

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Medidas de Não Normalidade

Edson Luiz Kraemer

Orientador: Prof. Dr. Fermín Sinfórano Viloche Bazán

Florianópolis

Fevereiro de 2003

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Medidas de Não Normalidade

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração Básico em Matemática Aplicada.

Edson Luiz Kraemer

Florianópolis

Fevereiro de 2003

Medidas de Não Normalidade

por

Edson Luiz Kraemer

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre”, com Área de Concentração, Básico em Matemática Aplicada, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Prof. Dr. Igor Mozolevski
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Fermín Sinfórano Viloche Bazán (UFSC - Orientador)

Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer (UNICAMP)

Prof. Dr. Clóvis Caesar Gonzaga (UFSC)

Prof. Dr. Mário César Zambaldi (UFSC)

Prof. Dr. Lício Hernanes Bezerra (UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2003.

Ao matemático supremo, Jeová

À minha Mãe, *in memóriam*,

À minha esposa, Giselle.

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer aos professores Albertina Zatelli, Gerardo Arquimedes de Lara Luna e Nilo Kühlkamp pelas cartas de recomendação para ingresso no programa de Pós Graduação. Também a pessoa do professor Celso Melchiades Doria pelos conselhos iniciais.

Aos colegas Alcides, Anderson, Claires, Claudio, Danilo, Divane, Gilberto, Jeison, Juliano, Lucicléia e Patricia, por muitas horas de estudos, pelas várias discussões sobre problemas e pelo companheirismo.

Aos professores Igor Mozolevski, Mário César Zambaldi, Oscar Ricardo Janesch, Ruy Coimbra Charão e Ruy Exel Filho que ministraram as disciplinas do programa e aos membros da banca.

Também gostaria de mencionar Elisa Barbosa Amaral, pela assistência e Eduardo Bruno da Rosa Krukoski pelas suas muitas intervenções providenciais.

Meus agradecimentos ao CNPq, que forneceu o suporte financeiro, possibilitando a realização deste trabalho.

Finalmente, um agradecimento especial ao meu orientador, Prof. Dr. Fermín Sinforiano Viloche Bazán, pelo empenho pessoal neste projeto, pelas muitas horas gastas em meu benefício, pela paciência demonstrada ao longo do trabalho, pelo profissionalismo e seriedade com que trata a pesquisa científica. Suas muitas dicas, sugestões e conselhos enriqueceram sobremaneira minha formação acadêmica.

Resumo

Apresentamos medidas de não normalidade, bem como algumas relações entre as diversas medidas, com enfoque especial na influência da não normalidade sobre a sensibilidade do problema de autovalores matricial. Tal influência pode ser estudada devido às relações estabelecidas entre as medidas de não normalidade e os números de condição para autovalores e matrizes.

Uma breve introdução aos sistemas dinâmicos lineares é apresentada. Para aplicações da teoria de não normalidade, restringimo-nos aos sistemas discretos lineares invariantes no tempo. Apresentamos alguns métodos utilizados na resolução do problema de realização associado a estes sistemas.

São feitas estimativas teóricas sobre a não normalidade das matrizes que governam o sistema para os métodos de realização apresentados. Algumas dessas estimativas são baseadas em resultados recentemente publicados, outras são originais.

A teoria é ilustrada com diversos experimentos numéricos, sendo alguns baseados em estruturas dinâmicas reais, que aparecem em aplicações na engenharia.

Abstract

We present measures of non normality of matrices including an analysis of existing relationships between the measures studied. Special emphasis on the way non normality influences the spectral sensitivity of a matrix is given, showing that the Jordan condition numbers, which govern the sensitivity of eigenvalues to perturbations on the matrix, are bounded in terms of measures of non normality.

The theory studied is the exploited analysing measures of non normality of certain matrices arising from de system analisys field (the system's matrices), when solving realization problems associated with time invariant discrete dynamical systems. As a by product, theoretical estimates of measures of non normality of the system's matrices of three realization methods are presented. The presented estimates rely on theoretical results recently published but most of the them appear for the first time. Several numerical experiments using data from real dynamical structures illustrate the theory.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	10
1.1 Notações	10
1.2 Conceitos Básicos	11
1.3 Autovalores e Autovetores	13
1.4 Fatorações Importantes	14
1.4.1 A Decomposição de Schur	14
1.4.2 A Forma de Jordan	14
1.4.3 A Decomposição em Valores Singulares - SVD	15
1.5 Pseudo-inversa de uma Matriz	17
1.5.1 Pseudo-inversa e Projeções	18
1.6 Normas Vetoriais e Matriciais	19
1.6.1 Normas de Vetores	19
1.6.2 Normas de Matrizes	21
1.7 Normalidade	23
1.8 Outros Resultados Auxiliares	24
2 Não Normalidade	30
2.1 Medidas de Não Normalidade	30
2.2 Comparações entre Medidas de Não Normalidade	32
3 Não Normalidade e Sensibilidade de Autovalores	43
3.1 Perturbação de Autovalores	43

3.2	Não Normalidade e Sensibilidade	45
4	Não Normalidade em Teoria de Sistemas	50
4.1	Sistemas Dinâmicos Lineares	50
4.2	Problema de Realização	52
4.3	Alguns Métodos de Realização	54
4.3.1	Método de Zeiger-Mac Ewen	55
4.3.2	Método de Kung	55
4.3.3	Método de Bazán e Bavastri	56
4.4	Estimativas de Não Normalidade para a Matriz A_{BV}	57
4.4.1	Estimativa para μ_3	60
4.4.2	Estimativa para μ_4	63
4.4.3	Estimativa para μ_2	65
4.5	Relações Entre Alguns Métodos de Realização e Estimativas para $\mu(A_K)$ e $\mu(A_{ZM})$	70
4.6	Considerações Finais	72
5	Experimentos Numéricos	74
	Conclusões	82
	Referências Bibliográficas	84

Introdução

Matrizes normais possuem propriedades interessantes que permitem resolver eficientemente muitos problemas em Álgebra Linear provenientes das ciências e engenharia. À guisa de exemplo, sistemas lineares simétricos podem ser resolvidos em aproximadamente metade do tempo utilizado para sistemas não simétricos [4, 5]. Uma outra característica notável de matrizes normais é que seus autovalores são pouco sensíveis a pequenas perturbações nas entradas da matriz. Estes exemplos são simplesmente para ilustrar que, em geral, pode ser mais simples lidar com problemas que envolvem matrizes normais do que com problemas que envolvem matrizes não normais. Além disso, servem para justificar o interesse de muitos autores de investigar maneiras de caracterizar matrizes normais. Uma primeira coletânea de 60 dessas propriedades foi publicada em 1987 [25]; outras 20 foram publicadas recentemente e podem ser encontrados em [24]. Em se tratando especificamente do problema de autovalor associado a matrizes não normais, embora os autovalores dessas matrizes são potencialmente sensíveis a ruídos [4, 5, 9], é importante enfatizar que existem matrizes cujos autovalores refletem baixa sensibilidade. Ruhe [36] chamou essas matrizes de “quase normais”. Isto sugere que há necessidade de estudar maneiras de tipificar quando uma matriz pode ser considerada como quase normal e quando, como altamente não normal (consequentemente, com autovalores altamente sensíveis.), o que motiva o estudo de medidas de não normalidade.

Matrizes não normais ocorrem em muitas aplicações. Em física, a discretização de operadores diferenciais parciais pode gerar matrizes altamente não normais. À maneira de exemplos, temos o operador de convecção-difusão unidimensional e o operador de Orr-Sommerfeld, na dinâmica dos fluídos [17]. Ainda em física, mais precisamente, em teoria Magnetohidrodinâmica (MHD) ocorrem matrizes com grande não nor-

malidade [2, cap. 10],[19]. Em física e tecnologia, o fenômeno de grande não normalidade ocorre na área de mecânica estrutural combinada com aerodinâmica [2, cap. 10].

O estudo de medidas de não normalidade foi iniciado nos anos 60, sendo Henrici [26] um dos autores a propor uma das primeiras medidas (*the Henrici's departure from nonnormality*). Entretanto, o estudo da influência de não normalidade sobre o comportamento de algoritmos para calcular autovalores ou resolver outros problemas em Álgebra Linear (sistemas lineares, por exemplo) é relativamente recente [2, 17]. Hoje em dia é conhecido que grande não normalidade afeta fortemente o cálculo de potências de uma matriz [27]. O reflexo desta influência é sentido nos métodos iterativos baseados em iteração de subespaços e/ou métodos de Krylov, por exemplo, que têm sua convergência comprometida [17, 19]. Vale observar que neste tipo de métodos o resíduo depende da medida de não normalidade da matriz [28]. Com relação à sensibilidade de autovalores, o erro absoluto dos autovalores de uma matriz perturbada depende não somente da norma da perturbação, mas também de alguma medida de não normalidade [20]: grande não normalidade implica em alta sensibilidade do problema de autovalor. Esta observação é crucial, já que em certos problemas que envolvem parâmetros com sentido físico, em que as entradas da matriz são obtidas por meio de medições ou experimentos, devido a alta não normalidade, os autovalores calculados em aritmética finita podem não representar, como se espera, o fenômeno estudado.

Os três exemplos a seguir ilustram como o cálculo do espectro de certas matrizes pode ser grandemente afetado por pequenas perturbações nos elementos da matriz. Estas perturbações surgem naturalmente quando critérios de parada ou convergência são estabelecidos nos algoritmos utilizados para resolver numericamente os problemas que aparecem nas ciências aplicadas. Em todos os casos, os autovalores foram calculados em Matlab, versão 5.1 pela função “eig”, com microprocessador Intel Celeron 400 Mhz. A função “eig” utiliza para o cálculo de autovalores, o método QR, que é um poderoso método utilizado quando se quer calcular todos os autovalores de uma determinada matriz.

Exemplo 1.

Este exemplo ilustra o efeito que a multiplicidade de uma autovalor pode ter sobre a sensibilidade do mesmo. Consideremos a família de matrizes

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

É evidente que o espectro de J_n é o conjunto $\lambda(J_n) = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_n$. Consideremos a seguir as matrizes:

$$\begin{aligned} A_n &= QJ_nQ^*, \quad Q \text{ unitária (gerada aleatoriamente)} \\ B_n &= J_n + E, \quad E_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq n, \text{ ou } j \neq 1 \\ \epsilon, & i = n \text{ e } j = 1 \end{cases}, \\ C_n &= J_n + E, \quad E \text{ aleatória, } E = O(\epsilon) \end{aligned}$$

em que $O(\epsilon)$ significa¹ que a perturbação é da mesma ordem de ϵ , com $\epsilon = 10^{-10}$.

Obviamente, $\lambda(J_n) = \lambda(A_n)$. Na prática porém, como o cálculo dos autovalores é feito utilizando aritmética finita, são introduzidos erros de truncamento (roundoff error). Na representação do espectro de A_n consideram-se apenas estes erros de arredondamento. Na representação do espectro de B_n e C_n , além destes, estamos considerando a perturbação ϵ , conforme definição destas matrizes. Os resultados do experimento correspondentes a $n = 20, 50, 100$ e 200 , mostrados na Figura 1, confirmam o fato de que autovalores múltiplos de matrizes não normais são altamente sensíveis a pequenas perturbações nos dados (quando calculados pela função “eig”). Tal sensibilidade pode ser observada de modo especial no espectro de A_n , uma vez que em teoria os espectros de A_n e J_n são iguais.

¹Dada uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que g é da Ordem de h^p ($g = O(h^p)$), p real positivo, se existe uma constante real positiva M , que não depende de h , tal que $|g(h)| \leq M h^p$.

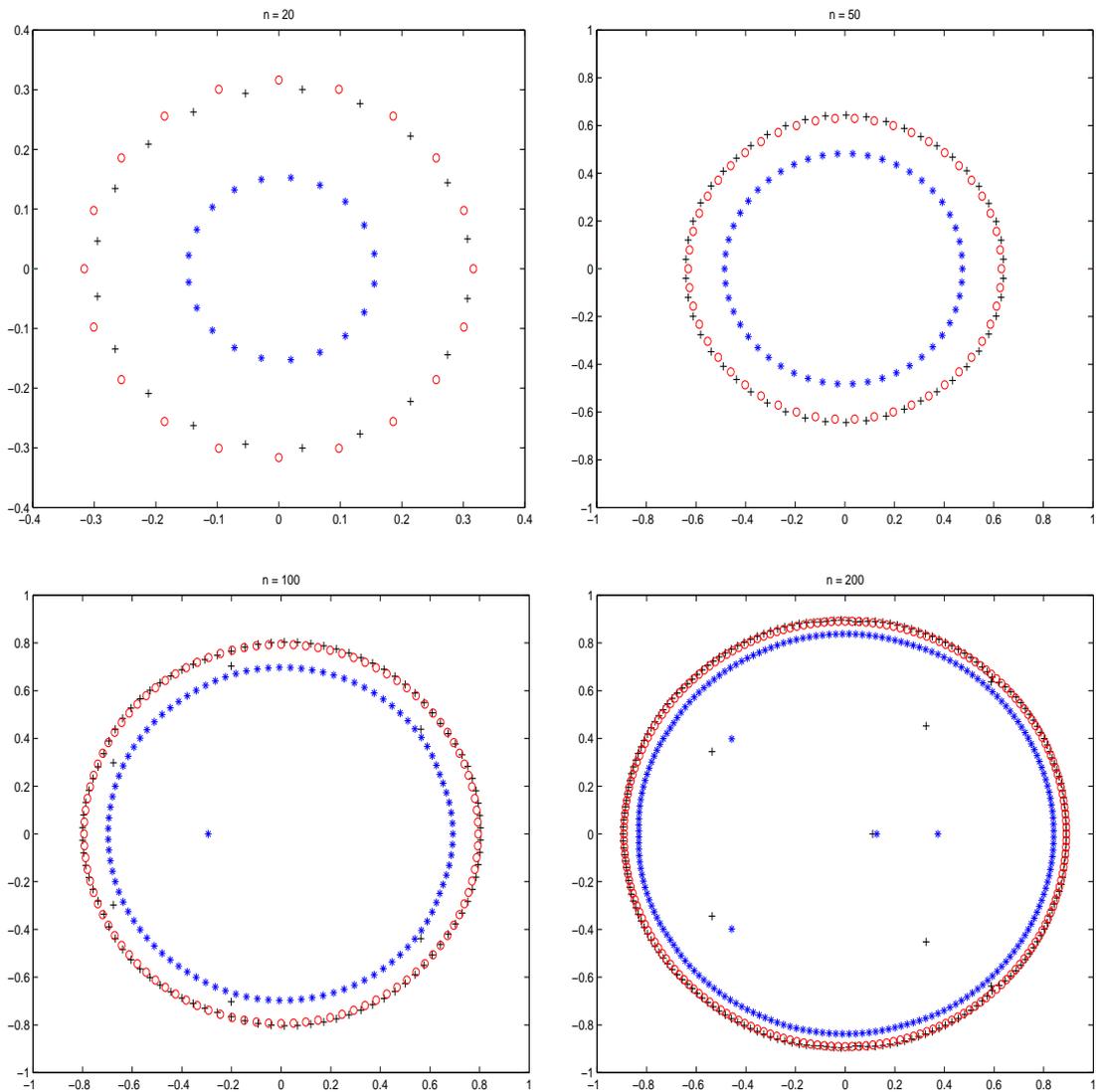


Figura 1: $+$: $\lambda(B_n)$. \circ : $\lambda(C_n)$. $*$: $\lambda(A_n)$.

Exemplo 2.

O exemplo seguinte ilustra que pode ocorrer alta sensibilidade de autovalores, ainda que a matriz tenha autovalores diferentes. Para tal consideremos a matriz companheira $D_m = [e_2 \ e_3 \ \cdots \ e_m \ x]$, com e_i o i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^m e x a solução de norma mínima do sistema

$$Wx = \Lambda^m e,$$

em que $W = [e \ \Lambda e \ \cdots \ \Lambda^{m-1}e]$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \bar{\lambda}_1 \ \dots \ \lambda_5, \bar{\lambda}_5)$ com os λ 's definidos na Tabela 1 abaixo, e $e = [1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^{10}$. É conhecido que, se $m \geq 10$, esta matriz possui os 10 autovalores λ_j e $(m - 10)$ autovalores adicionais que dependem do vetor x [14, 16].

Tabela 1: Autovalores de D_m .

j	λ_j	$ \lambda_j $	Separação
1	$0.9699 + 0.2248 i$	0.9956	0.0645
2	$0.9532 + 0.2931 i$	0.9972	0.0703
3	$0.9844 + 0.1619 i$	0.9976	0.0559
4	$0.9921 + 0.1065 i$	0.9978	0.0483
5	$0.9972 + 0.0585 i$	0.9989	0.0483

O objetivo é ilustrar a sensibilidade dos autovalores λ_j a pequenas perturbações em D_m . Primeiro consideremos perturbações decorrentes de erros de arredondamento e, após, perturbações localizadas no vetor x . Nos dois casos, o vetor x foi calculado utilizando a função do matlab *pinv*. Os resultados correspondentes ao primeiro caso, ou seja, em que consideramos apenas os erros de arredondamento são apresentados na Figura 2, para $m = 10$ e $m = 15$. Esta representação ilustra que esses λ 's são de fato muito sensíveis a ruídos para $m = 10$, mas que a sensibilidade decresce quando se aumenta a dimensão para $m = 15$.

Na outra parte do experimento, além dos erros de arredondamento, utilizamos um vetor perturbado : $\tilde{x} = x + \epsilon$, com ϵ sendo um vetor com entradas aleatorias da ordem de 10^{-4} . Os resultados são apresentados na Figura 3, novamente para $m = 10$ e $m = 15$. Note-se que as perturbações localizadas no vetor x têm maior influência sobre a sensibilidade do espectro da matriz D_m tanto para $m = 10$, quanto para $m = 15$. Isto sugere que, de algum modo, este vetor está relacionado com o grau de sensibilidade a pequenas perturbações apresentado no cálculo do espectro de D_m .

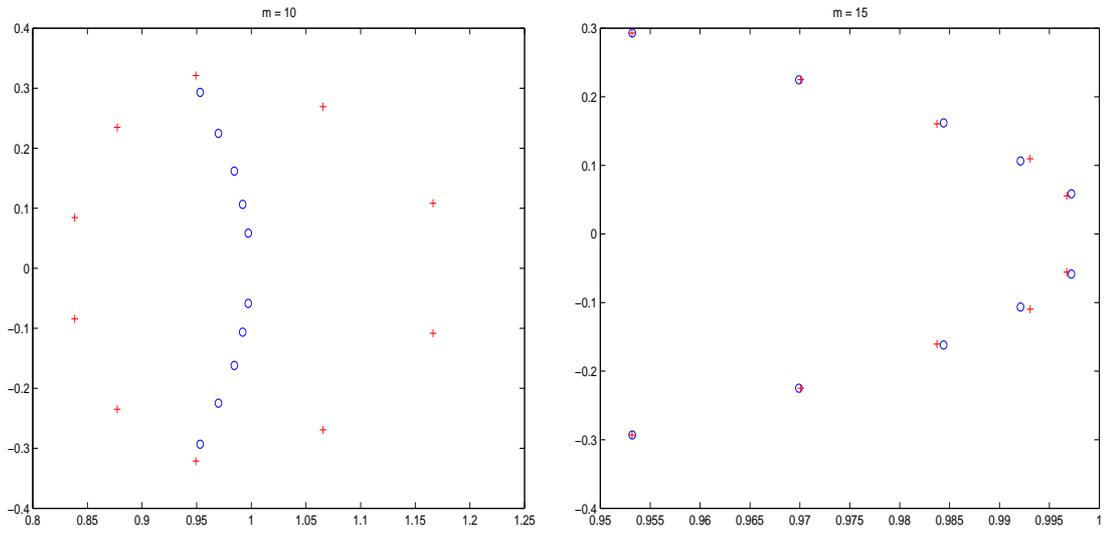


Figura 2: \circ : Espectro exato. $+$: Espectro obtido considerando-se apenas erros de arredondamento.

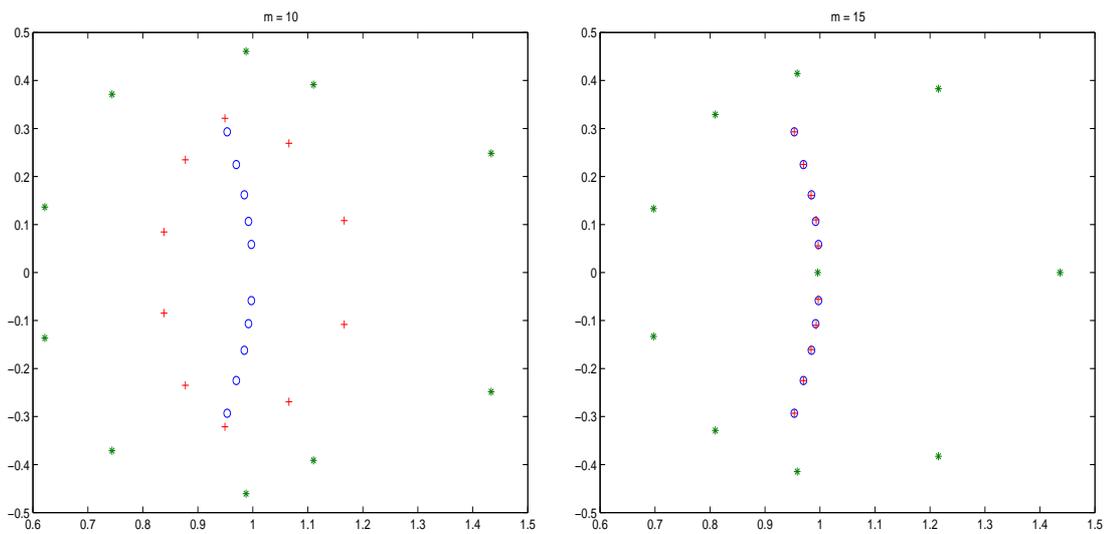


Figura 3: \circ : Espectro exato. $+$: Espectro obtido considerando-se apenas erros de arredondamento; $*$: Espectro calculado considerando-se também a perturbação ϵ .

Exemplo 3

Considere a matriz S_ν [17] chamada de “matriz de Schur”, de ordem $n = 2p$, definida como

10, 20 e 100. Neste experimento todas as matrizes são de dimensão $n = 40$.

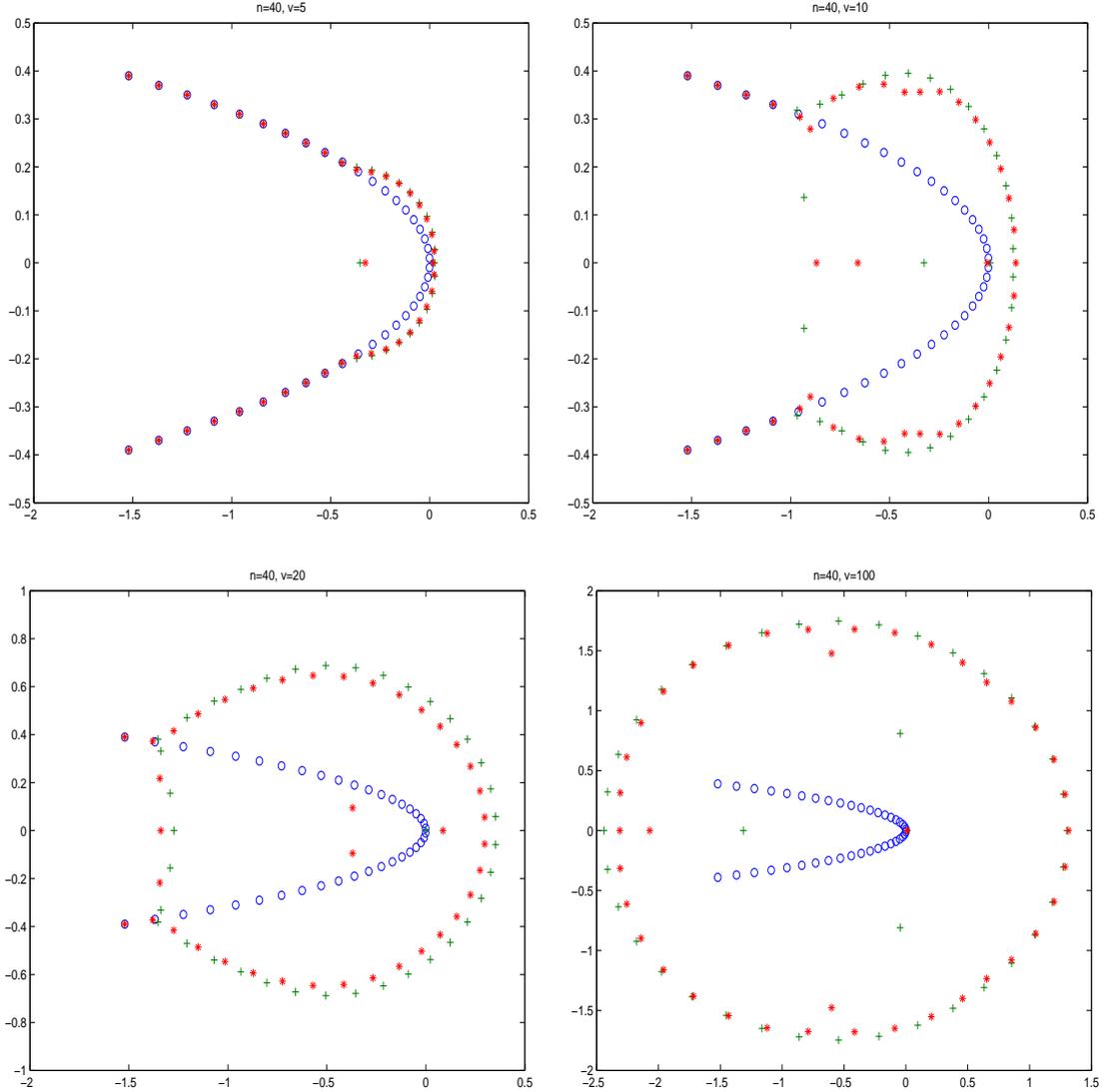


Figura 4: $\circ: \lambda(S_\nu)$ $*: \lambda(A_\nu)$; $+: \lambda(B_\nu)$

A Figura 4 ilustra quão influente pode ser a não normalidade sobre a sensibilidade do espectro de uma matriz. Mesmo com $\nu = 5$, que é um valor moderado, já se observam distorções no vértice da concavidade do gráfico. De fato, o parâmetro ν está relacionado com a não normalidade das matrizes S_ν , A_ν e B_ν . Mesmo que as matrizes de transformação sejam matrizes ortonormais, como neste exemplo, aumentando o valor de ν em módulo, a matriz fica cada vez mais distante do conjunto das matrizes normais. Pode-se dizer portanto que a distância de A_ν até esse conjunto depende de $|\nu|$, ou em

outras palavras, que ν governa a medida de não normalidade de A_ν .

Este exemplo ilustrou o efeito que transformações de semelhança podem ter sobre a sensibilidade do espectro das matrizes envolvidas, quando alguma destas não é normal. No capítulo 5, vamos mostrar como uma determinada medida de não normalidade depende de ν e ilustrar graficamente como ν influencia na sensibilidade espectral de A_ν e B_ν .

O objetivo deste trabalho é desenvolver um estudo de medidas de não normalidade, dando ênfase à influência da não normalidade sobre a sensibilidade dos autovalores de uma matriz. O trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo 1, introduzem-se conceitos e propriedades fundamentais que servem como suporte para nosso estudo. No capítulo 2 discutem-se várias medidas de não normalidade de matrizes, bem como relações entre as diversas medidas. O capítulo 3 discute algumas conexões entre as medidas e a teoria de perturbação de autovalores. Os capítulos 2 e 3 estão baseados em [23, 38]. No capítulo 4, figuram aplicações em teoria de sistemas dinâmicos discretos, com algumas estimativas teóricas sobre a não normalidade das matrizes que governam os sistemas de alguns importantes métodos de realização. Algumas das estimativas são baseadas em [10], outras são originais. Finalmente, no capítulo 5, apresentamos experimentos numéricos para ilustrar a aplicação da teoria desenvolvida neste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Notações

Nesta seção, apresentamos as principais notações que serão utilizadas ao longo do texto.

O conjunto dos números reais é denotado por \mathbb{R} , e o conjunto dos números complexos por \mathbb{C} . O espaço n -dimensional de vetores-coluna com componentes em \mathbb{R} (ou \mathbb{C}), é denotado por \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n). O conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas em \mathbb{R} (ou \mathbb{C}), denotaremos por $\mathbb{R}^{m,n}$ (ou $\mathbb{C}^{m,n}$). Num contexto mais geral, $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ denota o conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas no corpo \mathbb{F} , com $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}).

A matriz identidade de ordem n , é denotada por I_n . Ainda, x^T e A^T denotam a transposta do vetor x e da matriz A , respectivamente, e A^* é a conjugada transposta de A . Também, A^\dagger denota a pseudo-inversa de Moore-Penrose de $A \in \mathbb{M}_{m,n}$, e A^{-1} é a matriz inversa de $A \in \mathbb{M}_n$.

Normas vetoriais e matriciais serão denotadas por $\|\cdot\|$, com um índice subscrito de maneira usual.

Outras notações¹ que se fizerem necessárias serão inseridas ao longo do texto.

¹O símbolo \square indica o fim de uma demonstração.

1.2 Conceitos Básicos

Com as notações da seção precedente, vamos definir os principais conceitos a serem usados ao longo do texto.

Definição 1.2.1 *Uma matriz A é dita:*

1. Simétrica (ou Hermitiana) se $A^T = A$ (ou $A^* = A$);
2. Positiva definida (Semi-positiva definida) se é Hermitiana e $x^*Ax > 0$ (\geq) para todo $x \neq 0$;
3. Unitária (ou Ortogonal, no caso real) se $A^*A = AA^* = I$;
4. Normal, se $A^*A = AA^*$;
5. Triangular superior se é quadrada e $i > j \Rightarrow \alpha_{ij} = 0$; (isto é, se todos as entradas abaixo da diagonal principal são nulas);
6. Triangular inferior se é quadrada e $i < j \Rightarrow \alpha_{ij} = 0$; (isto é, se todos as entradas acima da diagonal principal são nulas);
7. Diagonal se é triangular superior e inferior; isto é, elementos não nulos ocorrem apenas na diagonal;
8. Não singular, se é inversível; caso contrário é dita singular.

Uma matriz diagonal pode ser indicada apenas por $\text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$, sendo δ_i o i -ésimo elemento da diagonal da matriz.

Para cada matriz $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ existem quatro subespaços vetoriais fundamentais a ela associados, a saber,

- $\mathcal{R}(A) = \{Ax \in \mathbb{C}^m : x \in \mathbb{C}^n\}$
- $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}$
- $\mathcal{R}(A^*) = \{A^*x \in \mathbb{C}^n : x \in \mathbb{C}^m\}$
- $\mathcal{N}(A^*) = \{x \in \mathbb{C}^m : A^*x = 0\}$

O termo *posto* refere-se ao número de colunas linearmente independentes de uma matriz. Quando todas as colunas são LI, dizemos que a matriz tem posto completo.

Outro conceito importante é o de adjunta (no sentido clássico) de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$

Definição 1.2.2 *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. A matriz de cofatores $B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, transposta, definida por*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji}),$$

em que $\det(A_{ji})$ é o determinante da matriz A_{ji} , formada eliminando-se a linha j e coluna i da matriz A , é chamada adjunta (clássica) de A e é denotada por $\text{adj}(A)$.

Existe uma conexão entre a adjunta e o determinante de uma matriz não singular C .

Proposição 1.2.3 *Seja $C \in \mathbb{C}^{n,n}$ não singular. Então*

$$\text{adj}(C) = C^{-1} \det(C).$$

Demonstração: [8, pg. 402].

Para a prova de um teorema central do Capítulo 2, será necessário o conceito de produto de Kronecker e de Hadamard, denotados respectivamente pelos símbolos \otimes e \circ .

Definição 1.2.4 *Dadas matrizes $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p,q}$, o produto de Kronecker de A por B é a matriz $mp \times nq$, em blocos, definida por,*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Definição 1.2.5 *Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ o produto de*

Hadamard (elemento a elemento), $A \circ B$ é a matriz,

$$A \circ B = [a_{ij}b_{ij}].$$

Toda matriz pode ser escrita numa forma vetorial, como segue.

Definição 1.2.6 Dada uma matriz $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $A = [a_1, \dots, a_n]$, sendo a_i a i -ésima coluna de A , a sua forma vetorizada, denotada por $vec(A)$ é o vetor

$$vec(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mn}.$$

Da Definição 1.2.6 decorre imediatamente que se $A, B, C, \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ e $A = B + C$, então

$$vec(A) = vec(B) + vec(C) \quad (1.1)$$

1.3 Autovalores e Autovetores

Os autovalores de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ são as raízes do polinômio característico $p(z) = \det(zI - A)$. Quando uma raiz tem multiplicidade 1, dizemos que o autovalor é simples, caso contrário é dito autovalor múltiplo. O conjunto de todas as raízes é chamado espectro de A e é denotado por $\lambda(A)$. Analizando os coeficientes de $p(z)$ é possível verificar que, se $\lambda(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, então, o determinante e o traço, denotado $\text{tr}(A)$, satisfazem,

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \quad \text{e} \quad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n. \quad (1.2)$$

Seja $\lambda \in \lambda(A)$. Um vetor não nulo $x \in \mathbb{C}^n$ que satisfaz $Ax = \lambda x$ é chamado um autovetor. Mais precisamente, x é um autovetor à direita para λ se $Ax = \lambda x$ e y é um autovetor à esquerda para λ se $y^*A = \lambda y^*$. A menos que indiquemos o contrário, autovetor refere-se a autovetor à direita.

Um autovetor define um subespaço unidimensional que é invariante com

respeito a multiplicação por A . De modo mais geral, um subespaço $S \subseteq \mathbb{C}^n$ com a propriedade:

$$x \in S \implies Ax \in S \quad (1.3)$$

é dito ser invariante (por A). Note que se $AX = XB$, $B \in \mathbb{C}^{k,k}$, $X \in \mathbb{C}^{n,k}$, então o conjunto $\mathcal{R}(X)$ é invariante. Se X tem posto completo por colunas então $AX = XB \implies \lambda(B) \subseteq \lambda(A)$. Se X é quadrada e não singular, então $\lambda(B) = \lambda(A)$ e temos que A e $B = X^{-1}AX$ são semelhantes.

1.4 Fatorações Importantes

1.4.1 A Decomposição de Schur

A decomposição de Schur é uma clássica e importante propriedade de uma matriz $n \times n$, e é descrita pelo seguinte teorema.

Teorema 1.4.1 *Dada $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, existe uma matriz unitária $U \in \mathbb{C}^{n,n}$, tal que, $A = UTU^*$, com T triangular superior cujas entradas da diagonal principal são os autovalores de A .*

Demonstração: Ver [4, pg. 146], [5, pg. 335] ou [6, pg. 79].

1.4.2 A Forma de Jordan

Uma alternativa à decomposição de Schur, com aplicações especialmente do ponto de vista teórico é conhecida como *Forma Canônica de Jordan*.

Teorema 1.4.2 *Dada $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, existe uma matriz não singular X , tal que*

$$X^{-1}AX = \text{diag}(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_l(\lambda_l)),$$

em que $J_k(\lambda_k) \in \mathbb{C}^{k,k}$, conhecido como bloco de Jordan, é da forma

$$J_k(\lambda_k) = \begin{pmatrix} J_{k_1} & & & & & \\ & J_{k_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & J_{k_r} & \end{pmatrix} \quad e \quad J_{k_i}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Esta decomposição é única a menos da ordem dos blocos.

Demonstração: [4, pg. 141], [5, pg. 339] ou [6, pg. 121].

1.4.3 A Decomposição em Valores Singulares - SVD

Uma decomposição matricial que tem vastíssimas aplicações práticas e teóricas é a SVD. A existência de tal decomposição é estabelecida no seguinte teorema.

Teorema 1.4.3 *Seja $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ uma matriz de posto r . Então existem matrizes unitárias $U \in \mathbb{C}^{m,m}$ e $V \in \mathbb{C}^{n,n}$ tais que*

$$A = U\Sigma V^*, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

em que $\Sigma \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, e $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

Demonstração: Ver [1, pg. 9], [4, pg. 109] ou [5, pg. 71].

Cada σ_i é dito um valor singular de A e o conjunto $\sigma(A) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ é chamado de espectro singular de A . As colunas de U e V , u_i e v_i , são os respectivos vetores singulares à esquerda e a direita associados ao valor singular σ_i . A SVD de A pode ser escrita como soma de matrizes de posto 1:

$$A = U_1 \Sigma_1 V_1^* = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^*, \quad (1.5)$$

em que $U_1 = [u_1, \dots, u_r]_{m \times r}$, $V_1 = [v_1, \dots, v_r]_{n \times r}$.

Os valores singulares de A são únicos. O vetor singular v_j , $j \leq r$, pode ser único somente quando σ_j^2 é um autovalor simples de A^*A . Para um valor singular múltiplo, o correspondente vetor singular pode ser escolhido em uma base ortonormal para o único subespaço que é gerado. Uma vez escolhidos os vetores singulares v_j , $1 \leq j \leq r$, os vetores u_j , $1 \leq j \leq r$, são unicamente determinados por

$$Av_j = \sigma_j u_j, \quad j = 1, \dots, r.$$

Similarmente, dado u_j , os vetores singulares v_j são unicamente determinados por

$$A^*u_j = \sigma_j v_j, \quad j = 1, \dots, r.$$

A SVD dá informação completa sobre os quatro subespaços associados com A , definidos na Seção 1.2. Prova-se que:

$$\mathcal{R}(A) = \text{span}[u_1, \dots, u_r] \tag{1.6}$$

$$\mathcal{N}(A) = \text{span}[v_{r+1}, \dots, v_n] \tag{1.7}$$

$$\mathcal{R}(A^*) = \text{span}[v_1, \dots, v_r] \tag{1.8}$$

$$\mathcal{N}(A^*) = \text{span}[u_{r+1}, \dots, u_m]. \tag{1.9}$$

Daí decorrem as seguintes relações

$$\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^*) \quad e \quad \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$$

Existe também uma estreita conexão entre a SVD de uma matriz A e o problema de autovalores Hermitiano (ou real simétrico) que segue do Teorema 1.4.3.

$$A^*A = V\Sigma^T\Sigma V^*, \quad AA^* = U\Sigma\Sigma^T U^*.$$

Os $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$, são os autovalores não nulos da matriz Hermitiana semi-positiva definida A^*A e AA^* , com v_j, u_j os correspondentes autovetores.

1.5 Pseudo-inversa de uma Matriz

Definição 1.5.1 (Condições de Penrose) *A pseudo-inversa de uma matriz $A \in \mathbb{M}_{m,n}$, $X = A^\dagger$, é unicamente determinada pelas seguintes quatro condições:*

1. $AXA = A$
2. $XAX = X$
3. $(AX)^* = AX$
4. $(XA)^* = XA$

Se $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $m \geq n$ e $\text{posto}(A) = n$, então

$$A^\dagger = (A^*A)^{-1}A^*, \quad A^{*\dagger} = A(A^*A)^{-1} \quad (1.10)$$

Em geral não é verdade que

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger.$$

O teorema a seguir caracteriza os casos em que a igualdade é válida.

Teorema 1.5.2 *Assumindo que $A \in \mathbb{C}^{m,r}$, $B \in \mathbb{C}^{r,n}$, com $\text{posto}(A) = \text{posto}(B) = r$. Então vale que*

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = B^*(BB^*)^{-1}(A^*A)^{-1}A^*$$

Demonstração: Ver [1, pg. 17]

Uma vez estabelecida a existência da decomposição em valores singulares, conforme o Teorema 1.4.3, a pseudo-inversa de uma matriz $A \in \mathbb{M}_{m,n}$, de posto $r \leq \min\{m, n\}$, pode ser calculada como,

$$A^\dagger = V \begin{pmatrix} \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^*. \quad (1.11)$$

A pseudo inversa é útil porque serve para solucionar problemas de quadrados mínimos:

$$\text{Encontrar } x \in \mathbb{C}^n \text{ que minimiza } \|Ax - b\|_2. \quad (1.12)$$

O problema (1.12) é equivalente [1, Seção 1.1.4.] ao problema

$$A^T Ax = A^T b. \quad (1.13)$$

Quando $m \geq n$ e A tem posto completo, então

$$x^\dagger = A^\dagger b \quad (1.14)$$

é a única solução do problema (1.13) e portanto a única solução de (1.12) (neste caso uma expressão para A^\dagger é dada em (1.10)). Se o posto de A é $r < \min\{m, n\}$, o problema (1.13) possui infinitas soluções e (1.14) fornece a solução de menor norma 2 [1, Seção 1.1.4.], e daí diz-se que (1.14) é a *solução de norma mínima* para o problema (1.12).

1.5.1 Pseudo-inversa e Projeções

Definição 1.5.3 Se $S \in \mathbb{R}^m$ é um subespaço, então $P_S \in \mathbb{R}^{m,m}$ é o projetor ortogonal sobre S se, $\mathcal{R}(P_S) = S$, e $P_S^2 = P_S$, $P_S^T = P_S$

Da Definição 1.5.3, segue que se P_S é a projeção ortogonal sobre S , então $I - P_S$ é o projetor sobre S^\perp , o complemento ortogonal de S .

Uma importante propriedade da pseudo-inversa é que ela fornece expressões simples para as projeções ortogonais sobre os quatro subespaços associados à matriz A , as quais são descritas como segue:

$$P_{\mathcal{R}(A)} = AA^\dagger \quad (1.15)$$

$$P_{\mathcal{R}(A^*)} = A^\dagger A \quad (1.16)$$

$$P_{\mathcal{N}(A)} = I - A^\dagger A \quad (1.17)$$

$$P_{\mathcal{N}(A^*)} = I - AA^\dagger \quad (1.18)$$

Se as colunas da matriz U são ortonormais, $P_{\mathcal{R}(U)} = UU^*$. Podemos expressar as projeções (1.15 - 1.18) em termos dos vetores singulares de A , como

$$P_{\mathcal{R}(A)} = U_1U_1^* \quad (1.19)$$

$$P_{\mathcal{R}(A^*)} = V_1V_1^* \quad (1.20)$$

$$P_{\mathcal{N}(A)} = V_2V_2^* \quad (1.21)$$

$$P_{\mathcal{N}(A^*)} = U_2U_2^*, \quad (1.22)$$

sendo que

$$U_1 = [u_1, \dots, u_r], \quad U_2 = [u_{r+1}, \dots, u_n], \quad V_1 = [v_1, \dots, v_r], \quad V_2 = [v_{r+1}, \dots, v_n].$$

1.6 Normas Vetoriais e Matriciais

Nesta seção vamos introduzir o conceito de norma para vetores e matrizes, bem como algumas propriedades relevantes.

1.6.1 Normas de Vetores

Definição 1.6.1 *Seja \mathcal{V} um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{F} (\mathbb{R} , ou \mathbb{C}). A função $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma norma vetorial se para todo $x, y \in \mathcal{V}$, tivermos,*

1. $v(x) \geq 0$ e $v(x) = 0$ se e só se $x = 0$;
2. $v(\alpha x) = |\alpha|v(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$
3. $v(x + y) \leq v(x) + v(y)$

Definição 1.6.2 *Seja \mathcal{V} um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{F} (\mathbb{R} , ou \mathbb{C}). A função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{F}$ é um produto interno se para todo $x, y, z \in \mathcal{V}$, tivermos satisfeitas as seguintes quatro condições:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se e só se, $x = 0$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

$$3. \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F};$$

$$4. \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

No próximo resultado introduzimos as normas de vetores usualmente utilizadas.

Proposição 1.6.3 *As funções abaixo são normas em \mathbb{C}^n .*

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \quad (1.23)$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \quad (1.24)$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \quad (1.25)$$

Demonstração: Prova-se que (1.23) - (1.25) satisfazem a Definição 1.6.1. \square

As normas da proposição acima são chamadas de *norma 2*, *norma da soma* e *norma do máximo*, respectivamente.

Dado um par $(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, o produto interno usual (ou euclidiano) é definido por

$$\langle x, y \rangle = y^* x = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n, \quad (1.26)$$

em que a barra denota a conjugação complexa. É evidente de (1.23) e (1.26) que

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^* x}. \quad (1.27)$$

Como consequência direta de (1.27), dada uma matriz unitária U , então,

$$\|Ux\|_2 = \|x\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n. \quad (1.28)$$

A definição a seguir generaliza a propriedade (1.28).

Definição 1.6.4 *Se a função $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma norma que satisfaz*

$$\phi(Ux) = \phi(x), \quad \forall U \in \mathbb{C}^{n,n} \text{ unitária,}$$

então ϕ é dita ser unitariamente invariante.

Todo produto interno em um espaço vetorial \mathcal{V} goza de uma importante propriedade denominada desigualdade de Cauchy-Schwartz, que é descrita no seguinte teorema.

Teorema 1.6.5 *Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno de um espaço \mathcal{V} sobre um corpo \mathbb{F} (\mathbb{R} , ou \mathbb{C}), então*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{V}$$

1.6.2 Normas de Matrizes

Definição 1.6.6 *Dizemos que uma função $\nu : \mathbb{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma norma matricial, se para todo $A, B \in \mathbb{M}_n$ são satisfeitos os seguintes axiomas:*

1. $\nu(A) \geq 0$, $\nu(A) = 0$ se e só se $A = 0$;
2. $\nu(\alpha A) = |\alpha| \nu(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$
3. $\nu(A + B) \leq \nu(A) + \nu(B)$
4. $\nu(AB) \leq \nu(A) \nu(B)$

Alguns autores, ao definir norma de matrizes, exigem que a função ν satisfaça apenas as condições 1 – 3. Neste contexto, quando além das primeiras, a função satisfaz a condição 4, diz-se que ν é uma *norma consistente*.

Proposição 1.6.7 *Seja $A \in \mathbb{M}_{m,n}$. As funções abaixo são normas de matrizes.*

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n \|a_j\|_2^2 \right)^{1/2} = \|A^*\|_F \quad (1.29)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} = \sigma_{\max}(A) = \|A^*\|_2 \quad (1.30)$$

Demonstração: Basta verificar que ambas satisfazem a Definição 1.6.6. \square

A norma $\|\cdot\|_F$ é chamada norma de Frobenius e $\|\cdot\|_2$ é dita norma espectral, ou simplesmente “norma 2”. O próximo lema estabelece uma importante relação entre as normas da Proposição (1.6.7).

Lema 1.6.8 Dadas $A, B \in \mathbb{M}_n$, vale

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_2 \|B\|_F \quad e \quad \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_2, \quad (1.31)$$

$$\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^*A). \quad (1.32)$$

Demonstração: Na primeira desigualdade de (1.31), se o vetor b_i é a i -ésima coluna de B então Ab_i é a i -ésima coluna de AB , então

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \|Ab_i\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^n \|A\|_2^2 \|b_i\|_2^2 = \|A\|_2^2 \|B\|_F^2$$

A segunda desigualdade segue da primeira, como vemos abaixo,

$$\|AB\|_F = \|B^*A^*\|_F \leq \|B^*\|_2 \|A^*\|_F = \|B\|_2 \|A\|_F$$

Agora, observando que se α_{ii} é um elemento da diagonal de A^*A , então, $\alpha_{ii} = a_i^*a_i = \|a_i\|_2^2$, sendo a_i a i -ésima coluna de A . Assim de (1.29) decorre (1.32). \square

A definição de norma unitariamente invariante pode ser naturalmente estendida para matrizes. A seguinte proposição decorre de (1.28), (1.30) e de (1.32).

Proposição 1.6.9 *As normas da Proposição 1.6.7 são unitariamente invariantes.*

Uma vez estabelecido o conceito de norma, podemos definir o número de condição associado a uma matriz. Este número de condição é uma ferramenta importante para avaliar a sensibilidade do problema de autovalores.

Definição 1.6.10 *Seja $A = X^{-1}JX$ a forma de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. O número de condição de Jordan para as normas espectral e de Frobenius é definido por,*

$$\kappa_2(X) = \inf\{\|X\|_2 \|X^{-1}\|_2\}, \quad (1.33)$$

$$\kappa_F(X) = \inf\{\|X\|_F \|X^{-1}\|_F\}. \quad (1.34)$$

1.7 Normalidade

O conceito de normalidade de uma matriz é central no desenvolvimento deste trabalho. O seguinte teorema apresenta algumas propriedades dentre as cerca de 80 maneiras de caracterizar normalidade conhecidas [24, 25].

Teorema 1.7.1 *Denotando o conjunto das matrizes unitárias por \mathcal{U} . As seguintes condições são equivalentes:*

1. $A^*A = AA^*$;
2. $\exists V \in \mathcal{U}$ t.q. $V^*AV = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$;
3. $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$;
4. $\sigma_i = |\lambda_i| \quad 1 \leq i \leq n$;
5. *Existe um conjunto ortonormal de n autovetores de A ;*
6. $\forall x \in \mathbb{C}^n$, temos, $\|Ax\|_2 = \|A^*x\|_2$;
7. $A = X\Lambda X^{-1}$, para algum X não singular tal que $\kappa_2(X) = \|X\|_2\|X^{-1}\|_2 = 1$.

Demonstração: As provas podem ser encontradas nas seguintes referências:

1. \iff 2. [5, Corolário 7.1.4.],
1. \iff 3. e 1. \iff 4. [25],
1. \iff 5. [9, Corolário 3.5.],
1. \iff 6. decorre de 1. e da relação (1.27),
1. \iff 7. [24].

As caracterizações introduzidas no Teorema 1.7.1 formam a base para definirmos as medidas de não normalidade de matrizes no próximo capítulo.

1.8 Outros Resultados Auxiliares

Nesta seção apresentaremos alguns lemas e proposições auxiliares que serão utilizados no decorrer do trabalho.

Lema 1.8.1 *Com $G \in \mathbb{C}^{n,n}$, temos*

$$\|GG^* - G^*G\|_F^2 = 2\|GG^*\|_F^2 - 2\|G^2\|_F^2 \leq 2\|G\|_F^4$$

Demonstração: Primeiro, observe que utilizando (1.32) e o fato de $GG^* - G^*G$ ser normal, então

$$\begin{aligned} \|GG^* - G^*G\|_F^2 &= \operatorname{tr}[(GG^* - G^*G)^*(GG^* - G^*G)] \\ &= \operatorname{tr}[(GG^* - G^*G)^2]. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o quadrado segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[(GG^* - G^*G)^2] &= \operatorname{tr}(GG^*GG^* + G^*GG^*G - GG^*G^*G - G^*GGG^*) \\ &= 2\operatorname{tr}(GG^*GG^*) - 2\operatorname{tr}(GG^*G^*G) \\ &= 2\|GG^*\|_F^2 - 2\|G^2\|_F^2 \\ &\leq 2\|G\|_F^2\|G^*\|_F^2 = 2\|G\|_F^4, \end{aligned}$$

o que prova o lema. \square

A norma da pseudo inversa de uma matriz é determinada pela SVD da mesma, conforme estabelecido no seguinte lema:

Lema 1.8.2 *Seja $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ de posto $r < \min\{m, n\}$. Então*

$$\|A^\dagger\|_2 = \sigma_r^{-1}$$

Demonstração: Se Σ_r é a matriz diagonal com os r valores singulares não nulos (ver (1.4)), então decorre de (1.11) que $\|A^\dagger\|_2 = \|\Sigma_r^{-1}\|_2 = \sigma_r^{-1}$. \square

Lema 1.8.3 (Desigualdade de Kantorovich) *Seja $B \in \mathbb{M}_n$ uma matriz positiva definida com autovalores $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Então,*

$$\|x\|_2^4 \geq \frac{4\lambda_1\lambda_n}{(\lambda_1 + \lambda_n)^2} (x^* Bx)(x^* B^{-1}x),$$

para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Além disso, existe um vetor unitário x para o qual vale a igualdade.

Demonstração: Ver [6, pg. 444]

O próximo resultado relaciona o determinante de uma matriz semi-positiva definida e o produto dos elementos de sua diagonal principal.

Lema 1.8.4 (Desigualdade de Hadamard) *Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n$ é semi-positiva definida, então,*

$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{ii},$$

além disso, quando A é positiva definida, a igualdade vale se, e somente se, A é diagonal.

Demonstração: Ver [6, pg. 477],[9, pg. 8]

A seguir apresentamos uma importante propriedade do menor e maior autovalores de uma matriz Hermitiana, que será útil para algumas estimativas feitas no Capítulo 4.

Lema 1.8.5 (Rayleigh-Ritz) *Seja $A \in \mathbb{M}_n$ uma matriz Hermitiana, com autovalores ordenados tais que $\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n = \lambda_{\max}$. Com estas hipóteses vale,*

$$\begin{aligned} \lambda_1 x^* x &\leq x^* A x \leq \lambda_n x^* x \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \\ \lambda_{\max} = \lambda_n &= \max_{x \neq 0} \frac{x^* A x}{x^* x} = \max_{x^* x = 1} x^* A x \\ \lambda_{\min} = \lambda_1 &= \min_{x \neq 0} \frac{x^* A x}{x^* x} = \min_{x^* x = 1} x^* A x. \end{aligned}$$

Demonstração: Ver [6, pg. 176]

O próximo lema trata espectro do produto de matrizes.

Lema 1.8.6 *Sejam $A, B^* \in \mathbb{M}_{m,n}$, $m \geq n$. Então temos que,*

$$\lambda(AB) = \lambda(BA) \cup \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{m-n}.$$

Demonstração: Veja [3, pg. 72] ou [6, pg. 53, Teorema 1.3.20].

O traço do produto de matrizes obedece a propriedade descrita no lema que segue.

Lema 1.8.7 *Sejam $A, B^* \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $m \geq n$. Então vale:*

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Demonstração: Aplicando o Lema 1.8.6. Sejam $AB = [\alpha_{ij}]$ e $BA = [\beta_{ij}]$. Então,

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ii} = \sum_{i=1}^m \lambda_i(AB) = \sum_{i=1}^n \lambda_j(BA) = \sum_{i=1}^n \beta_{ii} = \text{tr}(BA). \quad \square$$

Os dois lemas a seguir descrevem propriedades importantes de valores singulares de matrizes. O primeiro estabelece uma relação entre os valores singulares do produto, com o produto dos valores singulares de duas matrizes. O segundo basicamente indica que o cálculo dos valores singulares não é sensível a pequenas perturbações na matriz.

Lema 1.8.8 *Sejam $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}$ e $\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A)$, valores singulares. Então,*

$$\sigma_i(AB) \leq \sigma_i(A) \sigma_1(B).$$

Demonstração: [9, pg. 34, Teorema 4.5]

Lema 1.8.9 *Sejam A e $\tilde{A} = A + E$ em $\mathbb{C}^{m,n}$, $m \leq n$. Então,*

$$|\sigma_i(\tilde{A}) - \sigma_i(A)| \leq \sigma_1(E) = \|E\|_2.$$

Demonstração: Veja [5, Corolário 8.3.2] ou [6, Corolário 4.3.8].

O lema a seguir foi demonstrado por Schur em 1909.

Lema 1.8.10 (Lema de Schur) *Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Temos*

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Demonstração: Ver [7, pg. 142, 1.4.1.]

Autovalores e valores singulares de uma matriz quadrada possuem uma importante relação, conforme descrito no lema a seguir.

Lema 1.8.11 *Seja $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, com espectro $\lambda(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ e espectro singular $\sigma(A) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Então,*

$$\prod_{i=1}^n |\lambda_i| = \prod_{i=1}^n \sigma_i$$

Demonstração: Aplicando a equação (1.2), obtêm-se:

$$|\det(A)|^2 = \det(A^*A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(A^*A) = \prod_{i=1}^n \sigma_i^2(A). \quad \square$$

A seguir apresentamos dois resultados técnicos que também serão utilizados na demonstração de um teorema central do Capítulo 2.

Lema 1.8.12 *Se S é Hermitiana e X não singular, então*

$$\|S\|_F \leq \|X^{-1}SX\|_F.$$

Demonstração: Primeiro vamos observar que $\lambda(S) = \lambda(X^{-1}SX)$. Como S é Hermitiana, se λ_i e σ_i são os respectivos autovalores e valores singulares de S , então $|\lambda_i| = \sigma_i$. Portanto,

$$\|S\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2(S) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i(S)|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i(X^{-1}SX)|^2 \stackrel{a}{\leq} \sum_{i=1}^n \sigma_i(X^{-1}SX)^2 = \|X^{-1}SX\|_F^2.$$

Uma observação: (a) decorre do Lema 1.8.10 (Schur). \square

Lema 1.8.13 *Se Y é positiva definida e $G \in \mathbb{C}^{n,n}$, então*

$$\|Y^{-1}GY - G\|_F \leq (k_2(Y) - 1)\|G\|_F.$$

Demonstração: Para demonstrar este lema, precisamos de alguns resultados auxiliares que relacionam o produto de Kroneker (Definição 1.2.4) com a forma vetorizada de uma matriz (Definição 1.2.6). Estes são dados nos próximos três lemas.

Lema 1.8.14 *Se $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $B \in \mathbb{C}^{p,q}$ e $D \in \mathbb{C}^{p,m}$, então*

$$(A \otimes B)vec(D) = vec(B^T D A).$$

Demonstração: [1, pg. 337, Lema 8.5.3.]

Lema 1.8.15 *Com $A \in \mathbb{C}^{m,m}$, $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ e $X \in \mathbb{C}^{m,n}$, vale a seguinte propriedade:*

$$vec(A X) = (I_n \otimes A)vec(X).$$

Demonstração: [4, pg. 275, Lema 6.2.]

Lema 1.8.16 *Dadas matrizes A, B, C e D , assumamos que os produtos ordinários (usuais) AC e BD estão bem definidos. Deste modo valem,*

1. $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$
2. *Se A e B são não singulares, $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$*

Demonstração: [4, pg. 275, Lema 6.3.]

Demonstração do Lema 1.8.13: Considere o operador linear $L : \mathbb{C}^{n,n} \rightarrow \mathbb{C}^{n,n}$, definido por

$$L(G) = Y^{-1}GY - G \tag{1.35}$$

Aplicando o Lema 1.8.14, em $Y^{-1}GY$, com $A = Y$, $B = Y^{-1}$ e $D = G$, e o Lema 1.8.15 em G , obtemos,

$$vec(Y^{-1}GY) = (Y \otimes Y^{-1})vec(G), \tag{1.36}$$

$$vec(G) = vec(I_n G) = (I_n \otimes I_n)vec(G) \tag{1.37}$$

Portanto, utilizando (1.1), (1.36) e (1.37) concluímos que,

$$vec(L(G)) = vec(Y^{-1}GY) - vec(G) = (Y \otimes Y^{-1} - I_n \otimes I_n)vec(G) = \tilde{L} vec(G), \tag{1.38}$$

em que $\tilde{L} = Y \otimes Y^{-1} - I_n \otimes I_n$. Agora, se Y tem uma decomposição espectral $Y = X^{-1} \Lambda X$, então pelo Lema 1.8.16, obtemos

$$\begin{aligned}
Y \otimes Y^{-1} &= (X^{-1} \Lambda X) \otimes (X \Lambda X^{-1}) \\
&= [(X^{-1} \Lambda) \otimes (X^{-1} \Lambda^{-1})](X \otimes X) \\
&= [(\Lambda^{-1} X)^{-1} \otimes (\Lambda X)^{-1}](X \otimes X) \\
&= [(\Lambda^{-1} X) \otimes (\Lambda X)]^{-1}(X \otimes X) \\
&= [(\Lambda^{-1} \otimes \Lambda)(X \otimes X)]^{-1}(X \otimes X) \\
&= (X \otimes X)^{-1}(\Lambda^{-1} \otimes \Lambda)^{-1}(X \otimes X) \\
&= (X \otimes X)^{-1}(\Lambda \otimes \Lambda^{-1})(X \otimes X)
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Note-se que (1.39) é uma decomposição espectral para $Y \otimes Y^{-1}$. Se η_i são os autovalores de Y , então os autovalores de $Y \otimes Y^{-1}$ são, para cada i fixo, η_i/η_j , $1 \leq j \leq n$, e portanto, os autovalores de \tilde{L} são $\eta_i/\eta_j - 1$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Como Y é Hermitiana, \tilde{L} é Hermitiano. Assim,

$$\begin{aligned}
\|L(G)\|_F^2 &= \|\text{vec}(L(G))\|_2^2 = \|\tilde{L} \text{vec}(G)\|_2^2 \leq \|\tilde{L}\|_2^2 \|\text{vec}(G)\|_2^2 \\
&= [\lambda_{\max}(\tilde{L})]^2 \|G\|_F^2 = \left[\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \left\{ \frac{\eta_i}{\eta_j} - 1 \right\} \right]^2 \|G\|_F^2 \\
&= \left\{ \frac{\eta_{\max}}{\eta_{\min}} - 1 \right\}^2 \|G\|_F^2 \\
&= (\kappa_2(Y) - 1)^2 \|G\|_F^2
\end{aligned} \tag{1.40}$$

A última igualdade decorre do fato de Y ser positiva definida. \square

Lema 1.8.17 *Seja $C \in \mathbb{C}^{n,n}$, não singular. Então,*

$$[\text{adj}(C)][\text{adj}(C)]^* = \text{adj}(C^*C)$$

Demonstração: Aplicando a Proposição 1.2.3, temos:

$$[\text{adj}(C)][\text{adj}(C)]^* = C^{-1} \det(C)(C^*)^{-1} \det(C^*) = (C^*C)^{-1} \det(C^*C) = \text{adj}(C^*C). \square$$

Capítulo 2

Não Normalidade

2.1 Medidas de Não Normalidade

Na Seção 1.7 exploramos o conceito de normalidade e apresentamos alguns resultados que caracterizam de diferentes maneiras quando uma matriz é normal. Nesta seção apresentamos diferentes maneiras de medir quão “distante” de ser normal a matriz está. Para tal, precisamos em primeiro lugar definir o que entendemos por medida de não normalidade.

Definição 2.1.1 *Seja $\mathcal{N} = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} : A^*A = AA^*\}$, o conjunto das matrizes normais. Uma medida de não normalidade é uma função $\mu : \mathbb{C}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}_+$, que satisfaz(ver [23])*

1. $\mu(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{N}$;
2. $A \notin \mathcal{N} \implies \mu(A) > 0$.

Se $A \notin \mathcal{N}$, nosso objetivo é quantificar a distância de A até o conjunto \mathcal{N} . Isto pode ser feito por meio das duas seguintes funções.

$$\mu_1(A) = \min\{\|A - N\|_F : N \in \mathcal{N}\},$$

$$\tilde{\mu}_1(A) = \min\{\|A - N\|_2 : N \in \mathcal{N}\}.$$

Estas funções satisfazem as condições da Definição 2.1.1 e medem a distância de A ao conjunto \mathcal{N} (Ruhe, em [37], prova a existência da matriz N que minimiza μ_1 (ou $\tilde{\mu}_1$) e mostra como determiná-la).

Outra maneira de medir não normalidade decorre da norma do resíduo $R = A^*A - AA^*$. Utilizando a norma de Frobenius e a norma 2, obtemos

$$\mu_2(A) = \|A^*A - AA^*\|_F^{1/2},$$

$$\tilde{\mu}_2(A) = \|A^*A - AA^*\|_2^{1/2}.$$

A decomposição de Schur, introduzida na Seção 1.4.1, junto com os itens (2. e 3.) do Teorema 1.7.1, nos permitem definir duas novas medidas, como segue:

$$\mu_3(A) = \Delta_F(A) = \left(\|A\|_F^2 - \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\mu}_3(A) = \Delta_2(A),$$

em que

$$\Delta_2(A) = \min\{\|M\|_2 : U^*AU = T = \Lambda + M, \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\}.$$

Quando a condição (4.) do Teorema 1.7.1 não é satisfeita, supondo que os autovalores em módulo e os valores singulares de A , estão ordenados da mesma maneira (digamos crescente), então o módulo máximo da diferença entre os valores singulares $\sigma_i(A)$, e o módulo dos autovalores $\lambda_i(A)$, também define uma medida de não normalidade.

$$\mu_4(A) = \max_i |\sigma_i - |\lambda_i||$$

Finalmente, para uma matriz A diagonalizável, podemos definir uma medida de não normalidade baseada no número de condição da matriz não singular X , que

diagonaliza A . Este número de condição da Definição 1.6.10, nos permite introduzir:

$$\mu_5(A) = \min\{k_F(X) - n : X \in \mathbb{C}^{n,n}, X^{-1}AX = \Lambda\},$$

$$\tilde{\mu}_5(A) = \min\{k_2(X) - 1 : X \in \mathbb{C}^{n,n}, X^{-1}AX = \Lambda\}.$$

Esta medida nos diz, de acordo com o item (5.) do Teorema 1.7.1, que quanto mais bem condicionada a matriz de diagonalização X , mais próxima de ser normal, a matriz A está.

Estas são o que podemos chamar de as mais interessantes medidas de não normalidade encontradas na literatura, uma vez que a partir delas é possível obter várias relações interessantes, como veremos na próxima seção. Outras medidas podem ser encontradas em [23].

2.2 Comparações entre Medidas de Não Normalidade

O teorema seguinte estabelece relações entre as medidas definidas na seção precedente.

Teorema 2.2.1 *Seja $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. São válidas as seguintes desigualdades (Ver [22, 23, 26, 29, 35, 36, 38]):*

1. $\tilde{\mu}_i \leq \mu_i \leq \sqrt{n} \tilde{\mu}_i, i = 1, 2, 3.$
2. $\frac{\mu_2}{\sqrt[4]{6}\|A\|_F^{1/2}} \leq \mu_3 \leq \left(\frac{n^3 - n}{12}\right)^{1/4} \mu_2.$
3. $\mu_2^2 \leq \sqrt{2(\|A\|_F^2 + \|\Lambda\|_F^2)} \mu_3 \leq 2\|A\|_F \mu_3.$
4. $\mu_2^2 \leq 4\|A\|_2 \mu_1.$
5. $\mu_2^2 \leq 4\|A\|_F \tilde{\mu}_1 + \sqrt{2n} \tilde{\mu}_1^2.$
6. $\frac{\mu_3}{\sqrt{n}} \leq \mu_1 \leq \mu_3.$
7. $\mu_4 \leq \tilde{\mu}_3.$
8. $\mu_3^2 \leq 2\sqrt{n} \|A\|_F \mu_4 \leq 2n\|A\|_2 \mu_4.$

$$9. \frac{\tilde{\mu}_5^2}{1 + \tilde{\mu}_5} \leq \mu_5 \leq \frac{n}{2} \frac{\tilde{\mu}_5^2}{1 + \tilde{\mu}_5}.$$

10. Se todos os autovalores de A são simples (i.e. de multiplicidade 1) temos:

$$\delta_j = \min\{|\lambda_i - \lambda_j| : i \neq j\}, j = 1, \dots, n,$$

então

$$\mu_5 \leq \sum_{j=1}^n \left\{ \left[1 + \frac{\mu_3^2}{\delta_j^2 (n-1)} \right]^{(n-1)/2} - 1 \right\}$$

$$11. \mu_2^2 \leq 2\|\Lambda\|_2 \|\Lambda\|_F \tilde{\mu}_5 (2 + \tilde{\mu}_5) \leq 2\|A\|_F^2 \tilde{\mu}_5 (2 + \tilde{\mu}_5).$$

$$12. \mu_3 \leq \frac{\|A\|_F^2 \tilde{\mu}_5 (2 + \tilde{\mu}_5)}{(1 + \tilde{\mu}_5)^2}.$$

$$13. \mu_4 \leq \|A\|_2 \tilde{\mu}_5.$$

Neste Teorema usamos a abreviação μ_i para simplificar a notação $\mu_i(A)$, $i = 1, \dots, 5$ e $\tilde{\mu}_i$ para $\tilde{\mu}_i(A)$, $i = 1, 2, 3$ e 5 .

A seguir, faremos a prova do Teorema 2.2.1, seguindo a mesma enumeração do enunciado.

Demonstração:

1. Seja $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Da definição das normas espectral e de Frobenius, do fato de ambas serem unitariamente invariantes e da SVD de A , obtemos a equivalência entre as normas $\|\cdot\|_F$ e $\|\cdot\|_2$ descrita pelas relações abaixo

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A) \leq \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A) \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n \sigma_1^2(A) \right)^{1/2} = \sqrt{n} \|A\|_2.$$

O primeiro item segue dessas relações.

2. Iniciaremos considerando $A = U^* T U$ a decomposição de Schur de A , em que $T = \Lambda + M$, com $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e M estritamente triangular superior. Para a primeira desigualdade, consideremos $M = (m_{ij})$. Então temos,

$$\begin{aligned}
\|AA^* - A^*A\|_F &= \|(\Lambda + M)(\Lambda^* + M^*) - (\Lambda^* + M^*)(\Lambda + M)\|_F \\
&\leq \|M\Lambda^* + \Lambda M^* - \Lambda^*M - M^*\Lambda\|_F + \|MM^* - M^*M\|_F \\
&= \left(2 \sum_{i < j} |m_{ij}|^2 |\lambda_i - \lambda_j|^2\right)^{1/2} + \|MM^* - M^*M\|_F \\
&\leq \sqrt{2}s\|M\|_F + \sqrt{2}\|M\|^2,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

em que $s = \max_{ij} |\lambda_i - \lambda_j|$. O termo da direita segue do Lema 1.8.1, que garante $\|MM^* - M^*M\|_F \leq \sqrt{2}\|M\|_F^2$.

Como $\|\cdot\|_F$ é invariante por transformações unitárias (unitariamente invariante), da decomposição de Schur temos

$$\|M\|_F = \{\|A\|_F^2 - \|\Lambda\|_F^2\}^{1/2} \tag{2.2}$$

Assumindo que $\Lambda = \lambda I$, de (2.1) e (2.2) segue que,

$$\begin{aligned}
\|AA^* - A^*A\|_F &= \|MM^* - M^*M\|_F \leq \sqrt{2}\|M\|_F^2 = \sqrt{2}(\|A\|_F^2 - \|\Lambda\|_F^2), \\
&\text{ou} \\
\|A\|_F^2 - \|\Lambda\|_F^2 &\geq \frac{\|AA^* - A^*A\|_F}{\sqrt{2}} \geq \frac{\|AA^* - A^*A\|_F^2}{2\|A\|_F^2}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Por outro lado, se assumirmos que $\Lambda \neq \lambda I$, então $s \neq 0$ e $\|\Lambda\|^2 \neq 0$. Sejam

$$x = \frac{\|\Lambda\|_F}{\|A\|_F}, \quad y = \frac{\|AA^* - A^*A\|_F^2}{2\|A\|_F^2}, \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{s}{\sqrt{2}\|\Lambda\|_F}, \tag{2.4}$$

então $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Com esta notação, vamos mostrar que

$$1 - x^2 \leq \frac{y^2}{3}. \tag{2.5}$$

Decorre de (2.1) que $y \leq 1 - x^2 + \sqrt{2}\alpha x\sqrt{1 - x^2}$. Ou, noutra formulação,

$$y - 1 + x^2 \leq \sqrt{2}\alpha x\sqrt{1 - x^2}. \tag{2.6}$$

Se $y - 1 + x^2 \leq 0$, $y^2/3 \leq y < 1 - x^2$ e vale (2.5). Se $y - 1 + x^2 \geq 0$, elevando (2.6) ao quadrado e reordenando os termos, obtemos

$$P(x^2) \equiv (1 + 2\alpha^2)x^4 - 2(1 - 2y + \alpha^2)x^2 + y^2 - 2y + 1 \leq 0. \quad (2.7)$$

Como P tem dois zeros reais (basta calcular duas raízes para ver isso), x^2 deve ser menor ou igual ao maior, ou seja,

$$x^2 \leq \frac{1}{(1 + 2\alpha^2)}(1 - y + \alpha^2 + \alpha(\alpha^2 - 2y - 2y^2)^{1/2}). \quad (2.8)$$

Note-se que

$$(\alpha^2 - 2y - 2y^2)^{1/2} = \alpha \left(1 - \frac{2y^2 + 2y}{\alpha^2}\right)^{1/2} \leq \alpha \left(1 - \frac{y^2 + y}{\alpha^2}\right).$$

Daí, substituindo em (2.8), obtemos $x^2 \leq 1 - [y^2/(1 + 2\alpha^2)]$ ou, como $\alpha^2 \leq 1$, vale (2.5). Logo, da definição de x , y , α , em (2.4), segue que

$$\frac{\mu_2}{\sqrt[4]{6}\|A\|_F^{1/2}} \leq \mu_3.$$

Para provar

$$\mu_3 \leq \left(\frac{n^3 - n}{12}\right)^{1/4} \mu_2,$$

definimos $\Gamma = T^*T - TT^*$ e notamos que os elementos da diagonal de $\Gamma = (\gamma_{ij})$ são dados em função dos elementos m_{ij} de M pela expressão

$$\gamma_{ii} = \sum_{k < i} |m_{ki}|^2 - \sum_{k > i} |m_{ki}|^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

Vamos provar que

$$\|M\|_F^2 \leq \gamma_{22} + 2\gamma_{33} + \dots + (n - 1)\gamma_{nn} \quad (2.10)$$

usando indução matemática. Obviamente a desigualdade é válida para ordem 1. Suponha que também vale para ordem n e consideremos a matriz \hat{M} de ordem $n + 1$ que tem M como submatriz formada eliminando-se as linha e coluna $n + 1$, e desta

forma

$$\hat{\gamma}_{ii} = \gamma_{ii} - |m_{i,n+1}|^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Assim segue que

$$\begin{aligned} \|\hat{M}\|_F^2 &= \|M\|_F^2 + |m_{1,n+1}|^2 + \dots + |m_{n,n+1}|^2 \\ &\leq \gamma_{22} + 2\gamma_{33} + \dots + (n-1)\gamma_{nn} + \hat{\gamma}_{n+1,n+1} \\ &= \hat{\gamma}_{22} + |m_{2,n+1}|^2 + 2(\hat{\gamma}_{33} + |m_{3,n+1}|^2) + \dots + \\ &\quad + (n-1)(\hat{\gamma}_{nn} + |m_{n,n+1}|^2) + \hat{\gamma}_{n+1,n+1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\leq \hat{\gamma}_{22} + \dots + (n-1)\hat{\gamma}_{nn} + n\hat{\gamma}_{n+1,n+1}. \quad (2.12)$$

Observemos que a hipótese de indução aplicada (2.11) junto com a representação dos termos da diagonal de Γ dada por (2.9) implica (2.12) e portanto vale (2.10).

Por outro lado, de (2.9) decorre que

$$\gamma_{11} + \gamma_{22} + \dots + \gamma_{nn} = 0, \quad (2.13)$$

logo, subtraindo $\frac{n-1}{2}$ vezes (2.13) de (2.10), temos

$$\|M\|_F^2 \leq \frac{1-n}{2} \gamma_{11} + \frac{3-n}{2} \gamma_{22} + \dots + \frac{n-1}{2} \gamma_{nn},$$

e usando a desigualdade de Cauchy, segue

$$\begin{aligned} \|M\|_F^4 &\leq \left[\frac{(1-n)^2}{4} + \frac{(3-n)^2}{4} + \dots + \frac{(n-1)^2}{4} \right] [\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \dots + \gamma_{nn}^2] \\ &= \frac{n^3 - n}{12} [\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \dots + \gamma_{nn}^2] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Observando que $A^*A - AA^* = U\Gamma U^*$ temos

$$\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \dots + \gamma_{nn}^2 \leq \|\Gamma\|_F^2 = \|A^*A - AA^*\|_F^2,$$

portanto,

$$\|M\|_F^4 \leq \left(\frac{n^3 - n}{12} \right) \|A^*A - AA^*\|_F^2,$$

ou seja, $\|M\|_F \leq \left(\frac{n^3-n}{12}\right)^{1/4} \|A^*A - AA^*\|_F^{1/2}$ donde finalmente decorre (2.).

3. A inequação (2.15) foi estabelecida por Kress, De Vries e Wegmann em [29], e será utilizada para a prova deste item:

$$\left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2\right)^2 \leq \|A\|_F^4 - \frac{1}{2}\mu_2^4 \quad (2.15)$$

Manipulando os termos de (2.15), e fatorando como segue,

$$\frac{1}{2}\mu_2^4 \leq \|A\|_F^4 - \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2\right)^2 = \left[\|A\|_F^2 - \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2\right] \left[\|A\|_F^2 + \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2\right],$$

obtemos, $\mu_2^2 \leq \sqrt{2(\|A\|_F^2 + \|\Lambda\|_F^2)} \mu_3$. A segunda desigualdade é consequência do Lema de Schur 1.8.10.

4. Se $N \in \mathcal{N}$, então vale

$$A^*A - AA^* = A^*(A - N) + (A - N)^*N - (A - N)N^* - A(A - N)^*, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} &= A^*(A - N) + (A - N)^*A - (A - N)A^* - A(A - N)^* + \\ &\quad + (A - N)(A - N)^* - (A - N)^*(A - N). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Agora, de (2.16) decorre

$$\mu_2^2 = \|A^*A - AA^*\|_F \leq 2(\|A\|_2 + \|N\|_2)\|A - N\|_F \quad (2.18)$$

Supondo que N é tal que $\mu_1 = \|A - N\|_F$ e tomando U unitária tal que $U^*NU = D$, com D diagonal. Temos assim,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \|A - N\|_F = \|U^*(A - N)U\|_F = \|U^*AU - D\|_F \\ &= \min\{\|U^*AU - D\|_F, D \text{ diagonal e } U \text{ unitária}\}, \end{aligned}$$

e daí concluímos que D é a diagonal de U^*AU . Em particular,

$\|N\|_2 = \|D\|_2 \leq \|A\|_2$. Da última observação, junto com (2.18), obtemos (4.).

5. A prova deste item decorre do Lema 1.8.1, de (2.17) e (2.18) como segue

$$\begin{aligned} \mu_2^2 = \|A^*A - AA^*\| &\leq 4\|A\|_F \|A - N\|_2 + \sqrt{2}\|A - N\|_F^2 \\ &\leq 4\|A\|_F \|A - N\|_2 + \sqrt{2n}\|A - N\|_2^2 \\ &= 4\|A\|_F \tilde{\mu}_1 + \sqrt{2n} \tilde{\mu}_1^2, \end{aligned}$$

que é exatamente (5.).

6. Para a primeira inequação, vamos utilizar a desigualdade (2.19) estabelecida por Laszló em [31].

$$\|\text{diag}(A)\|_F^2 \leq \frac{1}{n}\|\Lambda\|_F^2 + \frac{n-1}{n}\|A\|_F^2, \quad (2.19)$$

em que $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é a diagonal cujas entradas são os autovalores de $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, e $\text{diag}(A)$ é a diagonal principal de A . Se $N \in \mathcal{N}$, então $N = U^*DU$, com D diagonal e U unitária. Logo,

$$\begin{aligned} \|A - N\|_F^2 &= \|A - U^*DU\|_F^2 \\ &= \|UAU^* - D\|_F^2 \\ &\geq \|UAU^* - \text{diag}(A)\|_F^2 \\ &\geq \|UAU^*\|_F^2 - \|\text{diag}(A)\|_F^2 \\ &\geq \|A\|_F^2 - \frac{1}{n}\|\Lambda\|_F^2 - \frac{n-1}{n}\|A\|_F^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$= \frac{\|A\|_F^2 - \|\Lambda\|_F^2}{n}. \quad (2.21)$$

Notemos que (2.20) decorre da equação (2.19) e (2.21) é o resultado desejado, já que N é arbitrária. Para a segunda desigualdade, assumamos que U é unitária e que $U^*AU = \Lambda + M$, onde M é estritamente triangular superior. Então temos

$$\mu_3^2 = \|A\|_F^2 - \|\lambda\|_F^2 = \|M\|_F^2 = \|U^*AU - \Lambda\|_F^2 = \|A - U\Lambda U^*\|_F^2 \geq \mu_1^2,$$

pois $U\Lambda U^*$ é normal.

7. Consideremos A uma matriz qualquer e definamos $\tilde{A} = A + E$, onde E é uma matriz de perturbação. Assim, pelo Lema 1.8.9, temos $|\sigma_i(\tilde{A}) - \sigma_i(A)| \leq \sigma_1(E) = \|E\|_2$. Portanto, $\sigma_i(A + M) \leq \sigma_i(A) + \sigma_1(M) = \sigma_i(A) + \|M\|_2$. Ou seja, $\sigma_i(A) - |\lambda_i(A)| \leq \|M\|_2$, portanto, $\max_i |\sigma_i(A) - |\lambda_i(A)|| \leq \inf \|M\|_2$, como queríamos.

8. Observemos que,

$$\begin{aligned} \mu_3^2 &= \left(\|A\|_F^2 - \sum_{i=1}^n |\lambda_i(A)|^2 \right) = \sum_{i=1}^n (\sigma_i^2 - |\lambda_i|^2) \\ &= \sum_{i=1}^n (\sigma_i - |\lambda_i|)(\sigma_i + |\lambda_i|) \leq \sum_{i=1}^n \max_{1 \leq i \leq n} |\sigma_i - |\lambda_i|| (\sigma_i + |\lambda_i|) \\ &= \mu_4 \sum_{i=1}^n (\sigma_i + |\lambda_i|) = \mu_4 \sqrt{n} \left[\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right)^{1/2} \right] \\ &\leq 2\sqrt{n} \|A\|_F \mu_4 \leq 2n \|A\|_2 \mu_4 \end{aligned}$$

devido ao Lema 1.8.10. Portanto, vale o ítem (8).

9. A demonstração começa com o seguinte lema auxiliar.

Lema 2.2.2 *Seja $A = P^{-1}JP$, com J a forma de Jordan de A , $\kappa_2 = \kappa_2(P)$, $\kappa_F = \kappa_F(P)$. Então,*

$$n - 2 + \kappa_2 + \kappa_2^{-1} \leq \kappa_F \leq \frac{1}{2}n(\kappa_2 + \kappa_2^{-1})$$

Demonstração: Se $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$ são os autovalores de P^*P , então

$$\|P\|_F^2 \|P^{-1}\|_F^2 = (q_1 + \dots + q_n)(q_1^{-1} + \dots + q_n^{-1}) = e^* Q e e^* Q^{-1} e,$$

em que $e^* = (1, 1, \dots, 1)$. Pelo Lema 1.8.3, temos

$$e^* Q e e^* Q^{-1} e \leq \left[\frac{1}{2}(p + p^{-1})^2 (e^* e)^2 \right] = \left[\frac{1}{2}n(p + p^{-1}) \right]^2,$$

com $p = (q_1/q_n)^{1/2} = \|P\|_2 \|P^{-1}\|_2$. Então $\kappa_F \leq \|P\|_F \|P^{-1}\|_F \leq \frac{1}{2}n(p + p^{-1})$.

A segunda inequação de (2.2.2) segue usando que $\kappa_2 = \inf\{p\}$, tomado sobre todo P que satisfaz $A = P^{-1}JP$.

Se $u = (q_1q_n)^{1/2}(q_2 + \dots + q_{n-1})ev = (q_1q_n)^{-1/2}(q_2^{-1} + \dots + q_{n-1}^{-1})$, então, pela desigualdade de Cauchy, $uv \geq (n-2)^2$ e segue que

$$\begin{aligned}\|P\|_F^2 \|P^{-1}\|_F^2 &= (q_1q_n)^{-\frac{1}{2}}(q_1 + \dots + q_n)(q_1q_n)^{\frac{1}{2}}(q_1^{-1} + \dots + q_n^{-1}) \\ &= (p + u + p^{-1})(p^{-1} + v + p) \geq [p + p^{-1} + (uv)^{\frac{1}{2}}]^2.\end{aligned}$$

Como $(uv)^{\frac{1}{2}} \geq (n-2)$ e $p \geq k \geq 1$, resulta que

$$\|P\|_F \|P^{-1}\|_F \geq p + p^{-1} + n - 2 \geq \kappa_2 + \kappa_2^{-1} + n - 2$$

que é a primeira inequação do Lema 2.2.2. \square

Agora, subtraindo n na expressão dada pelo Lema 2.2.2, obtemos,

$$\begin{aligned}-2 + \kappa_2 + \kappa_2^{-1} &\leq \kappa_F - n \leq \frac{1}{2}n(\kappa_2 + \kappa_2^{-1}) - n \\ \implies \frac{\kappa_2^2 - 2\kappa_2 + 1}{\kappa_2} &\leq \kappa_F - n \leq \frac{n}{2} \left(\frac{\kappa_2^2 - 2\kappa_2 + 1}{\kappa_2} \right) \\ \implies \frac{(\kappa_2 - 1)^2}{\kappa_2} &\leq \kappa_F - n \leq \frac{n}{2} \frac{(\kappa_2 - 1)^2}{\kappa_2},\end{aligned}$$

em que, somando e subtraindo 1 no denominador do primeiro e último termo da expressão, segue o item 9.

Na prova dos itens (10.) - (13.) assumiremos que $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ é uma matriz diagonalizável.

10. Para iniciar precisamos definir o número de condição para um autovalor de uma dada matriz.

Definição 2.2.3 *Seja $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, λ_j um autovalor de A . Sejam x , y os respectivos autovalores à direita e à esquerda para λ_j . O número de condição associado ao autovalor λ_j é definido por*

$$\kappa(\lambda_j) = \frac{\|x_j\|_2 \|y_j\|_2}{|y_j^* x_j|}, \quad (2.22)$$

A desigualdade segue dos resultados abaixo, que serão demonstrados no capítulo seguinte.

$$(a) \quad \kappa(\lambda_j) \leq \left\{ 1 + \frac{\mu_3^2}{(n-1)\delta_j^2} \right\}^{(n-1)/2}, \quad \delta_j = \min\{|\lambda_j - \lambda_i|, \forall i \neq j, 1 \leq i \leq n\};$$

$$(b) \quad \text{Se } A \text{ é diagonalizável: } A = X\Lambda X^{-1}, \text{ então } \kappa_F(X) = \sum_{i=1}^n \kappa(\lambda_i)$$

11. Assumamos $A = X_1 \Lambda X_1^{-1}$ e $\tilde{\mu}_5 = \kappa_2(X_1) - 1$. Então

$$X_1^{-1}(A^*A - AA^*)X_1 = (Y^{-1}\Lambda^*Y - \Lambda^*)\Lambda - \Lambda(Y^{-1}\Lambda^*Y - \Lambda^*),$$

onde $Y = X_1^*X_1$ é positiva definida. Logo, usando os Lemas 1.8.12 e 1.8.13, obtemos

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &\leq \|X_1(A^*A - AA^*)X_1^{-1}\|_F = 2\|\Lambda\|_2\|(Y^{-1}\Lambda^*Y - \Lambda^*)\|_F \\ &\leq \|\Lambda\|_2\|\Lambda\|_F[\kappa_2(Y) - 1] = 2\|\Lambda\|_2\|\Lambda\|_F[\kappa_2^2(X_1) - 1] \\ &= 2\|\Lambda\|_2\|\Lambda\|_F \tilde{\mu}_5(2 + \tilde{\mu}_5), \end{aligned}$$

12. Observemos que, sendo $A = X_1 \Lambda X_1^{-1}$ como no item anterior vale:

$$\|A\|_F^2 = \|\Lambda\|_F^2 \kappa_2^2(X_1),$$

e então

$$\mu_3 = \|A\|_F^2 - \|\Lambda\|_F^2 \leq \|A\|_F^2 \{1 - \kappa_2(X_1)^{-2}\},$$

na qual completando o quadrado no denominador, se obtém a prova do ítem (12.)

13. Se $X\Lambda X^{-1} = A$, aplicando o Lema 1.8.8 temos

$$\sigma_i(A) \leq \kappa_2(X)\sigma_i(\Lambda) = \kappa_2(X)\sigma_i|\lambda_i(A)|, \quad (2.23)$$

e,

$$\begin{aligned}\sigma_i(A) &\leq \kappa_2(X)\sigma_i(A), \quad \text{ou seja,} \\ |\lambda_i(A)| &\leq \kappa_2(X)\sigma_i(A)\end{aligned}\tag{2.24}$$

De (2.23) e (2.24) decorre que

$$-\sigma_i(A)(\kappa_2(X) - 1) \leq \sigma_i(A) - |\lambda_i(A)| \leq \sigma_i(A)(\kappa_2(X) - 1)$$

e, portanto,

$$|\sigma_i(A) - |\lambda_i(A)|| \leq \sigma_i(A)(\kappa_2(X) - 1)$$

Concluindo assim a demonstração, de (13.) e do Teorema 2.2.1. \square

Dentre as desigualdades do Teorema 2.2.1, algumas são de especial interesse. Por exemplo, o item 2. fornece uma limitante superior para a diferença entre a soma dos valores singulares de uma matriz A e seus autovalores, que depende apenas da norma do resíduo $R = A^*A - AA^*$ e da dimensão n da matriz.

O item 4. diz que $1/4$ da norma do resíduo é limitada pelo produto entre o maior valor singular de A e a distância de A até o conjunto \mathcal{N} .

Em 6., temos limitantes que garantem que, se a diferença entre os valores singulares e autovalores for pequena, e por conseguinte, a diferença entre as somas também, então a matriz está bem próxima do conjunto \mathcal{N} . Por outro lado, se esta diferença for grande, então a limitante inferior garante que a matriz está distante do conjunto \mathcal{N} . Este é o caso também no item 7., ou seja se $\sigma_{\max}(A) \gg \max_i |\lambda_i|$, então, a norma 2 da parte estritamente triangular superior de T , a matriz triangular da decomposição de Schur de A , será grande.

Por último, no item 10., se os autovalores de A não estiverem muito próximos, conforme medido por δ_j e, além disso, os valores singulares não diferirem em muito dos autovalores, então a matriz de diagonalização X é bem condicionada, o que indica uma quase normalidade de A .

Capítulo 3

Não Normalidade e Sensibilidade de Autovalores

3.1 Perturbação de Autovalores

Há na literatura diversos resultados que permitem estimar o erro nos autovalores de uma matriz perturbada em relação aos autovalores da matriz original [4, Seção 4.3.], [5, Seção 7.2.], [9, Capítulo 4.]. Apresentamos alguns deles com o intuito de esclarecer o importante fenômeno da sensibilidade do problema de autovalores matricial.

O seguinte teorema apresenta uma limitante para o módulo do erro no autovalor perturbado em função do número de condição do autovalor exato.

Teorema 3.1.1 *Seja λ um autovalor simples de $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ com autovetor à direita x , e autovetor à esquerda y , normalizados de modo que $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$. Seja $E \in \mathbb{C}^{n,n}$ uma matriz de perturbação. Defina $\tilde{A} = A + E$, e seja $\tilde{\lambda}$ o autovalor de \tilde{A} , mais próximo de λ . Se $\kappa(\lambda)$ é o número de condição da Definição 2.2.3, então*

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \lambda + \frac{y^* E x}{y^* x} + O(\|E\|_2^2), \quad \text{ou} \\ |\lambda - \tilde{\lambda}| &\leq \kappa(\lambda) \|E\|_2 + O(\|E\|_2^2) = \sec\Theta(y, x) \|E\|_2 + O(\|E\|_2^2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que $\Theta(y, x)$ é o ângulo agudo entre y e x .

Demonstração: Ver [4, pg. 149.]

A expressão (3.1) no Teorema 3.1.1 nos diz que o número de condição tem papel fundamental sobre a sensibilidade de um autovalor. Se o ângulo $\Theta(y, x) \approx 0$, ou seja, se os autovetores forem quase colineares, então, $\sec \Theta \approx 1$ e, portanto, $\kappa(\lambda) \approx 1$. Ou seja, o autovalor é bem condicionado e assim, pouco sensível a perturbações na matriz. Desta forma, a distância entre o autovalor perturbado e o exato é da ordem da norma da perturbação. Para matrizes simétricas (ou normais), isto sempre ocorre, ou seja, os autovalores simples desta classe de matrizes são perfeitamente condicionados ($\kappa(\lambda) = 1$). O Corolário a seguir descreve isso.

Corolário 3.1.2 *Supondo válidas as condições do teorema anterior, seja A simétrica (ou normal). Então $|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq \|E\| + O(\|E\|^2)$.*

Demonstração: Ver [4, pg. 150.]

O Corolário 3.1.2 é uma versão fraca do Teorema 3.1.1, pois exige que o autovalor seja simples. Uma versão mais forte generaliza o corolário, para o caso em que tanto A como E são simétricas.

Teorema 3.1.3 *Sejam $A, E \in \mathbb{C}^{n,n}$ matrizes simétricas (ou normais). Sejam $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ os autovalores de A , e $\tilde{\lambda}_1 \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_n$ os autovalores $\tilde{A} = A + E$. Então $|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i| \leq \|E\|_2$.*

Demonstração: Veja [4, pg. 198.]

Outro teorema muito conhecido diz que as regiões de inclusão dos autovalores perturbados também dependem do número de condição de cada autovalor exato.

Teorema 3.1.4 (Bauer-Fike) *Seja $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ com espectro simples e $E \in \mathbb{C}^{n,n}$ uma matriz de perturbação. Seja λ_i um autovalor de A , com autovetor à esquerda e direita respectivamente y e x , normalizados de modo que $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$. Então os autovalores de $\tilde{A} = A + E$ pertencem a discos B_i centrados em λ_i e de raio $n\kappa(\lambda_i)\|E\|_2$.*

Demonstração: Ver [4, 5, 6, 9]

O reflexo do bom condicionamento de λ_j é observado no Teorema 3.1.4. Basicamente, conclui-se que se $\kappa(\lambda_j) \approx 1$, o raio do disco que contém o autovalor $\tilde{\lambda}_i$ de \tilde{A}

depende apenas da dimensão n e da norma espectral da perturbação. Se esta última for suficientemente pequena, então temos excelente informação sobre a localização do espectro de \tilde{A} .

3.2 Não Normalidade e Sensibilidade

Nesta seção apresentamos resultados que explicam como a não normalidade de uma matriz influencia a sensibilidade de seus autovalores. A sensibilidade de um autovalor é medida pelo número de condição, introduzido na Definição 2.2.3. Um primeiro resultado que relaciona o número de condição de um autovalor com medidas de não normalidade é descrito pelo seguinte teorema.

Teorema 3.2.1 *Sejam $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ e λ_j é um autovalor simples de A . Então*

$$\kappa(\lambda_j) \leq \left\{ 1 + \frac{\mu_3^2(A)}{(n-1)\delta_j^2} \right\}^{(n-1)/2},$$

em que $\delta_j = \min\{|\lambda_i - \lambda_j| : i \neq j\}$, $j = 1, \dots, n$.

Demonstração: Podemos assumir sem perda de generalidade que $A = \Lambda + M$ é triangular superior, com $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$. Sendo λ_j um elemento da diagonal de A , fixo, o i -ésimo elemento da diagonal de $(\lambda_j I - A)^*(\lambda_j I - A)$ é dado por

$$|\lambda_j - \lambda_i|^2 + \|m_i\|^2, \quad (3.2)$$

com m_i a i -ésima coluna de M . Tomando $C = (\lambda_j I - A)$, pelo Lema 1.8.17, obtemos

$$[\text{adj}(\lambda_j I - A)][\text{adj}(\lambda_j I - A)]^* = \text{adj}[(\lambda_j I - A)^*(\lambda_j I - A)] \quad (3.3)$$

Se o vetor y^T é a primeira linha de $\text{adj}(\lambda_j I - A)$, então o primeiro elemento da diagonal de $[\text{adj}(\lambda_j I - A)][\text{adj}(\lambda_j I - A)]^*$, no termo à esquerda em (3.3) é, $\|y\|^2$. Segue-se do lado direito de (3.3) que $\|y\|^2 = \det B$, onde B é obtida eliminando-se a primeira linha e a primeira coluna de $(\lambda_j I - A)^*(\lambda_j I - A)$. Como B é Hermitiana e positiva definida, o Lema 1.8.4 nos fornece $\|y\|^2 = \det B \leq b_1 b_2 \dots b_{n-1}$, onde $b_1 b_2 \dots b_{n-1}$ são os elementos

da diagonal de B . Como estes também são elementos da diagonal de $(\lambda_j I - A)^*(\lambda_j I - A)$, então segue de (2.2) que

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &\leq \prod_j \{|\lambda_j - \lambda_i| + \|m_i\|^2\} \\ &\leq \prod_j \{1 + \delta_j^{-2} \|m_i\|^2\} \cdot \prod_j \{|\lambda_j - \lambda_i|^2\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dados $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, as médias aritmética e geométrica obedecem a seguinte relação,

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (3.5)$$

Aplicando (3.5) no primeiro termo de (3.4), obtemos,

$$\prod_j \{1 + \delta_j^{-2} \|m_i\|^2\}^{1/(n-1)} \leq (n-1)^{-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \{1 + (n-1)^{-1} \delta_j^{-2} \|m_i\|^2\}. \quad (3.6)$$

Sustituindo (3.6) na estimativa (3.4) obtemos

$$\|y\|^2 \leq [1 + (n-1)^{-1} \delta_j^{-2} \|M\|_F^2]^{n-1} \cdot \prod_j \{|\lambda_j - \lambda_i|^2\}. \quad (3.7)$$

Da equação (2.2), aplicada em (3.7), resulta

$$\|y\|^2 \leq [1 + (n-1)^{-1} \delta_j^{-2} \mu_3^2]^{n-1} \cdot \prod_j \{|\lambda_j - \lambda_i|^2\}. \quad (3.8)$$

Como estamos considerando que A é triangular superior, então tanto $(\lambda_j I - A)$, quanto $\text{adj}(\lambda_j I - A)$, são triangulares superior. Logo, se x é a primeira coluna de $\text{adj}(\lambda_j I - A)$, seu único elemento não nulo é $\prod_j (\lambda_j - \lambda_i)$, donde

$$\|x\| = \prod_j |\lambda_j - \lambda_i|, \quad y^T x = \prod_j (\lambda_j - \lambda_i)^2 \quad (3.9)$$

Substituindo (3.8) e (3.9), na definição de $\kappa(\lambda_j)$ se deduz o Teorema 3.2.1. \square

Para os próximos teoremas, consideremos κ_2 e κ_F conforme Definição 1.6.10.

A partir do Teorema 3.2.1 é possível estabelecer uma conexão entre medida de não normalidade e condicionamento (na norma de Frobenius) de uma matriz diagonalizável com apenas autovalores simples.

Teorema 3.2.2 *Se A é diagonalizável ($A = X\Lambda X^{-1}$) e todos os autovalores são simples, então o número de condição de Jordan satisfaz:*

$$\kappa_F(X) = \sum_{j=1}^n \kappa_j(\lambda_j).$$

Demonstração: Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores de A e $X \in \mathbb{C}^{n,n}$ uma matriz cujas colunas são os autovetores à direita u_1, u_2, \dots, u_n de A , normalizados. Se Y é a matriz cujas linhas são os autovetores de A à esquerda normalizados, então

$$AX = XJ, \quad YA = JY \implies YXJ = JYX,$$

com $J = \text{diag}(\lambda_j)$. Visto que os autovalores são distintos, somente matrizes diagonais comutam com J , donde YX é uma matriz diagonal. O j -ésimo elemento da diagonal de YX é $\kappa(\lambda_j)$ por definição. Assim,

$$YX = S = \text{diag}(\kappa^{-1}(\lambda_1), \kappa^{-1}(\lambda_2), \dots, \kappa^{-1}(\lambda_n)), \quad \text{e } X^{-1} = S^{-1}Y.$$

Ainda, os autovetores de A são únicos exceto por um múltiplo escalar e, portanto, uma matriz satisfazendo $A = P^{-1}JP$ é da forma $P = XR$, onde $R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$. Então $\|P\|_F^2 = \sum |r_i|^2$ devido às colunas de X terem norma unitária. Também $P^{-1} = R^{-1}S^{-1}Y$ e $\|P^{-1}\|_F^2 = \sum |r_i \kappa^{-1}(\lambda_i)|^{-2}$, devido às colunas de Y terem norma unitária. Usando a desigualdade de Cauchy obtemos

$$\|P\|_F^2 \|P^{-1}\|_F^2 = \left(\sum |r_i|^2 \right) \left(\sum |r_i \kappa^{-1}(\lambda_i)|^{-2} \right) \leq \left(\sum |\kappa(\lambda_i)| \right)^2,$$

e portanto

$$\sum |\kappa(\lambda_i)| = \inf \{ \|P\|_F \cdot \|P^{-1}\|_F \} = k_F. \quad \square$$

Observações Relevantes:

1. Se δ_j que define a distância de λ_j ao resto do espectro não for muito pequeno e a medida de não normalidade $\mu_3(A) \approx 0$ então o Teorema 3.2.1 garante que λ_j é bem condicionado e portanto pouco sensível a pequenas perturbações nas entradas da matriz.
2. Se as condições da primeira observação se verificam para todos os autovalores, então o Teorema 3.2.2 diz que o problema de autovalores é bem condicionado na norma de Frobenius e por conseguinte, na norma espectral. Se, por outro lado, apenas um dos autovalores for muito mal condicionado, em virtude de grande não normalidade, ou de multiplicidade, então o condicionamento é ruim como consequência do mesmo teorema.

Utilizando uma medida de não normalidade (μ_2) é possível prever se o espectro de uma matriz será sensível a pequenas perturbações nas suas entradas, sem que seja conhecida uma decomposição espectral da matriz.

Teorema 3.2.3 *Se A é diagonalizável e todos os autovalores são simples, então*

$$\kappa_2(X) \geq \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\|A^*A - AA^*\|_F^2}{\|A^2\|_F^2}\right)^{1/4} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mu_2^4}{\|A^2\|_F^2}\right)^{1/4}$$

Demonstração: Consideremos XJX^{-1} como a forma de Jordan de A . Então, aplicando o Lema 1.6.8 duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \|A^*A\|_F &= \|X^{*-1}J^*X^*XJX^{-1}\|_F \\ &\leq \|X^{*-1}\|_2 \|J^*X^*XJ\|_F \|X^{-1}\|_2 \\ &= \|X^{-1}\|_2^2 \|J^*X^*XJ\|_F, \end{aligned} \tag{3.10}$$

e tomando $C = XJ$, vale $\|C^*C\|_F = \|CC^*\|_F$ e, portanto, novamente pelo Lema 1.6.8, temos

$$\begin{aligned}
\|J^* X^* X J\|_F &= \|X J J^* X^*\|_F \\
&\leq \|X\|_2 \|J J^*\|_F \\
&= \|X\|_2 \|J^2\|_F \\
&\leq \|X\|_2 \|A^2\|_F,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

pois J é diagonal. Substituindo (3.11) em (3.10), obtemos

$$\|A^* A\|_F \leq \|X^{-1}\|_2^2 \|X\|_2 \|A^2\|_F = \kappa_2^2(X) \|A^2\|_F \tag{3.12}$$

Portanto, de (3.12) e do lema (1.8.1), decorre o teorema. \square

A quantidade

$$\text{He}(A) = \frac{\|A^* A - A A^*\|_F^2}{\|A^2\|_F^2}, \tag{3.13}$$

é denominada *número de Henrici*, devido à Henrici que o publicou em 1962 [26]. Para certos operadores diferenciais que aparecem em Dinâmica dos Fluidos, existem uma relação entre o número de Henrici e o número de Reynolds associado ao operador (O primeiro cresce com o segundo) [2, 17, 19].

Alguns autores têm apontado para este número de Henrici como um modo bastante confiável de se investigar uma possível instabilidade no cálculo do espectro de uma matriz [17, 19].

No próximo capítulo veremos como podemos obter estimativas teóricas para a medida de não normalidade de certas matrizes que aparecem em aplicações.

Capítulo 4

Não Normalidade em Teoria de Sistemas

4.1 Sistemas Dinâmicos Lineares

Apresentamos uma breve introdução aos sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo, bem como um problema inverso conhecido como Problema de Realização [3]. O objetivo é mostrar como a não normalidade de uma matriz influencia na solução do problema de realização.

Intuitivamente, o termo *sistema* refere-se a uma entidade (física, econômica etc) capaz de produzir alguma reação y (*saída/output*) como consequência de um estímulo u (*entrada/imput*), e pode ser representado pelo seguinte diagrama:

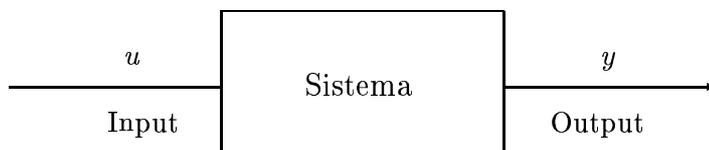


Figura 4.1: Um sistema genérico

As equações que descrevem um sistema podem assumir muitas formas, podem ser equações lineares, equações não lineares, equações integrais ou diferenciais, equações de diferença e outras. O tipo de equações depende em muito do problema a

ser estudado e um mesmo sistema físico por exemplo pode ser representado por vários modelos matemáticos.

Quando uma descrição matemática é obtida, análises do sistema do ponto de vista quantitativo e/ou qualitativo são sempre possíveis. Em análise quantitativa, estamos interessados em certas respostas do sistema quando este é excitado por certos estímulos. Uma análise qualitativa se concentra nas propriedades gerais do sistema, como a estabilidade, controlabilidade e observabilidade.

Neste trabalho estamos interessados em sistemas dinâmicos lineares descritos por equações de estado do tipo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (4.2)$$

no caso contínuo, ou por equações do tipo,

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k \quad (4.3)$$

$$\mathbf{y}_k = C\mathbf{x}_k + D\mathbf{u}_k \quad (4.4)$$

no caso discreto.

Em ambos os casos, A é uma matriz quadrada de ordem n (a matriz do sistema), B é $n \times q$ (matriz de controle), C é $p \times n$ (matriz de observação), e D é $p \times q$ (matriz de transmissão). O número n é conhecido como *ordem* do sistema. Por sua vez $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^q$, e $x(t), y(t)$ e $u(t), t \geq 0$ são funções vetoriais de dimensão compatível com as operações envolvidas. Assumiremos que o sistema é estável, isto é, os autovalores $\lambda_i(A)$ satisfazem $|\lambda_i(A)| < 1$ no caso discreto e $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$, no caso contínuo.

Existem muitos problemas matemáticos interessantes em conexão com sistemas dinâmicos. Neste trabalho vamos nos restringir ao problema descrito na seção seguinte.

4.2 Problema de Realização

De agora em diante, trataremos apenas de sistemas lineares discretos invariantes no tempo, como os descritos pelas equações (4.3) e (4.4).

Se o sistema encontra-se em repouso, a resposta \mathbf{y}_k do sistema ao vetor de entrada \mathbf{u}_k é governada pela operação de convolução

$$\mathbf{y}_k = \sum_{i=1}^k G_{k-1} \mathbf{u}_i, \quad (4.5)$$

em que $G_k \in \mathbb{R}^{p,q}$, conhecido como Parâmetro de Markov, é definido por

$$G_k = \begin{cases} D, & k = 0 \\ CA^{k-1}B, & k > 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Dado um conjunto finito de parâmetros de Markov G_k o *problema de realização*, consiste em determinar matrizes $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,q}$, $C \in \mathbb{R}^{p,n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p,q}$, satisfazendo as equações de estado (4.3) e (4.4) e as relações (4.6), com A da menor ordem possível. O problema admite infinitas soluções mas todas elas relacionam-se com as matrizes do modelo (4.3) e (4.4) via transformações de semelhança.

A solução do problema começa com a construção de uma matriz de Hankel (maiores detalhes sobre matrizes de Hankel podem ser vistos em [6, Seção 0.9]) em bloco, definida para $l \geq 1$ por

$$H_{rs}(l) = \begin{bmatrix} G_l & G_{l+1} & \cdots & G_{l+s-1} \\ G_{l+1} & G_{l+2} & \cdots & G_{l+s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ G_{l+r-1} & G_{l+r} & \cdots & G_{l+r+s-2} \end{bmatrix}_{pr \times qs}. \quad (4.7)$$

Uma propriedade importante desta matriz é que ela pode ser fatorada como

$$H_{rs}(l) = \mathcal{O}A^{l-1}\mathcal{C}, \quad (4.8)$$

em que \mathcal{O} e \mathcal{C} são as matrizes de observabilidade e controlabilidade, respectivamente

definidas por,

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = [B \ AB \ \cdots \ A^{s-1}B], \quad (4.9)$$

Se $r, s \geq n$, e o sistema é controlável¹ e observável², as matrizes em (4.7) e (4.9) possuem a seguinte propriedade,

$$\text{posto}(H_{rs}(l)) = \text{posto}(\mathcal{O}) = \text{posto}(\mathcal{C}) = n, \quad (4.10)$$

para $l \geq 1$ e $r, s \geq n$. Daqui para frente assumiremos sempre que o sistema é controlável e observável e que a matriz A é diagonalizável, ou seja, existe $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ tal que X é não singular e $A = X^{-1}\Lambda X$. A fatoração em (4.8) pode ser reescrita como segue,

$$H_{rs}(l) = \mathcal{O}X^{-1}\Lambda^{l-1}XC = \widehat{\mathcal{O}}\Lambda^{l-1}\widehat{\mathcal{C}}, \quad (4.11)$$

em que Λ é uma matriz diagonal cujas entradas são os autovalores de A ; $\widehat{\mathcal{O}}$ e $\widehat{\mathcal{C}}$ são as novas matrizes de observabilidade e controlabilidade, respectivamente definidas por,

$$\widehat{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \widehat{C} \\ \widehat{C}\Lambda \\ \vdots \\ \widehat{C}\Lambda^{r-1} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{C}} = [\widehat{B} \ \Lambda\widehat{B} \ \cdots \ \Lambda^{s-1}\widehat{B}], \quad (4.12)$$

com $\widehat{C} = CX^{-1}$ e $\widehat{B} = XB$. Vale notar que se $p = q = 1$, e $r \geq s$, a fatoração em (4.11), pode ser novamente reformulada como segue [11],

$$H_{rs}(l) = W_r^T \Lambda^{l-1} R W_s, \quad (4.13)$$

¹Um sistema é dito *controlável* se para qualquer estado desejado do sistema, digamos $w \in \mathbb{R}^n$, sempre podemos encontrar uma entrada (controle) u que permita conduzir o sistema do estado inicial $x(0) = 0$ até o estado w .

²Um sistema é dito *observável* se permite recuperar o estado inicial $x(0)$ a partir de informações do sinal de saída.

em que W_r é uma matriz de Vandermonde (para detalhes sobre matrizes desse tipo, ver [6, Seção 0.9])

$$W_r = W_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{r-1} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

com $R = \text{diag}(r_1, \dots, r_n)$ e W_s a submatriz de W_r consistindo das s primeiras colunas.

A ferramenta mais eficiente para o problema é a fatoração SVD da matriz Hankel bloco:

$$H_{r,s}(1) = U_1 \Sigma_1 V_1^T, \quad (4.15)$$

em que Σ_1 é a matriz dos valores singulares não nulos de $H_{r,s}(1)$ e U_1, V_1 as matrizes de vetores singulares associados.

A propriedade (4.10) junto com a decomposição (4.8) formam a base para uma série de métodos de realização. Entre eles, por exemplo, Zeiger e Mac-Ewen, Kung e o de Bazán e Bavastri [13, 30, 39]. Seguem alguns comentários gerais sobre cada método.

4.3 Alguns Métodos de Realização

Observando que \mathcal{O} e \mathcal{C} são de posto completo, igual a n , temos para $l = 2$

$$A = \mathcal{O}^\dagger H_{r,s}(2) \mathcal{C}^\dagger. \quad (4.16)$$

Agora, consideremos a decomposição SVD da matriz Hankel em bloco dada em (4.15). Esta decomposição pode ser reescrita nos moldes de (4.8), como segue,

$$H_{r,s}(1) = U_1 \Sigma_1^{1/2} \Sigma_1^{1/2} V_1^T, \quad (4.17)$$

e deste modo podemos tomar

$$\hat{\mathcal{O}} = U_1 \Sigma_1^{1/2}, \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{C}} = \Sigma_1^{1/2} V_1^T. \quad (4.18)$$

4.3.1 Método de Zeiger-Mac Ewen

O método de Zeiger-Mac Ewen utiliza essas estimativas em (4.16) para obter a matriz do sistema [39],

$$A_{ZM} = \Sigma_1^{-1/2} U_1^T H_{rs}(2) V_1 \Sigma_1^{-1/2}. \quad (4.19)$$

As matrizes B , C e D são

$$B_{ZM} = \Sigma_1^{1/2} V_1^T (1 : n, 1 : p), \quad (4.20)$$

$$C_{ZM} = U_1 (1 : q, 1 : n) \Sigma_1^{1/2}, \quad (4.21)$$

$$D_{ZM} = G_0. \quad (4.22)$$

A notação $A(1 : n, 1 : p)$ significa a submatriz de A formada por suas n primeiras linhas e p primeiras colunas.

Nos dois métodos apresentados a seguir, concentrar-nos-emos apenas na matriz do sistema.

4.3.2 Método de Kung

Este método está baseado na propriedade de invariância ao deslocamento (shift-invariant) das matrizes de observabilidade e controlabilidade [39]. Especificamente, considere a estimativa para a matriz de controlabilidade definida em (4.18) e definamos, as matrizes \bar{V} , e \underline{V} da seguinte forma:

$$V_1_{sq \times n} = \begin{bmatrix} \bar{V}_{((s-1)q) \times n} \\ P_{q \times n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{q \times n} \\ \underline{V}_{((s-1)q) \times n} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Então a invariância ao deslocamento da matriz \mathcal{O} nos permite deduzir que,

$$\bar{V}A = \underline{V}. \quad (4.24)$$

Resolvendo a equação via pseudo-inversão obtemos

$$A_K = \overline{V}^\dagger \underline{V}, \quad (4.25)$$

que é a matriz do sistema proposto pelo método de Kung [30].

4.3.3 Método de Bazán e Bavastri

O método está baseado na propriedade de invariância ao deslocamento da matriz de Hankel e na relação

$$H_{rs}(2) = H_{rs}(1)F, \quad (4.26)$$

em que F é uma matriz companheira [6, Seção 3.3] em bloco definida por

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\ I_q & 0 & \cdots & 0 & X_2 \\ 0 & I_q & \cdots & 0 & X_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_q & X_s \end{bmatrix}.$$

Aqui, X é um vetor em bloco obtido do sistema linear

$$H_{rs}(1)X = b, \quad (4.27)$$

com b sendo a última coluna (bloco) da matriz $H_{rs}(2)$. A decomposição SVD da matriz $H_{rs}(1)$ fornece as matrizes de Observabilidade e Controlabilidade em (4.18). Usando isso na relação (4.26), como \mathcal{O} , \mathcal{C} são de posto completo, obtemos,

$$AC = CF \implies A = CFC^\dagger.$$

Uma vez que podemos tomar $\tilde{C} = \Sigma_1^{1/2}V_1^T$, usando o fato de V_1 ter colunas ortonormais e, portanto, $V_1^\dagger = V_1^T$, obtemos

$$A\tilde{C} = \tilde{C}F \implies A = \tilde{C}F\tilde{C}^\dagger \implies A = \Sigma_1^{1/2}V_1^T F V_1 \Sigma_1^{-1/2}.$$

A matriz do método de Bazán e Bavastrì [13] é definida por

$$\widehat{A}_{BV} = V_1^T F V_1. \quad (4.28)$$

De agora em diante, vamos considerar $p = q = 1$, e com esta restrição queremos estimar algumas medidas de não normalidade da matriz do sistema A , de cada um dos métodos introduzidos na Seção 4.3.

4.4 Estimativas de Não Normalidade para a Matriz A_{BV}

Nesta seção, vamos analisar estimativas das medidas de não normalidade com μ_2 , μ_3 e μ_4 , para a matriz do método de Bazán e Bavastrì. Os dois lemas a seguir serão utilizados nessas análises. Por questão de simplicidade, denotaremos A_{BV} apenas por A , e V_1 apenas por V .

Lema 4.4.1 *Seja a matriz do método de Bazán e Bavastrì, $A = V^T F V$, então,*

$$A A^T = I + V^T x x^T V - V^T e_1 e_1^T V,$$

em que x é a solução de norma mínima do sistema

$$H_{rs}(1)x = b, \quad (4.29)$$

onde b é a última coluna de $H_{rs}(2)$, e e_1 é o primeiro vetor da base canônica.

Demonstração: Notemos que,

$$A A^T = V^T F V V^T F^T V. \quad (4.30)$$

Da fatoração de $H_{rs}(l)$ dada em (4.8) e da SVD de $H_{rs}(1)$ em (4.15), junto com a Definição 1.5.3, segue que tanto as colunas de V quanto as de \mathcal{C}^T são duas bases para o mesmo subespaço, a saber $\mathcal{R}(H_{rs}^T(1))$ e, portanto, existe uma matriz não singular X , tal que

$$V = \mathcal{C}^T X. \quad (4.31)$$

Além disso, da relação (4.8) decorre que

$$H_{rs}(2) = H_{rs}(1)F \iff \mathcal{O}AC = \mathcal{O}CF$$

Por outro lado, como $AC = CF$, obtemos

$$F^T C^T = C^T A^T. \quad (4.32)$$

Logo, substituindo (4.31) e (4.32) em (4.30), temos:

$$\begin{aligned} AA^T &= V^T F V V^T F^T C^T X \\ &= V^T F V V^T C^T A^T X. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Como VV^T é a projeção ortogonal (note (1.20)) sobre o subespaço das colunas de C^T tem-se $VV^T C^T = C^T$ e, aplicando isso em (4.33), obtemos

$$\begin{aligned} AA^T &= V^T F C^T A^T X \\ &= V^T F F^T C^T X \\ &= V^T F F^T V \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ainda, $F = [e_2, e_3, \dots, e_n, x]$ e a expressão (4.34) pode ser calculada explicitamente,

$$\begin{aligned} AA^T &= V^T F F^T V \\ &= V^T (e_2 e_2^T + \dots + e_n e_n^T + x x^T) V \\ &= V^T e_1 e_1^T V + V^T e_2 e_2^T V + \dots + V^T e_n e_n^T V + V^T x x^T V - V^T e_1 e_1^T V \\ &= I + V^T x x^T V - V^T e_1 e_1^T V, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. \square

O próximo lema estabelece os autovalores de AA^T e, em consequência, os valores singulares de A .

Lema 4.4.2 *Se $A = V^T F V$ e p_1 é a primeira coluna de $P = V V^T$, os autovalores de*

AA^T são,

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{2 + \|x\|_2^2 - \|p_1\|_2^2 + \sqrt{(\|x\|_2^2 + \|p_1\|_2^2)^2 - 4|x^*p_1|^2}}{2}; \\ \xi_j &= 1, \quad 2 \leq j \leq n-1; \\ \xi_n &= \frac{2 + \|x\|_2^2 - \|p_1\|_2^2 - \sqrt{(\|x\|_2^2 + \|p_1\|_2^2)^2 - 4|x^*p_1|^2}}{2}.\end{aligned}$$

Demonstração: A demonstração começa com a observação de que a expressão dada no Lema 4.4.1 pode ser reescrita como

$$AA^T = I + [Vx \ Ve_1] \begin{bmatrix} x^T V^T \\ -e_1^T V^T \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Note que a matriz

$$[Vx \ Ve_1] \begin{bmatrix} x^T V^T \\ -e_1^T V^T \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

tem posto 2 e portanto possui apenas dois autovalores não nulos. Daí, concluímos que AA^T tem $n-2$ autovalores iguais a 1 e os dois restantes são autovalores da matriz

$$A_r = \begin{bmatrix} 1 + \|x\|_2^2 & p_1^T x \\ -x^T p_1 & 1 - \|p_1\|_2^2 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Este fato é devido a que, pelo Lema 1.8.6,

$$\lambda \left([Vx \ Ve_1] \begin{bmatrix} x^T V^T \\ -e_1^T V^T \end{bmatrix} \right) = \lambda \left(\begin{bmatrix} x^T V^T \\ -e_1^T V^T \end{bmatrix} [Vx \ Ve_1] \right) \cup \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{n-2}.$$

O polinômio característico de A_r é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (2 + \|x\|_2^2 - \|p_1\|_2^2) \lambda + 1 + \|x\|_2^2 - \|p_1\|_2^2 - \|x\|_2^2 \|p_1\|_2^2 + |x^*p_1|^2, \quad (4.38)$$

cujas raízes são ξ_1 e ξ_n acima enunciadas. \square

4.4.1 Estimativa para μ_3

Teorema 4.4.3 *A medida de não normalidade $\mu_3(A_{BV})$ é dada por*

$$\mu_3(A) = \sqrt{n - 1 + \|x\|_2^2 \|p_1\|_2^2 + \prod_{j=1}^n |\lambda_j|^2 - |p_1^T x|^2 - \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2}.$$

Demonstração: A demonstração será feita em dois passos. No primeiro, tomando traço em ambos os membros da expressão dada no Lema 4.4.1, e usando a propriedade de traço descrita no Lema 1.8.7, obtemos

$$\begin{aligned} \|A\|_F^2 &= n + \text{tr}(V^T x x^T V) - \text{tr}(V^T e_1 e_1^T V) \\ &= n + \text{tr}(V V^T x x^T) - \text{tr}(e_1^T V V^T e_1) \\ &= n + \text{tr}(x x^T) - \text{tr}(e_1^T V V^T V V^T e_1) \\ &= n + \|x\|_2^2 - \text{tr}(V V^T e_1)^T (V V^T e_1) \\ &= n + \|x\|_2^2 - p_1^T p_1 \\ &= n + \|x\|_2^2 - \|p_1\|_2^2 \end{aligned} \tag{4.39}$$

devido à x pertencer ao subespaço das colunas de C^T e à Definição 1.5.3, sendo p_1 a primeira coluna de $P = V V^T$. Portanto, de (4.39) decorre que

$$\mu_3(A) = \sqrt{n + \|x\|_2^2 - \|p_1\|_2^2 - \|A\|_F^2}. \tag{4.40}$$

No segundo passo, do polinômio dado em (4.38), obtém-se que

$$\prod_{j=1}^n |\lambda_j|^2 = \det(AA^T) = (1 + \|x\|_2^2)(1 - \|p_1\|_2^2) + |p_1^T x|^2, \tag{4.41}$$

ou seja,

$$\|x\|_2^2 - \|p_1\|_2^2 = \|x\|_2^2 \|p_1\|_2^2 - 1 - |p_1^T x|^2 + \prod_{j=1}^n |\lambda_j|^2, \tag{4.42}$$

e assim, μ_3 pode ser reescrita como

$$\mu_3(A) = \sqrt{n - 1 + \|x\|_2^2 \|p_1\|_2^2 + \prod_{j=1}^n |\lambda_j|^2 - |p_1^T x|^2 - \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2},$$

o que demonstra o teorema. \square

Esta expressão torna-se consideravelmente mais simples quando $\|x\|_2^2 \approx 0$ e $|\lambda_j| \approx 1$, pois neste caso obtém-se que

$$\mu_3(A) \approx 0,$$

indicando assim que a matriz A do método de Bazán e Bavastri torna-se muito próxima de ser normal.

O Teorema 4.4.5 mostra que a condição $\|x\|_2^2 \approx 0$ pode ser atingida aumentando-se de forma conveniente a dimensão da matriz de Hankel $H_{r,s}(1)$. Para demonstrá-lo, vamos introduzir o seguinte lema preliminar.

Lema 4.4.4 *Consideremos a matriz de Vandermonde dada em (4.14). Então, temos que*

$$\|W_{s+1}^\dagger\|_2 \leq \|W_s^\dagger\|_2.$$

Demonstração: Provaremos que $\sigma_{\min}(W_{s+1}) \geq \sigma_{\min}(W_s)$. Para tal, iniciaremos observando que a matriz W_{s+1} , pode ser decomposta em blocos da seguinte maneira

$$W_{s+1} = [W_s \mid y], \tag{4.43}$$

em que y é a última coluna de W_{s+1} . Segue da decomposição (4.43) que,

$$W_{s+1}W_{s+1}^* = W_sW_s^* + yy^*. \tag{4.44}$$

Notemos que $W_{s+1}W_{s+1}^*$ tem dimensão $(s+1) \times (s+1)$ e $W_sW_s^*$ é de dimensão $n \times n$. Aplicando o Lema 1.8.6, temos que o espectro não nulo obedece á relação,

$$\lambda(W_{s+1}^*W_{s+1}) = \lambda(W_s^*W_s). \tag{4.45}$$

Agora, tomando z o autovetor associado ao autovalor $\lambda_{\min}(W_{s+1}W_{s+1}^*)$, não nulo, decorre de (4.44) com a aplicação do Lema 1.8.5 que,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\min}^2(W_{s+1}) &= \lambda_{\min}(W_{s+1}W_{s+1}^*) \\
&= z^*(W_{s+1}W_{s+1}^*)z \\
&= z^*W_sW_s^*z + z^*yy^*z \\
&\geq \lambda_{\min}(W_sW_s^*) + \beta^2 \\
&= \sigma_{\min}^2(W_s) + \beta^2,
\end{aligned}$$

com $\beta = |y^*z|^2$. Portanto, segue do Lema 1.8.2 que

$$\|W_{s+1}^\dagger\|_2 = \sigma_{\min}^{-1}(W_{s+1}) \leq \sigma_{\min}^{-1}(W_s) = \|W_s^\dagger\|_2. \quad \square$$

O Lema 4.4.4 diz essencialmente, que $\|W_s^\dagger\|_2$ é limitada superiormente e assume seu valor máximo quando $s = n$ em (4.14). Esta informação é crucial para a demonstração do teorema seguinte.

Teorema 4.4.5 *Sejam $H_{r,s}(1)$ a matriz de Hankel introduzida em (4.7) (com $l = 1$), $p = q = 1$ e $r \geq s$. Então*

$$\|x\|_2 \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad s \longrightarrow \infty$$

Demonstração: Em primeiro lugar, vamos observar que como b é última coluna da matrix $H_{r,s}(2)$, e estamos considerando $p = q = 1$, então o sistema dado em (4.29) pode ser reformulado em termos de (4.13), e a solução de norma mínima é dada por

$$x = H_{r,s}^\dagger(1)b = W_s^\dagger \Lambda^s e, \quad \text{com } e = [1, \dots, 1]^T, \quad (4.46)$$

Assim, segue de (4.46) que,

$$\|x\|_2 = \|W_s^\dagger \Lambda^s e\|_2 \leq \|W_s^\dagger\|_2 \|\Lambda^s\|_2 \|e\|_2 = \|W_s^\dagger\|_2 \sqrt{n} \alpha^s,$$

em que $\alpha = \max |\lambda_i|$, $1 \leq i \leq n$ com λ_i as entradas da diagonal de Λ . Como estamos supondo que $|\lambda(A)| < 1$, isto, junto com o Lema 4.4.4, nos dá

$$s \rightarrow \infty \implies \|x\|_2 \rightarrow 0. \square$$

Nota: Da equivalência dada por (4.46) conclui-se que aumentar a dimensão de $H_{rs}(1)$ é o mesmo que aumentar o número de colunas de W_s .

Sobre a condição $|\lambda_j| \approx 1$, a experiência tem mostrado que os sistemas que aparecem nas aplicações, em geral, possuem esta propriedade, o que indica que a análise de não normalidade está baseada em hipóteses bastante razoáveis. No próximo capítulo ilustraremos numericamente estes fatos.

4.4.2 Estimativa para μ_4

Uma outra estimativa pode ser feita baseada nos autovalores e valores singulares da matriz do sistema A_{BV} . O seguinte teorema é uma das estimativas originais sobre as quais nos referimos no capítulo introdutório.

Teorema 4.4.6 *Supondo que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, a medida de não normalidade $\mu_4(A_{BV})$ é determinada por*

$$\mu_4(A_{BV}) = \max\{\sigma_1(A) - 1, 1 - |\lambda_{n-1}|, |\lambda_n| - \sigma_n(a)\}$$

Demonstração: Como os valores singulares de A são σ_1, σ_n e $(n-2)$ vezes, o valor 1, e para $1 \leq i \leq n$ vale $|\lambda_i(A)| < 1$, temos,

$$\mu_4(A) = \max_i |\sigma_i - |\lambda_i|| = \max\{\sigma_1 - 1, 1 - |\lambda_{n-1}|, |\lambda_n| - \sigma_n\},$$

pois estamos supondo que os autovalores estão ordenados em valor absoluto. \square

O próximo lema nos permite analisar o comportamento de μ_4 como função da dimensão da matriz de Hankel $H_{rs}(l)$.

Lema 4.4.7 *O maior e o menor valor singular de A satisfazem*

$$\prod_{j=1}^n |\lambda_j| (1 + \|x\|_2^2)^{-1/2} \leq \sigma_n(A) \leq 1 \leq \sigma_1(A) \leq (1 + \|x\|_2^2)^{1/2}.$$

Demonstração: Consideremos os autovalores ξ_1 e ξ_n determinados no Lema 4.4.2. Tomemos $u \in \mathbb{C}^n$ unitário tal que $u^* V^T e_1 = 0$. Agora, no Lema 4.4.1, com $z = V^T x$ e $y = V^T e_1$, temos

$$u^* A A^T u = u^* I u + u^* z z^* u - u^* y^* u = 1 + |u^* z|^2.$$

Tome v o autovetor associado ao autovalor λ_1 , normalizado. Do Lema 1.8.5 vem que

$$\xi_1 = v^* A A^T v = \max_{\|u\|=1} u^* A A^T u \geq 1 + |u^* z|^2 \geq 1$$

Analogamente, prova-se que se \tilde{v} é o autovetor associado ao autovalor λ_n , normalizado, e $u \in \mathbb{C}^n$ é unitário, então

$$\xi_n = \tilde{v}^* A A^T \tilde{v} = \min_{\|u\|=1} u^* A A^T u \leq 1 - |u^* y|^2 \leq 1.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2 + \|x\|_2^2 - \|p_1\|_2^2 + \sqrt{(\|x\|_2^2 + \|p_1\|_2^2)^2 - 4|x^* p_1|^2}}{2} \\ &\leq \frac{2 + \|x\|_2^2 + \sqrt{(\|x\|_2^2 + \|p_1\|_2^2)^2}}{2} \\ &= \frac{2 + 2\|x\|_2^2}{2} \\ &= 1 + \|x\|_2^2, \quad \text{ou seja} \\ \xi_1 &\leq 1 + \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

logo,

$$\sigma_1^2 \leq 1 + \|x\|_2^2, \tag{4.47}$$

que é a última desigualdade do lema.

Para a primeira desigualdade, usando o Lema 1.8.11 e a equação (4.47), obtemos,

$$\prod_{j=1}^n |\lambda_j(A)|^2 = \sigma_n^2(A) \sigma_1^2(A) \leq \sigma_n^2(A) (1 + \|x\|_2^2)$$

e portanto

$$\prod_{j=1}^n |\lambda_j| (1 + \|x\|_2^2)^{-1/2} \leq \sigma_n,$$

provando assim o Lema 4.4.7. \square

Assim, sempre que a matriz Hankel é suficientemente grande, ou seja, de acordo com o Teorema 4.4.5, sempre que $\|x\|_2 \approx 0$, o Lema 4.4.7 nos fornece

$$\prod_{j=1}^n |\lambda_j| \approx \sigma_n(A) \leq |\lambda_n| < 1 \approx \sigma_1(A). \quad (4.48)$$

Com a hipótese $\|x\|_2 \approx 0$, μ_4 pode ser estimada apenas em função dos autovalores de A , como vemos a seguir

$$\mu_4(A) \approx \max\{1 - \max |\lambda_j|, \min |\lambda_j| - \prod_{j=1}^n |\lambda_j|\}. \quad (4.49)$$

Portanto, sempre que $|\lambda_j| \approx 1$ e a dimensão da matriz Hankel é suficientemente grande, obtemos

$$\mu_4(A) \approx 0.$$

4.4.3 Estimativa para μ_2

O Teorema 4.4.8 abaixo, é também uma estimativa original deste trabalho e, estabelece uma limitante superior para a medida de não normalidade $\mu_2(A_{BV})$.

Teorema 4.4.8 *Seja $\sigma = \{\sigma_1, \underbrace{1 \dots 1}_{n-2}, \sigma_n\}$ o espectro singular de A_{BV} . A medida de não normalidade $\mu_2(A_{BV})$ é limitada superiormente por*

$$2^{1/4} \left\{ \sigma_1^4 + n - 2 + \sigma_n^4 - \left[n - 1 + \prod_{i=1}^n |\lambda_i|^2 + \|x\|_2^2 \|p_1\|_2^2 - |p_1^T x|^2 \right] \frac{\prod_{i=1}^n |\lambda_i|^2}{1 + \|x\|_2^2} \right\}^{1/4}$$

Demonstração: A demonstração se dará com o auxílio de dois lemas.

Lema 4.4.9 *Se A é a matriz do método de Bazán e Bavastri e σ_1, σ_n são seu maior e menor valor singular, então*

$$\|AA^*\|_F^2 = \sigma_1^4 + n - 2 + \sigma_n^4$$

Demonstração: Consideremos $A = U\Sigma V^*$ a SVD de A . Temos que $(AA^*)^2 = U\Sigma^4U^*$ e, portanto, pelas mesmas observações da Seção 4.4.1 sobre os autovalores de AA^* , temos

$$\|AA^*\|_F^2 = \text{tr}(AA^*)^2 = \text{tr}(U\Sigma^4U^*) = \sigma_1^4 + n - 2 + \sigma_n^4,$$

o que conclui a prova do lema. \square

Lema 4.4.10 *Se A é a matriz do método de Bazán e Bavastri, então*

$$\|A^2\|_F^2 \geq (n-1 + \prod_{i=1}^n |\lambda_i|^2 + \|x\|_2^2 \|p_1\|_2^2 - |p_1^T x|^2) \frac{\prod_{i=1}^n |\lambda_i|^2}{1 + \|x\|_2^2},$$

com x e p_1 conforme o Lema 4.4.1.

Demonstração: Usando a propriedade de traço dada pelo Lema 1.8.7, e as relações (4.31) e (4.32) temos

$$\begin{aligned} \|A^2\|_F^2 &= \text{tr}[(A^2)^T A^2] \\ &= \text{tr}(V^T F^T V V^T F^T V V^T F V V^T F V) \\ &= \text{tr}(V^T F V V^T F V V^T F^T V V^T F^T V) \\ &= \text{tr}(V^T F V V^T F F^T F^T V) \\ &= \text{tr}(V^T F V V^T F F^T F^T V)^T \\ &= \text{tr}[V^T F^2 (F^2)^T V]. \end{aligned} \tag{4.50}$$

A expressão (4.50) pode ser de fato calculada e se obtém

$$\begin{aligned} V^T F^2 (F^2)^T V &= V^T e_3 e_3^T V + V^T + \dots + V^T e_n e_n^T V + V^T x x^T V + V^T y y^T V \\ &= \|p_3\|_2^2 + \dots + \|p_n\|_2^2 + \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2, \end{aligned} \tag{4.51}$$

sendo p_i $i = 1, n$ a i -ésima coluna do projetor $P = VV^T$, x dado em (4.29) e $y = Fx$ com F dada em (4.26).

Desde que $x \neq 0$, usando o Lema 1.8.5 podemos estimar a norma de y , em termos da norma de x . Também a norma de x , em termos da norma de p_n (a n -ésima coluna de $P = VV^T$); e para $2 \leq i \leq n$, podemos estimar a norma de p_i em termos da norma de p_{i-1} .

De fato, como $y = Fx$ e x pertence ao subespaço das colunas de C^T então, $y = FVV^T x$, logo,

$$\begin{aligned}
\|y\|_2^2 &= \text{tr}(V^T y y^T V) \\
&= \text{tr}(V^T F V V^T x x^T V V^T F^T V) \\
&= \text{tr}(A V^T x x^T V A^T) \\
&= \text{tr}(A \hat{y} \hat{y}^T A^T),
\end{aligned} \tag{4.52}$$

em que $\hat{y} = V^T x$. Aplicando o Lema 1.8.7 em (4.52), obtemos,

$$\begin{aligned}
\|y\|_2^2 &= \text{tr}(\hat{y}^T A^T A \hat{y}) \\
&= \hat{y}^T A^T A \hat{y} \\
&\geq \sigma_n^2(A) \|\hat{y}\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$= \sigma_n^2(A) \|x\|_2^2. \tag{4.54}$$

Notemos que (4.53) decorre do Lema 1.8.5 e (4.54) segue do fato de $\|V^T x\|_2 = \|x\|_2$, pois V tem colunas ortonormais.

Usando a relação dada em (4.46), prova-se que $\|x\|_2^2 \geq \sigma_n^2 \|p_n\|_2^2$. De fato, primeiro observemos que

$$\begin{aligned}
x &= W_s^\dagger \Lambda^s e \\
&= W_s^\dagger \Lambda \Lambda^{s-1} e \\
&= W_s^\dagger \Lambda W_s W_s^\dagger \Lambda^{s-1} e.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

A última equação decorre do fato de $W_s W_s^\dagger = I$. Agora, da fatoração de $H_{rs}(l)$ dada em (4.13) e da relação $H_{rs}(2) = H_{rs}(1)F$, obtemos a relação $W_s F = \Lambda W_s$ e substituindo isso em (4.55), temos

$$\begin{aligned} x &= W_s^\dagger W_s F W_s^\dagger \Lambda^{s-1} e \\ &= W_s^\dagger W_s F p_n \\ &= V V^T F p_n. \end{aligned} \quad (4.56)$$

A segunda equação segue de $W_s^\dagger \Lambda^{s-1} e = p_n$ a n -ésima coluna da projeção $V V^T$, e, (4.56) vem de $W_s^\dagger W_s = V V^T$. Portanto,

$$x = V V^T F p_n \implies V^T x = V^T F p_n = V^T F V V^T p_n = A \hat{p}_n,$$

ou seja, valendo-nos novamente do Lema 1.8.7, do fato de V ter colunas ortonormais e o Lema 1.8.5, obtemos:

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &= \|V^T x\|_2^2 = \text{tr}(A \hat{p}_n \hat{p}_n^T A^T) = \text{tr}(\hat{p}_n^T A^T A \hat{p}_n) \\ &= \hat{p}_n^T A^T A \hat{p}_n \geq \sigma_n^2 \|p_n\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Da mesma forma, temos para $2 \leq i \leq s$, com aplicação dos dois lemas acima citados e da referida propriedade de V ,

$$\begin{aligned} p_i &= W_s^\dagger \Lambda^{i-1} e = W_s^\dagger \Lambda \Lambda^{i-2} e = W_s^\dagger \Lambda W_s W_s^\dagger \Lambda^{i-2} e \\ &= W_s^\dagger W_s F W_s^\dagger \Lambda^{i-2} e = W_s^\dagger W_s F p_{i-1} \\ &= V V^T F p_{i-1}, \implies V^T x = V^T F p_{i-1} = V^T F V V^T p_{i-1} = A \hat{p}_{i-1}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Portanto de (4.58), segue que

$$\begin{aligned} \|p_i\|_2^2 &= \|V^T p_i\|_2^2 = \text{tr}(A \hat{p}_{i-1} \hat{p}_{i-1}^T A^T) = \text{tr}(\hat{p}_{i-1}^T A^T A \hat{p}_{i-1}) \\ &= \hat{p}_{i-1}^T A^T A \hat{p}_{i-1} \geq \sigma_n^2 \|p_{i-1}\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Substituindo as três estimativas, a saber (4.54), (4.57) e (4.59), em (4.51), obtemos

$$\begin{aligned}
\|A^2\|_F^2 &\geq (\|p_2\|_2^2 + \cdots + \|p_n\|_2^2 + \|x\|_2^2) \sigma_n^2 \\
&= \|A\|_F^2 \sigma_n^2 \\
&= (n - 2 + \sigma_1^2 + \sigma_n^2) \sigma_n^2
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Como os valores singulares de A são dados pelo Lema 4.4.2 , concluímos que

$$\sigma_n^2 = \frac{\prod_{i=1}^n |\lambda_i|^2}{\sigma_1^2} \tag{4.61}$$

Também, observando o polinômio característico da matriz A_r em (4.38) percebe-se que $\sigma_1^2 + \sigma_n^2 = 2 + \|x\|_2^2 - \|p_1\|_2^2$ e isto, junto com (4.42), implica em

$$\sigma_1^2 + \sigma_n^2 = 1 + \prod_{i=1}^n |\lambda_i|^2 + \|x\|_2^2 \|p_1\|_2^2 - |p_1^T x|^2. \tag{4.62}$$

Substituindo (4.61) e (4.62) em (4.60), obtemos

$$\|A^2\|_F^2 \geq (n - 1 + \prod_{i=1}^n |\lambda_i|^2 + \|x\|_2^2 \|p_1\|_2^2 - |p_1^T x|^2) \frac{\prod_{i=1}^n |\lambda_i|^2}{1 + \|x\|_2^2}, \tag{4.63}$$

concluindo a demonstração do Lema 4.4.10. \square

O Teorema 4.4.8, segue dos Lemas 4.4.9 e 4.4.10 aplicados ao Lema 1.8.1. \square

Assim, com a hipótese de s suficientemente grande, pelo Teorema 4.4.5 obtemos $\|x\|_2^2 \approx 0$ e, portanto, o limitante superior dado pelo Teorema 4.4.8 não mais depende de x e pode ser reescrito como

$$2^{1/4} \left\{ \sigma_1^4 + n - 2 + \sigma_n^4 - \left[n - 1 + \prod_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right] \prod_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right\}^{1/4}. \tag{4.64}$$

Se, além disso, $|\lambda_i| \approx 1$, $1 \leq i \leq n$, decorre do Lema 4.4.7 que $\sigma_1^4, \sigma_n^4 \approx 1$ e, por sua vez,

$$2^{1/4} \left\{ \sigma_1^4 + n - 2 + \sigma_n^4 - \left[n - 1 + \prod_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right] \prod_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right\}^{1/4} \approx 0 \implies \mu_2(A_{BV}) \approx 0,$$

indicando assim que se $|\lambda_i| \approx 1$, $1 \leq i \leq n$ e a dimensão da matriz de Hankel $H_{rs}(1)$ é suficientemente grande, então a matriz do método de Bazán e Bavastri está bem próxima de ser normal.

4.5 Relações Entre Alguns Métodos de Realização e Estimativas para $\mu(A_K)$ e $\mu(A_{ZM})$.

As estimativas feitas na seção precedente são muito importantes. Graças ao próximo teorema, podemos lançar mão delas para obter estimativas para as matrizes dos outros métodos descritas em (4.19) e (4.25).

Teorema 4.5.1 *Assumamos que os parâmetros de Markov sejam conhecidos exatamente. Sejam A_{ZM} , A_K e A_{BV} as matrizes do sistema discreto definido pelas equações (4.3) e (4.4). Então*

$$A_{ZM} = \Sigma_1^{1/2} A_{BV} \Sigma_1^{-1/2} \quad (4.65)$$

$$A_K = A_{BV}^T. \quad (4.66)$$

Demonstração: Temos, da definição da matriz A_{ZM} em (4.19) e das relações (4.15) e (4.26), que

$$\begin{aligned} A_{ZM} &= \Sigma_1^{-1/2} U_1^T H_{rs}(1) F V_1 \Sigma_1^{-1/2} \\ &= \Sigma_1^{-1/2} U_1^T U_1 \Sigma_1 V_1^T F V_1 \Sigma_1^{-1/2} \\ &= \Sigma_1^{-1/2} \Sigma_1 V_1^T F V_1 \Sigma_1^{-1/2} \\ &= \Sigma_1^{1/2} V_1^T F V_1 \Sigma_1^{-1/2} \\ &= \Sigma_1^{1/2} A_{BV} \Sigma_1^{-1/2}, \end{aligned}$$

o que prova (4.65).

A demonstração de (4.66) precisa do seguinte resultado auxiliar:

Lema 4.5.2 *A matriz A_K tem uma decomposição da forma*

$$A_K = (V_1^T C) A^T (C^{T\dagger} V_1) = (V_1^T C^T) A^T (V_1^T C^T)^{-1}.$$

Demonstração: Primeiro, vamos lembrar da representação de V_1 dada em (4.23). Esta representação, junto com as relações (4.31) e (4.9), permite-nos concluir que

$$V_1 = C^T X = \begin{bmatrix} B^T X \\ B^T A^T X \\ \vdots \\ B^T A^{(s-1)T} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V} \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \underline{V} \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

em que \bar{V} e \underline{V} são de dimensão $(s(q-1)) \times n$, P e Q de dimensão $q \times n$. Assim analisando (4.67) fica claro que podemos escrever

$$\bar{V} = C_{s-1}^T X, \quad (4.68)$$

$$\underline{V} = C_{s-1}^T A^T X, \quad (4.69)$$

em que C_{s-1}^T representa as $s-1$ primeiras linhas de C^T . Portanto, das relações (4.68) e (4.69) e dos fatos de C_{s-1}^T ter posto completo e X ser não singular, concluímos que

$$\begin{aligned} \bar{V}^\dagger \underline{V} &= X^{-1} C_{s-1}^{T\dagger} C_{s-1}^T A^T X \\ &= V_1^T C^T C_{s-1}^{T\dagger} C_{s-1}^T A^T C^{T\dagger} V_1 \\ &= (V_1^T C^T) A^T (C^{T\dagger} V_1) \\ &= (V_1^T C^T) A^T (V_1^T C^T)^{-1} \end{aligned} \quad (4.70)$$

É relevante observar que, como $V_1 V_1^T$ é a projeção ortogonal sobre o subespaço gerado pelas colunas de C^T , temos $V_1 V_1^T C^T = C^T$, ou seja, $V_1 V_1^T = C^T C^{T\dagger}$. Então $C^T C^{T\dagger}$ é a projeção ortogonal sobre o subespaço das colunas de V_1 . Isto permite provar facilmente

que $\mathcal{C}^{T\dagger} V_1 = (V_1^T \mathcal{C}^T)^{-1}$, o que justifica a última igualdade em (4.70). \square

Continuando com a prova do teorema, observemos que, como $P = V_1 V_1^T$ é a projeção ortogonal sobre o subespaço coluna da matriz \mathcal{C}^T , segue de (4.32) que

$$F^T V_1 V_1^T \mathcal{C}^T = V_1 V_1^T \mathcal{C}^T A^T, \quad (4.71)$$

e multiplicando os termos da equação (4.71) à direita por $(V_1^T \mathcal{C}^T)^{-1}$ e à esquerda por V_1^T , segue que

$$V_1^T F^T V_1 V_1^T \mathcal{C}^T (V_1^T \mathcal{C}^T)^{-1} = V_1^T V_1 V_1^T \mathcal{C}^T A^T (V_1^T \mathcal{C}^T)^{-1},$$

ou seja,

$$V_1^T F^T V_1 = (V_1^T \mathcal{C}^T) A^T (V_1^T \mathcal{C}^T)^{-1},$$

a qual, junto com o Lema 4.5.2, demonstra (4.66). \square

Como consequência imediata da relação (4.66) estabelecida no Teorema 4.5.1, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.5.3 *Com as notações da seção precedente, valem*

$$\mu_3(A_K) = \mu_3(A_{BV}); \quad (4.72)$$

$$\mu_4(A_K) = \mu_4(A_{BV}); \quad (4.73)$$

$$\mu_2(A_K) = \mu_2(A_{BV}). \quad (4.74)$$

4.6 Considerações Finais

- A equação (4.65) do Teorema 4.5.1, nos diz essencialmente que A_{ZM} e A_{BV} são semelhantes e portanto têm os mesmos autovalores. Um aspecto interessante em relação a estas matrizes é que se ambas forem calculadas a partir de dados perturbados, $\tilde{H}_{rs}(l) = H_{rs}(l) + E$, conforme ocorre em aplicações, as estimativas \tilde{A}_{ZM} e \tilde{A}_{BV} também têm os mesmos autovalores perturbados [11]. Este fato é importante já que, como o erro nos autovalores $|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i|$ é o mesmo a partir de ambas as matrizes, basta analisar apenas a sensibilidade do problema de autovalores associado à matriz A_{BV} , o que já foi feito na seção precedente.

- Deve-se enfatizar que a análise desenvolvida foi para sistemas com entrada e resposta simples ($p = q = 1$). Um ponto que deve ser analisado é portanto a influência que produz o número de entradas sobre as diferentes medidas de não normalidade descritas acima. Infelizmente, não existe na literatura nada a respeito. Porém mostraremos, com ilustrações numéricas, que pode haver uma grande melhora quando $q > 1$, mesmo que para o caso de autovalores muito próximos.

Capítulo 5

Experimentos Numéricos

Neste capítulo apresentamos alguns experimentos numéricos para ilustrar a teoria desenvolvida nos capítulos precedentes. Todos os resultados numéricos foram obtidos usando Matlab.

Exemplo 1: Protótipo de um Prédio

Consideremos um sistema vibratório com entrada e resposta simples ($p = q = 1$). Neste exemplo os parâmetros de Markov são descritos por

$$G_k = \sum_{j=1}^r r_j \lambda_j^k = \sum_{j=1}^r r_j e^{s_j \Delta t k},$$

em que $r_1 = -0.1366 + 0.2490i$, \bar{r}_1 , $r_2 = 0.7294 + 0.5743i$, \bar{r}_2 , $r_3 = -0.3162 + 0.0844i$, \bar{r}_3 , $r_4 = 1.3284 + 0.6265i$, \bar{r}_4 , $r_5 = -0.0591 + 0.1958i$, \bar{r}_5 e, os λ_j s, os autovalores do sistema, são os mesmos dados na Tabela 1 (ver pg. 5 - Introdução). Estes autovalores provém de uma estrutura real (detalhes em [10, 13]).

Veremos como se comportam as medidas de não normalidade μ_2 , μ_3 e μ_4 , da matriz A_{BV} , de ordem 10, calculados de acordo com a definição de cada medida introduzida na Seção 2.1, como função da dimensão da matriz de Hankel $H_{rs}(1)$, com $r = s$. Também calculamos o número de Henrici (3.13), a norma da solução x , do sistema dado em (4.29), bem como os números de condição para os autovalores da matriz A_{BV} , e suas respectivas cotas superiores dadas pelo Teorema 3.2.1.

As Figuras 5.1 e 5.2 mostram em respectivas escalas logaritmica e normal o comportamento das medidas $\mu_2(A_{BV})$, $\mu_3(A_{BV})$, e $\mu_4(A_{BV})$, como função da dimensão da matriz de Hankel (eixo x). Note-se que as medidas são bastante elevadas, para as dimensões iniciais (10 a 20), mas que com n moderado, $n = 50$ por exemplo, as medidas de não normalidade já se aproximam de zero, indicando que a matriz A_{BV} está bem próxima de ser normal. Isto é consequência do Teorema 4.4.5 e de $|\lambda_j| \approx 1$, conforme Tabela 1.

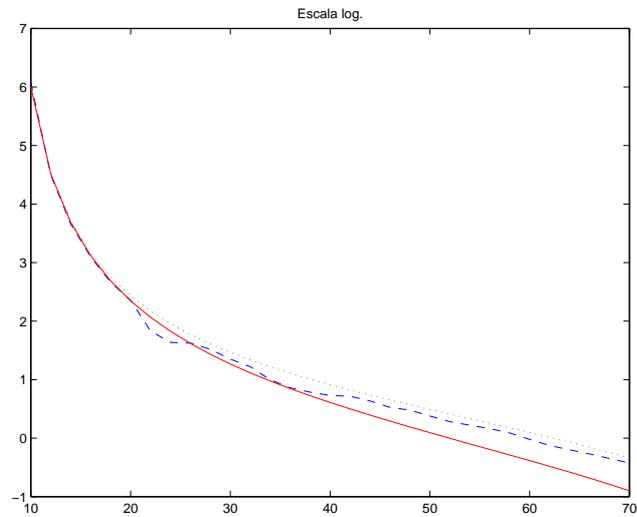


Figura 5.1: μ_2 : linha tracejada; μ_3 : linha pontilhada; μ_4 : linha contínua.

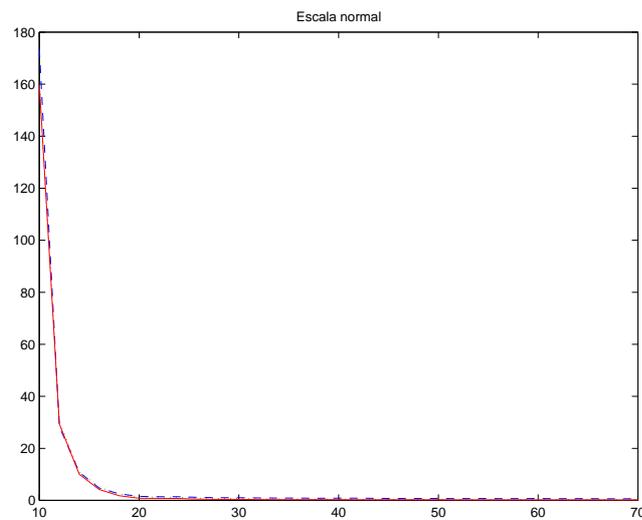


Figura 5.2: μ_2 : linha tracejada; μ_3 : linha pontilhada; μ_4 : linha contínua.

No caso do Teorema 4.4.5 é digno de notar que a condições $\rightarrow \infty$ é exagerada, pois a Figura 5.3, que apresenta o decaimento da norma de x , solução do sistema (4.29), como função da dimensão de $H_{rs}(l)$, comprova que com um pequeno aumento na dimensão s se obtém uma queda significativa em $\|x\|_2^2$. Na Figura 5.4, temos o compor-

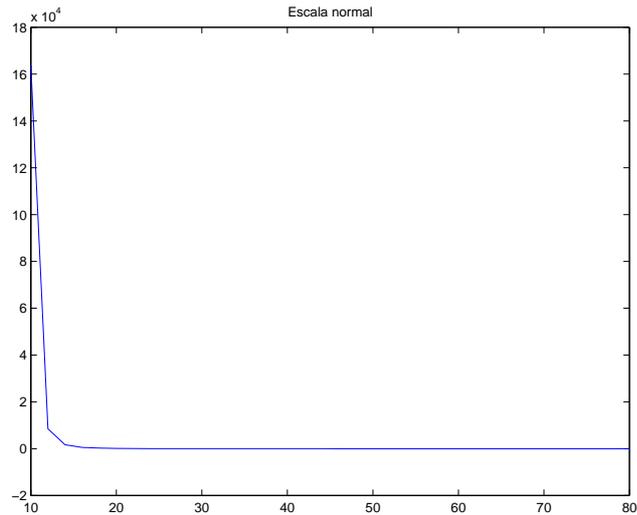


Figura 5.3: $\|x\|_2^2$ como função da dimensão.

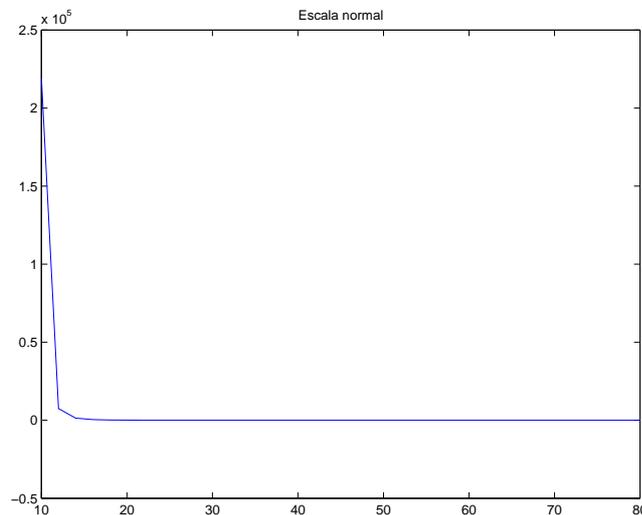


Figura 5.4: Número de Henrici He , como função da dimensão.

tamento do número de Henrici. Este número de Henrici com valor reduzido, não significa que a matriz não possa apresentar sensibilidade espectral. É importante lembrar que este valor indica alta sensibilidade, se for elevado. Isto de fato é observado para dimensões 10,

ou 12, da matriz de Hankel.

A seguir, nas Figuras 5.5 e 5.6, vemos a representação de μ_2 , bem como da limitante para μ_2 estabelecida no Teorema 4.4.8.

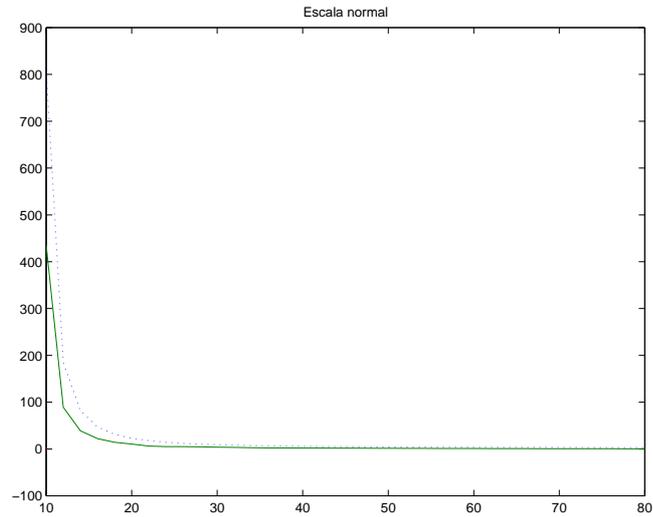


Figura 5.5: μ_2 : linha contínua; limitante: linha tracejada

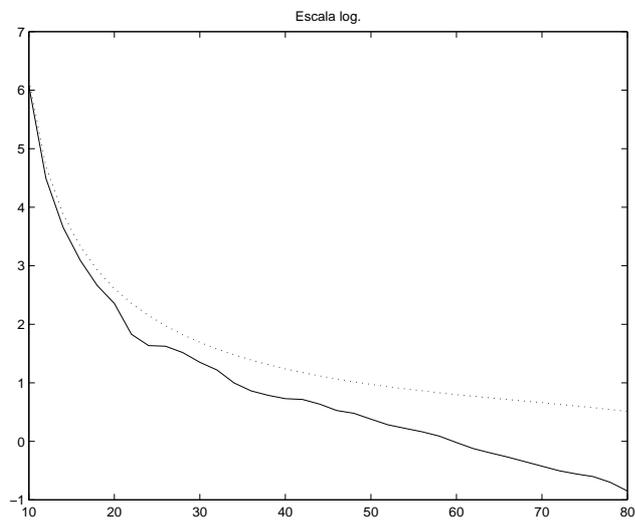


Figura 5.6: μ_2 : linha contínua; limitante: linha tracejada

Observemos que o gráfico em escala normal indica que o limitante superior dado pelo Teorema 4.4.8 é bastante próximo da medida de não normalidade calculada de acordo com a definição de μ_2 . Isto mostra que de fato as análises feitas para μ_2 na

Seção 4.4.3 estão corretas, uma vez que, neste exemplo, as hipóteses $|\lambda_j| \approx 1$ e $\|x\|_2^2 \approx 0$ são satisfeitas, a última com o aumento da dimensão de $H_{rs}(l)$.

Finalmente na Figura 5.7, apresentamos os números de condição calculados para alguns autovalores com a função *condeig*, do Matlab. Também são apresentadas as respectivas limitantes estabelecidas no Teorema 3.2.1. Na questão do condicionamento, a

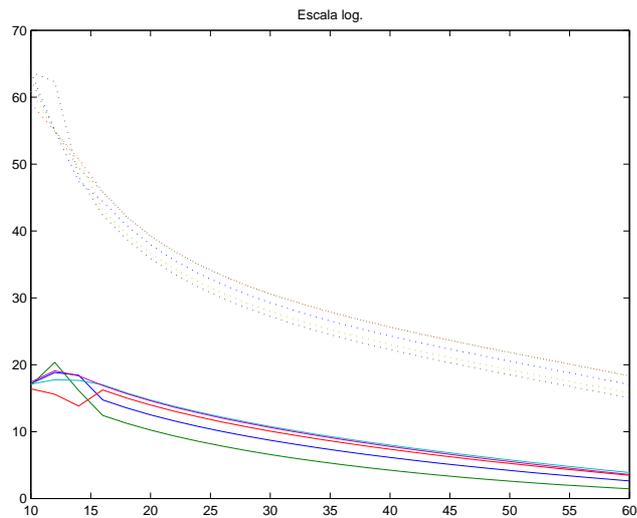


Figura 5.7: $\kappa(\lambda_j)$: linha contínua; limitantes: linha pontilhada.

Figura 5.7 comprova o que a teoria previa. Uma medida de não normalidade pequena, ou seja, próxima de zero, junto com uma separação entre os autovalores adequada, faz com que estes se tornem bem condicionados. O reflexo destes dois fatos sobre as limitantes do Teorema 3.2.1 é percebido nas maiores dimensões (> 50) da matriz de Hankel.

Exemplo 2

No terceiro exemplo do capítulo introdutório, apresentamos a família de matrizes S_ν . Observamos que para valores de ν maiores que zero, as matrizes A_ν e B_ν apresentaram uma crescente instabilidade no seu espectro (Figura 4 - Introdução). Naquele momento, afirmamos que o parâmetro ν governa a medida de não normalidade das matrizes em questão. De fato,

$$\begin{aligned}
\mu_3^2(S_\nu) &= \|S_\nu\|_F^2 - \|\Lambda\|_F^2 \\
&= 2 \sum_{i=1}^p |\lambda_i(S_\nu)| + (p-1)\nu^2 - \sum_{i=1}^n |\lambda_i(S_\nu)| \\
&= (p-1)\nu^2.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Assim, fica provado que $\mu_3(S_\nu)$ cresce linearmente com ν .

Vale notar, que o espectro de S_ν não sofre influência de ν . Isto se deve ao fato de a matriz S_ν já estar em sua forma triangular em blocos.

A seguir, na Figura 5.8, ilustramos como o número de Henrici calculado para A_ν e B_ν , de dimensão $n = 40$, cresce como função de ν . Isto indica como mencionado

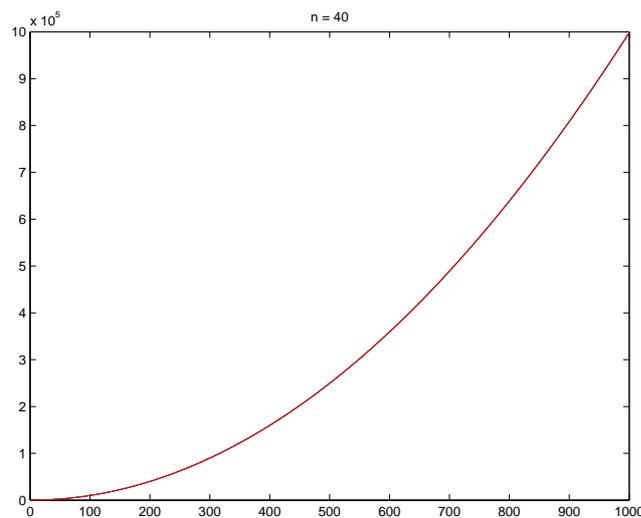


Figura 5.8: Número de Henrici He como função de ν , para $n = 40$.

na Seção 3.2, que se este número for grande, tem-se um indicador de alta sensibilidade no espectro de uma dada matriz.

Exemplo 3: Mini-Mast Model

Os dados deste experimento provêm de uma estrutura real, conhecida como Mini-Mast. A Mini-Mast é uma viga estrutural usada para pesquisa em dinâmica estrutural e controle ativo de vibrações na NASA Langley Research Center. As equações que

modelam este sistema são:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.2)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (5.3)$$

As entradas das A , B , e C , podem ser encontradas em [34]. Neste experimento os parâmetros de Markov são dados por

$$G_k = Ce^{A\Delta t k} B, \quad k = 0, 1, \dots,$$

e os autovalores da matriz A do sistema discreto associado ao modelo contínuo (5.2) são $\lambda_j = e^{s_j \Delta t}$ com $s_j = -\alpha_j \pm \beta_j i$, dados na Tabela 5.1. O símbolo δ_j denota a separação dos autovalores λ 's. Aqui Δt , a taxa de amostragem, foi tomada como $\Delta t = 0,03s$.

Tabela 5.1: Dados para o Mini-Mast Model

j	α_j	β_j	$ \lambda_j $	δ_j
1	0.32907	27.42011	0.99017	0.32299
2	0.38683	38.68230	0.98846	0.00982
3	0.38352	38.35103	0.98856	0.00982
4	0.09066	5.03555	0.99728	0.00011
5	0.09055	5.03176	0.99728	0.00011

Apresentamos na Tabela 5.2 os números de condição para os autovalores λ_j , para os casos $p = q = 1$ (entrada e resposta simples) e para $p = 2$, $q = 2$ (entrada e resposta dupla). Os resultados foram obtidos utilizando matrizes de Hankel em blocos 2×2 cujas dimensões variam de $s = 10$ a $s = 20$. A Tabela 5.1 mostra que as separações entre os autovalores da matriz do sistema é muito pequena, ou seja, trata-se de um caso de “quase multiplicidade”. O reflexo desta proximidade é apresentado na Tabela 5.2. Notemos que ali, para $q = 1$ (entrada e resposta simples), o condicionamento dos autovalores torna-se muito ruim. Agora, com $q = 2$, a mesma tabela indica uma melhora significativa no condicionamento dos autovalores. Este fenômeno sugere que aumentando-se o número de entradas (ou seja $q > 1$), o condicionamento dos autovalores melhora, e por conseguinte sua sensibilidade diminui.

Tabela 5.2: Números de condição do λ_j .

j	$\kappa_{j,1}, s = 10$	$\kappa_{j,1}, s = 20$	$\kappa_{j,2}, s = 10$	$\kappa_{j,2}, s = 20$
1	0.00017×10^7	0.00130×10^3	1.84786	1.00766
2	0.00127×10^7	0.02310×10^3	1.20076	1.00611
3	0.00136×10^7	0.02311×10^3	1.71432	1.00758
4	3.10889×10^7	4.75131×10^3	1.52448	1.00447
5	3.11084×10^7	4.75306×10^3	2.15234	1.00587

O aumento do número de entradas do sistema também tem um profundo impacto sobre as medidas de não normalidade. A Figura 5.9 mostra como se comporta a medida de não normalidade μ_3 para os casos $q = 1$ e $q = 2$, como função do número de colunas bloco da matriz de Hankel. Para o caso $q = 2$, a medida μ_3 da matriz A_{BV} correspondente a 10, 12 e 14 colunas bloco da matriz de Hankel, atinge os valores $\mu_3 = 1.8803$, $\mu_3 = 0.7652$, e $\mu_3 = 0.5756$, respectivamente.

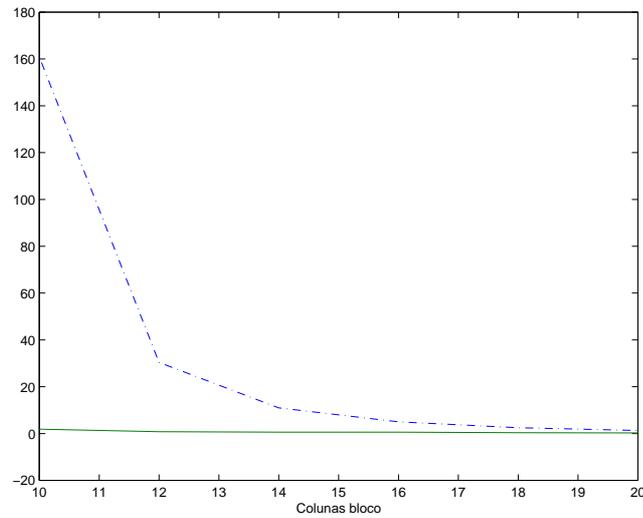


Figura 5.9: μ_3 para $q = 2$: linha contínua; μ_3 para $q = 1$: linha tracejada.

Conclusões

A relevância de um estudo sobre Medidas de não normalidade é indicada pelos exemplos de aplicações às quais matrizes não normais são associadas. Algumas em áreas das ciências aplicadas em pleno desenvolvimento. Como a influência de grande não normalidade nessas aplicações vem sendo esclarecida apenas nos últimos anos, entender esta questão poderá representar algum tipo de diferencial teórico na resolução de problemas.

O estudo do problema da sensibilidade do espectro de uma matriz não é uma tarefa fácil, haja vista não haver um único fator que determina se este espectro será ou não sensível a variações nas entradas da matriz.

Mesmo que uma matriz seja quase normal, ou seja, que as medidas de não normalidade sejam próximas de zero, ainda assim podem existir autovalores extremamente sensíveis, como resultado da multiplicidade. O exemplo 1, no capítulo introdutório ilustra este efeito. Ali, a medida de não normalidade da matriz J_n , $\mu_2(J_n) = 2^{1/4}$. Logo, não representa, de fato, grande não normalidade, porém também não indica baixa sensibilidade.

Quando o problema de multiplicidade não existe, as medidas de não normalidade podem dar muitas informações sobre a sensibilidade dos autovalores de uma dada matriz, conforme apresentado no Capítulo 3 e ilustrado no Capítulo 5. Neste contexto, os experimentos com a família de matrizes S_ν comprovam, de acordo com a teoria introduzida no Capítulo 3, que grande não normalidade, assim como a multiplicidade, implica necessariamente em alta sensibilidade espectral. Neste sentido, o número de Henrici mostrou ser um bom indicativo para uma potencial sensibilidade.

No Capítulo 4 mostramos que as medidas de não normalidade são ferramentas eficientes para fazer análises a priori sobre a sensibilidade dos autovalores das

matrizes de certos problemas, embora naturalmente muitas ferramentas teóricas possam ser necessárias. Os experimentos realizados no Capítulo 5 comprovam que a prática reflete bem a teoria, como seria de esperar.

Enfim, concluímos que um estudo sobre não normalidade apresenta resultados que explicam muitos fenômenos inesperados que ocorrem quando se trabalha em aritmética finita, especialmente, em nosso enfoque, no campo da sensibilidade espectral. Este estudo poderia se estender a investigar a influência de não normalidade sobre métodos iterativos baseados em iteração de subespaços. Um outro campo para futuros desenvolvimentos é avaliar o comportamento das medidas de não normalidade em sistemas dinâmicos discretos com entrada e resposta múltiplas. Neste campo, pelo menos, alguns experimentos numéricos têm sinalizado uma visível melhora não apenas no condicionamento dos autovalores das matrizes do sistema (mesmo para autovalores bem próximos), e em consequência a redução na sensibilidade desses autovalores, mas também nas medidas de não normalidade.

Como as matrizes dos sistemas são obtidas por meio de dados contaminados por ruídos, estimativas para o erro nos autovalores das matrizes do sistema poderiam ser feitas. Para o caso $p = q = 1$, essas estimativas foram discutidas em [15] e recentemente aperfeiçoadas em [12]. Para o caso $p, q \geq 2$ não existem resultados na literatura. Este é certamente um campo promissor para futuras pesquisas.

Referências Bibliográficas

- [1] BJÖRK, Å. **Numerical Methods For Least Squares Problems**. SIAM, 1996.
- [2] CHAITIN-CHATELIN, F. e FRAYSSÉ, V. **Lectures on Finite Precision Computations**. SIAM, 1996.
- [3] CHEN, C-T. **Linear System Theory and Design**. Oxford University Press, 1999.
- [4] DEMMEL, J.W. **Applied Numerical Linear Algebra**. SIAM, 1997.
- [5] GOLUB, G. H. e VAN LOAN, C. F. **Matrix Computations**. Second edition. The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [6] HORN, R. e JOHNSON, C. R. **Matrix Analysis**. Cambridge University Press, 1985.
- [7] MARCUS, M. e MINC, H. **A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities**. New York: Dover Publications, 1964.
- [8] STEWART, G. W. **Introduction to Matrix Computations**. Academic Press, Inc., 1973.
- [9] STEWART, G. W. e SUN, J-G. **Matrix Perturbation Theory**. Academic Press, Inc. 1990.
- [10] BAZÁN, F. S. V. Conditioning of Vandermonde Matrices With Nodes on the Unit Disk, **SIAM J. Matrix Anal. Appl.** Vol. 21(2), 679-693, 2000.
- [11] BAZÁN, F. S. V. Eigensystem Realization Algorithm (ERA): Simplification and System Pole Perturbation Analysis, **Relatório Técnico, Departamento de Matemática UFSC**, 2002.

- [12] BAZÁN, F. S. V. Error analysis of signal zeros: a projected companion matrix approach, aceito para publicação em **Linear Algebra and Its Applications**
- [13] BAZÁN, F. S. V. e BAVASTRI, C. A. An Optimized Pseudo-inverse Algorithm (OPIA) for Multi-input Multi-output Modal Parameter Identification, **Mechanical Systems and Signal Processing**, 10, p.365-380.
- [14] BAZÁN, F.S.V. e BEZERRA, L.H. On Zero Location of Predictor Polynomials, **Nume. Linear Algebra Appl.**, 4 (1997), pp. 459-468.
- [15] BAZÁN, F. S. V. e TOINT, PH. L. Error analysis of signal zeros from a related companion matrix eigenvalue problem, **Applied Mathematics Letters**, 14(2001), 859-866.
- [16] BEZERRA, L.H. e BAZÁN, F. S. V. Eigenvalue Location of Generalized Companion Predictor Matrices, **SIAM, Journal de Matrix Analysis and Applications**, 19 (4), 1998, pp. 886-897.
- [17] BRACONIER, T., CHATELIN, F. e FRAYSSÉ, V. The Influence of Large Non-normality on the Quality of Convergence of Iterative Methods in Linear Algebra, **CERFACS Technical Report TR/PA/94/07**.
- [18] CAUSEY, R. L. On Closest Normal Matrices, **Tech. Report CS-10, Dept. of Computer Science**, Stanford University, CA, 1964.
- [19] CHATELIN, F. C. Is nonnormality a serious computational difficulty in practice? *CERFACS Technical Report TR/PA/96/33*.
- [20] CHO, G. E. e IPSEN, I. C. F. If a matrix has only a single eigenvalue how sensitive is this eigenvalue? II, **Technical Report, North Carolina State University**, NC, USA, January, 1998.
- [21] CHO, G. E. e IPSEN, I. C. F. If a matrix has only a single eigenvalue how sensitive is this eigenvalue?, **Technical Report, North Carolina State University**, NC, USA, January, 1997.

- [22] EBERLEIN, P. J. On measures of non-normality for matrices, **Amer. Math. Monthly** 72, pp. 995-996(1965).
- [23] ELSNER, L. On measures of nonnormality of matrices, **Linear Algebra and its Applications**, 92, pp. 107-124(1987).
- [24] ELSNER, L. e IKRAMOV, K. D. Normal matrices: An update, **Linear Algebra Appl.**, 285, pp. 291-303(1998).
- [25] GRONE, R., JOHNSON, C.R., SA, E.M. e WOLKOWICZ, H. Normal Matrices, **Linear Algebra and Its Applications** 87, pp.213-225 (1987).
- [26] HENRICI, P. Bounds for iterates, inverses, spectral variation and fields of values of non-normal matrices, **Numer. Math.**, 4, pp. 24-40(1962).
- [27] HIGHAN, N. J. e KNIGHT, P. A. Matrix Powers in Finite Precision Arithmetic, **SIAM**, Vol 16, num. 2, pp. 343-358, April 1995.
- [28] IPSEN, I. C. F. Expressions and bounds for the GMRES residual, **BIT**, Vol. 38, No 2, 1998, pp. 101-104.
- [29] KRESS, R., DE VRIES, H. L. e WEGMANN, R. On nonnormal matrices, **Linear Algebra and Its Applications** 8, pp. 109-120(1974).
- [30] KUNG, S. A new identification and modal reduction algorithm via singular value decomposition, **Proceedings of the 12th Asilomar conference on Circuits Systems and Computers**, Pacific Grove, California, p.705-714, 1978.
- [31] LÁSZLÓ, L. Upper Bounds for Matrix Diagonals, **Linear And Multilinear Algebra**, 1991, Vol. 29, pp. 283-301.
- [32] LÁSZLÓ, L. An Attainable Lower Bound For the Best Normal Approximation, **SIAM**, vol. 15 num. 3, pp. 1035-1043, 1994.
- [33] LEE, S.L. Best available bounds for departure from normality, **SIAM J. Matrix anal. appl.**, vol. 17, num.4, pp. 984-991, October 1996.

- [34] LEW, J.-S., JUANG, J.-N. e LONGMAN, R. W. Comparison of Several System Identification Methods For Flexible Structures, **Journal of Sound and Vibration**, 167(3), pp.461-480, 1993.
- [35] LOIZOU, G. Nonnormality and Jordan Condition Numbers of Matrices, **Journal of the Association for Computing Machinery**, Vol. 16, num. 4, October 1969, pp. 580-584.
- [36] RUHE, A. On the closeness of eigevalues and singular values for almost normal matrices, **Linear Algebra and Its Applications**, 11, pp. 87-94 (1975).
- [37] RUHE, A. Closest normal matrix finally found!, **BIT**, 27, pp. 585-598, 1987.
- [38] SMITH, R. A. The condition numbers of the matrix eigevalue problem, **Numer. Math.**, 10, pp. 232-240, (1967).
- [39] ZEIGER, H. P. e MAC-EWEN, A. J. Approximate Linear Realization of Given Dimension via Ho's Algorithm, **IEEE, Trans. Aut. Control** AC-19, pp 153, 1974.