Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Integração de Funções Vetoriais

Patricia Hess

Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel

Florianópolis

Fevereiro de 2003

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Integração de Funções Vetoriais

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Patricia Hess

Florianópolis

Fevereiro de 2003

Integração de Funções Vetoriais

por

Patricia Hess

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre",

Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma

final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica.

Igor Mozolevski (Coordenador)

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Exel (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco (UFSCar)

Prof. Dr. Antonio Carlos Gardel Leitão (UFSC)

Prof. Dr. Igor Mozolevski (UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2003.

À Deus

À minha mãe, Marta

Ao meu pai, Anilson

À minha irmã, Dayse

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e à minha irmã, que são tudo o que eu mais amo. Ao meu namorado Márcio, que me apoiou em todos os momentos e sempre estava pronto a me ajudar.

Aos meus amigos Lucicléia, Danilo, Aline, Gilberto, Rafael, Edson e Divane pelos bons momentos de alegria e pelo apoio nas horas difíceis.

Ao professor Ruy Exel, que é um exemplo de pessoa e de profissional a ser seguido por todos.

À CAPES(Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro.

Abstract

In this work, we consider a measure space (S, Σ, μ), a Banach space X and functions $f : S \longrightarrow X$. For these functions, we define the Bochner, Pettis and Dunford integrals.

From this basis, we present the inconditional integrability theory, and prove that it can be seen as the Pettis integrability theory, thus establishing a clear link between them.

Resumo

Neste trabalho consideraremos um espaço de medida (S, Σ, μ), X um espaço de Banach e funções $f : S \longrightarrow X$. Para estas funções vamos definir as integrais de Bochner, de Pettis e de Dunford.

A partir do conhecimento destas integrais, vamos apresentar a teoria de integração incondicional. Vamos demonstrar que esta teoria pode ser vista como a teoria de integração de Pettis.

Conteúdo

Introdução

Iniciamos este trabalho apresentando o conceito e alguns resultados sobre a integral de Bochner. Para isso, vamos trabalhar com funções simples, fraca e fortemente mensuráveis num espaço de Banach, já que falar apenas em mensurabilidade não é suficiente.

Em seguida, procuramos mostar alguns resultados sobre convergência incondicional de séries e então demonstrar o Teorema de Orlicz-Pettis.

Além disso, vamos apresentar mais duas integrais vetoriais, a integral de Pettis e a de Dunford, e procurar saber quais as relações entre estas integrais.

Por último, com base no artigo *Unconditional integrability for dual actions*, Ruy Exel, apresentamos a teoria de integração incondicional, a qual generaliza a teoria de Bochner. Com isso, alcançamos o nosso objetivo que é demonstrar a igualdade de duas noções de integração, a integração de Pettis e a integração incondicional.

Capítulo 1

Integral de Bochner

Neste trabalho vamos considerar um espaço de medida (S, Σ, μ) com S completo[1] e X um espaço de Banach. Vamos denotar por X^* o dual topológico de X.

Este capítulo dá início ao estudo de integração de funções vetoriais. Para isto, vamos definir alguns tipos de funções e apresentar o Teorema de Pettis. A primeira integral vetorial que vamos definir será a integral de Bochner. Apresentaremos também o Teorema de Bochner e o Teorema da Convergência Dominada para funções Bochner integráveis.

1.1 Teorema de Pettis

Definição 1.1 *Dizemos que $f : S \longrightarrow X$ é uma função*

1. *fracamente mensurável se para todo $x^* \in X^*$, a função $x^* \circ f$ é mensurável.*

2. *simples se existem vetores $f_1, \cdots, f_n$ de X e conjuntos $E_1, \cdots, E_n$ de Σ, disjuntos dois a dois, com $\mu(E_i) < \infty$ quando $f_i \neq 0$ tais que $f(s) = \sum_{i=1}^{n} f_i \chi_{E_i}(s)$ para todo $s \in S$, sendo χ_E a função característica do conjunto $E \subseteq S$.*

3. *fortemente mensurável se existe uma seqüência de funções simples que converge*

[1] S é completo se dado um conjunto $A \subseteq S$ mensurável de medida nula, qualquer que seja $B \subseteq A$ temos que B é mensurável.

pontualmente para f q.s.[2] *em S.*

Sem perda de generalidade, no caso em que f é simples podemos assumir que $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$. De fato, se $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \chi_{E_i}$, então $f(s) = 0$ para todo $s \in S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, portanto chamando $E_{n+1} = S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ e $f_{n+1} = 0$, temos $S = \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i$ e $f = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \chi_{E_i}$.

Para facilitar a prova do teorema de Pettis, vamos primeiro demonstrar os lemas seguintes.

Lema 1.2 *Sejam $f, f^{'} : S \longrightarrow \mathbb{R}$ e $Z \subseteq S$ um conjunto mensurável de medida nula tal que $f = f^{'}$ fora de Z. Se f é mensurável, então $f^{'}$ é mensurável.*

Prova. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e Z o conjunto da hipótese (que tem medida zero). Então,

$f^{'-1}(a, \infty) = (f^{'-1}(a, \infty) \cap Z) \cup (f^{'-1}(a, \infty) \cap Z^c) = (f^{'-1}(a, \infty) \cap Z) \cup (f^{-1}(a, \infty) \cap Z^c)$.

Como $(f^{'-1}(a, \infty) \cap Z) \subseteq Z$, então $(f^{'-1}(a, \infty) \cap Z)$ é mensurável. Logo, $(f^{-1}(a, \infty) \cap Z^c)$ também é mensurável e $f^{'-1}(a, \infty)$ é mensurável.

$\square$

Lema 1.3 *Seja X um espaço de Banach separável. Então existe $\{x_n^*\}_n$ em X^* com $\|x_n^*\| = 1$ tal que, para todo $x \in X$,*

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)|.$$

Prova. Seja $\{x_n\}_n$ denso em $S(0,1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Pelo teorema de Hahn-Banach ([6], pg 223, teorema 4.3-3), para cada n existe um $x_n^* \in X^*$ tal que $|x_n^*(x_n)| = \|x_n\| = 1$ e $\|x_n^*\| = 1$. Considere então a seqüência $\{x_n^*\}_n$. Dado $x \in X$, é óbvio que $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)| \leq \|x\|$.

Seja $\epsilon > 0$. Então existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| \frac{x}{\|x\|} - x_n \right\| < \epsilon$. Assim

[2] quase sempre ([9], pg 15)

$$|x_n^*(x)| = |x_n^*(x + \|x\|x_n - \|x\|x_n)| \geq |x_n^*(\|x\|x_n)| - |x_n^*(x - \|x\|x_n)| \geq$$

$$\|x\||x_n^*(x_n)| - \|x_n^*\|\|x - \|x\|x_n\| = \|x\| - \|x - \|x\|x_n\| \geq$$

$$\|x\| - \epsilon\|x\| = \|x\|(1 - \epsilon).$$

Temos então que $\|x\|(1-\epsilon) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x)| \leq \|x\|$, o que implica $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x)| = \|x\|$.

$\square$

Lema 1.4 *Seja G o conjunto das funções $g = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \chi_{B_i}$, com $x_i \in X$, $B_i \in \Sigma$ para todo i e $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$.*

1. *Se $g \in G$ então g é fortemente mensurável.*

2. *Suponha que existe uma seqüência $\{g_n\}_n$ em G tal que $g_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente. Então, f é fortemente mensurável.*

Prova.

1. Seja $g = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \chi_{B_i} \in G$. Faça, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$x_k(s) = \begin{cases} x_i, & \text{se } s \in B_i \ (i = 1, \cdots, k) \\ 0, & \text{se } s \notin \bigcup_{i=1}^k B_i \end{cases}$$

   Temos então que $\{x_k\}_k$ é uma seqüência de funções simples e que obviamente converge para g pontualmente.

2. Dado $\epsilon > 0$, sabemos que existe $h \in G$ tal que $\|f - h\| < \epsilon$ (notemos que esta é a norma do supremo). Em particular, tomando $\epsilon = 1$, existe $h_1 \in G$ tal que $\|f - h_1\| < 1$. Tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$ existe $h_2 \in G$ tal que $\|f - h_2\| < \frac{1}{2}$. Continuando este processo, dado $\epsilon = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, existe h_{n+1} tal que $\|f - h_{n+1}\| < \frac{1}{2^n}$.

   Sejam $g_1 = h_1$ e $g_n = h_n - h_{n-1}$ para todo $n \geq 2$ (podemos observar que G é um espaço vetorial e portanto $g_n \in G$), então

$$\|f - g_1 - \cdots - g_n\| < \frac{1}{2^{n-1}},$$

e, portanto,

$$\sum_{k=1} g_k \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$$

uniformemente.

Afirmação: $\sum_{n=2}^{\infty} g_n$ converge absolutamente.

Para $n \geq 2$,

$$\|g_n\| = \|f - g_1 - \cdots - g_n - (f - g_1 - \cdots - g_{n-1})\| < \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{3}{2^{n-1}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \|g_n\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}} < \infty.$$

Sendo $g_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_{i,j}\chi_{B_j^i}$ para cada i, com $B_{j_1}^i \cap B_{j_2}^i \neq \emptyset$ para $j_1 \neq j_2$, vamos escrevê-la da forma $g_i = \sum_{j=1}^{\infty} g_{i,j}$ com $g_{i,j} = x_{i,j}\chi_{B_j^i}$. Então, para cada $s \in S$, $\sum_{i=2}^{\infty} g_i(s) = \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g_{i,j}(s)$ também é absolutamente convergente. Para concluir isso, observe que para todo i

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|g_{i,j}(s)\| = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} g_{i,j}(s)\right\| = \|g_i(s)\|,$$

pois para cada $s \in S$, o conjunto $\{j : g_{i,j}(s) \neq 0\}$ tem no máximo um elemento.

Desta forma,

$$\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \|g_{i,j}(s)\| = \sum_{i=2}^{\infty} \|g_i(s)\| \leq \sum_{i=2}^{\infty} \|g_i\| < \infty.$$

Sejam $\{A_n\}_n$ a seqüência de conjuntos definida por $A_n = \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, n\}$ para todo n e $f_n(s) = \sum_{(i,j)\in A_n} g_{i,j}(s)$. É fácil ver que f_n é uma função simples.

Afirmação: $f_n(s) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(s)$ para todo s.

Sejam $s \in S$ e $\epsilon > 0$. Então existe um n_0 tal que para todo $n > n_0$, $\sum_{i=n}^{\infty} \|g_i(s)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Para $i = 1$, existe um único j_1 tal que $s \in B_{j_1}^1$, para $i = 2$, existe um único j_2 tal que $s \in B_{j_2}^2, \ldots$, para $i = n_0$, existe um único j_{n_0} tal que $s \in B_{j_{n_0}}^{n_0}$. Seja $m = \max\{n_0, j_1, \cdots, j_{n_0}\}$. Então, para todo $n > m$,

$$\begin{aligned}
\|f_n(s)-f(s)\| &= \left\|\sum_{(i,j)\in A_n} g_{i,j}(s)-\sum_{(i,j)} g_{i,j}(s)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{i,j}(s)-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g_{i,j}(s)\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{n_0}\sum_{j=1}^{n} g_{i,j}(s)+\sum_{i=n_0+1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{i,j}(s)-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g_{i,j}(s)\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=n_0+1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{i,j}(s)-\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g_{i,j}(s)\right\| \\
&\leq \sum_{i=n_0+1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \|g_{i,j}(s)\|+\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \|g_{i,j}(s)\| \\
&\leq \sum_{i=n_0+1}^{n} \|g_i(s)\|+\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \|g_i(s)\| \leq 2\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \|g_i(s)\| < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.5 (Pettis) *Uma função $f : S \longrightarrow X$ é fortemente mensurável se e somente se*

1. *f é fracamente mensurável;*
2. *existe um conjunto mensurável E em S, com $\mu(E) = 0$, tal que $f(S \setminus E)$ é um subconjunto separável de X.*

Prova. Supondo que f é fortemente mensurável, então existe uma seqüência $\{f_n\}_n$ de funções simples tal que $f_n(s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(s)$ q.s. Seja $x^* \in X^*$, então para todo n, $x^* \circ f_n$ é também uma função simples e, portanto, mensurável. Assim, f_n é fracamente mensurável para todo n. Como $f_n(s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(s)$ q.s. e x^* é contínuo, então $x^*(f_n(s)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*(f(s))$ q.s., isto é, existe um $Z \subseteq S$ com $\mu(Z) = 0$, tal que $x^*(f_n(s)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*(f(s))$ para todo $s \in S \setminus Z$. Seja $q = \chi_{S\setminus Z}$, então $q(s)x^*(f_n(s)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} q(s)x^*(f(s))$ para todo $s \in S$. Como $qx^* \circ f_n$ é mensurável, $qx^* \circ f$ também o é. Assim, $x^* \circ f = qx^* \circ f$ q.s. e pelo Lema 1.2, $x^* \circ f$ é mensurável e, portanto, f é fracamente mensurável.

Sabemos que $f_n(S)$ é um conjunto finito para todo n, então $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(S)$ é um conjunto enumerável e, portanto, $\overline{A}$ é separável. Como $f(S \setminus Z) \subseteq \overline{A}$, então $f(S \setminus Z)$ é separável.

Vamos supor agora que f é fracamente mensurável. Sem perda de generalidade, podemos assumir que X é separável. Pelo Lema 1.3, dado $y \in X$ existe uma seqüência $\{x_n^*\}_n \subseteq X^*$, com $\|x_n^*\| = 1$ para todo n, tal que

$$\|f(s) - y\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(f(s) - y)|.$$

Como X é separável, dado $n \in \mathbb{N}$, X pode ser coberto por um conjunto enumerável de bolas abertas $D_{j,n}$ centradas em $x_{j,n}$ e de raio $\frac{1}{n}$. Como $\|f(s) - x_{j,n}\|$ é mensurável, o conjunto $B_{j,n} = \{s \in S : f(s) \in D_{j,n}\}$ é mensurável e $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{j,n}$. Definamos

$$g_n(s) = x_{i,n} \quad \text{se} \quad s \in B'_{i,n} = B_{i,n} - \bigcup_{j=1}^{i-1} B_{j,n}.$$

Então $S = \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} B'_{j,n}$ e, portanto, $\|f(s) - g_n(s)\| < \frac{1}{n}$ para todo $s \in S$. Como $g_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i,n} \chi_{B'_{i,n}}$ para todo n e f é limite uniforme da seqüência $\{g_n\}_n$, pelo Lema 1.4, f é fortemente mensurável.

$\square$

Corolário 1.6 *Seja uma seqüência $\{f_n\}_n$ de funções fortemente mensuráveis. Se $f_n(s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(s)$ q.s., então f é fortemente mensurável.*

Prova. É fácil ver que f é fracamente mensurável. Basta então saber se sua imagem é separável. Como cada f_n é fortemente mensurável, vamos assumir sem perda de generalidade que a sua imagem é separável. Seja $D_n = \{d_1^n, d_2^n, \cdots, d_k^n, \cdots\}$ um conjunto denso em $f_n(S)$ para todo n. De fato, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ é enumerável pois $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow D$ definida por $\pi(n, m) = d_n^m$ é uma sobrejeção. Então $\overline{D}$ é separável.

Afirmação: $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(S) \subseteq \overline{D}$.

Seja $y \in F$ então existe um n_0 tal que $y \in f_{n_0}(S)$. Dado $\epsilon > 0$, existe k tal que $\|y - d_k^{n_0}\| < \epsilon$. Portanto, $y \in \overline{D}_{n_0}$ donde $y \in \overline{D}$.

Então F é separável. Como $f(S) \subseteq \overline{F}$, então $f(S)$ é separável.

$\square$

1.2 Funções Bochner integráveis

Seja f uma função simples, igual ao vetor $y_i \neq 0$ em $B_i \in \Sigma$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, com $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\mu(B_i) < \infty$, e $f(s) = 0$ em $S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Definimos a integral de Bochner de f sobre um conjunto mensurável E por

$$\int_E f \; d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i \; \mu(B_i \cap E).$$

Lema 1.7 *Seja $f : S \longrightarrow X$ uma função simples. Então para todo $E \in \Sigma$*

$$\left\| \int_E f \; d\mu \right\| \leq \int_E \|f(s)\| d\mu(s).$$

Prova. Seja $f = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{B_i}$. Então, para todo $E \in \Sigma$

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f \; d\mu \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(E \cap B_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|y_i\| \mu(E \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_E \|y_i\| \chi_{B_i} d\mu = \int_E \sum_{i=1}^{n} \|y_i\| \chi_{B_i} d\mu \\ &\leq \int_E \|f(s)\| d\mu(s). \end{aligned}$$

□

Podemos observar que se f e g são funções simples, $f + g$ também é simples

e

$$\int_S (f+g) \; d\mu = \int_S f \; d\mu + \int_S g \; d\mu.$$

Vamos então verificar a igualdade acima já que é fácil ver que $f + g$ é simples. Sejam $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{B_i}$ e $g = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{D_j}$, então

$$\int_S (f+g) d\mu = \int_S \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{B_i} + \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{D_j} \right) d\mu = \int_S \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) \chi_{B_i \cap D_j} d\mu =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) \mu(B_i \cap D_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(B_i) + \sum_{j=1}^{m} y_j \mu(D_j) = \int_S f \; d\mu + \int_S g \; d\mu.$$

Agora, para as funções que não são simples temos a seguinte definição.

Definição 1.8 *Uma função f definida num espaço de medida (S, Σ, μ) com valores num espaço de Banach X é Bochner integrável se existe uma seqüência de funções simples $\{f_n\}_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n(s) - f(s)\| = 0$ q.s. e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \|f(s) - f_n(s)\| d\mu(s) = 0. \tag{1.1}$$

Para qualquer conjunto $B \in \Sigma$, a integral de Bochner de f sobre B é definida por

$$\int_B f \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n \; d\mu. \tag{1.2}$$

Observação:

Devemos justificar tal definição. Primeiro, podemos notar que a integral de Bochner só está definida para funções fortemente mensuráveis. Pelo Teorema de Pettis 1.5, a função $\|f_n(s) - f(s)\|$ é mensurável, por isso a integral na condição (1.1) faz sentido. Para justificar a igualdade (1.2), dada uma seqüência $\{f_n\}_n$ de funções simples que satisfaz as condições da definição, considere a seqüência $\left\{\int_B f_n \; d\mu\right\}_n$. Sejam n, k números inteiros, então

$$\left\|\int_B f_k \; d\mu - \int_B f_n \; d\mu\right\| = \left\|\int_B f_k - f_n \; d\mu\right\| \leq \int_B \|f_k(s) - f_n(s)\| d\mu(s) \leq$$

$$\leq \int_B \|f_k(s) - f(s)\| d\mu(s) + \int_B \|f(s) - f_n(s)\| d\mu(s).$$

Como esta última soma converge para zero quando n e k são suficientemente grandes, então a seqüência $\left\{\int_B f_n \; d\mu\right\}_n$ é de Cauchy e, portanto, convergente em X. Desta forma, existe o $\lim_{n\to\infty} \int_B f_n \; d\mu$.

Além disso, temos que mostrar que este limite independe da seqüência escolhida, ou seja, qualquer que seja a seqüência de funções simples que satisfaça (1.1), o limite será o mesmo. Sejam $\{f_n\}_n$ e $\{g_n\}_n$ seqüências de funções simples tais que

1. $\|f_n(s) - f(s)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\|g_n(s) - f(s)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ q.s.,

2. $\lim_{n\to\infty} \int_S \|f(s) - f_n(s)\| d\mu(s) = \lim_{n\to\infty} \int_S \|f(s) - g_n(s)\| d\mu(s) = 0.$

Seja n um número natural qualquer.

$$\left\| \int_B f_n \, d\mu - \int_B g_n \, d\mu \right\| \leq \left\| \int_B (f_n - g_n) \, d\mu \right\| \leq$$

$$\leq \int_B \|f_n(s) - f(s)\| d\mu(s) + \int_B \|f(s) - g_n(s)\| d\mu(s)$$

Esta última soma converge para zero quando $n \to \infty$, portanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_B f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_B g_n \, d\mu.$$

Teorema 1.9 (Bochner) *Uma função f fortemente mensurável é Bochner integrável se e somente se, $\|f(s)\|$ é integrável.*

Prova. Suponha que f é Bochner integrável. Então existe uma seqüência $\{f_n\}_n$ de funções simples tal que $f_n(s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(s)$ q.s. e $\lim\limits_{n\to\infty} \int_S \|f(s) - f_n(s)\| d\mu(s) = 0$. Como $\|f(s)\| \leq \|f_n(s)\| + \|f(s) - f_n(s)\|$, basta mostrar que $\|f_n(s)\|$ e $\|f(s) - f_n(s)\|$ são integráveis. De fato, $\|f_n(s)\|$ é integrável pois se $f_n = \sum\limits_{i=1}^{m_n} f_i \chi_{B_i}$, então $\sum\limits_{i=1}^{m_n} \|f_i\| \mu(B_i) < \infty$. Além disso, $\|f(s) - f_n(s)\|$ também é integrável. Claro, se $\lim\limits_{n\to\infty} \int_S \|f(s) - f_n(s)\| d\mu(s) = 0$ então existe um n_0 tal que para todo $n > n_0$, $\int_S \|f(s) - f_n(s)\| d\mu(s) < \infty$. Então, $\|f(s)\|$ é integrável.

Por outro lado, seja $\{f_n\}_n$ uma seqüência de funções simples tal que $f_n(s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(s)$ q.s. Faça

$$g_n(s) = \begin{cases} f_n(s), & \text{se } \|f_n(s)\| \leq \frac{3}{2}\|f(s)\| \\ 0, & \text{se } \|f_n(s)\| > \frac{3}{2}\|f(s)\| \end{cases}$$

Então, a seqüência $\{g_n\}_n$ de funções simples satisfaz $\|g_n(s)\| \leq \frac{3}{2}\|f(s)\|$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \|f(s) - g_n(s)\| = 0$ q.s. Além disso, $\|f(s) - g_n(s)\|$ é integrável. De fato,

$$\|f(s) - g_n(s)\| \leq \|f(s)\| + \|g_n(s)\| \leq \|f(s)\| + \frac{3}{2}\|f(s)\| = \frac{5}{2}\|f(s)\|$$

e como $\|f(s)\|$ é integrável, então $\|f(s) - g_n(s)\|$ é integrável. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue ([7], pg 321, teorema 11.32)

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \|f(s) - g_n(s)\| d\mu(s) = \int_S \lim_{n\to\infty} \|f(s) - g_n(s)\| d\mu(s) = 0.$$

Portanto, f é Bochner integrável.

$\square$

Vamos considerar agora, uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ e μ a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Neste caso f é Bochner integrável se e somente se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge absolutamente. Usando o Teorema de Bochner, a demostração é imediata. Primeiro, é fácil ver que f é fortemente mensurável. Então,

$$f \text{ é Bochner integrável } \iff \int_{\mathbb{N}} \|f(n)\| d\mu < \infty.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f(n)\| = \int_{\mathbb{N}} \|f(n)\| d\mu < \infty$, então vale a afirmação.

Corolário 1.10 *Se $f : S \longrightarrow X$ é Bochner integrável, então para todo $B \in \Sigma$*

i. $\displaystyle\left\| \int_B f \, d\mu \right\| \leq \int_B \|f(s)\| d\mu(s)$;

ii. $F : \Sigma \longrightarrow X$, *dada por* $F(B) = \displaystyle\int_B f \, d\mu$, *é* σ*-aditiva.*

Prova.

i. Seja $\{g_n\}_n$ uma seqüência de funções simples tal que $g_n(s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(s)$ q.s. e, assim como no Teorema de Bochner 1.9, podemos assumir que $\|g_n(s)\| \leq \frac{3}{2}\|f(s)\|$. Então $\|g_n(s)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f(s)\|$ q.s. Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, para todo $B \in \Sigma$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_B \|g_n(s)\| d\mu(s) = \int_B \|f(s)\| d\mu(s).$$

Daí

$$\begin{aligned}\left\| \int_B f \, d\mu \right\| &= \left\| \lim_{n\to\infty} \int_B g_n \, d\mu \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \int_B g_n \, d\mu \right\| \leq \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \int_B \|g_n(s)\| d\mu(s) = \int_B \|f(s)\| d\mu(s).\end{aligned}$$

ii. Note que F é aditiva. De fato, sejam $B = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} B_i$ tal que $B_i \in \Sigma$ para todo $i = 1, \cdots, m$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$, e ainda $\{f_n\}_n$ uma seqüência de funções simples tal que $f_n(s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(s)$ q.s. e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_S \|f(s) - f_n(s)\| d\mu(s) = 0$. Então,

$$\int_{\bigcup_{i=1}^m B_i} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{i=1}^m B_i} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n \chi_{\bigcup_{i=1}^m B_i} d\mu =$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_S f_n\left(\sum_{i=1}^m \chi_{B_i}\right)d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^m \int_S f_n\chi_{B_i}d\mu =$$

$$\sum_{i=1}^m \lim_{n\to\infty}\int_S f_n\chi_{B_i}d\mu = \sum_{i=1}^m \int_{B_i} f\ d\mu.$$

Como f é Bochner integrável, então $\|f(s)\|$ é integrável. Dados $k \in \mathbb{N}$ e $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, com $B_i \in \Sigma$ disjuntos dois a dois, temos

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i} f\ d\mu = \int_{\bigcup_{i=1}^{k} B_i} f\ d\mu + \int_{\bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i} f\ d\mu = \sum_{i=1}^k \int_{B_i} f\ d\mu + \int_{\bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i} f\ d\mu.$$

Considerando $E_k = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i$, temos que

$$\left\|\int_{E_k} f\ d\mu\right\| \leq \int_{E_k} \|f(s)\| d\mu(s) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(ver [5],teorema 10.5). Portanto,

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i} f\ d\mu = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^k \int_{B_i} f\ d\mu + \int_{\bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i} f\ d\mu\right) =$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^k \int_{B_i} f\ d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i} f\ d\mu.$$

□

Corolário 1.11 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado. Se f é uma função Bochner integrável com valores em X, então $T \circ f$ é uma função Bochner integrável com valores em Y e*

$$\int_B T \circ f\ d\mu = T\int_B f\ d\mu$$

para todo $B \in \Sigma$.

Prova. Seja $\{f_n\}_n$ uma seqüência de funções simples tal que $f_n(s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(s)$ q.s. e $\lim_{n\to\infty}\int_S \|f(s) - f_n(s)\| d\mu(s) = 0$. Aplicando T em cada elemento da seqüência, a nova seqüência $\{T \circ f_n\}_n$ também é uma seqüência de funções simples e, portanto, integráveis.

Pela linearidade e continuidade de T,

$$\int_B T \circ f_n \, d\mu = T \int_B f_n \, d\mu \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} T(f_n(s)) = T \lim_{n\to\infty} f_n(s) = T(f(s)) \;\; \text{q.s.}$$

e, portanto, $T \circ f$ é uma função fortemente mensurável.

Como $\|f(s)\|$ é integrável e T é limitada, $\|T(f(s))\|$ também é integrável. Pelo Teorema de Bochner 1.9, $T \circ f$ é Bochner integrável.

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \|T(f(s)) - T(f_n(s))\| d\mu(s) \leq \lim_{n\to\infty} \int_S \|T\| \|f(s) - f_n(s)\| d\mu(s) =$$
$$\|T\| \lim_{n\to\infty} \int_S \|f(s) - f_n(s)\| d\mu(s) = 0.$$

Então,

$$\int_B T \circ f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_B T \circ f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} T \int_B f_n \, d\mu = T \int_B f \, d\mu.$$

□

Com este corolário, fica fácil mostrar que se f e g são Bochner integráveis, então $f + g$ também o é e

$$\int_S (f+g) d\mu = \int_S f \, d\mu + \int_S g \, d\mu.$$

É fácil ver que $f + g$ é Bochner integrável. Dado $x^* \in X^*$,

$$x^* \int_S (f+g) d\mu = \int_S x^* \circ (f+g) d\mu = \int_S (x^* \circ f + x^* \circ g) d\mu = \int_S x^* \circ f \, d\mu + \int_S x^* \circ g d\mu =$$
$$x^* \int_S f \, d\mu + x^* \int_S g \, d\mu = x^* \Big(\int_S f \, d\mu + \int_S g \, d\mu \Big)$$

Definição 1.12 *Dizemos que $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ é uma medida vetorial se*

i. $\mu(\emptyset) = \overrightarrow{0} \in X$;

ii. μ *é σ-aditiva.*

Definição 1.13 *Seja $\mu : \Sigma \longrightarrow X$ uma medida vetorial. Dizemos que μ é de variação limitada sobre $E \in \Sigma$ se*

$$|\mu|(E) = \sup \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \|\mu(E_i)\| : E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, E_i \cap E_j = \emptyset \textit{ para } i \neq j, n \in \mathbb{N} \Big\} < \infty.$$

$|\mu|(E)$ é chamada variação total de μ sobre E.

Teorema 1.14 *Sejam f uma função Bochner integrável e $F : \Sigma \longrightarrow X$ dada por $F(E) = \int_E f\ d\mu$. Então F é de variação limitada e $|F|(E) = \int_E \|f\| d\mu$ para todo $E \in \Sigma$.*

Prova. Seja $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ com $E_i \in \Sigma$ disjuntos dois a dois, então

$$\sum_{i=1}^{n} \|F(E_i)\| = \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{E_i} f\ d\mu \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} \|f\| d\mu = \int_E \|f\| d\mu < \infty.$$

Portanto F é de variação limitada e $|F|(E) \leq \int_E \|f\| d\mu$.

Seja $\epsilon > 0$. Como f é Bochner integrável, considere $\{f_n\}_n$ uma seqüência de funções simples tal que $f_n(s) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(s)$ q.s. e $\lim_{n\to\infty} \int_S \|f(s) - f_n(s)\| d\mu(s) = 0$. Fixe n_0 tal que $\int_S \|f(s) - f_{n_0}(s)\| d\mu(s) < \epsilon$ e escolha uma partição $\{E_j^{'}\}$ para E tal que

$$\left\| \int_{E_j^{'}} f_{n_0} d\mu \right\| = \int_{E_j^{'}} \|f_{n_0}\| d\mu.$$

De fato, esta partição existe. Sendo $f_{n_0} = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{F_j}$, tome cada conjunto $E_j^{'}$ como sendo $F_j \cap E$ para cada $j = 1, \cdots, m$. Portanto,

$$\sum_{j=1}^{m} \left\| \int_{E_j^{'}} f_{n_0} d\mu \right\| = \int_E \|f_{n_0}\| d\mu.$$

Escolha agora uma partição $E = \bigcup_{j=1}^{p} B_j$ que é um refinamento da anterior, tal que

$$|F|(E) - \sum_{j=1}^{p} \left\| \int_{B_j} f\ d\mu \right\| < \epsilon.$$

Mesmo com esta nova partição, podemos notar que $\sum_{j=1}^{p} \left\| \int_{B_j} f_{n_0} d\mu \right\| = \int_E \|f_{n_0}\| d\mu$.

Usando a desigualdade $\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\|$, temos

$$\sum_{j=1}^{p} \left| \left\| \int_{B_j} f\ d\mu \right\| - \left\| \int_{B_j} f_{n_0} d\mu \right\| \right| \leq \sum_{j=1}^{p} \left\| \int_{B_j} f\ d\mu - \int_{B_j} f_{n_0} d\mu \right\| \leq \sum_{j=1}^{p} \int_{B_j} \|f - f_{n_0}\| d\mu =$$

$$\int_E \|f - f_{n_0}\| d\mu < \epsilon \Longrightarrow \left| |F|(E) - \int_E \|f_{n_0}\| d\mu \right| = \left| |F|(E) - \sum_{j=1}^{p} \left\| \int_{B_j} f_{n_0} d\mu \right\| \right| < 2\epsilon \Longrightarrow$$

$$|F|(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E \|f_n\| d\mu = \int_E \|f\| d\mu.$$

$\square$

Corolário 1.15 *Se f e g são funções Bochner integráveis e* $\int_E f\ d\mu = \int_E g\ d\mu$ *para cada* $E \in \Sigma$*, então* $f = g$ *q.s.*

Prova. Seja $F : \Sigma \longrightarrow X$ dada por $F(E) = \int_E (f - g)\ d\mu$. Então, $F(E) = 0$ para todo $E \in \Sigma$. Portanto, $|F|(E) = 0$ para todo $E \in \Sigma$. Mas então $0 = |F|(S) = \int_S \|f - g\|\ d\mu \Rightarrow \|f - g\| = 0$ q.s. Isto acontece somente se $f = g$ q.s.

□

Teorema 1.16 (Teorema da Convergência Dominada) *Sejam* (S, Σ, μ) *um espaço de medida finita e* $\{f_n\}_n$ *uma seqüência de funções Bochner integráveis definidas em* S *com valores num espaço de Banach* X*. Se* $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$ *q.s. e existe uma função* g *integrável com valores reais definida em* S *tal que* $\|f_n(s)\| \leq g(s)$ *q.s., então* f *é Bochner integrável e* $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\ d\mu = \int_E f\ d\mu$ *para todo* $E \in \Sigma$.

Prova. Como f_n é fortemente mensurável para todo n, então f também é fortemente mensurável pelo Corolário 1.6. Para mostrar que f é Bochner integrável, basta mostrar que $\|f\|$ é integrável.

Sabemos que $f_n(s) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(s)$ q.s., então $\|f_n(s)\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f(s)\|$ q.s., o que implica $\|f(s)\| \leq g(s)$ q.s. Portanto, $\|f(s)\|$ também é integrável, o que implica que f é Bochner integrável.

Além disso, $\|f(s) - f_n(s)\| \leq \|f(s)\| + \|f_n(s)\| \leq 2\ g(s)$, isto é, $\|f(s) - f_n(s)\|$ é integrável. Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \|f(s) - f_n(s)\| d\mu(s) = \int_E \lim_{n\to\infty} \|f(s) - f_n(s)\| d\mu(s) = 0,\ \forall\ \ E \in \Sigma.$$

Portanto, para todo $E \in \Sigma$,

$$\int_E f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\ d\mu.$$

□

Capítulo 2

Séries

Neste capítulo vamos relembrar de algumas definições que nos serão úteis. Vamos apresentar o conceito de "net"e sua condição de convergência e, estudar a convergência incondicional de séries.

Além disso, vamos demonstrar o Teorema de Orlicz-Pettis, o qual será de grande importância, usando os teoremas de Pettis e o de Bochner vistos no capítulo 1.

2.1 Convergência incondicional

Antes de falarmos em convergência incondicional, vamos apresentar algumas definições.

Definição 2.1 *Um conjunto dirigido I é um conjunto com uma relação de ordem "$\leq$" tal que, dados $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $i, j \leq k$.*

Definição 2.2 *Dizemos que um net em X é uma família $\{x_i\}_{i \in I}$ de elementos de X indexada por um conjunto dirigido I.*

Definição 2.3 *Dado I um conjunto dirigido, dizemos que o net $\{x_n\}_{n \in I}$ em X converge se existe $y \in X$ tal que, dado $\epsilon > 0$ existe i_0 tal que para todo $i \geq i_0$, $\|x_i - y\| < \epsilon$.*

Definição 2.4 *Dizemos que um net $\{x_n\}_{n \in I}$, em X é de Cauchy se dado $\epsilon > 0$ existe $i_0 \in I$ tal que para todos $i > j > i_0$, tem-se $\|x_i - x_j\| < \epsilon$.*

Podemos notar que todo net convergente é de Cauchy.

Considere o conjunto $\mathcal{F} = \{F \subseteq \mathbb{N} : F \text{ é finito}\}$. Notemos que $\mathcal{F}$ é um conjunto dirigido por inclusão de conjuntos pois, dados $E, H \in \mathcal{F}$, podemos encontrar $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \supseteq E, H$.

Definição 2.5 *Dizemos que uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *em* X *converge incondicionalmente para* $y \in X$ *se o net* $\left\{\sum_{n\in F} x_n\right\}_{F\in\mathcal{F}}$ *converge para* y.

Proposição 2.6 *Todo net de Cauchy converge em* X.

Prova. Sejam I um conjunto dirigido e $\{x_n\}_{n\in I}$ um net de Cauchy em X. Seja $\epsilon = 1$, então existe n_1 tal que, para todo $n,\ m \geq n_1,\ \ \|x_n - x_m\| < 1$. Chame $y_1 = x_{n_1}$. Seja $\epsilon = \frac{1}{2}$, então existe $n_2^{'}$ tal que, para todo $n,\ m \geq n_2^{'},\ \|x_n - x_m\| < \frac{1}{2}$. Seja $n_2 \geq n_2^{'},\ n_1$ e chame $y_2 = x_{n_2}$. Continuando esse processo, dado $\epsilon = \frac{1}{k}$ vai existir $n_k^{'}$ tal que para todo $n,\ m \geq n_k^{'},\ \ \|x_n - x_m\| < \frac{1}{k}$. Seja $n_k \geq n_k^{'},\ n_{k-1}$ e chame $y_k = x_{n_k}$. Desta forma, construimos a seqüência $\{y_k\}_k$.

Afirmação: $\{y_k\}_k$ é de Cauchy.

Sejam $\epsilon > 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k_0} < \epsilon$. Para todos $k, l \geq k_0$, temos que $n_k, n_l \geq k_0$. Logo,

$$\|y_k - y_l\| = \|x_{n_k} - x_{n_l}\| < \frac{1}{k_0} < \epsilon.$$

Portanto $\{y_k\}_k$ converge em X. Seja $y = \lim_{k\to\infty} y_k$. Dados $\epsilon > 0$ e k_0 tal que $\frac{2}{k_0} < \epsilon$, se $n \geq n_{k_0}$, então

$$\|x_n - y\| \leq \|x_n - x_{n_{k_0}}\| + \|x_{n_{k_0}} - y\| < \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_0} = \frac{2}{k_0} < \epsilon.$$

$\square$

Teorema 2.7 (Condição de Cauchy) *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge incondicionalmente se e somente se dado* $\epsilon > 0$ *existe* $F \in \mathcal{F}$ *tal que, para todo* $H \in \mathcal{F}$ *disjunto de* F, *temos*

$$\left\|\sum_{n\in H} x_n\right\| < \epsilon.$$

Prova. Suponha que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ convirja incondicionalmente, então o net $\left\{\sum_{n \in F} x_n\right\}_{F \in \mathcal{F}}$ converge e portanto é de Cauchy. Seja $\epsilon > 0$, então existe $F \in \mathcal{F}$ tal que para todos $E, G \supseteq F$ em $\mathcal{F}$, $\left\|\sum_{n \in E} x_n - \sum_{n \in G} x_n\right\| < \epsilon$. Seja $H \in \mathcal{F}$ disjunto de F. Considerando os conjuntos $E = H \cup F$ e $G = F$ que são finitos e contêm F,

$$\left\|\sum_{n \in H} x_n\right\| = \left\|\sum_{n \in E} x_n - \sum_{n \in G} x_n\right\| < \epsilon.$$

Provando a recíproca, seja $\epsilon > 0$. Então existe $F \in \mathcal{F}$ tal que para todo $H \in \mathcal{F}$ disjunto de F tem-se $\left\|\sum_{n \in H} x_n\right\| < \frac{\epsilon}{2}$. Sejam $E, G \supseteq F$ em $\mathcal{F}$. Considere os conjuntos $E^{'} = E \setminus E \cap G$ e $G^{'} = G \setminus E \cap G$ que estão em $\mathcal{F}$ e além disso, disjuntos de F. Então

$$\left\|\sum_{n \in E} x_n - \sum_{n \in G} x_n\right\| = \left\|\sum_{n \in E'} x_n - \sum_{n \in G'} x_n\right\| \leq \left\|\sum_{n \in E'} x_n\right\| + \left\|\sum_{n \in G'} x_n\right\| < \epsilon.$$

Assim o net $\left\{\sum_{n \in F} x_n\right\}_{F \in \mathcal{F}}$ é de Cauchy e portanto convergente. Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente.

$\square$

Proposição 2.8 *Se uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *em* X *é absolutamente convergente, então* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge incondicionalmente.*

Prova. Como X é de Banach, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge. Seja $\epsilon > 0$, então existe k_0 tal que para todo $k > k_0$, $\sum_{n=k}^{\infty} \|x_n\| < \frac{\epsilon}{2}$. Se $y = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} x_n$, então para todo $k > k_0$,

$$\left\|\sum_{n=1}^{k} x_n - y\right\| = \left\|\sum_{n=k+1}^{\infty} x_n\right\| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \|x_n\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $F = \{1, \cdots, k_0\}$. Então, $\left\|\sum_{n \in F} x_n - y\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{k_0} x_n - y\right\| < \frac{\epsilon}{2}$. Considere $G \supseteq F$ finito, então

$$\left\|\sum_{n \in G} x_n - y\right\| \leq \left\|\sum_{n \in G} x_n - \sum_{n \in F} x_n\right\| + \left\|\sum_{n \in F} x_n - y\right\| = \left\|\sum_{n \in G \setminus F} x_n\right\| + \left\|\sum_{n \in F} x_n - y\right\| <$$

$$\sum_{n \in G \setminus F} \|x_n\| + \frac{\epsilon}{2} < \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \|x_n\| + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente para $y \in X$.

$\square$

A recíproca desta proposição não é verdadeira, por isso vamos dar um exemplo de uma série que converge incondicionalmente mas não converge absolutamente.

Exemplo 1 : Seja $x_n \in l_2$ tal que na coordenada n tem valor $\frac{1}{n}$ e zero em todas as outras.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é a série harmônica que já sabemos que não converge. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ não converge absolutamente.

Afirmação: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente para $y = \left(1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$.

Primeiro, $y \in l_2$ pois $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$. Seja $\epsilon > 0$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, então existe n_0 tal que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \epsilon^2$. Seja $F = \{1, 2, \cdots, n_0\}$ e considere $G \supseteq F$ finito. Então,

$$\left\|\sum_{n \in G} x_n - y\right\|^2 = \sum_{n \notin G} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n \notin F} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \epsilon^2.$$

Proposição 2.9 *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ *converge em* X *para toda função* $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *bijetora se e somente se* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge incondicionalmente.*

Prova. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ não convirja incondicionalmente. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $F \in \mathcal{F}$, existe $G \in \mathcal{F}$ disjunto de F tal que $\left\|\sum_{n \in G} x_n\right\| \geq \epsilon$. Seja $F_0 = \{n_1 = 1\}$, então existe $F_1 = \{n_2, \cdots, n_k\}$ disjunto de F tal que $\left\|\sum_{n \in F_1} x_n\right\| \geq \epsilon$. Seja $F_2 = \{n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} \setminus (F \cup F_1)\}\}$. Então, existe $F_3 = \{n_{k+2}, \cdots, n_l\}$ disjunto de $F_0 \cup F_1 \cup F_2$ tal que $\left\|\sum_{n \in F_3} x_n\right\| \geq \epsilon$. Seja agora $F_4 = \{n_{l+1} = \min\{n \in \mathbb{N} \setminus \bigcup_{i=0}^{3} F_i\}\}$. Então, existe $F_5 = \{n_{l+2}, \cdots, n_p\}$ disjunto de $\bigcup_{i=0}^{4} F_i$ tal que $\left\|\sum_{n \in F_5} x_n\right\| \geq \epsilon$. Continuando esse processo, é fácil ver que $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Seja $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $\pi(p) = n_p$. Pela hipótese, $\sum_{p=1}^{\infty} x_{n_p}$ converge, então existe um N tal que, para todos $i > j > N$, tem-se $\left\| \sum_{p=j}^{i} x_{n_p} \right\| < \epsilon$. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_N \in F_k$ e seja F_m um conjunto tal que $\left\| \sum_{n \in F_m} x_n \right\| \geq \epsilon$ e $m \geq \text{mim}\{n \in \mathbb{N} : n > k\}$. Escolha $j = \min\{p \in \mathbb{N} : n_p \in F_m\}$ e $i = \max\{p \in \mathbb{N} : n_p \in F_m\}$. Então, $\left\| \sum_{p=j}^{i} x_{n_p} \right\| = \left\| \sum_{n_p \in F_m} x_{n_p} \right\| \geq \epsilon$, o que é um absurdo. Então a série converge incondicionalmente.

Sejam $\epsilon > 0$ e $y = \lim_{F \in \mathcal{F}} \sum_{n \in F} x_n$. Então, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que, para todo $G \supseteq F$ em $\mathcal{F}$, $\left\| \sum_{n \in G} x_n - y \right\| < \epsilon$. Seja $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijetora, então existe $F' \in \mathcal{F}$ tal que $\pi(F') = F$ e $\left\| \sum_{n \in F'} x_{\pi(n)} - y \right\| < \epsilon$. Seja $m_0 = \max\{n : n \in F'\}$ e considere $G' = \{1, 2, \cdots, m_0\}$. Então, $G = \pi(G') \supseteq F$ é finito e, portanto, $\left\| \sum_{n \in G} x_n - y \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{m_0} x_{\pi(n)} - y \right\| < \epsilon$. Logo, para todo $m > m_0$, $\left\| \sum_{n=1}^{m} x_{\pi(n)} - y \right\| < \epsilon$.

□

2.2 Teorema de Orlicz-Pettis

Antes de demonstrar o Teorema de Orlicz-Pettis, vamos apresentar os seguintes lemas.

Lema 2.10 *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série em X. A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente se e somente se para cada seqüência crescente de inteiros positivos $\{k_j\}_j$, a seqüência $\left\{ \sum_{j=1}^{n} x_{k_j} \right\}_n$ converge em norma.*

Prova. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ incondicionalmente convergente, então vale a condição de Cauchy. Seja $\epsilon > 0$, então existe $F \in \mathcal{F}$ tal que para todo $E \in \mathcal{F}$ disjunto de F, $\left\| \sum_{n \in E} x_n \right\| < \epsilon$. Seja $\{k_n\}_n$ uma seqüência crescente de inteiros positivos. Seja $m = \max\{n \in \mathbb{N} : k_n \in F\}$, então para todos $p > q > m$ podemos definir

$E = \{k_q, k_{q+1}, \cdots, k_p\}$, que é finito e disjunto de F. Então $\left\|\sum_{n=q}^{p} x_{k_n}\right\| = \left\|\sum_{n\in E} x_n\right\| < \epsilon$. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ é de Cauchy em X e portanto convergente.

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ não converge incondicionalmente, então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $F \in \mathcal{F}$, existe $E \in \mathcal{F}$ disjunto de F tal que $\left\|\sum_{n\in E} x_n\right\| \geq \epsilon$. Então existe $E_1 = \{n_1^1 < n_2^1 < \cdots < n_{k_1}^1\}$ tal que $\left\|\sum_{n\in E_1} x_n\right\| \geq \epsilon$. Agora, fazendo $F = \{n \in \mathbb{N} : n \leq n_{k_1}^1\}$, existe $E_2 = \{n_1^2 < n_2^2 < \cdots < n_{k_2}^2\}$ tal que $\left\|\sum_{n\in E_2} x_n\right\| \geq \epsilon$. Continuando esse processo, construímos uma seqüência crescente de inteiros positivos $\{n_1^1, \cdots, n_{k_1}^1, \cdots, n_1^m, \cdots, n_{k_m}^m, \cdots\}$. Então a série $\sum_{m=1}^{\infty} x_{n_{k_m}^m}$ converge. A série $\sum_{m=1}^{\infty} y_m$, com $y_m = \sum_{j=1}^{k_m} x_{n_j^m}$, também converge pois a sua seqüência de somas parciais é uma subseqüência da seqüência das somas parciais de $\sum_{m=1}^{\infty} x_{n_{k_m}^m}$. Portanto a seqüência $\{y_m\}_m$ converge para 0. Isto é um absurdo, pois $\|y_m\| \geq \epsilon > 0$ para todo m.

$\square$

Lema 2.11 *Se $f : S \longrightarrow X$ é Bochner integrável, então $\left\{\int_E f\, d\mu : E \in \Sigma\right\}$ é relativamente compacto em X.*

Prova. Suponha primeiro que f é uma função simples, isto é, $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \chi_{B_i}$ com $f_i \in X$, B_i mensurável e $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$. O conjunto $\left\{\int_E f\, d\mu : E \in \Sigma\right\}$ é limitado pois $\left\|\int_E f\, d\mu\right\| \leq \int_S \|f\| d\mu < \infty$ e, ainda, o *span*$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ tem dimensão finita. Como

$$\overline{\left\{\int_E f\, d\mu : E \in \Sigma\right\}} \subseteq span\{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \subseteq X,$$

então $\overline{\left\{\int_E f\, d\mu : E \in \Sigma\right\}}$ é compacto em X.

Sejam $\epsilon > 0$ e f uma função Bochner integrável qualquer. Escolha uma função simples g tal que $\int_S \|f(s) - g(s)\| d\mu(s) < \frac{\epsilon}{2}$. Então, dado $x \in \left\{\int_E f\, d\mu : E \in \Sigma\right\}$, existe um $y \in \left\{\int_E g\, d\mu : E \in \Sigma\right\}$ tal que $\|x - y\| < \frac{\epsilon}{2}$. Claro, se $x = \int_E f\, d\mu$ para algum E, basta tomar $y = \int_E g\, d\mu$ com o mesmo E. O conjunto $\left\{\int_E g\, d\mu : E \in \Sigma\right\}$ é totalmente limitado em X pois é relativamente compacto. Então, existe uma $\frac{\epsilon}{2}$-rede finita ([6], pg 412) M_ϵ para $\left\{\int_E g\, d\mu : E \in \Sigma\right\}$. Seja $E \in \Sigma$. Então, existe $x_1 \in M_\epsilon$ tal que $\left\|\int_E g\, d\mu - x_1\right\| < \frac{\epsilon}{2}$. Então,

$$\left\|\int_E f\, d\mu - x_1\right\| \leq \left\|\int_E f\, d\mu - \int_E g\, d\mu\right\| + \left\|\int_E g\, d\mu - x_1\right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, M_ϵ é uma ϵ-rede finita para $\left\{\int_E f\, d\mu : E \in \Sigma\right\}$. Então, $\left\{\int_E f\, d\mu : E \in \Sigma\right\}$ é totalmente limitado e, como X é Banach, é relativamente compacto.

$\square$

Teorema 2.12 (Orlicz-Pettis) *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *uma série em* X*. Suponha que para cada seqüência crescente de inteiros positivos* $\{k_i\}_i$*, a seqüência* $\left\{\sum_{i=1}^{n} x_{k_i}\right\}_n$ *convirja fracamente. Então a série* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *converge.*

Prova. Suponha que exista uma seqüência crescente de inteiros positivos $\{k_i\}_i$ tal que a seqüência $\left\{\sum_{i=1}^{n} x_{k_i}\right\}_n$ não é de Cauchy em X. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existem $p > q > n$ tal que $\left\|\sum_{i=q}^{p} x_{k_i}\right\| \geq \epsilon$. Sejam duas seqüências crescentes de inteiros positivos $\{j_n\}_n$ e $\{l_n\}_n$, com $j_1 < l_1 < j_2 < l_2 < \cdots$, satisfazendo $\left\|\sum_{i=j_n}^{l_n} x_{k_i}\right\| \geq \epsilon$ para todo n. A série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, formada por $y_n = \sum_{i=j_n}^{l_n} x_{k_i}$, converge fracamente em X. De fato, considere a seqüência crescente de inteiros positivos $\{k_{j_1}, \cdots, k_{l_1}, \cdots, k_{j_n}, \cdots, k_{l_n}, \cdots\}$ e seja $\{s_p\}_p$ a seqüência das somas parciais dos elementos $x_{k_i},\ i = j_n, \cdots, l_n,\ n \in \mathbb{N},$ que converge fracamente. Como $\left\{\sum_{n=1}^{m} y_m\right\}_m$ é uma subseqüência da seqüência $\{s_p\}_p$, então esta também converge fracamente. Portanto, a seqüência $\{y_n\}_n$ converge fracamente para zero e ainda, $\|y_n\| \geq \epsilon$ para todo n.

Seja $\Omega = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ o espaço métrico[1] compacto das seqüências $\epsilon = (\epsilon_n)_n$ com $\epsilon_n = \pm 1$. Seja Σ a σ-álgebra de Borel ([8], pg 13) e μ a medida produto[2] em Ω.

Seja $f : \Omega \longrightarrow X$ uma função dada por $f((\epsilon_n)) = \text{weak} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \epsilon_k y_k$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, é fácil ver que a função $f_i : \Omega \longrightarrow X$ dada por $f_i((\epsilon_n)) = \sum\limits_{k=1}^{i} \epsilon_k y_k$, é simples, portanto $x^* \circ f_i$ é mensurável para todo $x^* \in X^*$. Como $x^* \circ f_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} x^* \circ f$ pontualmente para todo $x^* \in X^*$, então $x^* \circ f$ é mensurável e, portanto, f é fracamente mensurável em Ω.

A imagem de f está contida no fecho do $span\{y_1, y_2, \cdots\}$. De fato, seja $y \in f(\Omega)$ e suponha que $y \notin \overline{span\{y_1, y_2, \cdots\}}$. Então, por Hahn-Banach existe um $x^* \in X^*$ tal que $x^*(y) = 1$ e $x^*(z) = 0$ para todo $z \in \overline{span\{y_1, y_2, \cdots\}}$. Como $y \in f(\Omega)$, então existe $(\epsilon_n) \in \Omega$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \epsilon_k x^*(y_k) = x^*(y)$, mas $\sum\limits_{k=1}^{n} \epsilon_k x^*(y_k) = 0$ para todo n e $x^*(y) = 1$. Então, $y \in \overline{span\{y_1, y_2, \cdots\}}$ e, portanto, $f(\Omega)$ é separável. Pelo Teorema de Pettis, f é fortemente mensurável.

Além disso, a imagem de f está contida no fecho fraco do conjunto $B = \left\{ \sum\limits_{k\in\Delta} \epsilon_k y_k \,:\, \Delta \subseteq \mathbb{N} \text{ é finito }, \epsilon_k = \pm 1 \text{ para } k \in \Delta \right\}$. Se $y \in f(\Omega)$, então existe $(\epsilon_n) \in \Omega$ tal que para todo $x^* \in X^*$, $x^*(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \epsilon_k x^*(y_k)$. Fazendo $\Delta_n = \{1, \cdots, n\}$, então $x^*(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k\in\Delta_n} \epsilon_k x^*(y_k)$ e, portanto, y pertence ao fecho fraco de B.

Seja $x^* \in X^*$. Faça para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\epsilon_k = \begin{cases} 1, & \text{se } x^*(y_k) \geq 0 \\ -1, & \text{se } x^*(y_k) < 0 \end{cases}.$$

Então, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \epsilon_k x^*(y_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x^*(y_k)|$. Como existe $\text{weak} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \epsilon_k y_k$, então $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x^*(y_k)| < \infty$. Assim, para todo $\Delta \subseteq \mathbb{N}$ finito,

$$\left| \sum_{k\in\Delta} \epsilon_k x^*(y_k) \right| \leq \sum_{k\in\Delta} |\epsilon_k x^*(y_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x^*(y_k)| < \infty,$$

[1]Podemos considerar aqui a métrica $d((\epsilon_n), (\epsilon_n^{'})) = \sum_{n=1}^{\infty} |\epsilon_n - \epsilon_n^{'}| \frac{1}{2^n}$

[2]$\mu(\Omega) = 1$ e dados $F_n \subseteq \mathbb{N}$ com n elementos e $E_n = \{(\epsilon_n)_n : \epsilon_j = x_j \ \forall \ j \in F_n\}$, com $x_j \in \{\pm 1\}$, $\mu(E_n) = \frac{1}{2^n}$

isto é, $\overline{B}$ é fracamente limitado. Então, $f(\Omega)$ é fracamente limitada e, portanto, limitada. Como a medida $\mu(\Omega)$ é finita, então f é Bochner integrável.

Afirmação: $\int_{E_n} f \, d\mu = \frac{y_n}{2}$ para $E_n = \{\epsilon \in \Omega : \epsilon_n = 1\}$.

Dados $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k \in \{-1, 1\}$, seja $\Omega_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_k} = \{x \in \Omega : x_1 = \epsilon_1, \cdots, x_k = \epsilon_k\}$. Note que $\mu(\Omega_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_k}) = \frac{1}{2^k}$ e $\Omega = \dot{\bigcup\limits_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_k}} \Omega_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_k}$. Então, para todo $x^* \in X^*$,

$$x^* \int_{E_n} f \, d\mu = \int_{E_n} x^* \circ f \, d\mu = \lim_{k \to \infty} x^* \int_{E_n} f_k d\mu = \lim_{k \to \infty} x^* \sum_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_k} \int_{E_n \cap \Omega_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_k}} f_k d\mu =$$

$$\lim_{k \to \infty} x^* \sum_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_k} \left(\sum_{i=1}^{k} \epsilon_i y_i \right) \mu(E_n \cap \Omega_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_k}) = \lim_{k \to \infty} x^* \sum_{\epsilon_i : \epsilon_n = 1} \left(\sum_{i=1}^{k} \epsilon_i y_i \right) \mu(\Omega_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_k}) =$$

$$\lim_{k \to \infty} x^* \left(2^{k-1} y_n \frac{1}{2^k} \right) = x^* \left(\frac{y_n}{2} \right).$$

A seqüência $\{y_n\}_n$ converge fracamente para zero e pertence ao conjunto $\left\{ 2 \int_E f \, d\mu : E \in \Sigma \right\}$, que é relativamente compacto pelo Lema 2.10. Segue que existe uma subseqüência $\{y_{n_k}\}_k$ convergente para zero em norma em $\overline{\left\{ 2 \int_E f \, d\mu : E \in \Sigma \right\}}$, mas isso contradiz o fato de que $\|y_n\| \geq \epsilon$ para todo n.

$\square$

Capítulo 3

Integrais de Pettis e Dunford

Como vimos no primeiro capítulo, a integral de Bochner está definida apenas para funções fortemente mensuráveis, e além disso, se a sua norma não for integrável, não podemos falar na integral de Bochner desta função.

Agora, vamos definir para funções fracamente mensuráveis mais duas integrais.

Lema 3.1 (Dunford) *Suponha que $f : S \longrightarrow X$ é uma função fracamente mensurável e que $x^* \circ f$ é integrável para cada $x^* \in X^*$. Então, para cada $E \in \Sigma$, existe $x_E^{**} \in X^{**}$ satisfazendo*

$$x_E^{**}(x^*) = \int_E x^* \circ f \; d\mu,$$

para todo $x^* \in X^*$.

Prova. Seja $E \in \Sigma$. Defina $T : X^* \longrightarrow L_1(E)$ [1] por $T(x^*) = x^* \circ (\chi_E f)$. Então, T é fechado. De fato, sejam $\{x_n^*\}_n$ uma seqüência em X^* tal que $x_n^* \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ em X^* e $T(x_n^*) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$, com $g \in L_1(E)$. Então, existe uma subseqüência $\{T(x_{n_k}^*) = x_{n_k}^* \circ (\chi_E f)\}_k$ tal que $T(x_{n_k}^*) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} g$ q.s. ([1], pg 58, teorema IV.9). Como $x_n^* \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*$, então $x_n^* \circ (\chi_E f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^* \circ (\chi_E f)$ pontualmente. Logo, $g = x^* \circ (\chi_E f) = T(x^*)$.

[1] $L_1(S) = \left\{ \phi : S \longrightarrow \mathbb{R} : \ \phi \text{ mensurável }, \int_S |\phi| \, d\mu < \infty \right\}$

Pelo teorema do gráfico fechado, T é contínuo. Então,

$$\|x^*(\chi_E f)\|_{L_1(E)} = \left|\int_E x^*(f)d\mu\right| \leq \|T\|\|x^*\|.$$

Portanto, dado $E \in \Sigma$, é fácil ver que a função $X^* \ni x^* \longmapsto \int_E x^*(f)d\mu \in \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, isto é, define $x_E^{**} \in X^{**}$.

$\square$

Com a ajuda deste lema, podemos definir a integral de Dunford.

Definição 3.2 *Se $f : S \longrightarrow X$ é uma função fracamente mensurável tal que $x^* \circ f$ é integrável para todo $x^* \in X^*$, dizemos que f é Dunford integrável. A integral de Dunford de f sobre $E \in \Sigma$ é definida pelo elemento $x_E^{**} \in X^{**}$ tal que $x_E^{**}(x^*) = \int_E x^* \circ f\ d\mu$ para todo $x^* \in X^*$. Escrevemos (D)-$\int_E f\ d\mu = x_E^{**}$.*

Definição 3.3 *Seja $f : S \longrightarrow X$ uma função fracamente mensurável tal que $x^* \circ f$ é integrável para todo $x^* \in X^*$. Dizemos que f é Pettis integrável se, para cada $E \in \Sigma$, existe um $y \in X$ tal que $x^*(y) = \int_E x^* \circ f\ d\mu$ para todo $x^* \in X^*$, e a integral de Pettis de f sobre $E \in \Sigma$ é denotada por (P)-$\int_E f\ d\mu = y$.*

Notemos que, pelo Corolário 1.11, toda função Bochner integrável é Pettis integrável e que as duas integrais coincidem.

Podemos ainda definir uma função Pettis integrável como sendo uma função Dunford integrável tal que a integral de Dunford da função pertença a X e neste caso, a integral de Pettis é a própria integral de Dunford.

Como vimos, toda função Pettis integrável é Dunford integrável, mas a recíproca não é verdadeira. Vamos então dar um exemplo de uma função Dunford integrável que não é Pettis integrável.

Exemplo 2 : Defina $f : [0,1] \longrightarrow c_0$ por

$$f(t) = (\chi_{(0,1]}(t), 2\chi_{(0,\frac{1}{2}]}(t), \cdots, n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}(t), \cdots)$$

para $t \in [0,1]$. Se $x^* = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots) \in c_0^* = l_1$, então $x^* \circ f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n \chi_{(0,\frac{1}{n}]}$ é integrável. De fato,

$$\int_{[0,1]} |x^* \circ f(s)| d\mu(s) = \int_{[0,1]} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n \chi_{(0,\frac{1}{n}]}(s) \right| d\mu(s) \leq \int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n n \chi_{(0,\frac{1}{n}]}(s)| d\mu(s) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} |\alpha_n n \chi_{(0,\frac{1}{n}]}(s)| d\mu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$$

(a penúltima igualdade pode ser encontrada em [7], pg 320, teorema 11.30). Portanto, f é Dunford integrável. Vamos agora calcular a sua integral. Primeiro vamos mostrar que dada $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots)$, então para todo E mensurável em $[0,1]$, (D)-$\int_E f \, d\mu = \left(\int_E f_1 d\mu, \int_E f_2 d\mu, \cdots \right)$.

Sejam $e_n^* = (0, \cdots, \underbrace{1}_{n}, 0, \cdots) \in l_1$ e (D)-$\int_E f \, d\mu = (a_1, a_2, \cdots) \in l_\infty$. Então

$$\left(\text{(D)-} \int_E f \, d\mu \right)(x^*) = \int_E x^* \circ f d\mu \Longrightarrow$$

$$a_n = \left(\text{(D)-} \int_E f \, d\mu \right)(e_n^*) = \int_E e_n^* \circ f \, d\mu.$$

Como $e_n^* \circ f = f_n$, então $\int_E f_n d\mu = a_n$.

Então, (D)-$\int_{[0,1]} f \, d\mu = (1, 1, 1, \cdots)$ que pertence a $l_\infty \setminus c_0$.

Vamos agora apresentar alguns resultados para estas funções.

Lema 3.4 *Se uma medida $\upsilon : \Sigma \longrightarrow X$ é fracamente σ-aditiva, então υ é σ-aditiva.*

Prova. Seja $\{E_n\}_n$ uma seqüência de conjuntos em Σ disjuntos dois a dois. Então, para todo $x^* \in X^*$

$$x^* \left(\upsilon \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^* \Big(\upsilon(E_n) \Big).$$

Então $\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon(E_n)$ é uma série fracamente convergente e, para toda seqüência $\{k_n\}_n$ de inteiros positivos, $\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon(E_{k_n})$ também é fracamente convergente pelo mesmo argumento. Pelo Teorema de Orlicz-Pettis 2.11, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon(E_n)$ converge. Portanto,

$$\upsilon \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon(E_n),$$

ou seja, υ é σ-aditiva.

$\square$

Teorema 3.5 (Pettis) *Se $f : S \longrightarrow X$ é Pettis integrável, então $F : \Sigma \longrightarrow X$ dada por $F(E) =$ (P)-$\int_E f\, d\mu$ é uma medida σ-aditiva.*

Prova. Seja $\{E_n\}_n$ uma seqüência de conjuntos mensuráveis em S disjuntos dois a dois. Então,

$$x^*\left(\text{(P)-}\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f\, d\mu\right) = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} x^*(f) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} x^*(f) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x^*\left(\text{(P)-}\int_{E_n} f\, d\mu\right).$$

Portanto, F é fracamente σ-aditiva. Pelo lema (3.4), F é σ-aditiva.

$\square$

Para uma função Dunford integrável, pode não valer a σ-aditividade da medida F. Vamos ver um exemplo disto.

Exemplo 3 : Seja $f : [0,1] \longrightarrow c_0$ a função definida no Exemplo 2. Como já mostramos, para todo $E \in \Sigma$, (D)-$\int_E f\, d\mu = \left(\int_E f_1 d\mu, \int_E f_2 d\mu, \cdots\right)$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{(D)-}\int_{(0,\frac{1}{n}]} f\, d\mu = \left(\int_{(0,\frac{1}{n}]} f_1 d\mu, \cdots, \int_{(0,\frac{1}{n}]} f_n\, d\mu, \cdots\right) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}, \frac{n+1}{n+1}, \cdots\right).$$

Portanto, $\left\|\text{(D)-}\int_{(0,\frac{1}{n}]} f\, d\mu\right\|_{l_\infty} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $E_n = (0, \frac{1}{n}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $F : \Sigma \longrightarrow X^{**}$ dada por $F(E) =$ (D)-$\int_E f\, d\mu$ é σ-aditiva. Como $E_{n+1} \subseteq E_n$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, então $F(E_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, mas isso contradiz o fato de que $\left\|\text{(D)-}\int_{(0,\frac{1}{n}]} f\, d\mu\right\|_{l_\infty} = 1$.

Corolário 3.6 *Seja (S, Σ, μ) um espaço de medida σ-finito, ou seja, existe uma seqüência $\{S_n\}_n$ de conjuntos mensuráveis com $\mu(S_n) < \infty$ para todo n, tal que $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Seja f uma função fortemente mensurável e Dunford integrável. Então f é Pettis integrável se e somente se $F : \Sigma \longrightarrow X^{**}$ dada por $F(E) =$ (D)-$\int_E f\, d\mu$ é σ-aditiva.*

Prova. Se f é Pettis integrável, então (P)-$\int_E f\ d\mu =$ (D)-$\int_E f\ d\mu$ para todo $E \in \Sigma$. Pelo Teorema 3.5, F é σ-aditiva.

Para provarmos a recíproca, escolha uma seqüência $\{E_n\}_n$ crescente em Σ tal que $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e cada $\chi_{E_n} f$ é limitada. Podemos escolher para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \{s \in S : \|f(s)\| \leq n\}$. De fato E_n é mensurável, pois f é fortemente mensurável e como demonstramos no Teorema de Pettis 1.5, $\|f(s)\|$ é mensurável.

Seja $\{S_n\}_n$ uma seqüência crescente em Σ, com $\mu(S_n) < \infty$, tal que $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Então, $S = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cap S_n)$. De fato, se $s \in S$, então existe um n tal que $s \in S_n$ e existe um m tal que $s \in E_m$. Tomando $k =$max$\{n, m\}$, então $s \in S_k$ e $s \in E_k$ e, portanto, $s \in E_k \cap S_k$. Chamemos $L_n := E_n \cap S_n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Se $E \in \Sigma$, então a integral de Bochner $\int_{E \cap L_n} f\ d\mu$ existe para cada n. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\int_{E \cap L_n} \|f(s)\| d\mu(s) \leq \int_{L_n} \|f(s)\| d\mu(s) \leq n\mu(L_n) < \infty.$$

Como $\int_{E \cap L_n} x^* \circ f\ d\mu = x^* \int_{E \cap L_n} f\ d\mu$ para todo $x^* \in X^*$, então $\int_{E \cap L_n} f\ d\mu =$ (P)-$\int_{E \cap L_n} f\ d\mu$ e, portanto, as integrais de Dunford, Pettis e Bochner coincidem.

Como F é σ-aditiva, então $\lim_{n\to\infty}$ (D)-$\int_{E \cap L_n} f\ d\mu$ existe em X. Para todo $x^* \in X^*$, $\lim_{n\to\infty} \int_{E \cap L_n} x^* \circ f\ d\mu = \int_E x^* \circ f\ d\mu$. Então, (D)-$\int_E f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E \cap L_n} f\ d\mu \in X$ para todo $E \in \Sigma$. Portanto, f é Pettis integrável.

□

Capítulo 4

Integração Incondicional

Neste último capítulo, vamos apresentar uma nova teoria de integração. Baseado no artigo *Unconditional integrability for dual actions*, a teoria de integração incondicional se assemelha a teoria de convergência incondicional vista em séries. Devemos então definir um net, agora trabalhando com integrais e não mais com somatórios, e discutir a sua convergência.

Depois deste estudo, vamos demonstrar a equivalência entre esta teoria e a integral de Pettis, vista no Capítulo 3.

Definição 4.1 *Dado um espaço de medida (S, Σ, μ), dizemos que um subconjunto $\mathcal{L} \subseteq \Sigma$ é uma família local se*

i. $\mathcal{L}$ é fechado por uniões finitas,

ii. dado $L \in \mathcal{L}$ e B um subconjunto mensurável de L, então $B \in \mathcal{L}$.

Além disso, chamamos de conjunto local a todo conjunto que pertence a uma família local.

Dado o espaço (S, Σ, μ), fixemos uma família local $\mathcal{L}$.

Definição 4.2 *Dizemos que um espaço de medida (S, Σ, μ) com uma família local $\mathcal{L}$ fixada é σ-local se existe uma seqüência $\{L_n\}_n$ de conjuntos locais tal que $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$. Denotemos este espaço por $(S, \mathcal{L})$.*

Definição 4.3 *Uma função $f : S \longrightarrow X$ é dita localmente integrável (com respeito a $\mathcal{L}$) se f é Bochner integrável sobre todo conjunto local.*

Podemos perceber que uma família local $\mathcal{L}$ é um conjunto dirigido, ordenado pela inclusão de conjuntos. Então, dada uma função f localmente integrável, podemos formar o net $\left\{\int_L f \, d\mu\right\}_{L\in\mathcal{L}}$.

Definição 4.4 *Uma função $f : S \longrightarrow X$ localmente integrável é dita incondicionalmente integrável (com respeito a $\mathcal{L}$) se o net acima converge na topologia da norma em X. Neste caso, escrevemos*

$$(U)\int_S f \, d\mu := \lim_{L\in\mathcal{L}} \int_L f \, d\mu.$$

Proposição 4.5 (Condição de Cauchy) *A função $f : S \longrightarrow X$ é incondicionalmente integrável se e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um L_0 em $\mathcal{L}$ tal que, dado qualquer D em $\mathcal{L}$ disjunto de L_0, tem-se $\left\|\int_D f \, d\mu\right\| < \epsilon$.*

A prova desta proposição é análoga a prova da Condição de Cauchy vista no Capítulo 2.

Proposição 4.6 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado. Se $f : S \longrightarrow X$ é incondicionalmente integrável, então $T\circ f$ é incondicionalmente integrável e*

$$(U)\int_S T\circ f \, d\mu = T\ (U)\int_S f \, d\mu.$$

Prova. Seja f uma função incondicionalmente integrável. Então, o net $\left\{\int_L f \, d\mu\right\}_{L\in\mathcal{L}}$ converge. Como T é contínuo, o net $\left\{\int_L T\circ f \, d\mu\right\}_{L\in\mathcal{L}}$ também converge. Portanto, $T\circ f$ é incondicionalmente integrável e

$$(U)\int_S T\circ f \, d\mu = \lim_{L\in\mathcal{L}} \int_L T\circ f \, d\mu = \lim_{L\in\mathcal{L}} T\int_L f \, d\mu = T\ \lim_{L\in\mathcal{L}} \int_L f \, d\mu = T\ (U)\int_S f \, d\mu.$$

$\square$

Definição 4.7 *Dizemos que uma função $f : S \longrightarrow X$ localmente integrável é pseudo integrável se*

$$\sup_{L \in \mathcal{L}} \left\| \int_L f \, d\mu \right\| < \infty.$$

Notemos que toda função f incondicionalmente integrável é pseudo integrável. De fato, sejam $\epsilon = 1$ e $(U)\displaystyle\int_S f \, d\mu =: I$. Então existe $L_0 \in \mathcal{L}$ tal que, para todo $L \supseteq L_0$ em $\mathcal{L}$, $\left\| \displaystyle\int_L f \, d\mu - I \right\| < 1$. Seja $E \in \mathcal{L}$. Então,

$$\left\| \int_E f \, d\mu \right\| = \left\| \int_E f \, d\mu + \int_{L_0 \setminus E} f \, d\mu - \int_{L_0 \setminus E} f \, d\mu + I - I \right\| \leq$$

$$\left\| \int_{L_0 \cup E} f \, d\mu - I \right\| + \left\| \int_{L_0 \setminus E} f \, d\mu \right\| + \|I\| < 1 + \int_{L_0} \|f(s)\| d\mu(s) + \|I\| < \infty$$

$$\Longrightarrow \sup_{E \in \mathcal{L}} \left\| \int_E f \, d\mu \right\| < \infty.$$

A recíproca não é verdadeira. Vamos então dar o seguinte exemplo.

Exemplo 4 : Sejam $X = c_0$ e $(\mathbb{N}, \Sigma, \mu)$ o espaço de medida com μ a medida de contagem em $\mathbb{N}$ e $\mathcal{L} = \{E \subseteq \mathbb{N} : E \text{ finito}\}$. Considere a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ definida por $f(n) = e_n$[1]. Seja $E \in \mathcal{L}$,

$$\left\| \int_E f \, d\mu \right\| = \left\| \sum_{n \in E} f(n) \right\| = \left\| \sum_{n \in E} e_n \right\| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \sup_{E \in \mathcal{L}} \left\| \int_E f \, d\mu \right\| < \infty.$$

Portanto f é pseudo integrável.

Suponha que f é incondicionalmente integrável. Então vale a condição de Cauchy para f. Dado $\epsilon > 0$, existe $E_0 \in \mathcal{L}$ tal que para todo $E \in \mathcal{L}$ disjunto de E_0,

$$\left\| \int_E f \, d\mu \right\| = \left\| \sum_{n \in E} e_n \right\| < \epsilon.$$

Mas, para $E \neq \emptyset$, $\left\| \displaystyle\sum_{n \in E} e_n \right\| = 1$. Então, f não é incondicionalmente integrável.

No caso de funções pseudo integráveis com valores escalares temos o seguinte lema.

Lema 4.8 *Se $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ é pseudo integrável, então*

$$\sup_{L \in \mathcal{L}} \int_L |f(s)| d\mu(s) < \infty.$$

[1] vetor de ordem n da base canônica

Prova. Seja $M = \sup_{L\in\mathcal{L}}\left|\int_L f\, d\mu\right|$. Dado $L \in \mathcal{L}$, sejam $L_+ = \{s \in L : f(s) \geq 0\}$ e $L_- = \{s \in L : f(s) < 0\}$. Como f é localmente integrável, em particular f é mensurável quando restrita a conjuntos locais. Daí, tanto L_+ quanto L_- são conjuntos mensuráveis contidos em L e, portanto, são conjuntos locais. Então,

$$\int_L |f(s)|d\mu(s) = \int_{L_+} f\, d\mu - \int_{L_-} f\, d\mu = \left|\int_{L_+} f\, d\mu\right| + \left|\int_{L_-} f\, d\mu\right| \leq 2M.$$

Portanto, $\sup_{L\in\mathcal{L}} \int_L |f(s)|d\mu(s) < \infty$.

□

Ainda para funções escalares, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.9 *Sejam $(S, \mathcal{L})$ um espaço σ-local e $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. São equivalentes as seguintes afirmações:*

a. f é pseudo integrável;

b. f é incondicionalmente integrável;

c. f é integrável.[2]

Neste caso, $(U)\int_S f\, d\mu = \int_S f\, d\mu$.

Prova. Primeiramente vamos mostrar que a afirmação a implica c. Seja $\{E_n\}_n$ uma seqüência crescente de conjuntos locais tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = S$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\int_{E_n} |f(s)|d\mu(s) < \infty$, pois f é pseudo integrável. Defina para cada n, $y_n := |\chi_{E_n} f|$. Então, $y_n \leq y_{n+1}$ e

$$\int_S y_n d\mu = \int_S |\chi_{E_n}(s)f(s)|d\mu(s) = \int_{E_n} |f(s)|d\mu(s) < \infty.$$

Além disso, para cada $s \in S$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $s \in E_k$ e, portanto, $y_n(s) = |\chi_{E_n} f(s)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |f(s)|$. Pelo Teorema da Convergência Monótona ([7], pg 318, teorema 11.28), $\int_S y_n d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_S |f(s)|d\mu(s)$. Como $\sup_{E\in\mathcal{L}} \int_E |f(s)|d\mu(s) < \infty$, então

$$\int_S |f(s)|d\mu(s) < \infty.$$

[2] Enfatizando aqui que ao usarmos a palavra integrável, estamos nos referindo a Lebesgue integrável.

Vamos agora demonstrar que c implica b. Seja f integrável. Como f é uma função real, existe uma seqüência de funções simples que converge pontualmente para f([7], pg 313, teorema 10.20). Então, f é uma função fortemente mensurável. Pelo Teorema de Bochner, f é Bochner integrável e, portanto, f é incondicionalmente integrável.

A demonstração de que b implica a já foi feita anteriormente. Basta mostrarmos então que $(U)\int_S f\ d\mu = \int_S f\ d\mu$. Dada uma seqüência $\{E_n\}_n$ como acima, notemos que $\int_S f\ d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f\ d\mu$. Dado $\epsilon > 0$, tome n tal que

$$\left|\int_S f\ d\mu - \int_{E_n} f\ d\mu\right| \leq \int_{S\setminus E_n} |f(s)|d\mu(s) < \epsilon.$$

Seja $E \in \mathcal{L}$ tal que $E \supseteq E_n$. Então,

$$\left|\int_S f\ d\mu - \int_{E} f\ d\mu\right| \leq \int_{S\setminus E} |f(s)|d\mu(s) \leq \int_{S\setminus E_n} |f(s)|d\mu(s) < \epsilon.$$

Portanto

$$\int_S f\ d\mu = \lim_{E\in\mathcal{L}}\int_E f\ d\mu = (U)\int_S f\ d\mu.$$

$\square$

A partir da próxima proposição, será citado o espaço $L^\infty(S)$, que é o espaço das funções mensuráveis e limitadas em S com valores escalares, equipado com a norma do supremo essencial[3].

Proposição 4.10 *Seja $f : S \longrightarrow X$ uma função pseudo integrável. Então existe uma constante positiva N tal que, para todo ϕ em $L^\infty(S)$ e para todo L em $\mathcal{L}$,*

$$\left\|\int_L \phi f\ d\mu\right\| \leq N\|\phi\|.$$

Prova. Seja x^* um funcional linear contínuo em X. Então $x^* \circ f$ é uma função pseudo integrável em S com valores escalares. De fato, como f é pseudo integrável, então $\sup_{L\in\mathcal{L}}\left\|\int_L f\ d\mu\right\| < \infty$.

[3] $\|f\| = \inf_{\substack{E\in\Sigma \\ \mu(E)=0}} \sup_{s\notin E} |f(s)|$

$$\left|\int_L x^* \circ f \ d\mu\right| = \left|x^* \int_L f \ d\mu\right| \leq \|x^*\| \left\|\int_L f \ d\mu\right\| \Longrightarrow$$

$$\sup_{L\in\mathcal{L}} \left|\int_L x^* \circ f \ d\mu\right| \leq \sup_{L\in\mathcal{L}} \|x^*\| \left\|\int_L f \ d\mu\right\| = \|x^*\| \sup_{L\in\mathcal{L}} \left\|\int_L f \ d\mu\right\| < \infty.$$

Seja L um conjunto local e tome $\phi \in L^\infty(S)$ com $\|\phi\| \leq 1$. Então, ϕf é Bochner integrável sobre L, pois

$$\int_L \|\phi(s)f(s)\| d\mu(s) = \int_L \|\phi(s)\|\|f(s)\| d\mu(s) \leq \|\phi\| \int_L \|f(s)\| d\mu(s) \leq \int_L \|f(s)\| d\mu(s) < \infty.$$

Pelo Lema 4.8, $\sup_{L\in\mathcal{L}} \int_L |x^*(f(s))| d\mu(s) < \infty$. Então,

$$\left|x^* \int_L \phi f \ d\mu\right| = \left|\int_L x^* \circ (\phi f) d\mu\right| \leq \int_L |x^*(\phi(s)f(s))| d\mu(s) = \int_L |\phi(s)||x^*(f(s))| d\mu(s) \leq$$

$$\|\phi\| \int_L |x^*(f(s))| d\mu(s) \leq \sup_{L\in\mathcal{L}} \int_L |x^*(f(s))| d\mu(s) < \infty.$$

Então, o conjunto $\left\{\int_L \phi f \ d\mu : L \in \mathcal{L}, \phi \in L^\infty(S), \|\phi\| \leq 1\right\}$ é fracamente limitado e, portanto, limitado em norma.

Sejam $\phi \in L^\infty(S)$ qualquer e N uma constante positiva que limita o conjunto acima. Então,

$$\left\|\int_L \phi f \ d\mu\right\| = \|\phi\| \left\|\int_L \frac{\phi}{\|\phi\|} f \ d\mu\right\| \leq \|\phi\| N,$$

para todo $L \in \mathcal{L}$.

□

Proposição 4.11 *Se f é incondicionalmente integrável e ϕ está em $L^\infty(S)$, então ϕf é também incondicionalmente integrável.*

Prova. Assuma inicialmente que ϕ é a função característica de um conjunto mensurável B. Dado $\epsilon > 0$, existe $L_0 \in \mathcal{L}$ tal que para cada $D \in \mathcal{L}$ disjunto de L_0, $\left\|\int_D f \ d\mu\right\| < \epsilon$. Dado $D \in \mathcal{L}$ disjunto de L_0,

$$\left\|\int_D \phi f \ d\mu\right\| = \left\|\int_{D\cap B} f \ d\mu\right\| < \epsilon,$$

o que quer dizer que a Condição de Cauchy vale para ϕf. Portanto, ϕf é incondicionalmente integrável.

Se agora assumirmos que ϕ é uma função simples, podemos escrevê-la como uma combinação linear finita de funções características e, portanto, ϕf será incondicionalmente integrável.

Seja ϕ qualquer. Seja M tal que $\left\| \int_L \psi f \, d\mu \right\| \leq M\|\psi\|$, $\psi \in L^\infty(S)$ e $L \in \mathcal{L}$. Dado $\epsilon > 0$, escolha uma função simples $\phi_0 \in L^\infty(S)$ satisfazendo $\|\phi - \phi_0\| < \frac{\epsilon}{2M}$. Aplicando a Condição de Cauchy para $\phi_0 f$, tome um conjunto local L_0 tal que para todo conjunto local D disjunto de L_0, $\left\| \int_D \phi_0 f \, d\mu \right\| < \frac{\epsilon}{2}$. Então para todo $D \in \mathcal{L}$ disjunto de L_0,

$$\left\| \int_D \phi f \, d\mu \right\| \leq \left\| \int_D (\phi - \phi_0) f \, d\mu \right\| + \left\| \int_D \phi_0 f \, d\mu \right\| \leq M\|\phi - \phi_0\| + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto mostra que a condição de Cauchy vale para ϕf e, então, ϕf é incondicionalmente integrável.

□

Lema 4.12 *Se f é incondicionalmente integrável, então, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um conjunto local L_0 tal que, para todo conjunto local D disjunto de L_0,*

$$\left\| \int_D \phi f \, d\mu \right\| \leq \epsilon \|\phi\|,$$

para $\phi \in L^\infty(S)$.

Prova. Suponha que exista $\epsilon > 0$ tal que, para qualquer conjunto local L_0 existam um conjunto local D disjunto de L_0 e um $\phi \in L^\infty(S)$ tal que

$$\left\| \int_D \phi f \, d\mu \right\| > \epsilon \|\phi\|.$$

Dado $L_0 \in \mathcal{L}$, sejam D_1 um conjunto local e $\phi_1 \in L^\infty(S)$ um vetor unitário tal que $\left\| \int_{D_1} \phi_1 f \, d\mu \right\| > \epsilon$. Agora, tome um conjunto local D_2, disjunto de D_1, e um vetor unitário $\phi_2 \in L^\infty(S)$ tal que $\left\| \int_{D_2} \phi_2 f \, d\mu \right\| > \epsilon$. Continuando esse processo, obtemos uma seqüência de conjuntos locais $\{D_n\}_n$, disjuntos dois a dois, e uma seqüência $\{\phi_n\}_n$ de vetores unitários em $L^\infty(S)$ com $\left\|\int_{D_n} \phi_n f \; d\mu\right\| > \epsilon$.

Agora, defina $\phi := \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \chi_{D_n}$, com χ_{D_n} a função característica de D_n. É claro que ϕ está em $L^\infty(S)$. Então pela Proposição 4.11, ϕf é incondicionalmente integrável e, portanto, existe um conjunto local L_0 tal que $\left\|\int_D \phi f \; d\mu\right\| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo conjunto local D disjunto de L_0.

Então para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\epsilon < \left\|\int_{D_n} \phi f \; d\mu\right\| \leq \left\|\int_{D_n \cap L_0} \phi f \; d\mu\right\| + \left\|\int_{D_n \setminus L_0} \phi f \; d\mu\right\| \leq \int_{D_n \cap L_0} \|\phi(s) f(s)\| d\mu(s) + \frac{\epsilon}{2} \leq$$

$$\int_{D_n \cap L_0} \|\phi\| \|f(s)\| d\mu(s) + \frac{\epsilon}{2} \leq \int_{D_n \cap L_0} \|f(s)\| d\mu(s) + \frac{\epsilon}{2},$$

o que implica

$$\int_{D_n \cap L_0} \|f(s)\| d\mu(s) > \frac{\epsilon}{2}, \tag{4.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f é localmente integrável e, portanto Bochner integrável sobre L_0, temos que $\int_{L_0} \|f(s)\| d\mu(s) < \infty$. Então, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{D_n \cap L_0} \|f(s)\| d\mu(s) \leq \int_{L_0} \|f(s)\| d\mu(s) < \infty \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{D_n \cap L_0} \|f(s)\| d\mu(s) < \infty,$$

o que contradiz a desigualdade (4.1).

□

Seja $\mathcal{U}(S, X)$ o espaço das funções incondicionalmente integráveis de S em X. Observe que cada função f em $\mathcal{U}(S, X)$ define uma transformação linear limitada

$$T_f : \phi \;\in\; L^\infty(S) \mapsto \;(U) \int_S \phi f \; d\mu \;\in\; X.$$

Podemos notar que a limitação de T_f é conseqüência da Proposição 4.10.

Por $(U)\displaystyle\int_S \phi f\ d\mu = \lim_{L\in\mathcal{L}}\int_L \phi f\ d\mu$, podemos ver que $\|T_f\|$ é dada por

$$\|T_f\| = \sup\left\{\left\|\int_L \phi f\ d\mu\right\| : L\in\mathcal{L}, \|\phi\|\leq 1\right\}.$$

Assim, podemos equipar $\mathcal{U}(S,X)$ com uma norma, dada por $\|f\| = \|T_f\|$ para $f\in\mathcal{U}(S,X)$. Como esta é uma semi-norma, faz-se o quociente do espaço $\mathcal{U}(S,X)$ pelo conjunto das funções de norma zero.

Proposição 4.13 *O subconjunto de $\mathcal{U}(S,X)$ formado por funções localmente suportadas, isto é, que se anulam fora de algum conjunto local, é denso em $\mathcal{U}(S,X)$.*

Prova. Seja $f\in\mathcal{U}(S,X)$. Para $\epsilon > 0$, seja L_0 como no Lema 4.12. Então, se f_0 denota o produto de f pela função característica em L_0, temos que para todo $\phi\in L^\infty(S)$ e para todos conjuntos locais L,

$$\left\|\int_L \phi(f-f_0)d\mu\right\| = \left\|\int_{L\setminus L_0}\phi f\ d\mu\right\| \leq \epsilon\|\phi\|.$$

Para todo $\phi\in L^\infty(S)$ tal que $\|\phi\|\leq 1$, $\displaystyle\left\|\int_L \phi(f-f_0)d\mu\right\|\leq\epsilon$. Então,

$$\|f-f_0\| = \sup_{L\in\mathcal{L}}\left\|\int_L \phi(f-f_0)d\mu\right\|\leq\epsilon.$$

□

Com a demonstração do teorema a seguir , alcançamos o nosso objetivo.

Teorema 4.14 *Sejam X espaço de Banach, $(S,\mathcal{L})$ um espaço σ-local e $f: S\longrightarrow X$ uma função localmente integrável. Então, f é incondicionalmente integrável se e somente se f é Pettis integrável.*

Prova. Suponha que f é incondicionalmente integrável. Dado $x^*\in X^*$, temos que $x^*\displaystyle\int_E f\ d\mu = \int_E x^*\circ f\ d\mu$ para todo $E\in\mathcal{L}$. Como $\displaystyle\left\{\int_E f\ d\mu\right\}_{E\in\mathcal{L}}$ converge e x^* é contínuo, então $\displaystyle\left\{\int_E x^*\circ f\ d\mu\right\}_{E\in\mathcal{L}}$ também converge. Então $x^*\circ f$ é incondicionalmente integrável e, portanto, pelo Teorema 4.9,

$$(U)\int_S |x^*(f(s))|d\mu(s) = \int_S |x^*(f(s))|d\mu(s) < \infty.$$

Seja M um subconjunto mensurável de S. Então, a sua função característica χ_M pertence a $L^\infty(S)$ e pela Proposição 4.11, $\chi_M f$ é incondicionalmente integrável. Denote $(U)\displaystyle\int_S \chi_M f\ d\mu =: x_M$. Dado $x^* \in X^*$,

$$\int_M x^* \circ f\ d\mu = \int_S x^* \circ (\chi_M f) d\mu = \lim_{E\in\mathcal{L}} \int_E x^* \circ (\chi_M f) d\mu = x^* \lim_{E\in\mathcal{L}} \int_E \chi_M f\ d\mu = x^*(x_M).$$

Portanto, f é Pettis integrável.

Para provarmos a recíproca, suponha que a condição de Cauchy não valha para o net $\left\{\displaystyle\int_E f\ d\mu\right\}_{E\in\mathcal{L}}$. Então existe um $\epsilon > 0$ tal que para todo $E_0 \in \mathcal{L}$ existe $E \in \mathcal{L}$ disjunto de E_0 tal que $\left\|\displaystyle\int_E f\ d\mu\right\| \geq \epsilon$. Dado $E_0 \in \mathcal{L}$, existe $E_1 \in \mathcal{L}$ disjunto de E_0 tal que $\left\|\displaystyle\int_{E_1} f\ d\mu\right\| \geq \epsilon$. Agora, existe um $E_2 \in \mathcal{L}$ disjunto de E_1 tal que $\left\|\displaystyle\int_{E_2} f\ d\mu\right\| \geq \epsilon$. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $E_n \in \mathcal{L}$ disjunto de $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k$ tal que $\left\|\displaystyle\int_{E_n} f\ d\mu\right\| \geq \epsilon$. Então obtemos uma seqüência $\{E_n\}_n$ de conjuntos locais disjuntos dois a dois tal que $\left\|\displaystyle\int_{E_n} f\ d\mu\right\| \geq \epsilon$ para todo n.

Seja $M = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Então, existe $x_M \in X$ tal que

$$x^*(x_M) = \int_M x^* \circ f\ d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} x^* \circ f\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} x^* \circ f\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x^* \int_{E_n} f\ d\mu$$

para todo $x^* \in X^*$, o que implica que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\ d\mu$ converge fracamente. Além disso, para qualquer seqüência $\{k_n\}_n$ de inteiros positivos, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_{k_n}} f\ d\mu$ também converge fracamente, pelo mesmo argumento acima. Pelo Teorema de Orlicz-Pettis 2.11, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\ d\mu$ converge em norma. Portanto $\left\|\displaystyle\int_{E_n} f\ d\mu\right\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, o que é um absurdo. Portanto o net $\left\{\displaystyle\int_E f\ d\mu\right\}_{E\in\mathcal{L}}$ converge em X.

□

Bibliografia

[1] Haïm Brezis. *Analyse Fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[2] J. Diestel and J.J. Uhl. *Vector Measures.* American Mathematical Society, New York, 1977.

[3] Joseph Diestel. *Sequences and series in Banach spaces.* Springer Verlag, New York, 1978.

[4] Ruy Exel. Unconditional integrability for dual actions. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 30:99–124, 1999.

[5] Edwin Hewitt and Karl Stromberg. *Real and Abstract Analysis.* Springer Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1965.

[6] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley, New York, 1978.

[7] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis 3ªEd.* Mc Grall Hill, New York, 1964.

[8] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* Mc Grall Hill, New York, 1966.

[9] Kosaku Yoshida. *Functional analysis, 5ªEd.* Springer Verlag, Berlin, 1978.