Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

A C^*-álgebra de um Grupo

Alcides Buss
Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel Filho

Florianópolis
Fevereiro de 2003

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

A C^*-álgebra de um Grupo

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Alcides Buss
Florianópolis
Fevereiro de 2003

A C^*-álgebra de um Grupo

por

Alcides Buss

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Prof. Dr. Igor Mozolevski
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Exel Filho (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Luiz Augusto Saeger (UFSC)

Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo (USP)

Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2003.

À minha Mãe, Maria Salete Böing Buss

À minha noiva, Jizeli de Souza

Ao meu Pai, Arci José Buss

À Deus

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a minha noiva Jizeli, por todo o carinho e paciência. Agradeço também aos meus pais e minha irmã, por todo o suporte, apoio e alegria.

Aos colegas Anderson, Claires, Claudio, Danilo, Divane, Edson, Gilberto, Jeison, Juliano, Lucicléia e Patricia, pela amizade, companheirismo e por todas as horas de estudos enfrentados juntos.

Um especial agradecimento ao meu orientador, Ruy Exel, um profissional extraordinário que teve a enorme paciência de resolver todas as minhas dúvidas. Mais do que isso, por ter sido um grande amigo.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) que através do suporte financeiro possibilitou a realização deste trabalho.

Resumo

Dado um grupo localmente compacto G, definiremos o que vem a ser $C^*(G)$, a C^*-álgebra de G. Provaremos que sempre existe a C^*-álgebra de G e que ela é caracterizada pelo fato de que as representações unitárias e contínuas de G estão em bijeção com as $*$-representações não-degeneradas de $C^*(G)$. Sendo assim, para classificar as representações de G basta classificar as $*$-representações de $C^*(G)$, o que representa um grande ganho de simplicidade.

No caso de G ser abeliano caracterizaremos a sua C^*-álgebra em termos do teorema de Gelfand. Mais especificamente, provaremos que a C^*-álgebra de G é (isomorfa a) $C_0(\hat{G})$, onde $\hat{G}$ é o grupo caracter de G.

Abstract

Given a locally compact group G, we will define what comes to be $C^*(G)$, the group C^*-algebra of G. We will prove that always there is the group C^*-algebra of G and that it is characterized by the fact that the continuous unitary representations of G are in bijection with the non-degenerate $*$-representations of $C^*(G)$. Hence, to classify the representations of G is enough to classify the $*$-representations of $C^*(G)$, what represents a great gain of simplicity.

In the case of G to be abelian we will characterize its C^*-algebra in terms of Gelfand's theorem. More especifically, we will prove that the group C^*-algebra of G is (isomorphic to) $C_0(\hat{G})$, where $\hat{G}$ is the character group of G.

Sumário

Introdução

Dado uma $*$-álgebra de Banach B, existe a C^*-álgebra $C^*(B)$ associada a B, chamada a C^*-álgebra envolvente de B, com a propriedade que toda $*$-representação de B se "extende" naturalmente a uma $*$-representação de $C^*(B)$. Desta maneira estudar as $*$-representações de B é o mesmo que estudar as $*$-representações de $C^*(B)$.

Por outro lado, dado um grupo localmente compacto G, podemos associar a G a $*$-álgebra de Banach $L_1(G)$, chamada a álgebra de grupo de G. Uma propriedade importante de $L_1(G)$ é que existe uma correspondência biunívoca entre as representações unitárias e contínuas de G e as $*$-representações não-degeneradas de $L_1(G)$. Portanto se definirmos a C^*-álgebra de G (denotada por $C^*(G)$) como sendo a C^*-álgebra envolvente de $L_1(G)$, então existe uma bijeção entre as representações unitárias de G e as $*$-representações não-degeneradas de $C^*(G)$.

O caso comutativo reserva uma discussão especial. Se G é abeliano então define-se outro grupo abeliano $\hat{G}$, chamado o dual (ou grupo caracter) de G, como sendo o conjunto de todos os homomorfismos contínuos de G em S^1. Prova-se que $\hat{G}$ é um grupo topológico localmente compacto e que $\hat{G}$ como espaço topológico é homeomorfo ao espectro da álgebra $L_1(G)$, isto é, o espaço $\widehat{L_1(G)}$ de todos os funcionais lineares multiplicativos não-nulos de $L_1(G)$ em $\mathbb{C}$. Prova-se ainda que o espectro de $L_1(G)$ é homeomorfo ao espectro de $C^*(G)$. Por outro lado, o teorema de Gelfand diz que a C^*-álgebra comutativa $C^*(G)$ é isomorfa a $C_0(\widehat{C^*(G)})$. Como conclusão temos que se G é um grupo topológico abeliano localmente compacto então a C^*-álgebra de G é (isomorfa à) $C_0(\hat{G})$. Este é o resultado principal desta dissertação de mestrado e é apresentado ao final do trabalho.

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No primeiro capítulo apresentamos uma breve exposição de resultados sobre grupos topológicos e medida de Haar sobre tais grupos.

No capítulo 2, construímos a teoria de convolução de funções e medidas, necessária para definir as álgebras $L_1(G)$ e $M(G)$ (a álgebra de medidas complexas sobre

G), e damos algumas propriedades de tais álgebras relacionando-as sempre que possível as propriedades de G.

Dedicamos o capítulo 3 a uma breve exposição da teoria de álgebras de multiplicadores. Uma pergunta interessante é: qual é a álgebra de multiplicadores de $L_1(G)$. A resposta para esta questão é $M(G)$. A prova desse resultado é dada no final do capítulo 3.

No capítulo 4, apresentamos uma introdução à teoria representações de álgebras e de grupos e estudamos a conexão entre elas. É neste capítulo que provamos a existência da bijeção entre o conjunto das representações unitárias e contínuas de um grupo G e as $*$-representações não-degeneradas da álgebra de grupo $L_1(G)$. Provaremos isto usando a teoria de álgebra de multiplicadores.

Dedicaremos o capítulo 5 para definir o que vem a ser o dual de um grupo abeliano G. É neste capítulo que provaremos que $\hat{G}$ é homeomorfo à $\widehat{L_1(G)}$.

O capítulo 6 contém o teorema principal desta dissertação. Com este teorema provaremos que se G é um grupo abeliano (localmente compacto) então a C^*-álgebra de G é $C_0(\hat{G})$. Para provarmos este resultado é necessário construírmos a teoria de C^*-álgebras envolventes.

Por fim, o último capítulo é um apêndice, onde expomos os resultados da teoria de medidas, integração e álgebras necessários para todo o trabalho.

Capítulo 1

Grupos Localmente Compactos

A importância da classe de grupos localmente compactos vem do fato que sobre tais grupos existe uma única (a menos de multiplicação por constantes) medida invariante sob translação à esquerda [direita], chamada a medida de Haar à esquerda [direita].

A primeira seção deste capítulo será dedicada a construção e exposição das propriedades básicas de grupos topológicos. Na segunda seção estudaremos as propriedades básicas das medidas de Haar à esquerda e à direita relacionado-as por intermédio da função modular.

1.1 Grupos Topológicos

Assumimos nesta seção que o leitor tenha um conhecimento de grupos e topologia. Citamos apenas alguns poucos tópicos. O leitor interessado em saber mais sobre grupos pode encontrar em [7] e sobre topologia em [8].

Definição 1.1.1. Um **grupo topológico** é um grupo G, munido de uma topologia no qual as funções

(i) $p : G \times G \to G$, onde $p(x, y) = xy$ (produto), e

(ii) $i : G \to G$, onde $i(x) = x^{-1}$ (inversão),

são contínuas.

Observação 1.1.2. Na definição acima a topologia em $G \times G$ é a "topologia produto". Os abertos "básicos"nesta topologia são os conjuntos da forma $V \times W$, onde V e W são abertos em G. Desta maneira um aberto A de $G \times G$ deve ter a forma

$$A = \bigcup_{i \in I} (V_i \times W_i),$$

onde I é um conjunto de índices e $\{V_i\}_{i \in I}$ e $\{W_i\}_{i \in I}$ são famílias de abertos em G.

Exemplo 1.1.3. Seja G qualquer grupo e considere em G a topologia discreta, ou seja, a topologia no qual todos os subconjuntos de G são abertos. Então a topologia de $G \times G$ também é a discreta. Assim qualquer função com domínio G ou $G \times G$ é contínua. Em particupar p e i são contínuas e portanto G é um grupo topológico.

Exemplo 1.1.4. Seja G qualquer grupo e considere em G a topologia caótica, ou seja, a topologia no qual os únicos abertos são $\emptyset$ e G. Assim qualquer função com contradomínio G é contínua. Em particupar p e i são contínuas e portanto G é um grupo topológico.

Exemplo 1.1.5. Os grupos aditivos $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ são grupos topológicos com relação a topologia usual.

Exemplo 1.1.6. Os grupos multiplicativos $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ e $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ são grupos topológicos com relação a topologia usual.

Exemplo 1.1.7. O grupo $GL_n(\mathbb{C})$ das matrizes complexas $n \times n$ inversíveis com a operação de produto de matrizes usual e a topologia induzida de $\mathbb{C}^{n^2}$ (considerando-se $GL_n(\mathbb{C})$ como um subconjuto aberto de $\mathbb{C}^{n^2}$) é um grupo topológico. Analogamente o grupo $GL_n(\mathbb{R})$ das matrizes reais $n \times n$ inversíveis é um grupo topológico (com a topologia induzida de $\mathbb{R}^{n^2}$).

Exemplo 1.1.8. Seja G um grupo topológico e suponha que H é um subgrupo de G. Então H com a topologia induzida de G (isto é, a topologia onde os abertos de H são da forma $A \cap H$ onde A é um aberto de G) é por si próprio um grupo topológico. Como tal, é chamado um **subgrupo topológico** de G.

Teorema 1.1.9. Seja G um grupo topológico e $a \in G$. Então as funções:

(i) ${}_a\rho : G \to G$; ${}_a\rho(x) = ax$ (translação à esquerda por a) e

(ii) $\rho_a : G \to G$; $\rho_a(x) = xa$ (translação à direita por a)

são homeomorfismos.

Prova: É fácil ver que as funções

$$_aj : G \ni x \mapsto (a, x) \in G \times G \quad \text{e} \quad j_a : G \ni x \mapsto (x, a) \in G \times G$$

são contínuas. Assim, como a função p é contínua segue que $_a\rho = p \circ_a j$ e $\rho_a = p \circ j_a$ são contínuas.

Agora um simples cálculo mostra que $(_a\rho)^{-1} =_{a^{-1}}\rho$ e $(\rho_a)^{-1} = \rho_{a^{-1}}$. Então pelo mesmo argumento acima $(_a\rho)^{-1}$ e $(\rho_a)^{-1}$ são contínuas.

Logo $_a\rho$ e ρ_a são homeomorfismos. ■

Corolário 1.1.10. Todo grupo topológico G é homogêneo, isto é, para todos $x, y \in G$ existe um homeomorfismo f de G em G tal que $f(x) = y$.

Prova: Sejam $x, y \in G$. Então $f = \rho_{x^{-1}y}$ é um homeomorfismo e

$$f(x) = x(x^{-1}y) = y.$$ ■

Para um espaço topológigo X e $x \in X$ denotaremos por $\text{viz}(x)$ o conjunto de todas as vizinhanças abertas de x. Todas as vizinhanças neste trabalho serão consideradas abertas. Um **sistema fundamental de vizinhanças de** x é uma subcoleção $\beta_x \subset \text{viz}(x)$ tal que para todo $V \in \text{viz}(x)$ existe $U \in \beta_x$ tal que $U \subset V$. Uma **base** de X é uma coleção β de subconjuntos de X tal que todo aberto de X pode ser escrito como união de elementos de β.

Seja G um grupo, $x \in G$ e V, W subconjuntos de G; então denotaremos por VW, o conjunto $\{vw : v \in V, w \in W\}$; V^2 será o conjunto VV, V^3 será V^2V e assim por diante; usaremos ainda as notações xV e Vx para os conjuntos $\{x\}V$ e $V\{x\}$ respectivamente. Finalmente V^{-1} denotará o conjunto $\{v^{-1} : v \in V\}$.

Teorema 1.1.11. Seja G um grupo topológico e $a \in G$. Seja β_0 um sistema fundamental de vizinhanças de e. Então as famílias $\{aU : U \in \beta_0\}$ e $\{Ua : U \in \beta_0\}$ são sistemas fundamentais de vizinhanças de a em G. Em particular, as famílias $\{xU : x \in G, U \in \beta_0\}$ e $\{Ux : x \in G, U \in \beta_0\}$ são bases de G.

Prova: Seja W qualquer subconjunto aberto de G, com $a \in W$. Temos que ${}_{a^{-1}}\rho$ é um homeomorfismo. Assim ${}_{a^{-1}}\rho(W) = \{a^{-1}w : w \in W\} = a^{-1}W$ é um aberto em G e $e = a^{-1}a \in a^{-1}W$. Ou seja $a^{-1}W \in \text{viz}(e)$. Como β_0 é um sistema fundamental de vizinhanças de e, existe $U \in \beta_0$ tal que $e \in U \subset a^{-1}W$, isto é, $aU \subset W$.

Logo $\{aU : U \in \beta\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de a em G. Analogamente $\{Ua : U \in \beta\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de a em G.

Seja agora A aberto em G e $a \in A$. Então, como $\{aU : U \in \beta_0\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de a, existe $U \in \beta_0$ tal que $aU \subset A$. Logo $\{xU : x \in G, U \in \beta_0\}$ é uma base de G. Analogamente $\{Ux : x \in G, U \in \beta_0\}$ é uma base de G. ■

Lema 1.1.12. Seja X um conjunto não-vazio. Suponha que β é uma coleção de subconjuntos de X tal que

(i) $\bigcup\limits_{U \in \beta} U = X$; e

(ii) para todo $U_1, U_2 \in \beta$, e para todo $x \in U_1 \cap U_2$, existe $U \in \beta$ tal que $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.

Então $\tau = \{\bigcup\limits_{U \in A} U : A \subset \beta\}$ é uma topologia em X tal que β é uma base para τ.

Prova: Note que $X = \bigcup\limits_{U \in \beta} U \in \tau$ e $\emptyset = \bigcup\limits_{U \in \emptyset} U \in \tau$. Seja $\{U_i\}_{i \in I}$ uma coleção de subconjuntos de τ. Então cada U_i tem a forma $U_i = \bigcup\limits_{U \in A_i} U$ onde $A_i \subset \beta$. Assim

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \left(\bigcup_{U \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i} U \right) \in \tau.$$

Sejam agora $U_1 = \bigcup\limits_{U \in A_1} U$ e $U_2 = \bigcup\limits_{V \in A_2} V$ elementos de τ. Note que por (ii) para cada $U \in A_1$ e $V \in A_2$ temos $U \cap V \in \tau$. Assim

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_{U \in A_1, V \in A_2} U \cap V \right) \in \tau.$$

Logo τ é uma topologia em X e claramente por definição de τ, β é uma base para τ.

Teorema 1.1.13. Seja G um grupo topológico e β_0 um sistema fundamental de vizinhanças de e. Então

(i) $e \in \bigcap\limits_{U \in \beta_0} U$;

(ii) para todo $U \in \beta_0$, existe $V \in \beta_0$ tal que $V^2 \subset U$;

(iii) para todo $U \in \beta_0$, existe $V \in \beta_0$ tal que $V^{-1} \subset U$;

(iv) para todo $U \in \beta_0$, e $x \in U$, existe $V \in \beta_0$ tal que $xV \subset U$;

(v) para todo $U \in \beta_0$, e $x \in G$, existe $V \in \beta_0$ tal que $xVx^{-1} \subset U$; e

(vi) para todo $U, V \in \beta_0$, existe $W \in \beta_0$ tal que $W \subset U \cap V$.

Reciprocamente, seja G um grupo e seja β_0 uma família de subconjuntos de G para a qual (i),(ii),...,(vi) valem. Então existe uma única topologia sobre G tal que G é um grupo topológico e β_0 é um sistema fundamental de vizinhanças de e nesta topologia.

Prova: Suponha que G é um grupo topológico e β_0 é um sistema fundamental de vizinhanças de e. É claro que (i) vale. Para provar (ii) seja $U \in \beta_0$. Como p é contínua e $p(e,e) = e \cdot e = e \in U$, existe $A \in \text{viz}(e,e)$ em $G \times G$ tal que $p(A) \subset U$. Bom, A tem a forma $A = \bigcup\limits_{i \in I} V_i \times W_i$, onde V_i, W_i são abertos em G. Como $(e,e) \in A$, existe $i_0 \in I$ tal que $(e,e) \in V_{i_0} \times W_{i_0}$, ou seja, $V_{i_0}, W_{i_0} \in \text{viz}(e)$. Como β_0 é um sistema fundamental de vizinhanças de e, existe $V \in \beta_0$ tal que $V \subset V_{i_0} \cap W_{i_0}$. Assim $V^2 \subset V_{i_0} W_{i_0} \subset p(A) \subset U$. O item (iii) segue facilmente do fato de a aplicação inversão i ser contínua. O item (iv) segue do teorema 1.1.11. A fim de provar (v) seja $U \in \beta_0$ e $x \in G$. Então $Ux \in \text{viz}(x)$. Assim por 1.1.11 existe $V \in \beta_0$ tal que $xV \subset Ux$, ou seja, $xVx^{-1} \subset U$. O item (vi) segue da definição de β_0.

Para a recíproca, seja β_0 uma coleção de subconjuntos de G satisfazendo (i),(ii),...,(vi). Seja $\beta = \{xU : x \in G, U \in \beta_0\}$. É claro que $\bigcup\limits_{U \in \beta} U = G$. Sejam $x_1U_1, x_2U_2 \in \beta$ e $x \in x_1U_1 \cap x_2U_2$. Então $x_1^{-1}x \in U_1$ e $x_2^{-1}x \in U_2$. Assim por (iv) existem $V_1, V_2 \in \beta_0$ tal que $x_1^{-1}xV_1 \subset U_1$ e $x_2^{-1}xV_2 \subset U_2$. Ou seja, $xV_1 \subset x_1U_1$ e $xV_2 \subset x_2U_2$. Por (vi) existe $U \in \beta_0$ tal que $U \subset V_1 \cap V_2$. Assim $xU \subset x(V_1 \cap V_2) \subset x_1U_1 \cap x_2U_2$. Segue do lema 1.1.12 que a coleção $\tau = \{\bigcup\limits_{U \in A} U : A \subset \beta\}$ é uma topologia em G e β é uma base para esta topologia.

Seja $x_0 \in G$ e A subconjunto aberto de G tal que $x_0 \in A$. Então existe $x \in G$ e $U \in \beta_0$ tal que $x_0 \in xU \subset A$. Ou seja, $x^{-1}x_0 \in U$. Assim existe $V \in \beta_0$ tal que $x^{-1}x_0V \subset U$, isto é, $x_0V \subset xU$. Segue que $\{x_0U : U \in \beta_0\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x_0 em G. Em particular β_0 é um sistema fundamental de vizinhanças de e em G.

Finalmente provaremos que G é um grupo topológico. Sejam $a, b \in G$ e

$U \in \beta_0$. Por (i) existe $V \in \beta_0$ tal que $V^2 \subset U$. Por (iv) existe $W \in \beta_0$ tal que $b^{-1}Wb \subset V$. Assim $(b^{-1}Wb)V \subset V^2 \subset U$. Portanto $W(bV) \subset bU$ e daí $(aW)(bV) \subset abU$. Segue que p é contínuo.

Seja $a \in G$ e $U \in \beta_0$. Por (ii) existe $W \in \beta_0$ tal que $W^{-1} \subset U$. Por (iv) existe $V \in \beta_0$ tal que $a^{-1}Va \subset W$. Daí $aV^{-1}a^{-1} = (a^{-1}Va)^{-1} \subset W^{-1} \subset U$. Portanto $(aV)^{-1} = V^{-1}a^{-1} \subset a^{-1}U$. Isto mostra que i é contínua. Logo G é um grupo topológico.

Seja τ' outra topologia tal que G é um grupo topológico e β_0 é um sistema fundamental de vizinhanças de e nesta topologia. Então pelo teorema 1.1.11 β também é uma base para τ'. Logo $\tau = \tau'$. ■

Teorema 1.1.14. Todo grupo topológico G tem um sistema fundamental de vizinhanças de e consistindo de vizinhanças U tais que $U^{-1} = U$ (conjuntos tendo esta propriedade são chamados **simétricos**).

Prova: Seja U vizinhança de e e tome $V = U \cap U^{-1}$. Então claramente $V = V^{-1}$, V é uma vizinhança de e e $V \subset U$. Segue que $\beta_0 = \{U \cap U^{-1} : U \in \text{viz}(e)\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças simétricas de e. ■

Corolário 1.1.15. Seja G um grupo topológico. Para toda vizinhança U de e, existe uma vizinhança V de e tal que $\overline{V} \subset U$.

Prova: Seja V uma vizinhança simétrica de e tal que $V^2 \subset U$. Tome $x \in \overline{V}$. Então $xV \cap V \neq \emptyset$. Assim existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $xv_1 = v_2$. Portanto $x = v_2 v_1^{-1} \in VV^{-1} = V^2 \subset U$. ■

Queremos fazer aqui algumas observações sobre axiomas de separação. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é:

(i) $\mathbf{T_0}$ se para todos $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, existe $A \subset X$ aberto e $i \in \{1, 2\}$ tal que $x_i \in A$ e $x_{3-i} \notin A$.

(ii) $\mathbf{T_1}$ se para todos $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, existem $A_1, A_2 \subset X$ abertos tais que $x_i \in A_i$ e $x_i \notin A_{3-i}$ para $i = 1, 2$.

(iii) $\mathbf{T_2}$ ou **Hausdorff** se para todos $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, existem $A_1, A_2 \subset X$ abertos tais que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $x_i \in A_i$ para $i = 1, 2$.

(iv) **regular** se para todo $x \in X$ e para todo $F \subset X$ fechado com $x \notin F$, existem $A, B \subset X$ abertos tais que $A \cap B = \emptyset$, $x \in A$ e $F \subset B$.

(v) **normal** se X é Hausdorff e para todos F_1, F_2 fechados disjuntos em X existem A_1, A_2 abertos disjuntos em X tais que $F_i \subset A_i$ para $i = 1, 2$.

É claro que se X é T_2 então X é T_1 e se X é T_1 então X é T_0. Mais ainda, se X é regular e T_0 então X é Hausdorff. De fato, sejam $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$. Como X é T_0, existe $A \subset X$ aberto e $i \in \{1, 2\}$ tal que $x_i \in A$ e $x_{3-i} \notin A$. Então $F = A^c$ é um fechado em X tal que $x_{3-i} \in F$ e $x_i \notin F$. Pela regularidade de X existem $U, V \subset X$ abertos tais que $U \cap V = \emptyset$, $x_i \in U$ e $F \subset V$. Como $x_{3-i} \in F$ segue que $x_{3-i} \in V$. Logo X é Hausdorff.

Se X é normal então vale o importante **lema de Urysohn** que diz o seguinte: dados F_1, F_2 fechados disjuntos em X existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in F_1 \\ 1 & \text{se } x \in F_2 \end{cases},$$

ou seja, $f_{|_{F_1}} = 0$ e $f_{|_{F_2}} = 1$.

Teorema 1.1.16. Seja G um grupo topológico T_0. Então G é regular e sendo assim Hausdorff.

Prova: Seja $F \subset G$ fechado tal que $e \notin F$. Então $U = F^c$ é uma vizinhança de e. Assim existe $V \in \text{viz}(e)$ tal que $\overline{V} \subset U$. Então tomando $A = V$ e $B = \overline{V}^c$ temos que A e B são abertos, $A \cap B = \emptyset$, $e \in A$ e $F \subset B$. A conclusão é que G satisfaz o axioma da regularidade (item (iv) acima) em $x = e$. Como G é homogêneo, G satisfaz o axioma da regularidade em qualquer ponto, ou seja, G é regular. ∎

Vejamos agora um exemplo de uma topologia sobre um grupo que não o torna um grupo topológico.

Exemplo 1.1.17. Seja G um grupo infinito arbitrário. Seja $\tau = \{A \subset G : A^c \text{ é finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Note que τ é a menor topologia T_1 em G. De fato, se G é T_1 então todo subconjunto finito de G é fechado. Note agora que (G, τ) não é Hausdorff. De fato, se A, B são subconjuntos abertos e não vazios de G então por definição A^c e B^c são conjuntos finitos. Como G é infinito então não podemos ter $A \cap B = \emptyset$ pois se este é o caso teríamos G como a união disjunta de A^c e B^c e portanto G seria finito. Assim (G, τ) é um espaço topológico T_1 (e assim T_0) que não é Hausdorff. Em particular (G, τ) não é um grupo topológico.

Teorema 1.1.18. Seja G um grupo topológico e seja A, B subconjuntos de G. Se A é aberto então AB e BA são abertos. Se A, B são compactos então AB é compacto. Se A é fechado e B é compacto então AB e BA são fechados.

Prova: Note que $AB = \bigcup_{b \in B} Ab$. Logo se A é aberto então AB é aberto sendo uma união de abertos. Analogamente $BA = \bigcup_{b \in B} bA$ é aberto se A é aberto. Suponha agora que A, B são compactos. Então $A \times B$ é um subconjunto compacto de $G \times G$. Logo $AB = p(A \times B)$ é compacto pois p é contínua. Suponha finalmente que A é fechado e que B é compacto. Suponha que $x_i y_i \to z$ em G, onde $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ são nets de elementos de A e B respectivamente. Sendo B compacto, podemos passar para uma subnet e assumir sem perda de generalidade que $y_i \to y$ em B. Mas então $x_i = (x_i y_i) y_i^{-1} \to z y^{-1}$ em G. Sendo A fechado isto implica que $zy^{-1} \in A$, e assim $z = (zy^{-1})y \in AB$. Logo AB é fechado. Analogamente BA é fechado. ■

Observação 1.1.19. Não é verdade que o produto de dois conjuntos fechados em um grupo topológico é fechado. De fato, no grupo topológico aditivo $\mathbb{R}$ considere os subconjuntos fechados $\mathbb{Z}$ e $\alpha\mathbb{Z}$, onde α é qualquer número irracional. Então $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$ que não é $\mathbb{R}$. De fato, note que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ não é só um subconjunto mas sim um subgrupo de $\mathbb{R}$. Segue que o seu fecho $\overline{\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}}$ é um subgrupo fechado de $\mathbb{R}$. Por outro lado, qualquer subgrupo fechado A de $\mathbb{R}$ ou é $\{0\}$ ou é $\mathbb{R}$ ou é $b\mathbb{Z}$ para algum $b > 0$. De fato, suponha que $A \neq \{0\}$. Então existe $b = \inf\{a \in A : a > 0\}$. Temos dois casos: $b = 0$ ou $b > 0$.

Se $b = 0$ então dado $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ com $0 < a < \epsilon$. Assim se $x \in \mathbb{R}$, tomando $n_0 = min\{n \in \mathbb{N} : na > x\}$, temos que $(n_0 - 1)a \leq x < n_0 a$. Segue daí que $|n_0 a - x| < a < \epsilon$. Isto mostra que $A = \overline{A} = \mathbb{R}$.

No caso em que $b > 0$ teremos que $A = b\mathbb{Z}$. De fato, primeiro note que $b \in \overline{A} = A$ e assim $b\mathbb{Z} \subset A$. Por outro lado, se $a \in A$ tomando $n_0 = min\{n \in \mathbb{N} : (n+1)b > a\}$ temos $n_0 b \leq a < (n_0+1)b$. Segue que $a = n_0 b$ pois se $n_0 b < a$ então $a - n_0 b$ é um elemento de A que satisfaz $0 < a - n_0 b < (n_0 + 1)b - n_0 b = b$, contradizendo a definição de b. Logo $A = b\mathbb{Z}$.

É claro que $\overline{\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}}$ não é $\{0\}$. Suponha que $\overline{\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}} = b\mathbb{Z}$ para algum

$b > 0$. Então existem $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ talque $1 = bn_1$ e $\alpha = bn_2$. Segue que $\alpha = \frac{n_2}{n_1} \in \mathbb{Q}$. Uma contradição. Logo $\overline{\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$. Mas $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} \neq \mathbb{R}$. De fato, basta tomar $r \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$. Assim $r \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ pois e $r = m + \alpha n$ para $m, n \in \mathbb{Z}$ então, $\alpha = \frac{r-m}{n} \in \mathbb{Q}$ (note que $n \neq 0$ pois $r \notin \mathbb{Z}$).

Definição 1.1.20. Seja G um grupo topológico. Para cada $U \in \text{viz}(e)$ seja $L_U = \{(x, y) \in G \times G : x^{-1}y \in U\}$ e $R_U = \{(x, y) \in G \times G : yx^{-1} \in U\}$. As famílias

$$\zeta_L(G) = \{L_U : U \in \text{viz}(e)\} \quad \text{e} \quad \zeta_R(G) = \{R_U : U \in \text{viz}(e)\}$$

são chamadas as **estruturas uniformes à esquerda e à direita** respectivamente sobre G.

Definição 1.1.21. Sejam $G, \tilde{G}$ grupos topológicos com identidades e e $\tilde{e}$ respectivamente, e seja f uma aplicação de G em $\tilde{G}$. Dizemos que f é **uniformemente contínua à esquerda** se vale o seguinte:

$$\forall\, V \in \text{viz}(\tilde{e}), \exists\, U \in \text{viz}(e) \text{ tal que } (f(x), f(y)) \in L_V, \forall\, (x, y) \in L_U.$$

Analogamente define-se continuidade uniforme à direita.

Assim f é uniformemente contínua à esquerda se

$$\forall V \in \text{viz}(\tilde{e}), \exists U \in \text{viz}(e) : f(x)^{-1}f(y) \in V, \forall (x, y) \in G, \text{ com } x^{-1}y \in U.$$

e à direita se

$$\forall V \in \text{viz}(\tilde{e}), \exists U \in \text{viz}(e) : f(y)f(x)^{-1} \in V, \forall (x, y) \in G, \text{ com } yx^{-1} \in U.$$

Em particular, se f uma função real ou complexa definida sobre G, note que f é uniformemente contínua à esquerda se vale o seguinte:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U \in \text{viz}(e) \text{ em } G : |f(y) - f(x)| < \varepsilon, \forall (x, y) \in G, \text{ com } x^{-1}y \in U.$$

Ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U \in \text{viz}(e) \text{ em } G : |f(xu) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in G, \forall u \in U.$$

Analogamente, f é uniformemente contínua à direita se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U \in \text{viz}(e) \text{ em } G : |f(ux) - f(x)| < \varepsilon, \forall u \in U, \forall x \in G.$$

Exemplo 1.1.22. Uma função f real ou complexa definida sobre $\mathbb{R}$ ou sobre $\mathbb{C}$ é uniformemente contínua à direita (igual à esquerda, pois $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são grupos abelianos) se, e somente se, vale o seguinte:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(z) - f(z+w)| < \varepsilon, \forall z, \forall w \text{ com } |w| < \delta.$$

Obviamente, qualquer função uniformemente contínua à esquerda ou à direita é contínua. Em alguns casos vale a recíproca como mostra o seguinte teorema.

Teorema 1.1.23. Seja G um grupo topológico, e seja $f \in C_0(G)$, ou seja, f é uma função contínua de G em $\mathbb{C}$ que se anula no infinito[1]. Então f é uniformemente contínua à esquerda e à direita sobre G.

Prova: Seja $\epsilon > 0$. Seja $K \subset G$ compacto tal que $|f(w)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $w \notin K$. Para cada $K \subset G$, como f é contínua, existe U_x vizinhança de e simétrica em G tal que $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $y \in xU_x$. Para cada $x \in G$, seja V_x vizinhança simétrica de e em G tal que $V_x^2 \subset U_x$. Como K é compacto e $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} xV_x$, existem $x_1, \ldots, x_n \in K$ tal que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} x_iV_{x_i}$. Tome $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$ e sejam $x, y \in G$, com $x^{-1}y \in U$. Temos três casos: (1) $x \in K$ ou (2) $y \in K$ ou (3) $x \notin K$ e $y \notin K$.

(1) Se $x \in K$ então $x \in x_iV_{x_i}$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Assim $y \in xU \subset x_iV_{x_i}U \subset x_iV_{x_i}^2 \subset x_iU_{x_i}$ e também, $x \in x_iV_{x_i} \subset x_iV_{x_i}^2 \subset x_iU_{x_i}$. Portanto $x, y \in x_iU_{x_i}$. Daí,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(y) - f(x_i)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(2) Se $y \in K$, então, como $x \in yU$, o mesmo argumento acima mostra que neste caso também temos que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

(3) Finalmente se $x \notin K$ e $y \notin K$ então $|f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, e $|f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

[1]Diz -se que uma função $f : X \to \mathbb{C}$, onde X é um espaço topológico, **se anula no infinito** se, para todo $\epsilon > 0$, existe um compacto $K \subset X$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \notin K$.

Logo em qualquer caso $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, e portanto f é uniformemente contínua à esquerda. Analogamente se prova que f é uniformemente contínua à direita. ∎

Teorema 1.1.24. Sejam G e $\tilde{G}$ grupos topológicos com elementos identidade e e $\tilde{e}$ respectivamente, e seja $f : G \to \tilde{G}$ um homomorfismo (isto é, $f(xy) = f(x)f(y)$ para todos $x, y \in G$). Se f é contínua em e então f é uniformemente contínua à esquerda e à direita sobre G.

Prova: Seja $V \in \text{viz}(\tilde{e})$. Como f é contínua em e e $f(e) = \tilde{e}$, existe $U \in \text{viz}(e)$ tal que $f(U) \subset \tilde{U}$. Assim se $x, y \in G$ e $x^{-1}y \in U$ então $f(x)^{-1}f(y) = f(x^{-1}y) \subset f(U) \subset \tilde{U}$. Logo f é uniformemente contínua à esquerda. Analogamente f é uniformemente contínua à direita. ∎

O leitor interessado em saber mais sobre grupos topológicos, estruturas uniformes e continuidade uniforme, pode ver na referência [1].

1.2 A Medida de Haar

Nesta seção G sempre será um grupo topológico localmente compacto[2].

O pré-requisito para a leitura desta seção é um bom conhecimento da teoria de medida e integração. Por conveniência, expomos os resultados necessários no apêndice, citando referências para o leitor interessado nas provas. Começamos esta seção com um dos teoremas mais importantes da análise harmônica, o teorema da existência da medida de Haar. Não demonstraremos este teorema por sua demostração ser muito extensa e não trazer nenhuma técnica importante para o resto do trabalho. Para o leitor interessado, a demonstração deste fato pode ser encontrada na página 207, teorema 7.16 de [3].

Teorema 1.2.1. Seja G um grupo topológico localmente compacto. Então existe uma medida $\lambda : B_G \to [0, \infty]$, onde B_G é a $\sigma-$álgebra dos Borelianos de G (veja A.1.4) regular (veja A.1.19) e não-nula tal que

$$\lambda(xE) = \lambda(E), \forall x \in G, \forall E \in B_G \quad (\lambda \text{ é invariante por translação à esquerda}).$$

Mais ainda, se $\mu : B_G \to [0, \infty]$ é outra medida regular não-nula que é invariante por translação à esquerda então existe uma constante positiva $c > 0$ tal que $\mu = c\lambda$.

[2]Um espaço topológico X é dito **localmente compacto** se X é Hausdorff e todo ponto de X contém um sistema fundamental de vizinhanças cujo fecho é compacto.

Definição 1.2.2. Qualquer medida λ como no teorema acima é chamada uma **medida de Haar à esquerda** para G. O conjunto de todas as medidas de Haar à esquerda será denotado por $\mathrm{Haar}(G)$.

Observação 1.2.3. Dada uma medida de Haar à esquerda λ então é fácil ver que a medida $\lambda_d : B_G \to [0, \infty]$, dada por $\lambda_d(E) = \lambda(E^{-1})$, é uma **"medida de Haar à direita"** em G, ou seja, uma medida regular não-nula que é invariante por translação à direita ($\lambda_d(Ex) = \lambda_d(E), \forall x \in G, \forall E \in B_G$). Tal medida é única a menos de multiplicação por constantes positivas.

Definição 1.2.4. Dada uma medida de Haar à esquerda λ seja

$$L_1(G, \lambda) = \{f : G \to \mathbb{C} : f \text{ é Boreliana e } \int_G |f| d\lambda < \infty\}$$

o espaço das funções integráveis com relação à λ. Defina $I_\lambda : L_1(G, \lambda) \to \mathbb{C}$

$$I_\lambda(f) = \int_G f d\lambda, \forall f \in L_1(G, \lambda).$$

Então I_λ é chamada a **integral de Haar à esquerda** associada a λ.

Se $\lambda \in \mathrm{Haar}(G)$ escrevemos $\int_G f d\lambda$ como $\int_G f(x)dx$, $\int_G f(y)dy$, e assim por diante. Desta maneira $dx, dy, \ldots$ indicarão sempre integração com respeito a medida de Haar à esquerda.

Observação 1.2.5. Obviamente, dada uma medida de Haar à direita λ_d, também temos a **"integral de Haar à direita"** associada a λ_d,

$$I_{\lambda_d} : L_1(G, \lambda_d) \to \mathbb{C}$$

$$I_{\lambda_d}(f) = \int_G f d\lambda_d, \quad \forall f \in L_1(G, \lambda_d)$$

Lema 1.2.6. Seja $\lambda \in \mathrm{Haar}(G)$. Temos que $\lambda(U) > 0$, para todo $U \subset G$ aberto não-vazio.

Prova: Suponha que existe $U \subset G$ aberto não-vazio tal que $\lambda(U) = 0$. Então $\lambda(xU) = 0$ para todo $x \in G$. Segue que $\lambda(\bigcup_{x \in G} xU) = 0$. De fato, suponha que $\lambda(\bigcup_{x \in G} xU) > 0$. Então, como λ é regular existe $K \subset \bigcup_{x\in G} xU$ compacto tal que $\lambda(K) > 0$. Como $\{xU : x \in G\}$ é uma cobertura aberta para K, existem $x_1, x_2, \ldots x_n \in G$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_iU$. Daí $\lambda(\bigcup_{i=1}^{n} x_iU) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(x_iU) = 0$. Isto contradiz o fato de ser $\lambda(K) > 0$. Logo $\lambda(\bigcup_{x\in G} xU) = 0$.

Agora note que $\bigcup_{x\in G} xU = G$. De fato, seja $u_0 \in U$ (lembre que $U \neq \emptyset$). Seja $z \in G$ e tome $x_0 = zu_0^{-1}$. Então $z = x_0u_0 \in x_0U \subset \bigcup_{x\in G} xU$. Assim $\lambda(G) = \lambda(\bigcup_{x\in G} xU) = 0$. Ou seja, $\lambda = 0$. Uma contradição. Logo $\lambda(U) > 0$ para todo $U \subset G$ aberto não vazio. ■

Teorema 1.2.7. Seja $\lambda \in \mathrm{Haar}(G)$ e seja $C_{00}(G)$ o conjunto das funções $f : G \to \mathbb{C}$ que são contínuas e tem suporte[3] compacto. Então $I_\lambda : L_1(G, \lambda) \to \mathbb{C}$ é um funcional linear (não necessariamente limitado) tal que

(i) $I_\lambda(f) > 0, \forall f \in C_{00}(G), f$ não-negativa e não-nula; e

(ii) $I_\lambda({}_af) = I_\lambda(f), \forall f \in L_1(G, \lambda)$, onde ${}_af(x) = f(ax)$.

Prova: É claro que I_λ é linear. Seja f não-negativa e não-nula em $C_{00}(G)$. Seja $x_0 \in G$ tal que $f(x_0) > 0$. Então, como f é contínua existe $U \in \mathrm{viz}(x_0)$ tal que $f(x) \geq \frac{1}{2}f(x_0)$, para todo $x \in U$. Assim

$$I_\lambda(f) = \int_G f d\lambda = \int_G f(x)dx \geq \int_G \frac{1}{2}f(x_0)\chi_U(x)dx = \frac{1}{2}f(x_0)\lambda(U) > 0.$$

Isto prova (i). Note agora que para todo $E \in B_G$ e para todo $a \in G$ temos

$$\int_G {}_a(\chi_E)d\lambda = \int_G \chi_E(ax)dx = \int_G \chi_{a^{-1}E}(x)dx = \lambda(a^{-1}E) = \lambda(E) = \int_G \chi_E d\lambda.$$

Segue que $\int_G {}_a\sigma d\lambda = \int_G \sigma d\lambda$ para toda função simples (veja A.1.11) σ sobre G. Escrevendo, se necessário, $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$, onde as $f_i's$ são funções não-negativas em $L_1(G)$, podemos supor sem perda de generalidade que f é uma função não-negativa. Seja $\{\sigma_n\}_n$ uma sequência não-decrescente de funções simples não-negativas tal que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$ para todo $x \in G$ (veja A.1.12). Então também é verdade que $\lim_{n\to\infty} {}_a\sigma_n(x) = {}_a f(x)$ para todo $x \in G$. Segue do teorema da convergência monótona (A.1.26) que

$$\int_G {}_af(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_G {}_a\sigma(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_G \sigma(x)dx = \int_G f(x)dx.$$

[3]Para uma função $f : X \to \mathbb{C}$, onde X é um espaço topológico, o **suporte** de f é definido como sendo o fecho em X do conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

Ou seja, (ii) vale. ■

Teorema 1.2.8. Existe um único homomorfismo $\Delta : G \to (0, \infty)$ tal que

$$\lambda(Ax) = \Delta(x)\lambda(A),$$

para toda $\lambda \in \text{Haar}(G)$, $A \in B_G$ e $x \in G$.

A função Δ é chamada a **função modular** de G.

Prova: Seja $\lambda_0 \in \text{Haar}(G)$. Defina para $x \in G$, $\mu_x : B_G \to [0, \infty]$ pondo $\mu_x(E) = \lambda_0(Ex)$. É facil ver que μ_x é uma medida regular e $\mu_x(A) > 0$ para todo $A \subset G$ aberto não-vazio. Agora note que para $z \in G$ temos

$$\mu_x(zE) = \lambda_0((zE)x) = \lambda_0(z(Ex)) = \lambda_0(Ex) = \mu_x(E).$$

Assim $\mu_x \in \text{Haar}(G)$. Daí existe uma constante positiva, chame ela de $\Delta(x)$, tal que $\mu_x = \Delta(x)\lambda_0$. Ou seja, $\lambda_0(Ex) = \Delta(x)\lambda_0(E), \forall E \in B_G$.

Note que se c_x é outra constante positiva tal que $\mu_x = c_x\lambda_0$ então para todo $A \subset G$ aberto não-vazio temos $c_x = \frac{\lambda_0(Ax)}{\lambda_0(A)}$. Isto mostra que temos definida uma única função $\Delta : G \to (0, \infty)$ tal que $\lambda_0(Ex) = \Delta(x)\lambda_0(E)$, para todo $x \in G$ e $E \in B_G$. Agora, se λ é outra medida de Haar à esquerda para G então existe uma constante positiva c tal que $\lambda = c\lambda_0$. Assim para todo $x \in G$ e para todo $E \in B_G$ temos

$$\lambda(E_x) = c\lambda_0(Ex) = c\Delta(x)\lambda_0(E) = \Delta(x)\lambda(E).$$

Resta mostrar então que Δ é um homomorfismo. Sejam $x, y \in G$. Então dado A aberto não-vazio temos

$$\Delta(xy) = \frac{\lambda_0(Axy)}{\lambda_0(A)} = \frac{\lambda_0(Axy)}{\lambda_0(Ax)}\frac{\lambda_0(Ax)}{\lambda_0(A)} = \Delta(y)\Delta(x) = \Delta(x)\Delta(y).$$ ■

Teorema 1.2.9. Dados $\lambda \in \text{Haar}(G)$, $x \in G$ e $f \in L_1(G)$ temos

$$I_\lambda(f_x) = \Delta(x^{-1})I_\lambda(f),$$

isto é,

$$\int_G f(zx)dz = \Delta(x^{-1}) \int_G f(z)dz.$$

Prova: Como no teorema 1.2.7 basta notar que para todo $E \in B_G$ temos

$$\int_G \chi_E(zx)dz = \int_G \chi_{Ex^{-1}}(z)dz = \lambda(Ex^{-1}) = \Delta(x^{-1})\lambda(E) = \Delta(x^{-1}) \int_G \chi_E(z)dz. \quad \blacksquare$$

Queremos provar agora que a função modular é contínua. Para tanto, precisamos de um lema, que é uma versão simplificada do lema de Urysohn válida para espaços localmente compactos.

Lema 1.2.10. Seja X um espaço localmente compacto. Se F é um fechado e K é um compacto disjunto de F então existe uma função $f : X \to [0,1]$ tal que $f_{|_F} = 0$ e $f_{|_K} = 1$.

Prova: Seja $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ o compactificado de Alexandrov de X (o compactificado no qual se acrescenta um ponto no infinito, veja teorema A.6.3 de [6]). Seja $\overline{F}$ o fecho de F em $\tilde{X}$. Como K é compacto segue que K é um fechado em $\tilde{X}$ que é disjunto de $\overline{F}$. Assim, pelo lema de Urysohn (note que $\tilde{X}$ é compacto e portanto normal), existe $\tilde{f} : \tilde{X} \to [0,1]$ contínua tal que $\tilde{f}_{|_K} = 1$ e $\tilde{f}_{|_F} = 0$. Basta tomar agora $f = \tilde{f}_{|_X}$.

Corolário 1.2.11. A função modular Δ é contínua.

Prova: Basta mostra que Δ é contínua em e, sendo um homomorfismo (veja 1.1.24). Sejam $\lambda \in \mathrm{Haar}(G)$ e f uma função não-negativa e não-nula em $C_{00}(G)$. Então temos $I_\lambda(f) > 0$. Assim, pelo teorema 1.2.9,

$$\Delta(x) = \frac{I_\lambda(f_{x^{-1}})}{I_\lambda(f)}.$$

Seja $U \in viz(e)$ tal que $\overline{U}$ é compacto e seja ω uma função não-negativa em C_{00} tal que $\omega(\overline{\{s \in G : f(s) > 0\}\overline{U}}) = 1$ (a função ω existe pelo lema 1.2.10 e pelo teorema 1.1.18). Seja $\epsilon > 0$ e tome $V \in viz(e)$ tal que $V \subset U$ e $|f(u) - f(v)| < \frac{\epsilon I_\lambda(f)}{I_\lambda(\omega)}$ sempre que $u^{-1}v \in V$. Então se $x \in V$, temos

$$|f(sx^{-1}) - f(s)| \leq \frac{\epsilon I_\lambda(f)\omega(s)}{I_\lambda(\omega)}, \forall s \in G. \tag{1.1}$$

De fato, seja $s \in G$. Se $f(s) > 0$ então $\omega(s) = 1$. Assim a equação 1.1 é satisfeita. E se $f(sx^{-1}) > 0$ então $\omega(s) = \omega(sx^{-1}x) = 1$. Neste caso também a equação 1.1

é satisfeita.

Logo a equação 1.1 vale. Assim

$$\left|\int_G f(zx^{-1})dz - \int_G f(z)dz\right| \leq \int_G |f(zx^{-1}) - f(z)|dz \leq \epsilon \int_G f(z)dz, \forall x \in V.$$

Portanto,

$$|\Delta(x) - 1| = \left|\frac{\int_G f(zx^{-1})dz - \int_G f(z)dz}{\int_G f(z)dz}\right| \leq \epsilon, \forall x \in V. \qquad \blacksquare$$

Definição 1.2.12. Um grupo G é chamado **unimodular** se $\Delta(x) = 1, \forall x \in G$.

É fácil ver que um grupo é unimodular, se e somente se, o conjunto das medidas de Haar à esquerda e à direita coincidem. É óbvio que todo grupo abeliano é unimodular.

Teorema 1.2.13. Todo grupo compacto é unimodular.

Prova: Seja G um grupo compacto. Como Δ é um homomorfismo contínuo então $\Delta(G)$ é um subgrupo compacto de $(0, \infty)$. Segue que $\Delta(G) = \{1\}$. $\blacksquare$

Teorema 1.2.14. Para todo $E \in B_G$ temos $E^{-1} \in B_G$ e

$$\lambda(E^{-1}) = \int_E \frac{1}{\Delta(x)} dx.$$

Prova: É claro que $E^{-1} \in B_G$ pois a função $i : G \to G; i(x) = x^{-1}$, é um homeomorfismo.

Defina as aplicações

$$\mu : B_G \to [0, \infty]; \quad \mu(E) = \lambda(E^{-1})$$

e

$$\nu : B_G \to [0, \infty]; \quad \nu(E) = \int_E \frac{1}{\Delta(x)} dx.$$

Sendo que λ é uma medida regular é fácil ver que μ e ν são medidas regulares.

Também, sendo que λ é não-nula e $1/\Delta$ é uma função contínua positiva, segue que μ e ν são medidas não nulas.

Agora note que μ e ν são invariantes por translação à direita. De fato, para $x_0 \in G$ e $E \in B_G$ temos

$$\mu(Ex_0) = \lambda((Ex_0)^{-1}) = \lambda(x_0^{-1}E^{-1}) = \lambda(E^{-1}) = \mu(E),$$

e

$$\nu(Ex_0) = \int_{Ex_0} \frac{1}{\Delta(x)} dx = \int_G \chi_{Ex_0}(x) \frac{1}{\Delta(x)} dx = \int_G \chi_E(xx_0^{-1}) \frac{1}{\Delta(x)} dx =$$

$$\Delta(x_0) \int_G \chi_E(x) \frac{1}{\Delta(xx_0)} dx = \int_E \frac{1}{\Delta(x)} dx = \nu(E).$$

Assim, por unicidade da medida de Haar à direita, existe $c > 0$ tal que $\nu = c\mu$.

Seja agora U uma vizinhança simétrica de e, com $\overline{U}$ compacto, tal que

$$\left| \frac{1}{\Delta(x)} - 1 \right| \leq \epsilon, \forall x \in U.$$

Note daí que

$$|\nu(U) - \mu(U)| = \left| \int_U (\frac{1}{\Delta} - 1) dx \right| \leq \int_U |\frac{1}{\Delta(x)} - 1| dx \leq \epsilon\lambda(U) = \epsilon\lambda(U^{-1}) = \epsilon\mu(U),$$

e assim,

$$|c - 1| = \left| \frac{\nu(U)}{\mu(U)} - 1 \right| \leq \epsilon.$$

Logo $c = 1$ e portanto $\mu = \nu$, ou seja,

$$\lambda(E^{-1}) = \int_E \frac{1}{\Delta(x)} dx. \qquad \blacksquare$$

Corolário 1.2.15. Para $f : G \to \mathbb{C}$ Borel mensurável temos

$$\int_G f(x^{-1}) dx = \int_G f(x) \frac{1}{\Delta(x)} dx.$$

Prova: Note que se $f = \chi_E$, com $E \in B_G$ então,

$$\int_G f(x^{-1}) dx = \int_G \chi_E(x^{-1}) dx = \int_G \chi_{E^{-1}}(x) dx = \lambda(E^{-1}) = \int_E \frac{1}{\Delta(x)} dx =$$

$$\int_G \chi_E(x) \frac{1}{\Delta(x)} dx = \int_G f(x) \frac{1}{\Delta(x)} dx.$$

Agora, como na demonstração do teorema 1.2.7, o resultado segue primeiro extendendo para funções simples e depois para qualquer função Borel mensurável. ■

Exemplo 1.2.16. Seja G um grupo discreto. Então é fácil ver que a medida de contagem ($\lambda(E)$ = número de elementos de E) é uma medida de Haar à esquerda e à direita para G. Em particular todo grupo discreto é unimodular.

Exemplo 1.2.17. Seja G um grupo localmente compacto que não é discreto. Seja λ uma medida de Haar à esquerda em G. Então $\lambda(E) = 0, \forall E \subset G$ enumerável.

De fato, seja U um conjunto aberto não-vazio em G tal que $\overline{U}$ é compacto. Então $0 < \lambda(U) < \infty$. Temos que U é infinito pois se U fosse finito G seria discreto. Assim existe E, subconjunto de U enumerável e infinito. Se $\lambda(\{e\}) \neq 0$ então $\lambda(U) \geq \lambda(E) = \sum_{x \in E} \lambda(\{x\}) = \sum_{x \in E} \lambda(\{e\}) = \infty$.

Logo $\lambda(\{e\}) = 0$ e o resultado segue.

Exemplo 1.2.18. Seja $G = \mathbb{R}$ o grupo aditivo dos números reais. Então a medida de Lebesgue é uma medida de Haar à esquerda e à direita para G.

Exemplo 1.2.19. Seja G um grupo topológico com as três seguintes propriedades:

(i) Como espaço topológico, G é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, para algum n. Então cada ponto $x \in G$ tem a forma $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Desta maneira a função produto $p : G \times G \to G$; $p(x, y) = xy$ pode ser escrita como

$$p(x, y) = (p_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n), \ldots, p_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)).$$

(ii) A função p é de classe C^1, ou seja, as derivadas parciais $\frac{\partial p_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial p_i}{\partial y_k}$ existem e são contínuas em $G \times G$ $(j, k = 1, \ldots, n)$.

(iii) Para cada $a \in G$, seja σ_a $[\delta_a]$ a transformação de G em G definida por $\sigma_a(x) = ax$, $[\delta_a(x) = xa]$, para todo $x \in G$. Isto é, σ_a e δ_a são translações à esquerda e à direita respectivamente sobre G. A terceira propriedade que exigimos de G é que o Jacobiano das transformações σ_a e δ_a sejam constantes, isto é, elas dependem apenas de a.

Denotaremos o Jacobiano de uma transformação τ por $J(\tau)$. Para $a \in G$, defina $S(a) = |J(\sigma_a)|$ e $D(a) = |J(\delta_a)|$. Sendo $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_{ab}$ temos

$$S(ab) = |J(\sigma_a \circ \sigma_b)| = |J(\sigma_a)J(\sigma_b)| = |J(\sigma_a)||J(\sigma_b)| = S(a)S(b).$$

Similarmente $D(ab) = D(a)D(b)$. Note que σ_e e δ_e são a tranformação identidade sobre G. Assim $S(e) = D(e) = 1$. Segue que S e D são homomorfismos de G no grupo multiplicativo $(0, \infty)$.

Afirmamos que

$$\lambda_s(E) = \int_E \frac{1}{S(x)} dx$$

é uma medida de Haar à esquerda para G e

$$\lambda_d(E) = \int_E \frac{1}{D(x)} dx$$

é uma medida de Haar à direita para G.

De fato, usando o teorema de mudança de variáveis em $\mathbb{R}^n$ temos para todo $x_0 \in G$ e para todo conjunto mensurável E:

$$\lambda_s(x_0E) = \int_{x_0E} \frac{1}{S(x)} dx = \int_{\sigma_{x_0}(E)} \frac{1}{S(x)} dx = \int_E \frac{|J(\sigma_{x_0})(y)|}{(S \circ \sigma_{x_0})(y)} dy =$$

$$\int_E \frac{S(x_0)}{S(y)S(x_0)} dy = \int_E \frac{1}{S(y)} dy = \lambda_s(E)$$

e

$$\lambda_d(Ex_0) = \int_{Ex_0} \frac{1}{D(x)} dx = \int_{\delta_{x_0}(E)} \frac{1}{D(x)} dx = \int_E \frac{|J(\delta_{x_0})(y)|}{(D \circ \delta_{x_0})(y)} dy = \int_E \frac{1}{D(y)} dy = \lambda_d(E).$$

As integrais de Haar à esquerda e à direita para G serão portanto:

$$I_s(f) = \int_G \frac{f(x)}{S(x)} dx, \forall f \in L_1(G)$$

e

$$I_d(f) = \int_G \frac{f(x)}{D(x)} dx, \forall f \in L_1(G).$$

Note agora que

$$\lambda_s(Ex_0) = \int_{Ex_0} \frac{1}{S(x)} dx = \int_{\delta_{x_0}(E)} \frac{1}{S(x)} dx = \int_E \frac{|J(\delta_{x_0})(y)|}{S(\delta_{x_0}(y))} dy =$$

$$\int_E \frac{D(x_0)}{S(y)S(x_0)} dy = \frac{D(x_0)}{S(x_0)} \int_E \frac{1}{S(y)} dy = \frac{D(x_0)}{S(x_0)} \lambda_s(E).$$

Portanto a função modular para G é

$$\Delta = \frac{D}{S}.$$

Exemplo 1.2.20. Seja $G = \mathbb{R}^{\times}$ o grupo multiplicativo dos números reais não nulos. Temos que $\sigma_a(x) = \delta_a(x) = ax$ e $J(\sigma_a)(x) = J(\delta_a)(x) = a, \forall x \in G$. Assim $S(a) = D(a) = |a|$. Portanto $\lambda_s(E) = \lambda_d(E) = \int_E \frac{1}{|x|} dx, \forall E \subset G$ Boreliano,

e

$$I_s(f) = I_d(f) = \int_G \frac{f(x)}{|x|} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{|x|} dx, \forall f \in L_1(G).$$

Se $G = \mathbb{C}^{\times} \subset \mathbb{R}^2$ é o grupo multiplicativo dos numeros complexos não nulos então

$$\lambda_s(E) = \lambda_d(E) = \int_E \frac{1}{x^2 + y^2} dxdy, \forall E \in B_G$$

e

$$I_s(f) = I_d(f) = \int_{\mathbb{C}^{\times}} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2} dxdy, \forall f \in L_1(G).$$

De fato, se $a = a_1 + ia_2 = (a_1, a_2) \in G$ e $z = x + iy = (x, y) \in G$ então $\sigma_a(x, y) = \sigma_a(z) = \delta_a(z) = az = (a_1 + ia_2)(x + iy) = (a_1x - a_2y) + i(a_2x + a_1y) = (a_1x - a_2y, a_2x + a_1y)$. Daí

$$J(\sigma_a)(z) = J(\sigma_a)(z) = \det \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2.$$

Exemplo 1.2.21. Seja $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0 \right\}$ como subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$.

Note que G pode ser visto como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, fazendo

$$G = \{(x, y) \in R^2 : x \neq 0\}.$$

O produto de G fica sendo $(x,y)(z,w) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} xz & xw+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (xz, xw+y)$.

Então $\sigma_{(a,b)}(x,y) = (a,b)(x,y) = (ax, ay+b)$ e $\delta_{(a,b)}(x,y) = (x,y)(a,b) =$ $(ax, bx+y)$

Assim $J(\sigma_{(a,b)})(x,y) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a^2$ e $J(\delta_{(a,b)})(x,y) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = a$. Daí $S(a,b) = a^2$ e $D(a,b) = |a|$. Portanto as medidas de Haar à esquerda e à direita são repectivamente

$$\lambda_s(E) = \int_E \frac{1}{x^2} dxdy, \forall E \in B_G,$$

e

$$\lambda_d(E) = \int_E \frac{1}{|x|} dxdy, \forall E \in B_G.$$

E as integrais de Haar associadas são respectivamente

$$I_s(f) = \int_G \frac{f(x,y)}{x^2} dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{x^2} dxdy,$$

e

$$I_d(f) = \int_G \frac{f(x,y)}{|x|} dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{|x|} dxdy.$$

A função modular é

$$\Delta(x,y) = \frac{D(x,y)}{S(x,y)} = \frac{|x|}{x^2} = \frac{1}{|x|}.$$

Em particular, G não é unimodular.

Exemplo 1.2.22. Seja $G = GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} : x_{ij} \in \mathbb{R}, x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} \neq 0 \right\}$.

Vamos olhar G como um subconjunto de $\mathbb{R}^4$, $G = \{(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in \mathbb{R}^4 : x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \neq 0\}$.

Sejam $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in G$ e $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} =$ $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in G$. Então

$$\sigma_A(X) = AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21}, a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22}, a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21}, a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22}).$$

Assim

$$J(\sigma_A)(X) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{11}a_{22}^2 - a_{12}a_{21}a_{22}) + a_{21}(a_{12}^2a_{21} - a_{11}a_{12}a_{22}) =$$

$$= a_{11}^2a_{22}^2 - a_11a_{12}a_{21}a_{22} + a_{12}^2a_{21}^2 - a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} =$$

$$= a_{11}^2a_{22}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} + a_{12}^2a_{21}^2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2 = det(A)^2.$$

Analogamente $J(\delta_A)(X) = det(A)^2$. Assim

$$\lambda_s(E) = \lambda_d(E) = \int_E \frac{1}{(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})^2} dx_{11}dx_{12}dx_{21}dx_{22}, \forall E \in B_G$$

e

$$I_s(f) = I_d(f) = \int_G \frac{f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})}{(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})^2} dx_{11}dx_{12}dx_{21}dx_{22}, \forall f \in L_1(G).$$

Observação 1.2.23. Se $G = GL_n(\mathbb{R})$ então contas análogas as feitas acima para $n = 2$ mostram que

$$\lambda_s(E) = \lambda_d(E) = \int_E \frac{1}{|detX|^n} dx_{11}dx_{12}\dots dx_{nn} = \int_E \frac{1}{|detX|^n} dX, \forall E \in B_G.$$

Exemplo 1.2.24. Sejam $G_1, G_2, \dots, G_n$ grupos topológicos localmente compactos e seja λ_i uma medida de Haar à esquerda para G_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Então a medida produto

$$\lambda_1 \times \lambda_2 \dots \times \lambda_n$$

é uma medida de Haar à esquerda para $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$.

Capítulo 2

Convoluções e Álgebras Associadas

Neste capítulo G sempre será um grupo topológico localmente compacto e $C_0(G)$ como usual denotará o espaço das funcões contínuas que se anulam no infinito. O dual de $C_0(G)$ será denotado por $C_0^*(G)$. Assim $C_0^*(G)$ é o espaço de Banach dos funcionais lineares e limitados sobre $C_0(G)$. O subconjunto das funções reais e não-negativas de $C_0(G)$ será denotado por $C_0^+(G)$.

O leitor interessado em obter mais informações sobre convoluções de funções e medidas pode procurar em [1] ou [3].

2.1 Convolução de Medidas e a Álgebra $M(G)$

Queremos nesta seção introduzir operações (um produto de convolução e uma involução) no espaço de Banach $M(G)$ das medidas complexas e finitas definidas sobre os Borelianos de G de tal forma que $M(G)$ seja uma $*$-álgebra de Banach. Como $M(G)$ pode ser identificado com o dual de $C_0(G)$ (veja A.2.6) basta definir tais operações em $C_0^*(G)$.

Definição 2.1.1. Para $L \in C_0^*(G)$ e $f \in C_0(G)$ denotaremos por $\overline{L}f : G \to \mathbb{C}$ a função definida por $\overline{L}f(x) = L({}_xf)$ para todo $x \in G$.

Lema 2.1.2. Seja $f \in C_0(G)$, e seja $L \in C_0^*(G)$. Então $\overline{L}f \in C_0(G)$. Mais ainda, a aplicação $C_0(G) \ni f \mapsto \overline{L}f \in C_0(G)$ define um operador $\overline{L}$ linear e limitado tal que

$\|\overline{L}\| \leq \|L\|$.

Prova: Seja $\epsilon > 0$ e escolha $V \in \text{viz}(e)$ tal que $|f(u) - f(v)| < \frac{\epsilon}{\|L\|}$, para todo $u, v \in G$ tal que $uv^{-1} \in V$. Isto pode ser feito pois f é uniformemente contínua à direita. Então se $x, y \in G$ são tais que $xy^{-1} \in V$, temos

$$\|_x f -_y f\|_\infty = \sup_{s \in G} |f(xs) - f(ys)| \leq \frac{\epsilon}{\|L\|}$$

e assim

$$|\overline{L}f(x) - \overline{L}f(y)| = |L(_x f) - L(_y f)| \leq \|L\| \|_x f -_y f\| \leq \epsilon.$$

Isto mostra que $\overline{L}f$ é contínua [de fato, uniformemente contínua à direita]. Para mostrar que $\overline{L}f$ se anula no infinito suponha primeiro que $f \in C_0^+(G)$. Seja $\mu \in M(G)$ tal que $L(g) = \int_G g d\mu$, para toda $g \in C_0(G)$. Seja $K \subset G$ compacto tal que $|\mu|(K^c) < \frac{\epsilon}{2\|f\|_\infty}$. Existe também $F \subset G$ compacto tal que $|f(z)| < \frac{\epsilon}{2|\mu|(G)}$, para todo $z \notin F$. Temos que

$$|\overline{L}f(x)| = |L(_x f)| \leq |L|(_x f) = \int_G f(xy) d|\mu|(y) = \int_K f(xy) d|\mu|(y) + \int_{K^c} f(xy) d|\mu|(y).$$

É claro que

$$\int_{K^c} f(xy) d|\mu|(y) \leq \|f\|_\infty |\mu|(K^c) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Também, se $f(xy) \geq \frac{\epsilon}{2|\mu|(G)}$, temos $xy \in F$; e se em adição $y \in K$, temos $x \in Fy^{-1} \subset FK^{-1}$. Desta maneira se $x \in (FK^{-1})^c$ temos

$$\int_K f(xy) d|\mu|(y) \leq |\mu|(K) \frac{\epsilon}{2|\mu|(G)} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, para todo $x \in (FK^{-1})^c$, $|\overline{L}f(x)| < \epsilon$. Portanto, como FK^{-1} é compacto, $\overline{L}f \in C_0(G)$. Para o caso geral em que $f \in C_0(G)$, escreva $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$, onde $f_j \in C_0^+(G)$ para $j = 1, 2, 3, 4$ e note que $\overline{L}f = \overline{L}f_1 - \overline{L}f_2 + i(\overline{L}f_3 - \overline{L}f_4)$. Isto prova a primeira parte do lema. Agora, é fácil ver que $\overline{L}$ é um operador linear e temos para $f \in C_0(G)$,

$$\|\overline{L}f\|_\infty = \sup_{x \in G} |\overline{L}f(x)| = \sup_{x \in G} |L(_x f)| \leq \sup_{x \in G} \|L\| \|_x f\|_\infty = \|L\| \|f\|_\infty.$$

Logo $\overline{L}$ é limitado e $\|\overline{L}\| \leq \|L\|$. ■

Definição 2.1.3. Para $L, M \in C_0^*(G)$ defina $L * M = L \circ \overline{M}$. Segue imediatamente do lema 2.1.2 que $L * M \in C_0^*(G)$. Assim temos definido um produto $*$ em $C_0^*(G)$ que será chamado o **produto de convolução**.

Teorema 2.1.4. $C_0^*(G)$ com o produto de convolução é uma álgebra de Banach.

Prova: Já sabemos que $C_0^*(G)$ é um espaço de Banach. Segue do lema 2.1.2 que para $L, M \in C_0^*(G)$ temos $\|L * M\| = \|L \circ \overline{M}\| \leq \|L\|\|\overline{M}\| \leq \|L\|\|M\|$. Assim a norma de $C_0^*(G)$ é compatível com o produto de convolução. É facil ver que para $L, M, N \in C_0^*(G)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ temos

$$\alpha(L * M) = (\alpha L) * M = L * (\alpha M);$$

$$L * (M + N) = L * M + L * N, \text{ e}$$

$$(L + M) * N = L * N + M * N.$$

Falta mostrar portanto que $*$ é associativa, ou seja,

$$L * (M * N) = (L * M) * N.$$

Para $x, y \in G$ temos $\overline{N}({}_xf)(y) = N({}_y({}_xf)) = N({}_{xy}f) = \overline{N}f(xy) = {}_x(\overline{N}f)(y)$. Desta maneira $\overline{N}({}_xf) =_x (\overline{N}f)$. Disto inferimos que $\overline{M * N}f(x) = M * N({}_xf) = M(\overline{N}({}_xf)) = M({}_x(\overline{N}f)) = \overline{M}(\overline{N}f)(x)$. Isto é, $\overline{M * N} = \overline{M} \circ \overline{N}$. Assim,

$$L * (M * N) = L \circ (\overline{M * N}) = L \circ (\overline{M} \circ \overline{N}) = (L \circ \overline{M}) \circ \overline{N} = (L * M) * N. \quad \blacksquare$$

Definição 2.1.5. Para $L \in C_0^*(G)$, seja L^* o funcional sobre $C_0(G)$ definido por $L^*(f) = \overline{L(\overline{f_*})}$, onde $f_*(x) = f(x^{-1})$ para todo $x \in G$.

Teorema 2.1.6. Para $L, M \in C_0^*(G)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tem-se:

(i) $L^* \in C_0^*(G)$;

(ii) $(\alpha L + \beta M)^* = \overline{\alpha} L^* + \overline{\beta} M^*$;

(iii) $(L^*)^* = L$;

(iv) $(L * M)^* = M^* * L^*$;

(v) $|L^*| = |L|^*$; (veja A.2.7 para a definição de $|L|$)

(vi) $\|L^*\| = \|L\|$.

Em particular $C_0^*(G)$, com o produto de convolução e a involução $C_0^*(G) \ni L \mapsto L^* \in C_0^*(G)$, é uma $*$-álgebra de Banach.

Prova: As afirmações (i),(ii),(iii) e (vi) são muito simples, e omitimos suas provas. Para provar (iv), sejam μ e ν medidas em $M(G)$ representando L e M respectivamente. Então para $\phi \in C_0(G)$,

$$\begin{aligned}(L * M)^*(\phi) = \overline{\int_G \int_G \overline{\phi_*(xy)} d\nu(y) d\mu(x)} &= \overline{\int_G \int_G \overline{\phi(y^{-1}x^{-1})} d\nu(y) d\mu(x)} \\ &= \overline{\int_G \int_G \overline{\phi(y^{-1}x^{-1})} d\mu(x) d\nu(y)}.\end{aligned}$$

Agora da definição 2.1.5 temos que

$$L^*(\psi) = \overline{L(\overline{\psi_*})} = \overline{\int_G \overline{\psi(x^{-1})} d\mu(x)},$$

para toda $\psi \in C_0(G)$. Desta maneira temos

$$M^* * L^*(\phi) = \overline{\int_G \overline{(L^*({}_y\phi)^*)} d\nu(y)} = \overline{\int_G \overline{L^*({}_{y^{-1}}\phi)} d\nu(y)} = \overline{\int_G \int_G \overline{\phi(y^{-1}x^{-1})} d\mu(x) d\nu(y)}.$$

Logo $(L * M)^*(\phi) = M^* * L^*(\phi)$, para toda $\phi \in C_0^*(G)$. Agora provamos (v). Pelo teorema A.2.7 e a definição 2.1.5, se $\phi \in C_0^+(G)$, temos

$$|L^*|(\phi) = \sup\{|L(\overline{\psi^*})| : \psi \in C_0(G), |\psi| \leq \phi\}.$$

Para $\psi \in C_0(G)$ tal que $|\psi| \leq \phi$, temos $|\overline{\psi^*}| = |\psi^*| \leq \phi^*$ e assim $|L(\overline{\psi^*})| \leq |L|(\phi^*) = |L|^*(\phi)$ (note que ϕ é não negativa e $|L|(\phi^*)$ é um número não negativo). Segue que $|L^*| \leq |L|^*$ sobre $C_0^+(G)$. Desta maneira,

$$|L|^* = |L^{**}|^* \leq |L^*|^{**} = |L^*|$$

e assim $|L|^* = |L^*|$ sobre $C_0^+(G)$; isto implica que $|L^*| = |L|^*$ sobre $C_0(G)$. ■

Definição 2.1.7. Considere a aplicação

$$F : M(G) \ni \mu \mapsto \Phi_\mu \in C_0^*(G),$$

onde $\Phi_\mu(f) = \int_G f d\mu$, para toda $f \in C_0(G)$.

Sabemos que F é um isomorfismo de espaços de Banach (veja teorema A.2.6). Introduzimos em $M(G)$ a estrutura de $*-$álgebra de Banach de tal forma que F seja um $*$-isomorfismo de tais álgebras. Ou seja, dados $\mu, \nu \in M(G)$ definimos

$$\mu * \nu = F^{-1}(\Phi_\mu * \Phi_\nu)$$

e

$$\mu^* = F^{-1}(\Phi_\mu^*).$$

Nosso objetivo agora é explicitar formulas para $\mu * \nu$ e μ^*. Começamos com μ^*.

Teorema 2.1.8. Seja μ uma medida em $M(G)$. Temos que:

(i) $\mu^*(A) = \overline{\mu(A^{-1})}$ e $|\mu^*|(A) = |\mu|(A^{-1})$ para todo $A \in B_G$; (veja A.2.2 para definição de $|\mu|$)

(ii) uma função f está em $L_1(G, |\mu^*|)$ se e somente se f_* está em $\in L_1(G, |\mu|)$ e neste caso temos
$$\int_G f d\mu^* = \overline{\int_G \overline{f_*} d\mu};$$

Prova: Para provar (i) considere primeiro um subconjunto aberto U de G. Seja $\{K_n\}_n$ $[\{F_n\}_n]$ sequência de compactos tal que $K_n \subset K_{n+1} \subset U$ $[F_n \subset F_{n+1} \subset U^{-1}]$ e $|\mu^*|(U \setminus \bigcup_n K_n) = 0$ $[|\mu|(U^{-1} \setminus \bigcup_n F_n) = 0]$. Para cada $n = 1, 2, \ldots$ seja $L_n = K_n \cup F_n^{-1}$ e tome $\omega_n \in C_{00}^+(G)$ tal que $\omega_{|L_n} = 1$, $\omega_{n|_{U^c}} = 0$ e $w_n(G) \subset [0,1]$ (ω_n existe pelo lema 1.2.10). É facil ver que $\lim_{n\to\infty} \omega_n(x) = 1_U(x)$, para $|\mu^*|-$quase todo $x \in G$ e $\lim_{n\to\infty} (\omega_n)_*(x) = 1_{U^{-1}}(x)$ para $|\mu|-$quase todo $x \in G$. Desta maneira, pelo teorema da convergência dominada (veja teorema A.1.26), temos

$$\mu^*(U) = \int_U d\mu^* = \int_G 1_U d\mu^* = \lim_{n\to\infty} \int_G \omega_n d\mu^* =$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\int_G \overline{(\omega_n)_*} d\mu} = \overline{\lim_{n\to\infty} \int_G (\omega_n)_* d\mu} = \overline{\int_G 1_{U^{-1}} d\mu} = \overline{\mu(U^{-1})}.$$

A aditividade de μ e μ^* mostra que $\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})}$ para todo $E \subset G$ fechado. Segue do teorema A.2.3 que se $|\mu^*|(B) = 0$, para $B \in B_G$, então $|\mu|(B^{-1}) = 0$. Seja agora $A \in B_G$

arbitrário. Então A pode ser escrito na forma $A = (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \cup B$, onde $\{F_n\}_n$ é uma sequência não decrescente de compactos e B é um conjunto Borel mensurável disjunto de $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ e tal que $|\mu^*|(B) = 0$. Então temos

$$\mu^*(A) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(F_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{\mu(F_n^{-1})} + \overline{\mu(B^{-1})} = \overline{\mu((\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^{-1}) \cup B^{-1})} = \overline{\mu(A^{-1})}$$

Assim (i) vale. Para provar (ii), considere primeiro uma função $\sigma = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j}$, onde $\alpha_j \in \mathbb{C}$ e $A_j \in B_G$, para $j = 1, 2, \ldots, m$. Usando (i) temos

$$\int_G \sigma d\mu^* = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu^*(A_j) = \overline{\sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_j} \mu(A_j^{-1})} = \overline{\int_G \overline{\sigma_*} d\mu}.$$

Se $f \in L_1(G, |\mu^*|)$, existe uma sequência de funções $\{\sigma_n\}_n$ de funções simples tal que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(y) = f(y)$ e $|\sigma_1(y)| \leq |\sigma_2(y)| \leq \ldots \leq |f(y)|$, para todo $y \in G$. O teorema da convergência dominada (A.1.26) agora nos dá que

$$\lim_{n\to\infty} \int_G \sigma_n d\mu^* = \int_G f d\mu^*,$$

e o caso anterior mostra que

$$\int_G \sigma_n d\mu^* = \overline{\int_G \overline{(\sigma_n)_*} d\mu}.$$

Mais ainda, temos

$$\int_G |\sigma_n| d|\mu^*| = \int_G |\sigma_n| d|\mu|^* = \int_G |(\sigma_n)_*| d|\mu|.$$

o teorema da convergência monótona (A.1.26) implica que $\lim_{n\to\infty} |\sigma_*| = |f_*|$ está em $L_1(G, |\mu|)$, e desta maneira o teorema da convergência dominada implica que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\int_G \overline{(\sigma_n)_*} d\mu} = \overline{\int_G \overline{f_*} d\mu}.$$

Segue que (ii) vale para $f \in L_1(G, |\mu^*|)$. Se $f_* \in L_1(G, |\mu|)$, então $f = (f_*)_*$ está em $L_1(G, |\mu^*|)$, sendo $(\mu^*)^* = \mu$. Desta maneira (ii) está provado. ∎

Teorema 2.1.9. Seja $\mu, \nu \in M(G)$. Então $|\mu * \nu| \leq |\mu| * |\nu|$.

Prova: Seja $\phi \in C_0^+(G)$ e suponha que $f \in C_0(G)$ com $|f| \leq \phi$. Sejam $L = \Phi_\mu$ e $M = \Phi_\nu$ (como em 2.1.7). Então

$$\begin{aligned}
|(L * M)(f)| &= |L(\overline{M} f)| = \left| \int_G \overline{M} f(x) d\mu(x) \right| = \left| \int_G M({}_x f) d\mu(x) \right| = \\
&= \left| \int_G \int_G {}_x f(y) d\nu(y) d\mu(x) \right| = \left| \int_G \int_G f(xy) d\nu(y) d\mu(x) \right| \leq \\
&= \int_G \left| \int_G f(xy) d\nu(y) \right| d|\mu|(x) \leq \int_G \int_G |f(xy)| d|\nu|(y) d|\mu|(x) \leq \\
&= \int_G \int_G \phi(xy) d|\nu|(y) d|\mu|(x) = (|L| * |M|)(\phi).
\end{aligned}$$

Desta maneira $|L * M(f)| \leq (|L| * |M|)(\phi)$ para toda $f \in C_0(G)$, com $|f| \leq \phi$. Isto mostra que

$$|L * M|(\phi) \leq (|L| * |M|)(\phi), \ \forall \phi \in C_0^+(G).$$

Logo $|\mu * \nu| \leq |\mu| * |\nu|$. ∎

Teorema 2.1.10. Seja τ a aplicação $G \times G \ni (x, y) \mapsto xy \in G$ e seja $\mu, \nu \in M(G)$. Se $f \in L_1(G, |\mu| * |\nu|)$ então $f \circ \tau \in L_1(G \times G, |\mu \times \nu|)$ (veja A.1.28 para a definição de $\mu \times \nu$) e

$$\int_G f d(\mu * \nu) = \int_{G \times G} f \circ \tau d(\mu \times \nu) = \int_G \int_G f(xy) d\nu(y) d\mu(x) = \int_G \int_G f(xy) d\mu(x) d\nu(y).$$

Prova: Iremos provar somente a primeira igualdade acima. As igualdades restantes são consequências imediatas do teorema de Fubini. Seja $F \subset G$ compacto. Seja $\epsilon > 0$. Existe $U \subset G$ aberto tal que $F \subset U$ e $|\mu| * |\nu|(U) < |\mu| * |\nu|(F) + \epsilon$. Seja $f \in C_{00}(G)$ tal que $f_{|_F} = 1$, $f_{|_{U^c}} = 0$ e $f(G) \subset [0, 1]$ (f existe por 1.2.10). Então

$$\int_{G \times G} 1_F \circ \tau d(|\mu| \times |\nu|) = \int_G \int_G 1_F(xy) d|\nu|(y) d|\mu|(x) \leq$$

$$\int_G \int_G f(xy) d|\nu|(y) d|\mu|(x) = \int_G f d(|\mu| * |\nu|) \leq$$

$$\int_G 1_U d(|\mu| * |\nu|) = |\mu| * |\nu|(U) < |\mu| * |\nu|(F) + \epsilon.$$

Desta maneira temos

$$\int_{G \times G} 1_F \circ \tau d(|\mu| \times |\nu|) \leq |\mu| * |\nu|(F), \tag{2.1}$$

para todo $F \subset G$ compacto. Segue que a equação 2.1 vale para qualquer $F \subset G$ σ-compacto (união enumerável de compactos). Agora considere $A \subset G$ tal que $|\mu|*|\nu|(A) = 0$. Seja D um conjunto δ-aberto (intersecção enumerável de abertos) em G tal que $A \subset D$ e $|\mu|*|\nu|(D) = 0$. Seja $E \subset \tau^{-1}(D)$ compacto. Então $\tau(E)$ é um subconjunto compacto de D e $1_E \leq 1_{\tau(E)} \circ \tau$. Assim pela equação 2.1, temos

$$|\mu| \times |\nu|(E) = \int_{G\times G} 1_E d(|\mu| \times |\nu|) \leq$$

$$\int_{G\times G} 1_{\tau(E)} \circ \tau d(|\mu| \times |\nu|) \leq |\mu| * |\nu|(\tau(E)) \leq$$

$$\leq |\mu| * |\nu|(D) = 0.$$

Daí $|\mu|\times|\nu|(E) = 0$, para todo $E \subset \tau^{-1}(D)$ compacto. Consequentemente $|\mu|\times|\nu|(\tau^{-1}(D)) = 0$ e portanto $|\mu| \times |\nu|(\tau^{-1}(A)) = 0$. Assim provamos que se $|\mu| * |\nu|(A) = 0$ então $|\mu| \times |\nu|(\tau^{-1}(A)) = 0$. Agora considere qualquer $B \in B_G$. Então $B = F \cup A$, onde $F \cap A = \emptyset$, F é $\sigma-$compacto, $A \in B_G$ e $|\mu| * |\nu|(A) = 0$. Então $1_B \circ \tau = 1_A \circ \tau + 1_F \circ \tau$ e assim

$$\int_{G\times G} 1_B \circ \tau d(|\mu| \times |\nu|) = \int_{G\times G} 1_A \circ \tau d(|\mu| \times |\nu|) + \int_{G\times G} 1_F \circ \tau d(\mu| \times |\nu|)$$

$$\leq |\mu| \times |\nu|(\tau^{-1}(A)) + |\mu| * |\nu|(F) = |\mu| * |\nu|(F) = |\mu| * |\nu|(B).$$

Segue que se $f \in L_1(G, |\mu|*|\nu|)$ é uma função simples, ou seja, tem a forma $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k 1_{B_k}$, onde $B_k \in B_G$ e $\alpha_k \geq 0$, para $k = 1, 2, \ldots, n$, então $f \circ \tau \in L_1(G \times G, |\mu| \times |\nu|)$ e

$$\int_{G\times G} f \circ \tau d(|\mu| \times |\nu|) \leq \int_G f d(|\mu| * |\nu|). \tag{2.2}$$

Agora considere $f \in L_1(G, |\mu| * |\nu|)$ com $f \geq 0$. Seja (f_n) sequência de funções simples tais que $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq \ldots \leq f$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in G$ (veja A.1.12). Então $0 \leq f_1 \circ \tau \leq f_2 \circ \tau \leq \ldots \leq f \circ \tau$ e $\lim_{n\to\infty} f_n \circ \tau(x, y) = f \circ \tau(x, y)$, para todo $x, y \in G$. O teorema da convergência monótona (A.1.26) e a equação 2.2 agora implicam que

$$\begin{aligned} \int_{G\times G} f \circ \tau d(|\mu| \times |\nu|) = \lim_{n\to\infty} \int_{G\times G} f_n \circ \tau d(|\mu| \times |\nu|) &\leq \lim_{n\to\infty} \int_G f_n d(|\mu| * |\nu|) = \\ &= \int_G f d(|\mu| * |\nu|). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Segue que se $f \in L_1(G, |\mu| * |\nu|)$ então $f \circ \tau \in L_1(G \times G, |\mu| \times |\nu|)$. Para $f \in L_1(G, |\mu| * |\nu|)$ escrevemos $\|f\| = \int_G |f| d(|\mu| * |\nu|)$; é óbvio do teorema 2.1.9 que

$$\left| \int_G f d(\mu * \nu) \right| \leq \|f\| \tag{2.4}$$

Mais ainda, usando 2.3 vemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{G\times G} (f \circ \tau) d(\mu \times \nu) \right| \leq \int_{G\times G} |f \circ \tau| d(|\mu| \times |\nu|) &= \int_{G\times G} |f| \circ \tau d(|\mu| * |\nu|) \\ &\leq \int_G |f| d(|\mu| * |\nu|) = \|f\|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Agora considere os funcionais lineares,

$$f \mapsto \int_G f d(\mu * \nu) \text{ e } f \mapsto \int_{G\times G} (f \circ \tau) d(\mu \times \nu)$$

sobre $L_1(G, |\mu| * |\nu|)$. Estes funcionais (obviamente lineares) coincidem sobre $C_0(G)$ e são limitados pelas equações 2.4 e 2.5. Pelo teorema (A.1.29) estes funcionais coincidem sobre todo $L_1(G, |\mu| * |\nu|)$. ■

Corolário 2.1.11. Sejam $\mu, \nu \in M(G)$ e τ a aplicação $G \times G \ni (x, y) \mapsto xy \in G$. Então para todo $A \in B_G$ temos

(i) $\mu * \nu(A) = \mu \times \nu(\tau^{-1}(A)) = \int_G \nu(x^{-1}A) d\mu(x) = \int_G \mu(Ay^{-1}) d\nu(y)$.

Prova: Seja $A \in B_G$. Então $1_A \in L_1(G, |\mu| * |\nu|)$. Assim,

$$\begin{aligned} \mu * \nu(A) = \int_G 1_A d\mu * \nu = \int_{G\times G} 1_A \circ \tau d(\mu \times \nu) = \int_{G\times G} 1_{\tau^{-1}(A)} d(\mu \times \nu) &= \\ = (\mu \times \nu)(\tau^{-1}(A)) = \int_G \int_G 1_A(xy) d\mu(x) d\nu(y) = \int_G \mu(Ay^{-1}) d\nu(y) &= \\ \int_G \int_G 1_A(xy) d\nu(y) d\mu(x) = \int_G 1_{x^{-1}A}(y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_G \nu(x^{-1}A) d\mu(x). \end{aligned}$$

■

2.2 Convolução de Funções e a Álgebra $L_1(G)$

Nesta seção mostraremos que o produto de convolução e a involução de $M(G)$ podem ser interpretadas para dar origem a operações de convolução e involução em $L_1(G)$.

Definição 2.2.1. Uma medida $\mu \in M(G)$ é dita **absolutamente contínua** se μ é absolutamente contínua com relação à λ (onde λ é uma medida de Haar à esquerda). O subconjunto de $M(G)$ de todas as medidas absolutamente contínuas será denotado por $M_a(G)$.

Lema 2.2.2. Seja $A \in B_G$. O conjunto $V_A = \{\mu \in M(G) : |\mu|(A) = 0\}$ é um subespaço fechado de $M(G)$.

Prova: Sejam $\mu, \nu \in V_A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Do teorema A.2.4 temos $|\alpha\mu + \nu| \leq |\alpha||\mu| + |\nu|$. Segue que $\alpha\mu + \nu \in V_A$. Assim V_A é um subespaço linear de $M(G)$. Seja $(\mu_n)_n \subset V_A$ e seja $\mu \in M(G)$ tal que $\mu_n \to \mu$. Então para todo $B \subset A$ temos

$$|\mu(B)| = |\mu_n(B) - \mu(B)| = |(\mu_n - \mu)(B)| \leq |\mu_n - \mu|(B) \leq \|\mu_n - \mu\|.$$

Logo $\|\mu\|(A) = 0$ (veja teorema A.2.3) e portanto $\mu \in V_A$. ■

Teorema 2.2.3. O conjunto $M_a(G)$ é um ideal bilateral fechado em $M(G)$. Mais ainda, a aplicação $L_1(G, \lambda) = L_1(G) \ni f \to \mu_f \in M_a(G)$, onde $\mu_f(A) = \int_A f d\lambda$, é um isomorfismo linear isométrico de $L_1(G)$ sobre $M_a(G)$.

Prova: Pelo teorema A.2.3 a definição A.2.8 uma medida $\mu \in M(G)$ está em $M_a(G)$ se e somente se $|\mu|(F) = 0$ para todo $F \subset G$ compacto tal que $\lambda(F) = 0$. Assim $M_a(G) = \bigcap_{F \in I} V_F$, onde $I = \{F \subset G : F$ é compacto e $\lambda(F) = 0\}$ e $V_F = \{\mu \in M(G) : |\mu|(F) = 0\}$. Pelo lema 2.2.2 cada V_F é fechado em $M(G)$. Logo $M_a(G)$ é fechado. Seja $\mu \in M_a(G)$ e $\nu \in M(G)$. Seja F compacto tal que $\lambda(F) = 0$. Então $\lambda(Fy^{-1}) = \Delta(y^{-1})\lambda(F) = 0$, para todo $y \in G$ e assim $|\mu|(Fy^{-1}) = 0$, para todo $y \in G$. Usando o teorema 2.1.9 e o corolário 2.1.11 obtemos

$$|\mu * \nu|(F) \leq |\mu| * |\nu|(F) = \int_G |\mu|(Fy^{-1}) d|\nu|(y) = 0$$

e assim $\mu * \nu \in M_a(G)$. Evidentemente temos $|\mu|(x^{-1}F) = 0$, para todo $x \in G$ e desta maneira

$$|\nu * \mu|(F) \leq |\nu| * |\mu|(F) = \int_G |\mu|(x^{-1}F) d|\nu|(x) = 0.$$

Isto mostra que $\nu * \mu \in M_a(G)$; isto é, $M_a(G)$ é um ideal bilateral em $M(G)$. A segunda parte do teorema segue do teorema A.2.9. ■

Definição 2.2.4. Sejam $f, g \in L_1(G)$ e $\mu \in M(G)$. Sejam ν, η medidas em $M(G)$ tal que $d\nu = fd\lambda$ e $d\eta = gd\lambda$. Pelo teorema 2.2.3, as medidas $\mu * \nu$ e $\nu * \mu$ e $\nu * \eta$ estão em $M_a(G)$. Defina

$$\mu * f = \frac{d(\mu * \nu)}{d\lambda}, \quad f * \mu = \frac{d(\nu * \mu)}{d\lambda} \quad \text{e} \quad f * g = \frac{d(\nu * \eta)}{d\lambda}.$$

Chamamos $\mu * f$, $f * \mu$ e $f * g$ convoluções.

O objetivo agora é obter representações explícitas para $\mu * f$, $f * \mu$ e $f * g$. Precisamos primeiramente de um resultado técnico de teoria de medida que é apresentado no teorema a seguir. Antes disso, um lema.

Lema 2.2.5. Sejam $1 \leq p < \infty$ e $f \in L_p(G)$. Então existe um subconjunto σ-compacto E de G tal que $f(x) = 0$ para λ-quase todo $x \in E^c$.

Prova: Considere a medida μ definida por $\mu(E) = \int_E |f|^p d\lambda$. Então μ é uma medida regular e $\mu(G) < \infty$. Assim existe E σ-compacto tal que $\mu(E^c) = 0$, ou seja, $\int_{E^c} |f|^p d\lambda = 0$. Segue que $f(x) = 0$ para λ-quase todo $x \in E^c$. ■

Teorema 2.2.6. Seja $1 \leq p < \infty$. Suponha que $f \in L_p(G)$ e $\tau : G \times G \to G$ a aplicação $(x, y) \mapsto y^{-1}x$ ou $(x, y) \mapsto xy^{-1}$. Sejam $\Phi : G \to \mathbb{C}$ uma função Borel mensurável e $\mu \in M(G)$. Suponha que existe $c > 0$ tal que

$$\text{(i)} \quad \int_G \int_G |\psi(x)\Phi(y) f \circ \tau(x, y)| dx d|\mu|(y) \leq c\|\psi\|_{p'}$$

(onde p' é o conjugado de p: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, e $dx = d\lambda(x)$) para todo $\psi \in C_{00}(G)$. Então a integral

$$\text{(ii)} \quad h(x) = \int_G \Phi(y) f \circ \tau(x, y) d\mu(y)$$

existe e é finita para λ-quase todo $x \in G$ e define uma função $h \in L_p(G)$ com $\|h\| \leq c$.

Prova: Pelo teorema A.2.5 existe $g : G \to \mathbb{C}$ Borel mensurável tal que $d\mu = gd|\mu|$ e $|g| = 1$. Existe E σ-compacto em G tal que $|\mu|(E^c) = 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que $g(E^c) = 0$. Seja $\psi \in C_{00}(G)$; então existe $A_\psi \subset G$ compacto tal que $\psi(A_\psi^c) = 0$. Defina $H : G \times G \to G$ por $H(x, y) = \psi(x) f \circ \tau(x, y)\Phi(y)g(y)$. Então H é Borel mensurável sobre $G \times G$ e se anula fora do conjunto σ-compacto $A_\psi \times E$. Desta maneira podemos aplicar o teorema A.1.28, citando (i), para obter

$$\int_G \int_G H(x, y) dx d|\mu|(y) = \int_G \int_G H(x, y) d|\mu|(y) dx.$$

Pelo teorema A.1.28 e (i), a integral

$$\int_G H(x,y)d|\mu|(y) = \psi(x)\int_G (f\circ\tau)(x,y)\Phi(y)g(y)d|\mu|(y)$$

existe e é finita para $\lambda-$quase todo $x \in G$, e define uma função Borel mensurável.

Para $x \in G$, definimos

$$h(x) = \int_G f\circ\tau(x,y)\Phi(x)g(x)d|\mu|(x) = \int_G f\circ\tau(x,y)\Phi(x)d\mu(x)$$

desde que a integral exista, e definimos $h(x) = 0$ caso contrário. Vemos que ψh é Borel mensurável para toda $\psi \in C_{00}(G)$. Pelo teorema A.1.21, h é Borel mensurável.

Pelo lema 2.2.5 podemos supor que existe S subconjunto σ-compacto tal que $f(S^c) = 0$. Seja $B = ES$ se $\tau(x,y) = y^{-1}x$ e seja $B = SE$ se $\tau(x,y) = xy^{-1}$. Obviamente B é σ-compacto e é fácil ver que temos $h(B^c) = 0$. Desta maneira temos

$$\int_G |h(x)|^p dx = \sup\{\int_F |h(x)|^p dx : F \text{ é compacto}\}.$$

Mas por (i) temos que

$$|\int_G h(x)\psi(x)dx| \leq c\|\psi\|_{p'}$$

e desta maneira o teorema A.1.29 mostra que $h \in L_p(G)$ e $\|h\|_p \leq c$. ■

Teorema 2.2.7. Para $\mu \in M(G)$ e $f \in L_1(G)$ temos

(i) $\mu * f(x) = \int_G f(y^{-1}x)d\mu(y)$, para λ-quase todo $x \in G$, e $\|\mu * f\|_1 \leq \|\mu\|\|f\|_1$; e

(ii $f * \mu(x) = \int_G \Delta(y^{-1})f(xy^{-1})d\mu(y)$, para λ-quase todo $x \in G$ e $\|f * \mu\|_1 \leq \|f\|_1\|\mu\|$.

Prova: Seja $\nu \in M_a(G)$ tal que $d\nu = fd\lambda$. Para $\psi \in C_{00}(G)$, temos

$$\int_G \psi d\mu * \nu = \int_G\int_G \psi(yx)f(x)dxd\mu(y).$$

Usando o teorema 1.2.7, podemos escrever

$$\int_G \psi d\mu * \nu = \int_G\int_G \psi(x)f(y^{-1}x)dxd\mu(y) \tag{2.6}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}\int_G\int_G |\psi(x)||f(y^{-1}x)|dxd|\mu|(y) &\leq \|\psi\|_\infty \int_G\int_G |f(x)|dxd|\mu|(y)\\ &= \|\psi\|_\infty\|f\|_1\|\mu\| = \|\psi\|_\infty\|\nu\|\|\mu\|.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Usando o teorema 2.2.6 com $\tau(x,y)=y^{-1}x$, $\Phi=1$ e $c=\|\mu\|\|\nu\|$ obtemos que

$$h(x)=\int_G f(y^{-1}x)d\mu(y)$$

existe para $\lambda-$quase todo $x\in G$ e define uma função h em $L_1(G)$ e $\|h\|_1\leq\|\mu\|\|\nu\|=\|\mu\|\|f\|_1$. Mais ainda, usando as equações 2.6 e 2.7, vemos que

$$\begin{aligned}\int_G \psi h d\lambda = \int_G\int_G \psi(x)f(y^{-1}x)d\mu(y)dx &= \int_G\int_G \psi(x)f(y^{-1}x)dxd\mu(y)\\ &= \int_G \psi d\mu*\nu = \int_G \psi\mu*fd\lambda\end{aligned}$$

para toda $\psi\in C_{00}(G)$. O teorema A.1.29 agora mostra que $\|\mu*f-h\|_1=0$, e isto implica (i). Para (ii) seja $\tau(x,y)=xy^{-1}$, $\Phi=\Delta^{-1}$, e $c=\|\nu\|\|\mu\|$. Então para $\psi\in C_{00}(G)$, temos

$$\begin{aligned}&\int_G\int_G |\psi(x)\Delta^{-1}(y)f(xy^{-1})|dxd|\mu|(y) = \int_G \Delta(y^{-1})\int_G |\psi(x)f_{y^{-1}}(x)|dxd|\mu|(y)\leq\\ &\leq \int_G \Delta(y^{-1})\|\psi\|_\infty\int_G |f_{y^{-1}}(x)|dxd|\mu|(y) = \int_G \|\psi\|_\infty\int_G |f(x)|dxd|\mu|(y) =\\ &= \|\psi\|_\infty\|f\|_1\|\mu\| = \|\psi\|_\infty\|\nu\|\|\mu\|.\end{aligned}$$

Agora, argumentando como no item (i) acima, segue que a integral

$$h(x)=\int_G \Delta(y^{-1})f(xy^{-1})d\mu(y)$$

existe para λ-quase todo $x\in G$ e define uma função h em $L_1(G)$ tal que $\|f*\mu-h\|_1=0$.■

Corolário 2.2.8. Seja $\mu\in M(G)$.

(i) Para toda $f\in L_1(G)$ temos

$$\mu^* * f(x) = \overline{\int_G \overline{f(yx)}d\mu(y)},$$

a integral sendo finita para $\lambda-$quase todo $x\in G$;

(ii) Se $f \in L_1(G)$ e se definimos $f^* = \overline{f_*}\frac{1}{\Delta}$ então $f^* \in L_1(G)$ e $\|f^*\|_1 = \|f\|_1$. Mais ainda, se $d\mu = fd\lambda$ então $d\mu^* = f^*d\lambda$.

Prova: O item (i) segue dos teoremas 2.1.8 e 2.2.7. Para provar (ii) note que pelo corolário 1.2.15 temos

$$\int_G |f^*|d\lambda = \int_G |\overline{f_*}\frac{1}{\Delta}|d\lambda = \int_G |f|d\lambda.$$

Assim $f^* \in L_1(G)$ e $\|f^*\|_1 = \|f\|_1$. Agora para $\phi \in C_0(G)$, temos

$$\int_G \phi d\mu^* = \overline{\int_G \overline{\phi_*}d\mu} = \overline{\int_G \overline{\phi_*}fd\lambda} = \int_G \phi_*\overline{f}d\lambda = \int_G \phi\overline{f_*}\frac{1}{\Delta}d\lambda = \int_G \phi f^*d\lambda.$$

Pelo teorema A.2.6 isto prova (ii). ■

Teorema 2.2.9. Para $f, g \in L_1(G)$, temos

(i) $f * g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy$;

(ii) $f * g(x) = \int_G f(xy)g(y^{-1})dy$;

(iii) $f * g(x) = \int_G \Delta(y^{-1})f(xy^{-1})g(y)dy$;

(iv) $f * g(x) = \int_G \Delta(y^{-1})f(y^{-1})g(yx)dy$.

Cada igualdade valendo para $\lambda-$quase todo $x \in G$.

Prova: As igualdades (i) e (iii) seguem do teorema 2.2.7 e da definição de $f * g$. Para provar (ii), usamos o teorema 1.2.7 e escrevemos

$$\int_G f(y)g(y^{-1}x)dy = \int_G f(xy)g((xy)^{-1}x)dy = \int_G f(xy)g(y^{-1})dy.$$

Para provar (iv) usamos o teorema 1.2.9 e escrevemos

$$\int_G \Delta(y^{-1})f(xy^{-1})g(y)dy = \Delta(x)\int_G \Delta((yx)^{-1})f(x(yx)^{-1})g(yx)dy =$$

$$= \int_G \Delta(y^{-1})f(y^{-1})g(yx)dy.$$ ■

As fórmulas de convolução 2.2.7(i-ii) para $\mu \in M(G)$ e $f \in L_1(G)$ podem ser extendidas para $f \in L_p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$. Os seguintes dois teoremas descrevem como isto acontece.

Teorema 2.2.10. Seja $f \in L_p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$ e $\mu \in M(G)$. Então a integral

$$\int_G f(y^{-1}x)d\mu(y) = \mu * f(x)$$

existe e é finita para λ-quase todo $x \in G$ e define uma função $\mu * f \in L_p(G)$, com $\|\mu * f\|_p \leq \|\mu\|\|f\|_p$.

Prova: Vamos aplicar o teorema 2.2.6. Seja $\tau(x, y) = y^{-1}x$, $\Phi = 1$, e $c = \|\mu\|\|f\|_p$. Se $\psi \in C_{00}(G)$, então a desigualdade de Holder implica que

$$\int_G |f(y^{-1}x)\psi(x)|dx \leq \|_{x^{-1}}f\|_p\|\psi\|_{p'} = \|f\|_p\|\psi\|_{p'}$$

e portanto

$$\int_G \int_G |\psi(x)f(y^{-1}x)dxd|\mu|(y) \leq \int_G \|f\|_p\|\psi\|_{p'}d|\mu|(x) = \|\psi\|_{p'}\|f\|_p\|\mu\|.$$

O resultado agora segue do teorema 2.2.6. ■

Para a convolução $f * \mu$, com $f \in L_p(G)$, nosso resultado é menos elegante que para $\mu * f$. Esta diferença aparece por causa da distinção entre as medidas de Haar à esquerda e à direita.

Teorema 2.2.11. Seja $\mu \in M(G)$ e suponha que $\int_G \Delta^{-\frac{1}{p'}} d|\mu|(y)$ é finito, onde $1 \leq p < \infty$ e $p' = \frac{p}{p-1}$ $(1' = \infty$ e $\frac{1}{\infty} = 0)$. Seja $f \in L_p(G)$. Então a integral

$$\int_G \Delta(y^{-1})f(xy^{-1})d\mu(y) = f * \mu(x)$$

existe e é finita para λ-quase todo $x \in G$ e define uma função $f * \mu \in L_p(G)$, com

$$\|f * \mu\|_p \leq \|f\|_p \int_G \Delta(y)^{-\frac{1}{p'}} d|\mu|(y).$$

Prova: Para aplicar o teorema 2.2.6, seja

$$\tau(x, y) = xy^{-1}, \ \ \Phi = \Delta^{-1} \quad \text{e} \quad c = \|f\|_p \int_G \Delta(y)^{-\frac{1}{p'}} d|\mu|(y).$$

Seja $\psi \in C_{00}(G)$. Pela desigualdade de Holder e o teorema 1.2.9 temos

$$\int_G |f(xy^{-1})\psi(x)|dx \leq \|f_{y^{-1}}\|_p\|\psi\|_{p'} = \Delta(y)^{\frac{1}{p}}\|f\|_p\|\psi\|_{p'}.$$

E portanto

$$\begin{aligned}\int_G\int_G |\psi(x)\Delta^{-1}(y)f(xy^{-1})|dxd|\mu|(y) &\leq \int_G \Delta(y)^{\frac{1}{p}-1}\|f\|_p\|\psi\|_{p'}d|\mu|(y) = \\ &= \|\psi\|_{p'}\|f\|_p\int_G \Delta(y)^{-\frac{1}{p'}}d|\mu|(y).\end{aligned}$$

O resultado agora segue do teorema 2.2.6. ■

Corolário 2.2.12. Temos como consequência que:

(i) se $f \in L_1(G)$ e $g \in L_p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$ então a integral

$$f * g(x) = \int_G f(xy)g(y^{-1})dy = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy$$

existe e é finita para λ-quase todo $x \in G$ e define uma função $f * g \in L_p(G)$, com $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$.

(i) se $f \in L_p(G)$ e $g \in L_1(G)$ e se $\Delta^{-\frac{1}{p'}}g \in L_1(G)$ então a integral

$$f * g(x) = \int_G \Delta(y^{-1})f(xy^{-1})g(y)dy = \int_G f(xy)g(y^{-1})dy = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy$$

existe e é finita para λ-quase todo $x \in G$ e define uma função $f * g \in L_p(G)$, com $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p\|\Delta^{-\frac{1}{p'}}g\|_1$.

Prova: A afirmação para $f \in L_1(G)$ e $g \in L_p(G)$ segue diretamente de 2.2.10 e a afirmação para $f \in L_p(G)$ e $g \in L_1(G)$ segue diretamente de 2.2.11.

Lema 2.2.13. Seja $p \in [1, \infty)$ e seja $f \in L_p(G) = L_p(G, \mathcal{B}_G, \lambda)$. Para todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança U de e em G tal que

$$\|_sf -_tf\|_p < \epsilon, \quad \text{se } s, t \in G \text{ e } st^{-1} \in U.$$

Isto é, a aplicação $x \mapsto_x f$ de G em $L_p(G)$ é uniformemente contínua à direita. Para todo $t \in G$ fixado e todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança V de e tal que

$$\|f_s - f_t\|_p < \epsilon \quad \text{se } s \in tV.$$

Isto é, a aplicação $x \mapsto f_x$ de G em $L_p(G)$ é contínua.

Prova: Seja $\phi \in C_{00}(G)$ tal que $\|f - \phi\|_p < \frac{\epsilon}{3}$ (veja teorema A.1.29). Seja F compacto tal que $\phi(F^c) = 0$ e seja W uma vizinhança simétrica de e tal que $\overline{W}$ é compacto. Seja U uma vizinhança de e tal que $U \subset W$ e tal que

$$|\phi(a) - \phi(b)| < \frac{\epsilon}{3}\lambda(WF)^{-\frac{1}{p}},$$

para todos $a, b \in G$, com $ab^{-1} \in U$. Se $st^{-1} \in U$, temos que

$$\int_G |\phi(sx) - \phi(tx)|^p dx = \int_G |\phi(st^{-1}x) - \phi(x)|^p dx = \int_{WF} |\phi(st^{-1}x) - \phi(x)|^p dx < \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^p;$$

isto é, $\|_s\phi -_t\phi\|_p < \frac{\epsilon}{3}$. Usando o teorema 1.2.7, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|_sf -_tf\|_p &\leq \|_sf -_s\phi\|_p + \|_s\phi -_t\phi\|_p + \|_t\phi -_tf\|_p = \\ & 2\|f - \phi\|_p + \|_s\phi -_t\phi\|_p < 2\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Isto prova que a aplicação $x \mapsto_x f$ é uniformemente continua à direita.

Escolha agora $\psi \in C_{00}(G)$ tal que $\|\psi - f\| < \frac{\epsilon}{4}\Delta(t)^{\frac{1}{p}}$. Seja W um vizinhança simétrica de e tal que $\overline{W}$ é compacto e $W \subset \{x \in G : \Delta(x) < 2^p\}$. Seja E um conjunto compacto tal que $\psi(E^c) = 0$ e seja V uma vizinhança simétrica de e em G tal que $V \subset W$ e tal que $b^{-1}a \in V$ implica $|\psi(b) - \psi(a)| < \frac{\epsilon}{4}\lambda(EW)^{-\frac{1}{p}}\Delta(t)^{\frac{1}{p}}$. Então se $s = tv$, onde $v \in V$, temos do teorema 1.2.7 que

$$\begin{aligned} \|\psi_s - \psi_t\|_p &= \|\psi_{tv} - \psi_t\|_p = \Delta(t^{-1})^{-\frac{1}{p}}\|\psi_v - \psi\|_p \\ &= \Delta(t^{-1})^{\frac{1}{p}}\left[\int_E W|\psi(xv) - \psi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

Como acima obtemos

$$\begin{aligned} \|f_s - f_t\|_p &= \|f_{tv} - f_t\|_p \leq \|f_{tv} - \psi_{tv}\|_p + \|\psi_{tv} - \psi_t\|_p + \|\psi_t - f_t\|_p \\ &= \Delta(v^{-1})^{\frac{1}{p}}\Delta(t^{-1})^{\frac{1}{p}}\|f - \psi\|_p + \|\psi_{tv} - \psi_t\|_p + \Delta(t^{-1})^{\frac{1}{p}}\|\psi - f\|_p \\ &< 2\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon. \end{aligned}$$

■

Observação 2.2.14. A aplicação $x \mapsto f_x$ de G em $L_p(G)$ é uniformemente contínua à esquerda para todo $f \in L_p(G)$ se e somente se G é unimodular. De fato, suponha que G é unimodular. Pelo corolário 1.2.15, f_* também pertence a $L_p(G)$. Dado $\epsilon > 0$, usamos o lema 2.2.13 para escolher uma vizinhança U de e tal que $\|_s(f_*) -_t(f_*)\|_p < \epsilon$ sempre que

$st^{-1} \in U$. Então $x^{-1}y \in U$ implica que

$$\|f_x - f_y\|_p = \|(f_x - f_y)_*\|_p = \|_{x^{-1}}(f_*) -_{y^{-1}} (f_*)\|_p < \epsilon.$$

Suponha agora que G não é unimodular. Seja U uma vizinhança simétrica de e tal que $\overline{U}$ é compacto. Seja $x_1 = e$; tendo escolhido x_{n-1}, escolha $x_n \in \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} x_k U\right)^c$ (note que x_n existe pois G não é compacto). Seja W_1 uma vizinhança simétrica de e tal que $W_1^3 \subset U$ e $\lambda(W_1) < \frac{1}{2}$ (isto é possível pois G não é discreto). Tendo escolhido W_{n-1}, seja W_n uma vizinhança simétrica de e tal que $W_n^2 \subset W_{n-1}$ e $\lambda(W_n) < 2^{-n}$. Finalmente, seja $W = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} x_n W_n$. Note que $\lambda(W) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty$ e assim $1_W \in L_p(G)$. Para mostrar que $x \mapsto (1_W)_x$ não é uniformemente contínua à esquerda, seja V uma vizinhança simétrica de e tal que $V \subset W_1$. Escolha um inteiro positivo m tal que $2^{1-m} < \lambda(V)$. Então $V \cap W_{m-1}^c$ deve ser não-vazio pois se $V \subset W_{m-1}$ então $\lambda(V) \leq \lambda(W_{m-1}) < 2^{1-m}$; tome qualquer elemento v de $V \cap W_{m-1}^c$. Mostraremos que $x_m W_m v$ é disjunto de W. Assuma que $x_m W_m v \cap x_n W_n \neq \emptyset$, para algum n. Então $x_m w_m v = x_n w_n'$ para $w_m \in W_m$ e $w_n' \in W_n$, e assim $x_n^{-1} x_m \in W_n V^{-1} W_m^{-1} \subset W_1^3 \subset U$, ou seja $x_m \in x_n^{-1} U$; segue daí que $n \leq m$. Por outro lado, como U é simetrica também temos que $x_m^{-1} x_n \in U$ e portanto $n = m$. Desta maneira $v = w_m^{-1} w_n' \in W_m^{-1} W_m = W_m^2 \subset W_{m-1}$, que é uma contradição. Sendo $x_m W_m v \subset W v$ e $x_m W_m v$ é disjunto de W, é fácil ver que $\|(1_W) - (1_W)_{v^{-1}}\|_p > 0$. Agora, para todo $y \in G$, temos

$$\|(1_W)_y - (1_W)_{yv^{-1}}\|_p = \Delta(y^{-1})^{\frac{1}{p}} \|(1_W) - (1_W)_{v^{-1}}\|_p. \tag{2.8}$$

Sendo que G não é unimodular, $\Delta(G)$ é (um grupo) não-limitado em $(0, \infty)$, e assim o lado direito da equação 2.8 pode ser feita arbitrariamente grande. Sendo $(yv^{-1})^{-1} y = v \in V$, isto mostra que $x \mapsto (1_W)_x$ não é uniformemente contínua à esquerda.

Teorema 2.2.15. Se $f \in L_1(G)$ e $g \in L_\infty(G)$ então a integral

$$h(x) = \int_G f(xy) g(y^{-1}) dy$$

existe para todo $x \in G$ e define uma função h que é uniformemente contínua à direita e limitada sobre G e temos $\|h\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. A função h será denotada por $f * g$ (por motivos óbvios). Mais ainda, se $g \in C_0(G)$ então $f * g \in C_0(G)$.

Prova: Suponha primeiro que $f \in L_1(G)$ e $g \in L_\infty(G)$. Note que

$$\int_G |f(xy)g(y^{-1})|dy \leq \|_x f\|_1 \|g_*\|_\infty = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Assim $h(x)$ existe e é finito para todo $x \in G$ e $\|h\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. Agora, para $s, t \in G$ temos,

$$|f * g(s) - f * g(t)| \leq \int_G |f(sy) - f(ty)||g(y^{-1})|dy \leq \|_s f -_t f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Segue do lema 2.2.13 que $f * g$ é uniformemente contínua à direita.

Suponha agora que $f \in C_{00}(G)$ e $g \in C_0(G)$. Seja $\epsilon > 0$ e $F, K \subset G$ compactos tal que $f(x) = 0$, para $x \in F^c$ e $|g(x)| < \frac{\epsilon}{\|f\|_1}$, para $x \in K^c$. Então FK é compacto e $|f * g(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \in (FK)^c$. De fato, se $x \notin FK$ então $y^{-1}x \notin K$, para todo $y \in F$. Daí

$$|f * g(x)| = \left| \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy \right| \leq \int |f(y)||g(y^{-1}x)|dy =$$

$$\int_F |f(y)||g(y^{-1}x)|dy \leq \frac{\epsilon}{\|f\|_1} \|f\|_1 = \epsilon.$$

para todo $x \notin FK$. Segue que se $f \in C_{00}(G)$ e $g \in C_0(G)$ então $f * g \in C_0(G)$.

Finalmente, seja $f \in L_1(G)$ e $g \in C_0(G)$. Seja $\{f_n\}$ sequência de funções em $C_{00}(G)$ tal que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quando $n \to \infty$. Então cada função $f_n * g \in C_0(G)$ e

$$\|f_n * g - f * g\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1 \|g\|_\infty \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Logo $f * g \in C_0(G)$. ■

Corolário 2.2.16. Seja $A \in \mathcal{B}_G$ tal que $0 < \lambda(A) < \infty$. Então AA^{-1} contém uma vizinhança da identidade.

Prova: Considere $f = 1_A$ e $g = 1_{A^{-1}}$. Então $f \in L_1(G)$ e $g \in L_\infty(G)$. Pelo teorema 2.2.15 $f * g$ é contínua e temos

$$(f * g)(e) = \int_G f(y)g(y^{-1}e)dy = \int_A 1_{A^{-1}}(y^{-1})dy = \lambda(A) > 0.$$

Assim existe $V \in \text{viz}(e)$ tal que $f * g(x) > 0$ para todo $x \in V$. Mas note que se $x \in (AA^{-1})^c$ então $f * g(x) = 0$. Logo $V \subset AA^{-1}$. ■

Teorema 2.2.17. Seja G um grupo topológico localmente compacto. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) G é um grupo abeliano;

(ii) $M(G)$ é uma álgebra comutativa;

(iii) $L_1(G)$ é uma álgebra comutativa;

(iv) existe um $*-$subsemigrupo comutativo A de $M(G)$ tal que para todo aberto não vazio U de G existe $\mu \in A^+$ tal que $\mu(U) = 1$ e $\mu(U^c) = 0$.

Prova: Para cada $a \in G$, defina $\epsilon_a : B_G \to \mathbb{C}$, onde $\epsilon_a(E) = 1_E(a)$. É facil ver que $\epsilon_a \in M(G)$. Sejam $a, b \in G$, e note que para $f \in C_0(G)$ temos

$$\int_G fd(\epsilon_a * \epsilon_b) = \int_G \int_G f(xy)d\epsilon_a(x)d\epsilon_b(y) = \int_G f(ay)d\epsilon_b(y) = f(ab) = \int_G fd\epsilon_{ab}.$$

Segue que $\epsilon_a * \epsilon_b = \epsilon_{ab}$, para todo $a, b \in G$. Assim, se G não é abeliano então $M(G)$ não é comutativa. Suponha agora que G é abeliano. Sejam $\mu, \nu \in M(G)$. Então para $f \in C_0(G)$ temos

$$\int_G fd(\mu * \nu) = \int_G \int_G f(xy)d\mu(x)d\nu(y) = \int_G \int_G f(yx)d\mu(x)d\nu(y) =$$
$$= \int_G \int_G f(yx)d\nu(y)d\mu(x) = \int_G fd(\nu * \mu).$$

Logo $\mu * \nu = \nu * \mu$ para todo $\mu, \nu \in M(G)$ e portanto $M(G)$ é comutativa. Assim (i) é equivalente a (ii).

Se $M(G)$ é comutativa então qualquer sub-álgebra de $M(G)$ é comutativa; em particular $M_a(G)$ é comutativa e portanto $L_1(G)$ é comutativa. Assim (ii) implica (iii). Se $L_1(G)$ é uma álgebra comutativa então a álgebra $M_a(G)$ também é comutativa. Assim (iii) implica (iv).

Suponha agora que (iv) vale e seja A qualquer $*-$subsemigrupo de $M(G)$ tal que para todo aberto não vazio U de G existe um $\mu \in A^+$ tal que $\mu(U) = 1$ e $\mu(U^c) = 0$. Suponha que G não é abeliano, isto é, $ab \neq ba$, para algum $a, b \in G$. Então por continuidade do produto de G (e como G é Hausdorff) existe uma vizinhança simétrica V de e tal que

$$(VbaV) \cap (VaVb) = \emptyset \tag{2.9}$$

Escolha V_1 vizinhança de e tal que $\overline{V_1} \subset V$. Agora escolha $\nu \in A^+$ tal que $\nu(b^{-1}V_1) = 1$ e $\nu((b^{-1}V_1)^c) = 0$. Seja $S(\nu)$ o suporte de ν (veja teorema A.1.20). Temos que $b^{-1}\overline{V_1}$ é fechado e

$$\nu((b^{-1}\overline{V_1})^c) \leq \nu((b^{-1}V_1)^c) = 0.$$

Assim $S(\nu) \subset b^{-1}\overline{V_1} \subset b^{-1}V$; seja c qualquer elemento de $S(\nu)^{-1} \subset Vb$. Agora seja W vizinhança simétrica de e tal que $W \subset V$ e $a^{-1}Wa \subset V$. Finalmente, seja $\mu \in A^+$ tal que $\mu(Wac) = 1$ e $\mu((Wac)^c) = 0$. Iremos mostrar que $\mu * \nu(aV) \neq \nu * \mu(aV)$; isto irá violar (iv) e mostrar que (iv) implica (i). Pelo corolário 2.1.11 temos

$$\mu * \nu(aV) = \int_G \nu(x^{-1}aV)d\nu(x) = \int_{Wac} \nu(x^{-1}aV)d\mu(x).$$

Se $x \in Wac$, então $x \in Wac = aa^{-1}Wac \subset aVc$, e assim $c^{-1} \in x^{-1}aV$. Em outras palavras, o conjunto aberto $x^{-1}aV$ intersepta $S(\nu)$, e assim $\nu(x^{-1}aV) > 0$. Segue que $\mu * \nu(aV) > 0$. Completemos agora a prova mostrando que $\nu * \mu(aV) = 0$. Temos

$$\nu * \mu(aV) = \int_G \mu(x^{-1}aV)d\nu(x) = \int_{b^{-1}V} \mu(x^{-1}aV)d\nu(x).$$

Se $x \in b^{-1}V$, então $x^{-1} \in Vb$ e

$$(x^{-1}aV) \cap (Wac) \subset (VcaV) \cap (VaVc) = \emptyset$$

pela equação 2.9. Consequentemente $\mu(x^{-1}aV) = 0$ para todo $x \in b^{-1}V$ e $\nu * \mu(aV) = 0$.■

Exemplo 2.2.18. Seja G um grupo discreto. Então a álgebra $M_a(G)$ coincide com $M(G)$. De fato, se G é discreto então já sabemos que λ é a medida de contagem:

$$\lambda(E) = \begin{cases} \text{número de pontos de } E & \text{se } E \text{ é finito} \\ \infty & \text{se } E \text{ é infinito} \end{cases}$$

Assim $\lambda(E) = 0$ somente para $E = \emptyset$. Logo toda $\mu \in M(G)$ satisfaz $\mu(E) = 0$ sempre que $\lambda(E) = 0$.

Exemplo 2.2.19. A álgebra $M(G)$ contém uma unidade, a saber a medida ϵ_e. De fato, temos para $\mu \in M(G)$,

$$\begin{aligned}\int_G fd(\mu * \epsilon_e) = \int_G \int_G f(xy)d\mu(x)d\epsilon_e(y) &= \int_G \int_G f(xy)d\epsilon_e(y)d\mu(x) = \\ &= \int_G f(x)d\mu(x) = \int_G fd\mu\end{aligned}$$

e

$$\int_G fd(\epsilon_e * \mu) = \int_G \int_G f(xy)d\epsilon_e(x)d\mu(y) = \int_G f(y)d\mu(y) = \int_G fd\mu.$$

Logo $\mu * \epsilon_e = \epsilon_e * \mu = \mu$, para toda $\mu \in M(G)$. Em particular, se G é discreto, $M_a(G)$ tem unidade.

Teorema 2.2.20. Se G é não-discreto então $M_a(G)$ [equivalentemente $L_1(G)$] não tem unidade.

Prova: Assuma que $\mu \in M_a(G)$ e que $\mu * \nu = \nu$, para toda $\nu \in M_a(G)$. Como G é não discreto temos $|\mu|(\{e\}) = 0$ (veja exemplo 1.2.17). Assim existe U vizinhança de e tal que $|\mu|(U) < 1$. Seja V vizinhança simétrica de e tal que $V^2 \subset U$ e $\lambda(V) < \infty$; então $1_V \in L_1(G)$ e temos para quase todo $x \in V$ que

$$\begin{aligned}1 = 1_V(x) = \mu * 1_V(x) = \int_G 1_V(y^{-1}x)d\mu(y) &= \left|\int_G 1_V(y^{-1}x)d\mu(y)\right| \leq \\ &\leq \int_G 1_V(y^{-1}x)d|\mu|(y). \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Agora, se $y \notin U$ então $y \notin xV \subset V^2 \subset U$, para todo $x \in V$. Assim $x^{-1}y \notin V$, e assim $y^{-1}x \notin V^{-1} = V$, para todo $x \in V$. Daí

$$\int_G 1_V(y^{-1}x)d|\mu|(y) = \int_U 1_V(y^{-1}x)d|\mu|(y) \leq \int_U 1d|\mu|(y) = |\mu|(U) < 1.$$

Isto contradiz a equação 2.10. ■

Definição 2.2.21. Seja A uma álgebra normada. Uma *unidade aproximada* em A é uma net $\{e_i\}_{i\in I}$ tal que $\|e_i\| \leq 1$, para todo $i \in I$ e

$$\lim_{i\in I} xe_i = \lim_{i\in I} e_ix = x,$$

para todo $x \in A$.

Teorema 2.2.22. A álgebra $M_a(G)$ [equivalentemente $L_1(G)$] contém uma unidade aproximada.

Prova: Vamos provar que a álgebra $L_1(G)$ tem uma unidade aproximada.

Seja $I = \{U \in \text{viz}(e) : \lambda(U) < \infty\}$ e olhe I como conjunto dirigido da maneira usual: $U \geq V$ se $U \subset V$ $(U, V \in I)$. Para cada $U \in I$, seja $f_U = \frac{1_U}{\lambda(U)}$ e note que $f_U \in L_1(G)$. Provaremos que a net $\{f_U\}_{U \in I}$ é uma unidade aproximada para $L_1(G)$. Seja $\epsilon > 0$. Seja $U_0 \in I$ tal que

$$\|_{y^{-1}}f - f\| \leq \epsilon$$

para todo $y \in U_0$ (tal U_0 existe pelo lema 2.2.13). Então para todo $U \in I$, com $U \geq U_0$ temos

$$\begin{aligned}
&\|f_U * f - f\|_1 = \int_G |f_U * f(x) - f(x)|dx = \\
= &\int_G \left| \int_U f_U(y) f(y^{-1}x)dy - \int_U f(x) f_U(y)dy \right| dx \leq \\
\leq &\int_G \int_U |f_U(y) f(y^{-1}x) - f_U(y) f(x)| dy dx = \\
= &\int_U \left(\int_G |f(y^{-1}x) - f(x)|dx \right) f_U(y)dy = \\
= &\int_U \|_{y^{-1}}f - f\|_1 f_U(y)dy \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Assim $\lim\limits_{i \in I} f_U * f = f$. Agora tome $U_0 \in I$ tal que $\|f\|_1 |\Delta(y^{-1}) - 1| \leq \frac{\epsilon}{2}$, e $\Delta(y^{-1})\|f_{y^{-1}} - f\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2}$, para todo $y \in U_0$ (tal U_0 existe pelo lema 2.2.13 e o corolário 1.2.11). Então para todo $U \in I$, com $U \geq U_0$ temos

$$\|f\|_1 |1 - \int_U \Delta(y^{-1}) f_U(y)dy| \leq \int_U \|f\|_1 |1 - \Delta(y^{-1})| f_U(y)dy \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{2.11}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_G |f * f_U(x) - (\int_U \Delta(y^{-1}) f_U(y)dy) f(x)|dx = \\
= &\int_G | \int_U f_U(y) f(xy^{-1}) \Delta(y^{-1})dy - \int_U \Delta(y^{-1}) f_U(y) f(x)dy|dx \leq \\
\leq &\int_G \int_U |f(xy^{-1}) - f(x)| \Delta(y^{-1}) f_U(y)dydx = \\
= &\int_U (\int_G |f(xy^{-1}) - f(x)|dx) \Delta(y^{-1}) f_U(y)dy = \\
= &\int_U \|f_{y^{-1}} - f\|_1 \Delta(y^{-1}) f_U(y)dy \leq \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Das equações 2.11 e 2.12 segue que

$$\|f * f_U - f\|_1 \leq \|f * f_U - (\int_U \Delta(y^{-1}) f_U(y)dy)f\|_1 + \|f\|_1 |1 - \int_U \Delta(y^{-1}) f_U(y)dy| \leq$$
$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo $\lim_{i\in I} f * f_U = f$. ■

Teorema 2.2.23. Um subespaço fechado A de $M_a(G)$ é um ideal à esquerda [direita] de $M_a(G)$ se, e somente se, $\mu \in A$ e $x \in G$ implicam que $\epsilon_x * \mu \in A$ [$\mu * \epsilon_x \in A$].

Prova: Seja A um ideal à esquerda fechado em $M_a(G)$ e seja $\{\nu_i\}_{i\in I}$ uma unidade aproximada para $M_a(G)$. Então para $\mu \in A$ e $x \in G$ temos

$$\epsilon_x * \mu = \lim_{i\in I} \epsilon_x * (\nu_i * \mu) = \lim_{i\in I} (\epsilon_x * \nu_i) * \mu \in A,$$

sendo que cada $\epsilon_x * \nu_i \in M_a(G)$ e A é um ideal à esquerda fechado.

Suponha reciprocamente que $\mu \in A$ e $x \in G$ implicam que $\epsilon_x * \mu \in A$, onde A é um subespaço fechado de $M_a(G)$. Sejam $\nu \in M_a(G)$ e $\mu_0 \in A$. Seja $\Phi \in M_a(G)^*$ para o qual $\Phi(A) = 0$. Pela observação A.1.25 existe $g \in L_\infty(G)$ tal que

$$\Phi(\mu) = \int_G g d\mu,$$

para toda $\mu \in M_a(G)$. Então temos

$$\Phi(\nu * \mu_0) = \int_G g d(\nu * \mu_0) = \int_G \int_G g(xy) d\mu_0(y) d\nu(x) =$$
$$\int_G [\int_G \int_G g(zy) d\epsilon_x(z) d\mu_0(y)] d\nu(x) = \int_G \Phi(\epsilon_x * \mu_0) d\nu(x) = 0,$$

pois $\epsilon_x * \mu_0 \in A$ para $x \in G$ e $\Phi(A) = 0$. Assim provamos que para todo $\Phi \in M_a(G)^*$ tal que $\Phi(A) = 0$, temos $\Phi(\nu * \mu_0) = 0$. Segue do teorema de Hahn-Banach que $\nu * \mu_0 \in A$.■

Corolário 2.2.24. Um subespaço fechado B de $L_1(G)$ é um ideal à esquerda [direita] de $L_1(G)$ se, e somente se, $f \in B$ e $x \in G$ implicam que ${}_x f \in B$ [$f_x \in B$].

Prova: Basta notar que se $f \in L_1(G)$, $x \in G$ e se $\mu \in M_a(G)$ é tal que $d\mu = f d\lambda$, então

$$d(\epsilon_x * \mu) = ({}_{x^{-1}} f) d\lambda \quad \text{e} \quad d(\mu * \epsilon_x) = (\Delta(x^{-1}) f_{x^{-1}}) d\lambda.$$ ■

Capítulo 3

Multiplicadores

Definiremos neste capítulo o que vem a ser a álgebra de multiplicadores de uma dada álgebra B, denotada por $M(B)$. Veremos que quando B é uma $*$-álgebra de Banach então $M(B)$ é uma $*$-álgebra de Banach com unidade que contém B como ideal essencial. Mais ainda, provaremos que $M(B)$ é caracterizada por ser maximal entre todas as álgebras que contém B como ideal essencial. Como exemplos ilustrativos demostraremos que $M(C_{00}(X)) = C(X)$ (a álgebra das funções contínuas sobre X), $M(C_0(X)) = C^b(X)$ (a álgebra da funções contínuas e limitadas sobre X) e que $M(L_1(G)) = M(G)$ (onde G é qualquer grupo localmente compacto). Usaremos a teoria de multiplicadores no capítulo seguinte, onde provaremos que existe da bijeção entre o conjunto das representações unitárias e contínuas de um grupo G e as $*$-representações não-degeneradas da álgebra de grupo $L_1(G)$. Mais informações sobre a teoria de multiplicadores pode ser encontrada em [9] ou [10].

3.1 Definição e Propriedades da Álgebra de Multiplicadores

Definição 3.1.1. Seja B uma álgebra. Um **multiplicador** em B é um par $(L, R) \in L(B) \times L(B)$ (($L(B)$ é o espaço dos operadores lineares (não necessariamente limitados) de B em B) tal que para todos $a, b \in B$:

(i) $L(ab) = L(a)b$;

(ii) $R(ab) = aR(b)$;

(iii) $R(a)b = aL(b)$.

$M(B)$ é o conjunto dos multiplicadores de B.

Exemplo 3.1.2. Seja B qualquer álgebra e $x \in B$. Defina $L_x : B \to B$, $L_x(a) = xa$ e $R_x : B \to B$, $R_x(a) = ax$. Então é fácil ver que $(L_x, R_x) \in M(B)$.

Exemplo 3.1.3. Seja B um espaço vetorial qualquer. Defina em B o produto trivial: $xy = 0$, para todo $x, y \in B$. Então as condições $(i), (ii)$ e (iii) acima são todas identidades para qualquer $(L, R) \in L(B) \times L(B)$. Ou seja, $M(B) = L(B) \times L(B)$.

Exemplo 3.1.4. Seja X um espaço localmente compacto. Seja $B = C_{00}(X)$. Dada $f \in C(X)$ defina $L_f(g) = fg$ e $R_f(g) = gf$, para todo $g \in C_{00}(X)$. Então é fácil ver que $(L_f, R_f) \in M(C_{00}(X))$.

Exemplo 3.1.5. Seja agora $B = C_0(X)$, onde X é um espaço localmente compacto. Dada $f \in C^b(X) = \{f \in C(X) : f \text{ é limitada}\}$ defina $L_f(g) = R_f(g) = fg$ para todo $g \in C_0(X)$.

Exemplo 3.1.6. Seja B uma álgebra normada comutativa com unidade aproximada (veja definição 2.2.21). Então para cada $(L, R) \in M(B)$ temos $L = R$. De fato, temos

$$bL(a) = R(b)a = aR(b) = R(ab) = R(ba) = bR(a), \quad \forall\ a, b \in B.$$

Como B tem unidade aproximada segue que $L(a) = R(a)$, para todo $a \in B$. Ou seja, $L = R$.

Teorema 3.1.7. Seja B uma álgebra. Para $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in M(B)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ defina as operações

1. $(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$;
2. $\alpha(L_1, R_1) = (\alpha L_1, \alpha R_1)$;
3. $(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1)$. (Note a troca de ordem na segunda coordenada.)

Se B possuir involução defina para $T \in L(B)$, $T^*(x) = T(x^*)^*$. A partir daí defina:

$$(L_1, R_1)^* = (R_1^*, L_1^*)$$

Então $(L_1, R_1) + (L_2, R_2) \in M(B)$, $\alpha(L_1, R_1) \in M(B)$, $(L_1, R_1)(L_2, R_2) \in M(B)$ e no caso de B ter involução $(L_1, R_1)^* \in M(B)$. Ou seja, $M(B)$ é uma álgebra (com involução no caso de B o ser).

Prova: Todas as afimações são facilmente verificadas. ■

Teorema 3.1.8. Seja B uma álgebra de Banach com unidade aproximada $\{e_i\}_{i\in I}$. Se $(L, R) \in M(B)$ então $\|L\| = \|R\| < \infty$. Se definimos $\|(L, R)\| = \|L\| = \|R\|$, então $M(B)$ é uma álgebra de Banach com unidade (I, I), onde $I : B \to B$ é o operador identidade.

Prova: Primeiro vamos demonstrar que os operadores L e R são fechados. Seja $\{x_n\}_n \subset B$ tal que $x_n \to x \in B$ e $L(x_n) \to y \in B$. Então para todo $a \in B$,

$$aL(x) = R(a)x = R(a) \lim_{n->\infty} x_n = \lim_{n->\infty} R(a)x_n = \lim_{n->\infty} aL(x_n) = ay,$$

ou seja, $aL(x) = ay$, para todo $a \in B$. Como B tem unidade aproximada segue que $L(x) = y$. Logo L é fechado. Analogamente R é fechado. Como B é de Banach segue do teorema do gráfico fechado que L e R são limitados.

Agora note que

$$\begin{aligned}\|R(a)\| = \lim_{i\in I} \|R(a)e_i\| = \lim_{i\in I} \|aL(e_i)\| &\leq \sup_{i\in I} \|aL(e_i)\| \\ &\leq (\sup_{i\in I} \|L(e_i)\|)\|a\| \leq \|L\|\|a\|,\end{aligned}$$

ou seja, $\|R\| \leq \|L\|$. Analogamente, $\|L\| \leq \|R\|$. Logo $\|L\| = \|R\| < \infty$.

Temos que

$$\|(L_1, R_1)(L_2, R_2)\| = \|(L_1L_2, R_2R_1)\| = \|L_1L_2\| \leq \|L_1\|\|L_2\| = \|(L_1, R_1)\|\|(L_2, R_2)\|,$$

para todo $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in M(B)$. Assim $M(B)$ é uma álgebra normada. Para $(S, T) \in \mathcal{L}(B) \times \mathcal{L}(B)$ (aqui $\mathcal{L}(B)$ é o espaço dos operadores lineares e limitados de B em B) defina a norma $\|(S, T)\| = \max\{\|S\|, \|T\|\}$. Então $\mathcal{L}(B) \times \mathcal{L}(B)$ é um espaço de Banach e $M(B)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(B) \times \mathcal{L}(B)$. Para provar que $M(B)$ é de Banach basta portanto mostrar que $M(B)$ é fechado em $\mathcal{L}(B) \times \mathcal{L}(B)$. Mas isto é trivial. É também óbvio que (I, I) é unidade para $M(B)$. ■

Teorema 3.1.9. Se B é uma $*$-álgebra de Banach com unidade aproximada então $M(B)$ é uma $*$-álgebra de Banach com unidade. E se B é uma C^*-álgebra então $M(B)$ é uma C^*-álgebra com unidade.

Prova: Suponha primeiro que B é uma $*$-álgebra de Banach (lembre que numa tal álgebra temos $\|x^*\| = \|x\|$, para todo x). Então para $(L, R) \in M(B)$ temos

$$\|L^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|L^*(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|L(x^*)^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|L(x^*)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|L(x)\| = \|L\|.$$

Analogamente, $\|R^*\| = \|R\|$. Assim

$$\|(L, R)^*\| = \|(R^*, L^*)\| = \|L^*\| = \|R^*\| = \|L\| = \|R\| = \|(L, R)\|.$$

Logo $M(B)$ é uma $*$-álgebra de Banach com unidade.

Suponha agora que B é uma C^*-álgebra. Então, é um fato, que B tem uma unidade aproximada (veja teorema 8.4, página 405 de [3]). Daí, como provado acima, B já é uma $*$-álgebra de Banach com unidade. Basta então provar que $\|(L, R)^*(L, R)\| = \|(L, R)\|^2$, para todo $(L, R) \in M(B)$. Seja $(L, R) \in M(B)$. Então note que

$$\|L(x)\|^2 = \|L(x)^*L(x)\| = \|R(L(x)^*)x\| = \|R^*(L(x))^*x\| \leq \|R^*(L(x))^*\|\|x\|.$$

Daí

$$\|L\|^2 = \sup_{\|x\|\leq 1} \|L(x)\|^2 \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|R^*(L(x))^*\| = \|R^*L\|,$$

e portanto

$$\|L\|^2 \leq \|R^*L\| \leq \|R^*\|\|L\| = \|L\|^2,$$

donde $\|R^*L\| = \|L\|^2$. Logo

$$\|(L, R)^*(L, R)\| = \|(R^*L, RL^*)\| = \|R^*L\| = \|L\|^2 = \|(L, R)\|^2.$$

Portanto $M(B)$ é uma C^*-álgebra com unidade. ■

Definição 3.1.10. Seja B uma álgebra. Dizemos que um ideal bilateral $I \subset B$ é **essencial** se para todo $b \in B$ satisfazendo $bI = \{0\}$ ou $Ib = \{0\}$ tem-se $b = 0$.

Exemplo 3.1.11. É facil ver que $C_{00}(X)$ é um ideal essencial em todas as álgebras $C_0(X)$, $C^b(X)$ e $C(X)$. Em particular, segue que $C_0(X)$ é um ideal essencial de $C^b(X)$.

Exemplo 3.1.12. Seja G um grupo localmente compacto. Então $L_1(G)$ é um ideal essencial de $M(G)$ (aqui estamos identificando $L_1(G)$ com $M_a(G)$). De fato, seja $\mu \in$

$M(G)$, $\mu \neq 0$. Então existe $f \in C_{00}(G)$ tal que $\int_G f_* d\mu \neq 0$. A desigualdade

$$|\mu * f(y) - \mu * f(x)| \leq \|_{y^{-1}}(f_*) -_{x^{-1}}(f_*)\|_\infty \|\mu\|$$

e a continuidade uniforme à direita de f_*, mostram que $\mu * f$ é uma função contínua. Também, temos $(\mu * f)(e) = \int_G f_* d\mu$. Assim $\|\mu * f\|_1 = \int_G |\mu * f| d\lambda > 0$

Teorema 3.1.13. Seja B uma álgebra de Banach com unidade aproximada. Defina $i_B : B \to M(B)$; $i_B(x) = (L_x, R_x)$, onde $L_x(a) = xa$ e $R_x(a) = ax$, para todo $x, a \in B$. Então a aplicação i_B é um homomorfismo isométrico de B em $M(B)$ e $i_B(B)$ é um ideal essencial em $M(B)$. No caso de B ser uma $*$-álgebra de Banach temos também que i_B preserva $*$.

Prova: É fácil ver que i_B é um homomorfismo e que i_B preserva $*$ no caso de B ser uma $*$-álgebra de Banach.

Note que para todo $a \in B$,

$$\|L_a(x)\| = \|ax\| \leq \|a\| \|x\|, \quad , \forall\ x \in B,$$

ou seja $\|L_a\| \leq \|a\|$. Mas $\|L_a(e_i)\| = \|ae_i\| \to \|a\|$. Assim $\|L_a\| = \|a\|$. Isto diz que i_B é isométrica.

Seja $(L, R) \in M(B)$ e $a \in B$. Então $(L, R)(L_a, R_a) = (LL_a, R_a R)$. Mas

$$LL_a(x) = L(ax) = L(a)x = L_{L(a)}(x)$$

e

$$R_a R(x) = R(x)a = xL(a) = R_{L(a)}(x),$$

e assim $(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}) = i_B(L(a)) \in i_B(B)$. Portanto $i_B(B)$ é um ideal de $M(B)$.

Suponha agora que $(L, R) \in M(B)$ e $(L, R)i_B(B) = \{(0, 0)\}$. Então

$$(L, R)(L_a, R_a) = (L_{L(a)}, R_{L(a)}) = (0, 0),$$

para todo $a \in B$. Assim $L(a)x = xL(a) = 0$, para todo $a, x \in B$. Como B tem unidade aproximada isto implica que $L(a) = 0$, para todo $a \in B$, ou seja, $L = 0$. Daí

$\|R\| = \|L\| = 0$, ou seja, $R = 0$. Analogamente, se $i_B(B)(L, R) = 0$ então $L = R = 0$. Logo $i_B(B)$ é um ideal essencial de $M(B)$. ■

Observação 3.1.14. A partir do teorema acima podemos supor que se B é uma álgebra de Banach com unidade aproximada, então B pode ser considerada dentro de uma álgebra de Banach $M(B)$ com unidade tal que B é um ideal essencial de $M(B)$. No caso de B ser uma $*$-álgebra de Banach, $M(B)$ também é uma $*$-álgebra de Banach e no caso de B ser uma C^*-álgebra $M(B)$ também é uma C^*-álgebra.

Teorema 3.1.15. Se B é uma álgebra de Banach com unidade aproximada e se A é uma álgebra de Banach que contém B como ideal então existe um homomorfismo i de A em $M(B)$ que é a identidade sobre B (no caso em que A é $*$-álgebra i também preserva $*$). Mais ainda, se B é um ideal essencial de A então i é injetivo.

Prova: Para cada $a \in A$ e $b \in B$ temos $ab, ba \in B$. Assim temos definida as aplicações

$$L_a : B \ni x \mapsto ax \in B \quad \text{e} \quad R_a : B \ni x \mapsto xa \in B.$$

É fácil ver que $(L_a, R_a) \in M(B)$. Defina $i : A \to M(B)$, $i(a) = (L_a, R_a)$. Então é fácil ver que i é um homomorfismo. Suponha agora que B é um ideal essencial de A e que $i(a) = (L_a, R_a) = (0, 0)$. Então $L_a(x) = R_a(x) = 0$, para todo $x \in B$, ou seja $ax = xa = 0$, para todo $x \in B$. Como B é um ideal essencial de A segue que $a = 0$. Logo i é injetiva.■

O teorema acima nos diz que $M(B)$ é maximal entre todas as álgebras que contém B como ideal essencial.

3.2 A Álgebra de Multiplicadores de $C_0(X)$

Seja X um espaço localmente compacto. Já vimos no exemplo que cada $f \in C^b(X)$ define um multiplicador $\mu_f = (L_f, R_f) \in M(C_0(X))$ (veja exemplo 3.1.5). Iremos mostrar nesta seção que a aplicação $f \mapsto \mu_f$ é um $*$-isomorfismo de $C^b(X)$ sobre $M(C_0(X))$ e assim (por abuso de notação) poderemos escrever que $M(C_0(X)) = C^b(X)$.

Teorema 3.2.1. Seja X um espaço localmente compacto. A aplicação

$$\Phi : C^b(X) \ni f \mapsto \mu_f = (L_f, R_f) \in M(C_0(X))$$

é um $*$-isomorfismo.

Prova: Pelo exemplo 3.1.11 e o teorema 3.1.15 temos que Φ é um $*$-homomorfismo injetor. Basta mostrar então que Φ é sobrejetor. Seja $\mu = (L, R) \in M(B)$. Como $C_0(X)$ é uma álgebra comutativa temos $L = R$ (veja exemplo 3.1.6). Assim basta mostrar que $L = L_h$ para algum $h \in C^b(X)$.

Fixe $x_0 \in X$ e $U \in \text{viz}(x_0)$. Suponha que $f \in C_0(X)$ é tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in U$. Seja $g \in C_0(X)$ tal que $g(x_0) = 1$ e $g(U^c) = 0$ (veja 1.2.10). Então note que

$$L(f)_{|x_0} = L(f)g_{|x_0} = L(fg)_{|x_0} = L(0)_{|x_0} = 0.$$

Daí $L(f)_{|x_0} = 0$ para todo $f \in C_0(X)$ com $f(x) = 0$ em algum $U \in \text{viz}(x_0)$.

Suponha agora que $f \in C_0(X)$ é tal que $f(x_0) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $V_n \in \text{viz}(x_0)$ tal que $|f(x)| < \frac{1}{n}$, para todo $x \in V_n$. Seja $U_n \in \text{viz}(x_0)$ tal que $\overline{U_n}$ é compacto e $U_n \subset \overline{U_n} \subset V_n$. Seja $g_n \in C_0(X)$ tal que ${g_n}_{|\overline{U_n}} = 0$ e ${g_n}_{|V_n^c} = 1$. Tome $f_n = fg_n$. Então ${f_n}_{|U_n} = 0$ e ${f_n}_{|V_n^c} = f_{|V_n^c}$. Note que $|f_n(x) - f(x)| = |f(x)(1 - g_n(x)| \leq \frac{2}{n}$, para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{2}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $f_n \to f$ em $C_0(X)$. Como L é limitado temos $L(f_n) \to L(f)$. Mas $L(f_n)_{|x_0} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim $L(f)_{|x_0} = 0$, para toda $f \in C_0(X)$ com $f(x_0) = 0$. Segue que $L(f)_{|x_0} = L(g)_{|x_0}$ se $f, g \in C_0(X)$ e $f(x_0) = g(x_0)$. Defina agora $h : X \to \mathbb{C}$ da seguinte forma: para $x \in X$ seja $f \in C_0(X)$ tal que $f(x) = 1$ e defina $h(x) = L(f)_{|x}$. Pela discussão acima h está bem definida. Vamos provar que $h \in C^b(X)$. De fato, primeiro note que se $f_x \in C_0(X)$ é tal que $\|f_x\| \leq 1$ e $f_x(x) = 1$ então

$$|h(x)| = |L(f_x)_{|x}| \leq \|L(f_x)\| \leq \|L\|\|f_x\| \leq \|L\|,$$

para todo $x \in X$. Isto diz que h é limitada. Agora fixe $x_0 \in X$. Seja $U \in \text{viz}(x_0)$ tal que $\overline{U}$ é compacto. Seja $f_{x_0} \in C_0(X)$ tal que ${f_{x_0}}_{|U} = 1$. Então para todo $x \in U$ temos $f_{x_0}(x) = 1$ e assim $h(x) = L(f_{x_0})_{|x}$. Como h coincide com uma função contínua numa vizinhança de x_0 então h é contínua em x_0. Logo $h \in C^b(X)$.

Finalmente tome $f \in C_0(X)$ arbitrária e $x \in X$. Seja $g \in C_0(X)$ tal que $g(x) = 1$. Então $h(x) = L(g)_{|x}$ e assim

$$L(f)_{|x} = L(f)g_{|x} = L(fg)_{|x} = L(gf)_{|x} = L(g)f_{|x} = L(g)_{|x}f_{|x} = h_{|x}f_{|x} = f(x)h(x),$$

para todo $x \in X$, ou seja $L(f) = fh$. Como f foi arbitrária temos $R = L = L_h = R_h$. ■

3.3 A Álgebra de Multiplicadores de $C_{00}(X)$

Iremos mostrar nesta seção que $M(C_{00}(X)) = C(X)$.

Teorema 3.3.1. Seja X um espaço localmente compacto. A aplicação

$$\Phi : C(X) \ni f \mapsto (L_f, R_f) \in M(C_{00}(X))$$

é um $*$-isomorfismo.

Prova: Pelo exemplo 3.1.11 e o teorema 3.1.15 temos que Φ é um $*$-homomorfismo injetor. Basta provar que Φ é sobrejetor. Para isso seja $(L, R) \in M(C_{00}(X))$. Como $C_{00}(X)$ é comutativo $L = R$. Fixe $U \subset X$ aberto tal que $\overline{U}$ é compacto. Seja $I_U = \{f \in C_{00}(X) : f_{|U^c} = 0\}$. Note que I_U é um ideal de $C_{00}(X)$ e é fácil ver que a aplicação

$$C_0(U) \ni g \mapsto \tilde{g} \in I_U,$$

onde $\tilde{g}$ denota a extensão por zero de g, é um $*$-isomorfismo. Mais ainda temos $L(I_U) \subset I_U$. De fato, seja $f \in I_U$. Suponha que $f \geq 0$. Então $f = \sqrt{f}\sqrt{f}$ e daí $L(f) = L(\sqrt{f})\sqrt{f} \in I_U$. Agora, se $f \in I_U$ é qualquer então escreva $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$, onde $f_i \in I_U$ e $f_i \geq 0$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Então como L é linear segue que $L(f) \in I_U$. Assim $L_U = L_{|I_U} : I_U \to I_U$ é um multiplicador de $I_U \cong C_0(U)$. Pelo teorema 3.2.1 existe $f_U \in C^b(U)$ tal que $L_U(g) = f_U g$, para toda $g \in C_0(U)$. Então para cada $U \subset X$ aberto, como $\overline{U}$ compacto existe $f_U \in C^b(U)$ tal que $L_U(g) = f_U g$, para toda $g \in C_0(U)$. Seja $x \in X$ arbitrário e tome $U \in \text{viz}(x)$ tal que $\overline{U}$ é compacto. Defina $F : X \to \mathbb{C}$ pondo $F(x) = f_U(x)$. Seja $V \in \text{viz}(x)$ tal que $\overline{V}$ é compacto. Seja $g \in I_{U \cap V} \subset I_U \cap I_V$ tal que $g(x) = 1$. Então note que

$$f_U(x) = f_U(x)g(x) = L_U(g)_{|x} = L(g)_{|x} = L_V(g)_{|x} = f_V(x)g(x) = f_V(x).$$

Assim F está bem definida. Vamos provar agora que $F \in C(X)$. Fixe $x_0 \in X$. Seja $U_0 \in \text{viz}(x_0)$, $\overline{U_0}$ compacto. Então para todo $x \in U_0$ temos $U_0 \in \text{viz}(x)$. Assim $F(x) = f_{U_0}(x)$, para todo $x \in U_0$. Seja $\epsilon > 0$ e tome $x_0 \in U \subset U_0$ tal que $|f_{U_0}(x) - f_{U_0}(x_0)| < \epsilon$, para todo $x \in U$. Então $|F(x) - F(x_0)| < \epsilon$, para todo $x \in U$. Logo $F \in C(X)$. Finalmente seja $f \in C_{00}(X)$ e $x \in X$. Seja $U \in \text{viz}(x)$ tal que $\overline{U}$ é compacto. Seja $g \in I_U$ tal que $g(x) = 1$. Então

$$L(f)_{|x} = L(f)g_{|x} = L(fg)_{|x} = L_U(fg)_{|x} = f_U(x)f(x)g(x) = F(x)f(x).$$

Logo $L(f) = Ff$ para todo $f \in C_{00}(X)$, ou seja $L = L_F$. ■

3.4 A Álgebra de Multiplicadores de $L_1(G)$

Provaremos nesta seção que $M(L_1(G)) = M(G)$. O leitor interessado pode encontrar mais sobre este fato em [9] ou [10].

Teorema 3.4.1. Seja G um grupo localmente compacto. Então a aplicação

$$\Phi : M(G) \ni \mu \mapsto (L_\mu, R_\mu) \in M(L_1(G)),$$

onde $L_\mu(f) = \mu * f$ e $R_\mu(f) = f * \mu$, para toda $f \in L_1(G)$ é um $*$-isomorfismo.

Prova: Pelo exemplo 3.1.12 e o teorema 3.1.15 segue que Φ é um $*$-homomorfismo injetivo. Basta provar que Φ é sobrejetivo. Seja $(L, R) \in M(L_1(G))$. Considere $A = C_0(G) \cap L_1(G)$. Em A introduza a estrutura algébrica de $C_0(G)$ e a norma

$$\|f\|_A = \|f\|_1 + \|f\|_\infty, \quad \forall\ f \in A.$$

Então A é uma $*$-álgebra de Banach. De fato é fácil ver que A é uma $*$-álgebra. Seja $\{f_n\}_n$ uma sequência de Cauchy em A. Então $\{f_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy em $C_0(G)$ e em $L_1(G)$. Assim existem $f \in C_0(G)$ e $g \in L_1(G)$ tais que $f_n \to f$ em $C_0(G)$ e $f_n \to g$ em $L_1(G)$. Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_k$ de $\{f_n\}_n$ tal que $f_{n_k}(x) \to g(x)$ para λ-quase todo $x \in G$ (veja A.1.27). Segue que $f(x) = g(x)$ para quase todo $x \in G$. Assim $f = g$ em $L_1(G)$. Então $f_n \to f$ em $L_1(G)$. Segue que $f_n \to f$ em A. Logo A é um espaço de Banach. Agora note que para $f, g \in A$ temos

$$\|fg\|_A = \|fg\|_1 + \|fg\|_\infty = \int_G |f(x)g(x)|dx + \|fg\|_\infty \leq$$

$$\|f\|_1\|g\|_\infty + \|f\|_\infty\|g\|_\infty \leq \|f\|_A\|g\|_\infty \leq \|f\|_A\|g\|_A.$$

Assim A é uma $*$-álgebra de Banach.

Se $f \in L_1(G)$ e $g \in A$ então segue do teorema 2.2.15 que $f * g \in C_0(G)$, ou seja $L_1(G) * A \subset A$. Seja agora $f \in A$ e $\epsilon > 0$. Como $f \in C_0(G)$, f é uniformemente contínua à direita e assim existe $U \in \text{viz}(e)$ tal que $U^{-1} = U$, $\overline{U}$ é compacto e

$$|f(s) - f(t)| < \epsilon, \quad \forall\ st^{-1} \in U.$$

Assim se $y \in U$ temos $|f(y^{-1}x) - f(x)| < \epsilon$, para todo $x \in G$. Tome $f_U = \frac{1_U}{\lambda(U)}$. Então $f_U \in L_1(G)$ e temos

$$|(f_U * f)(x) - f(x)| = |\int_G f_U(y)f(y^{-1}x)dy - f(x)| = |\int_U f_U(y)[f(y^{-1}x) - f(x)]dy| \leq$$

$$\int_U f_U(y)|f(y^{-1}x) - f(x)|dy \leq \epsilon,$$

para todo $x \in G$. Assim $\|f_U * f - f\|_\infty \leq \epsilon$. Bom, já sabemos que a net $\{f_U\}_{U \in I}$, onde $I = \{U \in \text{viz}(e) : U^{-1} = U \text{ e } \overline{U} \text{ é compacto}\}$, é uma unidade aproximada para $L_1(G)$ (veja demonstração do teorema 2.2.22). Logo existe $V \in I$ tal que $\|f_V * f - f\|_1 < \epsilon$. Tomando $W = U \cap V$ temos que $\|f_W * f - f\|_A < \epsilon$. Logo $L_1(G) * A$ é denso em A. Pelo teorema de Cohen-Hewit (veja teorema 32.22, pg 268 de [2]), para toda $f \in A$ e para todo $\epsilon > 0$, existem $g \in L_1(G)$ e $h \in B$ tal que

(i) $f = g * h$,

(ii) $\|g\|_1 \leq 1$,

(iii) $\|f - h\|_A < \epsilon$.

Em particular para $f \in C_{00}(G)$ existem $g \in L_1(G)$ e $h \in A$ tal que $f = g * h$. Daí, $L(f) = L(g * h) = L(g) * h \in L_1(G) * A$. Em particular $L(f)$ é uma funcão contínua para toda $f \in C_{00}(G)$. Assim fica bem definido o funcional

$$\Phi : C_{00} \ni f \mapsto L(f_*)(e) \in \mathbb{C}.$$

Afirmamos que $\Phi \in C_{00}^*(G)$. De fato, é fácil ver que Φ é linear. Seja $f \in C_{00}(G) \subset A$ e $\epsilon > 0$. Então $f_* = g * h$, onde $g \in L_1(G)$, $\|g\|_1 \leq 1$ e $h \in B$, com $\|f_* - h\|_A < \epsilon$. Daí,

$$|L(f_*)(e)| \leq \|L(f_*)\|_\infty = \|L(g) * h\|_\infty \leq \|L(g)\|_1 \|h\|_\infty \leq$$

$$\|L\|\|g\|_1\|h - f_* + f_*\|_\infty \le \|L\|(\|h - f_*\|_\infty + \|f_*\|_\infty) \le \|L\|(\epsilon + \|f\|_\infty),$$

para todo $\epsilon > 0$. Segue que $|L(f_*)(e)| \le \|L\|\|f\|_\infty$. Logo $\Phi \in C_{00}^*(G)$. Por outro lado, como $C_{00}(G)$ é denso em $C_0(G)$ temos que $C_{00}^*(G) \cong C_0^*(G) \cong M(G)$. Assim existe $\mu \in M(G)$ tal que

$$\Phi(f) = \int_G f d\mu,$$

isto é,

$$L(f_*)(e) = \int_G f d\mu,$$

para toda $f \in C_{00}(G)$. Note agora que para $f \in L_1(G)$ temos

$$\Delta(x^{-1})(f * \delta_{x^{-1}})(e) = \Delta(x^{-1}) \int_G \Delta(y^{-1}) f(ey^{-1}) d\delta_{x^{-1}}(y) =$$

$$\Delta(x^{-1})\Delta(x)f(x) = f(x),$$

para λ-quase todo $x \in G$. Assim para $f \in C_{00}(G)$ temos

$$L(f)(x) = \Delta(x^{-1})(L(f) * \delta_{x^{-1}})(e),$$

para λ-quase todo $x \in G$. Note agora que $L(f) * \delta_x = L(f * \delta_x)$, para todo $x \in G$. De fato, para cada $x \in G$, defina as aplicações

$$L_x : L_1(G) \to L_1(G); \quad L_x(f) = \delta_x * f =_{x^{-1}} f$$

e

$$R_x : L_1(G) \to L_1(G); \quad R_x(f) = f * \delta_x = \Delta(x^{-1}) f_{x^{-1}}.$$

É fácil ver que o par $(L_x, R_x) \in M(L_1(G))$. Agora note que a álgebra $L_1(G)$ é "superassociativa", ou seja, se $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in M(L_1(G))$ então $L_1 R_2 = R_2 L_1$. De fato, por Cohen-Hewit novamente temos que $L_1(G)$ é idenpotente, ou seja, para toda $f \in L_1(G)$, existem $g, h \in L_1(G)$ tal que $f = g * h$. Daí,

$$L_1 R_2(f) = L_1 R_2(g * h) = L_1(g * R_2(h)) = L_1(g) R_2(h) =$$

$$R_2(L_1(g) * h) = R_2(L_1(g * h)) = R_2 L_1(f).$$

Em particular temos $LR_x = R_x L$, isto é, $L(f * \delta_x) = L(f) * \delta_x$ para toda $f \in L_1(G)$.

Assim

$$L(f)(x) = \Delta(x^{-1})L(f) * \delta_{x^{-1}}(e) = \Delta(x^{-1})L(f * \delta_{x^{-1}})(e) =$$

$$= \Delta(x^{-1}) \int_G (f * \delta_x^{-1})(y^{-1})d\mu(y) = \Delta(x^{-1}) \int_G \int_G \Delta(z^{-1})f(y^{-1}z^{-1})d\delta_{x^{-1}}(z)d\mu(y)$$

$$= \Delta(x^{-1}) \int_G \Delta(x)f(y^{-1}x)d\mu(y) = \int_G f(y^{-1}x)d\mu(y) = (\mu * f)(x),$$

para λ-quase todo $x \in G$. Logo $L(f) = \mu * f$, para toda $f \in C_{00}(G)$. Segue que $L(f) = \mu * f$, para toda $f \in L_1(G)$, ou seja, $L = L_\mu$. Agora note que

$$R(f) * g = f * L(g) = f * L_\mu(g) = f * \mu * g = R_\mu(f) * g,$$

para todos $f, g \in L_1(G)$. Segue do teorema 2.2.22 que $R(f) = R_\mu(f)$, para todo $f \in L_1(G)$, isto é, $R = R_\mu$. Assim $(L, R) = (L_\mu, R_\mu)$ e portanto a aplicação

$$M(G) \ni \mu \mapsto (L_\mu, R_\mu) \in M(L_1(G))$$

é um $*$-isomorfismo. Assim podemos escrever: $M(L_1(G)) = M(G)$. ■

Capítulo 4

Representações

Neste capítulo estudaremos a conexão entre representações unitárias de um grupo localmente compacto G e as $*$-representações de $M_a(G)$, ou seja, as $*$-representações de $L_1(G)$. Podemos citar [1] ou [3] como referências mais detalhadas sobre representações de álgebras e grupos.

4.1 Representações de Álgebras

Definição 4.1.1. Seja A uma álgebra. Uma **representação** de A sobre um espaço de Hilbert H é uma aplicação linear $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ que também é um homomorfismo. Isto é, para cada $x \in A$, $\pi(x)$ é um operador limitado sobre H, e para todos $x, y \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos $\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y)$, $\pi(\alpha x) = \alpha\pi(x)$ e $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$. Se A é uma $*$-álgebra, e se π satisfaz também a condição $\pi(x^*) = \pi(x)^*$, para todo $x \in A$ então π é chamada uma **$*$-representação** de A sobre H. Um subespaço M de H é dito **invariante** se $\pi(x)(M) \subset M$ para todo $x \in A$.

Teorema 4.1.2. Seja π uma $*$-representação de uma $*$-álgebra A sobre um espaço de Hilbert H. São equivalentes:

(i) o subespaço linear H_π de H gerado pelo conjunto $\{\pi(a)\xi : a \in A, \xi \in H\}$ é denso em H; e

(ii) se $\pi(a)\xi = 0$ para todo $a \in A$ então $\xi = 0$.

Se em adição, A tem unidade então os itens acima também são equivalentes à:

(iii) $\pi(1) = 1_H$, onde 1 é a unidade de A e 1_H é o operador identidade sobre H.

Prova: Suponha que (i) vale. Seja $\xi \in H$ tal que $\pi(a)\xi = 0$, para todo $a \in A$. Então para todo $\eta \in H$ e $a \in A$ temos

$$\langle \pi(a)\eta, \xi \rangle = \langle \eta, \pi(a)^*\xi \rangle = \langle \eta, \pi(a^*)\xi \rangle = 0.$$

Em outras palavras, $\xi \in H_\pi^\perp$. Mas H_π é denso em H e portanto $H_\pi^\perp = \{0\}$. Logo $\xi = 0$ e portanto (ii) vale.

Suponha agora que (ii) vale. Seja $\xi \in H_\pi^\perp$. Então para todo $a \in A$ e $\eta \in H$ temos

$$\langle \pi(a)\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \pi(a^*)\eta \rangle = 0,$$

ou seja, $\pi(a)\xi = 0$, para todo $a \in A$. Por hipótese, temos $\xi = 0$. Isto mostra que $H_\pi^\perp = 0$. Logo H_π é denso em H e isto mostra que (i) vale.

Suponha agora que A tem unidade e que vale (i). Então para $a \in A$ e $\xi \in H$ temos $\pi(1)\pi(a)\xi = \pi(1 \cdot a)\xi = \pi(a)\xi$. Segue que $\pi(1)\eta = \eta$ para todo $\eta \in H_\pi$. Mas por hipótese H_π é denso em H. Logo $\pi(1) = 1_H$ e portanto vale (iii).

É claro que (iii) implica (i). ■

Definição 4.1.3. Uma $*$-representação de uma $*$-álgebra é dita **não-degenerada** se satisfaz as condições (i) e (ii) do teorema acima.

Definição 4.1.4. Uma representação π de uma álgebra A sobre um espaço de Hilbert H é dita **cíclica** se existe um vetor $\xi \in H$ tal que o subespaço linear $\{\pi(a)\xi : a \in A\}$ é denso em H. O vetor ξ é chamado **vetor cíclico**.

Óbviamente toda $*$-representação cíclica é não-degenerada.

Teorema 4.1.5. Seja π uma $*$-representação não-degenerada de uma $*$-álgebra A sobre um espaço de Hilbert H. Então H é a soma direta de subespaços, $\{H_i\}_i$, que são fechados, dois a dois ortogonais, e invariantes sob π e tal que π, restrita a H_i, é cíclica para todo i. Para $\xi \in H$, seja ξ_i a projeção de ξ em H_i. Então $\pi(a)\xi = \sum_i \pi(a)\xi_i$.

Prova: Veja teorema 21.13, página 315 de [1]. ■

Definição 4.1.6. Seja A uma $*$-álgebra. Um **funcional linear positivo** é um funcional linear $p : A \to \mathbb{C}$ que satifaz:

$$p(a^*a) \geq 0, \quad \text{para todo } a \in A.$$

Exemplo 4.1.7. Suponha que A é uma $*$-álgebra, que π é uma $*$-representação de A sobre um espaço de Hilbert H, e que ξ é um vetor de H. Então a funcão $p(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi\rangle$ é um funcional linear positivo sobre A.

Lema 4.1.8. Seja A uma $*$-álgebra de Banach, B um $*$-ideal (não necessariamente fechado) de A, e p um funcional linear positivo sobre B. Então

$$|p(b^*ab)| \leq \|a\|p(b^*b),$$

para todo $a \in A$ e $b \in B$.

Prova: Ver corolário 18.14, página 474 de [3]. ■

Teorema 4.1.9. Seja B uma $*$-álgebra de Banach e suponha que A é uma $*$-álgebra que contém B como ideal. Seja $\pi : B \to \mathcal{L}(H)$ uma $*$-representação não-degenerada. Então existe uma única $*$-representação $\tilde{\pi} : A \to \mathcal{L}(H)$ que extende π.

Prova: Suponha primeiro que π é cíclica com vetor cíclico $\xi_0 \in H$. Então $H_0 = \{\pi(x)\xi_0 : x \in B\}$ é um subespaço denso em H.

Para $a \in A$ defina $\tilde{\pi}(a)(\pi(x)\xi_0) = \pi(ax)\xi_0$, para todo $x \in B$. Temos que

$$\|\tilde{\pi}(a)(\pi(x)\xi_0)\|^2 = \|\pi(ax)\xi_0\|^2 =$$

$$\langle \pi(ax)\xi_0, \pi(ax)\xi_0\rangle = \langle \pi(x^*a^*ax)\xi_0, \xi_0\rangle.$$

Se $p : B \to \mathbb{R}_+$; $p(x) = \langle \pi(x)\xi_0, \xi_0\rangle$ segue que p é um funcional linear positivo. Daí pelo lema 4.1.8 $p(x^*a^*ax) \leq \|a^*a\|p(x^*x)$, ou seja,

$$\langle \pi(x^*a^*ax)\xi_0, \xi_0\rangle \leq \|aa^*\|\langle \pi(x^*x)\xi_0, \xi_0\rangle = \|a^*a\|\|\pi(x)\xi_0\|^2.$$

Segue que $\|\tilde{\pi}(a)(\pi(x)\xi_0)\| \leq \|a^*a\|^{\frac{1}{2}}\|\pi(x)\xi_0\|$. Assim $\tilde{\pi}(a) : H_0 \to H_0$ está bem definido e é um operador linear e limitado. Assim existe única extensão de $\tilde{\pi}(a)$ sobre H que continuaremos denotando por $\tilde{\pi}(a) : H \to H$ e temos $\tilde{\pi}(a) \in \mathcal{L}(H)$. Como $a \in A$ foi arbitrário temos definida uma aplicação $\tilde{\pi} : A \to \mathcal{L}(H)$ tal que $\tilde{\pi}(a)(\pi(x)\xi_0) = \pi(ax)\xi_0$, para todo $a \in A$ e para todo $x \in B$.

É fácil ver que $\tilde{\pi}$ é uma $*$-representação e para $b \in B$ temos

$$\tilde{\pi}(b)(\pi(x)\xi_0) = \pi(ba)\xi_0 = \pi(b)(\pi(x)\xi_0),$$

ou seja, $\tilde{\pi}(b) = \pi(b)$ em H_0. Segue que $\tilde{\pi}(b) = \pi(b)$ em H. Assim $\tilde{\pi}$ extende π.

Suponha que $\tilde{\tilde{\pi}} : A \to \mathcal{L}(H)$ é outra $*$-representação que extende π. Então para $a \in A$ e $x \in B$ temos

$$\tilde{\tilde{\pi}}(a)(\pi(x)\xi_0) = \tilde{\tilde{\pi}}(a)(\tilde{\tilde{\pi}}(x)\xi_0) =$$

$$\tilde{\tilde{\pi}}(ax)\xi_0 = \pi(ax)\xi_0 = \tilde{\pi}(a)(\pi(x)\xi_0),$$

ou seja, $\tilde{\tilde{\pi}}(a) = \tilde{\pi}(a)$ em H_0, para todo $a \in A$. Segue que $\tilde{\tilde{\pi}}(a) = \tilde{\pi}(a)$ em H, para todo $a \in A$, ou seja $\tilde{\tilde{\pi}} = \tilde{\pi}$.

O caso não cíclico agora segue do teorema 4.1.5. ■

Exemplo 4.1.10. Seja B qualquer $*$-álgebra de Banach com unidade aproximada. Então $M(B)$ (a álgebra de Multiplicadores de B) é uma $*$-álgebra de Banach que contém B como ideal (veja observação 3.1.14). Assim pelo teorema acima qualquer $*$-representação não-degenerada de B se extende univocamente a uma $*$-representação de $M(B)$.

4.2 Representações de Grupos

Definição 4.2.1. Uma **representação unitária** de G sobre um espaço de Hilbert H é uma aplicação $V : G \ni x \mapsto V_x \in \mathcal{U}(H)$ (onde $\mathcal{U}(H)$ denota o conjunto dos operadores unitários sobre H) tal que

(i) $V_e = 1_H$, (onde 1_H denota o operador identidade sobre H);

(ii) $V_{xy} = V_x V_y$, para todos $x, y \in G$.

Um representação unitária V de G sobre H é chamada **cíclica** se existe um vetor $\xi \in H$ tal que o subespaço gerado pelo conjunto $\{V_x\xi : x \in G\}$ é denso em H.

Observação 4.2.2. Note que se $V : G \to \mathcal{U}(H)$ é uma representação unitária, então

$$V_x^* = V_x^{-1} = V_{x^{-1}}$$

para todo $x \in G$. De fato, cada operador V_x é unitário e $V_x V_{x^{-1}} = V_e = 1_H$.

Teorema 4.2.3. As seguintes condições sobre uma representação unitária V de G sobre H são equivalentes:

(i) a função $G \ni x \mapsto \langle V_x\xi, \eta\rangle \in \mathbb{C}$ é Borel mensurável, para todos $\xi, \eta \in H$;

(ii) a função $G \ni x \mapsto V_x\xi \in H$ é Borel mensurável, para todo $\xi \in H$.

Prova: Fixe $\xi, \eta \in H$ e note que para todo $x \in G$, como $V_x \in \mathcal{U}(H)$, temos

$$\|V_x\xi - \eta\|^2 = \langle V_x\xi, V_x\xi\rangle - \langle V_x\xi, \eta\rangle - \langle \eta, V_x\xi\rangle + \langle \eta, \eta\rangle =$$

$$\langle \xi, \xi\rangle - 2Re\langle V_x\xi, \eta\rangle + \langle \eta, \eta\rangle.$$

Assim se $\delta > 0$ temos

$$\{x \in G : \|V_x\xi - \eta\|^2 < \delta\} = \{x \in G : 2Re\langle V_x\xi, \eta\rangle \ > \ \langle \xi, \xi\rangle + \langle \eta, \eta\rangle - \delta\}.$$

Isto mostra que (i) implica (ii). É claro que (ii) implica (i). ■

Definição 4.2.4. Uma representação unitária $V : G \to \mathcal{U}(H)$ satisfazendo as condições do teorema acima é dita **Borel mensurável**.

Teorema 4.2.5. As seguintes condições sobre uma representação unitária V de G sobre H são equivalentes:

(i) a função $G \ni x \mapsto \langle V_x\xi, \eta\rangle \in \mathbb{C}$ é contínua, para todos $\xi, \eta \in H$;

(ii) a função $G \ni x \mapsto V_x\xi \in H$ é contínua em e, para todo $\xi \in H$;

(iii) a função $G \ni x \mapsto V_x\xi \in H$ é contínua, para todo $\xi \in H$.

Prova: Fixe $\xi \in H$ e note que para todo $x \in G$, como $V_x \in \mathcal{U}(H)$, temos

$$\|V_x\xi - V_e\xi\|^2 = \|V_x\xi - \xi\|^2 =$$

$$= \langle V_x\xi, V_x\xi\rangle - \langle V_x\xi, \xi\rangle - \langle \xi, V_x\xi\rangle + \langle \xi, \xi\rangle = 2\langle \xi, \xi\rangle - 2Re\langle V_x\xi, \xi\rangle.$$

Isto mostra que (i) implica (ii). Para mostrar que (ii) implica (iii) basta notar que para $x, y \in G$ e $\xi \in H$ tem-se

$$\|V_x\xi - V_y\xi\| = \|V_y(V_{y^{-1}x}\xi - \xi)\| = \|V_{y^{-1}x}\xi - \xi\|.$$

Finalmente, é claro que (iii) implica (i). ∎

Definição 4.2.6. Uma representação unitária $V : G \to \mathcal{U}(H)$ satisfazendo as condições do teorema acima é dita **contínua**.

Teorema 4.2.7. Seja H um espaço de Hilbert separável e suponha que V é uma representação unitária de G sobre H. Então V é contínua se e somente se é Borel mensurável.

Prova: Suponha que V é Borel mensurável. Fixe $\xi \in H$ e $\epsilon > 0$. Seja

$$A = \{x \in G : \|V_x\xi - \xi\| < \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Por hipótese A é Boreliano e temos

$$A^{-1} = \{x^{-1} : x \in A\} = \{x^{-1} : \|V_x\xi - \xi\| < \frac{\epsilon}{2}\} = \{x^{-1} : \|V_x^*\xi - \xi\| < \frac{\epsilon}{2}\} =$$

$$= \{x^{-1} : \|V_{x^{-1}}\xi - \xi\| < \frac{\epsilon}{2}\} = \{x \in G : \|V_x\xi - \xi\| < \frac{\epsilon}{2}\} = A,$$

ou seja, A é simétrico. Se $x, y \in A$, então

$$\|V_{xy}\xi - \xi\| \leq \|V_{xy}\xi - V_x\xi\| + \|V_x\xi - \xi\| = \|V_y\xi - \xi\| + \|V_x\xi - \xi\| < \epsilon,$$

e assim $A^2 \subset \{x \in G : \|V_x\xi - \xi\| < \epsilon\}$. Sendo H um espaço métrico separável o subconjunto $\{V_x\xi : x \in G\}$ de H também é separável. Desta maneira existe uma sequência $\{x_n\}_n$ de elementos de G tal que $\{V_{x_n}\}_n$ é denso em $\{V_x\xi : x \in G\}$. Se $y \in G$, então para algum k, temos

$$\|V_{x_k}\xi - V_y\xi\| = \|\xi - V_{x_k^{-1}y}\xi\| < \frac{\epsilon}{2},$$

e portanto $y \in x_kA$. Em outras palavras, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_nA$. Segue que A contém um subconjunto compacto F tendo medida positiva. Pelo corolário 2.2.16, FF^{-1} contém uma vizinhança U de e, ou seja,

$$U \subset FF^{-1} \subset A^2 \subset \{x \in G : \|V_x\xi - \xi\| < \epsilon\}.$$

Isto mostra que a aplicação

$$G \ni x \mapsto V_x\xi \in H$$

é contínua em e, ou seja, que V é contínua.

É claro que se V é contínua então V é Borel mensurável. ■

Exemplo 4.2.8. Seja G um grupo localmente compacto não-discreto. Então G admite uma representação unitária, Borel mensurável e cíclica que não é contínua.

De fato, seja $l_2(G)$ o espaço de Hilbert de todas as funções ξ sobre G tais que $\sum_{x \in G} |\xi(x)|^2 < \infty$, com as operações pontuais e o produto interno $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{x \in G} \xi(x)\overline{\eta(x)}$. Seja δ a função em $l_2(G)$ tal que $\delta(e) = 1$ e $\delta(x) = 0$ para $x \neq e$. Para $x \in G$, seja $V_x\xi =_{x^{-1}} \xi$, ou seja, V_x é o operador sobre $l_2(G)$ tal que $V_x\xi(y) = \xi(x^{-1}y)$.

É fácil ver que V é uma representação unitária de G.

Note que $V_x\delta$ é a função sobre G cujo valor em x é 1 e zero em qualquer outro ponto de G. Segue que o subespaço gerado pelo conjunto $\{V_x\delta : x \in G\}$ é denso em $l_2(G)$, ou seja, V é cíclica com vetor cíclico δ.

Para $\xi, \eta \in l_2(G)$, sejam A e B conjuntos enumeráveis fora do qual ξ e η, respectivamente, se anulam. Note agora que

$$\langle V_x\xi, \eta \rangle = \sum_{y \in G} V_x\xi(y)\overline{\eta(y)} = \sum_{y \in G} \xi(x^{-1}y)\overline{\eta(y)}.$$

Daí é fácil ver que $\langle V_x\xi, \eta \rangle = 0$ para todo $x \notin BA^{-1}$. Sendo assim a representação é Borel mensurável. Agora, tomando ξ como sendo a função que é 1 em $x = e$ e 0 caso contrário, e $\eta = \xi$ temos que $\xi, \eta \in l_2(G)$ e pela fómula acima segue que $\langle V_x\xi, \eta \rangle$ vale 1 se $x = e$ e 0 caso contrário. Logo V não é contínua.

Teorema 4.2.9. Seja $V : G \to \mathcal{U}(H)$ uma representação unitária e Borel mensurável de G. Então para cada $\mu \in M_a(G)$ existe um único operador $\pi_\mu \in \mathcal{L}(H)$ tal que

$$\langle \pi_\mu \xi, \eta \rangle = \int_G \langle V_x\xi, \eta \rangle d\mu(x)$$

para todos $\xi, \eta \in H$. A aplicação

$$\pi : M_a(G) \ni \mu \mapsto \pi_\mu \in \mathcal{L}(H)$$

é uma $*$-representação de $M_a(G)$. Mais ainda, se V é contínua então π é não-degenerada.

Prova: Fixe $\mu \in M_a(G)$ e seja $B_\mu : H \times H \to \mathbb{C}$;

$$B_\mu(\xi, \eta) = \int_G \langle V_x \xi, \eta \rangle d\mu(x),$$

para todos $\xi, \eta \in H$. É fácil ver que B_μ é uma forma sesquilinear[1] e temos

$$|B_\mu(\xi, \eta)| \leq \int_G |\langle V_x \xi, \eta \rangle| d\mu(x) \leq \|\xi\| \|\eta\| \|\mu\|,$$

para todos $\xi, \eta \in H$. Segue que (veja proposição 2.4.4, página 45 de [6]) existe um único operador $\pi_\mu \in \mathcal{L}(H)$ tal que

$$\langle \pi_\mu \xi, \eta \rangle = B_\mu(\xi, \eta) = \int_G \langle V_x \xi, \eta \rangle d\mu(x),$$

para todos $\xi, \eta \in H$.

É claro que $\pi_{\mu+\nu} = \pi_\mu + \pi_\nu$ e $\pi_{\alpha\mu} = \alpha \pi_\mu$ para todos $\mu, \nu \in M_a(G)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Agora note que

$$\langle \pi_{\mu * \nu} \xi, \eta \rangle = \int_G \langle V_x \xi, \eta \rangle d\mu * \nu(x) = \int_G \int_G \langle V_{xy} \xi, \eta \rangle d\nu(y) d\mu(x) =$$

$$= \int_G \int_G \langle V_x V_y \xi, \eta \rangle d\nu(y) d\mu(x) = \int_G \int_G \langle V_y \xi, V_x^* \eta \rangle d\nu(y) d\mu(x) =$$

$$= \int_G \langle \pi_\nu \xi, V_x^* \eta \rangle d\mu(x) = \int_G \langle V_x \pi_\nu \xi, \eta \rangle d\mu(x) = \langle \pi_\mu \pi_\nu \xi, \eta \rangle,$$

para todos $\xi, \eta \in H$. Logo $\pi_{\mu * \nu} = \pi_\mu \pi_\nu$ para todos $\mu, \nu \in M_a(G)$. Também, note que

$$\langle \pi_{\mu^*} \xi, \eta \rangle = \int_G \langle V_x \xi, \eta \rangle d\mu^*(x) = \overline{\int_G \overline{\langle V_{x^{-1}} \xi, \eta \rangle} d\mu(x)} =$$

$$= \overline{\int_G \overline{\langle V_x^* \xi, \eta \rangle} d\mu(x)} = \overline{\int_G \langle V_x \eta, \xi \rangle d\mu(x)} =$$

$$= \overline{\langle \pi_\mu \eta, \xi \rangle} = \langle \pi_\mu^* \xi, \eta \rangle,$$

para todos $\xi, \eta \in H$. Logo $\pi_{\mu^*} = \pi_\mu^*$, para todo $\mu \in M_a(G)$. Portanto π é uma $*$-representação de $M_a(G)$.

Suponha agora que V é contínua. Provaremos que π é não-degenerada.

[1] Uma aplicação $B : X \times Y \to \mathbb{C}$, onde X, Y são espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$, é chamada uma **forma sesquilinear** se B é linear na primeira coordenada e conjugado-linear na segunda coordenada, isto é, $B(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{2} \beta_j y_j) = \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_i \overline{\beta_j} B(x_i, y_j)$, para todos $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$.

Suponha que $\xi \in H$ e $\pi_\mu \xi = 0$, para todo $\mu \in M_a(G)$. Então para todo $\eta \in H$ e $\mu \in M_a(G)$,

$$0 = \langle \pi_\mu \xi, \eta \rangle = \int_G \langle V_x \xi, \eta \rangle d\mu(x),$$

ou seja,

$$\int_G \langle V_x \xi, \eta \rangle f(x) dx = 0,$$

para toda $f \in L_1(G)$ e todo $\eta \in H$. Segue que $\langle V_x \xi, \eta \rangle = 0$, para todo $x \in G$ e todo $\eta \in H$. De fato, suponha que para algum $a \in G$ e $\eta \in H$ temos $\langle V_a \xi, \eta \rangle \neq 0$. Suponha, por exemplo que $Re\langle V_a \xi, \eta \rangle > 0$ (os outros casos são análogos). Seja $\alpha > 0$ e $U \in \text{viz}(a)$ tal que $\overline{U}$ é compacto e $Re\langle V_x \xi, \eta \rangle \geq \alpha$, para todo $x \in U$. Então $f = 1_U \in L_1(G)$ e temos

$$\int_G \langle V_x \xi, \eta \rangle f(x) dx = \int_U Re\langle V_x \xi, \eta \rangle dx + i \int_U Im\langle V_x \xi, \eta \rangle dx \neq 0.$$

Logo $\langle V_x \xi, \eta \rangle = 0$, para todo $x \in G$ e todo $\eta \in H$. Em particular, se $x = e$ e $\eta = \xi$ obtemos $\|\xi\|^2 = 0$, ou seja, $\xi = 0$. Logo π é uma $*$-representação não-degenerada de $M_a(G)$. ■

Teorema 4.2.10. Seja $\pi : M_a(G) \to \mathcal{L}(H)$ uma $*$-representação não-degenerada de $M_a(G)$. Então existe uma única representação unitária e contínua $V : G \to \mathcal{U}(H)$, tal que

$$\langle \pi_\mu \xi, \eta \rangle = \int_G \langle V_x \xi, \eta \rangle d\mu(x),$$

para todos $\xi, \eta \in H$ e $\mu \in M_a(G)$.

Prova: Sabemos que a álgebra de multiplicadores de $M_a(G)$ é $M(G)$. Assim existe uma única $*$-representação $\tilde{\pi} : M(G) \to \mathcal{L}(H)$ que extende π (veja 4.1.10) .

Defina $V_x = \tilde{\pi}(\epsilon_x)$, $x \in G$. Note primeiro que

$$V_{xy} = \tilde{\pi}(\epsilon_{xy}) = \tilde{\pi}(\epsilon_x * \epsilon_y) = \tilde{\pi}(\epsilon_x)\tilde{\pi}(\epsilon_y) = V_x V_y,$$

para $x, y \in G$. Como π é não-degenerada temos que $\tilde{\pi}$ também é não-degenerada. Assim $V_e = \tilde{\pi}(\epsilon_e) = 1_H$. Agora note que para $x \in G$ temos

$$V_x^* = \tilde{\pi}(\epsilon)^* = \tilde{\pi}(\epsilon_x^*) = \tilde{\pi}(\epsilon_{x^{-1}}) = V_{x^{-1}} = V_x^{-1}.$$

Assim $V_x \in \mathcal{U}(H)$ para todo $x \in G$. Logo $V : G \ni x \mapsto V_x \in \mathcal{U}(H)$ é uma representação unitária de G.

Mostraremos agora que V é contínua. Fixe $\xi \in H$ e $\mu \in M_a(G)$. Seja $f \in L_1(G)$ tal que $d\mu = f d\lambda$. Note que para $x \in G$ temos

$$\|V_x \pi_\mu \xi - \pi_\mu \xi\| = \|\pi_{\epsilon_x * \mu} \xi - \pi_\mu \xi\| \leq$$

$$\leq \|\epsilon_x * \mu - \mu\| \|\xi\| = \|_{x^{-1}} f - f\| \|\xi\|.$$

Isto mostra que a aplicação $G \ni x \mapsto V_x \pi_\mu \xi \in H$ é contínua para todo $\xi \in H$ e todo $\mu \in M_a(G)$. Por outro lado, como π é não-degenerada o espaço linear gerado pelo conjunto $\{\pi_\mu \xi : \xi \in H, \mu \in M_a(G)\}$ é denso em H. Segue daí que V é contínua.

Fixe agora $\xi, \eta \in H$. Então a aplicação $\mu \mapsto \langle \pi_\mu \xi, \eta \rangle$ pertence a $M_a(G)^* \cong L_1(G)^* \cong L_\infty(G)$. Assim existe $h \in L_\infty(G)$, tal que

$$\langle \pi_\mu \xi, \eta \rangle = \int_G h(y) d\mu(y).$$

Note que para $\nu \in M_a(G)$ temos

$$\langle V_x \pi_\nu \xi, \eta \rangle = \langle \pi_{\epsilon_x * \nu} \xi, \eta \rangle = \int_G h(y) d\epsilon_x * \nu(y) = \int_G h(xy) d\nu(y).$$

Assim, para $\mu \in M_a(G)$,

$$\int_G \langle V_x \pi_\nu \xi, \eta \rangle d\mu(x) = \int_G \int_G h(xy) d\nu(y) d\mu(x) = \int_G h(z) d\mu * \nu(z) = \langle \pi_\mu \pi_\nu \xi, \eta \rangle.$$

Como π é não-degenerada segue que

$$\langle \pi_\mu \xi, \eta \rangle = \int_G \langle V_x \xi, \eta \rangle d\mu(x),$$

para todos $\xi, \eta \in H$ e todo $\mu \in M_a(G)$.

Finalmente, suponha que $V^{(1)}$ e $V^{(2)}$ são representações unitárias e contínuas de G sobre H tal que

$$\int_G \langle V_x^{(1)} \xi, \eta \rangle d\mu(x) = \int_G \langle V_x^{(2)} \xi, \eta \rangle d\mu(x),$$

para todos $\xi, \eta \in H$ e todo $\mu \in M_a(G)$. Então o mesmo argumento usado no teorema 4.2.9 mostra que $\langle V_x^{(1)} \xi, \eta \rangle = \langle V_x^{(2)} \xi, \eta \rangle$ para todos $\xi, \eta \in H$ e todo $x \in G$. Logo $V_x^{(1)} = V_x^{(2)}$ para todo $x \in G$, isto é, $V^{(1)} = V^{(2)}$. ■

Teorema 4.2.11. Para $\mu \in M(G)$ e $\phi \in L_2(G)$, seja $\pi_\mu\phi = \mu * \phi$ (veja 2.2.10). Cada operador π_μ é um operador linear e limitado sobre o espaço de Hilbert $L_2(G)$, e a aplicação $\mu \mapsto \pi_\mu$ é uma $*$-representação fiel de $M(G)$, chamada a **representação regular** de $M(G)$.

Prova: A linearidade de π_μ é óbvia e a limitação segue do teorema 2.2.10. Para $\phi \in C_{00}(G)$, temos

$$(\mu * \nu) * \phi = \mu * (\nu * \phi)$$

para todos $\mu, \nu \in M(G)$, ou seja $\pi_{\mu*\nu}\phi = \pi_\mu(\pi_\nu\phi)$. Sendo que $C_{00}(G)$ é denso em $L_2(G)$ segue que $\pi_{\mu*\nu} = \pi_\mu\pi_\nu$. É fácil ver também que $\pi_{\mu+\nu} = \pi_\mu + \pi_\nu$ e $\pi_{\alpha\mu} = \alpha\pi_\mu$, para todos $\mu, \nu \in M(G)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Agora, para $\phi, \psi \in C_{00}(G)$ temos pelo corolário 2.2.8 que

$$\langle \phi, \pi_{\mu^*}\psi \rangle = \int_G \phi(x) \int_G \overline{\psi(yx)} d\mu(y) dx =$$

$$= \int_G \int_G \phi(x)\overline{\psi(yx)} dx d\mu(y) = \int_G \int_G \phi(y^{-1}x)\overline{\psi(x)} dx d\mu(y) =$$

$$= \int_G \int_G \phi(y^{-1}x) d\mu(y) \overline{\psi(x)} dx = \langle \pi_\mu\phi, \psi \rangle.$$

As duas aplicações acima de Fubini são justificadas fácilmente pois $\phi, \psi \in C_{00}(G)$. Sendo que $C_{00}(G)$ é denso em $L_2(G)$, segue que $\pi_{\mu^*} = \pi_\mu^*$, para todo $\mu \in M(G)$. Assim π é uma $*$-representação de $M(G)$. Seja agora, $\mu \in M(G)$, $\mu \neq 0$. Então existe $f \in C_{00}(G)$ tal que $\int_G f_* d\mu \neq 0$. A desigualdade

$$|\mu * f(y) - \mu * f(x)| \leq \|_{y^{-1}}(f_*) -_{x^{-1}} (f_*)\|_\infty \|\mu\|$$

e a continuidade uniforme a direita de f_* (veja teorema 1.1.23) mostram que $\mu * f$ é contínua; também temos

$$\mu * f(e) = \int_G f_* d\mu.$$

Desta maneira $\|\mu * f\|^2 = \int_G |\mu * f|^2 d\lambda$ é positivo, isto é, $\pi_\mu f$ é um elemento não-nulo de $L_2(G)$.

Logo π é uma $*$-representação fiel de $M(G)$. ∎

Corolário 4.2.12. A aplicação $\pi : L_1(G) \ni f \mapsto \pi_f \in \mathcal{L}(L_2(G))$, onde $\pi_f(\phi) = f * \phi$, é uma $*$-representação fiel e não-degenerada de $L_1(G)$, chamada a **representação regular** de $L_1(G)$.

Prova: Note que a representação em questão é a restrição sobre $L_1(G)$ da representação regular de $M(G)$. Logo π é uma $*$-representação fiel de $L_1(G)$ por 4.2.11. Falta provar que π é não-degenerada. Vamos provar o item (i) do teorema 4.1.2. Para isso basta mostrar que se $\phi \in C_{00}(G)$ e se $\{f_i\}$ é uma unidade aproximada de $L_1(G)$ então $f_i * \phi \to \phi$ em $L_2(G)$ (lembre que $C_{00}(G)$ é denso em $L_2(G)$). Mas de 2.2.15 segue que

$$\|f_i * \phi - \phi\|_\infty \leq \|f_i * \phi\|_\infty + \|\phi\|_\infty \leq \|f_i\|_1 \|\phi\|_\infty + \|\phi\|_\infty \leq 2\|\phi\|_\infty,$$

para todo i. Assim

$$\|f_i * \phi - \phi\|_2^2 = \int_G |f_i * \phi - \phi|^2 d\lambda \leq 2\|\phi\| \|f_i * \phi - \phi\|_1 \to 0.$$

Ou seja, $f_i * \phi \to \phi$ em $L_2(G)$. ■

Exemplo 4.2.13. Pelo corolário acima e por 4.2.10 existe uma representação unitária e contínua V de G sobre $L_2(G)$ tal que

$$\langle \pi_f * \phi, \psi \rangle = \langle f * \phi, \psi \rangle = \int_G \langle V_x \phi, \psi \rangle f(x) dx,$$

para todos $\phi, \psi \in L_2(G)$ e $f \in L_1(G)$. Mais ainda, pela demostração do teorema 4.2.10 temos que $V_x = \tilde{\pi}_{\epsilon_x}$, onde $\tilde{\pi}$ é a única extensão de π a $M(G)$. Então por unicidade $\tilde{\pi}$ deve ser a representação dada pelo teorema 4.2.11. Assim para $\phi \in L_2(G)$ temos

$$V_x \phi = \tilde{\pi}_{\epsilon_x} \phi = \epsilon_x * \phi =_{x^{-1}} \phi.$$

A representação unitária e contínua V é chamada a **representação regular** de G. Compare este exemplo com 4.2.8.

Exemplo 4.2.14. Seja $\chi : G \to S^1$ um homomorfismo, ou seja, $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$, para todos $x, y \in G$. Como S^1 pode ser identificado com $U(\mathbb{C})$, a aplicação $G \ni x \mapsto \chi(x) \in U(\mathbb{C})$ é uma representação unitária de G.

Recíprocamente, seja $V : G \to U(H)$ uma representação unitária de dimensão 1, ou seja, a dimensão de H é 1. Então existe $\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$, tal que todo $\eta \in H$ tem a forma $\eta = \alpha\xi$, onde $\alpha \in \mathbb{C}$. Assim, para cada $x \in G$, existe um número complexo, que denotaremos por $\chi(x)$, tal que $V_x \xi = \chi(x)\xi$. Como V_x é um operador unitário devemos ter que $|\chi(x)| = 1$, isto é, $\chi(x) \in S^1$. E como $V_{xy} = V_x V_y$ devemos ter $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$, para todos $x, y \in G$. Assim $\chi : G \to S^1$ é um homomorfismo. É fácil ver que V é contínua se, e somente se, χ é contínuo.

Desta maneira, existe uma correspondência natural entre os homomorfismos contínuos de G em S^1 e o conjunto das representações unitárias e contínuas unidimensionais de G. Quando o grupo G é abeliano o conjunto de todos os homomorfismos contínuos de G em S^1 será chamado o "dual" de G e será estudado em mais detalhes no próximo capítulo.

Suponha agora que $\chi : G \to S^1$ é um homomorfismo contínuo, ou seja, χ é uma representação unitária e contínua unidimensional de G. Vamos achar qual é a $*$-representação π da álgebra $L_1(G)$ associada a χ, como no teorema 4.2.9. Temos que

$$\langle \pi(f)\xi, \eta \rangle = \int_G \langle \chi(x)\xi, \eta \rangle f(x)dx = \left(\int_G \chi(x)f(x)dx \right) \langle \xi, \eta \rangle = \langle \left(\int_G \chi(x)f(x)dx \right) \xi, \eta \rangle,$$

para todos $\xi, \eta \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$. Assim $\pi(f)$ é o operador dado pela equação

$$\pi(f)\xi = \left(\int_G \chi(x)f(x)dx \right) \xi, \qquad (\xi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}).$$

Identificando $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ com $\mathbb{C}$, π passa a ser o homomorfismo de $L_1(G)$ em $\mathbb{C}$ dado pela equação

$$\pi(f) = \int_G \chi(x)f(x)dx.$$

Como $\chi(e) = 1$, existe $\alpha > 0$ e uma vizinhança U de e em G tal que $\overline{U}$ é compacto e $Re(\chi(x)) \geq \alpha$, para todo $x \in U$. Assim $f = 1_U \in L_1(G)$ e

$$\pi(f) = \int_G \chi(x)f(x)dx = \int_U \chi(x)dx = \int_U Re(\chi(x))dx + i \int_U Im(\chi(x))dx \neq 0.$$

A conclusão é que π é um elemento do espectro da álgebra $L_1(G)$ (veja A.3.10).

Exemplo 4.2.15. Fixe $t \in \mathbb{R}$ e seja $\chi : \mathbb{R} \to S^1$ definido por

$$\chi(x) = e^{-itx}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Então é fácil ver que χ é um homomorfismo contínuo. A $*$-representação π associada a χ como no exemplo acima é dada pela equação

$$\pi(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)dx, \qquad (f \in L_1(G), t \in \mathbb{R}).$$

Mas a equação acima é a definição da transformada de Fourier da função f avaliada no ponto t, ou seja, $\hat{f}(t)$. Assim π é o elemento do espectro da álgebra $L_1(\mathbb{R})$ dado por $\pi(f) = \hat{f}(t)$, para toda $f \in L_1(\mathbb{R})$.

Exemplo 4.2.16. Seja $V : \mathbb{R} \to \mathcal{U}(L_2(\mathbb{R}))$ a aplicação definida pela equação

$$(V_x\xi)(t) = e^{-itx}\xi(t), \qquad (x, t \in \mathbb{R}, \xi \in L_2(\mathbb{R}).$$

Então é fácil ver que V é uma representação unitária e contínua de $\mathbb{R}$ no espaço de Hilbert $L_2(\mathbb{R})$. Queremos calcular a $*$-representação não-degenerada π associada a V, como no teorema 4.2.9. Temos, para $f \in L_1(\mathbb{R})$ e $\xi, \eta \in L_2(\mathbb{R})$, que

$$\langle \pi(f)\xi, \eta \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle V_x\xi, \eta \rangle f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\xi(t)\overline{\eta(t)}dt \right) f(x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\xi(t)\overline{\eta(t)}f(x)dtdx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\xi(t)\overline{\eta(t)}f(x)dxdt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}f(x)dx \right) \xi(t)\overline{\eta(t)}dt.$$

Assim a $*$-representação $\pi : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$ é dada pela equação

$$(\pi(f)\xi)(t) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}f(x)dx \right) \xi(t) = \hat{f}(t)\xi(t), \qquad (f \in L_1(\mathbb{R}), \xi \in L_2(\mathbb{R}), t \in \mathbb{R}).$$

Portanto π é a $*$-representação que age sobre $L_2(\mathbb{R})$, multiplicando cada $\xi \in L_2(G)$ pela transformada de Fourier de $f \in L_1(\mathbb{R})$.

Existe uma generalização do exemplo acima para qualquer grupo abeliano. Esta generalização envolve o dual do grupo e a noção de transformada de Fourier de uma função integrável arbitrária definida sobre o grupo. Vamos explorar esta generalização mais tarde, depois de ter definido e estudado em mais detalhes estes conceitos.

Capítulo 5

Caracteres de Grupos Abelianos

Este capítulo é dedicado ao estudo de "caracteres" sobre grupos abelianos localmente compactos. Desta maneira, neste capítulo G denotará sempre um grupo topológico abeliano localmente compacto. Material extra sobre caracteres de grupos abelianos pode ser encontrado em [1].

5.1 O Grupo Caracter

Definição 5.1.1. Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Um **caracter** sobre G é um homomorfismo contínuo $\chi : G \to S^1$.

O conjunto de todos os caracteres sobre G será denotado por $\hat{G}$ e será também chamado o **dual** ou **grupo caracter** de G.

O dual $\hat{G}$ é de fato um grupo se definimos nele as operações pontuais. Desta maneira se $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$ então o produto $\chi_1\chi_2$ é definido como: $(\chi_1\chi_2)(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$ para todo $x \in G$.

Teorema 5.1.2. O dual de G é um grupo abeliano com relação ao produto pontual, onde o elemento identidade é a função identicamente 1 e o inverso de um elemento $\chi \in \hat{G}$ é $\overline{\chi} \in \hat{G}$.

Prova: Todas as afirmações são facilmente verificadas. ∎

Exemplo 5.1.3. Considere o grupo $G = \mathbb{Z}$. Provaremos agora que $\hat{G}$ é (isomorfo à) S^1. Note que se $\chi \in \hat{\mathbb{Z}}$ então $\chi(n) = \chi(1 + 1 + \ldots + 1) = \chi(1)\chi(1)\ldots\chi(1) = \chi(1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\chi(-n) = \chi(n)^{-1} = \chi(1)^{-n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim χ é completamente determinado por seu valor em $n = 1$ e $\chi(1)$ pode ser qualquer número em S^1.

Defina $\phi : S^1 \to \hat{G}$, pondo $\phi(z) = \chi_z$, onde $\chi_z(n) = z^n$. É facil ver que ϕ é um homomorfismo injetivo e pela discussão acima ϕ é sobrejetivo. Logo ϕ é um isomorfismo.

Exemplo 5.1.4. Considere agora a álgebra do grupo $\mathbb{Z}$, ou seja, a álgebra $A = l_1(\mathbb{Z}) = L_1(\mathbb{Z})$. Provaremos que o espectro de A, ou seja, o espaço localmente compacto $\hat{A}$ dos funcionais lineares não nulos e multiplicativos sobre A (veja A.3.10) é (homeomorfo à) S^1.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ seja $\epsilon_n = 1_{\{n\}} \in l_1(\mathbb{Z})$. Note que $\epsilon_n = \epsilon_1^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De fato, já vimos que $\epsilon_n * \epsilon_m = \epsilon_{n+m}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. Mais ainda, para cada $f \in l_1(\mathbb{Z})$ temos $f = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\epsilon_n$.

Seja $\phi \in \widehat{l_1(\mathbb{Z})}$ e seja $z = \phi(\epsilon_1)$. Como ϕ é multiplicativo temos $|z^n| = |\phi(\epsilon_n)| \leq \|\phi\|\|\epsilon_n\|_1 \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Segue que $z \in S^1$.

Defina $F : \widehat{l_1(\mathbb{Z})} \to S^1$ pondo $F(\phi) = \phi(\epsilon_1)$. Sejam $\phi, \psi \in \widehat{l_1(\mathbb{Z})}$ tais que $\phi(\epsilon_1) = \psi(\epsilon_1)$. Então para $f = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\epsilon_n \in l_1(\mathbb{Z})$ temos

$$\phi(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\phi(\epsilon_1)^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\psi(\epsilon_1)^n = \psi(f).$$

Segue daí que F é injetiva. Se $z \in S^1$, defina $\phi(f) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} f(n)z^n$. É fácil ver que $\phi \in \widehat{l_1(\mathbb{Z})}$ e temos $\phi(\epsilon_1) = z$. Logo F é uma bijeção.

Seja $\{\phi_i\}_{i \in I}$ uma net em $\widehat{l_1(\mathbb{Z})}$ e suponha que $\phi_i \to \phi \in \widehat{l_1(\mathbb{Z})}$. Então $\phi_i(f) \to \phi(f)$ em $\mathbb{C}$ para todo $f \in l_1(\mathbb{Z})$. Em particular $\phi_i(\epsilon_1) \to \phi(\epsilon_1)$. Isto mostra que F é contínua. Suponha agora que $\phi_i(\epsilon_1) \to \phi(\epsilon_1)$. Então $\phi_i(\epsilon_n) = \phi(\epsilon_1)^n \to \phi(\epsilon_1)^n = \phi(\epsilon_n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Segue que $\phi_i(f) \to \phi(f)$ para todo $f \in D = \{\sum\limits_{n \in K} \alpha_n\epsilon_n : K$ é um subconjunto finito de $\mathbb{Z}$ e $\alpha_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \in K\}$. Como $\|\psi\| \leq 1$ para todo $\psi \in \widehat{l_1(\mathbb{Z})}$ e D é denso em $l_1(\mathbb{Z})$ segue que $\phi_i(f) \to \phi(f)$ para todo $f \in l_1(\mathbb{Z})$. Logo F é um homeomorfismo.

Segue dos exemplos acima que existe uma bijeção entre $\hat{\mathbb{Z}}$ e $\widehat{l_1(\mathbb{Z})}$. Este resultado vale em geral como mostra o teorema a seguir. Note que não podemos perguntar se esta bijeção é um homeomorfismo pois não temos definida uma topologia em $\hat{G}$. Posteriormente definiremos uma topologia no qual esta bijeção é de fato um homeomorfismo. Mais ainda, com esta topologia $\hat{G}$ será um grupo topológico. Para começar precisamos de um lema, que por si só já é interessante. Uma consequência imediata desse lema diz que se um homomorfismo de G em S^1 é Borel mensurável então ele é necessariamente contínuo. Um demonstração alternativa para este fato pode ser encontrada na página 236, corolário 12.6 de [3].

Lema 5.1.5. Sejam G e H grupos topológicos localmente compactos. Seja λ a medida de Haar sobre G. Suponha que H é separável e seja $\tau : G \to H$ um homomorfismo que é Borel mensurável sobre algum $A \in B_G$, com $0 < \lambda(A) < \infty$. Ou seja, $\tau^{-1}(B) \cap A \in \mathcal{B}_G$ para todo $B \in \mathcal{B}_H$. Então τ é contínua sobre G.

Prova: Seja W_0 e W vizinhanças simétricas da identidade em H tal que $W^2 \subset W_0$. Seja $\{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ subconjunto enumerável e denso de H. Então $\bigcup_{n=1}^{\infty} Wy_n = H$. Assim $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau^{-1}(Wy_n) \cap A$. Como $0 < \lambda(A) < \infty$, existe algum n tal que

$$0 < \lambda(\tau^{-1}(Wy_n) \cap A) < \infty.$$

Pelo corolário 2.2.16, existe V, vizinhança da identidade em G, tal que

$$V \subset (\tau^{-1}(Wy_n) \cap A)(\tau^{-1}(Wy_n) \cap A)^{-1}.$$

Então para $x \in V$, temos $x = ab^{-1}$, onde $\tau(a) = w_1 y_n$ e $\tau(b) = w_2 y_n$, e onde $w_1, w_2 \in W$. Assim $\tau(x) = \tau(a)\tau(b)^{-1} = w_1 w_2^{-1} \in WW^{-1} = W^2 \subset W_0$. Desta maneira τ é contínua na identidade e portanto é contínua sobre G (veja teorema 1.1.24). ∎

Teorema 5.1.6. Para cada $\chi \in \hat{G}$ defina

$$\phi_\chi : L_1(G) \to \mathbb{C}; \quad \phi_\chi(f) = \int_G \overline{\chi(x)} f(x) dx$$

Então $\phi_\chi \in \widehat{L_1(G)}$. Reciprocamente, dado $\phi \in \widehat{L_1(G)}$ existe $\chi \in \hat{G}$ tal que $\phi = \phi_\chi$. Ou seja, a aplicação

$$\hat{G} \ni \chi \mapsto \phi_\chi \in \widehat{L_1(G)}$$

é uma bijeção.

Prova: Como χ é contínua temos em particular que χ é Borel mensurável. Também,

$$\int_G |\overline{\chi(x)} f(x)| dx = \int_G |f(x)| dx < \infty$$

Daí, $\overline{\chi} f \in L_1(G)$, para toda $f \in L_1(G)$. Assim ϕ_χ está bem definida. Note agora que se

$f, g \in L_1(G)$ então

$$\phi_\chi(f * g) = \int_G \overline{\chi(x)}(f * g)(x)dx = \int_G \overline{\chi(x)} \int_G g(y^{-1}x)f(y)dydx =$$

$$= \int_G (\int_G \overline{\chi(x)} g(y^{-1}x)dx)f(y)dy = \int_G (\int_G \overline{\chi(yx)} g(x)dx)f(y)dy =$$

$$= (\int_G \overline{\chi(y)} f(y)dy)(\int_G \overline{\chi(x)} g(x)dx) = \phi_\chi(f)\phi_\chi(g).$$

Assim ϕ_χ é um homomorfismo. Sendo $\chi(e) = 1$, existe U vizinhança de e em G tal que $\overline{U}$ é compacto e $Re\chi(x) \geq \frac{1}{2}$, para todo $x \in U$. Assim $f = 1_U \in L_1(G)$ e

$$\phi_\chi(f) = \int_U \overline{\chi} dx = \int_U Re\chi(x)dx - i\int_U Im\chi(x)dx \neq 0.$$

Logo $\phi_\chi \in \widehat{L_1(G)}$ (é claro que ϕ_χ é linear).

Suponha agora que $\phi \in \widehat{L_1(G)}$. Sejam $f, g \in L_1(G)$, com $\phi(f) \neq 0, \phi(g) \neq 0$, e seja $a \in G$. Note que, como G é abeliano (e assim unimodular) temos $g*({}_af) = (g_a)*f$. De fato, para λ-quase todo $x \in G$ temos

$$g*({}_af)(x) = \int_G g(y)({}_af)(y^{-1}x)dy = \int_G f(ay^{-1}x)g(y)dy = \int_G f(y^{-1}x)g(ya)dy = (g_a)*f(x).$$

Daí

$$\phi(g)\phi({}_af) = \phi(g *_a f) = \phi(g_a * f) = \phi(g_a)\phi(f).$$

Assim

$$\frac{\phi({}_af)}{\phi(f)} = \frac{\phi(g_a)}{\phi(g)}.$$

Fazendo $f = g$ na equação acima obtemos que $\phi({}_af) = \phi(f_a)$ e assim

$$\frac{\phi({}_af)}{\phi(f)} = \frac{\phi({}_ag)}{\phi(g)}.$$

Defina $\chi(a) = \frac{\phi({}_af)}{\phi(f)}$, para $a \in G$ e $f \in L_1(G)$, com $\phi(f) \neq 0$.

Se $\phi(g) = 0$ então $\phi({}_bg) = 0$ para todo $b \in G$. Para ver isso, escolha $f \in L_1(G)$ com $\phi(f) = 1$ e escreva

$$\phi({}_bg) = \phi(f)\phi({}_bg) = \phi(f *_b g) = \phi(f_b * g) = \phi(f_b)\phi(g) = 0.$$

Assim temos $\chi(a)\phi(g) = \phi({}_a g)$, para toda $g \in L_1(G)$. Então para $a, b \in G$ temos:

$$\chi(ab) = \phi({}_{(ab)}f) = \phi({}_a({}_b f)) = \chi(a)\phi({}_b f) = \chi(a)\chi(b)\phi(f) = \chi(a)\chi(b).$$

Sendo ϕ um funcional limitado (e $\|\phi\| \leq 1$) temos que

$$|\chi(a)| = |\phi({}_a f)| \leq \|\phi\| \|{}_a f\|_1 \leq \|{}_a f\|_1 = \|f\|_1.$$

Sendo $\chi(e) = 1$ segue que χ é um homomorfismo de G em S^1.

Agora provaremos que χ é contínuo. Temos que $L_1(G)^* \cong L_\infty(G)$. Assim existe uma função Borel mensurável e limitada h tal que

$$\phi(f) = \int_G f(x)h(x)dx.$$

Escolha $f \in L_1(G)$ tal que $\phi(f) = 1$. Seja E σ-compacto em G tal que $f(E^c) = 0$. Então $({}_x f)((x^{-1}E)^c) = ({}_x f)(x^{-1}E^c) = f(E^c) = 0$, para todo $x \in G$. Desta maneira para cada $x \in G$, temos

$$\begin{aligned}\chi(x) = \phi({}_x f) &= \int_{Gx} f(y)h(y)dy = \int_G 1_{x^{-1}E}(y)_x f(y)h(y)dy = \\ &= \int_G 1_E(xy)f(xy)dy = \int_G 1_E(y)f(y)h(x^{-1}y)dy.\end{aligned}$$

Agora seja F subconjunto compacto de G tal que $\lambda(F) > 0$. A função

$$(x, y) \mapsto 1_F(x)1_E(y)h(x^{-1}y)f(y) \tag{5.1}$$

é Borel mensurável, se anula fora do conjunto σ-compacto $F \times E$ e satisfaz

$$\int_G \int_G 1_F(x)1_E(y)|h(x^{-1}y)||f(y)|dydx \leq \|h\|_\infty \|f\|_1 \lambda(F) < \infty.$$

Segue que a função dada pela equação 5.1 pertence a $L_1(G \times G, \lambda \times \lambda) = L_1(G \times G)$. O teorema de Fubini agora implica que a função

$$x \to \int_G 1_F(x)1_E(y)h(x^{-1}y)f(y)dy = 1_f(x)\chi(x)$$

é Borel mensurável sobre G. Isto é, a função χ é Borel mensurável sobre F, e assim χ é contínua sobre G pelo lema 5.1.5.

Sejam $f, g \in L_1(G)$, com $\phi(g) = 1$. Sejam E, F σ-compactos em G tais que $f(E^c) = 0$ e $g(F^c) = 0$. Então EF é $\sigma-$compacto e $(f * g)((EF)^c) = 0$ e assim podemos escrever

$$\phi(f) = \phi(f)\phi(g) = \phi(f * g) = \int_G h(y)(f * g)(y)dy = \int_G 1_{EF}(y)h(y)(f * g)(y)dy =$$

$$= \int_G 1_{EF}(y)h(y) \int_G f(x)g(x^{-1}y)dxdy = \int_G \int_G 1_{EF}(y)h(y)f(x)g(x^{-1}y)dydx =$$

$$= \int_G \int_G 1_{EF}(xy)h(xy)f(x)g(y)dydx = \int_E (\int_G 1_{x^{-1}EF}(y)h(xy)g(y)dy)f(x)dx =$$

$$= \int_E (\int_G 1_F(y)h(xy)g(y)dy)f(x)dx = \int_E \chi(x^{-1})f(x)dx = \int_G \overline{\chi(x)}f(x)dx.$$

Logo $\phi = \phi_\chi$. Assim para provar que aplicação

$$\hat{G} \ni \chi \mapsto \phi_\chi \in \widehat{L_1(G)}$$

é uma bijeção, falta provar que ela é injetiva.

Sejam $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$ e suponha que $\chi_1 \neq \chi_2$, ou seja, que exista $a \in G$ tal que $\chi_1(a) \neq \chi_2(a)$. Suponha por exemplo que $Re\chi_1(a) > Re\chi_2(a)$. Então existe uma vizinhança U de a, com $\overline{U}$ compacto, e um número positivo $\alpha > 0$ tal que $Re\chi_1(x) - Re\chi_2(x) \geq \alpha$, para todo $x \in U$. Então $f = 1_U \in L_1(G)$ e temos

$$Re(\phi_{\chi_1}(f) - \phi_{\chi_2}(f)) = Re(\int_G (\overline{\chi_1(x)} - \overline{\chi_2(x)})f(x)dx) =$$

$$= \int_U (Re\chi_1(x) - Re\chi_2(x))dx \geq \alpha\lambda(U) > 0.$$

Logo $\phi_{\chi_1} \neq \phi_{\chi_2}$. Argumentos similares aplicam-se para os casos $Re\chi_1(a) < Re\chi_2(a)$ e $Im\chi_1(a) \neq Im\chi_2(a)$. ■

Temos que $\widehat{L_1(G)}$ é um espaço topológico localmente compacto com a topologia de Gelfand, ou seja, a menor topologia que torna todas as funções $\hat{f} : \widehat{L_1(G)} \to \mathbb{C}$; $\hat{f}(\phi) = \phi(f)$, contínuas. A partir da bijeção

$$\hat{G} \ni \chi \mapsto \phi_\chi \in \widehat{L_1(G)},$$

podemos olhar $\hat{f}$ como uma função definida em $\hat{G}$ fazendo

$$\hat{f}(\chi) = \hat{f}(\phi_\chi) = \phi_\chi(f) = \int_G \overline{\chi(x)} f(x)dx.$$

Ou seja, $\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{C}$ com $\hat{f}(\chi) = \int_G \overline{\chi(x)} f(x)dx$, para todo $\chi \in \hat{G}$ e $f \in L_1(G)$.

Definição 5.1.7. Seja G um grupo abeliano localmente compacto.

(i) Para cada $f \in L_1(G)$, a função $\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{C}$, dada por

$$\hat{f}(\chi) = \hat{f}(\phi_\chi) = \phi_\chi(f) = \int_G \overline{\chi(x)} f(x)dx.$$

é chamada a **transformada de Fourier** de f.

(ii) A $\Delta-$**topologia** em $\hat{G}$ é a menor topologia que torna todas as funções $\hat{f}$, $f \in L_1(G)$, contínuas. Uma base para esta topologia são os conjuntos da forma

$$\Delta(f_1, \ldots, f_n; \epsilon; \chi_0) = \{\chi \in \hat{G} : |\hat{f}_i(\chi) - \hat{f}_i(\chi_0)| < \epsilon, \ \forall\, i = 1, \ldots, n\},$$

onde $f_i \in L_1(G)$, $\epsilon > 0$, $\chi_0 \in \hat{G}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.1.8. Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Então:

(i) $\hat{G}$ com a Δ-topologia é um espaço topológico localmente compacto, e a função $\hat{G} \ni \chi \to \phi_\chi \in \widehat{L_1(G)}$ é um homeomorfismo e para cada $f \in L_1(G)$, temos $\hat{f} \in C_0(\hat{G})$.

(ii) a aplicação $\Gamma : L_1(G) \to C_0(\hat{G})$, onde $\Gamma(f) = \hat{f}$ é um $*$-homomorfismo contrativo.

Prova: Todas as afirmações seguem da definição da Δ-topologia e do teorema A.3.12. $\blacksquare$

O teorema acima diz que $\hat{G}$ com a Δ-topologia é um espaço topológico mas não um grupo topológico. O que acontece é que a Δ-topologia não é adequada para provar que $\hat{G}$ é um grupo topológico. Definiremos uma outra topologia em $\hat{G}$, chamada a P-topologia que coincide com a Δ-topologia mas que é mais adequada para se provar que $\hat{G}$ é um grupo topológico. Precisamos primeiro de um lema.

Lema 5.1.9. Seja $f \in L_1(G)$, e seja $\epsilon > 0$. Então existe uma vizinhança U de e dependendo de f e ϵ com a seguinte propriedade:

Se $x_0, x \in G$, $\chi_0, \chi \in \hat{G}$ são tais que $\hat{f}(\chi_0) = 1$, $x \in Ux_0$ e $\chi \in \Delta(f,_{x_0} f; \frac{\epsilon}{3}; \chi_0)$ então

$$|\chi(x) - \chi_0(x_0)| < \epsilon.$$

Em particular, a aplicação $(x, \chi) \mapsto \chi(x)$ de $G \times \hat{G}$ em S^1 é contínua.

Prova: Seja U vizinhança de e tal que $\|_s f -_t f\|_1 < \frac{\epsilon}{3}$ sempre que $st^{-1} \in U$. Para arbitrários $\chi_0, \chi \in \hat{G}$ e $x_0, x \in G$ tais que $\hat{f}(\chi_0) = 1$, temos

$$|\chi(x) - \chi_0(x_0)| = |\chi(x) - \chi_0(x_0)\hat{f}(\chi_0)| \leq$$

$$\leq |\chi(x) - \chi(x)\hat{f}(\chi)| + |\chi(x)\hat{f}(\chi) - \chi(x_0)\hat{f}(\chi)| + |\chi(x_0)\hat{f}(\chi) - \chi_0(x_0)\hat{f}(\chi_0)| =$$

$$= |1 - \hat{f}(\chi)| + |\widehat{(_x f)}(\chi) - \widehat{(_{x_0} f)}(\chi)| + |\widehat{(_{x_0} f)}(\chi) - \widehat{(_{x_0} f)}(\chi_0)|.$$

A última igualdade acima segue do fato que

$$\chi(x)\hat{f}(\chi) = \chi(x) \int_G \overline{\chi(y)} f(y) dy = \int_G \overline{\chi(x^{-1}y)} f(y) dy =$$

$$\int_G \overline{\chi(y)} f(xy) dy = \widehat{(_x f)}(\chi).$$

Como Γ é contrativa segue que

$$|\widehat{(_x f)}(\chi) - \widehat{(_{x_0} f)}(\chi)| \leq \|_x f -_{x_0} f\|_1.$$

Assim, se $(x, \chi) \in (Ux_0) \times (\Delta(f,_{x_0} f; \frac{\epsilon}{3}; \chi_0))$ temos

$$|\chi(x) - \chi_0(x_0)| < \epsilon.$$

Para provar que a aplicação $G \times \hat{G} \ni (x, \chi) \mapsto \chi(x) \in S^1$ é contínua, seja $\epsilon > 0$ e $(x_0, \chi_0) \in G \times \hat{G}$. Tome qualquer $f \in L_1(G)$ tal que $\hat{f}(\chi_0) = 1$ [por exemplo, seja $f_0 \in C_{00}^+(G)$ tal que $f_0(e) = 1$ e tome $f = \frac{\chi_0 f_0}{\int_G f_0(x) dx}$. Então $\hat{f}(\chi_0) = \int_G \overline{\chi_0(x)} f(x) dx = \int_G \frac{\overline{\chi_0(x)} \chi_0(x) f_0(x)}{\int_G f_0(x) dx} dx = 1$]. Agora aplique o resultado recém demonstrado para achar a vizinhança $V = (Ux_0) \times (\Delta(f,_{x_0} f; \frac{\epsilon}{3}; \chi_0))$ de (x_0, χ_0) em $G \times \hat{G}$ tal que

$$|\chi(x) - \chi_0(x_0)| < \epsilon, \text{ para todo } (x, \chi) \in V. \quad \blacksquare$$

Definição 5.1.10. Para todo conjunto compacto $F \subset G$ e todo $\epsilon > 0$, seja

$$P(F, \epsilon) = \{\chi \in \hat{G} : |\chi(x) - 1| < \epsilon,\ \forall\, x \in F\}.$$

Teorema 5.1.11. A família $\beta = \{P(F, \epsilon) : F \subset G \text{ compacto }, \epsilon > 0\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de $\chi = 1$ para alguma topologia sobre $\hat{G}$ (chame essa topologia de P), tal que $\hat{G}$ com a P-topologia é um grupo topológico. Mais ainda, a P-topologia coincide com a Δ-topologia. Assim $\hat{G}$ é um grupo topológico abeliano localmente compacto.

Prova: Primeiro vamos verificar que as condições (i)-(vi) do teorema 1.1.13 valem para a família β. Primeiro note que as condições (i),(iii) e (v) são triviais para β. Se $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$ são tais que $|\chi_1(x) - 1| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|\chi_2(x) - 1| < \frac{\epsilon}{2}$, então temos

$$|\chi_1(x)\chi_2(x) - 1| \leq |\chi_1(x)\chi_2(x) - \chi_2(x)| + |\chi_2(x) - 1| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

tal que $P(F, \frac{\epsilon}{2})P(F, \frac{\epsilon}{2}) \subset P(F, \epsilon)$. Isto verifica (ii). Se $\chi \in P(F, \epsilon)$, então $\max\{|\chi(x) - 1| : x \in F\} = \alpha < \epsilon$, sendo χ é contínua e F é compacto. É fácil ver que $\chi P(F, \epsilon - \alpha) \subset P(F, \epsilon)$. Isto é (iv). Dados $P(F, \epsilon)$ e $P(F_0, \epsilon_0)$ temos

$$P(F \cup F_0, \min(\epsilon, \epsilon_0)) \subset P(F, \epsilon) \cap P(F_0, \epsilon_0).$$

Logo (i)-(vi) do teorema 1.1.13 valem. Assim, pelo teorema 1.1.13, existe uma topologia sobre G, que chamamos de P, tal que G com esta topologia é um grupo topológico e β é um sistema fundamental de vizinhanças de 1 nesta topologia.

Agora provaremos que a P-topologia e a Δ-topologia coincidem. Note que pelo teorema 1.1.11 a família $\{\chi_0 P(F, \epsilon) : P(F, \epsilon) \in \beta, \chi_0 \in \hat{G}\}$ é uma base para a P-topologia. Suponha que F é um compacto de G, que ϵ é um número positivo e que $\chi_0 \in \hat{G}$. Seja $\chi \in \chi_0 P(F, \epsilon)$, ou seja $\chi_0^{-1}\chi \in P(F, \epsilon)$. Então $|\chi_0^{-1}(x)\chi(x) - 1| < \epsilon$, para todo $x \in F$. Assim $\alpha = \max_{x \in F} |\chi_0^{-1}(x)\chi(x) - 1| < \epsilon$. Note daí que $\chi_0^{-1}\chi P(F, \alpha) \subset P(F, \epsilon)$, ou seja, $\chi P(F, \alpha) \subset \chi_0 P(F, \epsilon)$. Seja $f \in L_1(G)$ tal que $\int_G f d\lambda = \hat{f}(1) = 1$, e seja $U \in \text{viz}(e)$ como no teorema 5.1.9. Sendo F é compacto, existem $x_1, \ldots, x_n \in F$ tais que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} Ux_i$. Agora suponha que $\chi \in \Delta(f,_{x_1} f,_{x_2} f, \ldots,_{x_n} f; \frac{\alpha}{3}; 1)$. Para todo $x \in F$ temos $x \in Ux_k$, para algum $k = 1, \ldots, n$ e $\chi \in \Delta(f,_{x_k} f; \frac{\epsilon}{3}; 1)$. Aplicando agora o teorema 5.1.9, inferimos que $|\chi(x) - 1| < \alpha$, isto é, $\chi \in P(F, \alpha)$. Assim $\Delta(f,_{x_1} f,_{x_2} f, \ldots,_{x_n} f; \frac{\alpha}{3}; 1) \subset P(F, \alpha)$.

Portanto

$$\Delta(\chi f, \chi({}_{x_1}f), \chi({}_{x_2}f), \ldots, \chi({}_{x_n}f); \frac{\epsilon}{3}; \chi) =$$

$$= \chi\Delta(f, {}_{x_1}f, \ldots, {}_{x_n}f; \frac{\alpha}{3}; 1) \subset \chi P(F, \alpha) \subset \chi_0 P(F, \epsilon).$$

Isto mostra que $\chi_0 P(F, \epsilon)$ é aberto na Δ-topologia, para todo $F \subset G$ compacto, todo $\epsilon > 0$ e todo $\chi_0 \in \hat{G}$. Sejam agora $f_1, \ldots, f_n \in L_1(G)$, $\delta > 0$ e $\chi_0 \in \hat{G}$. Tome $\chi_1 \in \Delta(f_1, \ldots, f_n; \delta; \chi_0)$. Então $|\hat{f}_i(\chi_1) - \hat{f}_i(\chi_0)| < \delta$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Seja $\epsilon = \max_{i=1,\ldots,n}|\hat{f}_i(\chi_1) - \hat{f}_i(\chi_0)|$. Então $\epsilon < \delta$. Tome $\alpha = \delta - \epsilon$. Se $\chi \in \Delta(f_1, \ldots, f_n; \alpha; \chi_1)$ então

$$|\hat{f}_i(\chi) - \hat{f}_i(\chi_0)| \leq |\hat{f}_i(\chi) - \hat{f}_i(\chi_1)| + |\hat{f}_i(\chi_1) - \hat{f}_i(\chi_0)| < \alpha + \epsilon = \delta,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim $\chi_1 \in \Delta(f_1, \ldots, f_n; \alpha; \chi_1) \subset \Delta(f_1, \ldots, f_n; \delta; \chi_0)$. Podemos supor que $f_i \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Tome $F \subset G$ compacto tal que

$$\int_{F^c} |f_i| d\lambda < \frac{\alpha}{4},$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Seja $\epsilon_0 = \frac{\alpha}{2}\min(\frac{1}{\|f_1\|_1}, \ldots, \frac{1}{\|f_n\|_1})$. Então, se $\chi \in P(F, \epsilon_0)$, podemos escrever

$$|\widehat{\chi_1^{-1} f_i}(\chi) - \widehat{\chi^{-1} f_i}(1)| = |\int_G \chi_1^{-1} f_i \overline{\chi} d\lambda - \int_G \chi_1^{-1} f_i d\lambda| \leq$$

$$\leq \int_F |f_i||\chi - 1| d\lambda + \int_{F^c} |f_i||\chi - 1| d\lambda \leq$$

$$\leq \epsilon_0 \int_F |f_i| d\lambda + 2\int_{F^c} |f_i| d\lambda < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha.$$

Desta maneira $P(F, \epsilon_0) \subset \Delta(\chi_1^{-1} f_1, \ldots, \chi_1^{-1} f_n; \alpha; 1)$. Ou seja,

$$\chi_1 P(F, \epsilon_0) \subset \Delta(f_1, \ldots, f_n; \alpha; \chi_1) \subset \Delta(f_1, \ldots, f_n; \delta; \chi_0).$$

Isto motra que $\Delta(f_1, \ldots, f_n; \delta; \chi_0)$ é aberto na P-topologia. Logo a P-topologia coincide com a Δ-topologia e portanto $\hat{G}$ é um grupo topológico abeliano localmente compacto. ■

Observação 5.1.12. Note que pelo teorema 5.1.11, uma net $\{\chi_i\}_i$ em $\hat{G}$ converge para $\chi \in \hat{G}$ se, e somente se, $\{\chi_i\}_i$ converge uniformemente para χ sobre compactos - significando que para todo $\epsilon > 0$ e todo $F \subset G$ compacto, existe i_0 tal que

$$|\chi_i(x) - \chi(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in F, \quad \forall i \geq i_0.$$

Teorema 5.1.13. Se G é compacto, então $\hat{G}$ é discreto. Se G é discreto então $\hat{G}$ é compacto.

Prova: Suponha primeiro que G é compacto. Seja A um subgrupo de S^1 e suponha que $|z-1| < \sqrt{3}$ para todo $z \in A$. Então é fácil ver que $A = \{1\}$. Desta maneira, como G é compacto então $P(G, \sqrt{3}) = \{1\}$. De fato, se $\chi \in P(G, \sqrt{3})$ então $\chi(G)$ é um subgrupo de S^1 e $|z-1| < \sqrt{3}$, para todo $z \in \chi(G)$. Isto implica que $\chi(G) = \{1\}$, ou seja, $\chi = 1$. Logo $P(G, \sqrt{3}) = \{1\}$ é um aberto em $\hat{G}$. Segue que $\hat{G}$ é discreto.

Se G é discreto então $L_1(G)$ tem uma unidade, a saber, a função $f = 1_{\{e\}}$. Logo $\hat{G} \cong \widehat{L_1(G)}$ é compacto pelo teorema A.3.12. ■

Teorema 5.1.14. Sejam $G_1, \ldots, G_n$ grupos topológicos abelianos localmente compactos. Para $(\chi_1, \ldots, \chi_n) \in \hat{G}_1 \times \ldots \times \hat{G}_n$ defina

$$[\chi_1, \ldots, \chi_n] : G_1 \times \ldots \times G_n \to \mathbb{C}; \quad [\chi_1, \ldots, \chi_n](x_1, \ldots, x_n) = \chi_1(x_1)\chi_2(x_2)\ldots\chi_n(x_n).$$

Então a aplicação

$$\theta : \hat{G}_1 \times \ldots \times \hat{G}_n \to (G_1 \times \ldots \times G_n)\hat{} \quad \theta(\chi_1, \ldots, \chi_n) = [\chi, \ldots, \chi_n],$$

é um isomorfismo topológico (ou seja, um isomorfismo que também é um homeomorfismo).

Prova: É óbvio que cada função $[\chi_1, \ldots, \chi_n] \in (G_1 \times \ldots \times G_n)\hat{}$. Assim θ está bem definida. É fácil ver que θ é um homomorfismo injetivo. Seja $\psi \in (G_1 \times \ldots \times G_n)\hat{}$. Então para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in G_1 \times \ldots \times G_n$ temos

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1, e_1, \ldots, e_n)\psi(e_1, x_2, e_3, \ldots, e_n)\ldots\psi(e_1, \ldots, e_{n-1}, x_n),$$

onde e_i é a unidade de G_i, $i = 1, \ldots, n$. Se definimos

$$\chi_i(x_i) = \psi(e_1, \ldots, e_{i-1}, x_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$$

então $\chi \in \hat{G}_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$ e $\theta(\chi_1, \ldots, \chi_n) = \psi$. Assim θ é um isomorfismo.

Se $P(F, \epsilon)$ é uma vizinhança da unidade em $(G_1 \times \ldots \times G_n)\hat{}$ e se F_i é a projeção de F sobre G_i então

$$\theta(P(F_1, \frac{\epsilon}{n}) \times \ldots \times P(F_n, \frac{\epsilon}{n})) \subset P(F, \epsilon).$$

De fato, se $(\chi_1, \ldots, \chi_n) \in P(F_1, \frac{\epsilon}{n}) \times \ldots \times P(F_n, \frac{\epsilon}{n})$ então

$$|\theta(\chi_1, \ldots, \chi_n)(x_1, \ldots, x_n) - 1| = |\chi_1(x_1)\chi_2(x_2) \ldots \chi_n(x_n) - 1|$$

$$\leq |\chi_1(x_1) - 1| + |\chi_2(x_2) - 1| + \ldots + |\chi_n(x_n) - 1| < \frac{\epsilon}{n} + \ldots + \frac{\epsilon}{n} = \epsilon,$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n$. Segue que θ é contínua.

Se $P(F_i, \epsilon_i)$ é uma vizinhança da unidade em $\hat{G}_i$, se $F = (F_1 \cup \{e_1\}) \times \ldots \times (F_n \cup \{e_n\})$ e se $\epsilon = \min(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, então

$$P(F, \epsilon) \subset \theta(P(F_1, \epsilon_1) \times \ldots \times P(F_n, \epsilon_n)).$$

De fato, se $\psi = \theta(\chi_1, \ldots, \chi_n) \in P(F, \epsilon)$ então $|\psi(x_1, \ldots, x_n) - 1| < \epsilon$, para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in F$. Como $(e_1, \ldots, e_{i-1}, x_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in F$, para todo $x_i \in F_i$ temos em particular que $|\chi_i(x_i) - 1| < \epsilon \leq \epsilon_i$, para todo $x_i \in F_i$, ou seja, $\chi_i \in P(F, \epsilon_i)$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Segue que θ^{-1} é contínua. Logo θ é um isomorfismo topológico. ■

Lema 5.1.15. Seja G um grupo abeliano compacto, e seja $\chi \in \hat{G}$, $\chi \neq 1$. Então

$$\int_G \chi(x)dx = 0.$$

Prova: Para todo $a \in G$, temos

$$\int_G \chi(x)dx = \int_G \chi(ax)dx = \chi(a) \int_G \chi(x)dx.$$

Assim se $a \in G$ é tal que $\chi(a) \neq 1$ então a equação acima obriga termos $\int_G \chi(x)dx = 0$.■

Teorema 5.1.16. Seja G um grupo topológico abeliano compacto, e seja H um subgrupo de $\hat{G}$ tal que, para todo $a \neq e$ em G existe $\chi \in H$ tal que $\chi(a) \neq 1$. Então $H = \hat{G}$.

Prova: Seja $A = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_i : \alpha_i \in \mathbb{C}, \chi_i \in H, n \in \mathbb{N}\}$. Sendo H um subgrupo de $\hat{G}$ é fácil ver que A é uma $*$-sub-álgebra de $C(G)$ que contém as funções constantes.

Se $a, b \in G$ e $a \neq b$ então existe $\chi \in H$ tal que $\chi(ab^{-1}) \neq 1$, isto é, $\chi(a) \neq \chi(b)$. Desta maneira A separa pontos de G. Pelo teorema de Stone-Weierstrass (veja teorema A.6.9, página 234 de [6]), A é uniformemente denso em $C(G)$.

Agora assuma que existe $\chi \in \hat{G} \backslash H$. Seja $\sum_{i-1}^{n} \alpha_i \chi_i \in A$ $(\alpha \in \mathbb{C}, \chi \in H, n \in \mathbb{N})$

tal que

$$\|\chi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_i\|_{C(G)} < 1.$$

Podemos supor sem perda de generalidade que os $\chi_i' s$ são distintos. Assim pelo lema anterior

$$\lambda(G) = \int_G d\lambda > \int_G |\chi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_i|^2 d\lambda =$$

$$\int_G \chi\overline{\chi} d\lambda - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_G \chi_i \overline{\chi} d\lambda - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \int_G \overline{\chi_i} \chi d\lambda$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} \int_G \chi_i \overline{\chi_j} d\lambda = \lambda(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \right) \lambda(G) \geq \lambda(G).$$

Uma contradição. Logo $\hat{G} = H$. ■

5.2 Exemplos de Grupos Caracteres

Agora que já temos as ferramentas necessárias podemos achar o grupo caracter de vários grupos elementares.

Exemplo 5.2.1. Considere o grupo $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, defina $f_n : S^1 \to S^1$; onde $f_n(z) = z^n$, para todo $z \in G$. Então $H = \{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é um subgrupo de $\hat{G}$ que separa pontos de G pois a aplicação identidade de G é f_1. Segue que $H = \hat{G}$.

Defina agora $\phi : \mathbb{Z} \to \hat{G}$, onde $\phi(n) = f_n$. É fácil ver que ϕ é um homomorfismo e pela discussão acima ϕ é sobrejetor. Suponha que $f_n = f_m$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Então $z^n = z^m$ para todo $z \in G$. Assim $n = m$. Logo ϕ é um isomorfismo topológico (ϕ é um homeomorfismo pois $\mathbb{Z}$ e $\hat{G}$ são discretos).

Exemplo 5.2.2. Considere o grupo $G = \mathbb{Z}$. Já vimos que a aplicação $\phi : S^1 \ni \alpha \mapsto \phi(\alpha) = \chi_\alpha \in \hat{G}$, onde $\chi_\alpha(n) = \alpha^n$, é um isomorfismo. Queremos agora mostrar que ϕ é também um homeomorfismo. Seja $\epsilon > 0$ e F um subconjunto compacto de $\mathbb{Z}$, ou seja, F é um subconjunto finito de $\mathbb{Z}$. Para cada $i \in F$, seja $\delta_i > 0$ tal que $|\alpha^i - 1| < \epsilon$, para todo $\alpha \in S^1$, com $|\alpha - 1| < \delta_i$. Tome $\delta = \min_{i \in F} \delta_i$. Então $|\alpha^i - 1| < \epsilon$, para todo $\alpha \in S^1$, com $|\alpha - 1| < \delta$. Em outras palavras $\phi(B_{S^1}(1, \delta)) \subset P(F, \epsilon)$, onde $B_{S^1}(1, \delta) = \{z \in S^1 : |z - 1| < \delta\}$. Segue que ϕ é contínua (em 1 e portanto contínua em todos os pontos sendo um homomorfismo).

Em particular ϕ é uma bijeção contínua definida no grupo compacto S^1. Segue que ϕ^{-1} é contínua. Logo ϕ é um isomorfismo topológico.

Exemplo 5.2.3. Seja n um inteiro positivo, e considere o grupo $G = \mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ com adição módulo n. Defina a aplicação

$$\phi : \mathbb{Z}_n \ni \bar{l} \mapsto f_l = \phi(\bar{l}) \in \hat{G},$$

onde $f_l(\overline{k}) = e^{(\frac{2ki\pi l}{n})}$.

Se $k_1, k_2 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e $\overline{k_1} = \overline{k_2}$ então $k_1 = k_2 + k_0 n$, para algum $k_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Daí

$$e^{(\frac{2\pi i k_1 l}{n})} = e^{(\frac{2\pi i k_2 l}{n})} e^{(2\pi i k_0 l)} = e^{(\frac{2\pi i k_2 l}{n})}.$$

Assim cada f_l está bem definida e é facilmente vista para estar em $\hat{G}$.

Suponha agora que $\bar{l} = \overline{m}$. Então $l = m + k_0 n$, algum k_0. Daí

$$f_l(\overline{k}) = e^{(\frac{2\pi i k l}{n})} = e^{(\frac{2\pi i k m}{n})} e^{(2\pi i k_0)} = f_m(\overline{k}).$$

Assim $f_l = f_m$. Assim ϕ está bem definida. Note agora que

$$f_{l+m}(\overline{k}) = e^{(\frac{2\pi i k(l+m)}{n})} = e^{(\frac{2\pi i k l}{n})} e^{(\frac{2\pi i k m}{n})} = f_l(\overline{k}) f_m(\overline{k}).$$

Assim

$$\phi(\bar{l} + \overline{m}) = \phi(\overline{l+m}) = f_{l+m} = f_l f_m = \phi(\bar{l})\phi(\overline{m}).$$

Ou seja, ϕ é um homomorfismo.

Agora, se $f_l = f_m$ então $f_l(\overline{k}) = f_m(\overline{k})$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Daí $e^{(\frac{2\pi i k l}{n})} = e^{(\frac{2\pi i k m)}{n})}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Em particular, $e^{(\frac{2\pi i l}{n})} = e^{(\frac{2\pi i m}{n})}$ e portanto $\frac{2\pi l}{n} = \frac{2\pi m}{n} + 2\pi k_0$, para algum k_0. Assim $l = m + n k_0$, ou seja, $\bar{l} = \overline{m}$. Portanto ϕ é injetiva.

Note agora que $f_1 = \phi(\overline{1})$ separa pontos de G. De fato, se $f_1(\overline{k}) = f_1(\bar{l})$ então $e^{(\frac{2\pi i k}{n})} = e^{(\frac{2\pi i l}{n})}$. Assim $k = l + n k_0$, para algum k_0, ou seja, $\overline{k} = \bar{l}$. Segue que $\phi(\mathbb{Z}_n)$ é um subgrupo de $\hat{G}$ que separa pontos de $\mathbb{Z}_n$. Logo $\phi(\mathbb{Z}_n) = \hat{G}$. Ou seja, ϕ é sobrejetiva. Logo ϕ é um isomorfismo topológico.

Exemplo 5.2.4. Considere o grupo $G = \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_s}$, onde $n_1, \ldots, n_s$ são inteiros positivos.

Do exemplo 5.2.3 acima e do teorema 5.1.14 vemos que $\hat{G}$ é isomorfo com o próprio G. Todo caracter de G tem a forma

$$(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}) \mapsto e^{[2\pi i(\frac{k_1 l_1}{n_1} + \ldots + \frac{k_s l_s}{n_s})]},$$

onde $0 \leq l_i < n_i$, para $i = 1, \ldots, s$.

Exemplo 5.2.5. Considere o grupo aditivo $G = \mathbb{R}$. Vamos provar que o dual de $\mathbb{R}$ é (topologicamente isomorfo à) $\mathbb{R}$.

Para cada $y \in \mathbb{R}$, seja $\chi_y(x) = e^{ixy}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Então é fácil ver que $\chi \in \hat{G}$. Defina a aplicação

$$\phi : \mathbb{R} \ni y \to \phi(y) = \chi_y \in \hat{G}.$$

Queremos provar que ϕ é um isomorfismo topológico. É fácil ver que ϕ é um homomorfismo. Primeiro provaremos que ϕ é injetiva. Suponha que $y, z \in \mathbb{R}$ e $\phi(y) = \chi_y = \chi_z = \phi(z)$. Então temos $e^{ixy} = e^{ixz}$, ou equivalentemente, $e^{ix(y-z)} = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $y \neq z$ então tomando $x = \frac{\pi}{y-z}$ temos $e^{ix(y-z)} = e^{i\pi} = -1$. Assim devemos ter $y = z$, ou seja, ϕ é injetiva.

Provaremos agora a sobrejetividade de ϕ. Seja $\chi \in \hat{G}$ e defina $A = \{x \in \mathbb{R} : \chi(x) = 1\}$. Então A é um subgrupo fechado de $\mathbb{R}$. Segue que $A = \{0\}$, $A = \mathbb{R}$ ou $A = b\mathbb{Z}$ para algum $b > 0$ (veja 1.1.19).

Se $A = \mathbb{R}$ então $\chi = 1$ tal que $\chi(x) = e^{ix0} = \chi_0(x)$, ou seja, $\chi = \chi_0$. Assim neste caso ϕ é sobrejetora. Assuma que $A = \{0\}$. Então $\chi([0,1])$ é um subconjunto compacto e conexo de S^1 contendo 1: isto é, um arco ou $\{1\}$. Por hipótese, $\chi([0,1])$ não é $\{1\}$, e assim existe $a \in (0,1]$ tal que $\chi(a) = e^{\frac{2\pi i}{m}}$, onde m é um inteiro não-nulo. Mas então $\chi(ma) = \chi(a)^m = e^{2\pi i} = 1$ uma contradição com nossa hipótese. Portanto podemos supor que $A = b\mathbb{Z}$, onde $b > 0$ (note que b é o menor elemento positivo de A). Sendo

$$1 = \chi(b) = \chi(2\frac{b}{2}) = \chi(\frac{b}{2})^2$$

e $0 < \frac{b}{2} < b$, temos $\chi(\frac{b}{2}) = -1$. Sendo $\chi(\frac{b}{4})^2 = \chi(\frac{b}{2}) = -1$, devemos ter $\chi(\frac{b}{4}) = e^{\frac{\pi}{2}i}$ ou $\chi(\frac{b}{4}) = e^{-\frac{\pi}{2}i}$. Se a segunda igualdade vale, trocamos χ por $\overline{\chi}$ e assim podemos supor sem perda de generalidade que $\chi(\frac{b}{4}) = e^{\frac{\pi}{2}i}$. Suponha agora que já provamos que

$$\chi(\frac{b}{2^k}) = e^{\frac{2\pi i}{2^k}}$$

para algum inteiro positivo k. Então devemos ter

$$\chi(\frac{b}{2^{k+1}}) = e^{\frac{2\pi i}{2^{k+1}}},$$

ou

$$\chi(\frac{b}{2^{k+1}}) = e^{\frac{2\pi i}{2^{k+1}}+\pi i}.$$

Assuma que a segunda igualdade vale. Então $\chi([\frac{b}{2^{k+1}}, \frac{b}{2^k}])$ é um subconjunto compacto e conexo em S^1 que contém 1 ou -1. Desta maneira para algum $a \in [\frac{b}{2^{k+1}}, \frac{b}{2^k}]$ temos $\chi(a) = 1$ ou $\chi(a) = -1$. Em ambos os casos $\chi(2a) = 1$ e $0 < 2a < 2\frac{b}{2^k} = \frac{b}{2^{k-1}} \leq b$. Isto contradiz o fato que $b = \min\{a \in A : a > 0\}$ e assim

$$\chi(\frac{b}{2^{k+1}}) = e^{\frac{2\pi i}{2^{k+1}}}.$$

É óbvio agora que $\chi(rb) = e^{2\pi i r}$ para todos os números reais diádicos[1] r. Por continuidade temos $\chi(xr) = e^{2\pi i x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Ou ainda,

$$\chi(x) = e^{ix\frac{2\pi}{b}} = \chi_{\frac{2\pi}{b}}(x).$$

Isto mostra que ϕ é sobrejetiva. Assim ϕ é um isomorfismo de grupos.

Falta mostrar que ϕ é um homeomorfismo. Primeiro suponha que $\{y_j\}_j$ é uma net em $\mathbb{R}$ tal que $y_j \to 0$. Seja $\epsilon > 0$ e $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Como a função $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $|e^z - 1| < \epsilon$ para todo $z \in \mathbb{C}$, com $|z| < \delta$. Seja $M = \sup_{x \in K} |x|$; M é finito pois K é compacto. Daí existe j_0 tal que $|y_j| < \frac{\delta}{M+1}$ para $j \geq j_0$. Assim, se $x \in K$ e $j \geq j_0$ temos $|ixy_j| \leq M|y_j| < \delta$ e daí

$$|\chi(x) - 1| = |e^{ixy_j} - 1| < \epsilon.$$

Isto mostra que ϕ é contínua (veja 5.1.12). Suponha finalmente que $\{y_j\}_j$ é uma net em

[1] Um **número diádico** é um número da forma $\frac{n}{2^k}$, onde $n \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{N}$. O conjunto dos números diádicos formam (óbviamente) um subconjunto denso de $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ e que $\chi_{y_j} \to 1$ em $\hat{\mathbb{R}}$. Seja K o compacto $[0,1]$ e $\epsilon = 2$. Então existe j_0 tal que

$$|\chi(x) - 1| = |e^{ixy_j} - 1| < 2,$$

para todo $j \geq j_0$ e todo $x \in [0,1]$. Em partucular temos $xy_j \neq \pi$ e $xy_j \neq -\pi$ para todo $j \geq j_0$ e todo $x \in [0,1]$. Segue daí que $|y_j| \leq \pi$ para todo $j \geq j_0$. Assim podemos supor sem perda de generalidade que $|y_j| \leq \pi$ para todo j. Agora, tomando o compacto $K = \{1\}$ obtemos que $e^{iy_j} \to 1$. Daí, como $|y_j| \leq \pi$ temos

$$iy_j = log(e^{iy_j}) \to log(1) = 0.$$

Ou seja, $y_j \to 0$. Isto mostra que ϕ^{-1} é contínua. Logo ϕ é um isomorfismo topológico.

Capítulo 6

A C^*-álgebra Envolvente

Um dos principais objetivos da teoria de representações é a classificação de todas as $*$-representações de uma dada $*$-álgebra de Banach B. Por esta razão é interessante achar que toda tal álgebra B dá origem a uma C^*-álgebra $C^*(B)$ (chamada a C^*-álgebra envolvente de B) tal que as $*$-representações de B e as de $C^*(B)$ então em uma correspondência bijetiva natural. Isto mostra que a teoria de $*$-representações de C^*-álgebras é tão geral quanto as de $*$-álgebras de Banach arbitrárias. Mais sobre a teoria de C^*-álgebra envolvente pode ser encontrado em [3].

6.1 A C^*-álgebra Envolvente de uma Álgebra

Nesta seção fixaremos uma $*$-álgebra de Banach B e provaremos que sempre existe a sua C^*-álgebra envolvente $C^*(B)$. A C^*-álgebra envolvente de B pode ser pensada como uma "fotografia" de B usando "luz" que registra somente as propriedades de B que aparecem na estrutura de suas $*$-representações. Sendo que C^*-álgebras são vastamente mais simples em estrutura que $*$-álgebras de Banach arbitrárias, tal "fotografia" frequentemente resulta em um grande ganho de simplicidade.

Definição 6.1.1. Seja B uma $*$-álgebra de Banach. Uma C^***-seminorma** em B é uma função $p : B \to \mathbb{R}_+$ tal que para todo $a, b \in B$ e $\alpha \in \mathbb{C}$

(i) $p(a + b) \leq p(a) + p(b)$;

(ii) $p(\alpha a) = |\alpha| p(a)$;

(iii) $p(ab) \leq p(a)p(b)$;

(iv) $p(a^*a) = p(a)^2$.

O conjunto de todas a C^*-seminormas em B será denotado por $C^*_{sn}(B)$.

Observação 6.1.2. Note que se $p : B \to \mathbb{R}_+$ é uma C^*-seminorma em uma $*$-álgebra de Banach B então $p(b^*) = p(b)$, para todo $b \in B$. De fato, de (iv) temos $p(b^*b) = p(b)^2$. Por outro lado de (iii), $p(b^*b) \leq p(b^*)p(b)$. Assim $p(b)^2 \leq p(b^*)p(b)$ e assim $p(b) \leq p(b^*)$. Como $b \in B$ foi arbitrário podemos trocar b por b^* e concluir que $p(b^*) \leq p((b^*)^*) = p(b)$. Logo $p(b) \leq p(b^*) \leq p(b)$ e portanto $p(b^*) = p(b)$.

Teorema 6.1.3. Sejam B uma $*$-álgebra de Banach e $p \in C^*_{sn}(B)$. Defina $N = N(p) = \{b \in B : p(b) = 0\}$. Então N é um ideal em B e o completamento do espaço quociente $\frac{B}{N}$ com respeito a norma $\|b + N\| = p(b)$ é uma C^*-álgebra.

Prova: É fácil ver que N é um ideal em B. Assim $\frac{B}{N}$ é uma álgebra com as operações naturais (veja exemplo A.3.5). Como $p(a^*) = p(a)$ para todo $a \in B$, temos $N^* \subset N$. Assim a função $* : \frac{B}{N} \to \frac{B}{N}$; $(b + N)^* = b^* + N$ está bem definida e é fácil ver que é uma involução em $\frac{B}{N}$. Segue da definição de C^*-seminorma que a função $\|b+N\| = p(b)$ é uma norma em $\frac{B}{N}$ que satisfaz $\|(a + N)(b + N)\| \leq \|a + N\|\|b + N\|$ e $\|(a + N)^*(a + N)\| = \|a+N\|^2$. Assim $\frac{B}{N}$ é uma $*$-álgebra normada (não necessariamente completa) que satisfaz $\|(a + N)^*(a + N)\| = \|a + N\|^2$. Logo o completamento de $\frac{B}{N}$ é uma C^*-álgebra. ■

Exemplo 6.1.4. Seja $\pi : B \to \mathcal{L}(H)$ uma $*$-representação de B, onde H é um espaço de Hilbert. Defina $p : B \to \mathbb{R}_+$; $p(b) = \|\pi(b)\|$. Então p é uma C^*-seminorma em B. O teorema a seguir mostra que todas as C^*-seminormas são da forma acima.

Teorema 6.1.5. Dada p uma C^*-seminorma em B, existe uma $*$-representação π de B tal que $p(b) = \|\pi(b)\|$, para todo $b \in B$.

Prova: Sejam $N = \{x \in B : p(x) = 0\}$ e $A = \overline{(\frac{B}{N})}$ o completamento de $\frac{B}{N}$ como no teorema 6.1.3. Então A é uma C^*-álgebra e assim existe uma $*$-representação isométrica $\pi_1 : A \to \mathcal{L}(H)$, onde H é algum espaço de Hilbert (veja teorema 3.4.15 de [6]).

Seja agora $\pi_0 : B \to \frac{B}{N}$; $\pi_0(b) = b + N$ e $i_0 : \frac{B}{N} \to A$ a inclusão de $\frac{B}{N}$ em A. Defina agora $\pi = \pi_1 \circ i_0 \circ \pi_0 : B \to \mathcal{L}(H)$. Então π é uma $*$-representação e como π_1 é isométrica temos:

$$\|\pi(b)\| = \|\pi_1(b + N)\| = \|b + N\| = p(b),$$

para todo $b \in B$. ■

Corolário 6.1.6. Seja p uma C^*-seminorma em uma $*$-álgebra de Banach B. Então $p(b) \leq \|b\|_B$, para todo $b \in B$ ($\| \cdot \|_B$ denota a norma de B).

Prova: Pelo teorema 6.1.5 existe uma $*$-representação π de B tal que $p(b) = \|\pi(b)\|$ para todo $b \in B$. Assim $p(b) = \|\pi(b)\| \leq \|b\|_B$, para todo $b \in B$ (veja teorema A.3.2).

Definição 6.1.7. Seja B uma $*$-álgebra de Banach. Uma C^***-álgebra envolvente de** B é uma par (A, π), onde A é uma C^*-álgebra e $\pi : B \to A$ é um $*$-homomorfismo com a seguinte propriedade:

Para qualquer C^*-álgebra A_1 e qualquer $*$-homomorfismo $\phi : B \to A_1$ existe um único $*$-homomorfismo $\tilde{\phi} : A \to A_1$ tal que $\tilde{\phi} \circ \pi = \phi$. Ou seja, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[dl, dotted, "\tilde{\phi}"] \\ A_1 & \end{tikzcd}$$

comuta.

Definição 6.1.8. Seja B uma $*$-álgebra de Banach, sejam A_1, A_2 C^*-álgebras e $\pi_i : B \to A_i$ $*$-homomorfismos para $i = 1, 2$. Dizemos que o par (A_1, π_1) é isomorfo ao par (A_2, π_2) (e denotamos $(A_1, \pi_1) \cong (A_2, \pi_2)$) se existe um $*$-isomorfismo $\pi : A_1 \to A_2$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & A_1 \arrow[dl, dotted, "\pi"] \\ A_2 & \end{tikzcd}$$

comuta.

Teorema 6.1.9. (Unicidade da C^*-álgebra envolvente) Sejam (A_1, π_1) e $(A_2.\pi_2)$, C^*-álgebras envolventes para uma $*$-álgebra de Banach B. Então $(A_1, \pi_1) \cong (A_2, \pi_2)$.

Prova: Segue da definição de C^*-álgebra envolvente que existem $*$-homomorfismos

$\tilde{\pi}_1 : A_2 \to A_1$ e $\tilde{\pi}_2 : A_1 \to A_2$ tal que $\tilde{\pi}_1 \circ \pi_2 = \pi_1$ e $\tilde{\pi}_2 \circ \pi_1 = \pi_2$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A_2 \arrow[dl, dotted, "\tilde{\pi}_1"] \\ A_1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & A_1 \arrow[dl, dotted, "\tilde{\pi}_2"] \\ A_2 & \end{tikzcd}$$

Note daí que o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A_1 \arrow[dl, "\tilde{\pi}_1 \circ \tilde{\pi}_2"] \\ A_1 & \end{tikzcd}$$

comuta, pois $\tilde{\pi}_1 \circ \tilde{\pi}_2 \circ \pi_1 = \tilde{\pi}_1 \circ \pi_2 = \pi_1$. Mas o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A_1 \arrow[dl, "Id_{A_1}"] \\ A_1 & \end{tikzcd}$$

também comuta. Segue (por unicidade) que $\tilde{\pi}_1 \circ \tilde{\pi}_2 = Id_{A_1}$.

Aplicando o mesmo argumento com o par (A_2, π_2) concluímos que

$$\tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\pi}_1 = Id_{A_2}.$$

Assim $\tilde{\pi}_1$ e $\tilde{\pi}_2$ são $*$-isomorfismos e $\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2^{-1}$. Basta tomar agora $\pi = \tilde{\pi}_2$ para satisfazer a definição 6.1.8. ∎

Pelo teorema acima existe no máximo uma C^*-álgebra envolvente. Queremos agora mostrar que sempre existe a C^*-álgebra envolvente de uma dada $*$-álgebra de Banach.

Teorema 6.1.10. (Existência da C^*-álgebra envolvente) Existe a C^*-álgebra envolvente para qualquer $*$-álgebra de Banach.

Prova: Seja B uma $*$-álgebra de Banach. Defina $p_s(b) = \sup\limits_{p \in C^*_{sn}(B)} p(b)$ (note que $p_s(b)$ é finito por 6.1.6). É fácil ver que $p_s \in C^*_{sn}(B)$. Seja $N = \{b \in B : p_s(b) = 0\} = \{b \in B : p(b) = 0,\ \text{para todo } p \in C^*_{sn}(B)\}$. Seja $A = \overline{(\frac{B}{N})}$ o completamento de $\frac{B}{N}$ com respeito a norma $\|b + N\|_0 = p_s(b)$. Então $(A, \|\cdot\|_0)$ é uma C^*-álgebra por 6.1.3.

Seja $\pi : B \to A$; $\pi(b) = b + N$. Então π é um $*$-homomorfismo. Queremos mostrar que (A, π) é a C^*-álgebra envolvente de B. Para isso sejam A_1 uma C^*-álgebra e $\phi : B \to A_1$ um $*$-homomorfismo. Defina $\phi_0 : \frac{B}{N} \to A_1$; $\phi_0(b + N) = \phi(b)$. Suponha que $a + N = b + N$, ou seja, $a - b \in N$. Então $p(a - b) = 0$, para todo $p \in C^*_{sn}(B)$. Agora, se $p_\phi(x) = \|\phi(x)\|$, $x \in B$, então $p_\phi \in C^*_{sn}(B)$. Assim $p_\phi(a - b) = 0$, isto é, $\phi(a) = \phi(b)$. Isto mostra que ϕ_0 está bem definida. É facil ver que ϕ_0 é um $*$-homomorfismo. Temos ainda que $\|\phi_0(b + N)\| = \|\phi(b)\| = p_\phi(b) \leq p_s(b) = \|b + N\|_0$. Então existe uma extensão contínua de ϕ_0:

$$\tilde{\phi} : A \to A_1.$$

Assim $\tilde{\phi}$ é um $*$-homomorfismo e $\tilde{\phi}(b + N) = \phi_0(b + N) = \phi(b)$ para todo $b \in B$. Ou seja, $\phi = \tilde{\phi} \circ \pi$. Isto diz que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[dl, dotted, "\tilde{\phi}"] \\
A_1 &
\end{tikzcd}$$

comuta. Se $\tilde{\phi_1} : A \to A_1$ é outro $*$-homomorfismo tal que $\phi = \tilde{\phi_1} \circ \pi$ então

$$\tilde{\phi_1}(b + N) = \tilde{\phi_1}(\pi(b)) = \phi(b).$$

Assim $\tilde{\phi_1} = \tilde{\phi}$ sobre B_0. Segue $\tilde{\phi_1} = \tilde{\phi}$ em $\overline{B_0} = A$.

Logo (A, π) é a C^*-álgebra envolvente de B. ■

Devido a existência e unicidade denotaremos por $(C^*(B), \pi^*(B))$ a C^*-álgebra envolvente de uma $*$-álgebra de Banach B. As vezes, quando o $*$-homomorfismo $\pi^*(B)$ estiver subentendido, nos referiremos a C^*-álgebra envolvente apenas como $C^*(B)$.

Teorema 6.1.11. Seja B uma $*$-álgebra de Banach. Para $\pi : B \to \mathcal{L}(H)$, $*$-representação de B, seja $\tilde{\pi} : C^*(B) \to \mathcal{L}(H)$ a única $*$-representação de $C^*(B)$ tal que $\tilde{\pi} \circ \pi^*(B) = \pi$. Então a aplicação $\pi \mapsto \tilde{\pi}$ é uma bijeção entre o conjunto das $*$-representações de B sobre

H e o conjunto das $*$-representações de $C^*(B)$ sobre H.

Prova: O teorema segue da definição de C^*-álgebra envolvente, sendo que $\mathcal{L}(H)$ é uma C^*-álgebra. ■

Exemplo 6.1.12. Seja B qualquer espaço de Banach com uma involução $*$ no qual $\|b^*\| = \|b\|$ para todo $b \in B$. Defina em B o produto $a \cdot b = 0$, para todo $a, b \in B$. Então $(C^*(B), \pi^*(B)) = (\{0\}, 0)$. De fato, se $\phi : B \to A_1$ é um $*$-homomorfismo, onde A_1 é uma C^*-álgebra então $\|\phi(b)\|^2 = \|\phi(b)^*\phi(b)\| = \|\phi(b^*b)\| = \|\phi(0)\| = 0$. Assim $\tilde{\phi} = 0 : \{0\} \to A_1$ é o único $*$-homomorfismo tal que $\tilde{\phi} \circ 0 = \phi$.

O objetivo agora é caracterizar a C^*-álgebra envolvente de uma $*$-álgebra de Banach comutativa em termos do teorema de Gelfand (A.3.12).

Teorema 6.1.13. Se B é uma $*$-álgebra de Banach comutativa então $C^*(B)$ é uma C^*-álgebra comutativa.

Prova: Usando as notações do teorema de existência da C^*-álgebra envolvente temos que

$$C^*(B) = \overline{\left(\frac{B}{N}\right)},$$

onde N é um ideal de B. Logo $C^*(B)$ é comutativa se B é comutativa. ■

Observação 6.1.14. A recíproca do teorema acima não é verdadeira (veja exemplo 6.1.19).

Definição 6.1.15. Seja B uma $*$-álgebra de Banach. Denotaremos por $\hat{B}_s$ o subespaço fechado de $\hat{B}$ consistindo dos elementos ϕ de $\hat{B}$ (veja A.3.10) que satisfazem:

$$\phi(b^*) = \overline{\phi(b)} \quad \text{para todo } b \in B.$$

Um elemento de $\hat{B}$ é chamado **simétrico** se está em $\hat{B}_s$.

Lema 6.1.16. Seja B uma $*$-álgebra de Banach. Então o espectro de $C^*(B)$, ou seja, o espaço $\widehat{C^*(B)}$ dos funcionais lineares multiplicativos não-nulos (veja A.3.10) é homeomorfo à $\hat{B}_s$.

Prova: Sabemos que $(C^*(B), \pi^*(B)) \cong (\overline{(\frac{B}{N})}, \pi)$ onde $N = \{b \in B : p(b) = 0$, para todo

$p \in C^*_{sn}(B)\}$ e $\pi(b) = b + N$, para toda $b \in B$. Assim podemos supor sem perda de generalidade que $C^*(B) = \overline{(\frac{B}{N})}$ e $\pi^*(B) = \pi$.

Note que os elementos de $\hat{B}_s$ são exatamente os $*$-homomorfismos não-nulos de B em $\mathbb{C}$. Então, por definição de $C^*(B)$, para cada $\phi \in \hat{B}_s$ existe um único $*$-homomorfismo $\tilde{\phi} : C^*(B) \to \mathbb{C}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"'] & C^*(B) \arrow[dl, dotted, "\tilde{\phi}"] \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $\tilde{\phi}(b + N) = (\tilde{\phi} \circ \pi)(b) = \phi(b)$, para todo $b \in B$. Como ϕ é não-nulo devemos ter $\tilde{\phi}$ não-nulo. Assim $\tilde{\phi} \in \widehat{C^*(B)}$.

Portanto temos definida uma aplicação

$$H : \hat{B}_s \ni \phi \mapsto \tilde{\phi} \in \widehat{C^*(B)},$$

onde, para cada $\phi \in \widehat{B}_s$, $\tilde{\phi}$ é o único elemento de $\widehat{C^*(B)}$ tal que $\tilde{\phi} \circ \pi = \phi$.

Dado $\psi \in \widehat{C^*(B)}$, defina $\phi(b) = \psi \circ \pi(b)$. Então $\psi = \tilde{\phi}$. Segue que H é uma bijeção. Queremos mostrar que H é um homeomorfismo. Para isso basta mostrar que para qualquer net $\{\phi_i\}_i$ em $\hat{B}_s$ e $\phi \in \hat{B}_s$, temos

$$\phi_i \to \phi \text{ em } \hat{B}_s \Longleftrightarrow \tilde{\phi}_i \to \tilde{\phi} \text{ em } \widehat{C^*(B)},$$

onde a topologia em $\hat{B}_s$ é a topologia induzida de $\hat{B}$, ou seja, a topologia de Gelfand (veja A.3.10). Suponha primeiro que $\tilde{\phi}_i \to \tilde{\phi}$ em $\widehat{C^*(B)}$, ou seja, $\tilde{\phi}_i(x) \to \tilde{\phi}(x)$, para todo $x \in C^*(B)$. Então, em particular, se $x = b + N$, $b \in B$ temos $\tilde{\phi}_i(b + N) = \phi_i(b) \to \phi(b) = \tilde{\phi}(b + N)$. Assim $\phi_i \to \phi$ em $\hat{B}_s$. Suponha agora que $\phi_i \to \phi$ em $\hat{B}_s$. Então $\phi_i(b) \to \phi(b)$, para toda $b \in B$. Ou seja, $\tilde{\phi}_i(b + N) \to \tilde{\phi}(b + N)$, para todo $b \in B$. Mas $\overline{(\frac{B}{N})} = C^*(B)$. Assim segue que $\tilde{\phi}_i(x) \to \tilde{\phi}(x)$ para todo $x \in C^*(B)$. De fato, tome $x \in C^*(B)$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $b \in B$ com $\|(b + N) - x\| < \frac{\epsilon}{3}$. Tome i_0 tal que

$$|\phi_i(b) - \phi(b)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall\, i \geq i_0.$$

Então

$$|\tilde{\phi}_i(x) - \phi(x)| \leq |\tilde{\phi}_i(x) - \tilde{\phi}_i(b+N)| + |\tilde{\phi}_i(b+N) - \tilde{\phi}(b+N)| + |\tilde{\phi}(b+N) - \tilde{\phi}(x)| \leq$$

$$\|x - (b+N)\| + \frac{\epsilon}{3} + \|(b+N) - x\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \quad \forall\, i \geq i_0.$$

Logo $\tilde{\phi}_i(x) \to \tilde{\phi}(x)$, para todo $x \in C^*(B)$ e portanto H é um homeomorfismo. ■

Teorema 6.1.17. Seja B uma $*$-álgebra de Banach. Se a C^*-envolvente de B é comutativa (por exemplo se B é comutativa) então

$$(C^*(B), \pi^*(B)) \cong (C_0(\hat{B}_s), \Gamma),$$

onde

$$\Gamma : B \to C_0(\hat{B}_s); \quad \Gamma(b) = \hat{b},$$

sendo $\hat{b}(\phi) = \phi(b)$, $\phi \in \hat{B}_s$ a transformada de Fourier de b restrita a $\hat{B}_s$ (veja A.3.10).

Prova: Como no lema acima, podemos supor que $C^*(B) = \overline{(\frac{B}{N})}$ e $\pi^*(B) = \pi$, onde, $N = \{b \in B : p(b) = 0, \text{ para todo } p \in C^*_{sn}(B)\}$ e $\pi(b) = b + N$, para todo $b \in B$.

Pela demonstração do lema 6.1.16 temos que a aplicação

$$H : \hat{B}_s \ni \phi \mapsto \tilde{\phi} \in \widehat{C^*(B)},$$

(onde $\tilde{\phi}$ é o único elemento de $\widehat{C^*(B)}$ satisfazendo $\tilde{\phi} \circ \pi^*(B) = \phi$) é um homeomorfismo. Defina, a partir daí,

$$F : C^*(B) \ni x \mapsto F(x) \in C_0(\hat{B}_s),$$

onde $F(x)(\phi) = \hat{x}(\tilde{\phi})$. Queremos mostrar que F é uma $*$-isomorfismo. Mas, o teorema de Gelfand (A.3.12) nos diz que a aplicação

$$\Gamma : C^*(B) \ni x \mapsto \hat{x} \in C_0(\widehat{C^*(B)})$$

é um $*$-isomorfismo e, portanto, temos $F(x) = \Gamma(x) \circ H$, para todo $x \in C^*(B)$. Segue que F é um $*$-isomorfismo.

Agora note que para $b \in B$ e $\phi \in \hat{B}_s$ temos

$$(F \circ \pi^*(B))(b)(\phi) = F(b+N)(\phi) = (\widehat{b+N})(\tilde{\phi}) =$$

$$= \tilde{\phi}(b+N) = \phi(b) = \Gamma(b)(\phi).$$

Assim $F \circ \pi^*(B) = \Gamma$, ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\pi^*(B)"] \arrow[d, "\Gamma"'] & C^*(B) \arrow[dl, "F"] \\
C_0(\hat{B}_s) &
\end{tikzcd}$$

comuta. Logo $(C^*(B), \pi^*(B)) \cong (C_0(\hat{B}_s), \Gamma)$. ∎

Exemplo 6.1.18. Seja $B = C(D)$, onde $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, com as operações de soma e multiplicação usuais, a norma do supremo, e a seguinte involução:

$$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}, \quad \forall\, f \in C(D).$$

Então é fácil ver que B é uma $*$-álgebra de Banach.

Defina para $z \in D$, $\delta_z : B \to \mathbb{C}$; $\delta_z(f) = f(z)$. Então é fácil ver que $\delta_z \in \hat{B}$, para todo $z \in D$ e temos que δ_z é simétrico se, e somente se, $z = \overline{z}$. De fato, se $\overline{z_0} \neq z_0$, existe $f \in C(D)$ tal que $f(\overline{z_0}) \neq f(z_0)$. Assim

$$\delta_{z_0}(f^*) = f^*(z_0) = \overline{f(\overline{z_0})} \neq \overline{f(z_0)} = \overline{\delta_{z_0}(f)}.$$

Logo nem todo $\phi \in \hat{B}$ é simétrico. Mais ainda, do corolário 8.8, página 361 de [3], temos que a aplicação $D \ni z \to \delta_z \in \hat{B}$ é um homeomorfismo. Assim, $\hat{B}$ é homeomorfo à D e $\hat{B}_s$ é homeomorfo à $D \cap \mathbb{R} = [-1, 1]$ (pois δ_z é simétrico se e somente se $z = \overline{z}$). Assim por 6.1.17 $C^*(B) = C([-1, 1])$. Mais ainda, é fácil ver que o $*$-homomorfismo $\pi^*(B)$ é dado por restrição de uma função de $C(D)$ sobre $C([-1, 1])$. Ou seja, $\pi^*(B)(f) = f_{|[-1,1]}$, para toda $f \in C(D)$.

Exemplo 6.1.19. Considere agora

$$B = \{f \in C(D, M_2(\mathbb{C})) : \text{para cada } x \in [-1,1],\ f(x) \text{ é um múltiplo da matriz identidade}\},$$

onde $M_2(\mathbb{C})$ é o conjunto das matrizes complexas 2×2 e $C(D, M_2(\mathbb{C}))$ é o conjunto das funções contínuas de D em $M_2(\mathbb{C})$ (a norma de $M_2(\mathbb{C})$ é a norma de operadores). Equipe B com as operações de soma e produto pontuais (de matrizes), a norma

$$\|f\|_B = \sup_{z \in D} \|f(z)\|_{M_2(\mathbb{C})},$$

onde $\|\cdot\|_{M_2(\mathbb{C})}$ denota a norma em $M_2(\mathbb{C})$, e a involução

$$f^*(z) = f(\overline{z})^*, \text{ para toda } f \in B \text{ e } z \in D,$$

onde $f(\overline{z})^*$ denota a transposta conjungada da matriz $f(\overline{z})$. Então é fácil ver que B com as operações acima é uma $*$-álgebra de Banach (não comutativa).

Queremos achar $(C^*(B), \pi^*(B))$. Vamos provar que $(C^*(B), \pi^*(B)) \cong (C[-1,1], \pi)$, onde $\pi : B \to C([-1,1])$; $\pi(f)(x) = \alpha_x$, para toda $f \in C(D)$, onde α_x é o número complexo tal que $f(x) = \alpha_x I$, sendo I a matriz identidade 2x2. Vamos fazer isso usando a definição de C^*-algebra envolvente.

Seja A uma C^*-álgebra qualquer e $\pi_A : B \to A$ um $*$-homomorfismo. Suponha que $f \in B$ e $f_{|[-1,1]} = 0$. Defina

$$f_1(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } Im(z) \geq 0 \\ 0 & \text{se } Im(z) < 0 \end{cases}$$

e

$$f_2(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } Im(z) \geq 0 \\ f(z) & \text{se } Im(z) < 0 \end{cases}$$

Então $f_i \in B$, $i = 1,2$ e $f = f_1 + f_2$. Mas note que $f_i^* f_i = 0$, $i = 1,2$. Assim

$$\|\pi(f_i)\|^2 = \|\pi(f_i)^* \pi(f_i)\| = \|\pi(f_i^* f_i)\| = 0,$$

para $i = 1,2$. Assim $\pi(f_i) = 0$, $i = 1,2$ e portanto $\pi(f) = \pi(f_1) + \pi(f_2) = 0$. Segue que $\pi(f) = \pi(g)$, para todas $f, g \in B$ com $f_{|[-1,1]} = g_{|[-1,1]}$. Então está bem definida a aplicação

$$\tilde{\pi}_A : C([-1,1]) \to A; \quad \tilde{\pi}_A(f) = \pi_A(\tilde{f}),$$

onde $\tilde{f}$ é qualquer função em $C(D)$ tal que $\tilde{f}_{|_{[-1,1]}} = f$. (Note que pelo menos uma $\tilde{f}$ existe pelo teorema de extensão de Tietze). É fácil ver que $\tilde{\pi}_A$ é um $*$-homomorfismo. Também, note que

$$(\tilde{\pi}_A \circ \pi)(f) = \tilde{\pi}_A(f_{|_{[-1,1]}}) = \pi_A(f),$$

ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_A"'] & C([-1,1]) \arrow[dl, dotted, "\tilde{\pi}_A"] \\ A & \end{tikzcd}$$

comuta.

Obviamente, se $\tilde{\tilde{\pi}}_A : C[-1,1] \to A$ é outro $*$-homomorfismo que faz o diagrama acima comutar então $\tilde{\tilde{\pi}}_A = \tilde{\pi}_A$. De fato, suponha que

$$\tilde{\tilde{\pi}}(f_{|_{[-1,1]}}) = \pi_A(f) = \tilde{\pi}_A(f_{|_{[-1,1]}}), \quad \forall\ f \in C(D).$$

Pelo teorema de extensão de Tietze π é sobrejetiva. Logo $\tilde{\tilde{\pi}}_A(g) = \tilde{\pi}_A(g)$, para toda $g \in C([-1,1])$. Portanto $\tilde{\tilde{\pi}}_A = \tilde{\pi}_A$ e assim $(C^*(B), \pi^*(B)) \cong (C([-1,1], \pi)$.

Este exemplo mostra que a C^*-álgebra envolvente $C^*(B)$ pode ser comutativa sem que a $*$-álgebra de Banach B seja. Ele também mostra que o processo de construir a C^*-álgebra envolvente não é "injetivo". Duas $*$-álgebras de Banach diferentes podem ter a mesma C^*-álgebra envolvente.

6.2 A C^*-álgebra de um Grupo

Nesta seção fixaremos um grupo localmente compacto G. Assim como no estudo de representações de álgebras, no estudo de representações de grupos é interessante saber classificar todas a representações unitárias de G. Já vimos no capítulo 4 que as representações unitárias e contínuas de G estão em correspondência biunívoca com as $*$-representações não-degeneradas da $*$-álgebra de Banach $L_1(G)$. Assim, como a C^*-álgebra envolvente preserva propriedades de $*$-representações, é natural definir a C^*-álgebra de G

como sendo a C^*-álgebra envolvente de $L_1(G)$.

Definição 6.2.1. Seja G um grupo topológico localmente compacto. A **C^*-álgebra de** G, denotada por $(C^*(G), \pi^*(G))$, é por definição a C^*-álgebra envolvente da $*$-álgebra de Banach $L_1(G) = L_1(G, \lambda)$, onde λ é uma medida de Haar à esquerda em G.

Teorema 6.2.2. Seja G um grupo localmente compacto. Para $V : G \to U(H)$, representação unitária e contínua de G, seja $\pi_V : L_1(G) \to \mathcal{L}(H)$ a única $*$-representação não-degenerada de $L_1(G)$ dada pela equação:

$$\langle \pi_V(f)\xi, \eta \rangle = \int_G \langle V_x \xi, \eta \rangle f(x) dx \quad \text{onde } \xi, \eta \in H \text{ e } f \in L_1(G) \quad \text{(veja 4.2.9)}$$

Então a aplicação $V \mapsto \tilde{\pi}_V$ (onde $\tilde{\pi}_V : C^*(G) \to \mathcal{L}(H)$ é a única $*$-representação de $C^*(G)$ tal que $\tilde{\pi}_V \circ \pi^*(G) = \pi_V$ (veja 6.1.11)) é uma bijeção entre o conjunto das representações unitárias e contínuas de G sobre H e o conjunto das $*$-representações não-degeneradas de $C^*(G)$ sobre H.

Prova: É fácil ver que a aplicação $\pi \mapsto \tilde{\pi}$ do teorema 6.1.11 preserva não-degenerecência, ou seja, π é não-degenerada, se e somente se, $\tilde{\pi}$ é não-degenerada. Assim o presente teorema segue de 4.2.9, 4.2.10 e 6.1.11.

O objetivo agora é caracterizar a C^*-álgebra de um grupo abeliano em termos do teorema de Gelfand (A.3.12).

Lema 6.2.3. Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Então cada $\phi \in \widehat{L_1(G)}$ é simétrico, ou seja, $\widehat{L_1(G)}_s = \widehat{L_1(G)}$.

Prova: Pelo lema 5.1.8 $\phi = \phi_\chi$, para algum $\chi \in \hat{G}$. Isto é,

$$\phi(f) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)} dx, \text{ para toda } f \in L_1(G).$$

Lembre agora que $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$ (G é abeliano e portanto unimodular). Assim

$$\phi(f^*) = \int_G \overline{f(x^{-1})\chi(x)} dx = \int_G \overline{f(x^{-1})}\chi(x^{-1}) dx =$$

$$= \int_G \overline{f(x)}\chi(x) dx = \overline{\int_G f(x)\overline{\chi(x)} dx} = \overline{\phi(f)}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 6.2.4. Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Então

$$(C^*(G), \pi^*(G)) \cong (C_0(\hat{G}), \Gamma),$$

onde

$$\Gamma : L_1(G) \to C_0(\hat{G}); \quad \Gamma(f) = \hat{f}, \text{ para todo } f \in L_1(G),$$

e onde $\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}dx$, $\chi \in \hat{G}$ é a transformada de Fourier de f (veja 5.1.7).

Prova: Segue de 5.1.8, 6.1.17 e 6.2.3. ■

Uma consequência imediata do teorema acima é que

$$C^*(\mathbb{R}) = C_0(\mathbb{R}), \quad C^*(S^1) = C_0(\mathbb{Z}), \quad C^*(\mathbb{Z}) = C(S^1) \quad \text{e} \quad C^*(\mathbb{Z}_p) = C(\mathbb{Z}_p)$$

já que $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\widehat{S^1} = \mathbb{Z}$, $\hat{\mathbb{Z}} = S^1$ e $\widehat{\mathbb{Z}_p} = \mathbb{Z}_p$.

Exemplo 6.2.5. Seja G qualquer grupo abeliano localmente compacto. Defina a aplicação $V : G \to \mathcal{U}(L_2(\hat{G}))$ pela equação:

$$(V_x\xi)(\chi) = \overline{\chi(x)}\xi(\chi), \qquad (x \in G, \xi \in L_2(\hat{G}), \chi \in \hat{G}).$$

Então é fácil ver que V é uma representação unitária de G no espaço de Hilbert $L_2(\hat{G})$. Queremos calcular a $*$-representação $\tilde{\pi}_V : C_0(\hat{G}) \to \mathcal{L}(L_2(\hat{G}))$ associada a V como no teorema 6.2.2. Primeiro precisamos calcular a $*$-representação $\pi_V : L_1(G) \to \mathcal{L}(L_2(\hat{G}))$ associada a V como no teorema 4.2.9. Temos, para $f \in L_1(G)$ e $\xi, \eta \in L_2(\hat{G})$, que

$$\langle \pi_V(f)\xi, \eta \rangle = \int_G \langle V_x\xi, \eta \rangle f(x)dx = \int_G \left(\int_{\hat{G}} \overline{\chi(x)}\xi(\chi)\overline{\eta(\chi)}d\chi \right) f(x)dx =$$

$$= \int_G \int_{\hat{G}} \overline{\chi(x)}\xi(\chi)\overline{\eta(\chi)}f(x)d\chi dx = \int_{\hat{G}} \int_G \overline{\chi(x)}\xi(\chi)\overline{\eta(\chi)}f(x)dxd\chi =$$

$$= \int_{\hat{G}} \left(\int_G \overline{\chi(x)}f(x)dx \right) \xi(\chi)\overline{\eta(\chi)}d\chi = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\xi(\chi)\overline{\eta(\chi)}d\chi = \langle \hat{f}\xi, \eta \rangle.$$

Assim $\pi_V(f)\xi = \hat{f}\xi$, para toda $f \in L_1(G)$ e $\xi \in L_2(\hat{(}G)$. Portanto π_V é a $*$-representação de $L_1(G)$ que age sobre $L_2(\hat{G})$ multiplicando cada $\xi \in L_2(G)$ pela transformada da função $f \in L_1(G)$.

Segue agora que a $*$-representação $\tilde{\pi}_V$ associada a V é dada pela equação

$$\tilde{\pi}(h)\xi = h\xi, \qquad (h \in C_0(\hat{G}), \xi \in L_2(\hat{G}).$$

Logo a $*$-representação $\tilde{\pi}_V$ de $C_0(\hat{G})$ associada a V é a $*$-representação "multiplicação"que age sobre $L_2(\hat{G})$ multiplicando cada função ξ de $L_2(\hat{G})$ pela função h de $C_0(\hat{G})$.

No caso em que o grupo G é $\mathbb{R}$ o exemplo acima foi feito em 4.2.16. Vamos ver como fica o exemplo acima no caso do grupo $\mathbb{Z}$. Neste caso, como $\hat{\mathbb{Z}} = S^1$, um elemento típico de $\hat{\mathbb{Z}}$ tem a forma $\chi(n) = z^n$, para algum $z \in S^1$. Assim a representação $V : \mathbb{Z} \to \mathcal{U}(L_2(S^1))$ tem a forma

$$(V_n\xi)(z) = z^{-n}\xi(z), \qquad (n \in \mathbb{Z}, \xi \in L_2(S^1), z \in S^1).$$

A $*$-representação $\pi_V : L_1(\mathbb{Z}) \to \mathcal{L}(L_2(S^1))$ associada a V fica sendo

$$(\pi_V(f)\xi)(z) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n} f(n)\right)\xi(z).$$

E a $*$-representação $\tilde{\pi}_V : C(S^1) \to \mathcal{L}(L_2(S^1))$ é dada por

$$(\tilde{\pi}_V(h)\xi)(z) = h(z)\xi(z), \qquad (h \in C(S^1), \xi \in L_2(S^1), z \in S^1).$$

No caso em que o grupo G é S^1 temos $V : S^1 \to \mathcal{U}(L_2(\mathbb{Z}))$,

$$(V_z\xi)(n) = z^{-n}\xi(n), \qquad (z \in S^1, \xi \in L_2(\mathbb{Z}), n \in \mathbb{Z}),$$

$\pi_V : L_1(S^1) \to \mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z}))$,

$$(\pi_V(f)\xi)(n) = \left(\int_{S^1} z^{-n} f(z)dz\right)\xi(n), \qquad (f \in L_1(S^1), \xi \in L_2(\mathbb{Z}), n \in \mathbb{Z}),$$

e $\tilde{\pi}_V : C_0(\mathbb{Z}) \to \mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z}))$,

$$(\tilde{\pi}_V(h)\xi)(n) = h(n)\xi(n), \qquad (h \in C_0(\mathbb{Z}), \xi \in L_2(\mathbb{Z}), n \in \mathbb{Z}).$$

Apêndice A

Apêndice

Como dito na introdução, este apêndice serve para o leitor apenas como um sistema de referência, não contendo a demonstração dos resultados. O leitor interessado nas provas pode olhar em referências como [1], [3], [5], [6], [11] e [12].

A.1 Medida e Integração

Nesta seção revisaremos alguns conceitos básicos de medida e integração. Começamos com a noção fundamental de uma σ-álgebra de conjuntos.

Definição A.1.1. Uma **σ-álgebra** de um conjunto X, é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que satisfaz:

(i) $X \in B$;

(ii) se $A \in \mathcal{B}$ então $A^c \in \mathcal{B}$; e

(iii) se $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ então $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

Um **espaço mensurável** é um par $(X, \mathcal{B})$ consistindo de um conjunto X e uma σ-álgebra $\mathcal{B}$ de X.

Desta maneira, uma σ-álgebra é nada mais que uma coleção de conjuntos que contém o expaço todo e é fechado sob a formação de complementos e uniões enumeráveis. Sendo $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c$, é claro que uma σ-álgebra é fechada sob formação de intersecções enumeráveis; mais ainda, toda σ-álgebra sempre contém o conjunto vazio (sendo $\emptyset = X^c$).

Exemplo A.1.2. A coleção $P(X)$ de todos os subconjuntos de X é uma σ-álgebra, como também é a coleção de dois elementos $\{\emptyset, X\}$. Estas são chamadas as σ-álgebras triviais; se $\mathcal{B}$ é qualquer σ-álgebra de X, então $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{B} \subset P(X)$.

Exemplo A.1.3. A intersecção de uma família arbitrária de σ-álgebras de X é também uma σ-álgebra de X. Segue que se S é qualquer coleção de subconjuntos de X, e se definimos $\mathcal{B}(S) = \cap\{\mathcal{B} : S \subset \mathcal{B}, \mathcal{B}$ é uma σ-álgebra de $X\}$, então $\mathcal{B}(S)$ é uma σ-álgebra de X, e é a menor σ-álgebra de X que contém a família S; chamaremos $\mathcal{B}(S)$ como a σ-álgebra gerada por S.

Exemplo A.1.4. Se X é um espaço topológico, escreveremos $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}(\tau)$, onde τ é a topologia de X; membros desta σ-álgebra são chamados conjuntos Borelianos e $\mathcal{B}_X$ é chamada a Borel σ-álgebra de X.

Exemplo A.1.5. Suponha que $\{(X_i, \mathcal{B}_i) : i \in I\}$ é uma família de espaços mensuráveis. Seja $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ o produto cartesiano, e seja $\pi_i : X \to X_i$ a i-ésima projeção coordenada, para cada $i \in I$. Então a σ-álgebra produto $\mathcal{B} = \prod\limits_{i \in I} \mathcal{B}_i$ é a σ-álgebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}(S)$, onde $S = \{\pi_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{B}_i, i \in I\}$, e $(X, \mathcal{B})$ é chamado o espaço mensurável produto.

Exemplo A.1.6. Se $(X, \mathcal{B})$ é um espaço mensurável, e se $X_0 \subset X$ é um subconjunto arbitrário, defina $\mathcal{B}_{|X_0} = \{A \cap X_0 : A \in \mathcal{B}\}$; equivalentemente, $\mathcal{B}_{|X_0} = \{i^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}\}$, onde $i : X_0 \to X$ denota a aplicação inclusão de X_0 em X. A σ-álgebra $\mathcal{B}_{|X_0}$ é chamada a σ-álgebra induzida por $\mathcal{B}$.

Definição A.1.7. Se $(X_i, \mathcal{B}_i)$, $i = 1, 2$, são espaços mensuráveis, então a função $f : X_1 \to X_2$ é dita **mensurável** se $f^{-1}(A) \in B_1$ para todo $A \in B_2$.

Teorema A.1.8. As seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) a composição de aplicações mensuráveis é mensurável;

(ii) se $(X_i, \mathcal{B}_i)$, $i = 1, 2$, são espaços mensuráveis, e se $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(S)$ para alguma família $S \subset P(X_2)$, então uma função $f : X_1 \to X_2$ é mensurável se e somente se $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_1$ para todo $A \in S$;

(iii) se X_i, $i = 1, 2$ são espaços topológicos, e se $f : X_1 \to X_2$ é uma aplicação contínua, então f é mensurável como uma aplicação entre os espaços mensuráveis $(X_i, \mathcal{B}_{X_i})$, $i = 1, 2$; e

(iv) se $(X,\mathcal{B})$ é um espaço mensurável, e se $f,g : X \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis (com respeito a Borel σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$), então cada um das seguintes funções é mensurável: $|f|$, $af+bg$ (onde a,b são números reais arbitrários), e fg.

Observação A.1.9. A função caracteristica de um subconjunto $E \subset X$ é a função real sobre X, sempre denotada por 1_E, que é definida por

$$1_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

É fácil ver que 1_E é mensurável se e somente se $E \in \mathcal{B}$.

Na sequência, estaremos interessados com funções de valores infinitos. Escreveremos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Usando qualquer bijeção razoável entre $\overline{\mathbb{R}}$ e $[-1,1]$ - digamos, a dada pela aplicação

$$f(x) = \begin{cases} \pm 1 & \text{se } x = \pm\infty \\ \frac{x}{1+|x|} & \text{se } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- podemos ver $\mathbb{R}$ como um espaço topológico (compacto), e assim equipá-lo com a correspondente Borel σ-álgebra. Se temos uma função real extendida - isto é, uma aplicação $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ - e se $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra sobre X, diremos que f é **mensurável** se $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ para todo $A \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. É fácil ver o seguinte: dada uma aplicação $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, seja $X_0 = f^{-1}(\mathbb{R})$, $f_0 = f_{|X_0}$, e seja $\mathcal{B}_{|X_0}$ a σ-álgebra induzida sobre o conjunto X_0; então a função real extendida f é mensurável se e somente se as seguintes condições são satisfeitas: (i) $f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{B}$ para $a \in \{-\infty, \infty\}$, e (ii) $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ é mensurável.

Se X é um conjunto e se $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de funções reais sobre X, definimos as funções reais extendidas $\liminf f_n$ e $\limsup f_n$ da maneira óbvia:

$$(\liminf f_n)(x) = \liminf f_n(x),$$

$$(\limsup f_n)(x) = \limsup f_n(x).$$

Teorema A.1.10. Suponha que $(X,\mathcal{B})$ é um espaço mensurável, e suponha que $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de funções reais sobre X. Então:

(i) $\sup_n f_n$ e $\inf_n f_n$ são funções reais extendidas mensuráveis sobre X;

(ii) $\liminf f_n$ e $\limsup f_n$ são funções reais extendidas mensuráveis sobre X; e

(iii) o conjunto $C = \{x \in X : \{f_n(x)\}$ converge para um número real finito$\}$ é mensurável, isto é, $C \in \mathcal{B}$; mais ainda, a função $f : C \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lim_n f_n(x)$ é mensurável (com respeito a σ-álgebra induzida $\mathcal{B}_{|_C}$). (Em particular, o limite pontual de uma sequência de funções mensuráveis que converge pontualmente é também uma função mensurável.)

Definição A.1.11. Um função **simples** é uma função da forma $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i 1_{E_i}$, onde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{B}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Teorema A.1.12. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é qualquer função mensurável não-negativa, então existe uma sequência $\{f_n\}_n$ de funções simples não-negativas sobre $(X, \mathcal{B})$ tal que:

(i) $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \ldots$, para todo $x \in X$; e

(ii) $f(x) = \lim_n f_n(x) = \sup_n f_n(x)$ para todo $x \in X$.

Vamos agora dar a importante noção de medida.

Definição A.1.13. Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma **medida** (positiva) sobre $(X, \mathcal{B})$ é uma função $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ com as seguintes propriedades:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$; e

(ii) μ é enumeravelmente aditiva - isto é, se $\{E_n\}_n$ é uma sequência enumerável em $\mathcal{B}$ de conjuntos dois a dois disjuntos então

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Um **espaço de medida** é uma tripla $(X, \mathcal{B}, \mu)$, consistindo de um espaço mensurável junto com uma medida definida sobre ele. Uma medida μ é dita finita se $\mu(X) < \infty$.

Listamos agora algumas consequências elementares da definição no próximo teorema.

Teorema A.1.14. Seja $(X, \mathbb{B}, \mu)$ um espaço de medida; então,

(i) μ é "monótona": isto é, se $A, B \in \mathcal{B}$ e $A \subset B$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$;

(ii) μ é "enumeravelmente subaditiva": isto é, se $E_n \in \mathcal{B}$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, então

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n);$$

(iii) μ é "contínua inferiormente": isto é, $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$ é uma sequência crescente de conjuntos de $\mathcal{B}$, então

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n);$$

(iv) μ é "contínua superiormente se restrita a conjuntos de medida finita": isto é, se $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$ é uma sequência decrescente de conjuntos em $\mathcal{B}$, e se $\mu(E_1) < \infty$, então

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Listamos agora alguns exemplos de medidas.

Exemplo A.1.15. Seja X qualquer conjunto, seja $\mathcal{B} = P(X)$ e defina $\mu(E)$ como n se E é finito e tem exatamente n elementos, e defina $\mu(E)$ como ∞ se E é um conjunto infinito. É fácil ver que μ é uma medida sobre $(X, P(X))$, e é chamada a **medida de contagem** sobre X.

Por exemplo, se $X = \mathbb{N}$, se $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$, e se μ denota a medida de contagem sobre $\mathbb{N}$, vemos que $\{E_n\}_n$ é uma sequência decrescente de conjutos em $\mathbb{N}$, com $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$; mas $\mu(E_n) = \infty$ para todo n, e assim $\lim_n \mu(E_n) \neq \mu(\cap_n E_n)$; desta maneira, se não nos restringimos a conjuntos de medida finita, uma medida não precisa ser contínua inferiormente - veja teorema A.1.14.

Exemplo A.1.16. É um fato, cuja prova não daremos aqui, que existe uma única medida m definida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ com a propriedade que $m([a, b]) = b - a$ sempre que $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Esta medida é chamada a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. (Desta maneira a medida de Lebesgue de um intervalo é o seu comprimento.)

Mais geralmente, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe uma única medida m^n definida sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ tal que se $B = \prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ é a "caixa"n-dimensional com lados $[a_i, b_i]$, então $m^n(B) = \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$; esta medida é chamada a medida de Lebesgue n-dimensional; desta maneira, a medida de Lebesgue n-dimensional de uma caixa em $\mathbb{R}^n$ é o seu volume (n-dimensional).

Dado uma espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e uma função não-negativa e $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mensurável $f : X \to \mathbb{R}$, existe uma única maneira natural de associar um valor (em $[0, \infty]$) à expressão $\int_X f d\mu$. O teorema a seguir como isto é feito. Levamos o leitor interessado na prova em olhar em referências padrão como em [5].

Teorema A.1.17. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida; denote por M_+ a classe de todas as funções $f : X \to [0, \infty]$ que são $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mensuráveis. Existe uma única aplicação $M_+ \ni f \mapsto \int_X f d\mu \in [0, \infty]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\int_X 1_E d\mu = \mu(E)$, para todo $E \in \mathcal{B}$;

(ii) se $f, g \in M_+$ e $a, b \in [0, \infty)$ então $\int_X (af + bg) d\mu = a \int_X f d\mu + b \int_X g d\mu$;

(iii) para qualquer $f \in M_+$, temos

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu,$$

para qualquer sequência não-decrescente $\{f_n\}$ de funções simples que converge pontualmente para f.

Teorema A.1.18. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. São verdadeiras:

(i) uma função $f : X \to \mathbb{C}$ é $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mensurável se e somente se Ref e Imf são $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mensuráveis, onde, é claro, Ref e Imf denotam as partes real e imaginária de f, respectivamente;

(ii) uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mensurável se e somente se $f_+ = max(f, 0)$ (a parte positiva de f) e $f_- = max(-f, 0)$ (a parte negativa de f) são $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mensuráveis;

(iii) se $f : X \to \mathbb{C}$ então $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$, onde $\{f_j : 1 \leq j \leq 4\}$ são funções não-negativas definidas por $f_1 = (Ref)_+$, $f_2 = (Ref)_-$, $f_3 = (Imf)_+$ e $f_4 = (Imf)_-$. Mais ainda, temos que $0 \leq f_j(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in X$;

(iv) se $f, g : X \to [0, \infty)$ são funções mensuráveis não-negativas sobre X tal que $f(x) \leq g(x)$, então $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Usando o teorema A.1.18, podemos falar de integral de uma apropriada função complexa. Desta maneira, diremos que uma função $f : X \to \mathbb{C}$ é **integrável** com respeito a uma medida μ se (i) f é $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mensurável, e se (ii) $\int_X |f| d\mu < \infty$. (Isto faz sentido sendo que a mensurabilidade de f implica a mensurabilidade de $|f|$.) Mais ainda se $\{f_j : 1 \leq j \leq 4\}$ são como no teorema A.1.18(iii) acima, então podemos definir

$$\int_X f d\mu = (\int_X f_1 d\mu - \int_X f_2 d\mu) + i(\int_X f_3 d\mu - \int_X f_4 d\mu).$$

É fácil verificar que o conjunto das funções μ-integráveis formam um espaço vetorial e que a aplicação $f \mapsto \int_X f d\mu$ define um funcional linear sobre este espaço vetorial.

Definição A.1.19. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{B}_X$ a σ-álgebra dos Borelianos de X. Uma medida $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ é dita **regular** se

(i) $\mu(K) < \infty, \forall K \subset X$ compacto;

(ii) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ compacto}\}, \forall E \in B_X,\ \mu(E) < \infty$; e

(iii) $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \subset X \text{ aberto}, E \subset U\}, \forall E \in B_X$.

Teorema A.1.20. Seja X um espaço localmente compacto e seja μ uma medida regular sobre $(X, \mathcal{B}_X)$. Então, existe um único subconjunto fechado E de X tal que $\mu(E^c) = 0$ e tal que $\mu(E \cap U) > 0$ se U é aberto em X e $U \cap E \neq \emptyset$. (O conjunto E é chamado o **suporte** de μ e é denotado por $S(\mu)$.)

Teorema A.1.21. Seja X um espaço localmente compacto e f uma função real ou complexa sobre X. Considere X equipado com a σ-álgebra dos Borelianos e seja μ uma medida regular sobre $(X, \mathcal{B}_X)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f é mensurável;

(ii) $f 1_U$ é mensurável para todos os subconjuntos U abertos de X tal que $\mu(U) < \infty$;

(iii) $f 1_K$ é mensurável para todos os subconjuntos compactos K de X; e

(iv) $f\phi$ é mensurável para todas as funções $\phi \in C_{00}^{+}(X)$, onde $C_{00}^{+}(X)$ é o espaço das funções contínuas não-negativas definidas em X e que tem suporte compacto.

Observação A.1.22. O espaço $L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$:
Se $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de medida, seja $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ o espaço vetorial de todas a funções μ-integráveis $f : X \to \mathbb{C}$. Seja $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}_1 : \int_X |f| d\mu = 0\}$; não é difícil mostrar que uma função f pertence a $\mathcal{N}$, se e somente se, f se anula em μ-quase todo

lugar, significando que $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$. Segue que $\mathcal{N}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}_1$; defina $L_1 = L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ como sendo o espaço quociente $\mathcal{L}_1/\mathcal{N}$; (desta maneira duas funções integráveis definem o mesmo elemento de L_1 precisamente quando elas concordam em μ-quase todo lugar de X); mais ainda, é verdade que a equação

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu$$

pode ser pensada para definir uma norma sobre L_1. (Estritamente falando, um elemento de L_1 não é uma função, mas toda uma classe de equivalência de funções, (quaisquer duas das quais concordam em quase todo lugar), mas a integral na equação acima depende somente da classe de equivalência da função f; em outras palavras, a equação acima define uma semi-norma sobre $\mathcal{L}_1$ que, por sua vez, é uma norma sobre o espaço quociente L_1.) Mais ainda, é também verdade que $L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de Banach.

De maneira exatamente similar, os espaços $L_p(X, \mathcal{B}, \mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ são definidos; sendo que os casos $p \in \{1, 2, \infty\}$ irão ser de importância para nós, e sendo que não usaremos outros valores de p neste trabalho, discutiremos somente estes casos.

Observação A.1.23. O espaço $L_2(X, \mathcal{B}, \mu)$: Seja $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(X, \mathcal{B}, \mu)$ o conjunto das funções $f : X \to \mathbb{C}$ $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mensuráveis tal que $|f|^2 \in \mathcal{L}_1$; para $f, g \in \mathcal{L}_2$, defina $< f, g >= \int_X f\overline{g} d\mu$. É verdade que $\mathcal{L}_2$ é um espaço vetorial e que a equação $\|f\|_2 =< f, f >^{\frac{1}{2}}$ define uma semi-norma sobre $\mathcal{L}_2$; como antes, se definirmos $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}_2 : \|f\|_2 = 0\}$(=conjunto das funções mensuráveis que são 0 q.s.(quase sempre)), então a seminorma $\|\cdot\|_2$ descende para uma norma sobre o espaço quociente $L_2 = \mathcal{L}_2/\mathcal{N}$. Como no caso de L_1, olhamos os elementos de L_2 como funções (e não como classes de equivalências de funções) com a condição de considerar duas funções como sendo as mesmas se elas concordam q.s. Quando for necessário chamar a atenção sobre a medida em questão, usaremos expressões como $f = g$ $\mu-$quase sempre. É um fato - talvez não muito surpreso - que L_2 é um espaço de Hilbert com respeito a definição de produto interno natural.

Observação A.1.24. O espaço $L_\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$:
O caso L_∞ reserva uma discussão especial por causa de certas características da norma em questão. Naturalmente, queremos, aqui, olhar funções mensuráveis limitadas com a norma sendo dada pela "norma do supremo". A única complicação é causada por sermos forçados a considerar duas funções mensuráveis como sendo identicas se elas concordam q.s. Sendo assim, o que acontece sobre um conjunto de μ-medida nula deveria ser relevante

para a discussão. Desta maneira, por exemplo, se estamos trabalhando com a medida de Lebesgue m sobre $\mathbb{R}$, então sendo $m(A) = 0$ para todo conjunto enumerável, deveríamos olhar a função $f(x) = 0\ \forall x$ como sendo a mesma que a função g que é definida como f fora do conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais mas satisfaz $g(n) = n$, para $n \in \mathbb{N}$; note que g é não limitada, enquanto que f é.

Sendo assim, defina $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ como sendo a classe de todas as funções $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_\mathbb{C})$-mensuráveis que são essencialmente limitadas; desta maneira $f \in \mathcal{L}_\infty$ precisamente quando existe $E \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(X - E) = 0$ e f é limitada sobre E; desta maneira os elementos de $\mathcal{L}_\infty$ são funções mensuráveis que são "limitadas q.s.".

Defina $\|f\|_\infty = \inf\{K > 0 :$ existe $N \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| \leq K$ sempre que $x \in X - N\}$.

Finalmente defina $L_\infty = L_\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ como sendo o espaço quociente $L_\infty = \mathcal{L}_\infty/\mathcal{N}$, onde, como antes, $\mathcal{N}$ é o conjunto das funções mensuráveis que se anulam q.s. (que é também o mesmo que $\{f \in \mathcal{L} : \|f\|_\infty = 0\}$). Segue então que L_∞ é um espaço de Banach.

Observação A.1.25. É um fato que se X é um espaço topológico localmente compacto, se μ é uma medida regular sobre $(X, \mathcal{B}_X)$ e se $1 \leq p < \infty$, então o espaço dual de $L_p(X, \mathcal{B}, \mu)$ pode ser naturalmente identificado com $L_{p'}(X, \mathcal{B}, \mu)$, onde o "índice dual"$p'$ é relacionado a p pela equação $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, ou equivalentemente, p' é definido por:

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{se } 1 < p < \infty \\ \infty & \text{se } p = 1 \end{cases}$$

onde a "dualidade"é dada por integração, desta maneira: se $f \in L_p$ e $g \in L_{p'}$, então é verdade que $fg \in L_1$ e se definimos

$$\phi_g(f) = \int_X fg d\mu, \quad f \in L_p$$

então a correspôndencia $g \mapsto \phi_g$ estabelece o isomorfismo isométrico $L_{p'} \cong (L_p)^*$.

Listamos alguns resultados básicos sobre teoria da integração.

Teorema A.1.26. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida:

(i) (Lema de Fatou) se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis não-negativas sobre X, então,
$$\int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \left(\int_X f_n d\mu \right).$$

(ii) (teorema da convergência monótona) suponha que $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis não-negativas sobre X, suponha que f é uma função mensurável não-negativa, e suponha que para para quase todo $x \in X$, é verdade que sequência $\{f_n(x)\}$ é uma sequência não-decrescente de números reais que converge para $f(x)$; então,

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu = \sup \int_X f_n d\mu.$$

(iii) (teorema da convergência dominada) suponha que $\{f_n\}$ é uma sequência em $L_p(X, \mathcal{B}, \mu)$ para algum $p \in [1, \infty)$; suponha que existe $g \in L_p$ tal que $|f_n| \leq g$ q.s, para cada n; suponha que a sequência $\{f_n(x)\}$ converge para $f(x)$ para μ-quase todo $x \in X$; então $f \in L_p$ e $\|f_n - f\|_p \to 0$ quando $n \to \infty$.

(iv) (desigualdade de Holder) se $f \in L_p(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $g \in L_{p'}(X, \mathcal{B}, \mu)$ então $fg \in L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

Observação A.1.27. Recíprocamente, é verdade que se $\{f_n\}$ é uma sequência que converge para f em L_p, então existe uma subsequência, digamos $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ e uma $g \in L_p$ tal que $|f_{n_k}| \leq g$ q.s, para cada k, e tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge para $f(x)$ para μ-quase todo $x \in X$; tudo isto para $p \in [1, \infty)$. Desta maneira, módulo a necessidade de se passar a uma subsequência, o teorema da convergência dominada essenciamente descreve a convergência em L_p, desde que $1 \leq p < \infty$.

Teorema A.1.28. Sejam $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$ espaços de medidas, onde X, Y são espaços localmente compactos e μ, ν são medidas regulares. Seja $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ a σ-álgebra produto, que é definida como a σ-álgebra gerada por todos os "retangulos mensuráveis´´ - isto é, conjuntos da forma $A \times B$, $A \in \mathcal{B}_X$, $B \in \mathcal{B}_Y$.

(i) Existe uma única medida λ (que é usualmente denotada por $\mu \times \nu$ e chamada a **medida produto**) definida sobre $\mathcal{B}$ com a propriedade que

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad \forall\ A \in \mathcal{B}_X, \quad B \in \mathcal{B}_Y.$$

(ii) (teorema de Fubini) Suponha que $f \in L_1(X \times Y, \mathcal{B}, \lambda)$; então,

(a) $Y \ni y \mapsto f(x, y) \in \mathbb{C}$ (resp. $X \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{C}$) é uma função complexa $(\mathcal{B}_Y, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mensurável (resp. $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mensurável) que pertence a $L_1(Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$

(resp. $L_1(X, \mathcal{B}_X, \mu)$), para μ-quase todo $x \in X$ (resp. para ν-quase todo $y \in Y$);

(b) a função $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ (resp. $y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$) definida como sendo 0 onde a integral não existe, é uma função complexa $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mensurável (resp. $(\mathcal{B}_Y, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mensurável), que define um elemento de $L_1(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ (resp. $L_1(Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$); mais ainda,

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f d\lambda = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

(iii) Seja f uma função complexa ou real extendida sobre $X \times Y$ que é mensurável e se anula fora de um conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, onde cada $A_n \in \mathcal{B}$ e $\lambda(A_n) < \infty$. As três integrais

(a) $\int_{X \times Y} f(x,y)d\lambda(x,y)$, $\int_X \int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x)$, $\int_Y \int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y)$

são finitas e iguais umas as outras se e somente se uma das integrais

(b) $\int_{X \times Y} |f(x,y)|d\lambda(x,y)$, $\int_X \int_Y |f(x,y)|d\nu(y)d\mu(x)$, $\int_Y \int_X |f(x,y)|d\mu(x)d\nu(y)$

é finita.

Teorema A.1.29. Seja $p \in [1, \infty)$ e $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ um espaço de medida regular (ou seja μ regular), onde X é um espaço localmente compacto.

(i) O espaço vetorial $C_{00}(X)$ das funções contínuas $f : X \to \mathbb{C}$ de suporte compacto, é um subespaço denso de L_p.

(ii) Para $f \in L_p$, temos

$$\|f\|_p = \sup\{|\int_X f\phi d\mu| : \phi \in C_{00}(X), \|\phi\|_{p'} \leq 1\}.$$

(iii) Se $f : X \to \mathbb{R}_+$ é uma função mensurável tal que

$$\sup\{\int_F f^p d\mu : F \text{ é compacto} F \subset X\} = \infty,$$

então

$$\sup\{\int_X f\phi d\mu : \phi \in C_{00}^+(X), \|\phi\|_{p'} \leq 1\} = \infty.$$

Teorema A.1.30. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, e seja $f : X \to [0, \infty)$ uma função integrável não negativa. Então a equação

$$\nu(E) = \int_E f d\mu = \int_X 1_E f d\mu$$

define uma medida finita sobre $(X, \mathcal{B})$, que algumas vezes é chamada a "integral indefinida"de f; esta medida tem a propriedade que

$$E \in \mathcal{B}, \quad \mu(E) = 0 \Rightarrow \quad \nu(E) = 0. \tag{A.1}$$

Se medidas μ e ν são relacionadas como na equação A.1, a medida ν é dita **absolutamente contínua com relação a μ.**

Teorema A.1.31. (Radon-Nikodym) Sejam μ e ν medidas regulares definidas sobre o espaço mensurável $(X, \mathcal{B}_X)$, onde X é um espaço localmente compacto. Suponha que ν é absolutamente contínua com relação a μ. Então existe uma função não-negativa $g \in L_1(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ com a propriedade que

$$\nu(E) = \int_E g d\mu, \quad \forall\ E \in \mathcal{B}_X;$$

a função g é unicamente determinada μ-q.s. pela exigência acima, no sentido que se g_1 é outra função em $L_1(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ que satisfaz a condição acima, então $g = g_1$ μ-q.s.

Mais ainda, é verdade que se $f : X \to [0, \infty)$ é qualquer função mensurável, então

$$\int_X f d\nu = \int_X f g d\mu.$$

Desta maneira, uma medida (regular) é absolutamente contínua com respeito a μ se e somente se ela aparece como integral indefinida de alguma função não-negativa que é integrável com respeito a μ; a função g, cuja μ-classe de equivalência é unicamente determinada por ν, é chamada a derivada de Radon-Nikodym de ν com respeito a μ, e ambas das seguintes expressões são usadas para denotar esta relação:

$$g = \frac{d\nu}{d\mu}, \quad d\nu = g d\mu.$$

A.2 Medidas Complexas

Definição A.2.1. Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma **medida complexa** sobre $(X, \mathcal{B})$ é uma aplicação $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ satisfazendo:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) μ é enumeravelmente aditiva - isto é, se $\{E_n\}_n$ é uma sequência enumerável em $\mathcal{B}$ dois a dois disjuntos então

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

O conjunto de todas a medidas complexas sobre X será denotado por $M(X)$.

Note que uma medida (positiva) $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ é uma medida complexa se, e somente se, μ é finita, ou seja, $\mu(X) < \infty$.

Teorema A.2.2. Suponha que μ é uma medida complexa sobre $(X, \mathcal{B})$. Defina $|\mu| : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ pondo

$$|\mu|(E) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| : \{E_1, \ldots, E_n\} \text{ é uma partição de } E\}.$$

($\{E_1, \ldots, E_n\}$ é uma partição de E se os $E_i's$ são dois a dois disjuntos e $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$.) Então $|\mu|$ é uma medida (positiva) finita.

Dada uma medida complexa μ sobre $(X, \mathcal{B})$ como acima, a medida positiva $|\mu|$ é chamada a medida de total variação de μ, e o número $\|\mu\| = |\mu|(X)$ é chamada a variação total da medida μ.

Teorema A.2.3. Seja X um espaço localmente compacto e μ uma medida complexa sobre $(X, \mathcal{B}_X)$. As seguintes condições sobre $E \in \mathcal{B}_X$ são equivalentes:

(i) $|\mu|(E) = 0$;

(ii) $\mu(A) = 0$ para todo subconjunto mensurável A de E; e

(iii) $\mu(F) = 0$ para todo subconjunto compacto F de E.

Teorema A.2.4. O conjunto $M(X)$ com operações de soma e produto escalar pontuais e norma $\mu \to \|\mu\|$ é um espaço de Banach. Mais ainda para $\mu, \nu \in M(X)$ temos

(i) $|\alpha\mu| = |\alpha||\mu|$; e

(ii) $|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|$.

Dada $\mu \in M(X)$ é possivel escrever

$$\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4),$$

onde $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ são medidas positivas e finitas tais que se $f \in L_1(X, \mathcal{B}, |\mu|)$ então $f \in L_1(X, \mathcal{B}, \mu_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Desta forma definimos

$$\int_X f d\mu = (\int_X f d\mu_1 - \int_X f d\mu_2) + i(\int_X f d\mu_3 - \int_X d\mu_4).$$

Teorema A.2.5. Seja $\mu \in$ uma medida complexa sobre $(X, \mathcal{B})$ e $f \in L_1(X, \mathcal{B}, |\mu|)$. Então

(i) $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d|\mu|$; e

(ii) existe uma função mensurável g tal que $|g(x)| = 1$ para todo $x \in X$ e

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f(x) g(x) d|\mu|(x) \quad \text{para} f \in L_1(X, \mathcal{B}, |\mu|).$$

Teorema A.2.6. Seja X um espaço localmente compacto. Se $\mu \in M(X)$ então a equação

$$\phi_\mu(f) = \int_X f d\mu$$

define um funcional linear limitado $\phi_\mu \in C_0(X)^*$. Mais ainda a aplicação

$$M(X) \ni \mu \mapsto \phi_\mu \in C_0(X)^*$$

é um isomorfismo isométrico de espaços de Banach.

Teorema A.2.7. Seja X um espaço localmente compacto e seja ϕ qualquer funcional em $C_0(X)^*$. Para toda $f \in C_0^+(X)$, seja

$$|\phi|(f) = \sup\{|\phi(g)| : g \in C_0(X), |g| \leq f\}.$$

Então $|\phi|$ pode ser extendido a um funcional linear não-negativo em $C_0(X)^*$. Mais ainda, usando a notação do teorema acima, se $\mu \in M(X)$ temos $|\phi_\mu| = \phi_{|\mu|}$.

Definição A.2.8. Sejam μ uma medida conplexa e λ uma medida positiva. Dizemos que μ é **absolutamente contínua com respeito à** λ se a medida positiva $|\mu|$ for absolutamente contínua com respeito a λ.

Teorema A.2.9. Seja X um espaço localmente compacto. Sejam μ uma medida complexa sobre $(X, \mathcal{B}_X)$ e λ uma medida (positiva) regular sobre $(X, \mathcal{B}_X)$. Segue do teorema de Radon-Nikodym que se μ é absolutamente contínua com respeito a λ como acima então existe uma única função $g \in L_1(X, \mathcal{B}_X, \lambda)$ que denotaremos por $g = \frac{d\lambda}{d\mu}$ tal que

$$\int_X fgd\mu = \int_X fd\lambda,$$

para toda $f \in L_1(X, \mathcal{B}_X, \lambda)$. Mais ainda, vale que a aplicação

$$M(X) \ni \mu \mapsto \frac{d\mu}{d\lambda} \in L_1(X, \mathcal{B}_X, \lambda)$$

é um isomorfismo isométrico de espaços de Banach.

Seja μ uma medida complexa sobre um espaço de medida $(X, \mathcal{B})$. O teorema de Lebesgue sobre convergência dominada é válido para integrais com respeito a μ. Mais precisamente, se f é um μ-q.s limite de uma sequência $\{f_n\}_n$ de funções mensuráveis sobre X e se existe uma função $g \in L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para μ-quase todo $x \in X$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$ existe e é igual a $\int_X f d\mu$.

Discutiremos agora medidas produtos $\mu \times \nu$ onde μ, ν são medidas complexas. Sejam $(X, \mathcal{B}_X)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y)$ espaços mensuráveis, onde X, Y são espaços localmente compactos. Suponha que μ, ν são medidas complexas sobre $(X, \mathcal{B}_X)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y)$ respectivamente. Então existe uma única medida complexa, denotada por $\mu \times \nu$ sobre $(X \times Y, \mathcal{B}_{X\times Y})$ tal que

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall\ A \in \mathcal{B}_X,\ B \in \mathcal{B}_Y.$$

Mais ainda vale que

$$|\mu \times \nu| = |\mu| \times |\nu|.$$

O teorema de Fubini para medidas complexas também é válido. Ou seja, se $f \in L_1(X \times Y, |\mu \times \nu|)$ então,

(a) $Y \ni y \mapsto f(x, y) \in \mathbb{C}$ (resp. $X \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{C}$) é uma função complexa $(\mathcal{B}_Y, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mensurável (resp. $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mensurável) que pertence a $L_1(Y, \mathcal{B}_Y, |\nu|)$ (resp. $L_1(X, \mathcal{B}_X, |\mu|)$), para μ-quase todo $x \in X$ (resp. para ν-quase todo $y \in Y$);

(b) a função $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ (resp. $y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$) definida como sendo 0 onde a integral não existe, é uma função complexa $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mensurável (resp. $(\mathcal{B}_Y, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mensurável), que define um elemento de $L_1(X, \mathcal{B}_X, |\mu|)$ (resp. $L_1(Y, \mathcal{B}_Y, |\nu|)$); mais ainda,

$$\int_X (\int_Y f(x,y)d\nu)(y)d\mu(x) = \int_{X\times Y} fd(\mu \times \nu) = \int_Y (\int_X f(x,y)d\mu(x))d\nu(y).$$

A.3 Álgebras Normadas

Nesta seção esboçaremos a teoria elementar de álgebras de Banach. Apresentamos aqui somente parte da teoria, o necessário para o nosso estudo de $M(G)$ e suas sub-álgebras.

Definição A.3.1. Seja A um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Suponha que se tem definido um produto em A, ou seja, uma aplicação $A \times A \ni (x,y) \mapsto xy \in A$ que satisfaz:

(i) $x(yz) = (xy)z$;

(ii) $x(y+z) = xy + xz$ e $(x+y)z = xz + yz$; e

(iii) $(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$,

para todos $x, y, z \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então A é chamada uma **álgebra**. Uma **álgebra com unidade** é uma álgebra tendo uma identidade multiplicativa $1 \neq 0$; uma **álgebra comutativa** é uma álgebra para o qual $xy = yx$, para todo $x, y \in A$.

Um **álgebra de Banach** (resp. **álgebra normada**) é um espaço de Banach (resp. espaço vetorial normado) que é também uma álgebra e satisfaz a seguinte condição:

(iv) $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$

para todos $x, y \in A$. Se A tem unidade iremos exigir que

(v) $\|1\| = 1$.

Uma **$*$-álgebra** é uma álgebra A com uma "involução", ou seja, uma aplicação $* : A \ni x \mapsto x^* \in A$ que satisfaz:

(i) $(\alpha x + y)^* = \overline{\alpha} x^* + y^*$;

(ii) $(xy)^* = y^* x^*$; e

(iii) $(x^*)^* = x$;

para todos $x, y \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

Uma **$*$-álgebra normada** é uma $*$-álgebra A que também é uma álgebra normada e que satisfaz:

(iv) $\|x^*\| = \|x\|$.

para todo $x \in A$.

Uma **$*$-álgebra de Banach** é uma $*$-álgebra normada que é completa.

Uma **C^*-álgebra** é uma $*$-álgebra de Banach que satisfaz:

(v) $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

para todo $x \in A$.

Um **homomorfismo de álgebras** é uma aplicação ϕ de uma álgebra A em uma álgebra B que é linear e também multiplicativo:

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Se as álgebras A e B são $*$-álgebras e se ϕ preserva $*$, significando que

$$\phi(x^*) = \phi(x)^*, \quad \text{para todo } x \in A,$$

então ϕ é chamado um **$*$-homomorfismo**. O homomorfismo ϕ é **contrativo**, se $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$, para todo $x \in A$ e é **isométrico** se $\|\phi(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in A$. Uma **representação** (resp. **$*$-representação**) de uma álgebra (resp. $*$-álgebra) A sobre um espaço de Hilbert H é um homomorfismo (resp. $*$-homomorfismo) π de A em $\mathcal{L}(H)$ (o espaço dos operadores lineares e limitados de H em H).

As álgebras A e B são **isomorfas** se existe um homomorfismo bijetivo, ou seja, um isomorfismo ϕ de A em B. Se A e B são $*$-álgebras exigimos ainda que ϕ preserve $*$.

Um subespaço linear I de uma álgebra A é um **ideal à esquerda** se para todos $x \in I$, $a \in A$ implicam que $ax \in I$. Um subespaço linear I é um **ideal a direita** se para todos $x \in I$, $a \in A$ implicam que $xa \in I$. Um **ideal bilateral**, ou simplesmente, um **ideal** é um ideal à esquerda que também é um ideal à direita.

Teorema A.3.2. Toda $*$-representação π de uma $*$-álgebra de Banach A é contrativa, isto é, $\|\pi(a)\| \leq \|a\|_A$ para todo $a \in A$.

Exemplo A.3.3. O espaço $B(X)$ de todas as funções complexas limitadas sobre um conjunto X é um exemplo de C^*-álgebra comutativa, com respeito as operações pontuais - isto é, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ e $(fg)(x) = f(x)g(x)$ -, a involução $f^*(x) = \overline{f(x)}$ e a norma $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Exemplo A.3.4. Se A é uma álgebra normada, e se B é um subespaço vetorial de A que é fechado sob multiplicação, então B é uma álgebra normada por si própria (com respeito a estrutura induzida por A) e é chamada um **sub-álgebra normada** de A; uma sub-álgebra normada B de uma álgebra de Banach A é uma álgebra de Banach (na estrutura induzida) - isto é, uma **sub-álgebra de Banach** - se, e somente se, B é um subespaço fechado de A. Similarmente, se define **$*$-sub-álgebra** e **C^*-subálgebra**.

Exemplo A.3.5. Seja A uma álgebra normada e I um ideal bilateral fechado em A. Seja $A/I = \{x + I : x \in A\}$ o espaço quociente. Para $x + I, y + I \in A/I$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ defina $(x+I) + (y+I) = (x+y) + I$, $\alpha(x+I) = (\alpha x) + I$, $(x+I)(y+I) = xy + I$ e

$$\|x + I\| = \inf\{\|x - z\| : z \in I\} = dist(x, I).$$

Com estas operações, A/I é uma álgebra normada, e A/I é uma álgebra de Banach se A o é. Se A tem unidade 1 e $\|1\| = 1$, então $1 + I$ é a unidade de A/I e $\|1 + I\| = 1$.

Exemplo A.3.6. Suponha que A é uma álgebra normada não-completa, e denote por $\overline{A}$ o seu completamento como espaço de Banach. Então $\overline{A}$ adquire uma estrutura natural de álgebra de Banach de tal forma que a multiplicação, quando restrita ao elemento de A, coincide com a multiplicação inicial de A e sendo assim A é uma sub-álgebra normada densa de $\overline{A}$. Da mesma forma se temos uma $*$-álgebra normada (não-completa) A, o seu completamento $\overline{A}$ é uma $*$-álgebra de Banach, tal que A é uma $*$-sub-álgebra normada densa em $\overline{A}$.

Exemplo A.3.7. Seja X qualquer espaço localmente compacto. Então o conjunto $C_{00}(X)$ da funções complexas contínuas sobre X que se anulam fora de um compacto, é uma $*$-sub-álgebra normada (não-completa) de $B(X)$. O completamento de $C_{00}(X)$ é a $*$-álgebra de Banach $C_0(X)$ - que na verdade é uma C^*-álgebra - das funções complexas contínuas sobre X que se anulam no infinito ($f : X \to \mathbb{C}$ se anula no infinito se para todo $\epsilon > 0$ existe $K \subset X$ compacto tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \notin K$).

Em particular, se X é uma espaço compacto de Haudorff, então o espaço $C(X)$ de todas as funções contínuas sobre X é uma C^*-álgebra.

Exemplo A.3.8. Seja G um grupo topológico localmente compacto. Então, como visto no capítulo 2, o espaço $M(G)$ de todas as medidas complexas sobre G é uma $*$-álgebra de Banach com unidade. $M(G)$ é comutativa se, e somente se, G é abeliano. O conjunto $M_a(G)$ de todas a medidas em $M(G)$ que são absolutamente contínuas em relação a medida de Haar, é uma $*$-sub-álgebra de Banach - mais ainda um ideal - em $M(G)$ que é isomorfo com a $*$-álgebra de Banach $L_1(G)$.

Agora mostramos que qualquer álgebra pode ser incluída em uma álgebra com unidade.

Teorema A.3.9. Seja A uma álgebra. Seja A_u o conjunto de todos os pares (x, λ), com $x \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Defina para $(x, \lambda), (y, \mu) \in A_u$ e $\alpha \in \mathbb{C}$:

(i) $\alpha(x, \lambda) = (\alpha x, \alpha\lambda)$;

(ii) $(x, \lambda) + (y, \mu) = (x + y, \lambda + \mu)$; e

(iii) $(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu)$.

Então A_u é uma álgebra com unidade $(0, 1)$, e o conjunto $\{(x, 0) : x \in A\}$ é um ideal de A_u que é isomorfo com A. A álgebra A_u é comutativa se, e somente se, A é comutativa. Se A é uma $*$-álgebra então A_u também é uma $*$-álgebra com a involução:

(iv) $(x, \lambda)^* = (x^*, \overline{\lambda})$.

E se A é uma álgebra normada (resp. álgebra de Banach, C^*-álgebra) então A_u também é uma álgebra normada (resp. álgebra de Banach, C^*-álgebra) com a norma:

(v) $\|(x, \lambda)\| = \sup\limits_{y \in A, \|y\| \leq 1} \|xy + \lambda y\|$.

A álgebra A_u como acima é chamada a **unitização** de A.

Definição A.3.10. Seja A uma álgebra. Um **funcional linear multiplicativo** ϕ sobre A é um funcional linear não-nulo sobre A que é multiplicativo:

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Em outras palavras ϕ é um homomorfismo de A sobre $\mathbb{C}$.

A coleção de todos os funcionais lineares multiplicativos sobre A é chamado o **espectro** de A e é denotado por $\hat{A}$. Para cada $x \in A$, a **transformada de Fourier** de x é definida como sendo a função $\hat{x} : \hat{A} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\hat{x}(\phi) = \phi(x), \quad \text{para todo } \phi \in \hat{A}.$$

A **topologia de Gelfand** para $\hat{A}$ é a menor topologia sobre $\hat{A}$ para o qual todas as funções $\hat{x}$ são contínuas. Uma base para essa topologia é formada pelos conjuntos

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n; \epsilon; \phi_0) = \{\phi \in \hat{A} : |\hat{x_i}(\phi) - \hat{x_i}(\phi_0)| < \epsilon, \text{ para todo } i = 1, \ldots, n\},$$

onde $x_1, \ldots, x_n \in A$, $\epsilon > 0$, $\phi_0 \in \hat{A}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Teorema A.3.11. Seja A uma álgebra de Banach. Todo funcional linear multiplicativo ϕ sobre A é limitado, e $\|\phi\| \leq 1$. Se A tem unidade e $\|1\| = 1$ então $\|\phi\| = 1$.

Teorema A.3.12. Seja A uma álgebra de Banach comutativa. Então,

(i) o espectro de A, $\hat{A}$ é um espaço localmente compacto (com respeito a topologia de Gelfand), que é compacto no caso em que a álgebra de Banach A tem unidade; e

(ii) para cada $x \in A$ a sua transformada de Fourier $\hat{x}$ é uma função em $C_0(\hat{A})$ e a aplicação $\Gamma : A \ni x \mapsto \hat{x} \in C_0(\hat{A})$ é um homomorfismo contrativo de álgebras de Banach que preserva $*$ no caso de A ser uma $*$-álgebra de Banach.

(iii) (Gelfand-Naimark) se A é uma C^*-álgebra comutativa então a aplicação Γ é um $*$-isomorfismo isométrico.

O teorema A.3.12(iii) mostra que toda C^*-álgebra comutativa é da forma $C_0(X)$ onde X é um espaço localmente compacto.

Referências Bibliográficas

[1] E. HEWITT, K. A. ROSS, *Abstract Harmonic Analysis I - Second Edition*, Springer-Verlag, 1979.

[2] E. HEWITT, K. A. ROSS, *Abstract Harmonic Analysis II*, Springer-Verlag, 1970.

[3] J. M. G. FELL, R. S. DORAN, *Representations of $*$-Algebras, Locally Compact Groups, and Banach $*$-Algebraic Bundles*, Volume 1, Academic Press, 1988.

[4] PETER A. FILLMORE, *A User's Guide to Operator Algebras*, John Wiley & Sons, 1996.

[5] PAUL R. HALMOS, *Measure Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1960.

[6] V. S. SUNDER, *Functional Analysis - Spectral Theory*, Birkhäuser, 1998.

[7] MARSHALL HALL, Jr., *Theory of Groups*, Chelsea Publishing Company-New York, 1973.

[8] E. L. LIMA, *Elementos de Topologia Geral*. Ao Livro Técnico S.A., 1970.

[9] C. D. LAHR, *Multipliers for Certain Convolutions Algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 185 (1973), 165-181.

[10] S. HELGASON, *Multipliers of Banach Algebras* Ann. of Math. (2) 64 (1956), 240-254.

[11] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, Second Edition, McGra-Hill, 1966.

[12] E. HEWITT, K. STROMBERG, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, 1965.