UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

JANICE PEREIRA LOPES

FRAGMENTAÇÕES E APROXIMAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E FÍSICA NO CONTEXTO ESCOLAR: PROBLEMATIZANDO O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FLORIANÓPOLIS
2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

FRAGMENTAÇÕES E APROXIMAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E FÍSICA NO CONTEXTO ESCOLAR: PROBLEMATIZANDO O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica, da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito parcial como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação Científica e Tecnológica.

JANICE PEREIRA LOPES

Orientador: Prof. Dr. José André Peres Angotti
Co-orientador: Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti

Florianópolis – SC
Maio - 2004

FOLHA DE APROVAÇÃO

AGRADECIMENTOS

À minha família, meus pais Gerson e Maria Betania, e irmãs pelo apoio e incentivo constantes, de longe ou de perto.

Ao Márcio e a Mariana, que sempre souberam estar ao meu lado, sofrendo ou vibrando comigo.

Aos alunos das escolas em que atuei antes de iniciar esta jornada, os quais foram fontes de inspiração para o trabalho.

Às escolas, aos seus professores e aos alunos envolvidos no trabalho. Que contribuíram cada um à sua maneira, para que ele fosse realizado.

Aos colegas de curso, pela amizade e troca de experiências.

A CAPES pelo apoio financeiro.

À secretária Sandra e aos professores do PPGECT pela disponibilidade e atenção permanentes.

Ao professor Dr. José André Peres Angotti, pela orientação, incentivo e confiança recebidos durante a realização desse trabalho, e pela presença determinante em momentos decisivos.

Ao professor Dr. Méricles Thadeu Moretti, pela co-orientação, apoio e estímulo recebidos.

Ao professor Dr. Saddo Ag Almouloud, que aceitou fazer parte da banca examinadora, pelas sugestões enriquecedoras.

À professora Dr. Adriana Mohr, que aceitou participar da banca examinadora, pelas valiosas contribuições.

Enfim, agradeço a todos que, de uma maneira ou de outra, colaboraram para a realização desse trabalho.

À minha filha, Mariana, por compreender minhas ausências, pela força e companheirismo constante.

Não se pode ensinar alguma coisa a alguém, pode-se apenas auxiliar a descobrir por si mesmo. (Galileu Galilei)

SUMÁRIO

CAPÍTULO 4 – O CONCEITO DE FUNÇÃO E A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD

CAPÍTULO 5 – APROXIMAÇÕES CONCEITUAIS: BUSCANDO ROMPER COM O ISOLAMENTO CONCEITUAL

CAPÍTULO 6 – UMA PROPOSTA DE COMO PROBLEMATIZAR O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM: O MÓDULO DE ATIVIDADES

RESUMO

O presente trabalho teve como preocupação central à investigação do processo de construção e compreensão do conceito de função afim, no contexto atual do ensino de Matemática, apontando suas fragilidades e possibilidades de superação, bem como sua ligação com os fenômenos naturais, estudados na Física. Também tivemos a preocupação de discutir, e identificar, as potencialidades oriundas das interações conceituais entre as dimensões do ensino e da aprendizagem de Matemática e Física por meio da construção do conceito de função afim. Para tanto, vinculamos nossa proposta a uma análise sistemática dos aspectos relativos à superação do cenário estabelecido no ensino atual. Nesse sentido, articulamos nossos objetivos a uma proposta alternativa para o ensino do conceito de função afim, através da abordagem conceitual e dos *conceitos unificadores.* Acreditamos que a associação desses elementos permite compreender o conceito de função afim, para além da Matemática, e proporciona aproximações entre o ensino desta com a disciplina de Física. Tais aproximações se efetivam na medida em que a construção de conhecimentos matemáticos, inerentes ao conceito de função afim, é vinculada a conceitos trabalhados no trato de fenômenos físicos, estudados na Física.

ABSTRACT

The present work had as central concern to the inquiry of the construction process and understanding of the concept of similar function, in the current context of the education of Mathematics, pointing its fragilities and possibilities of overcoming, as well as its linking with the natural phenomena, studied in the Physics. Also we had the concern to argue, and to identify, the deriving potentialities of the conceptual interactions between the dimensions of the education and the learning of Mathematics and Physics by means of the construction of the concept of similar function. For in such a way, we tie our proposal with a systematic analysis of the relative aspects to the overcoming of the scene established in current education. In this direction, we articulate our objectives to a proposal alternative for the education of the concept of similar function, through the conceptual boarding and of the unifying concepts. We believe that the association of these elements allows to understand the concept of similar function, for beyond the Mathematics, and provides approaches between the education of this with disciplines of Physics. Such approaches if accomplish in the measure where the construction of mathematical, inherent knowledge with the concept of similar function, is tied the concepts worked in the treatment of physical phenomena, studied in the Physics.

CAPÍTULO 1 – CONTEXTUALIZAÇÃO DA PESQUISA

1.1 - Apresentação

O contexto do ensino atual, sem distinções disciplinares, vive uma realidade repleta de contradições e polêmicas acerca da sua eficiência na formação de um sujeito autônomo e crítico ante a um desenvolvimento científico e tecnológico veemente.

Com relação ao ensino de Matemática, as preocupações são bastante similares. A busca por relações entre o conhecimento matemático e outras áreas do conhecimento, e por implicações deste, no âmbito social, político, econômico e cultural, tem incentivado a reflexão em torno da importância e dos objetivos desse conhecimento.

A Matemática ensinada hoje nas escolas ainda tem um extenso e exigente caminho a percorrer na retificação dos modelos disciplinares vigentes, em geral, pautados pela transmissão e recepção irrefletida de conhecimentos. Essa superação pressupõe a retomada da motivação dos alunos em aprender matemática. Pressupõe persuadir os alunos quanto ao papel fundamental não só da escola, mas, também, do conhecimento matemático. Necessita despertar para a importância do seu envolvimento na própria aprendizagem, por meio do estímulo e do desafio contínuo à sua criatividade.

Predispõe o resgate permanente do uso coerente da intuição, na formulação de conjecturas e inferências, como recurso para propiciar aos alunos o entendimento de situações diversificadas. Deve oportunizar o exercício da sua capacidade de interpretar a realidade e de agir crítica e conscientemente sobre ela.

Ao nos preocuparmos com a construção do conhecimento matemático, sobretudo do conceito de função afim, estamos cientes de ser esse o conjunto de condições necessárias para a constituição de uma plataforma que potencialize o desenvolvimento de estruturas que levem o aluno a aprender Matemática construtivamente, a partir da construção gradativa dos seus conceitos.

Conseqüentemente, a estruturação e a formalização, em particular da linguagem matemática, se realizarão de maneira gradual, atreladas ao aperfeiçoamento dos procedimentos lógicos dos raciocínios. A capacidade de resolver problemas está vinculada à necessidade de dar sentido ao processo de procura de soluções, sendo justificada pelo envolvimento e incorporação do aluno a esse processo.

Esse trabalho tem como pressuposto a necessidade, emergente, hoje, de que o processo de incorporação dos conhecimentos matemáticos esteja pautado pelo envolvimento na construção desses conhecimentos e pelo significado dessa construção. Destaca a importância da observação e da manipulação de situações diversificadas para dar à aprendizagem da Matemática um sentido, por tantas vezes atrofiado pela infinidade de fórmulas, definições e memorizações que caracterizam a aridez desse processo.

Sendo assim, delineamos fragilidades e possibilidades de superação dessa questão, encarando esta problemática como pertinente não só às condições metodológicas como às posturas pedagógicas assumidas no processo de ensino e de aprendizagem de Matemática.

É nessa perspectiva que desenvolvemos uma pesquisa que busca discutir a questão, particularmente no tocante à construção do conceito de função afim e suas potencialidades junto às interações conceituais com a disciplina de Física. A partir de conceitos inerentes a fenômenos físicos abordados nesta disciplina, tais como velocidade, distância percorrida, tempo, entre outros. Também localizamos nesta abordagem aspectos sociais envolvidos nestas discussões, disponibilizando a extrapolação dos contextos disciplinares.

Para tanto, encaminhamos possibilidades, teóricas e práticas, que subsidiem mudanças quer na postura do professor quer na prática docente por ele desencadeada, redimensionando a importância e o sentido da aprendizagem de Matemática.

Nesse sentido, a proposta foi pautada, inicialmente, por um exame bibliográfico, a fim de localizar pesquisas envolvendo a situação atual do ensino e da aprendizagem do conceito de função, e as propostas mais recentes desenvolvidas na tentativa de atenuar as deficiências deste processo no contexto escolar. Entre os trabalhos analisados, destacamos os de Trindade (1996), Pinheiro (1996), Campos (2000), Zuffi & Pacca (2002), Santos (2002), Campitelle & Campitelle (2003), Pelho (2003), Moura & Moretti (2003).

As considerações apresentadas nesse trabalho foram fundamentadas por esse mapeamento e pelos dados coletados durante o trabalho de campo que desenvolvemos com dois grupos distintos de alunos. Essa intervenção didática foi conduzida a partir do módulo de atividades proposto pela pesquisa, sendo que tais informações serviram de suporte para a análise dos resultados, positivos e negativos, observados com o desenvolvimento do mesmo.

Nosso objetivo principal foi investigar e identificar a potencialidade dos conceitos na estruturação do ensino e da aprendizagem de Matemática, em particular do conceito de função.

No capítulo 1, fazemos uma caracterização da situação atual do ensino e do cenário instaurado no contexto do ensino e da aprendizagem de Matemática, com o propósito de delinear a origem e a relevância da questão de pesquisa, referente à construção do conceito de função afim. Buscamos contextualizar nossa proposta dentro de uma dinâmica, didática e metodológica, que permita e valorize a construção do conhecimento pelo aluno.

Ainda nesse capítulo, sinalizamos uma discussão em torno daqueles que deveriam ser os objetivos do ensino e da aprendizagem de Matemática. Apontamos, também, para a importância destes no desenvolvimento das potencialidades do aluno, tanto para lidar com situações-problema que exijam conhecimentos matemáticos quanto na sua formação enquanto sujeito autônomo e apto a interpretar o meio que o cerca e agir sobre ele. Nesse sentido, começamos a sinalizar nossas proposições através daquele que acreditamos ser o perfil pedagógico e disciplinar necessário para o resgate da motivação em torno do construir e do aprender Matemática. Salientamos, para tal, a importância da aprendizagem ser buscada pelo aluno, através do incentivo à investigação e a construção do conhecimento.

No capítulo 2, apresentamos aquelas que foram as balizas da nossa proposta, a abordagem conceitual e os conceitos unificadores. A adoção desses elementos é justificada ao tomarmos, novamente, o ensino atual como referência. O sistema de ensino vigente, sem distinções disciplinares, é organizado a partir da estrutura dos conteúdos, que, em geral, não oferecem espaço para as criações e construções do aluno.

No contexto escolar, de modo geral, observamos que essa estrutura adota uma forma excessivamente hierarquizada de organização. Uma organização pautada pela idéia de pré-requisito, desenvolvida apenas pela primazia da estrutura lógica da Matemática. Nesse contexto, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, "*a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem na forma de uma corrente, cada conteúdo sendo pré-requisito para o que vai sucedê-lo*" (BRASIL, 1998, p.22). Essa concepção linear, usualmente assumida no ensino de Matemática, a nosso ver favorece a demasiada idolatria de certos caminhos que nem sempre são os mais adequados.

Em geral, tal organização tem sido caracterizada por programas pautados pela seqüência rígida de conteúdos estanques, que em geral priorizam a precisão do cálculo e a crença na repetição como fontes para o aprender Matemática. Esta associa o ensino e a aprendizagem a um caráter repetitivo que confunde precisão com unicidade de caminhos. No entanto, vemos na abordagem conceitual um caminho para a descentralização dos conteúdos e para a possibilidade de uma maior estruturação do conhecimento, em particular do conhecimento matemático, e de suas extensões.

É preciso esclarecer que compartilhamos com o perfil estabelecido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para os conteúdos, considerando que estes são vastos campos onde conceitos, procedimentos e atitudes são socialmente relevantes. Os quais, tomados a partir desses três parâmetros, envolvem desde explicações e formas de raciocínio até linguagem, valores e condutas. Entretanto, percebemos que esse processo, devido a sua constituição ampla, acaba dificultando uma abordagem mais aprofundada de conceitos em termos de suas conexões com os demais, ocasionando apenas construções de caráter local, sem maiores aprofundamentos.

Não advogamos aqui a adoção dos conceitos em detrimento das demais dimensões, procedimentos e atitudes, mas defendemos a tomada destes como ponto de partida para a aprendizagem/construção de conhecimentos matemáticos, partindo de uma abordagem local que é ampliada através de novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos. Este dimensionamento propicia ao aluno a consolidação e ampliação de um conceito, por meio de uma construção significativa do conhecimento.

Esclarecemos, também, nossa intenção ao propor o trabalho com os conceitos unificadores no contexto do ensino de Matemática, já que a utilização dos mesmos tem se restringido ao ensino de Ciências Naturais. Encontramos nessa categoria epistemológica um viés para a apreensão, estruturada e significativa, do conhecimento por constituírem pontes entre os conceitos e as relações possíveis entre a disciplina de Matemática e a de Física. Assim, descrevemos e caracterizamos cada um desses conceitos, delimitando suas contribuições e a sua pertinência junto à proposta.

No capítulo 3, centralizamos nossas questões no conceito de função e no de função afim, foco principal da nossa proposta. Buscamos situar esse conceito através do resgate da sua construção histórica, identificando suas características principais. Abordamos algumas fragilidades na construção desse conceito e a sua importância tanto em dimensões disciplinares quanto em situações simples do cotidiano.

No capítulo 4, buscamos uma interface entre o enfoque conceitual que advogamos, através do conceito de função afim e a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Junto a essa teoria localizamos pressupostos que vão de encontro à nossa proposta, especialmente na primazia pela construção gradual de conceitos como baliza fundamental na estruturação de conhecimentos matemáticos. Para tanto, apontamos algumas características essenciais dessa teoria e seus principais fundamentos, encaminhando esclarecimentos em torno de seus elementos formativos.

Quanto ao conceito de função afim e sua possível relação com essa teoria, consideramos algumas das implicações da Teoria dos Campos Conceituais junto à construção desse conceito, justificando essa conexão através das dimensões que esta assume no tocante a formação de conceitos, sempre à luz das ações do sujeito. Também, por sua íntima ligação com a conceitualização progressiva, particularmente no tratamento das estruturas multiplicativas, que sustentam a construção do referido conceito.

Contudo, não desejamos esgotar as discussões em torno da pertinência e das especificações relativas a essa conexão. Apenas, buscamos iluminar questões importantes ligadas à conceitualização, ao processo complexo que a envolve, e às redes de conceitos que dá origem.

No capítulo 5, sinalizamos algumas idéias ligadas à problemática da fragmentação no ensino. Apontamos algumas implicações dessa fragmentação no processo de construção de conhecimentos, destacando algumas pesquisas desenvolvidas a partir dessa questão.

Também salientamos a importância da promoção de interações entre campos de conhecimentos distintos, particularmente entre o ensino de Matemática e o de Física, para que seja possível minimizar os efeitos da fragmentação no ensino dessas disciplinas. Apontamos o estímulo à construção de relações como um viés bastante eficaz para potencializar um maior significado aos conceitos trabalhados nestes dois campos.

Nesse sentido, enfatizamos as possíveis contribuições dessa opção no processo de estruturação do conhecimento, e as perspectivas de se trabalhar conceitos matemáticos através de situações diversificadas, ligadas a outros campos de conhecimentos, por exemplo, a fenômenos físicos ligados a disciplina de Física. Apoiados no pressuposto de que tais interações constituem elos entre conhecimentos que compartilham conceitos.

No capítulo 6, discutimos o processo de elaboração do módulo de atividades pautada por atividades voltadas para a construção do conceito de função afim e das aproximações possíveis, através desse conceito, com fenômenos físicos característicos da disciplina de Física. Situamos, também, os objetivos dessa proposta e suas contribuições para o processo de ensino e de aprendizagem, esclarecendo a escolha das atividades e a contribuição de cada uma, bem como da estruturação adotada. Também disponibilizamos a análise dos resultados obtidos com a aplicação desse material junto a dois grupos distintos de alunos da 8ª série do Ensino Fundamental.

1.2 - Origem do Problema

Essa pesquisa parte de questionamentos e reflexões desenvolvidos em práticas educativas de Matemática e Física no ensino fundamental e médio, na rede estadual escolar do Rio Grande do Sul.

Em decorrência da experiência docente, foi possível constatar alguns problemas decorrentes da estruturação e fragmentação, não só do ensino de Matemática como dos programas desenvolvidos para essa disciplina. Programas pautados por conteúdos tratados numa rígida sucessão linear e em compartimentos estanques, instituindo como objetivo principal a precisão do cálculo e a crença na repetição como meio eficaz de construção do conhecimento, não oferecendo espaço para criação e recriação.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> essa organização linear e bastante rígida dos conteúdos, que vem sendo mantida tradicionalmente na organização do ensino de Matemática, é um dos grandes obstáculos que impedem os professores de mudar sua prática pedagógica numa direção em que se privilegie o recurso à resolução de problemas e a participação ativa do aluno (BRASIL, 1998, p.138).

Todavia, o problema não tem sua origem centrada apenas nos entraves causados pela organização linear dos conteúdos, mas também à maneira de trabalhá-los. Ou seja, está fortemente vinculado aos procedimentos didáticos e metodológicos empregados no trato desses conteúdos, que não propiciam as devidas conexões, seja em nível intra ou interdisciplinar.

Essa situação também tem provocado problemas de fracasso escolar no âmbito de tais disciplinas, pois a sua organização curricular não apresenta aproximações e relações, por exemplo, via conceito no seu ensino. O que se percebe é que a resolução de problemas utiliza conteúdos isolados das disciplinas de Matemática ou de Física, sem maiores relações e estruturações de saberes, priorizando estritamente relações descontextualizadas e meramente quantitativas.

Essa forma de organização tem dificultado uma efetiva problematização dos conhecimentos prévios dos educandos, criando a percepção de que o conhecimento está sempre disponível através do outro; por exemplo, no professor capaz de colocar as idéias na cabeça dos educandos. Uma organização onde a comunicação do conhecimento matemático tem, tradicionalmente, preservado o caminho da exposição pela via da dedução lógica, no âmbito de um sistema de axiomas.

Portanto, dentro desse contexto não tem se conseguido um ganho efetivo em direção ao conhecimento elaborado, nem ao processo dialógico da construção desse conhecimento como meio de interrogar a realidade e abrir-se para a compreensão e transformação do mundo.

Da forma como o ensino de Matemática e Física está apresentado, os conhecimentos desenvolvidos não se relacionam - seja entre as disciplinas citadas, seja entre séries e níveis, causando dificuldades de aprendizado aos educandos. Essas conexões também não são percebidas entre o ensino de Matemática e de Biologia, e o de Geografia, e o de Química, etc. Entretanto, somente dimensionaremos a discussão em torno do ensino de Matemática e Física, apesar de considerarmos as demais também imprescindíveis.

Há, contudo, um privilégio de conteúdos escolares, que, em geral, subestimam os conceitos desenvolvidos no decorrer das vivências práticas dos alunos, de suas interações sociais. Estes são desenvolvidos de forma isolada, privando os alunos da riqueza de conceitos proveniente da experiência pessoal, que pelos resultados - repetência, a falta de compreensão de conceitos e suas relações, etc. - têm se mostrado insuficiente e/ou problemático, do ponto de vista educativo.

Portanto, o propósito desse trabalho constitui num esforço voltado para o debate e a investigação do processo de ensino vigente no que tange à disciplina de Matemática e suas conseqüências imediatas no processo de construção significativa do conhecimento. Sendo que o ponto de partida para esta investigação foi à aprendizagem/construção do conceito de função afim, pautada pelas conexões que este conceito propicia e pelos conhecimentos já construídos pelos alunos.

1.3 - Aspectos Metodológicos: Pressupostos Norteadores Para a Proposta

A metodologia da pesquisa se desenvolveu dentro de uma abordagem qualitativa e contemplou a elaboração, e posterior desenvolvimento, de um módulo de atividades. Este abrange o ensino e a aprendizagem do conceito de função afim, e visa a transposição dos significados desse conceito para o contexto dos fenômenos físicos estudados na Física.

Inicialmente, buscamos identificar pontos fundamentais para o encaminhamento e elaboração desse módulo a partir das principais dificuldades e necessidades, apontadas pelos autores da área no trato do tema central dessa pesquisa. Ou seja, aspectos relevantes ligados à aprendizagem/construção do conceito de função afim, bem como de suas representações e extensões a outros campos de conhecimento, em particular a Física.

A proposta enfocou o processo de construção do conceito de função afim através de diferentes atividades, que envolvem desde os conhecimentos prévios dos alunos quanto ao conceito, através de situações-problema que possibilitam a problematização de questões ligadas a este conceito. Procurou disponibilizar diferentes situações onde esse conceito possa ser identificado pelos alunos através da sua conexão com o cotidiano. Buscou ir além dos contextos disciplinares, explorando a resolução de problemas envolvendo fenômenos físicos e a interação com atividades teórico-experimentais.

Nossa intenção, ao propormos estas atividades, foi possibilitar que *a aprendizagem seja vivenciada como uma experiência progressiva, interessante e formativa, apoiada na ação, na descoberta, na reflexão, na comunicação* (BRASIL, 1998, p.63). Porém, ainda é necessário que essa aprendizagem esteja vinculada ao cotidiano, para que possamos buscar nele situações-problema capazes de potencializar o desenvolvimento de conceitos, e a aplicação desses conhecimentos construídos junto a esse mesmo meio.

Tendo em vista a nossa preocupação em dar ênfase ao processo de construção do conceito de função afim, direcionamos nossa proposta de modo a assumir como público alvo alunos da 8.ª série do Ensino Fundamental. Porém, não excluímos a sua aplicabilidade a outros níveis de ensino, seja no Ensino Fundamental ou até mesmo no Ensino Médio.

Contudo, nosso propósito ao escolher esse público alvo foi disponibilizar essas atividades a alunos que ainda não tiveram contato formal com o conceito de função, já que buscamos explorar o entendimento informal dos alunos quanto ao conceito. Outro fator determinante na escolha foi o de que, nessa fase escolar, os alunos já possuem um nível razoável de abstração.

A elaboração do módulo de atividades foi feita, basicamente, a partir de três fases que envolveram um breve mapeamento de pesquisas envolvendo o tema, a coleta de dados empíricos através do desenvolvimento do material e, por fim, da análise dos resultados obtidos através da coleta de dados empíricos.

A primeira fase contemplou a estruturação prévia do módulo de atividades, tendo como pano de fundo nossas experiências na prática educativa e nossas expectativas para a implementação de mudanças nas ações desenvolvidas nessas práticas. Bem como, algumas considerações identificadas no momento da localização de pesquisas envolvendo questões similares.

Depois de firmados e devidamente definidos o enfoque e os objetivos do módulo de atividades, partimos para a coleta de dados empíricos, através da análise do desenvolvimento desse material junto a dois grupos distintos de alunos, primeiramente, junto a um grupo piloto de alunos e, em seguida, em uma turma de ensino regular.

Tais dados e outras informações relevantes foram coletadas através de pesquisa de campo e posteriormente são avaliados, tendo como pressupostos nossos objetivos e as contribuições significativas proporcionadas pelo módulo de atividades no processo de construção e entendimento do conceito de função afim.

Nessa etapa, particularmente no momento de trabalho na com a turma regular, na escola, localizamos o professor responsável pela disciplina de Matemática da turma, como um co-autor do processo. Como um participante crítico no desenvolvimento das atividades, colaborando ativamente no desenvolvimento da proposta. Assumiria um papel de interlocutor, sendo um elemento chave na parceria dialética e reflexiva que pretendemos assumir na tríade investigador-educando-educador.

O momento de trabalho na escola foi central para a pesquisa já que foi a partir dele que foram avaliados os caminhos adotados até então, e identificados pontos problemáticos. A avaliação foi feita através das auto-reflexões realizadas pelos envolvidos e das reflexões coletivas que ocorrem durante as ações educativas.

Em vários momentos, durante o desenvolvimento prático do módulo, inevitavelmente, retornamos às questões delineadas antes da pesquisa de campo. Isso é justificado pelo fato destas guiarem as ações reflexivas do processo, na busca de uma maior solidez no conhecimento do objeto estudado, nesse caso o módulo de atividades balizado pelo conceito de função afim.

Em seguida, partimos para uma fase que enfoca a análise sistemática dos dados coletados e das informações relevantes. Entretanto, já na fase exploratória da pesquisa, que ocorre durante o trabalho com a turma de alunos, surge à necessidade de reunir as informações, analisá-las e torná-las disponíveis a cada um dos envolvidos, para que a partir disso reflitam e manifestem as suas opiniões quanto à relevância e acuidade dos dados analisados. Foi através de momentos dialógicos e reflexivos como esses, onde as análises individuais e coletivas se complementam, que o processo de avaliação da proposta se efetivou.

Essa análise procurou captar, através dos resultados observados, o maior número possível de posicionamentos e reações imediatas sobre a validade da ação pedagógica empreendida com o desenvolvimento do módulo de atividades. Desse modo, todas essas informações serviram para a construção de novas idéias, novos significados, novas compreensões resultantes de uma ação colaborativa, de reflexão contínua.

Em vários momentos e em situações distintas essas fases ocorrem simultaneamente e se interpolam, caracterizando um movimento contínuo no confronto "teoria-empiria".

Nosso desafio, ancorado em nosso interesse educacional, consistiu em elaborar esse módulo de atividades de modo a contribuir, não só, no processo de ensino-aprendizagem, mas também na iluminação de caminhos que possibilitem minimizar questões originadas dentro do processo educativo. Buscou despertar nos educandos, ou contribuir de alguma forma, a sua curiosidade epistemológica, por tantas vezes

> engessadas e ameaçadas quando por negligência ou ignorância, no 'ato educativo', não se trabalham conceitos e práticas, didático-educacionalmente, registrando as informações e refletindo sobre, para depois, reconstruir racionalmente, dando origem à nova atividade educacional [...], mais informada e comprometida (MION, 2002, p. 197).

Portanto, as contínuas reflexões, planejamentos e replanejamentos nos levaram a uma compreensão maior do processo de construção do conhecimento, pois estamos certos de que

> mesmo que o investigador parta de alguns pressupostos teóricos iniciais, ele procurará se manter constantemente atento aos novos elementos que podem emergir como importantes durante o estudo. O quadro teórico inicial servirá de esqueleto, de estrutura básica a partir da qual novos aspectos poderão ser detectados, novos elementos ou dimensões poderão ser acrescentados, na medida em que o estudo avance (LÜDKE & ANDRÉ, 1986, p. 18).

É desse modo, priorizando o caráter de envolvimento, crítico e reflexivo, e o comprometimento dos indivíduos em um processo contínuo e embriagado de indagações que buscamos encaminhar novas construções que, de algum modo, contribuam para o aprimoramento da proposta inicial da pesquisa. A fim de estimular educadores e educandos pelo desafio da busca, sempre mediados pelo diálogo e incentivando o confronto através da troca de argumentos.

Portanto, almejamos com esse processo de estímulos constantes, de questionamentos e reflexões, individuais e coletivas, sempre a luz dos pressupostos teóricos adotados, desenvolver um trabalho colaborativo. Onde as ações empreendidas sejam constantemente revistas e refletidas através das observações feitas durante o desenvolvimento da ação educativa, partindo sempre desta para o replanejamento das atividades posteriores. Visto que,

> Numa perspectiva progressista o que devo fazer é experimentar a unidade dinâmica entre o ensino do conteúdo e o ensino do que é e de como aprender. É ensinando matemática que ensino também como aprender e como ensinar, como exercer a curiosidade epistemológica indispensável à produção do conhecimento (FREIRE, 1996 p. 141).

Buscamos esclarecer questões do ensino e da aprendizagem de Matemática, iluminando novos caminhos, incorporando uma nova compreensão do que seja a produção de conhecimento. Especialmente do conhecimento matemático construído a partir das interações cooperativas desenvolvidas entre os pares. Pois, acreditamos que

> A educação deve ser um processo vivido em equipe. O diálogo e a colaboração viabilizam o processo ensino-aprendizagem. A aprendizagem ocorre a partir do coletivo, nas reflexões no grupo, em reflexões interpessoais e nas interações dialógicas. A partir daí, dão-se momentos individuais em que o sujeito cria e recria a sua aprendizagem e reflete sobre ela. É o que estou denominando auto-reflexão (MION, 2002, p. 76).

Sendo assim, o processo de construção de um instrumento, nesse caso de um módulo de atividades, com perspectivas de aplicação na educação deve ser moldado pelos pressupostos da reflexão contínua, do planejamento e do replanejamento constante, tanto individual quanto coletivo.

Esse trabalho está fundamentado por essa premissa, pois tem o objetivo de desenvolver uma ação educativa subsidiada pelas interações dialógicas. Almejou buscar mudanças necessárias, apontar caminhos e, quiçá, reedificar novas posturas, já que acreditamos que é no diálogo, entre os sujeitos envolvidos na construção do conhecimento, que se valida à ação educativa.

1.4. O Ensino de Matemática: Questões Iniciais

É possível constatar, no contexto atual do sistema de ensino, em particular no que diz respeito à disciplina de Matemática, um número considerável de alunos que não gostam de Matemática, sentimento que se intensifica com a idade e com o avanço escolar. Outra parcela encontra grandes dificuldades com o que é considerado muito fácil pelos professores, muito simples.

Em geral, a Matemática é vista como difícil e penosa, já que no tocante à prática educativa pouco tem sido feito para alterar esse estado de coisas, de uma Matemática fria e sem sentido.

A necessidade e, acima de tudo, a esperança de dias melhores, de caminhos mais construtivos servem de guias no encaminhamento de mudanças, na luta por uma prática, e também por uma teoria, pedagógica voltada para a renovação do ensino de Matemática, para a reformulação do cenário instaurado.

O foco principal, para a análise dessa problemática, está em rever o significado e os objetivos do ensino e da aprendizagem de Matemática. Entretanto, não temos o objetivo de aprofundar tal discussão, mas o de sinalizar para a importância de questões como as seguintes: *O que se pretende ao ensinar Matemática? Por que as crianças devem aprender Matemática?*

No contexto escolar, sem dúvida, as respostas se multiplicam, assumindo diferentes posturas devido às variadas ênfases dadas, que permeiam desde os objetivos econômicos até os pessoais. Alguns destacam a importância econômica, enfatizando o seu caráter utilitário, enquanto outros salientam a satisfação pessoal, caracterizando o perfil de constructo social designado ao ensino e a aprendizagem de Matemática.

O aprendizado de idéias e de conceitos matemáticos extrapola o utilitarismo, e pode, com certeza, colaborar para a realização pessoal. Todavia, é preciso criar situações de ensino e de aprendizagem da Matemática que proporcionem o contato dos educandos com o mundo mágico desse conhecimento e seus encantamentos.

Recuperar a construção e a compreensão de idéias matemáticas em detrimento da aquisição de técnicas de resolução e cálculos. Substituir a devoção à obtenção de técnicas e métodos e o tempo devotado ao melhoramento da habilidade em aplicar tais técnicas, que encontram espaço privilegiado no trabalho realizado em sala de aula, por um espaço voltado para a construção do conhecimento matemático.

Existe um hiato entre entender as técnicas de resolução e compreender o assunto. Um estudante pode conhecer a técnica de resolução de certo assunto matemático e não ter a mínima noção do que esteja fazendo, não consegue dar sentido ao conhecimento envolvido no processo de resolução. Isto, infelizmente, não é um caso raro, e se tornou cada vez mais comum entre os estudantes, em especial na disciplina de Matemática.

Entretanto, isso pode acontecer sem que o estudante perceba. Ele pode ter a impressão de que entende Matemática, apesar de isso não ocorrer. Não são percebidas as conexões entre os processos envolvidos no entendimento das idéias/conceitos matemáticos com as técnicas de resolução e com os métodos aritméticos. Assim sendo, *"podemos concluir que a ênfase na utilidade exclui o estudo da 'teoria' e, assim, tornou difícil às aplicações e praticamente impossível a fertilização de idéias"* (DIENES, 1974, p. 23). Geralmente o que ocorre é o reconhecimento de um padrão de perguntas e de suas possíveis respostas, dando a falsa impressão da compreensão do conceito.

Não raro, o professor se apresenta, nesse processo, como o detentor da informação e a fonte autoritária responsável por encaminhar e repassar aos alunos tais informações, dando seguimento ao processo designado como ensino. Essa dinâmica baseada na transmissão não tem apresentado resultados satisfatórios na busca da compreensão dos conceitos matemáticos. Os problemas podem ser vários, com diferentes fatores, localizados na fonte de informação, no processo de transmissão ou, até mesmo, na fonte receptora. Ou, ainda, envolva todos esses fatores e esteja denunciando a inadequação do sistema por completo.

Está claro que existem deficiências bastante sérias em pontos fundamentais do sistema vigente, que permeiam tanto os processos de ensino e de aprendizagem como os métodos utilizados no encaminhamento desses processos. Tais deficiências apontam para a necessidade de ações efetivas que focalizem a superação adequada desses pontos problemáticos, de maneira crítica e consciente.

Nesse contexto, o problema da motivação está muito presente e se percebe uma queda gradual no interesse do aluno na medida em que ele cresce. O desinteresse em aprender é gerado não só pelos processos didáticos e metodológicos adotados, mas também pelo sistema de punições e recompensas à base de notas, prêmios e penalidades, vinculado à aprendizagem. Uma espécie de incentivo artificial que, de fato, gera algum aprendizado, mas um aprendizado ligado à luta por maiores notas e à resistência às punições, um aprendizado compulsório, não caracterizado pelo entendimento dos conceitos ou pela compreensão significativa dos conhecimentos matemáticos.

A retificação desse cenário está atrelada à criação de situações de ensino e de aprendizagem onde o conhecimento e a compreensão são motivados por si próprios, por situações onde as informações não são apenas repassadas e, simplesmente, armazenadas por seus receptores. Mas sim, proporcionam a formulação de idéias e inferências, a compreensão estruturada dos conceitos matemáticos, por meio de ações que possibilitam a incorporação gradual dos significados.

Parece que a adesão precipitada à postura utilitarista e prática acabou por sufocar a situação real da sala de aula. Nela existem alunos reais, com necessidades reais e distintas, cheios de expectativas, que esperam que o professor lhes revele as maravilhas do mundo do conhecimento matemático, alunos que não se detêm à utilidade, desde que lhes pareça interessante e faça sentido.

Outro sentido dado à aprendizagem de Matemática, associado ao caráter utilitarista, está ligado ao fato de a Matemática ser essencial ao progresso de outros campos de conhecimento, sejam eles ditos puros ou aplicados. Entre muitos é possível destacar a sua importância junto às mutáveis exigências da Física, da Química, da Biologia, da Engenharia, entre outros. Nesse caso, a Matemática escolar, deve suprir ao menos, os elementos básicos que possibilitem a compreensão de novas técnicas e processos mais elaborados, baseados nesses elementos essenciais. Porém, mesmo que a aprendizagem de Matemática seja justificada pela necessidade de prover a carência de pessoal adequado para os estabelecimentos de pesquisa, a simples aquisição de regras ou técnicas de resolução de um número limitado e padronizado de problemas não é suficiente.

A falta de compreensão dos processos matemáticos, de suas construções e significados no contexto do ensino e da aprendizagem de Matemática, presente na maioria das escolas, hoje, não é uma preparação condizente e, nem tão pouco, suficiente para a formação de um espírito científico.

Tomada nesses princípios a Matemática, de acordo com Dienes (1974), especialmente quanto a sua aprendizagem, se apresenta como poderoso filtro social através do qual o matematicamente apto sobrevive pela seleção natural. Enquanto os demais, nem tão brilhantes, gradualmente são relegados ao '*depósito matemático*' como inferiores, cidadãos de segunda classe, inadequados para a iniciação nos mistérios da Matemática.

Diante desse contexto de seleção, é nítido o descaso com os objetivos mais contemporâneos do ensino de Matemática, do seu comprometimento com a formação do sujeito. A constituição do sujeito é um processo de integração. Engloba diferentes aspectos inerentes à condição física, à social e à intelectual em que o sujeito está submetido, dependendo diretamente da reunião progressiva dessas peças até a constituição de um conjunto prudente e equilibrado. Quando levados em consideração esses aspectos, certamente, se estará colaborando para a constituição de um sujeito crítico, construtivo, preparado para estabelecer conexões e identificar diferenças.

Cabe a nós enquanto educadores assegurar a adesão de nossos alunos a essas possibilidades, à oportunidade de alcançar um grau de integração e formação tão elevado quanto forem capazes, do mesmo modo que é dever garantir situações que ofereçam a esses alunos a possibilidade de construírem suas próprias estratégias no âmbito do conhecimento matemático. Esse seria, certamente, um meio que permitiria justificar a validade da aprendizagem de Matemática pelos alunos.

Como vimos o produto desse sistema é um aprendizado compulsório produzido pelo método de punição e recompensa instaurado no processo de ensino atual. Nessas condições fica difícil crer em algum efeito integrador. Até mesmo aqueles alunos que, de alguma forma, conseguem associar padrões de perguntas e de respostas, que convivem com a falsa sensação de entendimento, não alcançam patamares distintos dos demais em relação a sua formação. Esses não conseguem superar uma percepção limitada, padronizada. Não integram o que aprendem com outros segmentos do seu conhecimento.

A construção do conhecimento matemático pautado pela integração consiste em habilitar os alunos a consubstanciar suas experiências e expectativas de alguma forma particular, individual. Organizando e sistematizando suas experiências, estruturando suas idéias. Quando a experiência não faz sentido com o que se aprende ela não é integrada, assimilada. Não cristaliza nenhuma situação que leve ao aprendizado significativo, à constituição do sujeito.

Enfim,

> O resultado mais freqüente do desvio apontado acima é a identificação do conhecimento com o verbalismo destituído de significações, ou, no terreno propriamente matemático, onde a oralidade desempenha papel bem menos expressivo, uma sensação muito forte de paralisia, de impotência (MACHADO, 1992, p.50).

De modo geral, parte do aprendizado de Matemática dos alunos produzido pelo sistema atual de ensino resulta em uma compreensão deficiente dos conceitos matemáticos, comprometendo substancialmente a extrapolação desses conceitos na busca de conexões com outros.

Contudo, e felizmente, o contexto não é tão ruim a ponto de não ter reversão.

Existem, sim, possibilidades bastante significativas na direção de progressos. Nossa pesquisa foi demarcada pela convicção de que ainda há muito a ser feito. Nesse contexto, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) surgem trazendo novas perspectivas para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática. Apontam para novos rumos a serem seguidos em prol de mudanças na maneira de conceber a aprendizagem e a abordagem do conhecimento matemático. Estes buscam fornecer elementos que ampliem o debate acerca do ensino dessa área do conhecimento, socializando informações e resultados de pesquisas.

Todavia, o abandono da situação tradicional, embora necessário, é uma mudança que deve ocorrer de forma gradual. Nesse caminho poderão ser cometidos alguns erros, talvez anos se passem até que seja encontrada a melhor *"mistura matemática"* (DIENES, 1974). Portanto, é preciso estar ciente dos efeitos, positivos e negativos, a longo e curto prazo, sem abrir mão da unidade do conhecimento matemático e da importância do planejamento minucioso das experiências e das ações educativas que serão empreendidas.

Portanto, é de fundamental importância para um aprendizado significativo da Matemática a existência de um planejamento meticuloso e consciente que reconheça a relevância das experiências construtivas de matemática como um todo, ciente dos seus processos e produtos. Salientamos, também, a importância de diversificar essas experiências, através da concessão de uma rica variedade de situações significativas que possibilitem a construção dos conceitos matemáticos.

Nesse cenário, o papel do educador é essencial para que a dinâmica das ações se efetive. Ele deve estar a par da complexidade inerente ao processo de aprendizagem da Matemática, bem como das limitações e particularidades de cada aluno. E, acima de tudo, ter clareza da abrangência de situações de aprendizagem voltadas para a criação e a construção, por estas possibilitarem tanto a satisfação e a motivação quanto a frustração nos processos de aprendizagem que partem dessas experiências.

Para tanto, a renuncia ao professor que assume uma postura central de poder é imprescindível, em prol da recuperação do seu papel de mediador das construções do conhecimento matemático, que se constituem de forma individual ou em pequenos grupos sob a orientação e conselhos oferecidos pelo professor, sem imposição ou transferência de idéias, mas pela comunhão de argumentos e reflexões.

Estamos convictos, ancorados nos dados coletados nesta pesquisa, de que é possível estabelecer essas situações na perseguição de uma aprendizagem construtiva e estruturada da Matemática, sem distinção de nível escolar. Quando o aluno consegue compreender um conceito matemático por meio de suas experiências e construções, ele assimila o valor intrínseco desse conhecimento incorporando à sua formação de sujeito social, ativo e construtivo.

Nesse sentido é relevante esclarecer nossa concepção de aprendizagem de Matemática. Consideramos como tal à capacidade de apreensão das conexões estruturais entre os conceitos matemáticos, suas simbolizações e dimensões conceituais dentro e fora da Matemática, bem como o discernimento em atribuir significado a esses conceitos, em situações ligadas à realidade.

Portanto, transformar a situação atual do processo de ensino e de aprendizagem de Matemática é primordial e urgente, porém acreditar na possibilidade de mudança é crucial e se apresenta como o ponto de partida. Nossa pesquisa foi guiada pela busca de melhorias e pela iluminação de novos caminhos, em prol da mudança.

CAPÍTULO 2 - OS CONCEITOS E SUAS POTENCIALIDADES NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

2.1 - Os Conceitos e Suas Potencialidades

Dentro da perspectiva de buscar mudanças, é preciso lançar mão de elementos que facilitem a transição advogada anteriormente, que possibilitem desenvolver uma dinâmica em sala de aula onde estejam presentes essas construções, sem dispensar a objetividade e sem desconsiderar a subjetividade, moldadas pela interação e pelo diálogo entre sujeitos irmanados no processo de busca contínua do conhecimento.

De acordo com a perspectiva apontada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), compreendemos que os conteúdos, em geral tratados de forma linear e em compartimentos estanques sem priorizar conexões, estão dimensionados em conceitos, procedimentos e atitudes. Também concordamos que cada uma dessas dimensões suscita uma estratégia diferente de avaliação.

Porém, apesar de não considerarmos que seja possível construir conhecimentos sem que se contemplem estas três dimensões, acreditamos que potencializar a aprendizagem/construção de conhecimentos matemáticos a partir da estruturação de conceitos se apresenta como uma via bastante fértil. Justificamos nossa posição através do fato de que a dimensão conceitual possibilita construções onde a compreensão seja pautada por atividades que suscitam conexões. Pois, os conceitos possibilitam o estabelecimento de relações, o reconhecimento de hierarquias, o estabelecimento de critérios para a classificação e também à resolução de situações através destes e de suas interações. Ao mesmo tempo em que suscita o trato tanto de procedimentos quanto de atitudes.

Isso não é, necessariamente, válido se tomarmos a situação inversa. Ou seja, o trato com procedimentos e atitudes não necessita, necessariamente, promover a construção de conceitos, esse processo não possui compromisso rígido com essa dimensão.

Nesse sentido, elegemos como um elemento facilitador para essa proposta o que aqui definimos como abordagem conceitual. Entendemos por abordagem conceitual um processo de estruturação de conhecimento pautado pela ênfase na construção gradual de conceitos, a partir de situações diversificadas que possibilitem articulações de saberes. Que rompa com a abordagem separatista regida pela inflexibilidade dos currículos, que impede a identificação de traços comuns entre conhecimentos.

Essa postura se estabelece através do comprometimento da construção do conhecimento, em especial o matemático, com a formação de redes de conexões entre conceitos, que dão origem a novos. Nesse sentido, identificamos uma forte analogia dessa opção com a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud[1], voltada para a conceitualização do real e para a complexidade que esta envolve.

Esta, a nosso ver, possibilita uma extensão maior das idéias matemáticas, uma organização dinâmica onde os conteúdos não se tornam idéias desconectadas e estanques e, ainda pela sua capacidade de se articular com outros ou com um conjunto de idéias que se complementam.

Dentro desse contexto é fácil encontrar, na literatura especializada, indícios e convicções firmemente fundamentadas destacando e enfatizando todo o potencial que os conceitos dispõem e oferecem quanto às possibilidades de maior estruturação do saber. Os Parâmetros Curriculares Nacionais já apontam para essa realidade, reafirmando o caráter abrangente destes e enfatizando suas potencialidades no tocante a fragmentação. Assim,

> conceitos permitem interpretar fatos e dados e são generalizações úteis que permitem organizar a realidade, interpretá-la e predizê-la. Sua aprendizagem desenvolve-se de forma gradual e em diferentes níveis e supõe o

[1] No capítulo 5 esclareceremos melhor a aproximação entre a abordagem conceitual, a construção de conceitos e a Teoria dos Campos Conceituais, bem como delinearemos alguns dos pilares que sustentam essa teoria.

> estabelecimento de relações com conceitos anteriores (BRASIL, 1998, p. 48).

Ainda, quanto à importância de priorizar a utilização de conceitos e os seus benefícios, vem que:

> (...) o conhecimento em C&T acessível a todos os escolarizados não se dará sem se priorizar a apreensão dos CONCEITOS no sentido de universais. Essa opção pressupõe simultaneamente a ênfase no relacional, na capacidade articuladora dos conceitos de se associarem construtivamente a outros, na perseguição de estruturações e de ordenações de saberes.
>
> Dados os riscos de fragmentação que se pode atingir mesmo com a opção temática, mesmo com a opção conceitual, propomos a utilização básica de conceitos supradisciplinares, que chamamos unificadores (...) (ANGOTTI, 1991, p. 103).

O autor também direciona algumas perspectivas referentes à utilização dos conceitos unificadores e suas possíveis relações com o ensino de Matemática, especialmente quando envolvidas operações lógicas, afirmando que

> De seu lado, as relações entre os conceitos estabelecidas principalmente através das operações lógico-matemáticas, também são contempladas. Como são, porém, mais afetas ao conhecimento em Matemática, não explicitarei sua discussão, considerando-as como necessidades (ANGOTTI, 1991, p. 103).

Os conceitos unificadores são direcionados, segundo ANGOTTI (1991), para as *"conceituações e na defesa das 'mudanças conceituais direcionadas' no ensino-aprendizagem de CN"* (p.103), porém, o referido autor sinaliza para a possibilidade de o ensino de Matemática ser fortalecido pela via dos conceitos unificadores, de acordo com o explicitado na citação acima.

Nesse sentido, elegemos os conceitos unificadores para estruturar, juntamente com o conceito de função, esta proposta buscando minimizar o problema da fragmentação no ensino de Matemática e privilegiando o potencial extraordinário de articulação desses conceitos, pois viabilizam inter-relacionar conceitos adquiridos com outros, da mesma área ou de áreas distintas.

É evidente que a necessidade de estabelecer relações entre conceitos adquiridos deve ser adotada como um dos objetivos principais do ensino, em especial de Matemática. Mas, é preciso ir além e alcançar patamares mais abrangentes, buscando ultrapassar barreiras que engessam conteúdos e disciplinas, deixando-os em compartimentos estanques sem que suas similaridades e semelhanças sejam abordadas, dificultando a construção de novos conceitos pelo aluno.

O resultado deste processo é um conhecimento segmentado, em pedaços que embora se complementem não se relacionam. Assim,

> O estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma eficaz ferramenta para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos (BRASIL, 1998, p.37).

Enfim, a adoção dos conceitos como chaves para nossas proposições se justifica devido ao caráter facilitador desses elementos, ao perfil de pontes entre os conceitos e as interações conceituais pertinentes. Por estarmos vislumbrando a estruturação de conhecimentos matemáticos através da capacidade destes em potencializar conexões em níveis intra e interdisciplinar, cremos assim minimizar o risco de fragmentação, ampliando as possibilidades de trabalhar o conceito de função a partir de situações contextualizadas.

Entretanto, é preciso esclarecer que a abordagem conceitual que advogamos aqui não corresponde à abordagem conceitual unificadora desenvolvida por Angotti (1991). Esta segunda corresponde ao privilégio de alguns conceitos, quais sejam: transformações, regularidades, escalas e energia, ditos supradisciplinares, que se constituem em balizas para a construção/aquisição de conhecimentos na área das Ciências Naturais, capazes de construir pontes entre conhecimentos, desta ou de outras áreas de conhecimento. Ou seja, tais conceitos representariam o ponto de partida para a construção/aquisição de conhecimentos, e para a construção de outros conceitos.

No contexto da nossa proposta, o ponto de partida para a construção de conhecimentos matemáticos é o conceito de função, mais especificamente o de função afim. Sendo assim, os conceitos unificadores surgem como elementos potencializadores de pontes entre os conhecimentos que vão sendo construídos ao longo das atividades propostas. Isto é, estes constituem elos entre as idéias/conceitos trabalhados, bem como entre as atividades desenvolvidas.

2.2 - Conceitos Unificadores: Possibilidades Para a Prática Pedagógica de Matemática

Os currículos e programas escolares são, desde tempos remotos, pautados pela estrutura dos conteúdos. Definidos por muitos como sendo o conhecimento a ser ensinado ou transmitido pela escola. Sua adoração ou a sua repudia têm provocado um intenso e antigo debate, principalmente por fazerem parte das bases de apoio da estrutura escolar.

Suas contribuições para o processo escolar têm-se revelado bastante limitadas, basicamente se restringem em moldar e direcionar, de maneira padronizada e castradora, as ações educativas empreendidas pelos professores, tornando-se critérios de avaliação e controle dos entes e dos processos contidos na instituição escolar.

Possuem um perfil inercial que se estende a todas as áreas do conhecimento escolar, dificultando a reformulação e oxigenação destas, pois são, na maioria das vezes, selecionados e eleitos com marcas ideológicas e, invariavelmente, sem a participação dos professores na discussão.

Desse modo, embora fortemente criticados e discutidos, se instalam e resistem tornando-se *paradigmas de ensino* (ANGOTTI, 1991), sem distinções a qualquer que seja a área de conhecimento.

Assim, independente da área do conhecimento ou disciplina, a transição na busca da superação da estrutura de conteúdos, consagrados pela escola e pelo processo histórico em que está inserida, é indispensável, pois a estrutura vigente não parece estar contribuindo efetivamente para a apreensão, de modo estruturado e significativo, do saber, impedindo também a transposição de saberes para outras áreas.

Desse modo, a utilização de conceitos na orientação de novas perspectivas para o *que fazer* e o *como fazer* pedagógico se apresenta como uma grande possibilidade para potencializar o entendimento estruturado e articulado de idéias.

ANGOTTI (1991), preocupado com esse processo, também aborda essa discussão e se empenha na busca da descentralização dos conteúdos, enfatizando que *"os conceitos podem provocar alternativas que substituam nossa habitual sensação, que não é só sensação de impotência frente à prevalência inercial dos conteúdos"* (p. 111).

O autor alega, na tentativa de esclarecer sua posição, que além de dificultarem a estruturação do saber de maneira plena, ainda, restringem e, por vezes, até impedem a extensão desses saberes, ocasionando *"uma retaliação do conhecimento que se processa na 'ciência da escola'"* (p. 111).

Tal preocupação desencadeou a busca de apontamentos para uma possível transição dos conteúdos para os conceitos, tendo como referência o *que fazer* e o *como fazer* pedagógicos, com o propósito de discutir as bases do ensino e aprendizagem. Nesse sentido, ressalta que sua proposta

> não elimina o debate dos conteúdos, mas acrescenta elementos que, ao nosso ver, não podem ser mais negligenciados. Conceitos unificadores que apontam para totalidades parciais, organizadas, apesar de não desprezarem necessários recortes. Conceitos estão presentes em várias teorias, disciplinas e campos de conhecimento, daí unificadores (ANGOTTI, 1991, p. 113).

Essa proposta está ancorada pelos *Conceitos Unificadores e supradisciplinares*, que são: Transformações, Regularidades, Energia, Escalas, que se caracterizam como ferramentas chaves no enfrentamento das tensões entre fragmentos e totalidades do conhecimento elaborado. A utilização desses conceitos está vinculada a direcionamentos sobre a progressão da Ciência e à compreensão do papel de alguns conceitos na constituição de categorias que potencializam o entendimento da atividade científica. Assim, destacam-se como características importantes e comuns aos quatro conceitos a

> sua identificação e presença tanto no saber que domina o senso comum como no saber sistematizado, embora seus significados e sua compreensão sejam, na maioria das vezes, qualitativamente distintos. Enquanto constructos de nossa consciência individual, encontra ressonância e reforço na coletiva, tais conceitos são pontes de transição de um saber para outro (DELIZOICOV et alli, 2002, p. 286).

Os *conceitos unificadores* estão dispostos em uma subdivisão, na qual são caracterizados como *conceitos unificadores de primeira ordem* e *conceitos unificadores de segunda ordem*. De acordo com Angotti (1991), os conceitos unificadores designados de primeira ordem, transformações (T) e regularidades (R), são assim classificados devido à amplitude e grau de abstração que apresentam, caracterizando-os como mais amplos e menos abstratos que os demais. Já os conceitos unificadores de segunda ordem, energia (E) e escalas (S) apresentam um grau mais elevado de abstração, e são capazes de incorporar os anteriores, os quais são renovados e revelados com maior abstração através dos dois conceitos de segunda ordem.

Em seguida, descrevemos as características específicas de cada *conceito unificador*, bem como suas distinções e abrangências. Também evidenciamos, dentro do possível, a relevância de cada conceito junto aos propósitos desse trabalho.

2.2.1 - Conceitos Unificadores de Primeira Ordem

2.2.1.1 - Transformações (T)

É considerado o mais simples, e é também o mais usual nas investigações científicas. Perpassa pelas transformações da matéria, inclusive energia, seja no espaço ou no tempo. Pode ser trabalhado em diferentes níveis de ensino, desde o mais elementar até em níveis mais avançados, pois possibilita uma diversidade de aprofundamentos. As transformações são acompanhadas de alterações em suas características, sendo que a compreensão da ciência exige habilidade em perceber as transformações e reuni-las em regularidades. No contexto da proposta, identificamos o conceito unificador *transformações,* ligado diretamente às variáveis que acompanham as relações funcionais, principalmente no tocante às suas modificações valorativas. Perpassa, também, pela variedade de representações possíveis nas relações funcionais estando atrelado à possibilidade de transformar uma representação, por exemplo, uma tabela, em outra, ou ainda um gráfico ou uma expressão algébrica. Enfim, auxilia na identificação de mudanças, na explicação dessas mudanças e na percepção de relações entre elas.

2.2.1.2 - Regularidades (R)

A forte tendência em procurar por invariantes e por identificar o que há de comum entre as diversidades indica a busca constante por regularidades, por "alguma coisa" comum a todas as ocorrências de fenômenos naturais, por "regras". Nesse sentido, o conceito unificador de *regularidades* apresenta-se como um possível mediador, na tentativa de equilibrar a grande diversidade de fenômenos e as "coisas" em comum existentes entre eles. São mais abrangentes que as transformações, embora sejam em quantidade menor, possuindo grande importância no estabelecimento de leis e teorias. Esse conceito unificador desempenha um papel crucial no entendimento do conceito de função, pois está diretamente ligado à investigação e a possibilidade de predição de fenômenos observados, através da identificação de comportamentos similares ou até mesmo iguais. A identificação desses comportamentos permite, através da repetição, explicar tais fenômenos e formular leis, ou expressões, que caracterizem uma generalização para situações semelhantes, que possuem atributos de universalidade, sempre que mantidas as condições necessárias.

2.2.2 - Conceitos Unificadores De Segunda Ordem

2.2.2.1 - Energia (E)

Possui um maior grau de abstração, especialmente se comparado aos outros três conceitos unificadores, pois pode ser considerado como "agente de transformações". Seu campo de abrangências é mais amplo do que o conceito de *transformações* e o de *regularidades*, pois incorpora os dois conceitos (T e R). Sendo assim, exige um maior grau de análise e síntese para a compreensão. O conceito de *energia* está presente em várias esferas do conhecimento, possibilitando a associação de conhecimentos até então tidos como separados e, por isso, pode ser visto como um *conceito unificador*. E, desse modo, favorece as interações tanto entre conhecimentos de Ciência e Tecnologias, quanto à relação com outras áreas como as Ciências Sociais. Extrapola as dimensões disciplinares, pois possui um grau de abstração maior que os conceitos unificadores de 1ª ordem, permitindo uma gama de interações, incorporando as *transformações* e as *regularidades*, e superando o formalismo atrelado às expressões, sejam elas funcionais ou não. Este conceito unificador não foi contemplado nas atividades propostas pela presente pesquisa, pois não vislumbramos uma ligação mais imediata, assim como ocorre com os outros três. Talvez isso seja explicado pelo alto grau de abstração desse conceito, se comparado aos demais, justificando, assim, o fato de não termos percebido correspondência imediata com o conhecimento matemático que pretendíamos construir, o conceito de função afim.

2.2.2.2 - Escalas (S)

A ocorrência de alterações ou transformações em algumas dimensões é uma característica observada em todos os fenômenos naturais. Assim, o *conceito unificador escalas* abrange as diferentes dimensões de ocorrência dos processos de transformações e de regularidades, tanto as perceptíveis a "olho nu", quanto às ocorridas em níveis micro e macroscópico. Este requer o trabalho com quantidades, necessárias para a aprendizagem em CN, e a constituição de noções de qualidades, desde o nível mais elementar. Nesse sentido, o conceito *escalas* atua como regulador entre *abordagem conceitual* e o *formalismo matemático*, em cada nível de ensino e de profundidade. Assim, na perspectiva do *conceito unificador escalas*, as relações quantitativas precisam extrapolar os cálculos matemáticos e estabelecer relações, embora não mensuráveis, com valores e atitudes. A raiz desse conceito unificador é partilhada entre as disciplinas de Física e Matemática, porque remete sempre às quantidades, e engloba, também, aspectos relacionados à mensuração e a matematização dos fenômenos, característica bastante presente no conceito de função.

CAPÍTULO 3 - O CONCEITO DE FUNÇÃO: UM BREVE RESGATE HISTÓRICO

3.1 - O Conceito de Função e Suas Dimensões no Ensino e na Aprendizagem de Matemática

Em geral, é cada vez mais evidente a compreensão da Matemática como um campo do conhecimento voltado para o estudo das relações, de suas sistematizações, em especial, no âmbito do abstrato. Sendo assim, o seu ensino deve estar pautado pela necessidade de contribuir para a administração dessas relações no domínio da abstração. O tratamento dessas relações contribui, substancialmente, para o estabelecimento de conexões na busca de situações semelhantes, que conservem características similares, ou até mesmo idênticas. É o primeiro passo para a percepção de relação entre fatos, fenômenos e grandezas.

A própria postura de mantermos certo comportamento apropriado em determinadas situações caracteriza a constante busca, por vezes involuntária, de padronização de circunstâncias equivalentes. As relações intrínsecas ao conhecimento matemático apresentam comportamentos muito semelhantes.

Muitas vezes, antes mesmo de estarmos aptos a compreender ou sistematizar tais relações, já nos deparamos com elas, entretanto, geralmente, mesmo quando conseguirmos identificar e classificar tais relações, é preciso algum tempo para compreender e tratar com elas.

Nesse sentido, o ensino de Matemática deve fornecer meios que possibilitem a constituição de idéias claras pelos alunos acerca desses relacionamentos, bem como de suas potencialidades e significados. O reconhecimento e a identificação de constantes que transitem por tais relacionamentos também precisam ser encarados pelo educador como algo bastante relevante. Pois, embora essa disciplina seja imensamente variada, a identificação destas pode servir de estopim para o planejamento e a estruturação de situações de ensino mais abrangentes, pautadas por relações e suas interconexões.

A relevância da linguagem também merece destaque no conjunto dos relacionamentos. De modo geral, a formalização da linguagem por meio de frases representa uma constante, sempre que algo é declarado sobre alguma coisa, este acaba sendo enunciado por uma frase de alguma forma. Não obstante, a Matemática, como qualquer outra linguagem, também expressa relacionamentos por meio de frases.

Seja qual for à composição de uma conversa, o estabelecimento de um assunto comum, assim como das expressões adotadas durante a conversação é imprescindível para garantir um nível razoável de clareza, de entendimento. No caso da Matemática, isso também é necessário, pois caracteriza a delimitação do universo de explanação, do conjunto de condições iniciais e dos símbolos utilizados na sistematização do processo. Ao estabelecer esse conjunto, é possível realizar os relacionamentos entre os seus elementos formadores. Tal relacionamento pode ser definido pela caracterização dos elementos do conjunto.

Por exemplo,

> suponhamos que vamos à casa de alguém e encontramos vários adultos, certo número de crianças e uma quantidade de jovens, (...). Alguém poderá dizer: ‘Este é o filho do Sr Silva’, ou ‘Aquele é o tio do João’. Estas são relações entre as pessoas da casa. As pessoas da casa formam, por enquanto, o universo de explanação e o que dizemos a respeito delas é como estão relacionadas com outras pessoas da casa (DIENES, 1974, p.126).

Como vimos, situações simples do cotidiano contêm um vasto arsenal de relações, das mais diversas procedências. A realidade está impregnada de relações, de padronizações entorno de semelhanças e similaridades, ou até mesmo de diferenças.

O conceito de função, por sua vez, teve a sua formalização inicialmente caracterizada como um caso particular da idéia de relação. A construção do que hoje conhecemos como função teve como ponto de partida a idéia de relacionar dois conjuntos, ou universos, baseado em uma regra, ou lei. A evolução desse conceito está, historicamente, ligada à observação de fenômenos físicos e a necessidade de explicar e sistematizar suas variações e regularidades. Está intimamente associada à noção de dependência funcional contida nesses fenômenos. Retomaremos a ligação entre o conceito de função e os fenômenos físicos, bem como a sua evolução, em outro momento, onde nos deteremos de maneira mais abrangente a tais questões.

Está bastante clara a estreita ligação entre o conceito de função e as idéias de relação, porém é conveniente reservar as devidas generalizações de cada um.

A construção da idéia de relação é bastante favorecida pela valorização de situações concretas onde possam ser identificadas e discutidas. Em um primeiro momento, a sistematização do aprendizado das relações ocorre baseada na identificação de semelhanças. Em seguida, após esta etapa, as correspondências são realizadas, com mais facilidade, em torno das diferenças e, por fim, das propriedades de algumas dessas relações.

Um processo semelhante ocorre com o conceito de função. A sua compreensão exige um processo gradual de estruturação, partindo de situações mais simples e da identificação das relações de semelhança encontradas nessas situações, seguindo para arranjos mais complexos que envolvam também relações baseadas nas diferenças, buscando uma sistematização das propriedades características dessas relações. Enfim, esse processo envolve, basicamente, três etapas.

A primeira consiste na identificação da relação, que geralmente ocorre pela transposição da situação concreta para a estruturação matemática da relação. A segunda, em uma etapa de identificação do tipo de relação existente, seja ela de semelhança, diferença ou outra. E, finalmente, a terceira etapa que envolve a constatação e sistematização de propriedades inerentes à relação.

As etapas delineadas acima, caracterizam muito bem aquilo que temos denominado de abordagem conceitual. Esta abordagem está, justamente, alicerçada por fases análogas que evoluem gradualmente, ampliando suas dimensões a cada nova etapa, tanto nas exigências postas ao sujeito, quanto no montante de idéias e informações que circunda.

Na primeira fase, onde ocorre o primeiro contato com a situação a ser analisada, as ações iniciais são no sentido de identificar a relação existente. Freqüentemente, as primeiras tentativas são encaminhadas pela busca de similaridades com outras já conhecidas, caso contrário, se não há precedentes, o processo de identificação concentra uma nova caracterização a fim de classificar a relação, para uma sistematização posterior.

Ainda nessa fase, após o reconhecimento da situação observada, ocorre uma transferência das constatações feitas durante a avaliação para que sirvam de suporte para a estruturação da relação inicial. Em seguida, a análise da situação ultrapassa o patamar das constatações para atingir o contexto das abstrações, a fim de que passe a ser tratada em termos de uma relação matemática propriamente dita, relação esta que deverá eqüivaler ao comportamento observado. Tal momento eqüivale a segunda fase e é de fundamental importância já que refletirá fortes implicações na sistematização de possíveis propriedades inerentes à situação analisada.

No último estágio, ou fase, dessa estruturação ocorrem às devidas ordenações, sejam elas decorrentes de similaridades, desigualdades ou outras características relevantes, sobretudo, balizadas por comparações. Contudo, para que isso seja possível o sujeito lança mão de suas inferências iniciais, a fim de estabelecer parâmetros para a organização de particularidades. A recorrência a inferências e argumentações anteriores pressupõe a retomada de idéias/conceitos já incorporados, caracterizando uma rede conceitual construída e reconstruída complementarmente.

Todas as fases são caracterizadas pelas constantes interações entre idéias já fundamentadas e situações, similares ou não, já analisadas, cujas propriedades e conceitos intrínsecos já foram assimilados.

Essas três etapas, a nosso ver correspondem, resumidamente, ao processo de construção/incorporação de um conceito. Processo este que acreditamos apresentar correspondências significativas com o processo de conceitualização enfatizado por Vergnaud. No tocante ao conceito de função a pertinência dessas fases fica ainda mais evidente, pois tal conceito abrange a tríade identificação – estruturação – sistematização. E a sua assimilação por parte do sujeito é consubstanciada pela interface entre esses três momentos. Essa tríade nos parece ser a gênese do processo de construção de conceitos/conhecimentos matemáticos.

Em certos momentos a idéia de relação e o conceito de função se misturam, se fundem em um só. Entretanto, suas particularidades precisam ser mantidas. As idéias constituintes são, basicamente, as mesmas, porém o conceito de função possui uma dimensão maior que a idéia de relação, é um conceito mais abrangente, generalizável.

Todavia, sejam nas construções do conceito de função ou das idéias de relação, as diferentes situações de relacionamentos, funcionais ou não, concentram uma grande quantidade de propriedades, caracterizadas de acordo com a situação. A abrangência de tais propriedades acaba ocasionando muitas dificuldades na compreensão das mesmas junto à Matemática. Desse modo, a disposição de situações diversificadas envolvendo essa construção deve ser tal que possibilite a identificação e incorporação de critérios de diferenciação entre os tipos de relações e as propriedades inerentes.

A representação característica, tanto do conceito de função quanto da idéia de relação também assume papel relevante nessa problemática. Um dos métodos para representar simbolicamente as relações consiste no emprego de setas que unem elementos do universo, previamente determinado. Tais setas partem de um ponto a outro, desde que admissíveis dentro da relação em questão. Em geral, é possível partir de qualquer ponto, de diferentes modos, ou seja, de qualquer ponto definido pelo universo sairão várias setas. Porém, certas relações apenas admitem que seus elementos sejam relacionados de alguma forma particular.

Um caso específico de relação é a relação funcional, ou seja, a função. Uma característica bastante forte e importante deste tipo de relação é a possibilidade de determinar possíveis resultados, quando aplicado aos elementos do conjunto, de seu universo definido a priori. Esta delimita o caráter de diagnóstico e predição assegurado ao conceito de função.

Assim, se analisarmos de forma pontual tal caráter, é possível estabelecer certo grau de semelhança entre uma função e uma máquina. Já que, *sabemos o que vai produzir depois que botamos alguma coisa nela. Um artifício mecânico é um artifício determinado; colocando algo na entrada, está bem determinado, uma vez a máquina posta em ação, qual será o produto (DIENES, 1974, p.134).*

Para tanto é preciso definir algumas condições iniciais, quais sejam o universo ao qual se aplica e a ação desta sobre a matéria-prima que colocamos nela, a fim de nos fornecer o produto. Dessa maneira, tal função estabelece uma correspondência entre conjuntos.

Particularmente, acreditamos que a construção do conceito de função, por parte dos alunos, deve permear pela variedade de correspondências estabelecidas, de acordo com diferentes critérios, frente a situações diversas. A investigação e a sistematização dessas correspondências devem subsidiar a estruturação e a compreensão de generalizações. Isto, para que seja possível potencializar o tratamento de informações contidas em tais correspondências, de modo que propiciem discussões iniciais em torno do conceito de função. O progresso em torno da generalização é lento e gradativo, pois envolve a compreensão de abstrações fundamentais que ainda estão em estágio de formação.

Entretanto, em um ambiente onde as situações matemáticas são, suficientemente, ricas, a motivação dos alunos em sistematizar, compreender e, principalmente, incorporar o conceito de função se apresenta de forma muito mais clara, mais acessível e, consequentemente, mais agradável.

Sendo assim, não existe, absolutamente, nenhuma razão para crer que algum aluno, ou qualquer pessoa, não seja capaz de aprender Matemática ou de compreender algum conceito matemático, seja qual for desde que lhes sejam garantidas as condições necessárias para tal. A privação, dos alunos, à emoção contida na descoberta e na construção matemática é uma crueldade. O inesperado pode ser incrivelmente emocionante e produtivo.

Contudo, é provável que, apesar da diversificação de situações matemáticas ricas e significativas, os alunos ainda não atinjam grau de abstração suficiente para a formalização de suas experiências através de expressões matemáticas. Este caminho, paciente na constituição de uma simbologia adequada, está diretamente relacionado com o processo de construção do conhecimento. O desenvolvimento e a compreensão do conceito de função e de suas representações não podem ser acelerados. Ao contrário, a compreensão mais consistente só resultará do amadurecimento gradual das construções.

As ações, aqui, propostas pretendem iluminar o caminho que liga os alunos às construções e experiências matemáticas. Buscam a formação de conceitos matemáticos, em particular do conceito de função, através de etapas, gradativas, que permeiam a abstração de experiências e situações matemáticas e suas conexões com circunstâncias reais. Pois, o conceito de função exprime não só leis universais como também, sociais e culturais, como, por exemplo, a relação entre a população de um país e a área desse país, etc. *"Se queremos que nossas lições se inspirem em uma matemática mais atualizada e dinâmica, não podemos fechar os olhos da criança para aquele que é o primeiro e mais fundamental conceito dessa matemática: o de função"* (CAMPITELI, 2003, p.17).

Essas proposições visam à associação do simbolismo matemático com atividades experienciadas, no intuito de proporcionar, com o auxílio da percepção, a aprendizagem do conceito de função, através do significado de cada ação efetuada. Pois, o acesso a um vasto arsenal de experiências matemáticas, significativas proporciona a extração da verdadeira essência do conhecimento matemático, a de constructo social intimamente envolvido na constituição do aluno enquanto sujeito autônomo e criador.

3.2 - A Importância do Conceito de Função no Ensino de Matemática

O conceito de função é central no ensino e aprendizagem de Matemática, o que é justificado pelo grande número de trabalhos, alguns já destacados nesse trabalho, na área educacional salientando as potencialidades, e também as dificuldades, envolvidas na construção desse conceito.

A importância do conceito de função não se restringe apenas à singularidade que desempenha internamente a essa área do conhecimento, mas também pela sua aplicação intensiva e recorrente em outros campos do conhecimento, em particular o ensino e a aprendizagem de Física. Neste contexto, o que se evidencia como conseqüência é o caráter unificador que este conceito assume, agregando em seu entorno conhecimentos variados e em áreas diversas, servindo também de ponte para a construção de outros conceitos originados em diferentes áreas do conhecimento.

Associado a este perfil é, ainda, necessário destacar a sua generosa contribuição para o desenvolvimento do pensamento matemático, através das múltiplas atividades a que dá origem e, consequentemente, aos múltiplos e distintos sistemas de representação que envolve, tais como: gráficos, diagramas, tabelas, equações.

Deste modo,

> A importância de se atingir um amplo entendimento do conceito de função é maior do que pode parecer ao considerar o uso de funções em um curso inicial standard de cálculo (...). Funções ocorrem por toda a matemática e são usadas em modos muito diversos (SELDEN, 1992, p. 1)

Tal destaque tem sido dado por diversos autores, Vollrath (1986), Campiteli & Campiteli (2003), Zuffi & Pacca (2002), entre outros, dentro da Educação Matemática, os quais afirmam que boa parte da Matemática Moderna se organiza em torno deste conceito e de suas ramificações, assim como outros campos de conhecimentos. O conceito de função também vem sendo visto como responsável pela organização de diferentes partes do currículo de Matemática (Vollrath, 1986), mas embora este conceito encerre, em seu entorno, uma grande variedade de tópicos desse currículo que poderiam ser relacionados, nem sempre essas conexões são explicitadas ou se efetivam durante o processo de ensino e aprendizagem, seja de Matemática ou de outra disciplina, como a Física.

Contudo, apesar das inúmeras pesquisas envolvendo o ensino e a aprendizagem do conceito de função, ainda são grandes as dificuldades apresentadas pelos educandos, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, no seu aprendizado como meio e fim universais.

Em Campos (2000), por exemplo, é possível encontrar um estudo, com preocupações bastante semelhantes às nossas, sobre as relações entre Matemática e Física pertinentes aos processos de ensino/aprendizagem, referentes aos conteúdos específicos de cinemática escalar (Física) e de *funções* (Matemática). Seu estudo é voltado para o nível médio escolar, mais especificamente a alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Apresenta a possibilidade de que alguns fenômenos físicos, particularmente da cinemática, possam ser abordados tomando como base suas relações matemáticas, admitindo tais relações como uma linguagem estruturante do conhecimento físico. Sua proposta está baseada na elaboração e desenvolvimento de uma seqüência de atividades, chamada de modelo de integração, com a qual busca contribuir para uma melhor significação dos conceitos por parte dos alunos, através da integração dessas duas disciplinas.

Santos (2002), apresenta seu estudo sobre a aquisição de saberes relacionados aos coeficientes da equação y = ax + b pela articulação dos registros gráfico e algébrico da *função afim*, com o auxílio de um software construído especialmente para esta finalidade. Para encaminhar o estudo, desenvolve e analisa os resultados obtidos com uma seqüência didática trabalhada com alunos da 2ª série do Ensino Médio. De acordo com o autor, os resultados obtidos revelam uma evolução em relação à construção de significados dos coeficientes da representação algébrica da *função afim* associados a sua representação gráfica, isto é, a reta correspondente.

As dificuldades apresentadas pelos educandos, no trato com o conceito de função, também podem estar fortemente ligadas à prática pedagógica dos professores. Todavia, no encaminhamento da presente pesquisa não se pretendeu analisar tal fator, nem tão pouco suas influências/conseqüências nesse processo.

Porém, analisando o trabalho de Zuffi & Pacca (2002), é possível verificar algumas dessas influências na compreensão, ou não, de tal conceito. As autoras apresentam alguns resultados obtidos com a observação da prática pedagógica de três professores de Matemática do Ensino Médio, ao usarem a linguagem matemática no ensino de *funções*. Com base em uma análise qualitativa dos dados, propõem algumas categorias representativas das concepções geradas na sala de aula com o tema em questão, a partir das formas de expressão efetivamente articuladas pelos professores, junto aos seus alunos. Também é possível obter algumas considerações sobre a relação entre estas concepções e o uso de uma linguagem específica para se tratar as funções no ensino de Química e Física.

Em Campiteli & Campiteli (2003), encontramos um trabalho de grande contribuição, não só para o ensino de Matemática, mas também a toda a educação matemática. Os autores apresentam nesse livro, rigoroso, porém de fácil leitura, uma breve exposição histórica relatando o desenvolvimento da idéia de função em íntimo contato com estudos de fatos e fenômenos naturais. Uma idéia que tange, sem dúvida, à espinha dorsal dessa pesquisa. Disponibilizam uma variedade de exemplos, com formulação simples, porém com inúmeras possibilidades de análise, que acompanham a exposição das diferentes facetas do estudo de funções. Também permitem uma apresentação dos conceitos básicos para o ensino de funções, sugerindo, em contrapartida, possíveis abordagens metodológicas, através de exemplos tirados do cotidiano, ressaltando a importância da experimentação. De modo geral, o tratamento teórico, tanto de conteúdo matemático quanto de aprendizagem, é bastante breve e acessível ao longo das discussões, porém, de grande importância para a apresentação das sugestões metodológicas que, a nosso ver, constituem a parte mais significativa e original dessa obra.

Po outro lado, Moura & Moretti (2003), em seu trabalho, relatam uma investigação, realizada com alunos de 8ª série do Ensino Fundamental, sobre o papel dos conhecimentos prévios e das interações sociais na aprendizagem do conceito de *função*. Essa análise é feita através da comparação entre momentos de trabalho individual e situações de interação, por meio da qual constataram que a interação possibilitou um movimento de compreensão do conceito, no sentido da abstração e de generalização, não identificado na situação de trabalho individual.

Nesse trabalho, também é possível identificar fortes aproximações com a presente pesquisa, na medida em que, nesta, priorizamos o desenvolvimento das atividades propostas sempre em pequenos grupos. Mas, é preciso deixar claro que nossa questão de análise não se estendeu à ênfase de tais aspectos, muito embora compartilhemos com os possíveis benefícios propiciados pela interação entre os sujeitos ao processo de compreensão do conceito.

Pelho (2003) avalia, em seu trabalho, a introdução do conceito de *função* por meio da compreensão das variáveis dependentes e independentes, e do relacionamento entre elas. Essa análise ocorre através da elaboração e aplicação de uma seqüência de ensino e posterior análise dos dados coletados. Para a aplicação da seqüência, a autora utilizou como uma das ferramentas o software Cabri-Géometrè II, além do uso de apenas papel e lápis. O desenvolvimento da seqüência ocorreu junto a alunos do 2º ano do Ensino Médio, e os resultados coletados apontaram para uma evolução, por parte dos alunos, na apreensão do conceito de função. Segundo a autora tal evolução foi propiciada pela compreensão e relacionamento entre as variáveis e pelas devidas articulações entre os diferentes registros de representação da função.

Dentre as muitas dificuldades identificadas pelos trabalhos ressaltados acima, está à inabilidade de construir conexões entre as diferentes representações de funções: fórmulas, tabelas, diagramas, gráficos, expressão verbal das relações, e, ainda, em estabelecer interações com outras áreas do conhecimento que fazem uso dessas mesmas representações, situadas em contextos diferentes.

Outra dificuldade apresentada está ligada à complexidade na construção do próprio conceito de função e, nesse sentido, é imprescindível ter clareza de que a aprendizagem desse conceito é um processo, lento, evolutivo e gradual. E requer, portanto, um espaço que propicie a construção, individual e coletiva, não só desse conceito como dos conhecimentos adjacentes a ele e das relações em domínios intra e interdisciplinares que proporciona.

Em geral, a abordagem desse conceito ocorre através de um excessivo tratamento algébrico. Assim como grande parte da álgebra desenvolvida no ensino fundamental, as aulas envolvendo tais discussões são propostas, na maioria das vezes, através da repetição mecânica de exercícios sem significado aparente para o aluno. Essa solução além de ser ineficiente, é insuficiente, provocando grandes danos no trabalho com outros conhecimentos matemáticos, também fundamentais, entre eles o conceito de função.

As atividades algébricas apresentadas no ensino fundamental precisam privilegiar a construção do conhecimento a partir de situações de aprendizagem, ou situações-problema, que despertem significados para o aluno, tanto para a linguagem utilizada e para os conceitos envolvidos, quanto para os procedimentos abrangidos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), quando são proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, desde os ciclos iniciais, de modo informal, o aluno desenvolve uma capacidade significativa de pensar abstratamente, especialmente quando esta abordagem vier articulada a outros conceitos matemáticos, entre eles a aritmética. Nesse contexto, o aluno adquire base para uma aprendizagem mais sólida e significativa da álgebra, e dos conceitos inerentes ao campo algébrico.

Essa preocupação é justificada pelo fato de que o universo da álgebra *constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite* *sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas* (BRASIL, 1998, p. 116).

Nesse sentido, é interessante, e, sobretudo necessário, propor aos alunos situações em que possam investigar padrões, identificar suas estruturas e construir a linguagem algébrica adequada que a descreva simbolicamente. Esse contexto favorece a construção da álgebra como uma linguagem para expressar, sobretudo, regularidades.

Portanto, é fundamental um espaço onde a construção seja pautada por um compromisso e um envolvimento coletivo, de contínua elaboração e reelaboração, onde todos participam ativamente com seus talentos e potencialidades criativas, assumindo responsabilidades no processo educativo, de maneira crítica e construtiva. Onde a reflexão e a auto-reflexão assumem papéis fundamentais como guias na busca da construção do conhecimento. Neste processo não existem receitas, mas sim questionamentos, indagações e dúvidas, já que acreditamos que

> a educação deve ser um processo vivido em equipe. O diálogo e a colaboração viabilizam o processo ensino-aprendizagem. A aprendizagem ocorre a partir do coletivo, nas reflexões no grupo, em relações interpessoais e nas interações dialógicas. A partir daí, dão-se momentos individuais em que o sujeito cria e recria a sua aprendizagem e reflete sobre ela. É o que estou denominando auto-reflexão (MION, 2002, p. 76).

Como educadores devemos incorporar uma concepção de práxis pedagógica, seja no ensino de Matemática ou no de Física, de caráter emancipatório, concebendo o processo de ensino e aprendizagem como um processo que viabiliza ao educando experiências para atribuir sentido e significado às idéias matemáticas, particularmente às ligadas ao conceito de função, e às suas relações com os fenômenos físicos.

Contudo,

> deveríamos propor aos alunos situações-problema que motivem os alunos a explicar mudanças, a encontrar regularidades entre mudanças, a perceber mudanças e relações entre elas como um problema merecedor de uma explanação científica. Situações que possibilitem aos alunos aplicar o conhecimento de funções para explicar fenômenos de sua vida diária, econômica e social, bem como os inúmeros fenômenos da Física e de outras Ciências (TRINDADE, 1986, p. 136).

Em resumo, a compreensão do conceito se manifesta na medida em que o aluno consegue pensar, justificar, analisar e discutir sobre esse conceito, criando e estendendo relações a outros campos do conhecimento, percebendo a importância deste no contexto do ensino e da aprendizagem de outras disciplinas.

3.3 - A Evolução Histórica do Conceito de Função e os Fenômenos Físicos

As primeiras noções de relação funcional surgiram da necessidade de relacionar dois conjuntos de acordo com uma regra ou lei. Da necessidade de explicar um fenômeno, suas variações e alterações. Apesar de sua origem ser incerta a utilização de tabelas de correspondências resultantes da observação de fenômenos físicos já era bastante difundida desde tempos remotos, auxiliando na tarefa essencial do homem de compreender e alterar a natureza. Também, no trabalho de observar e descrever os fenômenos, sistematizando seus achados num *quadro explicativo* (CARAÇA, 1963), que, se coerente, garantiria que suas conseqüências e previsões fossem confirmadas pela observação e experimentação.

Através de observações foi possível verificar que em certos fenômenos, quando mantidas as condições iniciais, ocorriam regularidades, comportamentos similares ou mesmo iguais. A existência de regularidades é essencial, para o trabalho de investigação da natureza por permitir pela *repetição*, explicações com atributos de universalidade, em especial *diagnósticos, retrodição e predição*, sempre que mantidas as condições necessárias, sejam os efeitos proporcionais às causas ou não. Mediante a necessidade humana de explicar a realidade, é lançada sobre ela uma infinidade de leis, leis quantitativas, originadas nas regularidades dos fenômenos observados, a espera de um instrumento ou conceito matemático próprio para o seu estudo.

Todo esse processo de investigação e busca contínua de explicações para os fenômenos observados teve papel importantíssimo no processo de evolução do que hoje conhecemos por *função*, seja no contexto da Matemática, seja no contexto da Física.

A idéia de função matemática esteve sempre ligada historicamente à evolução do conhecimento de correspondências físicas. As associações da Matemática e os fenômenos naturais tornaram-se um canal facilitador na busca da generalização adequada para o conceito, por parte dos matemáticos da época, por volta do século XIV. Nesse período, um significativo grau de originalidade inventiva resultou num avanço numa direção que havia sido evitada até então. A Matemática arquimediana, bem como a Física arquimediana, fora essencialmente estática; o estudo das mudanças dinâmicas era considerado mais adequado à discussão filosófica qualitativa do que a uma formulação científica quantitativa.

Porém, a argumentação escolástica nas universidades de Oxford e de Pádua, no século XIV, provocou um desvio na visão aristotélica de mudança e variação. Novas questões começaram a ser levantadas pela intelectualidade, tais como: *Se um objeto se move com velocidade variável, até que ponto se moverá num dado tempo? Se a temperatura de um corpo varia de uma parte para outra, quanto calor há em todo o corpo?* Reconhecem-se aqui precisamente as questões com que o cálculo lida; entretanto os intelectuais do período medieval não tinham herdado da Antigüidade nenhuma análise de variáveis matemática. Daí resultou que os sacerdotes das universidades inglesas, francesas e italianas desenvolveram por si próprios um cálculo integral primitivo.

Um dos líderes desse movimento foi Nicole Oresme (1323-1382), bispo de Lisieux. Por quase um século antes de seu tempo (tempo de Oresme) os filósofos escolásticos vinham discutindo a quantificação das “formas” variáveis, um conceito de Aristóteles aproximadamente equivalente a qualidades. Entre tais formas havia coisas como a *velocidade de um objeto móvel* e a *variação de temperatura, de ponto para ponto, num objeto com temperatura não-uniforme*. As discussões eram interminavelmente difusas, já que os instrumentos de análise disponíveis eram inadequados. Apesar dessa falta, os lógicos em Merton College tinham obtido um importante teorema quanto ao valor médio de uma forma *uniformemente diforme* – isto é, uma em que a taxa de variação da taxa de variação é constante.

Oresme conhecia bem esse resultado e foi a partir dele que, em algum momento antes de 1361, ocorreu-lhe um pensamento brilhante – por que não traçar uma figura ou gráfico que representasse a maneira pela qual variam as coisas[2]. Tal idéia fornece-nos, assim, um dos mais antigos exemplos na história da matemática do que hoje chamamos *gráfico*, ou *representação gráfica*, de uma *função*.

Também escreveu que tudo aquilo que for mensurável é imaginável na forma de quantidade contínua e traçou um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se move com aceleração constante. Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. Percebeu, ainda, que as extremidades desses segmentos jazem ao longo de uma reta; e se o movimento uniformemente acelerado parte do repouso, a totalidade dos segmentos velocidade (que chamamos ordenadas) preencherá um triângulo retângulo.

Como a área desse triângulo representa a distância percorrida, Oresme acabou fornecendo uma verificação geométrica da regra de Merton, pois a velocidade no ponto médio do intervalo de tempo é a metade da velocidade final. Os

---

[2] Sugerimos, aqui, que Oresme teria sido o primeiro a ter essa idéia, porém, isso não é necessariamente verdade. Marshall Clagett encontrou o que parece ser um gráfico mais antigo, traçado por Giovanni di Cosali.

termos longitude e latitude, utilizados por Oresme, eqüivalem às nossas ordenadas e abscissa, e sua representação gráfica assemelha-se com nossa geometria analítica. O uso de coordenadas não era novo, pois Apolônio, e outros antes dele, tinham usado sistemas de coordenadas, porém sua representação gráfica de uma quantidade variável era novidade.

Aparentemente, ele percebeu o princípio fundamental de se poder representar uma função de uma variável como uma curva, muito embora não tenha utilizado eficazmente essa observação a não ser no caso de função linear. Oresme escrevia que *"toda qualidade uniformemente diforme terminando em intensidade zero é imaginada como um triângulo retângulo"*, o que hoje corresponderia, de maneira análoga, a dizermos que o gráfico da velocidade num movimento uniformemente acelerado é uma reta. Ele ressaltou a propriedade de inclinação constante para o seu gráfico de velocidade em função do tempo no movimento uniformemente acelerado, o que eqüivale à equação por dois pontos de uma reta em geometria analítica.

Parece claro que Oresme se interessava mais pelos aspectos de cálculo da situação, isto é: (1) o modo pelo qual a função varia (isto é, a equação diferencial da curva), e (2) o modo pelo qual a área sob a curva varia (isto é, a integral da função). Além disso, ao achar a função distância, a área, Oresme evidentemente estava realizando geometricamente uma simples integração que resulta na regra de Merton[3]. Apesar de não ter explicado por que a área sob a curva velocidade-tempo representa a distância coberta, é provável que pensasse na área como sendo formada de muitos segmentos verticais ou indivisíveis cada um dos quais representava uma velocidade que se mantinha por um tempo muito curto.

Para Oresme, era claro então que a área sob o gráfico representaria a distância percorrida, já que esta é a soma de todos os incrementos de distâncias correspondentes às velocidades instantâneas. Nesse ponto, obviamente, vai-se de encontro a todas as dificuldades lógicas e filosóficas que levaram aos paradoxos de

[3] Formulação deduzida pelos filósofos escolásticos, em Oxford, no Merton College, para o movimento de velocidade com variação uniforme, que tem o nome de Regra de Merton.

Zenão[4] e fizeram com que os cautelosos matemáticos gregos evitassem o estudo de variações como tal. A representação gráfica de funções, conhecida até então como a latitude de formas, continuou a ser um tópico popular desde os tempos de Oresme até o de Galileu.

Também é devido, em grande parte, a Oresme uma visão mais ampla da proporcionalidade, base fundamental para a compreensão do conceito de *função.* Outro importante estudioso da proporcionalidade foi Thomas Bradwardine (1290-1349). *Os Elementos* de Euclides, uma das mais antigas obras matemáticas grega a chegar até nós, e, sem dúvida, o texto mais influente de todos os tempos, continham uma teoria da proporção, ou igualdade de razões, logicamente firme. Essa fora aplicada pelos estudiosos antigos e medievais a questões científicas.

Por exemplo, para um tempo dado, a distância coberta num movimento uniforme é proporcional à velocidade; e para uma distância, o tempo é inversamente proporcional à velocidade. Aristóteles julgara, erroneamente, que a velocidade de um objeto sujeito a uma força propulsora atuando num meio resistente é proporcional à força e inversamente proporcional à resistência. Aos estudiosos, em determinados aspectos, parecia que essa formulação ia contra o senso comum. Em 1328, Bradwardine desenvolveu a teoria de Boécio, utilizando uma teoria generalizada de proporções, da proporção dupla ou tripla ou, mais geralmente, o que chamaríamos proporção *n-upla*. Em conseqüência, Bradwardine agora estava em condições de propor uma alternativa para a lei do movimento de Aristóteles.

---

[4] Indroduzido no meio intelectual da escola de Eléia apresentou aos sábios atenienses quatro difíceis problemas, ou paradoxos, que os deixaram desconcertados e sem resposta. Todos eles tinham a ver com o movimento, e só foram esclarecidos, devidamente, 24 séculos depois. Seu objetivo era defender as idéias de Parménides de que o universo seria único, imutável e imóvel, sendo que movimento, mudança, tempo e pluralidade não seriam mais do que ilusões. Zenão não traz novas provas da impossibilidade de movimento, tudo o que faz é mostrar que a teoria pluralista, como a dos pitagóricos, é tão incapaz de explicá-lo como a de Parménides. Todos os argumentos que Zenão usa contra a pluralidade e movimento são na verdade variações do mesmo argumento, que aplica igualmente espaço e tempo. Apesar de os 4 paradoxos relacionados com o movimento parecerem ilógicos, para não dizer confusos, eles não são simples de explicar e conduzem a problemas matemáticos. Para os matemáticos gregos, que não tinham uma real concepção de convergência ou infinito, estes raciocínios eram incompreensíveis. Aristóteles considerou-os e resolveu pô-los a parte, deixando-os abandonados por quase 2500 anos. Hoje, com o desenvolvimento da matemática, nomeadamente no estudo de somas infinitas e de conjuntos infinitos, estes paradoxos podem ser explicados com alguma satisfação. Mas ainda agora, o debate continua sobre a validade dos paradoxos e as suas racionalizações.

Os fatos relatos acima, ilustram muito bem o que se defendeu, ao longo do capítulo: a ligação, historicamente estabelecida, entre o conceito de função e algumas correspondências físicas. Temos aqui exemplos, bastante antigos, de como o estudo de fenômenos físicos, ao longo dos tempos, serviu também para o desvelamento de conceitos matemáticos, dentre os quais está o conceito de função.

Na busca de esclarecimentos do termo *função* surgiu à tendência à aritmetização. Quem introduziu esse termo foi Leibniz (1646-1716), que apesar de não ser o responsável pela moderna notação para função, é a quem se deve a palavra *"função"*, praticamente no mesmo sentido em que é usada hoje. Antes do meio do século dezoito haviam surgido diferenças de opinião quanto à representação de funções, quando d'Alembert (1717-1783) e Euler (1707-1783) tinham dado soluções do problema de uma corda vibrante em forma fechada, usando duas funções arbitrárias, ao passo que Daniel Bernoulli (1700-1782) achara uma solução em termos de uma série infinita de funções trigonométricas. Como essa última solução parecia implicar periodicidade, ao passo que as funções arbitrárias de D'Alembert e Euler não eram necessariamente periódicas, parecia que a solução de Bernoulli era menos geral. Que isso não era assim foi mostrado em 1824 por J.B.J. Fourier (1768-1830).

A notação *f(x)* para uma função de x (usada nos *Comentários* de Petesrburgo para 1734-1735) é, entre outras, uma notação de Euler bastante aparentada às utilizadas hoje. Nossas notações são hoje assim mais por causa de Euler do que de qualquer outro matemático.

Com relação às notações a obra de Euler também marcou época. Pode ser dito com justiça que Euler fez pela análise infinita de Newton e Leibniz o que Euclides fizera pela geometria de Eudoxo e Teaetetus, ou o que Viète fizera pela álgebra de al-khowarizmi e Cardano. O importante tratado a *Introductio in analysin infinitorum,* de Euler, em dois volumes de 1748 serviu como fonte para os florescentes desenvolvimentos da matemática durante toda a segunda metade do século dezoito. Pode-se dizer que, a partir de Euler, o conceito de função adquire um novo status, tornando-se a linguagem preferida dos matemáticos.

Dessa época em diante a idéia de função tornou-se fundamental na análise. Fora prenunciada pela latitude de formas medieval, e estava implícita na geometria analítica de Fermat e Descartes, bem como no Cálculo de Newton e Leibniz. O quarto parágrafo da *Introductio* define função de uma quantidade variável como "qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes". Por vezes Euler pensava em função menos formalmente e mais geralmente como a relação entre as duas coordenadas de pontos sobre uma curva traçada à mão livre sobre um plano. Hoje tal definição é inaceitável, pois não explica o que é "expressão analítica". Euler presumivelmente tinha em mente primariamente as funções algébricas e as funções transcendentes elementares (trigonométricas, logarítmica, trigonométricas inversas e exponencial); o tratamento estritamente analítico das funções trigonométricas foi, na verdade, em larga medida estabelecido pela *Introductio*.

Aplicações consideráveis do conceito de função também são devidas aos trabalhos de D'Alembert, Fourier, Dirichlet, Cauchy, Riemann e Weierstrass.

É possível perceber que a definição de função foi aprimorada com o passar do tempo, de acordo com a curiosidade e necessidade de seus estudiosos em estabelecer uma definição mais precisa e rigorosa.

Abaixo se tem algumas das definições encontradas, ao longo dos tempos, para *função*:

Definição 1: Uma função é um conjunto de pares ordenados cujos primeiros elementos são todos diferentes.
Definição 2: Quando o valor de uma variável depende de outra, a primeira se diz função da segunda.
Definição 3: Se a cada valor admissível de x corresponde um ou mais valores de y, então y é função de x.
Definição 4: Se y é função de x, então é igual a uma expressão algébrica de x.

De acordo com um exame feito em vinte textos elementares de álgebra, dos quais onze foram publicados antes de 1959 e nove após este ano, as definições de *função* encontradas nos textos mais antigos eram a 2, 3, 4 e outras; dos mais recentes, seis usaram a definição 1.

A mesma análise feita em quinze textos universitários de álgebra, sete publicados antes de 1959 e oito após 1959, verificou que nenhum dos textos antigos usou a definição 1; dos mais recentes, quatro usaram.

Essa história bastante recente de *função* adquire um significado ainda maior no contexto da história mais antiga da idéia e da palavra. Tanto que Eric Temple Bell sugere que sejam creditados aos babilônios, por volta do ano 2000 a.C., uma definição operacional de *função*, devido ao uso que faziam de tabelas, como por exemplo $n^3 + n^2$, $n = 1, 2, ..., 30$, sugerindo a definição de que uma função é uma tabela ou uma correspondência (entre n na coluna da esquerda e $n^3 + n^2$ na da direita).

Em resumo, as idéias mais explícitas de *função* parecem ter surgido por volta da época de René Descartes (1637), que parece ter sido o primeiro a usar o termo. Este definia *função* como significando qualquer potência de x, como x^2, x^3,.... Gottfried Wilhelm von Leibniz (1692) estabelecia uma *função* como qualquer quantidade associada a uma curva, como as coordenadas de um ponto da curva, o comprimento de uma tangente à curva e assim por diante. Johann Bernoulli (1718) definiu função como sendo qualquer expressão envolvendo uma variável e quaisquer constantes. Leonhard Euler (1750) definiu *funções* no sentido de *funções analíticas*, conforme definição de Bernoulli, usando uma segunda definição, de acordo com a qual uma *função* não precisava ter uma expressão analítica, mas podia ser representada por uma curva, por exemplo. Joseph Louis Lagrange (1800) restringiu o significado de *função* a uma representação da série de potências. Jean Joseph Fourier (1822) afirmou que uma *função* arbitrária pode ser representada por uma série trigonométrica.

Mais recentemente, com o advento da teoria dos conjuntos na segunda metade do século XIX, uma função passou a ser considerada como uma correspondência entre dois conjuntos A e B. Mais precisamente, os últimos anos do século XIX assistiram ao desenvolvimento da teoria dos conjuntos por Georg Cantor, bem como de sua abordagem dos fundamentos da análise que se tornou, desde então, característica do século XX. Em conseqüência, hoje a idéia de *função* é geralmente definida na linguagem rigorosamente não ambígua de conjuntos:

> *Dados dois conjuntos de elementos, respectivamente denotados por A e B, dizemos que B é função de A - ou que A é aplicado em B, A → B - quando para todo elemento de A há um elemento correspondente em B e quando não há dois elementos distintos em B correspondam ao mesmo elemento de A.*

A fim de tornar o conceito ainda mais preciso, com freqüência define-se uma relação funcional entre *A* e *B* como sendo *o conjunto dos pares ordenados (a, b), onde a é um elemento de A e b é um elemento de B.* Essa correspondência de conjuntos, ainda pode ser indicada por uma letra apenas, por exemplo, *f.* A função *f* associa a cada *x* em *A* um único elemento, *f(x),* em *B*, sendo que *f(x)* depende de *x*. Lê-se *f(x)* como sendo *"o valor de f em x".*

Em decorrência dos aprimoramentos da noção de função, o cálculo estava fadado a sofrer alterações. Um exemplo é a noção de integral que se modificou tanto que já não se fala em *a* integral. Existem vários tipos de integrais, formulados para cobrir os tipos, cada vez mais amplos, de funções.

Desse modo, o conceito de função que hoje pode parecer simples é resultante de um processo de evolução histórica, lenta e longa que iniciou na Antigüidade, cuja utilização data de milênios, e acabou rendendo um grande impulso para a Matemática, principalmente no tocante a sua aplicabilidade em outras ciências.

Dentre os ramos impregnados de fenômenos estabelecidos através de relações funcionais, no contexto da Física, destacamos os ligados, à Cinemática, à Calorimetria, à Eletricidade, entre outros. Portanto, as discussões referentes a essas relações e aproximações não podem ser desconsideradas, sejam elas oriundas de experiências práticas e investigações empíricas, ou de semelhanças conceituais pertinentes.

A fim de ilustrar parte dessa relação entre o conceito de função e os fenômenos físicos tomaremos como exemplo, a evolução dos estudos dos movimentos, da cinemática.

Em 1861, com Dedekind (1831-1916), é possível encontrar um apelo à idéia de função como um fenômeno. Ele definiu função com base na idéia de uma lei da natureza, envolvendo grandezas físicas.

Voltemos ainda mais na história para retomar o estudo do movimento iniciado por Oresme, especialmente no que tange ao desenvolvimento da cinemática. Vamos analisar, especificamente, o avanço da cinemática escalar protagonizado por Galileu. Galileu retomou, com vigor, o estudo da cinemática, sendo, inclusive, apelidado de platônico por buscar o ideal matemático na natureza. Acreditava que quando os esforços realizados a fim de matematizar a natureza não dão certo é porque a tarefa foi encaminhada incorretamente.

Galileu nasceu na Itália. Suas idéias iam contra as verdades ensinadas pela igreja e por isso foi perseguido, o que não o impediu de realizar grandes produções científicas, tornando-se responsável por significativos avanços das ciências de todos os tempos. Tamanho empenho ficou visível devido ao seu interesse em traduzir os fenômenos físicos em termos quantitativos, ou seja, em medidas e em descobrir as relações matemáticas que os descrevessem de maneira mais simples.

Uma análise feita por Drake (1957) destaca o papel fundamental que a experimentação quantitativa desempenhou na criação da teoria matemática do movimento de Galileu. Em contrapartida, Chalmers (1976) acredita que, em oposição ao mito popular, Galileu parece ter realizado poucos experimentos em mecânica. Especialmente pelo fato de que grande parte dos experimentos a que ele se refere, enquanto articula sua teoria, são experimentos mentais.

As pesquisas de Galileu começaram aos 19 anos, após conseguir uma autorização de seu pai para estudar Física e Matemática, já que tais ciências eram tidas como inúteis. Nesse mesmo período, descobriu a fato de que a duração da oscilação de um pêndulo é independente da amplitude do movimento. Entretanto, não conseguiu chegar à verdadeira fórmula do pêndulo devido à imprecisão dos recursos matemáticos existentes na época. Mesmo assim, também refutou a tese de

Aristóteles sobre a queda dos corpos.

Galileu utilizou o plano inclinado e o pêndulo para descrever os movimentos de queda livre. A principal dificuldade encontrada por ele foi conseguir um meio de medir pequenos intervalos de tempo tão exatamente quanto exigia a aceleração da queda. Usou, inclusive, as batidas do próprio coração como medidor de tempo, construindo, em seguida, uma espécie de relógio de água para resolver o problema.

Ele não estudou tão densamente o movimento uniforme quanto estudou o movimento acelerado. Isto se justifica pelo fato de Galileu achar que o movimento uniforme só poderia ocorrer em situações muito especiais, ou quase impossíveis. É possível notar que a aceitação do movimento uniforme está estreitamente ligada à noção do princípio da inércia, da qual Galileu chegou próximo, mas não o suficiente.

Os *paripatéticos* (físicos aristotélicos) acreditavam que um corpo cai com velocidade crescente, pois é impulsionado continuamente pelo ar que fica sobre ele. Porém, Galileu percebeu a causa na aceleração permanente da gravidade. Seu sistema de razoamento (1604), que foi publicado somente em 1638, apoiado no de Oresme, chegou, assim, a se tornar viável. No movimento de queda, em períodos determinados de tempo, o corpo adquire certa velocidade, que em virtude da ação constante da gravidade, encontra-se duplicada ao fim do segundo espaço, triplicada ao fim do terceiro e assim sucessivamente. Portanto, as velocidades estão na mesma relação que os tempos transcorridos desde o início da queda.

Galileu estudou também, em menor escala, os lançamentos oblíquos, verificando que a curva de projeção era um segmento de parábola mais ou menos deformada pela resistência do ar.

Torricelli (1608-1647) e Viviani (1622-1703) prosseguiram com os estudos de Galileu, e suas contribuições para a cinemática estão ligadas, principalmente, à solução para problemas relacionados ao movimento da ciclóide. Já D'Alembert (1717-1783), Euler (1707-1783) e Carnot (1796-1832) elaboraram a teoria geométrica do movimento.

Entretanto, foi Ampère (1775-1836) quem batizou o estudo dos movimentos, desconsiderando suas causas, de cinemática, em sua obra *Philosophie des Sciences*, de 1834, esclarecendo as nuanças dessa ciência e situando-a no estudo da Mecânica. Com os estudos dos movimentos do som e da luz, no século XIX, a cinemática evoluiu consideravelmente.

O estudo das relações de espaço pertence à geometria Euclidiana, entretanto, ao introduzirmos a variável tempo, transpomos o campo da cinemática. Ou seja, variáveis conhecidas na geometria como espaço percorrido, ângulo descrito, com a intervenção do tempo tornam-se outras, tais como: velocidade, aceleração, velocidade angular e aceleração angular. Tais movimentos podem ser estudados sob o ponto de vista analítico (cinemática escalar) e gráfico (cinemática vetorial). Nitidamente, Matemática e Física andaram e evoluíram juntas historicamente.

Contudo, com a criação do cálculo infinitesimal, fato devido a Newton e Leibniz, estas ciências começaram a traçar rumos distintos. Particularmente, no tocante à cinemática, a limitação dos conhecimentos matemáticos da época não impediu a elucidação de fenômenos físicos. Pelo contrário, a Matemática possibilitou, principalmente a partir de Galileu, o estudo analítico dos fenômenos, tornando-se um poderoso instrumento de argumentação ou de tomada de decisões.

Mesmo assim, as leis dos movimentos, da forma que conhecemos hoje, só foram enunciadas muito tempo depois da sua descoberta. Isso também é uma conseqüência da falta de um sistema de unidades adequado, capaz de permitir uma correlação precisa entre as grandezas. Outro obstáculo bastante influente foi à inexistência de instrumentos apropriados para a realização das experiências idealizadas. Um exemplo disso é a dedução, feita por Galileu, de que os corpos de pesos e formas diferentes cairiam exatamente na mesma velocidade no vácuo, porém, naquele tempo não era possível conseguir o vácuo para provar essa afirmação. A falta de um relógio preciso o suficiente, para medir os tempos de queda dos objetos que estudava também se configurou em uma limitação instrumental encontrada por Galileu.

Portanto, a Matemática apresentava-se como sendo a única arma disponível para os físicos provarem suas teorias, já que nesse período as dificuldades encontradas para a realização de experiências eram as mais diversas. Nesse sentido, a valorização da Matemática por parte de Galileu era bastante nítida, e pode ser verificada em suas biografias.

Enfim, de acordo com o que foi relatado aqui, a interface Matemática/Física, especialmente no que tange ao conceito de função e a cinemática, encontra seus alicerces nos mais remotos antepassados. Podemos dizer que, em certos momentos, esta pode ser confundida com a própria gênese do desenvolvimento da mecânica, na qual encontram uma origem comum.

É ancorado nessas relações e interações entre a Matemática e a Física, historicamente construídas e fundamentadas, que se construiu uma proposta que busca viabilizar a construção do conceito de função afim e potencializar, a partir dessa construção, aproximações conceituais entre as duas disciplinas. A fim de priorizar nesse processo os questionamentos e o desequilíbrio através do confronto de argumentos e posicionamentos, com o propósito de motivar a aprendizagem e a construção, individual e coletiva, de idéias. Uma construção dialógica, pautada pelo envolvimento intencionalmente produzido.

Para tanto, temos como ponto de partida as noções mais simples e informais do conceito, rumando a seguir para uma generalização mais formal e perpassando, através das atividades diversas, pelas relações entre a Matemática e os fenômenos físicos estudados na Física. O planejamento dessas articulações foi feito tendo o cuidado para que as situações-problema propostas desencadeassem tais conexões.

Outro cuidado importante foi o de que as conexões estabelecidas estivessem em consonância com o objetivo inicial, de potencializar aproximações que privilegiassem o enfoque de conceitos bastante trabalhados no contexto dos fenômenos físicos, abordando também aspectos sociais pertinentes à discussão dos mesmos. Entre esses conceitos destacamos o de velocidade, o de tempo, o de distância percorrida, o de posição, entre outros, enfocando suas interações, representações e características funcionais.

3.4 - O Conceito de Função Afim: Algumas Considerações

Nesse momento, vamos fazer algumas considerações pontuais em relação ao conceito de função afim, sua definição matemática, seus casos particulares, bem como alguns comentários sobre a sua terminologia e a sua representação gráfica. Também vamos delinear algumas reflexões em torno da função linear, um dos casos particulares da função afim, e certamente o mais difundindo já que caracteriza a proporcionalidade.

De acordo com Lima et alli (1999), a função afim é caracterizada como uma função real de uma variável real, ou seja, funções $f : X \rightarrow R$ que têm como domínio um subconjunto $X \subset R$, para as quais os valores $f(x)$, com todo $x \in X$, são números reais.

Assim, sua definição matemática eqüivale a dizer que:

Uma função $f: R \rightarrow R$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in R$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in R$.

- **Alguns casos particulares:**

Existem casos particulares de funções afins, tais como:

- A *função identidade* é um caso particular de funções afins. Isto é,
a função $f: R \rightarrow R$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in R$.

- As *translações* $f: R \rightarrow R$, $f(x) = a + b$, também são funções afins.

- Também são casos particulares de funções afins:
  - as funções *lineares*, $f(x) = ax$;
  - as funções *constantes*, $f(x) = b$.

Considerações Gerais:

- O número $b = f(0)$ também é chamado, por vezes, de *valor inicial* da função f. Isso porque obtemos b com o valor que a função analisada adquire quando $x = 0$.

- A determinação do coeficiente a pode ser feita através do conhecimento dos valores de $f(x1)$ e $f(x2)$ assumidos pela função em dois pontos diferentes, e arbitrários, x1 e x2. Assim, conhecidos

  $f(x1) = ax1 + b$

  $f(x2) = ax2 + b$

  obtemos, $f(x2) - f(x1) = a\,(x2 - x1)$,

  ou seja, $a = \dfrac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}$.

  Sendo assim, tendo-se $x, x+h \in R$, com $h \neq 0$, o número $a = \dfrac{[f(x + h) - f(x)]}{h}$,

é chamado de taxa de crescimento, ou taxa de variação, da função f no intervalo de extremos $x, x + h$.

- De acordo com o sinal do coeficiente *a* é possível classificar a função afim em crescente, decrescente ou constante. Desse modo, temos uma função afim:
  - crescente: quando a taxa de crescimento (o coeficiente a) é positiva;
  - decrescente: quando a taxa de crescimento é negativa;
  - constante: quando a taxa é nula.

- A representação gráfica de uma função afim, $f: x \mapsto ax + b$, é uma linha reta.

- Quanto à terminologia, em geral a referência feita à função afim, especialmente no contexto escolar, é como "função de primeiro grau". Essa nomenclatura implica na ressalva de que função não tem grau. Quem tem grau é polinômio. Isso, certamente, decorre do fato de que quando $a \neq 0$, a expressão $f(x) = ax + b$ é um polinômio do primeiro grau.

- **Função linear**

  - A função linear, f(x) = a.x, é a expressão matemática para os problemas de proporcionalidade. Esta é, provavelmente, a idéia matemática mais conhecida e utilizada, em diferentes áreas e diversas situações desde tempos remotos.

  - Uma proporcionalidade pode ser considerada como sendo: *uma função f: R → R tal que para quaisquer números reais c, x tem-se f(cx) = c.f(x) (proporcionalidade direta) ou f(cx) = f(x)/c, se c≠*0 *(proporcionalidade inversa) (*LIMA et alli, 1999).

  - A proporcionalidade inversa só tem sentido quando se trata de grandezas não nulas.

  - A referência feita à proporcionalidade geralmente corresponde a uma proporcionalidade direta. Pois, na prática, são mais facilmente identificadas através da expressão y= ax, em geral de maneira explícita, ou quase. Um exemplo bastante simples pode ser apresentado da seguinte forma: se um quilo de arroz custa “a” reais, então “x” quilos custam y= ax reais.

As considerações apresentadas aqui tiveram o intuito de possibilitar esclarecimentos pontuais referentes ao conceito de função afim, bem como de seus casos particulares, especialmente, o de função linear. A abordagem feita nesse momento concentra um perfil mais formal, buscando explorar, de maneira sucinta, as definições e os simbolismos freqüentemente utilizados no ensino desses conceitos.

A problematização desse conceito, adjacente ao de função afim, ocorre especialmente durante a atividade teórico-experimental dos dominós, situação esta que proporciona a estruturação do mesmo. A ênfase nesses dois casos se justifica na medida em que o primeiro é o foco principal dessa pesquisa e o segundo, em conseqüência, surge como um dos momentos intermediários da construção proposta pela pesquisa, já que no processo de construção do conceito de função afim, perpassamos pelo conceito de função linear, uma particularidade do primeiro.

CAPÍTULO 4 – O COCEITO DE FUNÇÃO E A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD

4.1 – Teoria dos Campos Conceituais

Nesse capítulo, buscamos descrever fortes implicações da Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1990), no processo de construção e compreensão do conceito de função, e do conceito de função afim. Essa abordagem pretende destacar, amparada nessa teoria, que o processo de construção deste conceito é, por si só, algo bastante complexo e ocorre de forma gradual.

Nesse sentido, necessita de um conjunto de condições que constituam uma plataforma de estruturas capazes de levar o aluno a aprender Matemática, a partir da construção gradativa e dos significados dos seus conceitos. Pois, *"a maioria das crianças jamais consegue compreender o verdadeiro significado dos conceitos matemáticos"* (DIENES, 1974, p.15).

É baseada, principalmente, na premissa de que *"um conceito não pode ser reduzido a sua definição, ao menos se nos interessamos a sua aprendizagem e ao seu ensino. É através de situações e de problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança"* (VERGNAUD, 1990, p.135) que localizamos a pertinência dessa abordagem no processo de construção do conceito de função afim.

Essa investigação pretende encaminhar uma análise pontual da evolução na compreensão do conceito de função, e consequentemente do de função afim, por meio da conceitualização das estruturas, especialmente das estruturas multiplicativas[5] abordadas pelo referido autor. Através da ênfase no funcionamento cognitivo do sujeito, diante de situações diversas de construção do conhecimento e sua ligação, e dependência, com conhecimentos explícitos e implícitos.

[5] As estruturas multiplicativas concentram todas as situações que podem ser analisadas como problemas de proporção simples e múltipla, para as quais alguém usualmente necessita multiplicar ou dividir. Neste caso, fariam parte do campo das estruturas multiplicativas os conceitos de divisão, multiplicação, proporção, fração, razão, números racionais, funções lineares e n-lineares, análise dimensional e espaço vetorial.

Nesse contexto, Vergnaud (1990) argumenta ser preciso dar uma atenção especial ao desenvolvimento cognitivo, às continuidades e rupturas contidas nele, às passagens obrigatórias que o sujeito precisa superar, à complexidade característica de cada classe de problemas, aos procedimentos e suas representações simbólicas, bem como, a uma análise dos principais erros manifestados.

A seguir, descreveremos, de maneira sucinta, algumas idéias que fundamentam a *Teoria dos Campos Conceituais*, de Vergnaud e sua preocupação com a conceitualização. A presente pesquisa também está pautada por essa mesma preocupação, o que pode ser verificado, mais especificamente, no capítulo 3. É nesse intuito que buscamos apontar conexões entre nossa proposta e a Teoria dos Campos Conceituais, salientando sua potencialidade no trato com o conceito de função afim.

Tal escolha é justificada pelas dimensões que essa teoria abrange, especialmente no tocante à formação dos conceitos e a constituição destes pelo sujeito. E, está aliada à iluminação de questões intimamente ligadas a conceitualização progressiva, em especial, no tratamento das estruturas multiplicativas, que sustentam a construção do conceito de função afim.

A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista voltada para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas. Envolve, em seu entorno, a conceitualização do real, abordando a estruturação, bem como as rupturas, presentes no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, através da sua dimensão conceitual. Enfatiza aspectos das relações entre conceitos e sua importância nas ações encaminhadas pelos sujeitos.

Os campos conceituais podem ser definidos, segundo Vergnaud (1990), como sendo um conjunto de situações[6] cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão. Estes possibilitam a análise das relações entre os conceitos como conhecimentos

---

[6] É preciso esclarecer que a idéia de situação abordada por Vergnaud não incorpora o sentido de situações didáticas assumidas por Guy Brousseau (1986), mas sim o de tarefa, tendo em vista que as situações complexas são, na verdade, a combinação de tarefas. Estas exigem o conhecimento da natureza e das dificuldades particulares de cada uma.

explícitos, bem como, da importância das invariantes operatórias que são implícitas nas ações do sujeito em situação, e o aprofundamento da compreensão das relações entre significados e significantes.

Essa análise é feita tomando distintos campos conceituais, tais como as estruturas aditivas, as multiplicativas, intimamente ligadas ao conceito de função, em especial do de função afim, bem como a lógica das classes e a álgebra.

Gérard Vergnaud (1990) parte da premissa de que o conhecimento está organizado por campos conceituais cujo entendimento e domínio por parte dos sujeitos ocorre através de um processo longo, que envolve experiências, maturidade e aprendizagem. Nesse sentido, acentua que o domínio de um campo conceitual está intimamente ligado à diversidade de problemas e propriedades, e ao tempo de dedicação e estudo, que abrange um longo período de tempo, voltados para o tratamento destes. Este é um processo gradual que requer o enfrentamento das dificuldades conceituais. O autor argumenta que a conceitualização é o âmago do desenvolvimento cognitivo; é a essência constitutiva da cognição.

Nesse sentido, a teoria dos campos conceituais não é uma teoria baseada no ensino de conceitos explícitos, formalizados, mas sim uma teoria psicológica do processo de conceitualização do real. Em virtude disso, esta é uma teoria complexa, pois abrange todo o desenvolvimento de situações, dominadas gradativamente, dos conceitos e teoremas primordiais para proceder, de maneira eficaz, nessas situações, abordados e analisados a partir de uma única perspectiva teórica.

Embora a teoria dos campos conceituais tenha sido desenvolvida, principalmente, pelo interesse nos campos conceituais envolvidos nas estruturas aditivas e multiplicativas, esta não é afeta somente da Matemática, ou desses campos. Em Física e em Biologia, entre outras, existem vários campos conceituais, tais como o da Mecânica e o da Termologia, no contexto da Física, e os campos da reprodução e o dos processos celulares, na Biologia.

A seguir, encaminhamos alguns esclarecimentos em torno dos pontos cruciais que, portanto, merecem uma análise mais densa, por serem entes formativos e sustentadores da Teoria dos Campos Conceituais. Nesse viés, destacamos os esquemas, as invariantes operatórias, as situações, bem como as noções de significado e significante, a própria noção de campo conceitual e a sua concepção de conceito.

4.2 - Campos Conceituais

Já delineamos uma definição de campo conceitual, dentre as desenvolvidas por Vergnaud. De acordo com ele, também podemos definir um campo conceitual como um conjunto de situações, cujo domínio exige o domínio de diversos conceitos, de distintas naturezas (Vergnaud, 1990). Como exemplo, o campo conceitual das estruturas multiplicativas, tomadas como problemas de proporção simples e múltiplas, caracterizado como um conjunto de situações que envolvem multiplicações, divisões e/ou a combinação destas operações.

Este campo conceitual, em particular, envolve o foco principal desta pesquisa, no momento em que tomamos o conceito de função como âncora para as investigações. Pois, o domínio do campo conceitual das estruturas multiplicativas pressupõe o domínio de um conjunto de conceitos e teoremas que permitem o tratamento e a análise de situações envolvendo, por exemplo: proporção simples e proporção múltipla, função linear e n-linear, relação escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, fração, relação, múltiplo e divisor, entre outras.

Na busca do conceito de campo conceitual, Vergnaud, lança mão de três princípios básicos que norteiam sua argumentação em torno deste conceito:

1) um conceito não se forma dentro de único tipo de situações[7];

2) uma situação não pode ser analisada com um só conceito;

3) o processo de construção e apropriação do vasto arsenal de propriedades de um conceito ou de todos os aspectos de uma dada situação se dá ao longo do tempo, e requer muito fôlego.

Além disso, destaca que os diversos campos conceituais não são independentes, sendo que uns podem ser essenciais para o entendimento de outros. Entretanto, o autor considera importante falar em campos conceituais distintos, na medida em que estes possam ser descritos de modo consistente. Admite também ser praticamente impossível analisar as coisas separadamente, porém, é justamente por isso que a necessidade de fazer recortes é importante. Consequentemente, os campos conceituais tornam-se unidades de estudo frutíferas capazes de dar sentido aos problemas de aquisição e às observações ligadas à conceitualização.

Assim, tendo em vista que a conceitualização é o centro do desenvolvimento cognitivo, Vergnaud ressalta a importância de analisar os aspectos conceituais contidos nos esquemas e nas situações, já que é na segunda que os sujeitos desenvolvem os seus esquemas, seja na escola ou fora dela (1994, p.58). Portanto, a compreensão da concepção de conceito no contexto da teoria dos campos conceituais apresenta-se como uma necessidade fundamental.

4.3 – Conceitos

VERGNAUD (1990, p.145) define conceito como terno de três conjuntos:
C= (S, I, R), sendo que:
S é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência);
I é o conjunto das invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre as quais repousa a operacionalidade dos esquemas (é o significado do conceito);
R é o conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, etc.) das formas de linguagem e não linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos para lidar com elas (é o significante do conceito).

[7] A definição de situação, segundo Vergnaud, será abordada, em seguida, mas especificamente no sub-capítulo 4.4.

Isso implica que a análise de um conceito, tanto no aspecto do seu desenvolvimento como de seu funcionamento, requer a consideração simultânea dessas três dimensões. Em geral, significado e significantes não estabelecem entre si uma relação de bijeção, também não ocorre esta relação entre invariantes e situações. Assim, não podemos reduzir o significado nem aos significantes, nem às situações (VERGNAUD, 1990, p. 146). Pois, a análise de uma situação não pode ser feita com apenas um conceito, da mesma forma que um conceito não está ligado a um único tipo de situações.

Então, partindo da premissa de que a base dos significados dos conceitos repousa sobre as situações, fica claro que são as situações, ao invés dos conceitos, que representam o ponto de partida de um campo conceitual. Visto que "*um campo conceitual é em primeiro lugar um conjunto de situações*" (VERGNAUD, 1990, p. 144).

Logo, se as situações representam a primeira entrada de um campo conceitual, claramente, os conceitos e os teoremas se apresentam como uma segunda entrada.

4.4 - Situações

VERGNAUD (1990) caracteriza o conceito de situação como sendo uma tarefa, bastante diferente da caracterização de situação didática (Brousseau, 1986). Nesse sentido, o autor afirma que *"toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, para as quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias"* (p. 146). As ações e respostas dos sujeitos são decorrentes das situações com as quais é confrontado, isto é, o conhecimento é modelado pelas situações capazes de dar sentido aos conceitos e procedimentos.

As situações podem ser diferenciadas através de duas classes: a) classes de situações para as quais o sujeito já possui em seu repertório; b) classes de situações para as quais o sujeito não possui todas as competências necessárias, (Vergnaud, 1990).

Enfim, são as situações que dão sentido aos conceitos abordados, e estes se tornam significativos por meio da diversidade de situações. Tendo em vista que o sentido é resultado da interação do sujeito com as situações e com os significantes.

De maneira análoga, é possível considerar que a resolução de problemas apresenta-se, também, como essencial para o processo de conceitualização, tendo em vista a existência de uma relação dialética entre a resolução de problemas e a conceitualização (Moreira, 2002). Nossa pesquisa, caracterizada, essencialmente, pelo módulo de atividades que organizamos e pelo processo de desenvolvimento do mesmo, está pautada por esta possibilidade.

Porém, uma situação particular não desperta no sujeito todo o seu arsenal de esquemas disponíveis, apenas parte de seu conjunto, ou somente aqueles disponíveis (ibid). Em conseqüência, através do conceito de situações, chegamos ao de esquema, em virtude de que são os esquemas evocados no sujeito que dão o sentido a uma situação particular.

4.5 - Esquemas

VERGNAUD chama de esquema *"a organização invariante da conduta para uma classe de situações"* (1990, p.136). De acordo com o autor, é nos esquemas que os conhecimentos em ação do sujeito devem ser pesquisados, ou seja, os elementos cognitivos que garantem com que a ação do sujeito seja operatória. Todo esquema dá origem a ações específicas e deve encerrar regras, porém, a organização destas ações está vinculada aos padrões da situação em questão.

Um esquema pode determinar distintos modos de ação, de coleta de informações e de encaminhamentos, estando subordinado apenas à classe de situações em que se aplica. Neste sentido, um esquema assume perfil de universal no contexto de uma categoria particular de situações. Assim sendo, *"(...) um esquema* *não é um estereotipo mas uma função temporalizada em argumentos, que permite gerar seqüências diferentes de ações e de informações em função de valores de variáveis da situação"* (VERGNAUD, 1990, p.140). Como exemplo, é possível destacar os algoritmos. Todos os algoritmos são esquemas, entretanto nem todos os esquemas são algoritmos.

Com base nestas considerações, cabe à educação, de um modo geral, em qualquer nível, possibilitar o desenvolvimento, por parte do sujeito, de um conjunto denso e variado de esquemas, evitando que estes fiquem engessados, viabilizando situações variadas, pertencentes a diferentes classes. É nessa perspectiva que nossa pesquisa visou potencializar a construção do conceito de função, especialmente, o de função afim, através da exploração de situações-problema variadas, de atividades teórico-experimentais e da resolução de problemas diversificados.

A definição de esquema, oferecida por Vergnaud, embora precisa, requer algumas especificações, ligadas, principalmente, aqueles que o autor denomina como ingredientes do esquema (1990, p.140), quais sejam:

1- as metas e antecipações; 2- as regras de ação, que constituem a parte geradora do esquema; 3- os invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação), que dirigem o reconhecimento dos elementos pertinentes à situação, estes constituem a base, implícita ou explícita, que possibilita obter a informação; 4- possibilidades de inferência, ou raciocínios, que possibilitam calcular as regras e antecipações.

Como foi descrito no item anterior, o autor distingue duas classes de situações. Segundo ele, o esquema funciona de maneira distinta nas duas classes (Ibid.). Para a classe que comporta situações já disponíveis no repertório do sujeito as condutas se apresentam largamente automatizadas, organizadas através de um mesmo esquema. Enquanto que, para as classes que contém situações que fogem às competências do sujeito o que ocorre é a utilização sucessiva, e por vezes simultânea, de diferentes esquemas que passam por processos de acomodação, combinação e recombinação até que o objetivo seja alcançado. Aqui, as descobertas, que geralmente representam uma situação nova para o sujeito, assumem um papel importantíssimo na estruturação e adaptação do esquema ideal. Até mesmo as condutas ligadas às situações de descoberta são estruturadas por esquemas.

De modo geral, todas as condutas caracterizam-se por uma parte automatizada e por outra de decisão consciente. Há muito de implícito nos esquemas, pois, *"um esquema repousa sempre sobre uma conceitualização implícita"* (VERGNAUD, 1990, p. 138). Isto possibilita afirmar que inclusive esquemas que se apresentam como não pertinentes, embora aparentados, sejam acionados na busca de uma solução ideal.

Além disso, as competências cognitivas do sujeito não estão restritas aos conceitos explícitos, pois todo conceito remete a um esquema, porém nem todo esquema é conceitual.

Vergnaud (1996) designa através da expressão global invariantes operatórios, os conhecimentos contidos nos esquemas, também denominados conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. A seguir, fazemos uma breve análise destes elementos, em especial demarcando as suas diferenciações diante dos esquemas.

4.6 - Invariantes Operatórios

Com o avanço da análise feita, ao longo do texto, é possível verificar o vínculo importantíssimo existente entre as condutas do sujeito, em uma dada situação, e suas representações. Esta ligação, no contexto teórico, é gerada pelos esquemas, pois, de acordo com Vergnaud (1998), a relação entre situações e esquemas é a fonte primária da representação e, portanto, da conceitualização. Entretanto, a interação entre teoria e prática ocorre através dos invariantes operatórios, pois o processo de identificação, de busca e seleção de informações, em uma dada situação, é pautado pelos conceitos-em-ação e pelos teoremas-em-ação.

De modo geral, é possível definir, segundo VERGNAUD (1996), como teoremas-em-ação uma proposição considerada como verdadeira sobre o real, e conceito-em-ação uma categoria de pensamento considerada relevante (p.202). Os invariantes operatórios constituem-se em ingredientes constitutivos da base conceitual, tanto implícita quanto explícita, dos esquemas. Possibilitam identificar informações, vinculadas aos objetivos traçados, deduzir as condutas mais adequadas a referente situação. Portanto, a compreensão de uma situação envolve diversos e distintos conceitos-em-ação implícitos.

Todavia, o autor salienta que um conceito-em-ação não é completamente um conceito nem um teorema-em-ação é um teorema, baseado no fato de que na Ciência, os conceitos e os teoremas são explícitos, sendo possível, assim, discutir sua pertinência e veracidade. De fato, este não representa o caso dos invariantes operatórios, pois *"os conceitos e teoremas explícitos só formam a parte visível do iceberg da conceitualização: sem a parte escondida formada pelos invariantes operatórios, esta parte não seria nada"* (ibid., p.144). Ressalta que estes podem tornar-se, gradualmente, verdadeiros conceitos e teoremas científicos, porque o *status* do conhecimento é bastante diferente no momento em que ele é explicitado, ao contrário de quando fica subentendido na ação.

Em geral, o que ocorre é que os alunos possuem uma grande dificuldade, na maioria incapacidade, de explicar ou expressar, naturalmente, seus conceitos e teoremas-em-ação, invariavelmente, estes permanecem totalmente implícitos. Em contrapartida, cabe ao ensino e aos responsáveis por ele contribuir para que o aluno construa seus teoremas e conceitos explícitos, e desse modo cientificamente válidos, com base em seus conhecimentos implícitos.

Para Vergnaud (1990), entre os conceitos-em-ação mais importantes, desenvolvidos pelos alunos, encontram-se os de grandeza e magnitude, valor unitário, razão e fração, *função* e variável, taxa constante, dependência e independência, quociente e produto de dimensões. Afirma que as aquisições cognitivas, em um campo conceitual específico, acontecem por meio de construções interpoladas, que se apoiam, ou seja, não ocorrem através da superposição de fragmentos. Ou seja, as construções dos conceitos de fração, de razão, de proporção, de similaridade e de função linear acontecem enredadas. De modo análogo, no caso da Física, acontece com as noções de distância percorrida, de velocidade, de tempo, de força e de aceleração.

Portanto, é pautada por esta importância dada a construção do conceito de função, bem como de outros conceitos adjacentes a este, tais como: o de variável, dependência e independência, proporção, entre outros, que justificamos a pertinência da vinculação da Teoria dos Campos Conceituais ao foco da nossa pesquisa, por acreditarmos que tais conceitos podem integrar um processo dinâmico de questionamento, investigação e de construção de significados.

Este viés vai de encontro a nossa intensa preocupação com a conceitualização, com o processo complexo envolvido durante construção e compreensão de um conceito, particularmente, o que envolve o conceito de função. Pois, o mesmo autor aponta para a possível necessidade de uma análise mais complexa diante dos conceitos de calor, força, *função*, variável. E, assim, ilumina a existência, neste caso, de uma via de pesquisa teórica muito importante. Não pretendemos aqui, com esta breve abordagem, esgotar a discussão em torno desta problemática, mas apenas sinalizar desafios mais amplos, novas questões.

CAPÍTULO 5 - APROXIMAÇÕES CONCEITUAIS: BUSCANDO MINIMIZAR O ISOLAMENTO CONCEITUAL

5.1 - Aproximações: Fragmentação X Contextualização

Ao longo desse capítulo, subdividido em dois, temos a intenção de sinalizar, sem maiores aprofundamentos, aspectos de mais um dos pilares sustentadores dessa pesquisa, as aproximações conceituais. Advogamos em prol da incorporação destas como via propulsora na construção de conhecimentos. Nesse sentido, apresentamos questões que acenam para tal necessidade, especialmente no que tange as disciplinas de Matemática e Física, delineando algumas das contribuições da aproximação conceitual para ambas. Para tanto, o conceito de função afim será tomado como referencial, embora reconheçamos a existência de outros.

A questão da fragmentação no ensino não é restrita à Matemática, essa problemática se faz presente em grande parte das disciplinas que compõem os programas curriculares das escolas. Dentre estas, a disciplina de Física, juntamente com a Matemática, destaca-se pelo índice relativamente alto de problemas relacionados com a fragmentação existente no seu ensino, entre eles índices alarmantes de repetência, pouca, e por vezes inexistente, compreensão dos conceitos e suas relações, etc. Tendo em vista essa situação, tal questão requer uma abordagem específica para que seus efeitos no processo de ensino e aprendizagem sejam minimizados.

Tal realidade se confirma, também, pelas pesquisas e pela literatura especializada. Podemos citar algumas tais como, Angotti (1991), Auth (1996), Ruiz (2002), que revelam a triste faceta do ensino e de seus efeitos mais problemáticos, bem como suas implicações junto ao processo de construção do conhecimento. Seja qual for a disciplina, está claro que o processo vigente não é suficiente e/ou é problemático, do ponto de vista educativo.

O privilégio dos conteúdos escolares e a demasiada adoração pela resolução mecânica e não reflexiva de problemas, geralmente desprovidos de sentido e distantes da realidade, da maioria dos educandos, não têm contribuído efetivamente para uma formação integral, onde o espírito investigativo e questionador sejam critérios prioritários para prover um ensino verdadeiramente construtivo e problematizador.

Desse modo, acreditamos que o estímulo à construção de relações e aproximações entre diferentes áreas se apresenta como um viés produtivo, capaz de potencializar um significado maior e um sentido mais abrangente aos conceitos estudados, especialmente no tocante às disciplinas de Matemática e Física.

A literatura tem tratado do problema da fragmentação do ensino de ciências, por exemplo, Angotti (1991), Angotti & Delizoicov (1990), Auth (1996) e (2002), De Bastos (1995), Grabauska (1999) e Mion (2002). No entanto, não temos percebido uma relação nem a problematização mais explícitas da relação - conceitual - do ensino de Matemática e Física; já que se têm privilegiado questões do ensino de Ciências Naturais partindo, muitas vezes, de uma única disciplina, como a Física.

Com relação as possíveis aproximações com outras áreas do conhecimento, em especial com a disciplina de Física, os Parâmetros Curriculares Nacionais também abrem margem para essa realidade, bem como para as suas contribuições e possíveis dimensionamentos visto que:

> A Matemática faz-se presente na quantificação do real - contagem, medição de grandezas. No entanto, esse conhecimento vai além, criando sistemas abstratos, ideais que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados quase sempre a fenômenos do mundo físico (BRASIL, 1998, p. 25).

Portanto, é necessário fazer uma análise mais profunda sobre as relações que a Física mantém com a Matemática, vislumbrando a pertinência desta no processo de aprendizagem e de apreensão dos conceitos da disciplina de Física, bem como dos seus significados.

Segundo Pietrocola (2002), é preciso encontrar formas de mostrar qual o papel desempenhado pela Matemática na aprendizagem de Física. O objetivo desse resgate é o de que a função da Matemática, no seio da Física, alcance proporções mais relevantes e significativas, que sejam condizentes com a função real dessa disciplina no ensino de Física. Que esta assuma não apenas a condição de um instrumento da Física, nem se restrinja, assim, a relações meramente quantitativas, enfatizadas em problemas limitados por algoritmos matemáticos e suas soluções.

Também é possível perceber que essa idéia, utilitarista da Matemática, é consagradamente reforçada em obras do ensino médio voltadas para o ensino de Física, disseminando um caráter instrumental para a Matemática. O que fica muito aquém da sua real função de estruturante da Física, e compromete um maior entendimento das relações a que estas disciplinas estão expostas. E, por vezes, até impossibilitando redimensionamentos em torno de conceitos agregados a ambas às disciplinas.

Essa situação provoca uma sensação de castigo, na grande maioria dos alunos, do ensino médio ou até dos cursos de Física que têm um pedágio pago em conteúdos matemáticos no curso, aumentando o desinteresse por um conteúdo que não estabelecem pertinência alguma com a Física. Pois, *"(...) não é suficiente conhecê-la enquanto 'ferramenta' para poder utilizá-la como estruturante das idéias físicas sobre o mundo"* (PIETROCOLA, 2002, p. 111).

Sendo assim, o distanciamento excessivo que se constata no âmbito escolar só contribui para a manutenção dos freqüentes problemas na apropriação, por parte dos alunos, dos conhecimentos da disciplina de Física, bem como do reconhecimento da capacidade associativa que os conceitos inerentes a essa disciplina possuem, em especial com a disciplina de Matemática que desempenha um papel vital na estruturação desta disciplina, visto caracterizar-se como linguagem da ciência. Nesse sentido, é essencial enfatizar, segundo PIETROCOLA, que *ao* *dizer que a Matemática se constitui na linguagem da ciência, devemos analisá-la como expressão de nosso próprio pensamento e não apenas como instrumento de comunicação* (2002, p. 106).

Portanto, propomos a utilização dos conceitos unificadores, associados a um conceito matemático, o de função afim, devido a permitirem práticas educativas moldadas pela investigação, onde o educando pode construir e estruturar suas idéias primeiras, sendo capaz de visualizar as relações e de discernir quais as melhores aproximações possíveis de estabelecer entre os conceitos. Para tanto, a ação educativa deve ter como ponto de partida as tensões entre as visões de mundo dos educandos - senso comum - e conhecimento educacional, no caso Matemática e Física - conhecimentos elaborados.

A nosso ver, a grande contribuição do presente trabalho, para os conhecimentos de CN&T, centra-se justamente no fato de ter como ponto de partida a problemática da fragmentação do ensino escolar de Matemática e das contribuições que a estruturação do ensino pautada nos conceitos pode trazer, especialmente, na busca de minimizar tal questão. Dando ênfase, também, as suas relações com a disciplina de Física e tendo como suporte as potencialidades dos conceitos unificadores.

5.2 - Interações Conceituais: Possibilidades Para o Ensino de Matemática e Física

A questão da fragmentação no ensino não é restrita à Matemática, essa problemática se faz presente em grande parte das disciplinas que compõe os programas curriculares das escolas, e requer um enfoque diferenciado e uma abordagem específica para que seus efeitos no processo de ensino e aprendizagem sejam minimizados.

Dentre essas disciplinas, a Física, juntamente com a Matemática, destaca-se pelo índice relativamente alto de problemas relacionados com a fragmentação existente no seu ensino, e seus efeitos mais imediatos, tais como índices alarmantes de repetência, pouca, e por vezes inexistente, compreensão dos conceitos, dificuldades em estabelecer relações entre os conceitos abordados, e/ou com conceitos anteriores dessa ou de outra disciplina.

Essa realidade, cotidianamente confirmada, vem sendo abordada e questionada, intensamente, pelas pesquisas e pela literatura especializada, tais como Angotti (1991), Auth (1996), Ruiz (2002), revelando o cenário precário do ensino e de seus efeitos mais imediatos, afetando significativamente o processo de construção do conhecimento e a busca de interações entre conceitos e, ou, disciplinas. Sem distinções disciplinares, é notório que o sistema vigente é insuficiente e/ou é problemático, comprometendo, assim, não só o processo de construção do conhecimento como o de assimilação e incorporação, por parte dos alunos, desse conhecimento.

É evidente que a necessidade de estabelecer relações entre conceitos adquiridos deve ser adotada como um dos objetivos principais do ensino, tanto da Matemática como da Física. Mas, é preciso ir além e alcançar patamares mais abrangentes, buscando ultrapassar barreiras que engessam conteúdos e disciplinas, deixando-os em compartimentos estanques sem que suas similaridades e semelhanças sejam abordadas, dificultando a construção de novos conceitos pelo aluno.

O resultando desse processo é um conhecimento segmentado, em pedaços que embora se complementem não se relacionam. Assim,

> O estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma eficaz ferramenta para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos (BRASIL, 1998, p.37).

Sendo assim, fica evidente que o estabelecimento de relações entre conceitos adquiridos é uma necessidade emergente e deve ser incorporado na constituição de uma nova concepção da práxis pedagógica no âmbito dessas duas disciplinas. Rompendo com o quadro vigente que tem privilegiado a aplicação de fórmulas e de cálculos, exigindo o treinamento de procedimentos e não a compreensão, medindo a capacidade de decorar fórmulas e algoritmos e não de expor raciocínios e argumentações.

Enfim, é preciso resgatar o papel dessas disciplinas, como canais para a construção e formação de um sujeito crítico, participativo, capaz de tomar decisões, tendo como ponto de partida um processo de ensino e aprendizagem pautado pela construção coletiva de idéias, pelo estabelecimento de relações, pela argumentação e realização de inferências, pela descoberta de regularidades dentro e entre as disciplinas. Isso implica trabalhar os conceitos matemáticos a partir de situações contextualizadas, seja em fenômenos do cotidiano seja em situações oferecidas por outras ciências, como, por exemplo, a Física.

Dentro da perspectiva de potencializar aproximações entre as disciplinas de Matemática e Física e diante da importância de reduzir o distanciamento entre estas disciplinas no contexto escolar, é preciso enfatizar e esclarecer o papel desempenhado pela Matemática na aprendizagem de Física. Assim, é relevante destacar o papel central e historicamente determinado pela Matemática na constituição do conhecimento científico, resgatando a sua influência no processo de evolução deste campo de conhecimento, pois

> A evolução da ciência resultou na expressão dos conceitos em linguagem matemática. As idéias da ciência ganham significados interconectando-se em estruturas matemáticas. A linguagem matemática, com suas regras e propriedades, torna as teorias científicas capazes de pensar o mundo (PIETROCOLA, 2002, p. 109).

Enfim, a necessidade de buscar aproximações, via conceitos, entre o ensino e a aprendizagem de Matemática e de Física está bastante clara, seja pela sua importância ou pela contribuição dessas aproximações no processo de estruturação do conhecimento, pois tais interações se constituem em elos entre conhecimentos que compartilham conceitos, guardadas as suas particularidades e significados em cada contexto. Sobretudo, para que essas aproximações ultrapassem a fronteira do quantitativo e dos algoritmos, é preciso recuperar o sentido real e a importância do conhecimento matemático no contexto da Física, para além de instrumento dessa disciplina.

CAPÍTULO 6 – UMA PROPOSTA DE COMO PROBLEMATIZAR O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM: O MÓDULO DE ATIVIDADES

6.1 - O contexto da proposta

Esta proposta foi fundamentada teórica e empiricamente, através de uma análise bibliográfica específica, na qual se buscou solidificar os objetivos do trabalho; e de uma análise empírica que consistiu no desenvolvimento de um módulo de atividades em dois grupos distintos de alunos. Primeiro, em um grupo piloto de cinco alunos da 8ª série do ensino fundamental, de um colégio com perfil diferenciado, no intuito de localizar pontos problemáticos que, porventura, pudessem comprometer o desenvolvimento adequado das atividades. Em seguida, a proposta em uma turma de 24 alunos da 8ª série do ensino fundamental, de ensino regular, de uma escola pública, estadual, de Florianópolis, tendo como objetivo dimensionar as potencialidades do material e suas reais contribuições para a construção do conceito de função afim, através da ênfase nas relações funcionais.

O nível de ensino, 8ª série do ensino fundamental, foi definido tendo em vista que neste nível os alunos ainda não tiveram contato formal com o conceito de função. Embora, na maioria das vezes, já possuam um conhecimento prévio, informal deste conceito, oriundo das experiências cotidianas.

Foi com base nesses conhecimentos prévios que nossa proposta pretendeu direcionar a construção do conceito de função afim, partindo das noções mais simples e informais do conceito focalizadas nas situações-problema. A seguir, rumando para uma generalização, mais formal, caracterizada durante as atividades teórico-experimentais. E, finalmente, perpassando pelas relações conceituais entre a Matemática e os fenômenos físicos, através da resolução de problemas envolvendo importantes conceitos, freqüentemente estudados na Física. Entre eles, o conceito de velocidade, o de distância percorrida e de tempo, etc. Entre muitos outros, que não enfocaremos nesse trabalho, é possível citar o conceito de temperatura, etc.

Estes problemas têm o objetivo de redimensionar as aplicações do conceito de função, particularmente da função afim, em outros campos de conhecimento e possibilitar interações conceituais entre essas duas disciplinas.

Enfim, foi ancorado nessas relações e interações, entre a Matemática e a Física, historicamente construídas e fundamentadas, que construímos uma proposta que buscou viabilizar a construção do conceito de função afim e potencializar, a partir dessa construção, aproximações conceituais entre as duas disciplinas. Nesse processo, os questionamentos e o desequilíbrio através do confronto de argumentos e posicionamentos decorrentes da problematização das diferentes atividades propostas são fundamentais para motivar a aprendizagem e a construção, individual e coletiva, de idéias. Uma construção dialógica pautada pelo envolvimento intencionalmente produzido.

A estrutura final do módulo, tomada como referencial para a aplicação junto à turma de 24 alunos, na escola pública, teve como parâmetro os dados e informações coletados durante a aplicação piloto. Nesse sentido, a proposta inicial sofreu algumas alterações devido a reflexões e auto-reflexões feitas durante o trabalho com o grupo piloto. Tais melhoramentos estiveram ligados, basicamente, à linguagem utilizada em certas atividades e à pertinência ou não de uma atividade específica.

Essas reflexões coletivas e auto-reflexões tiveram papel crucial no planejamento e replanejamento das questões propostas e das ações educativas desenvolvidas durante o processo. Nesse sentido, a organização das atividades foi pautada por ciclos que envolveram ações e reflexões contínuas vinculados às observações feitas durante o desenvolvimento de cada atividade. Acreditamos que esse cenário, moldado por ações e reflexões, seja bastante produtivo durante o processo envolvido na construção de qualquer conceito e/ou conhecimento matemático. No caso específico do conceito de função, e de função afim, consideramos essencial. As observações realizadas serviram, e continuam servindo, de referencial de análise e avaliação da proposta.

Esse momento da aplicação, dentro do contexto escolar formal, teve o intuito de avaliar o desenvolvimento das atividades e as suas potencialidades no processo de construção do conceito de função afim, e na viabilização de aproximações conceituais entre as disciplinas de Matemática e Física, tendo como cenário condições que representam o mais veridicamente possível, o cotidiano de uma sala de aula.

A proposta foi organizada com base nos três momentos pedagógicos (Delizoicov et alii, 2002). Esses momentos, embora distintos, se retroalimentam e estão dispostos na proposta em subdivisões de atividades que compreendem a problematização inicial, a organização do conhecimento e a aplicação do conhecimento.

O primeiro momento é caracterizado pelas situações-problema, no segundo momento o enfoque de nossa pesquisa é dado às atividades teórico-experimentais e no terceiro, e último momento, ocorre à transferência do aprendizado a outro campo de conhecimento, através da resolução de problemas envolvendo fenômenos físicos, que abrangem diferentes conceitos característicos da Física. Todas essas atividades estão balizadas e interagem através dos conceitos unificadores (Angotti, 1991), até então só utilizados no contexto do ensino de Ciências Naturais.

O suporte dos conceitos unificadores tem como objetivo possibilitar o relacionamento e a interação entre as atividades e entre os conceitos abordados durante o encaminhamento das ações, tendo em vista o caráter articulador que esses conceitos possuem, constituindo-se, de acordo com Angotti (1991), em ganchos teóricos que facilitam a articulação e organização de conhecimentos, aparentemente distintos, em níveis intra e interdisciplinar minimizando, assim, o risco de fragmentação (p.108).

Tanto a escolha quanto à disposição das atividades foi estabelecida com o objetivo de disponibilizar uma construção gradual do conceito de função afim e propiciar um espaço para a problematização inicial acerca desse conceito através de situações-problema lançadas ao grupo para discussão, buscando identificar as noções informais que os alunos já possuíam a respeito. Nesse momento são enfocadas situações diversas, ligadas ou não à Matemática, procurando dar dimensões intra e extradisciplinares ao conceito de função, através de abordagens diferenciadas.

É relevante destacar que nesse nível cognitivo, 8ª série do ensino fundamental, os alunos já possuem uma significativa capacidade de abstração, possibilitando a transposição do conceito de função do contexto cotidiano para o contexto disciplinar, seja com exemplos da Matemática, ou da Física. Entretanto, não desconsideramos a possibilidade de desenvolver essas atividades em outro nível cognitivo, anterior ou posterior ao definido por nossa pesquisa, porém, nesse caso, sua relevância deve ser avaliada pelo professor, bem como os encaminhamentos e adaptações por ele implementadas.

Prosseguindo, as primeiras tentativas de construção formal do conceito de função afim ocorrem através de duas atividades teórico-experimentais, que exigem do aluno a seleção e interpretação de informações bem como a representação matemática, mais formalizada, da situação dada transpondo as informações de uma representação para outra, por exemplo, de dados tabelados para a representação gráfica, ou vice-versa.

Na primeira atividade teórico-experimental, os alunos se deparam com uma situação, até então inusitada, onde têm como objetivo formalizar o conceito de função, e principalmente tentar estabelecer uma representação verbal e algébrica que corresponda à observação feita durante o desenvolvimento da atividade. O material utilizado para esta atividade é bastante simples e conhecido pelos alunos consiste em peças de um jogo de dominó e réguas de papel milimetrado. O desenvolvimento dessa atividade exige a observação das variações na altura da pilha de dominós na medida em que modificam o número de peças da pilha e o preenchimento de uma tabela com base nos dados observados. Antes de dar início à atividade, os alunos precisam analisar o que, possivelmente, acontecerá com a pilha durante o encaminhamento da atividade, elaborando uma "aposta", uma predição, com base em suas idéias preliminares a respeito do comportamento da pilha de dominós e da relação existente entre o número de peças e a altura da pilha.

Após a aposta, a observação das variações na altura e o preenchimento da tabela os alunos partem para a representação gráfica do experimento, baseados nos valores tabelados durante a observação. No módulo de atividades, estão propostas questões complementares que buscam analisar os dados encontrados, dando significado a cada informação obtida através do experimento, melhorando ou reformulando as idéias inicias dos alunos, formalizando através da construção de idéias o conceito de função afim. Dando enfoque à articulação entre as diferentes representações desse conceito, tabelas, gráficos, expressões verbais e algébricas.

Na segunda atividade teórico-experimental, os alunos novamente se deparam com uma atividade sem precedentes disciplinares, ou seja, não conseguirão identificar, embora muitos tentem, uma disciplina específica que caracterize a atividade proposta. Essa atividade também busca formalizar o conceito de função, embora seus resultados sejam distintos dos resultados da atividade anterior, justamente por buscarmos, com esta, ampliar o conceito.

Para essa atividade o material utilizado também é bastante simples e conhecido pelos alunos, consistindo em um recipiente cilíndrico, bolinhas de gude e água. No recipiente se cola uma tira de papel milimetrado, colocando, em seguida, certo volume de água, até atingir uma altura definida, anteriormente, pelos procedimentos.

O desenvolvimento da atividade exige que o aluno observe a variação na altura da coluna de água, dentro do recipiente, na medida em que são colocadas as bolinhas de gude no seu interior. As quantidades de bolinhas de gude, que devem ser colocadas, estão especificadas em uma tabela, que deverá ser preenchida com base nos resultados observados durante os avanços da atividade. Esta resultará em informações referentes à altura da coluna de água e do volume de água lido, calculado com base em cada altura, para quantidades específicas de bolinhas de gude.

Os procedimentos iniciais, para esta segunda atividade são bastante semelhantes aos anteriores, exigindo, novamente, que o aluno formule, antes de dar início à atividade, uma aposta com base em suas predições quanto ao desenvolvimento do experimento. Exigindo que ele estabeleça uma relação entre o número de bolinhas colocadas no recipiente e o volume de água lido, construindo uma expressão verbal e uma algébrica que, supostamente, possa representar a observação feita durante a atividade.

Após a aposta, a observação das variações na altura, do cálculo dos respectivos volumes, e do preenchimento da tabela os alunos partem para a representação gráfica do experimento, do mesmo modo que fizeram na atividade anterior. A construção do gráfico está baseada nos valores tabelados durante a observação, mais especificamente, nos valores do volume e das quantidades de bolinhas de gude.

Na seqüência da atividade, também estão propostas, assim como na atividade anterior, questões complementares que proporcionam a análise dos dados encontrados no intuito de dar significado às informações obtidas e encaminhar algumas conclusões, de forma mais estruturada, a respeito das informações obtidas através da atividade. Constam também exercícios que visão o estabelecimento de relações entre as diferentes representações trabalhadas nessa atividade, dados tabelados, gráficos e expressões algébricas e verbais. Em busca de melhorar e/ou reformular as idéias prévias dos alunos identificadas durante a aposta, construindo, através da problematização dessa atividade e das extensões conceituais inerentes o conceito de função afim.

Nesse momento, também são retomadas idéias e informações observadas e discutidas na atividade anterior, com o objetivo de localizar semelhanças e enfocar diferenças, enfatizando seus efeitos no processo de estruturação e formalização do conceito. Na verdade, essa segunda atividade tem seus procedimentos baseados na anterior, porém extrapola seus resultados, possibilitando uma discussão mais ampla a respeito da estruturação desse conceito.

Enfim, através dessas atividades teórico-experimentais os alunos têm contato com o processo de construção do conceito de função afim, partindo da problematização de seus conhecimentos prévios, perpassando pelas suas diferentes formas de representação. Ou seja, com o avanço das atividades os alunos passaram a perceber a possibilidade de transformar tabelas em problemas geométricos e, em seguida em problemas algébricos, ou seja, variam às formas de representações sem alterar a situação-problema, isto é, sem alterar a relação funcional.

No terceiro momento as atividades centram-se na resolução de problemas ligados a fenômenos físicos, que contêm conceitos característicos da disciplina de Física. A resolução desses problemas pressupõe o entendimento das atividades anteriores, pois exigirá do aluno a realização de conexões entre as construções feitas anteriormente e as atuais. Estas conexões serão facilitadas pelos conceitos unificadores, que também estiveram presentes no estabelecimento de outras conexões, durante as atividades anteriores. Funcionam como pontes entre os conceitos e os conhecimentos abordados até o momento.

O auxílio dos conceitos unificadores incidirá, principalmente, na identificação das variáveis pertencentes ao problema, caracterizando, também, as relações existentes entre essas variáveis. Todas as construções de idéias e de conceitos feitas até então são retomadas, de modo a encaminharem à busca de soluções para os problemas propostos.

Novamente o aluno trabalhará com diferentes representações do conceito de função. Entretanto, agora as situações a serem analisadas assumem contextos diferentes dos abordados em momentos anteriores. A manipulação de tabelas, gráficos, representações verbais e algébricas também é uma constante nessa fase. Transformações de uma representação em outra também serão enfocadas, destacando seus significados e características, bem como suas aplicações e dimensões dentro do problema analisado.

Esse é o momento em que o aluno tende a perceber, com mais nitidez, a existência de soluções alternativas, de opções possíveis de serem feitas. A necessidade de recorrer a construções anteriores despertará o aluno para a necessidade de escolher e executar estratégias adequadas, tendo como base suas experiências perceptivas e os entendimentos conceituais que estruturou durante o encaminhamento das atividades. Nesse sentido,

> O reconhecimento da existência de soluções alternativas a um dado problema promove o desenvolvimento de uma postura crítica, porque leva a pessoa a optar. Para optar, é preciso haver critérios. A não unicidade de critérios leva cada um a se posicionar, forçando uma postura menos passiva frente ao conhecimento (ROBILOTTA, 1988, p.18).

Promover tensões e desequilíbrios durante o processo de construção e validação de um conhecimento, ou conceito, tende a propiciar um despertar do aluno para a tomada de decisões, de posicionamentos, através do confronto entre o que "É" e o que "NÃO É", pois segundo ROBILOTTA (1988), "O contraste promove a consciência, e o que <u>É</u> é melhor compreendido ao ser comparado com o que <u>NÃO É</u>. (...) O conteúdo negativo tem papel positivo no ensino" (p.18). Enfim, nesse instante é que se dá a aplicação do conhecimento construído e validado através do diálogo, das reflexões e auto-reflexões feitas diante das situações-problema e das atividades teórico-experimentais.

Sendo assim, o terceiro momento é quando, mais claramente, se percebe as relações e interações entre os fenômenos físicos, estudados na Física, e a Matemática, tendo como suporte o conceito de função afim, explorando a contextualização e interdisciplinaridade que o tema permite. Todo esse processo de interações foi organizado e estruturado pelo suporte dos conceitos unificadores. É a partir deles e da identificação, principalmente, das *regularidades* e *transformações* em cada situação-problema, que se estabelecem às articulações entre as relações funcionais construídas, tanto no contexto matemático quanto no físico, buscando relacionar conhecimentos aparentemente distintos.

Enfim, o foco principal buscou a partir da abordagem conceitual o estabelecimento de interações, via conceitos unificadores, entre as duas disciplinas através das relações funcionais do mundo físico e da construção do conceito de função afim. A fim de descrever e estudar, através da leitura, interpretação e construção de gráficos, alguns fenômenos físicos identificáveis no cotidiano, bem como problemáticas sociais imbricadas e passíveis de serem estabelecidas através de uma função afim. Que envolvem essas duas áreas do conhecimento, e suas interfaces com aspectos sociais facilmente identificados pelos alunos.

Não se pretendeu com essa proposta esgotar as discussões referentes à problemática. Tão pouco pretendemos reafirmar o ingênuo posicionamento, comumente adotado por professores da disciplina de Física de que, as dificuldades encontradas pelos alunos no aprendizado da Física estejam centradas, principalmente, na falta de conhecimento matemático, ou no domínio dessa disciplina. Restringindo-se, grosseiramente, à atribuição de perfil instrumental à Matemática em prol da Física. Em contrapartida, acreditamos que

> É preciso encontrar formas de mostrar qual é o papel desempenhado pela Matemática na aprendizagem da Física, pois o desinteresse é a resposta freqüentemente oferecida pelos alunos a um ensino de um conhecimento do qual eles não vislumbram a pertinência (PIETROCOLA, 2002, p.95).

O propósito dessa proposta foi possibilitar situações significativas que potencializem tanto o encaminhamento de construções acerca do conceito de função afim, quanto viabilizem, simultaneamente, interações conceituais entre o ensino de Matemática e de Física, através das extensões contextuais que o tema propicia, vislumbrando a ampliação do entendimento do conceito de função.

Nosso desafio, ancorado em nosso interesse educacional, consistiu em estruturar essa proposta de modo que viesse contribuir, não só, no processo de ensino e aprendizagem, mas também na iluminação de caminhos que possibilitem minimizar questões originadas dentro do processo educativo. Buscar despertar nos alunos, ou contribuir de alguma forma, a sua curiosidade epistemológica (Freire, 1996).

6.2 - O Módulo de Atividades: Procedimentos e Expectativas

Durante os capítulos anteriores, entre outras coisas, discutimos a complexidade existente no trato e na construção do conceito de função. Também ressaltamos que em conseqüência, é necessário dar uma especial atenção a esse processo, baseado nas dificuldades que os alunos encontram em trabalhar com esse conceito, algumas já discutidas nesse trabalho. Entre elas, principalmente, a dificuldade em dar significado às sistematizações envolvidas.

Nesse sentido, advogamos o caráter de descoberta e construção gradual que é preciso implementar durante a apresentação desse conceito aos alunos, envolvendo-os em situações-problema que propiciem momentos de investigação, de inferências e argumentações, e posteriores sistematizações onde ele identifique e reconheça propriedades inerentes ao conceito, percebendo *regularidades* e *transformações*, atribuindo significado tanto às informações quanto aos procedimentos que abrange.

Para tanto, nossa postura frente às questões ligadas a aprendizagem/construção de conhecimentos matemáticos, particularmente do conceito de função afim, está ancorada à concepção de ensino e aprendizagem proposta pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, em que

> O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas

> informações, a analisar problemas abertos - que admitem diferentes respostas em função de certas condições -, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos (BRASIL, 1998, p. 42).

Dessa forma, nossa proposta de trabalho está voltada para retificação do processo implementado na discussão de tal conceito, a fim de que a importância da resposta correta ceda lugar a importância do processo de resolução e as interpretações a que dá espaço.

Nesse sentido, as construções invocadas pelas atividades propostas se valem de diversas problematizações, feitas ao longo do módulo e envolvendo diferentes contextos e conceitos que adjacem ao conceito de função afim, os quais, a nosso ver, são fundamentais para a compreensão significativa deste conceito, tão diversificadamente utilizado. Como tais, devido ao perfil estruturante que exercem, devem ser abordados com certa primazia sempre vinculados a contextos onde seja possível identificar e explorar suas conexões.

Dentre esses conceitos destacamos a idéia de relação, de dependência, de variável, dependente ou independente, a idéia de proporção, bem como os significados inerentes a expressões verbais do tipo: *ser função de* ou *estar em função de*. Tais elementos, formadores e essenciais, no contexto das atividades, foram sendo discutidos à medida que surgiam, em geral por exigência da situação analisada.

Entre as idéias discutidas, intrínsecas ao conceito de função, destacamos as de variação e permanência, sendo que estas foram desenvolvidas desde o primeiro contato com o material, através das primeiras situações-problema lançadas. A identificação e investigação, dessas duas características inerentes às relações funcionais, ocorrem a partir dos conceitos unificadores T e R, transformações e regularidades, que assumem o perfil de eixos conectivos entre as atividades.

Com o avanço das atividades os alunos foram se familiarizando com o processo de identificação e classificação das transformações (T) e das regularidades (R), atribuindo significado a essas informações no contexto da situação e verificando a ligação destes com a relação funcional investigada. Perceber o papel destes junto à relação funcional é essencial no momento de sistematizar a representação algébrica da função dada, e determinar os papéis assumidos por tais elementos nessa expressão. O trabalho com os conceitos unificadores também viabilizou o contato com as diferentes formas de representação de uma função: expressão algébrica, expressão verbal, dados tabulares e gráficos.

Especialmente, o trabalho com as representações gráficas potencializou diferentes problematizações, desde a construção, passando pelo traço da reta correspondente e enfocando a importância da leitura e da interpretação dessa representação, compreendendo as conexões estabelecidas entre os dados fornecidos, explícitos ou implícitos. O processo de construção abre margem para a questão das escalas, sua importância, o cuidado durante as escolhas, as adaptações necessárias, bem como os efeitos destas escolhas na estruturação do gráfico.

O trabalho com as atividades teórico-experimentais, tomadas aqui como instrumentos potencializadores das construções acerca do conceito de função afim, proporciona um contato mais próximo com dados e informações visualizadas durante o encaminhamento da atividade. Acompanhar o comportamento desses dados e suas influências na situação analisada viabiliza a sistematização de idéias essenciais para a aprendizagem/construção do conceito de função afim, superando os mecanismos de quantificação geralmente utilizados.

Ainda, associada à construção desse conceito, buscamos propiciar meios através dos quais o aluno consiga atribuir significados a situações avaliadas fora do contexto matemático, através da interface entre o conceito matemático e alguns fenômenos físicos onde este é utilizado. Em busca de uma compreensão mais ampla, através da identificação de mudanças e de permanências, extrapolando a idéia de que funções estão limitadas exclusivamente ao trato com símbolos. Por meio de problemas facilmente contextualizáveis pelos alunos, onde também é possível localizar regularidades existentes nas relações, compreendendo tais variações como via para o estabelecimento de novas relações.

Enfim, o módulo de atividades que propomos contempla diferentes perfis do conceito de função em situações diversificadas, disponibilizando o contato com variadas maneiras de sistematizar uma relação funcional que exigem do aluno um trânsito no trato com a construção de gráficos, com a análise de dados, com a interpolação e extrapolação, com a generalização de conclusões mediante o estabelecimento de certas condições iniciais, etc.

Para tanto, as quatro primeiras atividades correspondem a situações-problema onde é possível visualizar uma relação funcional em diferentes contextos pertencentes ou não à Matemática. Nessas atividades são exploradas as primeiras idéias em torno desse conceito, buscando localizar também as noções dos alunos diante de tal assunto. Através dessas atividades o aluno inicia o contato com expressões, na maioria verbais, que constituem relações funcionais já que essa é uma das formas mais usuais de se caracterizar uma função.

As duas atividades seguintes denominamos de atividades teórico-experimentais, por intermédio delas o aluno entra em contato com duas situações diferentes que, envolvendo materiais familiares, representam uma relação funcional. Nessas atividades ele tem a possibilidade de construir o processo onde essa relação é caracterizada, podendo acompanhar e interferir no comportamento da mesma na medida em que manipula o material. Essa duas atividades têm como objetivo sistematizar o conceito de função, através do trato com diferentes formas de representação, desde o trabalho com dados tabelados, com a construção de gráficos, utilizando a representação algébrica e verbal, a fim de possibilitar o trânsito entre essas representações.

O último bloco de atividades é formado por problemas estruturados pelo conceito de função, especialmente o conceito de função afim, e exige o trato com as diferentes formas de representar uma função. A partir desses problemas, o aluno inicia o contato com situações que envolvem conceitos ligados aos fenômenos físicos, abordados no ensino de Física, a fim de que ele possa visualizar o conceito de função afim no contexto de outro campo de conhecimento. Estes também propiciam o contato com diferentes formas de representação desse conceito, gráficos, tabelas, expressões verbais e algébricas.

Essas atividades buscam introduzir o trabalho com o conceito de função, especialmente com o conceito de função afim, e, por isso, não devem ser encaradas como auto-suficientes, precisando então que o professor planeje como pretende explora-las, em que dimensões, a fim de que potencialize outras atividades, complementares, que levem a sistematização e à compreensão global deste conceito. Muitas das atividades aqui apresentadas, possivelmente já tenham sido visualizadas em outras propostas, entretanto, a contextualização e o enfoque dado no trato com tais atividades é o diferencial do módulo que apresentamos.

O módulo de atividades que advogamos aqui é apresentado em anexo, anexo 2, onde é possível verificar a organização e a estruturação das atividades, em sua versão final, propostas à turma de alunos, na escola. O anexo 1 corresponde à primeira versão do módulo de atividades, aquele que desenvolvemos junto ao grupo piloto de alunos. A seguir, apresentamos algumas considerações a respeito do desenvolvimento dessas atividades e das expectativas em torno das mesmas.

Situações-Problema

Em geral, as situações-problema são apresentadas através de uma questão inicial que potencializa as discussões que se sucedem. Todas oferecem, em seguida, uma informação que é problematizada a partir dos dados fornecidos pela situação. Estes dados são apresentados, ou através de tabelas ou por meio de figuras que ilustram o comportamento caracterizado pela situação-problema avaliada.

A escolha das situações-problema foi feita pautada pela intenção de viabilizar uma discussão introdutória do que seria uma função, quais os possíveis contextos onde tal conceito pode ser identificado. Desse modo, tais atividades envolvem a discussão do significado de *ser função* ou *estar em função de algo,* particularmente através do privilégio das expressões verbais envolvidas e de suas dimensões.

A seguir vamos caracterizar de maneira individualizada cada uma dessas situações, num total de quatro, para esclarecer nossos objetivos dentro de cada uma delas, bem como a sua relevância no contexto do módulo de atividades.

Situação-Problema 1

Esta atividade é introduzida a partir de uma questão em que a relação de dependência entre elementos é abordada, exigindo a tomada de posições por parte dos alunos. Essa questão apresenta na sua formulação a palavra *depende* em destaque, justamente para impulsionar as discussões em torno da relação de dependência envolvida em qualquer relação funcional, possibilitando, em contrapartida, discutir os efeitos da não existência da mesma. Mais especificamente, questiona a dependência existente, ou não, entre a população de um país e sua respectiva área.

Para viabilizar as discussões é fornecida uma tabela que oferece informações que possibilitem a construção das primeiras hipóteses em torno da situação observada. Tais informações consistem em uma série de países com suas áreas correspondentes, através das quais os alunos iniciarão as análises e as posteriores discussões, a fim de formalizar uma possível resposta para a questão inicial.

Inicialmente, a questão posta não parece apresentar ligação direta com as idéias de relação funcional que buscamos construir. O contexto em que esta se insere não representa, pelo menos a primeira vista, algo pertinente ao trato com conceitos matemáticos. Foi justamente este perfil, aparentemente, desconecto que nos levou a optar pela inclusão dessa situação-problema. Em busca de problematizar, e quiçá banir, a idéia de que conceitos matemáticos devem estar sempre envoltos por números e fórmulas milagrosas e por processos mecânicos de solucionar problemas, em geral sem significado para o aluno.

Associado a esse perfil, a seleção buscou localizar problemas que pudessem potencializar discussões para além do contexto matemático, porém sem perder o foco principal: a construção do conceito de função afim e das idéias inerentes a ele. O principal critério de seleção foi o caráter significativo das situações. O fato de questões de cunho social estarem vinculadas à construção de conceitos matemáticos apresenta-se para os alunos como algo inusitado, o que torna ainda mais curiosa à procura por argumentações em torno da questão inicial. A curiosidade serve de estímulo para a incorporação do processo e para a motivação do aluno.

Nesse sentido, a situação-problema 1, sugere questões que superam as discussões matemáticas convencionais, tais como identificação e classificação de relações funcionais, buscando superar procedimentos comprometidos com um tratamento excessivamente algébrico, destituído de significado, sobretudo para o aluno. Ela estabelece conexões com assuntos envolvidos em outros patamares, tais como: o social e o político, dificilmente vinculado ao processo de aprendizagem/construção de Matemática.

O processo de busca de uma solução adequada à questão posta ocorre diretamente por meio da tabela fornecida pelo problema, onde o aluno se depara com diferentes realidades, sociais e políticas, caracterizadas através da área desses países e de suas respectivas populações, tais realidades também são discutidas com o avanço das discussões. Basicamente, a análise da questão se pauta pelos dados tabelados e através da comparação entre eles. Nesse momento os alunos se deparam com contradições que refletem diretamente nos posicionamentos que apresentam.

O fato de existirem países com áreas aproximadamente iguais e com diferentes populações, alguns com diferenças realmente surpreendentes, acaba provocando posicionamentos dúbios em que o aluno se depara com aquilo que imagina ser o ideal e com aquilo que realmente ocorre quando tomados como parâmetros os dados fornecidos pela tabela.

O propósito dessa situação-problema, assim como das demais, é estabelecer uma proximidade entre os significados dos termos *depende* e *é função*, fortemente ligados e presentes no estabelecimento, ou não, de uma relação funcional. As problematizações desses termos devem ser encaminhadas de modo que o aluno consiga visualizar a equivalência existente entre eles, bem como as suas dimensões nessa ou em outras situações.

Nesse contexto, o trabalho vinculado aos conceitos unificadores apresenta-se como um elo entre os elementos envolvidos na problematização, especialmente àqueles fundamentais para o estabelecimento, ou não, de uma relação funcional, nesse caso a área do país e a população correspondente, definindo seus papéis. Particularmente, os conceitos unificadores *transformações* (T) e *regularidades* (R), apresentados nesta situação-problema, e nas demais, buscam localizar esses papéis bem como dar sentido a eles dentro da questão apresentada. Tais conceitos também propiciam a verificação de conexões com as demais atividades desenvolvidas, especialmente através de protagonismos similares assumidos pelos diferentes elementos estruturadores das relações funcionais discutidas. Potencializa aproximações entre as situações-problema, entre estas e as atividades teórico-experimentais, e com a resolução de problemas envolvendo os fenômenos físicos, trabalhados ao final do módulo.

A discussão em torno do significado desses conceitos, ou seja, da sistematização do que seriam transformações e regularidades, deve ser estabelecida a partir do entendimento dos alunos, especialmente no primeiro contato, para que o significado destes não se torne algo imposto sem uma prévia discussão. Nesse caso, o professor deve questionar junto aos alunos suas compreensões acerca desses conceitos, qual o entendimento dos mesmos quanto ao conceito de transformação e de regularidades.

O papel do professor é o de mediador no estabelecimento de uma compreensão partilhada, isto é, de uma caracterização que atenda aos objetivos da inclusão destes conceitos no trato dessa questão, porém que, ao mesmo tempo, desperte significados no aluno. Certamente que essa caracterização nem sempre corresponderá ao colocado inicialmente pelos alunos, porém a problematização através, justamente, desses posicionamentos é capaz de potencializar a revisão, por parte do aluno, de sua postura inicial, encaminhando-o para uma compreensão mais próxima da esperada.

Em resumo, tais conceitos caracterizam variações e permanências ocorridas nas situações observadas. Tal caracterização é bastante local, ou seja, não alcança dimensões como as estabelecidas para o trato de tais conceitos junto à construção de conhecimentos inerentes às Ciências Naturais. Nossa intenção não é utilizá-los como ponto de partida para a construção de conceitos matemáticos, mas explorar o caráter de ponte entre conhecimentos, que tais conceitos assumem, para potencializar um eixo de ligação entre as atividades e entre os conhecimentos construídos através delas.

A questão posta ao final da situação-problema 1, caracteriza justamente a necessidade de estabelecer parâmetros para a organização de informações coletadas através das discussões e das hipóteses formuladas. Essa questão envolve a verificação da existência, ou não, de regularidades e transformações na situação analisada. O que exige do aluno uma análise mais aprofundada do comportamento observado para essa situação-problema.

Situação-Problema 2

Essa situação possui objetivos semelhantes à situação-problema anterior, característica presente, também, nas demais situações-problema. Tais objetivos estão ligados ao levantamento de questões em torno da compreensão inicial do que corresponderia à ligação entre elementos, através da dependência entre eles. Dependência essa essencial às relações funcionais, ou seja, para o trato com o conceito de função, e, conseqüentemente, com o conceito de função afim.

As questões levantadas através das situações-problema não pretendem aprofundar idéias sistematizadas, tais como a formulação de expressões, verbais ou algébricas, para representar tais relações. Estas sistematizações ocorrem a partir do trabalho com as atividades teórico-experimentais.

A problematização desenvolvida nessa situação-problema surge em um contexto mais familiar, pois envolve idéias matemáticas já trabalhadas pelos alunos. Apesar de estas idéias terem sido trabalhadas com outro enfoque, o fato de serem genuinamente conhecimentos matemáticos transfere um caráter mais coerente com aquilo que, em geral, os alunos esperam de discussões envolvendo conceitos matemáticos: pelo menos a inclusão de uma fórmula ou expressão matemática.

Essa situação-problema envolve a problematização da relação existente entre a medida de um lado de um quadrado e a determinação de sua área. Parte do questionamento da dependência, ou não, entre esses dois elementos, particularmente do fato de que a área desse quadrado possivelmente esteja diretamente vinculada à medida do seu lado. Novamente, a questão posta apresenta palavras chaves em destaque que, nesse caso, são as palavras *determina* e *função*.

As discussões partem justamente da idéia vinculada a essas duas palavras, e das dimensões assumidas dentro da situação avaliada. A presença da expressão matemática característica do cálculo da área de um quadrado tem o intuito de estruturar as discussões e as possíveis hipóteses surgidas. A expressão matemática representa apenas uma informação a mais, pertinente à análise da situação e a relação estabelecida, ou não, entre os seus elementos.

As primeiras hipóteses são formuladas a partir da análise conjunta da expressão e da questão inicial. A justaposição de seus significados sustenta as discussões e as argumentações desenvolvidas em torno do problema apresentado. O processo de desenvolvimento das conclusões é análogo ao realizado na situação anterior. Ou seja, as conclusões vão sendo formatadas a partir da problematização inicial da questão e das informações dadas, para, posteriormente, potencializar a tomada de posicionamento e a articulação de idéias para a formulação de uma conclusão coerente com a questão inicial, que contemple as colocações dos alunos e corresponda aos objetivos da situação-problema.

A intenção principal da discussão dessa situação-problema é localizar uma possível relação funcional entre a área de um quadrado e a medida de seu lado. Este é o ponto de partida para as construções. Além disso, assim como na situação anterior, os alunos precisam localizar, caso existam, as transformações e as regularidades dessa situação-problema. A identificação desses elementos possui o mesmo objetivo assumido anteriormente, o de verificar os papéis desempenhados por tais elementos junto à relação funcional analisada. Servem também para o estabelecimento de pontes entre as atividades subseqüentes e entre os conhecimentos trabalhados a partir de tais atividades.

Situação-Problema 3

O desenvolvimento dessa situação-problema ocorre de forma análoga às demais. Parte de uma questão inicial que pretende potencializar as discussões envolvidas na situação proposta. O ponto de partida para essas discussões, nesse caso, é a relação existente entre o perímetro de um retângulo e sua área. Questiona o fato de ser, ou não, possível que o perímetro de um retângulo seja capaz de determinar a sua área. A questão inicial também apresenta palavras chaves, desencadeadoras das problematizações, nesse caso as palavras são, novamente, *determina* e *função*. A existência ou não de uma relação de dependência para este caso, está diretamente ligada à compreensão dos significados dessas duas palavras, e de suas dimensões no contexto da situação-problema.

A fim de sustentar as discussões são apresentados dois retângulos como exemplo, para que o aluno utilize-os como subsídio na formulação de suas inferências e argumentações. Estes retângulos apresentam perímetros com medidas iguais, entretanto seus lados assumem valores diferentes. Essa aparente contradição possibilita a confirmação ou, caso necessário, a reformulação de idéias construídas anteriormente.

As soluções sugeridas para esta situação-problema, em geral, são sustentadas pelas informações levantadas durante a problematização inicial e as identificadas no momento de discutir os exemplos postos. A comparação entre estes dados, em geral, serve de base para as conclusões apresentadas.

Nessa situação-problema os alunos também precisam identificar as transformações e as regularidades existentes, a fim de complementar as idéias construídas anteriormente, em especial quanto à pertinência e importância desses elementos no contexto da situação avaliada. Também pretende criar vínculos estreitos com as situações anteriores e com as atividades desenvolvidas em seguida, em especial através dos significados de tais elementos para cada contexto analisado.

As dimensões assumidas por estes elementos, dentro da situação analisada, deve ser enfatizada na medida em que as discussões vão surgindo, buscando correspondências na questão inicial sempre que possível. Nesse sentido cabe ao professor potencializar momentos em que essa importância seja visualizada e compreendida pelo aluno. Ainda, no intuito de consolidar as possíveis conclusões estabelecidas, é possível utilizar a comparação entre esta situação-problema e a anterior para encontrar diferenças cruciais que levem ao entendimento das idéias formuladas, tanto nessa quanto na situação anterior.

Situação-Problema 4

Essa situação-problema, assim como as demais, busca explorar idéias introdutórias ligadas às relações funcionais, em especial no trato com palavras chaves usualmente utilizadas no estabelecimento de uma relação de dependência entre elementos. Almeja propiciar o contato com diferentes possibilidades de se designar uma relação funcional, discutindo as formas em que tais relações ocorrem. Contudo, para potencializar tais discussões, essa situação-problema faz uso de conceitos e idéias diretamente relacionadas com os fenômenos físicos estudados na Física, tais como: distância percorrida, tempo e velocidade.

Assim como as anteriores, essa situação-problema introduz a questão a ser discutida através do destaque de uma palavra chave. Nesse caso, a palavra chave é *associada*, que caracteriza a ligação/correspondência entre elementos pertencentes à situação analisada. Nesse caso, os elementos supostamente associados, ou relacionados são à distância percorrida e o tempo correspondente a cada uma das distâncias observadas.

Para potencializar as discussões é fornecida uma tabela onde os valores assumidos por estes elementos são apresentados, assim como às suas associações. A questão inicial é formulada a partir do fato de que a distância percorrida pelo automóvel é função do tempo gasto no percurso.

As problematizações são pautadas pela premissa de que em cada momento a posição do carro na estrada é única, o que leva a construções onde é constatada a relação funcional existente entre a posição do automóvel e o tempo de percurso. Ou seja, a posição do móvel é função do tempo de percurso. As argumentações são estruturadas pela análise dos dados tabelados e pelos comportamentos correspondentes. Como essa situação envolve um evento bastante familiar as discussões são facilitadas, já que o aluno é capaz de buscar correspondências nos acontecimentos cotidianos para balizar suas hipóteses.

A questão inicial se amplia na medida em que envolve também o trato com a função horária da posição em função do tempo. Este é o primeiro momento, desde o início das atividades, em que os alunos têm contato com uma representação formal de uma relação funcional, particularmente de uma função afim, por meio de uma expressão algébrica. Porém, a discussão em torno da construção e constituição dessa expressão não é aprofundada nesse momento. Nem tão pouco a identificação das transformações e das regularidades é feita agora.

Isto ocorre devido à necessidade, que vemos, de se trabalhar mais detalhadamente a formulação de expressões, verbais ou algébricas, que representem uma função. O aprofundamento necessário só acontece com o desenvolvimento das duas atividades teórico-experimentais seguintes, onde o trabalho com tais representações é potencializado, através da construção dessas representações, associando a esse processo a busca de significados para cada procedimento efetuado.

Nesse sentido, as conclusões em torno da situação-problema 4, só são construídas após o desenvolvimento das atividades seguintes, as quais fornecem subsídios para a compreensão das idéias ligadas ao fenômeno físico contextualizado pela mesma. Também é possível problematizar, de maneira mais ampla, a importância das funções horárias dos movimentos, no contexto de tais fenômenos. Bem como, verificar similaridades com as funções matemáticas, estabelecendo conexões entre os diferentes modos de se estabelecer uma relação funcional.

Os aprofundamentos das discussões em torno do fenômeno físico abordado, nessa situação, deverão ser definidos pelo professor. Particularmente, vemos nessa apenas uma possibilidade de familiarizar os alunos com conceitos e idéias que serão discutidas posteriormente, no momento da resolução dos problemas.

Atividades Teórico-Experimentais

Atividade Teórico-Experimental 1: Dominós[8]

Material:

- Oito peças de dominó de um mesmo jogo, para cada grupo de alunos;
- Régua milimetrada feita com tira de papel milimetrado.

Essa atividade pretende sistematizar a idéia de proporção direta, ou seja, da função afim, nesse caso na sua forma particular, ou incompleta (dada por: $y = a.x$), também denominada de função de primeiro grau incompleta.

O primeiro ponto para discussão é o próprio material utilizado. Ao se depararem com o conjunto de peças de um jogo bastante familiar, o aluno busca dar significado para a vinculação de tais peças à construção do conceito de função. Tenta identificar a potencialidade desse material junto ao processo que irá desencadear.

Apesar de estar manipulando materiais conhecidos o desenvolvimento da atividade não é facilitado. Pelo contrário, a relação como o jogo de dominós, com suas regras e procedimentos proporciona certa dificuldade em dimensionar o uso de tais peças em um contexto diferenciado, em desprender-se das idéias partilhadas em torno dessas peças. Não pretendemos estabelecer nenhum vínculo entre a atividade teórico-experimental e o jogo de dominós. Inclusive a utilização dessas peças foi definida tendo em vista o seu vínculo com coisas do cotidiano. E, por não despertarem, aparentemente, ligação nenhuma com conhecimentos matemáticos. Entretanto, quaisquer peças regulares, como caixas de fósforos, por exemplo, serviriam para desenvolver esta atividade.

O primeiro procedimento dessa atividade é encaminhado pelo professor. Este solicita aos alunos que listem as qualidades (grandezas) que podem ser observadas e atribuídas ao conjunto de peças de dominós. Depois de listadas, o professor pede para que identifiquem aquelas que dependem entre si (cor, comprimento, largura, espessura, área, volume).

Em seguida, solicita que voltem sua atenção para a espessura da peça. A partir disso, questiona a possibilidade de estabelecer alguma relação entre o número de peças de dominós e a altura da pilha de peças.

A resposta dos alunos, na maioria das vezes, é imediata: “quanto maior o número de peças, maior a altura da pilha”. Em geral, a sistematização dessa resposta não se dá de forma tão objetiva. Os alunos encontram certa dificuldade em formular uma expressão verbal capaz de definir tal comportamento. A questão da linguagem e da organização de informações surge como um ponto a mais para a discussão. Por vezes, as respostas formuladas carregam fortes dualidades nas expressões, que, para o aluno, dificilmente ficam claras.

---

[8] Adaptação feita a partir de Pinheiro (1996).

Nesse sentido, é essencial enfatizar a questão das mudanças, dos elementos que variam (objetos mutáveis), durante o empilhamento dos dominós, ou seja, prender a atenção dos alunos no número de peças e na altura da pilha. Também é preciso discutir a não relevância das demais grandezas listadas, devido a não interferência na variação da altura da pilha de dominós.

Vincular esse comportamento às situações similares, vivenciadas normalmente pelos alunos, tais como o valor a ser pago por uma determinada quantidade de fotocópias é uma via bastante eficaz na busca de significados para as discussões desenvolvidas. Outro detalhe que deve ser ressaltado é o de que, em geral, estes estabelecimentos disponibilizam tabelas onde os valores a serem pagos, por determinada quantia de cópias, já está definido.

Após essa contextualização o professor solicita que os alunos completem uma tabela, na qual são atribuídas algumas quantidades de dominós que devem ser empilhados para serem determinadas as alturas correspondentes. O processo de medição exige o trabalho com algarismos significativos. Desse modo, cabe ao professor introduzir a discussão em torno desses algarismos, e sua obtenção, para que os alunos utilizem-nos para a determinação das alturas observadas. Ainda nessa atividade, o aluno entra em contato com algo novo: a determinação da constante de proporcionalidade através da inclinação da reta.

O trato com essa nova informação deve ser mediado pelo professor, principalmente pela importância e pelo significado desta no contexto da relação analisada. É surpreendente a reação dos alunos no momento em que determinam à inclinação da reta, especialmente ao constatarem que o valor encontrado corresponde aproximadamente à altura de uma peça de dominó. Ou seja, obtém o valor aproximado para a altura média da peça, a altura aproximada da peça padrão.

A existência de proporcionalidade direta entre a altura da pilha e o número de peças empilhadas não fica evidente, em especial no primeiro contato com os dados tabelados, já que a determinação da altura correspondente a uma peça não é solicitada. De modo geral, quando o aluno percebe a proporcionalidade entre essas grandezas tenta fazer uso dela para a obtenção das demais medidas. Porém, a desigualdade observada entre as medidas obtidas e a previsão feita através da utilização da proporcionalidade acaba gerando dúvidas quanto à veracidade dos valores. A primeira tentativa é de localizar e sanar possíveis erros durante a medição ou durante os cálculos. Os alunos ficam realmente perturbados com essa situação.

Este impasse serve para introduzir discussões em torno da idealização feita em torno do comportamento dos dominós empilhados. Nessas previsões não são consideradas possíveis irregularidades presentes nas peças utilizadas, resultantes do processo de fabricação. É relevante ressaltar que alguns dos dominós utilizados podem apresentar alturas diferentes, ocasionadas pelo processo de lixação. Essas controvérsias servem de estopim para discussões envolvendo as idealizações, e os diversos fatores que estas não dão conta de envolver e responder. Ou seja, a realidade é muito mais complexa e envolve muitos fatores que não estão ao alcance dos modelos produzidos pelo homem, tais modelos não são representações fiéis da realidade, são apenas boas aproximações.

Com base nos dados tabelados solicita-se que os alunos passem para a representação gráfica dos mesmos. Mesmo que estes já tenham tido contato com gráficos durante o percurso escolar, o professor precisa retomar questões ligadas à construção, entre elas: a definição dos eixos, a distribuição das grandezas nos eixos, a definição da escala adequada, etc. Em especial a discussão em torno da escolha da escala merece atenção especial, haja vista a sua relevância e interferência na definição do gráfico. Ainda nesse momento, é preciso introduzir as idéias de variável dependente e independente, ressaltando seus papéis no problema observado e suas implicações na interpretação feitas em torno da situação analisada.

O momento de traçar a “melhor curva”, ou reta correspondente aos dados coletados, é essencial para essa atividade, pois esta representa a passagem da realidade dos dados obtidos para a sua idealização, para o modelo construído.

A partir de quantidades inteiras de dominós é possível analisar o comportamento de quantidades de dominós que a atividade, do modo como foi desenvolvida, não proporciona, sejam estes valores fracionários ou muito grandes. Para essa representação não são levadas em consideração às variações encontradas entre as peças utilizadas, baseando a construção em dominós ideais. Este, dito ideal, representa a média entre os dominós, isto é um dominó padrão.

Apesar de se estar trabalhando com um dominó idealizado, é preciso esclarecer que este não está distante da realidade, e é bem provável que muitos dos dominós sejam idênticos ao padrão. Para potencializar discussões em outros patamares, é interessante abordar outras situações onde são utilizadas idealizações, padrões. Por exemplo, a altura média do ser humano, que no caso dos homens é de 1,70 m. O que não significa que toda a população masculina adulta possua essa altura, embora muitos tenham sua altura coincidindo com este valor padrão. Contudo, é fundamental esclarecer que ao construirmos um modelo para os dominós, estamos idealizando que todos os dominós são iguais, isto é, estamos considerando o dominó ideal.

Após a finalização do gráfico, é solicitado que os alunos expressem verbalmente o comportamento da pilha de dominós na medida em que varia o número de peças. Em geral, algo equivalente à: a altura da pilha de dominós é igual à altura de um dominó vezes o número de dominós empilhados. Em seguida, tendo como base a verbalização feita a partir do comportamento da pilha, é solicitado que expressem em linguagem simbólica, ou seja, através de uma expressão algébrica tal comportamento, de modo que: $h = h_1 . N$.

De acordo com a pretensão do professor ao explorar essa atividade, é possível estabelecer um comparativo entre a expressão construída com a que se obtém através da definição de tangente aplicada para dois pontos específicos, utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo. Isto potencializa a discussão em torno de que a representação gráfica tem a mesma forma lógica da proposição apresentada verbalmente e em linguagem simbólica. Esta opção está também ligada ao nível de ensino que o professor pretende desenvolver a atividade.

Em seguida, aborda-se o campo de utilização de tal modelo, investigando situações em este não se aplica, ou seja, é preciso enfatizar também as questões relacionadas aos limites dos modelos construídos, por meio de exemplos onde encontrem semelhanças e diferenças. Tais como o preço a ser pago por certa quantidade de um produto e o preço pago por uma corrida de táxi. A não utilidade do modelo a situações como a segunda, onde a proporcionalidade direta não se aplica, levanta discussões em torno da existência, ou não, de um modelo que dê conta de idealizar tais situações. Estas serão enfatizadas através da atividade teórico-experimental seguinte, bolas de gude.

Ao final da análise dos dados, os alunos precisam localizar quais as transformações e quais as regularidades identificadas nessa situação, a fim de que verifiquem as mudanças e as permanências ocorridas nesse evento. A nosso ver esse momento é fundamental para potencializar a importância de tais elementos na estruturação de uma relação de dependência como a analisada. A verificação de quem varia e de quem não varia durante o comportamento observado. Nesse caso, o que muda é o valor assumido por uma grandeza quando o valor da outra se altera. O que permanece inalterado são as grandezas e as relações estabelecidas entre elas. As idéias de variação e permanência também servem de pontes entre as atividades trabalhadas, tanto com as anteriores, quanto com as subseqüentes, por propiciarem a identificação de similaridades entre as variações e as permanências encontradas em cada atividade.

Os conhecimentos matemáticos produzidos a partir dessa atividade perpassam pela estruturação de um modelo matemático, uma relação funcional, que explique determinado comportamento. Também potencializa o trato com as diferentes formas de se representar uma função afim, do tipo $y = a .x$, bem como o trânsito entre elas. Propicia a identificação de eventos onde tal relação também é aplicada, redimensionando conceitos/conhecimentos construídos para outras situações. Disponibiliza a sistematização dos conceitos inerentes à proporcionalidade direta, e sua caracterização a partir do conceito de função, em especial do conceito de função afim.

Novamente, ressaltamos que tais atividades não são auto-suficientes, servindo apenas como um módulo introdutório para se trabalhar o conceito de função e os demais conhecimentos inerentes a ele. Sendo assim, recomendamos que o professor disponibilize exercícios adicionais onde às construções feitas possam ser verificadas, e as diferentes formas de representação de uma função possam ser utilizadas, preferencialmente através de situações familiares ao aluno.

Atividade Teórico-Experimental 2: Bolas de Gude[9]

Material

- Recipiente cilíndrico, no qual se cola uma tira de papel milimetrado;
- Bolas de gude;
- Água.

Essa atividade é encaminhada após as discussões em torno da atividade anterior, na qual os alunos entraram contato com a primeira representação de uma função afim, particularmente a ligada à proporcionalidade direta, dada por: $y = a.x$. Em decorrência, identificaram e utilizaram as diferentes formas de representação que tal relação funcional admite. Isto é recomendado porque essa atividade é desenvolvida a fim de potencializar a construção de uma função afim, ou uma variação linear como também é conhecida, dada por: $y = ax + b$. Esta função também é denominada de função do 1º grau completa.

Essa relação funcional se diferencia da construída na atividade anterior, pois nesse caso não ocorre a proporcionalidade direta. A importância dessa atividade está ligada justamente ao fato dela propiciar o rompimento com a proporcionalidade direta. Entretanto, é necessário que os alunos estejam habituados a trabalhar com a construção de gráficos, com a determinação da relação matemática e a expressão verbal correspondente. Também precisam determinar o valor da constante de proporcionalidade através da inclinação da reta.

O ponto crucial dessa atividade é o fato de que esta exige a reformulação de idéias construídas através da atividade anterior. Isto é verificado principalmente no momento de rever a relação matemática construída inicialmente, tendo o cuidado para que esta mantenha a forma lógica da expressão verbal construída para caracterizar a relação funcional observada.

As medidas solicitadas são obtidas através da utilização do recipiente, onde está colada uma fita de papel milimetrado para proporcionar leituras satisfatórias, sendo que este já está preenchido com água, a uma dada altura, e as bolas de gude. Desse modo, o aluno mede a altura da coluna de água observada para depois determinar o volume correspondente a cada altura verificada. Nesse momento, em geral, as noções de proporcionalidade direta são utilizadas para determinar o volume associado a cada uma das alturas da coluna de água.

O primeiro procedimento para o desenvolvimento dessa atividade é o preenchimento do recipiente com uma determinada quantidade de água, aproximadamente o equivalente a uma altura de 6,0 cm, registrando a seguir este valor na tabela. Na seqüência, o aluno vai acrescentando a quantidade de bolas de gude indicada na tabela, registrando, nesta mesma tabela, a altura observada para a coluna de água. Tendo em vista que a área interna do recipiente é constante, o aluno completa a coluna correspondente ao volume da tabela através da multiplicação de cada altura observada pela área do recipiente. Esta área já é fornecida pela atividade, não necessitando que o aluno determine-a, porém isto não exclui uma discussão em torno da maneira como esta área foi encontrada. Enfim, o aluno obtém o valor do volume que a água assume, através da quantidade de bolas de gude que coloca no recipiente.

A representação gráfica obtida através desses dados assume um perfil bastante diferente do gráfico construído na atividade dos Dominós. Entretanto, é

---

[9] Adaptação feita a partir de Pinheiro (1996).

interessante deixar os alunos trabalharem sozinhos até o momento da reformulação/validação da aposta. Isto é, a mediação do professor só ocorre no momento em que o aluno necessita comparar a formulação feita inicialmente, geralmente correspondendo a uma relação do tipo: $V = a.N$, com os dados observados e coletados durante o desenvolvimento da atividade.

Esta comparação é o estopim para a compreensão de que a reformulação da aposta é essencial, para que esta possa eqüivaler às observações feitas. A fim de que a expressão matemática, assim como a verbal, construída no momento da aposta corresponda ou, pelo menos, se aproxime dos dados coletados durante a observação. Em geral, esse é o momento em que o aluno percebe a necessidade de considerar o volume inicial da água, apesar deste não estar vinculado a nenhuma quantidade de bolas de gude. A importância em considerar este valor inicial está diretamente ligada à adequação da expressão algébrica que realmente corresponda aos dados coletados e tabelados. Assim, a expressão algébrica assume o seguinte perfil: $V = a.N + Vo$.

Nessa atividade também é explorada a potencialidade dos conceitos unificadores transformações (T) e regularidades (R). Os alunos como tem ocorrido através das atividades já delineadas, precisam identificar tais elementos no contexto da atividade desenvolvida, a fim de que percebam quais as variações e quais as permanências encontradas nesta situação. Tal identificação também colabora com a visualização dos entes formadores da expressão algébrica correspondente à atividade observada, pois localiza quem varia e quem não varia. Além de criar vínculos com os demais elementos variáveis, e permanentes, das demais atividades, tanto das já desenvolvidas quanto das que ainda virão.

Novamente ressaltamos a necessidade de complementar esta atividade com outras que explorem uma função afim, ou uma variação linear, de modo a propiciar uma maior sistematização desse conceito e de outros adjacentes. Recomendamos também que tais atividades contemplem situações facilmente identificáveis pelos alunos, nas quais os eventos observados encontrem correspondências na vida cotidiana deles.

Funções Definidas Por Fenômenos (Processos) Físicos

Nessa seção exploramos de maneira mais enfática o vínculo entre o conceito de função, especialmente de função afim, com eventos envolvendo fenômenos físicos, através da sua recorrente utilização na modelização de tais eventos. Também priorizamos o contato com conceitos usualmente trabalhados na disciplina de Física, tais como: velocidade, tempo, distância percorrida, temperatura, entre outros, a partir de atividades diversificadas onde tais conceitos se relacionam através de uma relação funcional, isto é, através de uma função afim.

No total são seis atividades que compreendem o trato com a representação gráfica, com dados tabelados, com a determinação de expressões verbais e algébricas, e com a identificação das regularidades e transformações contidas nas mesmas. Enfim, todas as construções realizadas até o momento serão retomadas, porém em contextos diferenciados, envolvendo, na sua maioria, conhecimentos e conceitos diretamente ligados à disciplina de Física e a alguns fenômenos usualmente tratados por tal disciplina. Vinculado a isso, apresentamos uma atividade, a atividade 6 dessa seção, que é caracterizada pela análise de um gráfico onde as informações fornecidas não são vinculadas a quaisquer fenômenos físicos, mas estão envolvidas em um contexto social, onde questões deste cunho são abordadas e avaliadas também por meio de relações funcionais.

Atividade 1

Atividades 1a, 1b e 1c

Essas atividades têm como objetivo principal a elaboração de hipóteses, ou apostas, para cada uma das situações especificadas. Estas apostas, inicialmente feitas através de uma expressão verbal, devem ser formuladas de acordo com a compreensão inicial, construída pelo aluno, diante da situação analisada. Em seguida esta aposta deve servir de baliza para a determinação de uma expressão algébrica que corresponda tanto à hipótese formulada quando ao comportamento relatado pela situação.

Para cada uma das três situações relatadas o aluno deverá seguir os mesmos procedimentos, quais sejam: elaborar uma hipótese razoável, na forma de uma expressão verbal, para a situação analisada e depois construir uma expressão algébrica equivalente a esta hipótese e ao que foi relato pela situação. Em geral, a maior dificuldade é observada no momento da identificação de quais as grandezas envolvidas diretamente na relação funcional, bem como na hora de definir seus papéis dentro da situação avaliada.

Atividade 2

Essa atividade é a primeira em que o perfil de problemas envolvendo fenômenos físicos fica evidenciado. Este é caracterizado pela presença de conceitos especificamente tratados no contexto de tais fenômenos, particularmente na disciplina de Física.

Nossa intenção ao propiciar este tipo de problema não é o de explorar aprofundadamente os eventos envolvendo tais conceitos, nem ao menos sistematizar a estruturação formal de conhecimentos nesta área. Pretendemos disponibilizar o contato com situações oriundas de outros contextos, que não o matemático, onde o conceito de função pode ser identificado, potencializando, ao mesmo tempo, aproximações conceituais entre as disciplinas de Matemática e Física.

Essa atividade envolve a análise de dados tabelados, os quais correspondem às distâncias percorridas por um automóvel e o respectivo consumo de gasolina para cada distância. As primeiras problematizações acerca deste problema ocorrem justamente a partir das informações tabeladas. A primeira discussão é em torno do fato de que os valores observados são valores idealizados, e que uma situação similar, quando observada no cotidiano dos alunos, possivelmente apresentaria distorções quanto aos valores fornecidos. Isto é justificado pela discussão já realizada sobre as idealizações e modelizações da realidade.

Após a análise dos dados fornecidos pela tabela e das relações estabelecidas entre os mesmos, os alunos parte para a construção do gráfico correspondente, tendo como base tais valores. Os procedimentos e os cuidados durante a construção são análogos aos já mencionados em atividades anteriores. Porém, cabe ao professor retomar, quando necessário, considerações feitas a respeito desta construção, induzindo os alunos a buscarem fundamentação para as novas construções em conclusões anteriores.

Em seguida, solicita-se que os alunos estabeleçam o tipo de relação existente entre as grandezas, neste caso entre a distância percorrida(d) e o consumo de gasolina(C). Novamente, será necessário utilizar idéias estruturadas anteriormente, mais especificamente às trabalhadas durante as atividades teórico-experimentais, através das quais os alunos poderão caracterizar a relação observada neste problema, como uma proporção direta ou uma variação linear.

Outra exigência deste problema é a determinação da inclinação da reta, através do gráfico construído anteriormente. Este tipo de questão também já foi trabalhado durante o trato com as duas atividades teórico-experimentais. A atribuição de um significado para o valor encontrado, coerente com a situação analisada, representa um momento bastante importante, tendo em vista que, em geral, os valores envolvidos em construções matemáticas não apresentam significados aparentes para os alunos. A constatação de que tal valor realmente faz sentido no contexto do problema é encarada com certo espanto pela maioria.

Também nessa atividade solicita-se que identifiquem, caso existam, as transformações e as regularidades envolvidas no problema. Esta caracterização possui o objetivo de reforçar junto aos alunos quais os papéis assumidos por cada uma das grandezas envolvidas, quais variam e quais não variam. Tal caracterização também potencializa o estabelecimento de conexões entre as atividades desenvolvidas.

Atividade 3

Essa atividade também mantém um perfil bastante característico de problemas tratados na disciplina de Física, devido aos conceitos e grandezas que envolvem. Porém, este problema abrange fatos até então não discutidos, tais como: a possibilidade de se analisar dois eventos distintos através de um único eixo cartesiano, ou seja, duas retas representadas em um único eixo cartesiano. As grandezas envolvidas nessa situação são: à distância percorrida e o consumo de gasolina de dois carros diferentes, A e B. A resolução dessa atividade está diretamente relacionada à questão (c) da atividade anterior, onde os alunos determinaram o valor da inclinação da reta e localizaram o significado deste valor no contexto da situação analisada.

Através de um raciocínio análogo, eles terão que responder qual dos dois carros envolvidos no problema é o mais econômico. A definição de mais econômico exige a visualização da relação existente entre as grandezas envolvidas na situação. É recomendado que os comportamentos sejam avaliados, em um primeiro momento, de forma isolada, primeiro um depois o outro, para facilitar o momento de análise conjunta dos comportamentos dos carros.

Um fator novo, e crucial no desenvolvimento das hipóteses em torno dessa questão, é o fato de que os eixos não apresentam valores referentes ao provável comportamento dos carros, ou seja, não se tem nenhuma informação quantitativa acerca de quais distâncias foram percorridas e, nem tão pouco, de quais os consumos de gasolina registrados de acordo com as respectivas distâncias percorridas.

Além da necessidade de interpretar o comportamento dos carros através do gráfico fornecido, a questão apresenta o agravante de não oferecer dados quantitativos para esta análise. Isto requer um cuidado ainda maior, exigindo que o professor mantenha-se bastante próximo das discussões, a fim de mediar o processo, não no intuito de facilitar a compreensão, mas buscando mapear as estratégias lançadas pelos alunos na busca de soluções para a questão.

Em geral, os alunos estão acostumados a tratar problemas semelhantes a partir de dados quantitativos, o que acaba limitando, por vezes, as inferências construídas. Desse modo, cabe ao professor oferecer-lhes alternativas satisfatórias que potencializem a construção de possíveis soluções para a questão. O mais recomendável, neste caso, é que estes atribuam valores aleatórios, porém coerentes com o gráfico fornecido, para que possam através da comparação entre os comportamentos observados e entre os dados quantitativos de cada um construir uma solução satisfatória, que corresponda à expectativa inicial do problema e da questão lançada pelo mesmo.

Este problema caracteriza a potencialidade existente na análise e na interpretação de dados gráficos, apresentando, ainda, uma outra dimensão até então não explorada, para além de dados quantitativos, em que este tipo de representação se torna um viés bastante rico em informações.

Atividade 4

Essa atividade é uma representante, bastante típica, de uma situação na qual a idéia da proporcionalidade direta é rompida, dando lugar à análise de comportamentos através da variação linear.

A primeira estratégia que o aluno lança mão para solucionar este problema é a proporcionalidade direta, porém ao perceber que esta não se aplica ao comportamento observado, tenta localizar alternativas através de atividades já realizadas. Ou seja, para encaminhar as soluções referentes a esta atividade ele precisará buscar construções já realizadas, mais especificamente aquelas realizadas durante a análise da atividade teórico-experimental das bolas de gude, já que este foi o primeiro contato que teve com uma situação onde a proporcionalidade direta não se adequava.

Tomadas como base as discussões encaminhadas durante a atividade das bolas de gude, o aluno é capaz de construir suas inferências em torno da atividade proposta. A atividade contextualiza uma corrida de táxi onde é necessário determinar o valor a ser pago de acordo com a distância percorrida. Para tanto são fornecidos os valores da bandeirada e do quilômetro rodado.

De posse desses dados o aluno precisa completar uma tabela onde são fornecidas algumas distâncias para que este determine os respectivos valores das corridas. Como ainda não foi solicitado, explicitamente, que determine uma expressão algébrica capaz de obter tais informações, o aluno acaba determinando os valores por meio de construções mentais balizadas nas informações fornecidas. Ou seja, ele já utiliza tal expressão antes mesmo de escrevê-la explicitamente.

Em seguida, solicita-se que a partir da tabela completada ele construa o gráfico correspondente, que represente a situação abordada pelo problema. Esta construção tem como intuito, mais uma vez, ressaltar a importância da interpretação de dados a partir dela. Tanto que na questão seguinte, o aluno necessita determinar o valor de uma corrida equivalente a 3,5 km rodados. Tendo em vista que tal valor não está representado na tabela, nem tão pouco pode ser encontrado pela expressão algébrica, até então não determinada, ele precisa buscar tal informação diretamente no gráfico que acabou de construir.

A seguir, solicita-se que o aluno identifique qual o tipo de relação existente entre as grandezas, neste caso preço da corrida (P) e distância percorrida (d). Nesse momento ele também já identifica qual a expressão algébrica mais adequada à situação analisada. Construindo-a tendo como parâmetro a atividade das bolas de gude. Para verificar a validade da expressão construída ele pode utilizar os dados tabelados para fazer comparações, ou seja, ele valida a expressão que acabou de construir através dos dados que utilizou para preencher a tabela.

A última questão relacionada com essa atividade é a que solicita a identificação das transformações e das regularidades presentes na atividade, caso elas existam. A identificação de tais elementos é uma outra possibilidade para a verificação da validade da expressão algébrica construída anteriormente. Visto que a caracterização das variações e das permanências, ou seja, dos elementos variáveis e dos não variáveis, está diretamente ligada à identificação de variáveis dependentes e independentes. Estas, essenciais no momento de estabelecer os papéis assumidos na relação funcional, e em conseqüência no contexto da expressão correspondente.

Atividade 5

Essa atividade preserva a característica encontrada nas atividades anteriores, o privilégio a situações em que conceitos diretamente ligados aos fenômenos físicos são abordados. Esta opção está vinculada a nossa intenção de proporcionar conexões conceituais entre as disciplinas de Matemática e de Física. Essa atividade também possibilita o trato com dados tabelados, porém, nesse caso, os dados já são fornecidos não sendo necessário que o aluno preencha a tabela. Isto é justificado pela intenção de privilegiar outras discussões a partir dessa atividade, por exemplo: uma discussão mais aprofundada sobre a importância da determinação de uma escala coerente, para a construção do gráfico, e as implicações dessas escolhas.

O evento contextualizado por esta atividade diz respeito à relação entre as posições de um veículo, verificadas através dos marcos quilométricos da estrada, e o tempo verificado em cada uma destas posições. Os valores correspondentes já estão disponíveis na tabela.

A primeira solicitação é a construção do gráfico correspondente aos dados tabelados. O fato de que alguns dados não assumem valores inteiros exige um cuidado maior na definição da escala mais apropriada para a construção do gráfico.

Cabe ao professor problematizar tais idéias, tentando identificar as compreensões dos alunos diante desta situação, buscando encaminhá-los para uma escolha mais coerente, ressaltando as implicações das mesmas junto ao problema analisado e ao traçado da reta. Também deve potencializar discussões em torno das diferenças obtidas devido a escolhas variadas. A própria questão já traz uma sugestão de escala para ser utilizada neste caso, o que não garante que esta seja realmente a mais indicada, e isso deve ser enfatizado durante o desenvolvimento da atividade.

Outra característica explorada através do gráfico construído é a localização de dados a partir das informações contidas nele. Ou seja, o aluno necessitará analisar e interpretar as informações contidas na representação gráfica que construiu para poder responder a questão posta qual seja: determinar qual o marco quilométrico onde o cronômetro foi ligado, isto é, onde este marca o tempo $t = 0$. A seguir, novamente o aluno é levado a definir qual o tipo de relação funcional que corresponde à situação avaliada, bem como precisa construir uma expressão algébrica que represente o comportamento observado.

Para encerrar as discussões em torno desta atividade, são retomadas algumas problematizações feitas no início da atividade, mais especificamente as referentes à definição das escalas no momento da construção do gráfico. A questão posta nesse momento busca verificar quais as compreensões dos alunos após tais discussões, buscando verificar se estes são capazes de apontar possíveis variações resultantes das escolhas das escalas. É recomendável que tais discussões também contornem a existência, ou não, de implicações, junto às grandezas envolvidas na situação avaliada, decorrentes das escolhas das escalas.

Atividade 6

A atividade 6 é a última do módulo proposto. Nesse caso, ao analisar esta atividade o aluno já possui uma bagagem razoável de construções e situações diversificadas, nas quais o conceito de função afim e suas principais características já foram abordados. Assim, esta questão possui um perfil diferenciado das demais, tendo em vista que envolve idéias que extrapolam os fenômenos físicos, apresentando a forte aplicação deste conceito a outros campos, entre eles, o campo das situações sociais, diretamente ligadas ao cotidiano dos alunos.

Essa atividade está balizada pela análise do comportamento do gráfico correspondente a evolução dos valores da cesta básica no período de julho de 1994 até janeiro de 2003, onde as grandezas envolvidas são: os valores assumidos pela cesta básica e o período em que tais variações são constatadas. Em seguida, a utilização desse gráfico também representa algo novo para o aluno, na medida em que a reta correspondente diferencia-se significativamente das já observadas. Esta apresenta diferentes inclinações, destoando das retas traçadas até o momento.

A primeira questão envolve justamente a identificação das grandezas envolvidas no fenômeno observado, por meio do gráfico. Como tais grandezas ainda não haviam sido exploradas é provável que os alunos sintam dificuldades para caracterizá-las como grandezas, para reconhecerem estas como grandezas possíveis de serem envolvidas em uma relação funcional.

Outra questão abordada nesta atividade é a identificação das escalas estabelecidas para a construção do gráfico. A resolução dessa questão exige a análise minuciosa dos dados e dos eixos em que estão postos, a fim de que o aluno consiga não só identificar, como também, atribuir significados às informações coletadas a partir do gráfico. Ainda na análise do gráfico, os alunos são chamados a identificarem quais as diferenças encontradas entre este e os demais gráficos construídos no decorrer das atividades.

Diferentemente do que fora feito em atividades anteriores, através da exploração de tabelas, esta atividade exige a construção de uma tabela relativa ao comportamento representado no gráfico. Porém, os dados serão retirados justamente deste gráfico, algo que não havia sido feito em nenhuma das atividades anteriores. Em geral, parte-se da tabela para a construção do gráfico, e o caminho contrário dificilmente é abordado. Esta atividade procura enfatizar tal possibilidade.

Para fechar as discussões em torno dessa atividade, é solicitado que os alunos identifiquem as possíveis transformações e regularidades presentes neste problema. O objetivo dessa questão é análogo ao definido anteriormente, quando da identificação de tais elementos nas demais atividades: focalizar quais os elementos variáveis e quais os permanentes, potencializando a caracterização das variáveis dependentes e das independentes envolvidas na relação funcional. Além de construir conexões entre os conhecimentos abordados nesta e nas demais atividades.

Tendo em vista que o gráfico apresentado nesta atividade suscita várias outras discussões, caberá ao professor explorar, ou não, tais possibilidades, utilizando-o para problematizar outros exemplos de funções, assim como outros contextos onde tais conceitos estão fortemente presentes.

6. 3 - A Aplicação do Módulo e a Análise dos Resultados

Nesse momento, descreveremos o processo de aplicação do módulo de atividades. Faremos uma análise dos resultados coletados, especialmente, durante a o trabalho realizado junto à turma de alunos de ensino regular, de uma escola pública de Florianópolis. Essa análise será baseada tanto pelos principais avanços quanto pelos entraves encontrados com o desenvolvimento das atividades.

A escola a que nos referimos está localizada na região central da cidade e envolve um público bastante variado de alunos, oriundos de diferentes partes da cidade, tanto do centro quanto da periferia da cidade. Seu cenário não foge a grande maioria das outras escolas públicas: professores com diferentes níveis de formação, com carga horária elevada, com várias turmas e diferentes níveis. Sua estrutura física, assim como, seus problemas organizacionais e disciplinares não destoam do quadro, freqüentemente, enfrentado pelas demais instituições de ensino, principalmente as de caráter público.

O primeiro contato com a escola ocorreu através da secretaria da mesma, diante da qual questionamos a possibilidade de desenvolver a pesquisa em uma de suas turmas. Depois de esclarecermos os objetivos da pesquisa, fomos apresentados ao professor de Matemática responsável pelas turmas de 8ª série, duas no total. Apresentamos a ele a proposta de atividades a serem desenvolvidas, os objetivos da pesquisa e as razões de escolha do nível cognitivo, 8ª série, já que uma das suas preocupações era com relação ao fato de, ainda, não ter trabalho com os alunos o tema funções.

Também, foi colocada para ele a vontade de que o trabalho fosse desenvolvido através de uma parceria entre ele, o professor responsável pela disciplina de Matemática da turma, e a pesquisadora, responsável pela mediação entre os alunos e as atividades desenvolvidas durante os encontros.

O professor, em poder de uma cópia da proposta, solicitou um tempo para analisar o material e, posteriormente, apresentar um posicionamento. Na data marcada, voltamos à escola para conversar com o professor, ele pareceu um tanto obrigado a ceder uma de suas turmas, já que a própria escola já havia permitido o desenvolvimento da pesquisa em uma de suas turmas, embora tenha deixado a cargo do professor a decisão final.

Este, após concordar com o desenvolvimento da pesquisa em uma de suas turmas de 8ª série, que, de acordo com ele, seria uma turma com poucos problemas disciplinares, solicitou mais alguns dias para encaminhar atividades que estavam em andamento junto à referida turma, para que a pesquisa pudesse ser iniciada.

O trabalho realizado com esses alunos totalizou vinte encontros, realizados duas vezes por semana, utilizando dois, dos quatro períodos semanais, destinados a disciplina de matemática. Essa turma era formada de vinte e quatro alunos adolescentes, com idade média de dezesseis anos. O grupo piloto foi formado de cinco alunos voluntários que desenvolviam as atividades uma vez por semana, em horário alternativo, sem vínculo com a escola. O trabalho junto a esse grupo totalizou cinco encontros.

A análise dos resultados será feita a partir de cada atividade, destacando as dificuldades encontradas, os avanços e as contribuições verificadas com o desenvolvimento destas. Enfatizaremos, especialmente, o trabalho na escola. Porém, sempre que considerarmos relevante relataremos similaridades ou discrepância identificadas, também, junto ao grupo piloto.

No primeiro encontro o professor da turma esteve presente e fez a apresentação inicial aos alunos da proposta de pesquisa que buscávamos desenvolver. Em seguida, fornecemos alguns esclarecimentos quanto aos objetivos da proposta, bem como de detalhes ligados ao assunto e ao material disponibilizado para a realização das atividades. Também, delineamos como seriam encaminhadas as atividades, através da ênfase na mediação e na construção gradual de idéias.

Questões ligadas ao tema proposto no trabalho foram levantadas, por exemplo, o que seria e qual a finalidade de se estudar funções, já que um dos itens salientados durante a apresentação da proposta foi a de que tal conceito ainda não fazia parte dos conhecimentos formais deles, pelo menos no que diz respeito aos formalmente trabalhados, até então, na escola.

Após os devidos esclarecimentos, iniciamos a manipulação do material disponibilizado aos alunos. É preciso ressaltar que o material era distribuído individualmente, ou seja, cada aluno possuía o seu e era responsável pelo mesmo. Também é necessário frisar que todo o material era recolhido ao final de cada encontro, de modo a garantir o desenvolvimento das atividades nos encontros subseqüentes, e a análise/avaliação da manipulação do material feita pelos alunos, em cada encontro.

Também deixamos bastante clara a não relação, pelo menos formal, das atividades realizadas nesses encontros com as desenvolvidas pelo professor durante as suas aulas, principalmente no tocante à avaliação. Uma das principais preocupações apresentadas pelos alunos, expressas em falas do tipo: "*Vai valer nota*?". Ressaltamos, ainda, que o trabalho somente faria sentido se a participação, de forma colaborativa, dos mesmos fosse assumida. Salientamos que o processo de desenvolvimento e de análise da proposta estavam diretamente relacionados ao envolvimento e ao comprometimento dos alunos com as atividades desenvolvidas.

Depois do mapeamento detalhado da proposta, de seus objetivos e do contexto em que seria desenvolvida, demos início às discussões referentes às atividades propostas pelo módulo. Todo esse processo inicial de apresentação e esclarecimentos também ocorreu junto ao grupo piloto.

As primeiras atividades apresentadas pelo material são as denominadas situações-problema, que totalizam quatro diferentes situações. Essas buscam identificar quaisquer conhecimentos prévios em torno do conceito de função afim, bem como iniciar as discussões em torno da possibilidade, ou não, de serem estabelecidas relações de dependência entre informações, sejam elas numéricas ou não. De modo a estreitar a ligação existente entre tais relações e as intrínsecas ao conceito de função afim.

Com o desenvolvimento e exame da situação-problema 1, exploramos a análise e interpretação de dados tabelados fornecidos no intuito de potencializar as discussões iniciais. Tal tabela permite a comparação entre a área de determinados países e suas respectivas populações. Os alunos, de posse do material, analisaram e compararam tais informações, a fim de organizarem possíveis hipóteses frente a questão inicial levantada.

A existência de contradições bastante acentuadas como, por exemplo, países com uma área pequena que possuem uma população numerosa, ou países com uma área maior que possuem uma população pequena, causaram certo desconforto já que os alunos, ao analisarem a tabela, buscavam aplicar a esta situação uma lógica de raciocínio que não condizia com os dados observados. De acordo com a linha de raciocínio, levantada pelos alunos, um país que possui uma área grande deve possuir uma população maior do que aquele que, ao contrário, possua uma área menor.

Resolvemos, então, contrapor esse posicionamento com as informações tabeladas, fazendo a seguinte questão: Isto é realmente o que acontece, países com áreas grandes, possuem as maiores populações, e países de áreas menores possuem, necessariamente, populações menores? Para que encaminhassem seus posicionamentos em torno desta questão solicitamos que tomassem como base às informações contidas na tabela.

A nosso ver, este momento já caracteriza a construção do conhecimento, pois o aluno percebe a necessidade de reforçar ou, se for o caso, reformular suas idéias iniciais, precisando, então, retomar e sistematizar informações já discutidas. Nesse sentido é que as medições, junto aos alunos, foram encaminhadas através da discussão e da identificação de ligações entre as hipóteses levantadas e a questão inicial, de modo a corroborar com tal hipótese ou, se necessário, deixar clara a sua refutação. Através da mediação feita nós, tais idéias foram sistematicamente abordadas, ressaltando pontos importantes para o aprofundamento das mesmas.

Tal momento caracterizou o ápice da discussão, pois a lógica levantada pelos alunos não condizia com a realidade vivenciada por eles, e apresentada na tabela. Alguns, utilizando o raciocínio anterior, foram enfáticos ao dizer: ”*Não pode, país com área grande tem que ter a população maior, senão não tem espaço*!”. Tomando esta afirmação como parâmetro, lançamos outra questão: Isto é o que realmente ocorre, ou é o que deveria ocorrer? Neste momento, percebemos que a contradição entre o raciocínio dos alunos e a realidade observada através da tabela começou a se enfatizar, sinalizando para os devidos esclarecimentos.

Como referências utilizamos o caso da China e dos Estados Unidos, que possuem áreas relativamente semelhantes, porém populações significativamente diferentes, contrariando o raciocínio inicial dos alunos. Também foram levantadas questões de cunho social envolvidas nessa discussão, tais como taxas de natalidade, controle populacional e crescimento demográfico. Estas viabilizaram um distanciamento entre o que se tinha através das informações tabeladas, que representavam informações verídicas acerca destes países, e as implicações da lógica de raciocínio levantada pelos alunos.

Essa atividade potencializou uma rede de idéias que se complementaram em prol do estabelecimento de uma hipótese adequada à situação analisada. Esse é uma característica que também foi verificada nas demais atividades.

O redimensionamento de idéias contribuiu decisivamente para o processo de identificação das transformações e das regularidades presentes. Tal processo representa o primeiro passo na busca de relações de dependência, objetivo central desta atividade, que está vinculado à variação ou não dos dados, das grandezas.

Dentro de cada situação este momento, caracterizado pela busca das transformações e regularidades, sistematiza o terceiro momento, denominado aplicação do conhecimento, pois exige a retomada de conclusões e aprofundamentos feitos no momento anterior. Sobretudo, por visar a incorporação, por parte do aluno, dos conhecimentos e informações já sistematizados, por potencializar a análise e a interpretação destas informações para compreensão desta situação e de outras que envolvam o mesmo conhecimento. Deste modo, as fronteiras da questão inicial são extrapoladas, possibilitando ao aluno perceber, dinamicamente, as dimensões deste conhecimento em outras contextualizações.

De modo geral, as discussões conseguiram envolver grande parte dos alunos. Muito embora, uma parcela menor da turma permanecera à margem, não participando, embora tenham sido, insistentemente, convidados.

Levando-se em consideração que este tipo de atividade se apresenta como algo novo, para a grande maioria, principalmente por disponibilizar idéias matemáticas em contextos diferentes dos habituais, em geral numéricos, os resultados alcançados foram bastante positivos.

Os primeiros resultados positivos estiveram ligados a incorporação da dinâmica de trabalho por parte dos alunos. À aceitação e ao envolvimento nas discussões e formulações realizadas. Também, é importante destacar os bons resultados observados durante o tratamento das informações tabeladas, já que, nesse primeiro momento, não identificamos, junto aos alunos, nenhum problema.

O primeiro contato dos alunos com os conceitos unificadores também forneceu informações importantes para a avaliação da atividade. Ao desencadearmos a apresentação e a discussão do que seriam as *transformações* e as *regularidades*, os alunos, em seguida, organizaram suas próprias correspondências. Estabeleceram a denominação de variações, para as transformações, e de permanência, para as regularidades. Apesar dessa correspondência não abranger as reais dimensões, originalmente estabelecidas para tais conceitos, nossos objetivos ao adotá-los nessas atividades estavam sendo alcançados.

Em resumo, para identificá-los os alunos transitavam entre dois conjuntos: o dos elementos que *mudam*, ou variam, e o dos elementos que *não mudam*, ou permanecem, com o encaminhamento e observação da atividade.

A localização das transformações e das regularidades dessa atividade, assim como nas seguintes, serve para a identificação e caracterização das variáveis, ou elementos, envolvidas na situação analisada. Os resultados alcançados nesse processo foram bastante satisfatórios, pois corresponderam às nossas expectativas iniciais.

Os alunos conseguiram verificar que para essa situação particular não ocorriam regularidades, já que tanto a área quanto a população, de cada país, assumiam valores variáveis. Também conseguiram verificar que a área de um país não determina a sua população, ou seja, responderam à questão inicialmente posta pela situação analisada: a área de um país não determina a sua população.

Em meio a tais constatações, convivemos com dois problemas que se estenderam até o final dos encontros: a indisciplina de um grupo isolado de alunos, indiferentes ao trabalho, e a participação inexpressiva do professor responsável pela turma, alheio a idéia de trabalho colaborativo apresentada previamente. Tais imprevistos dificultaram, significativamente, o encaminhamento das atividades em diferentes aspectos, especialmente por acreditarmos que ambos estiveram bastante vinculados. Ou seja, pareceu-nos evidente que o desinteresse do professor, de alguma forma, acabou influenciando nas atitudes desses alunos. Mesmo assim, a continuidade do trabalho não foi comprometida, sendo que o módulo de atividades foi desenvolvido em sua totalidade.

Ao iniciarmos a abordagem da situação-problema 2, foi preciso retomar conclusões anteriores, rotina essa que também se estendeu aos demais encontros. Os procedimentos adotados com essa situação foram os mesmos, e assim foram com as atividades seguintes.

Os alunos reunidos em pequenos grupos, geralmente de três alunos, fixados no primeiro encontro, discutiam a questão inicial posta pela atividade durante, mais ou menos, quinze minutos para que, através do diálogo, encontrassem um posicionamento único, que representasse a hipótese levantada pelo grupo. Nosso papel de mediador se enfatizou devido ao trânsito entre esses pequenos grupos. Em seguida, tais hipóteses eram socializadas no grande grupo para discussão e análise da sua pertinência ou não.

Foi a partir da socialização e da problematização de cada hipótese lançada ao grande grupo que as conclusões em torno da situação-problema se fundamentaram.
Durante a observação do trabalho nos pequenos grupos, foi possível perceber o quanto é inusitado, para a maioria dos alunos, trabalhar com idéias matemáticas sem precisar recorrer a valores numéricos impressionantes ou a fórmulas matemáticas milagrosas. Este fato também ficou bastante evidente durante as discussões anteriores, quando alguns alunos questionaram de que forma deveriam manipular os valores apresentados na tabela.

Construir matemática sem, necessariamente, utilizar o formalismo matemático, explorado em grande escala nas aulas de Matemática, em especial no tratamento do conceito de função afim, acabou se apresentando como uma primeira dificuldade no encaminhamento dessa atividade. Especialmente, por envolver conhecimentos matemáticos familiares, quais sejam: o cálculo da área de um quadrado e sua relação com a medida do lado. Tais dificuldades foram sendo minimizadas com a contextualização do problema , o que se evidenciou na medida em que avançamos nas discussões.

São nos instantes de exposição e superação de hipóteses, presentes em todas as atividades, que as conclusões são encaminhadas através da sistematização das informações coletadas. Amparados pelas discussões, os alunos retornam para seus pequenos grupos para formatar uma conclusão, agora por escrito, para a questão inicial. Imediatamente, após a realização desta etapa, os grupos iniciam o trabalho de localização das regularidades e das transformações existentes nesta situação-problema, de maneira análoga a situação anterior.

Com relação aos resultados obtidos através dessa atividade, destacamos uma maior compreensão do que seria uma relação funcional e de que características fundamentam tal relação. Os alunos começaram a identificar a ligação entre a existência de uma relação funcional e a dependência entre elementos, o que facilitou a formulação de uma resposta para a questão inicial.

Quanto a identificação das transformações e das regularidades, presentes nessa situação-problema, os alunos não demostraram maiores dificuldades. Ao contrário, pareceram bastante a vontade para identificar tais elementos. Primeiro identificaram os elementos envolvidos, a medida da área, a medida do lado e a expressão para calcular a área, e, em seguida, caracterizaram cada um de acordo com as possibilidades existentes. Assim, com base na dualidade permanência/variação, denominaram como sendo regularidade a expressão utilizada para calcular a área, e como sendo transformações as medidas da área e do lado.

Essas primeiras atividades também trouxeram a tona a dificuldade dos alunos em trabalhar em grupo, e, sobretudo, a grande dificuldade, da maioria, em escrever, em expressar suas formulações em pequenas frases. Referimo-nos aqui à escrita de um modo geral, os problemas encontrados nesta esfera são realmente alarmantes, e vão além da escrita matemática.

Esta problemática tem fortes influências no momento em que o aluno é solicitado a sintetizar suas idéias e transpô-las de modo que estas possam ser compartilhadas com os demais colegas. Também interfere, significativamente, no trânsito entre a linguagem matemática e a verbal, essencial para a compreensão do conceito de função afim. A reversão dessas dificuldades sinalizada através de um acompanhamento constante, junto aos pequenos grupos, das formulações realizadas, questionando-as sempre que necessário. Essa rotina trouxe progressos significativos, que foram verificados com o avanço dos encontros.

Com a análise da terceira situação-problema, extrapolamos algumas das discussões feitas durante a segunda, já que possuem contextos similares. A primeira enfoca a relação existente entre um lado de um quadrado e a determinação de sua área, enquanto a segunda extrapola esta discussão, trabalhando com o retângulo, vinculado a outro conceito matemático bastante trabalhado, o conceito de perímetro. O resgate de conceitos matemáticos, aparentemente simples, como é o caso destes dois, área e perímetro, se justifica basicamente pela variedade de discussões que possibilitam, especialmente quando analisados paralelamente, como é o caso da terceira situação-problema.

Sem dúvida, as conclusões anteriores foram decisivas na formatação de hipóteses para esta questão. Porém, as diferenças identificadas causaram um desequilíbrio positivo que enriqueceu as problematizações, sendo que esse foi imprescindível para o redimensionamento das discussões.

Este foi causado, principalmente, pelo fato de que tanto a área quanto o perímetro são definidos através dos lados deste retângulo, causando a falsa impressão de que se os dois são definidos através dos lados um é capaz de definir o outro. Por exemplo, como o que está posto na questão: a medida do perímetro de um retângulo determina a sua área? Os esclarecimentos destes conflitos conceituais foram encaminhados através da exploração das figuras disponibilizadas.

Depois de encerradas as discussões os alunos construíram suas conclusões com base na problematização inicial e nas discussões feitas em torno de cada hipótese apresentada. Também, necessitaram identificar quais as transformações e quais as regularidades presentes, de maneira análoga às anteriores.

Na formulação da conclusão pelos grupos não verificamos nenhuma dificuldade, assim como nas anteriores. Os alunos conseguiram organizar de forma, relativamente, clara suas conclusões, constatando que a medida do perímetro de um retângulo não determina a sua área. A localização e denominação das regularidades e das transformações se deu de forma tranqüila, sendo que os elementos selecionados foram as medidas da área, do perímetro e dos lados do retângulo, e as expressões para o cálculo da área e do perímetro. Estes foram distribuídos pelos alunos de forma que as medidas da área, do perímetro e dos lados foram designados como transformações, enquanto as expressões para o cálculo da área e do perímetro denominadas como regularidades.

Com a problematização da quarta, e última, situação-problema contemplamos a discussão de uma situação, bastante familiar, envolvendo os conceitos físicos de tempo e de distância percorrida, potencializando a discussão em torno de suas possíveis relações. Foi através dessa questão que ocorreu o primeiro contato dos alunos com discussões vinculadas à disciplina de Física. Também foi através dessa situação-problema que os alunos se depararam com a primeira expressão algébrica, desde o início das atividades, que definiria uma função afim, qual seja, a equação horária do movimento ali descrito.

Tendo em vista que nenhum dos alunos havia tido contato com a disciplina de Física, demos início a problematização da situação de maneira ainda mais cautelosa. Partimos da discussão da tabela descrita nesta situação, buscando contextualizar seus valores e vinculá-los à questão preestabelecida: a relação existente, ou não, entre o tempo gasto no percurso e a distância percorrida em cada intervalo.

As discussões ocorreram de forma satisfatória, os alunos participaram, significativamente, levantando hipóteses e argumentando em prol da sustentação das mesmas. A possibilidade de explorar informações que viabilizem a contextualização da questão analisada, através dos dados tabelados ou de figuras ilustrativas, se apresentou como uma forte aliada na estruturação de idéias e na formatação de conclusões.

As conclusões referentes a esta situação-problema só foram sistematizadas após o trabalho com as duas atividades teórico-experimentais propostas pela seqüência de atividades. Isto ocorreu devido a necessidade de aprofundar as reflexões em torno do conceito de função afim e da formatação de uma expressão algébrica que a represente, o que só foi possível com o desenvolvimento das duas atividades teórico-experimentais que compõe o módulo.

Mesmo assim, algumas discussões iniciais foram encaminhadas ainda nesse primeiro contato, pois alguns alunos buscavam elucidar suas dúvidas. Um exemplo disso foi o interesse de um aluno que, mesmo sem termos aprofundado as discussões, levantou a seguinte problemática: *"Professora, então a velocidade e a* *posição inicial são regularidades, e a posição final e o intervalo de tempo, são transformações?"*. Este foi um indício significativo de que, com o avanço das atividades, as idéias principais trabalhadas na proposta foram ficando mais claras.

Com base na postura desse aluno, foi possível avaliar o quanto a disposição das atividades dentro da proposta viabilizou o reconhecimento da necessidade de retomar, freqüentemente, conclusões anteriores como base estruturadora de novas, gerando a construção gradual, e complementar, de hipóteses. Sem dúvida, essa é uma conclusão bastante positiva em torno da potencialidade desse módulo de atividades.

Quanto a avaliação da referida atividade, feita somente após a discussões das atividades teórico-experimentais 1 e 2, foi possível perceber que os alunos conseguiram transitar tranqüilamente entre as representações de uma função afim discutidas e a equação horária do movimento fornecida pela situação-problema 4, chegando até a identificar similaridades entre as mesmas, especialmente no tocante às expressões algébricas correspondentes. Isso só foi possível devido a prioridade dada ao processo de construção dessas representações, durante o desenvolvimento das duas atividades seguintes.

A problematização da função horária, do movimento descrito nessa atividade, ocorreu na medida em que buscamos relacionar as informações obtidas, por meio da tabela, com suas possíveis substituições junto aos termos dispostos em tal representação. Também buscamos deixar clara a idéia de que tal movimento, assim como outros, poderia ser representado apenas por uma das formas de representação, ou pela tabela, ou pelo gráfico construído através da mesma, ou então por uma função horária como a apresentada. Aproveitamos também para esclarecer termos característicos do trabalho com os fenômenos físicos como: movimento uniforme (MU), posição inicial e velocidade, já visando aos encontros seguintes, nos quais as atividades envolveriam alguns destes termos.

Desse modo, avaliamos como tendo sido alcançado, com sucesso, o primeiro intercâmbio entre o conceito de função afim e os fenômenos físicos, principal objetivo da situação-problema 4. Ou seja, foi possível enfocar a inserção desse conceito matemático no contexto dos fenômenos físicos, estudados na Física, a partir da discussão de conceitos como tempo e distância percorrida. Esse resultado significativo também foi verificado no trabalho junto ao grupo piloto.

Para iniciar a discussão da primeira atividade teórico-experimental, a dos dominós, delineamos os seus objetivos e esclarecemos os procedimentos utilizados para o seu desenvolvimento. A manipulação de materiais visíveis na composição de idéias matemáticas se apresentou como um atrativo a mais para os alunos. Sem dúvida, a possibilidade de comparar as informações observadas com os dados encontrados ao longo do processo, através destes materiais, foi fundamental na construção da idéia matemática trabalhada. Fato este que já pode ser encarado como uma contribuição positiva acerca da utilização desse tipo de atividade na construção de conhecimentos matemáticos.

Durante a identificação de características encontradas na peça de dominó, primeiro procedimento para essa atividade, entre elas: largura, altura, profundidade, etc., a diversidade de características destacadas pelos alunos foi muito grande, passando pela cor e pelos detalhes da composição da peça: de plástico, etc. A riqueza de dados foi sendo composta ao longo das problematizações que fazíamos em torno de cada informação repassada pelos alunos. Todas as características encontradas foram socializadas e discutidas junto ao grande grupo, na tentativa de validar ou não a sua pertinência, sendo fundamental para a identificação da característica chave para esta relação.

A referência para validar, ou não, tais características foi sempre à observação da variação da pilha de dominós, fundamental para que o aluno entendesse a importância, ou não, daquilo que ele observara na peça frente à relação funcional que estávamos pretendendo construir. Todo esse processo visou à estruturação do procedimento seguinte: a elaboração de uma "aposta", que representaria aquilo que o aluno observava durante a manipulação das peças.

O momento da aposta foi introduzido aos poucos, através da observação das peças e da variação da pilha de dominós. Nesse instante, o aluno é chamado a escrever, literalmente, aquilo que conseguiu observar com a manipulação das peças, através de uma expressão verbal e, posteriormente, de uma expressão matemática. Até este momento, o trabalho se desenvolveu no grande grupo, através da socialização e discussão das idéias levantadas nos pequenos grupos.

Tendo em vista que o preenchimento de tabelas e a construção de gráficos ainda não haviam sido enfocados, trabalhamos mais cuidadosamente essas questões, discutindo o processo de construção de gráficos, desde o traço dos seus eixos, passando pela utilização do papel milimetrado, indo até a definição da escala utilizada. Apesar de não terem tido, até o momento, contato direto com a construção de gráficos, no contexto escolar, a maioria dos alunos relatou já ter se deparado com esse tipo de informação através dos meios de comunicação, tais como: revistas, jornais, etc.

A principal dificuldade verificada, até esse instante, esteve ligada ao processo de construção do gráfico correspondente ao comportamento observado, este baseado nos dados registrados na tabela, também tinham problemas com a utilização do papel milimetrado. Em contrapartida, o preenchimento da tabela, que se antecipava ao gráfico, foi realizado com certa tranqüilidade pelos alunos, já que encaminhamos o mesmo através da ligação entre a tabela e as observações feitas durante a manipulação das peças.

O processo de observação e medição da altura da pilha de dominós contribuiu, substancialmente, com a discussão em torno da existência ou adoção de uma peça padrão e de suas influências nas variações encontradas em situações como essa. No confronto entre dados experimentais e dados oriundos de uma generalização/previsão. Um dos objetivos principais dessa atividade, que felizmente foi alcançado.

A constatação de que alguns valores, apesar de inicialmente parecerem iguais, diferiam foi verificada e questionada por um aluno, que se mostrou bastante surpreso. Este questionou como seria possível encontrar dados diferentes para uma mesma situação observada, e, ainda, qual desses valores corresponderia ao "mais correto". Pegamos carona nesta questão para discutir a questão do "mais correto", associando esse fato com outro, também destacado pelos alunos: porque encontravam valores diferentes entre os grupos, se o material, especialmente, as peças eram todas "iguais"? Qual estaria correto? Grande parte dos alunos ligava tais variações a erros cometidos durante o cálculo.

Tais relatos geraram discussões em torno da relação entre previsão e resultado. Durante as discussões, os alunos pareceram muito surpresos com as implicações acarretadas por uma escolha padronizada. Também se espantaram com as diferentes origens e inúmeras possibilidades que a observação, e a manipulação, experimental de dados são capazes de fornecer. Os esclarecimentos dessas questões ocorreram após a conclusão da etapa inicial da atividade, basicamente, após a análise dos dados coletados e da exploração dos mesmos.

No momento de determinar a inclinação da reta, os alunos sentiram muitas dificuldades. Foi necessária uma discussão paralela para esclarecer como se dava o cálculo da mesma, e que informação obtínhamos a partir do seu valor. Nesse sentido, a exploração do gráfico serviu de base para a discussão e para os esclarecimentos posteriores. A comparação entre os valores encontrados para a inclinação da reta, durante a atividade, apenas reforçou as discussões quanto à diferenciação entre os valores encontrados.

Apesar da intensa discussão realizada, alguns alunos continuavam buscando valores corretos, não aceitando a existência de múltiplas soluções para a mesma questão. Isto enfatiza o quanto o ensino de matemática vem sendo desenvolvido de maneira linear, enfocando, de forma excessiva, a unicidade de caminhos e a exatidão. Isto é, formando sujeitos fechados às diferenças, alheios às variações, desacostumados a tratar com diferentes interpretações.

Para a elucidação de possíveis dúvidas remanescentes, em torno das diferenças entre os valores encontrados, tomamos como um viés bastante produtivo a recorrência aos dados tabelados, tomando estes como balizas para esclarecer questionamentos feitos em torno dos desencontros numéricos observados. A principal estratégia adotada por nós era a de não acumular questões sem discussão, procedimento que verificamos, ao longo do trabalho, contribuir bastante para o processo de construção de conceitos matemáticos.

A seguir, iniciamos a análise dos dados coletados, encaminhando às questões subseqüentes, que envolviam, entre outras coisas, o melhoramento da aposta, ou seja, da expressão verbal, correspondente ao comportamento da pilha de dominós observado. Assim como, a determinação de uma expressão algébrica equivalente e do significado da inclinação da reta encontrada, a localização das regularidades e das transformações dessa atividade, entre outras. O desenvolvimento destas conclusões foi encaminhado junto aos pequenos grupos.

A identificação das regularidades e transformações, particularmente nas atividades teórico-experimentais, assume uma importante missão, a de interligar tais elementos, através da suas variações ou permanências, à expressão algébrica formulada. Ou seja, potencializam a correspondência entre esses elementos e os que constituem tal expressão. Nesse caso, uma das regularidades identificadas pelos alunos foi a inclinação da reta, que agora já possui um significado, pois estes já verificaram que tal valor representa a altura "padrão" das peças. Outra regularidade destacada foi a expressão algébrica correspondente ao comportamento da pilha. Tal expressão já fora discutida e incorporada como sendo uma representação possível para a função afim, aqui apresentada de forma incompleta. Já as transformações verificadas foram a altura da pilha e o número de peças correspondente.

Essa atividade ainda reforçou um obstáculo já identificado, a grande dificuldade dos alunos em escrever verbalmente suas conclusões, em passar para o papel suas próprias hipóteses. Isso serviu de alerta para o encaminhamento das atividades seguintes. Também, sinaliza para uma conclusão bastante importante, a de que o entendimento do conceito de função afim, por vezes, pode estar sendo comprometido devido a essa dificuldade.

Para finalizar, os alunos trabalharam com questões mais específicas, chamadas de exercícios, em que utilizariam à interpretação do gráfico e a expressão algébrica estabelecida como subsídios no encaminhamento das soluções de tais questões. Aqui também identificamos outra grande dificuldade dos alunos, a de interpretar informações através da representação gráfica, outro fator bastante influente no entendimento da função afim.

Porém, acreditamos que a possibilidade de manipular materiais que, até então, nunca tinham sido vistos, pelos alunos, como potencializadores da construção de conhecimento matemático contribuiu, significativamente, para o contorno dessas, e de outras, dificuldades surgidas. A curiosidade em torno de como seria possível trabalhar conhecimentos matemáticos através desses materiais serviu para impulsionar a atividade teórico-experimental dos Dominós, assim como a das Bolas de Gude, possibilitando o alcance dos objetivos traçados para cada uma dessas atividades.

A ansiedade dos alunos em torno da atividade teórico-experimental seguinte, a das bolas de gude, era nítida, especialmente por não conseguiam estabelecer ligação entre esse material e quaisquer idéias matemáticas, assim como ocorrera com as peças de dominós.

Embora essas atividades apresentassem aspectos similares, especialmente quanto aos procedimentos adotados, alguns esclarecimentos iniciais foram realizados. Principalmente, por que essa exigiria o trabalho com idéias matemáticas até então não utilizadas nem discutidas, tais como o conceito de área e, principalmente, o de volume.

Neste sentido, a problematização inicial desta atividade se deu no intuito de explorarmos tais idéias e suas relações com a idéia central da atividade, o estabelecimento de uma expressão algébrica que caracterizaria uma função afim, na sua representação completa. Trabalhar com uma tabela onde seriam completadas duas colunas, diferentemente da completada na atividade anterior, também se apresentava como uma dificuldade à parte, que sugeria a nossa participação enquanto mediadores do processo.

Assim, além de explicitarmos os objetivos da atividade também levantamos algumas questões que serviriam de âncora para os encaminhamentos, tais como: quais poderiam ser as expectativas em torno dessa atividade, que similaridades encontraríamos com a atividade anterior, que diferenças, entre outras. Essas questões serviram de apoio para as discussões iniciais e para a elaboração da aposta, momento em que expressariam através de uma frase e de uma expressão algébrica o comportamento esperado para tal atividade.

O desenvolvimento inicial da mesma ocorreu de forma tranqüila e o trabalho com a aposta e com o preenchimento da tabela correspondente evolui sensivelmente, sendo que os alunos não apresentaram maiores dificuldades com estas questões. Provavelmente resultado das intensas discussões realizadas durante a atividade anterior.

A maioria dos problemas identificados nessa atividade, através da análise do material dos alunos e do trabalho em sala de aula, ficou novamente a cargo da construção do gráfico. O que também foi verificado durante o trabalho com o grupo piloto. A presença de um valor inicial correspondendo com zero, ou seja, formando um par ordenado, diferentemente da atividade anterior, ocasionou o surgimento de dúvidas quanto às semelhanças entre essa atividade e a anterior.

Associada a essa dificuldade, identificamos, também, a de estabelecer uma escala apropriada, já que os valores explorados nesse momento eram, consideravelmente, maiores do que os da atividade anterior. Nesse sentido, foi preciso aprofundar a discussão em torno da disposição dos valores nos eixos e a construção da reta. Nesta última, nos defrontamos com a forte tendência de alguns alunos em traçar a reta de forma aleatória, sem considerar a disposição dos pares de valores, obtidos na tabela, para a construção da mesma.

Questionamos, então, quais indícios garantiriam que aquela reta traçada representaria corretamente a situação observada, tal questionamento foi feito em um grupo isolado de alunos, já que apenas nesse identificamos tal atitude. Para esclarecer essa dúvida exploramos a leitura e a interpretação das informações dispostas na tabela completada anteriormente, bem como a relação existente entre tais valores e suas influências na construção do referido gráfico. A reação dos alunos foi de surpresa diante da importância de tais dados na definição do traçado da reta correspondente.

De certa forma, o desenvolvimento dessa atividade sinalizou para uma maior autonomia dos grupos, cabendo a nós apenas pequenas intervenções, quando necessárias. As explicações eram realizadas nos pequenos grupos, sendo que as de caráter coletivo, geralmente, ocorriam via quadro negro e somente após o fechamento das questões, de maneira que estas não influenciassem nas conclusões dos alunos.

O andamento do trabalho transcorreu de maneira satisfatória, pois a nossa participação, de forma localizada junto aos pequenos grupos, ocasionou a troca de argumentações nos grupos e entre eles, criando um ciclo de discussões, um clima dialógico durante a construção das possíveis soluções. É claro, que quando nos referimos ao envolvimento dos grupos na atividade, estamos falando daqueles que freqüentemente participam, já que os problemas com indisciplina continuam ocorrendo, invariavelmente por parte daqueles alunos que se mantinham à margem das discussões.

Contudo, através da observação do trabalho nos grupos e dos materiais impressos, manipulados pelos alunos, foi possível localizar fortes indícios da evolução dos mesmos, tanto no entendimento das questões envolvidas nessas atividades quanto no trato com as diferentes representações de uma função afim. Essa evolução se evidenciou, mais substancialmente, com a elaboração de novas questões, pelos alunos, em torno das atividades, já que buscavam a todo momento estabelecer comparativos com as trabalhadas anteriormente.

A fim de dar início às conclusões a respeito da atividade teórico-experimental das bolas de gude, realizamos breves considerações em torno de erros constatados durante a análise dos materiais. Através de uma participação bastante sutil de nossa parte, iniciou-se a análise final dos dados coletados durante o desenvolvimento da atividade. Em geral, os alunos baseavam suas conclusões a partir de discussões anteriores, através da retroalimentação das questões, fazendo, sempre que necessário, as devidas adaptações.

Como já era esperado, as premissas utilizadas para a formulação da expressão algébrica que representaria tal situação foram pautadas pelas idéias trabalhadas na atividade anterior, dos dominós. Esta recorrência desencadeou uma das principais discussões oriundas dessa atividade: a representação de uma relação funcional através de uma expressão algébrica na sua forma completa, ou seja, uma função afim. A problematização em torno das diferenças entre as duas expressões algébricas construídas foi a espinha dorsal das discussões e conclusões estabelecidas.

Identificamos nesta o potencial de redimensionar a visão inicial dos alunos de que uma função afim corresponderia somente a relações envolvendo uma proporção direta, como foi o caso da atividade dos dominós. A partir desse redimensionamento, os alunos, acabaram percebendo o papel fundamental desempenhado pelo valor inicial observado para a altura da coluna de água. Ou seja, aquele valor correspondente à quantidade de zero bolinha de gude era, realmente, imprescindível.

Ao verificarmos uma intensificação dos debates e das argumentações entre os alunos, constatamos também que, nessa altura do trabalho, a aceitação da proposta e a compreensão de seus objetivos e possíveis contribuições já estava se efetivando. A inquietação dos alunos, a nosso ver, pressupõe um maior envolvimento com a proposta, já que a constante busca por esclarecimentos demanda uma postura, pelo menos, mais ativa frente às atividades. Essa participação foi notada durante todo o seu desenvolvimento.

Essa conclusão é bastante positiva, principalmente, porque durante todo o processo, fórmulas, definições e formalismos matemáticos tiveram papel secundário, o que não comprometeu a construção do conceito de função afim. Pelo contrário, acreditamos que esse foi um diferencial não só positivo, como decisivo. Encaminhamento bastante diferente do que usualmente é praticado pela maioria dos professores ao ensinarem funções.

Primeiro a definição, depois o excessivo formalismo na exploração da sua representação e, logo em seguida, um ou dois exemplos de exercícios envolvendo o assunto. Para finalizar, uma lista interminável de funções, bastante semelhantes as trabalhada pelo professor, para que o aluno exercite.

Por outro lado, como este material, por si só, não contempla todos os conhecimentos adjacentes ao conceito de função afim, tais como a determinação de domínio e imagem, entre outros, caberá ao professor definir qual o momento ideal para iniciar tais aprofundamentos. Pois, o módulo de atividades foi elaborado com um caráter introdutório, ou seja, visando uma iniciação gradual do aluno no trato de idéias estruturantes do conceito de função afim.

A identificação dos conceitos unificadores propiciou a definição dos elementos fundamentais no contexto da relação funcional analisada e da expressão algébrica estabelecida. Isso implicou, principalmente, na determinação das variáveis envolvidas. Já que a diferenciação entre estes elementos estaria ligada à identificação de quais seriam as variáveis dependentes e quais as independentes, bem como dos papéis assumidos por cada uma.

As regularidades identificadas pelos alunos foram, novamente, a inclinação da reta, a altura inicial da coluna de água e a expressão algébrica formulada para representar o comportamento observado. As transformações apontadas foram a altura final da coluna de água e o número de bolas de gude correspondentes a cada altura observada.

Com a finalização dessa atividades, identificamos alguns dos principais problemas enfrentados pelos alunos, de um modo geral, ao trabalhar com o conceito de função afim. Em resumo, são elas: a dificuldade recorrente de transpor idéias matemáticas, facilmente formuladas, para a linguagem escrita, tanto verbal quanto algébrica; o desconhecimento, da grande maioria, em torno da construção de gráficos nesse nível escolar; a inabilidade de trabalhar com o papel milimetrado e com a definição de escalas; a resistência dos alunos em aceitar a incerteza e imprevisibilidade dos valores encontrados; o perfil de antecipação garantido ao conceito de função afim; etc.

Outra conclusão importante foi a de que a manipulação de objetos familiares, para os alunos, é capaz de recuperar o entusiasmo frente à construção de conceitos e conhecimentos matemáticos, em particular do conceito de função afim. Assim como, o fato de poderem construir relações com situações vivenciadas no cotidiano contribuiu, significativamente, para o envolvimento dos grupos. O que reforça a idéia de que proporcionar situações diversificadas, as mais próximas possíveis de situações reais, viabiliza a construção significativa de conhecimentos matemáticos.

A partir desse momento enfatizaremos o trabalho junto à resolução de problemas envolvendo fenômenos físicos, bem como a análise dos resultados observados com o desenvolvimento destes. Nesse bloco de atividades buscamos retomar questões lançadas anteriormente, quanto a interação entre matemática e física proporcionada pelo conceito de função afim. Essas discussões ocorreram, mais especificamente, no momento em que trabalhamos com a situação-problema 4, e já foram descritas em momento anterior.

O resgate de conclusões anteriores foi fundamental para o encaminhamento das atividades finais, já que serviram de molde para a construção de outras, agora, em contexto diferente, envolvendo fenômenos físicos e situações quotidianamente identificadas. Para iniciar essa nova fase das discussões o material apresenta um breve texto introdutório, no qual a forte ligação entre o conceito de função e os fenômenos observados na vida diária é ressaltada. Bem como, a necessidade de compreendê-la em prol do entendimento desses fatos, por diversas vezes tão próximos de nós e, na maioria delas, não vinculados a conhecimentos trabalhados no contexto escolar.

As primeiras atividades consistem em expressões verbais que representam situações facilmente localizadas no dia a dia dos alunos. Exigem a interpretação do comportamento descrito e a elaboração de uma expressão algébrica correspondente.

O processo de identificação dos elementos, ou variáveis, envolvidos nos processos descritos se apresentou como uma dificuldade. A classificação desses em dependentes ou independentes, bem como a definição de seus papéis na situação analisada representou um dos momentos de maior incerteza nas discussões observadas nos grupos. Esse entrave inicial trouxe conseqüências imediatas no estabelecimento e estruturação da expressão algébrica, uma das exigências dessa atividade.

O contato anterior com esse tipo de solicitação contribuiu para o desfecho de tal cenário. Entretanto, não foi suficiente para esclarecer aos alunos as relações de dependência existentes, bem como os seus significados dentro de cada contexto. A via dos conceitos unificadores se tornou nesse momento a possibilidade mais apropriada para sanar tais dúvidas. É preciso ressaltar que nessas questões, particularmente, não era exigida a identificação desses elementos. Porém, acreditamos que a localização das regularidades e das transformações, para cada um dos casos observados, sinalizaria para um maior entendimento.

Nesse sentido solicitamos que os alunos tentassem identificar quais seriam as regularidades e quais as transformações para cada uma das situações. Nesse momento detectamos que os alunos já haviam adquirido certa habilidade no trato dessas questões. Em seguida, após a classificação dos elementos constitutivos das situações, em regularidades e transformações, os alunos começaram rever suas hipóteses iniciais, reeleborando-as e sinalizando para possíveis soluções.

De certa forma, tais episódios serviram para a reforçar conclusões anteriores quanto a grande dificuldade, da maioria, em interpretar dados fornecidos seja qual for a origem, tabelas, gráficos, expressões algébricas, ou até mesmo expressões literais. Eles apresentam demasiada resistência no momento de explicar o comportamento descrito, até mesmo quando são solicitados a explicarem com suas palavras. A utilização dos conceitos unificadores foi bastante significativa na retificação dessas questões, especialmente, por ter se tronado algo familiar ao longo do trabalho.

Com o encerramento das discussões nos grupos, iniciamos a problematização em torno das expressões algébricas encontradas, principalmente quanto a sua interpretação frente a relação funcional caracterizada em cada uma das situações analisadas. Também salientamos o seu papel decisivo junto a tal relação. Nesse sentido, discutimos a validade, ou não, de cada uma das expressões socializadas pelos grupos. A validação girou em torno da equivalência entre a expressão formatada e o comportamento a que esta daria origem.

Nitidamente, tais questões focam, especialmente, as questões ligadas às expressões representativas de funções, tantos as verbais quanto às algébricas, e ao estabelecimento de conexões entre as informações contidas nas frases e os elementos constituintes da expressão algébrica representativas de cada uma. Tal ênfase é justificada pela preocupação constante de darmos sentido, tanto às informações literais quanto às informações numéricas, sempre vinculadas ao contexto a que pertencem.

Embora tenhamos identificado entraves significativos, também percebemos que, apesar das dificuldades, os alunos se envolveram ativamente das discussões, e dos encaminhamentos feitos pelos seus grupos, contribuindo na determinação de uma solução adequada para cada situação. Até mesmo os obstáculos que enfrentamos nessas atividades foram importantes, pois alertaram para um trabalho mais cuidadoso junto aos demais problemas.

No problema seguinte, problematizado a partir de uma tabela de valores já fornecidos, os alunos precisaram estabelecer uma relação entre a distância percorrida e o respectivos consumos de combustível de um certo veículo. Essa discussão ocorreria de forma análoga à da situação-problema 4. Por isso, tendo em vista que os alunos não apresentavam maiores dificuldades no trato de dados tabelados, optamos por deixa-los trabalharem de forma mais autônoma, discutindo e retomando referências anteriores.

Esse problema também envolveu a construção de um gráfico, correspondente à tabela fornecida, abrangendo discussões em trono do tipo de relação observada e dos significados dos valores envolvidos no mesmo. Para classificação da relação funcional foram tomadas como parâmetros as duas variações observadas com as atividades teórico-experimetais, uma proporção direta ou uma variação linear. A primeira constatada na atividade dos dominós e a segunda na atividades das bolas de gude.

O processo de identificação das transformações e das regularidades também foi retomado, já que o mesmo está intimamente ligado à construção da expressão algébrica representativa do comportamento observado. Outra solicitação desse problema.

Em resumo, não localizamos maiores dificuldades em torno do desenvolvimento dessa atividade. A sua forte semelhança com tudo o que fora trabalhado até o momento, sem dúvida, facilitou o andamento das análises. Nesse sentido, foi possível priorizar tais análises sob o ponto de vista do contexto em que estariam sendo feitas. Conectando-as à manipulação de dados e de elementos para potencializar novas interpretações, com base em suas implicações. A possibilidade de imaginar, e quase vivenciar, o problema proposto dinamizou esse enfoque, e viabilizou um entendimento apoiado por significados.

Outro problema, envolvendo conceitos ligados aos fenômenos físicos, basicamente, os conceitos de distância percorrida e o consumo de gasolina verificado durante o percurso. O diferencial deste problema, em relação aos demais, é o fato de envolver duas situações e propor a comparação entre elas. Para tanto fornece apenas um gráfico com duas retas correspondentes a cada uma. Este não contém nenhuma informação, especialmente numérica. A interpretação do gráfico vai além da mera verificação dos valores e suas correspondências, sugere uma interpretação baseada, única e exclusivamente, no comportamento das retas fornecidas.

O trabalho foi encaminhado em torno da leitura e interpretação do gráfico, buscando à obtenção de informações implícitas. Foram recuperadas discussões anteriores, basicamente ligadas à interpretação gráfica, para que os alunos encontrassem parâmetros para a formulação das primeiras hipóteses. Nesse primeiro momento, eram duas as principais preocupações dos alunos, quais sejam: como trabalhar com um gráfico que não contém valores e como lidar com a questão de haverem duas retas em um único gráfico?

A primeira preocupação encontra respaldo na pela tendência, da maioria dos alunos, em balizar suas conclusões através de valores numéricos, demonstrando uma forte subordinação aos padrões de resolução normalmente desenvolvidos nas aulas de Matemática. Em geral, alienados à atribuição de significados. Contudo, a fim de minimizar essa problemática, é que ao longo do trabalho sustentamos uma dinâmica onde a construção de soluções não se limitou ao efeito local, ou meramente numérico, que proporcionavam, mas envolveu a busca de novas dimensões através da manipulação dos dados e das informações.

Quanto à segunda preocupação, já imaginávamos que surgiria. No entanto, para que essa se tornasse um desafio, atuamos apenas como mediadores do processo. Nossa interferência ocorreu somente quando foi preciso reorientar as discussões para o foco central do problema analisado, a comparação entre as duas situações, na verdade dois carros. Isso garantiria o surgimento de uma primeira solução, ou tentativa, a partir das análises feitas pelos alunos em seus grupos. O que, para muitos, pareceu não só difícil como incômodo.

A dificuldade de trabalhar com duas situações associadas e, especialmente nesse caso, sem dados numéricos para comparações, despertou nos alunos a necessidade de encontrarem uma alternativa que contemplasse ambas as situações, porém, sem que uma interferisse na outra. Com o avanço das discussões, a possibilidade de trabalhar separadamente, cada situação, acabou se mostrando como um caminho viável.

A construção do conhecimento envolvido nesse problema ocorreria permeada pela interpretação de gráficos e pela manipulação de as informações, aparentemente não fornecidas. Todavia, formular idéias matemáticas sem o auxílio de dados numéricos se apresentou como um entrave constante. De fato, esse era o primeiro contato dos alunos, pelo menos dentro da nossa proposta, com um problema deste caráter.

Sinalizamos, então, junto aos grupos a possibilidade de atribuírem valores, dispondo-os nos eixos e observando o comportamento das retas ao longo de suas variações. A primeira vista isso lhes pareceu impossível. Como poderiam inventar valores? Como saberiam quais os corretos? Novamente, a preocupação com valores corretos se fez presente. Embora, inicialmente, incrédulos assumiram essa como sendo uma possibilidade viável. Superada essa fase, acabariam tendo um gráfico bastante similar aos demais, o que facilitaria a formulação das conclusões.

Entretanto, apesar da manipulação constante desse tipo de informação, ao longo dos encontros, o trabalho de interpretação do gráfico continuou sendo algo penoso. Talvez, por permanecerem algumas dúvidas quanto à credibilidade dos procedimentos adotados.

Apesar disso, o resultado alcançado, principalmente no tocante ao envolvimento dos alunos, durante a construção das conclusões, foi muito positivo.

Pois, muito embora as conclusões tenham sido feitas no grande grupo, com nossa participação, o visível engajamento dos alunos lançando questões, buscando sanar suas dúvidas, questionando as ações, foi um importante diferencial desse problema. O que certamente, teve forte influência da identificação dos alunos com a situação envolvida: o consumo e/ou a economia de combustível, uma questão com um forte aspecto social associado.

O problema de número 4 também envolve aspectos sociais vinculados a conceitos inerentes aos fenômenos físicos. Esse, assim como os demais, envolve uma situação facilmente reconhecida pelos alunos, uma corrida de táxi. Entretanto, apesar da familiaridade com a situação, a necessidade de analisá-la sob o aspecto de uma função afim pareceu inusitada para a maioria.

Como parâmetro de resolução, retomamos a atividade teórico-experimental das bolas de gude, que envolvia uma relação funcional com aspectos semelhantes. Os conhecimentos envolvidos neste problema não destoam da maioria trabalhada até este encontro, contemplando desde o preenchimento de tabela, perpassando pela construção do gráfico e da relação funcional correspondentes, chegando até a identificação do tipo de relação, das transformações e das regularidades existentes nessa situação.

Novamente, a identificação das regularidades e das transformações foi essencial no estabelecimento de uma expressão algébrica que representasse a situação descrita pelo problema. O preenchimento da tabela foi feito de maneira tranqüila, pois apesar de ainda não terem definido a expressão algébrica, os alunos conseguiam, através de cálculo mental determinar quais seriam os valores. Com a caracterização de cada um dos elementos, quais sejam: o valor da bandeirada do quilômetro rodado, como regularidades, e o preço final a ser pago pela corrida e a distância percorrida, como transformações, foi definitiva na formatação da equação algébrica, ou função afim, característica.

Através das observações, feitas nos momentos dos trabalhos nos grupos, a maior dificuldade ainda esteve vinculada à formulação da expressão algébrica. Todavia, a possibilidade de avaliar sua pertinência, ou não, através da tabela ou da contextualização, para além da matemática, de suas implicações se tornou uma ferramenta decisiva.

No problema seguinte, o de número 5, as discussões se desenvolveram no contexto de uma viagem de automóvel, onde o tempo gasto para efetuar tal viagem e a posição do veículo, para cada intervalo de tempo, eram as informações fornecidas. A problematização desse problema de forma semelhante aos anteriores e, por isso, não nos deteremos no relato do processo. Porém, o que é válido ressaltar é a discussão em torno da questão das *escalas*, realizada de forma mais acentuada nesse problema.

Potencializamos o debate em torno de qual a melhor escala, caso existisse, tanto para esse caso quanto para qualquer outro, buscando identificar quais as compreensões dos alunos nesse assunto. Também buscamos enfocar quais as possíveis implicações que a escolha da escala poderia trazer.

Até aqui, a trabalho com as escalas ocorreu de maneira indireta, já que ainda não tínhamos extrapolado a utilização pontual feita durante a definição dos eixos, no momento de traçar os gráficos. Embora tenham surgido questões, em geral localizadas, envolvendo a dúvida quanto à escala mais correta, para cada gráfico construído. Essa dúvida se enfatizou na medida em que os grupos buscavam entre si, através da comparação dos gráficos, a melhor alternativa para a construção. E se espantavam ao perceberem diferenças, principalmente, no tamanho do gráfico traçado.

A busca pela unicidade de soluções, uma constante entre os alunos, foi uma característica bastante presente durante todo o trabalho. Sobremaneira, no estabelecimento das escalas. As discussões desenvolvidas nesses momentos buscaram sempre identificar os entendimentos dos alunos, principalmente através da formulação de uma previsão, ou aposta, em torno dos efeitos gerados pela escolha. Embora essa discussão tenha aparecido, até o momento, através de questões unilaterais as discussões não foram, de maneira alguma, pormenorizadas. Foram ampliadas de modo a fornecer conexões com situações semelhantes em contextos diversos, nos quais os alunos pudessem encontrar referências, ou até mesmo variações nos comportamentos observados em decorrência da escolha da escala.

Nosso principal objetivo, nesse momento, foi o de além de esclarecer a importância da escolha da escala, mostrar a inexistência de uma escala correta, mas, sobretudo apresentar a necessidade de uma escolha coerente e apropriada ao problema proposto. A fim de que a representação gráfica construída viabilize posteriores manipulações, interpretações e análises da reta traçada.

Nesse problema os alunos também recuperavam procedimentos e resoluções já trabalhados, tais como a interpretação e posterior localização de informações através do gráfico construído, a determinação de uma expressão algébrica que represente, da melhor forma, a relação funcional estabelecida. Tais atividades se desenvolveram sem maiores dificuldades, e tanto as exigências quanto os obstáculos enfrentados pelos alunos foram similares aos problemas anteriores, especialmente com relação a interpretação gráfica.

No último problema, proposto pelo módulo de atividades, mais do que em qualquer um dos anteriores, exploramos questões socialmente ligadas à vivência dos alunos, buscando uma contextualização, cada vez maior, das atividades para potencializar um entendimento realmente significativo.

Esse problema possibilitou a investigação das variações de uma função afim, especialmente no tocante a sua representação gráfica. O gráfico fornecido se diferencia bastante dos traçados ou interpretados pelos alunos até esse momento. Estes, invariavelmente, resultavam em retas crescentes, ou ascendentes.

Em contrapartida, o primeiro impasse esteve localizado justamente nesse diferencial: o gráfico observado era uma composição de diferentes retas, de diferentes tamanhos e posições. Apesar de representar algo novo para os alunos, o referido gráfico potencializou importantes discussões. Entre elas a existência de uma vasta classificação de funções, as variações possíveis para a representação gráfica da função afim, a possibilidade de construírem gráficos envolvendo situações diferentes, ainda que mantida a ligação entres seus determinantes; retomou a questão de explorarmos os mesmos eixos de coordenadas, ou eixos cartesianos, para representarmos, simultaneamente, diferentes comportamentos, ou funções afim, questão esta já discutida no problema - 3.

Também abriu margem para redimensionamentos em torno da diversidade de grandezas, ou variáveis, e das relações, possíveis de serem representadas pelos eixos. Neste caso particular, a relação envolvendo o custo da cesta básica e os meses em que foram observadas as suas variações. Não nos preocupamos, aqui, com o esgotamento das discussões, apenas buscamos garantir que, mesmo de maneira pontual, suas relevâncias fossem abordadas.

Outra discussão bastante interessante foi a que envolveu, novamente, as escalas. Nesse caso, os alunos precisavam identificar a escala estabelecida para a construção do gráfico, o que foi feito a partir da análise e interpretação do mesmo, especialmente dos seus eixos de coordenadas e das informações contidas neles. Também enfocamos a ligação e, sobretudo, a correspondência existente entre a representação gráfica e os dados tabelados. No entanto, nesse problema, diferentemente dos anteriores, os alunos já possuíam a representação gráfica e, através dela, precisaram construir uma tabela equivalente, que correspondesse ao comportamento observado. Ainda, recuperamos através desse problema a identificação das transformações e das regularidades, contidas na situação, já que tal questão não foi posta no problema anterior. Sentimos necessidade de retomar tal questão porque o problema analisado enfocava a identificação das varáveis envolvidas no fenômeno descrito.

A principal conclusão observada através desse problema está ligada à dificuldade dos alunos em transitarem entre informações gráficas e tabeladas. Essa constatação se deu principalmente pelo fato de termos explorado tal a ligação por uma única via: a que partia da tabela para a construção do gráfico. Apesar de trabalharmos a construção dos gráficos sempre atrelados a sua correspondência com a tabela, os alunos encontraram grandes dificuldades em realizar o caminho contrário. Ainda assim, possibilitou um dinamismo de análise que sinalizou para novas perspectivas, junto aos alunos, em torno da diversidade de maneiras possíveis para estabelecer, investigar e representar uma função afim.

Todas as dificuldades que encontramos e em momento oportuno já relatamos, tais como a indisciplina generalizada de um grupo específico de alunos e a não participação do professor, responsável pela disciplina de Matemática junto à turma, com a proposta, não foram sanadas com o avanço dos encontros. Restringimo-nos, porém, a relatar os aspectos ligados essencialmente ao desenvolvimento das atividades.

A última atividade desenvolvida junto ao grupo piloto apresentou um diferencial bastante importante. O problema número 6, proposto nesse grupo, possuía diferenças significativas quanto ao contexto em que o comportamento seria avaliado. Apresentava para análise um gráfico referente às eleições presidenciais do ano de 2002. O contato com informações desse tipo é bastante comum, e, na maioria das vezes, o seu vínculo com conceito ou idéias matemáticas passa desapercebido.

Este foi um dos comentários feitos pelos alunos, tomando a si mesmos como referência, pois jamais haviam considerado a hipótese de que essas informações pudessem estar fortemente ligadas à idéias e conceitos matemáticos, especialmente aos discutidos em aulas formais de matemáticas.

A intenção ao utilizar esse tipo de informação era ultrapassar as barreiras disciplinares, superando o contexto matemático e, também, o físico, ressaltando o caráter social inerentes ao conceito de função afim. Iluminar caminhos diferentes para a abordagem desse conceito, sem perder a objetividade do seu ensino, mas priorizando a contextualização do mesmo, em prol de uma compreensão mais ampla a respeito do sue significado, das suas utilizações e da sua importância, dentro e fora da matemática.

Contudo, a familiaridade com tais informações trouxe uma certa inquietação no momento de tratá-las, o que não chegou a representar um empecilho no encaminhamento da atividade. Porém, detectamos obstáculos bastante contundentes no momento da interpretação dos dados fornecidos, especialmente, devido à gama de informações agrupadas em um único gráfico. Pois, além desse representar algo novo em relação ao traçado das retas, já que até o momento os gráficos não apresentavam variações quanto ao seu traço, todos eram retas crescentes, também se diferenciava por envolver quatro situações, candidatos, diferentes para avaliação. Cada uma com sua representação gráfica correspondente.

Todavia, mesmo tais obstáculos serviram para levantarmos a discussão em torno da importância desse recurso, haja vista o caráter agrupador dessa possibilidade. Pois, mesmo não extrapolando os limites particulares de cada situação, essa característica garante a junção sem justaposição de informações.

Apesar das dificuldades enfrentadas no encaminhamento dessa atividade, demos continuidade a sua resolução. Porém, tendo observado tais entraves e o período de tempo que a sua exploração adequada demandaria, resolvemos substitui-lo por outro que mantivesse o mesmo perfil, a ênfase ao caráter social inerente ao trato do conceito de função afim. O que realmente foi feito, como pode ser conferido nas descrições a cima relativas ao problema 6 desenvolvido durante o trabalho na escola.

Ao avaliarmos as atividades, em conjunto, também foi possível verificar manifestações e processos bastante similares à algumas das idéias defendidas pela Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud. Com a análise do processo, por completo, percebemos o quanto idéias principais, levantadas por essa teoria, se encaixam e se manifestam ao longo do trabalho junto aos alunos.

As atividades desenvolvidas assumiram, ao longo dos encontros, um perfil de situação designado por Vergnaud, ou seja, se tornaram tarefas através das quais os alunos conseguiram dar sentido aos conceitos trabalhados, entre eles, o de relação funcional, de dependência, de correspondência, de variável, e de função afim, entre outros. Em conseqüência disso, podemos dizer que todo o arsenal de argumentações, de hipóteses e conclusões, implícitas ou explícitas, formuladas pelos alunos, ao longo dos encontros, caracterizam os elementos constituintes das diferentes ações, isto é, podem ser denominados, conforme Vergnaud, como os esquemas.

Assim, as ações empreendidas pelos alunos durante as atividades foram moldadas de acordo com a classe de situações a que pertenciam, sendo que estes apresentavam diferentes modos de ação, de reunião de informações, de encaminhamentos e de interpretações. No caso das situações-problema as ações encaminhadas pelos alunos envolveram, em maior escala, condutas implícitas. Já durante as atividades teórico-experimentais e a resolução de problemas verificou-se que os alunos lançaram mão tanto de elementos implícitos, quanto de explícitos, que acabavam se complementando.

Enfim, o que se observou a partir dessas atividades é que o trato com o campo conceitual das estruturas multiplicativas, que contém o conceito de função afim, foi vastamente explorado, desde as suas compreensões mais simples, até aquelas que exigiam maior grau de abstração e interpretação, tais como a formalização do conceito de função afim e de suas formas representativas (gráficas, tabulares, algébricas, etc.). Sendo que os avanços observados, quanto ao entendimento dos conhecimentos tratados, esteve intimamente ligado à diversidade e ao grau de exigência gradativo das atividades propostas.

Embora já tivéssemos finalizado as atividades, reservamos um último encontro para encaminhar a avaliação individual e coletiva dos encontros e das atividades desenvolvidas. Essa avaliação não teve como objetivo quantificar a assimilação dos temas desenvolvido pelos alunos, mas identificar seus posicionamentos em relação ao que foi feito, quanto à validade, ou não desse trabalho, e, também quanto às perspectivas levantadas pela dinâmica empreendida nos encontros.

Também, buscávamos identificar os motivos pelos quais os demais alunos não haviam se envolvido no trabalho. Sendo que para tanto, deixamos clara a isenção desta avaliação em relação a qualquer outra efetuada pelo professor da turma, dando total abertura para que expusessem suas razões e justificativas, enfatizando que esta só tinha o sentido de dimensionar os efeitos da proposta.

Apesar de termos tentado envolver também o professor da turma na avaliação não conseguimos um posicionamento do mesmo, já que não havia participado daquele encontro, nem ao menos conseguimos contata-lo depois pois não se encontrava na escola. Nosso papel deveria ser paralelo ao do referido professor, e não possuía em momento algum o perfil substitutivo, caracterizado principalmente pelo papel de estagiários. Nossa participação junto à turma não desempenhava esse papel, apesar de termos nos deparado, por diversas vezes, com essa denominação, principalmente, por meio dos alunos.

Assim, o trabalho e a avaliação planejados, inicialmente, como uma construção conjunta entre nós e o professor da turma não se concretizou, em nenhum momento. Nesse último encontro registramos a presença de vinte e um alunos, sendo que todos, ao seu tempo, aceitaram participar das avaliações. Estas foram feitas individualmente, de forma escrita, sem exposição ao grande grupo, a fim de evitar constrangimentos.

As manifestações foram diversas, e na tentativa de disponibilizar alguns posicionamentos, destacaremos, a seguir, alguns trechos. O material formulado pelos alunos, na íntegra, pode ser encontrado em anexo (anexo-3).

Aluno - 1: *"Não gostei. Porque não me serve para o ano letivo(..)."*

Aluno - 2: *"(...). Bom eu não acompanhei toda a matéria, pois eu estava em outra sala e mudei para esta. (...). Não entendi qual foi exatamente o objetivo disso! (...) E também não sei se isso foi bom para gente aprender agora se isso é matéria lá do 1.º ano do 2.º. (...)talvez não! Pois muita coisa do livro ficou em branco e acredito que o livro seria mais interessante para mim, principalmente para quem vai fazer a prova da escola técnica! (...)"*

Aluno - 3: *"Achei que este tipo de atividade é bem interessante, porém um pouco cansativo. E as aulas não foram melhores porque faltou a participação de alguns alunos (...)"*.

Aluno - 4: *"Eu achei legal, mais não deu para aproveitar a matéria. Baguncei legal e não aproveitei. (...), o último dia foi legal, pois não baguncei."*

Aluno - 5: *"No começo achei as aulas muito proveitosas. Fiz os exercícios, etc. Mas depois, confesso que parei de prestar atenção nas aulas. (...). A atividade dos gráficos, por exemplo, eu gostei, fiz, eu gosto de gráficos, (...)."*

Aluno - 6: *"Eu não achei nada, pois não fiz nada (...)"*.

Aluno - 7: *"Não gostei, porque a matéria é muito complicada e também enjoada. (...), enquanto a gente tinha essa aula nós podíamos ter tido uma aula muito mais interessante"*.

Aluno - 8: *"Achei legal, pois aprendi muitas coisas novas e interessantes, mas nos últimos dias o empenho não era o mesmo pois muita gente não estava fazendo, a bagunça era grande e não dava vontade de trabalhar mais"*.

Aluno - 9: *"Gostei porque aprendemos experiências novas e trabalhamos com outros tipos de material não só com lápis e borracha"*.

Aluno - 10: *"Bom, eu peguei o trabalho pela metade. Achei um pouco legal e complicado. Exige muita atenção. É um trabalho diferente. Você descobre coisas que você nem se deu conta, ou nunca pensou nisso (...)"*.

Aluno - 11: *"Eu gostei muito das experiências que fizemos e aprendi muitas coisas diferentes, (...). As aulas foram muito criativas e diferentes do que fazemos todo dia. Gostei porque cada aula que passava mais coisas eu aprendia (...)"*.

Com os trechos reproduzidos acima, buscamos identificar diferentes posicionamentos dos alunos, bem como motivos variados pelos quais aprovaram ou não o trabalho realizado. Percebemos, com essa avaliação, que as preocupações possuíam diferentes origens, desde a preocupação com o conteúdo que, segundo os alunos, deixaria de ser trabalhado pelo professor, até pela forte influência do comportamento inadequado de alguns. Também notamos que para alguns alunos a desaprovação havia se tornado um problema de cunho pessoal, por vezes antipatia, com relação à proposta e com relação a nossa presença. Talvez pela prática pedagógica implantada, nunca saberemos com certeza.

Porém, identificamos aqui um obstáculo bastante freqüente quando se buscam aproximações institucionais desse tipo, o vínculo entre pesquisas acadêmicas e ambiente escolar sempre acaba revelando dimensões nem sempre imaginadas. Certamente, as dificuldades relatadas aqui servirão de alerta e, quem sabe, de denúncia para a necessidade de uma maior atenção à questão do contato entre escola e academia (pesquisa/pesquisadores).

Não temos a intenção de relativizar os depoimentos, mas acreditamos que, dentro do quadro que nos foi imposto, o resultado obtido pode ser considerado satisfatório, já que conseguimos alcançar os objetivos iniciais traçados e, ainda, potencializar novas perspectivas para a proposta.

Enfim, acreditamos que as trocas, de todos os tipos, ocorridas durante os encontros, os diálogos desenvolvidos e a postura mais autônoma demonstrada pelos alunos com o avanço dos encontros, corresponderam a alguns dos objetivos delineados pela proposta, em especial quanto ao envolvimento. Ainda, com a evolução das atividades, conseguimos manter um dinamismo de trabalho moldado pela constante formulação e reformulação de hipóteses, de argumentos, mas principalmente, pelas construções coletivas de conhecimentos que conseguimos realizar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E NOVOS DESAFIOS

Nas discussões realizadas ao longo dos capítulos delineamos alguns dos problemas afetos ao ensino e aprendizagem de Matemática atualmente, dentre os quais a excessiva fragmentação, buscando apontar seus efeitos mais imediatos no complexo processo de aprendizagem/construção desenvolvido pelo aluno.

Procuramos apontar as principais características do paradigma instaurado no contexto escolar, em especial suas facetas junto à construção de conhecimentos matemáticos. Verificamos que, nesse contexto, a concepção de aprendizagem/construção de conhecimentos matemáticos é pautada por um perfil estático, irrefletido. Opondo-se diretamente ao processo evolutivo da Matemática, já que esta enquanto fruto da criação e invenção humana não evolui de forma linear e logicamente organizada.

Essa linearidade provoca um privilégio demasiado de certos conhecimentos tomados como ponto de partida, tornando o processo excessivamente hierarquizado e fundamentado na cultura dos pré-requisitos, o que tem resultado em uma compreensão desestruturada e desarticulada do conhecimento matemático, carente de significados.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) já sinalizam a necessidade de romper com essa postura, apontando como um dos princípios norteadores dessa ruptura a adoção de uma aprendizagem em Matemática vinculada à compreensão, à atribuição e apreensão de significados. Porém, salienta que para que esse perfil seja implementado é preciso abrir mão do tratamento compartimentado e estanque dos conteúdos, em prol de uma abordagem onde conexões entre conhecimentos, do mesmo campo de conhecimento ou não, sejam priorizadas e incentivadas.

Acreditamos que o real significado do conhecimento matemático só é incorporado pelo aluno na medida em que este percebe e estabelece relações entre tais conhecimentos, entre esses e outros, dessa ou de outras áreas, explorando-as em contextos mais amplos. Ou seja, quando as situações de aprendizagem forem centradas na construção de significados e na elaboração de estratégias para a resolução de problemas, quando estas permitirem ao aluno o desenvolvimento de processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não partirem de atividades pautadas pela memorização, totalmente desprovida de compreensão, ou centradas em um formalismo excessivo de conceitos. Pois, acreditamos que

> o estímulo à capacidade de ouvir, discutir, escrever, ler idéias matemáticas, interpretar significados, pensar de forma criativa, desenvolver o pensamento indutivo/dedutivo, é o caminho que vai possibilitar a ampliação da capacidade para abstrair elementos comuns a várias situações, para fazer conjecturas, generalizações e deduções simples como também para o aprimoramento das representações, ao mesmo tempo que permitirá aos alunos irem se conscientizando da importância de comunicar suas idéias com concisão(BRASIL, 1998, p.63).

Na busca da superação desse contexto, onde a aprendizagem de conhecimentos matemáticos é pautada pela transmissão e recepção de conhecimentos, é que fundamentamos nossa proposta e elegemos alguns elementos que, a nosso ver, são essenciais na reversão do caminho que tem sido, tradicionalmente, preservado.

Advogamos que o ponto de partida para mudanças, realmente significativas, é a adoção de uma nova postura diante do processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Isso implica em compreender que o conhecimento matemático é algo dinâmico, flexível, e que a aprendizagem/construção deste possui um caráter de descoberta e de construção gradual, no qual o aluno assume um papel central.

Nesse sentido, acreditamos que a construção de conceitos através de situações diversificadas e significativas apresenta-se como uma via bastante fértil para o trato com conhecimentos matemáticos, a fim de que se potencialize a aquisição/incorporação estruturada de saberes matemáticos. A adoção de conceitos como ponto de partida para a construção de conhecimentos matemáticos é justificada pela capacidade que estes possuem de propiciar articulações entre conhecimentos.

Foi nessa perspectiva que desenvolvemos a presente pesquisa, buscando discutir tal questão a partir do processo de construção do conceito de função afim, analisando a capacidade desse conceito em propiciar interações conceituais com a disciplina de Física, a partir de conceitos inerentes a fenômenos físicos abordados nesta disciplina, tais como velocidade, distância percorrida, tempo, entre outros.

Esta foi balizada através da elaboração de um módulo de atividades no qual foram privilegiadas atividades diversificadas envolvendo o conceito de função afim, bem como outros adjacentes a ele. A estruturação desse material foi feita de modo que propiciasse a construção gradual desse conceito e a sua recorrente aplicação em diferentes contextos.

Identificamos, também, como elementos fundamentais no processo de construção do conceito de função afim, os conceitos unificadores, particularmente o de transformação, de regularidade e de escala, devido à capacidade que possuem em potencializar articulações entre conhecimentos diversos. Porém, é necessário reiterar que nossa intenção não foi utilizá-los como ponto de partida para a construção de conceitos matemáticos, mas explorar o caráter de ponte entre conhecimentos que tais conceitos assumem, para potencializar um eixo de ligação entre as atividades e entre os conhecimentos construídos através delas.

A nosso ver, a elaboração desse material apresentou-se como uma das principais contribuições desse trabalho, tendo em vista que a proposta surge com um caráter inovador ao adotar e incorporar, junto ao conceito matemático eleito, o de função afim, os *conceitos unificadores*, originados e desenvolvidos no contexto do ensino de Ciências Naturais, abordados nessa proposta com um enfoque voltado para o ensino de Matemática. Bem como, por ter o propósito de potencializar, através destes, aproximações entre as disciplinas de Matemática e Física.

Nesse sentido, a utilização dos conceitos unificadores contribui, não só na identificação, por parte dos educandos, desses conceitos matemáticos e de seus significados em uma dimensão mais ampla, de maior compreensão, dentro da Matemática, como também facilitaram a extrapolação das fronteiras disciplinares, redimensionando tais significados também dentro da disciplina de Física. Como conseqüência, levando os alunos à descobertas acerca das aproximações existentes entre as disciplinas de Matemática e Física, aproximações de cunho conceitual envolvidas no estudo do conceito de função afim.

Outra contribuição bastante significativa foi o fato de que o módulo de atividades proposto abre margem para a estruturação de novos planejamentos voltados para o processo de aprendizagem/construção de conceitos matemáticos, sobretudo do conceito de função afim. Pois, sinaliza, através das diferentes atividades, alternativas para o trato desses conceitos. Entre elas a exploração de situações-problema, onde o aluno é levado participar do processo de construção, avaliando a situação, desenvolvendo hipóteses acerca dela, estruturando estratégias e inferências.

Com base nos dados que coletamos, é possível verificar que esse processo, pautado por problematizações e argumentações constantes facilitado principalmente pela via dos três momentos pedagógicos, contribui sensivelmente na busca de significados para os conhecimentos matemáticos construídos, pois acreditamos que isso só ocorre quando o aluno é envolvido em um processo contínuo de construção–comunicação-validação de suas hipóteses. Pois,

> resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido. Além disso, é necessário desenvolver habilidades

> que permitam provar os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução (BRASIL, 1998, p.42).

Portanto, o ensino de Matemática, particularmente o do conceito de função afim, apresenta-se como um campo repleto de desafios, que propiciam a construção individual de alternativas para a superação destes. As associações entre atividades desafiadoras, construções contínuas e às descrições do conceito de função afim, constituem-se em uma possibilidade de dar novo sentido à construção dos conceitos matemáticos, tanto dentro da Matemática quanto da Física. Pois, tais associações colocam o foco não no conteúdo pelo conteúdo, mas na capacidade do aluno em construir idéias que lhe permitam desempenhar-se na resolução de situações-problema diversas.

Outra importante contribuição desse trabalho foi à iluminação de novos caminhos para a discussão acerca do processo de construção e aquisição de conceitos pelo aluno. Tanto no tocante às dimensões que assume no âmbito cognitivo do sujeito, quando na complexidade que tal processo está inserido. Esta se evidenciou no momento em que sentimos a necessidade de buscar subsídios teóricos que sustentassem nossa preocupação em torno da complexidade envolvida no processo de conceitualização e suas implicações junto ao conceito de função afim. Momento este em que fomos buscar respaldo na Teoria dos Campos Conceituais.

Buscamos amparo junto à Teoria dos Campos Conceituais a fim de consubstanciar nossa premissa de que a o processo de construção desse conceito é, por si só, algo bastante complexo e ocorre de forma gradual. Nesse sentido, apontamos conexões entre essa teoria e as questões levantadas por nós, salientando sua potencialidade no trato com o conceito de função, e com o de função afim. Esta aproximação foi fundamentada através das dimensões assumidas, por tal teoria, no contexto das discussões em torno da formação dos conceitos e da constituição destes pelo sujeito. Também, por estar intimamente ligada a conceitualização progressiva, em especial, das relativas às estruturas multiplicativas, que sustentam a construção do conceito de função.

Contudo, nossa pesquisa não pretendeu discutir as dimensões cognitivas ligadas a constituição desse conceito, ou das estruturas envolvidas na sua construção, pelo sujeito. Pois, tal discussão suscita uma abordagem mais aprofundada e uma ênfase no funcionamento cognitivo do sujeito durante o processo de conceitualização do real, o que não foi possível abarcar com a presente pesquisa. Todavia, nosso propósito, através dessa discussão sucinta, foi iluminar novas perspectivas para a busca de novos caminhos, de novas pesquisas que visem investigar a complexidade existente na aquisição de novos conceitos matemáticos. Quiçá àquela ligada ao conceito de função e/ou ao de função afim.

Nossa intenção, nesse momento do trabalho, foi mais do que reafirmar os pressupostos e as contribuições do mesmo. Foi sinalizar novos desafios, desafios mais amplos que dêem origem a novos trabalhos, a novas propostas. Foi apontar para um tempo de possibilidades e não de determinismos, a fim de que a educação, de um modo geral, seja incorporada como um processo permanente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVARENGA, B. & MÁXIMO, A. **Curso de Física.** V. 1. São Paulo: Harbra, (2.ª ed.) 1986, (3.ª ed.) 1993.

ANGOTTI, J.A. & DELIZOICOV, D. **Metodologia do ensino de ciências.** São Paulo: Cortez, 1990.

ANGOTTI, J.A. **Fragmentos e totalidades no ensino de ciências.** Tese de Doutorado, FEUSP, 1991.

AQUINO, J.G. **Erro e fracasso na escola: alternativas teóricas e práticas.** São Paulo: Summus, 1997.

ARTIGUE, M. e outros; Ferramenta informática: ensino de matemática e formação dos professores. In: **INEP-Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa Educacionais. Tendências na educação matemática**. Brasília: Em Aberto, 1994.

AUTH, M.A.; **Buscando superar a fragmentação no ensino de física: uma experiência com professores.** Santa Maria: Dissertação de Mestrado apresentada ao PPGE/CE/UFSM, 1996.

_____. **Formação de professores de ciências naturais na perspectiva temática e unificadora.** Tese de doutorado, UFSC, 2002.

ÁVILA, G. S. S. **Cálculo 1: funções de uma variável.** Rio de Janeiro: LTC, (4ª ed.)1981.

BAUMGART, J.K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: álgebra.** v.4. São Paulo: Atual, 1992.

BICUDO, M.A.V. **Pesquisa em educação matemática**. São Paulo: UNESP, 1999.

BONJORNO, R. F. S. **Física 1.** São Paulo: FTD, 1985.

BOYER, C.B. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: cálculo.** v.6. São Paulo: Atual, 1992.

_____. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. **Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**, v.3. Secretaria de Educação Fundamental.

Brasília: MEC/SEF, 1999.

BRASIL. **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática (5° a 8° séries).** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAMPITELI, H.C.; CAMPITELI, V.C. **Metodologia para o ensino de funções.** Ponta Grossa: Editora UEPG, 2003.

CAMPOS, C.R. **O ensino de Matemática e da Física numa perspectiva integracionista.** Dissertação de mestrado, PUC/SP, 2000.

CAMPOS, T.M.M & NUNES, T. Tendências atuais do ensino e aprendizagem da educação matemática. In: **INEP-Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa Educacionais. Tendências na educação matemática**. Brasília: Em Aberto, 1994.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa,1963.

CARNEIRO, V. C. **Funções elementares: 100 situações-problema de matemática.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 1993.

CARVALHO, J.P**.;** Avaliação e perspectivas da área de ensino de matemática no Brasil. In: **INEP-Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa Educacionais. Tendências na educação matemática.** Brasília: Em Aberto, 1994.

CHALMERS, A.F. **What is this thing called Science?** St. Lucia, Queensland: University of Queensland Press, 1976.

D'AMBRÓSIO, B.S. A formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. In: **Pro-posições**, vol. 4, n.º 1 (10), Março, 35 – 41, 1993.

_____. & STEFFE, L.P.; O ensino construtivista. In**: INEP-Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa Educacionais. Tendências na educação matemática.** Brasília: Em Aberto, 1994.

DALL'ASTA, M.N. & TERRAZAN, E.; Repetência e evasão em matemática no ensino supletivo e formação de professores. In: **Educação/ Centro de Educação**, UFSM, vol.23, n°1, 1998. p.95-117.

DAVIS, P. & HERSH, R. **A experiência Matemática.** Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1985.

DE BASTOS, F. da P. . **Investigação-ação educacional emancipatória e prática educacional dialógica em ciências naturais.** Tese de Doutorado, FEUSP/IFUSP. São Paulo, 1995.

_____. **Momentos pedagógicos problematizadores: sendo desafiados nas aulas.** Texto de notas de aula. Santa Maria: UFSM, 2000.

DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J.A. **Física.** 2.ed. São Paulo: Cortez, 1992.

DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J.A. & PERNAMBUCO, M.M. **Ensino de ciências; fundamentos e métodos.** São Paulo: Cortez, 2002.

DIENES, Z.P. **Aprendizado moderno da matemática.** Rio de Janeiro: Zahar, 2.ed., 1974.

_____. **O poder da matemática**. São Paulo: EPU, 1975.

DRAKE, S. **Galileo's Notes on Motion**. Monografia nº 3. Florença: Instituto e Museo di Storia della Scienza, 1979.

FAYOL, M. **A criança e o número: da contagem à resolução de problemas.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

FERRARO, N. G. et al. **Aulas da Física.** São Paulo: atual, 1991.

FLEMING, D.M.; GONÇALVES, M.B. **Cálculo A: funções, limite, derivação, noções de integração.** Florianópolis: Ed. da UFSC, 1987.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido.** 17 ed. São Paulo: Paz e Terra, 1987.

____. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 12 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

____. **Educação como prática da liberdade.** 23 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1999.

GARNICA, A.V.M.; Professor e professores de matemática: das informações que se tem acerca da formação que se espera. In. **Revista da Faculdade de Educação**. Disponível em: http://www.scielo.br, retirado da rede em 2002.

GIROUX, H. **Escola crítica e política cultural.** 3.ed. São Paulo: Cortez, 1992.

_____. **Pedagogia radical: subsídios.** São Paulo: Cortez, 1983.

GRABAUSKA, C.J. **Investigação-ação na formação dos profissionais da**

educação: redimensionando as atividades curriculares de ciências naturais no curso de pedagogia. Santa Maria: Tese de Doutorado apresentada ao PPGE/CE/UFSM, 1999.

GRAVINA, M.A. & SANTAROSA, L.M.; **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados.** Disponível em: http://www.c5.cl/ieinvestiga/actas/ribie98/117.html, retirado da rede em 2002.

IMENES, L. M. ; LELLIS, M. **Microdicionário de Matemática.** São Paulo: Scipione, 1998.

INEP-Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa Educacionais. **Tendências na educação matemática.** Brasília: Em Aberto, 1994.

KAMII, C.A. **A criança e o número.** São Paulo: Papirus, 1985.

LEINHART, G. ZASLAVSKY, O. & STEIN, M. **Function, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching.** In: Review of Educational Reserch, 60 (1), 1-64, 1990.

LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C**. A Matemática do ensino médio.** V.1., 4 ed. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática – SBM, 1999.

LOPES, J.P., ANGOTTI, J.A.P., MORETTI, M.T. **Construindo Matemática: problematizando o conceito de função.** Paraná: Anais do V ANPEd SUL (Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul, PUC – Paraná, 2004, no prelo.

LOPES, J.P., ANGOTTI, J.A.P. **Conceitos unificadores: do ensino de Ciências ao de Matemática, rumando às totalidades no ensino.** Rio Claro: Anais do VII EBRAPEM (Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**,** UNESP -Rio Claro, 2003, no prelo.

LOPES, J.P., ANGOTTI, J.A.P., MORETTI, M.T**. Função afim e conceitos unificadores: o ensino de Matemática e Física numa perspectiva conceitual e unificadora.** Bauru: Anais do IV ENPEC (Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Ciências), 2003, no prelo.

_____. **Abordagem temática e conceitos unificadores: fragmentações e**

aproximações entre Matemática e Física no programa educativo de CN&T. Campinas: Anais do VI EBRAPEM (Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática), 2002.

_____. **Interações conceituais entre Matemática e Física: o conceito de função afim e os conceitos unificadores como possibilidades.** Lageado: Anais do IV Encontro sobre Investigação na Escola, 2002.

LUDKE, M. & ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, N.J. **Matemática e educação: alegorias, tecnologias e temas afins.** São Paulo: Cortez, 1992.

MOURA, M. O., MORETTI, V. D. Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais. In: **Ciência e Educação**, v.9, n.1, p. 67-82, 2003.

MOREIRA, ,M. A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta Área. In: **Investigações em Ensino de Ciências**, 7(1), 2002.

MOREIRA, M.A. **Mapas conceituais no ensino da física.** Porto alegre: Instituo de física – UFRGS, 1992.

MION, R. A. **Investigação-ação e a formação de professores em física.** Tese de doutorado, UFSC, 2002.

NETO, E.R. **Didática da matemática.** São Paulo: Ática, 1987.

PAIVA, M.A.V; **Saberes profissionais de professores que ensinam matemática: um diálogo com professores experientes.** Disponível em: http://www.apm.pt/iemxii/saprofenm.pdf, retirado da rede em 2002.

PARANÁ, D.N.S. **Física.** Volume único. São Paulo: Ática, 2000.

PAULOS, J. A. **Analfabetismo em matemática e suas conseqüências.** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1994.

PELHO, E.B.B. **Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis.** Dissertação de mestrado, PUC/SP, 2003.

PIAGET, J. e outros, **La enseñanza de las matemáticas.** 3 ed. Madrid: Aguiar, 1968.

PIETROCOLA, M. **A Matemática como estruturante do conhecimento Físico.** In: Cad. Bras. Ens. Fís., V.19, n.1: p.93-114, abr. 2002.

PINHEIRO,T. F. **Aproximações entre a ciência do aluno na sala de aula da 1ª série do 2º grau e a ciência dos cientistas: uma discussão.** Dissertação de mestrado. UFSC, 1996.

POLYA, G.A. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

RUIZ, A.R.; **Matemática, matemática escolar e nosso cotidiano.** In: A página da educação. Disponível em: http://www.a-pagina-da-educacao.pt, retirado da rede em 2002.

SANTOS, E.P. **Função afim y = ax + b : a articulação entre os registros gráfico e algébrico com o auxílio de um software educativo.** Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 2002.

SELDEN, A. & SELDEN, J. Research Perspectives on Conceptions of Functions: Summary and Overview. In: **The Concept of function: aspects of epistemology and pedagogy**. Guershon Harel and Ed Dubinsky (Eds). Mathematical Association of America, vol. 25, 1-21, 1992.

TERRAZAN, E.A.; Analogias e metáforas: o estado da arte no ensino de ciências. In: **Atas do I encontro nacional de pesquisa em ensino de ciências.** ANGOTTI, J.A.P.; DELIZOICOV, D.; MOREIRA, M.; ZYLBERSZTAJN, A.; (Orgs.). Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 1997.

TRINDADE, J. A. O. **Os obstáculos epistemológicos e a educação matemática.** Dissertação de mestrado. UFSC, 1996.

TRIVIÑOS, A.N.S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**. São Paulo: Atlas, 1987.

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, 17(2): 167-181, 1998.

VERGNAUD, G. **Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica**. Perspectivas, 26(10): 195-207, 1996.

VERGNAUD, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In: Guershon, H. and Confrey, J. (1994). (Eds.) **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press. pp. 41-59, 1994.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels**. RDM, 10, (2-3), p.133-170, 1990.

VERGNAUD, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In: Guershon, H. and Confrey, J. (1994). (Eds.) **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press. pp. 41-59, 1994.

VIEIRA, R.; **Quotidianos, matemática e escola.** In: A página da educação. Disponível em: http://www.a-pagina-da-educacao.pt, retirado da rede em 2002.

VOLLRATH, H. **Search strategies as indicators of functional thinking.** In: Educational studies in Mathematics, 17, 387-400, 1986.

ZUFFI, E.M., PACCA, J.L.A. O conceito de função e sua linguagem para os professores de Matemática e de Ciências. In: **Ciência & Educação**, vol. 8, n.º 1: p.35 – 41, 2002.

ANEXOS

ANEXO 1

MÓDULO DE ATIVIDADES DESENVOLVIDO DO JUNTO AO GRUPO PILOTO

Situações - problema

Situação 1:

- A população de um país **depende** de sua área?

Países	Área[10]	População[11]
China	9.536.499 Km^2	1.273.111.290 hab
EUA	9.629.047 Km^2	278.058.881 hab
Brasil	8.547.404 Km^2	174.468.575 hab
Canadá	9.970.610 Km^2	31.592.805 hab
Alemanha	356.302 Km^2	83.029.536 hab
Índia	3.287.782 Km^2	1.029.991.145 hab
Austrália	7.682.300 Km^2	19.357.594 hab
França	543.965 km^2	59.551.227 hab

➢ **Discussão:** existem países com áreas aproximadamente iguais, como por exemplo, a China e os Estados Unidos, com diferentes valores de população. A China tem mais de 1 bilhão de habitantes (Área = 9.536.499 Km^2) e os Estados Unidos cerca de 300 milhões de habitantes (Área = 9.629.047 Km^2).

Os valores da área variam no conjunto A: {medidas das áreas dos países do mundo}.

E os valores das populações podem variar no conjunto dos números reais.

A área de um país não determina sua população. A população **não é função** da área do país.

➢ **Questões:**

Nessa situação, que **regularidades** e que **transformações** podemos identificar?
As áreas dos países possuem valores **regulares** (possíveis de serem definidos)?

➢ **Conclusões:**

____
____
____

[10] Dados retirados em www.vol.eti.br/geo
[11] Dados retirados em www.vol.eti.br/geo

Situação 2:

- A medida de um lado de um quadrado **determina** a sua área, isto é, a área do um quadrado é **função** da medida do lado?

➢ **Discussão:** sabendo-se a medida do lado de um quadrado sabe-se sua área através da expressão $A = L^{2.}$

➢ **Questões:**

Nessa situação, que **regularidades** e que **transformações** podemos identificar?

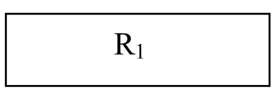
➢ **Conclusões:**

Situação 3:

- A medida do perímetro de um retângulo **determina** a sua área, isto é, a área de um retângulo é **função** da medida do perímetro?

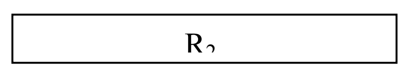
➢ **Discussão**:

4 cm



6 cm

2 cm



8 cm

2p= 20 cm
$A_{R1}= L_1 \times L_2= 4x6= 24\ cm^2$

2p= 20 cm
$A_{R2}= L_1 \times L_2= 16\ cm^2$

➢ **Questões:**

Nessa situação, que **regularidades** e que **transformações** podemos identificar?

➢ **Conclusões**:

Situação 4:

- Durante uma viagem de automóvel é feita uma tabela, **associada** a cada hora à distância percorrida pelo carro desde o início do percurso, de acordo com a tabela, medida em quilômetros marcados no odômetro (velocímetro digital). Isso significa que à distância percorrida é função do tempo gasto no percurso.

Tempo (h)	Distância percorrida (Km)
1	50
2	80
3	110
4	140
5	170

- **Discussão:** em cada momento, a posição do carro na estrada é única.

A posição **é função** do tempo de percurso. ($S = S_0 + VT$, função horária da posição em função do tempo do movimento uniforme (MU), onde S_0 é a posição inicial do automóvel, V é a velocidade do automóvel e T é o tempo de percurso).

- **Questões:** as questões referentes a esta situação serão lançadas e discutidas através das atividades experimentais que desenvolveremos a seguir.

- **Conclusões**

____

____

____

Atividades teórico-experimentais

- **Atividade teórico-experimental: Dominós**

Objetivo: determinar uma relação entre o número de peças de dominós (N) e a altura da pilha (h).

Aposta:

Como proceder:
1) Empilhar os dominós, com sua parte mais larga sobre a mesa, de acordo com as quantidades estipuladas na tabela a seguir.

2) Preencher a tabela com o valor da altura correspondente ao número de peças solicitado. Obs: Não esqueça dos algarismos significativos.

N^o de peças N (peças)	Altura h (cm)
3	
4	
6	
8	

Análise dos dados:
a)Construir o gráfico h x N.
b)Verificar a distribuição dos pontos.
c)Traçar a melhor “curva”.
d)Determinar a inclinação da reta, ou seja, o valor da tangente.(Escolher dois pontos sobre ela, efetuar a diferença entre esses pontos em cada eixo, etc) e compare-a com as de seus colegas.

Conclusão:

Questões:

a) Escreva com suas palavras o modelo que você construiu para o comportamento da altura da pilha em relação ao número de peças empilhadas.
b) Expresse em linguagem simbólica o que você escreveu no item a.
c) Para esta atividade, o que significa o valor da inclinação da reta?
d) Se empilhássemos caixas de fósforos obteríamos o mesmo valor para a inclinação?
e) Quais as condições que devem ser estabelecidas para que se possa fazer alguma generalização sobre os resultados desta atividade?
f) Que **regularidade(s)** é possível de observar nesta atividade? Que **transformação (ões)**?

Exercícios:

1)Através do gráfico determine:

a) A altura da pilha de 3,5 dominós.
b) Quantos dominós são necessários para que uma pilha tenha 9,5 cm

2) Usando a expressão algébrica obtida através de seu gráfico, determine a altura de uma pilha de 1322 dominós.

- **Atividade teórico-experimental: Bolas de gude**

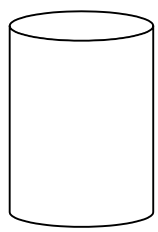
Material:

- Recipiente cilíndrico, no qual se cola uma tira de papel milimetrado.
- Bolinhas de gude.
- Água.

O problema

Temos um conjunto de bolinhas de gude que, quando colocadas em um recipiente com água, modificam a altura da coluna de água.

Considerando que a altura da coluna de água corresponde ao acréscimo do volume no interior do recipiente, pela colocação de bolinhas de gude, será que existe alguma relação entre o número de bolinhas colocadas no recipiente e o volume da água lido?



Grandezas
N.º de bolinhas [N (bolinhas)]
Altura [h (cm)] $\rightarrow$ Volume [(cm^3)] $\Rightarrow$ V= A.h
A (área do recipiente) = 28,27 cm^2

Aposta (apresentá-la também através de uma expressão algébrica)

Como proceder
1) Colocar água no recipiente até a altura de 6 cm.
2) Adicionar o número de bolinhas solicitadas na tabela, registrando, a seguir, a altura medida em cada caso.

N.º de bolinhas N (bolinhas)	Altura h (cm)	Volume V (cm^3)
0		
10		
20		
30		
40		
50		

Análise dos dados:

a)Construir o gráfico V x N.
b)Determinar a inclinação.
c)Escrever a expressão algébrica.

Conclusão

a) Por que utilizamos o recipiente com água?
b) A idealização construída sobre o comportamento do volume de água nessa atividade é semelhante às construídas nas atividades anteriores? O que a diferencia das outras?
c) Para essa atividade, o significa o **valor** da inclinação?
d) Expresse, com suas palavras, o modelo explicativo que você construiu sobre o comportamento do volume de água.
e) A expressão algébrica, construída a partir do gráfico, corresponde às expectativas de sua aposta?
f) Que **regularidade(s)** é possível verificar nesta situação? Que **transformação (ões)** é possível verificar?

Exercícios

1) Qual será o volume uma bola de gude ‘gigante’, para a qual foram desmanchadas 20 bolinhas?
2) Determine o volume que será lido no recipiente, supondo que colocássemos no seu interior 220 bolinhas;

Funções definidas por Processos (Fenômenos) Físicos

Quem compreender o conceito de função, pode encontrar exemplos de funções em diferentes e variados aspectos da sua vida diária. Embora isto nem sempre ajude o aluno a entender o que está acontecendo ao seu redor, o processo de descoberta através, do estudo de tais funções, é uma parte importante e bastante válida no sentido de dar real significado a qualquer análise científica do mundo. Por exemplo,

A queda de um corpo define várias funções. Pois, para cada instante a queda do corpo tem uma velocidade correspondente; associando a velocidade ao tempo de queda obtemos uma função. Os físicos descobriram que para a queda de um corpo a partir do vácuo, a equação $V = 9{,}8t$ define esta função, onde t é o número de segundos decorridos na queda, e V é sua velocidade em metros por segundo.

Atividades

1) Abaixo estão algumas situações físicas que definem funções. Tente elaborar uma hipótese (aposta) razoável para cada caso e expressar a lei sob a forma algébrica.

a) Se estiver fluindo água a uma velocidade uniforme através de uma torneira para um tanque, a quantidade de água no tanque depende do tempo que a água fluiu.

b) A temperatura de uma xícara de café depende do tempo que ela levou para esfriar.

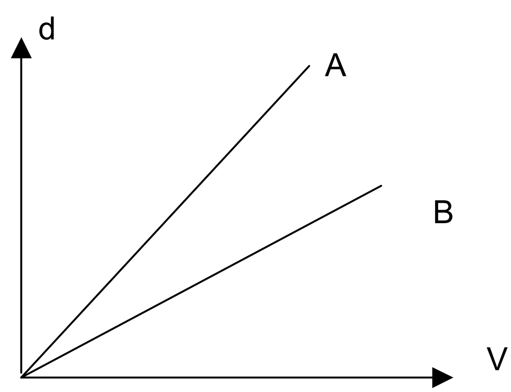
c) O tempo que um automóvel leva para parar depende de sua velocidade.

2) A tabela abaixo apresenta distâncias percorridas por um automóvel e o respectivo consumo de gasolina para cada distância.

Distância percorrida d (Km)	Consumo de gasolina V (litros)
20	2,5
40	5,0
60	7,5
80	10,0

a) Usando os valores da tabela, construa o gráfico d x V.
b) Que tipo de relação existe entre d s V.
c) Calcule a inclinação do gráfico. Que informação esta inclinação nos fornece?
d) Podemos verificar alguma ***transformação*** e/ou alguma ***regularidade***? Qual (is)?

3) A figura a seguir mostra a distância percorrida, d, em função do consumo de gasolina, V, para dois carros A e B. Baseando-se em sua resposta à questão (c) anterior, responda: qual é o carro mais econômico?



4) Em uma corrida de táxi, deve-se pagar R$ 10,00 de “bandeirada” e R$ 4,00 por quilômetro rodado. Seja d a distância percorrida por um táxi e P o preço a ser pago pela corrida.
   a) Complete a tabela abaixo.
   b) De acordo com os valores da tabela, construa o gráfico P x d.
   c) Qual é o tipo de relação existente entre P e d?
   d) Escreva a expressão matemática que melhor representa a relação entre P e d.
   e) Que ***regularidade(s)*** é possível observar nesta situação? Que ***transformação(ões)***?

d (Km)	P (Reais)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

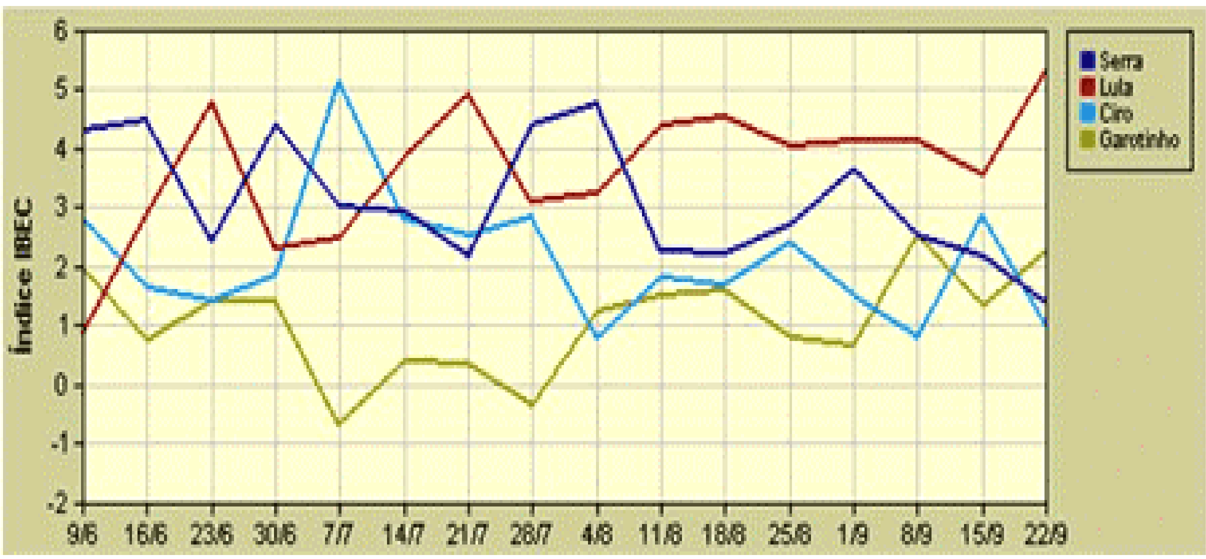
5) Um veículo se encontra num certo marco quilométrico de uma estrada. Neste instante seu motorista acionou um cronômetro e conduz seu veículo pela estrada anotando, durante a viagem, o tempo *t* e sua posição fornecida pelos marcos quilométricos *s* em que o mesmo se encontra. As anotações obtidas permitiram construir a tabela:

t (h)	*s* (Km)
1,0	30
1,5	40
2,0	50
2,5	60
3,0	70
3,5	80
4,0	90

   a) Construa o gráfico de *s* em ***função*** de *t,* de acordo com os valores tabelados. Sugestão: estabeleça uma ***escala*** apropriada para a construção do gráfico (por exemplo, no eixo dos tempos cada quadradinho correspondendo a 0,5h e no eixo das posições cada quadradinho correspondendo a 10 Km).

b) Observando o gráfico, determine em que marco quilométrico foi ligado o cronômetro (t=0).
c) Escreva a expressão matemática que melhor representa a relação entre t e s.
d) Que tipo de variação a escolha da ***escala*** pode produzir?

6) No gráfico abaixo, temos os índices da aceitação dos candidatos à presidência da república do Brasil, das eleições de 2002. Os dados indicam a situação de imprevisão de resultados a quatro dias das eleições.



Dados retirados em WWW.observatoriodaimprensa.com.br/artigos/mid021020024.htm

a) Identifique as variáveis envolvidas no fenômeno a cima.
b) Verifique quais destas variáveis apresentam dependência entre si.
c) O que diferencia este gráfico dos anteriores?
d) Construa uma tabela que expresse, aproximadamente, os dados do gráfico.
e) É possível identificar alguma ***regularidade(s)*** ou ***transformação(ões)*** na situação a cima? Quais?

ANEXO 2

MÓDULO DE ATIVIDADES DESENVOLVIDO JUNTO À TURMA DE ALUNOS, NA ESCOLA

Situações - problema

Situação 1:

- A população de um país **depende** de sua área?

Países	Área[12]	População[13]
China	9.536.499 Km^2	1.273.111.290 hab
EUA	9.629.047 Km^2	278.058.881 hab
Brasil	8.547.404 Km^2	174.468.575 hab
Canadá	9.970.610 Km^2	31.592.805 hab
Alemanha	356.302 Km^2	83.029.536 hab
Índia	3.287.782 Km^2	1.029.991.145 hab
Austrália	7.682.300 Km^2	19.357.594 hab
França	543.965 km^2	59.551.227 hab

➢ **Discussão:** existem países com áreas aproximadamente iguais, como por exemplo, a China e os Estados Unidos, com diferentes valores de população. A China tem mais de 1 bilhão de habitantes (Área = 9.536.499 Km^2) e os Estados Unidos cerca de 300 milhões de habitantes (Área = 9.629.047 Km^2).

Os valores da área variam no conjunto A: {medidas das áreas dos países do mundo}.

E os valores das populações podem variar no conjunto dos números reais.

A área de um país não determina sua população. A população **não é função** da área do país.

➢ **Questões:**

Nessa situação, que **regularidades** e que **transformações** podemos identificar? As áreas dos países possuem valores **regulares** (possíveis de serem definidos)?

➢ **Conclusões:**

____

____

____

[12] Dados retirados em www.vol.eti.br/geo

[13] Dados retirados em www.vol.eti.br/geo

Situação 2:

- A medida de um lado de um quadrado **determina** a sua área, isto é, a área do um quadrado é **função** da medida do lado?

➢ **Discussão:** sabendo-se a medida do lado de um quadrado sabe-se sua área através da expressão $A = L^{2.}$

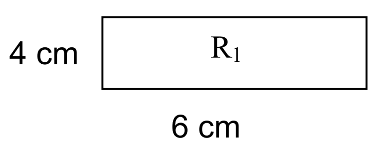
➢ **Questões:**
Nessa situação, que **regularidades** e que **transformações** podemos identificar?

➢ **Conclusões:**

Situação 3:

- A medida do perímetro de um retângulo **determina** a sua área, isto é, a área de um retângulo é **função** da medida do perímetro?

➢ **Discussão**:



2p= 20 cm
$A_{R1}= L_1 \times L_2= 4x6= 24\ cm^2$

2p= 20 cm
$A_{R2}= L_1 \times L_2= 16\ cm^2$

➢ **Questões:**

Nessa situação, que **regularidades** e que **transformações** podemos identificar?

➢ **Conclusões**:

Situação 4:

- Durante uma viagem de automóvel é feita uma tabela, **associada** a cada hora à distância percorrida pelo carro desde o início do percurso, de acordo com a tabela, medida em quilômetros marcados no odômetro (velocímetro digital). Isso significa que à distância percorrida é função do tempo gasto no percurso.

Tempo (h)	Distância percorrida (Km)
1	50
2	80
3	110
4	140
5	170

➢ **Discussão:** em cada momento, a posição do carro na estrada é única.
A posição **é função** do tempo de percurso. ($S = S_0 + VT$, função horária da posição em função do tempo do movimento uniforme (MU), onde S_0 é a posição inicial do automóvel, V é a velocidade do automóvel e T é o tempo de percurso).

➢ **Questões:** as questões referentes a esta situação serão lançadas e discutidas através das atividades experimentais que desenvolveremos a seguir.

➢ **Conclusões**

____
____
____

Atividades teórico-experimentais

- **Atividade teórico-experimental: Dominós**

Objetivo: determinar uma relação entre o número de peças de dominós (N) e a altura da pilha (h).

Aposta:

Como proceder:

1) Empilhar os dominós, com sua parte mais larga sobre a mesa, de acordo com as quantidades estipuladas na tabela a seguir.

2) Preencher a tabela com o valor da altura correspondente ao número de peças solicitado. Obs: Não esqueça dos algarismos significativos.

N^{o} de peças N (peças)	Altura h (cm)
3	
4	
6	
8	

Análise dos dados:

a)Construir o gráfico h x N.
b)Verificar a distribuição dos pontos.
c)Traçar a melhor "curva".
d)Determinar a inclinação da reta, ou seja, o valor da tangente.(Escolher dois pontos sobre ela, efetuar a diferença entre esses pontos em cada eixo, etc) e compare-a com as de seus colegas.

Conclusão:

Questões:

g) Escreva com suas palavras o modelo que você construiu para o comportamento da altura da pilha em relação ao número de peças empilhadas.
h) Expresse em linguagem simbólica o que você escreveu no item a.
i) Para esta atividade, o que significa o valor da inclinação da reta?
j) Se empilhássemos caixas de fósforos obteríamos o mesmo valor para a inclinação?
k) Quais as condições que devem ser estabelecidas para que se possa fazer alguma generalização sobre os resultados desta atividade?
l) Que **regularidade(s)** é possível de observar nesta atividade? Que **transformação (ões)**?

Exercícios:

1)Através do gráfico determine:

a) A altura da pilha de 3,5 dominós.
b) Quantos dominós são necessários para que uma pilha tenha 9,5 cm

2) Usando a expressão algébrica obtida através de seu gráfico, determine a altura de uma pilha de 1322 dominós.

- **Atividade teórico-experimental: Bolas de gude**

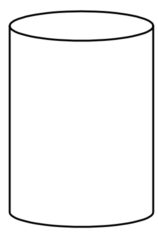
Material:

- Recipiente cilíndrico, no qual se cola uma tira de papel milimetrado.
- Bolinhas de gude.
- Água.

O problema

Temos um conjunto de bolinhas de gude que, quando colocadas em um recipiente com água, modificam a altura da coluna de água.

Considerando que a altura da coluna de água corresponde ao acréscimo do volume no interior do recipiente, pela colocação de bolinhas de gude, será que existe alguma relação entre o número de bolinhas colocadas no recipiente e o volume da água lido?



Grandezas
N.º de bolinhas [N (bolinhas)]
Altura [h (cm)] $\rightarrow$ Volume [(cm^3)] $\Rightarrow$ V= A.h
A (área do recipiente) = 28,27 cm^2

Aposta (apresentá-la também através de uma expressão algébrica)

Como proceder

1) Colocar água no recipiente até a altura de 6 cm.
2) Adicionar o número de bolinhas solicitadas na tabela, registrando, a seguir, a altura medida em cada caso.

N.º de bolinhas N (bolinhas)	Altura h (cm)	Volume V (cm^3)
0		
10		
20		
30		
40		
50		

Análise dos dados:

a)Construir o gráfico V x N.
b)Determinar a inclinação.
c)Escrever a expressão algébrica.

Conclusão

a) Por que utilizamos o recipiente com água?
b) A idealização construída sobre o comportamento do volume de água nessa atividade é semelhante às construídas nas atividades anteriores? O que a diferencia das outras?
c) Para essa atividade, o significa o **valor** da inclinação?
d) Expresse, com suas palavras, o modelo explicativo que você construiu sobre o comportamento do volume de água.
e) A expressão algébrica, construída a partir do gráfico, corresponde às expectativas de sua aposta?
f) Que **regularidade(s)** é possível verificar nesta situação? Que **transformação (ões)** é possível verificar?

Exercícios

1) Qual será o volume uma bola de gude 'gigante', para a qual foram desmanchadas 20 bolinhas?
2) Determine o volume que será lido no recipiente, supondo que colocássemos no seu interior 220 bolinhas;

Funções definidas por Processos (Fenômenos) Físicos

Quem compreender o conceito de função, pode encontrar exemplos de funções em diferentes e variados aspectos da sua vida diária. Embora isto nem sempre ajude o aluno a entender o que está acontecendo ao seu redor, o processo de descoberta através, do estudo de tais funções, é uma parte importante e bastante válida no sentido de dar real significado a qualquer análise científica do mundo. Por exemplo,

A queda de um corpo define várias funções. Pois, para cada instante a queda do corpo tem uma velocidade correspondente; associando a velocidade ao tempo de queda obtemos uma função. Os físicos descobriram que para a queda de um corpo partir do vácuo, a equação $V = 9{,}8t$ define esta função, onde t é o número de segundos decorridos na queda, e V é sua velocidade em metros por segundo.

Atividades

1) Abaixo estão algumas situações físicas que definem funções. Tente elaborar uma hipótese (aposta) razoável para cada caso e expressar a lei sob a forma algébrica.

a) Se estiver fluindo água a uma velocidade uniforme através de uma torneira para um tanque, a quantidade de água no tanque depende do tempo que a água fluiu.

b) A temperatura de uma xícara de café depende do tempo que ela levou para esfriar.

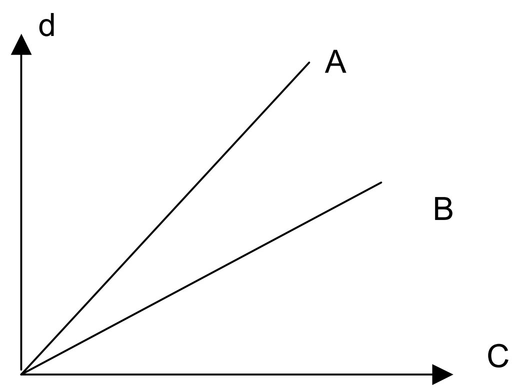
c) O tempo que um automóvel leva para parar depende de sua velocidade.

2) A tabela abaixo apresenta distâncias percorridas por um automóvel e o respectivo consumo de gasolina para cada distância.

Distância percorrida d (Km)	Consumo de gasolina C (litros)
20	2,5
40	5,0
60	7,5
80	10,0

a) Usando os valores da tabela, construa o gráfico d x C.
b) Que tipo de relação existe entre d e C.
c) Calcule a inclinação do gráfico. Que informação esta inclinação nos fornece?
d) Podemos verificar alguma ***transformação*** e/ou alguma ***regularidade***? Qual (is)?

3) A figura a seguir mostra a distância percorrida, d, em função do consumo de gasolina, C, para dois carros A e B. Baseando-se em sua resposta à questão (c) anterior, responda: qual é o carro mais econômico?



4) Em uma corrida de táxi, deve-se pagar R$ 10,00 de "bandeirada" e R$ 4,00 por quilômetro rodado. Seja d a distância percorrida por um táxi e P o preço a ser pago pela corrida.
   a) Complete a tabela abaixo.
   b) De acordo com os valores da tabela, construa o gráfico P x d.
   c) Qual é o tipo de relação existente entre P e d?
   d) Escreva a expressão matemática que melhor representa a relação entre P e d.
   e) Que ***regularidade(s)*** é possível observar nesta situação? Que ***transformação(ões)***?

d (Km)	P (Reais)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

5) Um veículo se encontra num certo marco quilométrico de uma estrada. Neste instante seu motorista acionou um cronômetro e conduz seu veículo pela estrada anotando, durante a viagem, o tempo ***t*** e sua posição fornecida pelos marcos quilométricos ***s*** em que o mesmo se encontra. As anotações obtidas permitiram construir a tabela:

t (h)	*s* (Km)
1,0	30
1,5	40
2,0	50
2,5	60
3,0	70
3,5	80
4,0	90

a) Construa o gráfico de *s* em ***função*** de *t,* de acordo com os valores tabelados. Sugestão: estabeleça uma ***escala*** apropriada para a construção do gráfico (por exemplo, no eixo dos tempos cada quadradinho correspondendo a 0,5h e no eixo das posições cada quadradinho correspondendo a 10 Km).

b) Observando o gráfico, determine em que marco quilométrico foi ligado o cronômetro (*t*=0).

c) Escreva a expressão matemática que melhor representa a relação entre *t* e *s.*

d) Que tipo de variação a escolha da ***escala*** pode produzir?

6) No gráfico abaixo, temos a evolução dos valores da cesta básica no período de julho de 1994 até janeiro de 2003.

Dados retirados em: www.procon.sp.gov.br

a) Identifique as variáveis envolvidas no fenômeno a cima.
b) Identifique qual(is) a(s) ***escala(s)*** utilizada para a construção do gráfico.
c) O que diferencia este gráfico dos anteriores?
d) Construa uma tabela que expresse, aproximadamente, os dados do gráfico.
e) É possível identificar alguma ***regularidade(s)*** ou ***transformação (ões)*** na situação a cima? Quais?