)$$

onde $p_{g_{i,t}}$ é a potência gerada pelo participante i no intervalo t .

3.4 Modelo de Referência para o Gerenciamento pelo Lado da Demanda - GLD

Nesta seção é apresentado um modelo de referência que permite obter as condições de otimalidade a serem emuladas sob diferentes paradigmas reais de regulamentação. Formula-se um FPO com o objetivo de maximizar o benefício social líquido associado à produção e consumo de energia elétrica ao longo de um horizonte de tempo especificado, dividido em n_T intervalos de despacho de duração τ_t .

Função objetivo a minimizar:

$$\text{Min} \quad C_T(p_g) - BC_T(p_d) \quad (3.13)$$

sendo C_T o custo total de produção dos n_G geradores ao longo do horizonte considerado, dado por (3.14), e BC_T o benefício total decorrente do consumo dos n_D consumidores, indicado em (3.15).

$$C_T(p_g) = \sum_{j=1}^{n_G} C_{T_j}(p_{g_j}) \quad (3.14)$$

$$BC_T(p_d) = \sum_{j=1}^{n_D} BC_{T_j}(p_{d_j}) \quad (3.15)$$

As funções individuais de custo e benefício, $C_{T_j}(p_{g_j})$ e $BC_{T_j}(p_{d_j})$, são em geral não-separáveis no tempo e foram apresentadas no Capítulo 2.

Restrições do modelo de referência:

(1) Balanço de potência em cada intervalo de despacho t :

$$g_t(x, p_{g_t}, p_{d_t}) = 0, \quad t = 1, \dots, n_T \quad (3.16)$$

(2) Limites de geração em cada intervalo de despacho t :

$$\underline{p}_{g_t} \leq p_{g_t} \leq \bar{p}_{g_t}, \quad t = 1, \dots, n_T \quad (3.17)$$

(3) Limites de demanda em cada intervalo de despacho t :

$$\underline{p}_{d_t} \leq p_{d_t} \leq \bar{p}_{d_t}, \quad t = 1, \dots, n_T \quad (3.18)$$

(4) Limites de fluxos nas linhas de transmissão em cada intervalo de despacho t :

$$\underline{l}_{f_t} \leq l_t(x) \leq \overline{l}_{f_t}, \quad t = 1, \dots, n_T \quad (3.19)$$

(5) As restrições de operação intertemporais para os geradores podem ser expressas de uma forma bastante geral através de dois tipos de restrições de energia:

$$\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{g_{i,t}} = e_{G_i}, \quad i = 1, \dots, n_{G_1} \quad (3.20)$$

$$\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{g_{i,t}} \leq \bar{e}_{G_i}, \quad i = 1, \dots, n_{G_2} \quad (3.21)$$

onde n_{G_1} e n_{G_2} representam o número de geradores em cada caso.

(6) De forma semelhante, tem-se as restrições intertemporais de consumo:

$$\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_{i,t}} = e_{D_i}, \quad i = 1, \dots, n_{D_1} \quad (3.22)$$

$$\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_{i,t}} \leq \bar{e}_{D_i}, \quad i = 1, \dots, n_{D_2} \quad (3.23)$$

onde n_{D_1} e n_{D_2} representam o número de consumidores em cada caso.

A função Lagrangeana para o modelo de referência é apresentada em (3.24):

$$\begin{aligned} L = & C_T(p_g) - BC_T(p_d) + \sum_{t=1}^{n_T} \lambda_t^T \cdot g_t(x_t, p_{g_t}, p_{d_t}) + \\ & + \sum_{t=1}^{n_T} \pi_{g_t}^T \cdot (p_{g_t} - l_{g_t}) + \sum_{t=1}^{n_T} \pi_{d_t}^T \cdot (p_{d_t} - l_{d_t}) + \sum_{t=1}^{n_T} \pi_{f_t}^T \cdot (l_t - l_{f_t}) \\ & + \sum_{i=1}^{n_{G_1}} \alpha_{1_i} \cdot \left(e_{G_i} - \sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{g_{i,t}} \right) + \sum_{i=1}^{n_{G_2}} \alpha_{2_i} \cdot \left(\bar{e}_{G_i} - \sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{g_{i,t}} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^{n_{D_1}} \beta_{1_i} \cdot \left(e_{D_i} - \sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_{i,t}} \right) + \sum_{i=1}^{n_{D_2}} \beta_{2_i} \cdot \left(\bar{e}_{D_i} - \sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_{i,t}} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde:

λ_t : multiplicadores de Lagrange das restrições de balanço de potência no intervalo t ;

$\pi_{g_t}, \pi_{d_t}, \pi_{f_t}$: multiplicadores de Lagrange das restrições de limites máximo e mínimo para geração, demanda e fluxos nas linhas no intervalo t .

mínimo para: geração, demanda e fluxos nas linhas, no intervalo t ;

$l_{g_t}, l_{d_t}, l_{f_t}$: limites de geração, demanda e fluxos nas linhas no intervalo t ;

β_1, β_2 : multiplicadores de Lagrange das restrições intertemporais de consumo;

α_1, α_2 : multiplicadores de Lagrange das restrições intertemporais dos geradores;

As condições necessárias de otimalidade em relação às potências demandadas e geradas são apresentadas em (3.25) e (3.26) respectivamente.

$$\nabla_{p_{d_t}} L = -\nabla_{p_{d_t}} BC_T + \lambda_{d_t} + \pi_{d_t} - \tau_t \cdot \beta_1 - \tau_t \cdot \beta_2 = 0 \quad (3.25)$$

$$\nabla_{p_{g_t}} L = \nabla_{p_{g_t}} C_T - \lambda_{g_t} + \pi_{g_t} - \tau_t \cdot \alpha_1 - \tau_t \cdot \alpha_2 = 0 \quad (3.26)$$

onde λ_{d_t} são os multiplicadores de Lagrange da restrição de balanço de potência que correspondem às barras de demanda e λ_{g_t} os relacionados às barras de geração.

3.5 Sinais Econômicos em um Modelo Descentralizado

Um mercado que opera em condições de concorrência perfeita está constituído por um grande número de consumidores e produtores. Nestes mercados, nenhum dos participantes tem a possibilidade de influenciar o preço, de forma que o mesmo é determinado por forças impessoais. Os consumidores e os produtores se comportam como tomadores de preço (*price-takers*) e se autodespacham baseados no preço. Neste caso é necessário determinar os preços adequados a serem aplicados aos consumidores (preço marginal da energia consumida) e aos produtores (preço marginal da energia vendida) de forma que, no contexto global, o mercado opere no ponto ótimo definido pelo modelo de referência.

Supõe-se que o problema de otimização que formularia um consumidor independente genérico é a maximização do benefício individual líquido, apresentado em

(3.27). O preço marginal da energia consumida em cada intervalo ρ_{d_t} , desconhecido por enquanto, é fixado externamente. Deve-se observar que as restrições de operação consideradas são as mesmas que no problema de referência.

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{t=1}^{n_T} (\rho_{d_t} \cdot p_{d_{i,t}}) - BC_{T_i}(p_{d_i}) \quad (3.27)$$

sujeito a:

$$\underline{p}_{d_{i,t}} \leq p_{d_{i,t}} \leq \bar{p}_{d_{i,t}} \quad t = 1, \dots, n_T$$

$$\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_{i,t}} = e_{D_i}$$

$$\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_{i,t}} \leq \bar{e}_{D_i}$$

O Lagrangeano e as condições de otimalidade em relação à demanda estão dadas, respectivamente, por (3.28) e (3.29):

$$\begin{aligned} L = & \sum_{t=1}^{n_T} (\rho_{d_t} \cdot p_{d_{i,t}}) - BC_{T_i}(p_{d_{i,t}}) + \sum_{t=1}^{n_T} \pi_{d_t}^T \cdot (p_{d_{i,t}} - l_{d_{i,t}}) + \\ & + \beta_{1_i} \cdot \left(e_{D_i} - \sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_{i,t}} \right) + \beta_{2_i} \cdot \left(\bar{e}_{D_i} - \sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_{i,t}} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\nabla_{p_{d_{i,t}}} L = \rho_{d_t} - \nabla_{p_{d_{i,t}}} BC_{T_i} + \pi_{d_{i,t}} - \tau_t \cdot \beta_{1_i} - \tau_t \cdot \beta_{2_i} = 0 \quad (3.29)$$

De forma semelhante, o problema de otimização que formularia um produtor independente genérico é a maximização do benefício individual líquido, apresentado em (3.30). O preço marginal da energia vendida em cada intervalo ρ_{g_t} , é também desconhecido. As restrições de operação consideradas são as mesmas que no problema de referência.

$$\text{Minimizar} \quad C_{Ti}(p_{g_i}) - \sum_{t=1}^{n_T} (\rho_{g_t} \cdot p_{g_{i,t}}) \quad (3.30)$$

Sujeito a:

$$\underline{p}_{g_{i,t}} \leq p_{g_{i,t}} \leq \bar{p}_{g_{i,t}} \quad t = 1, \dots, n_T$$

$$\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{g_{i,t}} = e_{G_i}$$

$$\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{g_{i,t}} \leq \bar{e}_{G_i}$$

A função Lagrangeana e as condições de otimalidade são apresentados em (3.31) e (3.32), respectivamente.

$$\begin{aligned} L = & C_{Ti}(p_{g_{i,t}}) - \sum_{t=1}^{n_T} (\rho_{g_t} \cdot p_{g_{i,t}}) + \sum_{t=1}^{n_T} \pi_{f_t}^T \cdot (p_{g_{i,t}} - l_{g_t}) \\ & + \alpha_{1_i} \cdot \left(e_{G_i} - \sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{g_{i,t}} \right) + \alpha_{2_i} \cdot \left(\bar{e}_{G_i} - \sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{g_{i,t}} \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\nabla_{p_{g_{i,t}}} L = \nabla_{p_{g_{i,t}}} C_{Ti} - \rho_{g_t} + \pi_{g_{i,t}} - \tau_t \cdot \alpha_{1_i} - \tau_t \cdot \alpha_{2_i} = 0 \quad (3.32)$$

As condições de otimalidade (3.25) e (3.26) devem ser comparadas com as (3.29) e (3.32), respectivamente. Observa-se que estas são iguais quando o multiplicador de Lagrange λ_t é igual ao preço que os consumidores pagam pela energia consumida e também ao preço da energia vendida pelos produtores, como segue-se:

$$\lambda_t = \rho_{d_t} = \rho_{g_t} \quad (3.33)$$

Portanto, o sinal econômico adequado tanto para os consumidores quanto para os produtores num mercado operando em condições de livre concorrência é o multiplicador de Lagrange das equações de balanço de potência do FPO.

Em algumas situações as restrições do problema individual do consumidor e/ou do gerador podem não coincidir com as do modelo de referência.

Considera-se primeiramente, como exemplo, o caso em que alguma restrição dos geradores está presente no problema de referência mas não está presente no problema individual. Esta situação corresponde a restrições externas ao gerador individual, que poderiam ser impostas, por exemplo, pelo organismo regulador com objetivos diversos. Seja o caso em que o limite de geração em cada intervalo de tempo é imposto externamente. Assim, para o problema de referência a condição de otimalidade é dada por (3.34) e a condição para o gerador individual é modificada segundo (3.35).

$$\nabla_{p_{g_t}} L = \nabla_{p_{g_t}} C_T - \lambda_{g_t} + \pi_{g_t} - \tau_t \cdot \alpha_1 - \tau_t \cdot \alpha_2 = 0 \quad (3.34)$$

$$\nabla_{p_{g_{i,t}}} L = \nabla_{p_{g_{i,t}}} C_{T_i} - \rho_{g_{i,t}} - \tau_t \cdot \alpha_{1_i} - \tau_t \cdot \alpha_{2_i} = 0 \quad (3.35)$$

Nesta situação, para reproduzir as condições de referência, o preço da energia vendida pelo gerador i deve verificar (3.36). Observa-se que, quando os limites de geração no modelo de referência estiverem ativos, o multiplicador de Lagrange da restrição de balanço de potência deve ser corrigido, de forma a incentivar adequadamente ao gerador individual para conseguir reproduzir as condições de otimalidade de referência.

$$\rho_{g_{i,t}} = \lambda_{g_{i,t}} - \pi_{g_{i,t}} \quad (3.36)$$

Uma situação diferente acontece quando se trata de restrições que fazem parte do problema do gerador individual mas não integram o problema de referência. Este pode ser o caso de uma restrição de consumo de combustível derivada de um contrato, que pode ser representado por uma restrição do tipo (3.12) ou (3.21). Neste caso as condições de otimalidade para o problema de referência, dadas por (3.37), não incluem o termo derivado desta restrição intertemporal. As condições de otimalidade para o problema individual são dadas por (3.38).

$$\nabla_{p_{g_t}} L = \nabla_{p_{g_t}} C_T - \lambda_{g_t} + \pi_{g_t} - \tau_t \cdot \alpha_1 = 0 \quad (3.37)$$

$$\nabla_{p_{g_{i,t}}} L = \nabla_{p_{g_{i,t}}} C_{T_i} - \rho_{g_{i,t}} + \pi_{g_{i,t}} - \tau_t \cdot \alpha_{1_i} - \tau_t \cdot \alpha_{2_i} = 0 \quad (3.38)$$

Assim, o preço é dado por (3.39). Observa-se que aparece um termo corretor. Porém, neste caso não são necessários ajustes no sinal de preço, sendo que é o próprio gerador individual que se deve adaptar às condições de referência ótimas.

$$\rho_{g_{i,t}} + \tau_t \cdot \alpha_2 = \lambda_{g_{i,t}} \quad (3.39)$$

3.6 Sinais Econômicos em um Modelo Centralizado

Considera-se nesta seção que o setor opera segundo um modelo no qual as decisões de geração são tomadas de forma centralizada, com o objetivo de minimizar o custo de suprimento de energia. Supõe-se que os consumidores são independentes, e devem receber os sinais adequados para que a operação global reproduza as condições de otimalidade de referência. Assim, o problema centralizado é formulado em (3.40).

$$\text{Minimizar} \quad C_T(p_g) \quad (3.40)$$

Sujeito a:

$$g_t(x, p_{g_t}, p_{d_t}) = 0, \quad t = 1, \dots, n_T$$

$$\underline{p}_{g_t} \leq p_{g_t} \leq \bar{p}_{g_t} \quad t = 1, \dots, n_T$$

$$\underline{l}_t \leq l_t(x) \leq \bar{l}_t \quad t = 1, \dots, n_T$$

$$\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{g_{i,t}} = e_{G_i} \quad i = 1, \dots, n_{G_1}$$

$$\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{g_{i,t}} \leq \bar{e}_{G_i} \quad i = 1, \dots, n_{G_2}$$

O consumidor efetua suas decisões de consumo segundo o mesmo critério que no mercado descentralizado, pelo que se aplica a formulação (3.27). É fácil verificar que também nesta situação o sinal de preço adequado para o consumidor é o multiplicador de Lagrange das restrições de balanço de potência.

3.7 Interpretação dos Multiplicadores β

É interessante efetuar uma interpretação mais detalhada dos multiplicadores β das restrições de consumo, de forma a identificar claramente os sinais econômicos adequados à implementação das atividades de GLD. Para isto, será definido nesta seção um problema de referência simplificado, no qual os limites operacionais de geração e demanda de cada intervalo não são representados. Seja o problema de referência (3.41), no qual o consumidor possui um consumo fixo p_L e um consumo p_d sujeito a um programa de GLD. Este último deve verificar as restrições (r1) ou (r2), de forma não-simultânea.

$$\text{Minimizar} \quad C_T(p_g) - BC_T(p_d) \quad (3.41)$$

Sujeito a:

$$p_{L_t} + p_{d_t} - p_{g_t} = 0 \quad t = 1, \dots, n_T$$

$$(r1) \quad \sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_t} = e_D$$

$$(r2) \quad \sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_t} \leq \bar{e}_D$$

Restrição de Igualdade de Consumo, (r1)

Considera-se primeiramente que a restrição de igualdade é aplicável. Seja e_D^* a energia contratada inicialmente no programa de GLD, e o sistema operando no ponto ótimo dado pelas condições de otimalidade de referência. Supõe-se que o contrato é modificado de forma que e_D^* varia para o valor $e_D^* + \Delta e_D$. Os demais parâmetros são mantidos fixos, inclusive a carga fixa p_L . Na nova situação o despacho ótimo variará, passará do valor p_d^* correspondente ao contrato inicial para o valor $p_d^* + \Delta p_d$ e a geração passará de p_g^* para $p_g^* + \Delta p_g$.

A função Lagrangeana e as condições de otimalidade são apresentadas em (3.42) e (3.43) respectivamente.

$$L = C_T(p_g) - BC_T(p_d) + \sum_{t=1}^{n_T} \lambda_t^T \cdot (p_{L_t} + p_{d_t} - p_{g_t}) + \beta_1 \cdot \left(e_D - \sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_t} \right) \quad (3.42)$$

$$\nabla_{p_{g_t}} L = \nabla_{p_{g_t}} C_T - \lambda_t = 0 \quad (3.43-a)$$

$$\nabla_{p_{d_t}} L = -\nabla_{p_{d_t}} BC_T + \lambda_t - \tau_t \cdot \beta_1 = 0 \quad (3.43-b)$$

$$\nabla_{\lambda_t} L = p_{L_t} + p_{d_t} - p_{g_t} = 0 \quad (3.43-c)$$

$$\nabla_{\beta_1} L = e_D - \sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_t} = 0 \quad (3.43-d)$$

Das condições de otimalidade (3.43-c) e (3.43-d) tem-se:

$$\Delta p_{d_t} = \Delta p_{g_t} \quad (3.44)$$

$$\Delta e_D = \tau^T \cdot \Delta p_d \quad (3.45)$$

Determina-se a variação do custo social total empregando uma aproximação de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \Delta CS_T = \Delta(C_T - BC_T) &= CS_T(p_g^* + \Delta p_g, p_d^* + \Delta p_d) - CS_T(p_g^*, p_d^*) \approx \\ &\approx \nabla C_T(p_g^*) \cdot \Delta p_g - \nabla BC_T(p_d^*) \cdot \Delta p_d \end{aligned} \quad (3.46)$$

Aplicando as expressões (3.43-a) e (3.43-b) juntamente com as (3.44) e (3.45) obtém-se:

$$\frac{\Delta CS_T}{\Delta e_D} \approx \beta_1 \quad (3.47)$$

Desta forma, pode-se interpretar o multiplicador de Lagrange β_1 como o incremento marginal do custo social líquido decorrente de uma variação da energia gerenciada, mantendo os demais parâmetros constantes. Portanto, este multiplicador pode ser empregado para deduzir a quantidade adequada de energia a ser gerenciada e para identificar os consumidores mais vantajosos para inclusão em contratos de GLD.

Restrição de Desigualdade de Consumo, (r2)

A restrição de consumo de desigualdade permite considerar contratos de GLD com interrupção de carga. Distingue-se neste caso duas situações, segundo a restrição esteja ou não ativa. Para efetuar a análise, considera-se o problema de maximização do benefício do consumidor, (3.48), no qual o limite de energia $\bar{e}_{D,c}$ pode ser diferente em relação ao do modelo de referência (3.41) \bar{e}_D . Esta suposição é razoável, já que no problema individual o limite pode ser interpretado como a capacidade máxima de consumo instalada e no modelo de referência como a energia gerenciada no contrato.

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{t=1}^{n_T} p_t \cdot p_{d_t} - BC_T(p_d) \quad (3.48)$$

Sujeito a:

$$p_{L_t} + p_{d_t} - p_{g_t} = 0 \quad t = 1, \dots, n_T$$

$$(r2) \quad \sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \cdot p_{d_t} \leq \bar{e}_{D,c}$$

Se a restrição de consumo não está ativa, o multiplicador β é nulo. Nestas condições, uma pequena variação da energia gerenciada produzirá uma variação nula no custo social líquido, não gerando nenhum ganho e também nenhuma perda global, no custo social líquido do modelo de referência em relação ao ponto ótimo anterior. Deve-se entretanto observar que o consumidor é forçado a consumir uma quantidade de energia menor que \bar{e}_D , e isto representa um custo para ele. Este custo deve ser considerado na função objetivo do problema de referência na forma de um custo de não-suprimento de energia.

Com a inclusão de um termo que reflita o custo de não-atendimento da demanda na função custo, a interpretação do multiplicador de Lagrange λ da condição de balanço de

potência, da Seção 3.5 continuaria sendo válida, sendo que o valor de λ incluiria o efeito do custo marginal de não-suprimento de energia.

Já no caso em que a restrição de consumo encontra-se ativa, a interpretação do multiplicador β_2 e a determinação do sinal de preço para o consumidor exige maior cuidado. Para esclarecer este ponto, considera-se que (3.49) representa a condição de otimalidade de referência em relação à potência p_d , e (3.50) a mesma condição para o problema individual. Os multiplicadores de Lagrange $\beta_{2,r}$ e $\beta_{2,c}$ são em geral diferentes, devido ao fato de que os limites das restrições (r_2) são diferentes (no ponto ótimo o valor de p_d deve ser o mesmo em ambos os problemas). O limite desta restrição no problema do consumidor refere-se à capacidade de consumo instalada ou contratada com a concessionária, enquanto que o limite no modelo de referência obedece a alguma restrição que se deseja forçar.

$$\nabla_{p_d} L = -\nabla_{p_d} BC_T + \lambda_t - \tau_t \beta_{2,r} = 0 \quad (3.49)$$

$$\nabla_{p_d} L = -\nabla_{p_d} BC_T + \rho_t - \tau_t \beta_{2,c} = 0 \quad (3.50)$$

Para reproduzir as condições de otimalidade de referência deve-se verificar a condição (3.51):

$$\rho_t = \lambda_t - \tau_t \cdot \beta_r + \tau_t \cdot \beta_c = \lambda_t - \tau_t \cdot (\beta_r - \beta_c) \quad (3.51)$$

Como em geral a energia gerenciada \bar{e}_D é menor que o limite $\bar{e}_{D,c}$ no problema individual, tem-se:

$$\beta_r \geq \beta_c \Rightarrow \rho_t \leq \lambda_t \quad (3.52)$$

Quando em (3.52) se verifica a desigualdade, o consumidor está sendo forçado a um consumo menor que sua capacidade instalada, de forma que deve existir um sinal de preço para compensa-lo. Em outras palavras, o consumidor deve ser compensado através de uma tarifa reduzida adequada. Este poderia ser o caso de um racionamento de energia

imposto pelo regulador do setor, ou também pela concessionária de energia em alguma situação de emergência na operação.

Por outro lado, quando em (3.52) a igualdade é verificada o consumo é o máximo possível, e o sinal de preço não deve incluir nenhuma compensação. Neste caso o multiplicador β poderia ser interpretado como um indicador para o sistema sobre a conveniência de que o consumidor aumente sua capacidade instalada. Este multiplicador poderia ser utilizado como incentivo para propiciar o aumento de capacidade instalada de consumo, sendo que deveriam ser considerados custos e benefícios de longo prazo.

3.8 Conclusões

Adota-se neste capítulo uma metodologia que permite determinar sinais econômicos que viabilizem condições de operação desejadas, ideais, de um sistema elétrico. Considera-se que as condições de otimalidade ideais para a operação podem ser determinadas a partir de um modelo de referência que tem como objetivo a maximização do benefício social líquido, no qual todas as decisões de consumo e geração estão centralizadas. Para um sistema real específico que segue algum paradigma particular de regulamentação, estas condições ideais devem ser emuladas. Com essa finalidade, determinam-se os sinais econômicos adequados através da imposição da igualdade das condições de otimalidade do modelo de referência com as do sistema real.

Discutem-se duas situações. Por um lado, para um mercado operando em livre concorrência, determinam-se os sinais de preço para os consumidores e para os produtores de forma que, atuando estes com a finalidade de maximizar o próprio benefício líquido individual, seja emulado o modelo de referência. A segunda situação considerada corresponde a um modelo no qual as decisões de geração são tomadas de forma centralizada, com o objetivo de minimizar o custo de suprimento de energia, e os consumidores são independentes. Neste caso determinam-se sinais para os consumidores presumindo-se também que estes visam maximizar seu benefício líquido.

Os sinais econômicos são definidos em função dos multiplicadores de Lagrange dos problemas de otimização formulados. Este capítulo também estabelece interpretações econômicas num contexto de GLD para os multiplicadores de Lagrange associados às

restrições de consumo. Estes multiplicadores auxiliam de formas diversas no estabelecimento dos contratos de gerenciamento de demanda: são indicadores da quantidade adequada de energia a ser gerenciada, permitem identificar os consumidores mais vantajosos a serem contratados em programas de GLD, possibilitam estabelecer incentivos para forçar níveis de consumo que atendam situações de emergência, etc.

GLD em Sistemas Termelétricos via Fluxo de Potência Ótimo Dinâmico

4.1 Introdução

Este capítulo aborda a implementação do modelo que serve como referência para a elaboração e avaliação dos programas de GLD, considerando o caso particular de sistemas com geração de origem térmica.

A ferramenta computacional utilizada é o Fluxo de Potência Ótimo (FPO), empregado tanto na operação quanto no planejamento dos sistemas de potência. Basicamente, o FPO é definido como um problema de otimização não linear e estático. Visa minimizar uma função objetivo através do ajuste de variáveis de controle, verificando o cumprimento de restrições físicas e operacionais. Algumas das funções-objetivo mais utilizadas são o custo total de geração, as perdas de potência ativa e as “perdas” de potência reativa na rede. A representação do comportamento do consumidor não tem sido em geral abordada, com exceção dos programas de gerenciamento de demanda com controle direto da carga que consideram custos de não-suprimento (WEBER *et al.*, 1999). Entretanto, os novos paradigmas de organização do setor com a implementação dos mercados instantâneos requerem a representação de cargas que dependem do preço. HUNEAULT *et al.* (1999), WEBER *et al.*, (1999) e UTURBEY e SIMÕES COSTA, (2002) tem considerado implementações do FPO que objetivam minimizar o custo social líquido, modelando a demanda que responde a preço.

O FPO na sua forma clássica é um problema estático, no sentido que busca uma solução ótima para uma dada condição de operação, sem considerar possíveis interações das variáveis de decisão ao longo de um horizonte de tempo. Porém, em certas situações práticas a abordagem estática não permite uma modelagem adequada do problema. Neste sentido, em KIMBALL (1997) e IRISARRI *et al.* (1998) foi proposto um FPO dinâmico (FPOD), que permite modelar as interações temporais nas restrições do problema. Assim, o FPOD pode ser descrito como um FPO com restrições intertemporais.

A abordagem do GLD determina que devam ser considerados conjuntamente a representação de cargas que dependem de preço com as interações das variáveis de controle ao longo do horizonte de tempo. Além disso, alguns dos fatores de intertemporalidade modelados são representados na função-objetivo, de forma que esta é não-separável para os subintervalos de despacho. É portanto necessária uma formulação mais geral do FPOD (UTURBEY e SIMÕES COSTA, 2002).

Em relação à metodologia de solução, os Métodos de Pontos Interiores tem sido empregados na otimização de sistemas de potência desde finais da década dos 80. Seu atrativo reside, principalmente, nas características de robustez numérica e de rápida convergência que possuem. A versão Primal-Dual do método é a mais amplamente empregada, pelo fato de, em problemas de programação linear e quadrática, apresentar um desempenho computacional superior a outros algoritmos de pontos interiores (ARBEL, 1993, GRANVILLE, 1994).

No procedimento adotado para a solução do sistema linear, deduz-se uma estrutura de dados que considera a matriz organizada em blocos. Mostra-se que esta matriz apresenta o mesmo padrão de elementos não nulos que a matriz de admitâncias nodais. Esta característica foi apresentada em CLEMENTS (1998) para o FPO estático, nas suas versões DC e AC. Nesta tese, generaliza-se para o FPOD aplicado ao despacho térmico apresentado neste capítulo, e também ao despacho hidrotérmico de curto prazo estudado no capítulo seguinte.

4.2 O FPO Dinâmico num Contexto de GLD

Pressupõe-se a seguinte situação genérica: uma percentagem da carga total do sistema responde a preço e deve ser alocada de forma economicamente ótima ao longo de um horizonte de tempo especificado. O restante da carga total será chamada “carga fixa” do sistema, por não depender do preço. Assim, deve-se resolver o despacho ao longo do horizonte de tempo (de tipicamente alguns dias), que é para isto dividido em intervalos de despacho.

Considera-se o caso particular em que a rede elétrica é representada através de seu modelo linearizado. Sob esta hipótese, geração e demanda correspondem apenas às potências ativas respectivas, e os fluxos nas linhas de transmissão são funções lineares dos ângulos das tensões nas barras.

O problema é formulado em (4.1). Objetiva-se a minimização do custo social líquido, determinado pela diferença entre o custo total de produção de energia e o benefício total decorrente do consumo. As expressões consideradas para as funções de custo e benefício são apresentadas no Capítulo 2. A restrição (4.1-b) representa o balanço de potência que deve ser verificada para cada intervalo de despacho. As restrições (4.1-c) até (4.1-e) correspondem aos limites operacionais que devem também ser verificados para cada intervalo. A restrição (4.1-d) pode se referir a uma restrição imposta tanto pelo consumidor quanto pelo próprio sistema. Na relação (4.1-f) levam-se em conta as restrições de limite de tomada de carga dos geradores, pelo fato de serem restrições de operação relevantes em sistemas térmicos. Finalmente, (4.1-g) é uma restrição intertemporal de energia que representa a condição de alocação da demanda gerenciada no horizonte de tempo. Deve-se notar que os consumidores em cada barra do sistema são modelados em forma agregada.

$$\text{Minimizar} \quad C_T(\mathbf{p}_g) - BC_T(\mathbf{p}_d) \quad (4.1-a)$$

sujeito a:

$$\mathbf{p}_{L_t} + \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{p}_{d_t} - \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{p}_{g_t} + \mathbf{B} \cdot \theta_t = 0 \quad (4.1-b)$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{g_t} \leq \mathbf{p}_{g_t} \leq \overline{\mathbf{p}}_{g_t} \quad (4.1-c)$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{d_t} \leq \mathbf{p}_{d_t} \leq \overline{\mathbf{p}}_{d_t} \quad (4.1-d)$$

$$\underline{\mathbf{l}}_{L_t} \leq \Gamma \mathbf{A} \theta_t \leq \overline{\mathbf{l}}_{L_t} \quad (4.1-e)$$

$t = 1 \dots n_T$

$$\underline{\Delta \mathbf{p}} \leq \mathbf{G} \cdot \mathbf{p}_g \leq \overline{\Delta \mathbf{p}} \quad (4.1-f)$$

$$\mathbf{P}_d \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_D \quad (4.1-g)$$

onde:

n_T : número de intervalos de tempo para o despacho;

n_B : número de barras do sistema;

n_G : número de geradores do sistema;

n_D : número de cargas que respondem a preço;

n_L : número de linhas de transmissão do sistema;

$\boldsymbol{\tau}$: vetor ($n_T \times 1$) de duração dos intervalos de despacho;

θ_t : vetor ($n_B \times 1$) de estados no intervalo t : ângulos da tensão nas barras;

\mathbf{p}_{g_t} : vetor ($n_G \times 1$) das potências geradas no intervalo t ;

\mathbf{p}_{d_t} : vetor ($n_D \times 1$) das cargas dependentes de preço no intervalo t ;

\mathbf{p}_{L_t} : vetor ($n_B \times 1$) das cargas fixas no intervalo t ;

$\underline{\mathbf{l}}_{L_t}, \overline{\mathbf{l}}_{L_t}$: vetores ($n_L \times 1$) dos limites de fluxos nas linhas no intervalo t ;

$\underline{\mathbf{p}}_{g_t}, \overline{\mathbf{p}}_{g_t}$: vetores ($n_G \times 1$) dos limites de geração no intervalo t ;

$\underline{\mathbf{p}}_{d_t}, \overline{\mathbf{p}}_{d_t}$: vetores ($n_D \times 1$) dos limites de carga que responde a preço no intervalo t ;

- \mathbf{p}_g : vetor ($n_G \cdot n_T \times 1$) de todas as potências de geração;
- \mathbf{p}_d : vetor ($n_D \cdot n_T \times 1$) de todas as cargas que respondem a preço;
- \mathbf{e}_D : vetor ($n_D \times 1$) das energias a serem gerenciadas;
- \mathbf{P}_d : matriz ($n_D \times n_T$) das cargas que respondem a preço, correspondente ao vetor \mathbf{p}_d escrito como matriz;
- \mathbf{A}_g : matriz ($n_B \times n_G$) de incidência barra-geradores;
- \mathbf{A}_d : matriz ($n_B \times n_D$) de incidência barra-carga que responde a preço;
- Γ : matriz ($n_L \times n_L$) diagonal de admitâncias das linhas;
- \mathbf{A} : matriz ($n_L \times n_B$) de incidência elemento-barra;
- \mathbf{B} : matriz de admitâncias de barras;
- \mathbf{G} : matriz ($n_G \cdot (n_T-1) \times (n_G \cdot n_T)$) que determina a variação de geração entre cada intervalo:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{n_G} & \mathbf{I}_{n_G} & \mathbf{O}_{n_G} & \cdots & \mathbf{O}_{n_G} \\ \mathbf{O}_{n_G} & -\mathbf{I}_{n_G} & \mathbf{I}_{n_G} & \cdots & \mathbf{O}_{n_G} \\ & & -\mathbf{I}_{n_G} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{O}_{n_G} & & \cdots & -\mathbf{I}_{n_G} & \mathbf{I}_{n_G} \end{bmatrix}$$

onde: \mathbf{I}_{n_G} é a matriz identidade de dimensão n_G e \mathbf{O}_{n_G} é a matriz nula de dimensão ($n_G \times n_G$).

O Problema Modificado para Aplicação do Método de Pontos Interiores

Considera-se a seguir a modificação do problema (4.1) para a aplicação do algoritmo Primal-Dual de Pontos Interiores (EL BAKRY, 1996, CASTRONUOVO, 2001). O primeiro passo é a transformação das restrições de desigualdade em restrições de igualdade utilizando variáveis de folga não-negativas, apresentado em (4.2).

$$\text{Minimizar} \quad C_T(\mathbf{p}_g) - BC_T(\mathbf{p}_d) \quad (4.2-a)$$

sujeito a:

$$\mathbf{p}_{L_t} + \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{p}_{d_t} - \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{p}_{g_t} + \mathbf{B}\theta_t = 0 \quad (4.2-b)$$

$$\mathbf{p}_{g_t} - \bar{\mathbf{p}}_{g_t} + \bar{\mathbf{s}}_{g_t} = 0 \quad (4.2-c)$$

$$-\mathbf{p}_{g_t} + \underline{\mathbf{p}}_{g_t} + \underline{\mathbf{s}}_{g_t} = 0 \quad (4.2-d)$$

$$\mathbf{p}_{d_t} - \bar{\mathbf{p}}_{d_t} + \bar{\mathbf{s}}_{d_t} = 0 \quad (4.2-e)$$

$$-\mathbf{p}_{d_t} + \underline{\mathbf{p}}_{d_t} + \underline{\mathbf{s}}_{d_t} = 0 \quad (4.2-f)$$

$$\Gamma \mathbf{A} \theta_t - \bar{\mathbf{I}}_{L_t} + \bar{\mathbf{s}}_{L_t} = 0 \quad (4.2-g)$$

$$-\Gamma \mathbf{A} \theta_t + \underline{\mathbf{I}}_{L_t} + \underline{\mathbf{s}}_{L_t} = 0 \quad (4.2-h)$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{p}_g - \bar{\Delta \mathbf{p}} + \bar{\mathbf{s}}_r = 0 \quad (4.2-i)$$

$$-\mathbf{G} \cdot \mathbf{p}_g + \underline{\Delta \mathbf{p}} + \underline{\mathbf{s}}_r = 0 \quad (4.2-j)$$

$$\mathbf{e}_D - \mathbf{P}_d \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (4.2-k)$$

$$\mathbf{s}(i)_t \geq 0, \mathbf{s}_r(j) \geq 0 \quad (4.2-l)$$

$$i = 1 \dots n_V, \quad t = 1 \dots n_T, \quad j = 1 \dots n_R$$

onde:

$\underline{\mathbf{s}}_{g_t}, \bar{\mathbf{s}}_{g_t}$: vetores ($n_G \times 1$) de variáveis de folga para a geração no intervalo t ;

$\underline{\mathbf{s}}_{d_t}, \bar{\mathbf{s}}_{d_t}$: vetores ($n_D \times 1$) de variáveis de folga das cargas que respondem a preço no intervalo t ;

$\underline{\mathbf{s}}_{L_t}, \bar{\mathbf{s}}_{L_t}$: vetores ($n_L \times 1$) de variáveis de folga para os fluxos nas linhas no intervalo t ;

n_R : número de restrições de tomada de carga em rampa, $n_R = 2 \cdot n_G \cdot (n_T - 1)$;

$\underline{\mathbf{s}}_r, \bar{\mathbf{s}}_r$: vetores ($(n_R/2) \times 1$) das variáveis de folga para as restrições de tomada de carga em rampa;

n_V : número de restrições referentes unicamente ao intervalo t ,

$$n_V = 2 \cdot (n_G + n_D + n_L)$$

\mathbf{s}_t : vetor ($n_V \times 1$) das variáveis de folga referentes unicamente ao intervalo t ;

A função de Lagrange para o problema modificado é apresentada a seguir.

$$\begin{aligned}
 L = C_T(\mathbf{p}_g) - BC_T(\mathbf{p}_d) + \sum_{t=1}^{n_T} \lambda_t^T \cdot [\mathbf{p}_{L_t} + \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{p}_{d_t} - \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{p}_{g_t} + \mathbf{B} \cdot \theta_t] + \\
 + \sum_{t=1}^{n_T} \pi_t^T \cdot \left[\begin{bmatrix} \mathbf{F}_g & \mathbf{F}_d & \mathbf{F}_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{g_t} \\ \mathbf{p}_{d_t} \\ \theta_t \end{bmatrix} - \mathbf{I}_t + \mathbf{s}_t \right] + \\
 + \pi_r^T \cdot [\mathbf{G}_G \cdot \mathbf{p}_g - \mathbf{I}_r + \mathbf{s}_r] + \\
 + \beta^T \cdot [\mathbf{e}_D - \mathbf{P}_d \cdot \tau]
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde:

- λ_t : vetor ($n_B \times 1$) dos multiplicadores de Lagrange associados às equações de balanço de potência no intervalo t ;
- π_t : vetor ($n_V \times 1$) dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de limites de operação, superiores e inferiores, no intervalo t ;
- \mathbf{I}_t : vetor ($n_V \times 1$) dos limites operacionais, superiores e inferiores, no intervalo t ;
- π_r : vetor ($n_R \times 1$) dos multiplicadores de Lagrange associados à restrição de tomada de carga dos turbogeradores;
- β : vetor ($n_D \times 1$) dos multiplicadores de Lagrange associados à restrição de energia das cargas que respondem a preço;
- \mathbf{F}_g : matriz ($n_V \times n_G$):

$$\mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_G} \\ -\mathbf{I}_{n_G} \\ \mathbf{O}_{2(n_L+n_D) \times n_G} \end{bmatrix}$$

- \mathbf{F}_d : matriz ($n_V \times n_D$):

$$\mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{2n_G \times n_D} \\ \mathbf{I}_{n_D} \\ -\mathbf{I}_{n_D} \\ \mathbf{O}_{2n_L \times n_D} \end{bmatrix}$$

- \mathbf{F}_θ : matriz ($n_V \times n_L$):

$$\mathbf{F}_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{2(n_G+n_D) \times n_B} \\ \Gamma \mathbf{A} \\ -\Gamma \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

\mathbf{G}_G : matriz ($n_R \times (n_G \cdot n_T)$):

$$\mathbf{G}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ -\mathbf{G} \end{bmatrix}$$

\mathbf{l}_r : vetor ($n_R \times 1$) de limites de tomada de carga em rampa, $\mathbf{l}_r = \begin{bmatrix} \overline{\Delta p} \\ \underline{\Delta p} \end{bmatrix}$.

Condições de Otimalidade de KKT

O passo seguinte é a formulação, a partir da função Lagrangeana, das condições de otimalidade de primeira ordem. Devido as dificuldades impostas pelas condições de complementaridade à solução das condições de otimalidade através do método de Newton, introduz-se o parâmetro μ , chamado de parâmetro barreira ou parâmetro de perturbação das condições de complementaridade (EL BAKRY, 1996, CASTRONUOVO, 2001). Formulam-se assim, em (4.4) as condições de otimalidade de primeira ordem para o problema modificado, efetuando uma perturbação nas condições de complementaridade com o parâmetro μ , que passam a ser escritas na forma dada por (4.4-f) e (4.4-h).

$$\nabla_{p_{g_t}} L = \nabla_{p_{g_t}} C_T - \mathbf{A}_g^T \cdot \lambda_t + \mathbf{F}_g^T \cdot \pi_t + \mathbf{G}_{G_t}^T \cdot \pi_R = 0 \quad (4.4-a)$$

$$\nabla_{p_{d_t}} L = -\nabla_{p_{d_t}} BC_T + \mathbf{A}_d^T \cdot \lambda_t + \mathbf{F}_d^T \cdot \pi_t - \tau_t \cdot \beta = 0 \quad (4.4-b)$$

$$\nabla_{\theta_t} L = \mathbf{B}^T \cdot \lambda_t + \mathbf{F}_\theta^T \cdot \pi_t = 0 \quad (4.4-c)$$

$$\nabla_{\lambda_t} L = \mathbf{p}_{L_t} + \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{p}_{d_t} - \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{p}_{g_t} + \mathbf{B} \cdot \theta_t = 0 \quad (4.4-d)$$

$$\nabla_{\pi_t} L = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_g & \mathbf{F}_d & \mathbf{F}_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{g_t} \\ \mathbf{p}_{d_t} \\ \theta_t \end{bmatrix} - \mathbf{l}_t + \mathbf{s}_t = 0 \quad (4.4-e)$$

$$\nabla_{s_t} L = \mathbf{S}_t \cdot \pi_t - \mu \cdot \mathbf{k}_s = 0 \quad t=1 \dots n_T \quad (4.4-f)$$

$$\nabla_{\pi_r} L = \mathbf{G}_G \cdot \mathbf{p}_g - \mathbf{l}_r + \mathbf{s}_r = 0 \quad (4.4-g)$$

$$\nabla_{s_r} L = \mathbf{S}_r \cdot \pi_r - \mu \cdot \mathbf{k}_r = 0 \quad (4.4-h)$$

$$\nabla_{\beta} L = \mathbf{e}_D - \mathbf{P}_d \cdot \tau = 0 \quad (4.4-i)$$

onde:

τ_t : componente do vetor τ , com a duração do intervalo t ;

- \mathbf{G}_{G_t} : matriz formada por colunas de \mathbf{G}_G ;
 $\mathbf{S}_t, \mathbf{S}_r$: matrizes diagonais formadas com os elementos de \mathbf{s}_t e \mathbf{s}_r , respectivamente;
 $\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_r$: vetores unitários com a dimensão adequada.

O sistema de equações não-linear acima é resolvido iterativamente, efetuando um único passo do método de Newton em cada iteração. O parâmetro de perturbação é gradualmente diminuído a zero em cada iteração, empregando-se para isso regras heurísticas (EL BAKRY, 1996, CASTRONUOVO, 2001).

4.3 Solução das Condições de Otimalidade

Efetuando a linearização das condições de otimalidade perturbadas apresentadas em (4.4) na aplicação do método de Newton, obtém-se (4.5).

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{n_T} \mathbf{C}_{T_i,j}'' \cdot \Delta \mathbf{p}_{g_j} - \mathbf{A}_g^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_g^T \cdot \Delta \pi_t + \mathbf{G}_{G_t}^T \cdot \Delta \pi_r &= -\nabla_{p_{g_t}} L \\
 -\sum_{j=1}^{n_T} \mathbf{BC}_{T_i,j}'' \cdot \Delta \mathbf{p}_{d_j} + \mathbf{A}_d^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_d^T \cdot \Delta \pi_t - \tau_t \mathbf{I} \cdot \Delta \beta &= -\nabla_{p_{d_t}} L \\
 \mathbf{B}^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_\theta^T \cdot \Delta \pi_t &= -\nabla_{\theta_t} L \\
 -\mathbf{A}_g \cdot \Delta \mathbf{p}_{g_t} + \mathbf{A}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_{d_t} + \mathbf{B} \cdot \Delta \theta_t &= -\nabla_{\lambda_t} L \\
 \mathbf{F}_g \cdot \Delta \mathbf{p}_{g_t} + \mathbf{F}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_{d_t} + \mathbf{F}_\theta \cdot \Delta \theta_t + \mathbf{I} \cdot \Delta \mathbf{s}_t &= -\nabla_{\pi_t} L \\
 \mathbf{S}_t \cdot \Delta \pi_t + \mathbf{\Pi}_t \cdot \Delta \mathbf{s}_t &= -\nabla_{s_t} L \\
 & t = 1 \dots n_T \\
 \mathbf{G}_G \cdot \Delta \mathbf{p}_g + \mathbf{I} \cdot \Delta \mathbf{s}_r &= -\nabla_{\pi_r} L \\
 \mathbf{S}_r \cdot \Delta \pi_r + \mathbf{\Pi}_r \cdot \Delta \mathbf{s}_r &= -\nabla_{s_r} L \\
 -\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \mathbf{I} \cdot \Delta \mathbf{p}_{d_t} &= -\nabla_{\beta} L
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde:

$$\mathbf{C}_{T_i,j}'' = \nabla_{p_{g_t}, p_{g_j}}^2 C_T(\mathbf{p}_g);$$

$$\mathbf{BC}_{T_t,j}'' = \nabla_{p_{d_t}, p_{d_j}}^2 \mathbf{BC}_T(\mathbf{p}_d);$$

\mathbf{I} denota matrizes identidades com a dimensão adequada;

τ_t é a duração do intervalo t ;

As primeiras seis equações devem ser verificadas para cada intervalo t . Assim, agrupando as equações e as variáveis pertencentes ao mesmo intervalo, obtém-se a estrutura particular mostrada em (4.6) para o sistema. As matrizes \mathbf{M}_t correspondem às derivadas parciais das equações (4.4-a) até (4.4-f) para cada intervalo t . Podem ser vistas como matrizes Hessianas de um FPO num intervalo específico, sem considerar os efeitos de intertemporalidade.

As matrizes $\mathbf{N}_{t,j}$ são as derivadas parciais das equações (4.4-a) até (4.4-f) para o intervalo t , em relação a variáveis no intervalo j . Estas matrizes são não-nulas somente no caso em que a função-objetivo é não-separável nos intervalos de despacho. No GLD abordado neste trabalho, este é o caso quando as elasticidades-preço cruzadas no tempo da demanda e/ou da geração são levadas em consideração.

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} \mathbf{M}_1 & \mathbf{N}_{1,2} & \cdots & \mathbf{N}_{1,n_T} & & \\ \mathbf{N}_{2,1} & \mathbf{M}_2 & & & \mathbf{D}^T & \mathbf{G}_T^T \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ \mathbf{N}_{n_T,1} & & \cdots & \mathbf{M}_{n_T} & & \\ \hline & \mathbf{D} & & & \mathbf{O} & \\ \hline & \mathbf{G}_T & & & & \mathbf{G}_C \end{array} \right] \cdot [\Delta]^k = -[\nabla L]^k \quad (4.6)$$

onde:

\mathbf{D} é a matriz correspondente à restrição dos consumidores,

$$\mathbf{D} = \left[\left[\mathbf{O}_{n_D \times n_G} (-\tau_1) \mathbf{I} \quad \mathbf{O}_{n_D \times 2(n_B + n_V)} \right] \cdots \left[\mathbf{O}_{n_D \times n_G} (-\tau_{n_T}) \mathbf{I} \quad \mathbf{O}_{n_D \times 2(n_B + n_V)} \right] \right];$$

\mathbf{G}_T é a matriz formada a partir da matriz \mathbf{G}_G , intercalando zeros para o ajuste de dimensões.

Ressalta-se que, quando os efeitos intertemporais são representados somente através de restrições intertemporais, as matrizes $\mathbf{N}_{t,j}$ em (4.5) são todas nulas. Neste caso,

a matriz Hessiana do FPOD é formada por uma sub-matriz bloco-diagonal, $diag(\mathbf{M}_j)$, por \mathbf{G}_c e por matrizes laterais $(\mathbf{D}, \mathbf{D}^T)$ e $(\mathbf{G}_T, \mathbf{G}_T^T)$. Estas matrizes laterais produzem os acoplamentos entre os intervalos.

Quando por outro lado, os fatores de intertemporalidade são modelados na função-objetivo, produz-se enchimento em alguns elementos das matrizes $\mathbf{N}_{t,j}$. Os acoplamentos entre os intervalos neste caso são produzidos pelos mencionados elementos juntamente com as matrizes laterais $(\mathbf{D}, \mathbf{D}^T)$ e $(\mathbf{G}_T, \mathbf{G}_T^T)$. A Figura 4.1 apresenta o padrão de elementos não nulos em ambos os casos.

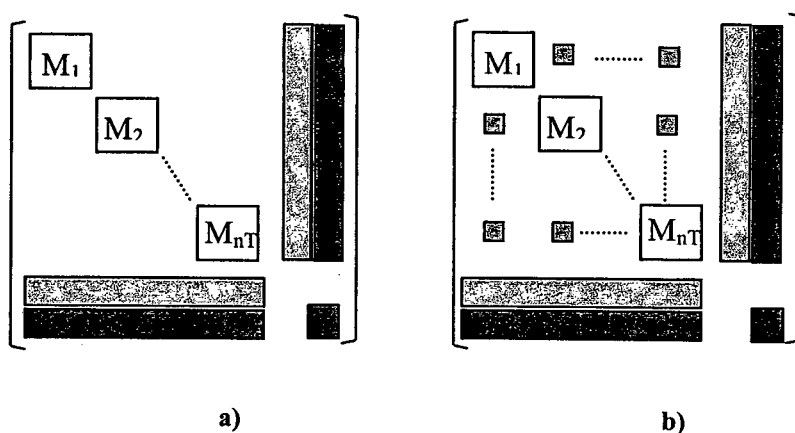


Figura 4.1 – Padrão de elementos diferentes de zero da matriz Hessiana do FPOD, quando os fatores intertemporais são representados: a) somente nas restrições do problema, b) nas restrições e também na função objetivo.

Redução do Sistema Linear de Equações

Deve-se observar a elevada dimensão do sistema de equações matriciais (4.5). Para um sistema específico, a mesma cresce de forma aproximadamente linear com o número de intervalos de discretização considerado. Apresenta-se a seguir uma redução do sistema de equações, de forma que a cada iteração é resolvido um sistema de menor dimensão, juntamente com as equações auxiliares associadas. Gera-se uma estrutura de dados particular, na qual a matriz do sistema linear reduzido é uma matriz em blocos que possui o mesmo padrão de elementos não nulos que a matriz de admitâncias da rede elétrica.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{C}}^T \cdot \Delta \mathbf{p}_g - \overline{\mathbf{A}}_g \cdot \Delta \lambda + \overline{\mathbf{F}}_g \cdot \Delta \pi + \overline{\mathbf{G}}_T^T \cdot \Delta \pi_R &= \mathbf{b}_g \\
-\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{C}}_T \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\mathbf{A}}_d \cdot \Delta \lambda + \overline{\mathbf{F}}_d \cdot \Delta \pi - \overline{\mathbf{I}}_d^T \cdot \Delta \beta &= \mathbf{b}_d \\
\overline{\mathbf{B}} \cdot \Delta \lambda + \overline{\mathbf{F}}_\theta \cdot \Delta \pi &= \mathbf{b}_\theta \\
-\overline{\mathbf{A}}_g \cdot \Delta \mathbf{p}_g + \overline{\mathbf{A}}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\mathbf{B}} \cdot \Delta \theta &= \mathbf{b}_\lambda \\
\overline{\mathbf{F}}_g \cdot \Delta \mathbf{p}_g + \overline{\mathbf{F}}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\mathbf{F}}_\theta \cdot \Delta \theta + \overline{\mathbf{I}}_s \cdot \Delta \mathbf{s} &= \mathbf{b}_\pi \\
\overline{\mathbf{S}} \cdot \Delta \pi + \overline{\mathbf{\Pi}} \cdot \Delta \mathbf{s} &= \mathbf{b}_s \\
\overline{\mathbf{G}}_T \cdot \Delta \mathbf{p}_g + \overline{\mathbf{I}}_r \cdot \Delta \mathbf{s}_r &= \mathbf{b}_{\pi_r} \\
\overline{\mathbf{S}}_r \cdot \Delta \pi_r + \overline{\mathbf{\Pi}}_r \cdot \Delta \mathbf{s}_r &= \mathbf{b}_{s_r} \\
-\overline{\mathbf{I}}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_d &= \mathbf{b}_\beta
\end{aligned} \tag{4.8}$$

onde:

$\overline{\mathbf{I}}_d = [\tau_1 \cdot \mathbf{I} \cdots \tau_{n_T} \cdot \mathbf{I}]$, sendo \mathbf{I} é a matriz identidade de dimensão n_D ;

$\overline{\mathbf{I}}_s, \overline{\mathbf{I}}_r$ são matrizes identidade;

$\mathbf{b}(\cdot) = -\nabla(\cdot)L$

Eliminam-se primeiramente as variáveis $\Delta \mathbf{s}$ e $\Delta \pi$. O sistema de equações obtido é apresentado em (4.9) e as equações auxiliares em (4.10). Observa-se que os coeficientes de $\Delta \mathbf{p}_g$, $\Delta \mathbf{p}_d$ e $\Delta \theta$ foram modificados. As matrizes $\overline{\mathbf{F}}^T \left(\overline{\mathbf{S}} \quad \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \overline{\mathbf{F}}$ são diagonais e são

formadas a partir dos quocientes $\frac{\pi_i}{s_i}$.

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\overline{\mathbf{C}_T}} + \overline{\overline{\mathbf{F}_g}} \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}} \quad \overline{\overline{\mathbf{\Pi}}} \right) \overline{\overline{\mathbf{F}_g}} \right) \cdot \Delta \mathbf{p}_g - \overline{\overline{\mathbf{A}_g}} \cdot \Delta \lambda + \mathbf{G}_G^T \cdot \Delta \pi_r &= \hat{\mathbf{b}}_g \\
\left(\overline{\overline{\mathbf{F}_d}} \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}} \quad \overline{\overline{\mathbf{\Pi}}} \right) \overline{\overline{\mathbf{F}_d}} - \overline{\overline{\mathbf{B}\mathbf{C}_T}} \right) \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\overline{\mathbf{A}_d}} \cdot \Delta \lambda - \mathbf{I}_d^T \cdot \Delta \beta &= \hat{\mathbf{b}}_d \\
\overline{\overline{\mathbf{B}}} \cdot \Delta \lambda + \left(\overline{\overline{\mathbf{F}_\theta}} \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}} \quad \overline{\overline{\mathbf{\Pi}}} \right) \overline{\overline{\mathbf{F}_\theta}} \right) \cdot \Delta \theta &= \hat{\mathbf{b}}_\theta \\
-\overline{\overline{\mathbf{A}_g}} \cdot \Delta \mathbf{p}_g + \overline{\overline{\mathbf{A}_d}} \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\overline{\mathbf{B}}} \cdot \Delta \theta &= \mathbf{b}_\lambda \\
\mathbf{G}_G \cdot \Delta \mathbf{p}_g + \mathbf{I} \cdot \Delta \mathbf{s}_r &= \mathbf{b}_{\pi_r} \\
\mathbf{S}_r \cdot \Delta \pi_r + \mathbf{\Pi}_r \cdot \Delta \mathbf{s}_r &= \mathbf{b}_{s_r} \\
-\mathbf{I}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_d &= \mathbf{b}_\beta
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{b}}_\pi &= \mathbf{b}_\pi - \overline{\overline{\mathbf{\Pi}}}^{-1} \cdot \mathbf{b}_s \\
\hat{\mathbf{b}}_g &= \mathbf{b}_g + \overline{\overline{\mathbf{F}_g}} \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}} \quad \overline{\overline{\mathbf{\Pi}}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi \\
\hat{\mathbf{b}}_d &= \mathbf{b}_d + \overline{\overline{\mathbf{F}_d}} \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}} \quad \overline{\overline{\mathbf{\Pi}}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi \\
\hat{\mathbf{b}}_\theta &= \mathbf{b}_\theta + \overline{\overline{\mathbf{F}_\theta}} \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}} \quad \overline{\overline{\mathbf{\Pi}}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi \\
\Delta \mathbf{s} &= \overline{\overline{\mathbf{\Pi}}}^{-1} \cdot \left(\mathbf{b}_s - \overline{\overline{\mathbf{S}}} \cdot \Delta \pi \right) \\
\Delta \pi &= \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}} \quad \overline{\overline{\mathbf{\Pi}}} \right) \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{F}_g}} \cdot \Delta \mathbf{p}_g + \overline{\overline{\mathbf{F}_d}} \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\overline{\mathbf{F}_\theta}} \cdot \Delta \theta - \hat{\mathbf{b}}_\pi \right)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Usualmente, a redução do sistema linear no FPO clássico, sem representação de acoplamentos no tempo, faz-se até este ponto (SUN *et al.*, 1984, GRANVILLE, 1994, WU *et al.*, 1994, WEI *et al.*, 2000). Assim, tem-se um sistema com dimensão igual ao número de variáveis de controle mais o número de variáveis de estado mais o número de multiplicadores de Lagrange das equações de balanço de potência (λ). Esta abordagem leva a que a estrutura de elementos não-nulos de parte da matriz do sistema reduzido, quando considerada como matriz em blocos, seja igual à da matriz de admitâncias da rede.

Em CLEMENTS (1998) apresentou-se uma redução do sistema linear, para o FPO clássico, na qual as variáveis de controle são também extraídas do sistema. O resultado é um sistema reduzido de menor dimensão: número de variáveis de estado mais número de multiplicadores λ . Neste caso, a estrutura da matriz completa do sistema reduzido, quando

considerada como matriz em blocos, coincide com a estrutura da matriz de admitâncias. Para o caso de um FPO com modelo completo da rede elétrica, a dimensão do sistema reduzido é quatro vezes o número de barras do sistema. Já quando se emprega o modelo linearizado da rede elétrica, a dimensão da matriz do sistema reduzido é duas vezes o número de barras.

Neste trabalho, generaliza-se a abordagem apresentada em CLEMENTS (1998) para o FPOD, isto é, continua-se com a redução do sistema eliminando-se também as variáveis de controle. Resolve-se para as variáveis de folga das restrições de tomada de carga e seus multiplicadores: Δs_r e $\Delta \pi_r$. As equações obtidas são apresentadas em (4.11) e (4.12).

$$\begin{aligned}
 \left(\overline{\mathbf{C}}_T + \overline{\mathbf{F}}_g^T \left(\overline{\mathbf{S}}^{-1} \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \overline{\mathbf{F}}_g + \mathbf{G}_G^T \left(\mathbf{S}_r^{-1} \mathbf{\Pi}_r \right) \mathbf{G}_G \right) \cdot \Delta \mathbf{p}_g - \mathbf{A}_g^T \cdot \Delta \lambda &= \tilde{\mathbf{b}}_g \\
 \left(\overline{\mathbf{F}}_d^T \left(\overline{\mathbf{S}}^{-1} \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \overline{\mathbf{F}}_d - \overline{\mathbf{B}} \mathbf{C}_T \right) \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \mathbf{A}_d^T \cdot \Delta \lambda - \mathbf{I}_d^T \cdot \Delta \beta &= \hat{\mathbf{b}}_d \\
 \overline{\mathbf{B}}^T \cdot \Delta \lambda + \left(\overline{\mathbf{F}}_\theta^T \left(\overline{\mathbf{S}}^{-1} \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \overline{\mathbf{F}}_\theta \right) \cdot \Delta \theta &= \hat{\mathbf{b}}_\theta \\
 -\overline{\mathbf{A}}_g \cdot \Delta \mathbf{p}_g + \overline{\mathbf{A}}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\mathbf{B}} \cdot \Delta \theta &= \mathbf{b}_\lambda \\
 -\mathbf{I}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_d &= \mathbf{b}_\beta
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta s_r &= \mathbf{\Pi}_r^{-1} \cdot (\mathbf{b}_{s_r} - \mathbf{S}_r \cdot \Delta \pi_r) \\
 \Delta \pi_r &= \left(\mathbf{S}_r^{-1} \mathbf{\Pi}_r \right) \cdot (\mathbf{G}_G \cdot \Delta \mathbf{p}_g - \hat{\mathbf{b}}_{\pi_r}) \\
 \hat{\mathbf{b}}_{\pi_r} &= \mathbf{b}_{\pi_r} - \mathbf{\Pi}_r^{-1} \cdot \mathbf{b}_{s_r} \\
 \tilde{\mathbf{b}}_g &= \hat{\mathbf{b}}_g + \mathbf{G}_G^T \left(\mathbf{S}_r^{-1} \mathbf{\Pi}_r \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_{\pi_r}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Observa-se que o coeficiente de $\Delta \mathbf{p}_g$ em (4.11) foi modificado. A matriz $\mathbf{G}_G^T \left(\mathbf{S}_r^{-1} \mathbf{\Pi}_r \right) \mathbf{G}_G$ contém a informação da restrição intertemporal de tomada de carga, e portanto é não-diagonal.

Finalmente, resolve-se para as variáveis $\Delta \mathbf{p}_g$ e $\Delta \mathbf{p}_d$. Observa-se que os coeficientes destas variáveis são matrizes não-diagonais, e que os mesmos contêm informações dos acoplamentos no tempo. No caso da potência de geração, são os acoplamentos produzidos pelas elasticidades-preço cruzadas da oferta, através de \mathbf{C}_T'' , juntamente com os gerados

pela restrição intertemporal. Já no caso da carga que depende de preço, tem-se unicamente o acoplamento produzido pelas elasticidades-preço cruzadas da demanda através de \mathbf{BC}_T'' .

Apresenta-se em (4.13) e (4.14) o sistema reduzido juntamente com as novas equações auxiliares:

$$\begin{aligned} \left(\overline{\mathbf{F}}_\theta^T \left(\overline{\mathbf{S}}^{-1} \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \overline{\mathbf{F}}_\theta \right) \cdot \Delta\theta + \overline{\mathbf{B}}^T \cdot \Delta\lambda &= \hat{\mathbf{b}}_\theta \\ \overline{\mathbf{B}} \cdot \Delta\theta - \left(\overline{\mathbf{A}}_g \mathbf{K}_g \overline{\mathbf{A}}_g^T + \overline{\mathbf{A}}_d \mathbf{K}_d \overline{\mathbf{A}}_d^T \right) \cdot \Delta\lambda + \left(\overline{\mathbf{A}}_d \mathbf{K}_d \mathbf{I}_d^T \right) \cdot \Delta\beta &= \hat{\mathbf{b}}_\lambda \\ \left(\mathbf{I}_d \mathbf{K}_d \overline{\mathbf{A}}_d^T \right) \cdot \Delta\lambda - \left(\mathbf{I}_d \mathbf{K}_d \mathbf{I}_d^T \right) \cdot \Delta\beta &= \hat{\mathbf{b}}_\beta \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_g &= \mathbf{K}_g \cdot \left(\hat{\mathbf{b}}_p + \mathbf{A}_g^T \Delta\lambda \right) \\ \Delta \mathbf{p}_d &= \mathbf{K}_d \cdot \left(\hat{\mathbf{b}}_d - \mathbf{A}_d^T \Delta\lambda + \mathbf{I}_d^T \Delta\beta \right) \\ \hat{\mathbf{b}}_\lambda &= \mathbf{b}_\lambda + \overline{\mathbf{A}}_g \mathbf{K}_g \hat{\mathbf{b}}_g - \overline{\mathbf{A}}_d \mathbf{K}_d \hat{\mathbf{b}}_d \\ \hat{\mathbf{b}}_\beta &= \mathbf{b}_\beta + \mathbf{I}_d \mathbf{K}_d \hat{\mathbf{b}}_b \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_g &= \left(\overline{\mathbf{C}}_T + \overline{\mathbf{F}}_g^T \left(\overline{\mathbf{S}}^{-1} \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \overline{\mathbf{F}}_g + \mathbf{G}_G^T \left(\mathbf{S}_r^{-1} \mathbf{\Pi}_r \right) \mathbf{G}_G \right)^{-1} \\ \mathbf{K}_d &= \left(\overline{\mathbf{F}}_d^T \left(\overline{\mathbf{S}}^{-1} \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \overline{\mathbf{F}}_d - \overline{\mathbf{BC}}_T \right)^{-1} \end{aligned}$$

Solução do Sistema Linear Reduzido

Rescreve-se o sistema de equações reduzido na forma simplificada dada em (4.15). As matrizes \mathbf{J} e \mathbf{T} correspondem à restrição intertemporal de consumo.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{P}}} & \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T & & \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}} & -\underline{\underline{\mathbf{A}}}_m & \underline{\underline{\mathbf{J}}}^T & \\ & & \underline{\underline{\mathbf{J}}} & -\underline{\underline{\mathbf{T}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\lambda \\ \Delta\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_\theta \\ \hat{\mathbf{b}}_\lambda \\ \hat{\mathbf{b}}_\beta \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_\theta \left(\underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{\Pi}}} \right) \underline{\underline{\mathbf{F}}}_\theta^T$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_m = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_g \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g \underline{\underline{\mathbf{A}}}_g^T + \underline{\underline{\mathbf{A}}}_d \underline{\underline{\mathbf{K}}}_d \underline{\underline{\mathbf{A}}}_d^T$$

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}_d \underline{\underline{\mathbf{K}}}_d \underline{\underline{\mathbf{A}}}_d^T$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}_d \underline{\underline{\mathbf{K}}}_d \underline{\underline{\mathbf{I}}}_d^T$$

Verifica-se facilmente que a sub-matriz $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ é uma matriz bloco diagonal de dimensão $(n_T \times n_T)$. Cada bloco tem dimensão $(n_B \times n_B)$, e possui o mesmo padrão de elementos não-nulos que a matriz de admitâncias da rede de transmissão. A matriz $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ é também bloco diagonal, com dimensão $(n_T \times n_T)$. Cada bloco diagonal é formado pela matriz do fluxo de potência linearizado $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, e portanto também possui o mesmo padrão de elementos não-nulos da matriz de admitâncias. Finalmente, a matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_m$ possui estrutura em bandas.

Seja:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{P}}} & \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}} & -\underline{\underline{\mathbf{A}}}_m \end{bmatrix}$$

Observa-se que, desconsiderando por enquanto à matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_m$, a reordenação dos elementos dos blocos $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^T$ produziria uma matriz $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ organizada em blocos, com o mesmo padrão de elementos não nulos da matriz de admitâncias das barras.

Considera-se a seguir uma nova reordenação, em que:

- Agrupam-se as variáveis de estado relacionadas à mesma barra i e diferentes intervalos t , $\theta_i = [\theta_{i,1}, \theta_{i,2}, \dots, \theta_{i,n_T}]$;
- Agrupam-se os multiplicadores λ referentes à barra i em diferentes intervalos t , $\lambda_i = [\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,n_T}]$;
- Agrupam-se as variáveis de estado e os multiplicadores λ para cada barra, $[\theta_i, \lambda_i]$.

Sob esta nova ordenação tem-se o sistema (4.16). A matriz $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ reordenada, $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$, é uma matriz em blocos, cada bloco (i,j) é formado a partir dos elementos de $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_m$,

Finalmente, nota-se que a dimensão dos blocos que constituem a matriz do sistema linear reduzido depende somente do número de intervalos de despacho, sendo independente do número de cargas que respondem a preço.

4.4 GLD com Interrupção de Carga: Restrições de Consumo de Desigualdade

Considera-se nesta seção a modelagem das atividades de GLD através de restrições de energia do tipo desigualdade, que permite considerar, por exemplo, interrupções de carga, como discutido no Capítulo 3. Estas restrições possuem uma forma semelhante às de tomada de carga dos turbogeradores. Assim, aparece uma matriz semelhante à matriz G_G da equação (4.3), que neste caso de restrição de consumo, deve acoplar às variáveis p_d , em lugar de p_g , como acontece na referida equação. Portanto, esta restrição é tratada da mesma forma que as de tomada de carga: deve-se resolver o sistema linear para as variáveis de folga a elas associadas e também para os multiplicadores de Lagrange respectivos.

Deve-se ressaltar que no desenvolvimento efetuado neste capítulo foram consideradas tanto restrições intertemporais de igualdade como de desigualdade. Assim, de uma forma geral, qualquer outra restrição intertemporal que se deseje representar gera uma estrutura semelhante para a matriz do sistema linear completo, e a redução do sistema faz-se de forma análoga a apresentada na Seção 4.3.

4.5 Conclusões

A implementação do modelo de referência para as atividades de GLD através do FPOD implica numa generalização do mesmo. Deve-se levar em consideração os acoplamentos gerados pela função-objetivo que neste caso, é não-separável sobre os intervalos de despacho.

A solução das condições de otimalidade, dentro do Método Primal-Dual de Pontos Interiores, gera um sistema linear de elevada dimensão. Uma considerável diminuição da

dimensão do mesmo é obtida através da eliminação prévia das variáveis de folga, de seus multiplicadores associados e das variáveis de controle.

O sistema reduzido é arranjado de forma a identificar a estrutura da matriz. Esta é uma matriz em blocos, de dimensão igual ao número de barras do sistema, esparsa, com estrutura igual à da matriz de admitâncias de barras. Os blocos possuem dimensão igual a duas vezes o número de intervalos de despacho. É possível portanto empregar algoritmos de fatoração já existentes, modificados para operar sobre blocos em lugar de escalares.

O procedimento adotado para solução do sistema linear é geral para o FPO com restrições intertemporais. Assim, no próximo capítulo o mesmo procedimento é aplicado ao problema de coordenação hidrotérmica de curto prazo.

Capítulo 5

Coordenação Hidrotérmica e GLD

5.1 Introdução

Nos sistemas com geração hidrelétrica, os reservatórios fornecem o armazenamento da energia e possibilitam que a mesma seja transferida entre os estágios de operação, de forma que as decisões de operação nos diferentes estágios estão relacionadas. A energia hidrelétrica “grátis” armazenada pode evitar gastos de combustível de unidades térmicas. Observa-se que a utilização de um elevado volume de água no presente, que permitiria minimizar o custo de operação das térmicas, pode ocasionar no futuro um elevado custo térmico - e eventualmente o não atendimento da demanda - se ocorrer uma seca. Por outro lado, preservar a energia armazenada fazendo uso intensivo da geração térmica pode ocasionar vertimentos nos reservatórios, em caso de um elevado nível de afluências futuras. Isto representaria um desperdício de energia.

Além disso, as incertezas em relação às vazões afluentes aos reservatórios determinam que o planejamento da operação energética seja de natureza estocástica.

Esta complexidade, junto com a elevada dimensão do sistema brasileiro, determina que o planejamento da operação seja dividido em subproblemas menores. Estes problemas menores são coordenados entre si, de forma que os resultados obtidos para um horizonte de tempo de maior duração estabelecem metas para o horizonte de menor duração subsequente. Desta forma, considera-se o planejamento da operação no longo, médio e curto prazo, e finalmente o despacho em tempo real do sistema (PEREIRA e PINTO, 1982).

Em um sistema predominantemente hidráulico, o planejamento de longo prazo refere-se a horizontes que cobrem a capacidade de regularização dos reservatórios, tipicamente cinco anos no Brasil. É um problema estocástico, no qual se deve estabelecer a participação da geração hidrelétrica, térmica e os intercâmbios de energia entre os sistemas interligados. O planejamento de médio prazo continua sendo um problema estocástico, com um horizonte de tempo menor, tipicamente um ano.

O planejamento de curto prazo é um problema determinístico com um horizonte de tempo semanal e discretização horária. Em seguida deve-se compatibilizar os resultados horários do curto prazo com o despacho de tempo real. A medida em que se aproxima a operação em tempo real, a modelagem do sistema deve ser mais detalhada, representando o sistema de transmissão e as unidades geradoras.

Observa-se que a formulação de um modelo de referência para as atividades de gerenciamento de demanda em sistemas hidrotérmicos pode ser relacionada com a operação de curto prazo do sistema.

Na vasta bibliografia relacionada à coordenação hidrotérmica de curto prazo, a maioria das abordagens propostas estão baseadas na decomposição do problema em subproblemas menores. FRANCO *et al.* (1994) propõem a decomposição em um subproblema elétrico e outro hidráulico através de uma abordagem com penalidade linear-quadrática. Empregam algoritmos de fluxo em redes para explorar a estrutura do problema. A função objetivo considera custos de injeção térmica, perdas resistivas, não-atendimento da carga do sistema juntamente com o atendimento de uma meta hidráulica. SOARES e SALMAZO (1997) objetivam a minimização de perdas na geração e na transmissão, empregando técnicas de relaxação Lagrangeana combinadas com heurística. WEI *et al.* (1998) dividem também em subproblemas elétrico e hidráulico, através de relaxação Lagrangeana. O subproblema térmico é resolvido empregando o Método de Pontos Interiores enquanto que o subproblema hidráulico é abordado através de um modelo de fluxo em rede.

Mais recentemente tem-se aplicado os métodos de Pontos Interiores ao problema do despacho hidrotérmico de curto prazo sem efetuar nenhuma divisão em subproblemas elétrico e hidráulico. WEI *et al.* (2000) consideram a minimização de custos de geração térmica, modelando usinas hidrelétricas de acumulação operando em cascata e usinas a fio d'água. Para as usinas de acumulação os autores consideram as equações de conservação da água (modelando também a vazão vertida), e expressam a potência ativa gerada como

uma função quadrática da vazão turbinada e do armazenamento. Para as usinas a fio d'água, consideram que a vazão turbinada é função quadrática da potência ativa gerada, e impõem uma restrição sobre o volume de água disponível. Os autores apresentam uma redução do sistema linear semelhante à efetuada em SUN *et al.* (1984).

OLIVEIRA *et al.* (2000) visam a minimização de perdas de geração considerando uma meta de geração hidráulica para o horizonte de planejamento, que constitui uma restrição de energia. O sistema de transmissão é representado através de um modelo de fluxo em redes e a solução é baseada nas versões Primal-Dual e Predictor-Corretor do método de Pontos Interiores. Os autores efetuam uma redução do sistema linear, explorando a esparsidade do sistema reduzido.

ORREGO *et al.* (2001) consideram a representação de transações bilaterais de potência no despacho hidrotérmico, resolvendo também através do método Primal-Dual de Pontos Interiores.

MEDINA *et al.* (1998) consideram a alocação de unidades térmicas com os respectivos custos de partida e parada, resolvendo de forma global para todo o horizonte através do método de Pontos Interiores. Porém, a rede elétrica de transmissão não é representada.

Nesta tese propõe-se a implementação do modelo de referência para as atividades de GLD em sistemas hidrotérmicos através do Método Primal-Dual de Pontos Interiores, formulando um único problema de otimização no horizonte de curto prazo. Esta formulação pode ser considerada como uma extensão do FPOD apresentado no capítulo anterior. A redução do sistema linear conduz neste caso a uma estrutura de dados que combina o padrão de esparsidade da matriz de admitâncias da rede elétrica com a estrutura característica do sistema hidrelétrico.

5.2 GLD e Coordenação Hidrotérmica de Curto Prazo

No horizonte de curto prazo estabelece-se a inter-relação entre o problema energético e o problema elétrico, buscando a forma mais econômica de balancear as gerações hidráulica e térmica de modo a satisfazer a demanda. A inclusão da demanda a

gerenciar deve adicionar ao problema os aspectos relacionados ao consumidor: função benefício e restrições de consumo intertemporais.

De forma semelhante ao capítulo anterior, o problema da determinação dos sinais de preço para a implementação de GLD é formulado através de um despacho de geração (neste caso, térmica e hidráulica) que impõe a alocação de uma quantidade de energia demandada, que é denominada de energia gerenciada, ao longo de um horizonte de tempo.

Define-se a seguir a representação das unidades hidrelétricas e a especificação das metas provenientes do planejamento de médio prazo, sendo que a formulação do problema considera representações alternativas destas últimas.

5.2.1 Usinas hidrelétricas

Com a finalidade de simplificar o problema, cada usina hidráulica é representada através de uma unidade geradora equivalente.

A operação de reservatórios em cascata deve respeitar o princípio de conservação da água, dado por (5.1).

$$v_{j,t+1} = v_{j,t} + \tau_t \cdot r_{j,t} - \tau_t \cdot (q_{j,t} + u_{j,t}) + \sum_{m \in \Omega_j} \tau_t \cdot (q_{m,t-\omega_m} + u_{m,t-\omega_m}) \quad (5.1)$$

onde:

- $v_{j,t}$: volume do reservatório j no intervalo t ;
- $r_{j,t}$: afluência natural ao reservatório da usina j no intervalo t ;
- $q_{j,t}$: vazão turbinada na usina j no intervalo t ;
- $u_{j,t}$: vazão vertida da usina j no intervalo t ;
- τ_t : duração do intervalo t ;
- Ω_j : conjunto das usinas imediatamente a montante da usina j ;
- ω_m : intervalos de atraso da água defluente da usina m ;

A potência ativa produzida por uma usina hidráulica depende da vazão turbinada e da altura de queda líquida a que está submetida a turbina, como indicado a seguir (FRANCO, 1993, SILVA, 2001).

$$p_{h_{j,t}} = k_j \cdot h_{l_j} \cdot q_{j,t} \quad (5.2)$$

onde:

- $p_{h_{j,t}}$: potência ativa gerada pela usina j no intervalo t , (MW);
 h_{l_j} : altura de queda líquida da usina j (m);
 k_j : $\rho \cdot g \cdot \eta_j$, produtividade específica, (MW/m.m³/s)
 ρ = densidade da água, (kg/m³)
 g = aceleração da gravidade, (m/s²)
 η_j = eficiência do conjunto turbina-gerador.

A altura de queda líquida é dada pela diferença entre a altura de queda bruta e as perdas devidas ao atrito da água. A altura de queda bruta define-se como a diferença entre a altura a montante e a altura a jusante da usina, sendo estas funções não-lineares respectivamente do armazenamento e da vazão defluente. Assim, a potência gerada é dada pela expressão (5.3) (FRANCO, 1993). No entanto, como simplificação, as perdas são desconsideradas neste trabalho.

$$p_{h_{j,t}} = k_j \cdot [h_v(v_{j,t}) - h_w(q_{j,t} + u_{j,t}) - pc_j] \cdot q_{j,t} \quad (5.3)$$

onde:

- $h_v(v_{j,t})$: polinômio que relaciona a altura (m) a montante do reservatório j com o volume armazenado;
 $h_w(q_{j,t} + u_{j,t})$: polinômio que relaciona a altura (m) a jusante da usina j com a vazão defluente;
 pc_j : perda devida ao efeito do atrito da água na tubulação.

Finalmente, devem também ser levadas em consideração as limitações físicas e operativas associadas às variáveis hidráulicas:

$$\begin{aligned}
 \underline{v}_j &\leq v_{j,t} \leq \bar{v}_j \\
 \underline{q}_j &\leq q_{j,t} \leq \bar{q}_j \\
 0 &\leq u_{j,t}
 \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.2.2 Metas Estabelecidas no Planejamento de Médio Prazo

Do ponto de vista energético, o planejamento de curto prazo deve atender a metas fixadas pelo planejamento de médio prazo. As mesmas são expressas na forma de volume ao final do horizonte de curto prazo ou através da função de custo futuro (SILVA, 2001).

Volume ao Final do Horizonte de Curto Prazo

O armazenamento de cada reservatório j ao final do período, v_{j,n_T} , não deve ser menor que um volume meta estabelecido, como indicado a seguir.

$$v_{j_{Meta}} \leq v_{j,n_T} \quad (5.5)$$

Esta condição é considerada neste trabalho, assim como em FRANCO (1993) e ORREGO (2000), através de uma ponderação dos volumes finais dos reservatórios na função objetivo, penalizando os que estão abaixo da meta prefixada. Desta forma, o fator ξ em (5.6) deve penalizar os volumes inferiores à meta.

$$\sum_{j=1}^{n_H} \xi \cdot (v_{j_{Meta}} - v_{j,n_T})^2 \quad (5.6)$$

Função de Custo Futuro

Associa-se a utilização de uma unidade de volume de água no presente com o custo da geração térmica a ser utilizada no futuro devido ao fato de que este volume de água não estará disponível. Assim, o custo futuro da água refere-se ao custo esperado de geração térmica no futuro, entendendo como “futuro” o período desde o final do horizonte de curto prazo até o final do estudo (LINO, 2001, SILVA, 2001).

A Figura 5.1 mostra um exemplo da variação do custo futuro em um reservatório, para um estágio. Observa-se que o custo diminui à medida que o volume armazenado ao final do estágio aumenta.

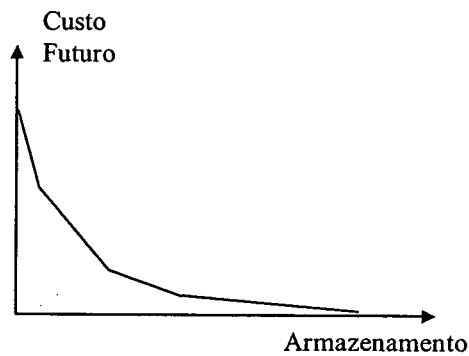


Figura 5.1- Função de Custo Futuro

A inclusão dos custos futuros da água na função objetivo do problema (custo social líquido) visa diminuir os custos térmicos no futuro associados à geração hidráulica no presente. Assim, o modelo obtém o ponto de operação ótimo como um compromisso entre os custos de gerar com combustível térmico no presente e/ou utilizar energia hidráulica, o qual poderia resultar em maiores custos no futuro.

A função de custo futuro é obtida do modelo de médio prazo através de cortes de Benders (PEREIRA e PINTO, 1985, SILVA, 2001), sendo portanto uma função linear por partes, como mostra a Figura 5.1. O problema de otimização (5.7) descreve a minimização do custo futuro.

$$\alpha_t(v_t) = \text{Minimizar } \alpha \quad (5.7)$$

sujeito a:

$$\alpha \geq C_{C_{i,t}} - \sum_{j=1}^{n_H} C_{V_{i,j,t}} v_{j,t}, \quad i = 1, \dots, n_C$$

onde :

- $v_{j,t}$: volume do reservatório j ao final do estágio t ;
- α_t : custo total esperado de operação desde o final do estágio t até o final do estudo;
- n_C : número de cortes de Benders;
- $C_{V_{i,j,t}}$: coeficiente do corte i , associado ao volume da usina j no estágio t ;
- $C_{C_{i,t}}$: termo associado ao corte i no estágio t .

5.2.3 Formulação do Problema

Com Meta de Volume ao Final do Horizonte de Curto Prazo

O problema de otimização (5.8) a seguir, apresenta a formulação do modelo de referência para a implementação de GLD em sistemas hidrotérmicos, no caso em que a meta hidráulica é expressa na forma de volume mínimo ao final do horizonte de curto prazo. Esta meta é incluída na função objetivo como uma penalidade sobre o volume ao final do horizonte, indicada de forma genérica como $F(\mathbf{v}_{n_T})$.

As restrições do problema incluem as condições de operação das variáveis hidráulicas, da demanda, da geração térmica e dos fluxos nas linhas em cada intervalo de despacho. A Equação (5.8-i) representa a restrição de consumo. Finalmente, (5.8-j) corresponde à conservação da água, escrita em forma matricial. Observa-se que esta última restrição vincula variáveis hidráulicas relacionadas a intervalos de despacho diferentes, de forma que pode ser tratada como uma restrição intertemporal.

São desconsideradas as restrições de tomada de carga dos turbogeradores. Estas restrições não são importantes em sistemas predominantemente hidráulicos, como é o caso do sistema brasileiro. Porém, para sistemas nos quais a geração térmica e hidráulica estão balanceadas podem ser significativas. Será visualizado no decorrer do capítulo que sua inclusão na presente formulação é bastante simples.

$$\text{Minimizar} \quad C_T(\mathbf{p}_g) - BC_T(\mathbf{p}_d) + F(\mathbf{v}_{n_T}) \quad (5.8-a)$$

sujeito a:

$$\mathbf{p}_{L_t} + \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{p}_{d_t} - \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{p}_{g_t} - \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p}_{h_t} + \mathbf{B} \cdot \theta_t = 0 \quad (5.8-b)$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{g_t} \leq \mathbf{p}_{g_t} \leq \bar{\mathbf{p}}_{g_t} \quad (5.8-c)$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{d_t} \leq \mathbf{p}_{d_t} \leq \bar{\mathbf{p}}_{d_t} \quad (5.8-d)$$

$$\underline{\mathbf{l}}_{L_t} \leq \Gamma \mathbf{A} \theta_t \leq \bar{\mathbf{l}}_{L_t} \quad (5.8-e)$$

$$\underline{\mathbf{v}}_t \leq \mathbf{v}_t \leq \bar{\mathbf{v}}_t \quad (5.8-f)$$

$$\underline{\mathbf{q}}_t \leq \mathbf{q}_t \leq \bar{\mathbf{q}}_t \quad (5.8-g)$$

$$0 \leq \mathbf{u}_t \quad (5.8-h)$$

} $t = 1, \dots, n_T$

com:

$$p_{h_{j,t}} = k_j \cdot [h_v(v_{j,t}) - h_w(q_{j,t} + u_{j,t})] \cdot q_{j,t}$$

$$j = 1, \dots, n_H \quad t = 1, \dots, n_T$$

$$\mathbf{P}_d \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_D \quad (5.8-i)$$

$$\mathbf{D}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{D}_u \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{u}) - \mathbf{v}_o - \mathbf{r} = 0 \quad (5.8-j)$$

onde:

- n_T : número de intervalos de tempo para o despacho;
- n_B : número de barras do sistema;
- n_G : número de geradores do sistema;
- n_H : número de usinas hidráulicas do sistema;
- n_D : número de cargas que respondem a preço;
- n_L : número de linhas de transmissão do sistema;
- $\boldsymbol{\tau}$: vetor ($n_T \times 1$) de duração dos intervalos de despacho;
- $\boldsymbol{\theta}_t$: vetor ($n_B \times 1$) de estados no intervalo t : ângulos da tensão nas barras;
- \mathbf{p}_{g_t} : vetor ($n_G \times 1$) das potências geradas pelos turbogeradores no intervalo t ;
- \mathbf{p}_{d_t} : vetor ($n_D \times 1$) das cargas dependentes de preço no intervalo t ;
- \mathbf{p}_{L_t} : vetor ($n_B \times 1$) das cargas fixas (não dependem de preço) no intervalo t ;
- \mathbf{p}_{h_t} : vetor ($n_H \times 1$) das potências geradas pelas usinas hidráulicas no intervalo t ;
- \mathbf{v}_t : vetor ($n_H \times 1$) dos volumes dos reservatórios no intervalo t ;
- \mathbf{q}_t : vetor ($n_H \times 1$) das vazões turbinadas no intervalo t ;
- \mathbf{u}_t : vetor ($n_H \times 1$) das vazões vertidas no intervalo t ;
- \mathbf{v} : vetor ($n_H \cdot n_T \times 1$) dos volumes dos reservatórios em todos os intervalos;
- \mathbf{q} : vetor ($n_H \cdot n_T \times 1$) das vazões turbinadas em todos os intervalos;
- \mathbf{u} : vetor ($n_H \cdot n_T \times 1$) das vazões vertidas em todos os intervalos;

- $\underline{l}_{L_t}, \bar{l}_{L_t}$: vetores ($n_L \times 1$) dos limites de fluxos nas linhas no intervalo t ;
- $\underline{p}_{(\cdot)_t}, \bar{p}_{(\cdot)_t}$: vetores ($n_G \times 1$) ou ($n_D \times 1$) dos limites de geração ou carga que responde a preço no intervalo t ;
- $\underline{v}_t, \bar{v}_t$: vetores ($n_H \times 1$) dos limites de volume no intervalo t ;
- $\underline{q}_t, \bar{q}_t$: vetores ($n_H \times 1$) dos limites de vazão turbinada no intervalo t ;
- \mathbf{p}_g : vetor ($n_G \cdot n_T \times 1$) de todas as potências de geração;
- \mathbf{p}_d : vetor ($n_D \cdot n_T \times 1$) de todas as cargas que respondem a preço;
- \mathbf{e}_D : vetor ($n_D \times 1$) das energias a serem gerenciadas;
- \mathbf{P}_d : matriz ($n_D \times n_T$) das cargas que respondem a preço (os elementos do vetor \mathbf{p}_d organizados na forma de matriz);
- \mathbf{v}_o : vetor ($n_H \cdot n_T \times 1$) de volumes ao início do horizonte, intercala zeros para o ajuste de dimensão;
- \mathbf{r} : vetor ($n_H \cdot n_T \times 1$) de aflúncias naturais aos reservatórios;
- \mathbf{A}_g : matriz ($n_B \times n_G$) de incidência barra-geradores;
- \mathbf{A}_d : matriz ($n_B \times n_D$) de incidência barra-carga que responde a preço;
- \mathbf{A}_h : matriz ($n_B \times n_H$) de incidência barra-reservatório;
- Γ : matriz ($n_L \times n_L$) diagonal de admitâncias das linhas;
- \mathbf{A} : matriz ($n_L \times n_B$) de incidência elemento-barra;
- \mathbf{B} : matriz de admitâncias de barras;
- \mathbf{D}_v : matriz ($n_H \cdot n_T$) \times ($n_H \cdot n_T$) que determina a diferença entre os volumes final e inicial do intervalo,

$$\mathbf{D}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \cdots & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & & & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \ddots & & \mathbf{O} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{onde } \mathbf{I} \text{ é a matriz identidade de}$$

dimensão n_H e \mathbf{O} é a matriz nula de dimensão $(n_H \times n_H)$.

\mathbf{D}_u : matriz $(n_H \cdot n_T) \times (n_H \cdot n_T)$, corresponde às vazões turbinada e vertida na equação de conservação da água.

É interessante fazer algumas observações sobre a matriz \mathbf{D}_u . Primeiramente, em caso de não existirem reservatórios em cascata, esta matriz é diagonal. Já quando existem reservatórios em cascata, \mathbf{D}_u inclui a representação da cascata e os atrasos devidos ao tempo de deslocamento da água. Como exemplo, apresenta-se a seguir a matriz \mathbf{D}_u no caso de duas unidades hidráulicas, para três intervalos de tempo, estando a usina número dois a montante da usina número um:

$$\mathbf{D}_u = \begin{bmatrix} \tau_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \tau_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \tau_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Um atraso da água defluente da usina dois de um intervalo de tempo modifica \mathbf{D}_u da seguinte forma:

$$\mathbf{D}_u = \begin{bmatrix} \tau_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \tau_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \tau_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \tau_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \tau_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Com Função de Custo Futuro

Neste trabalho, com o objetivo de representar o custo futuro da água, considera-se o horizonte de operação como um único estágio, de forma que os custos futuros devem ser expressos em função do volume ao final do horizonte, v_{n_T} . Este estágio único é dividido em intervalos de despacho, para os quais deve-se definir o nível de geração hidráulica, geração térmica e a alocação da potência de demanda submetida a GLD. As equações de continuidade da água e a restrição do consumidor estabelecem um acoplamento entre os intervalos de despacho.

Assim, procura-se minimizar o custo social líquido imediato de operação durante o horizonte completo mais o custo futuro da água, que depende do armazenamento ao final do mencionado horizonte.

Observa-se que é possível aproximar a função de custo futuro, dada a partir da função linear por partes da Figura 5.1, por uma curva contínua e diferenciável. Portanto, a formulação apresentada em (5.8) pode ser aplicada quando se considera o custo futuro.

Contudo, em (5.9) apresenta-se o modelo de referência para o GLD quando a função de custo futuro é dada por uma curva linear por partes. Devem ser adicionadas as restrições do custo futuro, dadas por (5.7), às restrições do problema.

$$\text{Minimizar} \quad C_T(\mathbf{p}_g) - BC_T(\mathbf{p}_d) + \alpha \quad (5.9-a)$$

sujeito a:

$$\mathbf{p}_{L_t} + \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{p}_{d_t} - \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{p}_{g_t} - \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p}_{h_t} + \mathbf{B} \cdot \theta_t = 0 \quad (5.9-b)$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{g_t} \leq \mathbf{p}_{g_t} \leq \bar{\mathbf{p}}_{g_t} \quad (5.9-c)$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{d_t} \leq \mathbf{p}_{d_t} \leq \bar{\mathbf{p}}_{d_t} \quad (5.9-d)$$

$$\underline{l}_{L_t} \leq \Gamma \mathbf{A} \theta_t \leq \bar{l}_{L_t} \quad (5.9-e)$$

$$\underline{\mathbf{v}}_t \leq \mathbf{v}_t \leq \bar{\mathbf{v}}_t \quad (5.9-f)$$

$$\underline{\mathbf{q}}_t \leq \mathbf{q}_t \leq \bar{\mathbf{q}}_t \quad (5.9-g)$$

$$0 \leq \mathbf{u}_t \quad (5.9-h)$$

com:

$$p_{h_{j,t}} = k_j \cdot [h_v(v_{j,t}) - h_w(q_{j,t} + u_{j,t})] \cdot q_{j,t}$$

$$j = 1, \dots, n_H \quad t = 1, \dots, n_T$$

$$\mathbf{P}_d \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_D \quad (5.9-i)$$

$$\mathbf{D}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{D}_u \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{u}) - \mathbf{v}_o - \mathbf{r} = 0 \quad (5.9-j)$$

$$\alpha \geq C_{C_{i,t}} - \sum_{j=1}^{n_H} C_{V_{i,j,t}} v_{j,t}, \quad i = 1, \dots, n_C \quad (5.9-k)$$

5.3 Solução da Formulação Através da Meta de Volume Final

Considera-se nesta seção a solução do problema de otimização apresentado em (5.8). Observa-se que as expressões (5.8-i) e (5.8-j) são restrições intertemporais. A primeira expressão refere-se à demanda a ser alocada, enquanto que a segunda vincula as variáveis hidráulicas. Deste modo, este problema pode ser considerado como uma extensão do FPOD apresentado no capítulo anterior, que incorpora uma restrição de acoplamento de variáveis hidráulicas. Apresenta-se uma solução semelhante à discutida para os sistemas termelétricos.

5.3.1 Problema Modificado para Aplicação do Método de Pontos Interiores

Na modificação do problema (5.8) para a aplicação do algoritmo Primal-Dual de Pontos Interiores, o primeiro passo é a transformação das restrições de desigualdade em restrições de igualdade utilizando variáveis de folga não negativas, apresentado em (5.10).

$$\text{Minimizar} \quad C_T(\mathbf{p}_g) - BC_T(\mathbf{p}_d) + F(\mathbf{v}_{n_T}) \quad (5.10)$$

sujeito a:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{L_t} + \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{p}_{d_t} - \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{p}_{g_t} - \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p}_{h_t} + \mathbf{B}\theta_t &= 0 \\ \mathbf{p}_{g_t} - \bar{\mathbf{p}}_{g_t} + \bar{\mathbf{s}}_{g_t} &= 0 \\ -\mathbf{p}_{g_t} + \underline{\mathbf{p}}_{g_t} + \underline{\mathbf{s}}_{g_t} &= 0 \\ \mathbf{p}_{d_t} - \bar{\mathbf{p}}_{d_t} + \bar{\mathbf{s}}_{d_t} &= 0 \\ -\mathbf{p}_{d_t} + \underline{\mathbf{p}}_{d_t} + \underline{\mathbf{s}}_{d_t} &= 0 \\ \Gamma \mathbf{A}\theta_t - \bar{\mathbf{l}}_{L_t} + \bar{\mathbf{s}}_{L_t} &= 0 \\ -\Gamma \mathbf{A}\theta_t + \underline{\mathbf{l}}_{L_t} + \underline{\mathbf{s}}_{L_t} &= 0 \\ \mathbf{v}_t - \bar{\mathbf{v}}_t + \bar{\mathbf{s}}_{v_t} &= 0 \\ -\mathbf{v}_t + \underline{\mathbf{v}}_t + \underline{\mathbf{s}}_{v_t} &= 0 \\ \mathbf{q}_t - \bar{\mathbf{q}}_t + \bar{\mathbf{s}}_{q_t} &= 0 \\ -\mathbf{q}_t + \underline{\mathbf{q}}_t + \underline{\mathbf{s}}_{q_t} &= 0 \\ -\mathbf{u}_t + \underline{\mathbf{s}}_{u_t} &= 0 \end{aligned} \right\} t=1 \dots n$$

$$\mathbf{s}(i)_t \geq 0, \quad i=1, \dots, n_V$$

com:

$$p_{h_{j,t}} = k_j \cdot [h_v(v_{j,t}) - h_w(q_{j,t} + u_{j,t})] \cdot q_{j,t}$$

$$j = 1, \dots, n_H \quad t = 1, \dots, n_T$$

$$\mathbf{P}_d \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_D$$

$$\mathbf{D}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{D}_u \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{u}) - \mathbf{v}_o - \mathbf{r} = 0$$

onde:

$\underline{\mathbf{s}}_{g_t}, \bar{\mathbf{s}}_{g_t}$: vetores ($n_G \times 1$) de variáveis de folga para a geração térmica no intervalo t ;

$\underline{\mathbf{s}}_{d_t}, \bar{\mathbf{s}}_{d_t}$: vetores ($n_D \times 1$) de variáveis de folga das cargas que respondem a preço no intervalo t ;

$\underline{\mathbf{s}}_{L_t}, \bar{\mathbf{s}}_{L_t}$: vetores ($n_L \times 1$) de variáveis de folga para os fluxos nas linhas no intervalo t ;

$\underline{\mathbf{s}}_{v_t}, \bar{\mathbf{s}}_{v_t}$: vetores ($n_H \times 1$) de variáveis de folga do volume no intervalo t ;

$\underline{s}_{q_t}, \bar{\underline{s}}_{q_t}$: vetores ($n_D \times 1$) de variáveis de folga da vazão turbinada no intervalo t ;

\underline{s}_{u_t} : vetores ($n_D \times 1$) de variáveis de folga da vazão vertida no intervalo t ;

n_V : número de restrições referentes unicamente ao intervalo t ,

$$n_V = 2 \cdot (n_G + n_D + n_L + n_H) + n_H$$

\underline{s}_t : vetor ($n_V \times 1$) das variáveis de folga referentes unicamente ao intervalo t ;

A função de Lagrange para o problema modificado é apresentada a seguir.

$$\begin{aligned}
 L = & C_T(\mathbf{p}_g) - BC_T(\mathbf{p}_d) + F(\mathbf{v}_{n_T}) + \\
 & \sum_{t=1}^{n_T} \lambda_t^T \cdot [\mathbf{p}_{L_t} + \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{p}_{d_t} - \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{p}_{g_t} - \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p}_{h_t} + \mathbf{B} \cdot \theta_t] + \\
 & + \sum_{t=1}^{n_T} \pi_t^T \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{F}_g | \mathbf{F}_d | \mathbf{F}_\theta | \mathbf{F}_v | \mathbf{F}_q | \mathbf{F}_u \\ \mathbf{p}_{g_t} \\ \mathbf{p}_{d_t} \\ \theta_t \\ \mathbf{v}_t \\ \mathbf{q}_t \\ \mathbf{u}_t \end{array} \right] - \mathbf{l}_t + \underline{\mathbf{s}}_t + \\
 & + \beta^T \cdot [\mathbf{e}_D - \mathbf{P}_d \cdot \tau] + \\
 & + \gamma^T \cdot [\mathbf{D}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{D}_u \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{u}) - \mathbf{v}_o - \mathbf{r}]
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

onde:

- λ_t : vetor ($n_B \times 1$) dos multiplicadores de Lagrange associados às equações de balanço de potência no intervalo t ;
- π_t : vetor ($n_V \times 1$) dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de limites de operação, superiores e inferiores, no intervalo t ;
- \mathbf{l}_t : vetor ($n_V \times 1$) dos limites operacionais, superiores e inferiores, no intervalo t ;
- β : vetor ($n_D \times 1$) dos multiplicadores de Lagrange associados à restrição de energia das cargas que respondem a preço;
- γ : vetor ($n_H \cdot n_T \times 1$) dos multiplicadores de Lagrange associados à equação de conservação da água nos reservatórios em cascata;

\mathbf{F}_g : matriz ($n_V \times n_G$),

$$\mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_G} \\ -\mathbf{I}_{n_G} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

\mathbf{F}_d : matriz ($n_V \times n_D$),

$$\mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{I}_{n_D} \\ -\mathbf{I}_{n_D} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

\mathbf{F}_θ : matriz ($n_V \times n_L$),

$$\mathbf{F}_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \Gamma \mathbf{A} \\ -\Gamma \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

\mathbf{F}_v : matriz ($n_V \times n_H$),

$$\mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{I}_{n_H} \\ -\mathbf{I}_{n_H} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

\mathbf{F}_q : matriz ($n_V \times n_H$),

$$\mathbf{F}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{I}_{n_H} \\ -\mathbf{I}_{n_H} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

\mathbf{F}_u : matriz ($n_V \times n_H$),

$$\mathbf{F}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ -\mathbf{I}_{n_H} \end{bmatrix}$$

5.3.2 Condições de Otimalidade

O passo seguinte é a formulação, a partir da função Lagrangeana, das condições de otimalidade de primeira ordem, efetuando-se uma perturbação nas condições de complementaridade com o parâmetro de perturbação μ . Estas condições são apresentadas em (5.12).

$$\nabla_{p_{g_t}} L = \nabla_{p_{g_t}} C_T - \mathbf{A}_g^T \cdot \lambda_t + \mathbf{F}_g^T \cdot \pi_t = 0 \quad (5.12-a)$$

$$\nabla_{p_{d_t}} L = -\nabla_{p_{d_t}} BC_T + \mathbf{A}_d^T \cdot \lambda_t + \mathbf{F}_d^T \cdot \pi_t - \tau_t \cdot \beta = 0 \quad (5.12-b)$$

$$\nabla_{\theta_t} L = \mathbf{B}^T \cdot \lambda_t + \mathbf{F}_\theta^T \cdot \pi_t = 0 \quad (5.12-c)$$

$$\nabla_{v_t} L = -\Lambda_{h_t} \cdot \nabla_v \mathbf{p}_{h_t} + \mathbf{F}_v^T \cdot \pi_t + \left[\mathbf{D}_v^T \cdot \gamma \right]_t + \nabla_{v_t} F(\mathbf{v}_{n_T}) = 0 \quad (5.12-d)$$

$$\nabla_{q_t} L = -\Lambda_{h_t} \cdot \nabla_q \mathbf{p}_{h_t} + \mathbf{F}_q^T \cdot \pi_t + \left[\mathbf{D}_u^T \cdot \gamma \right]_t = 0 \quad (5.12-e)$$

$$\nabla_{u_t} L = -\Lambda_{h_t} \cdot \nabla_u \mathbf{p}_{h_t} + \mathbf{F}_u^T \cdot \pi_t + \left[\mathbf{D}_u^T \cdot \gamma \right]_t = 0 \quad (5.12-f)$$

$$\nabla_{\lambda_t} L = \mathbf{p}_{L_t} + \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{p}_{d_t} - \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{p}_{g_t} - \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p}_{h_t} + \mathbf{B} \cdot \theta_t = 0 \quad (5.12-g)$$

$$\nabla_{\pi_t} L = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_g & \mathbf{F}_d & \mathbf{F}_\theta & \mathbf{F}_v & \mathbf{F}_q & \mathbf{F}_u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{g_t} \\ \mathbf{p}_{d_t} \\ \theta_t \\ \mathbf{v}_t \\ \mathbf{q}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} - \mathbf{1}_t + \mathbf{s}_t = 0 \quad (5.12-h)$$

$t = 1, \dots, n_T$

$$\nabla_{s_t} L = \mathbf{S}_t \cdot \pi_t - \mu \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (5.12-i)$$

$$\nabla_{\beta} L = \mathbf{e}_D - \mathbf{P}_d \cdot \tau = 0 \quad (5.12-j)$$

$$\nabla_{\gamma} L = \mathbf{D}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{D}_u \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{u}) - \mathbf{v}_o - \mathbf{r} = 0 \quad (5.12-k)$$

onde:

τ_t : componente do vetor τ , com a duração do intervalo t ;

Λ_{h_t} : matriz diagonal formada pelos multiplicadores λ correspondentes às barras de geração hidráulica, no intervalo t ;

$\nabla_{(\cdot)} \mathbf{p}_h$: matriz diagonal, formada pelas derivadas de primeira ordem da potência hidrelétrica gerada, em relação a alguma variável hidráulica;

$\nabla_{v_t} F(\mathbf{v}_{n_T})$: gradiente da função de penalidade do volume final, é não-nulo somente para $t = n_T$;

$\left[\mathbf{D}_{v/u}^T \cdot \gamma \right]_t$: componentes do vetor $\left[\mathbf{D}_{v/u}^T \cdot \gamma \right]$ para o intervalo t ;

\mathbf{S}_t : matriz diagonal formada com os elementos de \mathbf{s}_t ;

\mathbf{k} : vetor unitário com a dimensão adequada.

O sistema de equações não-linear acima é resolvido iterativamente, efetuando um único passo do método de Newton em cada iteração. O parâmetro de perturbação é gradualmente diminuído a zero em cada iteração, através de regras heurísticas.

5.3.3 Solução das Condições de Otimalidade

Ao efetuar a linearização das condições de otimalidade perturbadas apresentadas em (5.12), na aplicação do método de Newton, obtém-se (5.13).

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{n_T} \mathbf{C}_{T_t,j}'' \cdot \Delta \mathbf{p}_{g_j} - \mathbf{A}_g^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_g^T \cdot \Delta \pi_t &= -\nabla_{p_{g_t}} \mathbf{L} \\
 -\sum_{j=1}^{n_T} \mathbf{BC}_{T_t,j}'' \cdot \Delta \mathbf{p}_{d_j} + \mathbf{A}_d^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_d^T \cdot \Delta \pi_t - \tau_t \mathbf{I} \cdot \Delta \beta &= -\nabla_{p_{d_t}} \mathbf{L} \\
 \mathbf{B}^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_\theta^T \cdot \Delta \pi_t &= -\nabla_{\theta_t} \mathbf{L} \\
 \mathbf{E}_{v_t} \cdot \Delta \mathbf{v}_t + \mathbf{E}_{vq_t} \cdot \Delta \mathbf{q}_t + \mathbf{L}_{v_t}^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_v^T \cdot \Delta \pi_t + \mathbf{D}_{v_t}^T \cdot \Delta \gamma &= -\nabla_{v_t} \mathbf{L} \\
 \mathbf{E}_{qv_t} \cdot \Delta \mathbf{v}_t + \mathbf{E}_{q_t} \cdot \Delta \mathbf{q}_t + \mathbf{E}_{qu_t} \cdot \Delta \mathbf{u}_t + \mathbf{L}_{q_t}^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_q^T \cdot \Delta \pi_t + \mathbf{D}_{u_t}^T \cdot \Delta \gamma &= -\nabla_{q_t} \mathbf{L} \\
 \mathbf{E}_{uq_t} \cdot \Delta \mathbf{q}_t + \mathbf{E}_{u_t} \cdot \Delta \mathbf{u}_t + \mathbf{L}_{u_t}^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_u^T \cdot \Delta \pi_t + \mathbf{D}_{u_t}^T \cdot \Delta \gamma &= -\nabla_{u_t} \mathbf{L} \\
 -\mathbf{A}_g \cdot \Delta \mathbf{p}_{g_t} + \mathbf{A}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_{d_t} + \mathbf{B} \cdot \Delta \theta_t + \mathbf{L}_{v_t} \cdot \Delta \mathbf{v}_t + \mathbf{L}_{q_t} \cdot \Delta \mathbf{q}_t + \mathbf{L}_{u_t} \cdot \Delta \mathbf{u}_t &= -\nabla_{\lambda_t} \mathbf{L} \\
 \mathbf{F}_g \cdot \Delta \mathbf{p}_{g_t} + \mathbf{F}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_{d_t} + \mathbf{F}_\theta \cdot \Delta \theta_t + \mathbf{F}_v \cdot \Delta \mathbf{v}_t + \mathbf{F}_q \cdot \Delta \mathbf{q}_t + \mathbf{F}_u \cdot \Delta \mathbf{u}_t + \mathbf{I} \cdot \Delta \mathbf{s}_t &= -\nabla_{\pi_t} \mathbf{L} \\
 \mathbf{S}_t \cdot \Delta \pi + \mathbf{\Pi}_t \cdot \Delta \mathbf{s} &= -\nabla_{s_t} \mathbf{L} \\
 t &= 1, \dots, n_T \\
 -\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \mathbf{I} \cdot \Delta \mathbf{p}_{d_t} &= -\nabla_{\beta} \mathbf{L} \\
 \mathbf{D}_v \cdot \Delta \mathbf{v} + \mathbf{D}_u \cdot \Delta \mathbf{q} + \mathbf{D}_u \cdot \Delta \mathbf{u} &= -\nabla_{\gamma} \mathbf{L}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

onde:

$$\mathbf{C}_{T_t,j}'' = \nabla_{p_{g_t}, p_{g_j}}^2 C_T(\mathbf{p}_g);$$

$$\mathbf{BC}_{T_t,j}'' = \nabla_{p_{d_t}, p_{d_j}}^2 BC_T(\mathbf{p}_d);$$

\mathbf{I} denota matrizes identidades com a dimensão adequada;

τ_t é duração do intervalo t ;

$$\mathbf{E}_{v_t} \text{ é uma matriz diagonal: } \mathbf{E}_{v_t} = \nabla_{v_t, v_t}^2 \mathbf{L} = -\Lambda_{h_t} \cdot \nabla_{v_t, v_t}^2 \mathbf{p}_{h_t} + \nabla_{v_{nT}}^2 F(\mathbf{v}_{nT}),$$

onde $\nabla_{v_t, v_t}^2 \mathbf{p}_{h_t}$ é a matriz diagonal formada pelas segundas derivadas da potência hidráulica em relação ao volume no intervalo t ;

$$\mathbf{E}_{q_t} = \nabla_{q_t, q_t}^2 \mathbf{L} = -\Lambda_{h_t} \cdot \nabla_{q_t, q_t}^2 \mathbf{P}_{h_t};$$

$$\mathbf{E}_{u_t} = \nabla_{u_t, u_t}^2 \mathbf{L} = -\Lambda_{h_t} \cdot \nabla_{u_t, u_t}^2 \mathbf{P}_{h_t};$$

$$\mathbf{E}_{v_{q_t}} = \nabla_{v_t, q_t}^2 \mathbf{L} = -\Lambda_{h_t} \cdot \nabla_{v_t, q_t}^2 \mathbf{P}_{h_t} \equiv \mathbf{E}_{qv_t};$$

$$\mathbf{E}_{qu_t} = \nabla_{q_t, u_t}^2 \mathbf{L} = -\Lambda_{h_t} \cdot \nabla_{q_t, u_t}^2 \mathbf{P}_{h_t} \equiv \mathbf{E}_{uq_t};$$

Verifica-se: $\mathbf{E}_{vu_t} = 0$;

$\mathbf{L}_{v_t}, \mathbf{L}_{q_t}, \mathbf{L}_{u_t}$ derivadas de segunda ordem da função Lagrangeana em relação aos multiplicadores λ primeiro e às variáveis hidráulicas depois, possuem igual estrutura que a matriz de incidência barra-reservatórios \mathbf{A}_h :

$$\mathbf{L}_{v_t} = \nabla_{\lambda_t, v_t}^2 \mathbf{L} = -\mathbf{A}_h \cdot \nabla_{v_t} \mathbf{P}_{h_t},$$

$$\mathbf{L}_{q_t} = \nabla_{\lambda_t, q_t}^2 \mathbf{L} = -\mathbf{A}_h \cdot \nabla_{q_t} \mathbf{P}_{h_t},$$

$$\mathbf{L}_{u_t} = \nabla_{\lambda_t, u_t}^2 \mathbf{L} = -\mathbf{A}_h \cdot \nabla_{u_t} \mathbf{P}_{h_t}.$$

Redução do Sistema Linear

De forma análoga ao Capítulo 4, efetua-se a redução do sistema linear até que este represente somente o incremento no ângulo da tensão nas barras $\Delta\theta$ e no multiplicador de Lagrange $\Delta\lambda$. Posteriormente, os incrementos nas variáveis restantes são obtidos resolvendo as equações auxiliares. Para efetuar a redução, observa-se que a equação de conservação da água é uma restrição intertemporal de igualdade. Portanto, é tratada de forma similar à restrição de consumo de energia.

A reordenação das variáveis e das equações é a mesma do Capítulo 4: variáveis semelhantes pertencentes a intervalos diferentes são agrupadas em um mesmo subvetor. Por exemplo, para o vetor de estados tem-se: $\theta = \left[\theta_1^T \theta_2^T \dots \theta_{n_T}^T \right]^T$. O sistema linear sob esta ordenação é apresentado em (5.14).

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\mathbf{C}_T}} \cdot \Delta \mathbf{p}_g - \overline{\mathbf{A}_g} \cdot \Delta \lambda + \overline{\mathbf{F}_g} \cdot \Delta \pi &= \mathbf{b}_g \\
-\overline{\overline{\mathbf{B}\mathbf{C}_T}} \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\mathbf{A}_d} \cdot \Delta \lambda + \overline{\mathbf{F}_d} \cdot \Delta \pi - \overline{\mathbf{I}_d} \cdot \Delta \beta &= \mathbf{b}_d \\
\overline{\mathbf{B}} \cdot \Delta \lambda + \overline{\mathbf{F}_\theta} \cdot \Delta \pi &= \mathbf{b}_\theta \\
\overline{\mathbf{E}_v} \cdot \Delta \mathbf{v} + \overline{\mathbf{E}_{vq}} \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\mathbf{L}_v} \cdot \Delta \lambda + \overline{\mathbf{F}_v} \cdot \Delta \pi + \overline{\mathbf{D}_v} \cdot \Delta \gamma &= \mathbf{b}_v \\
\overline{\mathbf{E}_{qv}} \cdot \Delta \mathbf{v} + \overline{\mathbf{E}_q} \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\mathbf{E}_{qu}} \cdot \Delta \mathbf{u} + \overline{\mathbf{L}_q} \cdot \Delta \lambda + \overline{\mathbf{F}_q} \cdot \Delta \pi + \overline{\mathbf{D}_u} \cdot \Delta \gamma &= \mathbf{b}_q \\
\overline{\mathbf{E}_{uq}} \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\mathbf{E}_u} \cdot \Delta \mathbf{u} + \overline{\mathbf{L}_u} \cdot \Delta \lambda + \overline{\mathbf{F}_u} \cdot \Delta \pi + \overline{\mathbf{D}_u} \cdot \Delta \gamma &= \mathbf{b}_u \\
-\overline{\mathbf{A}_g} \cdot \Delta \mathbf{p}_g + \overline{\mathbf{A}_d} \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\mathbf{B}} \cdot \Delta \theta + \overline{\mathbf{L}_v} \cdot \Delta \mathbf{v} + \overline{\mathbf{L}_q} \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\mathbf{L}_u} \cdot \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{b}_\lambda \\
\overline{\mathbf{F}_g} \cdot \Delta \mathbf{p}_g + \overline{\mathbf{F}_d} \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\mathbf{F}_\theta} \cdot \Delta \theta + \overline{\mathbf{F}_v} \cdot \Delta \mathbf{v} + \overline{\mathbf{F}_q} \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\mathbf{F}_u} \cdot \Delta \mathbf{u} + \overline{\mathbf{I}} \cdot \Delta \mathbf{s} &= \mathbf{b}_\pi \\
\overline{\mathbf{S}} \cdot \Delta \pi + \overline{\mathbf{\Pi}} \cdot \Delta \mathbf{s} &= \mathbf{b}_s \\
-\overline{\mathbf{I}_d} \cdot \Delta \mathbf{p}_d &= \mathbf{b}_\beta \\
\overline{\mathbf{D}_v} \cdot \Delta \mathbf{v} + \overline{\mathbf{D}_u} \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\mathbf{D}_u} \cdot \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{b}_\gamma
\end{aligned} \tag{5.14}$$

onde, ao igual que no Capítulo 4, as matrizes com barras duplas superiores representam

matrizes bloco diagonais, por exemplo: $\overline{\overline{\mathbf{A}_g}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_g & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_g \end{bmatrix}$, $\overline{\mathbf{I}_d} = [\tau_1 \mathbf{I} \cdots \tau_{n_T} \mathbf{I}]$, \mathbf{I} é a

matriz identidade de dimensão n_D e $\mathbf{b}(\cdot) = -\nabla(\cdot)$.

O procedimento de redução consiste na eliminação das seguintes variáveis: $\Delta \mathbf{s}$, $\Delta \pi$, $\Delta \mathbf{p}_g$, $\Delta \mathbf{p}_d$, $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \mathbf{q}$ e $\Delta \mathbf{v}$. A resolução para as quatro primeiras variáveis é efetuada da mesma forma que nos sistemas termelétricos do Capítulo 4. O sistema obtido é apresentado em (5.15) e as equações auxiliares em (5.16). Para simplificar as expressões, as variáveis hidráulicas são agrupadas em um vetor \mathbf{x} . A matriz \mathbf{K}_d coincide com a obtida no Capítulo 4. Já a matriz \mathbf{K}_g não inclui o termo correspondente às restrições de tomada de carga.

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\mathbf{F}}_\theta \left(\overline{\mathbf{S}} \quad \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \overline{\mathbf{F}}_\theta \right) \cdot \Delta\theta + \overline{\mathbf{B}}^T \cdot \Delta\lambda &= \hat{\mathbf{b}}_\theta \\
\overline{\mathbf{E}} \cdot \Delta\mathbf{x} + \overline{\mathbf{L}}^T \cdot \Delta\lambda + \mathbf{D}^T \cdot \Delta\gamma &= \hat{\mathbf{b}}_x \\
\overline{\mathbf{B}} \cdot \Delta\theta + \overline{\mathbf{L}} \cdot \Delta\mathbf{x} - \left(\overline{\mathbf{A}}_g \mathbf{K}_g \overline{\mathbf{A}}_g^T + \overline{\mathbf{A}}_d \mathbf{K}_d \overline{\mathbf{A}}_d^T \right) \cdot \Delta\lambda + \left(\overline{\mathbf{A}}_d \mathbf{K}_d \mathbf{I}_d^T \right) \cdot \Delta\beta &= \hat{\mathbf{b}}_\lambda \\
\left(\mathbf{I}_d \mathbf{K}_d \overline{\mathbf{A}}_d^T \right) \cdot \Delta\lambda - \left(\mathbf{I}_d \mathbf{K}_d \mathbf{I}_d^T \right) \cdot \Delta\beta &= \hat{\mathbf{b}}_\beta \\
\mathbf{D} \cdot \Delta\mathbf{x} &= \mathbf{b}_\gamma
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{b}}_\pi &= \mathbf{b}_\pi - \overline{\mathbf{\Pi}}^{-1} \cdot \mathbf{b}_s \\
\hat{\mathbf{b}}_g &= \mathbf{b}_g + \overline{\mathbf{F}}_g^T \left(\overline{\mathbf{S}} \quad \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi \\
\hat{\mathbf{b}}_d &= \mathbf{b}_d + \overline{\mathbf{F}}_d^T \left(\overline{\mathbf{S}} \quad \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi \\
\hat{\mathbf{b}}_\theta &= \mathbf{b}_\theta + \overline{\mathbf{F}}_\theta^T \left(\overline{\mathbf{S}} \quad \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi \\
\hat{\mathbf{b}}_x &= \mathbf{b}_x + \overline{\mathbf{F}}^T \left(\overline{\mathbf{S}} \quad \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi \\
\hat{\mathbf{b}}_\lambda &= \mathbf{b}_\lambda + \overline{\mathbf{A}}_g \mathbf{K}_g \hat{\mathbf{b}}_g - \overline{\mathbf{A}}_d \mathbf{K}_d \hat{\mathbf{b}}_g \\
\hat{\mathbf{b}}_\beta &= \mathbf{b}_\beta + \mathbf{I}_d \mathbf{K}_d \hat{\mathbf{b}}_\beta
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{s} &= \overline{\mathbf{\Pi}}^{-1} \cdot \left(\mathbf{b}_s - \overline{\mathbf{S}} \cdot \Delta\pi \right) \\
\Delta\pi &= \left(\overline{\mathbf{S}} \quad \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \cdot \left(\overline{\mathbf{F}}_g \cdot \Delta\mathbf{p}_g + \overline{\mathbf{F}}_d \cdot \Delta\mathbf{p}_d + \overline{\mathbf{F}}_\theta \cdot \Delta\theta + \overline{\mathbf{F}} \cdot \Delta\mathbf{x} - \hat{\mathbf{b}}_\pi \right) \\
\Delta\mathbf{p}_g &= \mathbf{K}_g \cdot \left(\hat{\mathbf{b}}_g + \overline{\mathbf{A}}_g^T \cdot \Delta\lambda \right) \\
\Delta\mathbf{p}_d &= \mathbf{K}_d \cdot \left(\hat{\mathbf{b}}_d - \overline{\mathbf{A}}_d^T \cdot \Delta\lambda + \mathbf{I}_d^T \Delta\beta \right)
\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_g &= \left(\overline{\mathbf{C}}_T + \overline{\mathbf{F}}_g^T \left(\overline{\mathbf{S}} \quad \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \overline{\mathbf{F}}_g \right)^{-1} \\
\mathbf{K}_d &= \left(\overline{\mathbf{F}}_d^T \left(\overline{\mathbf{S}} \quad \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \overline{\mathbf{F}}_d - \overline{\mathbf{B}} \overline{\mathbf{C}}_T \right)^{-1} \\
\mathbf{D} &= [\mathbf{D}_v | \mathbf{D}_u | \mathbf{D}_u]
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_v \\ \mathbf{b}_q \\ \mathbf{b}_u \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{L}} = \left[\bar{\mathbf{L}}_v \mid \bar{\mathbf{L}}_q \mid \bar{\mathbf{L}}_u \right], \quad \bar{\mathbf{F}} = \left[\bar{\mathbf{F}}_v \mid \bar{\mathbf{F}}_q \mid \bar{\mathbf{F}}_u \right]$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_v + \bar{\mathbf{F}}_v^T (\bar{\mathbf{S}}^{-1} \bar{\mathbf{\Pi}}) \bar{\mathbf{F}}_v & \bar{\mathbf{E}}_{vq} & \\ \bar{\mathbf{E}}_{qv} & \bar{\mathbf{E}}_q + \bar{\mathbf{F}}_q^T (\bar{\mathbf{S}}^{-1} \bar{\mathbf{\Pi}}) \bar{\mathbf{F}}_q & \bar{\mathbf{E}}_{qu} \\ & \bar{\mathbf{E}}_{uq} & \bar{\mathbf{E}}_u + \bar{\mathbf{F}}_u^T (\bar{\mathbf{S}}^{-1} \bar{\mathbf{\Pi}}) \bar{\mathbf{F}}_u \end{bmatrix}$$

O passo seguinte é a solução para as variáveis hidráulicas, contidas em $\Delta \mathbf{x}$. As equações obtidas e as expressões auxiliares são apresentadas em (5.17) e (5.18).

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} \cdot \Delta \theta + \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \Delta \lambda &= \hat{\mathbf{b}}_\theta \\ \bar{\mathbf{B}} \cdot \Delta \theta - \mathbf{A}_m \cdot \Delta \lambda + \left(\bar{\mathbf{A}}_d \mathbf{K}_d \mathbf{I}_d^T \right) \cdot \Delta \beta - \left(\bar{\mathbf{L}} \mathbf{K}_h \mathbf{D}^T \right) \cdot \Delta \gamma &= \tilde{\mathbf{b}}_\lambda \\ \left(\mathbf{I}_d \mathbf{K}_d \bar{\mathbf{A}}_d^T \right) \cdot \Delta \lambda - \left(\mathbf{I}_d \mathbf{K}_d \mathbf{I}_d^T \right) \cdot \Delta \beta &= \hat{\mathbf{b}}_\beta \\ - \left(\mathbf{D} \mathbf{K}_h \bar{\mathbf{L}}^T \right) \cdot \Delta \lambda - \left(\mathbf{D} \mathbf{K}_h \mathbf{D}^T \right) \cdot \Delta \gamma &= \hat{\mathbf{b}}_\gamma \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{K}_h \cdot \left(\mathbf{b}_x - \bar{\mathbf{L}}^T \cdot \Delta \lambda - \mathbf{D}^T \cdot \Delta \gamma \right) \\ \tilde{\mathbf{b}}_\lambda &= \hat{\mathbf{b}}_\lambda - \bar{\mathbf{L}} \mathbf{K}_h \hat{\mathbf{b}}_x \\ \hat{\mathbf{b}}_\gamma &= \mathbf{b}_\gamma - \mathbf{D} \mathbf{K}_h \hat{\mathbf{b}}_x \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} &= \bar{\mathbf{F}}_\theta^T (\bar{\mathbf{S}}^{-1} \bar{\mathbf{\Pi}}) \bar{\mathbf{F}}_\theta \\ \mathbf{A}_m &= \left(\bar{\mathbf{A}}_g \mathbf{K}_g \bar{\mathbf{A}}_g^T + \bar{\mathbf{A}}_d \mathbf{K}_d \bar{\mathbf{A}}_d^T + \bar{\mathbf{L}} \mathbf{K}_h \bar{\mathbf{L}}^T \right) \\ \mathbf{K}_h &= \bar{\mathbf{E}}^{-1} \end{aligned}$$

Na implementação do passo anterior, resolve-se para cada variável individual: Δv , Δq e Δu . Desta forma explora-se o fato de que todas as matrizes $\overline{\mathbf{E}}_{(\cdot)}$ e $\left(\overline{\mathbf{E}}_{(\cdot)} + \overline{\mathbf{F}}_{(\cdot)}^T \left(\overline{\mathbf{S}}^{-1} \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \overline{\mathbf{F}}_{(\cdot)}\right)$ são diagonais e a determinação da matriz \mathbf{K}_h torna-se simples.

Alguns detalhes de implementação são apresentados no Anexo A.

É interessante observar a estrutura da matriz $\overline{\mathbf{L}}$. Esta matriz é formada pelas matrizes $\overline{\mathbf{L}}_v$, $\overline{\mathbf{L}}_q$ e $\overline{\mathbf{L}}_u$, que são bloco diagonais, e cada bloco diagonal possui a estrutura da matriz de incidência barra-reservatórios. Evidencia-se, portanto, uma simetria na construção da matriz \mathbf{A}_m , já que é expressa como a soma de produtos com a forma:

$$[\text{Matriz_Incidência}] \mathbf{K}_{(\cdot)} [\text{Matriz_Incidência}]^T,$$

Solução do Sistema Reduzido

Rescreve-se o sistema de equações reduzido em (5.19). As matrizes \mathbf{J} e \mathbf{T} correspondem à restrição intertemporal de consumo, sendo idênticas às correspondentes do capítulo anterior. As matrizes $\hat{\mathbf{D}}$ e \mathbf{H} referem-se à equação de conservação da água.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \overline{\mathbf{B}}^T & & & \\ \overline{\mathbf{B}} & -\mathbf{A}_m & \mathbf{J}^T & \hat{\mathbf{D}}^T & \\ & \mathbf{J} & -\mathbf{T} & & \\ & \hat{\mathbf{D}} & & -\mathbf{H} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\lambda \\ \Delta\beta \\ \Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_\theta \\ \tilde{\mathbf{b}}_\lambda \\ \hat{\mathbf{b}}_\beta \\ \hat{\mathbf{b}}_\gamma \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

onde:

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}_d \mathbf{K}_d \overline{\mathbf{A}}_d^T$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{I}_d \mathbf{K}_d \mathbf{I}_d^T$$

$$\hat{\mathbf{D}} = -\mathbf{D} \mathbf{K}_h \overline{\mathbf{L}}^T$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{D} \mathbf{K}_h \mathbf{D}^T$$

As sub-matrizes \mathbf{P} e $\overline{\mathbf{B}}$ são idênticas as do Capítulo 4. Como se recorda, ambas são matrizes bloco-diagonais com dimensão $(n_T \times n_T)$, cada bloco tem dimensão $(n_B \times n_B)$ e

possui o mesmo padrão de elementos não-nulos que a matriz de admitâncias da rede de transmissão. Finalmente, a matriz \mathbf{A}_m possui estrutura em bandas, como no Capítulo 4.

Para identificar a estrutura da matriz do sistema reduzido, prossegue-se com a segunda reordenação. Obtém-se o sistema matricial apresentado em (5.20). A matriz \mathbf{M} é bastante semelhante à correspondente matriz dos sistemas termelétricos. É uma matriz em blocos, na qual cada bloco (i,j) é formado a partir dos elementos de \mathbf{P} , $\overline{\mathbf{B}}$ e \mathbf{A}_m , como indicado na expressão (5.21). Assim, \mathbf{M} é vista como uma matriz de dimensão $(n_B \times n_B)$ na qual cada bloco tem dimensão $(2.n_T \times 2.n_T)$. Pode-se verificar que a matriz \mathbf{A}_m sob a nova ordenação é bloco-diagonal. Ainda, \mathbf{A}_m somente contribui com elementos não-nulos nos blocos diagonais de \mathbf{M} , que correspondem a barras de geração térmica, carga que responde a preço ou também a barras de geração hidráulica. $\overline{\mathbf{J}}$ e $\overline{\mathbf{D}}$ correspondem às matrizes \mathbf{J} e $\hat{\mathbf{D}}$ sob a nova ordenação.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \overline{\mathbf{J}}^T & \overline{\mathbf{D}}^T \\ \overline{\mathbf{J}} & -\mathbf{T} & \\ \overline{\mathbf{D}} & & -\mathbf{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \\ \Delta\beta \\ \Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{b}}_\beta \\ \hat{\mathbf{b}}_\gamma \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_\theta \\ \hat{\mathbf{b}}_\lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i+k.n_B, j+k.n_B} & \overline{\mathbf{B}}_{i+k.n_B, j+k.n_B}^T \\ \overline{\mathbf{B}}_{i+k.n_B, j+k.n_B} & -\mathbf{A}_{m_{i+k.n_B, j+k.n_B}} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, n_T \quad (5.21)$$

As observações sobre a matriz \mathbf{M} efetuadas no Capítulo 4 são aplicáveis neste caso. Como se recorda, os sub-blocos $(1,1)$, $(1,2)$ e $(2,1)$ do bloco $\mathbf{M}_{(i,j)}$ são sempre matrizes diagonais, e os sub-blocos $(2,2)$ podem não ser diagonais. Estes últimos são matrizes cheias quando correspondem a barras de geração térmica ou a barras com cargas que dependem do preço e levam-se em consideração as elasticidades-preço cruzadas.

Rescreve-se ainda o sistema reduzido de forma mais simplificada em (5.22).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{W} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \\ \Delta\varepsilon \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_\varepsilon \end{bmatrix} \\ \Delta\varepsilon &= \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta\gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_\beta \\ \hat{\mathbf{b}}_\gamma \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}} \\ \bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \\ & \mathbf{H} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Optou-se por resolver primeiro para Δ e posteriormente para $\Delta\varepsilon$. Os passos da resolução são indicados em (5.23) e (5.24).

$$(\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{M}) \cdot \Delta = \mathbf{b} + \mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{b}_\varepsilon \quad (5.23)$$

$$\mathbf{W} \cdot \Delta\varepsilon = \mathbf{Q} \cdot \Delta - \mathbf{b}_\varepsilon \quad (5.24)$$

O termo $\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}$ corresponde às restrições intertemporais. Devido à forma particular das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{W} , todos os elementos não nulos de $\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}$ correspondem a termos em $\Delta\lambda$. Assim, um elemento (i,j) tem a seguinte forma:

$$(\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q})_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \\ \mathbf{O} & [(\bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{J}})_{(i,j)} + (\bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{H}^{-1} \bar{\mathbf{D}})_{(i,j)}] \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

A matriz $(\bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{J}})$ já foi discutida no Capítulo 4. Como foi visto, esta matriz não modifica o padrão de elementos não-nulos da matriz \mathbf{M} . Já a matriz $(\bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{H}^{-1} \bar{\mathbf{D}})$, que aparece em (5.25) pode modificar a estrutura da matriz \mathbf{M} . Quanto a isto, podem ser efetuadas as seguintes observações:

1. Os blocos diagonais são não-nulos, $(\bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{H}^{-1} \bar{\mathbf{D}})_{(i,i)} \neq \mathbf{O}$, quando a barra i corresponde a geração hidráulica.
2. Os blocos fora da diagonal são não nulos, $(\bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{H}^{-1} \bar{\mathbf{D}})_{(i,j)} \neq \mathbf{O}$, quando a barra i e a barra j correspondem a usinas em cascata. Esta característica é muito importante, já que

existirá enchimento na matriz \mathbf{M} no caso em que as barras i e j não estiverem conectadas eletricamente.

Ressalta-se que nos blocos fora da diagonal de \mathbf{M} , os sub-blocos $(2,2)$, que correspondem à matriz \mathbf{A}_m , são sempre nulos. Na matriz $(\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{M})$ estes sub-blocos podem ser não nulos, como foi indicado. Desta forma, a matriz modificada reflete tanto a estrutura da rede elétrica quanto a estrutura do sistema de reservatórios em cascata.

Como exemplo, apresenta-se na Figura 5.2 as matrizes reduzidas \mathbf{M} e $(\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{M})$, para um sistema de seis barras, um gerador térmico, uma carga que responde a preço (CRP) e três usinas hidrelétricas, em um horizonte com dois intervalos de tempo. Para a carga que responde a preço desconsidera-se a elasticidade-preço cruzada no tempo, de forma que no bloco $\mathbf{M}_{(2,2)}$, o sub-bloco $(2,2)$ é diagonal. Já em $(\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{M})$ este sub-bloco torna-se não diagonal devido aos acoplamentos da restrição intertemporal de consumo, representados pelas matrizes $\bar{\mathbf{J}}$ e \mathbf{T} . Este enchimento é indicado em azul na Figura 5.2. Para o turbogerador conectado à barra 1, considera-se a elasticidade-preço cruzada, de forma que no bloco $\mathbf{M}_{(1,1)}$, o sub-bloco $(2,2)$ é não-diagonal.

Observa-se também na Figura 5.2 que os sub-blocos $(2,2)$ dos blocos diagonais $\mathbf{M}_{(3,3)}$, $\mathbf{M}_{(5,5)}$ e $\mathbf{M}_{(6,6)}$, correspondentes às usinas hidráulicas, são diagonais. Já na matriz $(\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{M})$ estes sub-blocos incorporam a informação da restrição de conservação da água e tornam-se não-diagonais. Este enchimento é indicado em vermelho na Figura 5.2. Finalmente, observa-se que as usinas hidráulicas correspondentes às barras 5 e 6 não estão conectadas eletricamente, portanto os blocos não diagonais $\mathbf{M}_{(5,6)}$ e $\mathbf{M}_{(6,5)}$ são nulos. Entretanto, devido a esta usinas estarem em cascata, é produzido enchimento nos blocos respectivos da matriz $(\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{M})$, conforme é indicado em verde na Figura 5.2.

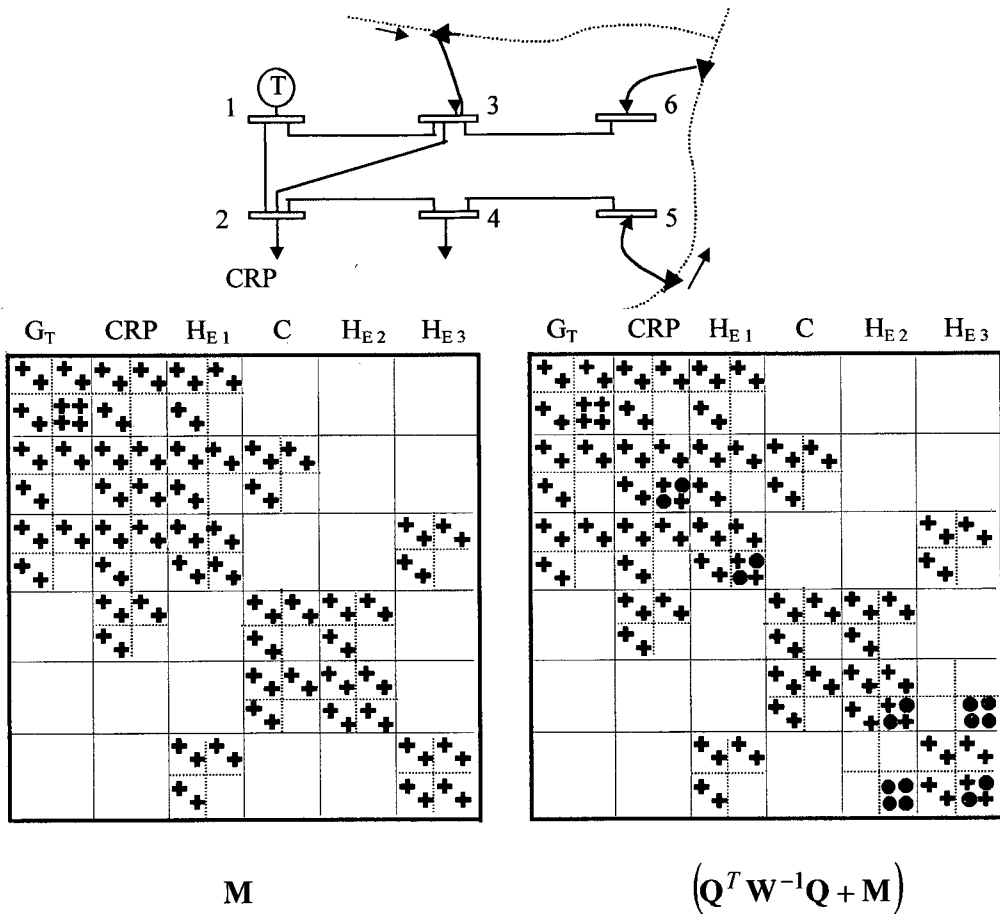


Figura 5.2- Sistema de seis barras: matrizes do sistema reduzido para abordagem via metas de volume.

Observa-se ainda que, diferentemente dos sistemas termelétricos, o acoplamento no tempo fica confinado em alguns sub-blocos diagonais da matriz do sistema linear reduzido (que correspondem a geradores térmicos ou hidráulicos ou cargas que dependem de preço) e também em sub-blocos fora da diagonal (que correspondem a usinas hidráulicas em cascata).

Como indicado no Capítulo 4, o sistema linear formulado desta forma permite efetuar a fatoração da matriz considerando a estrutura de blocos. No algoritmo de fatoração opera-se com blocos, em lugar de escalares. Além disso, a dimensão dos blocos que constituem a matriz do sistema linear reduzido depende somente do número de intervalos de despacho.

Em relação à implementação, a matriz $\bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{H}^{-1} \bar{\mathbf{D}}$ pode ser facilmente determinada por colunas, resolvendo sistemas lineares. Estes passos são detalhados no Anexo A.

5.4 Solução da Formulação Através da Função de Custo Futuro

Nesta seção discute-se brevemente a formulação do despacho hidrotérmico para as atividades de GLD quando se representa o custo de geração hidráulica através dos custos operativos futuros, apresentada em (5.9). O Anexo B apresenta detalhes adicionais.

A principal diferença entre a formulação através de custos futuros e a discutida na seção anterior, que corresponde ao problema (5.8), é a inclusão das restrições de custo futuro. Estas restrições envolvem o armazenamento ao final do horizonte vinculando os volumes finais de todos os reservatórios do sistema. Assim, estas restrições não são separáveis para os reservatórios. Existe portanto uma diferença fundamental com a formulação da seção anterior, na qual o único acoplamento entre os reservatórios é temporal e vincula somente às usinas na mesma cascata. As restrições de custo futuro determinam que todas as barras de geração hidráulica estejam acopladas, mesmo que não pertençam à mesma cascata.

Propõe-se uma solução para este problema que se vale dos resultados obtidos na seção anterior. Observa-se que, já que o volume ao final do horizonte deve verificar um tipo de restrição diferente das consideradas até o momento, pode-se particionar o vetor de volumes separando-o em volumes para $t = 1, \dots, n_T - 1$ e para $t = n_T$. Prossegue-se com a redução do sistema linear, resolvendo para as variáveis na mesma ordem adotada na seção anterior, com a diferença de que ao processar o armazenamento considera-se unicamente os volumes para $t = 1, \dots, n_T - 1$. Até este ponto é obtida uma matriz \mathbf{M} com as mesmas características da obtida na seção anterior. Os blocos de matrizes que representam acoplamentos podem ser também agrupados em uma matriz $(\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q})$, que neste caso inclui três tipos de termos:

1. cargas que respondem a preço, que gera $(\bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{J}})$;
2. equação de conservação da água, que gera o termo $(\bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{H}^{-1} \bar{\mathbf{D}})$;
3. acoplamentos do custo futuro.

Com o objetivo de propiciar a visualização da nova estrutura do sistema reduzido, apresentam-se na Figura 5.3 as matrizes \mathbf{M} e $(\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{M})$ para o sistema de seis barras da Figura 5.2, considerando agora a abordagem via função de custo futuro. A

diferença com a Figura 5.2 é o acoplamento gerado na matriz $(Q^T W^{-1} Q + M)$ entre todas as barras de geração hidráulica, indicado em verde e em rosa.

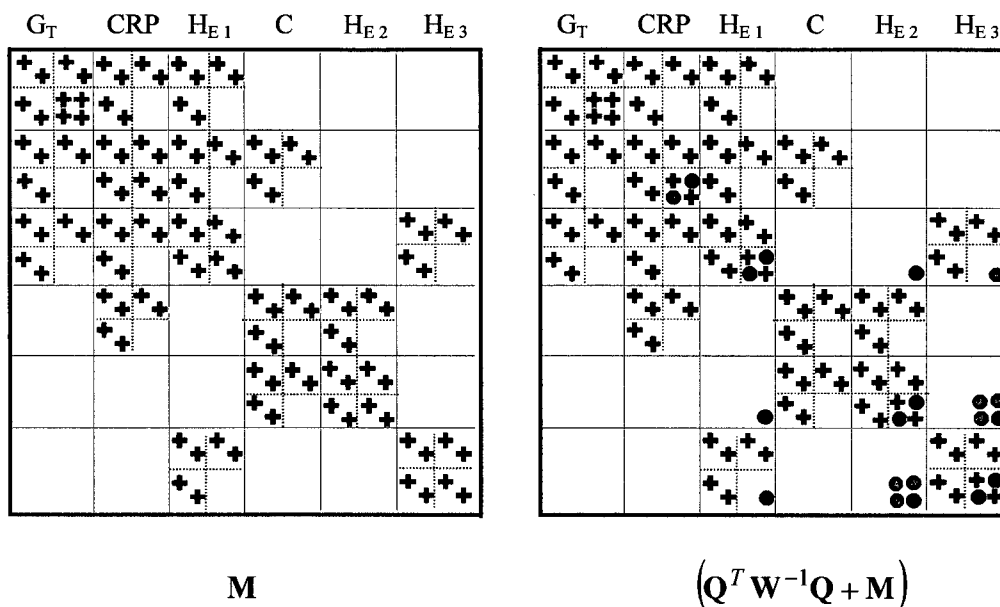


Figura 5.3- Sistema de seis barras: matrizes do sistema reduzido, para abordagem via função de custo futuro.

Observa-se que também neste caso o acoplamento no tempo fica confinado em alguns sub-blocos diagonais da matriz do sistema linear reduzido (que correspondem a geradores térmicos ou hidráulicos ou cargas que dependem de preço) e em sub-blocos fora da diagonal que correspondem a usinas hidráulicas em cascata. Adicionalmente, todas usinas hidráulicas estão também acopladas nas variáveis referentes ao último intervalo, indicado em rosa na Figura 5.3, devido aos efeitos da função de custo futuro.

5.5 Conclusões

Aborda-se neste capítulo a implementação do modelo de referência para as atividades de GLD em sistemas hidrotérmicos através de um FPOD. Devem ser levados em consideração acoplamentos adicionais entre as variáveis hidráulicas. Por um lado, as equações de conservação da água geram uma restrição intertemporal de igualdade, na qual está incluída a representação da cascata de reservatórios e os tempos de deslocamento água. Por outro lado, a formulação do problema de despacho hidrotérmico via função de

custos futuros estabelece um acoplamento entre todos os reservatórios durante o último intervalo de despacho.

O procedimento de solução das condições de otimalidade mediante o Método Primal-Dual de Pontos Interiores visto no capítulo anterior é aqui estendido para o gerenciamento da demanda nos sistema hidrotérmicos. É possível também neste caso reduzir o sistema linear de equações, representando unicamente os incrementos no ângulo da tensão nas barras e nos multiplicadores de Lagrange das equações de balanço de potência. Este sistema reduzido é também caracterizado por uma matriz em blocos de dimensão igual ao número de barras do sistema. Da mesma forma, os blocos possuem dimensão igual a duas vezes o número de intervalos de despacho. Observa-se que o padrão de elementos não-nulos da matriz do sistema reduzido combina a estrutura da matriz de admitâncias de nós com a estrutura do sistema hidráulico.

No próximo capítulo são apresentados resultados de simulação que permitem ilustrar e verificar os conceitos até aqui desenvolvidos.

Capítulo 6

Resultados

6.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os principais resultados obtidos da implementação dos diferentes modelos desenvolvidos para a avaliação e definição de programas de GLD.

O capítulo está dividido em duas partes. Inicialmente são mostrados resultados referentes a sistemas termelétricos, utilizando o sistema teste de 14 barras do IEEE. A segunda parte do capítulo refere-se a sistemas hidrotérmicos. Apresentam-se resultados para o sistema da CESP (Companhia de Energia do Estado de São Paulo) reduzido, considerando a rede correspondente a 440kV com 15 barras, e para o sistema de transmissão da Região Sul reduzido a 32 barras. Todos os algoritmos foram implementados em Matlab, usando como plataforma um microcomputador PC de 850MHz e 128Mbytes de memória RAM.

6.2 GLD em Sistemas Termelétricos

Esta seção apresenta os resultados obtidos na implementação do modelo desenvolvido no Capítulo 4 para sistemas termelétricos. Mostram-se dois tipos de resultados. Inicialmente ilustra-se o efeito de diferentes valores da elasticidade-preço e da elasticidade-preço cruzada no tempo relativos à demanda sobre o perfil de carga total do sistema, para o problema da alocação de uma dada quantidade de energia ao longo de um

horizonte de tempo. Estuda-se neste caso o efeito das restrições de tomada de carga dos turbogeradores no perfil de preços e na alocação da demanda que responde a preço.

Posteriormente é considerado o controle direto de cargas, modelado através de restrições de energia de desigualdade.

6.2.1 Impacto da Elasticidade-preço da Demanda

Descrição dos Cenários de GLD Simulados

Os resultados mostrados nesta seção foram obtidos com o sistema teste de 14 barras do IEEE, com três geradores e duas cargas que respondem a preço, apresentado na Figura 6.1. Os dados de parâmetros de linhas são mostrados no Anexo C. Estes resultados correspondem à formulação desenvolvida nas Seções 4.2 e 4.3. e foram publicados em UTURBEY, SIMÕES COSTA e SOUZA (2000) e UTURBEY e SIMÕES COSTA (2002).

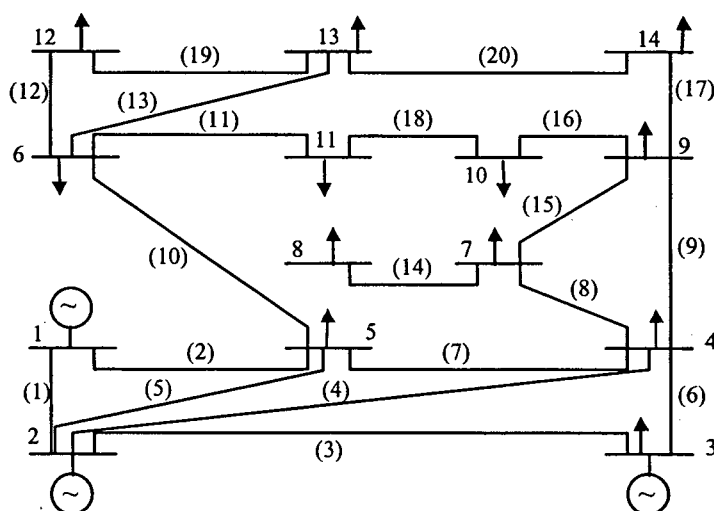


Figura 6.1.- Sistema teste do IEEE-14 barras.

Tanto as funções-custo dos geradores quanto as funções-benefício dos consumidores sujeitos a GLD utilizadas são quadráticas (Seção 2.4). Porém, o efeito da elasticidade preço cruzada no tempo é considerado apenas para a demanda. As funções custo empregadas são apresentadas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 - Funções custo dos geradores.

Gerador	$Q2-\$/pu^2 \cdot h$	$Q1-\$/pu \cdot h$	\underline{p}_g (pu)	\bar{p}_g (pu)
G1	48.2	792	0.5	9
G2	19.4	785	0.5	9
G3	10	650	0.5	9

$$C(p_{gi}) = Q1 \cdot p_{gi} + Q2 \cdot p_{gi}^2$$

Em todos os casos simulados foi considerado um horizonte de despacho de um dia, dividido em vinte e quatro intervalos de uma hora. As cargas nas barras 4 e 5 são parcialmente dependentes do preço. Supõe-se que 20% da demanda nas mencionadas barras responde a preço. Deve-se notar que não existe restrição em relação à quantidade de carga sujeita a GLD. A metodologia utilizada permite considerar, por exemplo, que o total da carga do sistema depende do preço.

Um Caso Base de estudo é considerado para efeito de comparação, no qual não há cargas que respondem a preço. A carga que será posteriormente sujeita a GLD é suposta concentrada no intervalo de pico de demanda. Esta hipótese é razoável, já que o alvo é reduzir o pico de carga da curva de demanda.

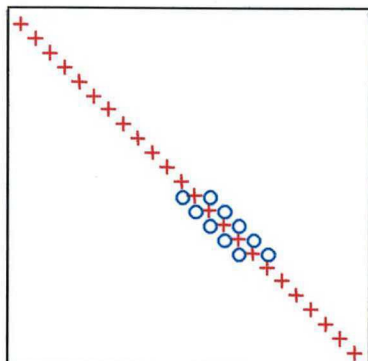
Dois casos adicionais foram considerados, com diferentes valores dos coeficientes de elasticidade da demanda. A elasticidade-preço cruzada no tempo é considerada com a finalidade de simular diferentes possibilidades de alocação da demanda, com valor variável dependendo do caso. Para a elasticidade-preço foi adotado um valor médio de -0,5.

A Tabela 6.2 apresenta os dados de elasticidade e a Figura 6.2 mostra a estrutura da matriz de sensibilidades (matriz S definida na Seção 2.4) para o Caso A. A carga que depende do preço na barra 4, para alguns intervalos, está relacionada com os dois intervalos adjacentes, como indicado na estrutura parcialmente tri-diagonal da matriz S. Já a carga na barra 5 não apresenta elasticidade cruzada. Assim, a função benefício dos consumidores conectados à barra 5 é separável nos intervalos de operação.

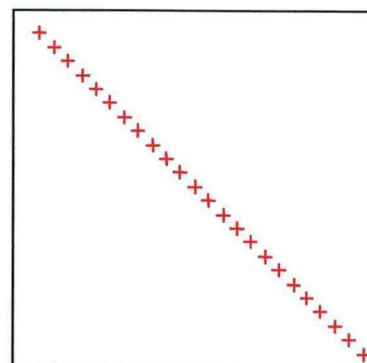
Os dados das cargas dependentes do preço no Caso B são apresentados na Tabela 6.3 e na Figura 6.3. Neste caso ambas as barras apresentam elasticidade cruzada. A carga na barra 4 nos seis primeiros intervalos está relacionada com os intervalos adjacentes. Já para a barra 5 a matriz de sensibilidades apresenta uma estrutura tri-diagonal completa.

Tabela 6.2 - Elasticidade preço e elasticidade preço cruzada da demanda para o Caso A.

	$\epsilon: +$	$\epsilon_{CR}: 0$
Barra 4	-0.5	0.7
Barra 5	-0.5	-



Barra 4

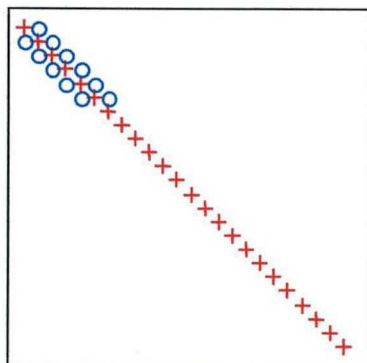


Barra 5

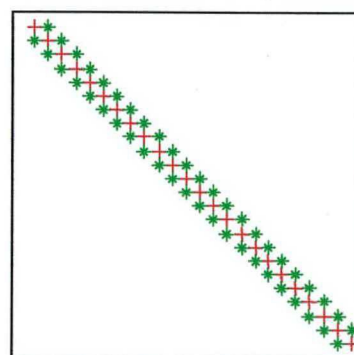
Figura 6.2 – Padrão de elementos diferentes de zero da matriz de sensibilidade S para o Caso A.

Tabela 6.3 - Elasticidade preço e elasticidade preço cruzada da demanda para o Caso B.

	$\epsilon: +$	$\epsilon_{CR}: 0$	$\epsilon_{CR}: *$
Barra 4	-0.5	0.7	-
Barra 5	-0.5	-	0.5



Barra 4



Barra 5

Figura 6.3 – Padrão de elementos diferentes de zero da matriz de sensibilidade S para o Caso B.

Deve-se observar que, para obter a matriz de sensibilidade S a partir de dados de elasticidade, estes últimos devem ser multiplicados pelo fator *demanda/preço* adequado, isto é, considerando os valores de preço e demanda em que foi medida a elasticidade. Supõe-se que estes valores são os obtidos no Caso Base. A partir da matriz S e da carga no Caso Base, os coeficientes da função benefício podem ser calculados com as expressões apresentadas no Capítulo 2.

Resultados Obtidos: Limites de Tomada de Carga não Ativos

Consideram-se inicialmente situações nas quais os limites de tomada de carga dos turbogeradores não se encontram ativos. A Figura 6.4 apresenta a demanda no Caso Base, juntamente com o custo social. Nesta situação, o despacho é obtido com FPO independentes para cada intervalo.

A Figura 6.5 mostra as curvas de demanda total, demanda fixa e demanda que responde a preço, juntamente com os respectivos custos sociais, para os casos A e B. Para facilitar a visualização, em ambas as situações é apresentada a carga sujeita a GLD com escalas diferentes.

Pode-se observar que, em ambos os casos, o pico de demanda é menor que no Caso Base. No Caso A, no qual a matriz de sensibilidades indica forte preferência por intervalos de carga de valores intermediários na barra 4, a respectiva carga que depende do preço migra para esses intervalos. Já na barra 5, quando a função benefício é separável no tempo, a carga se distribui de forma mais ou menos proporcional à carga fixa. No Caso B, ambas as cargas nas barras 4 e 5 são deslocadas para intervalos de menor demanda fixa.

Deve-se observar que o padrão de elementos não nulos na matriz S , junto com seus valores determinam os intervalos entre os quais a carga pode ser deslocada.

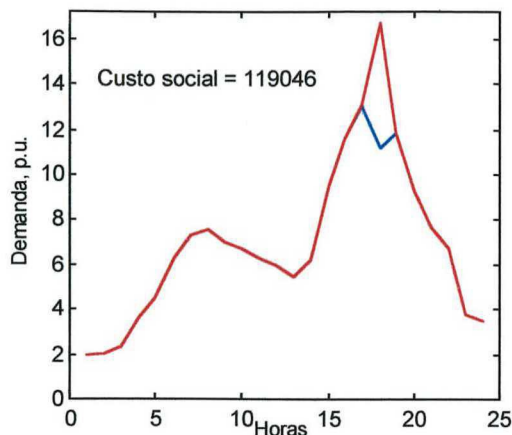
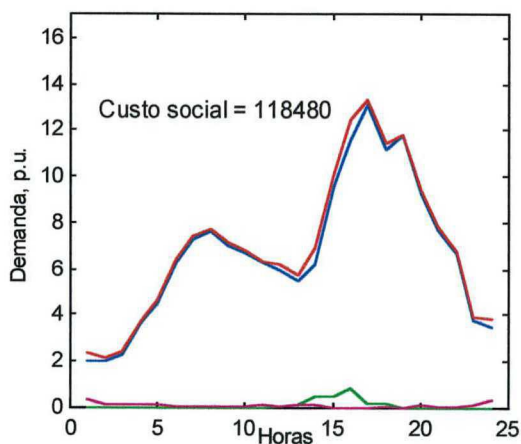
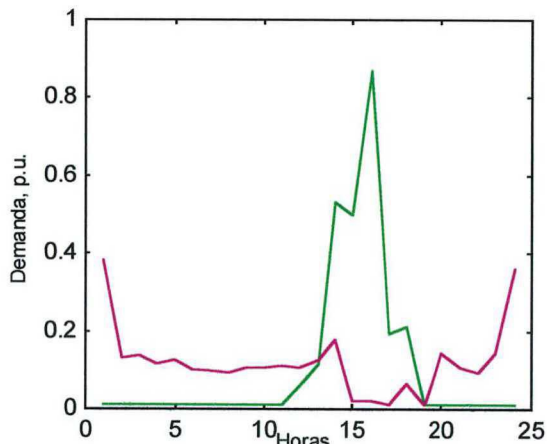


Figura 6.4 – Caso Base: curva de carga total (vermelho), com a carga que será sujeita a GLD concentrada em t=18, e curva de carga fixa (azul).

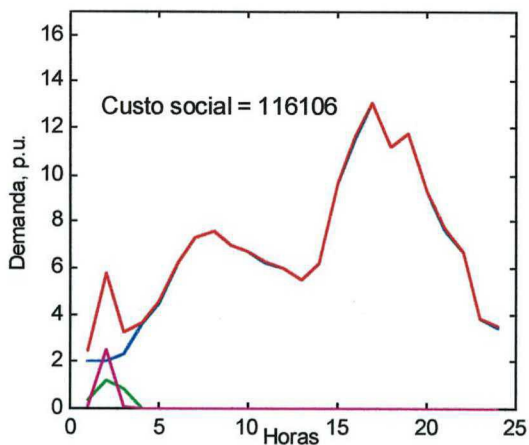


a)

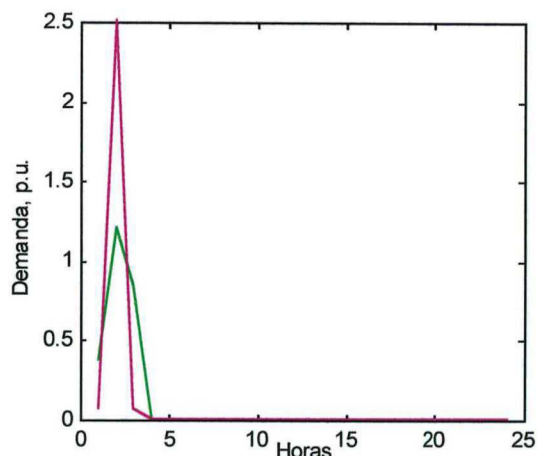


b)

Caso A



a)



b)

Caso B

Figura 6.5 – Para os casos A e B: a) Curva de carga total (vermelha), carga fixa (azul) e carga sujeita a GLD (rosa: barra 5, verde: barra 4), b) detalhe das cargas sujeitas a GLD, em escala ampliada.

A Tabela 6.4 apresenta o custo social obtido em cada caso. Pode-se observar que o mesmo diminui quando é aplicado GLD. A redução resultante depende das possibilidades dos consumidores. O menor custo corresponde ao Caso B, quando a carga das duas barras sujeitas a GLD são deslocadas para períodos de menor demanda, como é esperado.

Tabela 6.4 – Custo social.

Caso	\$
Base	119046
A	118480
B	116106

A Figura 6.6 apresenta o preço marginal (preço nodal), como foi definido no Capítulo 3, para os três casos estudados. Os três primeiros gráficos correspondem a cada caso em forma separada e o último gráfico apresenta o preço marginal para as três situações simultaneamente. Em alguns intervalos existe congestionamento nas linhas de transmissão, sendo que os preços marginais nas barras são diferentes. Nestes casos, são indicados os valores máximo (traço sólido) e mínimo (traço pontilhado) deste preço.

Observa-se que no Caso Base (azul) existe congestionamento nos intervalos 17 e 18. Já nos casos A (vermelho) e B (verde) o congestionamento acontece somente no intervalo 17, sendo eliminado no intervalo 18. Observa-se também que o preço marginal no intervalo 18 nos casos A e B é visivelmente menor que o máximo preço obtido no Caso Base, nesse mesmo intervalo.

Desta forma, verifica-se que o GLD pode ser um recurso de grande utilidade quando se busca reduzir o congestionamento nas linhas de transmissão.

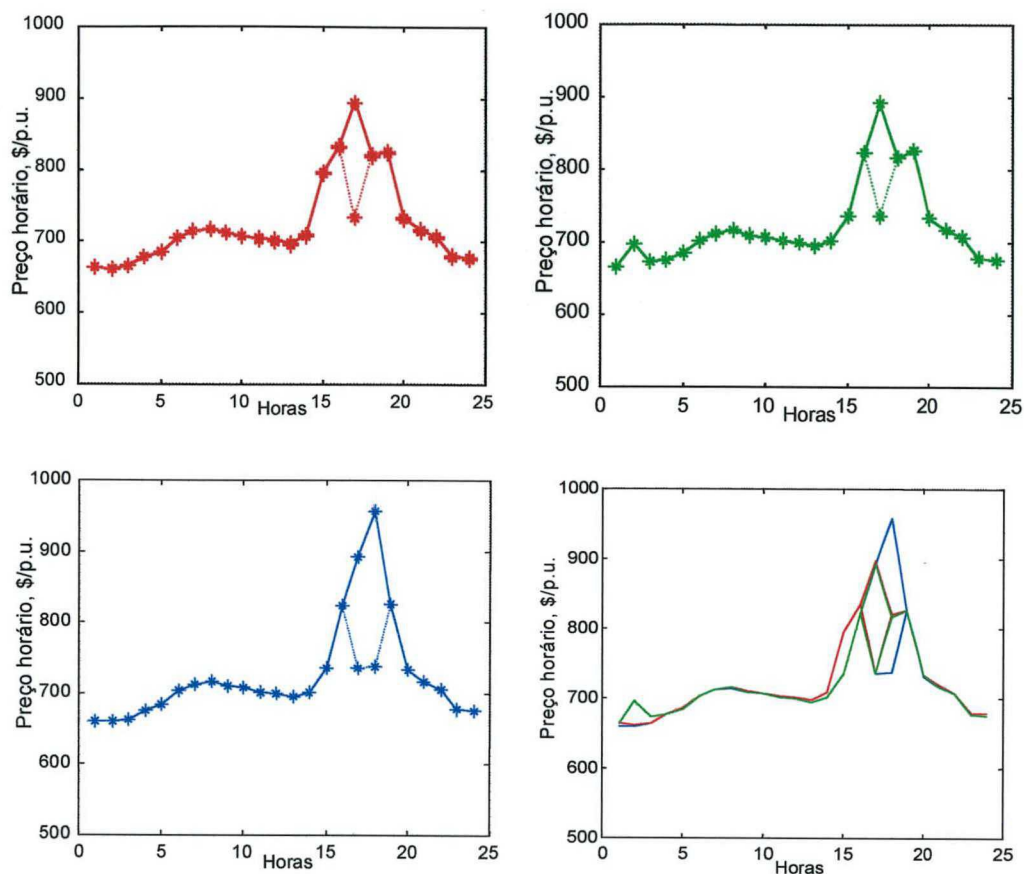


Figura 6.6 – Preço marginal no horizonte de despacho para o Caso Base (azul), Caso A (vermelho) e Caso B (verde).

Resultados Obtidos: Limites de Tomada de Carga Ativos

Esta seção relata resultados da análise da influência das restrições de tomada de carga em rampa dos turbogeradores. Os casos A e B descritos anteriormente foram simulados nesta nova situação, supondo que o gerador G3 pode variar sua geração em apenas o 10% do seu valor de máximo carregamento, tanto no aumento quanto na diminuição de carga.

A Figura 6.7 apresenta a geração obtida em ambos os casos, quando as mencionadas restrições não são consideradas e quando o são. Observa-se que, quando a rampa de tomada de carga é considerada, parte da geração mais barata (G3, em verde) é atendida pelo gerador de menor custo seguinte (G2, em azul).

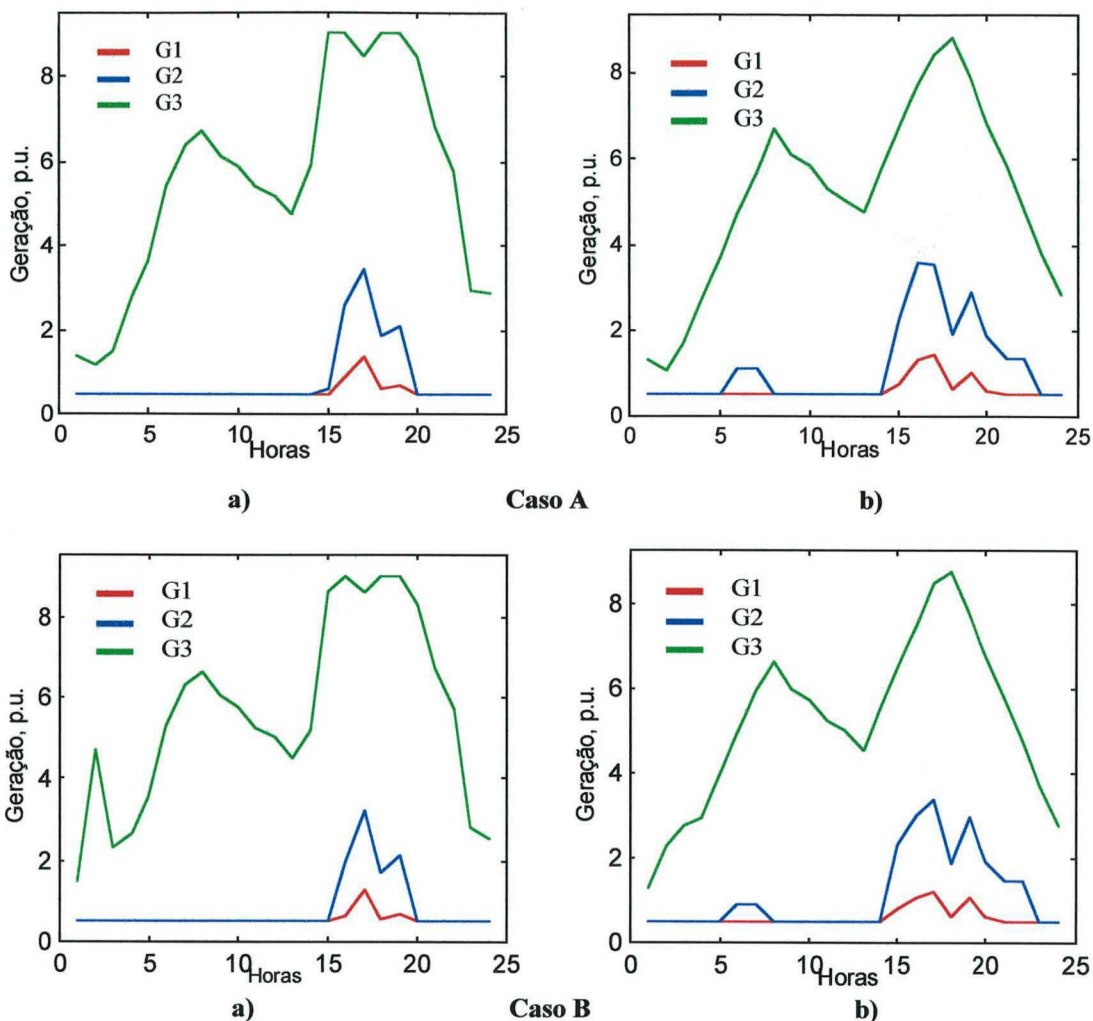


Figura 6.7 – Geração nos casos A e B:
a) sem restrições de tomada de carga e b) com restrições.

O custo social obtido em cada caso é apresentado na Tabela 6.5. Observa-se que o mesmo é maior quando as restrições de rampa estão presentes.

Tabela 6.5 – Custo social quando é aplicado GLD, com e sem restrições de rampa.

Caso	Sem restrições, \$	Com restrições, \$
A	118480	119505
B	116106	118472

A Figura 6.8 apresenta as curvas de demanda total, demanda fixa e demanda que responde a preço para os casos A e B quando os limites de tomada de carga estão ativos. A

carga sujeita a GLD é mostrada com diferentes escalas. A Figura 6.9 apresenta o preço marginal do sistema juntamente com as cargas que dependem do preço em ambos os casos. Observa-se que o perfil do preço da energia no horizonte é distorcido pela presença de limites de tomada de carga ativos, sendo que este perfil não é semelhante à forma da curva de carga total.

A carga sujeita a GLD distribui-se de forma semelhante ao caso em que os limites de tomada de carga não estão ativos. A carga na barra 4 em ambos os casos A e B é determinada principalmente pela presença de elasticidade-preço cruzada entre intervalos específicos.

A carga na barra 5 no Caso A, com função benefício separável no tempo, é alocada de forma mais ou menos inversamente proporcional ao preço. Já no Caso B, esta carga é alocada em intervalos de vale da curva de carga.

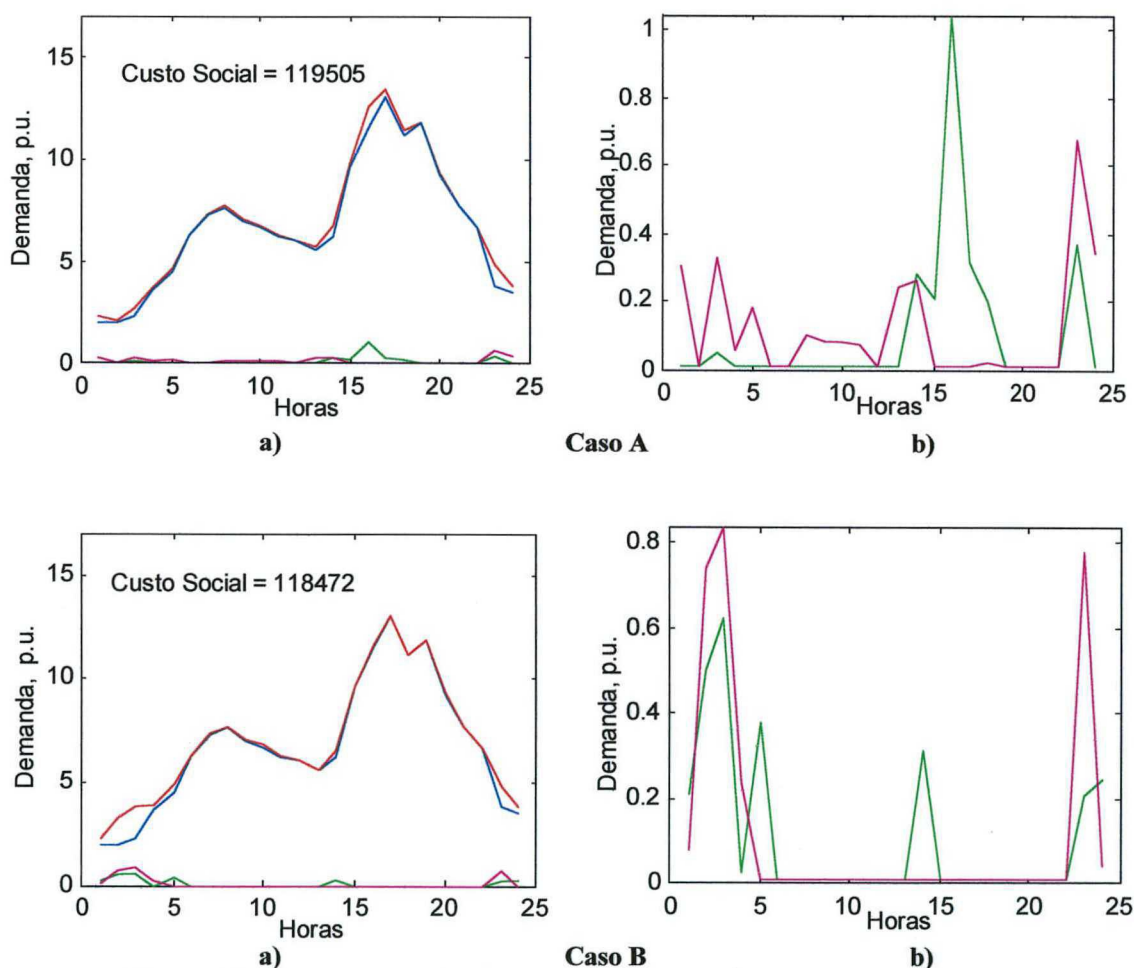


Figura 6.8 – Para os casos A e B com limites de tomada de carga em rampa ativos
 a) Curva de carga total (vermelha), carga fixa (azul) e carga sujeita a GLD (rosa: barra 5, verde: barra 4),
 b) detalhe das cargas sujeitas a GLD, em escala ampliada.

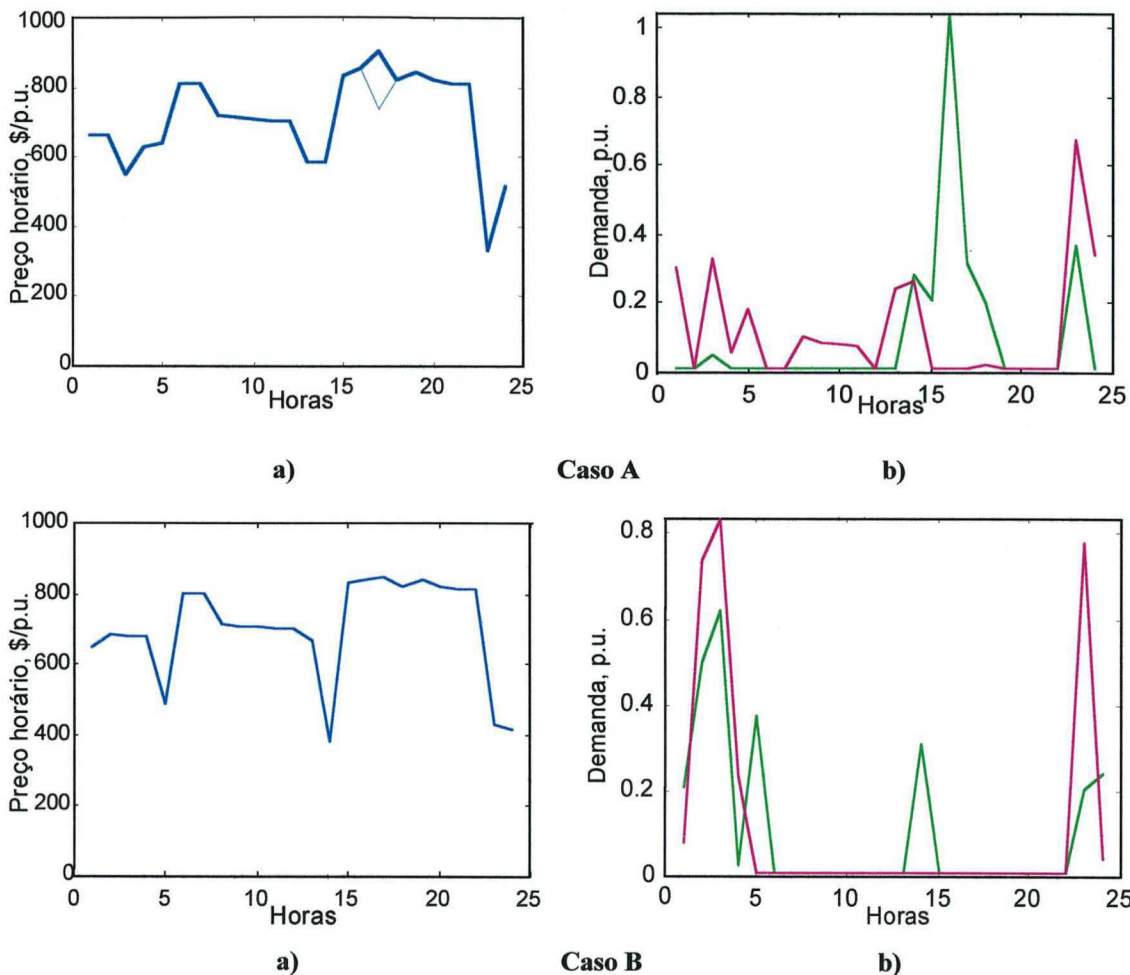


Figura 6.9 – Para os Casos A e B, com limites de tomada de carga em rampa ativos:
a) Preço marginal e b) carga que responde a preço.
Carga que responde a preço: verde = barra 4, rosa = barra 5.

6.2.2 GLD Incluindo Cargas Sujeitas a Interrupção

Nesta seção é considerada a presença simultânea de dois tipos de cargas sujeitas a contratos de GLD. Para a carga conectada à barra 4 estabelece-se uma percentagem de energia que deve ser consumida ao longo do horizonte de tempo. Já a carga na barra 11 é factível de ser interrompida. Os resultados são obtidos com o sistema teste do IEEE de 14 barras, utilizando os dados de geração e carga total da Seção 6.2.1.

Considera-se um caso de estudo, o Caso A, no qual 10% da carga total da barra 4 responde a preço, enquanto que 20% da carga total da barra 11 é interruptível. Para a carga

na barra 4 considera-se uma função benefício separável, desconsiderando a elasticidade-preço cruzada no tempo. Para barra 11 supõe-se que o custo da energia interrompida é linear.

A Figura 6.10 apresenta as curvas de demanda total, demanda fixa e cargas sujeitas a GLD obtidas no Caso A. Para a demanda na barra 11 apresenta-se a carga efetivamente suprida. A Figura 6.11 apresenta o perfil de preços do sistema. Observa-se que tanto a carga na barra 4 quanto a carga na barra 11 são deslocadas para os intervalos de menor preço, preenchendo o vale da curva de demanda fixa.

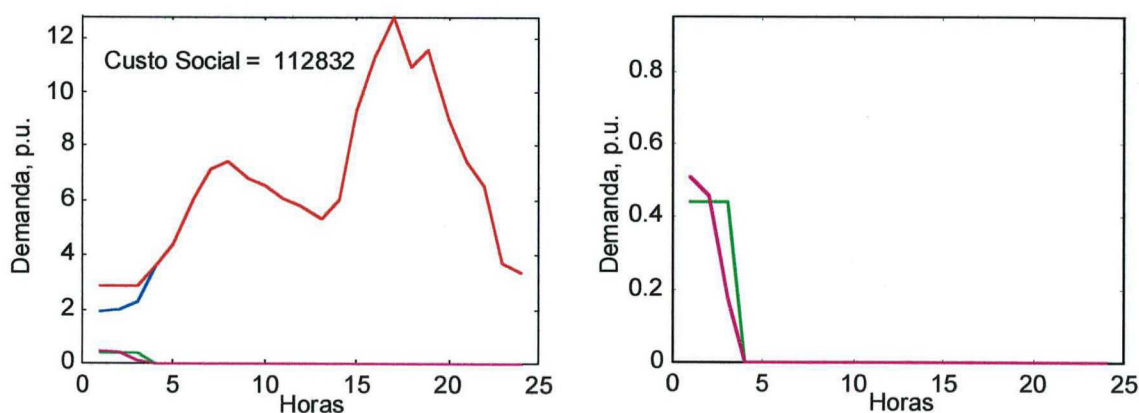


Figura 6.10 - Caso A: a) Curva de carga total (vermelha), carga fixa (azul) e carga sujeita a GLD (rosa: barra 11, verde: barra 4), b) detalhe das cargas sujeitas a GLD, em escala ampliada.

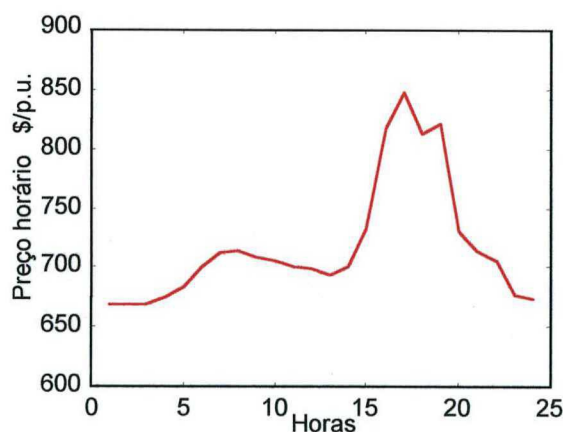


Figura 6.11 - Caso A: Perfil de preços no horizonte.

A Tabela 6.6 apresenta o valor dos multiplicadores de Lagrange das restrições de consumo em ambas as barras e a demanda suprida na barra 11. Observa-se que apenas 41% da fração de carga factível de ser interrompida foi suprida. O multiplicador da barra 4 é negativo, indicando que o custo social de operação poderia ser reduzido se uma

porcentagem maior da demanda total desta barra fosse submetida a GLD. O multiplicador da barra 11 é zero devido ao fato de que o limite de energia interruptível não é atingido, existindo interrupção de carga.

Tabela 6.6 - Caso A: Multiplicador de Lagrange das restrições de consumo nas barras 4 e 11, e demanda na barra 11.

Barra 4	$\beta_4 = -26,686$
Barra 11	$\beta_{11} = 0$
	Demanda interruptível = 2,8 p.u.
	Demanda suprida = 1,146 p.u. (41%)

Ressalta-se que a carga interruptível concorre com a geração ao efetuar o despacho. O custo da energia não suprida utilizado na simulação foi 668,9 \$/p.u.. Este valor coincide com o PMS nos três primeiros intervalos, nos quais a carga na barra 11 é diferente de zero. Nestes intervalos o PMS do sistema é fixado pela carga factível de ser interrompida. Nos intervalos restantes esta carga é mais barata que a geração disponível e portanto a energia efetivamente suprida não é distribuída sobre esses intervalos.

Considera-se um segundo caso de estudo, o Caso B, no qual a energia sujeita a GLD na barra 4 aumenta para 25% do total da carga da barra. O multiplicador da barra 4 é negativo no Caso A, espera-se portanto que o custo social no Caso B seja menor que no Caso A.

A Figura 6.12 apresenta as curvas de demanda total, demanda fixa e cargas sujeitas a GLD juntamente com o custo social obtido. Observa-se que o custo social de operação é menor que no Caso A, conforme esperado.

A Tabela 6.7 mostra o valor dos multiplicadores de Lagrange das restrições de consumo em ambas as barras e a demanda suprida na barra 11. Observa-se que o total da energia sujeita a GLD na barra 11 foi interrompida. O multiplicador da barra 4 continua sendo negativo, porém com menor valor absoluto.

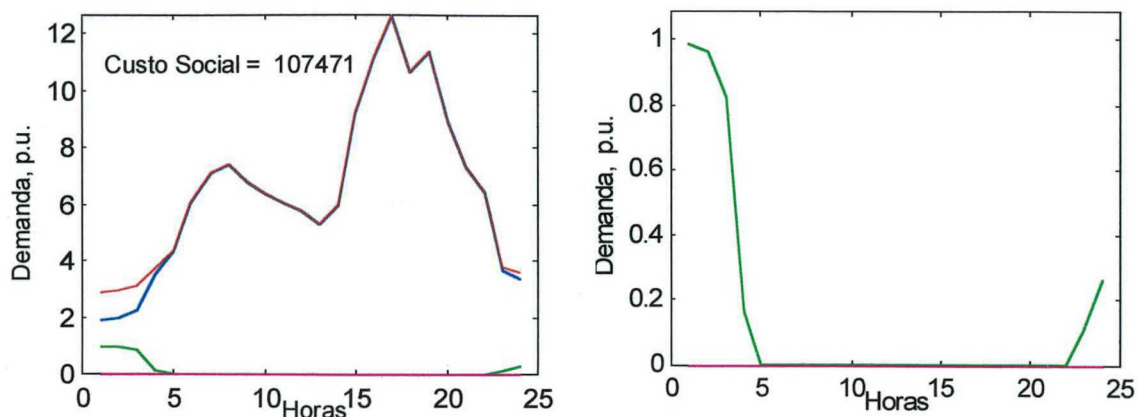


Figura 6.12 - Caso B: a) Curva de carga total (vermelha), carga fixa (azul) e carga sujeita a GLD (rosa: barra 11, verde: barra 4), b) detalhe da carga sujeita a GLD.

Tabela 6.7 – Caso B: Multiplicador de Lagrange das restrições de consumo nas barras 4 e 11, e demanda na barra 11.

Barra 4	$\beta_4 = -21,162$
Barra 11	$\beta_{11} = 0$
	Demanda interruptível = 2,8 p.u.
	Demanda suprida = 0 p.u.

Da mesma forma que no Caso A, a quantidade de energia sujeita a GLD na barra 4, devido às características da função-benefício utilizada, deve ser distribuída durante os períodos de menor carga fixa, de forma a preencher os vales. Porém neste caso a quantidade de energia a ser distribuída é maior que no caso base, e quando alocada nos primeiros intervalos determina que o preço seja maior que o custo da carga interruptível. Assim, toda a carga na barra 11 é interrompida.

6.3 GLD em Sistemas Hidrotérmicos

Esta seção relata resultados da implementação dos modelos para as atividades de gerenciamento da demanda em sistemas hidrotérmicos apresentadas no Capítulo 5. Ilustra-se primeiramente na Subseção 6.3.1 a utilização do GLD com a finalidade de favorecer o armazenamento da água nos reservatórios empregando a formulação da Seção 5.2.3-a, que estabelece uma meta energética de volume ao final do horizonte.

Em seguida, para explorar o impacto de diferentes valores de elasticidade-preço da demanda, a Subseção 6.3.2 utiliza a formulação da Seção 5.2.3-b baseada nos custos futuros da água.

6.3.1 GLD Visando Favorecer uma Meta Energética

Nesta seção a atenção é focada no GLD como uma ferramenta que possibilita favorecer uma meta energética indicada através de um volume prefixado ao final do horizonte. Os resultados correspondem ao sistema de transmissão da Região Sul do Brasil reduzido, apresentado na Figura 6.13, com 32 barras e 57 linhas de transmissão. Este sistema possui sete usinas hidrelétricas: Foz do Areia (B15), Salto Segredo (B30), Salto Santiago (B14), Salto Osório (B1), Salto Caxias (B29), Itá (B27) e Passo Fundo (B3). A cascata de usinas hidrelétricas é mostrada na Figura 6.14. Foz do Areia (B15) é a primeira das cinco usinas em cascata, e Salto Caxias (B29) a última. As usinas hidráulicas Itá (B27) e Passo Fundo (B3) estão isoladas. Dados adicionais são apresentados no Anexo C. Considera-se um gerador térmico em Jorge Lacerda (B6). A Tabela 6.8 apresenta os dados da função custo deste gerador.

Tabela 6.8 - Funções custo do gerador para o sistema Sul.

Gerador	$Q2$ -\$/pu ² .h	$Q1$ -\$/pu.h	\underline{p}_g (pu)	\bar{p}_g (pu)
G1	14,2	720	0,3	8

$$C(p_{gi}) = Q1 \cdot p_{gi} + Q2 \cdot p_{gi}^2$$

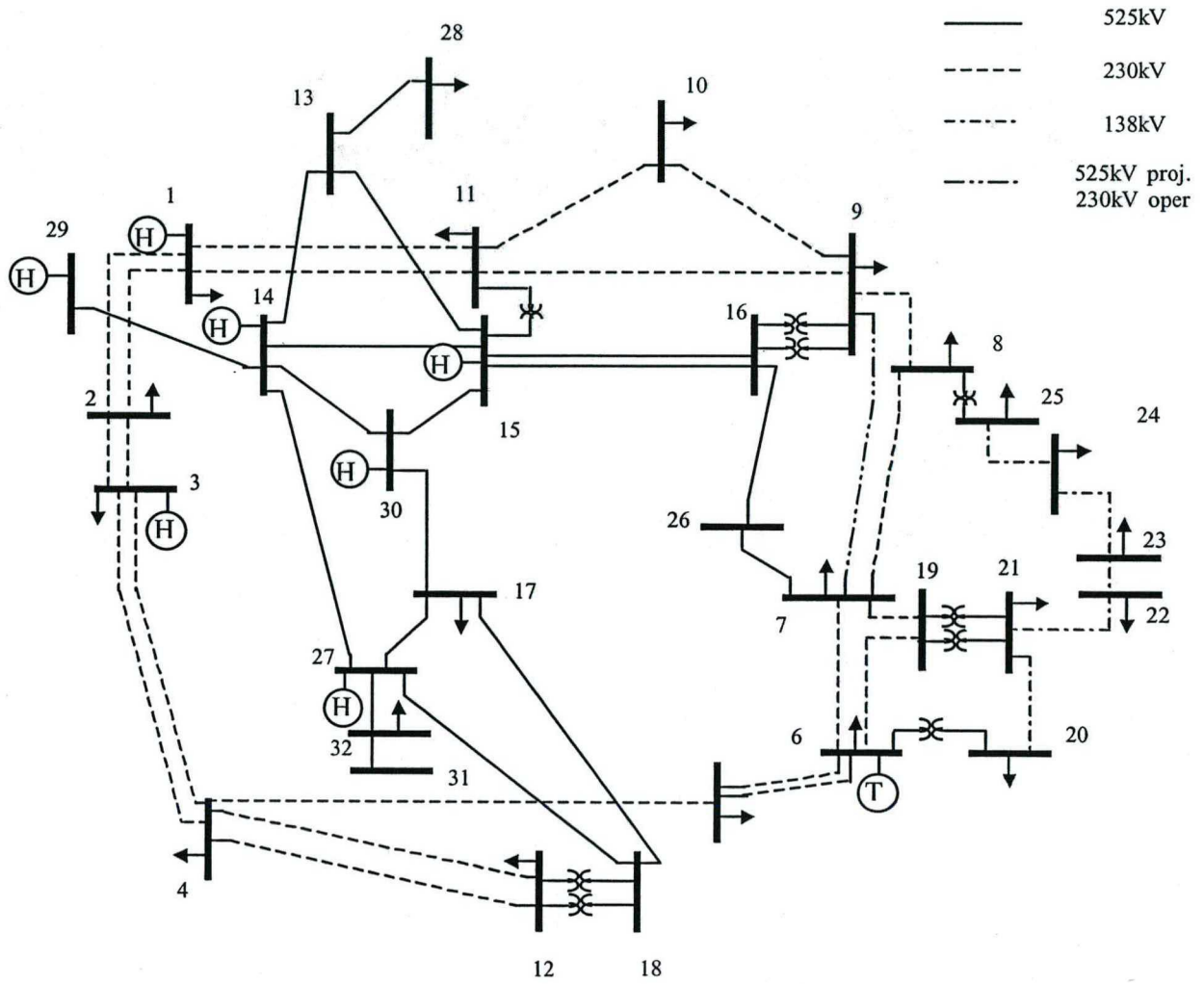


Figura 6.13 – Sistema de transmissão da Região Sul reduzido.

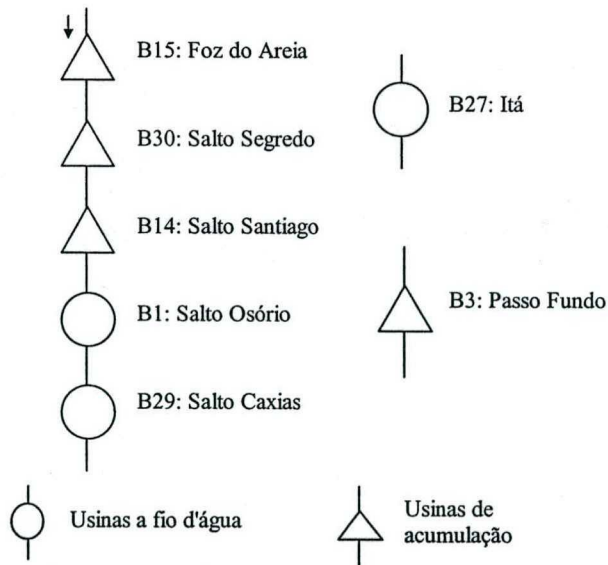


Figura 6.14 - Cascata de usinas do sistema Sul.

Consideram-se restrições de consumo do tipo de igualdade, de forma que o programa de gerenciamento de demanda procura definir a alocação eficiente da demanda sujeita a GLD ao longo de um horizonte, sem considerar interrupções de carga.

Para efeito de comparação, é definido um Caso Base que não inclui cargas que dependem de preço. Adicionalmente, consideram-se dois casos de estudo, com cargas sujeitas a GLD nas barras 8, 20 e 21. Estes casos de estudo se diferenciam na porcentagem de carga sujeita a GLD. Desconsidera-se a elasticidade-preço da demanda cruzada no tempo para as três cargas, de forma que a função benefício dos consumidores é separável. A Tabela 6.9 apresenta as funções-benefício para as três cargas. É simulado um horizonte de dois dias com discretização em intervalos de duas horas.

Tabela 6.9 - Funções benefício dos consumidores, sistema Sul.

Barra	$B2-\$/pu^2 \cdot h$	$B1-\$/pu \cdot h$	\underline{p}_d (pu)	\bar{p}_d (pu)
8	-4,4	22,2	0	5
20	-147,7	23,5	0	3
21	-111,9	23,1	0	3

$$B(p_{di}) = B1 \cdot p_{di} + B2 \cdot p_{di}^2$$

A Tabela 6.10 apresenta a porcentagem de carga sujeita a GLD em cada caso, assim como o valor dos multiplicadores de Lagrange das restrições de consumo obtidos em cada situação.

Tabela 6.10 – Carga sujeita a GLD e multiplicadores de Lagrange da restrição de consumo nos casos A e B.

Barra	Caso A		Caso B	
	(%)	β	(%)	β
8	40	-18,24	55	-16,80
20	25	-15,52	55	-6,10
21	25	-15,24	55	-5,98

A Tabela 6.11 apresenta o volume inicial, o volume final e o volume prefixado como meta energética, para as usinas de acumulação, conjuntamente com as variações absolutas no volume total do sistema e no volume de cada reservatório (em itálico na tabela). Observa-se que o gerenciamento de demanda propicia o aumento do armazenamento no sistema.

Tabela 6.11 – Volumes dos reservatórios para as usinas de acumulação: inicial, final e meta, nos casos Base, A e B.

Usina (barra)	Volume Inicial (hm ³)	Meta de Volume (hm ³)	Volume Final (hm ³) (Variação de Volume)		
			Caso Base	Caso A	Caso B
P.Fundo (B3)	245,6	350	258,44 <i>(12,84)</i>	259,16 <i>(13,56)</i>	260,50 <i>(14,90)</i>
S.Santiago (B14)	2702,8	3200	2874,52 <i>(171,72)</i>	2876,45 <i>(173,65)</i>	2878,71 <i>(175,91)</i>
F.Areia (B15)	2020	2540	2110,2 <i>(90,20)</i>	2110,20 <i>(90,20)</i>	2110,20 <i>(90,20)</i>
S.Segredo (B30)	2020	2500	2247,96 <i>(227,96)</i>	2246,04 <i>(226,04)</i>	2243,78 <i>(223,78)</i>
Variação Total de Volume			502,72	503,45	504,79

A Figura 6.15 apresenta a trajetória do volume nas usinas de acumulação. Observa-se que em todos os casos o volume aumenta ao longo do horizonte.

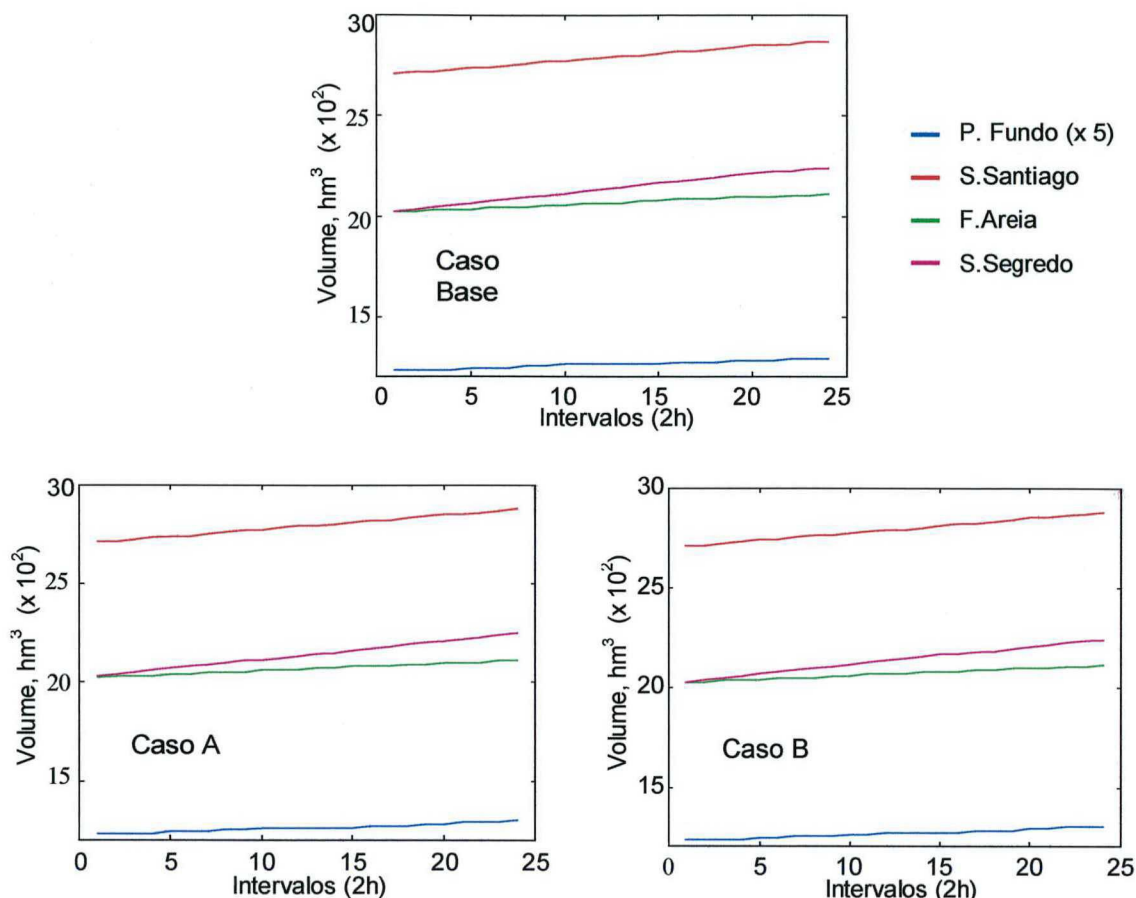


Figura 6.15 – Trajetória dos volumes das usinas de acumulação nos casos Base, A e B.

A Tabela 6.12 apresenta a geração total de cada usina no horizonte de tempo, em cada caso de estudo. Observa-se que a potência gerada pela usina térmica é menor nos casos com gerenciamento de demanda que no Caso Base. Além disso, a potência térmica diminui à medida que aumenta a quantidade de carga sujeita a GLD. Já a potência total gerada pelas usinas hidrelétricas deve aumentar, devido ao fato de que a carga total do sistema é a mesma em todos os casos. As três usinas que operam a fio d'água aumentam a quantidade de potência gerada, enquanto que a geração total das usinas de acumulação diminui, a medida que aumenta a quantidade de carga sujeita a GLD.

Observar que a geração relativamente pequena das usinas de acumulação é resultado da imposição das metas de volume. A tendência é gerar o máximo possível com as usinas a fio d'água.

Deste modo, o GLD propicia participações térmica e hidráulica e uma redistribuição da geração hidráulica entre as diferentes usinas hidrelétricas que beneficiam o armazenamento de energia no sistema.

Tabela 6.12 – Geração nos casos Base, A e B.

Usina (Barra)	Geração (p.u.)		
	Caso Base	Caso A	Caso B
S. Osório (B1)	147,64	150,03	153,39
P.Fundo (B3)	24,19	21,34	15,99
S. Santiago (B14)	9,74	9,39	9,73
F. Areia (B15)	14,62	14,62	14,62
Itá (B27)	280,74	284,80	286,12
S. Caxias (B29)	148,41	150,88	151,69
S. Segredo (B30)	26,72	29,28	32,26
Us. a fio d'água (total da geração)	576,79	585,71	591,2
Us. de acumulação (total da geração)	75,27	74,63	72,6
Ger. hidrelétrica total	652,06	660,34	663,8
Ger. térmica (B6)	21,57	13,29	9,83

A Figura 6.16 apresenta as participações térmica e hidráulica na geração total nos casos Base, A e B. Nota-se que em todos os casos a usina térmica é acionada durante os intervalos de maior demanda.

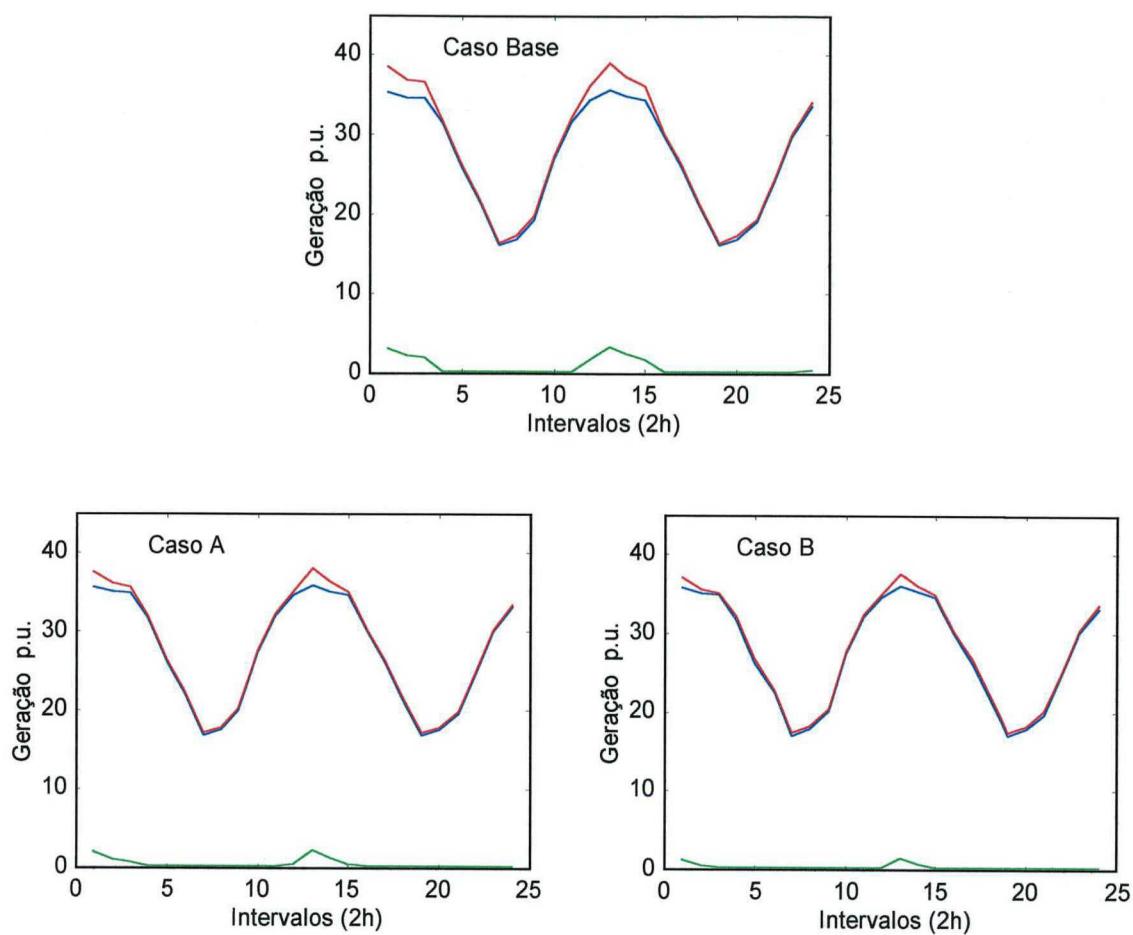


Figura 6.16 - Geração total (vermelho), hidrelétrica (azul) e termelétrica (verde) nos casos Base, A e B.

A Figura 6.17 apresenta a trajetória da vazão turbinada nas usinas de acumulação. Observa-se que as usinas de Passo Fundo e Salto Segredo são acionadas nos intervalos de maior demanda.

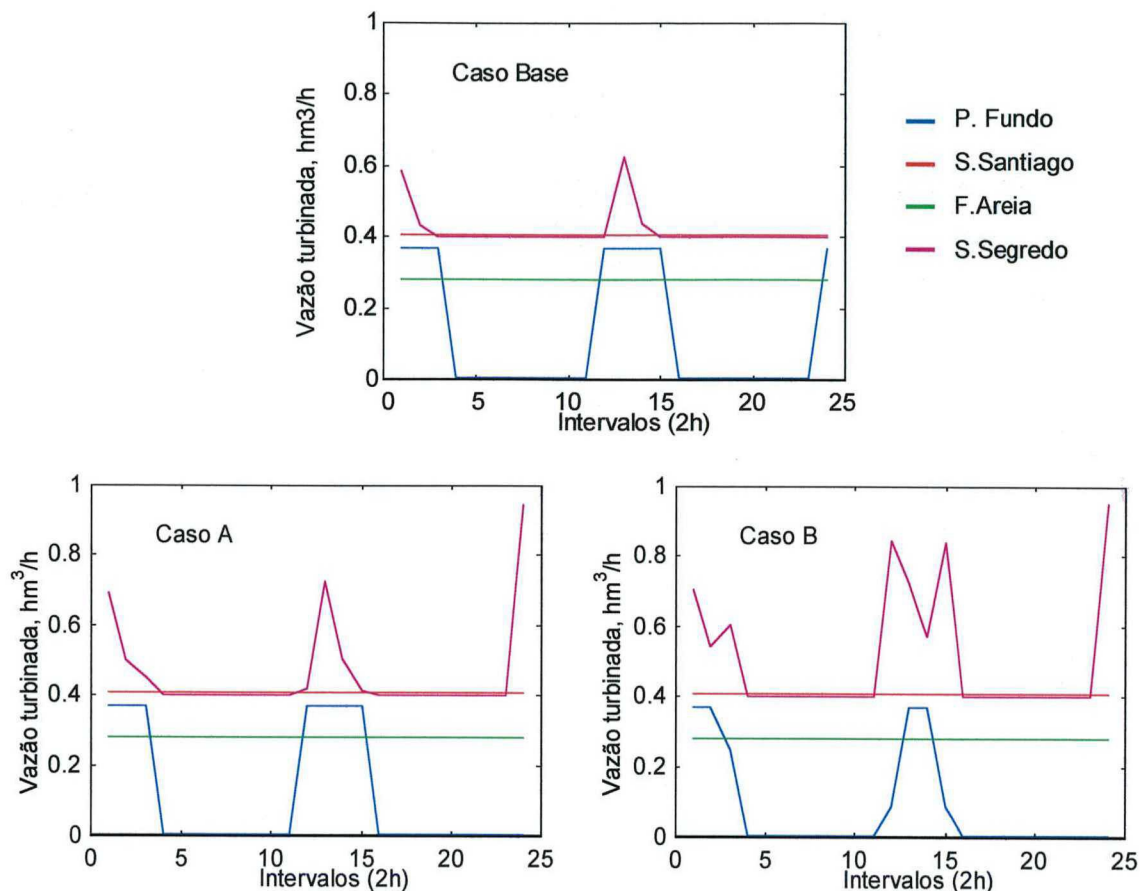


Figura 6.17 - Trajetória da vazão turbinada nas usinas de acumulação nos casos Base, A e B.

A Figura 6.18 apresenta a carga sujeita a GLD nos casos A e B. Observa-se a tendência a alocar esta carga nos intervalos de vale de demanda, preenchendo a curva de demanda. Na Figura 6.19 são mostrados, para cada carga sujeita a GLD nos casos A e B, os multiplicadores de Lagrange λ correspondentes à equação de balanço de potência da barra, juntamente com a demanda que depende de preço e a demanda fixa. Os intervalos nos quais o multiplicador λ possui os maiores valores correspondem aos intervalos de maior carga do sistema, nos quais as usinas de acumulação e a usina térmica são acionadas. Como é esperado, a carga que depende de preço é alocada nos intervalos com os menores valores do multiplicador.

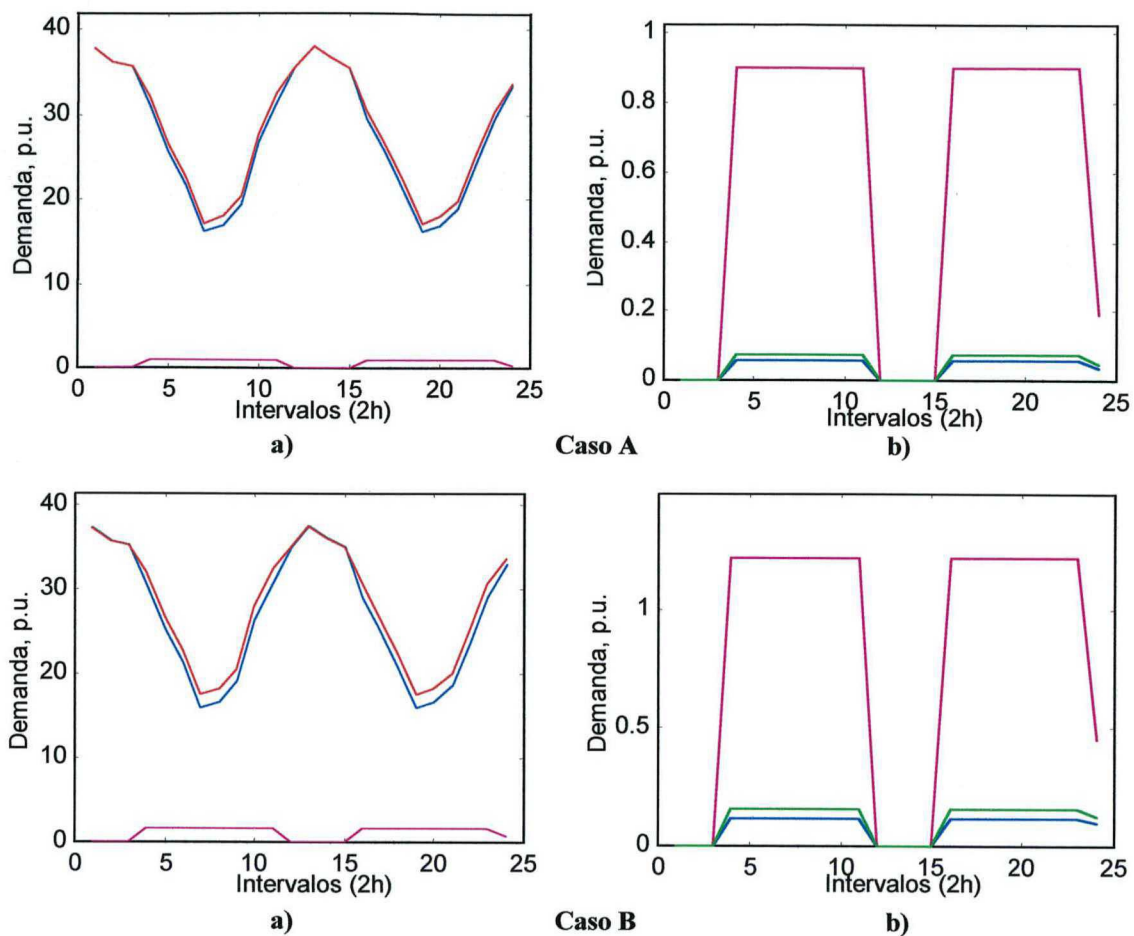


Figura 6.18 – Para os casos A e B: a) Curva de carga total (vermelho), carga fixa (azul) e carga sujeita a GLD (rosa: barra 8, azul: barra 20, verde: barra 21), b) detalhe das cargas sujeitas a GLD, em escala aumentada.

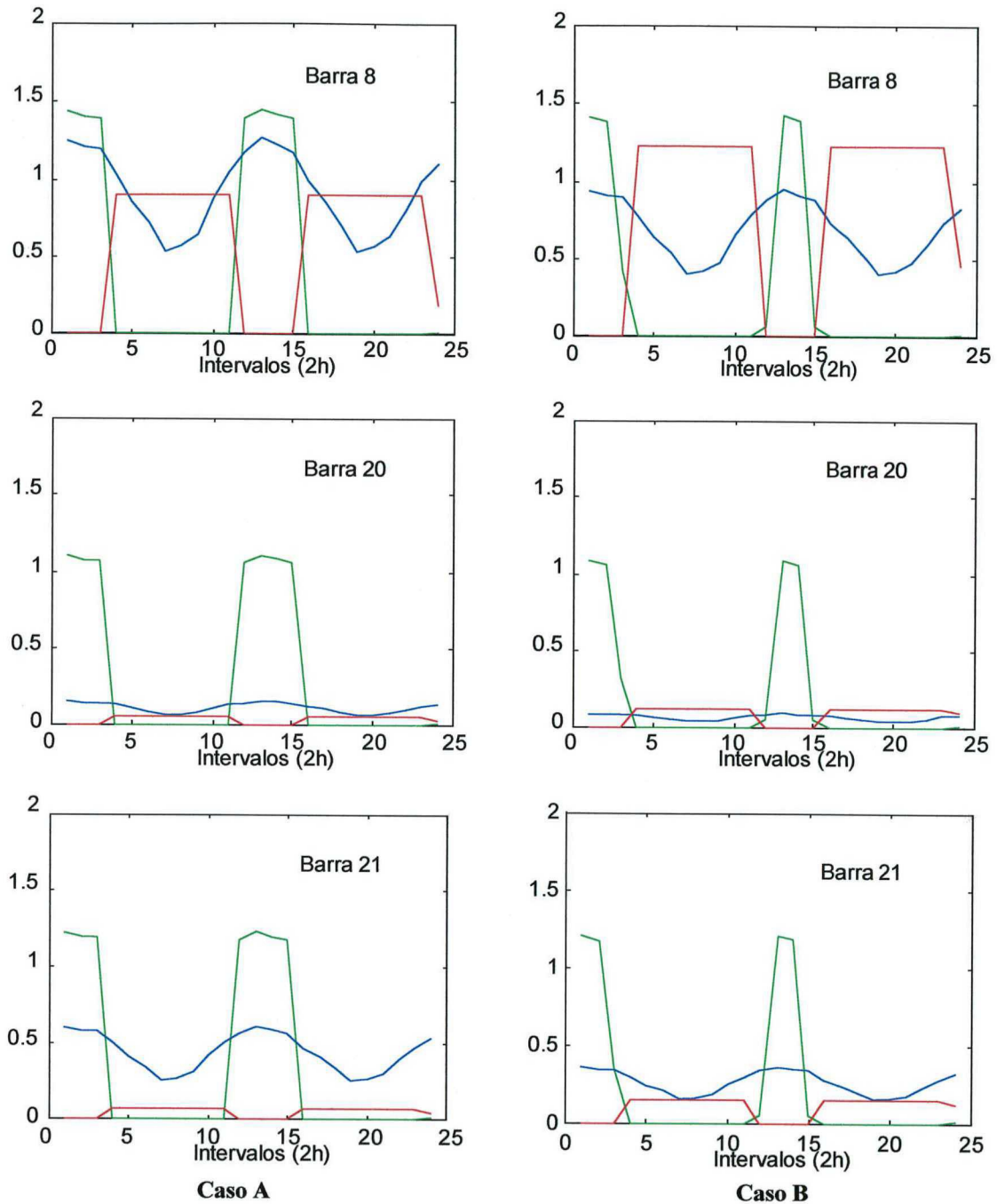


Figura 6.19 - Para cada barra com carga sujeita a GLD, nos casos A e B: multiplicador λ (verde), demanda fixa (azul) e demanda que depende de preço (vermelho).

Finalmente, a Figura 6.20 apresenta a trajetória da vazão vertida nas usinas que operam a fio d'água. Observa-se que o vertimento é mínimo durante os intervalos de maior demanda, isto é, nos intervalos 1 a 3 e 12 a 15. A Tabela 6.13 indica o volume vertido no horizonte. Nota-se que o mesmo é menor nos casos com gerenciamento de demanda que

no Caso Base. Ademais, o volume total vertido diminui a medida que aumenta a quantidade de carga sujeita a GLD.

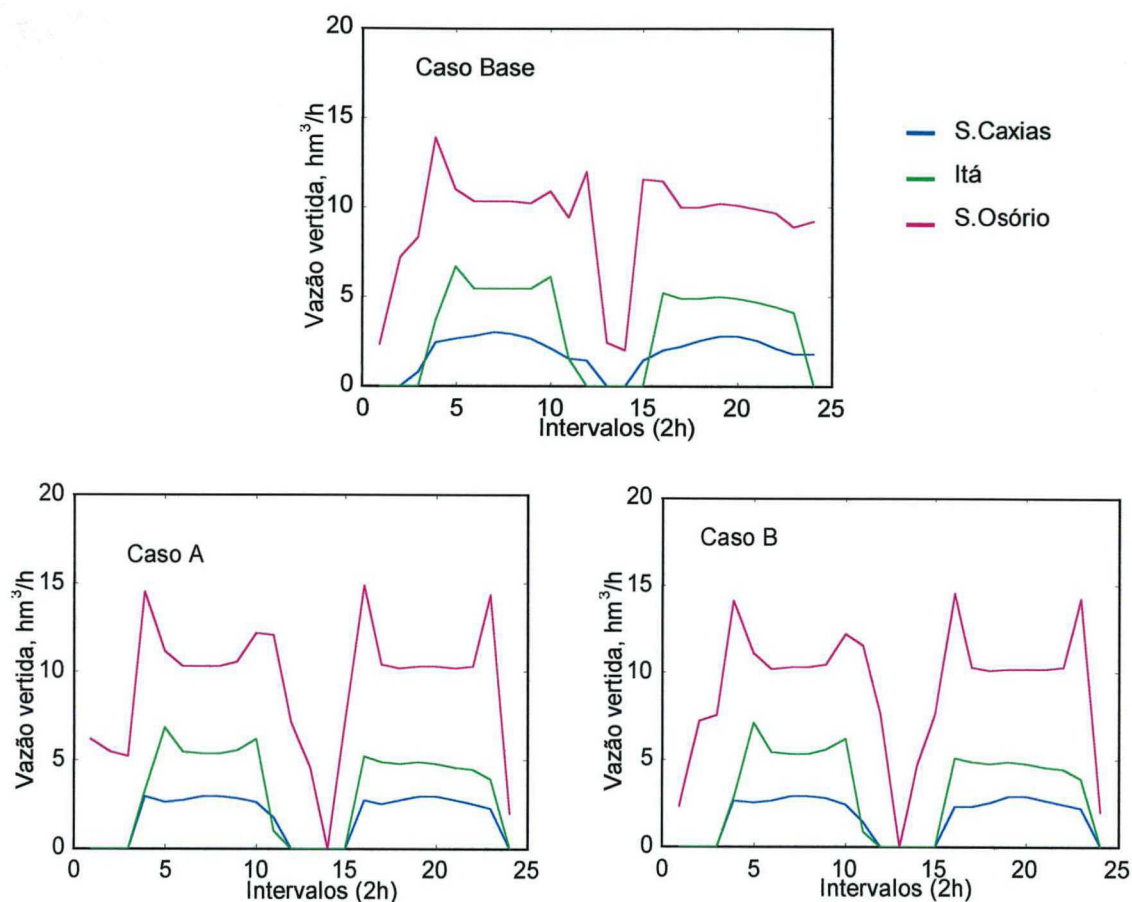


Figura 6.20 – Trajetória da vazão vertida nas usinas a fio d'água no horizonte nos casos Base, A e B;

Tabela 6.13 – Volume total vertido pelas usinas a fio d'água, nos casos Base, A e B.

Usina (barra)	Volume Vertido (hm ³)		
	Caso Base	Caso A	Caso B
S.Osório (B1)	44,1965	42,7662	40,7242
Itá (B27)	77,7922	76,2217	75,7153
S.Caixias (B29)	221,6607	220,2827	219,7779
Total	343,6494	339,2707	336,2176

Ressalta-se que a implementação exitosa de programas de gerenciamento de demanda depende de que os consumidores respondam aos sinais econômicos que recebem. Este sinal deve ser uma função do valor do multiplicador λ de Lagrange. Portanto é necessária uma adequada calibração do fator de ponderação ξ do volume final dos reservatórios da função-objetivo (Seção 5.2.2). Este fator deve estar relacionado com os custos marginais dados pelos modelos de planejamento de médio e longo prazo que levam em consideração a alocação de energia térmica e hidráulica (FRANCO, 1993).

Nas simulações efetuadas foi empregado o mesmo valor de ξ , de 1×10^4 , para as quatro usinas de acumulação, de forma que o último reservatório da cascata (Salto Santiago) foi favorecido na armazenagem.

6.3.2 Impacto da Elasticidade-preço da Demanda no Despacho Hidrotérmico Baseado na Função de Custo Futuro

Nesta seção é explorado o efeito da elasticidade-preço e da elasticidade-preço cruzada no tempo da demanda na operação de um sistema hidrotérmico. Os resultados apresentados se referem à formulação apresentada na Seção 5.2.3-b, que inclui os custos do sistema hidráulico através da função de custos futuros da água, e foram obtidos com o sistema CESP (Companhia de Energia do Estado de São Paulo) reduzido, considerando a rede correspondente a 440kV com 15 barras e 21 linhas de transmissão (FRANCO, 1993), mostrado na Figura 6.21. Este sistema possui quatro usinas hidráulicas: Água Vermelha (B3), Ilha Solteira (B8), Jupia (B9) e Capivara (B6). Considera-se um gerador térmico (B11) nas proximidades da região de São Paulo. A cascata é formada pelas usinas hidráulicas Água Vermelha, Ilha Solteira, e Jupia, sendo Água Vermelha a primeira da cascata e Jupia a última. A usina Capivara é isolada. Os dados adicionais são apresentados no Anexo C. Em todos os casos foram simulados horizontes de tempo de dois dias discretizados em intervalos de duas horas.

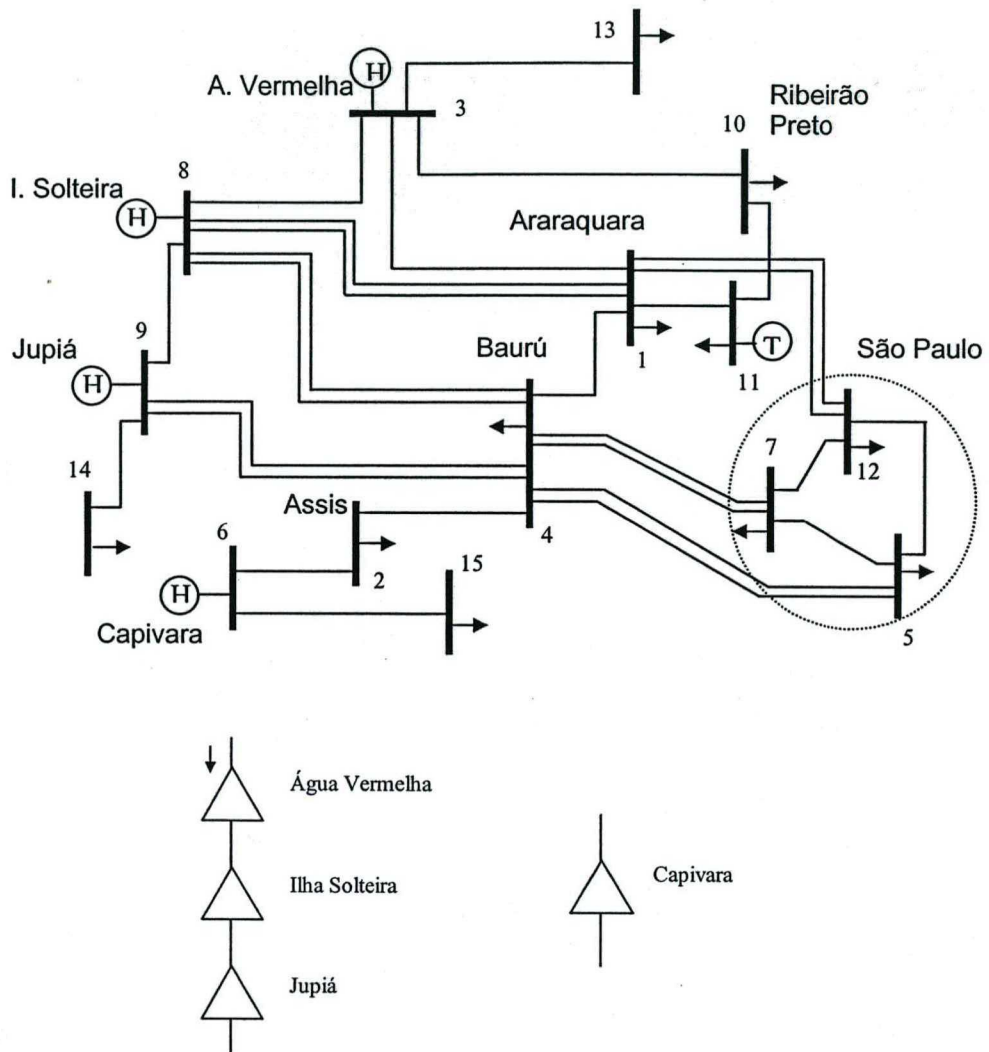


Figura 6.21 - Sistema de usinas em cascata, CESP 440kV.

O estudo é conduzido através de dois casos A e B, nos quais 10% da demanda nas barras 5 e 7 depende de preço. A resposta de cada consumidor em cada caso é definida através dos valores da elasticidade-preço e da elasticidade-preço cruzada no tempo relativas à demanda, apresentadas na Tabela 6.14 e na Figura 6.22. No Caso A, verifica-se que a função de benefício do consumidor na barra 5 é separável nos intervalos. Para o consumidor na barra 7, a elasticidade-preço cruzada no tempo é significativa, e a matriz de sensibilidades S possui estrutura tri-diagonal. Já o Caso B permite comparar o impacto de diferentes valores da elasticidade-preço e da elasticidade-preço cruzada no tempo para o mesmo padrão de elementos não-nulos da matriz de sensibilidades.

Tabela 6.14 - Elasticidade preço e elasticidade preço cruzada da demanda para os casos A e B.

		ε : +	ε_{CR} : O	ε_{CR} : *
Caso A	Barra 5	-0,5	-	-
	Barra 7	-0,5	0,3	-
Caso B	Barra 5	-0,5	0,3	0,16
	Barra 7	-0,8	0,5	0,16

Os valores de ε_{CR} se referem à Figura 6.22

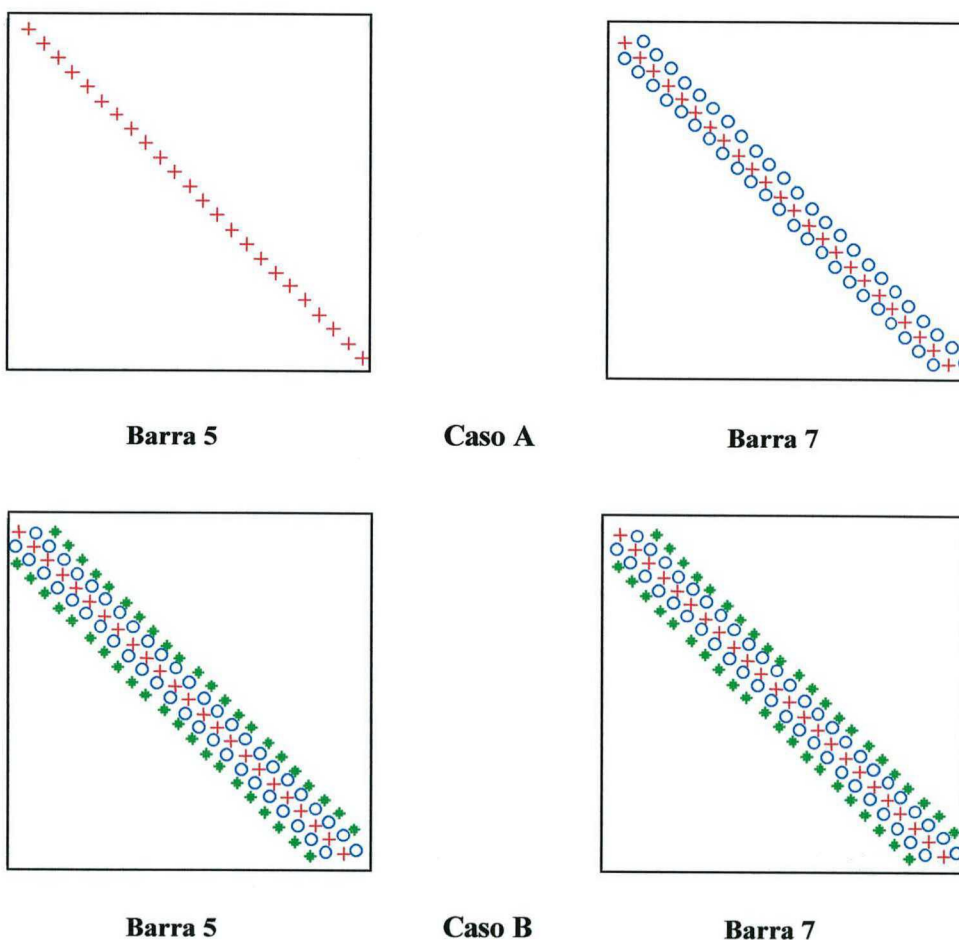


Figura 6.22 – Padrão de elementos diferentes de zero da matriz de sensibilidades S para os casos A e B.

A Figura 6.23 apresenta os comportamentos da demanda que responde a preço e do valor do multiplicador de Lagrange λ da restrição de balanço de potência da barra respectiva, para os casos A e B, ao longo de todo o horizonte de operação (48h). Observa-

se no Caso A, que a demanda na barra 5 se distribui de forma aproximadamente inversa ao preço (dado pelo multiplicador λ). Este é o comportamento característico quando a elasticidade-preço cruzada no tempo é desconsiderada, como foi observado na Seção 6.2.1 para um sistema termelétrico. Já a carga na barra 7 procura ser alocada no intervalo de menor preço (intervalo 12). Porém, esta deve ser distribuída também em outros intervalos (intervalos 11, 13, 1 e 24) em razão do fato de que o limite máximo por intervalo, fixado em 3 p.u., é atingido.

Para o Caso B, ainda na Figura 6.23, nota-se que os valores da elasticidade-preço e da elasticidade-preço cruzada no tempo da demanda influenciam fortemente a distribuição da carga que depende de preço. O elevado valor da elasticidade-preço da demanda para o consumidor na barra 7 determina que parte da carga seja alocada no intervalo de menor preço. Já para a barra 5, a carga é alocada em intervalos próximos ao intervalo de menor preço.

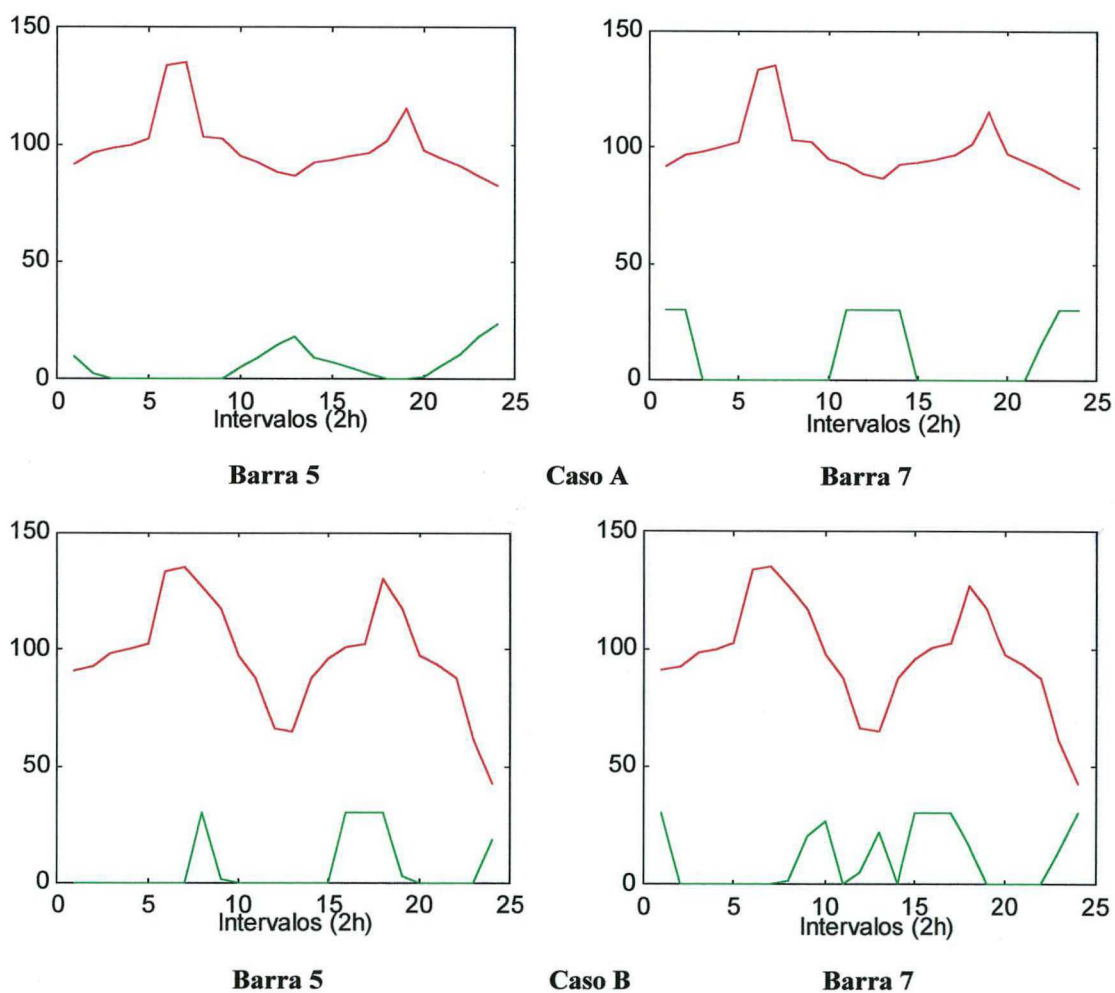


Figura 6.23 – Para os casos A e B: Multiplicador de Lagrange λ (vermelho) e carga que responde a preço, em p.u.x 10 (verde) nas barras 5 e 7.

A Figura 6.24 mostra as curvas de demanda total, demanda fixa e demanda que responde a preço, juntamente com os respectivos custos sociais, para os casos A e B. Observa-se que o Caso A, no qual a demanda que depende de preço preenche melhor os vales da curva de demanda, apresenta o menor custo social.

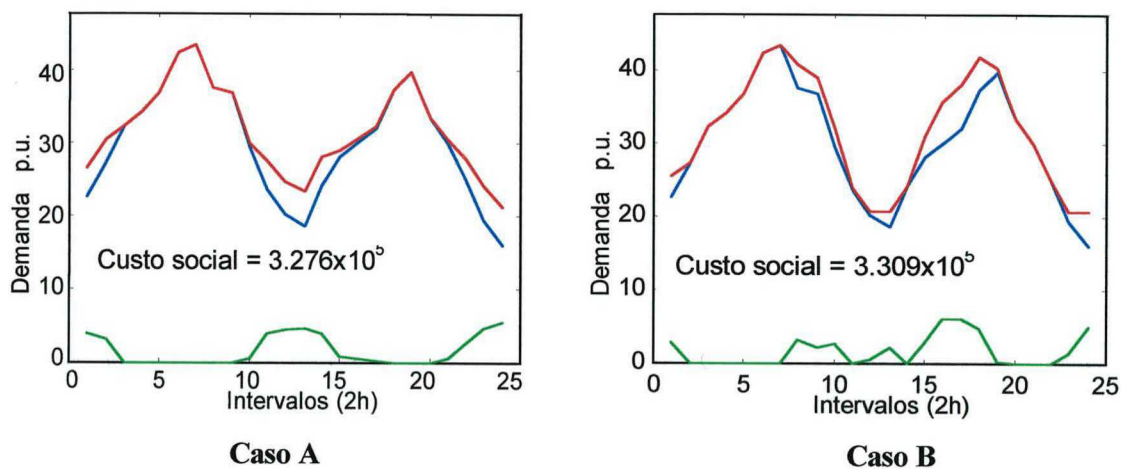


Figura 6.24 – Para os casos A e B: Demanda fixa (azul), carga total do sistema (vermelho) e demanda que responde a preço (verde).

Em seguida, é apresentada uma comparação do comportamento dos volumes dos reservatórios nos casos A e B e um Caso Base no qual não é aplicado GLD. Neste Caso Base, a carga nas barras 5 e 7, sujeita a GLD nos casos A e B, é uniformemente distribuída nos intervalos. Os volumes inicial e final e a variação de volumes dos reservatórios nos casos Base, A e B são apresentados na Tabela 6.15. Na mesma tabela, em *itálico* aparecem as variações absolutas de volume ao longo do horizonte de tempo considerado. Observa-se que o armazenamento final total do sistema aumenta em todos os casos, sendo maior quando é aplicado o gerenciamento da demanda. Além disso, o Caso A, com o menor custo social, apresenta o maior incremento do volume do sistema. Em todos os casos o reservatório de Água Vermelha, primeiro da cascata, diminui seu volume.

Tabela 6.15 - Volumes inicial, final e variação de volume dos reservatórios, nos casos Base, A e B.

Usina (barra)	Volume Inicial (hm ³)	Volume Final (hm ³) (Variação de Volume)		
		Caso Base	Caso A	Caso B
A. Vermelha (B3)	6200	5937,97 (-262,03)	5928,4 (-271,6)	5928,4 (-271,6)
Capivara (B6)	6000	7299,9 (1299,9)	7362,0 (1362,0)	7354,2 (1354,2)
Ilha Solteira (B8)	10100	10162,0 (62,00)	10171,5 (71,5)	10179 (79,0)
Jupia (B9)	2500	3412,51 (912,51)	3417,3 (917,3)	3409,7 (909,7)
Variação Total de Volume		2012,38	2079,2	2071,3

A Tabela 6.16 mostra a geração de cada usina do sistema. Observa-se que a participação térmica é diminuída com a aplicação de GLD. As usinas de Água Vermelha e Jupia, primeira e última da cascata, apresentam a mesma geração nos casos A e B. Já a distribuição da geração entre as usinas de Capivara, que não forma parte da cascata, e de Ilha Solteira, intermediária na cascata, é diferente nos casos A e B.

Tabela 6.16 – Geração nos casos Base, A e B.

Usina (Barra)	Geração (p.u.)		
	Caso Base	Caso A	Caso B
A. Vermelha (B3)	298,67	304,11	304,11
Capivara (B6)	53,76	59,44	64,50
Ilha Solteira (B8)	333,30	335,72	330,66
Jupia (B9)	54,82	53,44	53,44
Ger. hidrelétrica total	740,55	752,71	752,71
Ger. térmica (B11)	19,35	7,2	7,2

Finalmente, a Tabela 6.17 apresenta o custo social nos casos A e B juntamente com o Caso Base. Conclui-se portanto que a aplicação de GLD propicia uma redução do custo social no sistema, a qual depende das características de resposta dos consumidores.

Tabela 6.17 – Custo social.

Caso	\$
Base	358449
A	327581
B	330918

6.4 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados os resultados obtidos com os FPOD implementados para a modelagem do gerenciamento da demanda em sistema termelétricos e hidrotérmicos.

Os ganhos propiciados pela aplicação do GLD foram ilustrados através de comparações de casos com diferentes tipos de respostas dos consumidores, incluindo a situação na qual não é aplicado nenhum gerenciamento da demanda.

A adequada modelagem da resposta dos consumidores considerando a elasticidade-preço da demanda cruzada no tempo, é de fundamental importância. O preço marginal da energia, o custo social de operação do sistema e, em geral, o aproveitamento dos recursos disponíveis, dependem fortemente do perfil de demanda.

Em todos os casos se verificou uma redução do custo social com a aplicação de GLD. O valor do ganho, por outro lado, depende das possibilidades de resposta dos consumidores.

As simulações efetuadas para sistemas térmicos ilustraram a influência do GLD no alívio do congestionamento do sistema, propiciando uma redução dos picos de preço.

Nos sistemas hidrotérmicos, observa-se que o GLD possibilita favorecer o armazenamento total do sistema, devido ao fato de modificar o perfil de carga e permitir uma distribuição mais conveniente da geração entre as usinas hidráulicas. Além disso, nos casos simulados se verificou uma redução da participação térmica com a aplicação de GLD.

Conclusões e Recomendações

O gerenciamento pelo lado da demanda (GLD) que visa a modificação do padrão de uso da energia através do gerenciamento da carga, vem se tornando uma das mais eficientes ações para otimizar o setor elétrico, combatendo perdas, desperdícios e aumentando a rentabilidade do setor, cada vez mais competitivo e desregulamentado.

O processo atual de reestruturação do setor precisa de uma participação ativa dos consumidores. A resposta da demanda ao preço é uma condição fundamental para o correto funcionamento dos mercados. O GLD através de sinais de preço é uma forma de viabilizar e operacionalizar o mecanismo de resposta do consumidor. Adicionalmente, as concessionárias de energia defrontam-se com novos desafios que forçam a adoção de estratégias adequadas de minimização de custos e de diferenciação do serviço oferecido. O GLD oferece uma oportunidade de abordar estes problemas estratégicos.

Este trabalho considera o GLD através de sinais de preço. Formula-se um modelo que permite determinar os sinais econômicos a serem enviados aos consumidores, baseados nos custos marginais de operação do sistema, em um contexto de maximização da eficiência econômica. O GLD é visualizado como um problema de otimização no qual uma determinada quantidade de energia demandada é distribuída convenientemente ao longo de um horizonte de tempo. Diversos multiplicadores de Lagrange do problema são interpretados no contexto de GLD.

A adequada representação da resposta ao preço da demanda e da oferta é fundamental, pelo fato de influenciar diretamente o preço da energia. Os conceitos de elasticidade-preço e de elasticidade-preço cruzada, explorados neste trabalho, permitem incluir aspectos relevantes de intertemporalidade que condicionam o comportamento dos participantes do mercado. Este comportamento é modelado na função-objetivo do

problema, através de funções de benefício dos consumidores e de custo de produção. Adicionalmente, o problema de otimização modela restrições intertemporais de consumo e de produção de energia.

O modelo foi operacionalizado com a implementação de um fluxo de potência ótimo dinâmico (FPOD) para sistemas termelétricos e hidrotérmicos. A representação de demanda que depende de preço no despacho hidrotérmico de curto prazo, introduzida neste trabalho, tem caráter inédito.

O FPOD, inicialmente proposto em KIMBALL (1997), possibilita representar restrições intertemporais de forma sistemática. Neste trabalho, o FPOD foi generalizado para representar efeitos intertemporais também através da função-objetivo do problema de otimização. Esta capacidade mostrou-se de particular importância, por ter permitido modelar adequadamente o comportamento do consumidor mediante sua elasticidade-preço cruzada.

Para a implementação do FPOD, utilizou-se o Método Primal-dual de Pontos Interiores. O despacho hidrotérmico foi tratado de uma forma global, sem efetuar o desacoplamento temporal dos problemas elétrico e hidráulico.

Observa-se que o FPOD é um problema de grande dimensão, mesmo quando aplicado em sistemas de pequeno porte, devido à modelagem das interações no tempo das diversas variáveis. As técnicas de solução empregadas neste trabalho exploraram a esparsidade das matrizes envolvidas. A técnica de blocagem apresentada por CLEMENTS (1998) foi estendida para o FPOD, permitindo obter, em todos os casos, sistemas lineares de dimensão igual ao número de barras vezes o número de intervalos de tempo. Nesta abordagem, as variáveis são organizadas em blocos, de forma que a matriz do sistema linear apresenta a estrutura da matriz de admitância da rede elétrica.

Algumas sugestões para a continuidade deste trabalho serão enunciadas a seguir.

Primeiramente, é necessária uma representação mais detalhada do sistema de transmissão, incluindo perdas e potência reativa. As perdas de transmissão são um fator importante na determinação do preço e o GLD deve, seguramente, propiciar ganhos de desempenho consideráveis.

É necessário testar os algoritmos desenvolvidos em sistemas de maior porte. Esta tarefa exige a utilização de linguagens compiladas de programação, pelo fato do FPOD ser um problema de elevada dimensão, mesmo quando aplicado a sistemas de pequeno porte.

Observa-se que todos os algoritmos considerados neste trabalho, foram implementados como protótipos em Matlab.

Para o gerenciamento de cargas interruptíveis sugere-se considerar a modelagem de diferentes tipos de contratos de interrupção no FPOD, de forma a avaliar os efeitos no desempenho do sistema.

Referências Bibliográficas

- ALVEY, T., GOODWIN, D., MA, X., STREIFFERT, D. e SUN, D.; 1998. A Security-Constrained Bid-Clearing System for the New Zealand Wholesale Electricity Market. *IEEE Transactions on Power System*. Piscataway, N.Y. USA, v. 13, n. 2, (May) p.340-346.
- ARBEL, A.; 1993. Exploring Interior-Point Linear Programming. The MIT Press, 211p.
- BALDICK, R., KAYE, R. J. e WU, F. F.; 1992. Electricity Tariffs Under Imperfect Knowledge of Participant Benefits. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 7, N° 4, November, pp. 1471-1482.
- BARKOVICH, B. e HAWK, D.V.; 1996. Charting a New Course in California. *IEEE Spectrum*. Vol. 33, N° 7, (July) p. 26-31.
- BAUGHMAN, M.L., e SIDDIQI, S.N.; 1991. Real-Time Pricing of Reactive Power: Theory and Case Study Results. *IEEE Transactions on Power System*. Piscataway, N.Y. USA, v. 6, n. 1, (Feb) p.23-29.
- BHATTACHARYA, K., e BOLLEN, M.; 1999. Optimal Interruptible Tariffs and their Impact on Quality of Power Supply. In: PSCC-POWER SYSTEMS COMPUTATION CONFERENCE (13. :June 28-July 2nd :Trondheim, Norway). *Proceedings*. Trondheim, 1999. p. 97-103.
- BHATTACHARYA, K., BOLLEN, M. e DAALER, J.; 2000. Real Time Interruptible Tariff Mechanism Incorporating Utility-Customer Interactions. *IEEE Transactions on Power System*. Piscataway, N.Y. USA, v. 15, n. 2, (May) p.700-706.
- BILLINTON, R. e FOTUHI-FIRUZABAD, M.; 1999. A Well-being Framework for Incorporating Demand-Side Management in Power System Reliability Evaluation. In: PSCC-POWER SYSTEMS COMPUTATION CONFERENCE (13. :June 28-July 2nd :Trondheim, Norway). *Proceedings*. Trondheim, 1999. p. 60-66.

- BOMPARD, E., CARPANETO, E., CHICCO, G. e GROSS, G.; 2000. The Role of Load Demand Elasticity in Congestion Management and Pricing. In: POWER ENGINEERING SOCIETY SUMMER MEETING. *Proceedings*. v. 4. p. 2229-2234.
- BORENSTEIN, C.R. e CAMARGO, C.B.; 1997. *O Setor Elétrico no Brasil: dos Desafios do Passado às Alternativas do Futuro*. 1. ed. Porto Alegre: Sagra Luzzatto.
- BUNN, D.W.; 2000. Forecasting Loads and Prices in Competitive Power Markets. *Proceedings of the IEEE*. Piscataway. N.Y. USA v. 88. n. 2. (Feb). p. 163-169.
- CASTRONUOVO, E.D.; 2001. *Aplicação de Métodos de Pontos Interiores no Fluxo de Potência Ótimo Não-linear com Utilização de Processamento de Alto Desempenho*. Florianópolis. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.
- CIGRÉ, Working Group 03 of Study Committee 37; 1991. The Potential Impact of Demand-Side Management on Future Electricity Demand. *Electra*, N° 138 (Oct.). p. 127-145.
- CLEMENTS, K.A.; 1998. Computational Methods for Large Scale Power Systems. Curso Ministrado em visita à UFSC.
- COGERAÇÃO; 2002. Resolução N°101, de 15 de Janeiro de 2002. Assegura a empreendimentos de co-geração as prerrogativas do Programa Prioritário de Termelétricidade - PPT. http://www.energiabrasil.gov.br/resolucoes/resolucao_101.asp.
- DAVID, A. K. e LI, Y. Z.; 1993. Effect of Inter-Temporal Factors on the Real Time Pricing of Electricity. *IEEE Transactions on Power Systems*. Piscataway, NY, USA, v. 8, n. 1, (Feb) p. 44-52.
- ESKOM. (State-Owned Utility). <http://www.eskomdsm.co.za/home/home.php>
- ETO, J., MARNAY, C. GOLDMAN, C. *et al.*; 2001. An R&D Agenda to Enhance Electricity System Reliability by Increasing Customer Participation in Emerging Competitive Markets. In: POWER ENGINEERING SOCIETY WINTER MEETING. *Proceedings*.
- EL-BAKRY, A.S., TAPIA, R.A., TSUCHIYA, T. e ZHANG, Y.; 1996. On the Formulation and Theory of the Newton Interior-Point Method for Nonlinear Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*. v. 89, n. 3, (June) p. 507-541.
- FAHRIOGLU, M. e ALVARADO, F.; 1999. Using Utility Information to Calibrate Customer Demand Management Behavior Models. *Report PSerc 99-06* (June 10). <http://www.pserc.wisc.edu/psercbin/test/get/publicatio/1999public/>.

- FRANCO, P.E.C.; 1993. *Planejamento da Operação de Curto Prazo em Sistemas Hidrelétricos de Potência por Modelo de Fluxo em Redes*. Campinas. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica). Departamento de Sistemas, Faculdade de Engenharia Elétrica, Faculdade Estadual de Campinas.
- FRANCO, P.E.C., CARVALHO, M.F. e SOARES, S.; 1994. A Network Flow Model for Short-Term Hydrothermal Scheduling Problems. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway N.Y., USA, v. 9, n. 2, (May) p. 1016-1022.
- GEDRA, T.W. 1999. On Transmission Congestion and Pricing. *IEEE Transactions on Power Systems*. Vol. 14, N° 1, (Feb) .
- GRANVILLE, S.; 1994. Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods. *IEEE Transactions on Power Systems*. Piscataway, NY, USA, v. 9, n. 1, (Feb) p. 136-143.
- HOGAN, W.W.; 1992. Contract Networks for Electric Power Transmission. <http://ksgwww.harvard.edu/people/whogan>
- HUNEAULT, M., GALIANA, F.D. e GROSS, G.; 1999. A Review of Restructuring in the Electrical Business. In: PSCC-POWER SYSTEMS COMPUTATION CONFERENCE (13. :June 28-July 2nd :Trondheim, Norway). *Proceedings*. Trondheim, 1999. p. 19-31.
- ILIC, M. e GALIANA, F.; 1998 *Power Systems Operation: Old vs New, Power Systems restructuring, Engineering and Economics*. 1.ed. Kluwer Academic Publishers.
- IRISARRI, G., KIMBALL, L., CLEMENTS, K.A., BAGCHI, A. E DAVIS, P.W.; 1998. Economic Dispatch with Network and Ramping Constraints via Interior Point Methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway N.Y., USA, v. 13, n. 1, (Feb) p. 236-242.
- KIMBALL, Lucy; 1997. *Optimal Unit Commitment and Economic Dispatch with Transmission and Energy Constraints*. WPI. Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, Worcester Polytechnic Institute, Massachusetts, USA.
- KIRSCHEN, D.S., STRBAC, G., CUMPERAYOT, P., e MENDES, D.; 2000. Factoring the Elasticity of Demand in Electricity Prices. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway N.Y., USA, v. 15, n. 2, (May) p. 612-617.
- LINO, P.R.; 2001. *Esquemas Competitivos em Sistemas Hidrotérmicos: Operação Descentralizada de Sistemas Hidrotérmicos em Ambiente de Mercado*. UFRJ. Dissertação. Instituto de Matemática, NCE.
- MAJUMDAR S., CHATTOPADHYAY D. e PARIKH, J.; 1996. Interruptible Load Management Using Optimal Power Flow Analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*. Piscataway, N.Y. USA, v. 11, n. 2, (May).
- McGEE, M.; 2000. Operating Utility DSM Programs in a Restructuring Electricity Sector Workshop. In: WORKSHOP – UTE (Oct. 23-25, Montevideu, Uruguai). www.worldbank.org/html/fpd/esmap/dsm.pdf.

- MEDINA, J., QUINTANA, V.H. e CONEJO, A. J.; 1997. Experience Solving the Hydro-Thermal Coordination Problem via Interior Point Methods. In: IEEE SUMMER MEETING.
- NEJDAWI, I. M., CLEMENTS, K. A e DAVIS, P. W.; 1998. Dynamic Optimal Power Flow for Restructured Electricity Markets. In: BULK POWER SYSTEMS DYNAMICS AND CONTROL IV – Restructuring. (August 24-28, Santorini, Grece). *Proceedings*.
- NICHOLSON, W.; 1995. *Microeconomic Theory*. 6 ed. The Dryden Press.
- NORDPOOL. The Nordpool website: <http://193.69.80.130/menu1.htm> .
- OHISHI, T., SOARES, S. e CARVALHO, M.F.H.; 1991. A Short Term Hydrothermal Scheduling Approach for Dominantly Hydro Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, N.Y. USA v. 6, n. 2, (May).
- OLIVEIRA, A.R.L., SOARES, S. e NEPOMUCENO, L.; 2001. Short Term Hydroelectric Scheduling Combining Network Flow and Interior Point Approaches. *IEEE Transactions on Power Systems*. Piscataway, N.Y. USA. Aceito para publicação.
- OREN, S.S., SPILLER, P.T., VARAIYA, P., e WU, F.F.; 1995. Nodal Prices and Transmission Rights: a Critical Appraisal. *The Electricity Journal* N° 8, (April) p. 14-23.
- ORREGO, N.J.; 2000. *Despacho Hidrotérmico de Curto Prazo na Presença de Transações de Potência. Florianópolis*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.
- ORREGO, N.J., ALMEIDA, K.C. e ZURN, H.H.; 2001. Short Term Hydrothermal Scheduling under Bilateral Contracts. In: IEEE Porto Power Tech Conference. (10-13 September, Porto, Portugal).
- PEREIRA, M.V.F. e PINTO, L.M.V.G.; 1982. A Decomposition Approach to the Economic Dispatch of Hydrothermal Systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-101. n. 10. (Oct) p. 3851-3854.
- PÉREZ-ARRIAGA, I.J.; 1994. Principios Económicos Marginalistas en los Sistemas de Energia Eléctrica. Relatório Técnico. <http://www.iit.upco.es/wiit/publicaiones.html>
- PÉREZ-ARRIAGA, I.J. e MESEGUER, C.; 1997. Wholesale Marginal Prices in Competitive Generation Markets. *IEEE Transactions on Power Systems*. Piscataway, N.Y. USA. v. 12, n. 2, (May) p. 710 –717.
- ROSS, D.W. e KIM, S.; 1980. Dynamic Economic Dispatch of Generation. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-99. n. 6 p. 2060-2067.

- RUDNICK, H.; 1996. Pioneering Electricity Reform in South America. *IEEE Spectrum*, Vol. 33, N° 8, (Aug). p. 38-44.
- SANGHVI, A.P.; 1989. Flexible Strategies for Load/Demand Management using Dynamic Pricing. *IEEE Transactions on Power System*. Piscataway. N.Y. USA v. 4, n. 1, (Feb) p. 83-93.
- SCHWEPPE, F.C., CARAMANIS, M.C., TABORS, R.D., e BOHN, R.E.; 1988. *Spot pricing of electricity*. Kluwer Academic Publishers.
- SILVA, E. L.; 2001. *Formação de Preços em Mercados de Energia Elétrica*. 1. ed. Porto Alegre: Sagra Luzzatto.
- SOARES, S. e SALMAZO, C.T.; 1997. Minimum Loss Predispatch Model for Hydroelectric Power Systems. *IEEE Transactions on Power System*. Piscataway. N.Y. USA v. 12, n. 3, (Aug) p. 1220-1228.
- STRBAC, G., FARMER, E.D. e CORY, B.J.; 1996. Framework for the Incorporation of Demand-Side in Competitive Electricity Markets. *IEE Proceedings in Generation, Transmission and Distribution*. v. 143, n. 3, (May) p. 232-237.
- SUN, D.I., ASHLEY, B. BREWER, B. *et al.*; 1984. Optimal Power Flow by Newton Approach. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-103. n. 10 p. 2864-2875.
- TABORS, R.D., SCHWEPPE, F.C. e CARAMANIS, M.C.; 1989. Utility Experience with Real Time Rates. *IEEE Transactions on Power Systems*. Piscataway N.Y. USA. v.4, n. 2, (May).
- TABORS, R.D.; 1996. Lessons form the UK and Norway. *IEEE Spectrum*. v. 33, n 8, (Aug) p 45-49.
- UTURBEY, W., SIMÕES COSTA, A.J.A., LEITE, G.S.; 2000. Demand Side Management via Optimal Power Flow with Intertemporal Constraints. In: VII SEPOPE (Maio 21 a 26, Curitiba, Brasil).
- UTURBEY, W., SIMÕES COSTA, A.J.A.; 2002. Demand Side Management via Optimal Power Flow with Intertemporal Constraints. *IEE Proceedings in Generation, Transmission and Distribution*. v. 149, n.1, (Jan) p. 37-43.
- WEBER, J.D., OVERBYE, T.J. e DEMARCO, C.L.; 1999. Modeling the Consumer Benefit in the Optimal Power Flow. *Decision Support Systems*, Vol. 24, p. 279-296.
- WEI, H., SASAKI, H., KUBOKAWA, J. e YOKOYAMA, R.; 1998. An Interior Point Nonlinear Programming for Optimal Power Flow Problems with a Novel Data Structure. *IEEE Transactions on Power Systems*. Piscataway, N.Y. USA. v. 13, n. 3, (Aug) p. 870-877.

- WEI, H., SASAKI, H., KUBOKAWA, J. e YOKOYAMA, R.; 2000. Large Scale Hydrothermal Optimal Power Flow Problems Based on Interior Point Nonlinear Programming. *IEEE Transactions on Power Systems*. Piscataway, N.Y. USA. v. 15, n. 1, (Feb) p. 396-403.
- WONNACOTT, P. e WONNACOTT, R.; 1979. *Economics*, McGraw-Hill, 749p.
- WOOD, W.G.; 1982. Spinning Reserve Constrained Static and Dynamic Economic Dispatch. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*. v. 1, n. 2, (Feb) p.381-388.
- WOOD, A.A J. e WOLLENBERG, B.F.; 1996. *Power Generation, Operation and Control*, 2. ed. John Wiley and Sons, Inc.
- WU, Y., DEBS, A.S., e MARSTEN. R.E.; 1994. A Direct Nonlinear Predictor-Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows. *IEEE Transactions on Power Systems*. Piscataway, N.Y. USA. v. 9, n. 2, (May) p. 876-883.
- WU, F., VARAIYA, P., SPILLER, P., OREN, S.; 1994. Folk theorems on Transmission access: Proofs and Counter Examples. <http://www.ucei.berkeley.edu/ucei>.
- YGGE, F; 1998. Market-Oriented Programming and its Application to Power Load Management. <http://www.enersearch.se/~ygge/Work/Pubs> .

Considerações sobre Estrutura de Dados e Esparsidade no Despacho Hidrotérmico

Este Anexo refere-se primeiramente aos detalhes de implementação que permitem o aproveitamento da estrutura esparsa de diferentes matrizes na formulação do GLD em sistemas hidrotérmicos do Capítulo 5. Apresentam-se também as expressões referentes à solução da formulação do GLD com função de custo futuro.

A.1 Redução do sistema linear: eliminação das variáveis hidráulicas

Apresentam-se a seguir as expressões obtidas na eliminação das variáveis hidráulicas Δv , Δq e Δu para a redução do sistema linear, correspondentes à formulação do gerenciamento de carga em sistemas hidrotérmicos através de meta de volume da seção 5.3.3.

No Capítulo 5, as expressões (5.19) definem de uma forma geral às matrizes $\hat{\mathbf{D}}$ e \mathbf{H} . Mais especificamente, a matriz $\hat{\mathbf{D}} = -\mathbf{D} \mathbf{K}_h \hat{\mathbf{L}}^T$ é determinada a partir da expressão (A.1).

$$\hat{\mathbf{D}} = -\mathbf{D}_v \mathbf{K}_v \mathbf{L}_v^T - \hat{\mathbf{D}}_u \mathbf{K}_q \hat{\mathbf{L}}_q^T - \tilde{\mathbf{D}}_u \mathbf{K}_u \tilde{\mathbf{L}}_u^T \quad (\text{A.1})$$

onde:

$$\mathbf{K}_v = \left(\overline{\mathbf{E}}_v + \overline{\mathbf{F}}_v^T \left(\overline{\mathbf{S}} \quad \overline{\mathbf{\Pi}} \right) \overline{\mathbf{F}}_v \right)^{-1}$$

$$\mathbf{K}_q = \left(\overline{\overline{\mathbf{E}}}_q + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_q \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}}^{-1} \overline{\overline{\mathbf{\Pi}}} \right) \overline{\overline{\mathbf{F}}}_q - \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{qv} \cdot \mathbf{K}_v \cdot \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{vq} \right)^{-1} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{K}_u = \left(\overline{\overline{\mathbf{E}}}_u + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_u \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}}^{-1} \overline{\overline{\mathbf{\Pi}}} \right) \overline{\overline{\mathbf{F}}}_u - \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{uq} \cdot \mathbf{K}_q \cdot \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{qu} \right)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_u = \mathbf{D}_u - \mathbf{D}_v \cdot \mathbf{K}_v \cdot \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{vq}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_u = \mathbf{D}_u - \hat{\mathbf{D}}_u \cdot \mathbf{K}_q \cdot \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{qu}$$

$$\hat{\mathbf{L}}_q = \overline{\overline{\mathbf{L}}}_q - \overline{\overline{\mathbf{L}}}_v \cdot \mathbf{K}_v \cdot \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{vq}$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_u = \overline{\overline{\mathbf{L}}}_u - \hat{\mathbf{L}}_q \cdot \mathbf{K}_q \cdot \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{qu}$$

Observa-se que as matrizes \mathbf{K}_v , \mathbf{K}_q e \mathbf{K}_u são diagonais.

Para determinar $\hat{\mathbf{D}}_u$, observa-se que a matriz $(\mathbf{D}_v \cdot \mathbf{K}_v \cdot \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{vq})$ é o produto de (\mathbf{D}_v) , armazenada em lista encadeada como indicado na seção seguinte, vezes uma matriz diagonal $(\mathbf{K}_v \cdot \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{vq})$. O cálculo de $\tilde{\mathbf{D}}_u$ é semelhante, levando em conta que $(\mathbf{K}_q \cdot \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{qu})$ é diagonal.

Para o cálculo de $\hat{\mathbf{L}}_q$, observa-se que, dado que a matriz $(\mathbf{K}_v \cdot \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{vq})$ é diagonal, $\hat{\mathbf{L}}_q$ possui a mesma estrutura de esparsidade que as matrizes $\overline{\overline{\mathbf{L}}}_q$ e $\overline{\overline{\mathbf{L}}}_v$. Isto é, cada submatriz bloco diagonal possui a estrutura da matriz de incidência barra-reservatórios \mathbf{A}_h . Faz-se uma observação semelhante para a estrutura de esparsidade de $\tilde{\mathbf{L}}_u$.

Já a matriz $\mathbf{H} = \mathbf{D} \mathbf{K}_h \mathbf{D}^T$ das equações (5.19) é simétrica e pode ser determinada a partir da seguinte expressão:

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}_v \mathbf{K}_v \mathbf{D}_v^T + \hat{\mathbf{D}}_u \mathbf{K}_q \hat{\mathbf{D}}_u^T + \tilde{\mathbf{D}}_u \mathbf{K}_u \tilde{\mathbf{D}}_u^T \quad (\text{A.3})$$

Algumas observações:

- Quando não existe cascata de usinas hidráulicas, a matriz \mathbf{H} é bloco diagonal e cada bloco são matrizes em bandas.

- Quando existem usinas em cascata, gera-se enchimento nos blocos fora da diagonal que correspondem às usinas em cascata, sendo que \mathbf{H} continua tendo estrutura em bandas.

As expressões (5.18) definem os incrementos nas variáveis hidráulicas e os termos $\tilde{\mathbf{b}}_\lambda$ e $\hat{\mathbf{b}}_\gamma$ de uma forma genérica. Especificamente, os incrementos nas variáveis hidráulicas podem ser calculados utilizando (A.4).

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v} &= \mathbf{K}_v \left(\hat{\mathbf{b}}_v - \bar{\bar{\mathbf{E}}}_{vq} \cdot \Delta \mathbf{q} - \bar{\bar{\mathbf{L}}}_v^T \cdot \Delta \lambda - \bar{\bar{\mathbf{D}}}_v^T \cdot \Delta \gamma \right) \\ \Delta \mathbf{q} &= \mathbf{K}_q \left(\tilde{\mathbf{b}}_q - \bar{\bar{\mathbf{E}}}_{qu} \cdot \Delta \mathbf{u} - \hat{\mathbf{L}}_u^T \cdot \Delta \lambda - \hat{\mathbf{D}}_u^T \cdot \Delta \gamma \right) \\ \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{K}_u \left(\tilde{\mathbf{b}}_u - \tilde{\mathbf{L}}_u^T \cdot \Delta \lambda - \tilde{\mathbf{D}}_u^T \cdot \Delta \gamma \right)\end{aligned}\tag{A.4}$$

onde:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}}_v &= \mathbf{b}_v + \bar{\bar{\mathbf{F}}}_v^T \left(\bar{\bar{\mathbf{S}}}^{-1} \bar{\bar{\mathbf{\Pi}}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi \\ \tilde{\mathbf{b}}_q &= \mathbf{b}_q + \bar{\bar{\mathbf{F}}}_q^T \left(\bar{\bar{\mathbf{S}}}^{-1} \bar{\bar{\mathbf{\Pi}}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi - \bar{\bar{\mathbf{E}}}_{qv} \cdot \mathbf{K}_v \cdot \mathbf{b}_v \\ \tilde{\mathbf{b}}_u &= \mathbf{b}_u + \bar{\bar{\mathbf{F}}}_u^T \left(\bar{\bar{\mathbf{S}}}^{-1} \bar{\bar{\mathbf{\Pi}}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi - \bar{\bar{\mathbf{E}}}_{uq} \cdot \mathbf{K}_q \cdot \tilde{\mathbf{b}}_q\end{aligned}\tag{A.5}$$

Para os termos $\tilde{\mathbf{b}}_\lambda$ e $\hat{\mathbf{b}}_\gamma$ têm-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{b}}_\lambda &= \hat{\mathbf{b}}_\lambda - \bar{\bar{\mathbf{L}}}_v \cdot \mathbf{K}_v \cdot \hat{\mathbf{b}}_v - \hat{\mathbf{L}}_q \cdot \mathbf{K}_q \cdot \tilde{\mathbf{b}}_q - \hat{\mathbf{L}}_u \cdot \mathbf{K}_u \cdot \tilde{\mathbf{b}}_u \\ \hat{\mathbf{b}}_\gamma &= \mathbf{b}_\gamma - \bar{\bar{\mathbf{D}}}_v \mathbf{K}_v \hat{\mathbf{b}}_v - \hat{\mathbf{D}}_q \mathbf{K}_q \tilde{\mathbf{b}}_q - \tilde{\mathbf{D}}_u \mathbf{K}_u \tilde{\mathbf{b}}_u\end{aligned}\tag{A.6}$$

A.2 Armazenamento das matrizes

Matrizes diagonais

As matrizes diagonais semelhantes e referentes aos diferentes intervalos são armazenadas em uma única matriz, sendo que cada coluna desta corresponde a um intervalo de tempo. Por exemplo, as matrizes $\bar{\bar{\mathbf{E}}}_{(\cdot)} = \text{diag}(\mathbf{E}_{(\cdot)_t})$ são armazenadas em matrizes de dimensão $(n_R \times n_T)$, de forma que a coluna t contém os elementos da matriz $\mathbf{E}_{(\cdot)_t}$.

Matrizes L:

Estas matrizes possuem a estrutura da matriz de incidência A_h , como foi demonstrado, e possuem portanto somente um elemento não nulo em cada linha. Armazenam-se em matrizes de dimensão $(n_H \times n_T)$, sendo que a coluna t corresponde aos elementos de $L_{(\cdot)t}$.

Matrizes D_v e D_u

Estas matrizes são armazenadas empregando listas encadeadas. A lista encadeada por linhas é formada por três vetores: $pLin$ é o vetor de ponteiros ao primer elemento de cada linha, $sLin$ é o vetor de ponteiros ao seguinte elemento da linha, Col é o vetor contendo a coluna de cada elemento e Val é o vetor dos valores dos elementos. Para a matriz D_v o vetor Val é formado por 1 e (-1). Já para a matriz D_u é formado a partir da duração dos intervalos $\tau(t)$. De forma análoga, para a lista por colunas têm-se os vetores: $pCol$, $sCol$ e Lin .

Matriz B

Esta é a matriz de admitância de barras do modelo linearizado da rede elétrica, simétrica. Os elementos fora da diagonal são armazenados separadamente dos elementos diagonais. Para estes últimos emprega-se um vetor de dimensão $(n_B \times 1)$, definido como: $diagB(1:n_B)$. Os elementos fora da diagonal, triangulares superiores, armazenam-se empregando listas encadeadas por linhas e colunas. As listas por linhas incluem os vetores $pLinB$, contendo a posição do primeiro elemento de cada linha, $sLinB$, contendo a posição do seguinte elemento da linha (zero indica o último elemento) e $ColB$ contendo a coluna do mesmo. De forma semelhante, a lista por colunas é definida pelos seguintes vetores: $pColB$, $sColB$, $LinB$. Finalmente, o vetor $valorBu(1:nelB)$, contém os valores dos elementos. $nelB$ é o número de elementos diferentes de zero da submatriz triangular superior de B .

Matrizes M e $(M + \bar{D}^T H^{-1} \bar{D})$

A matriz M em blocos possui a mesma estrutura de esparsidade da matriz de admitância de barras da rede elétrica, sendo portanto simétrica. Define-se inicialmente uma lista encadeada idêntica à da matriz B . Posteriormente esta lista é modificada para incluir o

enchimento gerado pela estrutura do sistema hidráulico, dado pela lista encadeada de $(\overline{\mathbf{D}}^T \mathbf{H}^{-1} \overline{\mathbf{D}})$.

Os elementos fora da diagonal são armazenados separadamente dos elementos diagonais. Para estes últimos emprega-se um vetor de dimensão $(n_B \times 1)$ no qual cada elemento é uma matriz, definido em Matlab como: `diagMHR(1:2.n_T, 1:2.n_T, 1:n_B)`. Os elementos fora da diagonal, triangulares superiores, armazenam-se empregando listas encadeadas por linhas e colunas. As listas por linhas incluem os vetores `pLinMT`, contendo a posição do primeiro elemento de cada linha, `sLinMT`, contendo a posição do seguinte elemento da linha (zero indica o último elemento) e `ColMT` contendo a coluna do mesmo. De forma semelhante, a lista por colunas é definida pelos seguintes vetores: `pColMT`, `sColMT`, `LinMT`. Finalmente, o vetor `valorMHRu(1:2.n_T, 1:2.n_T, 1:nelMHR)`, contém os valores dos elementos.

$$\text{Matriz } \hat{\mathbf{D}} = -\mathbf{D}_v \mathbf{K}_v \mathbf{L}_v^T - \hat{\mathbf{D}}_u \mathbf{K}_q \hat{\mathbf{L}}_q^T - \tilde{\mathbf{D}}_u \mathbf{K}_u \tilde{\mathbf{L}}_u^T$$

As matrizes $\hat{\mathbf{D}}_u$ e $\tilde{\mathbf{D}}_u$ possuem a mesma lista encadeada. Esta é formada somando as listas de \mathbf{D}_v e \mathbf{D}_u (soma simbólica de matrizes), como se observa nas expressões da seção A.1. Nota-se que a lista encadeada de $\hat{\mathbf{D}}$ seria formada pelo produto simbólico da lista de $\hat{\mathbf{D}}_u$ e a de \mathbf{A}_h (recorda-se que as matrizes $\mathbf{K}_{(\cdot)}$ são diagonais). Esta operação não é necessária, já que a função de \mathbf{A}_h é simplesmente a de “levar a barras” os blocos ou elementos. Desta forma, $\hat{\mathbf{D}}$ é armazenada empregando a mesma lista encadeada das matrizes $\hat{\mathbf{D}}_u$ e $\tilde{\mathbf{D}}_u$.

$$\text{Matriz } \mathbf{H} = \mathbf{D} \mathbf{K}_h \mathbf{D}^T = \mathbf{D}_v \mathbf{K}_v \mathbf{D}_v^T + \hat{\mathbf{D}}_u \mathbf{K}_q \hat{\mathbf{D}}_u^T + \tilde{\mathbf{D}}_u \mathbf{K}_u \tilde{\mathbf{D}}_u^T$$

A matriz \mathbf{H} é simétrica. Os elementos fora da diagonal, para o triângulo superior, são armazenados empregando listas encadeadas por linhas e por colunas. Os elementos diagonais são armazenados separadamente. Observa-se que as listas por linhas e colunas são necessárias para efetuar a fatoração desta matriz.

Observa-se que as listas encadeadas de $(\hat{\mathbf{D}}_u \mathbf{K}_q \hat{\mathbf{D}}_u^T)$ e de $(\tilde{\mathbf{D}}_u \mathbf{K}_u \tilde{\mathbf{D}}_u^T)$ são iguais, e contêm as respectivas listas de $(\mathbf{D}_v \mathbf{K}_v \mathbf{D}_v^T)$. Desta forma, as listas encadeadas de \mathbf{H} são

iguais às listas de $(\hat{\mathbf{D}}_u \mathbf{K}_q \hat{\mathbf{D}}_u^T)$, e determinam-se efetuando o produto simbólico da lista encadeada da matriz $\hat{\mathbf{D}}_u$ com a lista de sua transposta.

Matriz $(\bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{H}^{-1} \bar{\mathbf{D}})$

Esta matriz é calculada por colunas, empregando a decomposição de \mathbf{H} em fatores $\mathbf{U}^T \mathbf{D}_H \mathbf{U}$, onde \mathbf{U} é uma matriz triangular superior com diagonal unitária e \mathbf{D}_H é diagonal.

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{D}_H \cdot \mathbf{U} \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{\mathbf{D}}^T (\mathbf{U}^T \mathbf{D}_H \mathbf{U})^{-1} \bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{D}}^T (\mathbf{U}^{-1} \mathbf{D}_H^{-1} \mathbf{U}^{-T}) \bar{\mathbf{D}} = (\mathbf{U}^{-T} \bar{\mathbf{D}})^T \mathbf{D}_H^{-1} (\mathbf{U}^{-T} \bar{\mathbf{D}}) = \mathbf{V}^T \mathbf{D}_H^{-1} \mathbf{V}$$

Recorda-se que $\bar{\mathbf{D}}$ é formada a partir da matriz $\hat{\mathbf{D}}$ ordenando adequadamente as colunas e intercalando matrizes nulas para ajustar a dimensão. Calcula-se portanto a matriz \mathbf{V} a partir da seguinte expressão:

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}^{-T} \hat{\mathbf{D}} \quad (\text{A.8})$$

Dispõe-se da lista encadeada por colunas de $\hat{\mathbf{D}}$, de forma que a matriz \mathbf{V} é calculada por coluna (substituição direta). Explora-se o fato de que as colunas de $\hat{\mathbf{D}}$ são vetores esparsos, sendo empregado o algoritmo de substituição direta rápida (*fast-forward substitution*).

GLD em Sistemas Hidrotérmicos: Solução da Formulação com Função de Custo Futuro

Apresenta-se nesta seção os passos necessários para a implementação do método primal-dual de pontos interiores no gerenciamento da carga em sistemas hidrotérmicos, quando se adota a formulação com a função de custo futuro. Considera-se o problema de otimização definido no Capítulo 5, em (5.9). Este problema é modificado como indicado em (B.1). A última equação corresponde às restrições de custo futuro, dadas pela expressão (5.9-k) que são expressas aqui em forma matricial.

Observa-se que o custo futuro é em geral muito maior que os custos de geração térmica e o benefício dos consumidores correspondentes ao horizonte de otimização. Portanto, a inclusão do custo futuro na função-objetivo pode gerar problemas na convergência do algoritmo. Para evitar este tipo de problema, considera-se a minimização do custo futuro menos um valor constante, $(\alpha - y_0)$, com: $y_0 = \text{mínimo}_i(c_{c_i})$.

$$\text{Minimizar} \quad C_T(\mathbf{p}_g) - BC_T(\mathbf{p}_d) + (\alpha - y_o) \quad (\text{B.1})$$

sujeito a:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{L_t} + \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{p}_{d_t} - \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{p}_{g_t} - \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p}_{h_t} + \mathbf{B}\theta_t &= 0 \\ \mathbf{p}_{g_t} - \bar{\mathbf{p}}_{g_t} + \bar{\mathbf{s}}_{g_t} &= 0 \\ -\mathbf{p}_{g_t} + \underline{\mathbf{p}}_{g_t} + \underline{\mathbf{s}}_{g_t} &= 0 \\ \mathbf{p}_{d_t} - \bar{\mathbf{p}}_{d_t} + \bar{\mathbf{s}}_{d_t} &= 0 \\ -\mathbf{p}_{d_t} + \underline{\mathbf{p}}_{d_t} + \underline{\mathbf{s}}_{d_t} &= 0 \\ \Gamma\mathbf{A}\theta_t - \bar{\mathbf{l}}_{L_t} + \bar{\mathbf{s}}_{L_t} &= 0 \\ -\Gamma\mathbf{A}\theta_t + \underline{\mathbf{l}}_{L_t} + \underline{\mathbf{s}}_{L_t} &= 0 \\ \mathbf{v}_t - \bar{\mathbf{v}}_t + \bar{\mathbf{s}}_{v_t} &= 0 \\ -\mathbf{v}_t + \underline{\mathbf{v}}_t + \underline{\mathbf{s}}_{v_t} &= 0 \\ \mathbf{q}_t - \bar{\mathbf{q}}_t + \bar{\mathbf{s}}_{q_t} &= 0 \\ -\mathbf{q}_t + \underline{\mathbf{q}}_t + \underline{\mathbf{s}}_{q_t} &= 0 \\ -\mathbf{u}_t + \underline{\mathbf{s}}_{u_t} &= 0 \end{aligned} \right\} t=1 \dots n_T$$

$$\mathbf{s}(i)_t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_V$$

com:

$$p_{h_{j,t}} = k_j \cdot [h_v(v_{j,t}) - h_w(q_{j,t} + u_{j,t})] \cdot q_{j,t}$$

$$j = 1, \dots, n_H \quad t = 1, \dots, n_T$$

$$\mathbf{P}_d \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_D$$

$$\mathbf{D}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{D}_u \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{u}) - \mathbf{v}_o - \mathbf{r} = 0$$

$$(\mathbf{y}_o - \alpha) \cdot \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{y} - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{v}_{n_T} + \mathbf{s}_\alpha = 0$$

onde:

n_C : número de cortes de Benders das restrições de custo futuro;

\mathbf{e}_α : vetor unitário ($n_C \times 1$);

\mathbf{s}_α : vetor ($n_C \times 1$) de variáveis de folga das restrições de custo futuro;

\mathbf{y} : vetor ($n_C \times 1$) dos termos associados aos cortes de Benders, que verifica:

$$y_i = C_{C_i} - y_o;$$

\mathbf{Z} : matriz ($n_C \times n_H$) dos coeficientes dos cortes associados aos volumes de cada reservatório e para cada corte de Benders;

\mathbf{v}_{n_T} : vetor ($n_H \times 1$) dos volumes no último intervalo.

A função de Lagrange para o problema modificado é apresentada a seguir.

$$\begin{aligned}
 L = & C_T(\mathbf{p}_g) - BC_T(\mathbf{p}_d) + (y_o - \alpha) + \\
 & \sum_{t=1}^{n_T} \lambda_t^T \cdot [\mathbf{p}_{L_t} + \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{p}_{d_t} - \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{p}_{g_t} - \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p}_{h_t} + \mathbf{B} \cdot \theta_t] + \\
 & + \sum_{t=1}^{n_T} \pi_t^T \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{F}_g | \mathbf{F}_d | \mathbf{F}_\theta | \mathbf{F}_v | \mathbf{F}_q | \mathbf{F}_u \\ \mathbf{p}_{g_t} \\ \mathbf{p}_{d_t} \\ \theta_t \\ \mathbf{v}_t \\ \mathbf{q}_t \\ \mathbf{u}_t \end{array} \right] - \mathbf{l}_t + \mathbf{s}_t + \\
 & + \beta^T \cdot [\mathbf{e}_D - \mathbf{P}_d \cdot \tau] + \\
 & + \gamma^T \cdot [\mathbf{D}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{D}_u \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{u}) - \mathbf{v}_o - \mathbf{r}] \\
 & + \pi_\alpha^T \cdot [(y_o - \alpha) \cdot \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{y} - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{v}_{n_T} + \mathbf{s}_\alpha]
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

onde:

π_α : Multiplicador de Lagrange das restrições de custo futuro.

$$\begin{aligned}
\nabla_{p_{g_t}} L &= \nabla_{p_{g_t}} C_T - \mathbf{A}_g^T \cdot \lambda_t + \mathbf{F}_g^T \cdot \pi_t &= 0 \\
\nabla_{p_{d_t}} L &= -\nabla_{p_{d_t}} BC_T + \mathbf{A}_d^T \cdot \lambda_t + \mathbf{F}_d^T \cdot \pi_t - \tau_t \cdot \beta &= 0 \\
\nabla_{\theta_t} L &= \mathbf{B}^T \cdot \lambda_t + \mathbf{F}_\theta^T \cdot \pi_t &= 0 \\
\nabla_{v_t} L &= -\Lambda_{h_t} \cdot \nabla_v \mathbf{p}_{h_t} + \mathbf{F}_v^T \cdot \pi_t + \left[\mathbf{D}_v^T \cdot \gamma \right]_v - \bar{\mathbf{Z}}^T \cdot \pi_\alpha &= 0 \\
\nabla_{q_t} L &= -\Lambda_{h_t} \cdot \nabla_q \mathbf{p}_{h_t} + \mathbf{F}_q^T \cdot \pi_t + \left[\mathbf{D}_u^T \cdot \gamma \right]_q &= 0 \\
\nabla_{u_t} L &= -\Lambda_{h_t} \cdot \nabla_u \mathbf{p}_{h_t} + \mathbf{F}_u^T \cdot \pi_t + \left[\mathbf{D}_u^T \cdot \gamma \right]_u &= 0 \\
\nabla_{\lambda_t} L &= \mathbf{p}_{L_t} + \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{p}_{d_t} - \mathbf{A}_g \cdot \mathbf{p}_{g_t} - \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{p}_{h_t} + \mathbf{B} \cdot \theta_t &= 0 \\
\nabla_{\pi_t} L &= \left[\mathbf{F}_g \mid \mathbf{F}_d \mid \mathbf{F}_\theta \mid \mathbf{F}_v \mid \mathbf{F}_q \mid \mathbf{F}_u \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{g_t} \\ \mathbf{p}_{d_t} \\ \theta_t \\ \mathbf{v}_t \\ \mathbf{q}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} - \mathbf{1}_t + \mathbf{s}_t &= 0 \\
\nabla_{s_t} L &= \mathbf{S}_t \cdot \pi_t - \mu \cdot \mathbf{k} &= 0 \\
\nabla_{\beta} L &= \mathbf{e}_D - \mathbf{P}_d \cdot \tau &= 0 \\
\nabla_{\gamma} L &= \mathbf{D}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{D}_u \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{u}) - \mathbf{v}_o - \mathbf{r} &= 0
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$t = 1, \dots, n_T$

Das restrições de custo futuro:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha} L &= 1 - \pi_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha &= 0 \\
\nabla_{\pi_\alpha} L &= (y_o - \alpha) \cdot \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{y} - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{v}_{n_T} + \mathbf{s}_\alpha &= 0 \\
\nabla_{s_\alpha} L &= \mathbf{S}_\alpha \cdot \pi_\alpha - \mu \cdot \mathbf{e}_\alpha &= 0
\end{aligned}$$

onde:

$$\bar{\mathbf{Z}} : \bar{\mathbf{Z}} \equiv \mathbf{Z} \quad \text{para } t = n_T, \text{ e } \bar{\mathbf{Z}} \equiv \mathbf{O} \text{ em outro caso.}$$

Para a solução das condições de otimalidade perturbadas resolve-se o seguinte sistema de equações.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n_T} \mathbf{C}_{T_i,j}'' \cdot \Delta \mathbf{p}_{g_j} - \mathbf{A}_g^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_g^T \cdot \Delta \pi_t &= -\nabla_{p_{g_t}} \mathbf{L} \\
-\sum_{j=1}^{n_T} \mathbf{BC}_{T_i,j}'' \cdot \Delta \mathbf{p}_{d_j} + \mathbf{A}_d^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_d^T \cdot \Delta \pi_t - \tau_t \mathbf{I} \cdot \Delta \beta &= -\nabla_{p_{d_t}} \mathbf{L} \quad (\text{B.4}) \\
\mathbf{B}^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_\theta^T \cdot \Delta \pi_t &= -\nabla_{\theta_t} \mathbf{L} \\
\mathbf{E}_{v_t} \cdot \Delta \mathbf{v}_t + \mathbf{E}_{vq_t} \cdot \Delta \mathbf{q}_t + \mathbf{L}_{v_t}^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_v^T \cdot \Delta \pi_t + \mathbf{D}_{v_t}^T \cdot \Delta \gamma - \bar{\mathbf{Z}}^T \cdot \Delta \pi_\alpha &= -\nabla_{v_t} \mathbf{L} \\
\mathbf{E}_{qv_t} \cdot \Delta \mathbf{v}_t + \mathbf{E}_{q_t} \cdot \Delta \mathbf{q}_t + \mathbf{E}_{qu_t} \cdot \Delta \mathbf{u}_t + \mathbf{L}_{q_t}^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_q^T \cdot \Delta \pi_t + \mathbf{D}_{u_t}^T \cdot \Delta \gamma &= -\nabla_{q_t} \mathbf{L} \\
\mathbf{E}_{uq_t} \cdot \Delta \mathbf{q}_t + \mathbf{E}_{u_t} \cdot \Delta \mathbf{u}_t + \mathbf{L}_{u_t}^T \cdot \Delta \lambda_t + \mathbf{F}_u^T \cdot \Delta \pi_t + \mathbf{D}_{u_t}^T \cdot \Delta \gamma &= -\nabla_{u_t} \mathbf{L} \\
-\mathbf{A}_g \cdot \Delta \mathbf{p}_{g_t} + \mathbf{A}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_{d_t} + \mathbf{B} \cdot \Delta \theta_t + \mathbf{L}_{v_t} \cdot \Delta \mathbf{v}_t + \mathbf{L}_{q_t} \cdot \Delta \mathbf{q}_t + \mathbf{L}_{u_t} \cdot \Delta \mathbf{u}_t &= -\nabla_{\lambda_t} \mathbf{L} \\
\mathbf{F}_g \cdot \Delta \mathbf{p}_{g_t} + \mathbf{F}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_{d_t} + \mathbf{F}_\theta \cdot \Delta \theta_t + \mathbf{F}_v \cdot \Delta \mathbf{v}_t + \mathbf{F}_q \cdot \Delta \mathbf{q}_t + \mathbf{F}_u \cdot \Delta \mathbf{u}_t + \mathbf{I} \cdot \Delta \mathbf{s}_t &= -\nabla_{\pi_t} \mathbf{L} \\
\mathbf{S}_t \cdot \Delta \pi + \mathbf{\Pi}_t \cdot \Delta \mathbf{s} &= -\nabla_{s_t} \mathbf{L} \\
t = 1, \dots, n_T & \\
-\sum_{t=1}^{n_T} \tau_t \mathbf{I} \cdot \Delta \mathbf{p}_{d_t} &= -\nabla_{\beta} \mathbf{L} \\
\mathbf{D}_v \cdot \Delta \mathbf{v} + \mathbf{D}_u \cdot \Delta \mathbf{q} + \mathbf{D}_u \cdot \Delta \mathbf{u} &= -\nabla_{\gamma} \mathbf{L} \\
-\mathbf{e}_\alpha^T \cdot \Delta \pi_\alpha &= -\nabla_{\alpha} \mathbf{L} \\
-\Delta \alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha - \bar{\mathbf{Z}} \cdot \Delta \mathbf{v} + \mathbf{I} \cdot \Delta \mathbf{s}_\alpha &= -\nabla_{\pi_\alpha} \mathbf{L} \\
\mathbf{S}_\alpha \cdot \Delta \pi_\alpha + \mathbf{\Pi} \cdot \Delta \mathbf{s}_\alpha &= -\nabla_{s_\alpha} \mathbf{L}
\end{aligned}$$

Apresenta-se a seguir o sistema de equações reordenado de forma a agrupar as variáveis semelhantes de intervalos diferentes. As matrizes com barras duplas superiores representam matrizes bloco diagonais, $\mathbf{I}_d = [\tau_1 \mathbf{I} \cdots \tau_{n_T} \mathbf{I}]$, \mathbf{I} é a matriz identidade de dimensão n_D e $\mathbf{b}(\cdot) = -\nabla(\cdot) \mathbf{L}$.

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\mathbf{C}}}_T \cdot \Delta \mathbf{p}_g - \overline{\overline{\mathbf{A}}}_g \cdot \Delta \lambda + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_g \cdot \Delta \pi &= \mathbf{b}_g \\
-\overline{\overline{\mathbf{B}}}\mathbf{C}_T \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\overline{\mathbf{A}}}_d \cdot \Delta \lambda + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_d \cdot \Delta \pi - \mathbf{I}_d^T \cdot \Delta \beta &= \mathbf{b}_d \\
\overline{\overline{\mathbf{B}}} \cdot \Delta \lambda + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_\theta \cdot \Delta \pi &= \mathbf{b}_\theta \\
\overline{\overline{\mathbf{E}}}_v \cdot \Delta \mathbf{v} + \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{vq} \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\overline{\mathbf{L}}}_v \cdot \Delta \lambda + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_v \cdot \Delta \pi + \mathbf{D}_v^T \cdot \Delta \gamma - \overline{\overline{\mathbf{Z}}}^T \cdot \Delta \pi_\alpha &= \mathbf{b}_v \\
\overline{\overline{\mathbf{E}}}_{qv} \cdot \Delta \mathbf{v} + \overline{\overline{\mathbf{E}}}_q \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{qu} \cdot \Delta \mathbf{u} + \overline{\overline{\mathbf{L}}}_q \cdot \Delta \lambda + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_q \cdot \Delta \pi + \mathbf{D}_u^T \cdot \Delta \gamma &= \mathbf{b}_q \\
\overline{\overline{\mathbf{E}}}_{uq} \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\overline{\mathbf{E}}}_u \cdot \Delta \mathbf{u} + \overline{\overline{\mathbf{L}}}_u \cdot \Delta \lambda + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_u \cdot \Delta \pi + \mathbf{D}_u^T \cdot \Delta \gamma &= \mathbf{b}_u \\
-\overline{\overline{\mathbf{A}}}_g \cdot \Delta \mathbf{p}_g + \overline{\overline{\mathbf{A}}}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\overline{\mathbf{B}}} \cdot \Delta \theta + \overline{\overline{\mathbf{L}}}_v \cdot \Delta \mathbf{v} + \overline{\overline{\mathbf{L}}}_q \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\overline{\mathbf{L}}}_u \cdot \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{b}_\lambda \\
\overline{\overline{\mathbf{F}}}_g \cdot \Delta \mathbf{p}_g + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_\theta \cdot \Delta \theta + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_v \cdot \Delta \mathbf{v} + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_q \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_u \cdot \Delta \mathbf{u} + \mathbf{I} \cdot \Delta \mathbf{s} &= \mathbf{b}_\pi \\
\overline{\overline{\mathbf{S}}} \cdot \Delta \pi + \overline{\overline{\mathbf{\Pi}}} \cdot \Delta \mathbf{s} &= \mathbf{b}_s \\
-\mathbf{I}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_d &= \mathbf{b}_\beta \\
\mathbf{D}_v \cdot \Delta \mathbf{v} + \mathbf{D}_u \cdot \Delta \mathbf{q} + \mathbf{D}_u \cdot \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{b}_\gamma \\
-\mathbf{e}_\alpha^T \cdot \Delta \pi_\alpha &= \mathbf{b}_\alpha \\
-\Delta \alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha - \overline{\overline{\mathbf{Z}}} \cdot \Delta \mathbf{v} + \mathbf{I} \cdot \Delta \mathbf{s}_\alpha &= \mathbf{b}_{\pi_\alpha} \\
\mathbf{S}_\alpha \cdot \Delta \pi_\alpha + \mathbf{\Pi} \cdot \Delta \mathbf{s}_\alpha &= \mathbf{b}_{s_\alpha}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Para efetuar a redução do sistema de equações considera-se inicialmente as variáveis $\Delta \mathbf{s}$, $\Delta \pi$ e $\Delta \mathbf{s}_\alpha$, $\Delta \pi_\alpha$. As expressões obtidas apresentam-se a seguir.

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\overline{\mathbf{C}}}_T + \mathbf{P}_g \right) \cdot \Delta \mathbf{p}_g - \overline{\overline{\mathbf{A}}}_g \cdot \Delta \lambda + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_g \cdot \Delta \pi &= \hat{\mathbf{b}}_g \\
\left(\mathbf{P}_l - \overline{\overline{\mathbf{B}}}\mathbf{C}_T \right) + \overline{\overline{\mathbf{A}}}_d \cdot \Delta \lambda + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_d \cdot \Delta \pi - \mathbf{I}_d^T \cdot \Delta \beta &= \hat{\mathbf{b}}_d \\
\overline{\overline{\mathbf{B}}} \cdot \Delta \lambda + \mathbf{P}_\theta \cdot \Delta \theta &= \hat{\mathbf{b}}_\theta \\
\left(\overline{\overline{\mathbf{E}}}_v + \mathbf{P}_v + \overline{\overline{\mathbf{G}}} \right) \cdot \Delta \mathbf{v} + \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{vq} \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\overline{\mathbf{L}}}_v \cdot \Delta \lambda + \mathbf{D}_v^T \cdot \Delta \gamma + \left(\overline{\overline{\mathbf{G}}}_\alpha \mathbf{e} \right) \cdot \Delta \alpha &= \hat{\mathbf{b}}_v \\
\overline{\overline{\mathbf{E}}}_{qv} \cdot \Delta \mathbf{v} + \left(\overline{\overline{\mathbf{E}}}_q + \mathbf{P}_q \right) \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\overline{\mathbf{E}}}_{qu} \cdot \Delta \mathbf{u} + \overline{\overline{\mathbf{L}}}_q \cdot \Delta \lambda + \mathbf{D}_u^T \cdot \Delta \gamma &= \hat{\mathbf{b}}_q \\
\overline{\overline{\mathbf{E}}}_{uq} \cdot \Delta \mathbf{q} + \left(\overline{\overline{\mathbf{E}}}_u + \mathbf{P}_u \right) \cdot \Delta \mathbf{u} + \overline{\overline{\mathbf{L}}}_u \cdot \Delta \lambda + \mathbf{D}_u^T \cdot \Delta \gamma &= \hat{\mathbf{b}}_u \\
-\overline{\overline{\mathbf{A}}}_g \cdot \Delta \mathbf{p}_g + \overline{\overline{\mathbf{A}}}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\overline{\mathbf{B}}} \cdot \Delta \theta + \overline{\overline{\mathbf{L}}}_v \cdot \Delta \mathbf{v} + \overline{\overline{\mathbf{L}}}_q \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\overline{\mathbf{L}}}_u \cdot \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{b}_\lambda \\
-\mathbf{I}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_d &= \mathbf{b}_\beta \\
\mathbf{D}_v \cdot \Delta \mathbf{v} + \mathbf{D}_u \cdot \Delta \mathbf{q} + \mathbf{D}_u \cdot \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{b}_\gamma \\
\left(\overline{\overline{\mathbf{G}}}_\alpha \mathbf{e} \right)^T \cdot \Delta \mathbf{v} + \mathbf{e}^T \left(\mathbf{S}_\alpha^{-1} \mathbf{\Pi}_\alpha \right) \cdot \Delta \alpha &= \hat{\mathbf{b}}_\alpha
\end{aligned} \tag{B.6}$$

com:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{b}}_\pi &= \mathbf{b}_\pi - \overline{\overline{\Pi}}^{-1} \cdot \mathbf{b}_s \\
 \hat{\mathbf{b}}_g &= \mathbf{b}_g + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_g^T \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\Pi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi \\
 \hat{\mathbf{b}}_d &= \mathbf{b}_d + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_d^T \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\Pi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi \\
 \hat{\mathbf{b}}_\theta &= \mathbf{b}_\theta + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_\theta^T \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\Pi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi \\
 \hat{\mathbf{b}}_u &= \mathbf{b}_u + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_u^T \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\Pi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi \\
 \hat{\mathbf{b}}_q &= \mathbf{b}_q + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_q^T \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\Pi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi \\
 \hat{\mathbf{b}}_v &= \mathbf{b}_v + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_v^T \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\Pi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\pi - \overline{\overline{\mathbf{G}}}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{b}}_\alpha
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{s} &= \overline{\overline{\Pi}}^{-1} \cdot \left(\mathbf{b}_s - \overline{\overline{\mathbf{S}}} \cdot \Delta \pi \right) \\
 \Delta \pi &= \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\Pi}} \right) \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{F}}}_g \cdot \Delta \mathbf{p}_g + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_d \cdot \Delta \mathbf{p}_d + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_\theta \cdot \Delta \theta + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_u \cdot \Delta \mathbf{u} + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_q \cdot \Delta \mathbf{q} + \overline{\overline{\mathbf{F}}}_v \cdot \Delta \mathbf{v} - \hat{\mathbf{b}}_\pi \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{s}_\alpha &= \overline{\overline{\Pi}}_\alpha^{-1} \cdot \left(\mathbf{b}_{s_\alpha} - \overline{\overline{\mathbf{S}}}_\alpha \cdot \Delta \pi_\alpha \right) \\
 \Delta \pi_\alpha &= \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}}_\alpha^{-1} \overline{\overline{\Pi}}_\alpha \right) \cdot \left(-\overline{\overline{\mathbf{Z}}} \cdot \Delta \mathbf{v} - \mathbf{e} \cdot \Delta \alpha - \hat{\mathbf{b}}_{\pi_\alpha} \right) \\
 \hat{\mathbf{b}}_{\pi_\alpha} &= \mathbf{b}_{\pi_\alpha} - \overline{\overline{\Pi}}_\alpha^{-1} \cdot \mathbf{b}_{s_\alpha} \\
 \hat{\mathbf{b}}_\alpha &= \hat{\mathbf{b}}_\alpha - \mathbf{e}^T \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}}_\alpha^{-1} \overline{\overline{\Pi}}_\alpha \right) \cdot \mathbf{e} \\
 \overline{\overline{\mathbf{G}}}_\alpha &= \overline{\overline{\mathbf{Z}}}^T \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}}_\alpha^{-1} \overline{\overline{\Pi}}_\alpha \right) \\
 \overline{\overline{\mathbf{G}}} &= \overline{\overline{\mathbf{Z}}}^T \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}}_\alpha^{-1} \overline{\overline{\Pi}}_\alpha \right) \cdot \overline{\overline{\mathbf{Z}}}
 \end{aligned}$$

A seguir apresenta-se o sistema de equações logo após a eliminação das variáveis $\Delta \mathbf{p}_g$, $\Delta \mathbf{p}_d$, $\Delta \mathbf{u}$ e $\Delta \mathbf{q}$, juntamente com as expressões auxiliares correspondentes.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_\theta \cdot \Delta \theta + \overline{\overline{\mathbf{B}}}^T \cdot \Delta \lambda &= \hat{\mathbf{b}}_\theta \\
 \mathbf{B} \cdot \Delta \theta - \mathbf{A} \cdot \Delta \lambda + \hat{\mathbf{L}}_v \cdot \Delta \mathbf{v} + \mathbf{J}^T \cdot \Delta \beta - \mathbf{Q}^T \cdot \Delta \gamma &= \hat{\mathbf{b}}_\lambda \\
 \hat{\mathbf{L}}_v \cdot \Delta \lambda + \mathbf{N} \cdot \Delta \mathbf{v} + \left(\overline{\overline{\mathbf{G}}}_\alpha \mathbf{e} \right) \cdot \Delta \alpha + \hat{\mathbf{D}}_v^T \cdot \Delta \gamma &= \hat{\mathbf{b}}_v \\
 \left(\overline{\overline{\mathbf{G}}}_\alpha \mathbf{e} \right) \cdot \Delta \mathbf{v} + \mathbf{e}^T \left(\overline{\overline{\mathbf{S}}}_\alpha^{-1} \overline{\overline{\Pi}}_\alpha \right) \cdot \mathbf{e} \cdot \Delta \alpha &= \hat{\mathbf{b}}_\alpha \\
 \mathbf{J} \cdot \Delta \lambda - \mathbf{T} \cdot \Delta \beta &= \hat{\mathbf{b}}_\beta \\
 \hat{\mathbf{D}}_v \cdot \Delta \mathbf{v} - \mathbf{Q} \cdot \Delta \lambda - \mathbf{H} \cdot \Delta \gamma &= \hat{\mathbf{b}}_\gamma
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

com:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_d &= (\mathbf{P}_l - \mathbf{B}\mathbf{C}_T^n)^{-1} \\
\mathbf{K}_g &= (\overline{\mathbf{C}}_T^n + \mathbf{P}_g)^{-1} \\
\mathbf{K}_u &= (\mathbf{E}_u + \mathbf{P}_u)^{-1} \\
\mathbf{K}_q &= (\mathbf{E}_q + \mathbf{P}_q - \mathbf{E}_{qu}\mathbf{K}_u\mathbf{E}_{uq})^{-1} \\
\Delta\mathbf{p}_d &= \mathbf{K}_d \cdot \left(\hat{\mathbf{b}}_d - \overline{\mathbf{A}}_d^T \cdot \Delta\lambda + \mathbf{I}_d^T \Delta\beta \right) \\
\Delta\mathbf{p}_g &= \mathbf{K}_g \cdot \left(\hat{\mathbf{b}}_p + \overline{\mathbf{A}}_g^T \cdot \Delta\lambda \right) \\
\Delta\mathbf{u} &= \mathbf{K}_u \cdot \left(\hat{\mathbf{b}}_u - \mathbf{E}_{uq} \cdot \Delta\mathbf{q} - \mathbf{L}_u^T \cdot \Delta\lambda - \mathbf{D}_u^T \Delta\gamma \right) \\
\Delta\mathbf{q} &= \mathbf{K}_q \cdot \left(\tilde{\mathbf{b}}_q - \mathbf{E}_{qv} \cdot \Delta\mathbf{v} - \hat{\mathbf{L}}_q^T \cdot \Delta\lambda - \hat{\mathbf{D}}_u^T \Delta\gamma \right) \\
\tilde{\mathbf{b}}_q &= \hat{\mathbf{b}}_q - \mathbf{E}_{qu}\mathbf{K}_u\hat{\mathbf{b}}_u \\
\hat{\mathbf{b}}_\lambda &= \mathbf{b}_\lambda + \mathbf{A}_g\mathbf{K}_g\hat{\mathbf{b}}_g - \mathbf{A}_d\mathbf{K}_d\hat{\mathbf{b}}_d - \mathbf{L}_u\mathbf{K}_u\hat{\mathbf{b}}_u - \hat{\mathbf{L}}_q\mathbf{K}_q\tilde{\mathbf{b}}_q \\
\hat{\mathbf{b}}_\beta &= \hat{\mathbf{b}}_\beta + \mathbf{I}_d\mathbf{K}_d\hat{\mathbf{b}}_d \\
\hat{\mathbf{b}}_\gamma &= \mathbf{b}_\gamma - \mathbf{D}_u\mathbf{K}_u\hat{\mathbf{b}}_u - \hat{\mathbf{D}}_u\mathbf{K}_q\tilde{\mathbf{b}}_q \\
\tilde{\mathbf{b}}_v &= \hat{\mathbf{b}}_v - \mathbf{E}_{vq}\mathbf{K}_q\tilde{\mathbf{b}}_q
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Finalmente, da eliminação de $\Delta\alpha$ obtem-se as seguintes expressões.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_\theta \cdot \Delta\theta + \overline{\mathbf{B}}^T \cdot \Delta\lambda &= \hat{\mathbf{b}}_\theta \\
\mathbf{B} \cdot \Delta\theta - \mathbf{A} \cdot \Delta\lambda + \hat{\mathbf{L}}_v \cdot \Delta\mathbf{v} + \mathbf{J}^T \cdot \Delta\beta - \mathbf{Q}^T \cdot \Delta\gamma &= \hat{\mathbf{b}}_\lambda \\
\hat{\mathbf{L}}_v \cdot \Delta\lambda + \hat{\mathbf{N}} \cdot \Delta\mathbf{v} + \hat{\mathbf{D}}_v^T \cdot \Delta\gamma &= \tilde{\mathbf{b}}_v \\
\mathbf{J} \cdot \Delta\lambda - \mathbf{T} \cdot \Delta\beta &= \hat{\mathbf{b}}_\beta \\
\hat{\mathbf{D}}_v \cdot \Delta\mathbf{v} - \mathbf{Q} \cdot \Delta\lambda - \mathbf{H} \cdot \Delta\gamma &= \hat{\mathbf{b}}_\gamma
\end{aligned} \tag{B.10}$$

com:

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &= (r_\alpha)^{-1} \cdot \left(\hat{\mathbf{b}}_\alpha - (\overline{\mathbf{G}}_\alpha \mathbf{e})^T \cdot \Delta\mathbf{v} \right) \\
\hat{\mathbf{N}} &= \left(\mathbf{N} - \overline{\mathbf{G}}_\alpha (r_\alpha)^{-1} \overline{\mathbf{G}}_\alpha^T \right)
\end{aligned}$$

Dados dos Sistemas Teste

C.1 Sistema Teste 14 barras do IEEE

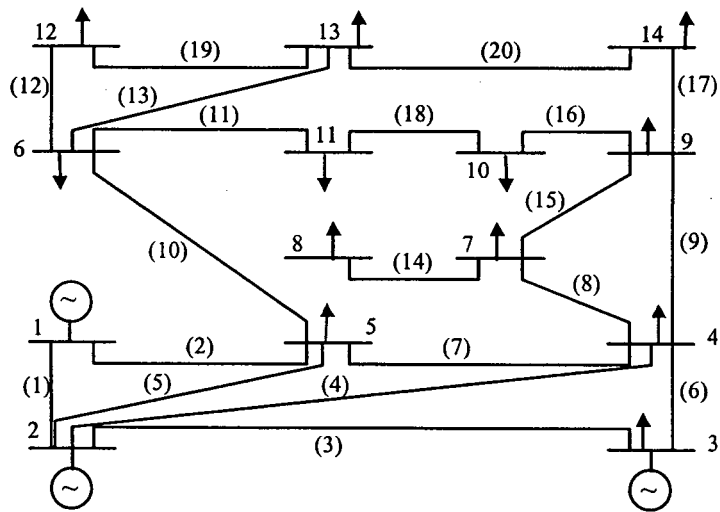


Figura C.1.- Sistema teste do IEEE-14 barras.

Barra 4 e Barra 5: com restrições de consumo de igualdade.

Barra 11: com restrição de consumo de desigualdade.

Tabela C.1 – Dados das linhas do sistema teste do IEEE de 14 barras.

Linha	De	Para	X (p.u.)	Linha	De	Para	X (p.u.)
1	1	2	0,0592	11	6	11	0,1989
2	1	5	0,223	12	6	12	0,2558
3	2	3	0,198	13	6	13	0,1303
4	2	4	0,1763	14	7	8	0,1761
5	2	5	0,1738	15	7	9	0,11
6	3	4	0,1710	16	9	10	0,0845
7	4	5	0,0421	17	9	14	0,2704
8	4	7	0,2091	18	10	11	0,1921
9	4	9	0,5562	19	12	13	0,1999
10	5	6	0,252	20	13	14	0,3480

Tabela C.2 - Funções custo dos geradores.

Gerador	$Q2-\$/pu^2 \cdot h$	$Q1-\$/pu \cdot h$	\underline{p}_g (pu)	\bar{p}_g (pu)
G1	48,2	792	0,5	9
G2	19,4	785	0,5	9
G3	10	650	0,5	9

$$C(p_{gi}) = Q1 \cdot p_{gi} + Q2 \cdot p_{gi}^2$$

C.2 Sistema SUL Reduzido

O sistema SUL, apresentado na Figura C.2, possui sete usinas hidráulicas: Foz do Areia (B15), Salto Segredo (B30), Salto Santiago (B14), Salto Osório (B1), Salto Caxias (B29), Itá (B27) e Passo Fundo (B3). Considera-se um gerador térmico em Jorge Lacerda (B6). A Figura C.3 indica a cascata de usinas. Foz do Areia (B15) é a primeira das cinco usinas em cascata, e Salto Caxias (B29) a última. As usinas hidráulicas Itá (B27) e Passo Fundo (B3) estão isoladas.

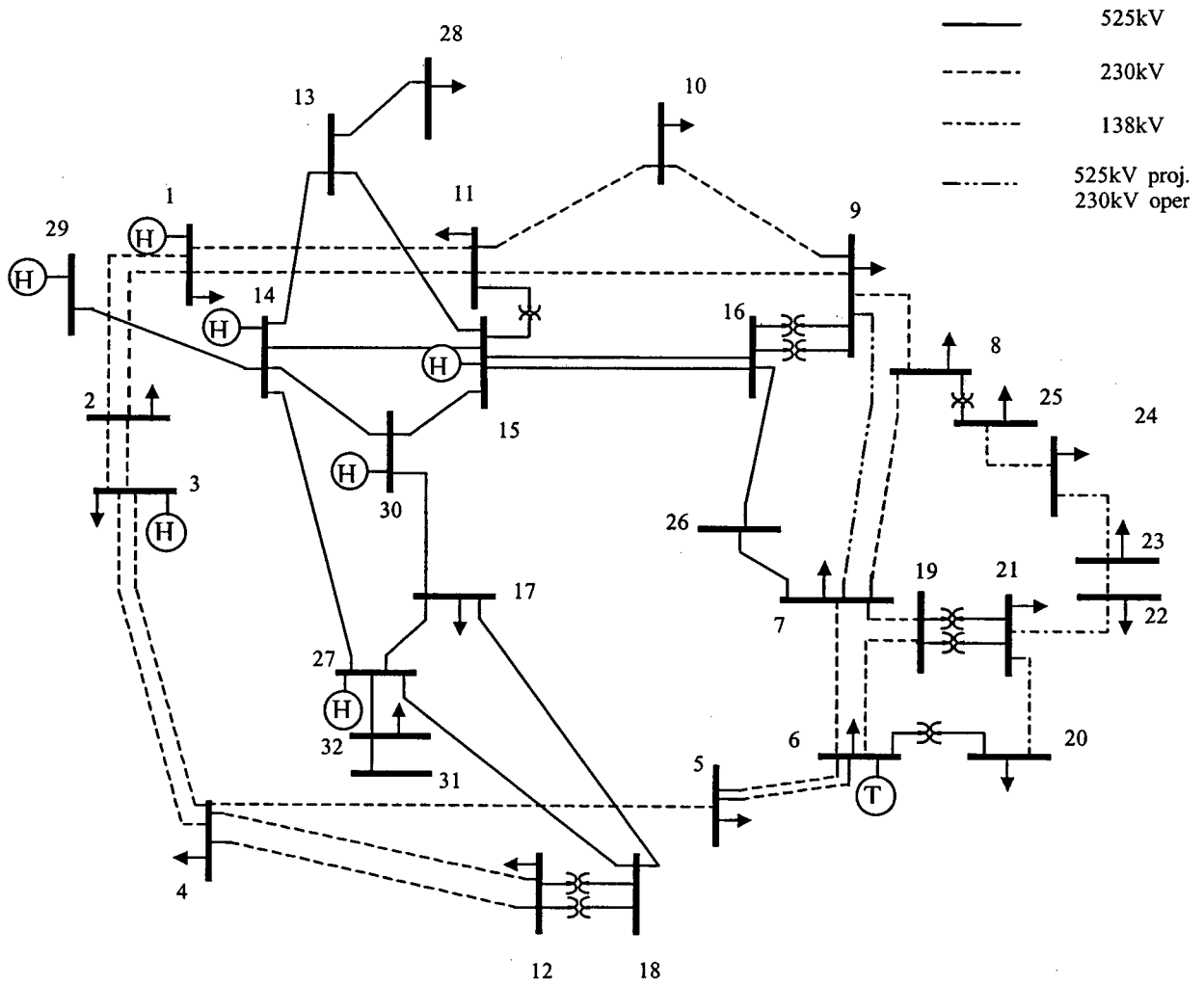


Figura C.2 – Sistema de transmissão da Região Sul reduzido.

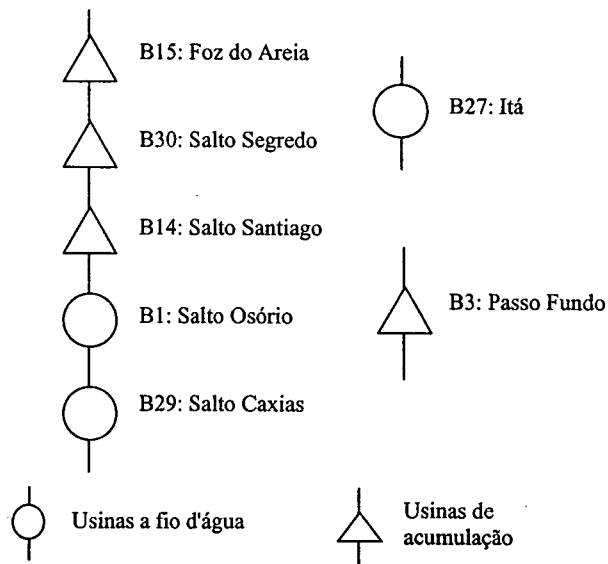


Figura C.3 - Cascata de usinas.

Tabela C.3 – Dados das linhas do sistema SUL.

Linha	De	Para	X (p.u.)	$I_{c,sup}$ (p.u.)	$I_{c,inf}$ (p.u.)
1	11	1	0,05825	3,50	-3,50
2	1	2	0,08105	3,50	-3,50
3	2	3	0,0427	3,50	-3,50
4	3	4	0,1189	3,50	-3,50
5	4	5	0,1987	3,50	-3,50
6	4	12	0,0412	3,50	-3,50
7	5	6	0,02455	3,50	-3,50
8	6	7	0,1650	3,50	-3,50
9	7	8	0,0426	3,50	-3,50
10	9	7	0,0823	3,50	-3,50
11	8	9	0,0466	3,50	-3,50
12	9	10	0,1046	3,50	-3,50
13	9	11	0,2395	3,50	-3,50
14	10	11	0,1809	3,50	-3,50
15	11	15	0,0125	3,50	-3,50
16	15	13	0,0201	11,00	-11,00
17	13	14	0,0201	11,00	-11,00
18	14	30	0,0070	11,00	-11,00
19	15	16	0,0142	11,00	-11,00
20	16	9	0,00417	11,00	-11,00
21	15	17	0,0205	11,00	-11,00
22	17	18	0,0309	11,00	-11,00
23	18	12	0,0031	11,00	-11,00
24	6	19	0,1183	1,32	-1,32
25	7	19	0,1313	1,32	-1,32
26	6	20	0,0590	6,00	-6,00
27	19	21	0,0621	6,00	-6,00
28	20	21	0,2683	1,32	-1,32
29	22	21	0,0118	1,32	-1,32
30	22	23	0,1048	1,32	-1,32
31	24	23	0,1181	1,32	-1,32
32	24	25	0,1872	1,32	-1,32
33	25	8	0,0316	6,00	-6,00
34	7	26	0,0576	6,00	-6,00
35	16	26	0,1603	11,00	-11,00
36	14	27	0,2170	11,00	-11,00
37	18	27	0,3977	11,00	-11,00
38	13	28	0,1394	11,00	-11,00
39	29	14	0,0108	11,00	-11,00
40	27	32	0,0276	11,00	-11,00
41	31	32	0,0163	11,00	-11,00
42	30	15	0,0070	11,00	-11,00
43	27	17	0,0122	11,00	-11,00

Tabela C.4 - Dados de geração do sistema SUL,

Tipo	P ^{min} [MW]	P ^{max} [MW]	q ^{min} [hm ³ /h]	q ^{max} [hm ³ /h]
S. Osório	0	1078	0,4284	6,4224
P. Fundo	0	220	0,0072	0,3744
S. Santiago	0	1420	0,4068	5,6736
F. Areia	0	1676	0,2808	4,9536
Itá	0	1450	0,2844	5,7240
S. Caixias	0	1240	0,5040	7,5600
S. Segredo	0	1260	0,3312	4,5648

Função de custos do gerador térmico: $C(p_g) = 720 \cdot p_g + 14.2 \cdot p_g^2$

Tabela C.5 – Volumes máximo e mínimo dos reservatórios do sistema SUL.

Usina	Vol. min (hm ³)	Vol. max (hm ³)
S. Osório	1124	1124
P. Fundo	185	1589
S. Santiago	2662	6775
F. Areia	1974	5779
Itá	5100	5100
S. Caixias	3573	3573
S. Segredo	2562	2950

Tabela C.6 - Altura a montante das usinas, h_v(v), para o sistema SUL.

Coefficientes dos Polinômios $h_v(v) = c_{v0} + c_{v1} \cdot v + c_{v2} \cdot v^2 + c_{v3} \cdot v^3 + c_{v4} \cdot v^4$

	F. Areia	S. Segredo	S. Santiago	S. Osório	S. Caixias	Itá	P. Fundo
c _{v0}	650,9	552,54	447,73	392	325	370	580,4
c _{v1}	3,499e-2	2,469e-2	0	0	0	0	2,215e-2
c _{v2}	-6,5e-6	-2,103e-6	-2,871e-6	0	0	0	-1,413e-5
c _{v3}	7,777e-10	0	3,002e-10	0	0	0	6,345e-9
c _{v4}	-3,395e-13	0	-1,273e-14	0	0	0	-1,155e-12

Tabela C.7 - Altura a jusante das usinas, $h_w(w)$, para o sistema SUL.

Coeficientes dos Polinômios $h_w(w) = c_{w0} + c_{w1} \cdot w + c_{w2} \cdot w^2 + c_{w3} \cdot w^3 + c_{w4} \cdot w^4$							
	F. Areia	S. Segredo	S. Santiago	S. Osório	S. Caixias	Itá	P. Fundo
c_{w0}	607	490,039	394,416	321,8	257,92	261,36	261,36
c_{w1}	2,736e-5	6,084e-5	2,111e-3	2,281e-3	6,028e-4	3,012e-3	0
c_{w2}	3,769e-7	2,924e-7	-7,923e-8	-1,403e-7	-1,718e-8	-5,636e-7	0
c_{w3}	-4,491e-11	-2,320e-11	2,352e-12	3,842e-12	2,283e-13	6,791e-11	0
c_{w4}	0	4,564e-16	-2,714e-17	-5,363e-17	1,217e-20	-3,028e-15	0

Define-se: $w = q + u$

Tabela C.8- Afluência para cada usina hidrelétrica do sistema SUL.

Usina	Afluência (hm ³ /h)
S. Osório	3,4812
P. Fundo	0,1944
S. Santiago	3,3228
F. Areia	2,2356
Itá	7,7652
S. Caixias	7,4448
S. Segredo	4,8888

Tabela C.9 - Funções benefício dos consumidores, sistema SUL.

Barra	$B2-\$/pu^2 \cdot h$	$B1-\$/pu \cdot h$	\underline{p}_d (pu)	\bar{p}_d (pu)
8	-4,4	22,2	0,0	5
20	-147,7	23,5	0,0	3
21	-111,9	23,1	0,0	3

$$B(p_{di}) = B1 \cdot p_{di} + B2 \cdot p_{di}^2$$

C.3 Sistema CESP 440 Reduzido

Este sistema possui quatro usinas hidráulicas: Água Vermelha (B3), Ilha Solteira (B8), Jupia (B9), Capivara (B6). Considera-se um gerador térmico (B11) nas proximidades da região de São Paulo. A cascata é formada pelas usinas hidráulicas Água Vermelha, Ilha Solteira, e Jupia, sendo Água Vermelha a primeira da cascata e Jupia a última; a usina Capivara é isolada.

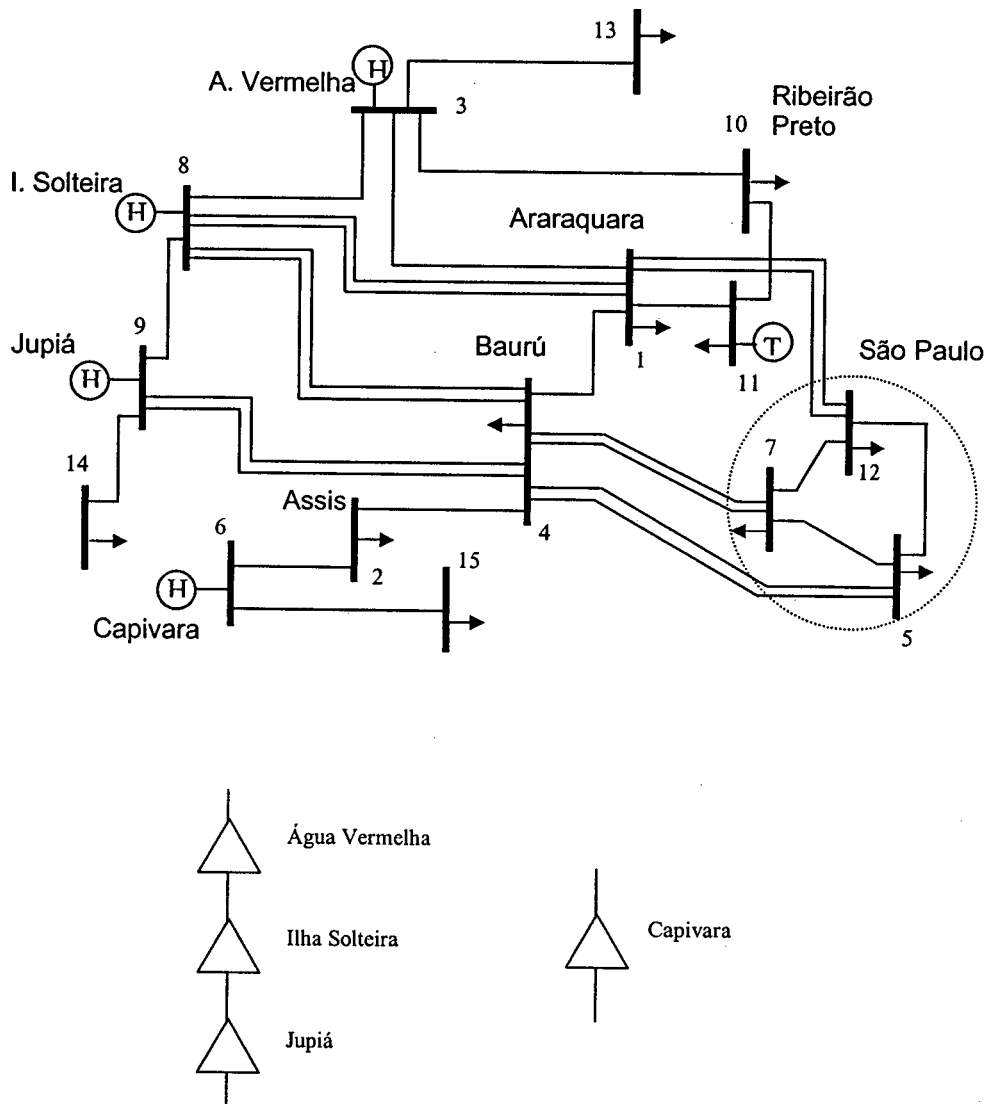


Figura C.5 - Sistema de usinas em cascata, CESP 440kV.

Tabela C.10 – Dados das linhas do sistema CESP.

Linha	De	Para	X (p.u.)	$l_{f,sup}$ (p.u.)	$l_{f,inf}$ (p.u.)
1	1	3	0,0639	15,0	-15,0
2	3	10	0,0368	15,0	-15,0
3	11	1	0,0236	15,0	-15,0
4	1	4	0,0172	15,0	-15,0
5	2	4	0,0236	15,0	-15,0
6	4	5	0,0243	10,0	-15,0
7	2	6	0,0182	15,0	-15,0
8	4	7	0,0243	10,8	-15,0
9	5	7	0,0121	15,0	-15,0
10	1	8	0,0305	30,0	-30,0
11	3	8	0,0241	15,0	-15,0
12	4	8	0,0258	30,0	-30,0
13	4	9	0,0248	15,0	-15,0
14	8	9	0,0096	15,0	-15,0
15	10	11	0,0156	15,0	-15,0
16	1	12	0,0232	15,0	-15,0
17	5	12	0,0185	15,0	-15,0
18	7	12	0,0124	15,0	-15,0
19	3	13	0,0675	15,0	-15,0
20	9	14	0,0833	15,0	-15,0
21	6	15	0,1070	15,0	-15,0

Tabela C.11 - Dados de geração do sistema CESP.

Tipo	P^{min} (MW)	P^{max} (MW)	q^{min} (hm ³ /h)	q^{max} (hm ³ /h)
A. Vermelha	0	1380	1,5778	10,5478
I. Solteira	0	3240	4,5050	31,7210
Jupiá	0	1411	3,6000	27,3048
Capivara	0	640	1,5753	6,2784

Função de custos do gerador térmico: $C(p_g) = 797 \cdot p_g + 48.2 \cdot p_g^2$

Tabela C.12 - Volumes máximo e mínimo dos reservatórios do sistema CESP.

Usina	Vol. min (hm ³)	Vol. max (hm ³)
A. Vermelha	5856	11025
I. Solteira	8232	21060
Jupiá	2450	3680
Capivara	4816	10540

Tabela C.13 - Altura a montante das usinas, $h_v(v)$, do sistema CESP.

Coeficientes dos Polinômios $h_v(v) = c_{v0} + c_{v1} \cdot v + c_{v2} \cdot v^2$				
	A. Vermelha	I. Solteira	Jupiá	Capivara
c_{v0}	357,079	301,529	280,00	304,639
c_{v1}	0,0032377	0,00107097	0	0,0039361
$c_{v2} \cdot 10^{-7}$	-0,776399	-0,212999	0	1,09579

Tabela C.14 - Altura a jusante das usinas, $h_w(w)$, do sistema CESP.

Coeficientes dos Polinômios $h_w(w) = c_{w0} + c_{w1} \cdot w + c_{w2} \cdot w^2 + c_{w3} \cdot w^3 + c_{w4} \cdot w^4$				
	A, Vermelha	I, Solteira	Jupiá	Capivara
c_{w0}	317,351	277,647	254,053	279,955
c_{w1}	0,0048976	0,0008243	0,0007667	0,002679
$c_{w2} \cdot 10^{-7}$	-10,8919	-0,408432	-0,4142	-1,25012
$c_{w3} \cdot 10^{-10}$	0,948334	0,0068925	0,0020374	0,117774
$c_{w4} \cdot 10^{-16}$	0	0,362	0	0

Define-se: $w = q + u$

Tabela C.15 - Afluência para cada usina, no sistema CESP.

Usina	Afluência [hm ³ /h]
A. Vermelha	4,86
I. Solteira	10,80
Jupiá	2,88
Capivara	3,24