

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS
NA ANÁLISE ESTÁTICA DE PLACAS E CASCAS**

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

Oscar Alfredo Garcia

Florianópolis, Setembro de 2003

ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS
NA ANÁLISE ESTÁTICA DE PLACAS E CASCAS

Oscar Alfredo Garcia

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

DOCTOR EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA
FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Eduardo A. Fancello, Dsc. - Orientador

Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D. - Co-orientador

José Antônio Bellini da Cunha Neto, Dr. - Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA

Eduardo A. Fancello, Dsc. - Presidente

Philippe R. B. Devloo, Ph.D. - Relator

Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.

Sergio Persival Baroncini Proença, Dr. Eng.

Jáuber Cavalcante de Oliveira, Ph.D.

Lauro Cesar Nicolazzi, Dr. Eng. Mecânica

Dedicatórias

*A minha família, pelo carinho e incentivo que deles recebi.
Em especial ao meu orientador, Eduardo Alberto Fancello, pela
amizade e pelo apoio nos momentos difíceis desta, árdua, mais bem
sucedida trajetória.
In memorium aos meus queridos avos Eithel Frederico e Branca
Honorina.*

Agradecimentos

Um agradecimento especial ao meu amigo e orientador prof. Eduardo Alberto Fancello, pelos esclarecimentos, e pelo apoio que recebi nos momentos críticos desta jornada.

Ao meu co-orientador prof. Paulo de Tarso Rocha de Mendonça, pela sua participação fundamental na solução dos problemas encontrados neste trabalho, assim como, pelo apoio logístico recebido no transcurso da pesquisa.

Ao amigo Cláudio Ávila, pelo incentivo e pelas conversas esclarecedoras que contribuíram, de forma efetiva, na redação dos aspectos matemáticos da tese.

Ao prof. Lauro César Nocolazzi, pela sua amizade e presteza nos esclarecimentos relativos a disciplina de cascas.

Ao mestrando André Labanowski Júnior, pela ajuda indispensável no processo de validação do software.

Ao amigo Raimundo, pela colaboração ao longo de todos estes anos de mestrado de doutorado.

A todos os colegas do GRANTE, pelos bons momentos que compartilhamos, que fizeram desta jornada um período inesquecível da minha vida.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ), pelo apoio financeiro através da bolsa de doutorado, e ao Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), pela licença para utilização das estruturas ACDPOOP e ACDFEM, indispensáveis, na implementação do software GFEM C++.

Resumo

Desde a década passada, os métodos sem malha são considerados uma alternativa na simulação numérica de problemas, onde a qualidade da solução é sensível à distorção da malha.

Apesar disto as metodologias sem malha apresentam restrições a sua aplicação. Estas restrições, inerentes de sua própria construção, dizem respeito à imposição de condições de contorno essenciais, construção de espaços de aproximação em domínios curvos e tempo de processamento normalmente superior ao utilizado em elementos finitos convencionais.

O presente trabalho consiste numa proposta de abordar as limitações supracitadas na simulação numérica de problemas regulares e de altos gradientes localizados (**boundary-layer**) em placas e cascas.

O tema principal desta tese está na construção do espaço de aproximação dos campos primais, que segue a filosofia do **Generalized Finite Element Method** (GFEM) (Duarte, Babuska & Oden, 1999). Este método, que teve a sua origem, no **Partition of Unity Finite Element Method** (PUFEM) (Melenk & Babuska, 1996) e no **hp-Clouds** (Duarte & Oden, 1995) torna possível, com baixo custo computacional, enriquecimentos p -anisotrópicos e a imposição das condições de contorno essenciais de forma forte.

As contribuições feitas abordam dois aspectos fundamentais do GFEM. O primeiro refere-se à construção dos espaços locais em superfícies curvas, utilizando o procedimento dos planos *pseudo-tangentes*. O segundo aspecto aborda a imposição das condições de contorno de forma forte. Isto é possível através da utilização das *funções de fronteira* sobre a fronteira de **Dirichlet**.

Os resultados obtidos referem-se aos modelos cinemáticos de primeira e terceira ordem com normal extensível. Os exemplos analisados são para materiais compostos e homogêneos com comportamento elástico linear. O desempenho do espaço de aproximação é analisado: quanto aos problemas de travamento (**locking**), quanto à convergência dos campos primais e duais e quanto aos fenômenos de camada limite (**boundary-layer**).

Abstract

In the last decade, meshless methods have been used as an alternative in the numerical solution of problems which are sensitive to mesh distortion.

Nevertheless, meshless methods still present significant restriction in their application. These restrictions, inherent to the methods implementation, involve assignment of essential boundary conditions, constructions of approximating spaces in curved domain and high processing time in comparison to conventional FEM analysis.

This study addresses the above mentioned restrictions in the numerical solutions of regular problems with high localized gradients (boundary layer) in plates and shells.

The main concern of the thesis is the construction of approximating spaces for displacement fields following the philosophy of GFEM. This method had its origin in the PUFEM and in the hp-Clouds. It allows for anisotropic p-enrichment and the assignment of boundary conditions in strong form with small computational cost.

The thesis makes two contributions towards the GFEM. The first is the construction of the local spaces in curved surfaces, using a pseudo-tangent plane approach. The second refers to the assignment of boundary conditions in the strong form. This is done using boundary functions over the Dirichlet boundary.

Results obtained refer to first and third order kinematic models with extensible normal. Examples analyzed include homogeneous linear elastic and composite materials.

The approximating spaces are analyzed with regards to locking problems, displacement fields convergence, tension fields convergence and boundary-layer problems.

Conteúdo

1	Introdução	12
1.1	Revisão bibliográfica	14
1.1.1	Laminados compostos	14
1.1.2	Métodos sem malha	25
1.1.3	Fenômenos em camadas limite (<i>boundary layers</i>)	34
2	Materiais Compostos Laminados	38
2.1	Macro-Mecânica	40
2.1.1	Relação Constitutiva	40
2.1.2	Constantes de Engenharia para Materiais Ortotrópicos	42
2.1.3	Equações Constitutivas Numa Direção θ Qualquer	43
3	Construção do espaço de aproximação	48
3.1	Partição da unidade	49
3.1.1	Funções partição da unidade tipo <i>Lipschitz</i>	50
3.2	Espaço de aproximação no MEFG	51
3.2.1	Construção das famílias \mathcal{F}_N^p	53
3.2.2	Enriquecimento local p-ortotrópico	57
4	Modelos de ordem superior para cascas	59
4.1	Cascas	60
4.1.1	Aspectos gerais	60
4.1.2	Elementos básicos da geometria diferencial de cascas	61
4.2	Elemento finito sólido degenerado	67
4.2.1	Modelos cinemáticos de ordem superior	72
5	Espaços de aproximação em superfícies curvas	76
5.1	Introdução	76
5.2	Construção do espaço de enriquecimento	77
5.2.1	Construção do espaço de aproximação local	78
5.2.2	Definição do problema de elasticidade tridimensional	80
5.2.3	Equações de Bunov-Galerkin	81
5.2.4	Campos primais e duais	85
5.2.5	Sensibilidade do plano pseudo-tangente	86

6	Problemas e potencialidades no MEFG	92
6.1	Incompletude do conjunto de funções de aproximação	93
6.2	Método de penalização	94
6.3	Funções de fronteira	97
6.4	Análise comparativa entre penalização e funções de fronteira	99
6.4.1	Placa quadrada simplesmente apoiada	99
6.4.2	Placa circular engastada	101
6.5	Funções especiais em MEFG	102
6.5.1	Construção do espaço $Q(\Omega)$	104
7	Resultados numéricos	106
7.1	Introdução	106
7.1.1	Análise de travamento (<i>locking</i>).	106
7.1.2	Análise de convergência em problemas regulares de placas	107
7.1.3	Análise de problemas regulares de cascas	107
7.1.4	Problemas de camada limite	108
7.2	Análise de travamento (<i>locking</i>)	108
7.2.1	Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno	109
7.2.2	Placa circular engastada no contorno	110
7.2.3	Teto cilíndrico de Scordelis-Lo	113
7.2.4	Casca cilíndrica puncionada	113
7.2.5	Hemisfério puncionado	115
7.2.6	Casca cilíndrica com carga de punção auto-equilibrada	118
7.3	Análise de convergência em problemas regulares de placas	119
7.3.1	Placa quadrada simplesmente apoiada	119
7.3.2	Placa circular engastada no contorno	120
7.3.3	Placa quadrada de material composto laminado	122
7.4	Análise de problemas regulares em cascas	126
7.4.1	Casca cilíndrica sob pressão interna	127
7.4.2	Análise das propriedades hierárquicas dos modelos de 1 ^a e 3 ^a ordem	128
7.4.3	Análise dos efeitos de distorção da malha em cascas	130
7.5	Problemas de camada limite em placas e cascas	131
7.5.1	Placa quadrada com borda livre	133
7.5.2	Placa quadrada simplesmente apoiada	135
7.5.3	Casca cilíndrica com borda livre	138
7.5.4	Casca cilíndrica composta por laminados	142
7.5.5	Casca parabólica rasa de material homogêneo	146
7.5.6	Casca parabólica rasa composta por laminados	149
8	Considerações finais	154
A	Viga parabólica delgada	167
A.1	Introdução	167
A.2	Deslocamento transversal w	167

B	Operador de rotação	170
B.1	Introdução	170
B.2	Operador de Rotação R	170
B.3	Ortogonalidade de R	172
C	Solução do sistema linear	173
C.1	Algoritmo iterativo	173

Lista de Figuras

1.1	a) Micro modelo de um laminado unidirecional; b) laminado unidirecional; c) modelo sub laminado; d) material homogeneizado anisotrópico.	17
1.2	a) Macro estrutura composta de células retangulares; b) macro estrutura composta de células rômbricas.	17
1.3	Elemento estrutural de placa e sistema local de coordenadas (x, y, z) com o eixo "y" normal ao contorno no ponto $Q \in \bar{S}$	37
1.4	a) Hiperbolóide de revolução, b) cilindro com geratriz parabólica.	37
2.1	Tipos de lâminas: a) lâmina com fibras unidirecionais, b) lâminas com fibras tecidas, c) laminado composto por várias lâminas orientadas em diferentes direções.	40
2.2	a) direções principais coincidentes com o sistema de coordenadas xy , b) direções principais oblíquas com relação ao sistema de coordenadas xy	42
2.3	Lâmina com direções principais oblíquas com relação ao sistema de coordenadas xy	44
3.1	Funções PU Lagrangeanas $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi_\gamma$ e φ_δ com suportes $\Omega_\alpha, \Omega_\beta, \Omega_\gamma$ e Ω_δ e centros em $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta, \mathbf{x}_\gamma$ e \mathbf{x}_δ	49
3.2	Suporte das funções de enriquecimento Ω_α e base local da nuvem.	53
3.3	Função da partição de unidade bilinear PU associada à nuvem central do domínio $[-1, 1] \times [-1, 1]$	55
3.4	Enriquecimento ortotrópico em x obtido por xPU para a nuvem com coordenadas $(0, 0)$	56
3.5	Enriquecimento isotrópico obtido por $xyPU$ para a nuvem de coordenadas $(0, 0)$	56
4.1	Σ é a superfície de referência, Ω o domínio, \mathbf{R} o raio de curvatura e C o centro de curvatura e um ponto genérico P	60
4.2	Descrição de um ponto na superfície Σ de referência.	62
4.3	Descrição geométrica de um ponto q localizado a uma cota $z > 0$	63
4.4	Elemento diferencial de área.	65
4.5	a) Elemento sólido de <i>Ahmad</i> de 16 nós, b) elemento sólido de <i>Ahmad</i> de 12 nós.	67
4.6	a) Cubo intrínseco; b) elemento sólido degenerado de 16 nós; c) sistema global de coordenadas (X, Y, Z)	68
4.7	Base <i>pseudo-normal</i> $[\boldsymbol{\theta}_k^1, \boldsymbol{\theta}_k^2, \mathbf{v}_k^3]$, associada ao nó k	69
5.1	Sistemas de coordenadas: (a) ortogonais, globais (X, Y, Z) ; (b) <i>pseudo-normal</i> associados à nuvem com direções dadas pelos vetores $[\boldsymbol{\theta}_\alpha^1, \boldsymbol{\theta}_\alpha^2, \mathbf{v}_\alpha^3]$; (c) associadas ao ponto de integração com direções $[\mathbf{t}_{1z}, \mathbf{t}_{2z}, \mathbf{n}_z]$	77
5.2	Elemento estrutural em \mathbb{R}^3 , em equilíbrio.	81

5.3	Função linear L_{ij} avaliada para a projeção dos pontos \mathbf{x} da nuvem Ω_α sobre o plano <i>pseudo-tangente</i> π_α	88
5.4	Distorção da função linear L_{ij} com o incremento no valor de k	89
5.5	Arco parabólico engastado na extremidade AD e sujeito a uma carga de momento distribuída na aresta BC.	89
5.6	Família de parábolas com semicorda $R = 2mm$ e constante k variável.	90
5.7	Erro Ew na extremidade livre do arco parabólico.	90
6.1	Placa simplesmente apoiada nas extremidades opostas discretizada com 2x1 elementos quadrangulares.	94
6.2	Traço das funções associadas à nuvem $\alpha = 2$ sobre o contorno $(x, 1)$	95
6.3	Modos de solução; a) obtido por espaço incompleto, b) obtido por processo de penalização.	95
6.4	Elemento estrutural sujeito a forças de tração \mathbf{t} e forças de corpo \mathbf{f}	96
6.5	Contorno com deslocamentos prescritos e posição da função rampa correspondente aos graus de liberdade prescritos no elemento destacado.	98
6.6	(a), (b) e (c) são as “funções de fronteira” correspondentes aos nós 1, 2 e 4 do elemento e_1 , (d) e (e) corresponde às funções de fronteira do elemento 2 associado aos nós 1 e 2.	99
6.7	a) Norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo de esforço cortante Q_x ; b) Norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo do deslocamento transversal w	100
6.8	a) Norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo do momento radial M_{rr} , b) Norma $L^2(\Omega)$ do deslocamento transversal w	101
6.9	Coordenadas r e θ do ponto x suficientemente próximo do contorno	102
6.10	Função de fronteira com decaimento exponencial associada ao nó 1 do elemento 2 da Fig.6.5.	103
7.1	Placa quadrada simplesmente apoiada; (a) malha regular 4 elementos Q8; (b) malha distorcida 4 elementos Q8.	110
7.2	Valores normalizados w/w_a , (a) malha regular; (b) malha distorcida.	111
7.3	Placa circular engastada no contorno.	112
7.4	Deslocamento transversal máximo normalizado w/w_a	112
7.5	Teto cilíndrico de Scordelis-Lo.	114
7.6	Razão w/w_a , no ponto B para os modelos de primeira e terceira ordem.	114
7.7	Octante de uma casca cilíndrica sob carga de punção.	115
7.8	Razão w/w_a no ponto C para os modelos de primeira e terceira ordem.	116
7.9	Octante de um hemisfério com carga de punção alternada.	117
7.10	Razão $\frac{u}{u_a}$, no ponto A para os modelos de primeira e terceira ordem.	117
7.11	Razão $\frac{w}{w_a}$ no ponto C da Fig.7.7 ; (a) modelo de primeira ordem, (b) modelo de terceira ordem.	118
7.12	(a) Norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo de w ; (b) valores normalizados $\frac{w}{w_a}$	120
7.13	Norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo do momento M_{xx}	121
7.14	(a) Norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo E_w , (b) valores normalizados w/w_a	121
7.15	Norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo do momento radial M_{rr}	122
7.16	Placa quadrada, simplesmente apoiada, composta do tipo $[0/90]_s$	123
7.17	Tensões ao longo de z ponto $(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, z)$; (a) tensão σ_{xx} , (b) tensão σ_{yy}	125
7.18	(a) Tensão τ_{xz} nos pontos $(0, \frac{L}{2}, z)$; (b) tensão τ_{yz} nos pontos $(\frac{L}{2}, 0, z)$	127

7.19	(a) Octante de casca cilíndrica; (b) malha regular de 6×6 elementos Q8.	128
7.20	Deslocamento radial w_r ao longo do meridiano DC.	129
7.21	(a) Momentos M_{yy} , (b) Esforço de membrana N_{xx}	129
7.22	E_{wr} para, (a) modelo de primeira ordem, (b) modelo de terceira ordem	130
7.23	Malha de 6×6 elementos Q8 distorcida de $\theta = 27^\circ$	131
7.24	(a) medida E_{dw} , (b) medida E_{dm}	132
7.25	Medida E_{dw} para a malha distorcida com $\theta = 27^\circ$, para valores avaliados no meridiano DC.	132
7.26	Parcela quadrada com borda livre sob carga senoidal auto equilibrada	136
7.27	Erro relativo local $E_q = \frac{ Q_a - Q_y }{ Q_a }$, avaliado no ponto A da Fig.7.26.	136
7.28	Esforço cortante Q_y ao longo do eixo (X, 1.96); (a) estratégia A, b) estratégia B, c) estratégia C.	137
7.29	Erro relativo E_q , sobre o eixo (X, 1.96) para as estratégias A, B e C.	137
7.30	Placa simplesmente apoiada, “hard” em AB e CD e “soft” em BC e AD.	139
7.31	(a) Q_y ao longo de CD para a solução analítica e para as estratégias A e C, (b) erro relativo E_q para as estratégias A, B e C.	140
7.32	(a) Octante de casca cilíndrica sob carga auto equilibrada senoidal, (b) malha de 6×20 elementos Q8 em PG.	142
7.33	Malha uniforme de 6×15 elementos Q8.	143
7.34	Deslocamento de u ao longo do meridiano (1, Y, 0.0)	143
7.35	Esforço cortante Q_x ao longo do meridiano (0.7071, Y, 0.7071).	144
7.36	Erro relativo para valores locais no ponto “k” (0,7071, 1.0, 0.7071) da Fig.7.32.	144
7.37	Esforço cortante Q_x ao longo do meridiano (0.7071, Y, 0.7071).	145
7.38	(a) Tensão principal σ_1 , b) Variação de σ_1 na região destacada em (a).	147
7.39	(a) Solução de referência e estratégia 1, (b) solução de referência e estratégias 2 e 3.	147
7.40	(a) Casca rasa parabólica, (b) malha de 6×12 Q8 em PG, (c) malha regular com 6×10 elementos Q8.	149
7.41	Esforço cortante Q_y para a da solução de referência e a estratégia A.	150
7.42	Esforço cortante Q_y para às estratégias A, B e C.	150
7.43	Tensão τ_{yz} , para a solução de referência e para estratégia C sobre a aresta AD.	152
7.44	Tensão τ_{yz} para as estratégias A, B e C avaliados sobre a aresta AD.	153
A.1	Arco parabólico delgado em balanço com momento na extremidade.	168

Lista de Tabelas

6.1	Funções rampa associadas ao grau de liberdade u correspondente aos elementos e_1 e e_2 da Fig.6.5.	98
6.2	Funções bolha para os nos 1 e 2 dos elementos e_1 e e_2 da Fig.6.5.	99
7.1	Valores normalizados do deslocamento transversal e de tensões membranais.	124
7.2	Tensões transversais normalizadas.	124

Lista de Símbolos

σ	Tensor de tensões de Cauchy.
ε	Tensor de deformações d Green-Saint Venan.
$\{\sigma^1\}$	Vetor de tensões nas direções principais (1,2,3) (convenção de engenharia).
$\{\varepsilon^1\}$	Vetor de deformações nas direções principais (1,2,3) (convenção de engenharia).
$\{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\}$	Vetor de componentes simétricas de ε no sistema local (x, y, z) .
$\{\sigma^x\}$	Ventor de tensões com relação ao sistema local (x, y, z) .
$\{\varepsilon^{\frac{x}{2}}\}$	Vetor de componentes simétricas de ε no sistema local (x, y, z) .
$\{\varepsilon^x\}$	Vetor de deformações no sistema local (x, y, z) (convenção engenharia).
E	Módulo de elasticidade longitudinal.
G	Módulo de elasticidade transversal.
ν	Coefficiente de Poisson.
E_i	Módulo de elasticidade longitudinal nas direções $i = 1, 2, 3$.
G_{ij}	Módulo de elasticidade transversal associado às direções $i, j = 1, 2, 3$
ν_{ij}	Coefficiente de Poisson associado às direções $i, j = 1, 2, 3$
$[D]$	Matriz de rigidez do material.
$[S]$	Matriz de flexibilidade do material.
$[D^1]$	Matriz de rigidez do material no sistema principal de coordenadas(1,2,3)
$[S^1]$	Matriz de flexibilidade do material no sistema principal coordenadas(1,2,3)
$[\bar{D}]$	Matriz de rigidez do material no sistema de coordenadas locais (x, y, z)
$[\bar{S}]$	Matriz de flexibilidade do material no sistema de coordenadas locais (x, y, z)
θ	Ângulo de inclinação das fibras em relação às direções principais (1,2).
$[R]$	Operador matricial que leva, $\{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\} \rightarrow \{\varepsilon^1\}$.
$[Q]$	Matriz de rotação.
Ω	Domínio aberto do problema.
$\partial\Omega$	Fronteira do problema.
$\partial\Omega_D$	Fronteira de Dirichlet.
$\partial\Omega_N$	Fronteira de Newmann.
\mathbb{R}^n	Espaço real n dimensional.
$\bar{\Omega}$	Domínio fechado do problema.
$\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$	Cobertura aberta do domínio Ω por N suportes.
φ_α	Função partição da unidade associada à nuvem α .
$\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$	Partição da unidade definida sobre a cobertura $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$
\mathcal{I}	Conjunto de índices que matém bijeção com o conjunto de nuvens.
$C_0^\infty(\Omega_\alpha)$	Conjunto de funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.
$supp \varphi_\alpha$	Supremo da função φ_α no domínio fechado $\bar{\Omega}_\alpha$.
$\ \cdot\ _{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$	Norma infinita em \mathbb{R}^n .
$\nabla(\cdot)$	Gradiente de um compo.
$div(\cdot)$	Divergente de um campo vetorial ou escalar
C_∞	Constante de majoração da norma infinita.
C_G	Constante de majoração da norma infinita do gradiente da função.
$diam(\Omega_\alpha)$	Diametro do suporte Ω_α .
$C^m(\mathbb{R}^n)$	Conjunto de funções m diferenciáveis em \mathbb{R}^n .

$card$	Cardinalidade da cobertura.
Q	Espaço de aproximação global.
$H^1(\Omega)$	Espaço de Hilbert com funções e seus gradientes quadrado integráveis em Ω .
\mathbf{u}	Função a ser aproximada.
\mathbf{u}_α	Funções de aproximação associadas às nuvens α .
\mathbf{u}_{ap}	Função de aproximação global.
C^0	Conjunto de funções contínuas em Ω .
C^1	Conjunto de funções contínuas com primeira derivada contínua em Ω .
M	Número máximo de subdomínios Ω_α sobre um ponto de integração
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais.
\mathbf{x}	Vetor posição de um ponto de $\bar{\Omega}$
$\ \cdot\ _{L(\Omega)}$	Norm L^2 de um campo no domínio Ω .
$\epsilon_1(\alpha)$	Limite superior da norma $L^2(\Omega \cap \Omega_\alpha)$ do erro $e = \mathbf{u} - \mathbf{u}_\alpha$.
$\epsilon_2(\alpha)$	Limite superior da norma $L^2(\Omega \cap \Omega_\alpha)$ do erro $e = \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\alpha)$.
\hat{Q}_α^p	Conjunto de funções obtidas por produto tensorial de polinômios.
\hat{Q}_α^p	Conjunto de funções obtida por produto completo de polinômios.
\mathcal{F}_N^p	Conjunto de funções que gera o espaço de aproximação Q .
N_{prod}	Número de funções associadas a uma nuvem α .
p	Ordem polinomial associada à nuvem α .
P	Conjunto dos polinômios de grau $g \leq p$.
$L_{ij}(\bar{\mathbf{x}})$	Função obtida por produto de polinômios correspondentes à nuvem α .
$\bar{\mathbf{x}}$	Vetor posição de um ponto referido a uma base local (\bar{x}, \bar{y}) .
ξ	Posição do ponto $\bar{\mathbf{x}}$ no domínio normalizado \hat{w}_α .
\hat{w}_α	Domínio normalizado associado à nuvem α .
h_α	Raio correspondente a um suporte Ω_α .
$\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}()$	Gradiente de uma função em relação ao sistema de coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) .
$\nabla_\xi()$	Gradiente de uma função no domínio normalizado \hat{w}_α .
$\tilde{Q}_\alpha^{(p_{\bar{x}}, p_{\bar{y}})}$	Conjunto de funções obtidas por enriquecimento ortotrópico nas direções (\bar{x}, \bar{y}) .
Σ	Superfície de referência.
\mathbf{n}	Vetor normal.
\mathbf{x}_p	Vetor posição de um ponto p sobre a superfície de referência Σ .
(ξ, η, ζ)	Coordenadas Gausseanas de um ponto em \mathbb{R}^3
(X, Y, Z)	Coordenadas globais de um ponto em \mathbb{R}^3 .
$d\mathbf{x}_p$	Diferencial total do vetor posição \mathbf{x}_p sobre a superfície de referência.
\mathbf{a}_1	Vetor covariante tangente à curva $\xi, \eta = cte$.
\mathbf{a}_2	Vetor covariante tangente à curva $\eta, \xi = cte$.
\mathbf{v}_3	Vetor pseudo normal (coincide com o vetor \mathbf{n} no interior do elemento)
$[\mathbf{F}_o]$	Tensor correspondente à base covariante $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{v}_3$
$\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}$	Base ortormal.
$[\mathbf{Q}]$	Matriz de rotação correspondente à base ortormal $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}$.
$d\mathbf{x}_q$	Diferencial total do vetor posição de um ponto q tal que $\zeta \neq 0$.
$\mathbf{a}_{1z}^o, \mathbf{a}_{2z}^o, \mathbf{a}_{3z}^o$	Vetores da base covariante num ponto q tal que $\zeta \neq 0$.
$[\mathbf{F}_z^o]$	Tensor correspondente à base covariante $\mathbf{a}_{1z}^o, \mathbf{a}_{2z}^o, \mathbf{a}_{3z}^o$.
$d\mathbf{A}_z$	Elemento vetorial de área num ponto qualquer de Ω .

dV_z	Elemento diferencial de volume.
$\boldsymbol{\theta}_k^1, \boldsymbol{\theta}_k^2, \mathbf{v}_k^3$	Sistema ortornormal de coordenada no nó k do elemento.
$\mathbf{t}_{1z}, \mathbf{t}_{2z}, \mathbf{n}_z$	Sistema ortornormal de coordenadas num ponto com cota $z \neq 0$.
$\mathcal{N}(\xi, \eta)$	Funções de interpolação lagrangeanas associadas ao elemento.
\mathbf{v}_{3k}	Vetor pseudo normal associado a no k de um elemento.
$\mathbf{x}_k^{\text{sup}}$	Vetor posição do nó k a com cota $\frac{t}{2}$ medida na direção \mathbf{v}_{3k} .
$\mathbf{x}_k^{\text{inf}}$	Vetor posição do nó k a com cota $-\frac{t}{2}$ medida na direção \mathbf{v}_{3k} .
$\mathbf{x}_k^{\text{ref}}$	Vetor posição do nó k do elemento correspondente a $\zeta = 0$.
$\tilde{\mathbf{x}}_k$	Vetor posição de um ponto sobre a aresta k do elemento para $\zeta \neq 0$.
\mathbf{x}	Vetor posição de um ponto no interior do elemento.
t	Espessura medida na direção \mathbf{n} .
t_k	Projeção da espessura t da estrutura na direção \mathbf{v}_{3k} .
$[Q]_i$	Matriz de rotação associada ao ponto de integração i do elemento.
α_k	Rotação entorno de $\boldsymbol{\theta}_k^2$.
β_k	Rotação entorno de $\boldsymbol{\theta}_k^1$.
γ_k	Rotação entorno de $\boldsymbol{\theta}_k^2$ correspondente a uma coordenada $\zeta \neq 0$.
λ_k	Rotação entorno de $\boldsymbol{\theta}_k^1$ correspondente a uma coordenada $\zeta \neq 0$.
w_k^*	Parametro não linear do deslocamento transversal w .
\mathbf{u}_q	Desloamento de um ponto q no elemento.
$\hat{\mathbf{u}}_k$	Deslocamento de um ponto situado na aresta de direção \mathbf{v}_{3k} para $\zeta \neq 0$.
ψ_k	Funções de aproximação associadas ao nó k .
$[Q]_\alpha$	Matriz de rotação correspondente à nuvem α .
\mathbf{P}	Matriz de projeção de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
J	Matriz Jacobiana.
$\bar{\mathbf{u}}$	Valores prescritos do campo na fronteira de Dirichlet.
\mathbf{b}	Forças de corpo.
\mathbf{f}	Forças externas.
\mathcal{R}	Função Resíduo.
Var	Conjunto das variações.
Kin	Conjunto das soluções cinematicamente admissíveis
\mathbf{u}_h	Campo de deslocamento aproximado.
\mathbf{N}	Matriz de aproximação do campo de deslocamento.
\mathbf{U}	Vetor de parâmetros de deslocamentos nodais.
$\partial_\xi(\mathbf{u})$	Gradiente de \mathbf{u} em coordenadas intrínsecas (ξ, η) .
$\partial_\xi(\cdot)$	Operador diferencial para a determinação de $\partial_\xi(\mathbf{u})$.
\mathbf{G}	Matriz associada a $\partial_\xi(\mathbf{u})$.
$\partial_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$	Gradiente de deslocamento em coordenadas globais (X, Y, Z) .
\mathbf{J}	Matriz de transformação inversa obtida a partir de J^{-1} .
R	Operador de rotação.
$\partial_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{u})$	Gradiente de deslocamento na base local do ponto de integração.
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Vetor de componentes de deformação na base local do ponto de integração.
\mathbf{H}	Matriz booleana utilizada para determinar o vetor $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$.
$\Pi(\mathbf{u})$	Funcional de energia de deformação.
$g(\mathbf{u})$	Traço da função deslocamento na fronteira de Dirichlet.

$\bar{g}(\mathbf{u})$	Traço da função deslocamento com valores nulos sobre $\partial\Omega_D$.
$\mathcal{P}(\rho, \mathbf{u})$	Funcional de penalização.
ρ	Fator de penalização.
$a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$	Funcional bilinear associado à energia interna de deformação.
$l(\mathbf{u})$	Funcional linear da energia de deformação das forças externas.
$\delta(\cdot)$	Operador de Variação.
\mathbf{u}^*	Valor de perturbação da função \mathbf{u} .
\mathbf{B}	Matriz associada ao vetor de deformações.
$\bar{\mathbf{N}}$	Matriz de penalização dos graus de liberdade prescritos em $\partial\Omega_D$.
S_i	Operador de penalizaçã atuando sobre os graus de liberdade prescritos.
$\mathcal{R}_u(\xi, \eta)$	Funções rampa definidas em coordenadas intrínscas.
$\mathcal{B}_u(\xi, \eta)$	Funções bolha definidas em coordenadas intrínscas.
w_a	Deslocamento analítico nos pontos de integração.
Q_a	Esforço cortante analítico nos pontos de integração.
M_{rra}	Momento radia analítico nos pontos de integração.
$\ E_C\ _{L^2(\Omega)}$	Norma $L^2(\Omega)$ do erro raltivo da grandeza \mathcal{C} , $\ E_C\ _{L^2(\Omega)} = \frac{\ \mathcal{C}_a - \mathcal{C}\ _{L^2(\Omega)}}{\ \mathcal{C}_a\ _{L^2(\Omega)}}$
$ E_C _{L^1}$	Norma $L^1(\partial\Omega)$ do erro ralativo da grandeza \mathcal{C} , $ E_C _{L^1} = \frac{ \mathcal{C}_a - \mathcal{C} _{L^1}}{ \mathcal{C}_a _{L^1}}$
\mathcal{V}_α	Espaço de aproximaçã local utilizados nas fronteiras.
V_α	Espaço de aproximação local com funções com decaimento exponencial.
χ	Operador indicatriz.
k	Coefficiente de correção da energia de deformação cisalhante.
M_{xx}	Momento fletor que gira a seção com normal na direção x local.
M_{yy}	Momento fletor que gira a seção com normal na direção y local.
Q_x	Esforço cortante na direção x local.
Q_y	Esforço cortante na direção y local.
p_x	Enriquecimento p na direção x local.
p_y	Enriquecimento p na direção y local.

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho tem como objetivo a implementação do *Método de Elementos Finitos Generalizados* (MEFG) (Duarte, Babuska & Oden [11]) na análise estática de placas e cascas, de material composto por laminados ortotrópicos, utilizando os modelos cinemáticos de primeira ordem (Mindlin [60]) e terceira ordem com normal extensível (Pandya & Kant [4]). Dentre os tópicos estudados, são enfatizados, a construção dos espaços de aproximação em superfícies curvas (cascas), a imposição de condições de contorno de forma forte, a capacidade dos espaços construídos de contornar fenômenos de travamento e a versatilidade desta metodologia na simulação de problemas de camada limite. Para cada um dos tópicos observados são comentadas as potencialidades e limitações da metodologia através da análise de exemplos de material elástico linear, podendo ser, homogêneo e isotrópico ou composto por laminados.

O escopo do trabalho é constituído de oito capítulos. O primeiro consta de uma revisão bibliográfica. Neste capítulo é feita a crítica do estado da arte, das metodologias sem malha, dando ênfase às técnicas que utilizam a partição da unidade na construção do espaço de aproximação. Com um papel secundário, porém não menos relevante, são abordados aspectos da simulação numérica de materiais compostos por laminados e os fenômenos de camada limite em placas e cascas.

O segundo capítulo consta de uma revisão sucinta dos materiais compostos laminados. Neste tópico são tratadas as propriedades destes materiais e aspectos de macromecânica dos laminados.

No terceiro capítulo são comentados os fundamentos matemáticos relativos à construção

do espaço de aproximação. Também são abordados os enriquecimentos anisotrópicos (Duarte & Babuska[12]). Com esta técnica são construídos os espaços com decaimento exponencial característico dos fenômenos de camada limite.

O quarto capítulo aborda aspectos básicos da geometria diferencial de superfícies juntamente com os modelos cinemáticos de primeira ordem (Mindlin) e terceira ordem com normal extensível (Pandya & Kant [4]) adaptados ao elemento sólido degenerado de Ahmad (Ahmad et alli [70]).

O quinto capítulo constitui um dos principais aportes desta tese. Nele é introduzido o procedimento dos planos pseudo-tangentes utilizado para construir os espaços de aproximação locais em superfícies curvas. A técnica dos planos *pseudo-tangentes* constitui um procedimento simples e versátil envolvendo, em sua essência, uma sequência de operações de translação, rotação e transformação do sistema de coordenadas. Os erros envolvidos no procedimento, que estão intrinsecamente ligados à curvatura do elemento, são avaliados, neste capítulo, através de ensaios numéricos específicos.

O sexto capítulo trata da imposição das condições de contorno de forma forte e da construção de espaços locais especiais. Neste capítulo são apresentadas duas alternativas de contornar este problema. A primeira, utilizando o método clássico de penalizações, e a segunda pela modificação dos espaços locais, nas fronteiras de Dirichlet, utilizando uma técnica proposta neste trabalho. Fecha-se o capítulo mostrando um dos aspectos mais interessantes do método, que consiste na construção de espaços locais especiais. Estes espaços possuem funções que são modos da solução de uma classe de problemas. Especificamente, neste trabalho, são construídos os espaços para abordar fenômenos de camada limite em placas e cascas rasas.

No sétimo capítulo são apresentados os resultados numéricos em três grupos de exemplos. No primeiro grupo mostra-se o desempenho do espaço construído utilizando MEFG na abordagem dos fenômenos de travamento para os modelos de primeira e terceira ordem. O segundo grupo consta de resultados de convergência de campos primais e duais em problemas regulares de placas e cascas. Neste grupo são apresentados exemplos constituídos de material homogêneo e de material composto por laminados modelados com teorias de primeira e terceira ordem. No

terceiro grupo de resultados são exibidos os exemplos que apresentam camada limite em placas e cascas. Através destes exemplos é constatada a versatilidade dos espaços construídos segundo esta técnica. Aqui são utilizados enriquecimentos ortotrópicos dos espaços locais na direção dos altos gradientes. Neste tópico a construção destes espaços locais é feita com funções polinomias ou funções que apresentam decaimento exponencial em direções específicas.

1.1 Revisão bibliográfica

A revisão bibliográfica apresentada a seguir consiste de um resumo abrangente dos temas supracitados na introdução, dando ênfase aos tópicos utilizados nesta tese. A mesma se inicia com uma revisão sucinta do status da tecnologia na simulação numérica em materiais compostos laminados. O segundo tema, que constitui o tópico principal deste trabalho, consta de uma crítica do estado da arte dos métodos sem malha, focalizando a atenção naqueles que constroem o espaço de aproximação por produto das funções da Partição de Unidade com funções que apresentam boas propriedades de aproximação (funções polinomiais ou modos conhecidos da solução). Fecha-se esta revisão com um comentário sobre os fenômenos de camada limite e as técnicas utilizadas, até o momento, para simular numericamente seu comportamento.

1.1.1 Laminados compostos

Por definição (Mendonça [55]), os materiais compostos são aqueles obtidos por combinação macroscópica de dois ou mais materiais distintos de forma que o novo material assim obtido apresente propriedades diferentes das que possuem os materiais constituintes separadamente.

A possibilidade de manipular as propriedades de performance do material, maximizando as características desejadas e minimizando as indesejadas, fornece ao projetista grande flexibilidade. Estas características tornam este tipo de material altamente atrativo para a indústria automobilística, naval, bélica e aeronáutica. Tratando-se de lâminas de material composto formadas pelo conjunto fibra-matriz, o estudo do comportamento destes materiais envolve dois aspectos básicos, que são a micro mecânica e a macro mecânica de uma lâmina. A macro mecânica estuda o comportamento da lâmina a partir de propriedades mecânicas aparentes médias fornecidas pelo estudo micro mecânico da lâmina (Jones [61]). A micro mecânica es-

tuda as interações microscópicas entre o reforço (fibras, tecidos etc.) e a matriz. Um dos procedimentos clássicos utilizados na micro-mecânica para a obtenção das propriedades médias de cada lâmina é a regra da mistura. Neste procedimento as propriedades elásticas médias de uma lâmina, resistências à tração longitudinal e transversal, são obtidas através dos volumes das fibras e da matriz. Dependendo do tipo de propriedade a ser determinada, este procedimento pode ser mais ou menos preciso quando comparado com dados experimentais. O modelo, que consiste na concentração de massa das fibras numa região do volume elementar, apresenta resultado satisfatório quando se trata de ensaios de tração longitudinal na direção das fibras. Para os ensaios de tração transversal, os modelos propostos por Hopkins & Chamis (Mendonça [55]), que levam em consideração o efeito da descontinuidade dos materiais apresentam valores satisfatórios com relação aos resultados experimentais.

Uma outra abordagem trata os modelos baseados na teoria da elasticidade. Neste caso as condições de contorno na análise dos volumes representativos constituídos de fibra-matriz, são satisfeitas ponto a ponto e não em média como no caso anterior. Os modelos neste caso representam soluções fechadas de equações diferenciais da elasticidade ou soluções obtidas por métodos numéricos, quando se trata de geometrias complexas. Maiores detalhes sobre estes métodos podem ser encontrados em (Jones [61]), e (Tsai & Hahn [67]).

Dentre as propostas baseados na teoria da elasticidade encontra-se o modelo semi-empírico de Halpin-Tsai (Jones [61]). Este modelo estima as propriedades utilizando equações semi-empíricas cujos parâmetros são ajustados através de dados obtidos experimentalmente ou pela teoria da elasticidade.

Dentro da abordagem macro-mecânica do laminado são introduzidas as teorias de ordem superior, capazes de modelar de forma mais realista que a teoria clássica a distribuição de tensões transversais e os fenômenos de acoplamento entre os mecanismos de deformação característico dos materiais anisotrópicos.

Atualmente a utilização de modelos micro mecânicos que explicitamente reconhecem os componentes individuais do composto tem sido preferida em virtude destes fornecerem mais informações sobre os constituintes do composto *fibra-matriz*. Dentro desta linha de trabalho

se destacam as pesquisas de Pecknold & Rahman [16] e mais recentemente Zalamea, Miquel & Oller [22].

O trabalho de Pecknold & Rahman propõe, para a análise de problemas estruturais tridimensionais, um modelo hierárquico para o material, utilizando os conceitos matemáticos de homogeneização, sendo o campo de deslocamentos modelados por elementos finitos. A utilização deste modelo permite verificar as condições nas quais ocorre dano e falha do material, sendo essencial para uma análise não linear devido à possível interação entre os modos de falha e de dano.

O processo de homogeneização do modelo hierárquico para o material é obtido pelo desempenho integrado de dois módulos. O primeiro constitui o micro-modelo de uma lâmina unidirecional Fig.1.1(a) e Fig.1.1(b) onde, a partir das relações constitutivas das fibras e da matriz obtém-se, por processo de homogeneização, os campos e tensões e deformações médios da lâmina. O segundo é constituído por um sub-laminado Fig.1.1(c) que a partir do campo de tensões médios da lâmina e mediante um processo de homogeneização obtém-se os campos de tensões de deformações homogeneamente distribuído entre lâminas, e entre os pontos internos das lâminas obtendo-se um material homogêneo anisotrópico Fig.1.1(d).

Zalamea, Miquel & Oller, propõem uma abordagem micro mecânica utilizando o conceito de homogeneização associado a uma formulação de dupla escala. Isto consiste em determinar a equação de equilíbrio para a micro estrutura (modelo global) e macro estrutura do composto. Nesta abordagem o composto é dividido em pequenos volumes (células) (Fig.1.2a) (Fig.1.2b) capazes de guardar informações completas do composto se a distribuição destas estruturas for periódica. Entretanto, se o material tem uma distribuição aleatória, deve ser utilizado um volume representativo do mesmo.

Modelo macro-mecânico

Do ponto de vista macro mecânico são inúmeras as teorias que tentam modelar de forma mais ou menos satisfatória problemas estruturais de materiais compostos laminados. Neste capítulo são citadas algumas delas, evidenciando suas potencialidades e limitações.

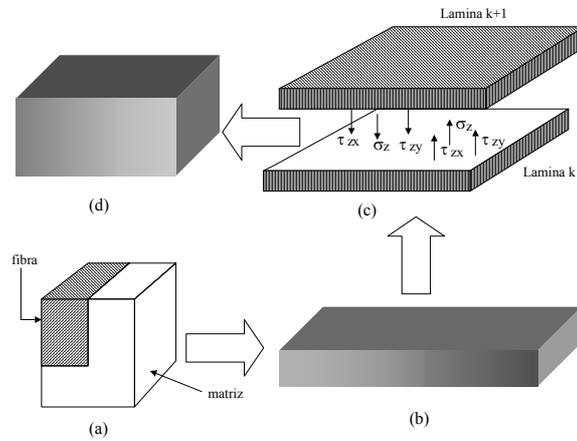


Figura 1.1: a) Micro modelo de um laminado unidirecional; b) laminado unidirecional; c) modelo sub laminado; d) material homogeneizado anisotrópico.

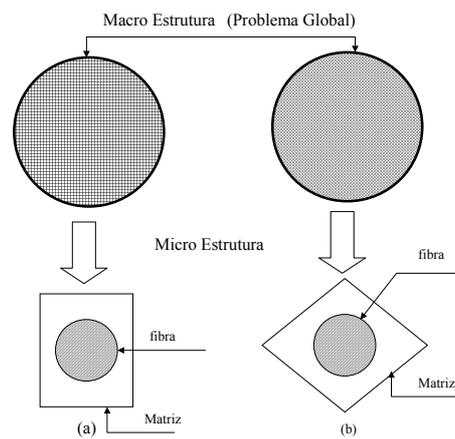


Figura 1.2: a) Macro estrutura composta de células retangulares; b) macro estrutura composta de células rômbricas.

A primeira teoria utilizada para modelar este tipo de problema foi a Teoria Clássica da Laminação (TCL) (Jones [61]). Esta teoria utiliza as hipóteses de Kirchhoff para problema de placas e Kirchhoff-Love para problemas de cascas. Por trabalhar com estruturas de pequena espessura (espessura $\leq \frac{1}{100}$ largura média da estrutura), negligencia as tensões normais as fibras e as tensões cisalhantes transversais. A consideração destas tensões é de suma importância nos problemas de estruturas laminadas, pois elas são responsáveis pela falha do laminado devido ao deslizamento entre as lâminas e por separação das lâminas (delaminação).

Uma outra proposta para trabalhar com este tipo de modelo é utilizar os elementos triangulares (Batoz & Dhett [37]), conhecidos como DKT (*Discret Kirchhoff Triangular*), que incorporam dois graus de liberdade a mais que o modelo Kirchhoff para garantir a continuidade de rotações. Esta teoria é bastante utilizada na análise de placas de material isotrópico sendo estendida sua utilização para placas laminadas. Dentro desta linha encontra-se o trabalho de Mendonça [56], que consiste numa formulação de elementos finitos para placas delgadas multicamadas utilizando o DKT. Na sequência direta das teorias de Kirchhoff e Kirchhoff-Love surgem as teorias de primeira ordem de Reissner [20] e Mindlin [60]. Estas teorias modelam as componentes membranais do deslocamento por funções lineares da variável z da espessura. Embora este modelo considere as deformações cisalhantes transversais, apresenta inconsistência física pois as deformações são constantes ao longo da espessura, não satisfazendo as condições de contorno de *Poisson*. Em face desta limitação, as tensões cisalhantes transversais são corrigidas por fatores obtidos através diversos procedimentos como as equações de equilíbrio energético proposto por Reissner ou a tensão cisalhante máxima conforme Timoshenko (Mendonça [55]). Para o caso de placas laminadas ortotrópicas, Whitney (Mendonça [55]), apresenta um procedimento eficiente para determinar os fatores de correção para a energia cisalhante k_x e k_y . Um outro problema apresentado por este modelo é o surgimento do travamento (*locking*) que se manifesta através de um aumento da rigidez com a diminuição da espessura da estrutura analisada.

Dentro de uma sequência cronológica das teorias que tentam modelar o comportamento dos materiais laminados compostos, encontra-se o modelo de Pipes & Pagano [63]. Neste trabalho

os autores utilizam a teoria da elasticidade tridimensional para obter a solução completa de uma barra laminada sujeita a um carregamento uniforme distribuído longitudinalmente e uma extensão uniforme na direção axial longitudinal. O modelo matemático resulta num sistema de equações diferenciais acopladas e resolvidas utilizando diferenças finitas. Os resultados obtidos são próximos aos da TCL para pontos a uma certa distância das bordas maior do que a espessura total da viga. Para uma distância das bordas laterais aproximadamente igual ou inferior a espessura surge o comportamento de camada limite (*boundary Layer*) para certos tipos de campos primais e duais. Soluções para placas retangulares usando elasticidade tridimensional são também obtidas em Pagano [51] e Pagano [50]. Essas soluções são utilizadas como referência na análise algoritmos e novas formulações.

A teoria de Lo, Christensen & Wu [44] é uma extensão da teoria de Reissner [20] utilizada para flexão onde não eram considerados carregamentos membranais. Esta teoria aproxima as componentes de deslocamento tangencial à superfície de referência por funções polinomiais cúbicas completas da variável z da espessura. Este modelo propõe uma distribuição quadrática da componente transversal do deslocamento possibilitando considerar deformações lineares na direção normal à superfície média. Além disto, pelo fato de utilizar uma distribuição cúbica para os deslocamentos de membrana, apresenta uma distribuição quadrática para as deformações cisalhantes transversais. Os resultados obtidos para o deslocamento transversal e para as tensões flexurais na análise de um laminao simétrico bidirecional do tipo $[0, 90, 0]$, mostram valores mais próximos do que a TCL com relação à solução analítica de Pagano [51]. Embora o modelo apresentado seja muito preciso, envolve um custo muito alto tendo sua aplicação limitada.

Com o intuito de obter uma distribuição satisfatória para as tensões transversais cisalhantes, Reddy [32] utiliza polinomiais cúbicas completas da variável z da espessura para representar o campo de deslocamentos tangentes a uma superfície no problema de placas laminadas. Os resultados obtidos pela solução exata baseada nesta teoria, mostram as limitações observadas nos modelos fundamentados em deslocamentos, onde não são levadas em consideração os efeitos das tensões transversais interlaminares responsáveis pelo equilíbrio de cada lâmina.

Esta limitação pode ser observada na distribuição descontínua das tensões cisalhantes transver-

sais no laminado quando se utilizam as equações constitutivas. Neste caso, a obtenção de um campo contínuo e consistente (que satisfazem condições de contorno de Poisson) para as tensões transversais, recai no uso das equações de equilíbrio tridimensionais.

Phan & Reddy [53] utilizam o modelo cinemático proposto por Reddy [32] para construir as equações de Galerkin através do método de elementos finitos. Neste trabalho são analisados os problemas de flexão, vibrações livres e instabilidade estrutural de placas compostas por laminados. Os resultados obtidos foram comparados com o método de Navier utilizando a mesma teoria e a solução da elasticidade tridimensional de Pagano [51]. Nesta análise foram observados os efeitos das deformações cisalhantes e os acoplamentos entre tração e flexão em laminados assimétricos e anisotrópicos. Na análise de flexão, os resultados são próximos aos obtidos pela solução exata da elasticidade tridimensional de Pagano [51]. Nesta análise foi constatado uma diminuição na rigidez da placa de material composto devido ao efeito da deformação cisalhante em relação à mesma análise feita utilizando a TCL. São verificados os efeitos do acoplamento flexão-extensão no laminado anisotrópico, onde a diferença nas respostas pela teoria clássica e pela teoria de ordem superior para o deslocamento transversal normalizado no meio do vão, aumentam com a taxa de anisotropia. No problema de vibrações livres, os resultados obtidos pela TCL, apresentam valores inferiores aos obtidos com esta teoria e aos da solução analítica de Noor citada neste artigo. Na análise de flambagem, através da carga crítica normalizada, os efeitos do acoplamento flexão extensão para o composto anisotrópico, podem ser observados através de uma discrepância crescente de valores, para a carga crítica, determinados pela TCL com relação à teoria de ordem superior e a da solução da elasticidade tridimensional proposta por G. J. Turvey citado no artigo.

Sivakumaran, Chaudury & Vajarasathira [45] analisam a performance de três teorias de ordem superior na modelagem por elementos finitos do campo de deslocamento transversal e tensões para placas compostas por laminados simétricos. As funções de deslocamento foram obtidas de forma direta por expansão em série de potências da variável z da espessura cotada a partir da superfície de referência. O modelo de 3^a ordem proposto considera uma distribuição cúbica para os deslocamentos coplanares e quadrática para o deslocamento transversal, levando

em consideração uma distribuição parabólica das tensões cisalhantes e linear das tensões normais as fibras. Os elementos utilizados são os lagrangeanos de 9 nós, onde cada nó está associado a 3, 5 e 6 graus de liberdade para cada um dos modelos propostos. Esta análise objetiva verificar a sensibilidade no deslocamento central normalizado, do problema modelado com estes elementos, quanto à variação da taxa de espessura $\frac{L}{h}$ (L é a largura média da placa e h a espessura), efeito de anisotropia do material, efeito de número de lâminas no laminado e influência do erro na orientação das lâminas. Os resultados obtidos com esta teoria são comparados com a solução da elasticidade tridimensional de Pagano [51], com a solução exata de da HSDT (*Higher Shear Deformation Theory*) de Reddy e com a solução utilizando elementos finitos proposta por Reddy & Chao, ambos citados neste artigo. Os resultados com o modelo de 3^a ordem foram os mais próximos daqueles obtidos pelas equações de elasticidade tridimensional de Pagano [51] em todos os ensaios realizados.

Para modelar cascas *sandwiches* com núcleo de baixa rigidez e lâminas altamente resistentes e anisotrópicas sob carregamento dinâmico, Kant & Kommineni [74] utilizam uma teoria de 3^a ordem com termos quadráticos juntamente com o método de elementos finitos para modelar problemas não lineares no sentido de Von Karman. Este modelo cinemático garante uma distribuição quadrática através da espessura das deformações cisalhantes transversais, não sendo necessária a utilização de coeficientes de correção. Os resultados obtidos para o deslocamento transversal e as tensões no tempo apresentaram valores próximos daqueles obtidos pela teoria da elasticidade tridimensional Bathe et alli, citado no artigo.

Com o intuito de considerar as tensões normais transversais, de grande importância para prever ruptura por delaminação Pandya & Kant [4] utilizam a teoria de 3^a ordem incluindo o termo quadrático no deslocamento normal às fibras. Este modelo apresenta a mesma limitação das teorias fundamentadas no campo de deslocamento que não levam em consideração as tensões interlaminares e portanto não representam uma distribuição contínua das tensões cisalhantes transversais, além de não satisfazer em forma direta as condições de contorno de *Poisson*.

A forma usual de contornar este problema consiste na integração das equações de equilíbrio da elasticidade tridimensional para obter uma distribuição contínua das tensões cisalhantes

transversais.

Tessler & Saether [3] propõe uma teoria baseada em deslocamentos que representa em termos de teoria de ordem superior uma sucessora da *Single Layer Theory* de Reddy [32]. Esta proposta constitui-se de uma teoria variacional de ordem superior fundamentada na elasticidade tridimensional, procurando conciliar aspectos relevantes na análise de estruturas laminadas. Dentro destes aspectos tem-se uma distribuição contínua ao longo da espessura das tensões cisalhantes transversais e da tensão normal às fibras, juntamente com a facilidade de implementação computacional. Este propósito é conseguido trabalhando com modelos cinemáticos do tipo [1, 2], ou seja os campos de deslocamentos coplanares são modelados com funções lineares, ao passo que o campo do deslocamento transversal é obtido com funções quadráticas da variável z da espessura. Neste método os campos de deformações transversais $\{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \varepsilon_{zz}\}$ são modelado de forma independente dos campos de deformações coplanares $\{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}$. Estes campos foram construídos de forma a satisfazer as condições de contorno de *Poisson*.

Do ponto de vista da análise por FEM os espaços de interpolação podem ser do tipo C^0 e C^{-1} sendo este último utilizado para modelar os termos de ordem superior do deslocamento transversal. A vantagem de se utilizar funções do tipo C^{-1} (contínuas apenas no interior do elemento) possibilita através de uma condensação estática, em nível de elemento, eliminar 2 graus de liberdade correspondentes aos termos de ordem superior do deslocamento transversal. Sendo assim a equação do ponto de vista elementar apresenta 5 graus de liberdade por nó resultando num custo computacional similar ao modelo de primeira ordem. As tensões cisalhantes transversais e tensões normais às fibras são obtidas utilizando as equações constitutivas ou as equações de equilíbrio. Os resultados obtidos utilizando as equações de equilíbrio tridimensionais são mais próximos da solução exata da elasticidade tridimensional de Pagano [51], citado no artigo. Na modelagem da tensão normal às fibras, os resultados são bons em ambas as situações.

Para modelar o problema de cascas rasas laminadas, Xiao-Ping [69] propõe um modelo cinemático utilizando a aproximação geométrica de primeira ordem de Love e a simplificação de Donnell. Este modelo, que leva em consideração a distribuição contínua das tensões cisalhantes

através da espessura, utiliza os mesmos graus de liberdade que a teoria de Mindlin, mas permite modelar os campos de deslocamentos tangenciais através da espessura de forma a satisfazer a distribuição parabólica e contínua das tensões cisalhantes transversais e as condições de contorno de *Poisson*.

A influência dos materiais e da forma de empilhamento é considerado no campo de deslocamentos. Em termos de precisão, apresentam valores muito próximos aos obtidos pela solução da elasticidade tridimensional sendo melhores que os obtidos por Reddy [32], citado no artigo, e pela teoria de primeira ordem de Mindlin.

Um modelo recente que utiliza a teoria de primeira ordem (Reissner-Mindlin) e elementos finitos convencionais, na análise placas e cascas de material compostos por laminados, é apresentado por Menezes & Devloo [24]. Neste trabalho os autores mostram um modelo baseado no procedimento dos deslocamentos para análise de placas multicamadas com qualquer orientação. O modelo apresentado considera uma distribuição contínua para os deslocamentos mas as rotações são independentes para cada lâmina. Este modelo permite uma análise mais realista das placas de material composto, considerando de forma mais adequada o comportamento anisotrópico das camadas. Num trabalho posterior, Menezes & Devloo [25] apresentam a teoria supracitada juntamente com estratégias h , p e hp adaptativas na análise de uma placa de material homogêneo e isotrópico e uma casca de material composto. Nestes exemplos, além da potencialidade do modelo, os autores mostram o desempenho das estratégias p , h e hp adaptativas obtidas com o programa PZ construído em C++. Este programa utiliza uma malha para gerar a geometria independente da malha associada ao espaço de aproximação. Isto permite escolher os elementos que precisam ser refinados sem necessidade de alterar a malha geométrica. Os resultados obtidos mostram um bom desempenho da técnica utilizada na captura de altos gradientes localizados e um comportamento igualmente satisfatório na simulação de deslocamentos e esforços em estruturas, de material composto por laminado, com forte anisotropia.

As teorias supracitadas caracterizam-se por ter o modelo do campo de deslocamento e o espaço de interpolação fixos para um determinado problema. Actis, Szabo & Schwab [64], propõem um refino hierárquico para o modelo cinemático e para o espaço de elementos finitos

que satisfaz os requisitos de convergência, consistência assintótica e taxas de convergência ótimas. Os requisitos supracitados são definidos como:

- *Convergência:* Sendo $h > 0$ a espessura da casca e seja $\mathbf{u}_{EX}^{(HM|i)}$ o campo de deslocamento do modelo de casca de ordem superior tal que quando $i \in N^*$ e $i \rightarrow +\infty$ converge para a solução exata da elasticidade tridimensional $\mathbf{u}_{EX}^{(3D)}$, define-se convergência em norma de energia como

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{u}_{EX}^{(3D)} - \mathbf{u}_{EX}^{(HM|i)} \right\|_{E(\Omega)} = 0. \quad (1.1)$$

Na expressão (1.1) o supra índice i representa a ordem do modelo avaliado e $E(\Omega)$ o espaço de funções de aproximação que compõe o modelo hierárquico.

- *Consistência Assintótica:* A consistência assintótica é a capacidade do modelo utilizado de simular o comportamento de casca fina. A mesma é definida como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left\| \mathbf{u}_{EX}^{(3D)} - \mathbf{u}_{EX}^{(HM|i)} \right\|_{E(\Omega)}}{\left\| \mathbf{u}_{EX}^{(3D)} \right\|_{E(\Omega)}} = 0. \quad (1.2)$$

Muitos modelos satisfazem este critério, especialmente os modelos clássicos como os de Koiter, Sanders e Novozilov (estes critérios não consideram a deformação cisalhante) e os modelos Reissner-Mindlin e Naghdi (levam em consideração a deformação cisalhante).

- *Taxa de convergência ótima:* Na ausência do fenômeno de camada limite e singularidades, a taxa de convergência ótima é definida como $\frac{\left\| \mathbf{u}_{EX}^{(3D)} - \mathbf{u}_{EX}^{(HM|i)} \right\|_{E(\Omega)}}{\left\| \mathbf{u}_{EX}^{(3D)} \right\|_{E(\Omega)}} \approx Ch\gamma^i$ para $h \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$.

A convergência ótima se verifica se a taxa $\gamma^{(i+1)} > \gamma^i$.

Os modelos hierárquicos constituem uma sequência convergente com relação à solução exata da elasticidade tridimensional de modelos matemáticos. Em outras palavras, deseja-se obter a solução exata de modelos de ordem superior, como resultado limite de uma série convergente.

Os modelos de cascas apresentados em [64] são uma redução dimensional do problema de elasticidade tridimensional, obtida por meio de uma semi-discretização na direção transversal e

projeção de energia. Em outras palavras, os modelos são obtidos restringindo os deslocamentos admissíveis no princípio dos trabalhos virtuais tridimensional ficando a equação integral da formulação fraca dependente da coordenada curvilínea transversal ζ .

As soluções que minimizam o funcional de energia $\Pi(\mathbf{u})$ pertencem ao sub-espaço $E^n(\Omega)$ definido por:

$$\begin{aligned}
 E^n(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \mid u_\xi(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^{n_1} u \mid_i^\xi(\xi, \eta) \varphi_i(\zeta), u_\eta(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=0}^{n_2} u \mid_j^\eta(\xi, \eta) \psi_j(\zeta), \right. \\
 u_\zeta(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=0}^{n_3} u \mid_k^\zeta(\xi, \eta) \rho_k(\zeta), \\
 \left. i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2, k = 1, \dots, n_3 \right\} \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

A construção de modelos hierárquicos sequenciais de elementos finitos fundamenta-se na geração de funções transversais ótimas $\varphi_i(\zeta)$, $\psi_j(\zeta)$ e $\rho_k(\zeta)$ e da construção de funções de mapeamento da superfície média da casca. A utilização de funções transversais constitui o item fundamental desta modelagem. Estas funções são obtidas de forma a satisfazer as equações de equilíbrio tridimensionais e dependem da sequência de laminação e do material utilizado. As conclusões do trabalho mostram que a utilização deste modelo, na simulação do campo cinemático, juntamente com a versão p do método de elementos finitos, para construir o espaço de aproximação resultam um algoritmo livre de travamento (*locking*) para valores de $p = 4$, e de baixa sensibilidade à distorção da malha. Embora esta teoria apresente excelentes resultados na abordagem de problemas clássicos dentro da teoria de placas e cascas, o processo de construção do modelo hierárquico adaptativo é computacionalmente caro, o que torna essencial uma análise prévia de custo / benefício para a sua aplicação.

1.1.2 Métodos sem malha

No contexto deste trabalho, são chamados *métodos sem malha* aqueles nos quais o conjunto de equações que governa o problema discretizado não depende de uma malha no sentido forte. Entenda-se por isto que as malhas devem satisfazer os requisitos de conformidade exigidas em elementos finitos convencionais.

Em muitas destas metodologias pode ser observada uma dependência fraca com relação à

malha, a qual tem somente a função de suporte para a quadratura numérica. No presente trabalho, é feita uma sucinta revisão histórica destas metodologias, dando ênfase aos métodos que utilizam o enriquecimento externo da partição da unidade para construir o espaço aproximação, como o *Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM) (Melenk & Babuska [34]) e o *hp-Clouds* (Duarte & Oden [9]). Estes últimos representam uma generalização das versões h , p e hp do método de elementos finitos convencionais (FEM), o que lhes valeu o nome de Elementos Finitos Generalizados (MEFG).

Dentro das primeiras propostas de métodos sem malha encontram-se Monaghan [35] com o *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), Liszka et alli [79] com o *Generalized Finite Difference Method* (GFDM) e Lancaster & Salkauskas [57] introduzindo o uso do *Moving Least Square Methods* (MLSM).

Utilizando a técnica MLSM para construir os espaços locais de aproximação surgem o *Diffuse Elements Method* (DEM) proposto por Nayroles, Touzot & Villon [6] e o *Element Free Galerkin Method* (EFGM) de Belytschko, Lu & Gu [80].

O método SPH constitui uma forma discretizada do *Interpolation by Kernel Estimates* (Monaghan [35]) através de uma subdivisão do domínio da solução em pequenos volumes V_I com massa m_I e centro em \mathbf{x}_I . Este método, que constrói o sistema de equações do problema discretizado utilizando colocação, foi idealizado inicialmente para modelar problemas de astrofísica sem fronteiras definidas.

Nesta metodologia a discretização é levada a cabo por um conjunto de pontos aleatoriamente distribuídos sobre o domínio a ser analisado. Embora seja muito simples de ser implementado, este método utiliza funções de interpolação similares às funções MLSM de ordem zero (*funções de Shepard*) conhecidas por sua baixa capacidade de aproximação, o que requer um número elevado de pontos para atingir uma precisão satisfatória. Dentre outras limitações desta metodologia ocorre a instabilidade numérica causada por uma quadratura inadequada.

Um ítem fundamental no estudo dos metodologias sem malha é sem dúvida o MLSM. Esta técnica de construção do espaço de aproximação é precursora de uma família de métodos sem malha, como o DEM, EFGM e o *hp-Clouds*. A idéia fundamental é a aproximação local uti-

lizando mínimos quadrados ponderados. Ao contrário dos mínimos quadrados convencionais onde a solução é uma função polinomial que minimiza o erro quadrático em média, nos mínimos quadrados móveis são incorporadas funções peso aos nós de discretização (a estes nós estão associados valores discretos da função a ser interpolada) introduzindo um caráter local a aproximação.

Uma outra metodologia proposta, quase paralelamente com o SPH, é o GFDM, apresentado por Lyszka & Orkiz [78], que utiliza mínimos quadrados ponderados para aproximar localmente soluções suaves. Nesta metodologia, a solução é expandida em série de Taylor em cada ponto de discretização do domínio, onde são conhecidos os valores da função e de suas derivadas.

Quando na determinação da solução são utilizados todos os pontos do domínio discretizado que tem influência sobre o ponto onde se quer a aproximação local da solução, este método é idêntico ao MLSM. Entretanto Lyszka utiliza um número fixo de pontos de influência, o que pode ocasionar em certas situações descontinuidades na solução.

Em *Diffuse Approximation Method* (DAM), proposto por Nayroles et alli [6], que é uma generalização do DEM, é utilizado o mesmo procedimento do MLSM para construir os elementos difusos. A idéia deste método é utilizar as funções do DEM como funções de interpolação de um espaço local do tipo $H^1(\Omega)$, e utilizar o método de Galerkin para determinar a solução aproximada de equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais. Esta metodologia utiliza uma distribuição aleatória de pontos sobre o domínio e proporciona uma aproximação do tipo $C^1(\Omega)$.

O DAM, embora livre dos problemas acarretados por uma malha, e de proporcionar uma distribuição contínua das funções e gradientes no domínio, é menos preciso do que elementos finitos convencionais. Esta limitação deve-se a uma consideração inadequada das condições de contorno e do gradiente das funções de aproximação, já que é feita uma derivação incompleta destas funções. As limitações encontradas por Nayroles et alli [6] em DAM são contornadas por Belytschko et alli [80] no EFGM. Este método utiliza uma distribuição aleatória de pontos sobre o domínio aos quais estão associadas as funções de interpolação do tipo MLSM. Para evitar problemas de instabilidade devido a uma sub-itegração é utilizada uma malha de suporte para

a quadratura numérica.

No EFGM a deficiência da propriedade seletiva delta de *Kronecker* das funções de interpolação é contornada forçando as condições de contorno essenciais por multiplicadores de Lagrange. Neste método o gradiente das funções de interpolação é determinado de forma completa, incorporando os termos das derivadas negligenciados por Nayroles et alli [6].

Esta metodologia apresenta uma performance melhor que elementos finitos convencional na abordagem de problemas onde a estrutura da malha encontra limitações, como nos casos já citados, além de obter espaços com regularidade desejada. Os custos destes benefícios recaem sobre tempo de processamento elevado, decorrentes da construção do espaço de interpolação e da integração numérica. Soma-se a estas limitações as perdas de precisão nas fronteiras devido a utilização de uma malha não ajustada ao contorno e a imposição das condições de contorno de forma fraca através de multiplicadores de Lagrange.

A performance desta metodologia pode ser constatada em trabalhos como os de Lu, Belytschko & Tabbara [87] na abordagem de problemas de dinâmica de fratura. Neste artigo, os autores contornam o problema da inversão da matriz utilizando um processo de ortonormalização das funções peso polinomiais, obtendo uma forma diagonal para a matriz de valores nodais da base polinomial de interpolação.

Entretanto o custo computacional do processo de ortonormalização é tão caro quanto a inversão da matriz. Este método, quando aplicado a problemas regulares, onde a geração de malhas conformes é obtida a baixo custo computacional, não oferece vantagens com relação a elementos finitos convencionais.

Um procedimento onde se consegue elevada precisão de resultados em regiões críticas e ao mesmo tempo baixo custo computacional é apresentado por D. Hegen [17]. Neste trabalho o autor propõe uma divisão do domínio numa região crítica do ponto de vista de estrutura de malha onde é utilizado o EFGM e uma região regular onde é utilizado elementos finitos convencionais.

Uma dificuldade que surge nos métodos sem malha que utilizam funções de interpolação que não apresentam a propriedade *delta de Kronecker* é a forma de impor as condições de contorno

essenciais utilizando multiplicadores de Lagrange. Este procedimento, quando utilizado de forma direta no princípio variacional clássico, resulta numa matriz de rigidez que não é positiva definida, podendo apresentar problemas de mal condicionamento quando se trabalha com bases polinomiais de grau elevado. Uma forma de contornar este tipo de problema é apresentado por Lu, Belytschko & Gu [87], fazendo uso do princípio variacional modificado. Neste caso são utilizados os significados físicos dos multiplicadores de Lagrange que correspondem aos vetores de tração sobre a fronteira de Dirichlet necessários para forçar as condições de contorno prescritas. A vantagem da utilização desta técnica consiste na diminuição do número de graus de liberdade do problema e no surgimento de uma matriz de rigidez sem grandes problemas de mal condicionamento.

A utilização do EFGM é estendida ao tratamento de domínios constituídos de materiais diferentes (Cordes & Moran [84]), onde novamente é utilizado o significado físico dos multiplicadores de Lagrange para forçar condições de contorno essenciais na fronteira definida entre materiais. Outra variação do método é o tratamento do EFGM com integração nodal, ou seja, onde não é preciso uma malha auxiliar para efetuar a quadratura numérica. Neste caso, o problema de sub-integração, também chamada de instabilidade tensorial, é contornado incorporando-se ao princípio variacional o quadrado do resíduo da energia (estabilização de modos espúrios).

Como uma sequência natural do EFGM, surgem os métodos que constroem o espaço de aproximação por enriquecimento externo da partição da unidade, como o *hp-Clouds* (Duarte & Oden [9]) e o *Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM) (Melenk & Babuska [34]).

No método *hp-Clouds* o espaço de aproximação é construído por enriquecimento da função partição da unidade com sinal. Este enriquecimento se dá pelo produto das funções partição da unidade com bases polinomiais, obtidos por produto tensorial ou completo (Triângulo de Pascal), ou quando conhecidos, por modos característicos da solução do problema de valores no contorno (PVC).

A principal vantagem deste método sobre o EFGM é o de poder usar partições da unidade de grau zero (funções de *Shepard*). Esta característica torna este método muito atrativo para o uso

de estratégias adaptativas, devido ao baixo custo computacional necessário para obter o espaço de aproximação. O emprego de funções de *Shepard* na construção do espaço de aproximação, representa uma economia de tempo de processamento, já que não há vantagem em construir funções partição da unidade usando bases polinomiais de grau maior do que zero, como provado em Duarte & Oden [9].

Nesta metodologia surge o conceito de cobertura do domínio em lugar de discretização como em elementos finitos convencionais. Juntam-se a este conceito propriedades como conectividade livre, suportes de funções de qualquer formato, enriquecimentos direcionados e espaços construídos com regularidade desejada.

A cobertura é conseguida com uma distribuição aleatória de pontos sobre o domínio aos quais estão associados os centros de nuvens de forma que cada ponto do domínio seja coberto pelo menos por uma nuvem. Esta metodologia obtém o conjunto de equações discretizadas utilizando o método de *Galerkin* e vale-se de uma malha de suporte para a quadratura numérica. Quando as funções peso utilizadas para construir a partição da unidade são as funções globais utilizadas em elementos finitos convencionais, pela definição da função de *Shepard* conclui-se que as funções da partição da unidade são as próprias funções globais de elementos finitos convencionais. A partir do exposto, este método pode ser entendido como uma generalização das versões *h*, *p* e *hp* de elementos finitos convencionais.

Como vantagens do *hp-Clouds* sobre o EFGM podem ser apontadas a facilidade de construção do espaço de interpolação sem a necessidade de inverter uma matriz em cada ponto de integração e a utilização de uma malha de suporte de quadratura ajustada ao domínio, evitando com isto problemas de instabilidade numérica decorrentes de uma quadratura inadequada nas fronteiras. Com relação ao método de elementos finitos convencionais, podem ser observadas as vantagens características dos métodos sem malha de forma geral como:

- funções de interpolação com suportes não necessariamente dependentes de uma malha;
- construção do espaço de interpolação e implementação de estratégias *h*, *p* e *hp* adaptativas de forma direta, sem problemas de continuidade entre elementos encontrados em elementos finitos convencionais;

- geração de campos com regularidade desejada do tipo C^s com $s \geq 1$ o que possibilita obter um campo contínuo para as derivadas da solução de grande interesse em problemas de elasticidade;

A análise de custo/benefício entretanto, designa sua utilização em problemas onde a estrutura da malha apresenta limitações. Dentro dos inconvenientes que acompanham esta metodologia podem ser observados:

- perda de precisão nos contornos de Dirichlet, devido à incorporação de forma fraca das condições de contorno essenciais;
- custo de processamento elevado quando as partições de unidade são construídas com funções peso muito regulares, exigindo um número elevado de pontos de integração para evitar instabilidade numérica na quadratura.
- matriz de rigidez com banda larga, normalmente com número de condição maior do que em elementos finitos convencionais na modelagem do mesmo problema.

Uma outra abordagem dos métodos chamados de elementos finitos generalizados é o PUFEM de Melenk & Babuska [34]. Esta metodologia se caracteriza por construir o seu espaço de aproximação por enriquecimento das funções partição da unidade do tipo *Lipschitz*, com funções que apresentam boas propriedades de aproximação (polinômios de Legendre, polinômios de *Lagrange* e funções que fazem parte da solução do PVC). Dentro das funções partição da unidade possíveis de serem usadas se encontram as funções globais de elementos finitos convencionais.

As principais características do método são:

- habilidade de incluir, *a priori*, conhecimento sobre o comportamento local da solução no espaço de elementos finitos. Isto o torna apropriado na abordagem de problemas onde as soluções são fortemente oscilatórias onde as funções polinomiais não representam de forma adequada este comportamento.
- habilidade de construir o espaço de aproximação de regularidade desejada;

- devido a não necessitar de uma malha no sentido clássico de elementos finitos, o torna um método sem malha;
- podem ser entendidos como uma generalização das versões h p e hp utilizadas em elementos finitos convencionais.

Dentre as dificuldades encontradas podem ser citadas:

- a incorporação das condições de contorno essenciais no problema, já que as funções de interpolação podem não ter a propriedade seletiva do *Delta de Kronecker*, são forçadas, por meio de funções de penalização ou outras técnicas;
- o processo de integração numérica torna-se mais difícil do que em elementos finitos convencionais, já que as funções não estão amarradas à malha, tendo que determinar para cada ponto de integração, o número de suportes (domínios da partição da unidade) que o cobre, bem como os valores das funções e seus gradientes correspondentes no ponto de integração.

Dentre os trabalhos abordados por estas tecnologias, podem ser citados a modelagem de fratura elástica em problemas de elasticidade plana (Duarte & Oden [9]), aproximação da *Equação de Laplace* e da *Equação de Helmholtz* (Melenk & Babuska [34]), modelagem do problema estático de placas de Mindlin (Garcia et alli [54]). O *Método de Elementos Finitos Generalizados* (MEFG) (Duarte, Babuska & Oden [11]) constitui a primeira proposta de métodos sem malha para modelar problemas complexos da mecânica dos sólidos tridimensional. Neste trabalho os autores utilizam partições de unidade *Lagrangeanas Trilineares* associadas a suportes de malhas tetraédricas como as usadas em elementos finitos convencionais para construir o espaço de aproximação. São evidenciados neste trabalho a grande flexibilidade do método, através da possibilidade de fazer refino p ortotrópico (Babuska & Duarte [12]), e de incorporar conhecimento da solução do (PVC) no espaço de elementos finitos, ambas relevantes na modelagem de problemas de singularidades e de camada limite (*boundary layer*). Além das propriedades já citadas a matriz de rigidez obtida com esta metodologia apresenta vantagens sobre aquela obtida com elementos finitos convencionais para o mesmo problema. Ao contrário

do que em elementos finitos convencionais, a matriz de rigidez obtida não altera sua estrutura com o enriquecimento p , já que o número de nós permanece o mesmo, aumentando apenas o número de funções associadas a cada nó. Como esta metodologia desconsidera os nós das faces e centrais do elemento, a matriz de rigidez obtida é menor do que em elementos finitos convencionais, com valores armazenados em banda e mais povoada com valores não nulos. Esta é uma característica positiva do ponto de vista de adaptatividade a *solvers*. Dentre as limitações que acompanham o uso de funções partições de unidade constituídas de funções polinomiais lineares se observam:

- um espaço de interpolação do tipo $C^0(\Omega)$, onde evidentemente não se tem continuidade do gradiente no domínio;
- Problemas de dependência linear quando as funções de enriquecimento são polinomiais. Isso exige solvers adequados, como por exemplo, baseados no algoritmo iterativo apresentado em (Duarte, Babuska & Oden [11]).

Embora, o espaço de aproximação apresente a propriedade *delta de Kronecker*, a idéia inicial de impor condições de contorno essenciais pela simples eliminação das funções que aproximam graus de liberdade prescritos não é correta. Esta observação, feita por Schwebke & Holtzer [47] para problemas de elasticidade plana p enriquecidos, mostra que o espaço gerado com estas características apresenta energia de deformação finita entretanto não é minimamente conforme. Esta limitação é ratificada no trabalho onde a carência de completude do espaço, em problemas de flexão, torna-o incapaz de representar alguns modos de solução com pequeno número de elementos. Uma proposta para contornar o problema é apresentada pelos autores supracitados. Esta técnica denominada de restrição multiplicativa consiste no produto das funções associadas às nuvens sobre a fronteira de Dirichlet pelas *Hat functions* do elemento suporte. As funções resultantes deste procedimento tem regularidade C^0 , são suaves e constróem um espaço local completo. Outra alternativa de impor condições de contorno essenciais é apresentada no trabalho onde são utilizadas as *funções de fronteira*. Estas funções, obtidas por processo de restrição multiplicativa, possuem valor nulo sobre as fronteiras com condições de contorno

prescritas. As *funções de fronteira*, utilizadas no trabalho, pertencem ao sub-espaço das funções *Lagrangeanas* biquadráticas de utilização difundida pelo elementos finitos convencionais. O espaço construído com estas funções tem regularidade C^0 , é suave, e garante a completude sobre a fronteira de Dirichlet.

1.1.3 Fenômenos em camadas limite (*boundary layers*)

De forma genérica, os fenômenos em camadas limite representam um comportamento diferenciado da solução numa determinada faixa do domínio do problema de valores no contorno. Estas regiões, onde ocorre este comportamento diferenciado da solução em relação ao restante do domínio estão localizadas nas vizinhanças dos contornos. Estas respostas são características de problemas modelados com determinado tipo de equações diferenciais. Dentro destes casos são citados os problemas elípticos de placas e cascas (modelo de Mindlin para placas semi espessas) em mecânica dos sólidos e os problemas de transfência de calor com coeficientes térmicos pequenos.

Do ponto de vista matemático, o fenômeno se deve a que as equações diferenciais apresentam operadores diferenciais de ordens diferentes. Os problemas postos desta forma são suscetíveis à perturbações por parâmetros associados à equação diferencial (a espessura, em problemas de placas e cascas).

As primeiras tentativas de estabelecer um tratamento matemático para os fenômenos de camadas limites devem-se aos estudos de Gol'denveizer (1953) e posteriormente à análise assintótica de Rutten (1973), e mais recentemente, ao trabalho de Arnold and Falk [18] na análise dos efeitos de borda em placas de Mindlin.

Uma característica deste tipo de fenômeno é o de apresentar as soluções dentro da camada com um decaimento exponencial em função do parâmetro de perturbação. Na Fig.1.3 S_f e S_c representam os geradores de fronteiras suaves e pontual (devido ao canto) respectivamente. Neste caso $S = S_f \cup S_c$ é um sub-domínio de $\bar{\Omega}$ de medida nula em $L^2(\Omega)$ chamado de gerador do efeito de camada.

De forma genérica, diz-se que uma função \mathbf{u}_l (Pitkäranta et alli [41]) é uma solução na

camada limite de um problema de casca definido em 2D pela equação diferencial

$$\mathcal{M}\mathbf{u} + t^2\mathcal{B}\mathbf{u} = f \quad (1.4)$$

se:

- \mathbf{u}_t é parametrizada pela variável de perturbação t e satisfaz a equação diferencial de *Euler Lagrange* fora de S .
- A solução \mathbf{u}_t decai exponencialmente com relação a um ponto P fora de S conforme a expressão $|\mathbf{u}_{t(P)}| \sim \exp\{-d(P)/L\}$. Nesse caso L é a largura da camada, $d(P) = \text{dis}(P, S)$, (Fig.1.3).
- Quando t varia, o comprimento da camada L varia, de forma que $L \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$

A seguir são comentadas algumas tentativas de modelar este fenômeno utilizando as versões h , p e hp de elementos finitos convencionais, e uma nova visão do modelo matemático baseada nos modos principais de Fourier.

Inicia-se a revisão comentando o modelo para problemas de valores no contorno unidimensionais de Schwab et alli [14]. Neste trabalho, os autores modelam o fenômeno de camada limite para problemas unidimensionais de valores no contorno elípticos e de difusão de calor. A modelagem é feita utilizando estratégias hp adaptativas para as situações de malha fixa (dimensão dos elementos independe do parâmetro de perturbação), constituída de um ou mais elementos, e de malha variável (a dimensão do elemento depende do parâmetro de perturbação). Para a primeira análise, quando é utilizada malha fixa, a taxa de convergência do erro relativo em norma de energia é uniforme com relação ao parâmetro de perturbação de camada $t \in (0, 1]$ sendo o melhor valor atingido da ordem de $O(p^{-1})$ onde p é o grau da função de interpolação polinomial associada ao elemento. Para malhas variáveis constatou-se uma taxa de convergência exponencial para o erro relativo da norma de energia quando a dimensão do primeiro elemento é da ordem de $O(tp)$ onde tp é o produto do parametro de perturbação t pela ordem polinomial das funções de aproximação.

Uma abordagem numérica do fenômeno em placas de Mindlin e cascas rasas e problemas de fluxo de calor é feita no trabalho de Schwab et alli [14]. Para o modelo de Mindlin é feita

a análise de uma placa circular sujeita a uma carga senoidal. São utilizadas duas malhas de 8 elementos cada. Para a primeiro caso é utilizada uma malha uniforme constituída por elementos de mesma largura medida na direção radial. No segundo caso a malha é variável sendo $O(tp)$ a da dimensão do elemento na fronteira. Na análise do erro relativo em norma de energia, a diferença de resultados obtidos com as duas malhas é pequena. Entretanto, a convergência é obtida com a malha variável. Pode ser observado nesta análise que o efeito da espessura provoca deterioração dos resultados devido ao efeito de travamento. Na análise do problema de transmissão de calor com fronteiras não suaves, são considerados os efeitos combinados de camada limite com as singularidades decorrentes de cantos vivos. Os melhores resultados nesta análise são novamente obtidos utilizando malhas variáveis (a dimensão dos elementos varia com o parâmetro de perturbação) e com refino nos cantos.

Na análise de cascas rasas os autores evidenciam a influência da geometria da mesma no traçado da camada. Neste exemplo são mostradas cascas com curvaturas não constantes onde os efeitos de camada limite nas fronteiras desenvolve-se numa região de largura $O(\sqrt{t})$ Fig.1.4b. Os casos anômalos correspondem a cascas com curvaturas constante segundo um determinado eixo como as cascas parabólicas e hiperbólicas com larguras de camada $O(\sqrt[4]{t})$ (Fig.1.4b) e $O(\sqrt[3]{t})$ (Fig.1.4a). Para a casca definida por um hiperbolóide de revolução, sujeita a uma perturbação provocada por uma carga concentrada sobre a fronteira, os efeitos de camada se transmitem pelos eixos de curvaturas constantes.

O problema da determinação do comprimento da escala é abordado por Pitkäranta, Mat-ache & Schwab [41]. No artigo são analisadas as cascas rasas segundo os medelos das teorias clássicas de Love de Koiter e de Novozilov e dos modelos que consideram a deformação cisalhante como os de Reissner & Naghdi. A primeira abordagem é feita considerando que a largura da camada depende unicamente da variável de perturbação (neste caso a espessura da casca). Entretanto, as considerações gerais sobre a largura da camada são obtidas através da análise dos quatro modos principais de Fourier. Neste caso a largura depende não apenas do parâmetro de perturbação mas de geometria da casca (Fig.1.4).

Como constatado nos trabalhos anteriores, as estratégias utilizadas em elementos finitos

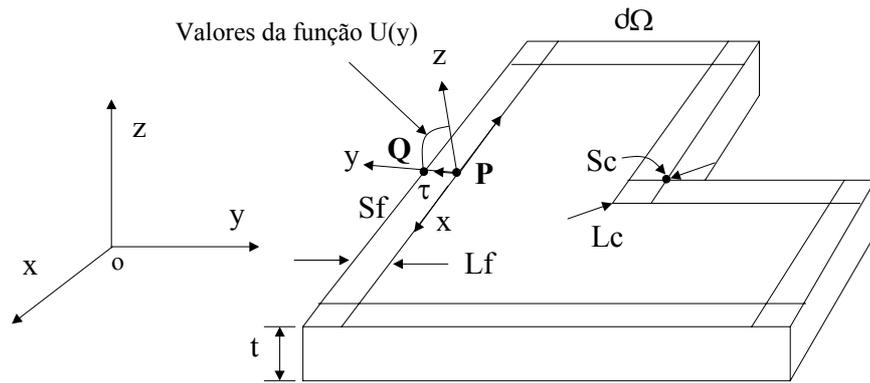


Figura 1.3: Elemento estrutural de placa e sistema local de coordenadas (x, y, z) com o eixo "y" normal ao contorno no ponto $Q \in \bar{S}$.

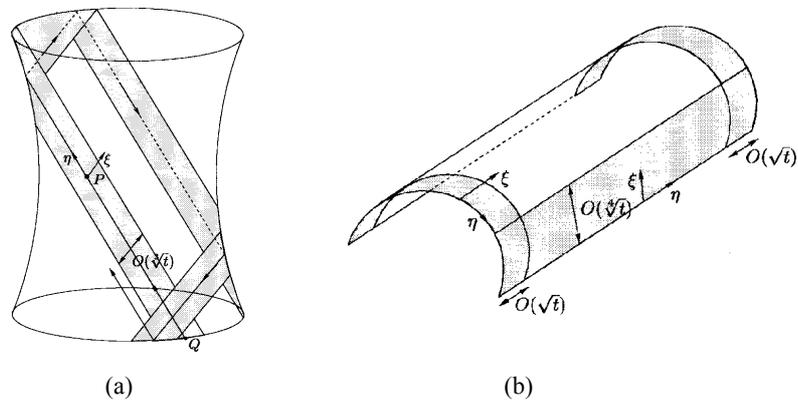


Figura 1.4: a) Hiperbolóide de revolução, b) cilindro com geratriz parabólica.

convencionais para representar gradientes íngrimes são h e hp adaptativas. A utilização de técnicas p adaptativas, utilizadas de forma usual em elementos finitos convencionais, podem, até certo ponto, reduzir os erros locais quando são utilizados polinômios de alta ordem. Entretanto o refino p , utilizando malha grosseira, seja ele isotrópico ou anisotrópico, não consegue eliminar os erros devido a oscilação dos resultados no elemento onde ocorre o fenômeno de camada limite. A partir do exposto pode-se observar a necessidade de poder incluir funções exponenciais no espaço de interpolação de forma a obter altas taxas de convergência na região da camada. Neste ponto o MEEG se apresenta como uma forma de construir um espaço com estas características e com uma implementação computacional relativamente simples de ser realizada.

Capítulo 2

Materiais Compostos Laminados

Os materiais compostos por definição (Jones [61]) são aqueles constituídos por dois ou mais componentes diferentes, combinados de forma macroscópica, para funcionarem como uma única unidade. Procura-se com isto obter um conjunto de propriedades que nenhum dos componentes individualmente apresenta. Embora a abordagem científica desta tecnologia tenha se dado no século XX, a sua utilização de forma empírica data do segundo milénio antes de Cristo, quando os egípcios utilizavam nas construções urbanas tijolos de argila reforçados com fibras vegetais. Neste caso a argila é responsável pela resistência a compressão e as fibras vegetais conferem uma diminuição de peso e um aumento considerável da resistência a tração da peça como um todo. Na atualidade a utilização de materiais compostos está amplamente difundida e a sua utilização pode ser constatada desde a fabricação de raquetes de tênis e quadros de bicicletas construídos em fibra de carbono até fuselagens de aeronaves. A utilização de materiais compostos fornece ao projetista uma grande flexibilidade no atendimento de itens de projeto, em outras palavras, é possível construir um material que otimize os itens de performance do projeto maximizando as características desejáveis e minimizando as indesejáveis. Para atingir este objetivo são manipulados aspectos do comportamento do material tais como:

- Resistência à fadiga;
- Rigidez;
- Resistência à corrosão;
- Resistência à abração;

- Redução de peso;
- Capacidade de trabalho a altas e baixas temperaturas;
- Isolamento ou conductividade térmica, elétrica ou acústica;
- Dureza, ductilidade;
- Aparência estética.

A abordagem deste capítulo se desdobra sobre os chamados *materiais compostos modernos* que são aqueles constituídos por fibras de alto desempenho como as de carbono, grafite, vidro e kevlar imersas numa matriz de resina polimérica. De forma genérica o material composto *fibra-matriz* encontra-se na forma de lâminas constituídas de fibra-polímero, fibra-metal, metal-metal, cerâmica-metal ou outros. Numa lâmina de material composto as fibras possuem alta resistência na direção longitudinal das mesmas, portanto esforços nas outras direções deverão ser suportados pela matriz. Dentro da lâmina as fibras podem ser colocadas numa única direção (2.1a), ou em direções cruzadas (2.1b), sendo que na grande maioria dos casos de peças estruturais (vigas, placas, cascas etc.) o laminado (material do qual é formado a peça) é constituído por várias lâminas com direções de fibras variando de lâmina para lâmina de forma a otimizar índices de performance do projeto como maximizar rigidez e resistência e minimizar peso (2.1c).

A razão fundamental do uso de fibras recai no fato, comprovado experimentalmente pela primeira vez por Griffith em 1920, que a rigidez e a resistência de um material em forma de fibra é algumas ordens de magnitude maior do que a do mesmo material em forma de bloco. Uma explicação para este fenômeno provém de que um bloco de material possui uma população de trincas inerentes ao processo de fabricação. Já na fibra a dimensão longitudinal é muitas vezes maior do que as outras duas tornando inviável o desenvolvimento excessivo de trincas durante a fabricação. A análise de materiais compostos laminados é decomposta no estudo micro-mecânico e macro-mecânico das lâminas compostas por *fibra-matriz*. Os aspectos referentes à abordagem micro-mecânica não serão abordados neste capítulo podendo os mesmos serem encontrados em Mendonça [55] ou Jones[61]. O objetivo deste capítulo consiste numa

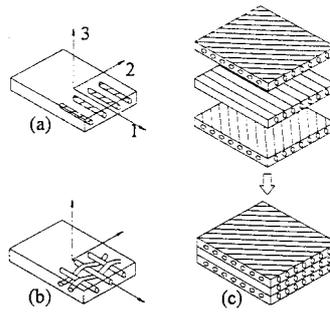


Figura 2.1: Tipos de lâminas: a) lâmina com fibras unidirecionais, b) lâminas com fibras tecidas, c) laminado composto por várias lâminas orientadas em diferentes direções.

abordagem sucinta porém indispensável de tópicos referêntes à macro-mecânica dos materiais compostos laminados.

2.1 Macro-Mecânica

A macro-mecânica estuda o comportamento da lâmina considerando já disponíveis as propriedades mecânicas aparentes médias em sua forma macroscópica. Neste caso deseja-se conhecer o comportamento de uma lâmina sob ação de carregamentos combinados que geralmente estão aplicados fora das direções principais de material. Esta teoria está restrita ao comportamento elástico linear do conjunto fibra-matriz, apresentando boa precisão para compostos do tipo vidro-E/epóxi, e boro/epóxi.

2.1.1 Relação Constitutiva

As relações constitutivas formam o conjunto de equações conhecidas como Lei de Hooke para materiais com comportamento elástico linear ideal. Nestas circunstâncias, existe uma relação biunívoca entre o estado de tensões e o estado de deformações. Considerando temperaturas constantes, ou variações de temperatura muito pequenas, os coeficientes elásticos podem ser considerados constantes. Para a condição de pequenos deslocamentos as relações entre o tensor de deformações de Green-Saint Venan e o tensor de tensões de Cauchy é dada pela equação:

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs} \epsilon_{rs} \hat{i}, \hat{j}, r, s = 1, \dots, 3 \quad (2.1)$$

O tensor C_{ijrs} tem 81 componentes. Porém, valendo-se das propriedades de simetria dos tensores tensão e deformação e considerando o material Green-elástico (possuem a função de potencial elástica) o número de coeficientes da matriz de elasticidade reduz-se para 21. Aproveitando a propriedade de simetria do tensor de tensões e de deformações, estes são colocados na forma vetorial:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ & & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ & & & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ & & & & D_{55} & D_{56} \\ \text{sim} & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

De forma compacta (2.1) pode ser escrita como:

$$\{\sigma^1\} = [D^1] \{\varepsilon^1\} \quad (2.3)$$

Os supra-índices em (2.3) indicam que a equação esta referenciada ao sistema de eixos principais 1,2,3.

Para o caso de simetria de grupos materiais com relação a planos mutuamente ortogonais (2.3) toma a forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 \\ \text{sim} & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

A equação (2.4), representa os chamados materiais ortotrópicos que são aqueles nos quais os coeficientes elásticos não se alteram em direções ortonormais. Um material ortotrópico no sistema de coordenadas principais apresenta os mecanismos entre tensões normais e cisalhantes desacoplados. Isto quer dizer que neste sistema de coordenadas as tensões normais provocam apenas deformações normais, e as tensões cisalhantes apenas deformações cisalhantes. Devido a equação constitutiva ser uma relação biunívoca, pode-se escrever esta equação de forma inversa:

$$\{\varepsilon^1\} = [S^1] \{\sigma^1\}, \quad [S^1] = [D]^{-1}. \quad (2.5)$$

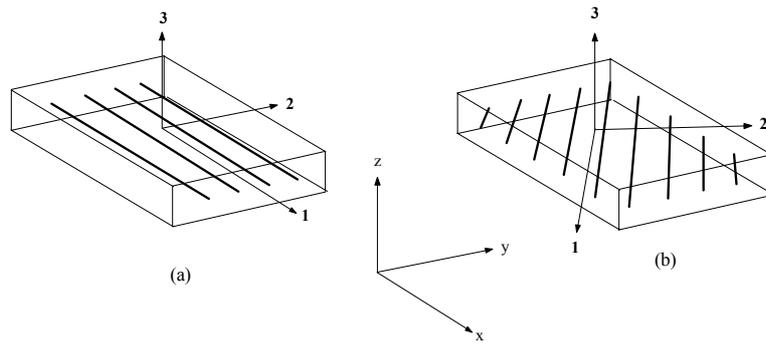


Figura 2.2: a) direções principais coincidentes com o sistema de coordenadas xy , b) direções principais oblíquas com relação ao sistema de coordenadas xy .

A matriz $[S^1]$ é conhecida como *matriz de flexibilidade do material*. Tanto esta quanto a matriz de rigidez elástica do material são normalmente escritas em função das constantes de engenharia E , G e ν .

2.1.2 Constantes de Engenharia para Materiais Ortotrópicos

As constantes de engenharia representam as propriedades elásticas do material e são obtidas a partir dos módulos de Young generalizados E_1 , E_2 , E_3 , dos coeficientes de *Poisson* ν_{12} , ν_{23} , ν_{31} e dos módulos de elasticidade cisalhantes G_{12} , G_{23} , G_{31} . Desta forma, para um material ortotrópico, a matriz de flexibilidade $[S^1]$ é dada por:

$$[S^1]^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ sim & & & & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

A matriz de rigidez elástica correspondente $[D]$ tem componentes dados por

$$\begin{aligned}
D_{11} &= E_1 \left(1 - \nu_{23}^2 \frac{E_3}{E_2} \right) / \Delta, \\
D_{22} &= E_2 \left(1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} \right) / \Delta, \\
D_{33} &= E_3 \left(1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} \right) / \Delta, \\
D_{12} &= (\nu_{12} E_2 + \nu_{13} \nu_{23} E_3) / \Delta, \\
D_{13} &= (\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}) / \Delta, \\
D_{23} &= E_3 \left(\nu_{23} + \nu_{12} \nu_{13} \frac{E_2}{E_1} \right) / \Delta, \\
D_{44} &= G_{12}, \quad D_{55} = G_{13}, \quad D_{66} = G_{23},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde

$$\Delta = 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} - \nu_{23}^2 \frac{E_3}{E_2} - 2\nu_{12} \nu_{13} \nu_{23} \frac{E_3}{E_1}. \tag{2.8}$$

As equações constitutivas apresentadas referem-se às direções ortotrópicas principais (Fig. 2.2). Na maioria das vezes nos problemas envolvendo materiais compostos laminados, a direção dos carregamentos não coincide com as das fibras dentro de cada lâmina e nestas circunstâncias é necessário fazer a rotação da relação tensão-deformação.

2.1.3 Equações Constitutivas Numa Direção θ Qualquer

Para construir a matriz constitutiva de um laminado, utiliza-se o sistema global xyz de coordenadas, evidentemente diferente do sistema local 123 de cada lâmina. Sendo assim para somar a contribuição de cada lâmina na matriz constitutiva do laminado é preciso rotacionar a mesma para o sistema de coordenadas globais. As considerações e seqüência de operações são dadas a seguir.

Seja a lâmina da (Fig.2.3), onde se quer determinar a equação constitutiva com relação a um sistema de eixos xy através de uma rotação plana do ângulo θ em torno o eixo z . Partindo de (2.4) no sistema principal de coordenadas locais 1-2 (Fig.2.3) e levando em consideração que a rotação é feita sobre o tensor de deformações de Green, e não do vetor de deformações utilizado na equação constitutiva (2.24) onde a deformação cisalhante de engenharia $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$, esta equação toma a forma:

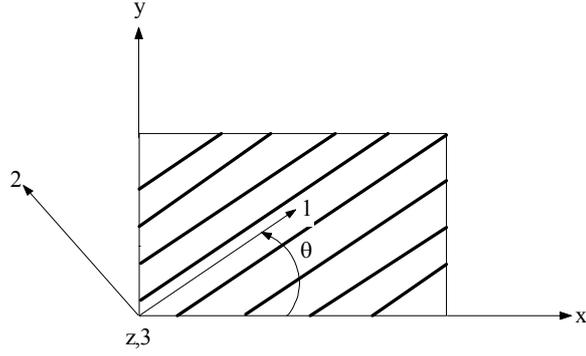


Figura 2.3: Lâmina com direções principais obliquas com relação ao sistema de coordenadas xy .

$$\{\sigma\}^1 = [D^1] [R] \left\{ \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.9)$$

onde

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 \\ sim & & & & & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

e,

$$\left\{ \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right\}^T = \left\{ \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \frac{\gamma_{23}}{2} \quad \frac{\gamma_{31}}{2} \quad \frac{\gamma_{12}}{2} \right\}. \quad (2.11)$$

Efetuada uma rotação positiva de um ângulo θ em torno de z a partir do sistema xy se obtém

$$\left\{ \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right\} = [Q] \left\{ \varepsilon^{\frac{x}{2}} \right\}. \quad (2.12)$$

O vetor $\left\{ \varepsilon^{\frac{x}{2}} \right\}$ contém as componentes simétricas do tensor de deformações no sistema xy e $[Q]$ é um operador de rotação definido por

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Substituindo (2.12) em (2.9) se obtém:

$$\begin{aligned}\{\sigma^1\} &= [D^1] [R] [Q] \{\varepsilon^{\frac{x}{2}}\} , \\ &= [D^1] [R] [Q] [R]^{-1} \{\varepsilon^x\} .\end{aligned}\quad (2.14)$$

Em (2.14) $\{\varepsilon^x\}$ é o vetor de deformações da equação constitutiva no sistema xy definido como:

$$\{\varepsilon^x\}^T = \{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy} \} \quad (2.15)$$

Efetuada a rotação sobre o vetor de tensões pode-se escrever $\{\sigma^1\}$ em função $\{\sigma^x\}$:

$$\{\sigma^1\} = [Q] \{\sigma^x\} . \quad (2.16)$$

Substituindo (2.14) em (2.16) se obtém:

$$[Q] \{\sigma^x\} = [D^1] [R] [Q] [R]^{-1} \{\varepsilon^x\} . \quad (2.17)$$

Pré multiplicando (2.17) por $[Q]^{-1}$ se tem:

$$\{\sigma^x\} = [Q]^{-1} [D^1] [R] [Q] [R]^{-1} \{\varepsilon^x\} . \quad (2.18)$$

Como $[Q]^{-T} = [R] [Q] [R]^{-1}$ pode-se condensar (2.18) na forma:

$$\{\sigma^x\} = [Q]^{-1} [D^1] [Q]^{-T} \{\varepsilon^x\} . \quad (2.19)$$

Analisando (2.19) conclui-se que a matriz de rigidez elástica do material no sistema xy é definida por:

$$[\bar{D}] = [Q]^{-1} [D^1] [Q]^{-T} , \quad (2.20)$$

e (2.19) pode ser escrita na forma compacta:

$$\{\sigma^x\} = [\bar{D}] \{\varepsilon^x\} . \quad (2.21)$$

A equação (2.21) define a relação constitutiva do material no sistema de coordenadas (x, y) . A partir de (2.19) pode-se obter (2.5) no sistema de coordenadas (x, y) como segue

$$\{\varepsilon^x\} = [Q]^T [D^1]^{-1} [Q] \{\sigma^x\} = [Q]^T [S^1] [Q] \{\sigma^x\} , \quad (2.22)$$

ou de forma compacta,

$$\{\varepsilon^x\} = [\bar{S}] \{\sigma^x\} , \quad (2.23)$$

onde

$$[\bar{S}] = [Q]^T [S^1] [Q] .$$

A matriz de rigidez elástica dada em (2.20) tem seguinte forma:

$$[\bar{D}] = \begin{bmatrix} D_{11}^x & D_{12}^x & D_{13}^x & 0 & 0 & D_{16}^x \\ & D_{22}^x & D_{23}^x & 0 & 0 & D_{26}^x \\ & & D_{33}^x & 0 & 0 & D_{36}^x \\ & & & D_{44}^x & D_{45}^x & 0 \\ & & & & D_{55}^x & 0 \\ sim. & & & & & D_{66}^x \end{bmatrix} . \quad (2.24)$$

A matriz de flexibilidade $[\bar{S}]$ tem forma similar a (2.24) e através de (2.23) conclui-se que os mecanismos de esforços axiais e cisalhantes nos planos (y, z) e (x, z) estão acoplados neste caso. As lâminas com estas características são conhecidas como ortotrópicas angulares.

Para o caso específico do modelo de primeira ordem (Mindlin) é adotada a hipótese de $\sigma_z \cong 0.0$ do estado plano de tensões na determinação da matriz constitutiva. Desta forma partindo da equação constitutiva correspondente à matriz (2.24) é da hipótese supra-citada conclui-se que,

$$\sigma_z = D_{33}^x \varepsilon_z + D_{32}^x \gamma_{xy} = 0.0 \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{D_{32}^x \gamma_{xy}}{D_{33}^x} . \quad (2.26)$$

Como as equações das tensões membranais σ_x e σ_y são as únicas acopladas à deformação transversal ε_z , substituindo (2.26) nas equações de σ_x e σ_y , obtidas do produto da matriz constitutiva (2.24) pelo vetor de deformações (2.15), se obtém

$$\sigma_x = D_{11}^x \varepsilon_x + D_{12}^x \varepsilon_y + \left(D_{16}^x - D_{13}^x \frac{D_{36}^x}{D_{33}^x} \right) \gamma_{xy} , \quad (2.27)$$

$$\sigma_y = D_{12}^x \varepsilon_x + D_{22}^x \varepsilon_y + \left(D_{26}^x - D_{23}^x \frac{D_{36}^x}{D_{33}^x} \right) \gamma_{xy} . \quad (2.28)$$

Desta forma as linhas da matriz constitutiva (2.24) correspondente às equações de τ_{yz} , τ_{xz} e τ_{xy} permanecem inalteradas. a matriz de constitutiva resultante para o modelo de primeira ordem é obtida a partir de (2.24) eliminando a terceira linha e a terceira coluna e substituindo

os termos D_{16}^x e D_{26}^x de (2.24) por $\left(D_{16}^x - D_{13}^x \frac{D_{36}^x}{D_{33}^x}\right)$ e $\left(D_{26}^x - D_{23}^x \frac{D_{36}^x}{D_{33}^x}\right)$ respectivamente. Sendo assim a mtriz constitutiva para o modelo de primeira ordem toma a forma:

$$[\overline{D}]_M = \begin{bmatrix} D_{11}^x & D_{12}^x & 0 & 0 & \left(D_{16}^x - D_{13}^x \frac{D_{36}^x}{D_{33}^x}\right) \\ & D_{22}^x & 0 & 0 & \left(D_{26}^x - D_{23}^x \frac{D_{36}^x}{D_{33}^x}\right) \\ & & D_{44}^x & D_{45}^x & 0 \\ & & & D_{55}^x & 0 \\ sim. & & & & D_{66}^x \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Desta forma fecha-se o capítulo tendo abordado os tópicos indispensáveis ao desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 3

Construção do espaço de aproximação

A proposta de trabalhar com uma metodologia sem malha para construir o espaço de aproximação fundamenta-se em dois aspectos básicos a serem considerados. O primeiro consiste em eliminar, tanto quanto possível, os inconvenientes que surgem quando o domínio das funções de interpolação estão associados à malha. Neste caso se tem uma análise de custo-benefício a ser considerada. A primeira possibilidade seria construir as funções totalmente independentes do domínio da malha, da forma usada por Duarte & Oden [9], carregando consigo o inconveniente de impor condições de contorno de forma fraca. Deste último são referenciados na literatura técnica a perda de precisão, para valores de alguns campos, nos contornos de Dirichlet e o elevado custo de processamento decorrente do emprego funções baseadas em mínimos quadrados móveis (MLS). Uma segunda alternativa utiliza a partição da unidade associada ao domínio do elemento, (Melenk & Babuska [34]) e (Duarte, Babuska & Oden [11]). Ganha-se com isto uma conectividade fixa, funções de regularidade mais baixa, custo computacional inferior no processo de integração numérica e a imposição de condições de contorno essenciais de forma mais simples.

O segundo aspecto a ser considerado consiste na possibilidade de tornar flexível o espaço de aproximação. Neste ponto cita-se os enriquecimentos locais ortotrópicos e a incorporação no espaço de aproximação de modos conhecidos do problema de valores no contorno. A metodologia que reúne as características apresentadas acima para o espaço de aproximação é conhecida como *Método de Elementos Finitos Generalizados*(MEFG). Esta técnica foi proposta independentemente por Melenk & Babuska [34] com o nome de *Partition of Unity Finite Element*

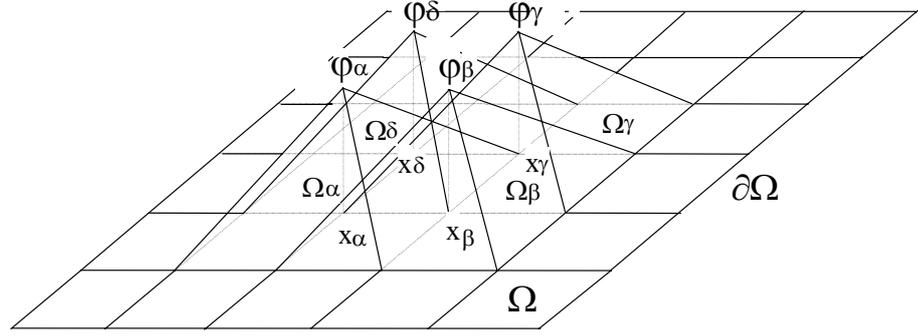


Figura 3.1: Funções PU Lagrangeanas $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi_\gamma$ e φ_δ com suportes $\Omega_\alpha, \Omega_\beta, \Omega_\gamma$ e Ω_δ e centros em $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta, \mathbf{x}_\gamma$ e \mathbf{x}_δ .

Method (PUFEM) e por Duarte & Oden [9] sobre o nome de *hp-Clouds*. A diferença principal entre o *hp-Clouds* e o PUFEM, reside em que o primeiro não precisa de uma conectividade fixa. Outras diferenças dizem respeito a detalhes matemáticos necessários para definir e caracterizar corretamente os espaços de aproximação e suas propriedades de convergência, como limite de cardinalidade da cobertura ou propriedades da partição de unidade (*Lipschitz* ou com sinal). Este capítulo tem o objetivo de resumir os fundamentos matemáticos do MEEG através dos teoremas que garantem a convergência dos espaços contruídos com esta metodologia. Inicia-se o mesmo definido a partição de unidade e a existência da mesma

3.1 Partição da unidade

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto e limitado e $\partial\Omega$ um contorno que satisfaz a condição de cone, diz-se que um conjunto de funções $\{\varphi_\alpha\}_\alpha^N$, onde $\alpha \in \mathcal{I} = \{\alpha \in \mathbb{N}^+ \mid N \leq +\infty\}$ de maneira que $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{\alpha=1}^N \Omega_\alpha$, constitui uma partição da unidade associada à cobertura aberta $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ do domínio Ω se:

- i. $\varphi_\alpha(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{I}$,
- ii. $\sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha = 1$, e $\varphi_\alpha \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$,
- iii. Todo subconjunto compacto de Ω intercepta um número finito de suportes de φ_α . A existência das funções φ_α com estas propriedades é assegurada pelo *Teorema 3.1* a seguir:

Teorema 3.1: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{\alpha=1}^N \Omega_\alpha$ para $\alpha \in \mathcal{I}$. Então existem funções $\varphi_\alpha \in C_0^\infty(\Omega_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{I}$ tal que $\sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha = 1$, e $\varphi_\alpha \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$ para $\alpha \in \mathcal{I}$. Além disto, se $N = \infty$ com Ω^* compacto e $\Omega^* \subset \Omega$ então Ω^* intercepta um número finito de suportes Ω_α . A prova deste teorema é apresentada em Oden & Reddy [39].

Dependendo do espaço ao qual elas pertencem, estas funções são classificadas em partições de unidade *com sinal*, como as apresentadas acima, e do tipo *Lipschitz* cujas propriedades são dadas a seguir.

3.1.1 Funções partição da unidade tipo *Lipschitz*

Estas funções são tais que $\varphi_\alpha \in H^1(\bar{\Omega}_\alpha)$ e satisfazem as seguintes propriedades.

- i. $\text{supp } \varphi_\alpha \in \bar{\Omega}_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{I}$,
- ii. $\sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha = 1$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$,
- iii. $\|\varphi_\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_\infty$
- iv. $\|\nabla \varphi_\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C_G}{\text{diam}(\Omega_\alpha)}$
- v. A partição é de grau m se $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset C^m(\mathbb{R}^n)$.

Em iii e iv, C_∞ e C_G são constantes independentes de φ_α .

Em função das características acima citadas, a escolha de uma partição de unidade é baseada em alguns aspectos tais como:

- i. Complexidade da geometria do domínio.
- ii. Regularidade requerida C^0 , C^1 , ou ordens maiores.
- iii. A importância do caráter sem malha da aproximação.

As partições de unidade do tipo *Lipschitz* podem apresentar-se como partições de unidade do tipo (M, C_∞, C_G) , onde C_∞ e C_G são constantes finitas que limitam os valores das funções

e de seus gradientes e o número natural M define um limite no total de subdomínios Ω_α que cobrem um ponto $\mathbf{x} \in \Omega$. Em outras palavras, dada a cobertura $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$,

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \text{card} \{ \alpha : \mathbf{x} \in \Omega_\alpha \} \leq M \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.1)$$

Um exemplo de partição de unidade com estas características é utilizada em elementos finitos clássicos. Neste caso o representante mais simples para o elemento quadrilateral, é a partição de unidade construída com funções Lagrangeanas bilineares (tendas) mostradas na Fig.3.1. Nesta situação específica o limite de cardinalidade $M = 4$, isto é se tem um número de no máximo quatro nuvens cobrindo cada ponto de integração do domínio Ω .

3.2 Espaço de aproximação no MEFG

O MEFG provém das metodologias que constroem o espaço de aproximação por enriquecimento externo das funções partição da unidade. Dentre as potencialidades e limitações merecem ser citadas:

- i. Cardinalidade limitada e fixa, ou seja, o número de nuvens que cobrem um ponto de integração é fixo e depende da malha utilizada. Isto é conseguido utilizando partições de unidade do tipo *Lipschitz* que apresentam a propriedade (3.1).
- ii. Possibilidade de impor condições de contorno essenciais de forma forte.
- iii. Refino h, p e hp em alguns aspectos mais simples do que em elementos finitos convencionais, já que não se tem o inconveniente da necessidade de compatibilizar as funções entre elementos (Novotny et alli [1]) e Devloo [59]. Um segundo aspecto relevante é a construção de espaços locais p anisotrópicos.
- iv. Possibilidade de introduzir no espaço de interpolação funções que fazem parte da solução do problema de valores no contorno.
- v. Matriz de rigidez positiva-semi definida quando são utilizadas partições de unidade polinomiais e funções de enriquecimento também polinomiais.

Os aspectos da construção de espaços de aproximação com as características citadas tem seu formalismo matemático apresentado a seguir.

Seja $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ uma cobertura do domínio Ω e seja $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ uma partição de unidade do tipo *Lipschitz*, subordinada a esta cobertura. Em cada subdomínio Ω_α o espaço Q_α reflete a aproximação local, sendo o espaço de aproximação global dado por

$$Q = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha Q_\alpha \quad (3.2)$$

A convergência pode ser atingida por refino h , p , hp ou pela construção de espaços locais ótimos obtidos pela inclusão de autofunções do PVC nos conjuntos Q_α . O espaço global Q construído desta forma herda as propriedades de aproximação dos conjuntos locais Q_α . Esta afirmação é garantida pelo *Teorema 3.2* (Melenk & Babuska [34]) que segue.

Teorema 3.2: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto e limitado. Seja $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, $\varphi_\alpha \in H^1(\bar{\Omega}_\alpha)$, a partição da unidade subordinada à cobertura $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, $\alpha \in \mathcal{I}$, de forma que $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{\alpha=1}^N \bar{\Omega}_\alpha$. Seja $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ uma função a ser aproximada de forma que em cada subdomínio $\Omega_\alpha \cap \Omega$, \mathbf{u} possa ser aproximado localmente por uma função $\mathbf{u}_\alpha \in Q_\alpha$ tal que:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\alpha\|_{L^2(\Omega_\alpha \cap \Omega)} \leq \epsilon_1(\alpha), \quad (3.3)$$

$$\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\alpha)\|_{L^2(\Omega_\alpha \cap \Omega)} \leq \epsilon_2(\alpha). \quad (3.4)$$

então a função de aproximação,

$$\mathbf{u}_{ap} = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha \mathbf{u}_\alpha \in Q \subset H^1(\Omega) \quad (3.5)$$

satisfaz a seguinte estimativa global:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{ap}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{M} C_\infty \left(\sum_{\alpha=1}^N \epsilon_1^2(\alpha) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.6)$$

$$\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{ap})\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2M} \left(\sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{C_G}{\text{diam}\Omega_\alpha} \right)^2 \epsilon_1^2(\alpha) + C_\infty^2 \epsilon_2^2(\alpha) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

O *Teorema 3.2* supra-citado fundamenta as versões h e p das estimativas a priori do erro, em norma $L^2(\Omega)$, dos espaços com as características citadas, sejam eles construídos utilizando FEM, PUFEM ou *hp-Clouds*. A idéia fundamental do MEFM consiste, como já foi dito, na

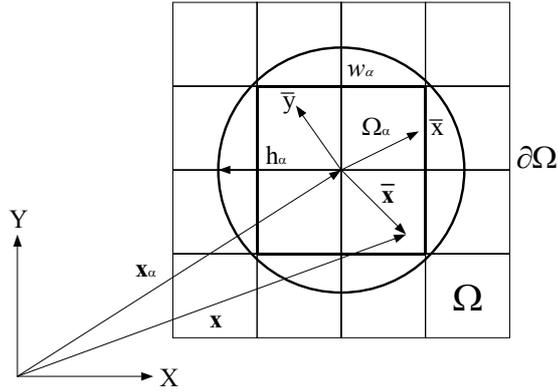


Figura 3.2: Suporte das funções de enriquecimento Ω_α e base local da nuvem.

construção do espaço de aproximação local por enriquecimento das funções partição da unidade. Desta forma as características de convergência p do espaço de aproximação são asseguradas pelas conjuntos Q_α . A seguir é mostrada a técnica de construção do espaço de aproximação global.

3.2.1 Construção das famílias \mathcal{F}_N^p .

Os espaços locais Q_α são em geral construídos usando funções polinomiais devido às conhecidas boas qualidades de aproximabilidade destas funções. Por exemplo, no caso de elementos do tipo quadrilateral pode ser utilizado o produto tensorial de polinômios definidos em \mathbb{R}^1 , que aqui constituem os conjuntos de polinômios \bar{Q}_α^p , definidos na expressão (3.9), ou ainda por conjuntos completos de polinômios (triângulo de Pascal) correspondente ao conjunto \hat{Q}_α^p , definidos na expressão (3.11). O espaço de aproximação global é definido em função dos espaços locais supracitados como $Q = span \{\mathcal{F}_N^p\}$. O conjunto \mathcal{F}_N^p é definido como

$$\mathcal{F}_N^p = \{ \{ \varphi_\alpha \bar{Q}_\alpha^p \} : 1 \leq \alpha \leq N \} \quad (3.8)$$

onde,

$$\bar{Q}_\alpha^p = \{ L_{ij}(\bar{\mathbf{x}}) : 0 \leq i, j \leq p, i, j \geq 0, p \geq 0 \} \quad (3.9)$$

se o enriquecimento for obtido por produto tensorial de polinômios. Neste caso a dimensão dos conjuntos \bar{Q}_α^p é $N_{prod} = (p + 1)^2$.

Se o enriquecimento for por conjunto completo de polinômios (Triângulo de Pascal) se tem

que,

$$\mathcal{F}_N^p = \left\{ \left\{ \varphi_\alpha \hat{Q}_\alpha^p \right\} \mid 1 \leq \alpha \leq N \right\} \quad (3.10)$$

onde,

$$\hat{Q}_\alpha^p = \{L_{ij}(\bar{\mathbf{x}}) \mid 0 \leq i, j \leq p, 0 \leq i + j \leq p\}. \quad (3.11)$$

A dimensão dos conjuntos \hat{Q}_α^p é $N_{prod} = \binom{p+2}{n}$, em espaços construídos no \mathbb{R}^2 , $n = 2$.

Os espaços obtidos desta forma têm a propriedade de $P \subset Q$ onde P é o conjunto dos polinômios de grau $g \leq p$ (teorema 3.4).

Com o objetivo de trabalhar com funções de enriquecimento definidas no domínio normalizado, as funções $L_{ij}(\bar{\mathbf{x}})$ e seu gradiente $\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} L_{ij}(\bar{\mathbf{x}})$ são definidos pelas expressões:

$$L_{ij}(\bar{\mathbf{x}}) = \hat{L}_{ij}(\boldsymbol{\xi}), \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} L_{ij}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{h_\alpha} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{L}_{ij}(\boldsymbol{\xi}). \quad (3.12)$$

Em (3.12) $\hat{L}_{ij}(\boldsymbol{\xi})$ e $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{L}_{ij}(\boldsymbol{\xi})$ são calculadas para o conjunto de pontos pertencentes a $\hat{w}_\alpha = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^2} \leq 1\}$, que correspondem à normalização dos pontos $\bar{\mathbf{x}}$ em relação a um círculo de raio h_α , tal que (Fig.3.2):

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\bar{\mathbf{x}}}{h_\alpha}, \bar{\mathbf{x}} = h_\alpha \boldsymbol{\xi}.$$

O vetor posição $\bar{\mathbf{x}}$ é obtido por uma translação e uma rotação de forma que $\bar{\mathbf{x}} = [Q]_\alpha^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha)$ onde \mathbf{x} é o vetor posição, de um ponto sobre a nuvem Ω_α , em coordenadas globais e $[Q]_\alpha$ e \mathbf{x}_α são a matriz de rotação e o vetor posição do centro da nuvem α em coordenadas globais, respectivamente.

A família \mathcal{F}_N^p , cuja construção foi descrita anteriormente, é fundamentada nos seguintes teoremas:

Teorema 3.3: Seja o conjunto $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, constituído por funções linearmente independentes formando uma Partição de Unidade em Ω . Se os conjunto de funções de enriquecimento definidos pelas expressões (3.9) e (3.11) são linearmente independentes de $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, então os conjuntos \mathcal{F}_N^p definidos em (3.8) e (3.10) são também linearmente independentes.

Teorema 3.4: $L_{rs} \in Q$, para $0 \leq r, s \leq p$.

As provas dos Teoremas (3.3) e (3.4) são encontradas em Duarte & Oden [9].

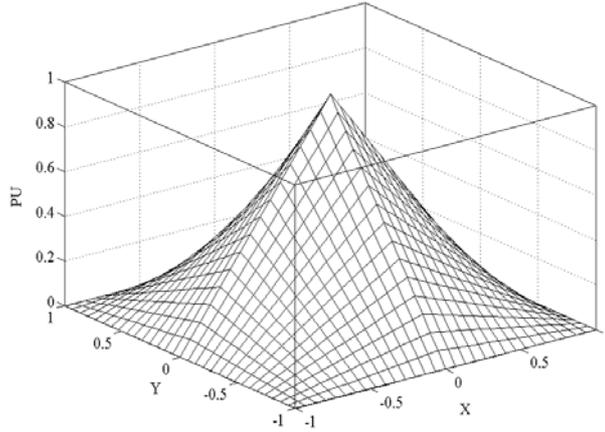


Figura 3.3: Função da partição de unidade bilinear PU associada à nuvem central do domínio $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

A forma das funções construídas pela técnica supracitada é mostrada nas Figuras.3.3, 3.4 e 3.5. As funções mostradas neste exemplo representam a partição de unidade bilinear e seus enriquecimentos para o nó de coordenadas $(0, 0)$ pertencente ao domínio $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Um dos inconvenientes desta metodologia quando são utilizadas funções partições de unidades polinomiais (que é o caso das funções lineares e bilineares utilizadas em FEM convencional), e funções de enriquecimento local também polinomiais, é o surgimento de uma matriz de rigidez positiva semi-definida. Isto se deve a que o conjunto de funções \mathcal{F}_N^p gerado nestas condições é linearmente dependente. Técnicas possíveis para tratar este problema são mostradas no trabalho de Duarte, Babuska & Oden [11] e serão comentadas em detalhes no apêndice anexo a este trabalho.

O MEF_G permite realizar, com baixo custo computacional, enriquecimentos anisotrópicos. Esta propriedade o torna adequado na simulação de problemas de camada limite (*Boundary-Layer*), onde o gradiente da solução apresenta valores elevados em direções específicas. Esta técnica, apresentada a seguir, permite melhorar o processo p adaptativo resultando numa simulação melhor de soluções que variam bruscamente em determinadas direções e variando muito pouco nas outras.

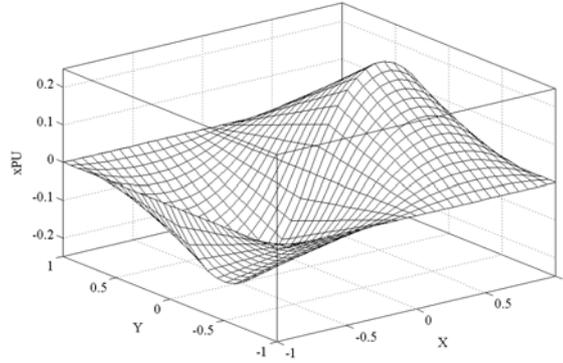


Figura 3.4: Enriquecimento ortotrópico em x obtido por xPU para a nuvem com coordenadas $(0,0)$.

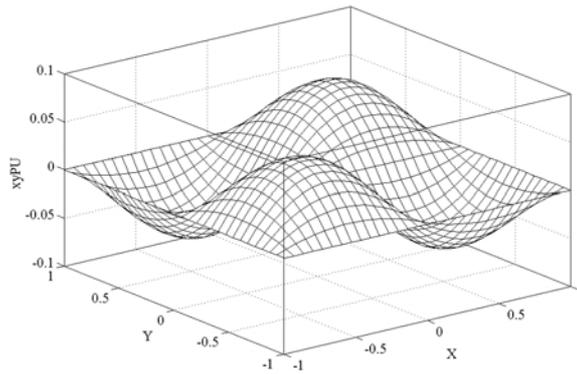


Figura 3.5: Enriquecimento isotrópico obtido por $xyPU$ para a nuvem de coordenadas $(0,0)$.

Um dos aspectos fundamentais na utilização das metodologias sem malha é a forma de impor condições de contorno essenciais. A seguir é estudado o problema de completude do espaço e as técnicas utilizadas para contorná-lo.

Capítulo 4

Modelos de ordem superior para cascas

Na abordagem de problemas de placas e cascas de materiais compostos laminados, os objetivos das pesquisas focalizam-se na construção de modelos capazes de garantir uma distribuição quadrática para as tensões cisalhantes transversais, continuidade das tensões cisalhantes entre lâminas, capturar fenômenos de acoplamento membrana flexão e respeitar condições de contorno de Poisson.

Na procura desta solução são propostos os modelos cinemáticos de ordem superior, que se caracterizam por representar os campos de deslocamentos por funções polinomiais da variável z da espessura do elemento estrutural.

Dentre os modelos com estas características podem ser citadas as teorias que trabalham com a solução exata da elasticidade tridimensional e as que obtêm a solução aproximada utilizando elementos finitos convencionais.

Dentro da primeira abordagem se encontram as teorias de Pagano [51]; Lo, Christensen & Wu [44], Reddy [32] e mais recentemente Shu Xiao-ping [69]. Nos trabalhos anteriores, os autores valem-se das equações de equilíbrio da elasticidade tridimensional e de um espaço de funções de interpolação que satisfaz as condições de contorno para determinar os campos analisados. Estas abordagens mostraram bons resultados para problemas de placas onde a simplicidade da geometria e do carregamento permitem a utilização de métodos analíticos como Levi e Navier para o caso.

No segundo enfoque são utilizados elementos finitos para construir o espaço de interpolação. Dentre estes trabalhos podem ser citados os de Phan & Reddy [53], Tesller & Saether [3], Kant

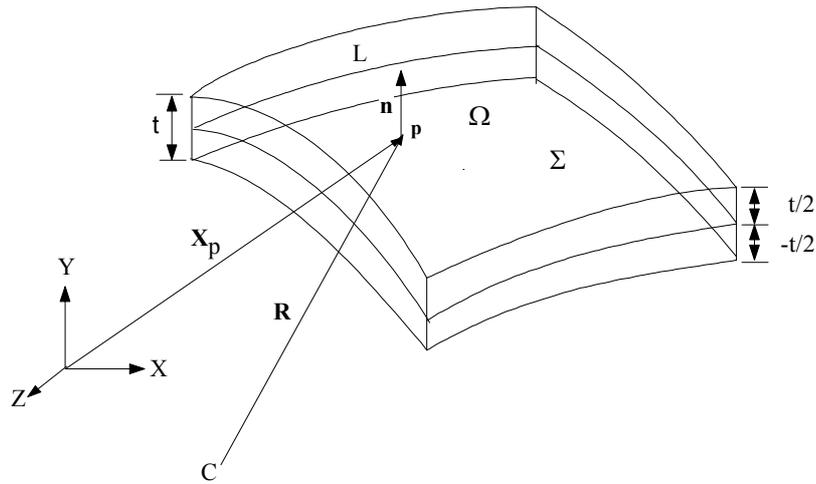


Figura 4.1: Σ é a superfície de referência, Ω o domínio, \mathbf{R} o raio de curvatura e C o centro de curvatura e um ponto genérico P .

& Komineni [74], Pandya & Kant [4] e mais recentemente os trabalhos de Menezes & Devloo [23] e Menezes & Devloo [24].

Neste trabalho as características supracitadas atribuídas ao modelo cinemático são atingidas adaptando as teorias de primeira ordem (Mindlin) e terceira ordem com normal extensível (Pandya & Kant [4]) ao elemento sólido degenerado (Ahmad et alli [70]). Dando prosseguimento ao presente desenvolvimento, a seguir são comentadas, características gerais das estruturas de cascas envolvendo aspectos básicos de geometria diferencial de superfícies. Será feita uma breve introdução da discretização do domínio utilizando o elemento finito sólido degenerado para cascas.

4.1 Cascas

4.1.1 Aspectos gerais

Uma casca é um sólido de volume Ω gerado pela superfície média Σ e sua normal \mathbf{n} estendendo-se por um comprimento $h = \frac{t}{2}$ medido a partir da superfície média Σ , como mostrado na (Fig.4.1).

Estes modelos descrevem de forma satisfatória os campos de deslocamentos e esforços internos quando a espessura t é pequena comparada com as dimensões da superfície Σ . Se L e R

representam o comprimento de referência e o raio de curvatura da casca, as seguintes relações devem ser satisfeitas.

$$\frac{t}{R} \ll 1 \text{ e } \frac{t}{L} \ll 1, \quad (4.1)$$

Valores típicos para cascas semi-espessas giram em torno de:

$$\frac{t}{R} \leq \frac{1}{16} \text{ e } \frac{t}{L} \leq \frac{1}{4}. \quad (4.2)$$

4.1.2 Elementos básicos da geometria diferencial de cascas

A geometria de uma casca é caracterizada pela superfície média Σ , também denominada de superfície de referência, (Batoz & Dhatt [37]), que pode ser descrita por suas coordenadas curvilíneas (ξ, η) e $\zeta = 0$. A posição de um ponto p sobre Σ é definida pelo vetor posição \mathbf{x}_p (Fig.4.2) dado por:

$$\mathbf{x}_p(\xi, \eta) = X(\xi, \eta)\mathbf{i} + Y(\xi, \eta)\mathbf{j} + Z(\xi, \eta)\mathbf{k}, \quad (4.3)$$

onde as componentes cartesianas nas direções dos vetores \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} de (4.3) que correspondem aos versores da base cartesiana global X , Y e Z são

$$\mathbf{x}_p = (X(\xi, \eta) \ Y(\xi, \eta) \ Z(\xi, \eta)). \quad (4.4)$$

Bases locais covariante e ortonormal

As coordenadas curvilíneas não são ortogonais a não ser que estejam associadas às direções principais. Portanto, será visto a seguir como definir uma base ortonormal associada as mesmas.

O ponto de partida deste desenvolvimento é a diferencial do vetor posição \mathbf{x}_p , dado por:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_p &= (X_{,\xi}d\xi + X_{,\eta}d\eta)\mathbf{i} + (Y_{,\xi}d\xi + Y_{,\eta}d\eta)\mathbf{j} + (Z_{,\xi}d\xi + Z_{,\eta}d\eta)\mathbf{k}, \\ &= (X_{,\xi}\mathbf{i} + Y_{,\xi}\mathbf{j} + Z_{,\xi}\mathbf{k})d\xi + (X_{,\eta}\mathbf{i} + Y_{,\eta}\mathbf{j} + Z_{,\eta}\mathbf{k})d\eta, \\ &= (\mathbf{x}_{p,\xi})d\xi + (\mathbf{x}_{p,\eta})d\eta = \mathbf{a}_1d\xi + \mathbf{a}_2d\eta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A partir dos vetores covariantes \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 obtém-se o vetor normal \mathbf{v}_3 definido por:

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \quad (4.6)$$

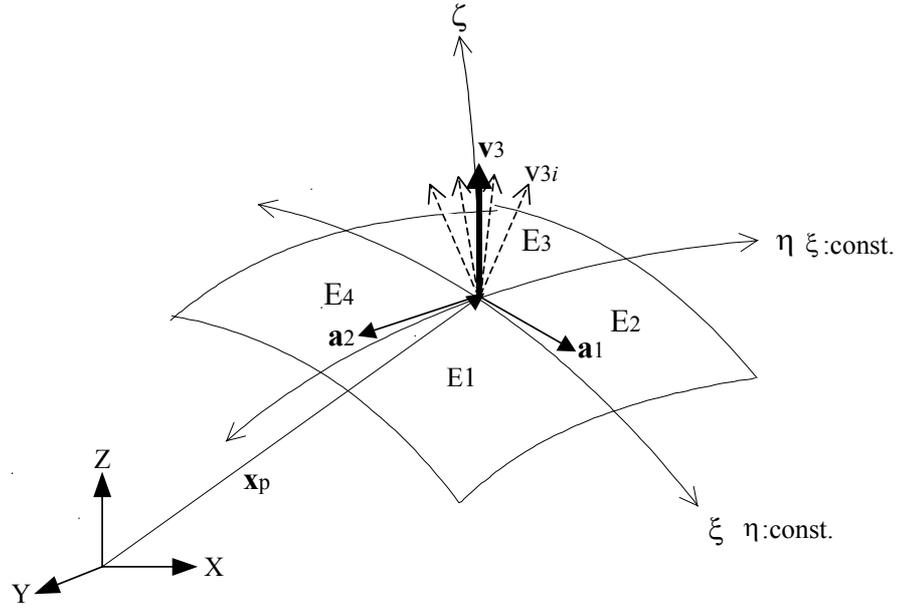


Figura 4.2: Descrição de um ponto na superfície Σ de referência.

Os vetores \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 e \mathbf{v}_3 constituem a chamada base covariante ou natural no ponto p (Fig 4.2). Os vetores \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 não são necessariamente ortonormais a não ser que sejam tangentes às direções principais. Para o caso de se ter uma parametrização discreta da superfície (como em elementos finitos) o vetor \mathbf{v}_3 , para pontos sobre as fronteiras dos sub-domínios parametrizados, como na situação do ponto p da figura Fig.4.2, é obtido pela média das direções normais definidas nestes pontos. Neste caso é denominado *pseudo-normal* à superfície de referência. A base covariante é definida pelo tensor

$$[\mathbf{F}_o] = \left[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{v}_3 \right] = \left[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \right]. \quad (4.7)$$

Para definir uma base ortonormal associada ao ponto p pode-se partir da base covariante para definir os vetores unitários \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 e \mathbf{n} por:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|}, \quad \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{t}_1}{\|\mathbf{n} \times \mathbf{t}_1\|}. \quad (4.9)$$

Em (4.8) observa-se que o vetor $\mathbf{v}_3 \equiv \mathbf{n}$ para o caso de se ter uma parametrização contínua da superfície.

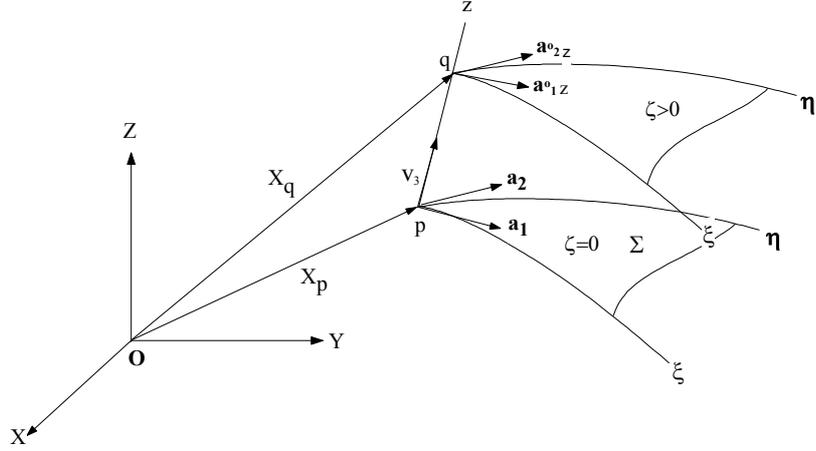


Figura 4.3: Descrição geométrica de um ponto q localizado a uma cota $z > 0$.

Estes vetores, com o vetor \mathbf{n} , formam uma base ortonormal cujas componentes definem o tensor:

$$[\mathbf{Q}] = \left[\mathbf{t}_1 \quad \vdots \quad \mathbf{t}_2 \quad \vdots \quad \mathbf{n} \right]. \quad (4.10)$$

Descrição de um ponto

Seja q um ponto material da casca localizado a uma cota z da superfície de referência medida na direção *pseudo-normal* \mathbf{v}_3 conforme a (Fig.4.3). Para o caso de espessura constante o vetor posição é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_q(\xi, \eta, z) &= \mathbf{x}_p(\xi, \eta) + z\mathbf{v}_3(\xi, \eta), \\ &= \mathbf{x}_p(\xi, \eta) + \frac{t}{2}\zeta\mathbf{v}_3(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Onde t é a espessura, o parâmetro ζ é limitado por $-1 \leq \zeta \leq 1$ e \mathbf{v}_3 é o vetor *pseudo-normal*.

O diferencial $d\mathbf{x}_q$ é dado por

$$d\mathbf{x}_q = \left(\mathbf{x}_{p,\xi} + \frac{t}{2}\zeta\mathbf{v}_{3,\xi} \right) d\xi + \left(\mathbf{x}_{p,\eta} + \frac{t}{2}\zeta\mathbf{v}_{3,\eta} \right) d\eta + \mathbf{v}_3 \frac{t}{2} d\zeta. \quad (4.12)$$

Este pode ser colocado em função do tensor da base covariante associada ao ponto q e do vetor de componentes diferenciais curvilíneas como

$$d\mathbf{x}_q = [\mathbf{F}_z^o] \{d\xi\}, \quad (4.13)$$

onde

$$[\mathbf{F}_z^o] = \left[\mathbf{a}_{1z}^o \quad \vdots \quad \mathbf{a}_{2z}^o \quad \vdots \quad \mathbf{a}_{3z}^o \right], \quad (4.14)$$

$$\{\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}\}^T = \{ d\xi \quad d\eta \quad d\zeta \}. \quad (4.15)$$

Os vetores da base covariante $[\mathbf{F}_z^o]$ associada ao ponto q são:

$$\mathbf{a}_{1z}^o = \mathbf{X}_{p,\xi} + \frac{t}{2}\zeta \mathbf{v}_{3,\xi}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{a}_{2z}^o = \mathbf{X}_{p,\eta} + \frac{t}{2}\zeta \mathbf{v}_{3,\eta}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{a}_{3z}^o = \mathbf{v}_3 \frac{t}{2}. \quad (4.18)$$

Isto permite decompor $[\mathbf{F}_z^o]$ como segue:

$$[\mathbf{F}_z^o] = [\mathbf{F}_o] + \frac{t}{2}\zeta [\mathbf{F}_3], \quad (4.19)$$

onde

$$[\mathbf{F}_o] = \left[\mathbf{a}_1 \quad \vdots \quad \mathbf{a}_2 \quad \vdots \quad \mathbf{v}_3 \frac{t}{2} \right], \quad [\mathbf{F}_3] = \left[\mathbf{v}_{3,\xi} \quad \vdots \quad \mathbf{v}_{3,\eta} \quad \vdots \quad 0 \right]. \quad (4.20)$$

Diferencial de área $d\mathbf{A}$ e de volume $d\mathbf{V}$ O elemento de área orientado num ponto q de uma superfície definida por ζ constante é um vetor com direção normal ao plano tangente à superfície neste ponto.

Os diferenciais de área e superfície são dados por:

$$d\mathbf{A}_z = \mathbf{a}_{1z} d\xi \times \mathbf{a}_{2z} d\eta \quad (4.21)$$

$$|d\mathbf{A}_z| = |\mathbf{a}_{1z} \times \mathbf{a}_{2z}| d\xi d\eta \quad (4.22)$$

O elemento de área $d\mathbf{A}_z$ é indicado na Fig.4.4.

O elemento de volume $d\mathbf{V}_z$ em q é dado pelo volume do paralelepípedo formado pelo elemento de área orientado $d\mathbf{A}_z$ e pela altura medida na direção normal. O diferencial de volume $d\mathbf{V}_z$ é, então, dado por

$$d\mathbf{V}_z = d\mathbf{A}_z \cdot \mathbf{v}_3 \frac{t}{2} d\zeta = dA_z \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_3 \frac{t}{2} d\zeta = \det [\mathbf{F}_z^o] \frac{t}{2} d\xi d\eta d\zeta. \quad (4.23)$$

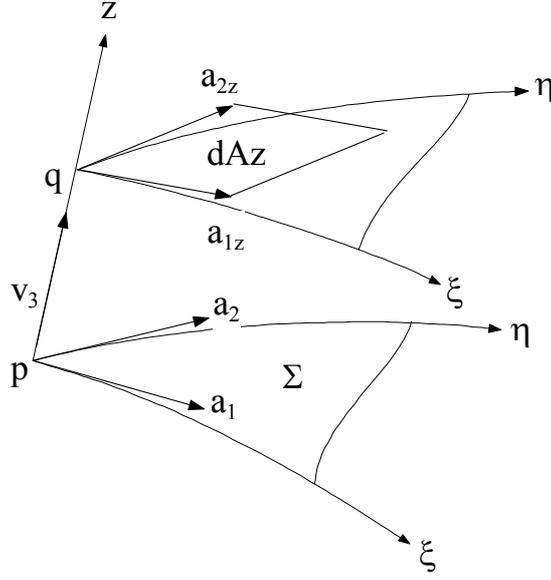


Figura 4.4: Elemento diferencial de área.

Considerações geométricas referentes à espessura $t(\xi, \eta)$ variável Para uma casca com espessura $t(\xi, \eta)$ variável, a posição de um ponto q localizado a uma distância z do plano de referência é definida por (4.11), levando em consideração a variação da espessura com as coordenadas curvilíneas ξ e η como segue:

$$\mathbf{x}_q(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{x}_p(\xi, \eta) + \frac{t(\xi, \eta)}{2} \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta). \quad (4.24)$$

O diferencial $d\mathbf{X}_q$ escrito em função de $d\xi$, $d\eta$ e $d\zeta$ é:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_q = & d\mathbf{x}_p + \frac{1}{2} \left(t(\xi, \eta)_{,\xi} \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta) + t(\xi, \eta) \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta)_{,\xi} \right) d\xi \\ & + \frac{1}{2} \left(t(\xi, \eta)_{,\eta} \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta) + t(\xi, \eta) \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta)_{,\eta} \right) d\eta + \frac{t(\xi, \eta)}{2} \mathbf{v}_3(\xi, \eta) d\zeta. \end{aligned} \quad (4.25)$$

A partir das expressões (4.5), (4.18), (4.19) e (4.20) se obtém:

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}_q = & \left[\left(\mathbf{a}_1 + \frac{1}{2} t(\xi, \eta) \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta)_{,\xi} \right) + \frac{1}{2} t(\xi, \eta)_{,\xi} \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta) \right] d\xi \\ & + \left[\left(\mathbf{a}_2 + t(\xi, \eta) \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta)_{,\eta} \right) + \frac{1}{2} t(\xi, \eta)_{,\eta} \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta) \right] d\eta \\ & + \frac{t(\xi, \eta)}{2} \mathbf{v}_3(\xi, \eta) d\zeta. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Pode-se observar que os termos entre parênteses e o termo em $d\zeta$ correspondem às componentes do tensor covariante no ponto q para a espessura t constante (4.14). Portanto (4.26) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{dx}_q &= \left[\mathbf{a}_{1z}^0 + \frac{1}{2}t(\xi, \eta)_{,\xi} \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta) \right] d\xi \\ &+ \left[\mathbf{a}_{1z}^0 + \frac{1}{2}t(\xi, \eta)_{,\eta} \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta) \right] d\eta + \frac{t(\xi, \eta)}{2} \mathbf{v}_3(\xi, \eta) d\zeta \\ &= \mathbf{a}_{1z} d\xi + \mathbf{a}_{2z} d\eta + \mathbf{a}_{3z} d\zeta, \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde os vetores \mathbf{a}_{1z} , \mathbf{a}_{2z} e \mathbf{a}_{3z} são os vetores da base covariante no ponto

$$\mathbf{a}_{1z} = \mathbf{a}_{1z}^0 + \frac{1}{2}t(\xi, \eta)_{,\xi} \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta), \quad (4.28)$$

$$\mathbf{a}_{2z} = \mathbf{a}_{2z}^0 + \frac{1}{2}t(\xi, \eta)_{,\eta} \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta), \quad (4.29)$$

$$\mathbf{a}_{3z} = \frac{t(\xi, \eta)}{2} \mathbf{v}_3(\xi, \eta), \quad (4.30)$$

$$\mathbf{dx}_q = [\mathbf{F}_z] \{d\xi\}. \quad (4.31)$$

Definindo o tensor da base covariante em q como:

$$[\mathbf{F}_z] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1z} & \mathbf{a}_{2z} & \mathbf{a}_{3z} \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

de maneira que o tensor $[\mathbf{F}_z]$ pode ser decomposto da seguinte forma

$$[\mathbf{F}_z] = [\mathbf{F}_z^o] + \zeta [\mathbf{F}_1], \quad (4.33)$$

onde,

$$[\mathbf{F}_1] = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}t(\xi, \eta)_{,\xi} \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta), \quad (4.35)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}t(\xi, \eta)_{,\eta} \zeta \mathbf{v}_3(\xi, \eta). \quad (4.36)$$

Nesta decomposição ficam em evidência os tensores $[\mathbf{F}_z]$ e $[\mathbf{F}_1]$, e a influência da variação da espessura com a coordenada curvilínea ζ . A partir desta definição, determinam-se os parâmetros geométricos associados ao ponto (diferencial de área, diferencial de volume) de forma similar ao problema de espessura constante. A determinação das bases ortonormais associadas aos tensores $[\mathbf{F}_z^o]$ e $[\mathbf{F}_z]$, são feitas de forma similar a do tensor dado em (4.12)

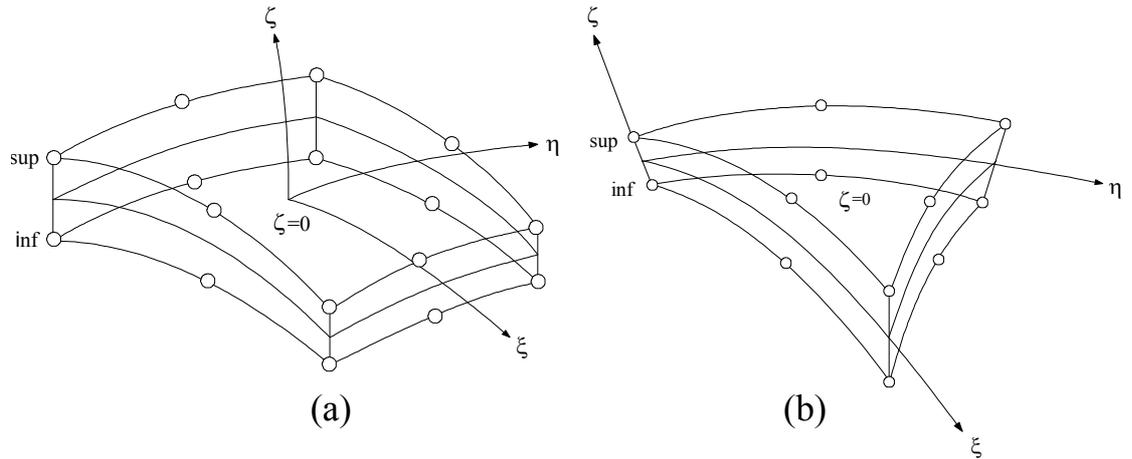


Figura 4.5: a) Elemento sólido de *Ahmad* de 16 nós, b) elemento sólido de *Ahmad* de 12 nós.

4.2 Elemento finito sólido degenerado

O elemento sólido degenerado foi introduzido na literatura por S. Ahmad, B. M. Irons & O.C. Zienkiewicz [70]. Este elemento, que é largamente utilizado na modelagem de problemas lineares e não lineares de cascas, tornou-se popular devido à simplicidade de sua implementação. Esta técnica dispensa o uso de diversos dos conceitos de geometria diferencial de superfícies na modelagem de problemas de cascas.

A formulação de elemento sólido degenerado tem como objetivo contornar algumas dificuldades que surgem na modelagem de cascas com elementos sólidos convencionais como:

- i. Número excessivo de graus de liberdade do problema já que a modelagem com elemento sólido envolve no mínimo três graus de liberdade por nó, e discretização na espessura.
- ii. Matriz de rigidez mal condicionada quando a espessura é muito fina comparada com as outras dimensões. Nesta situação, para evitar o número exagerado de elementos, as malhas usualmente necessitam usar suportes onde as dimensões da espessura são muito menores que as outras duas, produzindo matrizes de rigidez mal condicionadas devido à influência do Jacobiano.

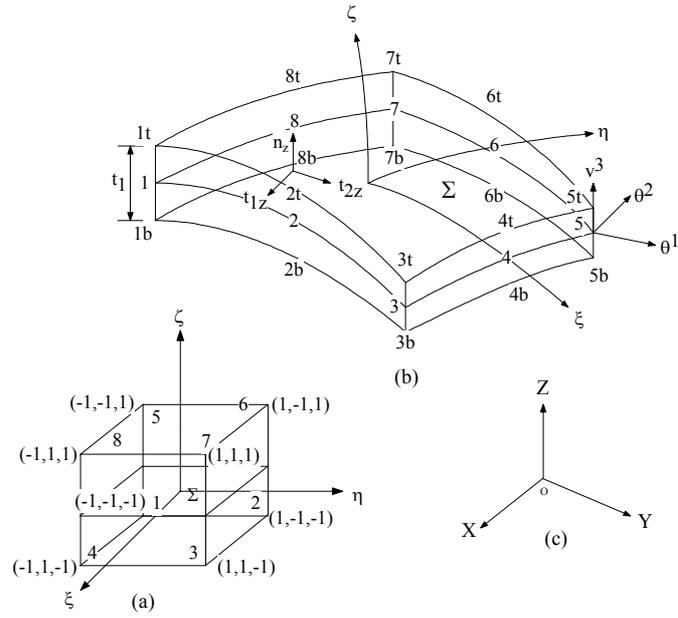


Figura 4.6: a) Cubo intrínseco; b) elemento sólido degenerado de 16 nós; c) sistema global de coordenadas (X, Y, Z) .

Tipo de elemento utilizado

Em princípio os elementos degenerados de casca que são utilizados correspondem aos elementos sólidos de Ahmad de 16 nós ilustrados na Fig.4.5(a).e 12 nós Fig.4.5(b). Estes elementos se caracterizam por utilizar funções lineares para interpolar pontos sobre a curva ζ e funções quadráticas nas variáveis (ξ, η) para interpolar pontos sobre as superfícies $\zeta = cte$.

Na proposta deste trabalho não serão utilizados elementos isoparamétricos, isto é, as funções que mapeiam o domínio não são em geral as mesmas que interpolam os campos primais e duais. A seguir é feita referência a um conjunto de quatro sistemas de coordenadas (Fig.4.6) cujo significado e utilização ficarão claros no decorrer do texto.

- i. Sistema global de coordenadas (X, Y, Z) associado à base cartesiana $[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$.
- ii. Sistema de coordenadas associadas à base ortonormal local $[\mathbf{t}_{1z}, \mathbf{t}_{2z}, \mathbf{n}_z]$, tangente e normal à superfície $\zeta = cte$.
- iii. Sistema ortonormal de coordenadas associadas ao nó k do elemento, dada pelos vetores

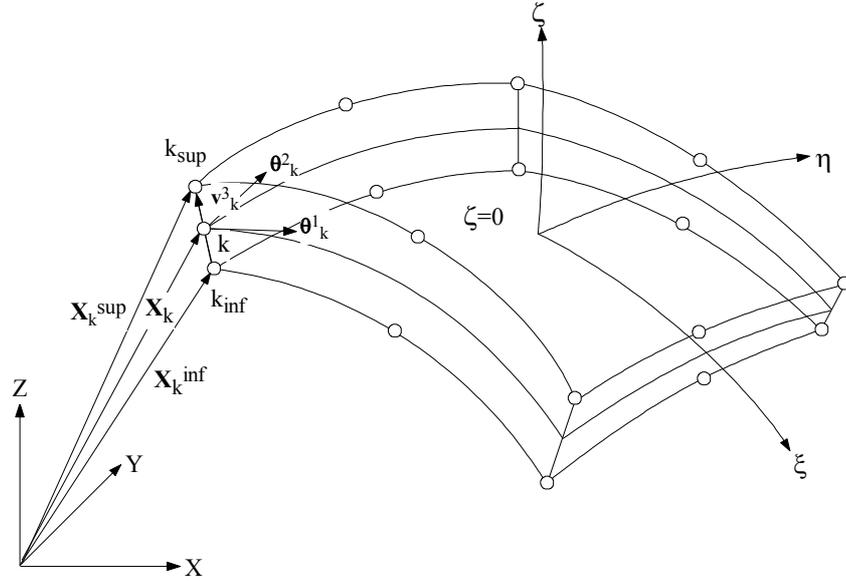


Figura 4.7: Base *pseudo-normal* $[\theta_k^1, \theta_k^2, \mathbf{v}_k^3]$, associada ao nó k .

$[\theta_k^1, \theta_k^2, \mathbf{v}_k^3]$, definidas a partir do conceito de pseudo-espessura t_k em cada nó k do elemento.

- iv. Base covariante associada às coordenadas paramétricas (ξ, η, ζ) do elemento finito padrão utilizado para mapear a geometria. Os vetores são $[\mathbf{a}_{1z}, \mathbf{a}_{2z}, \mathbf{v}_3]$

Definição geométrica do elemento

Para obter a função de mapeamento da geometria do elemento, parte-se definindo um sistema de coordenadas locais associadas aos nós extremos de cada elemento (Fig.4.7). Este sistema de coordenadas é chamado de *pseudo-normal* com relação ao plano de referência do elemento, já que o vetor relativo a espessura é obtido em função dos vetores de posição $\mathbf{x}_k^{\text{sup}}$ e $\mathbf{x}_k^{\text{inf}}$, referentes aos nós k_{sup} e k_{inf} do elemento. Portanto o vetor *pseudo-normal* associado ao nó k é obtido como segue:

$$\mathbf{V}_{3k} = \mathbf{x}_k^{\text{sup}} - \mathbf{x}_k^{\text{inf}}, \mathbf{v}_{3k} = \frac{\mathbf{V}_{3k}}{\|\mathbf{V}_{3k}\|}. \quad (4.37)$$

Define-se o nó k na posição intermediária por $\mathbf{X}_k = \frac{\mathbf{x}_k^{\text{sup}} + \mathbf{x}_k^{\text{inf}}}{2}$.

O vetor \mathbf{V}_{3k} pode ser também escrito em função da espessura t_k associada ao nó k e o seu

vetor normalizado \mathbf{v}_{3k} :

$$\mathbf{V}_{3k} = \mathbf{v}_{3k} t_k. \quad (4.38)$$

Uma das formas de obter os outros vetores componentes da base é através do produto vetorial com os versores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ do sistema global de coordenadas. Supondo que \mathbf{j} seja um vetor não paralelo a \mathbf{v}_{3k} , definem-se os vetores $\boldsymbol{\theta}_k^1$ e $\boldsymbol{\theta}_k^2$ como:

$$\boldsymbol{\theta}_k^1 = \mathbf{j} \times \mathbf{v}_{3k}, \quad \boldsymbol{\theta}_k^2 = \mathbf{v}_{3k} \times \boldsymbol{\theta}_k^1. \quad (4.39)$$

Conhecido o vetor *pseudo-normal* à superfície de referência em cada nó k e as coordenadas deste nó no sistema global, obtém-se as coordenadas de um ponto $\hat{\mathbf{x}}_k$ numa posição genérica entre os nós *inf* e *sup*, através de uma interpolação linear da variável curvilínea ζ como segue:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathcal{N}_{\text{sup}} \mathbf{x}_k^{\text{sup}} + \mathcal{N}_{\text{inf}} \mathbf{x}_k^{\text{inf}}, \\ &= \frac{1}{2} (1 + \zeta) \mathbf{x}_k^{\text{sup}} + \frac{1}{2} (1 - \zeta) \mathbf{x}_k^{\text{inf}}, \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k^{\text{sup}} + \mathbf{x}_k^{\text{inf}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k^{\text{sup}} - \mathbf{x}_k^{\text{inf}}) \zeta, \\ &= \mathbf{x}_k^{\text{ref}} + \frac{1}{2} \mathbf{V}_{3k} \zeta, \\ &= \mathbf{x}_k^{\text{ref}} + \frac{t_i}{2} \mathbf{v}_{3k} \zeta. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Em (4.40), \mathcal{N}_{sup} e \mathcal{N}_{inf} são as funções de interpolação Lagrangeanas lineares associadas aos pontos *inf* e *sup*.

Os pontos $\hat{\mathbf{x}}_k$ obtidos com $\zeta = 0$ estão sobre a superfície de referência, motivo pelo qual, neste caso, $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k^{\text{ref}}$.

Considerando uma superfície definida por $\zeta = \text{cte}$ é possível determinar, através dos vetores $\hat{\mathbf{x}}_k$ e das funções de interpolação $\mathcal{N}_k(\xi, \eta)$ associadas aos nós do elemento na superfície de referência, o vetor posição \mathbf{x} de um ponto qualquer nesta superfície $\zeta = \text{cte}$ mediante a expressão:

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \hat{\mathbf{x}}_k(\zeta), \quad (4.41)$$

onde n corresponde ao número de nós da superfície de referência do elemento. Substituindo (4.41) em (4.42) se obtém

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \left\{ \begin{array}{l} X(\xi, \eta, \zeta) \\ Y(\xi, \eta, \zeta) \\ Z(\xi, \eta, \zeta) \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \left\{ \begin{array}{l} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{array} \right\}_{\text{ref}} + \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \frac{t_k}{2} \mathbf{v}_{3k} \zeta. \quad (4.42)$$

Observa-se que esta expressão pode ser colocada em termos dos vetores $\mathbf{x}_k^{\text{sup}}$ e $\mathbf{x}_k^{\text{inf}}$ e das funções \mathcal{N}_{sup} e \mathcal{N}_{inf} obtendo-se:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \left(\frac{1+\zeta}{2} \right) \begin{Bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{Bmatrix}_{\text{sup}} + \sum_{k=1}^N \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \left(\frac{1-\zeta}{2} \right) \begin{Bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{Bmatrix}_{\text{inf}}. \quad (4.43)$$

Um dos aspectos relevantes nesta análise é o cuidado que deve ser tomado quando se tem um problema genérico de espessura variável. Nesta situação o sistema ortonormal associado a cada ponto no interior do elemento varia com a coordenada curvilínea ζ .

Bases covariantes & ortonormais para $t(\xi, \eta)$ variável

A posição de um ponto genérico no interior do elemento é dada por:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \mathbf{x}_k^{\text{ref}} + \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \frac{t_k}{2} \mathbf{v}_{3k} \zeta \quad (4.44)$$

A diferencial de $d\mathbf{x}$ é dado por

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{x}_{,\xi} d\xi + \mathbf{x}_{,\eta} d\eta + \mathbf{x}_{,\zeta} d\zeta \\ &= \left[\sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta)_{,\xi} \mathbf{x}_k^{\text{ref}} + \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta)_{,\xi} \frac{t_k}{2} \mathbf{v}_{3k} \zeta \right] d\xi \\ &= + \left[\sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta)_{,\eta} \mathbf{x}_k^{\text{ref}} + \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta)_{,\eta} \frac{t_k}{2} \mathbf{v}_{3k} \zeta \right] d\eta \\ &= + \left[\sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \frac{t_k}{2} \mathbf{v}_{3k} \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (4.45)$$

A partir deste ponto pode-se determinar as componentes do tensor $[\mathbf{F}_o]$, que corresponde as componentes da base covariante na superfície de referência, como:

$$\mathbf{a}_1 = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta)_{,\xi} \mathbf{x}_k^{\text{ref}}, \quad (4.46)$$

$$\mathbf{a}_2 = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta)_{,\eta} \mathbf{x}_k^{\text{ref}}, \quad (4.47)$$

$$\mathbf{a}_3 = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta) \frac{t_k}{2} \mathbf{v}_{3k}. \quad (4.48)$$

As componentes do tensor covariante $[\mathbf{F}_z]$ correspondente a uma superfície $\zeta = cte$ são

$$\mathbf{a}_{1z} = \mathbf{a}_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta)_{,\xi} t_k \mathbf{v}_{3k} \zeta \quad (4.49)$$

$$\mathbf{a}_{2z} = \mathbf{a}_2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_k(\xi, \eta)_{,\eta} t_k \mathbf{v}_{3k} \zeta \quad (4.50)$$

$$\mathbf{a}_{3z} = \mathbf{a}_3 \quad (4.51)$$

A partir do tensor da base covariante de componentes dadas pelas expressões de (4.49) a (4.51), obtém-se de forma direta o elemento diferencial de volume no ponto \mathbf{x} :

$$dV = \det [\mathbf{F}_z]^T d\xi d\eta d\zeta. \quad (4.52)$$

A base ortonormal associada ao ponto \mathbf{x} é obtida a partir da base covariante $[\mathbf{F}_z]$ como segue:

$$\mathbf{n}_z = \frac{\mathbf{a}_{1z} \times \mathbf{a}_{2z}}{\|\mathbf{a}_{1z} \times \mathbf{a}_{2z}\|}, \quad (4.53)$$

$$\mathbf{t}_{1z} = \frac{\mathbf{a}_{1z}}{\|\mathbf{a}_{1z}\|}, \quad (4.54)$$

$$\mathbf{t}_{2z} = \frac{\mathbf{n}_z \times \mathbf{t}_{1z}}{\|\mathbf{n}_z \times \mathbf{t}_{1z}\|}, \quad (4.55)$$

de forma que a matriz de rotação $[Q]_i$ é definida como,

$$[Q]_i = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{1z} & \vdots & \mathbf{t}_{2z} & \vdots & \mathbf{n}_z \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

4.2.1 Modelos cinemáticos de ordem superior

O refino hierárquico na espessura será feito utilizando os modelos de primeira ordem (Mindlin) e terceira ordem com normal extensível (Pandya & Kant [4]). A finalidade desta proposta de refino na espessura é poder racionalizar o custo computacional. Neste aspecto é utilizado o modelo de primeira ordem, computacionalmente mais barato, nas situações onde as tensões cisalhantes não são relevantes.

Para o caso específico de materiais compostos, ou de estruturas com a razão (dimensão média)/(espessura) suficientemente pequena, a representação adequada das deformações e tensões cisalhantes é altamente relevante e portanto se utiliza o modelo de terceira ordem com

normal extensível. Este modelo representa os deslocamentos membranais \mathbf{u} e \mathbf{v} por polinomiais cúbicas incompletas e deslocamento normal \mathbf{w} por polinomiais quadráticas, em ambos os casos com relação à variável ζ da espessura. O campo de deslocamento proposto por esta teoria confere as seguintes características ao campo de deformações:

- i. Variação quadrática das deformações transversais γ_{xz} e γ_{yz} , na espessura da casca. Embora esta consideração não implique que as condições de contorno de Poisson sejam satisfeitas, permite dispensar o uso de coeficientes para corrigir o efeito da parcela de energia devido a cisalhamento.
- ii. Variação linear da deformação normal, ε_z , na espessura.

Será apresentado a seguir um caso especial de modelagem do problema de cascas semi-espessas utilizando elementos sólidos degenerados (elemento de Ahmad) juntamente com a teoria de ordem superior utilizada no trabalho de Pandya & Kant [4].

Teoria de terceira ordem com normal extensível aplicada ao elemento de Ahmad

Em elementos finitos, o deslocamento \mathbf{u} de um ponto q qualquer no interior do elemento é representado por interpolação dos valores nodais de deslocamento.

O deslocamento $\hat{\mathbf{u}}_k(\zeta)$ de um ponto i situado sobre a pseudo-espessura de direção \mathbf{v}_{3k} a uma cota ζ da superfície de referência é dada por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_k(\zeta) = & \mathbf{u}_k + \left(\frac{t_k}{2}\zeta\right)^2 \mathbf{v}_{3k} w_k^* + \zeta \frac{t_k}{2} [\boldsymbol{\theta}_k^1, -\boldsymbol{\theta}_k^2] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_k \\ \beta_k \end{array} \right\} \\ & + \left(\zeta \frac{t_k}{2}\right)^3 [\boldsymbol{\theta}_k^1, -\boldsymbol{\theta}_k^2] \left\{ \begin{array}{c} \gamma_k \\ \lambda_k \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

ou, em componentes nas direções da base global, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} ,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \hat{u}_k \\ \hat{v}_k \\ \hat{w}_k \end{array} \right\} = & \left\{ \begin{array}{c} u_k \\ v_k \\ w_k \end{array} \right\} + \left(\frac{t_k}{2}\zeta\right)^2 \left\{ \begin{array}{c} v_{3kx} \\ v_{3ky} \\ v_{3kz} \end{array} \right\} w_k^* \\ & + \zeta \frac{t_k}{2} \left[\begin{array}{cc} \theta_x^1 & -\theta_x^2 \\ \theta_y^1 & -\theta_y^2 \\ \theta_z^1 & -\theta_z^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_k \\ \beta_k \end{array} \right\} + \left(\zeta \frac{t_k}{2}\right)^3 \left[\begin{array}{cc} \theta_x^1 & -\theta_x^2 \\ \theta_y^1 & -\theta_y^2 \\ \theta_z^1 & -\theta_z^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \gamma_k \\ \lambda_k \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Na expressão (4.58) u_k , v_k e w_k são as componentes do deslocamento do nó k da superfície de referência nas direções X , Y e Z . A variável w_k^* é o parâmetro de deslocamento de ordem

superior associado ao deslocamento na direção da pseudo-normal. Os vetores $\boldsymbol{\theta}_k^1$ e $\boldsymbol{\theta}_k^2$ formam a base ortonormal associada à pseudo-normal de direção \mathbf{v}_{3k} , que são definidos pelas expressões (4.38) e (4.39). As constantes α_k e β_k são os ângulos de rotação da pseudo-normal em torno dos vetores $\boldsymbol{\theta}_k^2$ e $\boldsymbol{\theta}_k^1$ respectivamente. Em função do exposto pode-se definir o deslocamento \mathbf{u}_q de um ponto q no interior do elemento através dos valores nodais

$$\mathbf{u}_q = \sum_{k=1}^n \psi_k(\xi, \eta) \hat{\mathbf{u}}_k(\zeta) , \quad (4.59)$$

onde n é o número de nós associados a superfície média do elemento e $\psi_k(\xi, \eta)$ a função de interpolação associada a cada nó. De forma expandida tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_q(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{k=1}^n \left\{ \psi_k(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} + \psi_k(\xi, \eta) \left(\frac{t_k}{2} \zeta \right)^2 \begin{Bmatrix} v_{3kx} \\ v_{3ky} \\ v_{3kz} \end{Bmatrix} w_k^* \right. \\ & + \psi_k(\xi, \eta) \zeta \frac{t_k}{2} \begin{bmatrix} \theta_{kx}^1 & -\theta_{kx}^2 \\ \theta_{ky}^1 & -\theta_{ky}^2 \\ \theta_{kz}^1 & -\theta_{kz}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix} \\ & \left. + \psi_k(\xi, \eta) \left(\zeta \frac{t_k}{2} \right)^3 \begin{bmatrix} \theta_{kx}^1 & -\theta_{kx}^2 \\ \theta_{ky}^1 & -\theta_{ky}^2 \\ \theta_{kz}^1 & -\theta_{kz}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_k \\ \lambda_k \end{Bmatrix} \right\} , \quad (4.60) \end{aligned}$$

Teoria de primeira ordem (Mindlin) aplicada ao elemento de Ahamad

A teoria de primeira ordem (Mindlin) é um caso especial da teoria de terceira ordem com normal extensível definida pela expressão (4.60). Esta teoria, amplamente difundida na análises por métodos analíticos e numéricos de placas e cascas semi espessas, se caracteriza por uma função linear na variável ζ da espessura para representar os deslocamentos membranais e uma função constante para o deslocamento transversal. Dentro das limitações, são observadas uma distribuição inadequada das tensões cisalhantes e inconsistência física na superfície livre da estrutura. As limitações citadas provêm do próprio modelo cinemático que produz deformação cisalhante constante ao longo da espessura. A distribuição cisalhante inadequada obriga à utilização de fatores de correção que equalizam a energia de deformação cisalhante com aquela obtida por uma distribuição parabólica (Mendonça [55]). A equação que define esta teoria é obtida a partir da expressão do modelo de terceira ordem, negligenciando os termos de ordem

superior:

$$\mathbf{u}_q(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^n \left\{ \psi_k(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} + \psi_k(\xi, \eta) \zeta \frac{t_k}{2} \begin{bmatrix} \theta_{kx}^1 & -\theta_{kx}^2 \\ \theta_{ky}^1 & -\theta_{ky}^2 \\ \theta_{kz}^1 & -\theta_{kz}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix} \right\}. \quad (4.61)$$

Uma observação pertinente quando se trabalha com os modelos cinemáticos adaptados ao elemento de Ahmad refere-se aos graus de liberdade do modelo. Quando as teorias, sejam elas de primeira ou terceira ordem, são adaptadas ao elemento de Ahmad os graus de liberdade referentes aos deslocamentos membranais e transversais são referenciados em coordenadas globais enquanto que as rotações estão associadas às coordenadas locais. Isso requer certos cuidados quando são utilizadas condições de contorno de simetria ou antisimetria, onde é necessário um conhecimento prévio das direções dos eixos locais. Com as observações e formulações supracitadas, fecha-se este capítulo, o qual serve como alicerce para a implementação do processo p adaptativo que constitui o tema do próximo capítulo.

Capítulo 5

Espaços de aproximação em superfícies curvas

5.1 Introdução

Um dos desafios das metodologias sem malha é, sem dúvida, impor condições de contorno essenciais de forma forte e construir espaços de aproximação definidos em superfícies curvas. O segundo aspecto desta problemática foi abordado inicialmente na solução de cascas finas no trabalho de Kryls & Belytschko[58] no qual, os autores, utilizam o *Element Free Galerkin Method* (EFGM) para construir um espaço de aproximação sobre um domínio parametrizado da superfície do problema em questão. Este domínio parametrizado é obtido utilizando o método dos mínimos quadrados móveis. As funções peso utilizadas correspondem às funções lagrangeanas associadas aos nós da malha de elementos finitos convencionais.

Os resultados apresentados foram satisfatórios, entretanto com um custo computacional elevado na etapa de pré-processamento referente à parametrização da superfície. Um segundo aspecto a ser considerado diz respeito à suavidade da superfície a ser parametrizada. Além disso esta metodologia limita sua utilização à superfícies desenvolvíveis, ou seja, com curvatura gauseana nula.

A proposta do presente trabalho consiste numa forma versátil de baixo custo computacional e tão independente quanto possível da suavidade da superfície física do problema. A característica de construir as funções de enriquecimento no domínio real proveniente das metodologias sem malha juntamente com domínios definidos sobre superfícies curvas, deu origem à ideia dos planos *pseudo-tangentes* descrito neste capítulo. Esse procedimento consiste em construir as

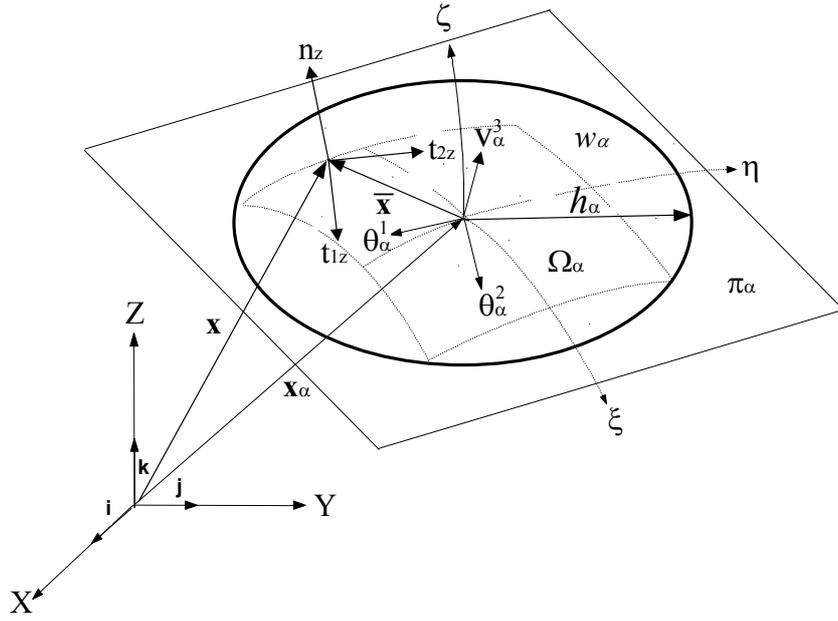


Figura 5.1: Sistemas de coordenadas: (a) ortogonais, globais (X, Y, Z) ; (b) *pseudo-normal* associados à nuvem com direções dadas pelos vetores $[\theta_\alpha^1, \theta_\alpha^2, \mathbf{v}_\alpha^3]$; (c) associadas ao ponto de integração com direções $[\mathbf{t}_{1z}, \mathbf{t}_{2z}, \mathbf{n}_z]$.

funções de enriquecimento em planos *pseudo-tangentes* associados a cada nuvem (suporte das funções partição de unidade e seus enriquecimentos). Desta forma obtém-se um mapeamento contínuo para pontos situados nos elementos associados à nuvem. Garante-se com isto a continuidade da função em todo o suporte, o que implica numa regularidade mínima $C^0(\Omega)$ para o espaço das funções de aproximação. A proposta da utilização deste procedimento como forma de construir as funções de enriquecimento no domínio real, conservando as características dos métodos sem malha, passa necessariamente por uma avaliação de custo benefício. A simplicidade do formalismo matemático e a facilidade de implementação estão acompanhadas de um erro. Este erro, proveniente da distorção das funções construídas no plano *pseudo-tangente* é constatado através da análise de convergência apresentada neste capítulo.

5.2 Construção do espaço de enriquecimento

A estratégia proposta para o enriquecimento p das funções de interpolação fundamenta-se na definição de uma base para cada suporte de nuvem. Para cada nó \mathbf{x}_α centro de nuvem é

estabelecido um plano π_α *pseudo-tangente* à superfície através da base ortonormal associada $[\boldsymbol{\theta}_\alpha^1, \boldsymbol{\theta}_\alpha^2, \mathbf{v}_\alpha^3]$. O plano é denominado *pseudo-tangente*, em lugar de *tangente*, porque ele é definido pelos vetores $\boldsymbol{\theta}_\alpha^1$ e $\boldsymbol{\theta}_\alpha^2$, que não necessariamente são tangentes à superfície de referência da casca (Fig.5.1). Neste plano define-se um raio h_α de forma tal que a projeção de todos os pontos do suporte sobre o plano π_α estejam dentro do círculo de raio h_α e centro \mathbf{x}_α (Fig.5.1). Assim o suporte local das funções de enriquecimento é definido por

$$\omega_\alpha = \{ \bar{\mathbf{x}}(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : \|\bar{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{R}^2} \leq h_\alpha \}, \text{ talque} \quad (5.1)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P} [Q]_\alpha^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha), \quad (5.2)$$

onde \mathbf{P} é a matriz de projeção definida por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

e $[Q]_\alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_\alpha^1 & : & \boldsymbol{\theta}_\alpha^2 & : & \mathbf{v}_\alpha^3 \end{bmatrix}$ é a matriz de rotação associada à base local da nuvem α .

O enriquecimento é feito a partir dos conjuntos de polinômios definidos pelas expressões (3.8) e (3.10) construídas no domínio \hat{w}_α (indicado no Cap.3) ou por funções que constituem modos da solução do problema de valores no contorno. A partir destas definições são mostrados os passos necessários na construção do espaço de aproximação local definido pela expressão (3.8) e (3.10), matriz de rigidez, vetor de carregamento equivalente e resultados de pós-processamento (tensões e deformações) para um ponto de integração.

5.2.1 Construção do espaço de aproximação local

A construção do espaço de aproximação local segue o roteiro:

- i. Determinação do valor da função partição da unidade e seu gradiente no ponto de integração.
- ii. Determinar as coordenadas reais globais do ponto de integração através da função mapeamento dada em (4.43).
- iii. Determinação das bases locais associadas ao ponto de integração e aos planos *pseudo-tangentes* π_α correspondentes aos nós de vértices do elemento que são respectivamente,

$$[Q]_i = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{1z} & : & \mathbf{t}_{2z} & : & \mathbf{n}_z \end{bmatrix} \text{ e } [Q]_\alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_\alpha^1 & : & \boldsymbol{\theta}_\alpha^2 & : & \mathbf{v}_\alpha^3 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Determinação das coordenadas $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\xi, \eta)$ do ponto de integração no plano *pseudo-tangente* da nuvem

$$\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})_{\Omega_\alpha} = \mathbf{P} [Q]_\alpha^T [\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha] , \quad (5.5)$$

onde \mathbf{x} e \mathbf{x}_α são os vetores posição do ponto de integração, com coordenada $\zeta = 0, 0$ e do centro da nuvem α em coordenadas globais (Fig.5.1).

v. Cálculo do valor da função de enriquecimento e de seu gradiente no plano *pseudo-tangente* à nuvem α .

Como a integração numérica é efetuada em coordenadas paramétricas (ξ, η) , tanto a função de enriquecimento local $L_k(\bar{\mathbf{x}})$ quanto o seu gradiente $\nabla_X L_k(\bar{\mathbf{x}})$ deverão ser descritos neste sistema. O valor da função é obtido de forma direta a partir do valor de $\bar{\mathbf{x}}$ obtida em (5.5)

$$L_k(\xi, \eta) = L_k(\bar{\mathbf{x}}) \quad (5.6)$$

Entretanto, o gradiente da função $\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} L_k(\bar{\mathbf{x}})$ deverá sofrer uma segunda transformação constituída de uma rotação para o sistema global de coordenadas (X, Y, Z) feita pela matriz de rotação \mathbf{Q}_α , um mapeamento para o domínio paramétrico (ξ, η, ζ) através da matriz Jacobiana J e uma projecção sobre a superfície $\zeta = 0$, feita através da matriz de projecção \mathbf{P} . Estas operações são resumidas na seguinte expressão:

$$\nabla_\xi E(\xi, \eta) = \mathbf{P} J [\mathbf{Q}_\alpha \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} L_k(\bar{\mathbf{x}})] , \quad (5.7)$$

$$\nabla_\xi E(\xi, \eta) = \mathbf{P} J \nabla_{\mathbf{x}} \quad (5.8)$$

Em (5.7) $\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}^T(\cdot) = \left\{ \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{z}} \right\}$. A matriz Jacobiana do mapeamento é definida por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X}{\partial \zeta} & \frac{\partial Y}{\partial \zeta} & \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} . \quad (5.9)$$

Em (5.9), deve-se ressaltar que o gradiente $\nabla_{\mathbf{x}}$ possui três componentes em relação às direções do sistema global $[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$. Quando o mesmo é mapeado para o domínio paramétrico surge a componente ζ que é negligenciada quando se utiliza o operador \mathbf{P} , já que para construir o modelo definido a seguir em (5.18), precisa-se apenas da projecção sobre a superfície (ξ, η) .

Definidas as funções de enriquecimento e seus gradientes no domínio paramétrico, a construção do espaço local de elementos finitos dá origem às funções de interpolação $\psi_k^\alpha(\xi, \eta) = \varphi_\alpha(\xi, \eta) L_k(\bar{\mathbf{x}})$ obtidas pelo procedimento já abordado no Capítulo 3.

Partindo do exposto acima define-se a seguir o problema genérico de elasticidade tridimensional e posteriormente o problema discretizado através das equações de Bunov-Galerkin para um enriquecimento p do espaço de aproximação.

5.2.2 Definição do problema de elasticidade tridimensional

Os problemas de placas e cascas estão definidos no \mathbb{R}^3 portanto podem ser abordados da ótica de elasticidade tridimensional. Sendo assim o problema genérico de um sólido, submetido ao carregamento indicado no elemento estrutural da Fig.(5.2) e no regime elástico linear pode ser definido como determinar o campo de deslocamentos $\mathbf{u} \in Kin$ tal que:

$$div \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{b} = \mathbf{f}, \text{ em } \Omega \quad (5.10)$$

$$\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \text{ em } \partial\Omega_N \quad (5.11)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \partial\Omega_D \quad (5.12)$$

O conjunto Kin corresponde aos deslocamentos cinematicamente admissíveis e é definido como:

$$Kin = \{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in C^1(\Omega), \mathbf{u} \equiv \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \partial\Omega_D \} \quad (5.13)$$

Definindo uma função resíduo a partir da equação (5.10) se obtém:

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}) = div \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{b} - \mathbf{f}. \quad (5.14)$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados utilizando o critério de Galerkin se tem:

$$\int_{\Omega} \mathcal{R}(\mathbf{u}) \hat{\mathbf{v}} d\Omega = 0, \quad (5.15)$$

onde $\hat{\mathbf{v}}$ são as funções peso que pertencem ao conjunto das variações definido por:

$$\hat{\mathbf{v}} \in Var = \{ \hat{\mathbf{v}} \mid \hat{\mathbf{v}} \in H^1(\Omega), \hat{\mathbf{v}} \equiv 0, \text{ em } \partial\Omega_D \} \quad (5.16)$$

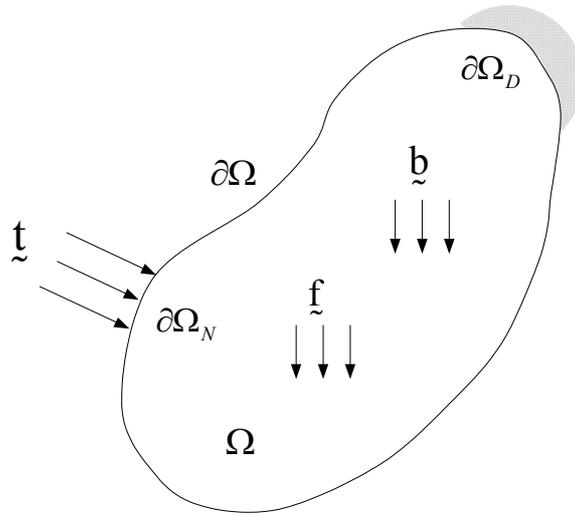


Figura 5.2: Elemento estrutural em \mathbb{R}^3 , em equilíbrio.

Aplicando a integração por partes e o teorema da divergência de Gauss na equação (5.15) obtém-se a seguinte expressão para a formulação fraca do problema:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{t} d\partial\Omega - \int_{\Omega} (\nabla_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{v}}))_s^T [D] (\nabla_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{u}}))_s d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{v}}))_s^T [D] (\nabla_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{u}}))_s d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b}\hat{\mathbf{v}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}\hat{\mathbf{v}} d\Omega = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in Var \quad (5.17)$$

Na equação integral (5.17), $\nabla_{\mathbf{x}}(\cdot)_s$ é o gradiente simétrico do campo de deslocamento no sistema real de coordenadas, que poderá ser global ou local, e $[D]$ a matriz de coeficientes elásticos do material.

5.2.3 Equações de Bunov-Galerkin

Partindo de (4.60), supondo que existem n_{α} funções associadas ao nó α do elemento e que existem n_n nós ativos por elemento (nós associados à nuvens), o campo de deslocamento para

um ponto no de integração no interior de um elemento é definido por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cong \mathbf{u}_h = & \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{\alpha=1}^{n_n} \sum_{k=1}^{n_\alpha} \psi_k^\alpha(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_k^\alpha \\ v_k^\alpha \\ w_k^\alpha \end{Bmatrix} \\
& + \sum_{\alpha=1}^{n_n} \sum_{k=1}^{n_\alpha} \psi_k^\alpha(\xi, \eta) \zeta^2 \frac{t_\alpha^2}{4} \begin{Bmatrix} v_{3kx} \\ v_{3ky} \\ v_{3kz} \end{Bmatrix} w_k^{\alpha*} \\
& + \sum_{\alpha=1}^{n_n} \sum_{k=1}^{n_\alpha} \psi_k^\alpha(\xi, \eta) \zeta \frac{t_\alpha}{2} [\boldsymbol{\theta}_\alpha^1 - \boldsymbol{\theta}_\alpha^2] \begin{Bmatrix} \alpha_k^\alpha \\ \beta_k^\alpha \end{Bmatrix} \\
& + \sum_{\alpha=1}^{n_n} \sum_{k=1}^{n_\alpha} \psi_k^\alpha(\xi, \eta) \zeta^3 \frac{t_\alpha^3}{8} [\boldsymbol{\theta}_\alpha^1 - \boldsymbol{\theta}_\alpha^2] \begin{Bmatrix} \gamma_k^\alpha \\ \lambda_k^\alpha \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Escrevendo (5.18), em forma matricial se obtém

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N}\mathbf{U}, \tag{5.19}$$

onde,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix}
\psi_1^1 & 0 & 0 & \psi_1^1 \zeta^2 \frac{t_1^2}{4} v_{31x} & \theta_{1x}^1 \zeta \psi_1^1 \frac{t_1}{2} & -\theta_{1x}^2 \zeta \psi_1^1 \frac{t_1}{2} \\
0 & \psi_1^1 & 0 & \psi_1^1 \zeta^2 \frac{t_1^2}{4} v_{31y} & \theta_{1y}^1 \zeta \psi_1^1 \frac{t_1}{2} & -\theta_{1y}^2 \zeta \psi_1^1 \frac{t_1}{2} \\
0 & 0 & \psi_1^1 & \psi_1^1 \zeta^2 \frac{t_1^2}{4} v_{31z} & \theta_{1z}^1 \zeta \psi_1^1 \frac{t_1}{2} & -\theta_{1z}^2 \zeta \psi_1^1 \frac{t_1}{2} \\
\theta_{1x}^1 \zeta^3 \psi_1^1 \frac{t_1^3}{8} & -\theta_{1x}^2 \zeta^3 \psi_1^1 \frac{t_1^3}{8} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\theta_{1y}^1 \zeta^3 \psi_1^1 \frac{t_1^3}{8} & -\theta_{1y}^2 \zeta^3 \psi_1^1 \frac{t_1^3}{8} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\theta_{1z}^1 \zeta^3 \psi_1^1 \frac{t_1^3}{8} & -\theta_{1z}^2 \zeta^3 \psi_1^1 \frac{t_1^3}{8} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\psi_{n_\alpha}^{n_n} & 0 & 0 & \psi_{n_\alpha}^{n_n} \zeta^2 \frac{t_{n_n}^2}{4} v_{3n_n x} & \theta_{n_n x}^1 \zeta \psi_{n_\alpha}^{n_n} \frac{t_{n_n}}{2} & -\theta_{n_n x}^2 \zeta \psi_{n_\alpha}^{n_n} \frac{t_{n_n}}{2} \\
0 & \psi_{n_\alpha}^{n_n} & 0 & \psi_{n_\alpha}^{n_n} \zeta^2 \frac{t_{n_n}^2}{4} v_{3n_n y} & \theta_{n_n y}^1 \zeta \psi_{n_\alpha}^{n_n} \frac{t_{n_n}}{2} & -\theta_{n_n y}^2 \zeta \psi_{n_\alpha}^{n_n} \frac{t_{n_n}}{2} \\
0 & 0 & \psi_{n_\alpha}^{n_n} & \psi_{n_\alpha}^{n_n} \zeta^2 \frac{t_{n_n}^2}{4} v_{3n_n z} & \theta_{n_n z}^1 \zeta \psi_{n_\alpha}^{n_n} \frac{t_{n_n}}{2} & -\theta_{n_n z}^2 \zeta \psi_{n_\alpha}^{n_n} \frac{t_{n_n}}{2} \\
\theta_{n_n x}^1 \zeta^3 \psi_{n_\alpha}^{n_n} \frac{t_{n_n}^3}{8} & -\theta_{n_n x}^2 \zeta^3 \psi_{n_\alpha}^{n_n} \frac{t_{n_n}^3}{8} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\theta_{n_n y}^1 \zeta^3 \psi_{n_\alpha}^{n_n} \frac{t_{n_n}^3}{8} & -\theta_{n_n y}^2 \zeta^3 \psi_{n_\alpha}^{n_n} \frac{t_{n_n}^3}{8} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\theta_{n_n z}^1 \zeta^3 \psi_{n_\alpha}^{n_n} \frac{t_{n_n}^3}{8} & -\theta_{n_n z}^2 \zeta^3 \psi_{n_\alpha}^{n_n} \frac{t_{n_n}^3}{8} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix} \tag{5.20}$$

e

$$\mathbf{U}^T = \{ u_1^1 \quad v_1^1 \quad w_1^1 \quad w_1^{1*} \quad \alpha_1^1 \quad \beta_1^1 \quad \gamma_1^1 \quad \lambda_1^1 \quad \cdots \quad \cdots \\
u_{n_\alpha}^{n_n} \quad v_{n_\alpha}^{n_n} \quad w_{n_\alpha}^{n_n} \quad w_{n_\alpha}^{n_n*} \quad \alpha_{n_\alpha}^{n_n} \quad \beta_{n_\alpha}^{n_n} \quad \gamma_{n_\alpha}^{n_n} \quad \lambda_{n_\alpha}^{n_n} \} \tag{5.21}$$

onde o vetor \mathbf{U} é o vetor de parâmetros de deslocamento.

As componentes do tensor gradiente de deslocamento pode ser analisadas de forma matricial como:

$$\partial_\xi^T(\mathbf{u}) = \{ u_{,\xi} \quad u_{,\eta} \quad u_{,\zeta} \quad v_{,\xi} \quad v_{,\eta} \quad v_{,\zeta} \quad w_{,\xi} \quad w_{,\eta} \quad w_{,\zeta} \}. \tag{5.22}$$

onde,

$$\partial_{\xi}(\mathbf{u}) = \partial_{\xi}\mathbf{N}\mathbf{U}. \quad (5.23)$$

Em (5.23) $\partial_{\xi}(\cdot)$ é um operador diferencial da forma:

$$\partial_{\xi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial\xi} & 0 & 0 \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial\eta} & 0 & 0 \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial\xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial\eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial\xi} \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial\eta} \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial\zeta} \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

A expressão do vetor $\partial_{\xi}(\mathbf{u})$ é escrita de forma mais adequada introduzindo a matriz \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \partial_{\xi}\mathbf{N}, \quad (5.25)$$

$$\partial_{\xi}(\mathbf{u}) = \mathbf{G}\mathbf{U}. \quad (5.26)$$

O vetor de derivadas do deslocamento em relação às coordenadas globais $\partial_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ é obtido por:

$$\partial_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \mathbf{J}\partial_{\xi}(\mathbf{u}) = \mathbf{J}\mathbf{G}\mathbf{U}, \quad (5.27)$$

onde o operador jacobiano \mathbf{J} tem a forma

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & J^{-1} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

e J é definido em (5.9).

Como a integração numérica é feita no sistema local de coordenadas, é necessário determinar uma base ortonormal local associada a cada ponto de integração. A matriz de rotação entre a base local e global é obtida de forma direta a partir dos vetores da base ortonormal no ponto de integração que formam o tensor $[Q]_i$. Assim, o vetor $\partial_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ rotacionado para o sistema de coordenadas locais ortonormais do ponto de integração tem a forma

$$\partial_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{u}) = R\partial_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}), \quad (5.29)$$

$$\partial_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{u}) = R\mathbf{J}\mathbf{G}\mathbf{U}, \quad (5.30)$$

onde R é o operador de rotação obtido a partir da matriz de rotação local $[Q]_i$.

A partir das derivadas do deslocamento, calculam-se as componentes de deformação na base local:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{H}R\mathbf{J}\mathbf{G}\mathbf{U}, \quad (5.31)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = \{ \tilde{\varepsilon}_x \quad \tilde{\varepsilon}_y \quad \tilde{\varepsilon}_z \quad \tilde{\gamma}_{yz} \quad \tilde{\gamma}_{xz} \quad \tilde{\gamma}_{xy} \}, \quad (5.32)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

As deformações $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ são descritas nas direções x, y e z definidas pelos vetores $[\mathbf{t}_{1z}, \mathbf{t}_{2z}, \mathbf{n}_z]$.

Por comodidade, as operações na matriz de deformação discreta $\tilde{\mathbf{B}}$ podem ser condensadas de forma tal que

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U} \quad (5.34)$$

onde,

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{H}R\mathbf{J}\mathbf{G}. \quad (5.35)$$

Finalmente, a contribuição para a matriz de rigidez dada pelo ponto de integração é:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}, \quad (5.36)$$

sendo, \mathbf{D} a matriz de elasticidade do material.

A abordagem do problema feita até agora não leva em consideração que o material é constituído de varias camadas. Se a casca é constituída por várias lâminas com propriedades ortotrópicas a matriz de rigidez num ponto de integração toma a seguinte forma

$$\tilde{\mathbf{K}}^l = \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{D}^l \tilde{\mathbf{B}}. \quad (5.37)$$

A expressão (5.37), refere-se à parcela da matriz de rigidez do laminado correspondente a um ponto de integração localizado na lâmina l . Com esta consideração a matriz de rigidez global tem a forma:

$$\mathbf{K} = \sum_{Nl} \sum_{Ni} \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{D}^l \tilde{\mathbf{B}} \det J W_\xi W_\eta W_\zeta \quad (5.38)$$

Em (5.38) Nl é o número de lâminas, Ni é o número de pontos de integração por lâmina, \mathbf{D}^l é a matriz de rigidez na lâmina l definida pela expressão (2.21) e W_ξ , W_η e W_ζ são os pesos da quadratura numérica no ponto de integração correspondente às coordenadas curvilíneas ξ , η e ζ .

O sistema linear resultante apresenta-se na forma padrão já conhecida de FEM,

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (5.39)$$

O vetor de forças consistentes segue o procedimento similar ao que foi utilizado na matriz de rigidez. A seguir é mostrada a sua construção para alguns tipos de carregamento usuais em problemas de placas e cascas.

Forças de Corpo

$$\mathbf{F}^b = \mathbf{N}^T \mathbf{f} \det JW_\xi W_\eta W_\zeta, \quad (5.40)$$

onde \mathbf{f} é o vetor de forças de corpo.

Forças de Superfície

A forma geral do vetor de forças de superfície é dada por:

$$\mathbf{F}^s = \mathbf{N}^T \mathbf{h} \det JW_\eta W_\zeta. \quad (5.41)$$

Quando a força de superfície for uma pressão o \mathbf{h} é definida por $\mathbf{h} = (-\zeta p \mathbf{n})$ onde $\zeta \in \{-1, 1\}$, p é a pressão e \mathbf{n}_z o vetor unitário normal à superfície no ponto de integração. A determinação dos campos de deslocamento e tensões a partir dos parâmetros de deslocamentos nodais é realizado de forma similar a elementos finitos convencionais.

5.2.4 Campos primais e duais

O campo de deslocamento é determinado de forma direta uma vez conhecido o vetor de parâmetros de deslocamento associado a cada nuvem que cobre o ponto onde se deseja saber os valores deste campo. Por exemplo para um ponto k_{sup} , vértice de um elemento, o campo aproximado de deslocamento é dado por:

$$\mathbf{u}_{k_{\text{sup}}} = \mathbf{N}_{k_{\text{sup}}} \mathbf{U}_{k_{\text{sup}}}. \quad (5.42)$$

Supondo que existem \mathbf{n}_α funções ao nó k se tem a seguinte expressão para o $\mathbf{U}_{k_{\text{sup}}}$:

$$\mathbf{U}_{\text{sup}}^T = \left\{ \begin{array}{cccccccc} u_k^1 & v_k^1 & w_k^1 & w_k^{1*} & \alpha_k^1 & \beta_k^1 & \gamma_k^1 & \lambda_k^1 & \dots \\ u_k^{\mathbf{n}_\alpha} & v_k^{\mathbf{n}_\alpha} & w_k^{\mathbf{n}_\alpha} & w_k^{\mathbf{n}_\alpha*} & \alpha_k^{\mathbf{n}_\alpha} & \beta_k^{\mathbf{n}_\alpha} & \gamma_k^{\mathbf{n}_\alpha} & \lambda_k^{\mathbf{n}_\alpha} \end{array} \right\} \quad (5.43)$$

o sub-índice k indicam o ponto da superfície de referência que está sobre a mesma pseudo-normal que " k_{sup} " e o supra índice o número da função de aproximação não nula associada ao nó.

As deformações e tensões serão determinadas no sistema local de coordenadas ou serão dadas através de seus valores principais de tensão equivalente de Von Mises ou ainda tensões equivalentes de Tsai-Hill para o caso de materiais compostos laminados:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k_{\text{sup}}} = \tilde{\mathbf{B}}_{k_{\text{sup}}} \mathbf{U}_{k_{\text{sup}}}, \quad (5.44)$$

onde,

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k_{\text{sup}}}^T = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xy} \right\}. \quad (5.45)$$

Para as tensões de um ponto integração na lâmina l se tem

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k_{\text{sup}}} = \mathbf{D}^l \tilde{\mathbf{B}}_{k_{\text{sup}}} \mathbf{U}_{k_{\text{sup}}}, \quad (5.46)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{k_{\text{sup}}}^T = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xy} \right\}. \quad (5.47)$$

De forma geral, concluí-se que a menos da técnica utilizada para construção dos espaços de aproximação local (plano *pseudo-tangente*), os procedimentos de construção dos sistema de equações e os resultados de pós-processamento não diferem daqueles utilizados por elementos finitos hierárquicos em processos p -adaptativos. Entretanto, a utilização deste procedimento carrega consigo um erro proveniente da utilização da projeção do ponto sobre o plano pseudo-tangente associado à nuvem.

5.2.5 Sensibilidade do plano pseudo-tangente

A construção dos espaços locais em planos *pseudo-tangentes* carregam consigo um erro decorrente de sua própria concepção. Este erro provém de mapeamentos não lineares do domínio intrínscico com relação ao domínio real. Neste caso a função de enriquecimento, construída

sobre o plano *pseudo-tangente*, não mantém suas características de convergência no domínio definido pela superfície curva. Esta limitação pode ser melhor compreendida através do exemplo mostrado na Fig.5.3. Neste exemplo é analisado o traço de uma superfície curva tangente ao plano π_α com normal dada pelo vetor \mathbf{v}_α^3 , com indicado na Fig.5.3. Nesta situação a função linear $L_{ij}(\bar{x})$, construída com a projeção \bar{x}_p de pontos \mathbf{x} da superfície sobre o plano *pseudo-tangente*, mantém o mesmo valor para o ponto \mathbf{x} sobre a superfície. Como as coordenadas de \bar{x}_p e \mathbf{x} são diferentes, a função definida sobre o suporte Ω_α sofre uma distorção. Neste tópico constata-se que a aproximação dos espaços locais é sensível à curvatura. O aumento da curvatura incrementa a distorção das funções construídas no plano *pseudo-tangente*, resultando numa perda de precisão. Este efeito pode ser constatado através da distorção da função linear da Fig.5.3, para uma família de arcos parabólicos definidos em 1D dados pela função:

$$z = \frac{-k}{h_\alpha} x^2. \quad (5.48)$$

Em (5.48) o coeficiente k é diretamente proporcional à curvatura sendo que para cada valor de k se tem um incremento na distorção da função linear definida sobre os pontos do plano *pseudo-tangente* π_α (Fig.5.3) como mostrado na Fig.5.4.

Na Fig.5.4, para $k = 0$ não há distorção da função, já que a mesma é calculada para pontos $\bar{x} \in \pi_\alpha$. Para valores de $k > 0$ começa a ocorrer a distorção da função, pois nestes casos os pontos estão definidos sobre os arcos parabólicos.

A perda de precisão decorrente do aumento de curvatura, no procedimento dos planos *pseudo-tangentes*, é verificado através do deslocamento vertical da extremidade livre de uma seqüência de arcos parabólicos engastados, sob carga de momento distribuído na aresta livre como ilustrado na (Fig.5.2). Com este procedimento, evita-se o erro de geometria, já que a mesma é aproximada por elementos quadráticos de oito nós (Q8). A família de arcos parabólicos utilizada é obtida pela seguinte função:

$$z = 2kx - \frac{k}{R} x^2 \quad (5.49)$$

Os arcos parabólicos utilizados neste exemplo, mostrados na Fig.5.5, tem o parâmetro $R = 2$ mm, espessura $t = 0,2$ mm, largura $b = 1$ mm e propriedades materiais dadas por $E = 2,1 \times$

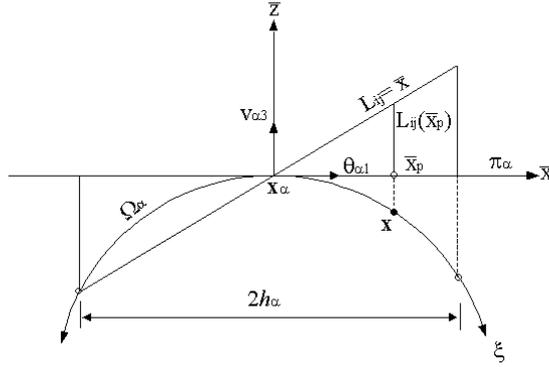


Figura 5.3: Função linear L_{ij} avaliada para a projeção dos pontos \mathbf{x} da nuvem Ω_α sobre o plano *pseudo-tangente* π_α .

$10^5 MPa$ e $\nu = 0,0$. A família de arcos utilizada tem a origem engastada e na extremidade livre é aplicado um momento $M = 1 Nm/mm/mm$ (Fig. 5.5). As soluções numéricas obtidas para cada arco, na extremidade livre, são comparadas com a solução analítica do deslocamento vertical máximo de um arco delgado, dada pela expressão:

$$w_\alpha = \frac{2MkR^2}{3EI} \left[\left(\frac{1}{4k^2} + 1 \right)^{3/2} + \frac{1}{8k^3} \right]. \quad (5.50)$$

A expressão (5.50) é obtida no apêndice A desta tese.

A sequência de arcos utilizada neste exemplo em função da constante k é mostrada na Fig.5.6. O domínio foi discretizado com 2 elementos quadrangulares quadráticos de oito nós (Q8) e o espaço de aproximação foi construído com refino homogêneo com $p = 4$. A deterioração do espaço é medida através da perda de convergência em função da constante k por meio do erro relativo do deslocamento vertical na extremidade livre $Ew = \frac{|w-w_\alpha|}{|w_\alpha|}$. Como uma forma de colocar em evidência a perda de convergência com o aumento de k são plotados juntamente os resultados obtidos com elementos finitos convencionais para a mesma malha. Os resultados da Fig.5.7 tornam evidente a perda de convergência devida ao efeito de projeção de coordenadas utilizado pelo procedimento do plano *pseudo-tangente* para os espaços construídos com $p = 2$ e $p = 4$. Os resultados obtidos por elementos finitos convencionais, utilizando elementos quadráticos de oito nós (Q8), não tem o efeito da distorção das funções de aproximação mantendo o erro aproximadamente constante com o aumento de k .

A Fig.5.7 mostra um comportamento assintótico, do valor relativo Ew , utilizando MEEG e

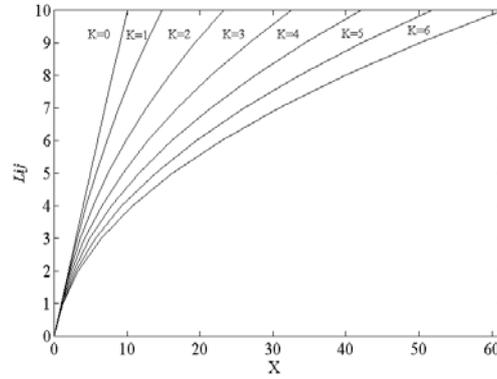


Figura 5.4: Distorção da função linear L_{ij} com o incremento no valor de k

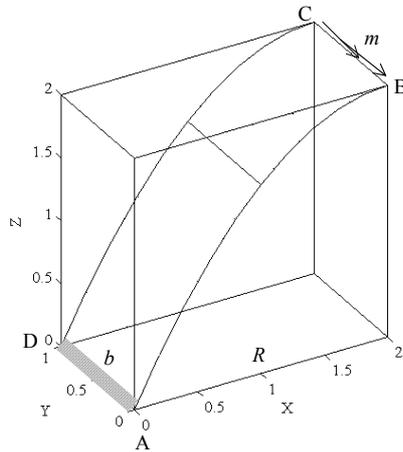


Figura 5.5: Arco parabólico engastado na extremidade AD e sujeito a uma carga de momento distribuída na aresta BC.

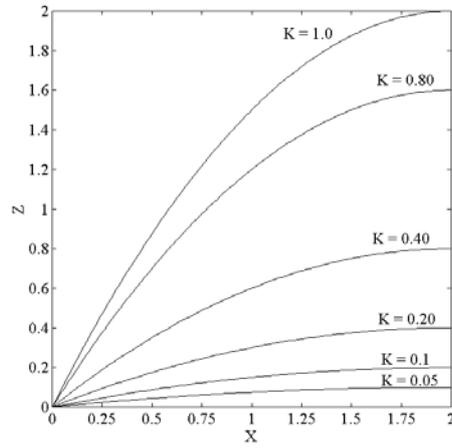


Figura 5.6: Família de parábolas com semicorda $R = 2mm$ e constante k variável.

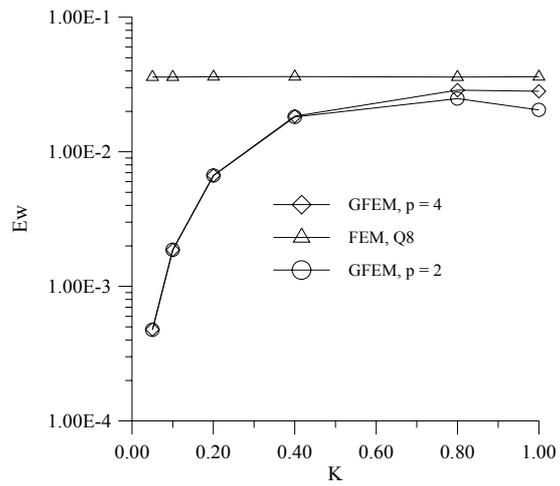


Figura 5.7: Erro E_w na extremidade livre do arco parabólico.

elementos finitos convencionais. O resultado do Ew para $k = 1$ corresponde a um caso crítico onde se tem o maior erro decorrente da projeção sobre o plano *pseudo-tangente*.

Com esta verificação concluí-se o capítulo mostrando uma alternativa de construção do espaço de aproximação em superfícies curvas juntamente com uma crítica do erro incorporado nesta técnica.

Capítulo 6

Problemas e potencialidades no MEEG

Este capítulo considera dois tópicos relevantes na utilização do MEEG. O primeiro diz respeito ao problema decorrente da imposição de condições de contorno essenciais que, dependendo da técnica utilizada, pode gerar um conjunto incompleto de funções de aproximação. Em relação a este aspecto são mostradas duas técnicas para abordar o problema. O segundo tópico mostra a potencialidade do método na abordagem de problemas de camada limite em placas e cascas através da incorporação de modos da solução do problema de valores no contorno na construção dos espaços locais sobre as fronteiras de Dirichlet.

A imposição de condições de contorno essenciais constituem ainda uma ressalva à utilização dos métodos sem malha. O emprego desta tecnologia, de forma geral, vem sendo utilizada na análise de campos cujos valores extremos não estão localizados em fronteiras de Dirichlet. A construção do espaço de aproximação com funções que não apresentam a propriedade *delta de Kronecker*, como é o caso de vários métodos (EFGM, hp-Clouds, RKPM, etc.), obriga a impor as condições de contorno de forma fraca. Este procedimento é realizado utilizando métodos clássicos como penalização, solução do problema dual através de multiplicadores de Lagrange ou método do Lagrangeano Aumentado, entre outros. Estas tentativas de contornar a limitação das funções do espaço de aproximação, em relação às condições de contorno essenciais, carregam consigo efeitos indesejáveis na simulação numérica. Dentre eles, foram observados, de forma geral, aumento do custo computacional decorrente da integração nas fronteiras, matriz mal condicionada quando o fator de penalização for muito elevado (valores acima do módulo de elasticidade longitudinal). No caso da resolução do problema dual (minimização do Lagrangeano)

não se consegue convergência monotônica e assintótica como em elementos finitos convencionais (Garcia et alli [54]). Uma alternativa de impor condições de contorno essenciais de forma forte, sacrificando parcialmente o caráter sem malha do método e a regularidade da solução, é apresentado pelo MEEG. Neste caso a Partição da Unidade é constituída por funções lineares e bilineares utilizadas em elementos finitos convencionais. Entretanto, a idéia inicial de impor condições de contorno essenciais pela simples eliminação das funções que aproximam graus de liberdade prescritos não se mostrou correta. O espaço gerado com estas características é exatamente conforme mas não minimamente conforme em espaços construídos com enriquecimento p . A falta de completude do conjunto de funções é constatada neste trabalho em problemas de flexão de vigas discretizadas com pequeno número de elementos. Nesta situação o espaço gerado não é capaz de representar os modos *pares* característicos, por exemplo, de vigas biapoiadas em flexão. Concomitantemente à observação deste fenômeno durante o desenvolvimento deste trabalho, Schwebke & Holzer [47] constatam este fato em problemas de elasticidade plana.

6.1 Incompletude do conjunto de funções de aproximação

A condição necessária para a convergência de uma solução é que o espaço de aproximação gerado seja exatamente e minimamente conforme com relação ao espaço $H^1(\Omega)$. Por definição, o espaço de MEEG $Q(\Omega)$, indicado em (3.2), é exatamente e minimamente conforme quando é o maior espaço exatamente conforme e $\psi_k^\alpha(\xi, \eta) \in \text{span}\{\varphi_\alpha Q_\alpha^p\}$ onde Q_α^p podem ser obtidos pelas expressões (3.9) ou (3.11). Este problema será exemplificado através da análise de flexão de uma placa bi-apoiada conforme Fig.6.1.

O exemplo consiste numa placa simplesmente apoiada (*soft*) em duas extremidades opostas. A mesma está sujeita a uma carga uniformemente distribuída com as dimensões, propriedades materiais e particionamento do domínio dados na Fig 6.1. Com o propósito de utilizar a solução da equação diferencial da viga de Euler-Bernoulli como “calibre” de comparação para os resultados do deslocamento transversal w , foi empregado coeficiente de Poisson nulo. O espaço de aproximação para o campo w foi construído conforme as expressões (3.10) e (3.11) para $N = 6$ e $p = 4$. Neste caso, para atender às condições de contorno essenciais, foram

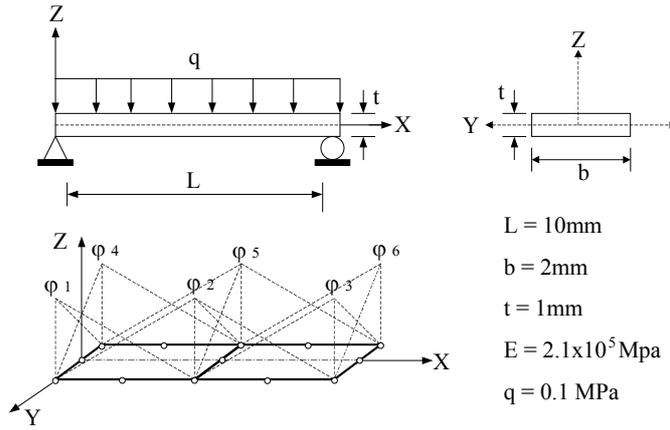


Figura 6.1: Placa simplesmente apoiada nas extremidades opostas discretizada com 2x1 elementos quadrangulares.

eliminados os espaços locais associados as nuvens sobre os contornos vinculados. Sendo assim, o espaço resultante toma a forma

$$\mathcal{F}_{N=6}^{p=4} = \left\{ \left\{ \varphi_\alpha \hat{Q}_\alpha^p \right\} : 1 \leq \alpha \leq N \right\}, \quad (6.1)$$

$$\left\{ \varphi_1 \hat{Q}_1^p \right\} \equiv \left\{ \varphi_3 \hat{Q}_3^p \right\} \equiv \left\{ \varphi_4 \hat{Q}_4^p \right\} \equiv \left\{ \varphi_6 \hat{Q}_6^p \right\} \equiv 0 \quad (6.2)$$

Os traços das funções de aproximação associadas à nuvem $\alpha = 2$ para pontos de coordenada $(x, 1)$ são mostrados na Fig.6.2. Sendo a solução simétrica em relação à metade da viga, somente as funções “pares” φ , φx^2 e φx^4 serão úteis para representar o campo w . Assim, claramente faltam os termos quadráticos e de quarta ordem. Se utilizarmos estas funções a solução obtida é apresentada na Fig.6.3(a), diferente da linha elástica correta mostrada em Fig.6.3(b)

A seguir serão comentados dois procedimentos utilizados para contornar este problema. O primeiro consiste no processo clássico de penalização das funções de fronteira.

6.2 Método de penalização

Uma vez que este método é amplamente utilizado na abordagem de problemas desta natureza, serão suprimidos maiores detalhes no formalismo matemático de sua aplicação.

Considere-se o problema de aproximação do campo primal $\mathbf{u}(\Omega)$ para um elemento estrutural genérico mostrado na Fig.6.4, utilizando o Princípio da Energia Potencial Mínima $\Pi(\mathbf{u})$,

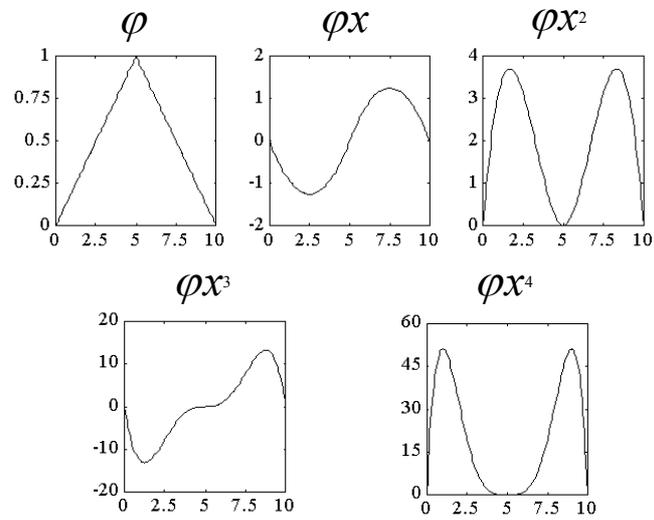


Figura 6.2: Traço das funções associadas à nuvem $\alpha = 2$ sobre o contorno $(x, 1)$

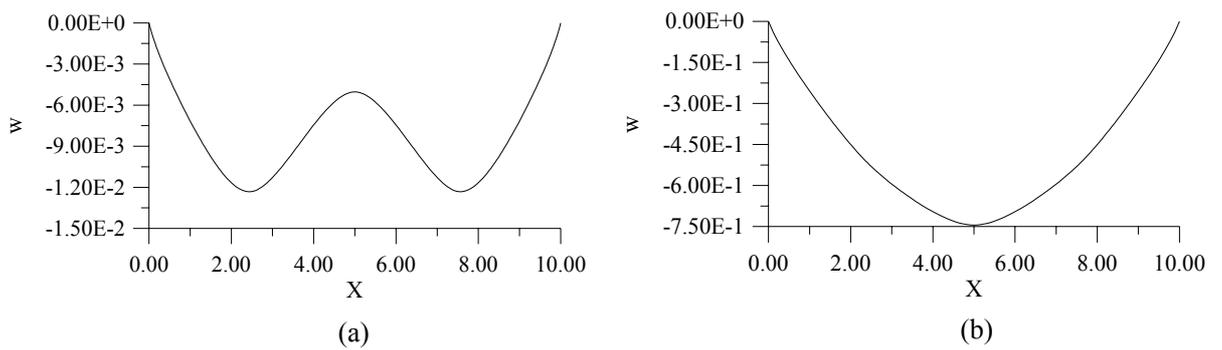


Figura 6.3: Modos de solução; a) obtido por espaço incompleto, b) obtido por processo de penalização.

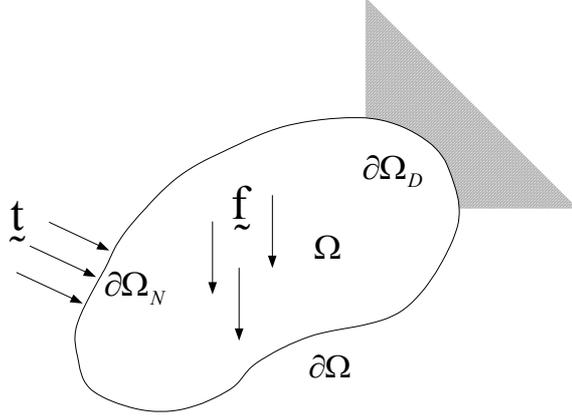


Figura 6.4: Elemento estrutural sujeito a forças de tração \mathbf{t} e forças de corpo \mathbf{f}

o problema em questão pode ser formulado como:

$$\begin{cases} \min \Pi(\mathbf{u}) \\ \bar{g}(\mathbf{u}) = 0 \text{ em } \partial\Omega_D \end{cases} \quad (6.3)$$

onde as condições de contorno de Dirichlet são impostas como $\bar{g}(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u}) - \bar{\mathbf{u}} = 0 \forall \mathbf{u} \in \partial\Omega_D$.

Incorporando as condições de contorno no problema de mínimo, o funcional a ser minimizado é dado por:

$$\mathcal{P}(\rho, \mathbf{u}) = \Pi(\mathbf{u}) + \rho \frac{1}{2} \langle \bar{g}(\mathbf{u}), \bar{g}(\mathbf{u}) \rangle \quad (6.4)$$

Na expressão (6.4) $\mathcal{P}(\rho, \mathbf{u})$ é o funcional penalizado e $\rho \geq 0$ é o fator de penalização. Em (6.4) se tem que $\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - l(\mathbf{u})$ é contínuo em Ω e $\Pi(\mathbf{u}) \geq 0 \forall \mathbf{u} \in \Omega$. Aplicando as condições necessárias de mínimo se obtém

$$\delta\mathcal{P}(\delta, \mathbf{u})[\mathbf{u}^*] = 0, \quad (6.5)$$

onde $\mathbf{u}^*, \mathbf{u} \in H^1(\Omega)$. Da minimização do funcional $\mathcal{P}(\rho, \mathbf{u})$ obtém-se a expressão:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) - l(\mathbf{u}^*) + \rho \langle g(\mathbf{u}), g(\mathbf{u}^*) \rangle - \rho \langle g(\mathbf{u}^*), \bar{\mathbf{u}} \rangle = 0, \forall \mathbf{u}^* \in H^1(\Omega). \quad (6.6)$$

Colocando (6.6) na forma matricial se obtém

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega + \rho \int_{\partial\Omega_D} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} d\partial\Omega \right] \mathbf{U} \right. \\ & \left. - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Omega - \rho \int_{\partial\Omega_D} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{U}} \right\} \cdot \mathbf{U}^* = 0, \forall \mathbf{U}^* \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (6.7)$$

A forma final de (6.7) recae na equação $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ onde,

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega + \rho \int_{\partial\Omega D} \overline{\mathbf{N}}^T \overline{\mathbf{N}} d\partial\Omega, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\partial\Omega N} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Omega - \rho \int_{\partial\Omega D} \overline{\mathbf{N}}^T \overline{\mathbf{U}}, \quad (6.9)$$

e $\overline{\mathbf{U}}$ é o vetor nodal com os graus de liberdade prescritos. A matriz $\overline{\mathbf{N}}$ é constituída das funções que aproximam os graus de liberdade prescritos na fronteira de Dirichlet e tem a seguinte forma:

$$\overline{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \cdots & \psi_i S_1 & 0 & 0 & \zeta \frac{t}{2} \psi_i S_4 \theta_{1x}^i & -\zeta \frac{t}{2} \psi_i S_5 \theta_{2x}^i & \cdots \\ \cdots & 0 & \psi_i S_2 & 0 & \zeta \frac{t}{2} \psi_i S_4 \theta_{1y}^i & -\zeta \frac{t}{2} \psi_i S_5 \theta_{2y}^i & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \psi_i S_3 & \zeta \frac{t}{2} \psi_i S_4 \theta_{1z}^i & -\zeta \frac{t}{2} \psi_i S_5 \theta_{2z}^i & \cdots \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

na expressão acima $S_i \begin{cases} 1 \text{ presc.} \\ 0 \text{ não/presc.} \end{cases}$ para $i = 1, \dots, 5$.

Um cuidado a ser tomado na utilização desta técnica diz respeito ao fator de penalização ρ . Este coeficiente não deve assumir valores muito acima do módulo de elasticidade longitudinal, sob pena de resultar numa matriz de rigidez mal condicionada.

Uma forma alternativa de impor condições de contorno de forma forte consiste na utilização de funções que satisfazem condições de contorno na fronteira sem se anular dentro dos elementos. Na próxima seção se introduz uma forma simples de construção de funções de fronteira satisfazendo esta restrição.

6.3 Funções de fronteira

Esta técnica consiste na substituição das funções partição da unidade sobre as fronteiras de Dirichlet por funções que se anulam nestas fronteiras. Essas novas funções, denominadas neste trabalho de “funções de fronteira”, são obtidas pelo procedimento de restrição multiplicativa, similar aquele apresentado no trabalho de Schwebke & Holzer [47].

As funções de fronteira são funções quadráticas em \mathbb{R}^1 e biquadráticas em \mathbb{R}^2 que possuem valores nulos nos contornos de Dirichlet. Estas funções substituem as Partições de Unidade na aproximação dos graus de liberdade prescritos. As mesmas são obtidas pelo produto tensorial das funções partição de unidade associadas a nuvens com graus de liberdade prescritos pelas funções “rampa” definidas no domínio do elemento. As funções rampa que têm o mesmo suporte das nuvens sobre a fronteira prescrita são definidas para cada grau de liberdade do modelo.

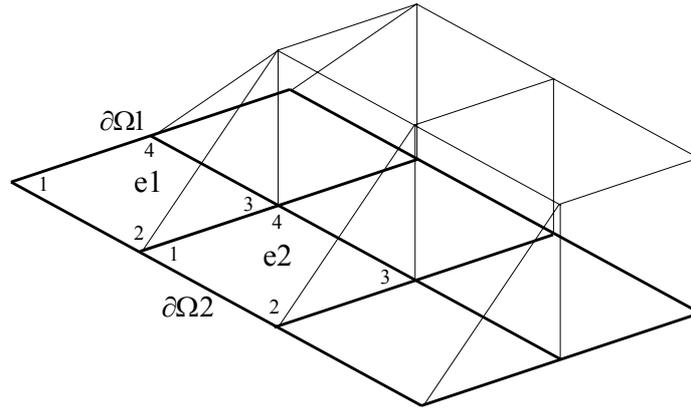


Figura 6.5: Contorno com deslocamentos prescritos e posição da função rampa correspondente aos graus de liberdade prescritos no elemento destacado.

Elem. \ Nó	1	2	3	4	$\mathcal{R}_u(\xi, \eta)$
1	1	1	0	1	$\varphi_3(\xi, \eta)$
2	1	1	0	0	$\varphi_3(\xi, \eta) + \varphi_4(\xi, \eta)$

Tabela 6.1: Funções rampa associadas ao grau de liberdade u correspondente aos elementos e_1 e e_2 da Fig.6.5.

Sendo assim o número de funções rampa por elemento de fronteira prescrita é sempre igual ao número de graus de liberdade prescritos do modelo utilizado. A técnica de construção das “funções de fronteira” e das funções rampa são mostradas a seguir através de um exemplo.

Seja um domínio discretizado Ω como mostrado na Fig.6.5, onde se quer atribuir para as fronteiras $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ condição de contorno homogênea para o deslocamento u . A função rampa $\mathcal{R}_u(\xi, \eta)$ associada ao grau de liberdade prescrito é obtida pela soma das funções partição de unidades associadas às nuvens que não estão sobre as fronteiras prescritas. Portanto para os elementos e_1 e e_2 (Fig.6.5), com contornos sobre as fronteiras prescritas $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$, as funções rampas são dadas pela Tab 1. a seguir:

Definidas as funções rampa correspondentes ao grau de liberdade u , como indicado na Tab.1, a construção das funções de fronteira associadas às nuvens sobre os contornos com condições prescritas é realizada pelo produto tensorial da partição da unidade da nuvem pela função rampa do elemento correspondente ao grau de liberdade prescrito. O procedimento para a construção das funções de fronteira associadas aos nós 1 e 2 dos elementos e_1 e e_2 é indicado

Elemento	Nó	$\mathcal{R}_u(\xi, \eta)$	$\mathcal{B}_u(\xi, \eta)$
1	1	φ_3	$\varphi_1\varphi_3$
1	2	φ_3	$\varphi_2\varphi_3$
2	1	$\varphi_3 + \varphi_4$	$\varphi_1(\varphi_3 + \varphi_4)$
2	2	$\varphi_3 + \varphi_4$	$\varphi_2(\varphi_3 + \varphi_4)$

Tabela 6.2: Funções bolha para os nós 1 e 2 dos elementos e_1 e e_2 da Fig.6.5.

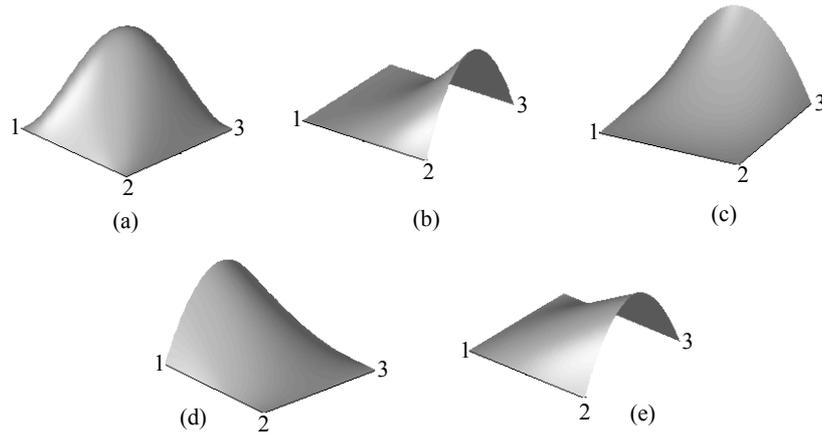


Figura 6.6: (a), (b) e (c) são as “funções de fronteira” correspondentes aos nós 1, 2 e 4 do elemento e_1 , (d) e (e) corresponde às funções de fronteira do elemento 2 associado aos nós 1 e 2.

na Tab.2 como segue:

As Fig. 6.6(a), (b) e (c) mostram as funções de fronteira associadas aos nós do elemento e_1 e as Fig.6.6(d) e (e) representam as funções de fronteira associadas ao elemento e_2 .

6.4 Análise comparativa entre penalização e funções de fronteira

Esta análise consiste na comparação de resultados entre as duas técnicas citadas em problemas onde, propositalmente, os valores máximos do campo acontecem sobre a fronteira de Dirichlet.

6.4.1 Placa quadrada simplesmente apoiada

Este exemplo é constituído de uma placa quadrada simplesmente apoiada (*hard*) com carga uniformemente distribuída no domínio. Devido às condições de simetria e carregamento, é analisado apenas um quadrante da placa, discretizado com quatro elementos quadrangulares.

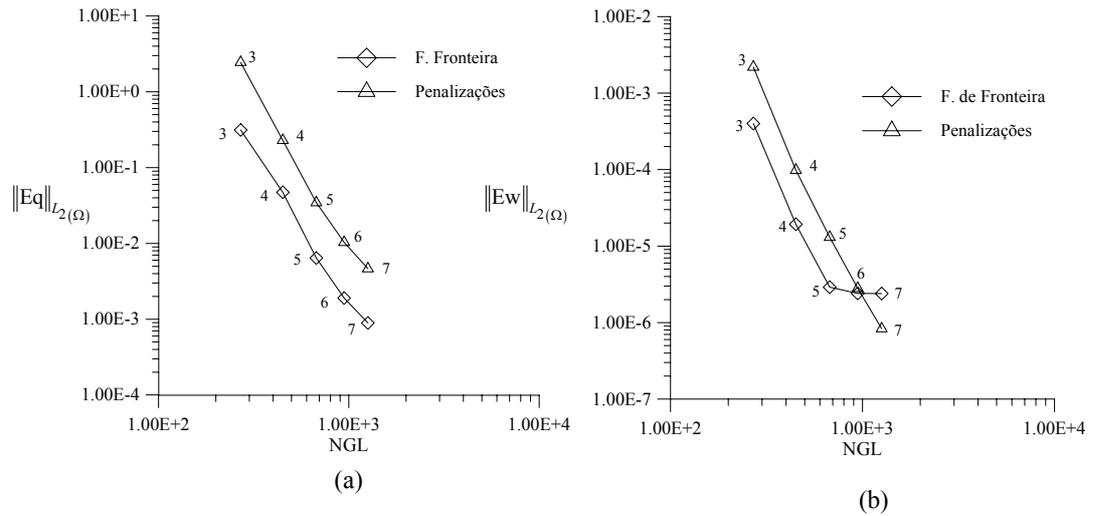


Figura 6.7: a) Norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo de esforço cortante Q_x ; b) Norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo do deslocamento transversal w .

Os resultados são obtidos com refinamentos p -homogêneos. O quadrante analisado tem 8mm de comprimento, 0,1mm de espessura e está sob uma carga distribuída de 0,1MPa. As normas $L^2(\Omega)$ do erro relativo do esforço cortante Q_x e do deslocamento transversal w são mostrados nas Fig.6.7(a) e 6.7(b) em função do número de graus de liberdade (NGL) do modelo numérico.

Os resultados da Fig.6.7(a), mostram uma melhora significativa na convergência da norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo de Q_x com as funções de fronteira em relação ao processo de penalização. Isto se deve ao enriquecimento adicional acarretado pela substituição de funções Partição de Unidade bilineares pelas funções de fronteira biquadráticas. A Fig.6.7(b) mostra que a norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo no deslocamento transversal w apresenta taxa de convergência ligeiramente mais elevada com a utilização das funções de fronteira, entretanto o erro se estabiliza na ordem de 10^{-5} contra 10^{-6} atingido quando é usado o processo de penalização. Em ambas as situações são usados 1260 graus de liberdade. Conclui-se, no exemplo da placa quadrada, que o efeito das funções de fronteira tem caráter local, como pode ser notado na Fig.6.7(a). Isto se deve ao fato de se ter um espaço mais rico nas regiões onde se acumula a energia de deformação devido ao cisalhamento. Este efeito benéfico não se repete no deslocamento transversal, como mostrado na Fig.6.7(b), onde os valores do campo crescem em direção oposta aos apoios.

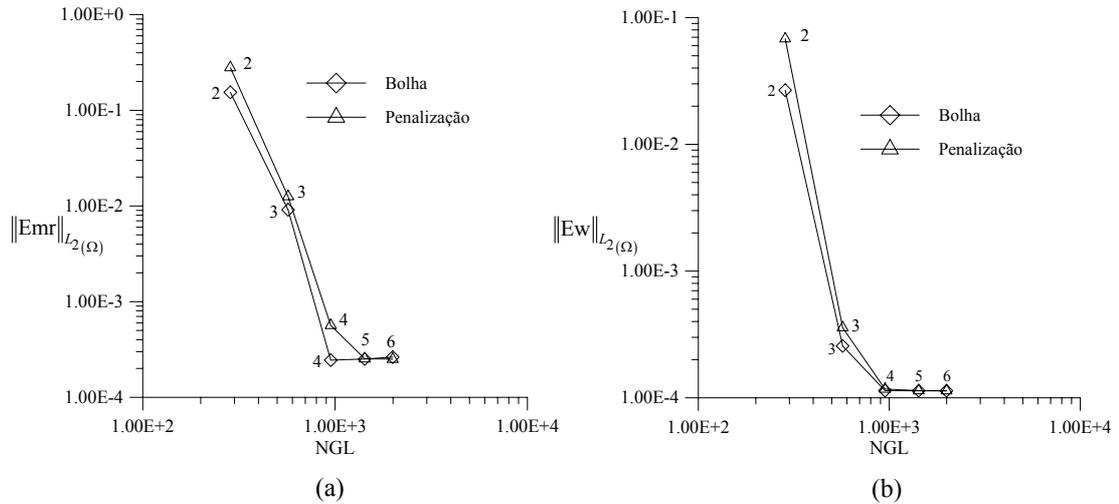


Figura 6.8: a) Norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo do momento radial M_{rr} , b) Norma $L^2(\Omega)$ do deslocamento transversal w .

6.4.2 Placa circular engastada

O exemplo analisado é constituído de uma placa circular de 8mm de raio, 0,1 mm de espessura, sob a ação de uma carga uniformemente distribuída de 0,1 MPa. Analisa-se somente um quadrante da placa sob condições de contorno de simetria, com doze elementos quadrangulares. Os resultados obtidos são referentes a refinamentos p -homogêneos. Neste exemplo é utilizada integração completa com um número máximo de (8×8) pontos de Gauss. Os resultados mostrados na Fig.6.8(a) e 6.8(b) referem-se à norma $L^2(\Omega)$ do momento radial M_{rr} e do deslocamento transversal w , em função do número de graus de liberdade do sistema.

Na análise da norma $L^2(\Omega)$ do momento radial, Fig.6.8(a), pode ser constatado um comportamento similar dos espaços de aproximação construídos com as funções de fronteira e o processo de penalização. O baixo desempenho dos espaços obtidos, com erros estabilizados em patamares da ordem de 10^{-1} , decorrem possivelmente da malha distorcida e de um refinamento h pobre. Os resultados obtidos para o erro relativo do deslocamento transversal mostram um ligeiro aumento na taxa de convergência quando são utilizadas as funções de fronteira. Entretanto, os resultados se estabilizam em patamares ligeiramente superiores aos atingidos pelo processo de penalização, como mostra a Fig.6.8(b).

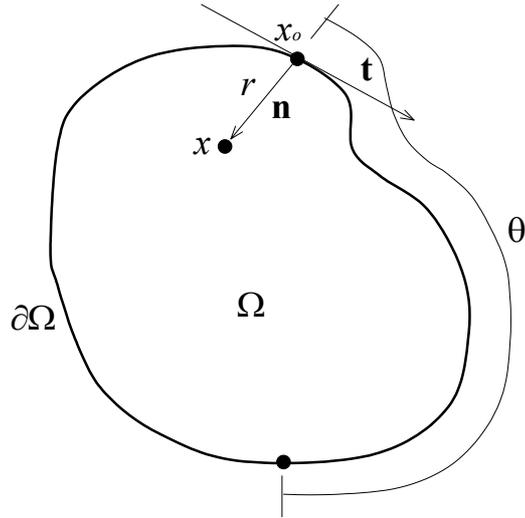


Figura 6.9: Coordenadas r e θ do ponto x suficientemente próximo do contorno

Como fechamento deste capítulo, abre-se a seguir a discussão de um dos aspectos mais atraentes desta metodologia, que diz respeito à flexibilidade de construção dos espaços locais.

6.5 Funções especiais em MEFG

Neste tópico é feita um breve discussão sobre a construção dos espaços locais pela inclusão de modos conhecidos da solução para o problema de valores no contorno em questão. Este procedimento será utilizado na análise dos fenômenos de *camada limite* em placas e cascas rasas modeladas com teoria cinemática de primeira ordem (Mindlin). Em mecânica dos sólidos, os fenômenos de camada limite são característicos de problemas elípticos modelados com teorias de ordem superior. Os mesmos se manifestam por um comportamento diferenciado da solução a uma distância da borda da ordem da espessura. Este comportamento ocorre de forma geral num decaimento exponencial perturbado pela espessura nas regiões supracitadas. Especificamente nos problemas estáticos de placas de Mindlin, a perturbação exponencial da solução é associada às rotações, como mostrado a seguir.

Seja w e ϕ as soluções, para o deslocamento transversal e para as rotações, que satisfazem, para condições de contorno específicas, a equação diferencial para placas de Reissner-Mindlin (Arnold & Falk [18]). Escrevendo w e ϕ como expansões assintóticas da espessura t obtém-se

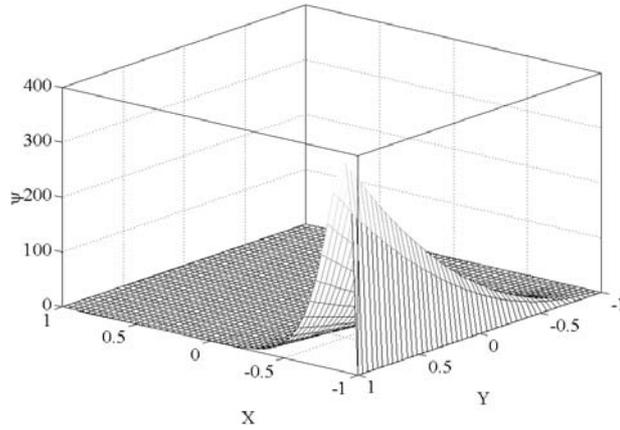


Figura 6.10: Função de fronteira com decaimento exponencial associada ao nó 1 do elemento 2 da Fig.6.5.

as expressões:

$$w \sim w_0 + tw_1 + t^2w_2 + \dots, \quad (6.11)$$

$$\phi \sim (\phi_0 + t\phi_1 + t^2\phi_2 + \dots) + \chi (\Phi_0 + t\Phi_1 + t^2\Phi_2 + \dots) \quad (6.12)$$

de forma tal que quando $t \rightarrow 0$, $w \rightarrow w_0$ e $\phi \rightarrow \phi_0 + \chi\Phi_0$.

Nas expansões (6.11) e (6.12) as funções w_i e ϕ_i , com $i = 0, 1, 2, \dots$, são suaves. χ é um operador que vale zero para pontos do domínio suficientemente afastados da fronteira e tem valor unitário para pontos suficientemente próximos da mesma. As funções Φ_i , com $i = 0, 1, 2, \dots$, são funções perturbadas exponencialmente pela espessura e tem a forma,

$$\Phi_i = e^{-\sqrt{12kr}/t} F_i(r/t, \theta). \quad (6.13)$$

Na expressão (6.13), k é o coeficiente de correção do cisalhamento, r é a distância de um ponto suficientemente próximo à fronteira na direção normal à mesma e θ o ângulo medido a partir do sistema global de coordenadas como indicado na Fig.6.9. As funções $F_i(r)$ são funções suaves e independentes de t . A convergência dos espaços construídos com estas funções será comentada a seguir.

6.5.1 Construção do espaço $Q(\Omega)$

O objetivo deste tópicó é construir um espaço com características locais específicas sobre as fronteiras, que representem de forma mais adequada os decaimentos exponenciais característicos dos fenômenos de camada limite em placas e cascas rasas semi-espessas. A idéia entretanto não é a de aproximar a solução de forma ótica (que tem que ser realizada com as autofunções do PVC), pois isto limitaria o espaço a um determinado tipo de problema. A proposta consiste em aproximar as parcelas suaves w e ϕ em Ω com funções polinomiais e as parcelas de $\Phi(x, y)$ em $\partial\Omega$ com as funções indicadas na expressão (6.13). Assim, o espaço de aproximação global Q pode ser escrito como:

$$Q = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \mathcal{V}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\alpha} \subset H^1_{(\Omega_{\alpha} \cap \Omega)}, \quad (6.14)$$

$$\mathcal{V}_{\alpha} = \text{span} \{Q_{\alpha}^p \cup \chi V_{\alpha}\}. \quad (6.15)$$

Em (6.15) o símbolo χ é dado por:

$$\chi \begin{cases} 1, & \mathbf{x}_{\alpha} \in \partial\Omega \\ 0, & \mathbf{x}_{\alpha} \notin \partial\Omega \end{cases}$$

onde \mathbf{x}_{α} é o vetor posição do centro da nuvem α .

O conjunto de funções de enriquecimento Q_{α}^p pode ser obtido conforme (3.9), se for por produto tensorial, ou por (3.11) se for obtido por produtos completos de polinômios. O conjunto $V_{\alpha} \subset \mathcal{V}_{\alpha}$ confere o comportamento local caracterizado pelo decaimento exponencial. O mesmo é dado pela expressão:

$$V_{\alpha} = \{e^{-\beta r/t} F(r/t, \theta), F \in P\} \quad (6.16)$$

Em (6.16) $P = \{1, r, r^2, \dots, r_n^{n-1}\}$ onde r e θ , mostrados na Fig.6.9, são a coordenada local medida na direção normal e o ângulo medido com relação à origem do sistema de coordenadas respectivamente. O coeficiente $\beta = \sqrt{12k}$ é característico do modelo cinemático de Mindlin para placas e cascas rasas.

A Fig.6.10 mostra a função $\mathcal{B}(\xi, \eta)_u e^{-\beta r/t}(r/t) \in \mathcal{V}_{\alpha}$ onde as funções de fronteira correspondem ao nó 1 do elemento e_2 da Fig.6.5. Da Fig.6.10 observa-se um comportamento estritamente local dos espaços otimizados na fronteira onde o valor da função varia bruscamente em regiões

localizadas a uma distância da fronteira da ordem da espessura. A potencialidade dos espaços locais construídos com as características supracitadas são discutidos no capítulo sete.

Capítulo 7

Resultados numéricos

7.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado um conjunto de exemplos numéricos com o objetivo de avaliar o desempenho dos espaços de aproximação construídos segundo MEFG, quando aplicados em modelos de placas e cascas de primeira ordem (Mindlin) e terceira ordem com normal extensível (Pandya & Kant [4]). Os exemplos contemplam estruturas de material homogêneo e composto por laminados. Três aspectos básicos são abordados nos exemplos. O primeiro diz respeito ao desempenho frente ao fenômeno de travamento (*locking*) de membrana e flexão em exemplos de material homogêneo, elástico linear e isotrópico. O segundo aspecto consiste na análise de convergência de campos primais e duais, em problemas regulares, para materiais homogêneos e compostos por laminados. Neste ponto são observados os aspectos qualitativos e quantitativos da convergência. O terceiro e último item desta análise diz respeito a versatilidade do espaço utilizado. Neste tópico é explorada a capacidade adaptativa do espaço de aproximação em problemas de camada limite em placas e cascas para os modelos de primeira e terceira ordem. Aqui são utilizadas as técnicas *hp* adaptativas, utilizadas em elementos finitos convencionais, acrescidas dos enriquecimentos *p*-ortotrópicos e a inclusão, em espaços locais específicos, de autofunções conhecidas da solução do problema em questão.

Os resultados deste capítulo são apresentados em quatro seções como segue:

7.1.1 Análise de travamento (*locking*).

Os resultados desta seção são observados através dos seguintes exemplos:

- i. Placa quadrada simplesmente apoiada (*hard*) com carga uniformemente distribuída no domínio.

O exemplo é complementado pela verificação da influência da distorção da malha.

- ii. Placa circular engastada com uma carga uniformemente distribuída no domínio.
- iii. Teto cilíndrico de *Scordelis-Lo*, apoiado em diafragma e sujeito a uma carga de gravidade.
- iv. Casca cilíndrica puncionada apoiada em diafragmas.
- v. Hemisfério submetido a cargas radiais defasadas de 90° e com sentidos alternados.
- vi. Casca cilíndrica com superfície de referência inextensível e carga de punção auto-equilibrada.

7.1.2 Análise de convergência em problemas regulares de placas

Estes resultados são obtidos para estruturas de material homogêneo e material composto por laminados e correspondem a valores locais normalizados e norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo do campo analisado. Para todos os exemplos que seguem a norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo de um campo genérico \mathcal{C} será definida por $\|E_{\mathcal{C}}\|_{L^2(\Omega)} = \|\mathcal{C}_a - \mathcal{C}\|_{L^2(\Omega)} / \|\mathcal{C}_a\|_{L^2(\Omega)}$, onde \mathcal{C}_a é o valor de referência e \mathcal{C} o valor obtido pela pelo MEEFG. A análise é feita observando o modelo cinemático utilizado para os seguintes elementos estruturais:

- i. Placa quadrada simplesmente apoiada (*hard*) e modelo de primeira ordem.
- ii. Placa circular engastada no contorno e modelo de primeira ordem.
- iii. Modelos de primeira ordem e de terceira ordem na análise de uma placa quadrada composta.

7.1.3 Análise de problemas regulares de cascas

Devido a ausência de soluções analíticas para a grande maioria dos problemas os resultados mostrados neste tópico são comparados com resultados equivalentes obtidos com elementos finitos convencionais e com soluções analíticas de cascas finas.

- i. Análise de casca cilíndrica sob pressão interna. Neste exemplo o modelo de primeira ordem e será comparado com a solução de casca fina obtida por série de Fourier (Nicolazzi [48]).

- ii. Verificação do caráter hierárquico dos modelos utilizados.
- iii. Verificação da sensibilidade à distorção da malha para a casca cilíndrica.

7.1.4 Problemas de camada limite

Nesta seção é analisado o problema de camada limite em placas e cascas para o modelo de primeira ordem (Mindlin) e para o modelo de terceira ordem com normal extensível. Esta análise é realizada para elementos estruturais de material homogêneo e isotrópico bem como para material composto por laminados. Os resultados são obtidos para os seguintes exemplos:

- i. Placa quadrada, com bordo livre, modelada por teoria de primeira ordem e sujeita a uma carga senoidal auto equilibrada.
- ii. Placa simplesmente apoiada (hard), modelada com teoria de primeira ordem, sob carga uniformemente distribuída.
- iii. Casca cilíndrica, modelada com teoria de primeira ordem e de material homogêneo e isotrópico, com borda livre sujeita a uma carga senoidal de tração auto-equilibrada.
- iv. Casca cilíndrica de material composto por laminado modelada com teoria de terceira ordem e sujeita a uma carga de tração senoidal auto-equilibrada.
- v. Teto parabólico raso constituído de material homogêneo e isotrópico modelado com teoria de primeira ordem e sujeito a uma carga de gravidade.
- vi. Teto parabólico raso constituído de material composto por laminado modelado com teoria de terceira ordem e sujeito a uma carga de gravidade.

7.2 Análise de travamento (*locking*)

De forma geral pode-se definir o travamento (*locking*) como a incapacidade do espaço de aproximação de satisfazer as restrições de deformação cisalhante e de membrana nulas quando a espessura do elemento estrutural tende a zero. Este fenômeno, que é mais freqüente no modelo de primeira ordem, pode ocorrer em modelos de ordem superior com a deterioração do espaço de

aproximação (malhas distorcidas, matriz de rigidez mal condicionada etc.). O mesmo se manifesta em problemas dominados por mecanismos de flexão. A parcela de energia de deformação correspondente à flexão tende ao valor nulo mais rapidamente que as parcelas de energia de cisalhamento e de membrana. Os sintomas desta patologia numérica se traduzem num aumento de rigidez da estrutura a medida que a espessura tende a zero. A baixa ordem do modelo utilizado e do espaço de aproximação tem sido contornada em MEF através da sub integração da matriz de rigidez do elemento. Este procedimento foi utilizada por Huang & Hinton [15] para contornar travamento de membrana no teto cilíndrico de *Scordelis-Lo* e Belytschko et alli [81] no problema da casca cilíndrica puncionada. O procedimento de sub integração, largamente difundido em elementos finitos convencionais pelo seu baixo custo de utilização, apresenta o inconveniente de poder gerar modos espúrios de deformação. Estes modos, também conhecidos por modos de *Hourglass*, se caracterizam por apresentar energia de deformação nula e devem ser estabilizados sob pena de gerar uma matriz de rigidez global singular. Outros procedimentos tem dado bons resultados em elementos finitos como o refino p utilizando elementos de alta ordem como apresentado no trabalho de Della Croce & Scapolla [49] ou através de bases hierárquicas apresentado em Novotny & Fancello [1]. Neste último trabalho os autores ratificam resultados apresentados por outros autores onde para espaços de aproximação gerados com polinômios de quarta ordem não se observa travamento de cisalhamento. Nesta seção é verificada a capacidade do espaço de aproximação, construído segundo a filosofia do MEEG, evitar o travamento de cisalhamento e membrana para espaços construídos por refino p homogêneo. Para tal são utilizados exemplos através dos quais se pretende observar a influência da distorção da malha, das condições de contorno, da geometria e dos efeitos de membrana e flexão.

7.2.1 Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno

Este exemplo consta de uma placa quadrada simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído no domínio cujas dimensões e propriedades materiais são indicadas na Fig.7.1. Esta análise objetiva verificar o efeito de deterioração do espaço de aproximação através da distorção da malha. Devido à simetria da geometria e do carregamento é modelado apenas o quadrante inferior na Fig.7.1. Os resultados correspondem aos valores máximos do

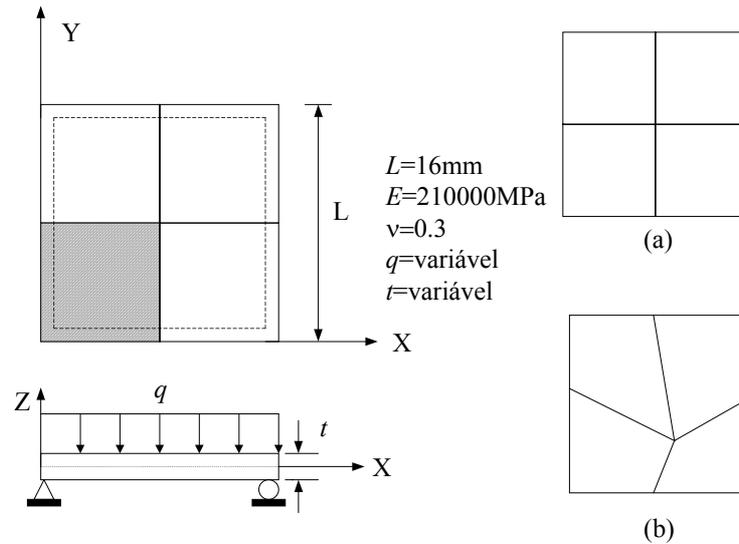


Figura 7.1: Placa quadrada simplesmente apoiada; (a) malha regular 4 elementos Q8; (b) malha distorcida 4 elementos Q8.

deslocamento transversal, normalizados em relação à solução de placa fina de Timoshenko et alli [72]. Os resultados são obtidos para uma malha regular e outra distorcida. Nos dois casos o domínio é discretizado por uma malha de quatro elementos quadrangulares e o espaço de aproximação construído por refino p homogêneo. Neste exemplo é utilizada integração cheia com regra de quadratura máxima de 6×6 pontos de Gauss por elemento. Os resultados são apresentados nas Fig.7.2(a) e 7.2(b).

Observando os resultados da Fig.7.2(a) e (b) constata-se que mesmo para espaços de aproximação construídos com bases polinomiais de $p = 4$ ocorre travamento, em ambas as situações, para uma razão $L/t \geq 10^4$. Por outro lado observa-se, na Fig.7.2(b), que o efeito de distorção da malha não produz uma deterioração do espaço ao ponto de apresentar discrepâncias acentuadas nos resultados obtidos com malha regular (Fig.7.2(a)). Os efeitos da influência da geometria são analisados através de uma placa circular engastada no contorno como mostrado a seguir.

7.2.2 Placa circular engastada no contorno

Este exemplo consiste numa placa circular engastada no contorno sujeita a uma carga uniformemente distribuída no domínio. Devido à simetria analisa-se somente o quadrante superior direito como indicado na Fig.7.3. O quadrante é discretizado com doze elementos quadrangu-

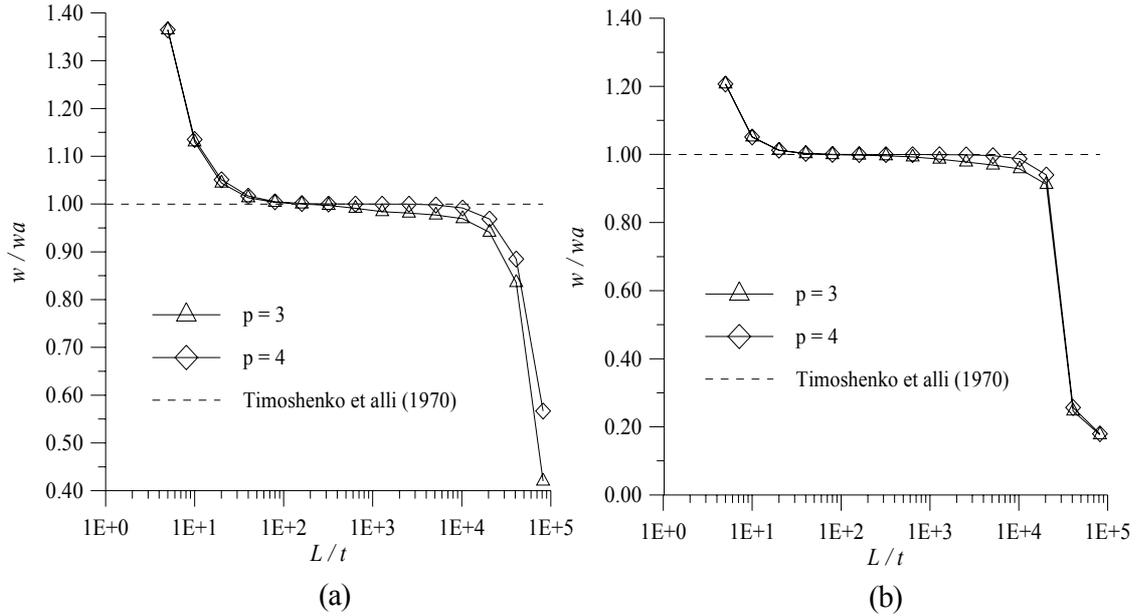


Figura 7.2: Valores normalizados w/w_a , (a) malha regular; (b) malha distorcida.

lares e um número máximo de 6×6 pontos de Gauss. O espaço de aproximação é construído com refino homogêneo $p = 3$ e $p = 4$ respectivamente. Os resultados deste exemplo são apresentados na Fig.7.4, onde se mostra o valor máximo de deslocamento transversal w normalizado em relação à solução analítica de placa fina de Timoshenko et alii [72].

Verifica-se, a ocorrência de travamento para valores $2R/t \geq 10^2$ para $p = 3$ e $2R/t \geq 10^4$ para $p = 4$. Comparando estes resultados com os obtidos para placas quadradas, observa-se uma incapacidade maior do espaço gerado com $p = 3$ para contornar o fenômeno de travamento, mesmo para espessuras de ordem prática. Já que em ambas as situações existe o problema da distorção da malha, acredita-se na influência do engaste que constitui uma condição de contorno crítica nos problemas de travamento.

Até o presente momento foi analisado o travamento de cisalhamento característico de problemas de flexão de placas. Entretanto, problemas similares ocorrem nas estruturas que sofrem esforços acoplados de flexão e membrana, ocorrendo o efeito conhecido como travamento de membrana. Os exemplos mostrados a seguir tem a finalidade de verificar o comportamento do espaço de aproximação na abordagem do fenômeno de travamento, de cisalhamento e membrana, bem como a capacidade de representar mecanismos complexos de membrana e flexão.

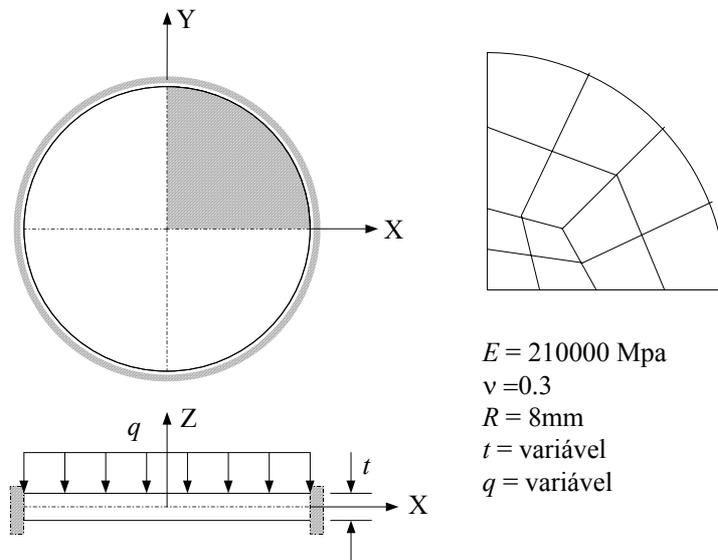


Figura 7.3: Placa circular engastada no contorno.

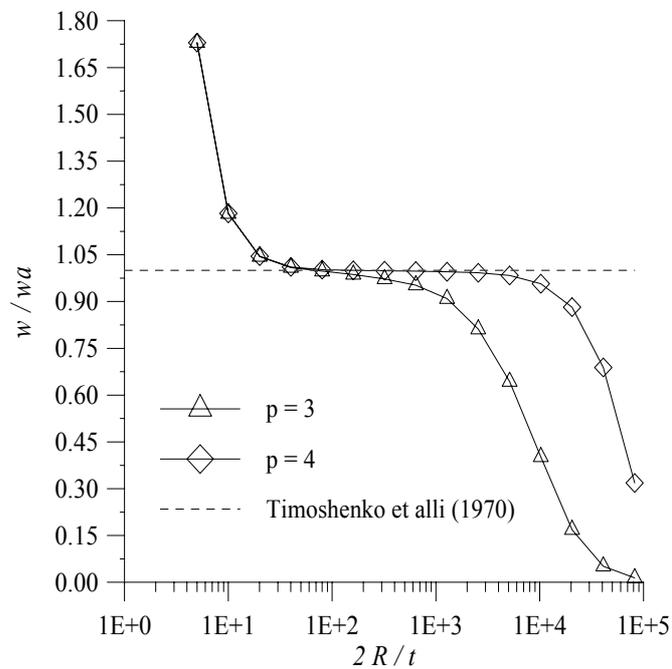


Figura 7.4: Deslocamento transversal máximo normalizado w/w_a .

7.2.3 Teto cilíndrico de Scordelis-Lo

Este exemplo é utilizado para verificar a capacidade do espaço de aproximação de representar campos complexos de deformações de membrana. Ele foi sugerido por Huang & Hinton [15] para verificar o travamento de membrana.

A estrutura observada constitui-se de um teto cilíndrico com as extremidades curvas apoiadas em diafragmas rígidos na direção radial e flexíveis na direção longitudinal. Os contornos laterais são livres (Fig.7.5). Esta estrutura está sujeita a uma carga de gravidade uniformemente distribuída sobre a superfície. As características geométricas e materiais são mostradas na Fig.7.5, sendo analisado apenas um octante da estrutura. A região analisada é discretizada com 2×2 elementos quadriláteros e integração cheia, de 8×8 pontos de Gauss. Aqui são comparados resultados do deslocamento transversal w no ponto B com os equivalentes obtidos através da solução analítica de MacNeal & Harder [66]. Os valores numéricos foram obtidos por refino p homogêneo, utilizando os modelos cinemáticos de primeira e terceira ordem.

A Fig.7.6, mostra ausência de travamento de membrana e convergência assintótica do deslocamento transversal, para ambos os modelos. Observa-se, para os dois modelos cinemáticos, que a convergência é atingida com espaços gerados com $p = 3$ sendo que o aumento da ordem polinomial não produz variações significativas, mesmo para o pequeno número de elementos utilizados. Observa-se também uma rigidez maior do modelo de terceira ordem que converge para um valor menor que aquele utilizado como referência. Este fato se deve a que o modelo de terceira ordem se comporta como um modelo sólido já que neste caso a rigidez transversal não é negligenciada como ocorre no modelo de primeira ordem, e a condição de engaste é mais restritiva que a do modelo de primeira ordem.

7.2.4 Casca cilíndrica puncionada

Neste exemplo, proposto por Belytschko et alli [81], é posta a prova a capacidade dos modelos utilizados e do espaço de aproximação, construído segundo a filosofia do MEF, de descrever estados complexos de membrana e flexão. Este consiste numa casca cilíndrica apoiada em diafragmas nas duas extremidades curvas indicada na Fig.7.7. Estes diafragmas são rígidos no

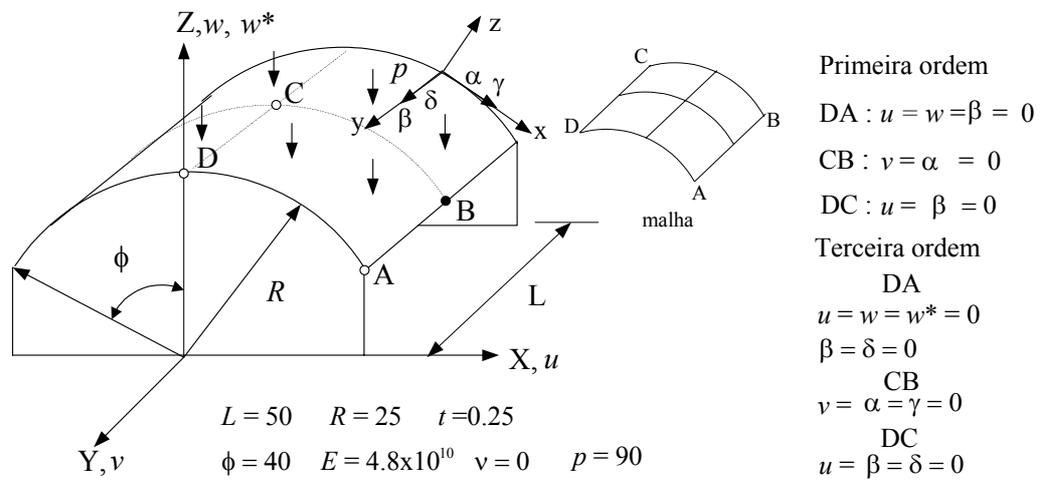


Figura 7.5: Teto cilíndrico de Scordelis-Lo.

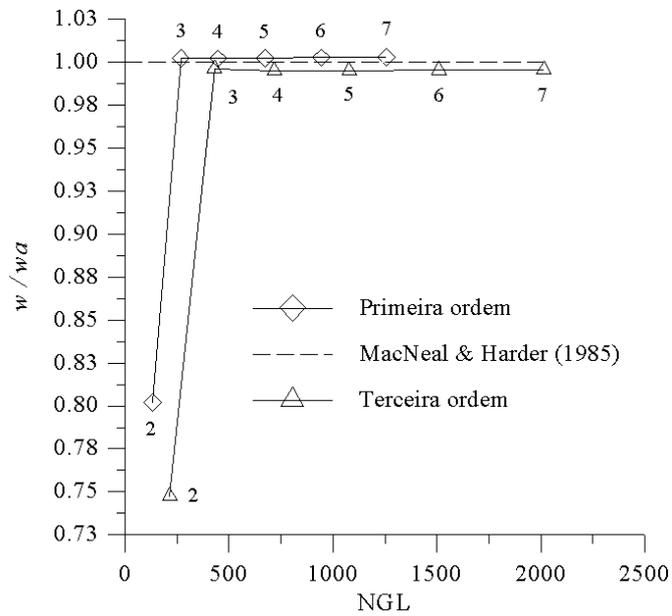


Figura 7.6: Razão w/w_a , no ponto B para os modelos de primeira e terceira ordem.

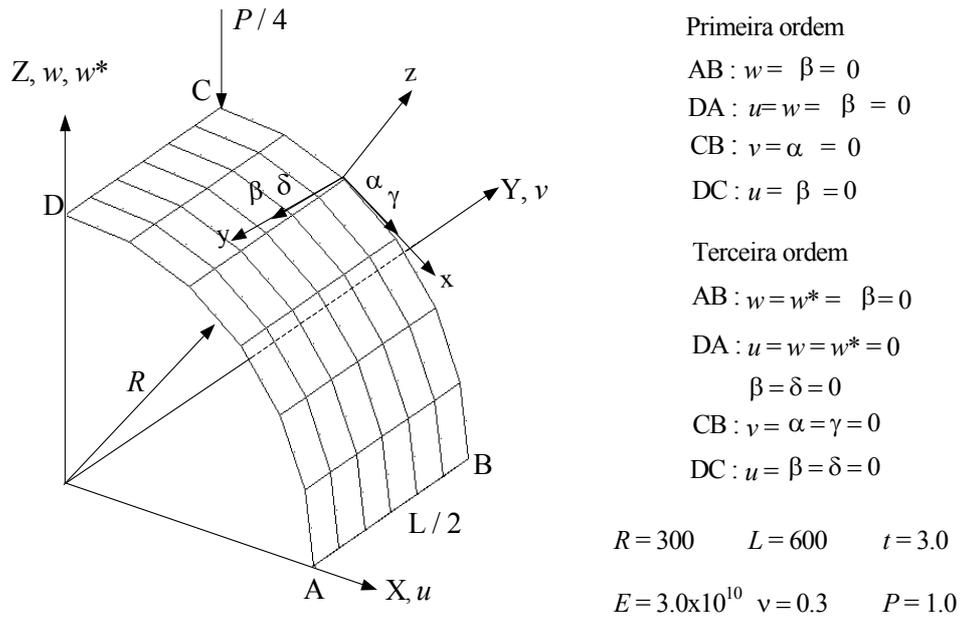


Figura 7.7: Octante de uma casca cilíndrica sob carga de punção.

plano do apoio e flexíveis no plano perpendicular ao apoio. A casca cilíndrica é submetida a ação de duas forças diametralmente opostas aplicadas no centro da estrutura. Devido à simetria é analisado somente o primeiro octante com uma malha de 6×6 elementos quadrangulares e regra de quadratura máxima de 8×8 pontos de Gauss por elemento. Os resultados analisados referem-se ao deslocamento transversal w do ponto C (Fig.7.7) normalizado com relação à solução apresentada por Belytschko et alli [81]. Estes resultados, mostrados na Fig.7.8, são obtidos por refino p -homogêneo para os modelos cinemáticos de primeira e terceira ordem respectivamente.

Pela análise de resultados da Fig.7.8, constata-se convergência assintótica e ausência de travamento de membrana para espaços construídos com $p \geq 4$. Os resultados observados mostram uma pequena diferença nos limites de convergência do modelo de primeira ordem com relação ao modelo de terceira ordem ambos ligeiramente superiores à solução de Belytschko et alli [81].

7.2.5 Hemisfério puncionado

O exemplo a seguir consiste de uma casca hemisférica submetida a cargas radiais defasadas de 90° e de sentidos alternados como mostrado na Fig.7.9. Este exemplo tem como finalidade

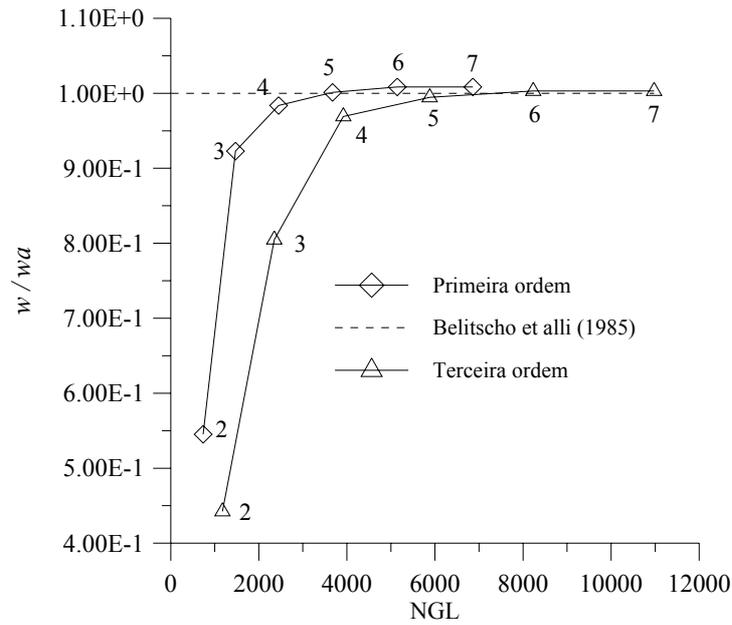


Figura 7.8: Razão w/w_a no ponto C para os modelos de primeira e terceira ordem.

verificar a capacidade dos modelos cinemáticos e do espaço de aproximação de representar mecanismos de flexão sem distensão de membrana, já que neste exemplo as deformações de membrana são pequenas. Este problema também é adequado para verificar as rotações de corpo rígido que surgem nos elementos mais afastados dos pontos de aplicação do carregamento. Devido à simetria é analisado o primeiro octante discretizado com uma malha regular de 6×6 elementos quadrangulares e integração cheia com um número máximo de 8×8 pontos de Gauss por elemento. Os resultados do deslocamento u do ponto A (Fig.7.9) são normalizados com relação à solução analítica de MacNeal & Harder [66] e obtidos com um espaço de aproximação p -uniforme para os modelos de primeira e terceira ordem (Fig.7.10).

Como nos resultados anteriores, a partir de espaços contruídos com base polinomial de quarta ordem, não se verificam os efeitos de travamento. Novamente, aqui se constata uma convergência assintótica dos espaços construídos por refino p homogêneo. Este exemplo apresenta um comportamento de convergência similar aos exemplos anteriores, onde, a partir de $p \geq 4$, os resultados não sofrem praticamente alterações.

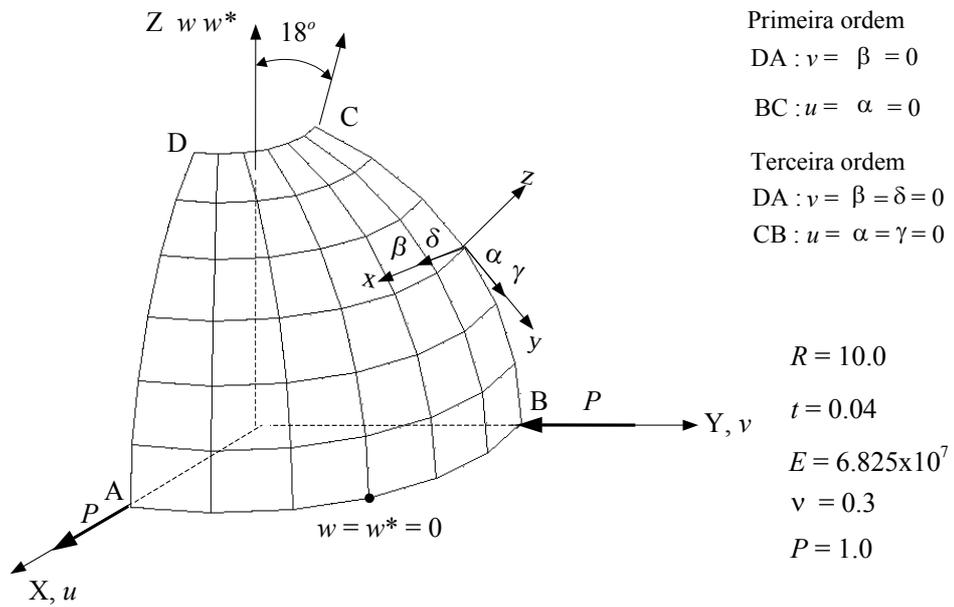


Figura 7.9: Octante de um hemisfério com carga de punção alternada.

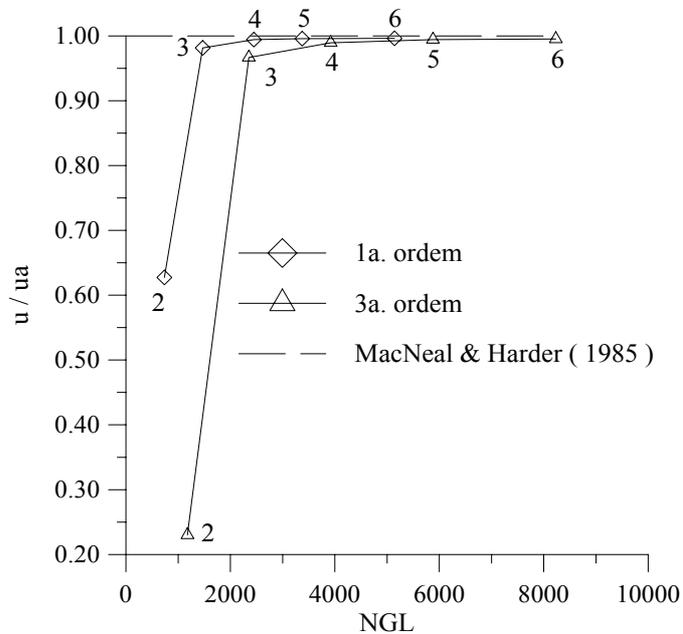


Figura 7.10: Razão $\frac{u}{u_a}$, no ponto A para os modelos de primeira e terceira ordem.

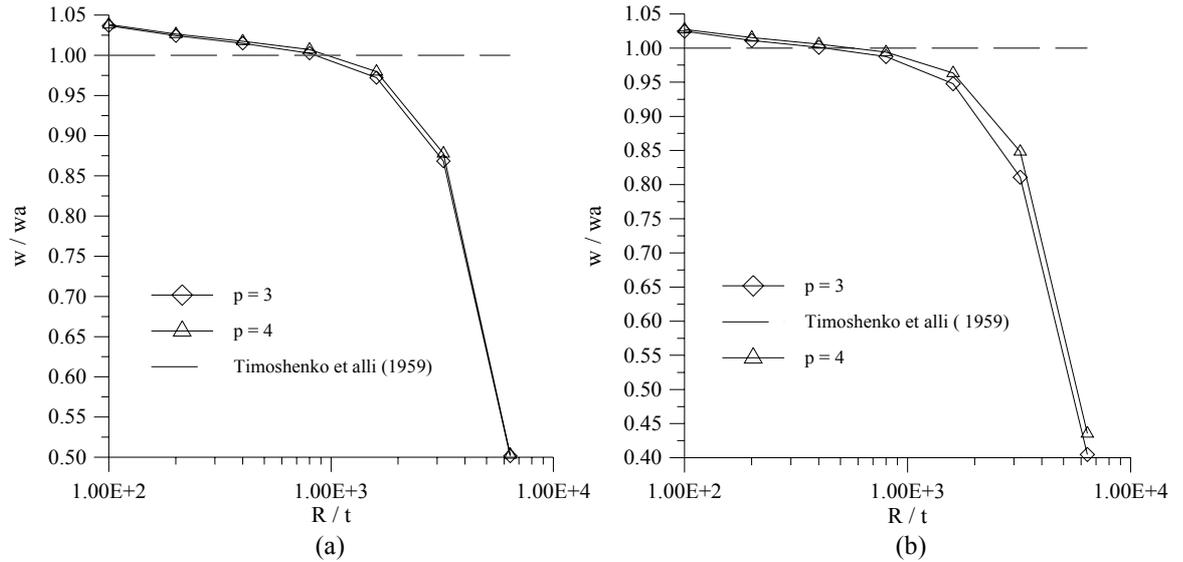


Figura 7.11: Razão $\frac{w}{w_a}$ no ponto C da Fig.7.7 ; (a) modelo de primeira ordem, (b) modelo de terceira ordem.

7.2.6 Casca cilíndrica com carga de punção auto-equilibrada

O exemplo mostrado a seguir consta de uma casca cilíndrica com carregamento de punção auto-equilibrado. A mesma tem dimensões e propriedades materiais indicadas na Fig.7.7, sendo que neste caso, o octante analisado é discretizado com uma malha regular de 8×8 elementos quadrangulares. Este exemplo constitui um caso crítico de travamento de membrana. A casca, com as extremidades livres, não apresenta deformações na superfície de referência no sentido longitudinal. Entretanto, devido ao carregamento não ser axi-simétrico predominam esforços de flexão no sentido axial e esforços membranais radiais elevados. Visto que, quando a espessura tende a zero, a energia de flexão tende a zero mais rapidamente que a de cisalhamento e a de membrana é de se esperar que para espessuras muito pequenas os mecanismos de deformação sejam dominados por esforços membranais. Neste exemplo é verificado o comportamento dos modelos de primeira e terceira ordem para espaços construídos por refino homogêneo e isotrópico, com $p = 3$ e $p = 4$ para ambos os modelos. Os resultados mostrados são o deslocamento trasversal no ponto C, Fig.7.7, normalizado em relação à solução analítica apresentada em Timoshenko et alli [72], (Fig.7.11(a) e Fig.7.11(b)).

As Fig.7.11(a) e Fig.7.11(b) mostram um comportamento semelhante para ambos os mod-

elos. Constata-se, entretanto, que mesmo para espaços construídos com polinômios de quarta ordem não se consegue evitar o travamento para uma razão $\frac{R}{t} \geq 10^3$. Para uma situação de integração completa, como a utilizada neste exemplo, os resultados obtidos não frustraram as expectativas, já que os travamentos fortes de membrana, como é o caso deste exemplo, não são evitados por refinamentos p além de um determinado limite da razão $\frac{R}{t}$.

Com os resultados apresentados acima encerra-se esta seção, concluindo-se que, embora os espaços gerados com as bases polinomiais utilizadas não apresentem travamento para espessuras de interesse prático, do ponto de vista matemático o fenômeno ocorre. Os espaços gerados com esta metodologia mostram, nos exemplos de placas de Mindlin, resultados compatíveis e inferiores aos obtidos pelo *hp-Clouds* (Garcia et alii [54]) e elementos finitos utilizando bases hierárquicas (Novotny & Fancello [1]).

7.3 Análise de convergência em problemas regulares de placas

Esta seção analisa o desempenho do espaço de aproximação e dos modelos cinemáticos de primeira e terceira ordem na simulação numérica de problemas regulares de placas. As análises são realizadas para os exemplos a seguir:

7.3.1 Placa quadrada simplesmente apoiada

Este exemplo é uma reanálise do caso mostrado na Fig.7.1 com uma espessura de 0.1mm e sob uma carga uniformemente distribuída no domínio de 0.1 MPa. Os resultados correspondem às malhas da Fig.7.1(a) e 7.1(b) e um espaço de aproximação p -homogêneo. Os resultados para a norma $L^2(\Omega)$ erro relativo do deslocamento transversal w e do momento M_{xx} são mostrados nas Fig.7.12 e a Fig.7.13 respectivamente para refinamentos p . Os valores máximos locais do deslocamento transversal w foram normalizados com relação à solução analítica de Marguerre & Woernle [46]. A Fig.7.12(a) mostra a influência da distorção da malha na deterioração do espaço de aproximação. Este fato pode ser confirmado pela diminuição da taxa de convergência da curva da malha distorcida com relação a taxa de convergência da malha regular. Através dos resultados da Fig.7.12(b) constata-se que os valores obtidos com malha distorcida não diferem

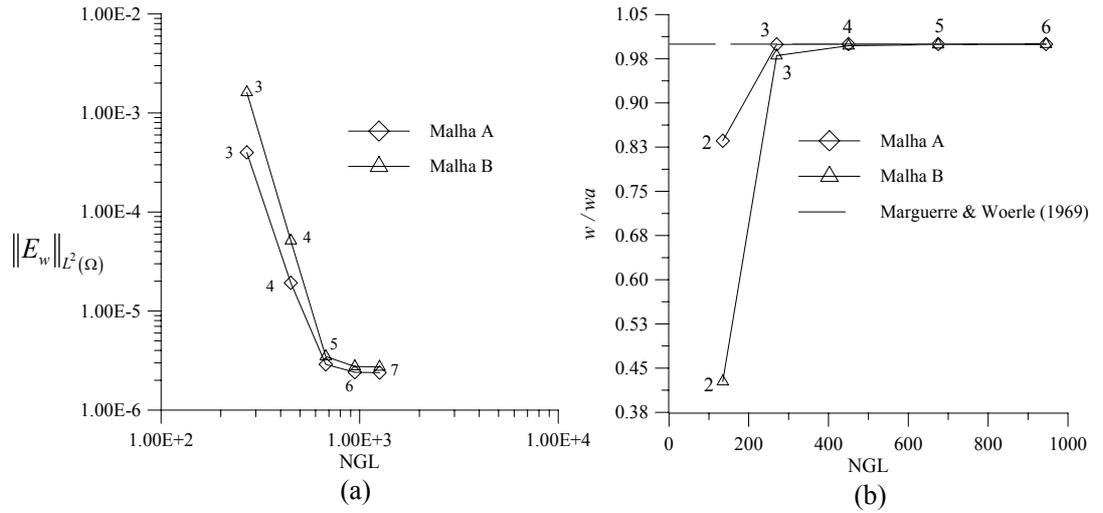


Figura 7.12: (a) Norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo de w ; (b) valores normalizados $\frac{w}{w_a}$.

significativamente daqueles com malha regular para bases polinomiais com $p \geq 3$. Dos resultados observados nas Fig.7.12(a) e Fig.7.12 (b) conclui-se que não há um efeito acentuado na perda de convergência para o caso de malhas distorcidas e como esperado o mesmo é atenuado pelo refino p . Um comportamento semelhante ao observado para o erro da norma de deslocamento ocorre para o momento M_{xx} mostrado na Fig.7.13. Os resultados do erro relativo da norma $L^2(\Omega)$ do momento M_{xx} mostram um pequeno efeito da distorção da malha que é sensível para valores baixos de p e é praticamente eliminado com o incremento da ordem polinomial.

7.3.2 Placa circular engastada no contorno

Este exemplo é o mesmo do caso mostrado na Fig.7.3 utilizando uma espessura de 0,1 mm e carga distribuída de 0,1 MPa. A região observada é o primeiro quadrante discretizado com 12 elementos quadrangulares e no máximo 8×8 pontos de integração de Gauss. Os resultados do deslocamento transversal w_r e do momento radial M_{rr} são apresentados nos gráficos da Fig.7.14 e da Fig.7.15, normalizados em relação à solução analítica de Marguerre & Woernle [46].

Os resultados observados nas Fig.7.14(a) e 7.14(b) mostram valores satisfatórios para a convergência tanto em norma $L^2(\Omega)$ como para valores locais máximos do deslocamento transversal

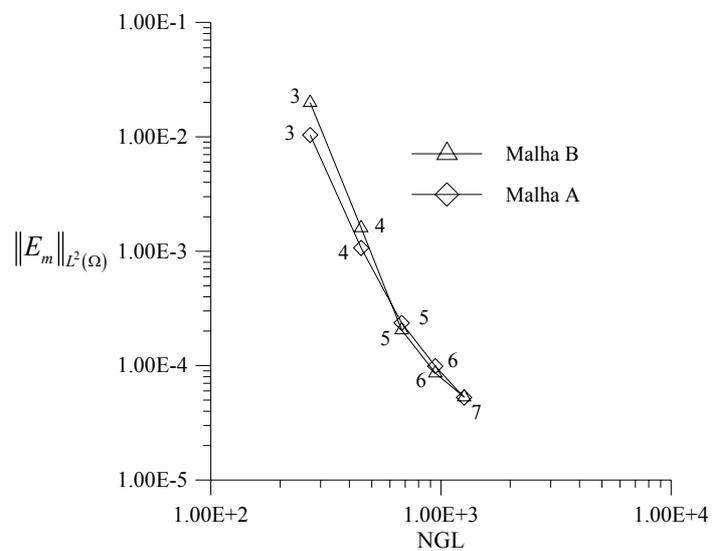


Figura 7.13: Norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo do momento M_{xx} .

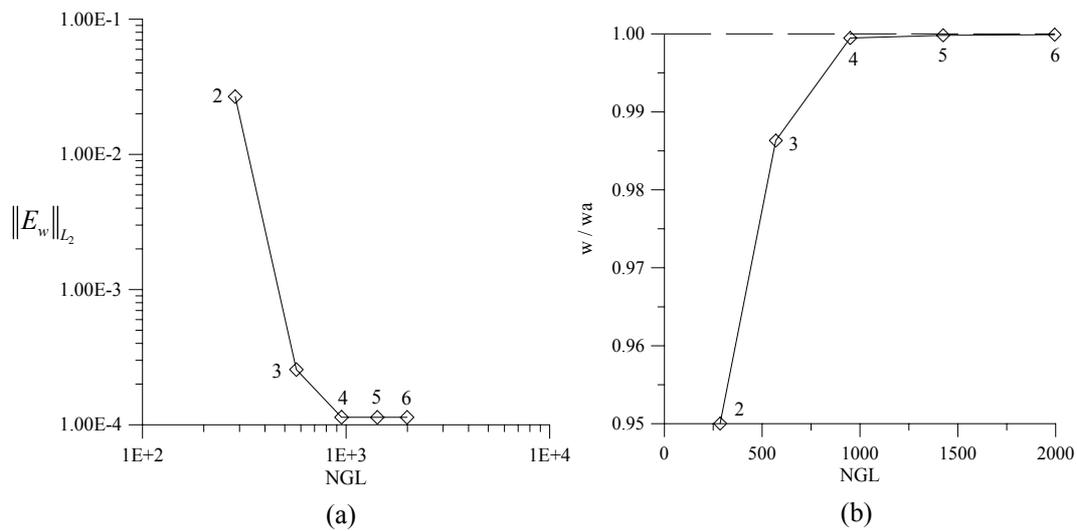


Figura 7.14: (a) Norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo E_w , (b) valores normalizados w/w_a .

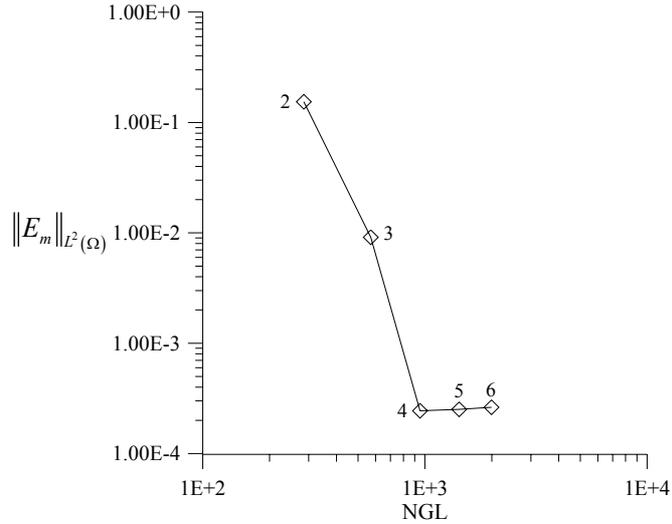


Figura 7.15: Norma $L^2(\Omega)$ do erro relativo do momento radial M_{rr} .

w. Como a solução analítica deste exemplo é uma polinomial de quarta ordem o comportamento de convergência mostrado na Fig.7.14(a) era esperado, entretanto, resultados melhores podem ser obtidos se a representação geométrica da fronteira circular for exata que não é esta situação. O comportamento de convergência do momento radial M_{rr} é similar ao do deslocamento contudo a partir de quarta ordem observa-se uma ligeira perda de convergência indicada por um aclave da curva da Fig.7.15 este fato é atribuído, como no deslocamento, a perda de precisão ocasionada pela representação inadequada do contorno curvo aliada a resultados mais pobres obtidos para as variáveis duais.

Os casos estudados até o momento foram de estruturas de material homogêneo e isotrópico. O exemplo a seguir apresenta o caso de uma placa de material composto laminado.

7.3.3 Placa quadrada de material composto laminado

Este exemplo analisa uma placa quadrada simplesmente apoiada sujeita a uma carga senoidal distribuída no domínio (Fig.7.16). A estrutura é construída de quatro lâminas transversamente isotrópicas formando um laminado simétrico com orientação de fibras $[0/90]_s$ mostrado na Fig.7.16. Por apresentar simetria é analisado apenas o quadrante inferior discretizado com 2×2 elementos quadrangulares, com ordem polinomial $p = 4$. Os resultados obtidos para deslocamentos e tensões são adimensionalizados pela geometria, carregamento e propriedades

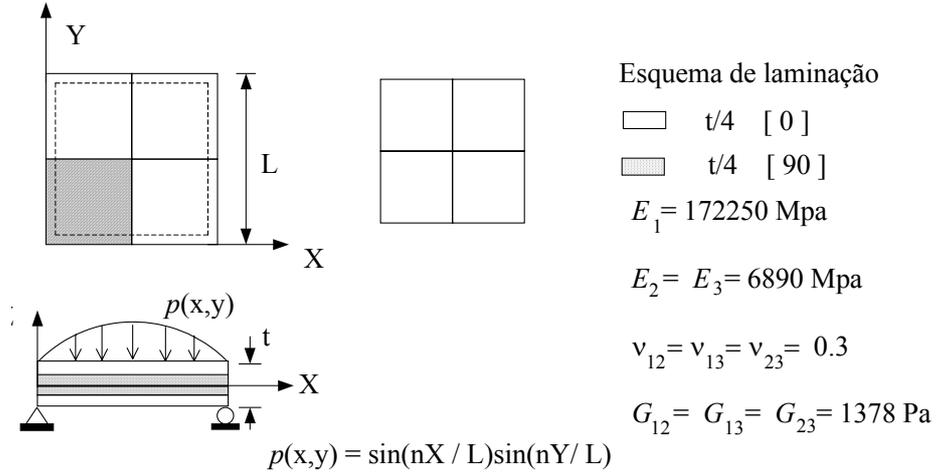


Figura 7.16: Placa quadrada, simplesmente apoiada, composta do tipo $[0/90]_s$.

materiais como indicado a seguir:

$$\bar{w} = w \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, 0 \right) \frac{t^3 E_2 \cdot 10^2}{q_o L^4},$$

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{t}{2} \right), \quad \bar{\sigma}_y = \sigma_y \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{t}{4} \right) \frac{t^2}{q_o L^2},$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy} \left(0, 0, \frac{t}{2} \right) \frac{t^2}{q_o L^2},$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \tau_{yz} \left(\frac{L}{2}, 0, 0 \right) \frac{t}{q_o L}, \quad \bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz} \left(0, \frac{L}{2}, 0 \right) \frac{t}{q_o L}.$$

Estes valores são comparados com a solução da elasticidade tridimensional de Pagano [51] e as teorias HSDT e FSDT propostas por Reddy (Mendonça [55]). Os resultados do exemplo são apresentados nas Tab.7.1 e Tab.7.2. Para facilitar a identificação dos resultados na tabela são denominados como MEFG(1) e MEFG(3) os valores obtidos com os modelos cinemáticos de primeira e terceira ordem respectivamente.

Na análise dos resultados da Tab. 7.1 verifica-se a limitação dos modelos de primeira ordem para a razão $L/t = 4$ onde o erro em deslocamento transversal com relação e teoria HSDT e a solução de Pagano [51] são de 9,73% e 11,83% respectivamente. Constata-se com isto o papel preponderante desempenhado pelo modelo de terceira ordem onde para a razão $L/t = 4$ os erros decrescem para 1,1% e 3,3% respectivamente. Esta diferença significativa nas resposta do

$\frac{L}{t}$	Teoria	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$
4	MEFG(1)	1.7094	0.4102	0.5825
	MEFG(3)	1.8727	0.7134	0.6239
	Pagano	1.9367	0.7200	0.6630
	HSDT	1.8937	0.66510	0.6322
	FSDT	1.7100	0.4059	0.5765
10	MEFG(1)	0.6637	0.5042	0.3652
	MEFG(3)	0.7179	0.5658	0.3942
	Pagano	0.7370	0.5590	0.4010
	HSDT	0.7147	0.5456	0.3888
	FSDT	0.6628	0.4989	0.3615
100	MEFG(1)	0.4343	0.5438	0.2733
	MEFG(3)	0.4343	0.5445	0.2737
	Pagano	0.4347	0.5390	0.2710
	HSDT	0.4343	0.5387	0.2708
	FSDT	0.4337	0.5382	0.2705

Tabela 7.1: Valores normalizados do deslocamento transversal e de tensões membranais.

$\frac{L}{t}$	Teoria	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
4	MEFG(1)	0.0311	0.11772	0.16521
	MEFG(3)	0.0455	0.2260	0.2763
	Pagano	0.0467	0.2190	0.2920
	HSDT	0.0440	0.2064	0.2389
	FSDT	0.0308	0.1398	0.1963
10	MEFG(1)	0.02438	0.1402	0.10881
	MEFG(3)	0.02744	0.2868	0.1614
	Pagano	0.02750	0.3010	0.1960
	HSDT	0.0268	0.2640	0.1531
	FSDT	0.0241	0.1667	0.1292
100	MEFG(1)	0.02153	0.1498	0.08508
	MEFG(3)	0.02157	0.3185	0.1165
	Pagano	0.0214	0.3390	0.1390
	HSDT	0.0213	0.2897	0.1117
	FSDT	0.0213	0.1780	0.1009

Tabela 7.2: Tensões transversais normalizadas.

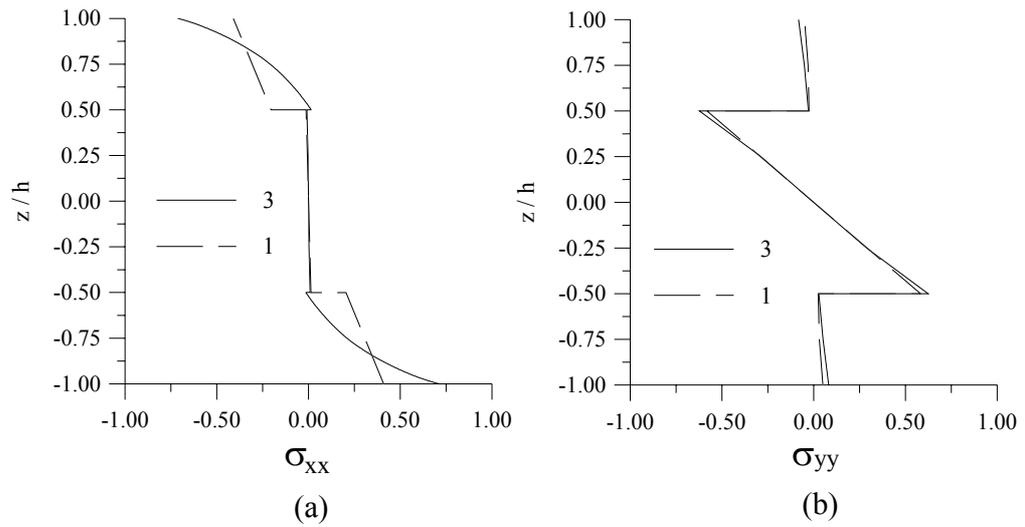


Figura 7.17: Tensões ao longo de z ponto $(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, z)$; (a) tensão σ_{xx} , (b) tensão σ_{yy} .

modelo de terceira ordem com relação ao de primeira ordem provém do fato que os mecanismos de deformação transversal para uma relação $L/t = 4$ são devidos, quase que exclusivamente, ao cisalhamento. Na segunda análise deste exemplo observa-se a distribuição das tensões para a razão $L/t = 4$. Os resultados observados referem-se à variação das tensões σ_{xx} e σ_{yy} , ao longo da espessura do laminado, no ponto $(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, z)$.

As Fig.7.17(a) e 7.17(b) mostram a distribuição descontínua das tensões σ_{xx} e σ_{yy} através do laminado. Embora os campos de deslocamentos sejam contínuos através do laminado, a mudança de propriedades materiais nas faces interlaminares produz a descontinuidade do campo de tensões. Além disto é observada uma diferença quantitativa e qualitativa na distribuição das tensões do modelo de terceira ordem em relação ao modelo de primeira ordem. Esta diferença fica evidente na variação da tensão σ_{xx} das lâminas extremas do laminado onde o modelo de terceira ordem(MEFG(3)) apresenta uma variação cúbica em “ z ” e o modelo de primeira ordem(MEFG(1)) uma variação linear em “ z ”.

Um dos aspectos relevantes da simulação numérica de estruturas de material composto laminado diz respeito à determinação da distribuição contínua das tensões cisalhantes τ_{xz} e τ_{yz} através do laminado. Neste trabalho foi utilizado o processo de integração das equações de equilíbrio da elasticidade tridimensional apresentada por Kant & Manjunatha [75]. O gradiente

do tensor de tensões de *Cauchy* foi obtida por diferenças finitas centrais. Os resultados da distribuição transversal de tensões τ_{xz} e τ_{yz} , para o exemplo anterior, é mostrada na Fig.7.18(a) e 7.18(b) para os pontos $(0, \frac{L}{2}, z)$ e $(\frac{L}{2}, 0, z)$ respectivamente.

A Fig.7.18 mostra a distribuição das tensões obtidas por relação constitutiva, em linha pontilhada “b”, e as obtidas através da integração das equações de equilíbrio da elasticidade tridimensional em linha cheia “a”. Já que as teorias utilizadas neste trabalho não consideram condições de contorno naturais interlaminares, os resultados obtidos via relação constitutiva, mostram uma distribuição descontínua para as tensões cisalhantes sem satisfazer as condições de contorno na superfície livre do laminado. Este fato é constatado nas Fig.7.18(a) e 7.18(b) onde as tensões tangenciais τ_{xz} e τ_{yz} são descontínuas nas interfaces das lâminas e não são equilibradas na superfície livre do laminado. Deve-se ressaltar que os resultados obtidos desta forma são fisicamente inconsistentes e não devem ser considerados na análise de resistência do laminado. Os resultados obtidos pela integração das equações $\tau_{xz} = \int_h \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dz$ e $\tau_{yz} = \int_h \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) dz$ fornecem uma distribuição contínua do campo através da espessura (Mendonça [55]). Os valores normalizados para as tensões τ_{xz} e τ_{yz} , com relação à solução de Pagano [51], registrados nos pontos $(0, \frac{L}{2}, 0)$ e $(\frac{L}{2}, 0, 0)$ são 1.032 e 0.9462. Embora o processo de diferenças finitas não seja o mais conveniente para aproximar funções de alta ordem, no caso de se utilizar espaços construídos com enriquecimento p , os resultados obtidos mostraram-se satisfatórios com relação à solução analítica.

7.4 Análise de problemas regulares em cascas

A análise de comportamento e convergência da solução em problemas de cascas possui a dificuldade de não dispor, em geral, de soluções analíticas. Assim, os exemplos aqui utilizados são comparados com soluções analíticas de cascas finas ou com soluções numéricas. Portanto, nesta seção não se comentará a convergência e sim a proximidade de resultados com relação aqueles obtidos por outros procedimentos como elementos finitos convencionais e soluções analíticas de cascas finas. Os exemplos apresentados nesta seção tem como finalidade mostrar a potencialidade do caráter p adaptativo do método frisando três aspectos. O primeiro diz respeito

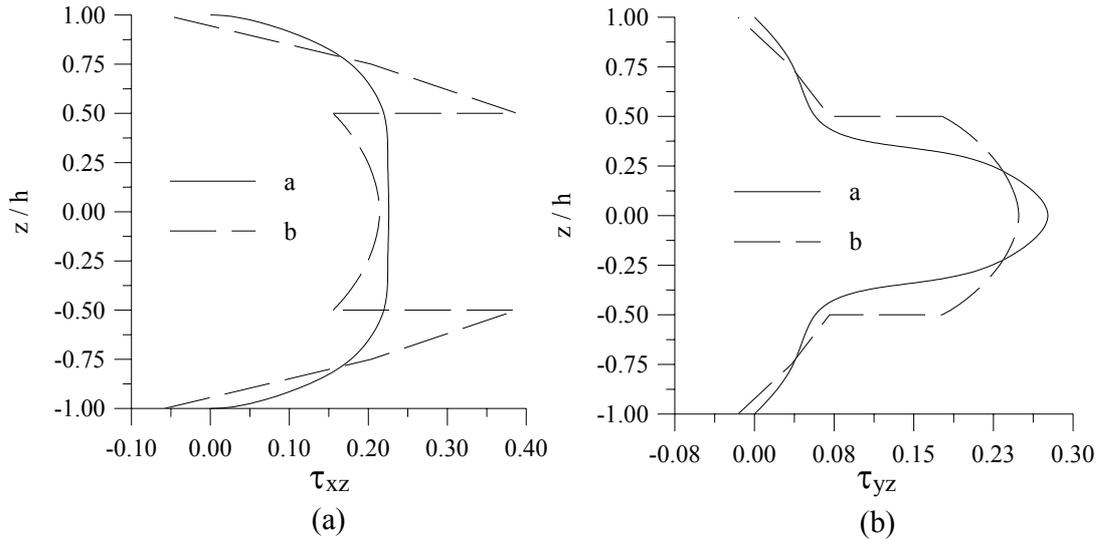


Figura 7.18: (a) Tensão τ_{xz} nos pontos $(0, \frac{L}{2}, z)$; (b) tensão τ_{yz} nos pontos $(\frac{L}{2}, 0, z)$.

à capacidade dos espaços de aproximação representar os efeitos de camada limite fracas que ocorrem devido às perturbações dos apoios. O segundo aspecto analisa o carácter hierárquico dos modelos de primeira e terceira ordem. Finalmente o último aspecto analisado observa os efeitos da distorção da malha nos resultados de campos primais.

7.4.1 Casca cilíndrica sob pressão interna

Este exemplo consiste num setor de reservatório cilíndrico de material homogêneo elástico linear isotrópico, sob pressão interna uniforme (Fig.7.19(a)). Suas extremidades estão apoiadas em diafragmas rígidos no plano transversal ao cilindro e flexível no plano perpendicular ao apoio. Os resultados obtidos correspondem ao modelo de primeira ordem e a espaços construídos com refino p homogêneo. Devido à simetria é analisado um octante da casca com 6×6 elementos quadrangulares (Fig.7.19(b)) sob os quais será utilizada uma quadratura numérica máxima de 8×8 pontos de Gauss. Os resultados obtidos referem-se a momentos M_{yy} , esforços normais N_{xx} e deslocamentos radiais w_r através do meridiano DC (Fig.7.19). Estes resultados são comparados com a solução de casca fina obtida por séries de Fourier (Nicolazzi [48]).

Da Fig.7.20 observam-se valores do deslocamento radial w_r próximos aos obtidos pela solução analítica utilizando séries de Fourier. Um outro aspecto relevante desta análise é

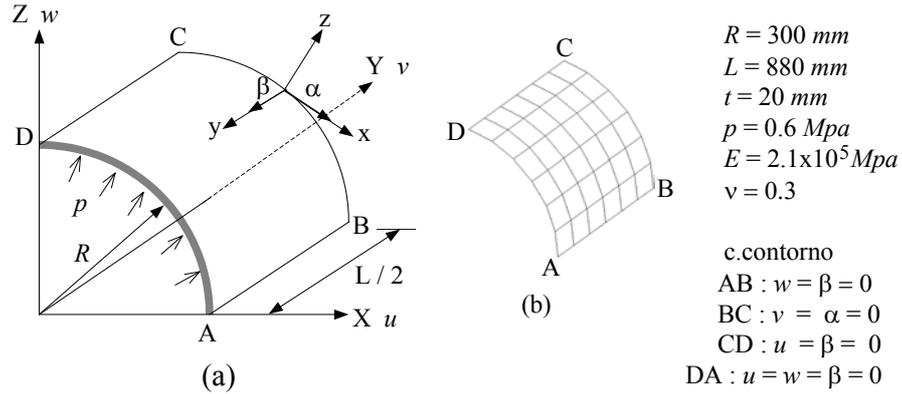


Figura 7.19: (a) Octante de casca cilíndrica; (b) malha regular de 6×6 elementos Q8.

relacionado com as distribuições dos deslocamentos e esforços. Neste aspecto é observado, tanto na Fig.7.20 como nas Fig.7.21(a) e 7.21(b), que o enriquecimento p do espaço de aproximação captura, para uma relação $R/t = 15$, as perturbações de bordo ou efeitos fracos de camada limite características das soluções analíticas de cascas finas. Observa-se que a convergência, neste problema, é atingida com $p = 4$, e por este motivo as curvas obtidas com $p = 6$ coincidem com as obtidas com refino p de quarta ordem. Dos resultados anteriores constata-se um desempenho satisfatório do espaço construído com esta metodologia.

7.4.2 Análise das propriedades hierárquicas dos modelos de 1^a e 3^a ordem

A análise das propriedades hierárquicas do modelo é relacionado à capacidade do mesmo de aproximar a solução da elasticidade tridimensional. Esta análise foi realizada para o exemplo 7.3.1. Neste caso o problema foi discretizado com uma malha de 2×2 elementos quadrangulares considerando os modelos cinemáticos de primeira e terceira ordem. Como o problema em questão não possui solução analítica para o modelo de elasticidade tridimensional, os resultados do erro relativo $E_{wr} = \frac{|w_r^s - w_r|}{|w_r^s|}$ do deslocamento radial w_r ao longo do meridiano DC, foram obtidos com relação à solução numérica de elementos finitos convencionais sólidos. Neste caso, a região foi discretizada com $30 \times 30 \times 6$ elementos cúbicos triquadráticos. Os resultados observados nas Fig.7.22(a) e 7.22(b) mostram, como esperado, que o modelo de terceira ordem

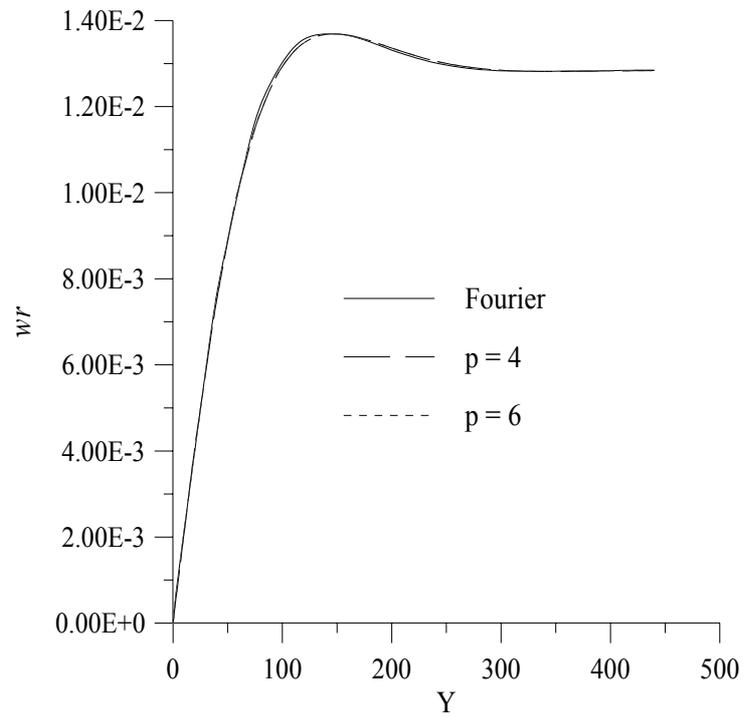


Figura 7.20: Deslocamento radial w_r ao longo do meridiano DC.

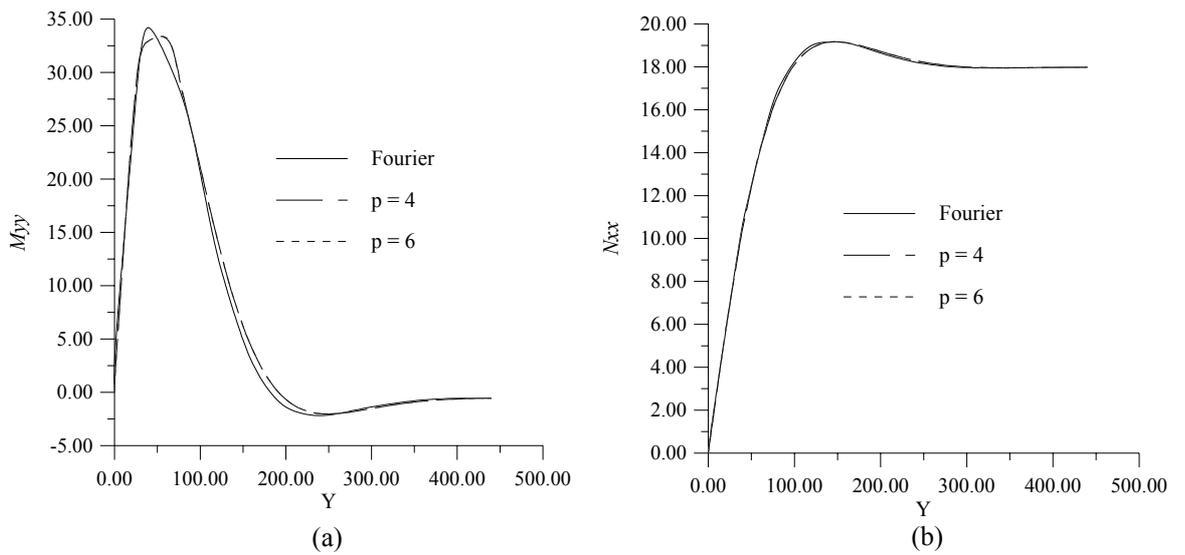


Figura 7.21: (a) Momentos M_{yy} , (b) Esforço de membrana N_{xx} .

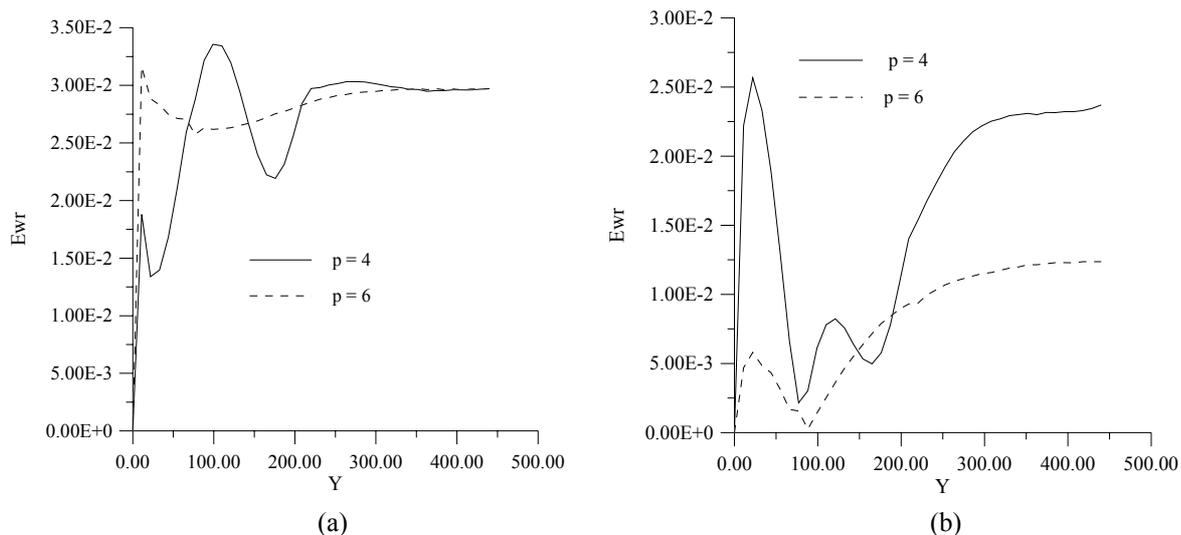


Figura 7.22: E_{wr} para, (a) modelo de primeira ordem, (b) modelo de terceira ordem

se aproxima mais da solução obtida com o elemento sólido que o de primeira ordem. Constata-se através da análise da Fig.7.22(a) que o modelo de primeira ordem não converge para a solução correspondente ao elemento sólido.

7.4.3 Análise dos efeitos de distorção da malha em cascas

A análise da sensibilidade do espaço construído em relação à distorção da malha em superfícies curvas é realizada para a casca cilíndrica da Fig.7.19. A mesma é discretizada com uma malha distorcida contendo 6×6 elementos quadrangulares, sendo a distorção obtida por rotação do eixo horizontal de 27° como indicado na Fig.7.23. Os resultados apresentados envolvem duas análises. A primeira diz respeito a sensibilidade do MEEG à distorção da malha. Neste caso os resultados são observados através dos valores relativos do deslocamento radial $E_{wd} = \frac{|w_r - w_r^d|}{|w_r|}$ e de momentos $E_{md} = \frac{|M_{yy} - M_{yy}^d|}{|M_{yy}|}$, ambos avaliados através do meridiano DC. Os valores de referência, w_r e M_{yy} são obtidos com malha regular contendo o mesmo número de elementos da malha anterior. Nesta primeira análise, mostrada na Fig.7.24(a) e 7.24(b), é observada a capacidade dos espaços gerados com refino p homogêneo de atenuar o efeito da distorção da malha. A segunda análise consta de uma comparação de erro devido a distorção da malha mostrada na Fig.7.23 utilizando MEEG com $p = 2$ homogêneo e elementos finitos convencionais

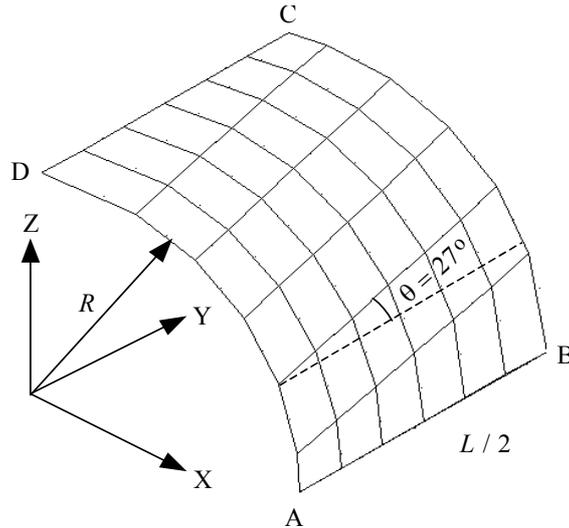


Figura 7.23: Malha de 6×6 elementos Q8 distorcida de $\theta = 27^\circ$.

utilizando elementos Q8 (elementos quadráticos de oito nós). Os resultados são mostrados na Fig.7.25.

Os resultados da Fig.7.24(a) mostram uma redução significativa do erro com os espaços enriquecidos, entretanto como pode ser observado para os espaços gerados com $p = 4$ e $p = 6$ não há uma diminuição sensível do erro do deslocamento radial w_r como esperado. Entretanto, se observa, para o caso anterior um comportamento mais uniforme do que para espaços gerados com $p = 2$ onde as amplitudes de oscilação dos resultados são acentuadas. Uma situação mais desfavorável é observada para o erro em momentos observado na Fig.7.24(b) onde para espaço construído com $p = 6$ o erro aumenta, de forma geral, com relação ao espaço construído com $p = 4$. A análise dos resultados da Fig.7.25 mostra que os efeitos de distorção da malha são mais acentuados em FEM convencional do que em MEFG. Isto se deve, provavelmente, ao fato de que o espaço de enriquecimento local, em MEFG, é construído no domínio real independente da malha.

7.5 Problemas de camada limite em placas e cascas

Os fenômenos de camada limite são característicos de problemas elípticos onde uma parcela da solução é perturbada por um parâmetro específico das dimensões do problema em questão. Este problema ocorre nos modelos de placas e cascas e se manifesta por um comportamento difer-

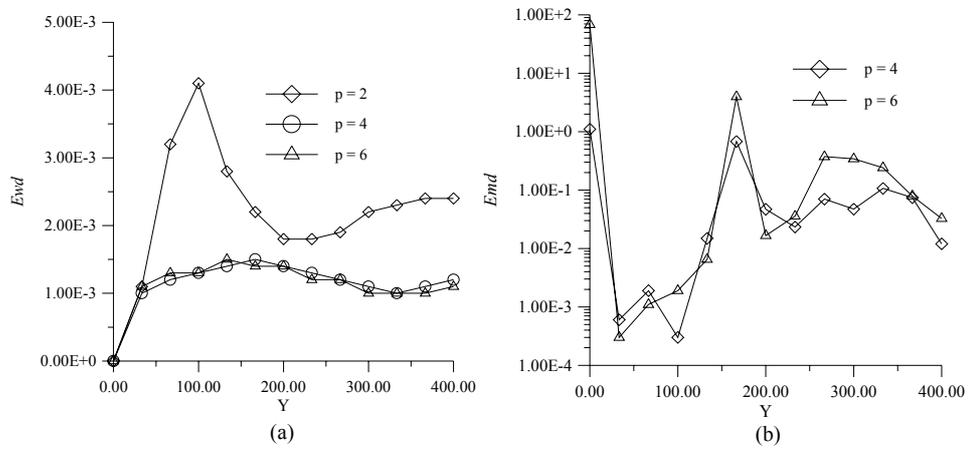


Figura 7.24: (a) medida E_{dw} , (b) medida E_{dm} .

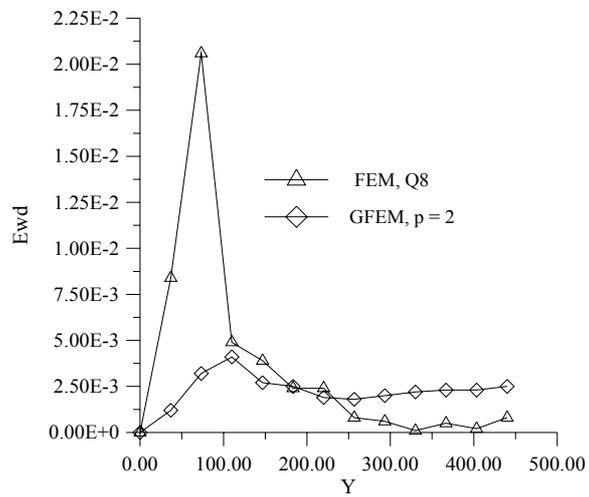


Figura 7.25: Medida E_{dw} para a malha distorcida com $\theta = 27^\circ$, para valores avaliados no meridiano DC.

enciado da solução próximos dos contornos. Em problemas de placas e cascas de Mindlin este comportamento se caracteriza por decaimento exponencial dos campos primais numa distância de ordem de magnitude da espessura. Para o caso específico do modelo de primeira ordem supracitado, os efeitos de camada limite não estão associados ao deslocamento transversal e sim aos vetores de rotação (Arnold & Falk [18]). No decorrer da década passada houveram várias tentativas de simular numericamente o problema de camada limite. Dentre as pesquisas mais relevantes, as quais foram utilizados como guia neste trabalho, se tem as de Babuska, Szabó & Actis [26], Cho & Oden [42] e Actis, Szabó e Schwab [64]. Estes autores utilizam os modelos e o espaço de elementos finitos hierárquicos juntamente com uma estratégia adequada de refino h . Nesta seção será analisado o desempenho do espaço de aproximação construído segundo o MEEG com os modelos de primeira e terceira ordem de placas e cascas. Ao invés de abordar o problema utilizando a técnica de refino h , amplamente utilizada para localização de singularidades e altos gradientes, o refino será mantido constante nestes problemas com o objetivo de verificar a capacidade dos espaços gerados de representar estes fenômenos sobre as fronteiras. Os resultados são observados através de erros relativos locais e da variação dos valores, do campo estudado, na direção dos altos gradientes. As observações são feitas sobre os exemplos a seguir.

7.5.1 Placa quadrada com borda livre

O exemplo a seguir é um problema regular e trata da análise de resultados de esforço cortante Q_y em uma placa quadrada de material elástico linear e isotrópico com dimensões, carregamento e condições de contorno mostrados na Fig.7.26. Devido a simetria da geometria e da anti-simetria do carregamento, é analisada da placa sob condições de contorno anti-simétricas como mostrado na Fig.7.26. A porção analisada é discretizada com 2×16 elementos quadrangulares com regra de quadratura de 6×6 pontos de Gauss para os elementos do domínio e 31×31 pontos de Gauss para os elementos sobre a borda livre $X = 0.0$.

Os resultado deste exemplo são discutidos através de duas análises. A primeira mostra a capacidade do espaço gerado utilizando estratégias p adaptativas construídas com funções polinomiais. A segunda análise observa a variação e o erro em Q_y para pontos próximos a

borda livre.

Os resultados da primeira análise correspondem ao erro relativo $E_q = \frac{|Q_a - Q_y|}{|Q_a|}$ no ponto A da Fig.7.26 e são obtidos por refino p isotrópico e p ortotrópico, sendo este último na direção perpendicular à fronteira. Na expressão do erro, Q_a é o valor da solução analítica para o modelo de primeira ordem conforme Duarte & Babuska [12] e Q_y é o valor aproximado. Os resultados obtidos são mostrados na Fig.7.27 e correspondem a três estratégias p adaptativas indicadas a seguir:

- i. Estratégia “a”: refino p homogêneo e isotrópico $p_x = p_y = 4, \dots, 6$.
- ii. Estratégia “b”: refino local isotrópico $p_x = p_y = 4, \dots, 7$ nas nuvens 1, 2 e 3 da Fig. 7.26, permanecendo o restante do domínio com $p = 4$.
- iii. Estratégia “c”: refino p ortotrópico $p_x = 4, \dots, 7$ e $p_y = 4$ nas nuvens 1,2 e 3 da Fig.7.26, permanecendo o restantes do domínio com $p = 4$.

Os resultados da Fig.7.27 mostram o erro relativo do esforço cortante Q_y no ponto A indicado na Fig.7.26, para as três estratégias citadas. Na primeira estratégia, “a”, (Fig.7.27) o erro atinge a ordem de 10^{-1} com 5335 graus de liberdade, o que torna este tipo de procedimento pouco eficiente. A segunda estratégia, correspondente a “b” na Fig.7.27, se mostrou mais eficiente que a primeira, já que o erro se reduz para uma ordem de 10^{-2} com 2820 graus de liberdade. Finalmente a última das estratégias “c” indicada na Fig.7.27, o erro permanece na casa de 10^{-2} e é alcançado com 2730 graus de liberdade. Comprova-se através deste exemplo, que para o caso específico de fenômenos de camada limite, onde os gradientes elevados tem direções preferenciais, o enriquecimento direcionado, como esperado, foi o mais eficiente.

O exemplo anterior mostrou resultados locais satisfatórios atingidos com as estratégias p adaptativas, entretanto estes resultados não são representativos das regiões próximas ao bordo livre. As oscilações dos resultados ao longo de uma extensão igual ao comprimento do primeiro elemento chegam a conter erros relativos maiores do que a unidade. Este fato, que faz parte da segunda análise do problema, é observado sobre dois aspectos. O primeiro, de caráter qualitativo, diz respeito à distribuição do esforço cortante Q_y para pontos sobre o eixo ($X, 1.96$)

(a linha tracejada na Fig.7.26) pertencentes aos cinco primeiros elementos, adjacentes à borda livre. O segundo, de caráter quantitativo, observa o erro E_q obtido para 250 pontos igualmente distribuídos entre os cinco elementos sobre o eixo supracitado. Estes resultados, mostrados nas Fig.7.28 e Fig.7.29, correspondem as seguintes estratégias p adaptativas.

- i. Estratégia A: refino isotrópico homogêneo do tipo $p = 4$.
- ii. Estratégia B: refino ortotrópico $p_x = 8$ e $p_y = 4$, para as nuvens 1, 2 e 3 e para as nuvens restantes $p = 4$.
- iii. Estratégia C: refino adaptativo ortotrópico do tipo $(e^{\beta\bar{x}/t}, p_y)$, com $p_y = 4$. Na função exponencial $\beta = \sqrt{12k}$, onde $k = 5/6$ é a constante de correção do cisalhamento, \bar{x} e t correspondem à coordenada local na direção do refino e a espessura da placa respectivamente. Para as nuvens restantes do domínio é utilizado um enriquecimento isotrópico $p = 4$.

Os resultados da Fig.7.28 mostram um comportamento esperado das estratégias A e B caracterizado pelas oscilações no elemento adjacente à borda livre. Entretanto verifica-se um comportamento melhor, do ponto de vista qualitativo (Fig.7.28) e quantitativo (Fig.7.29), da estratégia B com relação à estratégia A.

Nesta análise fica evidente a capacidade dos espaços construídos pela estratégia C. Este espaço, construído conforme (6.16), além de não apresentar as oscilações observadas nas estratégias anteriores, mostra um comportamento, do ponto de vista quantitativo, muito próximo da solução analítica como é observado através do erro E_q na Fig.7.29.

7.5.2 Placa quadrada simplesmente apoiada

O exemplo consiste na análise do esforço cortante Q_y de uma placa com as dimensões, carregamento e condições de contorno mostradas na Fig.7.30. Para este exemplo, é analisada a metade da placa sob condições de contorno simétricas. A região estudada é discretizada com 2×16 elementos quadriláteros (Fig.7.30) e uma regra de quadratura de 6×6 pontos de Gauss para elementos do domínio e 31×31 pontos de integração para os elementos sobre a fronteira

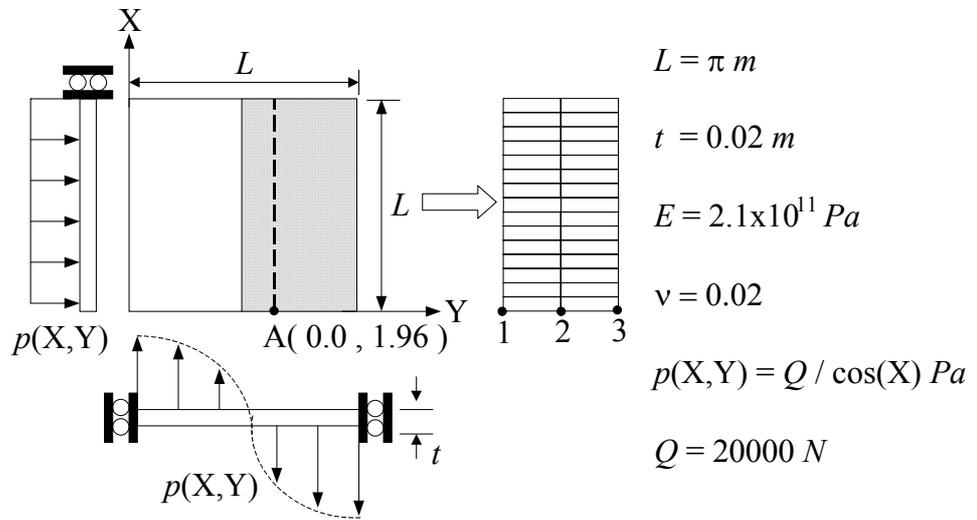


Figura 7.26: Parcela quadrada com borda livre sob carga senoidal auto equilibrada

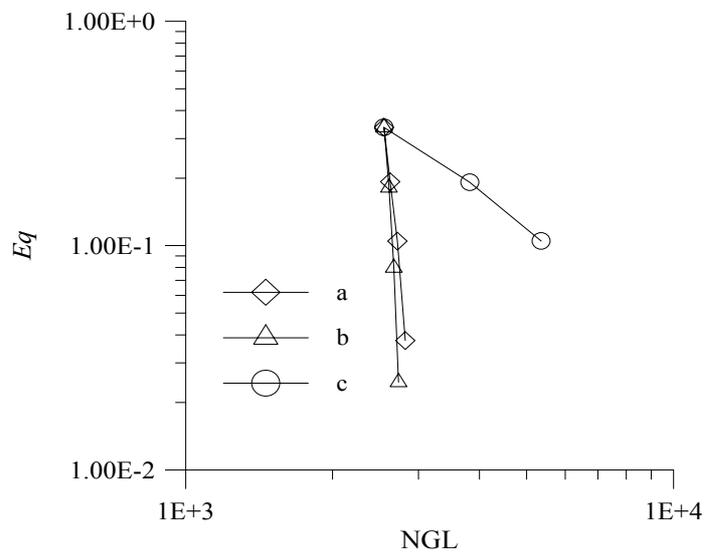


Figura 7.27: Erro relativo local $E_q = \frac{|Q_a - Q_y|}{|Q_a|}$, avaliado no ponto A da Fig.7.26.

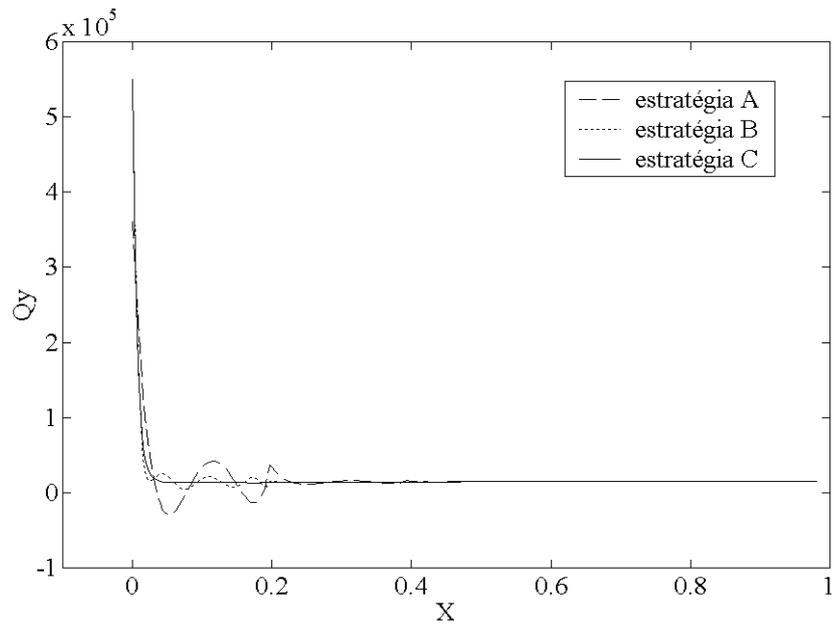


Figura 7.28: Esforço cortante Q_y ao longo do eixo $(X, 1.96)$; (a) estratégia A, b) estratégia B, c) estratégia C.

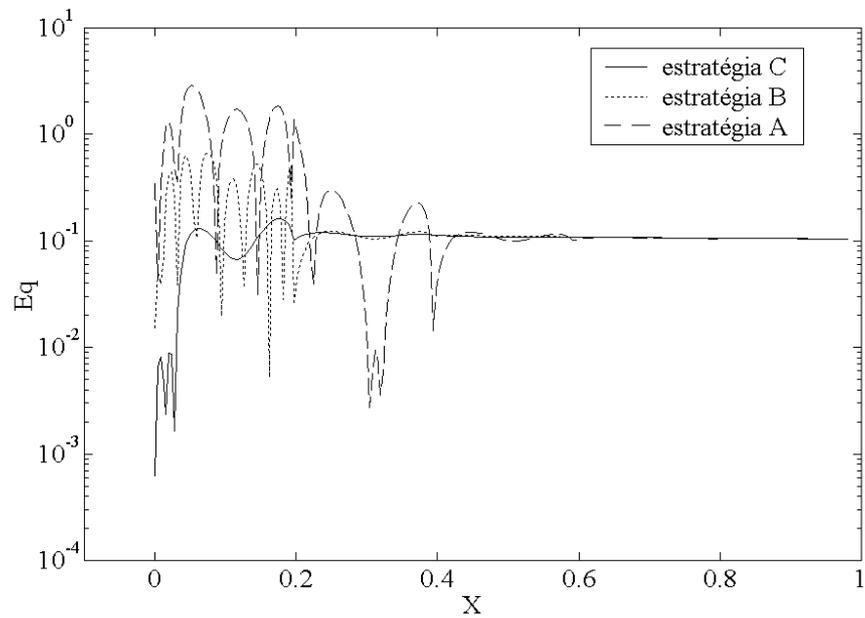


Figura 7.29: Erro relativo E_q , sobre o eixo $(X, 1.96)$ para as esrtatégias A, B e C.

prescrita. Os resultados são obtidos para três estratégias, as quais apresentam as seguintes características:

- i. Estratégia “A”: refino ortotrópico $(e^{\beta\bar{x}/t}, p_y)$, com $p_y = 4$ e $\beta = \sqrt{12k}$, com $(k = \frac{5}{6})$ nas nuvens 1,2 e 3 (Fig.7.30). Para as nuvens restantes, $p = 4$.
- ii. Estratégia “B”: refino homogêneo e isotrópico $p = 4$.
- iii. Estratégia “C”: refino ortotrópico $px = 8$ e $py = 4$ nas nuvens 1,2 e 3 e para as nuvens restantes $p = 4$.

Os resultados são estudados sobre dois aspectos. O primeiro analisa a variação do esforço cortante Q_y ao longo da face CD da Fig.7.30, para os cinco primeiros elementos adjacentes ao lado AD. Os resultados são vistos na Fig.7.31(a) correspondem às estratégias A e C cotejadas com a solução analítica de placa semi-espessa de Marguerre & Woernle [46]. O segundo aspecto corresponde à verificação de convergência local do esforço cortante Q_y no ponto D. Esta análise é realizada para as três estratégias e é avaliada através do erro relativo dado por $E_q = \frac{|Q_y - Q_a|}{|Q_a|}$, onde Q_a é o cortante em D (Fig.7.31) obtido pela solução analítica de Marguerre & Woernle [46]. Os resultados são mostrados na Fig.7.31(b).

Dos resultados da Fig.7.31(a) constata-se que os espaços locais construídos com as funções exponenciais, correspondente à estratégia A, não apresentam oscilações da solução nos últimos dois elementos como é o caso daqueles obtidos com funções polinomiais da estratégia C. Além disto, como pode ser observado no gráfico da Fig.7.31(b), para a razão $\frac{L}{t} \geq 200$ o erro local de Q_y no ponto D diminui para a estratégia A e aumenta bruscamente para as estratégias B e C construídas com funções polinomiais.

7.5.3 Casca cilíndrica com borda livre

Através deste exemplo se analisa os efeitos de camada limite na borda livre da casca cilíndrica, de material homogêneo isotrópico com as propriedades materiais e dimensões indicadas na Fig.7.32. A mesma é submetida a uma carga de tração senoidal auto-equilibrada, mostrada na Fig.7.32(a), constante em Y e variando na direção radial com a expressão $p = \cos 2\theta$. Como este

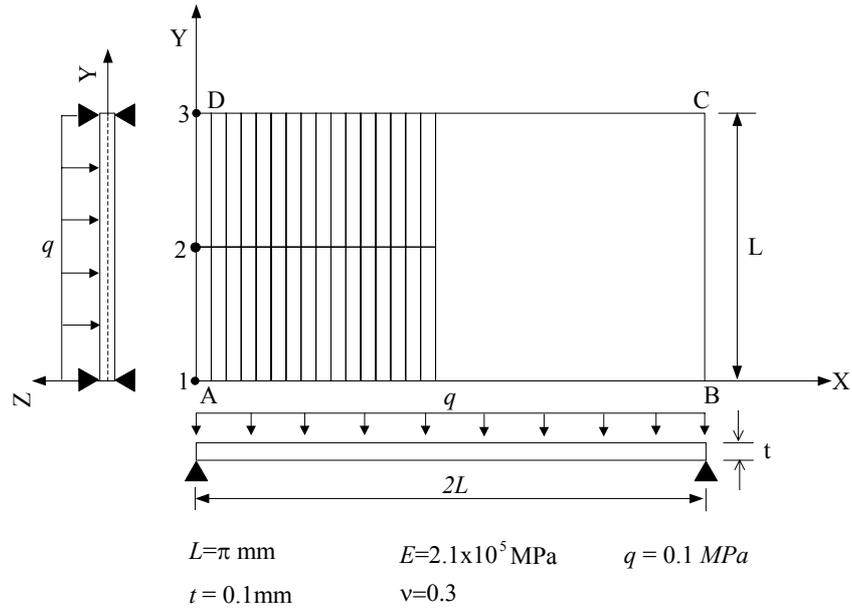


Figura 7.30: Placa simplesmente apoiada, “hard” em AB e CD e “soft” em BC e AD.

exemplo não possui solução analítica, é utilizada, uma solução de referência obtida por um refino hp adaptativo com malha de 6×20 elementos quadrangulares com dimensões em progressão geométrica, decrescente em Y , de razão $r = 0,90$. O espaço é construído por enriquecimento isotrópico $p = 4$, para todas as nuvens com exceção daquelas que estão sobre o bordo livre, onde é utilizado um enriquecimento isotrópico $p = 7$. Devido à simetria é analisado um octante.

Comparando a solução de referência com os resultados obtidos por uma malha de 6×15 elementos (Fig.7.33) e $p = 4$ isotrópico (Fig.7.34) constata-se a ausência de travamento e resultados para o deslocamento radial $u_B = 0,1222741 \text{ mm}$, que é próximo ao obtido, para o mesmo exemplo, por Actis, Szabó e Schwab [64], onde $u_B = 0,12219$. A boa representação do deslocamento não se repete para o esforço cortante Q_x (Fig.7.35). No ponto “k”, de coordenadas $(0,7071;1,0;7071)$ (Fig.7.32) o erro relativo do esforço cortante $E_q = \frac{|Q_{xr} - Q_x|}{|Q_{xr}|} = 0.27$ (onde Q_{xr} é o valor da solução de referência e Q_x à solução da estratégia utilizada).

Na Fig.7.35 constata-se que a partir de uma distância, inferior a um $1/3$, medida a partir da borda livre BC (correspondente aos cinco elementos vizinhos à borda livre) começa a ocorrer uma diferença de resultados que se torna proeminente em regiões vizinhas da borda, mais especificamente nos últimos dois elementos próximos à borda livre. Este fato, observado na

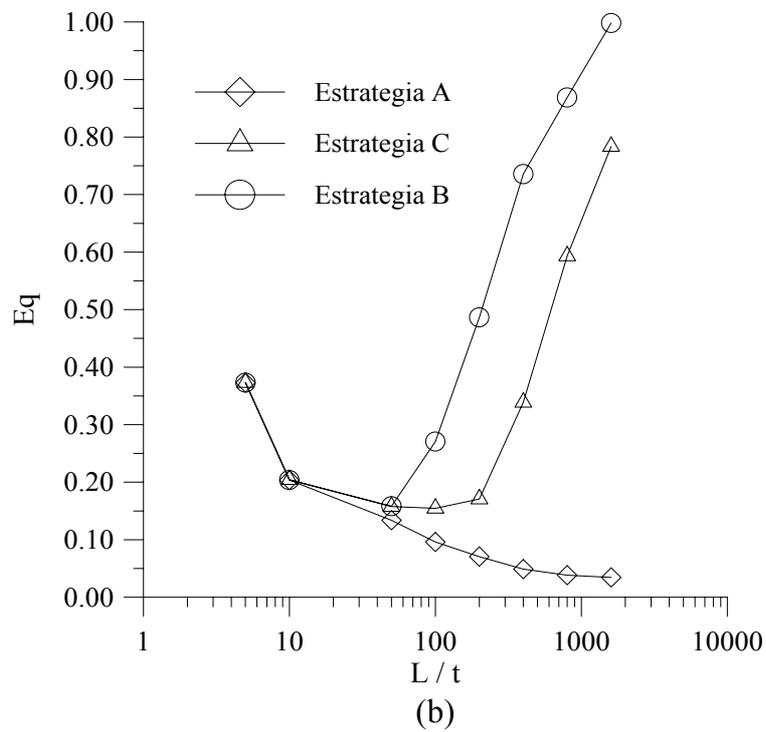
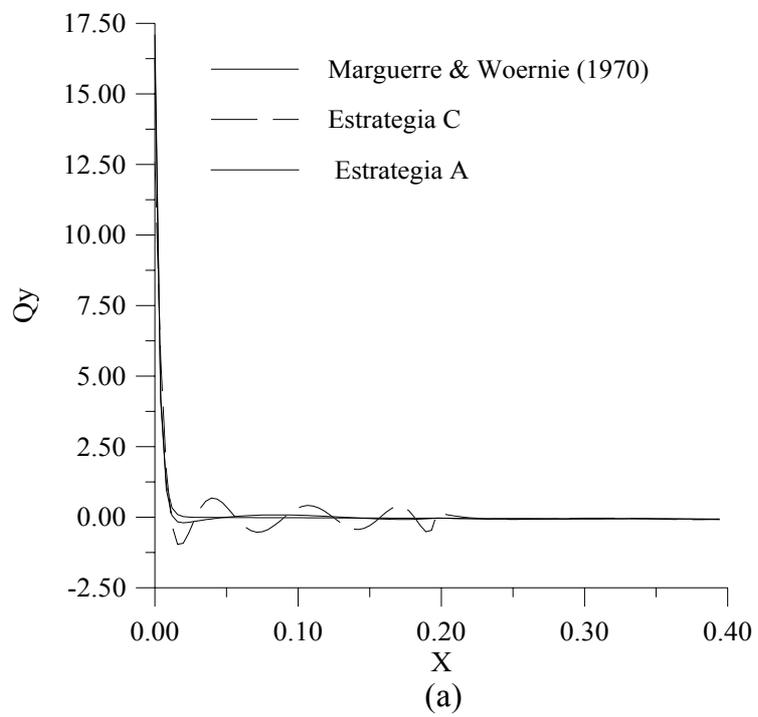


Figura 7.31: (a) Q_y ao longo de CD para a solução analítica e para as estratégias A e C, (b) erro relativo E_q para as estratégias A, B e C.

Fig.7.35, mostra que, além de se ter uma diferença acentuada para o valor máximo do esforço cortante em “k”, ocorrem oscilações fortes da solução nesta região.

Visto que o fenômeno de camada limite tem caráter local são propostas duas estratégias para simular o fenômeno de camada limite:

- i. Estratégia 1: enriquecimento isotrópico $p = 4$ no domínio e, nas nuvens sobre o bordo livre, (pontos 1-7 da Fig.(7.33), enriquecimento isotrópico $p = 4 - 7$.
- ii. Estratégia 2: refino $p = 4$ no domínio e, nas nuvens correspondentes aos pontos 1-7 enriquecimento ortotrópico com $p_x = 4$ e $p_y = 4 - 7$ onde o enriquecimento p_x ocorre na direção “x” local e p_y na direção “y” local como mostrado na Fig.7.33

A análise destas estratégias é feita sob dois enfoques. O primeiro trata da convergência local com relação a solução de referência, sendo esta avaliada através do erro relativo E_q no ponto “k” da Fig.7.32(a).

Os resultados da Fig.7.36 mostram um melhor desempenho da primeira estratégia para capturar valores locais, chegando a um erro relativo de 0,0145 com 6230 graus de liberdade contra 0,0914 com 6020 graus de liberdade atingido pela segunda estratégia. Em princípio, poderia se afirmar que o refino adaptativo p isotrópico utilizado pela primeira estratégia é mais adequado para representar fenômenos de camada limite. Entretanto esta afirmação não se mostrou verdadeira nas regiões vizinhas à borda livre como pode ser constatado na Fig.7.37.

Na Fig.7.37 são analisados os resultados do esforço cortante Q_x ao longo do meridiano (0,7071;Y;0,7071) para pontos correspondentes aos 5 elementos adjacentes à borda livre na direção Y. Estes resultados referem-se a dois casos específicos da primeira e segunda estratégias. O primeiro é constituído de um refino $p_x = p_y = 7$ para as nuvens associadas aos nos 1-7 da Fig.7.33 e enriquecimento isotrópico $p = 4$ para as nuvens restantes. No segundo caso adota-se $p_x = 4$ e $p_y = 7$, para as nuvens dos nos 1-7 e refino isotrópico $p = 4$ para as nuvens restantes do domínio.

Dos resultados da Fig.7.37 constata-se que, a uma distância de 0,13333 mm medida a partir da borda livre sobre o meridiano em estudo, o enriquecimento ortotrópico se aproxima mais da

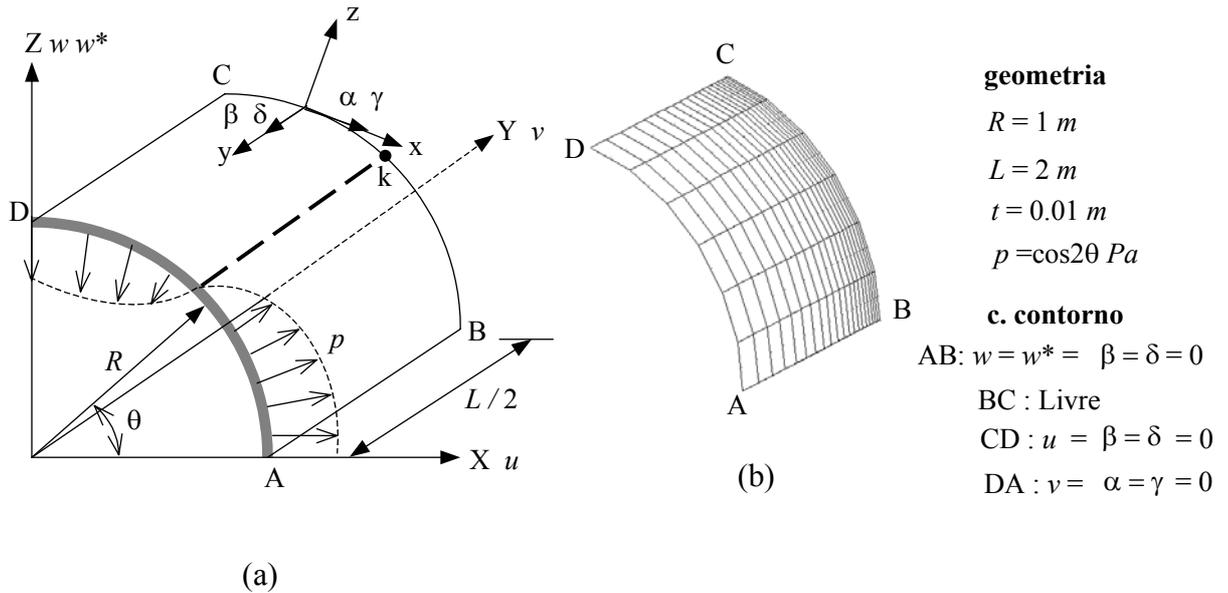


Figura 7.32: (a) Octante de casca cilíndrica sob carga auto equilibrada senoidal, (b) malha de 6×20 elementos Q8 em PG.

solução de referência do que o refino isotrópico. Este fato se deve a que a variação brusca do gradiente da solução nesta região tem uma direção preferencial mantendo seus valores pouco alterados nas outras direções.

Os exemplo a seguir e referente ao fenômeno de camada limite em materiais compostos laminados modelados com teoria de terceira ordem com normal extensível.

7.5.4 Casca cilíndrica composta por laminados

O exemplo trata de uma casca cilíndrica de material composto laminado, sob carregamento senoidal auto-equilibrado e propriedades geométricas mostradas na Fig.7.32. A casca é constituída de quatro lâminas de material transversamente isotrópico com esquema de laminação $[0/90]_s$ e propriedades elásticas de cada lâmina dadas por $E_1 = 25 \times 10^6 \text{ MPa}$, $E_2 = E_3 = 1 \times 10^6 \text{ MPa}$, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,25$, $\nu_{23} = 0,49$, $G_{12} = G_{13} = 5 \times 10^5 \text{ MPa}$ e $G_{23} = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$. As fibras tem direção paralela ao eixo Y global para $\theta = 0^\circ$ e ao eixo X global para $\theta = 90^\circ$. Como no exemplo anterior, são aproveitadas as condições de simetria para analisar um octante da estrutura. Os resultados obtidos correspondem ao modelo cinemático de terceira ordem e espaços de aproximação construídos com estratégias p adaptativas. Os efeitos de camada limite sobre

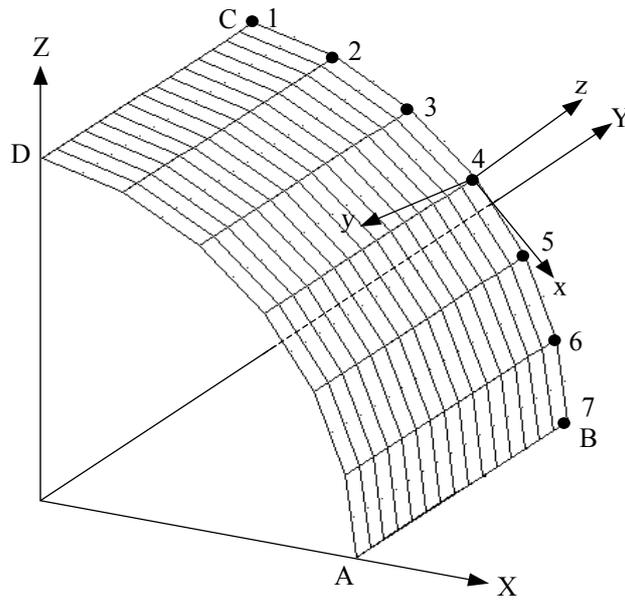


Figura 7.33: Malha uniforme de 6×15 elementos Q8.

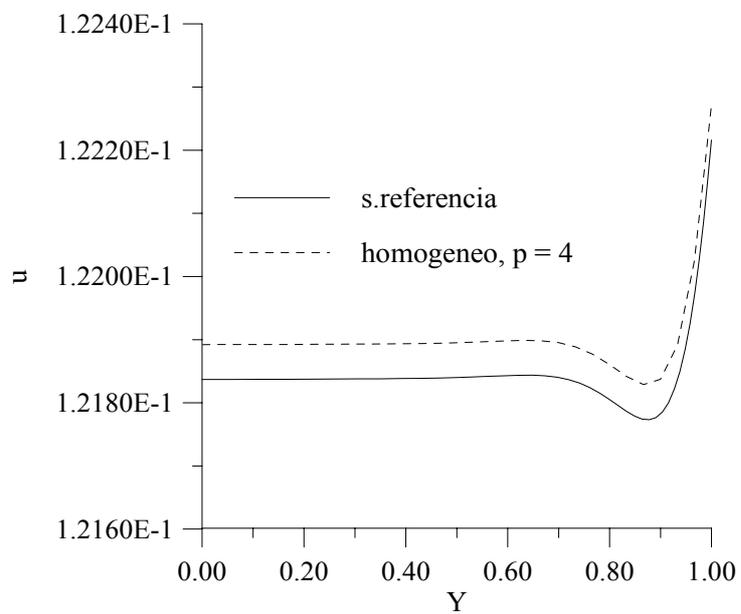


Figura 7.34: Deslocamento de u ao longo do meridiano $(1, Y, 0.0)$

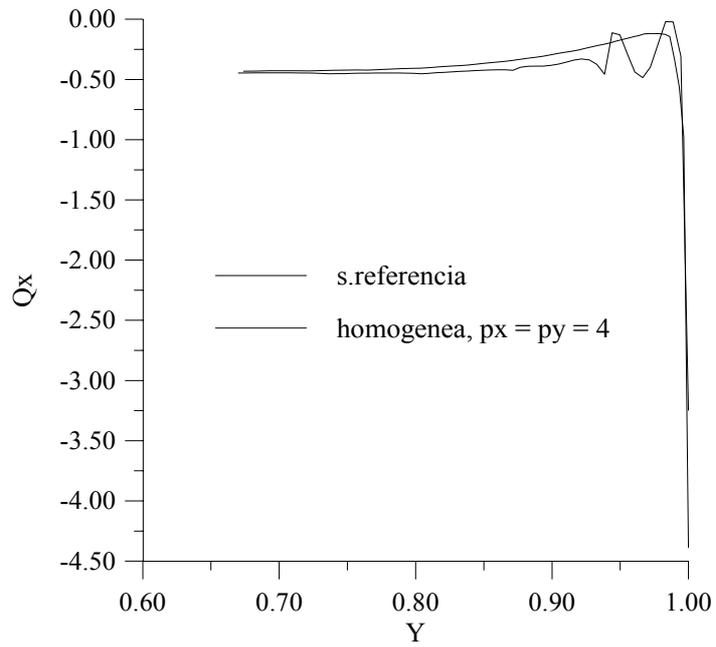


Figura 7.35: Esforço cortante Q_x ao longo do meridiano (0.7071, Y, 0.7071).

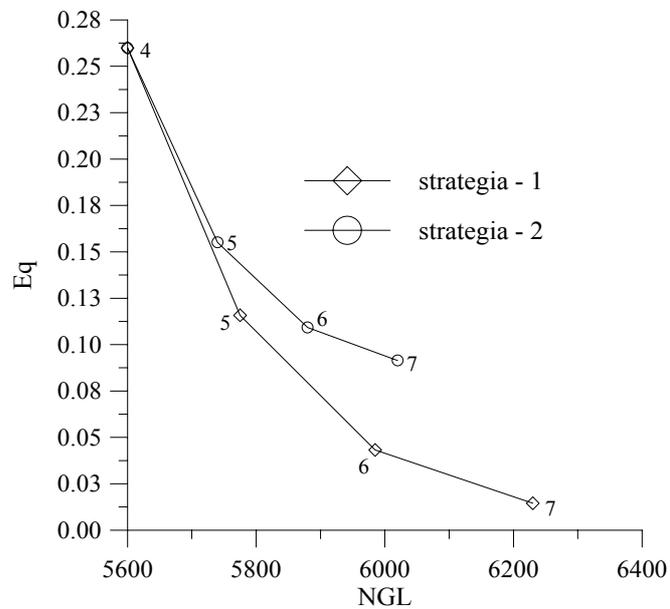


Figura 7.36: Erro relativo para valores locais no ponto “k” (0,7071, 1,0, 0,7071) da Fig.7.32.

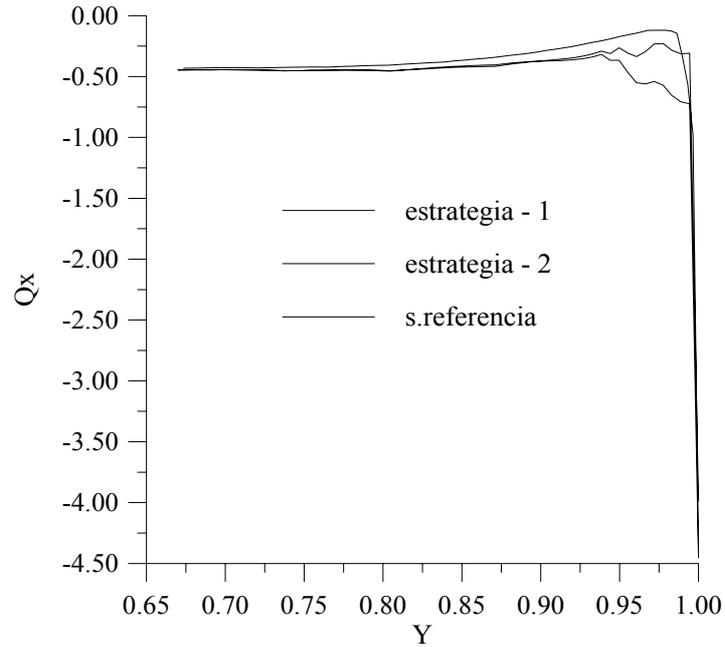


Figura 7.37: Esforço cortante Q_x ao longo do meridiano (0.7071, Y, 0.7071).

a borda livre da casca são observados através das tensões principais σ_1 avaliadas na superfície de referência, ou seja, na cota local $z = 0, 0$ (Fig.7.32). Visto que o exemplo não possui solução analítica, os valores de tensões são comparados com uma solução de referência obtida utilizando o mesmo procedimento do exemplo anterior. Todas as estratégias p adaptativas são tratadas para a malha regular de 6×15 elementos indicada na Fig.7.33.

- i. Estratégia 1: refino p isotrópico homogêneo $p = 4$.
- ii. Estratégia 2: utiliza um refino isotrópico $p_x = p_y = 7$ sobre as nuvens correspondentes aos pontos 1-7 sobre a borda livre e nas nuvens restantes enriquecimento homogêneo isotrópico $p = 4$.
- iii. Estratégia 3: refino ortotrópico $p_x = 4$ e $p_y = 7$ sobre as nuvens correspondentes aos pontos 1-7 da borda livre, onde p_x é o enriquecimento na direção x local e p_y o enriquecimento na direção y local indicados na Fig.7.32. Igualmente que às estratégias anteriores, no restante das nuvens foi adotado um enriquecimento homogêneo e isotrópico $p = 4$.

Embora a solução de referência não represente um calibre ótimo para avaliação de erro, como será comentado posteriormente, para cada uma das estratégias de análise deste exemplo, em lugar do erro relativo no ponto B (Fig.7.32) será utilizada a medida $E_\sigma = \frac{|\sigma_1^a - \sigma_1|}{|\sigma_1^a|}$, onde σ_1^a é a tensão principal em B correspondente à solução de referência e σ_1 a solução correspondente à estratégia específica.

Os resultados para as tensões principais σ_1 , mostrados na Fig.7.38(a) e Fig.7.38(b), correspondem à solução de referência avaliada na **face superior da segunda lâmina** na cota local $z = 0.0$ (Fig.7.32). A influência dos efeitos de borda na tensão principal σ_1 do campo ao longo do meridiano $(1.0, Y, 0.0)$ é mostrada na Fig.7.39.

A Fig.7.38 mostra a existência de camada limite para a tensão principal σ_1 nas proximidades da borda livre. Como pode ser observado no diagrama de isocamadas da Fig 7.38(a), a tensão principal σ_1^a tem valores muito baixos em quase todo o domínio com exceção de uma pequena franja na borda livre onde os valores aumentam bruscamente. Do ponto de vista quantitativo, a variação de σ_1^a é observada na Fig.7.38(b), que corresponde à região destacada da Fig.7.38(a). O gradiente da solução, embora sendo muito íngreme próximo a esta região, é capturado com facilidade utilizando a Estratégia-1 como indicado na Fig.7.39(a). Neste caso o erro local no ponto é de $E_\sigma = 0,1117$. Na análise da Fig.7.39(b), observa-se um comportamento satisfatório para as estratégias 2 e 3, sendo que a estratégia 2 mostra resultados locais, no ponto B, mais próximos da solução de referência, dos que os obtidos pela estratégia 3. Nesta situação os erros locais para as estratégias 2 e 3 são $E_\sigma = 0,00028$ e $E_\sigma = 0,11059$ respectivamente.

7.5.5 Casca parabólica rasa de material homogêneo

O problema analisado é constituído de uma casca cilíndrica rasa, modelada com teoria de primeira ordem (Mindlin), com geratriz parabólica sujeita a um carregamento de gravidade (Fig.7.40(a)). A mesma apresenta as características geométricas indicadas na Fig.7.40(a) a menos da espessura que neste exemplo é $t = 0,1mm$. A casca é constituída de material elástico linear isotrópico com as propriedades mecânicas dadas por, $E = 2.1 \times 10^{11} Pa$ e $\nu = 0,3$. Neste exemplo é analisado o octante definido pelos pontos A e D sob condições de contorno de

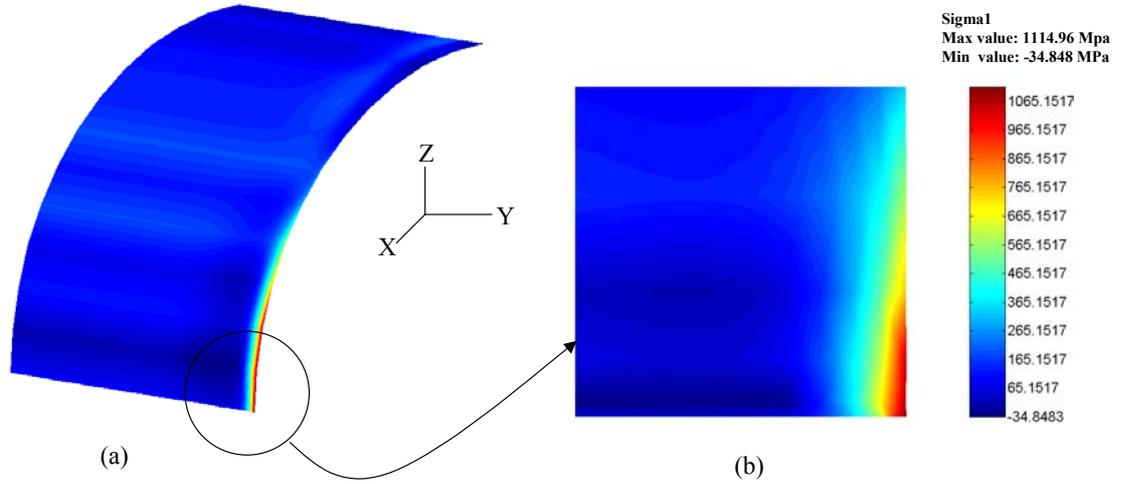


Figura 7.38: (a) Tensão principal σ_1 , b) Variação de σ_1 na região destacada em (a).

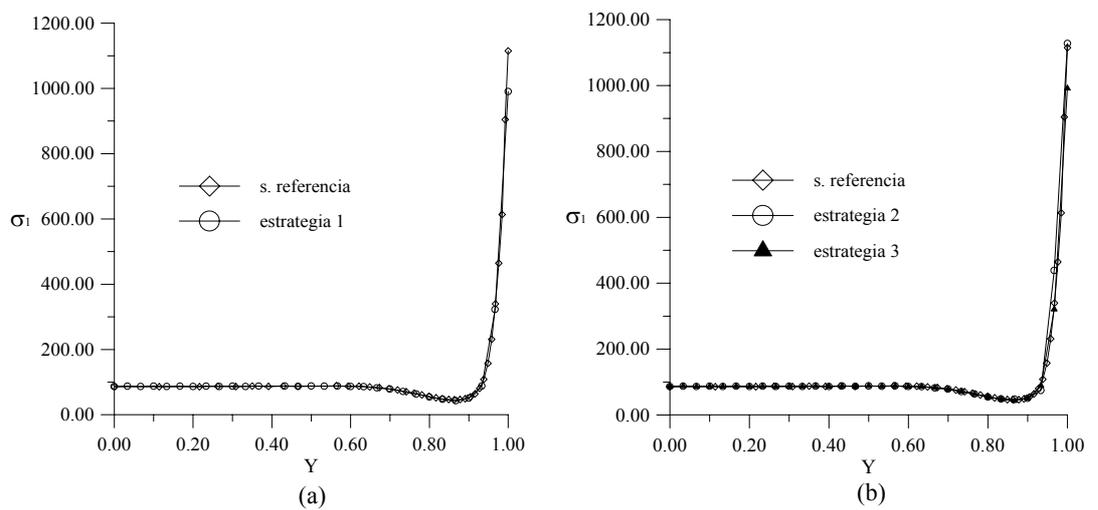


Figura 7.39: (a) Solução de referência e estratégia 1, (b) solução de referência e estratégias 2 e 3.

simetria. As arestas BC ($u = \beta = 0, 0$) e CD ($v = \alpha = 0, 0$) tem condições de contorno de simetria, as arestas AB ($w = 0, 0$) e DA ($w = \alpha = 0, 0$) são simplesmente apoiadas de maneira *soft* e *hard* respectivamente. Como este exemplo não possui solução analítica foi utilizada uma solução de referência obtida por refino *hp* adaptativo. Este refino é obtido com uma malha com a dimensão dos elementos variando em progressão geométrica decrescente na direção Y de razão $r = 1, 2$ (Fig.7.40(b)) e um refino p isotrópico. O refino p utilizado aqui é polinomial de quarta ordem para todas as nuvens do domínio com exceção daquelas correspondentes aos nós de 1-7, indicados na Fig.7.40(c), onde são utilizados polinômios de sétima ordem nas duas direções. A casca cilíndrica rasa de geratriz parabólica, com uma razão $L/2t \geq 100$ e as condições de contorno citadas, apresenta variações bruscas do esforço cortante Q_y na direção y do sistema local de coordenadas (x, y, z) indicado na Fig.7.40(c). Os resultados mostrados a seguir correspondem à variação do esforço cortante Q_y sobre a aresta DC para a solução de referência e três estratégias p adaptativas com as seguintes características:

- i. Estratégia “A”: refino ortotrópico ($e^{\beta\bar{x}/t}, p_y$), com $p_y = 4$, para as nuvens de 1-7 da Fig.7.40(c).
Para as nuvens restantes do domínio, $p = 4$.
- ii. Estratégia “B”: refino isotrópico e homogêneo com $p = 4$.
- iii. Estratégia “C”: refino ortotrópico $p_x = 4$ e $p_y = 7$ das nuvens 1-7 da Fig.7.40(c) e para as nuvens restantes $p = 4$. Os resultados deste exemplo são mostrados nas Fig.7.41 e na Fig.7.42.

O resultado observado na Fig.7.41 evidencia o comportamento esperado dos espaços locais correspondentes à estratégia A. Neste caso o efeito local da função exponencial, no refino isotrópico, permite valores locais muito próximos daqueles obtido pela solução de referência, além de não apresentar as oscilações características dos espaços construídos com polinomiais. Os resultados da Fig.7.42 mostram um comportamento oscilatório da solução referente as estratégias B e C. Estes resultados são esperados em refinamentos p adaptativos com malha grosseira como a indicada na Fig.7.40(c). A estratégia B, além de apresentar fortes oscilações no último elemento adjacente à borda AB, tem uma diferença local acentuada no ponto A com relação á

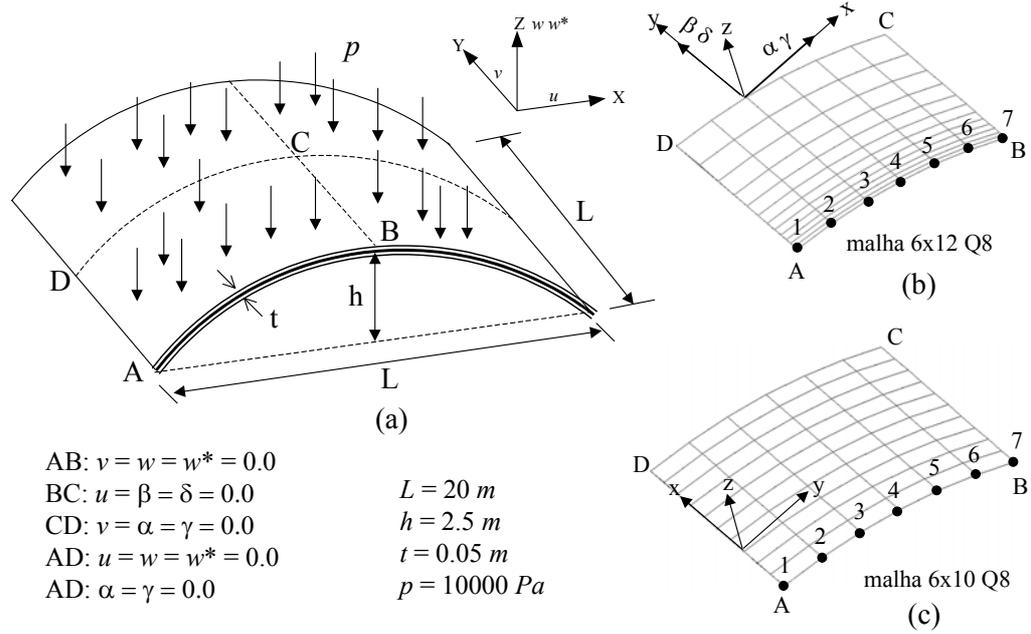


Figura 7.40: (a) Casca rasa parabólica, (b) malha de 6×12 Q8 em PG, (c) malha regular com 6×10 elementos Q8.

solução de referência. Na estratégia C a utilização de refino p ortotrópico, com polinômio de alta ordem na direção em que ocorre a variação brusca do campo, reduz a amplitude das oscilações e tem uma diferença local do esforço cortante Q_y no ponto A da ordem daquela obtida pela estratégia A.

Com a análise dos tópicos supracitados fecha-se este capítulo cumprindo o objetivo de mostrar aspectos fundamentais desta metodologia. Neste capítulo foi apresentada uma proposta válida na abordagem de imposição de condições de contorno essenciais, entretanto, este problema permanece um tema em aberto merecedor de uma ampla discussão.

7.5.6 Casca parabólica rasa composta por laminados

O exemplo trata de uma cobertura formada por uma casca parabólica rasa com as características geométricas e de carregamento mostrado na Fig.7.40(a). A casca é constituída de quatro lâminas de material transversamente isotrópico com esquema de laminação $[0/90]_s$ e propriedades elásticas de cada lâmina dadas por $E_1 = 25 \times 10^{12} \text{ Pa}$, $E_2 = E_3 = 1 \times 10^{12} \text{ Pa}$, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,25$, $\nu_{23} = 0,49$, $G_{12} = G_{13} = 5 \times 10^{11} \text{ Pa}$ e $G_{23} = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$. Para as lâminas a 0°

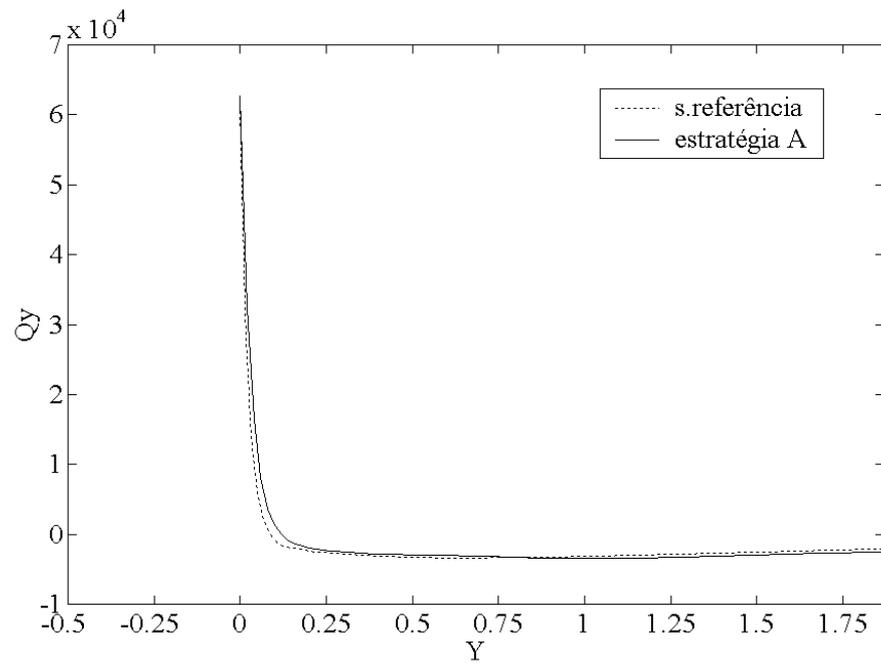


Figura 7.41: Esforço cortante Q_y para a da solução de referência e a estratégia A.

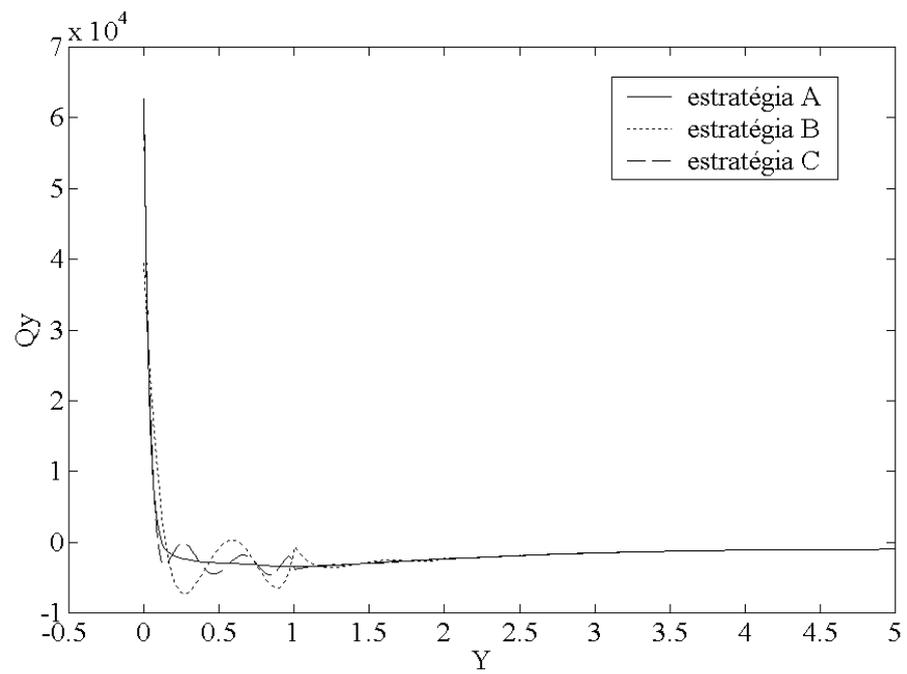


Figura 7.42: Esforço cortante Q_y para às estratégias A, B e C.

as fibras são paralelas ao eixo Y global. Devido à simetria é analisado apenas o octante definido pelos pontos A e D. Os resultados deste exemplo foram obtidos com o modelo cinemático de terceira ordem, sendo o foco da análise a tensão transversal τ_{yz} nos pontos sobre a aresta AD pertencentes aos cinco primeiros elementos adjacentes à borda AB. Estes pontos estão situados na cota $z = 0,0$, correspondente à base local indicada na Fig.7.40(c). Como o exemplo não possui solução analítica, é utilizada uma solução de referência como parâmetro de comparação. A malha de referência (Fig.7.40(b)) é construída com elementos quadrangulares em progressão geométrica crescente em Y com razão $r = 1.4$ e $p_x = p_y = 7$ para as nuvens correspondentes aos pontos de 1-7 indicados na Fig.7.40(b), e $p = 4$ isotrópico no resto do domínio. A finalidade deste exemplo é mostrar o desempenho de três estratégias adaptativas sem necessidade de refinamentos h especiais da malha. Assim a malha utilizada para todas as estratégias é a malha uniforme mostrada na Fig.7.40(c). As estratégias utilizadas tem caráter unicamente p adaptativo e são construídas como segue:

- i.** Estratégia A: refino homogêneo isotrópico $p_y = 4$.
- ii.** Estratégia B: refino ortotrópico $p_x = 4$ e $p_y = 7$ para as nuvens de 1-7 e $p = 4$ isotrópico no restante do domínio.
- iii.** Estratégia C: refino ortotrópico do tipo $(p_x, e^{\beta\bar{y}/t})$, com $p_x = 4$. A constante $\beta = 3,162278$ (este modelo não tem correção das tensões cisalhantes) e \bar{y} , t correspondem a coordenada local do ponto, na direção do refino e a espessura, respectivamente. Para as nuvens restantes do domínio é utilizado um enriquecimento homogêneo e isotrópico de quarta ordem.

Os resultados destas estratégias são mostrados nas Fig.7.43 e Fig.7.44 através dos diagramas de tensão transversal τ_{yz} e da medida aproximativa do erro relativo $E_{\tau_{yz}} = \frac{|\tau_{yz}^r - \tau_{yz}|}{|\tau_{yz}|}$ avaliado no ponto A (Fig.7.40(c)) para as três estratégias com relação à solução de referência. Na expressão de $E_{\tau_{yz}}$, τ_{yz}^r é a tensão cisalhante no ponto A referente à solução de referência e τ_{yz} a solução no mesmo ponto obtida para as estratégias propostas.

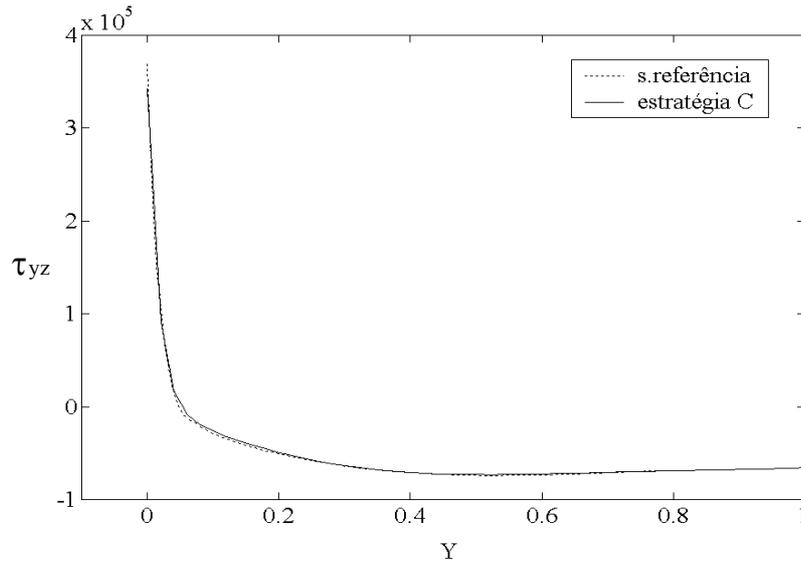


Figura 7.43: Tensão τ_{yz} , para a solução de referência e para estratégia C sobre a aresta AD.

A Fig.7.43 mostra o comportamento da tensão τ_{yz} em 50 pontos situados sobre a aresta AD pertencentes ao elemento adjacente ao apoio AB. Nesta figura se observa o excelente comportamento da função exponencial, produzindo um resultado praticamente idêntico ao da solução de referência nas tensões cisalhantes transversais. O erro local da estratégia C é de $E_{\tau_{yz}} = 0,072092$.

A Fig.7.44 mostra o comportamento da tensão cisalhante τ_{yz} para 250 pontos situados sobre o apoio AD pertencentes aos cinco primeiros elementos adjacentes ao lado AB. Os resultados da estratégia A mostram um comportamento semelhante ao observado na placa semi-infinita, onde, além de apresentar oscilações fortes no elemento adjacente ao apoio AB produz um erro local no ponto A com relação à solução de referência de $E_{\tau_{yz}} = 0,647315$. A estratégia B obtida por refino p ortotrópico, dos pontos de 1,...,7 (Fig.7.40(c)) mostra um comportamento semelhante ao observado na estratégia A, entretanto, com oscilações menores e o erro local com valor $E_{\tau_{yz}} = 0,184865$.

Os resultados deste capítulo mostraram um comportamento satisfatório dos espaços construídos utilizando MEFG nos problemas analisados. Sendo que a versatilidade da metodologia é evidenciada na abordagem de problemas de camada limite, onde, embora para problemas simples, os resultados obtidos por enriquecimento ortotrópico e pela utilização de espaços locais

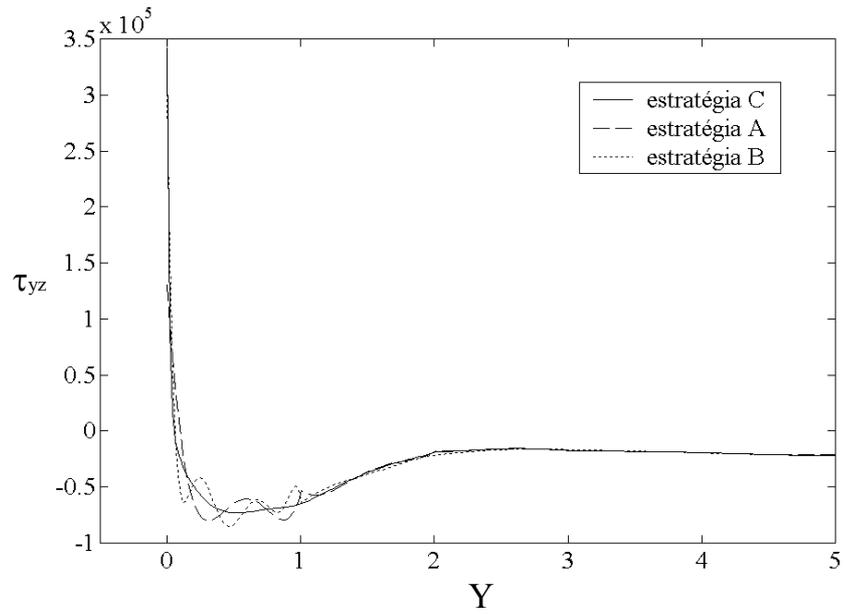


Figura 7.44: Tensão τ_{yz} para as estratégias A, B e C avaliados sobre a aresta AD.

especiais, indicados em (6.18), mostraram-se muito bons.

Os espaços locais especiais utilizados neste trabalho limitam-se, no momento, a problemas de placas e cascas rasas com contornos retos. Com os resultados e comentários apresentados fecha-se o capítulo acreditando ter cumprido o propósito estabelecido de mostrar o desempenho da metodologia utilizada nos problemas abordados.

Capítulo 8

Considerações finais

Concluí-se este trabalho tendo evidenciado, tanto quanto possível, as potencialidades e limitações do Elementos Finitos Generalizados (MEFG) na análise de problemas estáticos de placas e cascas. Dentro deste contexto foram implementadas contribuições que contemplam problemas das metodologias sem malha de forma geral. A primeira constitui-se numa proposta de construção das funções de enriquecimento em domínios curvos, utilizando o procedimento dos planos *pseudo-tangentes*. A segunda contribuição refere-se à imposição de condições de contorno essenciais de forma forte utilizando uma proposta de construção de funções de fronteira. Esta última proposta não é restrita apenas aos casos de placas e cascas mas ao método como um todo.

Dentre os aspectos positivos do MEFG na abordagem dos problemas analisados, observou-se um comportamento satisfatório nos problemas de travamento (locking) para espessuras de interesse prático, mesmo para as situações de malhas distorcidas. Entretanto os espaços construídos com esta metodologia mostram-se ligeiramente menos adequados na abordagem deste problema do que aqueles obtidos por elementos finitos convencionais hierárquicos (Novotny et alli [1]) e por *hp-Clouds* (Garcia et alli [54]). Nos exemplos observados, do ponto de vista matemático, os espaços construídos não conseguem evitar completamente o travamento (*locking*) de cisalhamento e membrana com bases polinomiais de quarta ordem.

A capacidade p adaptativa do método foi comprovada na convergência de campos primais e duais e em problemas regulares de placas e cascas. Nos problemas de placas, os resultados de convergência em média e para valores locais para os modelos de primeira e terceira ordem

foram satisfatórios e compatíveis com *hp-Clouds* para um espaço com as mesmas características (cobertura e ordem polinomial). Neste item observou-se pouca influência da distorção da malha na convergência sendo a mesma atenuada pelo refino p .

A utilização do MEFG na simulação de placas de material composto por laminado mostrou resultados próximos aos obtidos com elementos finitos convencionais.

A construção dos espaços de aproximação em superfícies curvas, foi realizado utilizando o procedimento dos planos pseudo-tangentes. Este procedimento, de fácil implementação e baixo custo computacional, conserva as características h , p e hp adaptativas do método. A utilização deste procedimento carrega consigo um erro inerente de sua própria concepção. Entretanto, como foi mostrado para uma situação crítica no capítulo cinco desta tese, a sua ocorrência não inviabiliza o procedimento. A aplicabilidade desta técnica em superfícies curvas fica evidente em problemas como:

- i.** A simulação dos efeitos de perturbação devido aos apoios em cascas cilíndricas sob pressão interna.
- ii.** Efeitos de distorção da malha na convergência. Nesta situação verificou-se um comportamento semelhante àquele obtido em elementos finitos convencionais com refino p (Actis, Szabo & Schwab [64]) onde o erro proveniente da distorção é atenuado por um refino p .
- iii.** Verificação do caráter hierárquico dos modelos de primeira e terceira ordem. Os resultados obtidos nesta situação corroboram a eficiência da capacidade p adaptativa. Neste exemplo, o erro relativo do deslocamento radial ao longo do meridiano, obtido para uma malha de 2×2 elementos, mostrou um comportamento próximo ao obtido com elementos finitos convencionais sólidos.

Um dos compromissos deste trabalho de tese é investigar, tanto quanto possível, a versatilidade dos espaços construídos segundo a filosofia do MEFG. Neste aspecto foi comprovada a eficiência dos espaços p adaptativos como mostrado nos capítulos seis e sete desta tese.

Os resultados obtidos com refinamentos p adaptativos ortotrópicos utilizando funções polinomiais ou funções especiais, mostradas no capítulo seis, indicam comportamentos qualitativos e

quantitativos melhores que aqueles obtidos por refino p isotrópico como era já esperado. Esta característica ficou evidente na abordagem de problemas de camada limite. Neste caso, além de se ter valores muito próximos da solução analítica ou uma solução de referência, consegue-se diminuir, ou até evitar, no caso de utilizar funções especiais, as oscilações da solução nos elementos próximos à região perturbada.

A família de funções de fronteira, proposta no capítulo seis, apresenta resultados excelentes nos problemas de camada limite. Os resultados para o modelo de primeira ordem, em placas e cascas rasas parabólicas de material homogêneo elástico linear isotrópico, evidencia os comentários supracitados.

Um comportamento semelhante ao das cascas parabólicas rasas, modeladas com teoria de primeira ordem e de material homogêneo, é observado para a mesma estrutura constituída de material composto por laminado e modelada com teoria de terceira ordem. Nesta situação os valores foram comparados com aqueles obtidos por refino hp adaptativo para o mesmo exemplo.

O aspecto a ser ressaltado é que nos exemplos de camada limite não foram utilizadas malhas com refino h nas bordas onde ocorre a perturbação da solução.

Em relação à imposição de condições de contorno de Dirichlet, a idéia inicial de eliminar as funções que aproximam graus de liberdade prescritos nestas fronteiras não é correta. As simples eliminação destas funções dos espaços locais os torna incapazes de representar certos modos de solução. Este trabalho apresenta uma proposta para abordar este problema utilizando a substituição dos espaços locais que aproximam graus de liberdade prescritos. Este procedimento é baseado em multiplicação seletiva e da origem às *funções de fronteira*. Estas funções possuem valores nulos nas fronteiras de Dirichlet e não se anulam dentro do elemento. A utilização destas funções melhora a convergência de campos com valores máximos sobre a fronteira prescrita.

Ficam como sugestões para trabalhos futuros, dentre outros,

- i. Estudar a possibilidade de implementar partições de unidade não polinomiais. Aumenta-se com isto o tempo de integração numérica mas a matriz de rigidez resultante é positiva definida.
- ii. Utilizar superfícies parametrizadas ajustadas aos elementos suportes das nuvens. Acredita-se que com estes procedimentos deve-se diminuir sensivelmente o erro de projeção cometido

utilizando a técnica dos planos pseudo- tangentes.

iii. Aplicar técnicas de integração numérica adaptativa (J. C. F. Telles [43]), de maneira a diminuir o tempo de integração numérica nos elementos de fronteira quando são utilizadas funções especiais.

As sugestões citadas acima foram consideradas a partir das dificuldades encontradas neste trabalho. Entretanto, o horizonte de pesquisa nesta área é muito amplo abrangendo, por exemplo, o estudo dos espaços locais ótimos. Estes espaços são desenvolvidos para otimizar o comportamento local de classes específicas de problemas.

Neste trabalho foram testados com sucesso alguns casos de problemas de camada limite ficando ainda uma infinidade de outras situações como singularidades geométricas ou de carregamentos, simulação do caráter oscilatório de problemas elípticos de segunda ordem com coeficientes rugosos (Babuska, Caloz & Osborn [27]), típicas de soluções de materiais compostos, etc.

Finalmente, fecha-se este trabalho de tese tendo mostrado de forma objetiva as potencialidades do MEEG, com contribuições feitas nesta metodologia e identificando as dificuldades encontradas no percurso da pesquisa. Contudo, mais do que as modestas contribuições apresentadas, e despojado de qualquer interesse individualista, o objetivo deste trabalho destina-se a despertar o interesse de outros pesquisadores no tema, renovando a incansável busca da quimera, força vital da ciência em todas suas manifestações.

Bibliografia

- [1] A. A. Novotny, 'Projeto Ótimo de Malhas Adaptativas', Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC, Florianópolis, junho de 1998.
- [2] A. K. Noor, '*Stability multilayered composite plates*', Fibre Sci. Technol, 8(2): 81-89, 1975.
- [3] A. Tessler and E. Saether, '*A computationally viable higher-order theory for laminated composite plates*', International Journal of Numerical Methods in Engineering, 31, 1069-1086, 1991.
- [4] B. N. Pandya and T. Kant, '*A refined higher-order generally orthotropic C^0 plate bending element*', Computer & Structures, 28(2): 119-133, 1988.
- [5] B. Szabó & I. Babuska, 'Finite Element Analysis ', John Wiley & Sons, New York 1976.
- [6] B. Nayroles, G. Touzot & P. Villon, '*Generalizing the finite element methods: Diffuse approximation and diffuse elements*', Computational Mechanics, 10, 307-318, 1992.
- [7] C. A. Duarte, '*A review of Some Meshless Methods to Solve Partial Differential Equations*', TICAM Report 1995.
- [8] C. A. Duarte & J. T. Oden, '*An Adaptive Method Using Clouds* ', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering, 139, 237-262, (1996).
- [9] C. A. Duarte & J. T. Oden, '*Hp Clouds A Meshless Methods to Solve Boundary Value Problems*', TICAM Reports, (1995).
- [10] C. A. Duarte; 'The hp-Clouds Method', Tese de Doutorado, Universidade de Texas 1996.

- [11] C. A. Duarte, I. Babuska and J. Oden, '*Generalized Finite Element Methods Three Dimensional Structural Mechanics Problems*', Computer & Structures, 77(2): 215-232, 2000.
- [12] C. A. Duarte and I. Babuska, '*Mesh Independent p-Ortotropic Enrichment Using the Generalized Finite Element Method*', Technical Report, TICAM, The University of Texas at Austin, Austin TX, 78712, USA.
- [13] C. A. Xenophontos, '*Finite Element Computational for the Reissner-Mindlin Plate Model*', Communications in Numerical Methods in Engineering, 14(12): 1119-1131, 1998.
- [14] C. Schwab M. Suri & C. A. Xenophontos, '*The hp version of the finite element method for singularly perturbed problems*', Tese de Doutorado, Departament of Mathematics & Statistics, University of Maryland Baltimore Country, Baltimore MD 21228-5398.
- [15] C. H. Huang and E. Hinton, '*A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation*', International Journal for Numerical Method in Engineering, 22, 73-92, 1986.
- [16] D. A. Pecknold and Rahman, '*Micromecanics-based structural analysis of thick laminated composites*', Computer & Structures, 51(2): 163-179, (1994).
- [17] D. Hegen, '*Element-Free Galerkin Methods in Combination with Finite Element Approaches*', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering, 135, 143-166, (1996).
- [18] D. N. Arnold & R. S. Falk, '*Edge effects in the Reissner-Mindlin plate theory*', I A. K. Noor, T. Belytscho, and J. C. Simo, editors, Analytical and Computational Models of shells, pages 71-89, A.S.M.E, New York 1989.
- [19] E. Reissner, '*On the theory of bending of elastic plates*', Journal of Mathematics and Physics., 23(1944).
- [20] E. Reissner, '*The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*', Journal of Applied Mechanics, 12(2): 69-77, (1945).

- [21] F. B. Hildebrand, E. Reissner and G.B. Thomas, '*Notes on the theory of small displacement of orthotropic shells*', NASA technical Note 1981.
- [22] F. Zalamea, J. Miquel and S. Oller; '*Treatment of Composite Materials Based on the Homogenization Method*', Computational Mechanics, Barcelona, Spain 1998.
- [23] F. A. Menezes & P. R. B. Devloo, '*Elementos finitos adaptativos aplicados ao cálculo de cascas de material composto*', Publicação Interna, Faculdade de Engenharia Civil de Universidade Estadual de Campinas, 2000.
- [24] F. A. Menezes & P. R. B. Devloo, '*Cálculo de placas multi-camadas com possibilidades de rotações distintas em cada camada*', Publicação Interna, Faculdade de Engenharia Civil de Universidade Estadual de Campinas, 2000.
- [25] G. W. Jim & Y. K. Chung, '*Trefftz method applied to a moderately thick plates*', International Journal of Numerical Methods in Engineering, 44, 1011-1024, 1999.
- [26] I. Babuska, B. Szabó and R. Actis, '*Hierarchis Models for Laminated Composites*', International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33, 503-535, 1992.
- [27] I. Babuska, G. Caloz & J. E. Osborn, '*Special Finite Element Methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients*', SIAM J. Numer. Anal, 31(4): 945-981, 1994.
- [28] I. Babuska, T. Strouboulis & C.S. Upadhyay, '*A Model study of quality of a posteriory estimator by numerical approach*', technical note BN-1147, Maryland 1993.
- [29] I. Babuska, U. Banerjee and J. E. Osborn, '*On principles for the selection of shape functions for the Generalized Finite Element Method*', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering, 191, 5595-5629, 2002.
- [30] J. M. Whitney and J. Pagano, '*Shear deformation in heterogeneous plates*', Journal of Applied Mechanics, 37, 1031- 1036, 1970.
- [31] J. N. Reddy, '*Energy and Variational Methods in Applied Mechanics* ', John Wiley & Sons, New York, 1984.

- [32] J. N. Reddy, '*A simple higher-order theory for laminated composite plates*', Journal of Applied Mechanics, 51, 745-752, 1984.
- [33] J. N. Reddy, '*A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation*', International Journal of Solids and Structures, 20(9-10): 881-886, 1984.
- [34] J. M. Melenk & I. Babuska, '*The partition of unity finite element method: Basic theory and applications*', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering, 139, 289-314, 1996.
- [35] J. J. Monaghan, '*An introduction to SPH*', Computer Physics Communications, 48, 89-96, 1988.
- [36] J. T. Liszka, C. A. Duarte and W. W. M. Tworzydło, '*hp-Meshless cloud method*', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering, 139, 263-288, 1996.
- [37] J. L. Batoz & Goury Dhatt, '*Modelisation des structures par éléments finis*', 3, Editions Hermés, Paris 1992
- [38] J. T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz and T. A. Westermann, '*Toward a Universal hp Adaptive Finite Element Strategy Part 2. A Posteriori Error Estimation*', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering, 77, 113-180, 1989.
- [39] J. T. Oden and J. N. Reddy, '*An introduction to the mathematical theory of finite elements*', John Wiley & Sons, New York 1976.
- [40] J. L. Teixeira de Freitas & F. L. S. Busamra, '*Three-dimensional hybrid-Trefftz stress elements*', International Journal of Numerical Methods in Engineering, 47, 972-950, 2000.
- [41] J. Pitkaranta, A. M. Matache and C. Schwab; '*Fourier mode analysis of layers in shallow shell deformations*', Seminar für Angewandte Mathematik Eidgenössische Technische Hochschule CH-8092 Zürich Switzerland, Research Report, 99-18, 1999.

- [42] Jin-Rae Cho & J. T. Oden, '*Locking and boundary layer in hierarchical models for thin elastic structures*', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering, 149, 33-48, 1997.
- [43] J. C. F. Telles, '*A self adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary elements integrals*', International Journal for numerical method in engineering, 24, 959-973, 1978.
- [44] K. H. Lo, R. M. Cristensen and E. M. Wu, '*A higher theory of plate deformation, Part 2: Laminated Plates*', Journal of Applied Mechanics, 44(5): 669-676, 1977.
- [45] K. S. Sivakumaran, S. H. Chowdhury and K. Vajarasathira, '*Some studies on finite elements for laminated composited plates*', Computer & Structures, 52(4): 729-741, 1994.
- [46] K. Marguerre & Hans-Theo Woernle, '*Elastic Plates*', Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts 1969.
- [47] K. Schwebke and S. M. Holzer, '*Some remarks on Generalized Finite Element Method*', Fifth World Congress on Computational Mechanics, July 2002, Viena Austria.
- [48] L. C. Nicolazzi, '*Análise de tensões e deslocamentos através de séries de Fourier em reservatórios cilíndricos apoiados em diafragmas*', Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis 1982.
- [49] L. Della Croce & T. Scapolla, '*Hierarchic finite elements with selective and uniform reduced integration for Reissner-Mindlin plates*', Computational Mechanics, 10, 121-131, 1992.
- [50] N. J. Pagano, '*Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates*', Journal of Composite Materials, 3, 298-311, 1969.
- [51] N.J. Pagano, '*Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates*', Journal of Composite Materials, 4, 20-35, 1970
- [52] N. J. Pagano and S. J. Hatfield, '*Elastic Behavior of multilayered bidirectional composite*', A. I. A. A. J., 10, 931-933, 1972.

- [53] N. D. Phan and J. N. Reddy, '*Analysis of composite plates using a higher-order shear deformation theory*', International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21, 2201-2219, 1985.
- [54] O. Garcia, E. A. Fancello, Clovis S. Barcellos & C. A. Duarte, '*hp-Clouds in Mindlin's thick plate model* ', International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47, 1381-1400, 2000.
- [55] P. T. Rocha de Mendonça, 'Materiais Compostos e Estruturas Sansuitche, projeto e análise', Primeira edição, Imprensa da UFSC, Outubro de 2001.
- [56] P. T. Rocha de Mendonça, 'Uma formulação de elemento finito para placas delgadas multilaminadas', Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica, 1983.
- [57] P. Lancaster & K. Salkauskas, 'Surfaces generate by moving least squares methods', Mathematics of Computation, 37(155): 141-158, 1981.
- [58] P. Kryls & T. Belytschko, '*Analysis of Thin Shells by Element-Free Galerkin Method*', International Journal of Solids Structures, 33(20 22): 3057-3080, 1996.
- [59] P. R. B. Devloo, '*On the definition of hig horder shape functions for finite elements*', Publicação Interna, Departamento de Estruturas, Faculadade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas, Julio de 1999.
- [60] R.D. Mindlin, '*Influence of the rotatory inertial and shear on flexural motions of isotropic elastic plates*', 18(2) Trans ASME. 73, A3, 1951.
- [61] R. M. Jones, 'Mechanics of Composite Materials', Scripta Book Company, Washington 1975
- [62] R. B. Nelson and D. R. Lorch, '*A refined theory for laminated orthotropic plates*', Journal of Applied Mechanics, 41-171, 1974.

- [63] R. B. Pipes & N. J. Pagano; '*Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension*', Journal of Composite Materials, 538-548, 1970.
- [64] R. Actis, B. Szabó and Schwab, '*Hierarchic Models for Laminated plates and shells*', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering, 172, 79-107, 1999.
- [65] R. L. Taylor, O. C. Zienkiewicz, E. Oñate and S. Idelson, '*Moving Least Square Approximation for Solution of Differential Equations*', Publication CIMNE, 74, 1995.
- [66] R. H. MacNeal and R. L. Harder, '*A proposed standard set of problems to the finite element accuracy*', Finite Element in Analysis and Design, 1, 3-20, 1985.
- [67] S. W. Tsai & H. T. Hahn, '*Introductions to Composite materials*', Technomic Publishing Company, Lancaster Pennsylvania 1980.
- [68] Sun Liangxin and Shi Zhiyu, '*The analysis of laminated composite plates based on a simple higher-order theory*', Computer & Structures, 5, 831-837, 1992.
- [69] Shu Xiao-ping, '*An improve simple higher-order theory for laminated composite shells*', Computer & Structures, 60(3): 343-350, 1996.
- [70] S. Ahmad, B. M. Irons & O. C. Zienkiewicz, '*Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements*', International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2, 419-451, 1970.
- [71] S. Beissel, T. Belitschko, '*Nodal integration of Element-Free Galerkin Method*', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering, 115, 227-286, 1996.
- [72] S. P. Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger, '*Theory of Plates and Shells*', second editions, Macgraw-hill book company, inc, New York 1959.
- [73] T. Kant, '*Numerical Analysis of thick plates*', Computer Methods and Applied Mechanics in Engineering, 31, 1-18, 1982.

- [74] T. Kant and J. R. Kommineni, '*Geometrically non linear transient analysis of laminated and sandwich shells with a refined theory and C^0 finite elements*', Computer & Structures, 52(6): 1124-1252, 1994
- [75] T. Kant and B.S. Manjunatha, '*On accurate estimation of transverse stress in multilayer laminates*', Computer & Structures, 50(3): 351-365, 1994.
- [76] T. Kant, D. R. J. Owen and O. C. Zienkiewicz, '*A refined higher-order C^0 plate bending element*', Computers and Structures, 15, 177-183, 1982
- [77] T. Liszka, '*An interpolation method for an irregular net of nodes*', International Journal of Numerical Methods in Engineering, 20, 1566-1612, 1984.
- [78] T. Liszka & J. Orkisz, '*Finite difference method for arbitrary irregular meshes in nonlinear problems of applied mechanics*', In IV SMiRT, San Francisco, 1977.
- [79] T. Liszka & J. Orkisz, '*The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics*', Computers and Structures, 11, 83-95, 1980.
- [80] T. Belytschko, Y. Y. Lu and L. Gu, '*Element Free Galerkin Method*', International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, 229-256, 1994.
- [81] T. Belytschko, W. K. Liu, J. S. J. Ong and D. Lam, '*Mixed variational principles and stabilization of spurious modes in the 9-nodes element*', Computer & Structures, 20, 121-128, 1985.
- [82] T. Yang, Henry Y., Saigal S., A. Masud & R.K. Kapania, '*A survey of recent shells finite elements*', International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47, 101-127, 2000.
- [83] T. Stroubolis, I. Babuska & K. Copps, '*The design and analyses of generalized finite element method*', Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 181(1-3): 43-69, 2000.
- [84] W. L. Cordes & B. Moran, '*Treatment of material discontinuity in the Element-Free Galerkin Method*', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering 135, 143-166, 1996

- [85] W. K. Liu, S. Jun and Y. F. Zhang, '*Reproducing Kernel Particle Method*', International Journal in Numerical Method in Fluids, 20, 1081-1106, 1995.
- [86] Y. Y. Lu, T. Belytschko, and L. Gu, '*A new implementation of the element free Galerkin method* ', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering, 113, 397-414, 1994.
- [87] Y. Y. Lu, T. Belytschko & M. Tabbara, '*Element-free Galerkin Method for wave propagation and dynamic fracture*', Computers Methods and Applied Mechanics in Engineering, 126, 75-89, 1995.

Apêndice A

Viga parabólica delgada

A.1 Introdução

Na análise numérica do erro de distorção introduzido no processo dos planos *pseudo-tangentes* busca-se uma forma de isolar este efeito dentre outras fontes de erro. A prosta apresetada neste trabalho consiste numa viga parabólica delgada em balanço com uma carga de momento na extremidade livre. Consegue-se com isto uma solução suave, aproximada facilmente com refino p , e uma representação exata da geometria com elementos quadráticos. O valor utilizado como parâmetro para comparação é o deslocamento transversal na superfície livre obtido aplicando trabalhos virtuais (PTV).

A.2 Deslocamento transversal w

O problema é resolvido para a família de arcos parabólicos mostrados na Fig.A.1 e dados pela função:

$$z = kR - (k/R)x^2 \quad (\text{A.1})$$

Na expressão (A.1), k é um coeficiente proporcional à curvatura do arco. Aplicando o PTV ao problema se tem

$$\sum W_{ext} + \sum W_{int} = 0, \quad (\text{A.2})$$

ou abrindo a expressão se obtém:

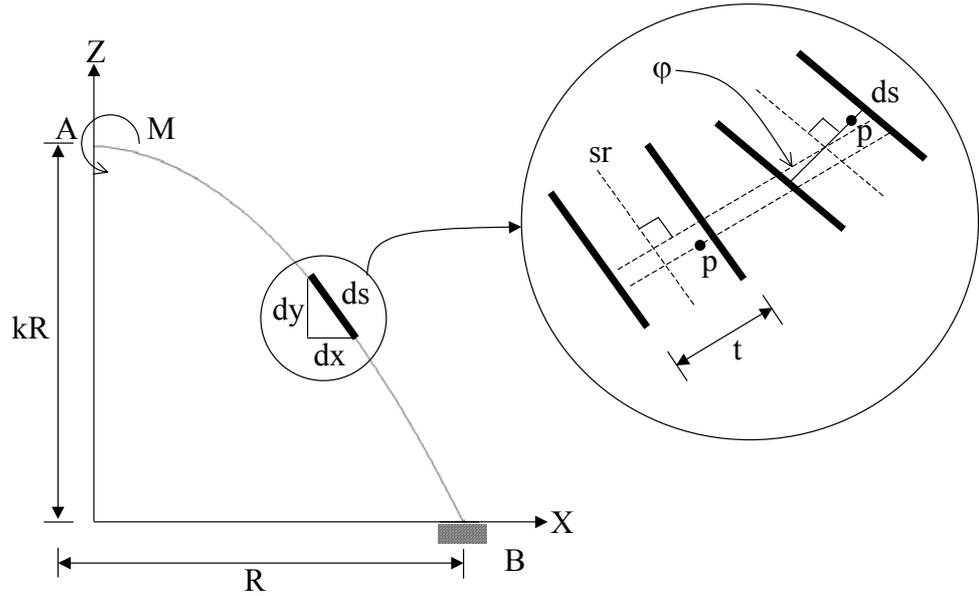


Figura A.1: Arco parabólico delgado em balanço com momento na extremidade.

$$1.w_A - \int_0^R \delta M d\varphi = 0.0. \quad (\text{A.3})$$

Em (A.3) w_A é o deslocament transversal no ponto A, δM o mometo virtual através da viga e $d\varphi$ o diferêncial de arco correspondente à rotação da seção como indicado na Fig.A.1. O sistema virtual de carregamento é obtido pela aplicação de uma carga unitária transversal aplicada no nó A. Abrindo a epressão (A.3) se tem que:

$$\delta M = x \quad (\text{A.4})$$

$$d\varphi = \frac{M}{EI} ds \quad (\text{A.5})$$

Em (A.5) o diferencial de arco ds em coordenadas catesianas é dado por:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \frac{4k^2x^2}{R^2}} dx \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.4), (A.5) e (A.6) em (A.3) a equação de trabalhos virtuais toma a forma:

$$1.w_A - \frac{M}{EI} \int_0^R x \sqrt{1 + \frac{4k^2x^2}{R^2}} dx = 0.0, \quad (\text{A.7})$$

portanto w_A é determiando pela integral:

$$w_A = \frac{M}{EI} \int_0^R x \sqrt{1 + \frac{4k^2 x^2}{R^2}} dx \quad (\text{A.8})$$

Integrando (A.8) entre os limites prescritos se obtem a seguinte expressão para o deslocamento transversal w_A :

$$w_A = \frac{2MkR^2}{3EI} \left[\left(\frac{1}{4k^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8k^3} \right] \quad (\text{A.9})$$

A expressão (A.9) refere-se ao modelo de viga de Euler-Bernoulli portanto seus valores analíticos serão utilizados com cautela tendo apenas o obojetivo de verificar a sensibilidade quando comparadas com resultados dos modelos de semi-espessos utilizados neste trabalho.

Apêndice B

Operador de rotação

B.1 Introdução

A finalidade de se trabalhar com um operador de rotação para a transformação de tensores de segunda ordem, permite uma abordagem computacional mais adequada em processos p adaptativos. A proposta apresentada aqui é a de substituir a forma usual da operação de rotação de um tensor de segunda ordem do tipo,

$$\bar{A} = Q^T A Q, \quad (\text{B.1})$$

pela operação dada por:

$$\bar{V}_A = R V_A. \quad (\text{B.2})$$

Na expressão (B.2), \bar{V}_A e V_A são as componentes dos tensores A e \bar{A} escritas em forma de vetores e R é um operador de rotação que satisfaz a igualdade (B.2). Este operador é uma matriz quadrada de dimensões $n^2 \times n^2$, onde n é o número linhas da matriz de rotação Q . A obtenção do operador R bem como sua forma matricial são deduzidas a partir da expressão (B.1).

B.2 Operador de Rotação R

Para construir o operador de rotação parte-se da expressão (B.1), escrita em forma indicial:

$$\bar{A}_{jn} = Q_{ij}A_{il}Q_{ln}, \quad i, j, l, n = 1, \dots, 3, \quad (\text{B.3})$$

$$\bar{A}_{jn} = Q_{ij}Q_{ln}A_{il}, \quad (\text{B.4})$$

$$\bar{A}_{jn} = R_{ijln}A_{il}, \quad i, j, l, n = 1, \dots, 3. \quad (\text{B.5})$$

A partir da expressão (B.5), concluí-se que operador de rotação R é um tensor de quarta ordem e é obtido por:

$$R_{ijln} = Q_{ij}Q_{ln}, \quad i, j, l, n = 1, \dots, 3. \quad (\text{B.6})$$

Sendo $\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ o gradiente de deslocamento dado por

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

o mesmo pode ser escrito na sua forma vetorial, utilizada na equação (B.2), como,

$$(\partial_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}))^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial z} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \right\}. \quad (\text{B.8})$$

partindo agora das equações (B.2), (B.6) e (B.8), obtém-se uma operação de rotação dada por,

$$\partial_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{u}) = R\partial_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}), \quad (\text{B.9})$$

onde $\partial_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{u})$ é o vetor formado pelas componentes do tensor $\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{u})$ na base local $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ e o operador R têm a forma matricial dada por:

$$R = \begin{bmatrix} q_{11}Q^T & q_{12}Q^T & q_{13}Q^T \\ q_{21}Q^T & q_{22}Q^T & q_{23}Q^T \\ q_{31}Q^T & q_{32}Q^T & q_{33}Q^T \end{bmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

O operador de rotação indicado em (B.6) é representado por uma matriz de 9×9 , constituído pela formação em bloco de 9 submatrizes como indicado em (B.10).

O procedimento apresentado aqui para realizar a operação de rotação do tensor de deslocamento $\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ da base global (X, Y, Z) para a base local $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ sistematiza este procedimento quando cada componente do gradiente deve ser escrito como a combinação linear de um número

finito de funções como é o caso de aproximações que utilizam p adaptatividade. O operador R definido em (B.10) mantém as propriedades de ortonormalidade da matriz de rotação Q ou seja:

$$I = RR^T \quad (\text{B.11})$$

B.3 Ortogonalidade de R

Partindo da equação (B.1), a transformação inversa é obtida por,

$$A = Q\bar{A}Q^T. \quad (\text{B.12})$$

Substituindo a equação (B.1) em (B.12) pode-se expressar a matriz de A como:

$$A = QQ^T AQQ^T. \quad (\text{B.13})$$

Para identificar os operadores de rotação R utilizaremos a expressão (B.13) na sua forma indicial como segue:

$$\begin{aligned} A_{ir} &= Q_{ij}Q_{kj}A_{kn}Q_{nq}Q_{rq}, \quad i, j, k, n, q, r = 1, \dots, 3 \\ A_{ir} &= Q_{ij}Q_{rq}Q_{kj}Q_{nq}A_{kn}, \\ A_{ir} &= R_{ijrq}R_{kjqn}A_{kn}, \\ A_{ir} &= \delta_{irkn}A_{kn}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Da igualdade (B.14) concluí-se que:

$$R_{ijrq}R_{kjqn} = \delta_{irkn}. \quad (\text{B.15})$$

Escrevendo (B.15) em na forma matricial se têm $RR^T = I$. O prova de $R^T R = I$ segue um procedimento similar ao anterior. Fecha-se assim este anexo mostrando uma alternativa válida para as operações de rotação em processos p adaptativos.

Apêndice C

Solução do sistema linear

A dependência linear do conjunto de funções \mathcal{F}_N^p definido em (3.7) e (3.9) decorrente de utilizar partições de unidade polinomiais e funções de enriquecimento também polinomiais resulta numa matriz de rigidez positiva semi definida.

A abordagem utilizada neste trabalho, para contornar o problema, proposta em Duarte, Babuska & Oden [11], a qual será objeto de crítica deste anexo.

C.1 Algoritmo iterativo

A construção do algoritmo compreende dois procedimentos. O primeiro consiste num pré condicionamento do sistema linear inicial que contém a matriz de rigidez positiva semi-definida. O segundo procedimento consiste na criação de uma matriz perturbada positiva definida e o processo iterativo de redução do resíduo.

O algoritmo iterativo utilizado pode ser compreendido através da solução do seguinte problema:

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{F}}. \tag{C.1}$$

i. Pré-condicionamento

Em (C.1) $\tilde{\mathbf{K}}$ é uma matriz positiva semi definida, $\tilde{\mathbf{U}}$ é o vetor de parâmetros de deslocamento e $\tilde{\mathbf{F}}$ o vetor de cargas equivalentes. Seja ainda uma matriz diagonal \mathbf{T} tal que,

$$T_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{\tilde{K}_{ij}}}. \quad (\text{C.2})$$

Pré multiplicando pela matriz \mathbf{T} ambos os lados da igualdade de (C.1) obtem-se o sistema equivalente dado por,

$$\mathbf{T}\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{F}}, \quad (\text{C.3})$$

ou ainda,

$$\mathbf{T}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{F}}. \quad (\text{C.4})$$

O sistema da equação (C.4) pode ser reescrito como,

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (\text{C.5})$$

onde,

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{T}, \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{F}}, \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{U}}. \quad (\text{C.8})$$

A matriz \mathbf{K} resultante do processo de pré-condicionamento tem os termos da diagonal principal unitários.

ii. Processo iterativo de redução do resíduo

A idéia principal deste procedimento é a obtenção de uma matriz positiva definida através de uma perturbação dos elementos da diagonal principal da matriz pré-condicionada \mathbf{K} . Isto é feito através da seguinte operação:

$$\mathbf{K}_\epsilon = \mathbf{K} + \epsilon\mathbf{I}. \quad (\text{C.9})$$

O valor da perturbação $\epsilon > 0$ sendo o valor aconselhado de $\epsilon = 1 \times 10^{-10}$.

A partida do processo iterativo consiste na determinação dos valores iniciais para o resíduo \mathbf{r}_0 , para o erro \mathbf{e}_0 e para o vetor de parâmetros de deslocamento \mathbf{U}_0 , de forma que

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{K}_\epsilon^{-1}\mathbf{F}, \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U}_0. \quad (\text{C.11})$$

Por definição sendo \mathbf{U} o vetor obtido com resíduo zero o erro cometido quando $\mathbf{K} \simeq \mathbf{K}_\epsilon$ e definido por,

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{U} - \mathbf{U}_0, \quad (\text{C.12})$$

portanto,

$$\mathbf{K}_\epsilon \mathbf{e}_0 \simeq \mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{K}\mathbf{U}_0 = \mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U}_0 = \mathbf{r}_0. \quad (\text{C.13})$$

Da igualdade (C.13) concluí-se que:

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{K}_\epsilon^{-1}\mathbf{r}_0. \quad (\text{C.14})$$

Com os valores iniciais dados pelas expressões (C.11), (C.12) e (C.14) da-se a partida ao processo iterativo. O controle de convergência é feito através do quociente q_i , dado em (C.15), entre as normas Euclidianas do erro \mathbf{e}_i e do vetor de parâmetros de deslocamentos \mathbf{U}_i onde ambos os vetores estão definidos em \mathbb{R}^N sendo N a dimensão do espaço.

$$E_i = \frac{\|\mathbf{e}_i\|_{\mathbb{R}^N}}{\|\mathbf{U}_i\|_{\mathbb{R}^N}}, \quad i = 1, \dots, ni, \quad (\text{C.15})$$

em ni representa o número de interações adotadas e . O critério de parada para o processo é quando $q_i \leq 1 \times 10^{-6}$.

O processo iterativo segue o roteiro:

$$\begin{aligned}
E_i &= 1; \\
i &= 1; \\
\textit{While}(E_i &\leq 1 \times 10^{-10}) \\
\bar{\mathbf{r}}_{(i-1)} &= \mathbf{K}\mathbf{e}_{(i-1)}; \\
\mathbf{r}_{(i)} &= \mathbf{r}_{(i-1)} - \bar{\mathbf{r}}_{(i-1)}; \\
\mathbf{e}_{(i)} &= \mathbf{K}_\epsilon^{-1}\mathbf{r}_{(i)}; \\
\mathbf{U}_{(i)} &= \mathbf{U}_{(i-1)} + \mathbf{e}_{(i-1)}; \\
i &= i + 1;
\end{aligned}$$

O valor final do vetor de parâmetros de deslocamento é dado pela expressão:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{T}\mathbf{U} \tag{C.16}$$