Geraldo Gelowate

Observações Sobre Matemática e Comprometimento Ontológico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Orientador:
Décio Krause

Centro de Filosofia e Ciências Humanas
Departamento de Filosofia
Programa de Pós-Graduação em Filosofia
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis, SC

2004

Dissertação de Mestrado sob o título *“Observações sobre matemática e comprometimento ontológico”*, defendida por Geraldo Gelowate e aprovada em 14 de junho de 2004, em Florianópolis, Estado de Santa Catarina, pela banca examinadora constituída pelos professores doutores:

Prof. Dr. Décio Krause
Universidade Federal de Santa Catarina
Presidente - Orientador

Prof. Dr. Newton C. A. da Costa
Universidade Federal de Santa Catarina
Membro

Prof. Dr. Ítala Maria Loffredo D’Ottaviano
Universidade Estadual de Campinas
Membro

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a três professores que acompanharam
de perto minha trajetória nesta etapa de formação:
Décio Krause, Antonio M. N. Coelho e Newton C. A. da Costa.

Obrigado pelo exemplo de dedicação, incentivo,
sugestões e, principalmente, paciência.

Resumo

Neste trabalho, é estudada a questão de um possível comprometimento ontológico da matemática padrão (ou seja, aquela que pode ser erigida com base na teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel (ZF) com o axioma da fundação e eventualmente o da escolha) com uma noção de *indivíduo*. Usualmente, parte-se da chamada hierarquia cumulativa, que alguns matemáticos como Gödel consideram clara e intuitiva, e tenta-se formular uma axiomática que tente captá-la tão precisamente quanto se possa. Disso resulta, falando de forma abreviada, a axiomática de Zermelo-Fraenkel por exemplo, desde que certas restrições sejam obedecidas. O que desejamos sustentar é que, resultante de tal axiomatização, há o comprometimento com um conceito de indivíduo: todo conjunto é idêntico a si próprio e a nada mais, e se dois conjuntos são distintos, há um conjunto (extensionalmente, uma propriedade) ao qual um deles pertence e o outro não (por exemplo, o conjunto unitário correspondente). Em suma, na matemática padrão vale alguma forma de um princípio conhecido desde Leibniz como princípio da identidade dos indiscerníveis que, em resumo, asserta que não pode haver entidades – conjuntos – que difiram apenas numericamente. O tratamento que se dá, dentro do escopo da matemática padrão, a entidades indiscerníveis exige que se postule condições adicionais que permitam tratar conjuntos (ou os *Ur-elementos*, se a teoria os admitir) como indiscerníveis, por exemplo via a consideração de condições de invariância por automorfismos de uma certa estrutura. Em outras palavras, entidades indistinguíveis somente podem ser consideradas no contexto de determinadas estruturas erigidas em ZF. Deste modo, indiscernibilidade é sempre indiscernibilidade relativa a uma certa estrutura. Porém, no contexto de 'toda' a teoria ZF, ou seja, olhando tais entidades 'de fora' da estrutura, elas nada mais são que conjuntos usuais, logo indivíduos na acepção que descrevemos acima. Este tipo de análise tem implicações filosóficas importantes, algumas das quais apontadas neste trabalho. Por exemplo, há autores que consideram que uma adequada linguagem para a física quântica (quando houver uma) deverá considerar que as entidades quânticas – 'partículas' elementares – podem ser absolutamente indiscerníveis *right from the start*. Ou seja, devem ser tomadas como tais desde o princípio, e não 'feitas indiscerníveis' por meio da introdução de condições de simetria, por exemplo. Um tratamento 'conjuntista' de coleções de tais entidades se afigura uma questão relevante e, aparentemente, como tem sido defendido por alguns autores, tais coleções não obedeceriam axiomas como os de ZF devido à indiscernibilidade de seus elementos. Assim, um estudo da espécie de 'comprometimento ontológico' da matemática padrão, se é que há um (o que contrariaria posições como a de Mario Bunge, por exemplo) torna-se relevante, e é precisamente esta questão que é discutida de forma preliminar neste estudo. Salientamos que, no decorrer de nosso trabalho, percebemos a grande complexidade do assunto que nos propusemos estudar, e certamente não esperamos que nosso trabalho possa dar qualquer resposta definitiva ao tema. Porém, o seu desenvolvimento nos deu oportunidade de conhecer muito dos alicerces da matemática padrão e de sua filosofia. Assim, esta dissertação deve ser tomada como um primeiro passo na direção de um estudo mais avançado acerca dos fundamentos da matemática e de seus pressupostos.

Abstract

This research investigates the possible ontological commitment of the standard mathematics (*i.e.*, the one that can be constructed in Zermelo-Fraenkel (ZF) set theory with the axiom of the foundation and, occasionally, with the axiom of choice) with the notion of *individual*. Usually, from the intuitive point of view, we consider the so called cumulative hierarchy, which some mathematicians, like Gödel, consider clear and intuitive, and try to present axioms which try to catch it as precisely as possible. From this it results for instance the Zermelo-Fraenkel axiomatics, once some restrictions are obeyed. What we want to support here is that, as the result of this axiomatization, there is a commitment with the concept of individual in the following sense: every set is identical to itself and with nothing more, and if two sets are distinct, there is a set (extensionally, a property) to which just one of them belongs (for example, the corresponding unitary set). In the standard mathematics, there is a principle known ever since Leibniz as the Principle of the Identity of Indiscernibles, which intuitively says there are no individuals which differ only numerically. This principle is in certain sense subsumed in standard mathematics. In ZF, every set can be distinguished from any other set due to the existence of its singleton. So, if we aim at to consider the possibility of the existence of *indiscernible* objects in standard mathematics (built in ZF), it seems that additional postulates must be considered, even if there are Ur-elements involved. Usually, we know that the Ur-elements are invariant by automorphisms, so they are indiscernible in a sense. But this can be considered only by taking automorphisms of a given structure, which causes the indiscernibility be always relative to a given structure. So, collections of indiscernible individuals, as they appear in quantum physics, can be considered only in the context of some structures within ZF, and even so we need to admit some kind of symmetry condition. Thus, indiscernibility can be dealt with only as related to a certain structure. These considerations have important philosophical implications, which are dealt with in this paper. For instance, there are authors who consider that a proper language for particle physics should consider that the related entities – elementary 'particles' – may be absolutely indistinguishable *right from the start*. So, the artifice of making them indistinguishable *via* symmetry conditions or invariance by automorphisms look rather *ad hoc*. A 'set treatment' of collections of this kind of entities is of course a relevant matter and, apparently, collections of entities like elementary particles would not obey axioms like those of ZF due to the their indiscernibility. So, a study of the 'ontological commitment' of the standard mathematics with the notion of individual becomes relevant, and this is exactly what we discuss in this paper. We highlight that, during our work, we notice the big complexity of the subject we decided to approach, and we do not expect that our research provides a final answer for the theme. However, the developing of this study gave us the opportunity of knowing much on the basis of the standard mathematics and of its philosophy. So, this paper shall be taken as a first step towards a deeper study about the foundations of the mathematics and its presuppositions.

Sumário

Introdução

A questão do comprometimento ontológico da matemática é tema vasto e difícil. Alguns dos maiores matemáticos e filósofos da época recente, como Gödel, Bernays, Kreisel e Quine, para citar só alguns, ainda que muitas vezes apenas indiretamente, teceram considerações a este respeito, apontando (em geral subentendendo) posturas variadas e controversas.[1] Um fato é patente: não há unanimidade, acerca de se a matemática se compromete ontologicamente e, em caso de se aceitar que sim, há a polêmica acerca de que tipo de compromisso seria esse e com que tipos de entidades. A discrepância começa já na tentativa de se caracterizar o que deve ser entendido por 'matemática (clássica)'. Para alguns, é a matemática erigida na teoria Zermelo-Fraenkel, mas restrita ao universo bem-fundado (Kreisel), enquanto que, para outros, ela seria mais abrangente, já que há vários outros sistemas fundacionais; para outros ainda, a matemática pode ser vista como um construto puramente formal, sem qualquer contraparte semântica (Bourbaki) e, deste modo, simplesmente não haveria qualquer comprometimento ontológico no sentido que usualmente se dá a este termo.[2] Como dissemos, o tema é vasto e difícil. Com esta dissertação, pretendemos iniciar uma pequena aventura nesta área, e este trabalho deve ser entendido como a nossa iniciação a temas relacionados a este assunto. No entanto, pela forma como procedemos, achamos por bem começar justificando a nossa abordagem, principalmente devido ao fato de não termos nos dedicado a explorar as diversas posições históricas de alguns pensadores célebres.

O que motivou a presente investigação foi inicialmente o fascínio pelo assunto, do qual não quisemos nos afastar desde que com ele nos deparamos. A possibilidade de

[1] Um bom exemplo são os artigos da Parte II de Benacerraf e Putnam (1983), que lidam em grande medida com a questão da 'existência' em matemática.

[2] Ou seja, no sentido de comprometimento da linguagem por ela utilizada com algo extra-linguístico.

trabalhar em um tema fascinante e atual, que pudesse oferecer reais chances de incursões mais profundas no futuro, foi igualmente fundamental. Estávamos certos desde o início de que não seria possível dar um tratamento, ou levar em consideração, todos os aspectos e autores envolvidos, e que nem mesmo poderíamos considerar de forma abrangente a posição dos principais expoentes sobre o assunto. Assim, não realizamos nosso trabalho iniciando com extensiva revisão de literatura, o que nos faria considerar uma vasta bibliografia. Os autores mencionados acima, dentre outros, fizeram parte de nosso estudo mas não constituem parte desta dissertação. Também deixamos de lado textos relevantes como os de Tilles (1991), Maddy (1992, 2000), Benacerraf e Putnam (1983), Carnap (1937), Shapiro (1997), por exemplo. Um tal estudo, ainda que desejável e imprescindível para um apanhado mais completo do assunto, demandaria um tempo muito maior do que aquele de que dispúnhamos para a conclusão do curso e, devido à sua complexidade, exigiria um preparo matemático que ainda estamos buscando alcançar, bem como maturidade filosófica para adentrar a uma discussão como essa e poder emitir opiniões seguras. Assim, podemos dizer que vários desses autores, como Gödel, Kreisel, Quine e outros nos guiaram de longe, ainda que a eles, ou a suas posições a respeito do assunto, não nos tenhamos referido diretamente.

No entanto, mesmo cientes dessas restrições, achamos que não deveríamos escolher um outro tema, na segura convicção de que, mediante adequada delimitação do estudo, poderíamos dar uma contribuição interessante ao debate e postergar para um segundo momento a consideração de pelos menos algumas das posições dos autores mencionados. Em síntese, partimos de um problema específico, porém suficientemente interessante para fundamentar uma primeira abordagem que nos fizesse salientar a necessidade de se considerar seriamente os fundamentos lógicos da matemática para discutir assuntos relacionados à possibilidade da matemática estar, de alguma forma, comprometida com o conceito de *indivíduo*.

Deste modo, em vez de uma revisão bibliográfica, nosso estudo inicia colocando uma situação bem determinada e visa explorar uma idéia. Iniciamos com uma frase do filósofo Mario Bunge, na qual ele sugere a neutralidade ontológica da lógica e da matemática (clássicas). Não há nada de especial nesta escolha, inclusive em virtude de Bunge, não obstante a sua reconhecida importância, não ser um dos expoentes do debate. A sua frase é apenas sugestiva e, no nosso entender, capta a questão do modo como pretendemos discuti-la. Assim, mostramos, primeiramente, o que se pode entender por 'matemática clássica' (essencialmente, assumimos que se trata daquela que é erigida, como usualmente se faz, em uma teoria de conjuntos na forma como a apresentamos – Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha (ZFC)[3]), para então argumentar que a matemática, desse modo construída, ainda que possa ser extremamente flexível em termos de comprometimentos ontológicos, está inerentemente ligada à idéia de tratar os conjuntos como *indivíduos*, num sentido que caracterizaremos.

Disso resulta, como evidenciaremos, que a alegada neutralidade da matemática pode ser considerada somente se supusermos que estamos falando de *indivíduos* de algum tipo; qualquer discurso acerca de outros tipos de entidades terá que ser feito ou via artifícios *ad hoc*, como restringir o escopo da discussão ao âmbito de uma determinada 'estrutura', ou postulando certas condições, como faz a física quântica com seus postulados de simetria, ou ainda pelo uso de alguma teoria alternativa, o que traz uma outra disputa filosófica, também aqui não analisada. Uma situação envolvendo esses 'outros tipos de entidades' é fornecida, ainda que sem os detalhes, com o exemplo dos *quanta*, entidades básicas assumidas pelas teorias quânticas.

Usualmente, quando se considera, por exemplo, a possibilidade da existência de objetos indiscerníveis, isto é feito relativamente a uma dada estrutura: são indiscerníveis quando concordam em todas as propriedades que são invariantes pelo grupo de automorfismos da estrutura. No entanto, isso não aborda a seguinte questão: poderíamos admitir que há entidades absolutamente indiscerníveis, independentemente de qualquer teoria à disposição? Neste caso, se afastarmos os conceitos de substância, tais entidades

[3] A opção é meramente metodológica. A possibilidade de optar por alguma outra, dentre as mais usuais – como a de Kelley-Morse (KM) e a de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG), por exemplo – não modificaria em nada significativo os resultados obtidos.

concordariam em *todas* as propriedades, e não apenas nas invariantes por automorfismos. As dificuldades filosóficas de se considerar esta possibilidade no contexto da lógica e da matemática clássicas são bem conhecidas, e exploraremos algo a este respeito no que se segue.

Assim, nosso estudo não visa, propositadamente, discutir o platonismo gödeliano,[4] nem a ontologia implícita em teses como o argumento da indispensabilidade da matemática, de Quine-Putnam[5] (se a matemática é indispensável para a ciência, nossa posição pluralista nos levaria a indagar: de que matemática estamos falando?), nem outros temas que poderiam vir à mente do leitor, como a abordagem estrutural de Shapiro (1997), por exemplo. Nosso objetivo, como dissemos, é iniciar um estudo que talvez possamos extender ao doutorado, e começamos exercitando nossa capacidade de lidar com conceitos de uma área que faz uso tanto de filosofia quanto de disciplinas como a lógica e a matemática.

Observações:

1. No que se segue, cometeremos alguns abusos de linguagem com o propósito de deixar o texto mais agradável. Assim, não faremos distinção entre palavras como "entidade", "objeto", "ente", ainda que estejamos conscientes de que, filosoficamente, estes termos não se equivalem. Ademais, este tipo de distinção não é relevante para nossos propósitos.

2. A expressão "comprometimento ontológico" será aqui utilizada no sentido de um comprometimento com uma intuição acerca de indivíduos. Ter isso presente pode auxiliar na compreensão de nosso argumento ainda que, acreditamos, deixamos claro tal utilização no decorrer do texto.

[4]Gödel, para citar um exemplo, discutindo o problema do contínuo de Cantor, disse que "Os conceitos da teoria de conjuntos e os teoremas descrevem uma realidade bem determinada, na qual a conjectura de Cantor tem que ser verdadeira ou falsa. Por isso se supõe que a sua indecidibilidade a partir dos axiomas da teoria de conjuntos [ele se refere ao fato de tal conjectura, dita o Problema do Contínuo, não poder ser provada e nem refutada pelos axiomas das teorias usuais de conjuntos, desde que admitidas consistentes] só pode significar que esses axiomas não contêm uma descrição completa da realidade."(GÖDEL, 1979, p. 229). A "realidade bem determinada" a qual Gödel se refere será descrita à frente (hierarquia cumulativa). Além do mais, a passagem citada permite inferir a posição platonista de Gödel, ainda que não seja clara a sua forma particular de platonismo.

[5]Ver Colyvan (2003).

1 Lógica, matemática e teoria de conjuntos

É bem sabido que o advento da física quântica acarretou situações inusitadas, e por vezes controversas, a diversas áreas do conhecimento. Uma dessas situações diz respeito ao fato de os objetos quânticos obedecerem estatísticas distintas daquelas dos objetos "clássicos", ou seja, dos objetos descritos pela mecânica clássica. Se na mecânica estatística clássica (Maxwell-Boltzmann) uma permutação de dois objetos indistinguíveis era contada como dando origem a um novo arranjo, isso não mais ocorre na mecânica estatística quântica (Bose-Einstein, por exemplo). Normalmente, a justificativa para este fato vem da *indistinguibilidade* associada aos objetos quânticos.

Comumente concordamos que os objetos com os quais nos deparamos no cotidiano podem ser considerados como indivíduos de algum tipo. Usualmente, entendemos essa individualidade como caracterizada pela distinguibilidade a partir de propriedades: dois objetos individuais – óculos, por exemplo – podem ser distinguidos por meio de suas propriedades – arranhões na lente, formato da armação, largura da ponte, comprimento das hastes, etc. Desse modo, parece não ser possível haver dois objetos indistinguíveis, ou seja, objetos tendo exatamente as mesmas características ou propriedades: as mesmas marcas, arranhões, etc. Se isso ocorresse, parece indicar o senso comum, então seriam *idênticos*, seriam o mesmo objeto. Levando em conta uma intuição deste tipo, a mecânica estatística clássica conta como um novo arranjo o resultado da permutação de dois objetos que concordam em suas propriedades relevantes.[1] Isso faz com que tais objetos possam ser

[1]Entidades descritas pela mecânica clássica podem concordar em todas as suas propriedades 'essenciais', como massa ou carga elétrica, mas sempre diferem ao menos pela localização espaço-temporal, pois

considerados como dotados de individualidade, uma vez que se se trocam dois *indivíduos* de posição, a configuração resultante não é mais a mesma que se tinha antes. O problema da 'individuação' de tais entidades é uma disputa antiga na filosofia, a qual, no entanto, não discutiremos pormenorizadamente aqui.[2]

Alguns, como Jean-Marc Levy-Leblond por exemplo, propõem que as entidades quânticas sejam consideradas como um novo tipo de objeto, para o qual usam o termo "quantons", tomado, segundo ele de Mario Bunge.[3] Continuaremos, porém, com a discussão no sentido usual.

Retornemos à peculiaridade estatística dos objetos quânticos. Uma tentativa de explicá-la defende o ponto de vista de que as entidades quânticas são, em algum sentido, *não-indivíduos*. A questão que imediatamente se coloca é, então, a de como entender a *não-individualidade* sugerida. Para alguns autores, que optam por essa perspectiva, um *não-indivíduo* pode ser explicado em termos de perda de identidade ou, em outras palavras, seria um tipo de entidade para a qual o conceito de identidade não se aplicaria. Esse é o caso, por exemplo, de Schrödinger (1952) e Weyl (1949).[4]

Alternativamente, tenta-se explicar a peculiaridade mencionada defendendo-se o ponto de vista de que as partículas quânticas são consideradas como indivíduos, apresentando, no entanto, comportamento e propriedades muito diferentes dos apresentados pelas partículas clássicas.[5] A polêmica desenvolvida pela consideração dessas duas posturas resulta numa situação bastante curiosa onde, segundo defendem alguns, nossa metafísica fundamental é indeterminada pela física. Apresentaremos essa polêmica de um modo mais adequado à frente (ver cap. 5, p. 111ss).

Outra situação inusitada acarretada pelo advento da física quântica diz respeito à matemática. Ocorre que, dentre as entidades tratadas por tal física, alguns tipos sugerem

---

nela vale o chamado 'princípio da interpenetrabilidade'.

[2]Ver French (1989c), French e Krause (2004b) e Magee (1973).

[3]Ver Lévy-Leblond (1998), por exemplo, para detalhes.

[4]Esta posição é explorada por French e Krause (2004b).

[5]Ver, por exemplo, French e Redhead (1988) e Sant'Anna (2000).

a possibilidade de se questionar certos conceitos fundamentais da matemática por meio dos quais as propriedades relevantes desses objetos físicos são descritas, como, por exemplo, os conceitos de *identidade*, de *número ordinal* e mesmo de *número cardinal*. Em particular, esse é o caso quando se tenta descrever bósons que, intuitivamente falando, não poderiam ser ordenados, parecendo ser tais que suas coleções podem admitir um número cardinal mas não um número ordinal.[6] São justamente essas 'dificuldades', trazidas pela física à matemática, que nos motivam a analisar esta última com mais cuidado para, deste modo, investigar algumas posturas filosóficas que têm sido assumidas na literatura recente.

Ainda que, alternativamente, se possa considerar abordagens categoriais ou fundamentadas numa lógica de ordem superior (dentre os tratamentos mais comuns), a matemática usual tem geralmente suas estruturas fundamentais elaboradas numa teoria de conjuntos, como a de Zermelo-Fraenkel, por exemplo. Assumir um tal fato acarreta, como parece claro, aceitar todas as suposições implícitas em tais teorias de conjuntos. A noção de identidade e o princípio da extensionalidade, por exemplo, são comuns mesmo que implicitamente às teorias de conjuntos, tanto na formulação inicial, devida à Cantor, quanto nas formulações axiomáticas realizadas posteriormente (como a de Zermelo-Fraenkel, por exemplo), que conferem, a todas as entidades tratadas por teorias fundamentadas em tal base matemática, obediência a uma 'teoria da identidade' que tem conseqüências filosóficas interessantes, desde que caracterizada adequadamente.

Desse modo, a matemática erigida em uma tal base conjuntista parece não deixar de apresentar certos tipos de "compromissos" para com a teoria conjuntista na qual se funda e, ao que tudo indica, acaba por comprometer-se com uma noção de *indivíduo* – como procuraremos mostrar. Ao ser assim considerada, a matemática parece não prover um formalismo adequado para tratar determinados aspectos filosóficos das entidades quânticas, com suas características peculiares descritas pela física, dependendo da postura metafísica adotada. Em particular, daquela postura que considera tais entidades

[6] Ver Dalla Chiara (1985, 307ss) e Toraldo Di Francia (1978), por exemplo. No entanto, se considerarmos aspectos relativísticos, mesmo o cardinal de uma tal coleção aparentemente não poderia ser bem definido.

como sendo *não-indivíduos*, pois seria possível suscitar dúvidas quanto à capacidade da matemática usual de expressar esse conceito da forma como o colocaremos exceto se se proceder como usualmente, mediante a introdução de determinados postulados algo *ad hoc*, como certas condições de simetria. Interessante citar que esta aparente inadequação e a própria necessidade da introdução desses postulados parecem decorrer, em parte, do modo como é tratado o conceito de identidade na teoria de conjuntos.

Uma ressalva, no entanto, precisa ser feita. Precisamos qualificar melhor a afirmação acima de que a matemática parece não prover um formalismo adequado para tratar das entidades quânticas. Ora, como é então que os físicos estão utilizando tal formalismo nesse domínio da ciência e obtendo êxito nessa aplicação? Dito de outro modo, se tal uso não é adequado, como é que 'funciona'?

Nossa afirmação dessa aparente inadequação deve ser entendida a partir da perspectiva que se preocupa com os fundamentos, com os pressupostos sobre os quais se ergue um determinado formalismo – perspectiva filosófica, portanto. Explicar o 'sucesso' de um formalismo, por outro lado, é uma questão complexa. Aqui, uma analogia pode desempenhar uma função heurística: é sabido que os infinitésimos foram banidos do cálculo diferencial e integral, mas no entanto são ainda conceitos úteis ao engenheiro, que os utiliza em seus cálculos e, apesar dessa 'inconsistência', prédios, casas e pontes não caem. Em outras palavras, tudo se passa '*como se*' de fato tais infinitesimais existissem. Com o físico ocorre algo semelhante: tudo se passa *como se* o formalismo matemático fosse rigorosamente adequado para tratar dos fenômenos do domínio quântico, pelo menos em princípio. Por outro lado, esse mesmo formalismo, quando sob análise que privilegia seus fundamentos, pode se mostrar inadequado para tratar de certos aspectos filosóficos relacionados com os resultados inferidos no laboratório. É portanto desse modo que deve ser entendida nossa afirmação de que, ao se comprometer com uma noção de *indivíduo*, a matemática clássica parece inapropriada para tratar adequadamente de vários aspectos filosóficos relacionados às entidades descritas pela física quântica, com especial destaque para a visão dos quanta como *não-indivíduos*, que é um ponto de vista defensável.[7]

A possibilidade de se lidar com entidades que possam ser destituídas de individualidade (no sentido de nem sempre poderem, pelo menos em princípio, ser distinguidas das demais) nem sempre é considerada. Os filósofos em geral passam ao largo de tais questões, assumindo no entanto que 'qualquer' ontologia pode ser descrita pela matemática usual (no sentido que esclareceremos à frente). Este é o caso, por exemplo, de M. Bunge:

> A lógica dedutiva e a matemática pura, as teorias matemáticas abstratas em particular, são ontologicamente neutras. Precisamente por esta razão elas podem ser usadas na construção de teorias ontológicas. Não existe uma limitação a priori na variedade de teorias matemáticas que podem ser empregadas na pesquisa metafísica. A escolha irá depender basicamente dos pressupostos e das preferências dos metafísicos.(1977, p. 15, tradução nossa).

Inicialmente, é preciso uma qualificação. Há infinitas "lógicas dedutivas" e não se sabe, em princípio, à qual Bunge está se referindo. Assim, assumiremos que se trata da lógica clássica, por ela entendendo o cálculo de predicados de 1^a ordem com ou sem igualdade, ou qualquer de suas extensões (teoria de tipos, teoria de conjuntos) ou seus subsistemas, como o cálculo proposicional clássico. Ainda que não seja precisa, esta caracterização guia a nossa terminologia. Do mesmo modo, por "matemática (clássica)" entenderemos aquela que se encontra nos manuais usuais dessa disciplina; por exemplo, trata-se da matemática constante nas obras de Bourbaki, ainda que dizendo isso não queiramos nos comprometer com a sua abordagem sintática, como esclareceremos abaixo.

Aceitando-se essas qualificações, que acreditamos não destoam dos pontos de vista de Bunge, podemos continuar a explorar um pouco suas idéias. Defendendo o que denomina *Ficcionismo Moderado*, Bunge afirma que as ciências formais – e entre elas a matemática (tomada no sentido acima) – não têm nenhum compromisso ontológico, não

[7] Ver French e Krause (2004b).

se comprometendo com entidades concretas: não seriam elas acerca de coisas concretas mas sobre "construtos" (como por exemplo, predicados, proposições e teorias). Os objetos matemáticos, segundo ele, seriam *ficta* e, na matemática, como nas artes, as verdades seriam internas (contextuais). Dentro de sua concepção, a neutralidade ontológica da matemática explicaria porque ela seria a linguagem universal da ciência, da tecnologia e até da filosofia.[8]

Não pretendemos fazer uma análise exegética detalhada a respeito desse aspecto da obra de Bunge. Observadas as qualificações feitas acima, vale dizer que ele é citado como motivação de nosso argumento de que, contrariamente ao que ele apregoa, a afirmação da neutralidade ontológica da matemática pode ser aceitável somente nos casos em que estivermos pressupondo um discurso acerca de *indivíduos* de algum tipo. Se formos falar em *não-indivíduos* na acepção que daremos a este termo, e que acreditamos estar em completo acordo com a posição de Schrödinger, dentre outros, relativamente às partículas elementares, sustentaremos que a teoria de conjuntos padrão (*leia-se*: Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha ou, simplesmente, ZFC) não é adequada para dar conta de aspectos filosóficos envolvidos com esta noção, ainda que possa servir muito bem aos propósitos da física, na medida em que, como dissemos, certos postulados sejam assumidos.

Partindo de tais pressupostos e, como já foi, de certo modo, sugerido, a questão que pretendemos investigar é a seguinte: teorias de conjuntos (como ZFC) acarretam (ou não) que os objetos dos quais tratam seriam *indivíduos* em alguma acepção? Alternativamente, quais as limitações da matemática clássica decorrentes de um possível compromisso ontológico com indivíduos de algum tipo? Sustentaremos que ZFC compromete-se com *indivíduos* na forma que exibiremos. A hierarquia cumulativa implica "objetos" (conjuntos) dotados de individualidade para os quais vale uma teoria da identidade, etc, como veremos.

Assim, nossa hipótese de trabalho apresentará argumentos em defesa do comprometimento ontológico em uma teoria de conjuntos tradicional, como ZFC, com uma noção

[8] Ver Bunge (1977, 1980, 1997) para detalhes.

de *indivíduo*.

Comecemos, portanto, esclarecendo em que acepção estamos tomando o termo 'matemática'.[9] Grosso modo e a título de antecipação, quando nos referirmos à matemática estaremos por tomá-la como a teoria que trata de determinadas estruturas, como grupos, anéis, corpos, espaços vetoriais, etc. Ainda que não nos comprometamos aqui com o tratamento dado por Bourbaki,[10] o qual evitaremos por motivos que serão expostos abaixo, não há erro em cometermos abusos de linguagem e nos valermos de sua terminologia, ainda que, enfatizemos isso, não estejamos advogando a sua abordagem sintática (pelo contrário, assumiremos que a matemática tem algum tipo de "comprometimento com uma intuição acerca de *indivíduos*" que aqui nos referiremos pela expressão "comprometimento ontológico". Tais entidades, se tomarmos ZFC "pura", serão chamadas de *conjuntos*; se considerarmos ZFU (ZF com átomos), serão ou conjuntos ou os *Ur-elementos*).

Como tais assuntos talvez possam ser desconhecidos do leitor, especialmente àquele de inclinação filosófica, a próxima seção deste capítulo mostra do que estamos falando, ainda que sem todos os seus detalhes mais técnicos. Em seguida, abordaremos aquilo que constitui a base mais comum da matemática clássica, a saber, a teoria de conjuntos ZFC. Para dar ao leitor uma idéia clara daquilo que pretendemos, iniciaremos descrevendo a chamada *Hierarquia Cumulativa*, que encerra o que, via de regra, intuitivamente entendemos por *conjuntos*. Veremos que a descrição dessa hierarquia motiva a formulação dos axiomas de ZFC, os quais resultam ser intuitivamente verdadeiros nessa "estrutura". Este ponto é relevante pois nos dará uma visão geral do que estaremos enten-

[9]É conveniente destacar que ao nos referirmos à matemática *clássica*, estamos pressupondo a interpretação usual – diferentemente, por exemplo, daquela que os intuicionistas fazem acerca do que seja a matemática. Sempre que mencionarmos a expressão 'matemática clássica' ou, simplesmente, 'matemática' é a tal interpretação que nos referimos. Qualquer uso diferente será devidamente qualificado. Este ponto também já foi esclarecido na Introdução.

[10]Nicolas Bourbaki é o pseudônimo adotado por um grupo de matemáticos que, a partir de meados da década de 1930, pretendeu expor e desenvolver os elementos fundamentais de uma parte da matemática. Dentre esses elementos, podemos citar, por exemplo, a concepção de método, de rigor, da própria matemática e de temas com ela relacionados. O resultado desse empreendimento é um tratado intitulado *Éléments de Mathématique*. Detalhes podem ser obtidos em Bourbaki (1950, 1964), Corry (1992, p. 315-348); Halmos (1957), Cartier (1998, p. 22-28), entre outros.

dendo por "indivíduos" (conjuntos). Adotaremos a formulação axiomática conhecida como Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha (ZFC) daqui para frente quando falarmos em "teoria de conjuntos", exceto menção explícita em contrário.[11]

Ao analisar a teoria de conjuntos, percorreremos alguns de seus pressupostos fundamentais. Grosso modo e a título de antecipação, sustentaremos que neles existe um comprometimento de fundo, a saber, o comprometimento com a noção de '*indivíduo*' na acepção de que todo conjunto é um *indivíduo* e, em especial, quaisquer dois conjuntos podem sempre ser distinguidos um do outro – pelo menos em princípio – e a qual, ao que parece, é parte integrante e indissociável de tais pressupostos fundamentais; e isso é, de certo modo, como evidenciaremos, relevante para certas análises filosóficas das teorias da física.[12]

1.1 Matemática e estruturas

Inicialmente, convém citar, a título de informação, por quais motivos a noção de estrutura matemática encontra-se presentemente associada ao nome de N. Bourbaki. Como o próprio Bourbaki afirma, uma noção de estrutura já se encontrava presente na matemática do final do século XIX e início do século XX.[13] A associação entre a noção de estrutura e seu nome deve-se à elaboração, por ele feita, de uma versão precisa[14] para aquela noção não rigorosa.[15] Além do mais, a proposta bourbakista de reconstrução (de

[11] Convém mencionar que o 'C' – *choice*, em inglês – de 'ZFC' indica que se está assumindo, além do axioma da fundação, também o Axioma da Escolha na teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel, ainda que este axioma em particular não desempenhe qualquer papel relevante na discussão que apresentaremos.

[12] Ver Dalla Chiara (1985), Dalla Chiara e Toraldo Di Francia (1979) e Krause (2002b), por exemplo.

[13] Cf. Bourbaki (1964, p. 317) como também Dieudonné (1985, p. 59).

[14] Necessário dizer que "precisa" ou "definida precisamente", em termos matemáticos, opõe-se a *informal* ou *intuitivo*.

[15] Corry (1992) defende que o termo 'estrutura' aparece nos textos de Bourbaki com dois significados diferentes: como conceito formal e como uma idéia geral, indefinida e não-formal do que seja uma estrutura matemática. Segundo ele, o conceito formal de estrutura desempenha um papel mínimo em Bourbaki (1964) – onde é caracterizado – e nenhum outro papel nas demais obras: "O conceito de *estruturas-mãe* e a imagem da matemática como uma hierarquia de *estruturas* não são resultados obtidos dentro de uma teoria matemática de qualquer tipo. Ao invés, elas pertencem estritamente à imagem de matemática de Bourbaki; elas aparecem apenas nos artigos populares, não técnicos [. . .] ou nos mitos que surgem em torno de Bourbaki."(CORRY, 1992, p. 340, tradução nossa). No entanto, enquanto idéia geral, indefinida

parte) da matemática evidencia, por um lado, a axiomatização e, por outro, a identificação de estruturas básicas. Este é o motivo principal pelo qual estamos considerando o feito de Bourbaki, ainda que com as qualificações já feitas. Enquanto a *axiomatização* teria por função caracterizar as estruturas de distintas partes do corpo matemático, a identificação de estruturas básicas traria uma simplicidade e funcionalidade desejáveis na medida em que permitiria reduzir as diferentes partes do corpo matemático a combinações e associações entre tais estruturas.[16] A esse respeito, é ilustrativo citar o próprio Bourbaki:

> Ao centro de nosso universo são encontrados os grandes tipos de estruturas [...] elas podem ser chamadas de estruturas-mãe. [...] Mais longe desse primeiro núcleo, aparecem as estruturas que podem ser chamadas estruturas múltiplas. Elas envolvem duas ou mais das grandes estruturas-mãe não numa simples justaposição (que não poderia produzir qualquer coisa nova) mas organicamente combinadas por um ou mais axiomas que estabelecem uma conexão entre elas.(1950, p. 228-229, tradução nossa).

Não pretendemos atribuir à expressão "*estrutura*" qualquer sentido que se reporte aos empregados pelas várias doutrinas ou escolas filosóficas, sociológicas, antropológicas, lingüísticas, entre outras. Por 'estrutura' entende-se, grosso modo e rapidamente, um certo objeto matemático abstrato construído em ZFC, que ocupa um lugar relevante também na abordagem denominada *estrutural* ou *semântica* de teorias.[17] Neste trabalho, como já dito antes, não nos comprometemos com o modo pelo qual Bourbaki considera a matemática. Suporemos que os conceitos introduzidos abaixo, ainda que lembrem o seu procedimento, não pretendem fazer da matemática um puro jogo sintático de escrever símbolos no papel de acordo com certas regras. Como dissemos, estamos supondo que uma teoria de conjuntos (ZFC) tem uma semântica intuitiva (em parte dada pela hierearquia cumulativa). Isso no entanto não invalida o paralelo. O que estaremos fazendo, portanto,

---

e não-formal, "[...] a concepção estrutural da matemática [...] mostrou-se extremamente frutífera para o próprio trabalho de Bourbaki, e ao mesmo tempo exerceu uma profunda influência sobre gerações de matemáticos ao redor do mundo."(CORRY, 1999, tradução nossa).

[16] Também denominadas 'estruturas fundamentais' ou 'estruturas-mãe'.

[17] Extrapola os objetivos deste estudo detalhar tal abordagem. Remete-se o leitor a Suppes (1960, 1979), Suppe (1977) e da Costa e French (2003), por exemplo, para detalhes.

pode ser resumido assim: seguimos um esquema que lembra o esquema bourbakista em uma teoria ontologicamente comprometida com conjuntos.

Embora a caracterização de estrutura deva sua versão formal mais conhecida a Bourbaki, apresentaremos uma noção de estrutura que se utiliza de elementos presentes em diferentes formulações, a saber: a do próprio Bourbaki (1964, p. E-IV); de da Costa (2003); de Krause (2002a) e, ainda, de Caiero (2001). Além de obtermos uma apresentação apropriada aos nossos propósitos, a opção metodológica de mesclar elementos das diferentes formulações busca auxiliar a compreensão do leitor. O roteiro que seguiremos procura, inicialmente, caracterizar a noção de estrutura e, depois, a de matemática como o estudo de estruturas de um certo tipo.

1.1.1 Estrutura

Uma *estrutura*, informalmente falando, consiste em uma seqüência finita de conjuntos – ditos 'conjuntos de base' – e de uma base enumerável de relações de aridades fixas sobre tais conjuntos de base. Uma *espécie de estruturas* será alcançada quando certas propriedades formais a que estão sujeitas as relações que compõem uma estrutura, juntamente com a forma destas próprias relações forem explicitadas. Ou, ainda, podemos dizer que uma estrutura é uma m-upla finita cujos elementos são conjuntos base e uma família de relações de aridades fixas que, sujeitas a propriedades, caracterizam a *espécie* daquela estrutura. Por ora, um exemplo de uma estrutura pode ser o seguinte: $\mathcal{E}= \langle D_1, \ldots, D_n, \{R_i\}_{i\in I}\rangle$, em que $D_1, \ldots, D_n$ são conjuntos base, em geral não-vazios, e $\{R_i\}$, com $i \in I$, é uma família de relações sobre os D_i, com $i = 1, \ldots, n$. Veremos exemplos à frente.

Embora seja simplista e não preciso, o esboço acima já nos permite antever o que se constitui como base da teoria das espécies de estruturas: uma teoria de conjuntos.[18] É

[18] Uma ressalva faz-se aqui necessária: as estruturas matemáticas podem introduzir-se não só por meio do emprego de uma teoria de conjuntos (ZFC, no nosso caso) como também por meio de lógicas de ordem superior (teoria de tipos) ou de teorias de categorias. Decidimo-nos pela primeira das alternativas, *i.e.*,

importante enfatizar este ponto: da forma como estamos propondo, tomar a matemática como estudo de certas estruturas é, simultânea e principalmente, tomar alguma teoria de conjuntos – uma vez que ele irá desempenhar um importante papel no argumento que pretendemos desenvolver adiante. Por ora, tratemos de detalhar a linguagem da qual nos serviremos para, em seguida, explicitar a noção de estrutura.

Tomamos como ponto de partida a linguagem do cálculo de predicados clássico de primeira ordem com igualdade à qual acrescentamos o símbolo de relação binária "$\in$" como símbolo não-lógico, que é a linguagem básica da teoria de conjuntos, denotada $\mathcal{L}_{\mathcal{ZFC}}$. Outros conceitos, – como '$\neq$', '$\leq$', por exemplo – podem ser introduzidos da forma usual via definições.

Dissemos anteriormente que uma estrutura é constituída, grosso modo, por uma seqüência de conjuntos básicos e de determinadas relações sobre tais conjuntos. Vejamos primeiramente como pode se dar a construção de um objeto que, inspirados em Bourbaki (1964, cap. 4), denominaremos de *escala*.[19]

Escala

Uma questão relevante em filosofia da matemática é precisar certos conceitos que se utiliza informalmente. No nosso caso, importa destacar o seguinte. Falaremos que certas *noções* ou *conceitos* (como o de *indivíduo*) estão, de certo modo, intrinsecamente presentes nas teorias de conjuntos com as quais trabalhamos. No entanto, vêm de pronto alguns questionamentos: o que são *noções*? O que são *conceitos*? O que é um *indivíduo*? Para dar conta de respondê-los a idéia de *escala* é essencial. Os *objetos* de uma escala serão precisamente aqueles com os quais trabalharemos.

por uma teoria de conjuntos, pois desejamos explorar alguns aspectos envolvendo o conceito de conjunto.

[19]Não é demais lembrar que não nos comprometemos com o modo pelo qual Bourbaki concebe a matemática. Para ele, há unicamente uma contraparte sintática, não há semântica: fazer matemática é escrever símbolos no papel de acordo com certas regras especificadas previamente. Um conjunto, por exemplo, é um *termo*, logo, uma certa expressão da linguagem da teoria de conjuntos. Para nós, por outro lado, há uma contraparte semântica, ainda que informal, com entidades que chamamos de 'conjuntos' (coleções de objetos).

Admitiremos que os conceitos usados abaixo, *v.g.*, de número natural, produto cartesiano, etc., tenham sido devidamente caracterizados na teoria de conjuntos que estamos considerando. Como dissemos acima, a terminologia a ser aqui empregada é *inspirada* em Bourbaki.

Definição 1.1.1 *Um* ***esquema de construção de escala*** $\mathcal{S}$ *é uma seqüência* $\langle c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m \rangle$ *de pares ordenados de números naturais,* $c_i = \langle a_i, b_i \rangle$*, que satisfaz as seguintes condições:*

(a) se $b_i = 0$*, então* $1 \leq a_i \leq (i-1)$*,*

(b) se $a_i \neq 0$ *e* $b_i \neq 0$*, então* $1 \leq a_i \leq (i-1)$ *e* $1 \leq b_i \leq (i-1)$*.*

É importante perceber, primeiramente, que qualquer que seja o número natural $i = 1, \ldots, m$, não pode ocorrer um termo $c_i = \langle 0, 0 \rangle$ e, além disso, que as condições impostas na definição permitem inferir que o primeiro termo de qualquer seqüência tem a forma $c_1 = \langle 0, b_1 \rangle$, com $b_1 > 0$.

Se n é o maior dos números naturais b_i que aparecem nos pares da forma $\langle 0, b_i \rangle$, então a seqüência $\langle c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m \rangle$ é dita ser um esquema de construção de escala sobre *n conjuntos*. Tomemos, por exemplo, o seguinte esquema de construção de escala:

$$\mathcal{S} = \langle\ \langle 0,1 \rangle,\ \langle 0,2 \rangle,\ \langle 1,0 \rangle,\ \langle 1,2 \rangle,\ \langle 4,2 \rangle,\ \langle 1,3 \rangle,\ \langle 4,0 \rangle\ \rangle$$

Conforme o que acabamos de afirmar, $\mathcal{S}$ é um esquema de construção de escala sobre dois conjuntos. Intuitivamente, tais conjuntos constituem a base a partir da qual a estrutura é edificada. A construção propriamente dita da escala será dada pela seguinte definição:

Definição 1.1.2 *Dado um esquema de construção de escala* $\mathcal{S} = \langle c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m \rangle$ *sobre* n *conjuntos* $D_1, \ldots, D_n$*, dois-a-dois distintos e não vazios, uma* ***construção de escala de esquema*** $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ ***sobre*** $\boldsymbol{D_1, \ldots, D_n}$ *é definida como sendo a seqüência* $\langle \mathcal{S}, A_1, A_2, \ldots, A_m \rangle$ *em que* $1 \leq i \leq m$ *e as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) se $c_i = \langle 0, b_j \rangle$ *então* $A_i = D_{b_j}$ *com* $b_j \leq n$*;*

(b) se $c_i = \langle a_j, 0 \rangle$ *então* $A_i = P(A_{a_j})$*,*

(c) se $c_i = \langle a_j, b_j \rangle$*, em que* $a_j \neq 0$ *e* $b_j \neq 0$*, então* $A_i = A_{a_j} \times A_{b_j}$*.*

Fica indicado, desta forma, um procedimento para a construção de conjuntos a partir de outros conjuntos assumidos como base e mediante as operações de produto cartesiano e conjunto das partes; procedimento que edifica a escala (ou o termo escala).

Nesse ponto, é conveniente fazermos algumas observações:

(i) O último termo de uma seqüência de uma construção de escala de esquema $\mathcal{S}$ é denominado *termo escala* (*conjunto escala* ou ainda, simplesmente, *escala*), podendo ser denotado por $\mathcal{S}\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$. Em muitos casos costuma-se omitir o particular esquema de construção de escala, omissão que se justifica pelo interesse restrito ao termo escala e seu tipo (como veremos no que segue);

(ii) Não necessariamente todos os conjuntos de base figuram em todos os termos da escala;

(iii) Cada esquema $\mathcal{S}$ corresponde a uma, e apenas uma, construção de escala;

(iv) Um mesmo termo escala pode ser produzido por diferentes esquemas de construção sobre uma mesma seqüência de conjuntos base,

(v) Pode ser feita uma distinção entre conjuntos de base *principais* e *auxiliares*. Mesmo que tal distinção não se assente em nenhuma natureza última de tais conjuntos nem possua caráter absoluto, pode ser interessante utilizá-la numa dada estrutura na medida em que permite tomar como conjuntos auxiliares aqueles que já tiveram algumas de suas propriedades estudadas. Tal procedimento visa principalmente uma maior economia e simplicidade de tratamento.[20]

[20] A estrutura de espaço vetorial pode ser caracterizada por uma quádrupla $\langle \mathcal{V}, \mathcal{F}, +, \cdot \rangle$, onde $\mathcal{V}$ e $\mathcal{F}$ são os conjuntos base (o conjunto de vetores e o de escalares, respectivamente) e $+$ e $\cdot$ são a adição de vetores

Alguns exemplos certamente auxiliam na compreensão das duas definições anteriores. Tomemos dois conjuntos de base D_1 e D_2, dois-a-dois distintos e não vazios, e o seguinte esquema de construção de escala:

$$\mathcal{S}= \langle\ \langle 0,1\rangle,\ \langle 0,2\rangle,\ \langle 1,0\rangle,\ \langle 1,2\rangle,\ \langle 4,2\rangle,\ \langle 1,3\rangle,\ \langle 4,0\rangle\ \rangle$$

A construção de escala de esquema $\mathcal{S}$ sobre os conjuntos de base D_1, D_2 será, então, a seguinte seqüência[21]

$$\langle\ D_1,\ D_2,\ P(D_1),\ D_1 \times D_2,\ (D_1 \times D_2) \times D_2,\ D_1 \times P(D_1),\ P(D_1 \times D_2)\ \rangle$$

Note o leitor que, a partir de cada par ordenado $\langle a_i, b_i\rangle$ do esquema $\mathcal{S}$, temos três situações possíveis:

1. Ou $a_i = 0$ e devemos introduzir o conjunto de base D_{b_i} na construção de escala (note, por exemplo, que o par ordenado $\langle 0, 1\rangle$ introduziu o conjunto D_1 como sendo o elemento A_1 da seqüência $\langle A_1, A_2, \ldots, A_m\rangle$ que constitui a construção de escala);

2. Ou $b_i = 0$ e devemos introduzir o conjunto das partes do conjunto A_{a_i} (observe que o par ordenado $\langle 1, 0\rangle$ introduziu o conjunto $P(A_1)$; como A_1 corresponde a D_1, podemos dizer que o par ordenado $\langle 1, 0\rangle$ introduziu o conjunto $P(D_1)$),

3. Ou, finalmente, $a_i \neq 0$ e $b_i \neq 0$ e devemos introduzir o produto cartesiano entre os conjuntos A_{a_i} e A_{b_i} na construção da escala (veja o caso de $\langle 1, 2\rangle$ que introduziu o produto cartesiano entre A_1 e A_2 da seqüência, ou seja, $D_1 \times D_2$).

Como vimos, o esquema $\mathcal{S}$ do exemplo permitiu obter o termo escala $P(D_1 \times D_2)$ – ou, alternativamente, $\mathcal{S}(P(D_1 \times D_2))$. Poderíamos obter, no entanto, o mesmo termo

---

e a multiplicação de vetor por escalar. Neste sentido, $\mathcal{V}$, o conjunto dos vetores, é o conjunto principal, enquanto que $\mathcal{F}$, o dos escalares (de um determinado corpo), é o conjunto auxiliar. Para detalhes sobre a economia e simplicidade obtidas com este tipo de tratamento, ver Bourbaki (1964, cap. 4) ou ainda Caiero (2001, p. 90).

[21] Sem risco de ambiguidade, omitimos o esquema $\mathcal{S}$ de construção de escala na seqüência - conforme observação (i) acima.

escala a partir de um outro esquema $\mathcal{S}'$ de construção de escala sobre os mesmos conjuntos de base D_1 e D_2. Tomemos, por exemplo, $\mathcal{S}'= \langle\ \langle 0,1\rangle,\ \langle 0,2\rangle,\ \langle 1,2\rangle,\ \langle 3,0\rangle\ \rangle$. A construção de escala que obtemos é a seguinte: $\langle\ D_1,\ D_2,\ D_1 \times D_2,\ P(D_1 \times D_2)\rangle$. Ou seja: obtemos o mesmo termo escala, $P(D_1 \times D_2)$, embora $\mathcal{S}' \neq \mathcal{S}$.[22]

Mesmo que não pretendamos utilizar o termo escala obtido no exemplo, uma questão que poderia surgir é a do por que construir aquele termo escala particular – ou qualquer outro. A questão é relevante e pode ser assim respondida: o termo escala construído depende do tipo da relação que desejamos definir. Assim, o termo escala obtido no exemplo, $P(D_1 \times D_2)$ permite definir uma relação binária entre os conjuntos D_1 e D_2 uma vez que uma relação binária entre D_1 e D_2 é um elemento (não-vazio) $R \in P(D_1 \times D_2)$ (ver a definição 1.1.5 abaixo). Assim, se estivéssemos interessados em definir uma operação binária sobre um conjunto D que, informalmente, é uma função de $D \times D$ em D, poderíamos ter o seguinte esquema de construção $\mathcal{S}''= \langle\ \langle 0,1\rangle,\ \langle 1,1\rangle,\ \langle 2,1\rangle,\ \langle 3,0\rangle\ \rangle$, que corresponde à construção de escala $D,\ D \times D,\ D \times D \times D,\ \ P(D \times D \times D)\ \rangle$. O termo escala obtido é $P(D \times D \times D)$ e a operação que desejavamos definir consiste, por ora, de um elemento de tal termo, *i.e.*, um elemento de $P(D \times D \times D)$. Condições adicionais (axiomas) permitem qualificar a particular operação na qual podemos estar interessados (por exemplo, uma operação associativa).

Nesse ponto, gostaríamos de introduzir a seguinte definição de *tipo* de um elemento de uma escala.[23]

Definição 1.1.3 *Chama-se **tipo de um conjunto** de uma construção de escala de conjuntos $\langle \mathcal{S}, A_1, A_2, \ldots, A_m\rangle$ sobre uma base $D_1, D_2, \ldots, D_n$ o objeto assim definido:*

(a) os tipos dos elementos dos conjuntos base $D_1, D_2, \ldots, D_n$ são, respectivamente, $d_1, d_2, \ldots, d_n$, sendo $d_i \neq d_j$ para $i \neq j$;

[22]Note que é irrelevante se o esquema de construção de escala $\mathcal{S}'$ é diferente de $\mathcal{S}$. Aliás, em nosso exemplo, $\mathcal{S}'$ é até mais econômico. O que queremos enfatizar é a observação (iv) feita anteriormente: um mesmo termo escala pode ser produzido por diferentes esquemas de construção sobre uma mesma seqüência de conjuntos base.

[23]A definição baseia-se em Krause (2002a, p. 16s).

(b) *o tipo de um elemento do conjunto* $\mathcal{P}(A_i)$ *é* $\langle a_i \rangle$*, onde* A_i *é um elemento da escala de tipo* a_i*,*

(c) *se um conjunto* A_i *da escala tem tipo* a_i*, com* $i = 1, \ldots, k$*, então os elementos do conjunto* $A_1 \times \ldots \times A_k$ *têm tipo* $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$*.*

Podemos ilustrar a associação entre tipos e conjuntos de uma escala servindo-nos dos exemplos anteriormente dados. Num deles tínhamos a escala

$$\langle\ D_1,\ D_2,\ P(D_1),\ \ D_1 \times D_2,\ \ D_1 \times D_2 \times D_2,\ \ D_1 \times P(D_1),\ P(D_1 \times D_2)\ \rangle$$

à qual, pela definição, associaremos a seguinte seqüência de tipos para os elementos dos conjuntos de tal escala:

$$\langle\ d_1,\ d_2,\ \langle d_1 \rangle,\ \langle d_1, d_2 \rangle,\ \langle d_1, d_2, d_2 \rangle,\ \langle d_1, \langle d_1 \rangle \rangle,\ \langle \langle d_1, d_2 \rangle \rangle\ \rangle$$

No outro exemplo, estávamos interessados em definir uma operação binária sobre um conjunto D (o leitor pode retornar a esta explicação depois da definição 1.1.5 e observações subseqüentes). Nele, tínhamos a seguinte escala:

$$\langle\ D,\ D \times D,\ D \times D \times D,\ P(D \times D \times D)\ \rangle$$

à qual associaremos os tipos

$$\langle\ d,\ \langle d, d \rangle,\ \langle d, d, d \rangle,\ \langle \langle d, d, d \rangle \rangle\ \rangle, \text{ respectivamente.}$$

Note o leitor que estamos omitindo, nas escalas – conforme observado em (i) acima – seus particulares esquemas de construção. Essa é uma prática comum e a ela recorreremos no que se segue pois, como já dissemos anteriormente, o termo escala que obtemos ao construir uma escala independe do particular esquema $\mathcal{S}$ de sua construção – tanto é assim que ele pode ser obtido por diferentes esquemas, como já mencionamos. Em outras palavras: o esquema $\mathcal{S}$ é relevante para que consigamos construir a escala e obter o termo escala que desejamos. Uma vez feito isso, interessa-nos apenas o termo escala e o seu tipo pois, analisando os mesmos, conseguimos identificar *quantos* e *de que modo* os conjuntos de base participam na sua construção: a omissão do esquema na escala pode ser considerada como "inofensiva".[24]

Passaremos agora, por simplicidade, a considerar uma construção de escala que tem como conjunto base unicamente um conjunto D. Obviamente é possível ampliar o que será apresentado abaixo para uma construção de escala com qualquer número finito de conjuntos de base. Ademais, seguiremos da Costa (2003).[25]

Seja $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(D)$ a construção de escala de esquema $\mathcal{S}$ sobre D e, inexistindo risco de confusão quanto ao esquema de construção, simplesmente $\mathcal{E}(D)$. Podemos afirmar então que, para qualquer conjunto de $\mathcal{E}(D)$, existe um único tipo que a ele é associado. Além disso, convencionamos dizer que, se $A \in \mathcal{E}(D)$ e *A está associado a um tipo a*, então os elementos de A têm tipo a. Em outras palavras, muitas vezes nos referiremos, por abuso de linguagem, indiretamente ao tipo dos elementos de um conjunto como sendo idêntico ao tipo de tal conjunto.

Outras noções úteis são as seguintes:

Definição 1.1.4 $E(D) = \bigcup \mathcal{E}(D)$

onde $\bigcup \mathcal{E}(D)$ denota o conjunto união de $\mathcal{E}(D)$. Intuitivamente, $E(D)$ é o conjunto composto pelos elementos dos elementos de $\mathcal{E}(D)$.

Por exemplo, se tivéssemos um esquema de construção de escala

[24] Convém observar também que um mesmo tipo pode ser associado a relações com diferentes propriedades formais sobre uma única base. Isso significa que a atribuição de tipos não individualiza completamente uma relação – embora qualquer relação possua um tipo num sistema adequado, que indica sua forma conjuntista. Pensemos em duas relações como, por exemplo, $<$ e $\leq$. Tais relações têm o mesmo tipo se definidas a partir da mesma base, mas suas propriedades formais claramente são diferentes.

[25] Na verdade, sempre se pode assumir que há um único conjunto base, que pode ser tomado como a união de todos os conjuntos da definição precedente, desde que se introduzam algumas relações (predicados) adicionais à estrutura. Por exemplo, na estrutura de espaço vetorial, podemos considerar um único conjunto base $\mathcal{D} = \mathcal{V} \cup \mathcal{F}$, e dois predicados V e F tais que $V(x)$ diz que x é um conjunto e $F(x)$ diz que x é um escalar.

$\mathcal{S}= \langle\ \langle 0,1\rangle,\ \langle 1,1\rangle\ \rangle$ sobre um conjunto base $D = \{1,2\}$. A construção de escala que obteríamos, nesse caso, é $\mathcal{E}(D) = \langle D, D \times D\rangle$. Sendo $D \times D = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ temos:

$$E(D) = \bigcup \mathcal{E}(D)$$

$$E(D) = \bigcup \langle D, D \times D\rangle$$

$$E(D) = \bigcup \{\{1,2\}, \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}\}$$

$$E(D) = \{1, 2, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$$

então $E(D) = \{1, 2, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$.[26]

Definição 1.1.5 *Uma* ***relação*** *n-ária sobre D é um elemento de $P(D^n)$, logo, um conjunto de $E(D)$ tendo tipo $\langle\langle d_1, \ldots, d_n\rangle\rangle$, com $1 \leq n < \omega$.*

Por exemplo, uma relação binária sobre D é um objeto de tipo $\langle\langle d, d\rangle\rangle$, ou seja, um elemento de $P(D \times D)$, um conjunto de pares ordenados de elementos de D. No caso particular visto acima, uma relação binária sobre D é, por exemplo, $R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$, logo, é preciso "chegar" até $P(D \times D)$ na escala e então tomar $R \in E(D)$ com tipo $\langle\langle d, d\rangle\rangle$.

Por abuso, dizemos que se a relação tem tipo $\langle\langle d_1, \ldots, d_n\rangle\rangle$, então ela é denominada relação *n-ária*, ou relação de *rank n*. Da mesma forma, os elementos do conjunto base D, cujos tipos são d, são chamados indivíduos de $E(D)$.[27]

Finalmente, uma *seqüência* r_ι, com $\iota \in \alpha$, é uma função cujo domínio é um ordinal α.[28] Estamos agora em condições de definir uma estrutura matemática:

[26] Sobre o conjunto união que legitima a operação realizada, ver **ZFC**$_7$ na página 54.

[27] O termo 'indivíduos' é aqui tomado na sua acepção intuitiva (e costumeira), sem implicar qualquer vinculação com aquela que adotaremos em nosso estudo.

[28] Assumiremos, daqui por diante, que sempre que escrevermos o índice 'ι' é o caso de $\iota \in \alpha$, com α sendo um ordinal. Além do mais, conforme α seja finito ou infinito, a seqüência será finita ou infinita, respectivamente. Ao que parece, a definição de seqüência enquanto uma função definida num ordinal – ω no caso – foi primeiramente realizada por Peano (1858-1932). Cf. Bourbaki (1964, p. 306).

Definição 1.1.6 (da Costa (2003)) *Uma **estrutura matemática** é um par ordenado*

$$\varrho = \langle D, r_\iota \rangle$$

onde $D \neq \emptyset$ e r_ι é uma seqüência de relações de $E(D)$. Além disso, D e r_ι são considerados como *conceitos primitivos* ou *termos* de ϱ.

Nesse ponto, exemplos podem ser de alguma utilidade. Vejamos:

Um *Grupo*, em matemática, pode ser descrito como sendo uma estrutura $\mathcal{G}= \langle G, * \rangle$ em que:

(i) G é o conjunto base (não vazio);

(ii) $* \in P(G \times G \times G)$ satisfazendo as seguintes condições (ou axiomas):

$\boldsymbol{A_{1_{GR}}}$ (*Associatividade*): para quaisquer x, y e z do conjunto G, tem-se que $x * (y * z) = (x * y) * z$;

$\boldsymbol{A_{2_{GR}}}$ (*Existência de elemento neutro*): existe um elemento $e \in G$ tal que, para todo $x \in G$, tem-se que $x * e = e * x = x$,

$\boldsymbol{A_{3_{GR}}}$ (*Existência de elemento inverso em G relativamente à operação $*$*): para cada elemento $x \in G$, existe um elemento $x' \in G$, tal que $x * x' = x' * x = e$.[29]

Note o leitor que, pela definição dada, $*$ é uma relação sobre G, o que significa que é um conjunto de $E(G)$. Como $E(G) = \bigcup \mathcal{E}(G)$, vejamos como poderíamos obter $\mathcal{E}(G)$. Uma possibilidade seria tomarmos o seguinte esquema de construção de escala: $\mathcal{S}= \langle\ \langle 0,1 \rangle,\ \langle 1,1 \rangle,\ \langle 2,1 \rangle,\ \langle 3,0 \rangle\ \rangle$. A esse esquema, corresponderia a construção de escala $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(G) = \langle\ G,\ G \times G,\ G \times G \times G,\ \ P(G \times G \times G)\ \rangle$. Note também que os elementos do conjunto $P(G \times G \times G)$ têm tipo $\langle\ \langle g, g, g \rangle\ \rangle$ o que nos permite afirmar que $*$ é uma relação 3-ária (ou, se preferirmos, uma operação binária sobre G).

[29] O grupo será dito *comutativo ou abeliano* se ainda valer $\boldsymbol{A_4}$ (*Comutatividade*): para todos $x, y \in G$, tem-se que $x * y = y * x$.

Uma estrutura como $\mathcal{E} = \langle D, \{a_i\}_{i\in I}, \{R_j\}_{j\in J}, \{f_k\}_{k\in K}\rangle$, usada geralmente nos estudos de lógica (de 1^a ordem), também pode ser vista como um caso particular da definição de estrutura dada acima. Nela, D também é um conjunto não vazio; as constantes individuais a_{i_s} podem ser identificadas com funções zero-ádicas sobre D; as relações R_{j_s} com relações n-ádicas sobre D e, finalmente, as funções f_{k_s} com relações $(n+1)$-ádicas de D^n em D. Obviamente, para um caso específico deste tipo de estrutura, não haveria dificuldade em se construir uma escala sobre o conjunto base com vistas a obter as relações desejadas – embora não o façamos aqui.

1.1.2 Espécie de estruturas

Definido o que seja uma estrutura matemática, nossa tarefa torna-se explicitar o que pode ser caracterizado por *espécie de estrutura.*[30] Para realizá-la, necessitamos da noção de *transportabilidade* e de alguns conceitos preliminares, entre os quais o de *assinatura* de uma estrutura – o que nos permitirá comparar duas estruturas e considerá-las similares ou não.

Definição 1.1.7 *Seja $\varrho = \langle D, r_\iota\rangle$ e τ_ι o tipo de r_ι. Chamamos* ***assinatura*** *da estrutura ϱ à seqüência τ_ι.*

Traduzindo a definição em termos mais intuitivos, a assinatura de uma estrutura corresponde à seqüência de tipos de suas relações. Obviamente, não há necessidade de incluir em tal assinatura o tipo do conjunto base, isso porque importa considerar apenas o que a partir dele é construído.[31] Introduzimos agora a noção de isomorfismo entre duas estruturas ϱ e ϱ' de mesma assinatura do seguinte modo:

---

[30] Novamente inspirando-nos em Bourbaki, porém sem nos comprometermos com sua abordagem.

[31] Uma analogia pode ser esclarecedora: nossas carteiras de identidade não precisam exibir a descrição 'humano' a fim de nos identificar. Essa característica – ser humano – é algo comum a todos os portadores de tal documento e em nada contribui para identificá-los.

Definição 1.1.8 *Sejam* $\varrho = \langle D, r_\iota \rangle$ *e* $\varrho' = \langle D', r'_\iota \rangle$ *duas estruturas de mesma assinatura. Dizemos que* ϱ *é* ***isomorfa*** *a* ϱ' *(e escrevemos* $\varrho \cong \varrho'$*) se, e somente se, existir uma função* $f : D \mapsto D'$*, bijetora, tal que para todos* $x_1, \ldots, x_n$ *pertencentes a* D*, e para cada relação* r_ι *e sua correspondente* r'_ι*,*

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in r_\iota \leftrightarrow \langle f(x_1), \ldots, f(x_n) \rangle \in r'_\iota$$

Além disso, se f é um isomorfismo entre as estruturas ϱ e ϱ', então f pode ser estendida a outra função f^* entre $\mathcal{E}(D)$ e $\mathcal{E}(D')$, que são as escalas correspondentes de ϱ e ϱ'.[32] Uma tal extensão é feita exatamente do mesmo modo como aponta Bourbaki (1964, cap. 4).

Seguindo da Costa (2003), dizemos que uma *fórmula apropriada para* ϱ é uma fórmula da nossa linguagem cujas únicas constantes são aquelas acima mencionadas e cujas variáveis são restritas pela condição de se referirem aos elementos de $E(D)$. Como apresentamos acima, cada um dos elementos do conjunto $E(D)$ possui um determinado tipo. Denotemos $T_d E(D)$ ao conjunto dos objetos de $E(D)$ do tipo d. Nesse caso, é claro que se a variável x é restrita pela condição $x \in T_d E(D)$, então ela é essencialmente restrita pela condição $x \in E(D)$. Além do mais, quando consideramos uma estrutura, todas as fórmulas empregadas para nos referir a ela são supostas apropriadas para essa tal estrutura.

Seja ϱ uma estrutura e φ uma sentença (da linguagem) apropriada para tal estrutura. Nessas condições, existe uma interpretação de φ em ϱ. Escrevemos

$$\varrho \models \varphi$$

se φ é verdadeira em ϱ no sentido tarskiano.[33]

---

[32]É possível também definirmos a noção de homomorfismo entre duas estruturas de mesma assinatura (basta que relaxemos a condição de f ser bijetora), bem como as noções de automorfismo e de endomorfismo. Cf. da Costa (2003).

[33]Para uma formulação detalhada, ver Tarski (1956, 1944). Ver também Mendelson (1979); Haack (2002, 143-170) e Mortari (2001, 172-180).

Além disso, se $\varphi(x)$ é uma fórmula apropriada para ϱ com somente a variável livre x e b denota um elemento de $E(D)$, dizemos que $\varphi(x)$ *define estritamente* b em ϱ se tivermos:

$$\varrho \models \forall x(x = b \leftrightarrow \varphi(x))$$

Quando b é uma relação unária (ou conjunto), a fórmula $\varphi(u)$, apropriada para ϱ, com somente a variável livre u, define estritamente b em ϱ se, e somente se:

$$\varrho \models \forall u(u \in b \leftrightarrow \varphi(u))$$

Analogamente, podemos estender esta noção para qualquer relação n-ádica, $1 < n < \omega$.

Seja a seqüência $\mathcal{A}_\lambda$, com $\lambda \in \beta$, de elementos de $E(D)$. Um objeto $b \in E(D)$ pode ser estritamente definido em ϱ em termos dos elementos de $\mathcal{A}_\lambda$, bastando para isso introduzir em ϱ todos os $\mathcal{A}_\lambda$ como novos elementos primitivos e, então, considerar a definibilidade estrita nessa estrutura expandida. Por exemplo: tomemos $E(D) = \{1, 2, \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$ e seja a seqüência $\{1, 2\}$. Para que um determinado objeto, '2' por exemplo, possa ser estritamente definido numa estrutura $\varrho = \langle D, r_\iota\rangle$, basta acrescentarmos os elementos da seqüência como novos elementos primitivos de ϱ. Assim fazendo, obtemos a estrutura expandida $\varrho' = \langle D, r_\iota, 1, 2\rangle$ e podemos definir estritamente o objeto '2' nessa estrutura do seguinte modo: se $\varphi(x)$ é uma fórmula apropriada para ϱ', com somente a variável livre x, e '2' denota um elemento de $E(D)$, então $\varphi(x)$ define estritamente '2' em ϱ se, e somente se:

$$\varrho \models \forall x(x = 2 \leftrightarrow \varphi(x))$$

Tratemos agora da noção de *transportabilidade* citada acima. Seja $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula apropriada para a estrutura $\varrho = \langle D, r_\iota\rangle$, na qual as únicas variáveis livres são $x_1, \ldots, x_n$. Nesse caso, poderíamos interpretar as constantes de

$\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ na estrutura $\varrho' = \langle D', r'_\iota\rangle$, isomorfa a ϱ, usando os elementos primitivos de ϱ' ao invés dos elementos primitivos correspondentes de ϱ. Assim fazendo, obtemos uma interpretação ou, se preferirmos, uma "tradução" das constantes de $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ em ϱ'.

Definição 1.1.9 *Uma fórmula $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ é **transportável** se, para quaisquer estruturas ϱ e ϱ' descritas acima, para qualquer isomorfismo f de ϱ em ϱ' e para qualquer seqüência $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n$ de elementos de $E(D)$, tivermos:*

$$\varrho \models \varphi(\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n) \textit{ se, e somente se, } \varrho' \models \varphi(f(\mathcal{A}_1),\ldots,f(\mathcal{A}_n))$$

Se chamarmos $\varphi(f(\mathcal{A}_1),\ldots,f(\mathcal{A}_n))$ de φ', então no caso particular de φ ser uma sentença, φ é transportável quando tivermos:

$$\varrho \models \varphi \text{ se, e somente se, } \varrho' \models \varphi'$$

Uma observação que aqui poderia ser realizada é a de que sentenças transportáveis, intuitivamente falando, são invariantes sob os automorfismos das estruturas para as quais elas são fórmulas apropriadas.

Tomemos agora $Z = r_\iota$ como sendo uma seqüência de elementos de $E(D)$. Dizemos que a assinatura de Z é a seqüência k dos correspondentes tipos dos termos de Z. Por exemplo, seja $Z = \langle\langle D\times D\rangle, \langle D\times D\times D\rangle\rangle$, ou seja, uma seqüência com dois elementos, o primeiro sendo uma relação binária e o segundo uma relação 3-ária sobre D. Nesse caso, a assinatura de Z é a seqüência $k = \langle\ \langle\langle d,d\rangle\rangle, \langle\langle d,d,d\rangle\rangle\ \rangle$. Podemos agora definir *espécie de estruturas* do seguinte modo:

Definição 1.1.10 *Uma **espécie de estruturas** é uma fórmula da linguagem da teoria de conjuntos da seguinte forma:*

$$S(X,k) \leftrightarrow \exists D \exists Z(X = \langle D, Z\rangle \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m)$$

onde Z é uma seqüência de elementos de $E(D)$ de assinatura k e $A_1, A_2, \ldots, A_m$ são fórmulas transportáveis que não contêm nenhuma outra variável livre além de D e Z, apropriadas para a estrutura $X = \langle D, Z \rangle$ e chamadas de *axiomas da espécie de estruturas.*

Qualquer estrutura ϱ que satisfaz a fórmula $S(X, k)$, *i.e.*, tal que a fórmula $S(\varrho, k)$ seja verdadeira, é dita ser uma **estrutura da espécie $\boldsymbol{S(X, k)}$** ou, simplesmente, **estrutura da espécie $\boldsymbol{S}$**. Tais estruturas podem ser consideradas *modelos* da fórmula $S(X, k)$, com k constante.

Tomemos um exemplo de espécie de estruturas inspirado no próprio Bourbaki: considere-se uma escala construída sobre um conjunto base D e tome-se o conjunto $P(D \times D \times D)$. Qualquer elemento f que satisfaça o seguinte axioma $\boldsymbol{A_{1_{ALG}}}$: "*f é uma função de $D \times D$ em D*" define uma espécie de estrutura, em particular, uma espécie de estrutura algébrica. Note que f é uma operação binária sobre D, comumente chamada *Lei de Composição* da estrutura. A fórmula que caracteriza esse tipo de estrutura pode então ser assim expressa:

$$S(X, \langle\langle d, d, d\rangle\rangle) \leftrightarrow \exists D \exists Z (X = \langle D, Z\rangle \wedge A_{1_{ALG}})$$

Uma tal estrutura, ou seja, um conjunto (não vazio) munido de uma lei de composição (operação binária), é o que Bourbaki chama de *magma*. Por outro lado, uma estrutura como $\mathcal{G}= \langle G, *\rangle$, apresentada acima como descrevendo a noção de grupo (p. 29), em que G é um conjunto não vazio e $*$ é uma operação binária sobre G, ou seja, $*$ é *uma função de* $G \times G$ *em* G satisfaz a fórmula $S(\mathcal{G}, \langle\langle d, d, d\rangle\rangle) \leftrightarrow \exists G\ \exists * (\mathcal{G}= \langle G, *\rangle \wedge A_{1_{ALG}} \wedge A_{1_{GR}} \wedge A_{2_{GR}} \wedge A_{3_{GR}})$. Nesse caso podemos dizer que $\mathcal{G}$ é um modelo da estrutura de espécie S.

Convém enfatizar aqui que, na medida em que ficar individualizada a espécie de estruturas S, especifica-se sua *teoria* T_S, cujos *modelos* são justamente as entidades na teoria de conjuntos que satisfazem a espécie S de estruturas. Por essas razões é que a matemática pode ser, então, caracterizada como sendo o estudo geral das estruturas conjuntistas.[34]

1.2 Matemática como estudo de estruturas

O conceito de estrutura, em uma versão algo diferente da que apresentamos aqui, tornou-se uma das noções centrais da matemática moderna. A própria matemática, de acordo com nossa concepção, pode ser dita ser a *teoria das espécies de estruturas*, uma vez que as entidades que estuda são, de certa maneira, instanciações – modelos – de certas espécies de estruturas. Para Bourbaki em particular, a matemática *é* o estudo de tais estruturas, desempenhando papel fundamental três estruturas básicas, ditas estruturas-*mãe*, a saber, estruturas *algébricas*, estruturas *de ordem* e estruturas *topológicas*, as quais podem facilmente ser obtidas em nosso esquema.[35]

Falando de um modo intuitivo, uma estrutura algébrica envolve conjuntos, relações e operações sobre elementos desses conjuntos e, entre elas, poderíamos citar, as estruturas de grupo, corpo e de anel. Uma estrutura de ordem, por sua vez, envolve conjuntos e relações entre os elementos de tais conjuntos de modo a permitir uma certa 'hierarquia' ou 'disposição' entre os mesmos a partir de axiomas que impõem, por exemplo, reflexividade, anti-simetria e transitividade às relações. Entre elas encontram-se as estruturas de ordem parcial, de ordem linear e de boa-ordem. Ainda falando intuitivamente, as estruturas topológicas são aquelas que fornecem um formulação matemática abstrata de conceitos intuitivos como os de proximidade entre dois elementos, limites, vizinhança e continuidade, entre outras.[36]

---

[34] Ver Krause, Béziau e Bueno (1997, p. 92).

[35] Seria equivocado associar a Bourbaki a idéia de que haveria 'modelos', no sentido dito acima, de uma espécie de estrutura, pois a existência de modelos exige um comprometimento semântico com entidades 'fora' dos aspectos puramente sintáticos. No entanto, como dissemos, nossa abordagem difere da do matemático francês, ainda que nela se inspire.

[36] Cf. Bourbaki (1950, p. 227). Explicações adicionais sobre o procedimento de Bourbaki podem ser encontrados em Corry (1999), Krause (1987), entre outros.

Através de combinações adequadas desses três tipos de estruturas fundamentais pode-se obter, como em Bourbaki, quase a totalidade dos resultados de que dispõe a matemática tradicional:[37]

> [...] de agora em diante a matemática possui as poderosas ferramentas fornecidas pela teoria dos grandes tipos de estruturas; em uma única concepção ela abarca imensos domínios, agora unificados pelo método axiomático, mas que estavam antigamente em um estado completamente caótico.(BOURBAKI, 1950, p. 227-228, tradução nossa).

Mais uma vez, e desta definitivamente, ressaltamos nosso ponto. Para Bourbaki, não há semântica. Assim, teses como a de Bunge (p. 15) não poderiam sequer ser colocadas. Em nosso tratamento, ainda que estejamos utilizando a terminologia bourbakista e o citemos repetidas vezes, assumimos uma semântica (em princípio intuitiva) para a teoria de conjuntos, a qual vai nos comprometer com conjuntos (que são os objetos básicos de nossa ontologia), os quais, como veremos, podem ser ditos serem *indivíduos* de um certo tipo. Voltemos, porém, aos detalhes técnicos.

Uma ressalva à redução estrutural é, no entanto, necessária: embora existam alguns setores da matemática que, até o momento, pareçam oferecer resistência a esta *redução estrutural*, nada parece indicar que isto se manterá no futuro.[38] Convém lembrar que, mesmo que se constate a ausência de um procedimento que abarque a matemática contemporânea em sua *totalidade*, a abordagem estrutural dá conta de boa parte dela. Além disso, é de fundamental importância para a compreensão da ciência presente, constituindo importante ferramenta de trabalho para o cientista aplicado, na medida em que pode ser associada aos chamados *predicados de Suppes*: predicados conjuntistas que sa-

[37] Combinações essas realizadas, principalmente, com o auxílio das operações definidas na teoria de conjuntos subjacente e através da modificação ou adição de axiomas, mas isso não será reproduzido aqui.

[38] Dentre os setores da matemática que parecem oferecer resistência, MacLane (1996), citado por Krause, Béziau e Bueno (1997, p. 92), menciona a teoria das equações diferenciais parciais, por exemplo. No entanto, mesmo quando lida com equações diferenciais parciais, o matemático está trabalhando com estruturas de algum tipo, como as da análise clássica (números reais, espaços de funções, etc.). A noção de estrutura, então, está presente, mesmo que implicitamente.

tisfazem determinadas condições e que podem ser associados ao conceito de espécie de estruturas.[39]

Outra ressalva é a de que as estruturas-mãe não se pretendem imutáveis nem únicas. Como o próprio Bourbaki observou, o dinamismo da matemática possivelmente exigirá tanto adaptações nas *estruturas-mãe* quanto o surgimento de estruturas fundamentais diversas. Este parece ser o caso de alguns trabalhos que, na atualidade, parecem indicar um quarto tipo de estrutura fundamental, denominada *estrutura lógica*.[40] É relevante também mencionar que embora Bourbaki não defendesse que as estruturas fundamentais fossem imutáveis nem únicas, defendia que a *imagem estrutural da matemática* permaneceria imutável no futuro, constituindo uma *verdade eterna*, o estágio final de um necessário processo de desenvolvimento histórico.[41] Este ponto, no entanto, é discutível.

Independentemente do êxito alcançado pela abordagem estrutural de Bourbaki, alguns advogam que outra abordagem seria mais adequada para fundamentar a matemática. Trata-se da abordagem categorial, surgida, praticamente, dentro do próprio Bourbaki e que aqui não abordaremos.[42]

Como já vimos, o modo adotado por Bourbaki para tratar de estruturas e de espécies de estruturas, incluindo aquelas com diversos conjuntos base e com conjuntos au-

[39] Sobre a relevância da abordagem estrutural, ver Krause, Béziau e Bueno (1997). Sobre a associação com os predicados de Suppes, ver da Costa e Chuaqui (1988).

[40] Ver Béziau (1994b) e Béziau (1994a).

[41] Ver Corry (1999) para detalhes.

[42] S. Eilenberg (1913-1998) e S. MacLane (1909-), membros do grupo Bourbaki, sugeriram tomar como básico o conceito de função em vez do de conjunto. Ver, por exemplo, MacLane (1971) e ainda MacLane (1996). Parece que tal alternativa propicia uma ferramenta matemática mais flexível que a dada pela abordagem conjuntista. Pierre Cartier, membro de Bourbaki, ressalta "Que as teorias de conjuntos e as estruturas são, em contraste, mais rígidas, pode ser visto lendo-se o capítulo final da teoria de conjuntos de Bourbaki, em que é feito um monstruoso esforço para formular categorias sem categorias."(CARTIER, 1998, p. 26, tradução nossa). As razões que levaram Bourbaki a deixar de lado a alternativa em questão mesclam circunstâncias históricas e pontos de vista filosóficos. Parece que na medida em que Bourbaki busca, como parte de suas motivações e objetivos, 'atualizar' a análise na França, um desafio, dentre os vários que se apresentavam, era mostrar que o novo modo de fazer matemática era mais adequado que o antigo. Tal tarefa não se empreendeu sem uma boa dose de dogmatismo, característica presente principalmente na primeira geração dos membros de Bourbaki. Acreditando na unidade e universalidade da matemática, procurou reformular a matemática em um todo unificado. O método de que se utiliza é a total formalização e rigor, e o todo unificante escolhido é a noção de estrutura. Essa escolha dogmatizou-se e acabou impedindo qualquer mudança de ênfase após ter sido iniciado o processo de publicação dos trabalhos. Quais as conseqüências da adoção de uma postura mais flexível, mais dinâmica por parte de Bourbaki é uma especulação interessante.

xiliares, resulta em uma concepção da matemática diferente da que apresentamos. Nossa opção priorizou uma maior simplicidade e facilidade de compreensão. Além do mais, permite que os conceitos bourbakistas possam ser facilmente incorporados a ela.[43]

Finalmente, na medida em que certas estruturas matemáticas satisfaçam um predicado como S, apresentado acima, tais estruturas podem ser tomadas como *modelos da espécie de estrutura S*. Certos elementos só possuem propriedades *em uma* estrutura: "[. . .] inexistem propriedades *a priori* ou *per se*, dizemos que *ser* significa *ser em uma estrutura*, módulo o contexto lógico-matemático adotado."(CAIERO, 2001, p. 117).

Retomando nossas pretensões: se, como afirmado acima, *ser* significa *ser em uma estrutura*, ou seja, se as entidades matemáticas adquirem significado formal na medida em que são vistos como elementos de uma certa estrutura, isso tudo num contexto lógico-matemático previamente adotado, ocorre que, partindo da acepção de matemática como *teoria das espécies de estruturas*, e adotando um contexto composto pela lógica clássica de primeira ordem e por uma determinada teoria de conjuntos (ZFC, do modo como a estamos considerando), podemos sugerir que o que *é* em matemática depende do que *é* na teoria de conjuntos (e na lógica) que lhe é subjacente. Em outras palavras, as entidades de que trata a matemática encontram-se estreitamente vinculadas a alguma teoria de conjuntos. Por exemplo, na teoria usual ZFC como a apresentaremos não existem entidades como o "conjunto de Russell", $R = \{x : x \notin x\}$, que, no entanto, são admissíveis em algumas teorias paraconsistentes de conjuntos.[44] Mais do que isso, pretende-se sugerir aqui que as limitações inerentes a uma determinada teoria de conjuntos, acabam sendo estendidas a limitações inerentes à matemática que com ela é construída. Por exemplo, na matemática erigida em ZFC não há conjunto universal, que, no entanto, "existe" em outras teorias de conjuntos, como no sistema NF de Quine-Rosser.[45] Passemos agora a descrever ZFC, que é a teoria de conjuntos que estamos adotando.

---

[43] Cf. da Costa (2003).

[44] Ver da Costa, Béziau e Bueno (1998, p. 131)e Krause (2002a, p. 167s) para detalhes.

[45] Ver Krause (2002a, cap. 5).

1.3 A base da matemática: uma teoria de conjuntos

Originada com Georg Cantor (1845-1918), a teoria de conjuntos passou por uma profunda crise no final do século XIX, início do século XX. Crise esta desencadeada pela descoberta de paradoxos que aparecem na formulação dita ingênua dessa teoria. Posteriormente, surgiram versões axiomáticas da teoria de conjuntos que evitavam os paradoxos conhecidos e, ainda assim, conservavam, em grande parte, toda a riqueza e as intuições da formulação de Cantor: os matemáticos podiam permanecer no *"paraíso"*.[46]

À primeira versão axiomática, devida a E. Zermelo (1871-1956), somaram-se as contribuições de A. Fraenkel (1891-1965) e T. Skolem (1887-1963). O resultado é o que se conhece hoje como teoria de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha (ZFC). Posteriormente, outros sistemas axiomáticos apareceram como, por exemplo, o de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG); o de Kelley-Morse (KM), o de Quine-Rosser (NF), dentre vários outros.[47]

Relevante é mencionar aqui que, embora esses sistemas não sejam equivalentes, eles parecem preservar o aspecto intuitivo da caracterização de conjunto da formulação cantoriana. Como é sabido, Cantor não apresentou o que entendia por conjunto através de uma definição matematicamente aceitável. Dizia que "Por um conjunto entendemos qualquer coleção, reunida numa totalidade, de objetos definidos e distintos de nossa intuição ou pensamento."(CANTOR, 1955, p. 85). Isso, no entanto, não pode ser tomado como uma definição de conjuntos, pois é calcado na idéia de "coleção", comportando ainda termos dúbios como "reunida numa totalidade", "intuição", "pensamento". Mesmo assim, tanto a versão informal cantoriana quanto as versões axiomáticas que vieram posteriormente, parecem aceitar como inerentes às teorias de conjuntos que delas se originam as seguintes características ou "princípios" básicos que, por assim dizer, balizam o conceito de conjunto.[48]

[46]Alusão a D. Hilbert (1862-1943) e seu dito: "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós."(HILBERT, 1967), cunhado quando das críticas desferidas à teoria de Cantor.

[47]Para detalhes, ver Krause (2002a).

[48]Ver Krause (2002a, p. 73ss) para detalhes.

(i) *Princípio da Compreensão ou da Abstração*: os elementos de um conjunto são combinados em um todo por intermédio de uma lei;

(ii) *Princípio da Extensionalidade*: um conjunto é determinado por seus elementos, *i.e.*, por sua extensão;

(iii) *O conceito de Identidade para os elementos de um conjunto*: os *conjuntos* satisfazem uma *teoria da identidade* que faz com que, em particular, os elementos de um conjunto possam sempre ser considerados distintos uns dos outros, *i.e.*, é sempre possível dizer ou que $x = y$ ou que $x \neq y$, onde '$=$' representa a identidade e '$\neq$' a diferença (dos quais trataremos na seqüência).

(iv) *A concepção iterativa de conjunto*: os elementos de um conjunto são, de certa maneira, dados *antes* que o conjunto propriamente dito.

Obviamente, se poderia questionar a afirmação de que as versões axiomáticas incorporam tais princípios, já que os sistemas axiomáticos mencionados não incorporam nenhum significado intuitivo, seja aos conceitos primitivos, seja aos axiomas, servindo esses últimos apenas para dar o caráter operacional daqueles primeiros.[49] Tal objeção é pertinente e inteiramente concorde com a concepção de método axiomático moderna, como bem ilustra a afirmação de von Neumann(1903-1957): "Entendemos por '*conjunto*' nada mais do que um objeto do qual sabe-se não mais e quer-se saber não mais do que aquilo que se segue dos postulados."(apud MOORE, 1980). Ocorre, entretanto, que não é este o ponto: os 'objetos definidos e distintos' são, de certo modo, incorporados aos sistemas axiomáticos na medida em que esses últimos comportam uma teoria da identidade. Em outras palavras, os conjuntos são passíveis de serem comparados e, de alguma maneira, serem tomados como *objetos definidos e distintos*: em ZFC – que é a teoria de conjuntos que adotamos – sempre é possível dizer que dois objetos são ou não o mesmo objeto, embora nem sempre possamos demonstrar qual das opções ocorre.

Aqui, é preciso algum cuidado. Quando falamos em *identidade*, podemos ser levados a pensar em algum significado intuitivo ou filosófico do termo. Como estamos tratando

[49] Aliás, essa foi uma das críticas de Skolem à axiomatização de Zermelo. Ao que parece, Zermelo tinha em mente uma interpretação específica ou modelo intencional onde o domínio era constituído por 'conjuntos' e por *'Ur-elementos'*. A esse respeito a seguinte afirmação é ilustrativa: "[...] na base de sua lista de axiomas [de ZF], subjaz um claro modelo intuitivo, embora ele próprio [Zermelo] só o tenha indicado num trabalho muitos anos após a publicação dos axiomas."(PUTNAM, 1988, p. 45). Skolem faz ver que esse domínio não estava determinado de modo único na axiomática em questão. Para detalhes, ver Skolem (1967).

de sistemas axiomatizados (eventualmente formalizados), no entanto, é preciso dizer o que entendemos por *identidade*. Em teoria de conjuntos, podemos simplesmente tomar uma relação binária que seja uma relação de equivalência e algo mais (uma congruência, ou seja, uma relação que – grosso modo – respeita as relações) para “identidade” sem que ela seja, do ponto de vista intuitivo, necessariamente associada à *diagonal* do domínio, ou seja, à coleção de todos os pares da forma $\langle x, x \rangle$. Deste modo, a *identidade* formal poderá não corresponder à intuitiva, àquela que, informalmente, associamos à idéia de “mesmo objeto”. Aqui, porém, ficaremos sempre restritos, em nossa acepção intuitiva, a esta última interpretação; quando falarmos em identidade estaremos informalmente pensando naquilo que seria a diagonal do domínio que estamos considerando.

Uma concessão ao leitor pode ser aqui relevante a fim de mantê-lo a par de nossos propósitos: tomamos a matemática como disciplina que se ocupa de certas estruturas e constatamos que tal abordagem tem um fundamento específico – uma teoria de conjuntos. Adotamos ZFC como tal teoria em sua versão axiomática e defendemos que ela capta aspectos da teoria intuitiva originada com Cantor. Em particular, que ela mantém a noção intuitiva de ‘*objetos definidos e distintos*’ através da teoria da identidade que lhe é subjacente. Convém mencionarmos, fazendo um parênteses, que o mesmo pode ser dito das demais teorias consideradas ‘clássicas’, NBG e KM, bem como de sistemas como NF, por exemplo. *Todas* captam o conceito intuitivo de ‘*coleção de objetos definidos e distintos*’ cantoriano, ainda que em cada uma delas a teoria da identidade seja distinta, pelo menos em princípio, das demais.

Antes de prosseguirmos, vamos explorar uma questão, que poderia ser colocada da seguinte forma: o que significa dizer que a matemática pode ser fundamentada em uma teoria de conjuntos como Zermelo-Fraenkel? De que maneira se pode entender a afirmação de que por meio de uma teoria de conjuntos como ZFC é possível “construir” praticamente toda a matemática padrão, ou que a matemática usual *reduz-se* à teoria de conjuntos?

A resposta a essa questão encontra-se intimamente relacionada ao enorme 'poder redutor' exibido pela teoria de conjuntos. Depois da formulação inicial, realizada por Cantor, percebeu-se que os diversos conceitos da análise e da aritmética poderiam ser reduzidos ao de conjunto e de suas propriedades operatórias. Por exemplo: uma *função* de um conjunto A num conjunto B é um subconjunto de $A \times B$ satisfazendo certas condições; uma *ordem* sobre um conjunto A é um subconjunto de $A \times A$ satisfazendo condições apropriadas, etc. Conseqüentemente, no que se refere aos fundamentos, as teorias de conjuntos passaram a ocupar um papel central em matemática.

Dizer que a matemática clássica pode fundamentar-se numa teoria de conjuntos (ZFC, para os nossos propósitos) significa dizer que se pode construir aquilo que se considera como matemática clássica[50] utilizando construtos conjuntistas, *i.e.*, que podemos traduzir os conceitos da primeira em conceitos correspondentes da segunda, num sentido que é tornado claro na seguinte citação, que mostra que mesmo os *números*, com os quais estamos acostumados a trabalhar, não passam de certos conjuntos bem determinados:

> Um exemplo típico do método que nós iremos adotar [redução da matemática à teoria de conjuntos] é a 'identificação' da (orientada) linha geométrica Π com o conjunto $\mathcal{R}$ dos números reais, através da correspondência que 'identifica' cada ponto $P \in \mathcal{R}$ com sua coordenada $x(P)$ com respeito a uma escolha fixa de uma origem O. Qual é o significado preciso dessa 'identificação'? *Certamente não que os pontos são números reais.*
> [...] O que nós significamos pela 'identificação' de Π com $\mathcal{R}$ é que a correspondência $P \mapsto x(P)$ fornece uma **representação fiel** de Π em $\mathcal{R}$ que nos permite dar definições aritméticas para todas as noções geométricas convenientes e estudar as propriedades matemáticas de Π **como se pontos fossem números reais**.

[50]Como já dissemos, trata-se da matemática constante dos manuais usuais do assunto (estamos propositadamente evitando dar uma *definição* de matemática clássica, deixando este conceito subentendido).

> [. . .] descobriremos dentro do universo de conjuntos *representações fiéis* para todos os objetos matemáticos que precisamos, e estudaremos a teoria de conjuntos [. . .] **como se todos os objetos matemáticos fossem conjuntos**.(MOSCHOVAKIS, 1994, p. 33-34, tradução nossa).

No capítulo seguinte, veremos inicialmente o que se entende por *Hierarquia Cumulativa* e que encerra o conceito intuitivo de conjunto com o qual estamos trabalhando.

2 Zermelo-Fraenkel

Os axiomas de ZFC mapeiam pelo menos parte de uma concepção intuitiva de conjunto que descreveremos a seguir. Depois disso, exibiremos a axiomática correspondente.

2.1 ZFC e a Hierarquia Cumulativa

Embora seja possível fundamentar ZFC em outras lógicas – como na de ordem superior – tornou-se comum apresentá-la tendo por lógica subjacente a lógica de primeira ordem com igualdade.[1] A linguagem de ZFC ($\mathcal{L}_{ZFC}$) comporta um alfabeto primitivo composto pelas seguintes categorias de símbolos:[2]

a) Variáveis individuais: $x, y, z, \ldots, x_1, y_1, z_1, \ldots$ (uma lista infinita enumerável)[3] que, informalmente, denotam *conjuntos arbitrários*;

b) Os conectivos lógicos usuais: $\neg$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção), $\rightarrow$ (condicional), $\leftrightarrow$ (bi-condicional);

c) Símbolos auxiliares: (,) (parênteses);

d) Quantificadores: $\exists$ (existencial), $\forall$ (universal);

e) Símbolo de igualdade: $=$ (predicado binário),

f) Um predicado binário: $\in$ (pertinência).

---

[1] Ver Mendelson (1979) para a descrição em detalhes de uma tal linguagem de 1^a ordem.

[2] O alfabeto é dito *primitivo* porque é a partir dele que, comumente, novos símbolos são definidos, visando enriquecer a linguagem. No que diz respeito à apresentação de $\mathcal{L}_{ZFC}$, seguiremos Franco de Oliveira (1980, p. 195ss).

[3] Note-se que a expressão “lista infinita enumerável” está na metalinguagem em relação à $\mathcal{L}_{ZFC}$, sendo caracterizada a partir de um conceito intuitivo de “infinito enumerável”.

Os conceitos de *termo* e de *fórmula* são os usuais: os termos de $\mathcal{L}_{ZFC}$ são as variáveis individuais; as fórmulas atômicas são expressões da forma $x = y$ e $x \in y$. As demais fórmulas são obtidas como em Mendelson (1979). Os postulados da teoria ZFC são aqueles do Cálculo de Predicados de 1^a Ordem, acrescidos dos axiomas e esquemas específicos que veremos na seção 2.2, à frente.

De momento, é relevante perceber que os símbolos e as fórmulas de $\mathcal{L}_{ZFC}$ não descrevem algo particular. São, isso sim, interpretados em certos "universos" um dos quais é aquilo que, usualmente, se denomina *Hierarquia Cumulativa.*

> Os símbolos e as fórmulas [...] são, em si mesmos, apenas marcas no papel que obedecem a certas regras sintáticas de combinação, embora intencionalmente se destinem a descrever objetos e propriedades de uma certa "realidade", "mundo", ou "universo", no nosso caso um "universo de conjuntos" [...]. Um universo possível para $\mathcal{L}_{ZFC}$ é uma coleção (intuitiva) de objetos a que chamamos "conjuntos" e uma relação, chamada "relação de pertinência" entre esses objetos. Daí que se x é uma variável de $\mathcal{L}_{ZFC}$, deve-se ler "$\forall x$" como "para todo conjunto x" e "$\exists x$" como "existe um conjunto x"; o símbolo "$\in$" de $\mathcal{L}_{ZFC}$ é interpretado como a relação de pertinência no universo e o símbolo "$=$" como a relação de identidade no mesmo universo. Um exemplo de universo possível é a *Hierarquia Cumulativa* [...].(FRANCO DE OLIVEIRA, 1980, p. 198ss, grifo nosso).

Em se tratando do universo mencionado, algumas informações de cunho histórico são relevantes. Em decorrência do surgimento de alguns paradoxos – ver, por exemplo, o conjunto de Russell, citado à página 38 – Zermelo desenvolve a idéia de que um conjunto qualquer x só poderia ter como elementos conjuntos que já teriam sido formados *antes* de x.[4] A partir dela, procura descrever, informalmente, um "universo de conjuntos", um *modelo intencional* para a teoria axiomática de conjuntos. Trata-se de uma espécie de "justificação" dos axiomas adotados e de, intuitivamente, mostrar a sua plausibilidade.[5] Obviamente isso não exclui a existência de outras interpretações, outros universos possí-

[4] "Antes" num sentido lógico, não num sentido temporal.

[5] A justificação, em termos informais, de cada um dos axiomas de ZFC pode ser vista em Franco de Oliveira (1980, p. 184ss).

veis.

Conforme esta concepção zermeliana, conjuntos são formados em *etapas*. Seguindo Franco de Oliveira (1980), se designarmos as etapas por $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, então, para cada etapa α, há etapas que a *precedem* (exceto se α for a primeira etapa) e há etapas que a *seguem* (ou seja, tais que α as precede). Disso resulta que, "Em cada etapa α, qualquer coleção x de conjuntos formados em etapas que precedem α constitui um conjunto, que se diz *formado na etapa* α."(FRANCO DE OLIVEIRA, 1980, p. 182).

Desse modo, se tivermos um conjunto x formado numa etapa β que precede α, então x também pode ser formado na etapa α. Isso se deve ao fato de x ser uma coleção de conjuntos formados em etapas anteriores a α. Por conseguinte, "Uma coleção de conjuntos só é um conjunto se for formada em alguma etapa."(FRANCO DE OLIVEIRA, 1980, p. 182).

Deparamo-nos, portanto, com um universo de conjuntos formados em etapas. Como já foi sugerido, a relação de precedência ou de "ser uma etapa antes de" é transitiva: um conjunto que esteja presente numa dada etapa estará presente também nas etapas seguintes, caso existam. Isso significa, intuitivamente falando, que as etapas são *cumulativas*, daí a expressão *Hierarquia Cumulativa de Conjuntos* ($\mathcal{HC}$) para designar o modelo intencional de Zermelo-Fraenkel.

Esclarecendo ainda mais o procedimento de formação dos conjuntos: como ZFC não admite *ur-elementos*, numa etapa zero forma-se o conjunto vazio. Na etapa um, formam-se todas as possíveis coleções de conjuntos formados na etapa zero: o conjunto das partes do vazio. Na etapa dois, formam-se todas as possíveis coleções formadas nas etapas zero e um: conjunto das partes das partes do vazio. O procedimento é mantido para cada etapa seguinte.

Imediatamente após todas as etapas zero, um, dois,... existe uma etapa chamada "*ômega*" no qual formam-se todas as possíveis coleções de conjuntos formados nas etapas zero, um, dois,... uma das quais será o conjunto de *todos* os conjuntos formados nos estágios zero, um, dois,...

Em seguida, há uma etapa *ômega mais um*, em que se formam todas as possíveis coleções de conjuntos formados nas etapas zero, um, dois,..., ômega. Depois, uma etapa *ômega mais dois*, em que se formam todas as possíveis coleções de conjuntos formados nas etapas zero, um, dois,..., ômega, ômega mais um. O procedimento é mantido para cada etapa seguinte.

Imediatamente após todas as etapas zero, um, dois,..., ômega, ômega mais um, ômega mais dois,... existe uma etapa chamada "*ômega mais ômega*" ou, simplesmente, "*ômega dois*" no qual formam-se todas as possíveis coleções de conjuntos formados nas etapas anteriores. Esse procedimento é mantido para cada etapa seguinte. A seqüência abaixo ilustra a seqüência de ordinais que indexa as etapas de formação de conjuntos:

$$0, 1, 2, \ldots, \omega,\ \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega,\ \omega2+1, \omega2+2, \ldots, \omega2+\omega,$$
$$\omega3+1, \omega3+2, \ldots, \omega3+\omega, \ldots,\ \omega\omega+\omega,\ \omega^2+1, \omega^2+2, \ldots$$

Como se vê, descreve-se um universo de conjuntos (a $\mathcal{HC}$) utilizando os ordinais para indicar as etapas e a relação de ordem usual entre ordinais para a relação de precedência entre etapas. Esse universo ($\mathcal{V}$) pode ser descrito assim:

$\mathcal{V}_0 = \emptyset$

$\mathcal{V}_1 = P(\mathcal{V}_0) = P(\emptyset)$

$\mathcal{V}_2 = P(\mathcal{V}_1) = P(P(\emptyset))$

$\vdots$

$\mathcal{V}_\lambda = \bigcup_{\mu<\lambda} P(\mathcal{V}_\mu)$, para λ ordinal limite[6]

$\vdots$

$\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha\in On} \mathcal{V}_\alpha$

[6]Os números naturais são os *ordinais* (também são os *cardinais*) finitos. Há ainda os ordinais (e cardinais) transfinitos. Um ordinal λ é *limite* quando não existe ordinal β tal que $\lambda = \beta + 1$. Por exemplo, ω e $\omega2$ são ordinais limites.

onde On é a classe dos ordinais (não é um conjunto, bem como $\mathcal{V}$ não é um conjunto).[7] Essa versão normalmente é conhecida como *Hierarquia de von Neumann*

É importante destacar que uma coleção $\mathcal{V}$ – obtida na metamatemática – tem como elementos *todos* os conjuntos que ZFC supostamente admite. Ou seja, *todo* conjunto de ZFC é elemento de um $\mathcal{V}_\alpha$, para algum ordinal α. Obviamente, um conjunto de ZFC é algo que pode ser admitido somente à luz de seus axiomas. Já dissemos, entretanto, que tais axiomas foram motivados justamente por esta coleção $\mathcal{V}$: "[...] os axiomas de ZF [e de ZFC] surgiram de maneira *ad hoc*, sem real motivação para além do objetivo de mostrar imediatamente a sua satisfação em $\mathcal{HC}$."(FRANCO DE OLIVEIRA, 1980, p. 229). Desse modo, não é de admirar que sejam verdadeiros nesta "*estrutura*" $\langle \mathcal{V}, \in \rangle$ e que a $\mathcal{L}_{ZFC}$ seja utilizada para expressar as propriedades deste universo, fato este que pode ser demonstrado.[8]

2.2 Axiomática de ZFC

Antes de descrevermos os axiomas específicos de ZFC, é importante para os nossos propósitos enfatizar dois de seus axiomas lógicos (do modo como a estamos apresentando), a saber:

AL$_1$ $\forall x(x = x)$

AL$_2$ $\forall x \forall y(\ x = y \rightarrow (\alpha(x,x) \rightarrow \alpha(x,y))\ )$,

com x e y sendo variáveis quaisquer; $\alpha(x,x)$ uma fórmula qualquer na qual y é livre para x e $\alpha(x,y)$ é fórmula obtida a partir de $\alpha(x,x)$ por meio da substituição de x por y em algumas das ocorrências livres de x.

Nossa ênfase justifica-se na medida em que são esses dois axiomas lógicos, junta-

[7] Isso decorre do caráter ilimitado da progressão dos ordinais: sempre há mais um ordinal e, assim, mais uma etapa para formar conjuntos. Para ser um conjunto, $\mathcal{V}$, por exemplo, precisaria conter "todas" as possíveis coleções de conjuntos formadas nas etapas anteriores.

[8] Cf. Franco de Oliveira (1980, p. 229-231).

mente com o axioma da extensionalidade (que veremos abaixo), que provêem a base para a teoria da identidade de ZFC. Intuitivamente, $\mathbf{AL}_1$ expressa a reflexividade da identidade, que pode ser descrita (ainda que imprecisamente) como afirmando que *todo objeto é idêntico a si mesmo*. É claro que isso pressupõe que saibamos o que queremos dizer por *identidade*. Da mesma forma, $\mathbf{AL}_2$ expressa que, quaisquer que sejam os objetos, se forem dois-a-dois idênticos então eles são intercambiáveis *salva veritate*: em particular, compartilham as mesmas propriedades.[9] Passaremos agora a descrever os axiomas específicos de ZFC.

Iniciemos mencionando que, informalmente, ZFC tem dois conceitos intuitivos básicos: *conjunto* e *pertinência*, esta última sendo uma relação binária denotada por $\in$. Uma ressalva, no entanto, é necessária: ZFC, como a estamos apresentando, é um sistema formal. Isso significa dizer que, embora interpretemos intuitivamente o símbolo primitivo '$\in$' como sendo a pertinência e afirmemos que as variáveis individuais percorrem conjuntos, de acordo com nossa semântica intuitiva, ZFC não incorpora unicamente tal interpretação – que se costuma denominar 'interpretação pretendida' ou 'intencional': "A axiomatização da teoria de conjuntos renuncia a uma *definição* do conceito de conjunto e da relação [pertinência] entre um conjunto e seus elementos."(FRAENKEL apud KRAUSE, 2002, p. 123). Com efeito, poderíamos dar ao símbolo '$\in$' de ZFC outra interpretação, na qual ele não fosse a *pertinência* usual. Não nos estenderemos, porém, sobre esse ponto.

Entretanto, apenas para que o leitor possa ter uma idéia do que se passa, podemos dizer que é possível interpretar $\mathcal{L}_{ZFC}$ em uma estrutura cujo domínio seja o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) e $\in$ seja interpretado na relação $<$ entre inteiros (o predicado de identidade, de acordo com a convenção que fizemos acima, é interpretado na *diagonal* do domínio, no caso, no conjunto $\Delta_{\mathbb{Z}} = \{\langle x, x\rangle : x \in \mathbb{Z}\}$). É fácil ver que, em uma tal estrutura, o axioma $\mathbf{ZFC}_1$ abaixo é *verdadeiro*, pois, para quaisquer dois inteiros m e n,

[9] Essa tradução intuitiva do axioma claramente remete ao Princípio de Indiscernibilidade dos Idênticos que, na literatura filosófica, em conjunção com o Princípio de Identidade dos Indiscerníveis (PII), compõe a chamada *Lei de Leibniz*. Muitas vezes, os filósofos chamam $\mathbf{AL}_2$ de *Lei de Leibniz*. Aqui vamos usar esta expressão em outro sentido, como ficará claro no que se segue (ver p. 62.)

se para qualquer inteiro k se tem que $k < m$ se, e somente se, $k < n$, então $m = n$. Por outro lado, em uma tal estrutura, o axioma $\mathbf{ZFC}_2$ (abaixo) não é verdadeiro, como é fácil perceber.[10]. Isso mostra que $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ não é um *modelo* de ZFC.[11]

Passemos então a apresentar os axiomas específicos de ZFC.

$\mathbf{ZFC}_1$ [Extensionalidade]

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Intuitivamente, o que tal axioma está afirmando pode ser traduzido para algo como: quaisquer que sejam os conjuntos x e y, se x e y têm exatamente os mesmos elementos, então x e y são o mesmo conjunto.[12] Note-se aqui a relevância que os elementos representam para a caracterização dos conjuntos. São de tal modo importantes que, pode-se dizer, *determinam* os conjuntos a que pertencem: elementos distintos dão origem a conjuntos distintos. Reciprocamente, conjuntos podem ser comparados a partir dos elementos que lhes pertencem, ficando a distinção ou a identidade dos primeiros submetidas a distinção ou a identidade dos segundos.

É relevante destacar neste ponto que, a partir dos axiomas lógicos da identidade ($\mathbf{AL}_1$) e ($\mathbf{AL}_2$) e do axioma da extensionalidade ($\mathbf{ZFC}_1$), podemos caracterizar os conjuntos obtidos em ZFC como providos de uma *'identificação'*, como insistiremos abaixo (seção 3.2).

$\mathbf{ZFC}_2$ [Conjunto Vazio]

$$\exists x \forall y (\neg (y \in x))$$

[10]Cf. Franco de Oliveira (1980, p. 210).

[11]De fato, nenhum *modelo* de ZFC poderá ser erigido em ZFC, como é o caso de $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, desde que ZFC seja consistente.

[12]Obviamente que os 'elementos' de um conjunto a que por vezes estaremos nos referindo são conjuntos, em outras palavras, ZFC, na nossa formulação, não admite a existência de *Ur-elementos*: entidades que não tem elementos e que se distinguem do conjunto vazio, as quais não são conjuntos mas que podem ser elementos de conjuntos.

Uma tradução intuitiva do axioma em questão é a de que o conjunto vazio é aquele ao qual nenhum elemento pertence. Usualmente denotamos tal conjunto pelo símbolo $\emptyset$, o que permite que reescrevamos o axioma como $\forall x(x \notin \emptyset)$.[13] A unicidade do conjunto vazio é garantida por meio de $\mathbf{ZFC}_1$ uma vez que, qualquer que seja outro conjunto a que satisfaça $\mathbf{ZFC}_2$, tem-se que $a = \emptyset$. Logo, o conjunto vazio é *único* e, mais que isso, ZFC não admite qualquer entidade sem elementos que não seja o conjunto vazio.

$\mathbf{ZFC}_3$ [Axioma do Par]

$$\forall x \forall y \exists z \forall t(t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y)$$

Para todos x e y, este axioma diz que existe um conjunto z que contém como elementos x e y, e somente eles. Usualmente denota-se tal conjunto por $\{x, y\}$, o qual é lido como "par não ordenado x e y".[14]

Convém mencionar ainda que, a partir de $\mathbf{ZFC}_3$, podemos obter *conjuntos unitários* e definir *par ordenado* de x e y. O conjunto unitário de x é definido como $\{x\} =_{def} \{x, x\}$, ou seja, quando x e y são o mesmo conjunto. Uma definição de par ordenado de x e y, nessa respectiva ordem, é dada por: $\langle x, y\rangle =_{def} \{\{x\}, \{x, y\}\}$ obtida de dois conjuntos x e y e três aplicações do axioma $\mathbf{ZFC}_3$.[15] Importante citar que o conceito de par ordenado é fundamental para se introduzir conceitos como os de função, ordem, boas ordens, dentre outros.[16]

Para maior elegância do axioma seguinte, usualmente se introduz a seguinte definição: $x \subseteq y =_{def} \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$. Ao escrevermos $x \subseteq y$, estamos intuitivamente expressando que x é *subconjunto* de y e a definição, do mesmo modo, afirma que se todo

[13] Onde $\alpha \notin \beta =_{def} \neg(\alpha \in \beta)$. Se $\alpha \notin \beta$, dizemos que α *não é elemento* de β.

[14] É bastante comum a notação que descreve um conjunto escrevendo os nomes de seus elementos separados por vírgulas e incluídos entre chaves. Nesse caso diz-se que o conjunto está definido por *enumeração* ou *extensão*.

[15] Essa definição, que é a mais usual, foi dada pelo matemático C. Kuratowski (1921).

[16] Segundo Suppes (1968, p. 22), foi a partir dela que se tornou possível reduzir a teoria das relações à teoria de conjuntos – feito realizado por Kuratowski e possibilitado, de algum modo, por Wiener (1914).

objeto que pertence a x pertence também a y, então x é subconjunto de y.[17] Desse modo, um outro axioma de ZFC é:

ZFC$_4$ [Conjunto Potência]

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

O conjunto y do presente axioma é denotado comumente por $\mathcal{P}(x)$. Poderíamos dar uma tradução informal do axioma do conjunto potência – ou, como também é chamado, conjunto das partes – nos seguintes termos: dado um conjunto x, existe um e um só conjunto y cujos membros são exatamente aqueles conjuntos z que são subconjuntos de x. Nesse caso, y é dito ser o *conjunto potência* de x, *conjunto das partes de* x ou, ainda, *conjunto dos subconjuntos de* x e, através do axioma da extensionalidade (**ZFC**$_1$), é provado ser único.

A denominação "conjunto potência" deve-se ao fato de que, se um conjunto x qualquer tem n elementos, $\mathcal{P}(x)$ tem 2^n elementos. Convém que façamos duas observações, a saber: (i) o conjunto vazio é um elemento do conjunto potência de qualquer conjunto (*i.e.*, $\forall x(\emptyset \in \mathcal{P}(x))$, (ii) qualquer conjunto é um elemento de seu próprio conjunto potência (*i.e.*, $\forall x(x \in \mathcal{P}(x))$), como é fácil mostrar.

ZFC$_5$ [Esquema Axiomático de Separação]

$$\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \land F(x))$$

onde $F(x)$ é uma fórmula ('propriedade') de ZFC na qual a variável y não figure livre[18] e a expressão "esquema axiomático" indica que são axiomas de ZFC quaisquer expres-

[17] Poderíamos também distinguir aqui a inclusão própria, denotada por $x \subset y$ e definida por $x \subset y =_{def} x \subseteq y \land x \neq y$. Nesse caso, x é dito ser um *subconjunto próprio* de y.

[18] Esta restrição é essencial para evitar a dedução de uma contradição. Para mais detalhes, ver Suppes (1968, p. 16).

sões obtidas a partir da substituição no esquema de $F(x)$'s distintas (instanciações do esquema).

O axioma acima também é chamado de Axioma dos Subconjuntos e o conjunto y postulado será escrito $\{x \in z : F(x)\}$.[19] A tradução algo intuitiva afirma que dado um conjunto z, podemos formar um subconjunto y de z tomando todos os elementos x de z que têm uma determinada "propriedade" F descrita por uma fórmula de ZFC. Um aspecto relevante é a condição de que todo x que irá pertencer a y deva ser um elemento de z. Em outras palavras podemos dizer que 'separamos' um determinado subconjunto de um conjunto dado a partir de uma propriedade específica.[20]

$\mathbf{ZFC}_6$ [Esquema Axiomático de Substituição]

$$\forall x \exists ! y(\alpha(x,y)) \rightarrow \forall z \exists w \forall t(t \in w \leftrightarrow \exists s(s \in z \wedge \alpha(s,t)))$$

onde $\alpha(x,y)$ é uma fórmula de ZFC com duas variáveis livres e o símbolo '!' ao lado do quantificador existencial '$\exists$' denota, como é usual em lógica, '*existe um único...*', ou seja, $\exists ! x(\alpha(x))$ significa $\exists x(\alpha(x) \wedge \forall y(\alpha(y) \rightarrow y = x))$.

Uma tradução intuitiva do antecedente de $\mathbf{ZFC}_6$ é a de que se para todo x existir um único y que torna $\alpha(x,y)$ "verdadeira" – neste caso diz-se que $\alpha(x,y)$ é *x-funcional*; z, w, t, s são distintas tanto entre si como em relação às demais variáveis livres de α e w não ocorre em α. O conseqüente, por sua vez, afirma serem elementos de um conjunto w todas as "imagens" t de s por α. Em outros termos, a "função" α leva cada s que pertence a z em um único t que pertence a w e o esquema axiomático afirma que tal w é um conjunto: em outras palavras, a imagem de um conjunto por uma função também é um

[19]Essa notação utiliza-se de '$\{\ :\ \}$' (chamado *abstrator*) e consiste em descrever um conjunto a partir de uma *norma de definição* ou de uma *definição por abstração*. Para detalhes, ver Suppes (1968, p. 17;23).

[20]O esquema impõe, portanto, restrições às coleções ou classes para que possam ser consideradas conjuntos. Daí o esquema ser denominado de *princípio da limitação de tamanho*. Por exemplo, o já mencionado "conjunto de Russell", $R = \{x : x \notin x\}$ (p. 38), não poderia ser obtido porque não haveria conjunto (especificado pelos axiomas de ZFC) ao qual pudéssemos "aplicar" a propriedade $F(x) \leftrightarrow x \notin x$ de modo a obter R por separação. Cf. Krause (2002a, p. 126).

conjunto. Novamente aqui encontra-se justificada a expressão 'esquema axiomático': na medida em que substituímos diferentes α's, obtemos expressões que instanciam o esquema e se constituem axiomas de ZFC.[21]

$\mathbf{ZFC_7}$ [Axioma do Conjunto União]

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists t (z \in t \wedge t \in x))$$

Uma tradução intuitiva do axioma pode ser a de que, dado x, existe um conjunto y que tem como elementos todos os z que são elementos dos t que são elementos de x. Esse y é usualmente denotado por $\bigcup x$.

Por razões práticas que não detalharemos aqui, é costumeiro introduzir uma notação específica para expressar a união de um conjunto que tenha apenas dois conjuntos como elementos. Suponhamos, por exemplo, que o conjunto x possua como únicos elementos os conjuntos a e b. Então o *conjunto união* de x ($\bigcup x$) pode ser definido como a *união* de a e b (denotada por $a \cup b$). Em outras palavras, sendo $x = \{a, b\}$, então $a \cup b =_{def} \bigcup x$ ou, equivalentemente, $a \cup b =_{def} \bigcup\{a, b\}$.

Somente agora ZFC possibilita agrupar qualquer número *finito* de conjuntos (maior que dois) de modo a constituir outro conjunto. Um exemplo a respeito pode esclarecer essa afirmação. Tomemos um conjunto x tal que $x = \{\{a, b\}, \{c\}\}$.[22] Podemos então formar um conjunto y tal que $y = \bigcup x$ ou, o que é o mesmo, $y = \bigcup\{\{a, b\}, \{c\}\}$. Nesse caso, y contém a,b, c e nada mais, podendo ser escrito como $y = \{a, b, c\}$. A partir disso, podemos entrever que se torna possível provar a existência de conjuntos com três, quatro,... n elementos. Basta tomarmos, por exemplo, para um conjunto de

[21] Cabe mencionar que a conjunção do axioma do conjunto potência ($\mathbf{ZFC_4}$) e do esquema axiomático de substituição ($\mathbf{ZFC_6}$) implicam o axioma do par ($\mathbf{ZFC_3}$). Além do mais, o esquema axiomático de substituição ($\mathbf{ZFC_6}$) implica o esquema axiomático de separação ($\mathbf{ZFC_5}$). Para detalhes acerca dessas implicações, ver Krause (2002a, p. 127-128).

[22] A existência de tal x é garantida por $\mathbf{ZFC_7}$ – o axioma do par – aplicado aos conjuntos a e b, em seguida ao conjunto c (obtendo-se o unitário de c como definido anteriormente) e, por fim, aos conjuntos resultantes dessas duas aplicações.

três elementos $\{x, y, z\} =_{def} \{x, y\} \cup \{z\}$; para um de n elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} =_{def} \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\} \cup \{a_n\}$.

Além disso, é possível provar que, para um dado x, o conjunto união $\bigcup x$ é único[23] e, destaque-se, é a partir dos axiomas do conjunto união e do esquema axiomático de separação, que se pode definir a *interseção* de dois conjuntos x e y, denotada por $x \cap y$, do seguinte modo: $x \cap y =_{def} \{z \in x \cup y : z \in x \wedge z \in y\}$, o complemento de um conjunto em relação a outro, etc.

ZFC$_8$ [Axioma da Regularidade]

$$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset))$$

Ou seja, dado um conjunto x não-vazio, existe um elemento y desse conjunto x tal que a interseção entre x e y é vazia. O axioma proíbe que um conjunto tenha a si mesmo como elemento. Isso pode causar estranheza ao leitor que se inicia em teoria de conjuntos e, por isso, gostaríamos de mencionar, mesmo que brevemente, o por que de sua postulação.

Primeiramente, pode parecer estranho que um conjunto possa pertencer a si mesmo: estranheza que se justifica recorrendo-se a inúmeros exemplos do cotidiano. Um deles poderia ser o de que é bastante óbvio que o conjunto de todos os eleitores não é um eleitor. Mas, por outro lado, o que dizer de casos como o conjunto de todos os objetos abstratos? É ele um objeto abstrato? Ou então, o que dizer do conjunto de todos os conjuntos? É ele mesmo um conjunto? Pertence a si mesmo?

Pode ser que, nesse ponto, a estranheza inicial dê lugar à perplexidade. Uma perplexidade semelhante ocorreu entre os matemáticos nas primeiras décadas do século XX. Em 1917, D. Mirimanoff (1861−1945) percebeu que a teoria axiomática originalmente apresentada por Zermelo não incorpora o axioma **ZFC$_8$** (que foi introduzido por von

[23]Ver Krivine (1971, p. 4) e também Krause (2002a, p. 128).

Neumann) e permitia, portanto, a existência de certos tipos de conjuntos denominados *extraordinários* ou *não bem-fundados*. De um modo geral, tais conjuntos caracterizam-se por terem entre seus elementos conjuntos, digamos $x_1, x_2, x_3, \ldots$, de modo que se tenha $\ldots x_3 \in x_2 \in x_1$, em notação óbvia. Um caso particular é o de haver uma determinada seqüência finita $x_1, \ldots, x_n$ tal que $x_2 \in x_1, x_3 \in x_2, \ldots, x_1 \in x_n$. Em outras palavras, pode também haver um certo 'retorno' ao ponto de partida, uma espécie de 'circularidade': daí alguns tipos de conjuntos extraordinários serem chamados *n-circulares* ou, simplesmente, *circulares*.

À existência de tais conjuntos não bem-fundados foi imposta uma restrição, inicialmente sugerida por von Neumann, que atualmente integra os axiomas de ZFC sob a denominação de axioma da regularidade ou, como também é chamado, axioma da fundação.[24]

ZFC$_9$ [Axioma do Infinito]

$$\exists x(\emptyset \in x \land \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$$

Intuitivamente, existe um conjunto x que contém o conjunto vazio $\emptyset$ e é de tal modo que, se um conjunto qualquer y pertence a ele, isso implica que a união desse conjunto y com o seu unitário $\{y\}$ também pertence a x. A postulação desse axioma origina-se da necessidade de obtermos um conjunto com infinitos elementos – note que até então, a única coisa que tínhamos adjetivada por 'infinito' em ZFC era a referência a infinitos conjuntos, porém sem nada que garantisse a existência de um conjunto infinito.

Particularmente importante, esse axioma afirma a existência de um 'conjunto indutivo' que poderia ser assim definido:

Definição 2.2.1 *Um conjunto x é **indutivo** se, e somente se, $\emptyset \in x$ e $\forall y(y \in x \to y' \in$*

[24] Quanto a restrição sugerida por von Neumann, ver Neumann (1925, p. 239). Para obter outros detalhes acerca de conjuntos extraordinários, bem como de suas possíveis aplicações à Física, ver Krause (2002a, p. 117-119;129-131).

x), *onde* $y' = y \cup \{y\}$ *é o* sucessor (*conjuntista*) *de* y.

Conseqüentemente, $\mathbf{ZFC}_9$ permite dizer que a coleção dos números naturais, uma vez obtidos em ZFC, é um conjunto. Uma informação adicional pode, eventualmente, permitir ao leitor compreender essa última afirmação. Os números naturais ($\mathbb{N}$) são introduzidos do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
&0 =_{Def} \emptyset\\
&1 =_{Def} \{\emptyset\}\\
&2 =_{Def} \{\{\emptyset\}\}\\
&3 =_{Def} \{\{\{\emptyset\}\}\}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

na versão devida à *Zermelo* ou

$$
\begin{aligned}
&0 =_{Def} \emptyset\\
&1 =_{Def} \{\emptyset\}\\
&2 =_{Def} \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\\
&3 =_{Def} \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

na versão devida à *von Neumann*. No entanto, só podemos formar um *conjunto* com todos eles com o uso de $\mathbf{ZFC}_9$.[25]

A importância da obtenção do conjunto dos números naturais pode ser percebida na medida em que é somente a partir da demonstração da existência de tal conjunto (ou de outro conjunto com infinitos elementos) que se torna possível definir as operações binárias usuais da aritmética como funções próprias da teoria de conjuntos.[26]

[25]Outros detalhes podem ser encontrados em Suppes (1968, p. 87-88), Krause (2002a, 110ss), entre outros.

[26]Para detalhes, ver Suppes (1968, p. 85).

Passaremos agora a um último axioma de ZFC que, possivelmente, seja o mais polêmico dentre todos. Referimo-nos ao axioma da escolha. Além da polêmica resultante das diversas concepções existentes de matemática, o axioma da escolha foi provado ser independente dos demais axiomas de ZFC. Dizer que um axioma é independente em ZFC significa, grosso modo, dizer que tal axioma não pode ser provado ou 'desprovado' a partir dos demais axiomas de ZFC.[27] Dentre as várias maneiras de apresentar tal axioma, optamos por originada com Zermelo, em 1904, sendo que uma descrição do mesmo pode ser a seguinte:[28]

ZFC$_{10}$ [Axioma da Escolha]

$$\forall x(\forall y \forall z((y \in x \land z \in x \land y \neq z) \rightarrow (y \neq \emptyset \land y \cap z = \emptyset)) \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists t \forall z(z \in x \rightarrow \exists w(t \cap z = \{w\})))$$

Para exemplificar, tomemos um conjunto x que tem como elementos somente os conjuntos y e z, não vazios e dois-a-dois disjuntos ($y \cap z = \emptyset$). O axioma afirma que existe um conjunto t cuja interseção com qualquer elemento z de x tem exatamente um elemento, ou seja, $t \cap z = \{w\}$ é um conjunto unitário.[29] Em outras palavras, y "escolhe" um (e apenas um) elemento de cada elemento de x. Cabe observar que, no caso de x ser finito, a expressão do axioma acima é um teorema de ZFC.

Apresentados os axiomas de ZFC, estamos em condições de avançar em nosso empreendimento. Já afirmamos anteriormente que a caracterização de *conjunto* dada por Cantor se referia a '*objetos definidos e distintos*'. Tentamos fazer notar que essa caracterização intuitiva se transmitiu às versões axiomáticas das teorias de conjuntos (ZFC, em nosso caso) principalmente através dos axiomas **AL**$_1$ e **AL**$_2$ da identidade e do

[27] Para outros detalhes, inclusive da prova de Fraenkel, ver Fraenkel (1967) bem como Krause (2002a, 110ss; 132ss). Convém mencionar, também, que muitos resultados da matemática clássica dependem do axioma da escolha. Ver, por exemplo, Suppes (1968, p. 150ss). Além do mais, tal axioma acarreta alguns "paradoxos" (contra-intuitivos), como, por exemplo, o de Banach-Tarski. Ver Jech (1977), entre outros.

[28] Remete-se o leitor interessado a Rubin e Rubin (1963) para outras formulações.

[29] Cf. Suppes (1968, p. 152).

axioma da extensionalidade ($\mathbf{ZFC}_1$).

Além disso, um *conjunto* de ZFC é algo que pode ser admitido somente à luz de seus axiomas. Como tais axiomas foram motivados por uma certa concepção intuitiva (a $\mathcal{HC}$), *todos* os conjuntos de ZFC são elementos de uma coleção $\mathcal{V}$. E ainda, nesta "estrutura" $\langle \mathcal{V}, \in \rangle$ (que não é uma estrutura "conjuntista" no sentido de não ser obtida em ZFC, mas na metamatemática), valem, em particular, o axioma da extensionalidade e os axiomas $\mathbf{AL}_1$ e $\mathbf{AL}_2$,[30] de modo que *todo* conjunto obedece o que chamamos de Teoria Tradicional da Identidade. (Ver a seção 3.2 abaixo.)

Para os nossos propósitos, cabe observar que dentro de tal 'universo', tanto os elementos de conjuntos como os próprios conjuntos obtidos em ZFC estão providos de uma espécie de *'identificação'* que permite comparar dois conjuntos quaisquer entre si e, conseqüentemente, afirmar que são ou idênticos ou diferentes um do outro. Como tornaremos explícito no capítulo seguinte, a identidade pode ser definida pela indiscernibilidade e isso implicará que ao dizer que dois conjuntos são idênticos, estamos dizendo que eles compartilham todas as suas propriedades ou, em contextos extensionais, que eles possuem os mesmos elementos e pertencem aos mesmos conjuntos. De modo análogo, dizer que dois conjuntos são diferentes corresponde a dizer ou que eles não têm os mesmos elementos ou que existe alguma propriedade que um deles possui e o outro não, ou seja, que existe algum conjunto ao qual um deles pertence e o outro não. A idéia básica de uma tal teoria da identidade – que pode receber a denominação de leibniziana – perpassa, de um modo ou de outro, todas as versões axiomáticas da teoria de conjuntos, em particular ZFC.

[30]Cf. Franco de Oliveira (1980, p. 229ss).

3 *Individualidade, lógica e matemática*

No capítulo precedente, tratamos de caracterizar o que estamos tomando por matemática. Ao fazê-lo, vinculamo-la a uma teoria de conjuntos, em particular, a ZFC. Descrevemos os axiomas de ZFC e a sua motivação, por meio da Hierarquia Cumulativa, e salientamos que tal axiomática conserva a noção intuitiva de conjunto dada por Cantor, como sendo uma coleção de *elementos definidos e distintos*. Aqui, queremos discutir com mais detalhes o sentido desta palavra "distinto", de modo que explicitemos uma característica de ZFC: as entidades que admite são aquelas que obedecem a uma teoria da identidade que permite que as qualifiquemos de *indivíduos* no sentido de que é sempre possível atribuir a cada um dos conjuntos de ZFC uma propriedade que somente ele tenha, deste modo, por força da lógica ("leibniziana") subjacente, distinguindo-o dos demais. Isso implica que, em ZFC, bem como em toda a matemática nela erigida, não há entidades indiscerníveis (no sentido filosófico) que concordem em todos os seus atributos (ou seja, na linguagem da teoria de conjuntos, que tenham os mesmos elementos e pertençam aos mesmos conjuntos). Porém, podemos mesmo assim falar em indiscernibilidade em ZFC, mas este conceito somente poderá ser devidamente caracterizado relativamente a uma dada estrutura, como veremos abaixo. Obviamente, o manifesto acima carece de argumentação mais convincente: precisamos explicitar o que tomamos por 'indivíduo' e qual é, especificamente, a teoria da identidade a que nos referimos.

Assim, iniciamos o capítulo explicitando alguns modos pelos quais a individualidade é considerada em contextos filosóficos.

3.1 Individualidade

Soa trivial mencionar que consideramos os objetos com os quais nos deparamos em nosso cotidiano como sendo *indivíduos*. De fato, mesas, garrafas térmicas, animais de estimação, pessoas, entre outros, são comumente considerados por nós como possuindo algum tipo de individualidade. No entanto, essa mesma trivialidade desaparece quando se trata de explicitar em que exatamente consiste tal individualidade, ou seja, explicitar o que estaria conferindo individualidade aos objetos mencionados.

Uma resposta sugere algum tipo de vínculo com a noção de *distinguibilidade*: um objeto é tomado como possuindo individualidade na medida em que é possível distingui-lo dos demais. A noção de distinguibilidade, por sua vez, comumente é entendida recorrendo-se às diferenças existentes entre as propriedades dos objetos, o que sugere, inclusive, que nelas é que pode ser encontrada a base para a sua individualidade.

Por mais parecidos que sejam quaisquer objetos físicos, parece razoável supor que uma análise mais cuidadosa encontraria alguma diferença que permitisse distingui-los. Não há surpresa nesse fato: basta que pensemos, por exemplo, em arranhões, marcas, diferenças na composição dos materiais constituintes, entre outros. Qualquer comparação entre dois objetos que, inicialmente, indique uma completa similaridade entre eles pode, num momento posterior, ter seu resultado contestado ou por um refinamento dos dispositivos de análise ou pela expansão dos critérios em que ela foi realizada. Se adotarmos um tal critério de individuação, podemos dizer que optamos pela concepção que, na literatura, costuma-se encerrar dentro das '*bundle theories*', que poderia ser traduzido por algo como '*teorias de pacote*'. Tais teorias, em síntese, identificam um indivíduo como sendo uma coleção de propriedades ou de atributos.

Uma ressalva importante, no entanto, precisa ser feita: se indivíduos são não mais do que coleções de propriedades, como podemos nos certificar de que dois objetos quaisquer não irão compartilhar todas essas propriedades? De que maneira é possível dar garantias de que existirão diferenças entre dois objetos? Ou, ainda, o que garante que não seja permitido a outra entidade possuir a mesma coleção de propriedades?

Como o leitor talvez tenha percebido, algo mais é necessário: tomar a noção de indivíduo a partir da distinguibilidade via coleção de suas propriedades exige postular algum tipo de princípio que garanta não acontecer que dois objetos compartilhem todas as propriedades.

Para cumprir tal exigência costuma-se, por vezes, adotar um princípio metafísico denominado de *Princípio da Identidade dos Indiscerníveis* (PII), atribuído a Leibniz. Grosso modo, tal princípio afirma "[...] não ser verdade duas substâncias assemelharem-se completamente e diferirem *solo numero*."(LEIBNIZ, 1980, p. 125). Em outras palavras, dois objetos não podem ter exatamente todas as mesmas propriedades ou ainda, noutra tradução, se são *dois* objetos, alguma qualidade deve diferenciá-los.[1]

Uma pequena antecipação: a matemática, tal como a descrevemos no capítulo precedente, "adota", de certa forma, essa concepção leibniziana: se dois objetos são *iguais* (ou *idênticos*) então eles são o *mesmo* objeto. Iremos detalhar esse vínculo no que segue, em particular quando apresentarmos a teoria da identidade de ZFC.

Mas, voltemos ao PII e à impossibilidade de existirem entidades que se distingam *solo numero*, ou seja, somente por uma ser uma e outra ser outra, sem que haja propriedade que as diferencie. Mas e se, num caso hipotético e que não pode ser descartado *a priori*, dois objetos possuíssem as mesmas propriedades como, por exemplo, forma, cor, dimensões, marcas na superfície, etc? Por exemplo, suponha um experimento mental que remetesse a um contexto *à la* "Guerra nas Estrelas", no qual um dispositivo replicador é capaz de reproduzir um objeto qualquer resultando em dois objetos com exatamente o

[1]Uma discussão acalorada vem ocorrendo sobre, por exemplo, sua necessidade ou contingência, sobre quais propriedades são legítimas para serem consideradas, etc., motivada, sobretudo, por alguns resultados nos domínios da física quântica, como a superposição, por exemplo (ver p. 103). Aliás, nesses domínios da física, discute-se, inclusive, diferentes versões do PII considerando diferentes tipos de propriedades. Para detalhes, ver French (1989c, p. 141-166); French (2002) e ainda Castellani e Mittelstaedt (2000).

mesmo conjunto de propriedades. O que garantirá, nesse caso, a distinguibilidade de tais objetos?

A resposta geralmente recorre a uma propriedade que, supostamente, ainda não teria sido contemplada: a localização espaço-temporal. Neste caso, claro está, o princípio que garante que dois objetos não compartilhem todas as propriedades – e agora incluindo a propriedade espaço-temporal – é um outro pressuposto, conhecido como *Princípio da Impenetrabilidade* dos objetos que, grosso modo, afirma que *dois* (ou mais) *objetos não podem ocupar o mesmo lugar do espaço ao mesmo tempo.*

A surpresa surge, após o aparente sucesso da resposta que apela à impenetrabilidade, quando se questiona qual poderia ser o fundamento dessa característica dos objetos. Seria, por exemplo, a matéria ou a substância de que tais objetos são constituídos que estaria a conferir-lhes impenetrabilidade? Em caso afirmativo, por que não afirmar então que a individualidade de um objeto é dada por essa matéria, por essa substância que o constitui e que extrapolaria a coleção de suas propriedades?

Advogar em prol desta última resposta significa defender que a distinguibilidade (e a conseqüente individualidade, como sugerido acima) não pode ser explicada unicamente a partir das propriedades de um objeto. Deve existir alguma "coisa" além das propriedades de um objeto que esteja a lhe conferir individualidade – uma espécie de propriedade '*transcendental*', e então estaríamos falando em uma '*individualidade transcendental*'.[2] O que é, no entanto, essa "coisa" responsável pela individuação de um objeto?

Uma forte candidata é algo associado à antiga noção de *substância*, algo em que as propriedades de um indivíduo estariam ancoradas. Embora algumas tentativas de caracterizá-la já apareçam na Grécia Antiga, interessa-nos particularmente a "definição" lockeana de substância como sendo "[...] alguma coisa que nós não sabemos o que é."(LOCKE, 1979, p. 95).[3] Em particular, a *substância* consistiria em alguma coisa que, em si mesma, não seria uma propriedade, mas da qual só podemos falar por meio das

[2] Termo cunhado por H. Post, nada tendo de kantiano. Para detalhes, ver Post (1963).
[3] J. Locke (1632-1704). Ver também, a esse respeito, French (1989a).

propriedades que a constituem – o que nos parece uma descrição bastante obscura e traz problemas a esta interpretação!

Outra forma de discurso tem surgido na literatura resgatando termos como '*haecceity*' ou '*primitive thisness*'.[4] Convém salientar que, nesse caso, são elas tomadas como base primitiva para a individualidade e, por serem primitivas, não se pode explicitá-las mais detalhadamente – o que seria bastante desejável – permanecendo também como alternativas pouco esclarecedoras.

Uma outra candidata a prover a individualidade é a noção de *auto-identidade*, expressa como '$a = a$', por exemplo, para caracterizar um indivíduo 'a'. Em outros termos, um indivíduo seria idêntico a ele mesmo e a nada mais: $a = a$ e $a \neq b$, para todo b *diferente* de a (é claro que há circularidade aqui). Deve-se notar, no entanto, que tal noção talvez pudesse ser tomada como uma propriedade relacional – *ser idêntico a si mesmo* – e, desse modo, poderia perfeitamente ser abrangida pelas teorias de pacote, com isso afastando as "teorias de substância" e sendo, aparentemente, mais tratável formalmente. Além do mais, nesse caso, uma ressalva precisaria ser feita: quando se afirma que a *auto-identidade* é algo relevante para a caracterização de um indivíduo, não se pretende dizer que ela atua como um individualizador, como algo que lhe *confere* identidade. O que se deseja dizer é que ela seria uma característica "essencial" dos indivíduos.[5]

Salientamos que intimamente relacionada a esta última candidata, outra concepção advoga que a individualidade de um objeto exprime uma certa *distinção* com respeito aos outros objetos de mesma espécie. Nesse caso, estaríamos adotando a concepção que toma individualidade e distinguibilidade como conceitos intrinsecamente relacionados com a noção de *pluralidade contável*. A esse respeito são ilustrativas as indagações de B. Rus-

[4] O termo 'thisness' parece ter sido tomado de empréstimo do filósofo John Duns Scotus (1266-1308) e, grosso modo, significa '*a propriedade de ser idêntico com um certo indivíduo particular.*' Cf. Adams (1979, p. 7). Outros detalhes podem ser vistos em Redhead e Teller (1991, 1992).

[5] Embora essa distinção seja bastante sutil, justifica-se na medida em que negar a auto-identidade é uma das formas que nos permitem caracterizar formalmente o que se pode entender por *não-indivíduos* (como detalharemos à frente). Além do mais, essa distinção enfatiza a auto-identidade como uma propriedade ou relação bastante peculiar se comparada com outras relações. Remete-se o leitor a French e Krause (2004b) para detalhes acerca de tal peculiaridade.

sell (1872-1970): "'Como definiríamos a diversidade que nos faz contar objetos como dois em um censo?' Poderíamos colocar o mesmo problema em palavras que pareçam diferentes, por exemplo, 'Qual o significado de *um particular*?' ou 'Que tipos de objetos podem ter nomes próprios?"'(1948, p. 292, tradução nossa); e ainda Lowe quando diz: "[...] um objeto é diferenciado de outros de sua espécie de tal forma que ele e eles são capazes de constituir uma *pluralidade contável*, com cada membro dessa pluralidade contando como justamente *um*, uma *unidade* de sua espécie."(1994, p. 536, tradução nossa) e, noutro momento e de modo a enfatizar a relação desta concepção com a identidade, quando afirma que uma condição necessária da contagem é que "[...] os ítens a serem contatos deveriam possuir condições de identidade determinadas, desde que cada um deveria ser contado justamente uma vez e isso pressupõe que eles sejam determinadamente distintos de qualquer item que é incluído na contagem."(LOWE, loc. cit., tradução nossa).

Ocorre, entretanto, que a distinção em relação a outros similares é defendida por alguns autores como não sendo suficiente para atribuir individualidade aos objetos. Basta pensar, por exemplo, que poderíamos conceber um mundo possível composto por apenas um indivíduo. Nesse caso, já lhe foi atribuída individualidade (por hipótese) mas, evidentemente, não se recorreu a qualquer tipo de distinguibilidade dele em relação a outros de sua espécie ou a algum tipo de contabilidade.[6] Desse modo, parece ficar claro que distinguibilidade e individualidade podem ser tomadas como conceitualmente distintas da noção de pluralidade contável.

Em quaisquer destes casos, as concepções que defendem algum tipo de individualidade transcendental devem ainda responder ao *problema da descrição* que poderia, grosso modo e a título de informação, ser assim enunciado: se a descrição, em sua forma positiva, consiste em listar atributos, como descrever aquilo que os "transcende"? Não pretendemos, aqui, abordar tais aspectos, nos limitando a remeter o leitor às referências.[7]

No que se segue, estaremos usando o termo 'propriedades' como sinônimo de

[6] Os argumentos e exemplos são tomados de Gracia (1988, p. 34). Veja também French e Krause (2004b).

[7] Ver Krause (2003).

'qualidades' e de 'atributos'. Estaremos também discutindo a validade da *Lei de Leibniz*, que usualmente é aceita (de alguma forma) em matemática (tal como a caracterizamos). E é justamente com vistas a justificar esta última afirmação, que apresentamos a teoria da identidade de ZFC.

3.2 Identidade em ZFC

A discussão filosófica acerca da identidade é vasta e controversa, freqüentemente dando origem a discussões as mais variadas. A identidade pode ser tratada axiomaticamente de diversas maneiras – e não equivalentes – dependendo da linguagem e dos axiomas adotados. Dessa perspectiva, uma caracterização bastante comum é representar a identidade por meio de um predicado binário primitivo "=", *i.e.*, o símbolo de igualdade, sujeito a determinados postulados.

Vejamos como a identidade é tratada em ZFC.

Numa teoria de conjuntos como ZFC, tratada como uma teoria de primeira ordem, assumimos a $\mathcal{L}_{\mathcal{ZFC}}$ e o símbolo "=" regido por axiomas que podem ser assim expressos:

$\mathbf{AI}_1$ $\forall x(x = x)$

$\mathbf{AI}_2$ $\forall x \forall x' \forall y \forall y'(x = x' \wedge y = y' \to (x \in y \to x' \in y'))$

$\mathbf{AI}_3$ ou $\mathbf{ZFC}_1$ (Extensionalidade) $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$

O axioma $\mathbf{AI}_1$ expressa que a igualdade é uma relação reflexiva: informalmente, todo objeto é idêntico a si mesmo. O axioma $\mathbf{AI}_2$, por sua vez, expressa a substitutividade em relação à pertinência que, juntamente com $\mathbf{AI}_3$, garante que conjuntos iguais têm os mesmos elementos e que conjuntos iguais são elementos dos mesmos conjuntos. Também é possível obter, a partir de tais axiomas, teoremas que dão à igualdade assim caracterizada as propriedades de uma relação de equivalência,[8] embora não o façamos aqui.

O que gostaríamos de enfatizar é que, na medida em que a interpretação usual associa conjuntos com extensões de propriedades, tal teoria da identidade pode receber a denominação de "leibniziana", pois dizer que dois conjuntos são idênticos é dizer que eles compartilham todas as mesmas propriedades, *i.e.*, que eles pertencem exatamente aos mesmos conjuntos. Ora, se pertencer a um certo conjunto significa ter uma certa propriedade, vê-se claramente a relação que há com a *Lei de Leibniz*.[9] Em ZFC, se a e b são conjuntos *distintos*, então existe um conjunto c tal que $a \in c$ e $b \notin c$ ou $a \notin c$ e $b \in c$. Veremos à frente a importância de se considerar este fato aparentemente trivial.

Nesse ponto é conveniente mencionarmos o seguinte: a matemática fundada em ZFC serve muito bem, por exemplo, à física que trata dos objetos macroscópicos, que se supõe serem sempre distinguíveis uns dos outros, pelo menos no que concerne à localização espaço-temporal. De fato, nesse domínio, parece razoável afirmar que sempre há algum tipo de diferença entre coisas que não são a mesma, essencialmente porque têm alguma característica que é peculiar a uma delas e não à outra. Nessas condições, parece sempre ser possível, embora às vezes mais facilmente que em outras, distinguir os objetos, fazer afirmações que os individualizem de algum modo. Nesse contexto, qualquer matemática que disso dê conta parece ser bem-vinda. Em especial esse parece ser o caso da matemática de que estamos tratando. (E em muito a apreciamos por isso!)

Podemos afirmar então que esta matemática, construída como é numa teoria de conjuntos extensional e com uma teoria da identidade em que *identidade* é sinônimo de *indistinguibilidade* (coisas são indistinguíveis quando têm exatamente as mesmas propriedades, ou pertencem a exatamente os mesmos conjuntos) – dita, por isso, leibniziana – sempre permite prover uma identificação aos seus elementos, sempre permite tratá-los como *indivíduos*: podemos sempre afirmar que, dados a e b, ou $a = b$ ou $a \neq b$ e, nesse

[8]Uma relação de equivalência é uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva. A simetria pode ser expressa, simbolicamente, por $\forall x \forall y (x = y \to y = x)$; a transitividade, do mesmo modo, por $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \to x = z)$. Para detalhes, ver Krause (2002a, p. 80) e Mendelson (1979).

[9]Ver p. 49.

último caso, pelo menos em princípio, dizer que há um conjunto c tal que $a \in c$ mas $b \notin c$ ou vice-versa.[10] Mais que isso, sempre nos é permitido dizer da auto-identidade de um objeto: ele sempre pode ser dito ser *idêntico* a si mesmo (se denotamos por "a" tal objeto, é sempre o caso que $a = a$) em virtude do axioma $\mathbf{AI}_1$. Essa condição fornece uma característica de *indivíduos* às entidades admitidas por ZFC e, como tomamos a matemática clássica como aquela construída sobre ZFC, por extensão, afirmaremos que as entidades admitidas por tal matemática são também indivíduos.

Na seção seguinte, faremos uma digressão sobre o conceito de *indivíduo*, procurando caracterizar de modo mais preciso o modo como podemos relacionar o que seja um indivíduo e a *Lei de Leibniz*. Com isso, procuramos evidenciar a relevância de se considerar os princípios lógicos subjacentes em uma discussão desta natureza. Deste modo, a discussão seguinte tem mais uma característica filosófica. Para tanto, valer-nos-emos, em parte, da caracterização de indivíduos proposta por Krause (1996).

3.3 Indivíduos: uma caracterização

Tomemos Δ como sendo um conjunto não-vazio e $\mathcal{P}$ como sendo uma classe de atributos dos elementos de Δ.[11] Para as finalidades de nossa discussão, podemos pensar $\mathcal{P}$ como sendo um conjunto enumerável, de modo que podemos listar seus elementos: $P_1, P_2, \ldots$.[12] Nesta seção, usaremos uma terminologia alternativa, mais próxima da filosófica, falando em *atributo de x* quando queremos dizer um conjunto ao qual x pertence. Igualmente, usaremos letras maiúsculas para denotar atributos.

[10] Um exemplo de tal conjunto c poderia ser o de $c = \{a\}$.

[11] Tal classe pode ser pensada como sendo constituída por subconjuntos dos elementos de Δ, sendo cada um desses subconjuntos a extensão de alguma qualidade ou propriedade dos elementos de Δ. Aqui, consideraremos as *propriedades* ou *atributos* simplesmente como *conjuntos*, certos de que o leitor atento saberá fazer a distinção. Assim, dizer que um objeto tem uma certa propriedade ou um certo atributo é dizer que ele pertence a um determinado conjunto.

[12] Agradecemos ao Prof. Newton da Costa por sua observação acerca dos possíveis resultados que poderiam ser obtidos caso considerássemos $\mathcal{P}$ como sendo uma família não vazia qualquer de predicados, mesmo transfinita. Sondar tais possibilidades é coisa que esperamos poder desenvolver em outro momento.

Definição 3.3.1

(i) *Para todo $x \in \Delta$, a classe de todos os atributos de x é denotada $\mathcal{P}_x$.* Ou, equivalentemente, $\mathcal{P}_x$ é um conjunto tal que $\mathcal{P}_x \subseteq \mathcal{P}$ e $\forall P_j(P_j \in \mathcal{P}_x \rightarrow x \in P_j)$. Alternativamente, em vez de $x \in P_j$, escreveremos, por vezes, P_{x_j}.[13]

(ii) *Chama-se* ***posto(x)****, ao menor inteiro λ tal que $\{P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots, P_{x_\lambda}\} \subseteq \mathcal{P}$ '****individualiza****' x,* ou seja, se $x \neq y$, então existe $P_m \notin \{P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots, P_{x_\lambda}\}$ tal que $y \in P_m$ e para todo z, se $z \in P_k$ para todo $P_k \in \{P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots, P_{x_\lambda}\}$, então $z = x$.

(iii) *Se x e y compartilham o mesmo conjunto C de predicados ou atributos, então eles são* indistinguíveis com respeito àquele *conjunto de predicados – denotaremos isso por $x \equiv_C y$.*

A definição dada permite-nos escrever uma versão do PII (mencionado à p. 62) do seguinte modo:

$$x = y \leftrightarrow ((posto(x) = posto(y)) \wedge \forall P(P(x) \leftrightarrow P(y)))$$

onde $x, y \in \Delta$ e P percorre $\mathcal{P}$, lembrando que $P(x)$ é aqui o mesmo que $x \in P$.

Evidencia-se assim o fato que, se dois indivíduos têm o mesmo posto e compartilham as mesmas propriedades, então eles são o mesmo indivíduo. Contrariamente, se discordam em no mínimo um de seus atributos essenciais – um P_ι qualquer, com $\iota < \lambda$ – ou se têm postos distintos, então são diferentes indivíduos.[14] Em particular, se $a \neq b$ decorre que b não satisfaz um predicado I_a definido como $I_a(x) \leftrightarrow x = a$, onde $I_a \in \mathcal{P}$ e $a, b \in \Delta$. Queremos com isso sinalizar que estamos supondo a possibilidade da propriedade de *auto-identidade* pertencer à classe $\mathcal{P}$ dos atributos dos elementos do domínio Δ. Nossa suposição fundamenta-se no fato de que não vemos qualquer razão para sustentar que "*ser idêntico a si mesmo*" não deva ser uma "propriedade" de um indivíduo. Com efeito, tendo em vista a terminologia adotada, $I_a(x)$ significa que existe um conjunto C

[13]Inversamente, se $P_k \notin \mathcal{P}_x$ então $\neg P_k(x)$. Note-se, além do mais, que a admissão de $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}$ para um x qualquer implicaria que x poderia ser idêntico a todo elemento de Δ, *i.e.*, Δ teria apenas um elemento. (pois a igualdade e a *Lei de Leibniz* são supostas válidas – pelo menos por enquanto.)

[14]Simbolicamente e sem fazer menção explícita ao conjunto das propriedades essenciais de um objeto, a afirmação de que x e y são diferentes indivíduos é dada pela seguinte fórmula: $x \neq y \leftrightarrow ((posto(x) \neq posto(y)) \vee (\exists P(P(x) \wedge \neg P(y)) \vee \exists P(\neg P(x) \wedge P(y))))$, com P percorrendo a coleção dos atributos de x e de y.

ao qual somente a pertence. Claro está que, em ZFC, este conjunto é $\{a\}$. Este fato será importante à frente.

Poderia ser esclarecedor fornecermos um exemplo que, salvo a trivialidade, ilustre a definição dada.

Com tal propósito, tomemos Δ para representar o conjunto dos objetos (conjuntos) que são satélites naturais da Terra ou de Marte. Façamos corresponder a cada objeto um nome particular: '*Lua*', '*Deimos*' e '*Phobos*'. Assim, poderíamos representar um conjunto de tais objetos por $\Delta = \{Lua, Deimos, Phobos\}$. Por simplicidade, tomemos as seguintes propriedades descritas informalmente (uma coleção adequada poderia ser buscada em um catálogo astronômico):

$P_1 =_{def}$ ter crateras em sua superfície

$P_2 =_{def}$ não possuir atmosfera

$P_3 =_{def}$ ser um dos menores satélites do sistema solar

$P_4 =_{def}$ ser o satélite natural mais próximo de seu planeta em todo o sistema solar

$P_5 =_{def}$ ser o menor satélite natural do sistema solar

$I_{Lua} =_{def}$ ser idêntico à Lua

$I_{Phobos} =_{def}$ ser idêntico a Phobos

$I_{Deimos} =_{def}$ ser idêntico a Deimos

para formar uma classe dos atributos dos elementos de Δ, *i.e.*, $\mathcal{P}= \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, I_{Lua}, I_{Phobos}, I_{Deimos}\}$.

Tendo em vista tais atributos e os conhecimentos atualmente disponíveis, é possível afirmar que *Phobos* tem crateras em sua superfície (P_1), não possui atmosfera (P_2), é um dos menores satélites naturais do sistema solar (P_3), é o mais próximo de seu planeta em todo o sistema solar (P_4) e é idêntico a si próprio (I_{Phobos}). Portanto, para o objeto designado por '*Phobos*', as fórmulas $P_1(Phobos)$, $P_2(Phobos)$, $P_3(Phobos)$, $P_4(Phobos)$ e $I_{Phobos}(Phobos)$ são verdadeiras.

Desse modo, poderíamos definir o conjunto dos atributos de $Phobos$ – denotado $\mathcal{P}_{Phobos}$ – bem como os demais $\mathcal{P}_x$, para todo $x \in \Delta$, como segue:

$\mathcal{P}_{Lua} = \{I_{Lua}, P_1, P_2\}$

$\mathcal{P}_{Phobos} = \{I_{Phobos}, P_1, P_2, P_3, P_4\}$

$\mathcal{P}_{Deimos} = \{I_{Deimos}, P_1, P_2, P_3, P_5\}$

Note que $\mathcal{P}_{Phobos}$ é o conjunto dos atributos que, em nosso exemplo, individualiza $Phobos$ e que pode incluir um predicado I_{Phobos} como definido acima. Pelo item *(ii)* da definição, $\mathcal{P}_{Phobos}$ tem um *posto* determinado: $posto(Phobos) = 5$ – que é o cardinal associado às consideradas qualidades essenciais de $Phobos$. Do mesmo modo o fazem $posto(Lua)$ com os atributos da Lua e $posto(Deimos)$ com os do respectivo satélite.

Além do mais, se tomarmos um conjunto de predicados $C = \{P_1, P_2, P_3\}$, poderemos dizer que $Phobos$ e $Deimos$ são *indistinguíveis* com respeito a tais predicados e expressamos tal fato por $Phobos \equiv_C Deimos$. Em outras palavras, se considerássemos apenas as propriedades 'ter crateras em sua superfície', 'não possuir atmosfera' e 'ser um dos menores satélites do sistema solar' não conseguiríamos distinguir os dois satélites. É importante que tenhamos isso em mente para uma melhor compreensão do que faremos em seguida.

Seja $\mathfrak{A}$ a seguinte estrutura:

$$\mathfrak{A} = \langle \Delta, P_k \rangle_{k \in K}$$

onde K encerra índices $1_x, 2_x, \ldots, k_x$ dos elementos $x \in \Delta$, com $k_x < posto(x)$ e, assim, $P_k \subset \mathcal{P}$. Intuitivamente podemos pensar tais P_k como remetendo aos predicados de um $x \in \Delta$ que não individualizam tal x – no sentido do item (ii) da definição acima – uma vez que $k_x < posto(x)$. Em outras palavras, a estrutura $\mathfrak{A}$ não necessariamente individualiza os elementos de Δ, pois não encerra todas as suas propriedades "essenciais". À frente, tais estruturas serão exemplificadas com a matemática.

Partindo de uma linguagem $\mathcal{L}$ que tenha nomes $a, b, \ldots$ para os elementos de Δ, ao interpretarmos $\mathcal{L}$ em $\mathfrak{A}$ podemos perceber que $\mathfrak{A}$ age como uma 'estrutura parcial' para os elementos de Δ no que concerne à individuação.

Supondo que $\mathfrak{A}$ poderia ser 'expandida' para uma 'estrutura total' com respeito à individuação $\mathfrak{B}$, tomada do seguinte modo:[15]

$$\mathfrak{B} = \langle \Delta, \mathcal{P} \rangle$$

onde Δ e $\mathcal{P}$ são como definido acima. Numa tal estrutura $\mathfrak{B}$ podemos afirmar que, qualquer que seja o elemento $x \in \Delta$, x pode ser individualizado. Uma estrutura deste tipo será chamada de *rígida* posteriormente.

Definição 3.3.2 *Os elementos $x \in \Delta$ são **indivíduos** se a estrutura parcial $\mathfrak{A}$ pode ser expandida a uma estrutura total $\mathfrak{B}$, como descrito acima.*

Mais à frente, veremos algumas condições perante as quais $\mathfrak{A}$ pode ser expandida a uma estrutura $\mathfrak{B}$. No momento, interessa-nos considerar a relação que há entre tal idéia e a *Lei de Leibniz*, que resume, de certo modo, a maneira pela qual a identidade é vista também em ZFC.

Voltemos ao exemplo dado acima: *Phobos* pode ser indistinguível de *Deimos* relativamente a uma certa estrutura. Se chamarmos essa estrutura de $\mathfrak{A}$, então, nesse caso, podemos ter $\mathfrak{A} = \langle \{Lua, Phobos, Deimos\}, P1, P2, P3 \rangle$.

Sendo possível expandir a estrutura $\mathfrak{A}$ a uma outra estrutura $\mathfrak{B}$ na qual exista algum atributo P tal que $P(Phobos)$ e $\neg P(Deimos)$ ou $P(Deimos)$ e $\neg P(Phobos)$, ou que implique $posto(Phobos) \neq posto(Deimos)$, podemos então considerar *Phobos* e *Deimos*

[15]A terminologia que utilizamos – 'estrutura parcial' e 'estrutura total' – é inspirada nos trabalhos de Mikenberg, da Costa e Chuaqui (1988); da Costa (1989) e da Costa (1989b) não concordando necessariamente com as definições correspondentes que ali são apresentadas.

como sendo indivíduos, como sendo 'dois' e não 'um e o mesmo' (claro, do ponto de vista da estrutura). No exemplo, tal atributo pode ser, por exemplo, $P4$ uma vez que $P4(Phobos)$ e $\neg P4(Deimos)$ ou seja, *Phobos* tem a propriedade de ser o satélite natural mais próximo de seu planeta em todo o sistema solar e, por conseguinte, *Deimos* não a tem.

Uma "estrutura" pode ser vista como fornecendo um certo modo de "ver" determinados objetos. Isto não é muito preciso, mas ilustra o que acontece. Por exemplo, o leitor poderia imaginar uma situação em que dois namorados caminhando abraçados e em sincronia são vistos por alguém míope de uma distância suficientemente grande. Nessas condições – *leia-se*: nessa 'estrutura' – o míope julgará ser apenas uma e mesma a pessoa quem caminha. Expandir a estrutura corresponderia, nesse caso, a aproximar o míope do caminhante ou fornecer-lhe lentes de correção apropriadas. Isso sendo possível, o aparente e indistinguível 'um e o mesmo' seria distinguido, dando lugar ao que pode ser distinguido e corretamente visto como sendo 'dois' indivíduos – na hipótese, namorados.

Embora o exemplo seja algo simples, acreditamos que o que ele ilustra não o seja. Assumimos tal crença motivados pelas possibilidades trazidas pela física quântica, de um modo que estamos ainda por explicitar. Cabe aqui, no entanto uma ressalva: o exemplo que acabamos de fornecer está relacionado com aquilo que pode ser chamado de indistinguibilidade *epistemológica*, diferentemente da indistinguibilidade *ontológica*, típica dos objetos quânticos, segundo alguns. Como vimos, é bastante comum atribuir, intuitivamente, às partículas clássicas, ou mesmos aos objetos do cotidiano um status de indivíduos. Atribuição que parece ser sensatamente realizada a partir, entre outros, do comportamento das mesmas descrito pela estatística clássica (Maxwell-Boltzmann). Por outro lado, partículas elementares, tais como descritas pela física quântica, apresentam um comportamento estatístico radicalmente diverso e, segundo muitos defendem, é impossível que sempre possamos distinguir entre duas dessas entidades de mesmo tipo. Se essa hipótese for correta, parece ser problemático, mesmo com todas as informações disponíveis, atribuir individualidade às partículas elementares, ou seja, expandir a estrutura

$\mathfrak{A}$ a uma estrutura $\mathfrak{B}$ como acima.

O problema da *individuação* de um objeto x, no contexto que estamos adotando, fica ligado à questão de se saber se é possível expandir uma estrutura $\mathfrak{A}$ a uma estrutura $\mathfrak{B}$ que contivesse todas as propriedades "distinguidoras" dos elementos do domínio. A seguir, julgaremos essa questão à luz do que vimos considerando até aqui. Como, portanto, este problema poderia ser analisado a partir de nossas definições? Quais as possibilidades de respostas que nossa discussão aponta? Vejamos.

Vamos discutir em breve a questão sobre atribuir (ou não) individualidade às entidades tratadas pela física quântica e o modo como isso se relaciona com a possibilidade de podermos expandir ou não uma estrutura parcial $\mathfrak{A}$ a uma estrutura total $\mathfrak{B}$, no contexto da validade ou não da *Lei de Leibniz*. Temos, então, quatro combinações de respostas possíveis, a saber:

(i) $\mathfrak{A}$ **pode** ser expandida a $\mathfrak{B}$ e a *Lei de Leibniz* **é válida** (intuitivamente)

Por "válida", queremos dizer que estamos considerando um contexto no qual a identidade é conferida por meio de indistinguibilidade. Feitas as ressalvas acima indicadas, este é o caso, como vimos, de ZFC.

Nesse caso, em virtude da Lei de Leibniz, os elementos do domínio Δ são individualizáveis por seus atributos, ou suas propriedades (conjuntos) contidas em $\mathcal{P}$. Tais elementos de Δ poderiam ser considerados como representando os objetos físicos descritos pela mecânica clássica. Gostaríamos, no entanto, de destacar esse ponto, uma vez que à ele nos reportaremos mais adiante quando tratarmos da expansão de uma estrutura a uma estrutura rígida. Naquela ocasião, estaremos supondo o caso (i), *i.e.*, a situação em que a *Lei de Leibniz* é válida em ZFC e a expansão de uma estrutura a uma estrutura rígida é a expansão acima mencionada.

(ii) $\mathfrak{A}$ **pode** ser expandida a $\mathfrak{B}$ e a *Lei de Leibniz* **não é válida**

Como já tivemos oportunidade de mencionar, a questão da validade ou não da Lei de Leibniz no domínio da física quântica é controversa e muito discutida na literatura filosófica.[16] Aqui, não entramos nos pormenores dessa questão, mas para efeitos de uma discussão mais detalhada do ponto que nos interessa enfatizar, levaremos em conta *também* a possibilidade de que a Lei de Leibniz possa não valer em uma lógica ou matemática alternativa.[17]

Assim, na hipótese (ii), os atributos dos elementos do domínio Δ não são suficientes para individualizá-los. Algo mais (alguma forma de *substratum*) teria que ser postulado. Não seria possível utilizarmos, por exemplo, a definição 3.3.1 anteriormente dada. Obviamente, como a *Lei de Leibniz* não estaria valendo, teríamos a possibilidade da existência de entidades que diferem *solo numero*. Poderíamos sustentar (ii) somente se defendêssemos algum tipo de individualidade transcendental como, por exemplo, '*substância*', '*haecceity*', '*primitive thisness*', ou '*auto-identidade*'.[18] Isso porque (ii) implica que os elementos de Δ podem ser individualizados, mas a não validade da *Lei de Leibniz* implica que essa individuação somente poderia ser atribuída por algo que não fosse um atributo, logo, alguma forma de *substratum* poderia ser suposto em tal metafísica.

(iii) $\mathfrak{A}$ **não pode** ser expandida a $\mathfrak{B}$ e a *Lei de Leibniz* **é válida**

Ao supor a validade da *Lei de Leibniz*, essa resposta implica que, de algum modo, é possível individualizar os objetos do domínio Δ, ao menos *conceitualmente* por algum atributo.[19] O que teríamos aqui seria uma espécie de estrutura incompleta, onde poderíamos supor que há algum tipo de propriedade 'escondida' que não pertence a $\mathfrak{A}$ e nem a $\mathfrak{B}$, responsável pela individuação dos elementos do domínio – também aqui haveria algum

[16] Ver, por exemplo, French e Krause (2004b).

[17] Ver Krause (1992, 1996, 2002b).

[18] Essa última num sentido que não o de uma propriedade que um objeto tem consigo mesmo, *i.e.*, não passível de ser enquadrada nas teorias de pacote.

[19] Cf. Krause (1996, p. 329).

tipo de individualidade transcendental sendo considerada. Essa possibilidade e a teoria das variáveis ocultas em mecânica quântica são temas que nos parecem vinculados. Em outros termos, teorias de variáveis ocultas poderiam, talvez, ser enquadradas formalmente como teorias nas quais o item (iii) se cumpre.

(iv) $\mathfrak{A}$ **não pode** ser expandida a $\mathfrak{B}$ e a *Lei de Leibniz* **não é válida**

Nesse caso nos depararíamos com a completa impossibilidade de individualizar os objetos do domínio. Estaríamos tratando com elementos indistinguíveis *tout court*, onde não teria sentido qualquer tentativa de tratá-los como indivíduos. Essa alternativa parece ser defendida por alguns autores em certos domínios da física quântica, atribuindo aos elementos de tais domínios um status de *não-indivíduos*.[20]

Nosso estudo está assumindo o tipo de resposta (i): partimos da pressuposição de que é possível expandir $\mathfrak{A}$ à estrutura $\mathfrak{B}$ e de que é válida uma versão da *Lei de Leibniz*, uma vez que estamos operando em ZFC. Nossa justificativa para adotar esta pressuposição é que a mesma também é assumida pela matemática clássica. Já nossa justificativa para assumirmos ser possível expandir a estrutura parcial $\mathfrak{A}$ para a estrutura total $\mathfrak{B}$ tem razões teleológicas: através dela acreditamos ser possível mais facilmente atingir nossos propósitos.

O que gostaríamos de enfatizar aqui é que a tentativa de comprometer a matemática clássica com uma noção de indivíduo, além de depender das teorias físicas de que dispomos, depende não somente de posturas filosóficas, mas também da lógica e da matemática subjacentes. Mas em que sentido podemos dizer que uma teoria está comprometida ontologicamente? Através de quais critérios podemos fazer afirmações acerca de compromissos ontológicos de uma teoria?

[20]A concepção que aceita/defende a caracterização das entidades quânticas como *não-indivíduos* será exposta com mais detalhes no capítulo 5.

Ainda que este tópico não seja parte integrante de nosso argumento, poderíamos mencionar que, acerca das questões acima colocadas, possivelmente o leitor iniciado na literatura filosófica contemporânea deve lembrar do '*critério de compromisso ontológico*' formulado por W. V. O. Quine (1908-2000): "Ser é ser o valor de uma variável."(QUINE, 1990a, p. 35) – recitará, lembrando o popular dito quineano. Todavia, como nem todos os leitores sejam iniciados nesses assuntos e com vistas à apresentação de um texto autocontido, tomamos a liberdade de expô-lo brevemente no que segue. Uma ressalva, no entanto, precisa ser feita: ao sugerirmos e defendermos um compromisso ontológico da matemática clássica com a noção de indivíduo, não estaremos nos fundamentando exclusivamente no critério quineano. Nossa argumentação seguirá uma linha um pouco diferente que poderia ser, salvo pelos detalhes, assim antecipada: operar em ZFC como a formulamos é, em certa medida, operar em um universo $\langle \mathcal{V}, \in \rangle$, como veremos à frente. Como vimos, a matemática é a disciplina que se ocupa de determinadas estruturas conjuntistas. Mas qualquer estrutura em ZFC pode ser expandida (diremos que ela tem uma expansão rígida trivial) na qual podemos sempre distinguir cada elemento do domínio a partir de uma certa propriedade: ser idêntico a si mesmo. Como tomamos o que seja um indivíduo a partir da distinguibilidade em relação às suas propriedades, defenderemos que no universo de ZFC sempre é possível individualizar os objetos do domínio (conjuntos), e é a partir desse fato que defenderemos o compromisso ontológico de ZFC com uma noção de *indivíduo*.

Voltemos, porém, ao critério quineano. Embora não estejamos concentrando nele nossa argumentação, acreditamos que nosso ponto de vista é reforçado se entendermos o critério em apreço. É com essa pretensão que o apresentamos.

3.4 Um critério de compromisso ontológico

Buscando explicitar com que entidades nos comprometemos no âmbito de cada discurso, Quine formulou o chamado '*critério de compromisso ontológico*' que, segundo afirma, pretende nos fornecer

> [...] um padrão mais explícito por meio do qual se decide com que ontologia está uma determinada teoria ou forma de discurso comprometida: uma teoria está comprometida com aquelas, e só aquelas, entidades às quais as variáveis ligadas da teoria tenham que ser capazes de se referir de modo a que as afirmações feitas na teoria sejam verdadeiras.(QUINE, 1990a, p. 33).

Assim, o único caminho que pode nos levar a compromissos ontológicos é aquele que faz uso de variáveis ligadas: "Ser suposto como uma entidade é, pura e simplesmente, ser contado como o valor de uma variável."(QUINE, 1990a, p. 32). Sendo aplicável apenas às "esquematizações lógicas", o critério aponta para o fato de que o uso de sentenças que contêm os quantificadores existencial ($\exists$) e universal ($\forall$) nos compromete à aceitação das entidades que precisam ser incluídas no domínio de x – uma variável ligada – para que tais sentenças sejam verdadeiras. Além do mais, é importante enfatizar que Quine não está procurando estabelecer *o que existe* mas sim *o que é dito existir*.[21]

É necessário que façamos uma ressalva quanto ao uso indiscriminado do quantificador universal. Isso porque poderíamos ter uma sentença em que ele ocorresse e que fosse verdadeira por vacuidade e, desse modo, acabaria não implicando em compromissos ontológicos.[22] A ressalva faz com que Quine dê uma nova formulação para o critério; nela, o reconhecimento de uma entidade se constituirá num fato externo à própria afirmação expressa nos quantificadores. Trata-se da exigência de estabelecermos explicitamente o

[21] Convém mencionar que, conforme o próprio Quine afirma, o critério não permite decidir entre ontologias rivais. A esse respeito, a seguinte citação é ilustrativa: "Mas como é que se pode decidir entre ontologias rivais? É claro que a resposta não é proporcionada pela fórmula semântica *'Ser é ser o valor de uma variável'*; esta fórmula serve antes, conversamente, para testar a conformidade de uma certa observação ou doutrina a um padrão ontológico prévio. Olhamos para as variáveis ligadas, a propósito da ontologia, não com vista a saber o que há, mas com vista a saber o que é que uma certa observação ou doutrina, nossa ou de outrem, diz que há."(QUINE, 1990a, p. 35).

[22] Tome-se, por exemplo, a sentença $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$ que, numa interpretação, formalize a sentença '*Todos os homens são mortais*'. As condições de verdade dessa sentença permitem: (i) que o antecedente da implicação seja falso; (ii) que a reescrevamos como $\neg\exists x(Hx \wedge \neg Mx)$. Do critério quineano e de (i) resulta que a sentença não requer a existência de homens. Do critério e de (ii) resulta que a sentença não requer a existência de objeto algum. Em outras palavras, a sentença poderia ser verdadeira mesmo se não houvesse quaisquer objetos.

domínio que as variáveis percorrem.[23]

> Todo sistema lingüístico, pelo menos na medida em que usa quantificadores, supõe algum reino de entidades sobre as quais ele fala. [...] Isto resulta evidente do próprio significado dos quantificadores [...]. Do ponto de vista de uma dada linguagem, a questão sobre o que existe é a questão do domínio de valores de suas variáveis.(QUINE, 2000, §44, tradução nossa).

O problema agora é como determinar o domínio de valores das variáveis que uma certa linguagem supõe. Segundo Quine, isso pode ser feito tanto empiricamente quanto aprioristicamente. No primeiro caso, trata-se de uma questão empírica sobre o mundo. No segundo – e para Quine a ontologia diz respeito somente a esse – trata-se de uma questão da natureza da linguagem e da interpretação que se lhe confere.[24] Aliás, os objetos exigidos por uma teoria são os objetos comuns, se houver algum, a todos os possíveis universos – dos diversos modelos – em que a teoria é interpretada.[25]

Voltemo-nos agora para nosso objeto de estudo: um possível compromisso ontológico da matemática clássica, aquela desenvolvida em ZFC como a descrevemos, com a noção de indivíduos. Poderíamos iniciar perguntando se o critério de compromisso ontológico pode ser aplicado numa teoria de conjuntos como ZFC – que tomamos para fundar a matemática.

Inicialmente poderíamos constatar que uma primeira condição é satisfeita: ZFC é uma teoria formalizada – é uma "esquematização lógica" como Quine exige – composta por sentenças em que, entre outros, aparecem os quantificadores. Em seguida, considerando que qualquer comprometimento ontológico a partir do critério é algo sempre relativizado a um certo domínio, poderíamos nos perguntar quais são os objetos aprioristicamente exigidos por ZFC (ou por eventuais modelos dessa teoria axiomática). Obviamente, nessa

[23]Quine ainda argumenta, contra a hipótese de um universo vazio, que as leis dos sistemas lógicos comuns supõem a existência de pelo menos um indivíduo. Se assim não fosse, deixariam de valer algumas leis como, por exemplo, $\forall x(Fx \rightarrow \exists x(Fx))$. Cf. Simpson (1976, p. 210).

[24]Cf. Quine (2000, §44).

[25]Cf. Quine (1990b, p. 44).

determinação, não podemos deixar de também considerar a natureza da linguagem em que a teoria é formulada.

Uma vez que parece legítimo aplicar o critério a ZFC, procuremos responder a pergunta sobre "*o que é suposto como entidade por uma teoria de conjuntos como* ZFC?" A resposta remete àquelas entidades cuja existência é afirmada pelos teoremas de ZFC, e estas são *conjuntos*, para os quais valem tanto as propriedades lógicas quanto a propriedade conjuntista da igualdade uma vez que as variáveis percorrem *conjuntos*, que têm as características de indivíduos já vistas acima.

Com efeito, ZFC usualmente é apresentada a partir de uma linguagem lógica de primeira ordem com igualdade, como vimos. As propriedades lógicas da igualdade são a reflexividade e a substitutividade, expressas por dois de seus axiomas lógicos: ($\mathbf{AL}_1$) e ($\mathbf{AL}_2$), com as restrições apontadas. A suposição de que todo objeto é igual a si mesmo é um lugar comum em uma boa parte das discussões filosóficas.[26] Nem por isso, no entanto, é a única alternativa possível. No capítulo 5 apresentaremos uma concepção filosófica que, partindo de motivações advindas da física quântica, advoga em prol de entidades às quais, supostamente, o conceito de auto-identidade não se aplica. Nesse caso, o fato de ZFC se comprometer com entidades em geral para as quais a auto-identidade é válida, além de ser um fato relevante, pode ser também um fértil terreno filosófico.

Quanto à propriedade conjuntista da igualdade, esta é expressa no axioma da extensionalidade: $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$. Tal propriedade tomada em conjunto com ($\mathbf{AL}_1$) e ($\mathbf{AL}_2$) permite afirmarmos que, em ZFC, quaisquer duas entidades podem ser ditas iguais ou diferentes – embora nem sempre saibamos qual é o caso – e a identidade pode ser vista como leibniziana: se duas entidades possuem os mesmos atributos, ou seja, se pertencem aos mesmos conjuntos e têm os mesmos elementos, então elas são iguais. Assim, se considerássemos a possibilidade de afirmar, de quaisquer duas

[26]Duas citações podem ser ilustrativas: "De acordo com a apresentação tradicional, o princípio lógico de identidade afirma que qualquer juízo da forma '*A é A*' é incondicionalmente verdadeiro, fato que fica garantido pela verdade ontológica segundo a qual todo objeto é idêntico a si mesmo."(SIMPSON, 1976, p. 181) e ainda "Em lógica quantificacional, o princípio de identidade [. . .] diz o que já sabemos: todo objeto é igual a si mesmo."(SIMPSON, 1976, p. 182).

entidades em ZFC, que elas são iguais ou distintas como sendo o critério que as individualiza, então poderíamos asserir que ZFC afirma a existência de indivíduos. Ao adotar a teoria da identidade usual, ZFC se compromete com indivíduos nesta acepção, como já visto anteriormente.[27]

Talvez o leitor possa estar confuso com o aparente fato de que a concepção de indivíduos que apresentamos na seção anterior lhe pareça diferente daquela com a qual acabamos de mencionar que ZFC se compromete. Essa aparente divergência pode ser suprimida – se bem que não pretendamos fazê-lo aqui em detalhes – na medida em que estamos pressupondo contextos extensionais. Em outras palavras, a concepção de indivíduos como sendo um pacote de propriedades, tal como apresentamos, se ajusta às conseqüências da teoria da identidade que ZFC adota, descritas no parágrafo anterior: a possibilidade de afirmar, de quaisquer duas entidades, que são iguais ou diferentes e a igualdade entre entidades a partir de suas propriedades – *i.e.*, pertinência aos mesmos conjuntos e posse dos mesmos elementos. Desse modo, definições como as de '$posto(x)$'; 'estrutura parcial' e 'estrutura total' podem ser acomodadas sem maiores dificuldades. Assim, não seria equivocado dizer que nossa caracterização do que seja um indivíduo encontra-se em sintonia com a descrição do critério que aqui está nos permitindo alegar o comprometimento de ZFC com indivíduos.

No entanto, se ao leitor parecer que estamos requisitando o princípio de caridade em demasia, gostaríamos de apresentar, no próximo capítulo, um outro modo que parece reforçar a idéia de comprometimento de ZFC com uma ontologia de indivíduos.

[27]Talvez assim pudéssemos compreender a tese de Quine de que "não há entidade sem identidade" expressa, dentre outras passagens, quando diz: "Mas que sentido é que pode ser dado a falar-se de entidades das quais não se pode dizer com sentido que são idênticas a si mesmas e distintas umas das outras?"(QUINE, 1990a, p. 24). Parece claro que as entidades a que Quine se refere são aquelas que percorrem conjuntos *à la* Cantor, gozando "[...] de um conceito cristalino de identidade."(QUINE, 1989, p. 62).

4 *Lógica, matemática e uma ontologia de indivíduos*

Encerramos o capítulo anterior com a promessa de apresentar ao leitor outra forma de reforçar a idéia de um compromisso ontológico de ZFC com uma noção de indivíduo. Esta última noção, tornada clara na seção anterior, identifica indivíduos com um pacote de propriedades – e o faz de um modo formal. Nosso argumento irá se utilizar de um resultado já estabelecido no meio matemático que, embora seja matematicamente simples, oferece uma riqueza filosófica que não podemos deixar de explorar. Estamos nos referindo ao seguinte fato: em ZFC, toda estrutura pode ser trivialmente expandida a uma estrutura rígida. Obviamente, iremos tornar claro o que tais conceitos significam bem como o que o próprio resultado parece-nos sugerir.

Convém iniciarmos relembrando que, ao optarmos por identificar indivíduos com um pacote de propriedades, estamos, de algum modo, sugerindo que é a partir da distinguibilidade com respeito às propriedades que podemos considerar alguma entidade como sendo um indivíduo. Em outras palavras, quando definimos indivíduos a partir do conjunto de suas propriedades, a sua individualização depende, fundamentalmente, da possibilidade de expandir uma estrutura parcial $\mathfrak{A}$ a uma estrutura total $\mathfrak{B}$ e de supor a validade da *Lei de Leibniz*. Com isso, o que estamos fazendo é assumir que a individualidade decorre da possibilidade de distinguir entre uma entidade e outra com base em alguma propriedade que uma delas possua e a outra não.[1] No caso particular de uma teo-

[1] O que acabamos de dizer não contradiz outra afirmação nossa, feita no capítulo anterior, de que a distinção em relação a outros similares não é necessária nem suficiente para a individualidade. Tal afirmação foi sustentada quando da investigação acerca da possibilidade de tomar a individualidade e

ria de conjuntos como ZFC em que, sendo extensional, uma propriedade de certos objetos pode ser identificada com uma coleção desses objetos, a distinguibilidade e a conseqüente individualidade podem ser tomadas a partir da pertinência a alguma coleção particular. Um candidato a exercer tal função será, como veremos abaixo, o conjunto unitário do próprio elemento, ou seja, a auto-identidade. Por ora, tratemos de estabelecer o roteiro que seguiremos no capítulo.

Iniciaremos apresentando a noção de distinguibilidade relativa a uma estrutura, na qual desempenha um papel central a noção de *invariância por automorfismos*. Em seguida, veremos que uma teoria de conjuntos como ZFC determina a rigidez de seus modelos (se é que há tais modelos), o que significa dizer que seu único automorfismo é a função identidade. Finalmente, tomamos o fato de que em ZFC toda estrutura pode ser trivialmente expandida a uma estrutura rígida como sendo um outro indicador do comprometimento de ZFC com uma ontologia de indivíduos no sentido do item (i) da p. 74. Vejamos isso com mais detalhes.

Como já tivemos oportunidade de apresentar no primeiro capítulo, uma estrutura matemática é, grosso modo, um construto abstrato de natureza conjuntista.[2] Assim sendo, o domínio de uma estrutura pode assumir como elementos somente entidades para as quais faça sentido o conceito de identidade e coleções desses elementos devem estar submetidas ao axioma da extensionalidade – conceito e axioma que também já tivemos a oportunidade de apresentar. Em outras palavras, qualquer que seja o domínio D de uma estrutura e quaisquer que sejam os elementos a e b desse domínio, a e b sempre podem ser distinguidos, uma vez que sempre é possível afirmar que eles são ou idênticos ou diferentes entre si – embora nem sempre saibamos qual é o caso. Deste modo, dizer que dois diferentes elementos do domínio de uma estrutura são distinguíveis, significa dizer que tais elementos não pertencem a todos os mesmos conjuntos e, neste contexto extensional,

a distinguibilidade como conceitos intrinsecamente vinculados com a noção de *pluralidade contável*. Cf. página 65.

[2]Cf. também da Costa (1999, p. 79).

que não possuem todas as mesmas propriedades.[3] Claro está que essa distinguibilidade se coaduna com a definição dada no capítulo anterior do que seja um indivíduo.

Inicialmente, convém lembrarmos o que é um automorfismo. Costumeiramente define-se um *automorfismo* como sendo *um isomorfismo de um domínio em si mesmo.* Ao leitor pouco familiarizado com tais conceitos matemáticos, possivelmente ao dizermos isso não ajudamos muito. Assim, optamos por fazer aqui uma concessão. Vejamos isso com algum detalhe.

Uma construção permitida pelos axiomas de ZFC é a de par ordenado. Costumeiramente denomina-se *relação* a um conjunto $D \subset Dom(D) \times Im(D)$ cujos elementos são pares ordenados. A partir disso é possível definir a noção de *função*: f é uma função se, e somente se, f é uma relação e $\forall x \in Dom(D)\ \exists! y \in Im(D)(\langle x, y\rangle \in f)$. Podemos escrever "$f : A \to B$" para denotar que f é uma função, em que $A = Dom(f)$ e $Im(f) \subset B$. Se $f : A \to B$ e $x \in A$, então $f(x)$ é o único y tal que $\langle x, y\rangle \in f$. É possível definir então uma função $f : A \to B$ com sendo uma função *injetora* ou 1-1 se, e somente se, f^{-1} também é uma função (sendo que tal f^{-1} é, por sua vez, definida por $\{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in f\}$ e geralmente é dita '*função inversa*'). Além disso, $f : A \to B$ é uma função *sobrejetora* se, e somente se $Im(f) = B$. Finalmente, $f : A \to B$ é uma função *bijetora* se for, simultaneamente, injetora e sobrejetora. De posse de tais noções é possível definir um caso particular do que seja um *isomorfismo*: sejam A e B conjuntos; R e S relações binárias sobre A e B respectivamente, uma função f é um *isomorfismo* de $\langle A, R\rangle$ em $\langle B, S\rangle$ se, e somente se é uma bijeção $f : A \to B$ tal que: $\forall x, y \in A(xRy \leftrightarrow f(x)Sf(y))$. Nesse caso escrevemos $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$ e, intuitivamente, dizemos que f preserva as relações.[4]

Um *automorfismo* é um *isomorfismo de uma estrutura em si mesma.* Um exemplo pode ser aqui de alguma utilidade. Tomemos a estrutura $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, <\rangle$. Nela, a função

[3] Aqui, uma observação pode ser relevante: o fato de dois objetos poderem ser indistinguíveis no contexto de uma estrutura mas distintos entre si se deve ao fato de que nem sempre a estrutura encerra *todas* as propriedades relevantes para uma completa identificação, como vimos anteriormente em nossa discussão sobre indivíduos.

[4] Tomamos as diversas definições acima de empréstimo de Kunen (1980, p. 13ss). Cabe mencionar que a definição de isomorfismo pode ser generalizada.

$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x$, *i.e.*, a função identidade, é um automorfismo dessa estrutura pois f é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ que preserva a relação $<$. Basta ver, sobre essa última afirmação, que $\forall x, y \in \mathbb{Z}(x < y \leftrightarrow f(x) < f(y))$. Se, para esclarecermos ainda mais, tomássemos $x = 4$ e $y = 5$, então teríamos como resultado as sentenças "$4 < 5$" e "$f(4) < f(5)$" que, obviamente, são verdadeiras na estrutura $\mathfrak{A}$. De modo semelhante, a função f definida por $f_k(x) = x + k$, com $k \in \mathbb{Z}$, também é um automorfismo já que, do mesmo modo, $\forall x, y \in \mathbb{Z}(x < y \leftrightarrow f_k(x) < f_k(y))$. Por exemplo, se tomássemos os valores que havíamos atribuído acima para x e y e tomássemos $k = 3$, por exemplo, também seriam verdadeiras as sentenças "$4 < 5$" e "$f_k(4) < f_k(5)$" – essa última correspondendo a sentença "$7 < 8$". Evidentemente, isto tem que valer para todos os x e y pertencentes a $\mathbb{Z}$.

Podemos então definir a noção de invariância sob automorfismos do seguinte modo.

Definição 4.0.1 *Um subconjunto $X \subseteq D$, com D sendo o domínio de uma estrutura, é invariante sob automorfismos da estrutura se $f(X) = X$, para todo automorfismo f da estrutura.*[5]

Duas pequenas citações podem ser adequadas para indicar ao leitor o papel relevante que, em matemática, desempenha a noção de invariância: "Em geral, de qualquer estrutura matemática [...] uma importante questão é investigar os conjuntos e relações que são invariantes sob o grupo de seus automorfismos."(da COSTA, 2003, p. 1, tradução nossa). E, ainda, o dito inspirado de L. Kronecker: "A busca dos invariantes é uma bela, na verdade a mais bela tarefa da matemática. Ainda mais, é na verdade sua única tarefa. E isto não é tudo: é a principal tarefa de todas as ciências."(KRONECKER apud DA COSTA, 2003, p. 21, tradução nossa).

[5]A definição é tomada de empréstimo de Rogers (1967). Cf. Krause e Coelho (2004, p. 12). Convém salientar que a noção de *invariância sob automorfismos* pode ser fortemente vinculada à noção de *definibilidade absoluta*. Ver a obra citada para detalhes.

Uma vez que esclarecemos os conceitos de que iremos nos servir, estamos em condições de apresentar a noção de *distinguibilidade* e de *indistinguibilidade relativa a uma certa estrutura.* Aqui, ficaremos restritos a considerar estruturas de 1^a ordem, mas para as ciências empíricas, estruturas mais elaboradas parecem ser essenciais.[6] Isto, no entanto, não será considerado aqui.

Definição 4.0.2 *Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura, a e b elementos do domínio D dessa estrutura. Diz-se que a e b são* $\mathfrak{A}$-**distinguíveis** *(ou distinguíveis em $\mathfrak{A}$) se, e somente se, existe um subconjunto $X \subseteq D$ tal que:*

(i) X é invariante sob automorfismos de $\mathfrak{A}$, ou seja, $f(X) = X$ para todo automorfismo f de $\mathfrak{A}$

(ii) $a \in X$ se, e somente se, $b \notin X$

caso contrário, dizemos que a e b são $\mathfrak{A}$-**indistinguíveis** *(ou indistinguíveis em $\mathfrak{A}$).*[7]

Uma questão que nesse ponto poderia surgir é se a noção de invariância sob automorfismos é adequada para caracterizar a noção de distinguibilidade – ou de indistinguibilidade – numa estrutura. A esse respeito apelaremos ao argumento da autoridade:[8]

De A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel e A. Levy:[9]

> [...] não existindo característica que distingua um indivíduo do outro [...] em termos matemáticos poderia se dizer que toda permutação de indivíduos pode ser estendida a um automorfismo do universo dos elementos.(FRAENKEL; BAR-HILLEL; LEVY, 1973, p. 59, tradução nossa).

[6] Ver da Costa (2003).

[7] Cf. Krause e Coelho (2004, p. 12ss).

[8] Citações tomadas de empréstimo de Krause e Coelho (2004, p. 11).

[9] A citação se refere ao papel desempenhado pelos *Ur-elementos* na prova de Fraenkel da consistência da negação do Axioma da Escolha com os demais axiomas de ZFU (excluindo o Axioma da Regularidade ou Fundação). Cf. Krause e Coelho (2004, p. 11).

Do matemático português José Sebastião e Silva:

> Se um elemento [de uma certa estrutura] não pode ser individualizado, e portanto logicamente distinguido de outros elementos (como o número i é indistinguível de $-i$ por meio das noções primitivas usuais), parece que existe um automorfismo do sistema que leva esse elemento em qualquer um dos outros.(SILVA, 1985, p. 281).

Com o apelo que acabamos de fazer, queremos sugerir que a tentativa de caracterizar a noção de distinguibilidade por meio da noção de invariância sob automorfismos não parece descabida: se parece adequado que a utilizemos para caracterizar a noção de indistinguibilidade, não cremos haver motivos para não utilizá-la quando temos por pretensão caracterizar a noção oposta, *i.e.*, a noção de distinguibilidade.

Voltemos, no entanto, à definição 4.0.2 dada acima. Como podemos entender a afirmação por ela feita de que, numa estrutura $\mathfrak{A}$, os elementos a e b são distinguíveis se, e somente se existir um subconjunto X contido em seu domínio D que seja invariante sob os automorfismos de $\mathfrak{A}$ e ao qual um de tais elementos pertence se, e somente se o outro não pertence? Vejamos alguns exemplos que talvez sejam esclarecedores.

Seja a estrutura $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Tomando dois elementos quaisquer do domínio $\mathbb{Z}$ dessa estrutura; 4 e 5, por exemplo, procuremos investigar se tais elementos são distinguíveis ou não nessa estrutura. Pelas condições da definição, para que 4 e 5 sejam distinguíveis deve existir um subconjunto do domínio, invariante sob os automorfismos da estrutura, ao qual um desses elementos pertença e o outro não. Tomemos tal subconjunto como sendo $X = \{f(4) : f \text{ é um automorfismo de } \mathfrak{A}\}$. Obviamente precisamos saber quais são os automorfismos da estrutura $\mathfrak{A}$ para que possamos enumerar os elementos do subconjunto X. No caso dessa estrutura particular são dois os automorfismos: $f'(x) = x$ e $f''(x) = -x$. Podemos então exibir o conjunto X por enumeração de seus elementos: $X = \{-4, 4\}$. Em seguida constatamos que: (i) X é invariante sob os automorfismos de $\mathfrak{A}$ e, (ii) que $4 \in X$ mas $5 \notin X$. Teríamos assim terminado nossa investigação: a partir da definição, podemos afirmar que 4 e 5 são distinguíveis em $\mathfrak{A}$.

Se o exemplo acima pareceu pedante devido ao fato de que, intuitivamente, já tomamos 4 e 5 como sendo distinguíveis, acreditamos que uma simples variação no exemplo já permitirá que eliminemos essa impressão. Suponha que estivéssemos agora interessados em saber se, na estrutura em questão, os elementos 4 e -4 são distinguíveis. A intuição nos parece sugerir que a resposta novamente será afirmativa mas, como veremos, esse não é o caso. Tomando a estrutura $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ e os dois automorfismos $f'(x) = x$ e $f''(x) = -x$, o subconjunto X não permitiria distinguir entre 4 e -4 uma vez que é o caso de $4 \in X$ mas não é o caso de $-4 \notin X$. Surpreendentemente, não conseguimos definir um X nessa estrutura $\mathfrak{A}$ de um outro modo que permitisse distinguir entre tais elementos.[10] Nessa estrutura é possível afirmar, portanto, de quaisquer dois elementos x e $-x$ que são $\mathfrak{A}$-indistinguíveis. A sua distinção somente pode ser percebida "de fora" da estrutura.

De um modo mais geral, poderíamos afirmar que dois elementos quaisquer a e b do domínio de uma estrutura $\mathfrak{A}$ são $\mathfrak{A}$-indistinguíveis se, e somente se, existe um automorfismo f da estrutura $\mathfrak{A}$ tal que $f(a) = b$. Isso é compreensível na medida em que, sendo f um automorfismo de $\mathfrak{A}$ e $X \subseteq D$ invariante sob automorfismos de $\mathfrak{A}$, então $a \in X$ se, e somente se $b \in X$; uma vez que $f(a) = b$ e $f^{-1}(b) = a$.

Supondo que conseguimos tornar clara a definição que havíamos dado, podemos prosseguir em nosso empreendimento. No capítulo anterior caracterizamos intuitivamente um indivíduo por meio de um pacote de propriedades e apresentamos uma caracterização algo formal dessa noção intuitiva. Como sugerimos, esse modo de caracterizar um indivíduo se coaduna com aquele que o faz a partir da distinguibilidade com respeito às propriedades. Neste capítulo, tratamos, até o momento, de apresentar uma noção de distinguibilidade que, entre outras coisas, relativiza tal noção a uma certa estrutura.[11] A questão que temos que abordar agora é a de vincular a noção do que seja um indivíduo

[10] Como veremos abaixo, só será possível fazê-lo acrescentando outras relações à estrutura de modo a torná-la "rígida".

[11] Relativização que se constitui num preço a ser pago: infelizmente, nosso discurso sempre estará restrito a uma certa estrutura.

com a matemática clássica. O que permite sustentar nossa afirmação de que a matemática clássica compromete-se "ontologicamente" com uma noção de indivíduo?

Para conseguirmos responder a tais questões, precisamos ainda de mais alguns conceitos. Entre eles, encontram-se os de *estrutura rígida*, de *expansão rígida trivial* e de *expansão rígida não-trivial* de uma estrutura.

Definição 4.0.3 *Uma estrutura é* **rígida** *se, e somente se, seu único automorfismo é função identidade.*

Dada a definição acima, alguns resultados poderiam ser aqui mencionados. Um deles é o de que, numa estrutura rígida, todo subconjunto do domínio é invariante sob automorfismos. Isso nos permite, por exemplo, afirmar que em tais estruturas é sempre possível distinguir cada um dos elementos de seu domínio. Explicando melhor: seja uma estrutura rígida $\mathfrak{A}$ com um domínio D. Dados a e b pertencentes a esse domínio, com $a \neq b$, então existe um subconjunto $X \subseteq D$, invariante sob automorfismos, a saber, $X = \{a\}$, tal que $a \in X$ e $b \notin X$ o que, dada a definição de distinguibilidade numa estrutura, permite-nos inferir que a e b são $\mathfrak{A}$-distinguíveis. O mesmo processo poderia ser realizado para quaisquer dois elementos do domínio, daí nossa afirmação de que em tais estruturas – ditas rígidas – sempre é possível distinguir cada um de seus elementos. Em especial, esse é o caso do universo $\langle \mathcal{V}, \in \rangle$ de ZFC – como veremos, ainda que $\langle \mathcal{V}, \in \rangle$ não seja uma "estrutura conjuntista".

O ponto relevante no resultado descrito e que gostaríamos de enfatizar é que, ao definirmos o subconjunto X como sendo o conjunto unitário de a, definimos uma propriedade, a saber, aquela de "*ser idêntico com a*". O leitor atento já percebe o que estamos querendo sugerir: se havíamos tomado um indivíduo como sendo um pacote de propriedades e havíamos afirmado que é a partir da distinguibilidade quanto a tais propriedades que poderíamos afirmar que uma certa entidade é um indivíduo, então podemos dizer que a e b são indivíduos numa estrutura rígida – basta tomarmos as propriedades de *ser idêntico com* a e a de *ser idêntico com* b, respectivamente, para distinguí-los.

Outro resultado que pode ser mencionado é o de que identidade e indistinguibilidade nem sempre coincidem numa estrutura $\mathfrak{A}$, *i.e.*, nem sempre é o caso que a e b são $\mathfrak{A}$-indistinguíveis se, e somente se $a = b$. Entretanto, se ambas coincidirem numa estrutura, então essa estrutura é rígida.

Reproduzimos aqui a demonstração deste fato:

> Suponha que f é um automorfismo de $\mathcal{A}$ que não seja a função identidade. Então existe um a no domínio da estrutura tal que $f(a) = b \neq a$. Mas, sendo $b \neq a$ e, por hipótese, em tal estrutura identidade e $\mathcal{A}$-indistinguibilidade coincidem, então existe um subconjunto X do domínio tal que: (i) X é invariante sob automorfismos e (ii) $a \in X$ mas $b \notin X$. Mas isso é uma contradição, pois sendo X invariante sob automorfismos e $a \in X$, deveríamos ter $f(a) = b \in X$.(KRAUSE; COELHO, 2004, p. 13-14, tradução nossa).

A característica que nos interessa, e da qual ainda iremos nos servir, é a de que as estruturas rígidas são precisamente aquelas em que uma determinada propriedade pode ser utilizada para caracterizar e distinguir os elementos do domínio. Em outras palavras, nessas estruturas sempre é possível *individualizar* os elementos do domínio a partir de suas propriedades. Nossa pretensão é a de argumentar em defesa de que fato similar ocorre numa teoria de conjuntos como ZFC e, por extensão, na matemática clássica: suas entidades sempre podem ser individualizadas no sentido descrito anteriormente. Como já sugerimos, ainda são necessários alguns conceitos para empreender tal defesa.[12]

Definição 4.0.4 *Seja* $\mathfrak{A} = \langle D, \{R_i\}_{i \in I}\rangle$ *uma estrutura. Uma estrutura* $\mathfrak{B}$ *é dita ser uma* ***expansão*** *da estrutura* $\mathfrak{A}$ *se, e somente se* $\mathfrak{B} = \langle D, \{R_i\}_{i \in I \cup J}\rangle$*, sendo* $I \cap J = \emptyset$.

[12] Conceitos esses tomados de Krause e Coelho (2004, p. 14ss).

Informalmente falando, uma estrutura $\mathfrak{B}$ é uma expansão de uma estrutura $\mathfrak{A}$ na medida em que é obtida acrescentando-se novas relações em $\mathfrak{A}$. Para exemplificar, tomemos as duas estruturas que foram apresentadas acima: $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ e $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Duas outras estruturas $\langle \mathbb{Z}, <, + \rangle$ e $\langle \mathbb{Z}, +, . \rangle$ são, respectivamente, expansões daquelas uma vez que são obtidas pelo acréscimo de novas relações: a relação "+" na primeira estrutura e a relação "." na segunda. Novamente insistimos que uma operação binária como '+' pode ser vista como uma relação ternária conveniente. Assim, continuaremos falando em *relações*.

Definição 4.0.5 *Uma estrutura* $\mathfrak{B}$ *é uma* ***expansão rígida trivial*** *de uma estrutura* $\mathfrak{A}$ *se, e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $\mathfrak{B}$ *é uma expansão de* $\mathfrak{A}$*,*

(ii) $\mathfrak{B}$ *é rígida e*

(iii) $\mathfrak{B}' = \langle D, \{R_i\}_{i \in J} \rangle$ *também é rígida.*[13]

Definição 4.0.6 *Uma estrutura* $\mathfrak{B}$ *é uma* ***expansão rígida não-trivial*** *de uma estrutura* $\mathfrak{A}$ *se, e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $\mathfrak{B}$ *é uma expansão de* $\mathfrak{A}$*,*

(ii) $\mathfrak{B}$ *é rígida mas*

(iii) $\mathfrak{B}' = \langle D, \{R_i\}_{i \in J} \rangle$ *não é rígida.*

Procuremos compreender melhor o que significam essas duas últimas definições. Intuitivamente falando, se uma estrutura $\mathfrak{B}$ é uma expansão de uma estrutura $\mathfrak{A}$, obtida mediante o acréscimo de novas relações em $\mathfrak{A}$, então podemos, seguindo as definições dadas, nos deparar com dois casos. No primeiro deles, as novas relações adicionadas à estrutura $\mathfrak{A}$ são, sozinhas, suficientes para garantir a rigidez de $\mathfrak{B}$, ou seja, trata-se de

[13] Para facilitar a compreensão, atente o leitor para a diferença entre os índices das relações da estrutura $\mathfrak{B}$ (apresentados na definição 3.0.4) e de $\mathfrak{B}'$.

uma expansão rígida trivial. No segundo caso isso não ocorre, *i.e.*, as novas relações adicionadas à estrutura $\mathfrak{A}$ não são, sozinhas, suficientes para garantir a rigidez de $\mathfrak{B}$. Nesse caso, trata-se de uma expansão rígida não-trivial. Alguns exemplos podem ser esclarecedores.

Tomemos uma estrutura $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ que, como sabemos, não é rígida. Se acrescentarmos a relação "$<$" a tal estrutura, obteremos a estrutura $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}, +, < \rangle$ que é rígida.[14] Notemos também que, na hipótese de não considerarmos as relações de $\mathfrak{A}$, a estrutura $\mathfrak{B}' = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$ não é uma estrutura rígida.[15] Portanto, $\mathfrak{B}$ é uma *expansão rígida não-trivial* de $\mathfrak{A}$.

Tomando a mesma estrutura $\mathfrak{A}$, não rígida, acrescentemos agora a $\mathfrak{A}$ todos os conjuntos unitários dos elementos de seu domínio $\mathbb{Z}$. Assim fazendo, obtemos a estrutura $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}, +, \{0\}, \{1\}, \{-1\}, \{2\}, \{-2\}, \ldots \rangle$ que é rígida. Poderíamos notar, no entanto, que as relações acrescentadas são, sozinhas, suficientes para garantir a rigidez de $\mathfrak{B}$, ou seja, $\mathfrak{B}' = \langle \mathbb{Z}, \{0\}, \{1\}, \{-1\}, \{2\}, \{-2\}, \ldots \rangle$ é rígida. Assim, $\mathfrak{B}$ é uma *expansão rígida trivial* de $\mathfrak{A}$.[16]

Um aspecto importante, ao qual gostaríamos agora de nos voltar, é o de que qualquer que seja a estrutura $\mathfrak{A}$ erigida em ZFC, é sempre possível obtermos uma estrutura $\mathfrak{B}$ que seja uma expansão rígida trivial de $\mathfrak{A}$: basta que $\mathfrak{B}'$ seja composta pelo domínio de $\mathfrak{A}$ e pelo conjunto unitário de cada um dos elementos daquele domínio, e isso é sempre possível de se obter pelos axiomas de ZFC. Esse aspecto é muito relevante para nosso argumento, daí a necessidade de enfatizá-lo: qualquer estrutura em ZFC tem uma expansão rígida trivial.

---

[14] Isso fica evidente a partir do fato de que o único automorfismo de $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ distinto da função identidade não preserva a relação de ordem $<$.

[15] Que a estrutura $\mathfrak{B}' = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$ não é rígida é fato que facilmente pode ser percebido. Tome-se uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f_k(x) = x + k$, para $k \in \mathbb{Z}$. Tal f é um automorfismo da estrutura em questão, como pode ser demonstrado, que não é a função identidade se $k \neq 0$. Assim, $\mathfrak{B}' = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$ não é rígida.

[16] Convém lembrar que o conjunto unitário de um certo elementode uma estrutura é uma relação unária nesta estrutura.

A relevância filosófica do que acabamos de apontar resume-se, basicamente, no seguinte: se é sempre possível obter uma expansão rígida trivial de uma estrutura e se, nessa última, sempre podemos caracterizar e distinguir cada elemento do domínio a partir de uma propriedade em particular – a de ser *ser idêntico consigo mesmo*, então todo elemento do domínio pode ser considerado como um *indivíduo* na acepção apresentada – distinguibilidade relativa às propriedades. Se esse é o caso para qualquer estrutura que seja construída numa teoria de conjuntos como ZFC, precisamos agora argumentar em prol de que isso também ocorre de maneira mais geral com a própria teoria ZFC. Em outras palavras, que as entidades de que trata uma teoria de conjuntos como ZFC sempre podem ser distinguidas em relação à suas propriedades, *i.e.*, são *indivíduos*. Isso, acreditamos, nos permitirá afirmar sensatamente que ZFC se compromete com uma ontologia de indivíduos, ou seja, *conjuntos* são *indivíduos* de um certo tipo.

Nesse sentido, convém então mencionarmos que a 'estrutura' $\mathfrak{A} = \langle \mathcal{V}, \in \rangle$, onde $\mathcal{V}$ é um universo bem-fundado de ZFC, é uma 'estrutura' rígida – resultado decorrente do teorema do isomorfismo.[17] Como já mencionamos, sendo ZFC uma estrutura rígida, então todo subconjunto de seu domínio é invariante sob automorfismos. Em particular, esse é caso quando tais subconjuntos são os conjuntos unitários de cada um dos elementos do domínio. Assim, em ZFC sempre é possível distinguirmos cada um de seus elementos e, por conseguinte, considerá-los como indivíduos.

O leitor pode ficar indagando o motivo pelo qual consideramos um universo bem-fundado $\mathcal{V}$. O axioma da regularidade diz, informalmente, relembremos, que para todo conjunto $x \neq \emptyset$, sempre há um elemento y de x tal que $y \cap x = \emptyset$. Como vimos, isso impede, dentre outras coisas, a existência de conjuntos "extraordinários" como os de Mirimanoff (ver p. 56): todos os conjuntos são *bem-fundados*. Se não usássemos o axioma da regularidade (ou fundação), não haveria como verificar se dois conjuntos são idênticos (quando têm os mesmos elementos) pois, para verificar se $x = y$, devemos olhar se os

[17]Ao leitor interessado, remetemos a Jech (1997, p. 74) como também a Franco de Oliveira (1980, p. 293ss), por exemplo, onde o teorema é apresentado.

elementos de x e de y são os mesmos (como diz o axioma da extensionalidade), mas, para tanto, já que os seus elementos são também conjuntos (em ZFC não há átomos), teríamos que ver se os *seus* elementos são idênticos, e assim por diante. O axioma da regularidade diz que esta busca tem um fim, de modo que é essencial para que possamos verificar se $x = y$, ainda que seja praticamente inócuo para a matemática como um todo (ela pode ser erigida em ZFC *sem* o axioma da regularidade). Por este motivo, portanto, restringimo-nos ao universo bem-fundado; ademais; "toda" a matemática padrão encontra seus elementos básicos como elementos de $\mathcal{V}$.

Um outro fato que gostaríamos de mencionar é o de que em ZFC, toda estrutura pode ser trivialmente expandida numa estrutura rígida. Ou seja, qualquer que seja a estrutura dada, é possível obtermos um expansão rígida trivial dessa estrutura. Quais seriam, no entanto, as novas relações acrescidas de modo a realizar esse tipo de expansão? Uma resposta remete aos conjuntos unitários de cada um dos objetos do domínio. Com tal acréscimo, a estrutura expandida torna-se rígida, sendo que a estrutura composta pelo domínio em questão e as relações acrescidas também é rígida. Ou seja, ficam satisfeitas as condições para a realização de uma expansão rígida trivial.

Que conseqüências filosóficas poderíamos inferir desses fatos? O que eles estariam a sugerir?

Acreditamos que uma possível resposta remete à afirmação de que qualquer estrutura construída numa teoria de conjuntos como ZFC permite distinguir, em ZFC ou seja, em $\langle \mathcal{V}, \in \rangle$, os elementos de seu domínio. Mesmo naquelas em que, inicialmente, não é o caso para alguns de seus elementos (lembremos o caso de x e $-x$ em $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$), ainda assim é possível expandí-las trivialmente numa outra estrutura rígida, na qual a distinguibilidade entre os elementos se faça presente. Na pior das hipóteses, em $\langle \mathcal{V}, \in \rangle$ isso sempre é possível. Isso mostra que, para considerarmos indiscernibilidade em ZFC (usando a matemática padrão), teremos que ficar confinados a uma estrutura que não seria rígida, o que sempre traz a questão filosófica de que estariam "escondendo" alguma coisa (ver o item (iii) da p. 75), ou então rejeitar a *Lei de Leibniz.* Veremos isso no capítulo seguinte.

Ora, é a distinguibilidade com relação às propriedades uma das formas de caracterizar a noção do que seja um indivíduo (como vimos no início do cap. 3.1); dada qualquer estrutura em ZFC, é sempre possível, por meio de uma certa expansão, ainda que não trivial, chegarmos a uma estrutura na qual podemos distinguir os elementos de seu domínio. Se em $\langle \mathcal{V}, \in \rangle$ é sempre possível distinguir entre seus elementos, parece razoável afirmar que ZFC sempre toma suas entidades como sendo indivíduos. Dizendo de outro modo, que traduz melhor nosso empreendimento: uma teoria de conjuntos como ZFC se compromete com indivíduos. Ou ainda, *à la Quine*: ZFC se compromete *ontologicamente* com indivíduos. Finalmente, como trabalhamos com a suposição do que o que é válido afirmar para uma teoria de conjuntos como ZFC também o é para a matemática clássica que nela se funda, então podemos afirmar que a matemática clássica se compromete ontologicamente com indivíduos.

5 A física e a possibilidade de uma ontologia de ‘não-indivíduos’

Como vimos, é bastante comum atribuirmos às partículas clássicas ou aos objetos do cotidiano o *status* de indivíduos (ver p. 73). No entanto, este parece não ser o caso quando nos referimos às partículas elementares descritas pela física quântica: vários autores defendem uma posição que atribui às partículas elementares, os *quanta*, um status de ‘*não-indivíduos*’. Entre as justificativas apresentadas para a defesa de tal posição, uma que merece destaque relaciona-se ao comportamento estatístico radicalmente diferente exibido pelas partículas elementares bem como à suposta impossibilidade de distinguir entre duas dessas entidades de mesmo tipo.

Adotando a posição que vê os quanta como ‘*não-indivíduos*’, não seria possível, mesmo com todas as informações disponibilizadas pela teoria (mecânica quântica), atribuir individualidade às partículas elementares. Dizendo de um modo que contemple nossa discussão precedente: se a física quântica for representada por uma estrutura $\mathfrak{A}$ (adotando o pressuposto de que há uma tal estrutura), e supondo que a *Lei de Leibniz* não é válida nesse domínio, de nenhum modo seria possível expandir a estrutura $\mathfrak{A}$ a uma outra estrutura $\mathfrak{B}$ que permita individualizar suas entidades.[1] Claramente, a adoção dessas duas hipóteses sugere algum tipo de justificativa que, no nosso caso, poderia ser dada apelando-se, por exemplo, à curiosidade filosófica – quais as conseqüências que tal

[1]Obviamente, esse ‘individualizar’ está se referindo à concepção que adotamos: distinguibilidade a partir das propriedades. É bom frisar que os filósofos da física, em geral, afastam totalmente qualquer possibilidade de um *substratum* individualizador no que se refere às entidades quânticas. Cf. Teller (1995, cap. 1 e 2).

possibilidade sugere – e à sensatez – há argumentos que sustentam tanto a hipótese que vê os quanta como não indivíduos, quanto a de que a *Lei de Leibniz* pode não ser válida no domínio quântico.

Pretendemos, neste capítulo, apresentar um panorama que permita compreender, de um modo minimamente satisfatório, quais são algumas das razões que levam certos autores a advogar em prol de '*não-indivíduos*' na mecânica quântica. Quais são as justificativas para defender uma noção que, além de soar pouco intuitiva, entra em conflito com nosso modo 'tradicional' de ver o mundo. (seja o que for que isso exatamente signifique.)

Originada com a observação de Max Planck (1858-1947) de que a radiação eletromagnética era emitida por meio de pacotes discretos, os '*quanta*', a teoria quântica revolucionou o modo como a física – e os físicos – viam o mundo. Uma manifestação desse caráter revolucionário pode ser vista, por exemplo, na discussão sobre a adequação (ou não) da linguagem da física clássica para tratar desse 'novo' domínio de fenômenos. Da discussão, ao que parece, aquela que se tornou a posição dominante (dita "*Interpretação de Copenhague*") pode ser inferida da seguinte citação:

> Nossa real situação na ciência é tal que nós usamos *de fato* os conceitos clássicos para descrever as experiências e isso apresentou-se como um desafio à teoria quântica, quer dizer, se ela é realmente capaz de exibir uma interpretação teórica dessas experiências com base naqueles conceitos. Não adianta discutir-se o que poderia ser feito se fôssemos seres diferentes dos humanos que somos. Neste ponto, temos que compreender, como disse von Weizsäcker, que 'a Natureza precedeu o homem mas o homem precedeu a ciência natural'. A primeira parte da citação justifica a física clássica, no seu ideal de objetividade completa. A segunda, diz-nos que não podemos escapar ao paradoxo da teoria quântica, vale dizer, à necessidade de se usar conceitos clássicos.(HEISENBERG, 1987, p. 47, tradução nossa).

Ainda no que concerne às dificuldades trazidas pela linguagem (usar "conceitos clássicos"), vale mencionar que não é raro que físicos se refugiem no formalismo matemático em que a teoria é formulada: para entender a teoria bastaria *ler* as fórmulas.

À parte essa discussão sobre a linguagem, um outro caráter da teoria quântica é inquestionável: o sucesso de suas aplicações práticas e a corroboração de suas predições. Ninguém, na atualidade, parece poder questionar o que a teoria prediz. As controvérsias e discussões, por outro lado, ficam por conta do significado da teoria, de sua interpretação. Historicamente, no entanto, a interpretação que tem predominado é aquela que se costuma denominar "*Interpretação de Copenhague*". Descreveremos, no que segue, alguns princípios que, de certo modo, balizam aquilo que a interpretação mencionada sugere, ainda que não nos comprometamos com ela para a discussão que virá.

Um de tais princípios é o da *Incerteza* ou da *Indeterminação* formulado por W.K. Heisenberg (1901-1976). Grosso modo, tal princípio afirma, dentre outras coisas, que não é possível estabelecer simultaneamente a posição e o momento das partículas quânticas. Dizendo de outro modo, há quantidades físicas que podem ser medidas mas que estão sujeitas a variações imprevisíveis, de modo que seus valores não podem ser precisamente definidos em conjunto. Consideremos, por exemplo, a posição x e o momento p de um elétron. Se Δx denotar a imprecisão em torno da medida da posição x do elétron e Δp denotar a imprecisão em torno da medida do momento de um elétron, então a seguinte desigualdade é válida: $\Delta x \Delta p \geq \hbar$, onde $\hbar$ é a constante de Planck.[2] Intuitivamente, essa desigualdade sugere que o grau de precisão com que uma dessas quantidades será medida depende exclusivamente de uma escolha do experimentador e, o que é mais surpreendente, quanto mais precisa for uma delas menos será a outra, e vice-versa. Convém enfatizar que quando se afirma que o experimento depende do experimentador, afirma-se somente que é dele a decisão de qual quantidade medir e com qual precisão fazê-lo.

É relevante lembrarmos que a incerteza em questão não se deve à limitações do observador ou do aparato de medida. A teoria quântica (novamente insistimos que, apesar de nos referirmos a ela, não estamos restritos à Interpretação de Copenhague) postula a incerteza como inerente à natureza das partículas: as partículas simplesmente

[2] A constante de Planck tem um valor numérico bastante pequeno ($\hbar = 6,625.10^{-34}$ J/s) o que, aparentemente, justifica o fato de que alguns efeitos quânticos se manifestem no domínio atômico mas não sejam percebidos em nosso cotidiano.

não possuem simultaneamente valores precisos das duas quantidades, posição e momento – para nos referir ao exemplo acima. Se isso estiver certo, não se trataria, portanto, de uma incerteza epistemológica, mas ontológica.

Uma das principais conseqüências dessa situação é o *indeterminismo* no comportamento dos sistemas quânticos: por mais completa que seja a informação que tivermos sobre um sistema, ela é insuficiente para prevermos como o sistema irá se comportar. Dois sistemas inicialmente em estados semelhantes podem evoluir de modos completamente distintos. Basta dizer, por exemplo, que uma simples partícula movendo-se livremente, não possui trajetória entre dois pontos quaisquer.

Mesmo essa imprevisibilidade estando presente, a mecânica quântica permite especificar as *probabilidades* das alternativas de que um sistema dispõe: é uma teoria estatística. A idéia de probabilidade é inerente ao próprio sistema quântico: não decorre de nossa incapacidade de compreender as variáveis que nele estão atuando. Pelo menos isso é o que é defendido pela Interpretação de Copenhague.

Também se assume em geral que não existem variáveis escondidas que ainda estaríamos por descobrir: a mecânica quântica seria uma teoria *completa*.[3] Isso afasta possibilidades do tipo (iii) da p. 75, relativamente à teoria quântica. Aliás, como fruto desse debate encontra-se um dos resultados mais revolucionários sobre nossa visão clássica de mundo: rejeita-se a realidade objetiva do micro-mundo quântico. Isso significa dizer, por exemplo, que uma partícula elementar como um elétron não possui uma posição e um momento bem definidos na ausência de um observador. Enquanto não se efetua uma medida da posição do elétron, ele, literalmente, não tem posição. É assim que se pode dizer, por exemplo, que o observador 'cria' o observado, que nenhuma entidade pode ser considerada existente antes que uma medida seja feita. Um elétron deixa de ser uma 'coisa' física para, como diz Heisenberg, ser uma codificação abstrata de um conjunto de

[3]Lembre o leitor que, a respeito da possibilidade de individualizar ou não as entidades de que trata a física quântica, alguns autores defendem a existência de variáveis escondidas – possibilidade apresentada no item (iii), p. 73. Para detalhes, ver Sant'Anna (2000) por exemplo.

possibilidades ou possíveis resultados de medida.[4]

No entanto, podemos admitir alguma forma de realismo relativamente às entidades quânticas; com efeito, quando se realiza um experimento, *algo* deixa marcas nos anteparos, *algo* passa pelos orifícios, *algo* forma os objetos que nos cercam. Qual a natureza dessas entidades, que tipo de "lógica" obedecem? É, portanto, razoável que nos afastemos um pouco de Copenhague e admitamos que *há algo lá fora*, cuja natureza podemos investigar. Cabe notar que esta é uma questão de natureza filosófica; os físicos, em geral, dela não se ocupam. Como diz S. Hawcking (com palavras diferentes, mas com igual ênfase), o objetivo da física não é o de descrever *do que* o mundo é formado, mas sim *como* ele funciona.[5]

Levando em conta essas considerações, há um outro aspecto de nossa concepção de mundo que é fortemente abalado pela teoria quântica: o conceito tradicional de objeto físico. Dalla Chiara apresenta quatro razões principais para justificar a asserção de que, para o conceito de objeto presente na física contemporânea, não vale a maior parte das propriedades que caracterizam os objetos clássicos:

> (1) *princípio de incerteza* de Heisenberg, que implica uma refutação da reivindicação de que qualquer objeto físico pode decidir semanticamente todas as propriedades expressas na linguagem da teoria; e ao mesmo tempo, uma refutação da reivindicação de que qualquer objeto admite uma fronteira ["world-line"] bem determinada;
> (2) a existência de *quarks*, que muito provavelmente implica (tanto quanto sabemos até hoje) uma refutação da propriedade de separabilidade dos objetos físicos;
> (3) a existência de *bósons* (partículas governadas pela estatística de Bose-Einstein) que refuta a *distinguibilidade* e *individualidade* dos micro-objetos; e ao mesmo tempo fornece exemplos de um conjunto finito de objetos físicos, que não admite um número ordinal bem determinado;
> (4) a existência de *partículas virtuais*, que provê exemplos de um conjunto finito de objetos físicos, que não admite um número cardinal bem determinado.(1985, p. 304, tradução nossa)

[4]Cf. Heisenberg (1987).
[5]Ver Hawcking (2002).

Acreditamos que o que foi apresentado seja suficiente para convencer o leitor de que a física quântica apresenta-se como uma teoria que entra em conflito com nosso modo 'tradicional' de ver o mundo; que ela, em muitos aspectos, apresenta descrições que nem de longe soam intuitivas. Ressaltamos este caráter contra-intuitivo porque estaremos descrevendo, no que segue, algumas razões encontradas por alguns autores para atribuir um status de '*não-indivíduos*' às partículas elementares – e isso também parece ser fortemente contra-intuitivo.

5.1 Estranho comportamento: diferentes estatísticas

Como dissemos no início do capítulo, entre as justificativas apresentadas para a defesa de '*não-indivíduos*', uma que se destaca está relacionada ao comportamento estatístico exibido pelas partículas elementares, bem como à suposta impossibilidade de se distinguir entre duas dessas entidades de mesmo tipo. Passemos então a descrever algumas das estatísticas válidas no domínio da física quântica.[6]

As estatísticas quânticas sustentam-se, entre outros, num princípio que se costuma denominar '*Invariância de Permutações*' ou '*Postulado de Indistinguibilidade*' (PI).[7] Grosso modo, tal princípio sustenta que, se uma coleção é invariante sob permutações das partículas que a constituem, então aqueles estados em que um certo número de tais partículas foram permutadas não são 'contados' como novos estados: estados inicial e permutado coincidem.

> Se um sistema em física atômica contém um número de partículas do mesmo tipo, por exemplo, um número de elétrons, as partículas são absolutamente indistinguíveis uma da outra. Nenhuma mudança observável ocorre quando duas delas são permutadas [...]. Uma teoria satisfatória deve, obviamente, contar quaisquer dois estados observacionalmente indistinguíveis como sendo o mesmo estado e negar que qualquer mudança ocorre quando duas partículas similares trocam de lugar.(DIRAC, 1978, p. 207, tradução nossa).

---

[6] Não iremos abordar neste trabalho certos tipos de estatísticas como as chamadas '*para-estatísticas*', por exemplo, aplicáveis a outros tipos de partículas que não os bósons e os férmions: entidades que são possíveis dentro do formalismo (outros tipos de simetria) mas não manifestas nos experimentos.

[7] Cf. French e Rickles (2003).

Primeiramente, cabe esclarecer o seguinte: dizer que as partículas quânticas são indistinguíveis significa dizer que elas compartilham todas as propriedades intrínsecas (ou propriedades independentes de estados) mas, eventualmente, também outras.[8] Algumas dessas propriedades são, por exemplo, carga elétrica, massa, spin, entre outras. No caso das partículas clássicas, se houvesse um compartilhamento desse tipo de propriedades ainda nos seria possível distingui-las por sua localização espaço-temporal que é uma propriedade "extrínseca". No caso das partículas quânticas, por outro lado, isso não é possível, uma vez que tais partículas não possuem trajetórias definidas.

Retomando à citação feita, vale lembrar que a exigência de Dirac é satisfeita pelas estatísticas quânticas como a de Fermi-Dirac e a de Bose-Einstein que, diversamente da clássica (Maxwell-Boltzmann), encolhem, por assim dizer, o número de estados possíveis do sistema. Tentemos esclarecer um pouco o que prescrevem tais estatísticas.[9]

Se tomarmos um sistema com n objetos indistinguíveis e considerarmos sua distribuição sobre m microestados, então uma estatística irá estudar o número de modos possíveis de distribuir tais objetos sobre os microestados sem alterar o macroestado. Um exemplo simples pode ser esclarecedor sobre as diferentes estatísticas mencionadas acima.

Suponhamos uma situação em que tenhamos dois objetos (bolas, por exemplo, denominadas aqui por 'a' e 'b') e dois microestados (duas caixas, por exemplo, denominadas aqui por '1' e '2').

A estatística clássica prevê quatro distribuições possíveis:

- a em 1 e b em 2
- b em 1 e a em 2
- a e b em 1 e nada em 2
- a e b em 2 e nada em 1

---

[8] Cf. Jammer (1974).

[9] O exemplo de que nos serviremos é bastante comum na literatura e, para nossos propósitos, seguiremos o já citado French e Rickles (2003).

cada uma delas, sendo equiprováveis, com probabilidade igual a $\frac{1}{4}$ de ser realizada. Note-se aqui que cada permutação possível das partículas está sendo contada como originando estados distintos, como nas duas primeiras situações acima.

Por outro lado, considerando que as partículas quânticas são indistinguíveis e estão sujeitas ao PI, as estatísticas nesse domínio de fenômenos são de dois tipos: Bose-Einstein, que se aplica aos bósons e Fermi-Dirac, que se aplica aos férmions.[10] Os dois tipos de estatísticas diferem pelo fato de que, na primeira, duas partículas podem ocupar o mesmo estado enquanto, na segunda, isso não ocorre devido ao *Princípio de Exclusão de Pauli*. Assim sendo, as distribuições possíveis são as seguintes: no caso dos bósons (estatística de Bose-Einstein) são previstas três possibilidades:

- uma bola em cada caixa
- ambas em 1 e nada em 2
- ambas em 2 e nada em 1

cada uma delas com probabilidade igual a $\frac{1}{3}$. Note-se que, aqui, não há sentido físico em atribuir "nomes" as bolas como a e b.

No caso dos férmions (estatística de Fermi-Dirac) as possibilidades previstas se reduzem a apenas uma:

- uma bola em cada caixa

com probabilidade igual a 1 (certeza) de ser realizada.

Formalmente, uma vez que não há outro modo de empregarmos a linguagem usual, somos obrigados a introduzir *nomes* para as partículas, como "a" e "b", mas então condições de simetria têm que ser postuladas a fim de expressar as estatísticas descritas acima (Bose-Einstein e Fermi-Dirac). Assim, a situação em que uma bola encontra-se em cada caixa é descrita como uma superposição: algo que poderia ser explicado como

[10] Um bóson possui spin com valores inteiros; como um fóton, por exemplo. Um férmion possui spin com valores equivalentes a $\pm\frac{1}{2}$; como um elétron, por exemplo.

sendo a situação em que '(a em 1 e b em 2) + (b em 1 e a em 2)' no caso dos bósons e '(a em 1 e b em 2) - (b em 1 e a em 2)' no caso dos férmions, exceto por certos fatores de normalização. A proibição dos férmions ocuparem o mesmo estado decorre do Princípio de Exclusão de Pauli, que não explicitaremos aqui. Nas duas últimas estatísticas, portanto, o PI é satisfeito bem como a exigência de Dirac citada acima. Um outro modo de se referir a esse fato é dizer que os sistemas quânticos (as funções de onda associadas) são invariantes sob a ação de um certo grupo de permutações, ou seja, cai-se no caso anteriormente estudado de invariância sob automorfismos de uma certa estrutura. Mais que isso, o formalismo permite afirmar que permutações de partículas indistinguíveis não são fisicamente relevantes – o que, aliás, parece coincidir com nossa intuição sobre tal fato.[11]

Que conseqüências esses diferentes tipos de estatísticas parecem sugerir? Que implicações metafísicas podem, a partir delas, ser ventiladas?

A resposta a parte desses questionamentos, ao que parece, pode ser esboçada do seguinte modo: se a estatística clássica (Maxwell-Boltzmann) conta como um novo arranjo uma permutação de partículas indistinguíveis, então deve haver *algo mais* que caracterize tais partículas e permita tratá-las como sendo indivíduos. Por outro lado, esse mesmo tratamento não parece ser permitido no domínio quântico – as próprias estatísticas que ali se aplicam (Bose-Einstein principalmente) refletem esse fato ao não contar como um novo arranjo uma permutação de partículas. É ilustrativo citar, por exemplo, "[...] que dois estados cuja diferença seja somente a troca de dois fótons são fisicamente indistinguíveis e estatisticamente têm que ser contados como apenas um estado. Em outras palavras, fótons não têm individualidade."(BORN, 1943, p. 27-28, tradução nossa). Conseqüentemente, costuma-se atribuir às partículas do domínio quântico um status de *não-indivíduos* em algum sentido. Geralmente essa atribuição de não-individualidade aparece na literatura como integrando aquilo que se denomina *Received View* ou, numa tradução, *Vista*

[11] A não relevância física da permutação de partículas indistinguíveis é uma afirmação que decorre, em parte, do entendimento do PI como uma regra de superseleção: dado os estados de um sistema, o PI restringe seus possíveis observáveis. Para detalhes, ver French e Rickles (2003).

Recebida.[12] Uma advertência ao leitor é, no entanto, necessária: a expressão '*Received View*', usada neste contexto, nada tem a ver com aquela postura filosófica que resultou das propostas do Círculo de Viena. Apresentemos, ainda que rapidamente, um histórico de como a *Vista Recebida* se firmou.

5.2 A *Vista Recebida*

Uma primeira 'sugestão' daquilo que viria a ser denominado como não-individualidade parece poder ser atribuída a Planck: ao elaborar a lei da radiação do corpo-negro, por volta de 1900, Planck 'mexe' na estatística de Boltzmann; em particular, não contabiliza as permutações dos quanta como originando novos arranjos. "[...] enquanto Boltzmann considerava a distribuição de átomos indistinguíveis mas individuais sobre estados de energia [...], Planck tem sido interpretado como considerando a distribuição de quanta indistinguíveis mas *não-individuais* sobre ressonadores."(FRENCH; KRAUSE, 2004b, p. 75, tradução nossa).

Duas décadas depois, aproximadamente, duas novas estatísticas estavam consolidadas: a de Bose-Einstein e a de Fermi-Dirac.[13] É possível, inclusive, afirmar que a mecânica quântica nasceu das estatísticas![14] Desse modo, torna-se oportuno perguntar quais as implicações das novas estatísticas? Que compreensões sobre os quanta tais estatísticas trouxeram?

Niels Bohr (1885-1962), em 1926, parece ter sido o primeiro a reconhecer que os quanta não poderiam ser tratados como indivíduos. No mesmo ano, Heisenberg afirma que a individualidade de um corpúsculo estava perdida. Um lugar comum havia sido formado: as partículas quânticas perderam, de algum modo, sua identidade e não podem

[12] Cf. French e Krause (2004b); French e Rickles (2003), entre outros.

[13] Tivemos oportunidade de apresentar em linhas gerais o que prescrevem tais estatísticas. O leitor interessado na história detalhada sobre o surgimento e a justificação das mesmas pode ver o cap. 3 de French e Krause (2004b). Nos dados históricos que seguem, continuaremos a nos servir do trabalho citado.

[14] Parafraseando Schrödinger, citado por Moore (1989, p. 416).

ser consideradas como indivíduos – a *Vista Recebida* começa a tomar forma.

Um outro passo nessa direção se dá por ocasião da '*Conferência Solvay*', em 1927.[15] É com Erwin Schrödinger (1887 – 1961), no entanto, que a *Vista Recebida* ganha força. Físico com inclinações filosóficas, Schrödinger foi um insistente defensor da concepção de que as partículas não poderiam mais ser consideradas como indivíduos e das implicações desse fato para a interpretação da mecânica quântica. Significativo é citar algumas passagens – bastante conhecidas – de uma série de leituras públicas feitas por Schrödinger:[16]

> [...] nós temos [...] sido forçados a rejeitar a idéia de que [...] uma partícula é uma entidade individual que preserva sua 'auto-identidade' ('*sameness*') o tempo todo. Ao contrário, nós agora estamos obrigados a asserir que os últimos constituintes da matéria não têm 'auto-identidade' ('*sameness*') de nenhum modo. (1952, p. 121-122, tradução nossa).

As novas estatísticas, a ausência de uma história espaço-temporal, entre outros, fizeram Schrödinger defender um ponto-de-vista de que a individualidade não pode ser mantida no contexto quântico, de que era '*ilógico*' querer aplicar a descrição dos fenômenos quânticos a indivíduos ou a eventos individuais. Noutra passagem, ele diz:

> Existe um motivo principal para não considerar as partículas elementares – elétrons, prótons, quantas de luz, mésons – como indivíduos [...]. Quando você está lidando com um sistema que contém partículas iguais você deve anular suas individualidades, a fim de que você não obtenha resultados completamente errados.(SCHRÖDINGER, 1995, p. 32, tradução nossa).

[15]Vale mencionar que a história da elaboração da *Vista Recebida* é muito mais complexa do que estamos deixando transparecer. Um grande físico como Bohr, por exemplo, defendia uma concepção bastante peculiar a respeito da individualidade. Para uma exposição detalhada a esse respeito, ver o já citado cap. 3 de French e Krause (2004b).

[16]Tais leituras foram feitas no Instituto de Estudos Avançados de Dublin, em 1950, e publicadas em Schrödinger (1952).

Característica ainda da concepção de Schrödinger é a defesa da impossibilidade de rotular qualquer partícula elementar. Segundo ele, a perda da individualidade das partículas

> [...] significa *bem mais* do que as partículas ou corpúsculos são todos *semelhantes*. Significa que você não pode nem imaginar qualquer um deles sendo marcado 'por um ponto vermelho' de modo que você possa reconhecê-lo mais tarde como *o mesmo*.(SCHRÖDINGER, 1953, p. 32, tradução nossa).

Schrödinger defende ainda a atribuição de individualidade às ondas da mecânica quântica por meio da sua forma ou modulação – uma ontologia da função de onda ψ. Um exemplo interessante, dado pelo próprio Schrödinger e que ilustra esse ponto de vista da ontologia pela forma, é o do pesa-papéis de ferro em forma de cão dinamarquês que o acompanhava em suas viagens. Perdido quando Schrödinger escapou da Áustria, foi recuperado e voltou a sua posse por intermédio de um amigo. Como ter certeza de que era o mesmo pesa-papéis? Resposta de Schrödinger: por sua forma ('*Gestalt*'), não pelo conteúdo material. Sua conclusão é a de que não é a matéria que garante a individualidade. As partículas elementares são *pura forma*: o que se mostra nas sucessivas observações é essa forma (entendida como um conjunto de propriedades invariantes) e não um ponto material individual.[17] Daí que um caráter estruturalista talvez possa ser associado à concepção de Schrödinger.

Na medida em que a *Vista Recebida* defende a atribuição de não-individualidade às partículas quânticas surge, naturalmente, a seguinte questão: o que significa dizer que uma partícula é um *não-indivíduo*? Ou, em outros termos, como se pode caracterizar a não-individualidade?

[17] Confira French e Krause (2004b), onde mais detalhes podem ser encontrados.

5.3 Não-individualidade como perda da auto-identidade

Não existe uma única maneira de compreender o que seria a não-individualidade. Uma dessas interpretações defende que afirmar que uma entidade quântica é um *não-indivíduo* significa dizer que tal entidade é destituída de uma característica ou propriedade que os 'indivíduos' possuem: a auto-identidade (*i.e.*, a propriedade de ser idêntico a si mesmo). Essa interpretação é adotada, por exemplo, pelo próprio Schrödinger, como é tornado claro na seguinte passagem:

> Quando você observa uma partícula de um certo tipo, digamos um elétron, aqui e agora, ela é prá ser considerada em princípio como um *evento isolado*. Mesmo se você observa uma partícula similar após transcorrer um tempo muito pequeno e num lugar muito próximo do primeiro, e mesmo se você tem toda razão prá assumir uma *conexão causal* entre a primeira e a segunda observação, não há significado verdadeiro e claro na asserção de que é a *mesma* partícula que você observou nos dois casos. [...]
> Eu enfatizo isso e eu rogo que vocês acreditem: não se trata de uma questão de sermos capazes de assertar a identidade em alguns casos e de não sermos capazes de fazê-lo em outros. Está além de qualquer dúvida que a questão da identidade, real e verdadeiramente, carece de sentido.(SCHRÖDINGER, 1952, p. 121-122, tradução nossa).

Trata-se, portanto, não apenas da impossibilidade de reidentificar uma partícula no decorrer do tempo mas, principalmente, da defesa de que o conceito de identidade simplesmente não pode ser aplicado para as partículas elementares. Outros autores como, por exemplo, Born (1943), Hesse (1963) e Post (1963) também defendem essa mesma concepção: a perda de auto-identidade traduz o que pode ser compreendido como sendo a não-individualidade das partículas quânticas.

O leitor, nesse ponto, talvez esteja considerando tal opção como, no mínimo, bizarra. De fato, ela causa estranheza. Parece, se é que nos é permitido fazer esse tipo de suposição, que o slogan quineano de que 'não há entidade sem identidade' está profundamente introjetado em nossas concepções de mundo. Se nossa suposição não for absurda, gostaríamos apenas de mencionar uma perspectiva alternativa, proposta por Marcus (1993) que, grosso modo, defende que 'não há identidade sem entidade'. A idéia é a de que embora "[...] todos os termos possam se 'referir' a objetos [...] nem todos os objetos são coisas, onde uma coisa é pelo menos aquilo sobre o qual é apropriado asserir a relação de identidade."(MARCUS, 1993, p. 25, tradução nossa). Uma entidade quântica, portanto, é um objeto mas não é uma "coisa" e não há problema em lhe negar a relação de identidade.[18]

Não desejamos, no entanto, nos comprometer aqui com a defesa da perspectiva proposta por Marcus. Citamo-la apenas para sugerir que uma concepção, inicialmente estranha, pode deixar de sê-la noutro momento e a partir de certas distinções.

Uma outra razão que possivelmente colabore para superar a eventual estranheza, no que diz respeito aos *não-indivíduos* como entidades para as quais não faz sentido atribuir identidade, é o fato de que existe a possibilidade de expressar essa concepção de *não-individualidade* em termos formais. No âmbito da matemática, a teoria específica a que nos referimos denomina-se '*Teoria de Quase-Conjuntos*". Desenvolvida por Krause (1992), é uma teoria que pretende

> [...] abranger 'coleções' que podem sustentar 'conjuntos' de objetos indistinguíveis, em que nenhum nome pode ser usado, nenhuma individuação desses objetos pode ser dada, mas ainda assim eles podem ser considerados em agregados, tendo um número cardinal, embora não tendo um ordinal associado.(KRAUSE, 2002b, p. 8, tradução nossa).

No entanto, como é que a teoria de *quase-conjuntos* caracteriza formalmente a *não-individualidade*?

[18]Embora não o façamos, esse ponto mereceria uma investigação mais aprofundada. Conjuntamente, talvez fosse interessante relacionar a proposta de Marcus com a negação do "*coisismo*" proposta por Bachelard (1974). Nesta mesma direção, uma discussão interessante poderia ter lugar a partir de certos resultados como, por exemplo, o fato de físicos franceses terem realizado uma observação não-destrutiva de um fóton (enquanto um detector de fótons convencional faz medições de uma maneira destrutiva, a nova técnica permite estudar o comportamento de um fóton no decorrer de sua longevidade). Para detalhes sobre o resultado citado, ver Schewe e Stein (1999).

Adotando uma motivação *à la* Schrödinger, a saber, de que o conceito de identidade não se aplica as partículas elementares, a teoria de *quase-conjuntos* postula que uma expressão do tipo '$x = y$' não é, em geral, uma fórmula bem-formada (o mesmo ocorrendo com sua negação, '$x \neq y$'). Isso permite, entre outras coisas, separar os conceitos de identidade e de indistinguibilidade – coisa que não ocorre nas teorias de conjuntos usuais. Assim fazendo, a teoria permite dois tipos de *Ur-elementos*: os m-átomos e os M-átomos. Os primeiros correspondem, na interpretação pretendida, aos quanta, enquanto que os últimos correspondem, na mesma interpretação, aos objetos macroscópicos – aos quais se aplica a lógica clássica.[19]

Não pretendemos aqui apresentar a teoria de *quase-conjuntos* em detalhes.[20] Mencionamos apenas suas características gerais visando eliminar parte da estranheza que pode ter acometido o leitor ao se deparar com a noção de *não-indivíduos*. Objetivo que esperamos poder ser, em parte, alcançado pela constatação de que é possível obter uma teoria matemática sensata que permita tratar daquela noção.

Além do mais, uma questão aqui é central: se a matemática clássica, com suas estruturas fundamentais usualmente elaboradas numa teoria de conjuntos como ZFC, não parece prover um formalismo adequado (claro, de um ponto de vista filosófico que prima pelos fundamentos) para tratar das entidades quânticas a partir de uma certa postura metafísica, qual poderia ser um formalismo adequado?

Acreditamos que existem razões para considerar como plausível a possibilidade de que uma teoria como a de *quase-conjuntos* possa fornecer um formalismo deste tipo. Obviamente, confirmar essa afirmação demanda tempo e esforços que não temos condições de dispender neste trabalho.

Como afirmamos anteriormente, nossa pretensão neste capítulo era apenas a de

[19] Aliás, convém mencionar que certos tipos de lógicas – chamadas de *Lógicas de Schrödinger* – têm sido introduzidas, nas quais a expressão '$a = a$' não pode ser inferida para certos objetos a. Para detalhes, ver da Costa e Krause (1994).

[20] O leitor interessado pode consultar o já mencionado Krause (1992) como também Krause (2002b) para detalhes.

apresentar algumas razões que levam certos autores a advogar em prol de '*não-indivíduos*'. Em particular, descrever alguns fatores que motivam o surgimento dessa noção. Não desejamos, portanto, nos posicionar acerca da validade ou da plausibilidade de tal ontologia. Terminando o capítulo, faremos uma digressão acerca de uma suposta indeterminação da metafísica pela física, tal como defendida por alguns autores.

5.4 Digressão: a indeterminação da metafísica pela física

Como dissemos, o fato de os objetos quânticos obedecerem estatísticas distintas daquelas dos objetos "clássicos" (descritos pela mecânica clássica) é algo instigante. A peculiaridade decorrente de, entre outros motivos, uma permutação de dois objetos não ser contada na mecânica estatística quântica como dando origem a um novo arranjo faz com que alguns autores defendam o ponto de vista de que as entidades quânticas são *não-indivíduos* – como vimos. No entanto, esse não é o único ponto de vista possível de ser defendido: é possível defender também que as partículas quânticas podem ser consideradas como indivíduos apresentando, no entanto, comportamento e propriedades muito diferentes dos apresentados pelas partículas clássicas.

Salvo diversos detalhes técnicos que não apresentaremos, a divergência radica-se no seguinte: o formalismo da mecânica quântica pode ser tomado como oferecendo suporte a duas posições metafísicas diferentes – entidades quânticas como sendo *não-indivíduos* em algum sentido, entidades quânticas como indivíduos "clássicos" com certas restrições.[21] Dizendo de outro modo, o formalismo permite defender duas posições metafísicas bastante diferentes. Como alguns autores defendem, ocorre uma *indeterminação da metafísica pela física*.[22]

As implicações desse fato são diversas e mencionaremos rapidamente algumas

[21] Em geral se descrevem tais restrições como certos conjuntos de estados inacessíveis às entidades.
[22] Ver French e Krause (2004b, p. 169ss).

delas. Por exemplo, parece ficar comprometida a pretensão, tida por alguns filósofos, de compreender nossa metafísica a partir da física relevante.[23] Isso porque esta última não impõe, com seus resultados, uma única metafísica mas, como dissemos, permite a existência de duas (pelo menos) posições bastante diversas. Quando chamada a responder a questão sobre qual é a real natureza das coisas, a física não consegue responder de um modo unívoco: "[...] não é sempre claro o que é que a física nos ensina!"(FRENCH; KRAUSE, 2004b, p. 169ss, tradução nossa).

Essa discussão encontra eco no debate entre realismo e anti-realismo em filosofia da ciência. Nele, a tese da indeterminação (ou, também dita, subdeterminação) das teorias pelos dados empíricos freqüentemente é utilizada pelos anti-realistas para questionar a pretensão dos realistas de que podemos acreditar que uma teoria particular seja verdadeira a partir da explicação que apresenta para os dados empíricos correspondentes. A indeterminação da metafísica pela física poderia estar sugerindo uma posição alternativa neste debate, relacionada com alguma forma de '*convencionalismo*'.[24] A seguinte citação pode ser esclarecedora quanto à essa posição alternativa:

> Se partículas idênticas são ou não (in)distinguíveis [onde por isso ele quer dizer (não)indivíduos] [...] é convencional no sentido que é justificado no final das contas por uma escolha epistemologicamente anterior entre dois (ou mais) conjuntos observacionalmente equivalentes de hipóteses iniciais, uma escolha que não é exigida nem pela lógica nem pela experiência, mas ao invés é guiada por critérios normativo-metodológicos da teoria em questão.(BELOUSEK apud FRENCH; KRAUSE, 2004b, p. 170-171)

Outra implicação da suposta indeterminação da metafísica pela física aponta para a relevância da própria atividade filosófica. Se, por vezes, acreditou-se que a ciência, por si própria, poderia obter respostas para boa parte das questões geralmente tratadas em certos âmbitos da filosofia, a indeterminação da metafísica pela física parece indicar que

[23]Pretensão atribuída aos filósofos 'naturalistas' como Quine, por exemplo. Ver French e Krause (2004b, p. 169ss), para detalhes.

[24]Ver French e Krause (2004b, p. 170).

essa talvez não seja uma tarefa realizável. Em outras palavras, a discussão filosófica não poderia ser suprimida pelos resultados da atividade científica. No caso específico dos dois pacotes metafísicos diferentes (indivíduos ou *não-indivíduos*), a física, por si própria, parece não permitir chegar a uma resposta conclusiva e a filosofia não pode abandonar a cena. Ao contrário: é chamada a esclarecer e ordenar – o que acreditamos ser de relevância incontestável.

Considerações Finais

O leitor possivelmente se recordará de nossas pretensões, descritas no início deste trabalho: uma pequena aventura no âmbito da filosofia da matemática, em particular, no que concerne à questão do comprometimento ontológico desta última. Como toda aventura, a nossa implicou em explorar possibilidades, fazer escolhas, assumir alguns riscos, etc. Como toda aventura também, é necessário encerrá-la num certo momento.

No entanto, não é possível terminar a discussão que começamos sem fazê-lo de um modo provisório – e enfatizamos isso. Debruçar-se sobre os possíveis compromissos ontológicos da 'matemática clássica' não é tarefa das simples e, pelo que acreditamos, algo em que se possa dar uma palavra final. Neste nosso primeiro ensaio foi possível perceber o quanto a questão é rica filosoficamente – mesmo sem termos explorado algumas das principais posições a respeito do assunto. Como dissemos na introdução, vários autores têm contribuições relevantes e que, devido às nossas limitações, ficam à mercê de consideração noutro momento.

Nossa iniciação, contudo, não deixou de sugerir algumas questões relevantes – mesmo que, em alguns casos, implicitamente. Quais as implicações de considerar seriamente uma matemática como aquela que poderia ser desenvolvida a partir dos *quase-conjuntos* – mencionados na página 109? Essa possibilidade contemplaria apenas interesses filosóficos ou traria também facilidades 'práticas' para o físico em seu trabalho cotidiano? Outras formas de reconstruir a matemática clássica que não a partir de uma teoria de conjuntos usual (como apresentamos) também permitem sugerir algum tipo de compromisso ontológico com indívíduos, do modo como o entendemos? A idéia de atribuir às partículas elementares um status de '*não-indívíduos*' é realmente sensata do ponto de vista físico e matemático? De que modo a ontologia que adotamos interfere, influencia nossa matemática e – numa hipótese que pode soar mais estranha – vice-versa?

Não possuímos resposta para tais questões. Limitamo-nos a apresentá-las com o intuito de evidenciar a riqueza e a aspereza da área em que nos aventuramos. Terminamos esperançosos que tenhamos conseguido clarear alguns aspectos de tais questões, organizá-las de modo a colaborar com aquilo que, num próximo momento, outros estudos venham a realizar. Parafraseando Poincaré, "*o cientista* [e o filósofo] *deve ordenar, a ciência* [e a filosofia] *é feita de fatos assim como uma casa é feita de pedras, mas um acúmulo de fatos não é mais ciência do que um monte de pedras é uma casa.*"(citado por Truesdell (1966, p. 92)).

Referências

ADAMS, R. Primitive thisness and primitive identity. **Journal of Philosophy**, n. 76, p. 5–26, 1979.

BACHELARD, G. **A filosofia do não**: filosofia do novo espírito científico. São Paulo: Abril, 1974. (Os Pensadores).

BENACERRAF, P.; PUTNAM, H. **Philosophy of mathematics**: selected readings. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge Un. Press, 1983.

BÉZIAU, J.-Y. De la logique formelle a la logique abstraite. **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**, v. 14, p. 41–50, 1994.

_____. La logique abstraute au sein de la mathématique moderne. **Ruch Filozofyczne**, v. 6, 1994.

BORN, M. **Experiment and theory in physics**. Cambridge: Cambridge Un. Press, 1943.

BOURBAKI, N. The architecture of mathematics. **The American Mathematical Monthly**, v. 57, n. 4, p. 221–232, Apr. 1950.

_____. **Éléments de mathématique**: théorie des ensembles. 4. ed. Paris: Hermann, 1964.

BUNGE, M. **Treatise on basic philosophy**. Dordrecht: Reidel, 1977.

_____. **Epistemologia**: curso de atualização. São Paulo: T. A. Queiroz : Ed. Universidade de São Paulo, 1980. (Biblioteca das Ciências Naturais, v. 4).

_____. Moderate mathematical fictionism. In: AGAZZI, E.; DARVAS, G. (Ed.). **Philosophy of mathematics today**. Netherlands: Kluwer Academic, 1997. p. 51–71.

CAIERO, R. d. C. **Tópicos em metologia formal**: a noção de teoria em ciência econômica. 326 p. Tese (Doutorado em Filosofia) — Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, Outubro 2001.

CANTOR, G. **Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers**. [S.l.]: Dover, 1955.

CARNAP, R. **Foundations of logic and mathematics**. [S.l.]: University of Chicago Press, 1937.

CARTIER, P. The continuing silence of Bourbaki. **The Mathematical Intelligencer**, p. 22–28, 1998.

CASTELLANI, E.; MITTELSTAEDT, P. Leibniz's principle, physics, and the language of physics. **Foundations of Physics**, v. 30, n. 10, p. 1587–1604, 2000.

COLYVAN, M. **The indispensability of mathematics**. [S.l.]: Oxford University Press, 2003.

CORRY, L. Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure. **Synthese**, n. 92, p. 315–348, 1992.

_____. Hilbert to Bourbaki and beyond (part 2/3). **Historia Matematica Mailing List Archive [HM]**, 1999. Disponível em: <http://sunsite.utk.edu/math_archives/.http/hypermail/historia/oct99/0158.html>. Acesso em: 07 dez. 2002.

da COSTA, N. C. A. Logic and pragmatic truth. In: FENSTAD, J. et al. (Ed.). **Logic, methodology and philosophy of science**. [S.l.]: Elsevier, 1989. VIII, p. 247–261.

_____. Pragmatic truth and the logic of induction. **British Journal of Philosophy of Science**, n. 40, p. 333–356, 1989b.

_____. **O conhecimento científico**. 2. ed. São Paulo: Discurso Editorial, 1999.

_____. Invariance and definability. 2003. A aparecer.

da COSTA, N. C. A.; BÉZIAU, J.-Y.; BUENO, O. **Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos**. Campinas: Unicamp, 1998. (Coleção CLE).

da COSTA, N. C. A.; CHUAQUI, R. B. On suppes set-theoretical predicates. **Erkenntnis**, v. 29, n. 1, p. 95–112, July 1988.

da COSTA, N. C. A.; FRENCH, S. **Science and partial truth**: a unitary approach to models and scientific reasoning. Oxford: Oxford Un. Press, 2003.

da COSTA, N. C. A.; KRAUSE, D. Schrödinger logics. **Studia Logica**, n. 53, p. 533–550, 1994.

DALLA CHIARA, M. L. Some foundation problems in mathematics suggested by physics. **Synthese**, n. 62, p. 303–315, 1985.

DALLA CHIARA, M. L.; TORALDO DI FRANCIA, G. Formal analysis of physical theories. In: TORALDO DI FRANCIA, G. (Ed.). **Problems in the foundations of physics**. [S.l.]: North-Holland, 1979. p. 134–201.

DIEUDONNÉ, J. **History of algebraic geometry**: an outline of the historical development of algebraic geometry. Monterrey: Wadsworth, 1985.

DIRAC, P. A. M. **The principles of quantum mechanics**. Oxford: Clarendon Press, 1978.

FRAENKEL, A. The notion of 'definite' and the independence of the axiom of choice. In: HEIJENOORT, J. v. (Ed.). **From Frege to Göedel**: a sourcebook in mathematical logic. Cambridge: Harvard University Press, 1967. p. 284–289.

FRAENKEL, A.; BAR-HILLEL, Y.; LEVY, A. **Foundations of set theory**. Amsterdan: North-Holland, 1973.

FRANCO DE OLIVEIRA, A. J. **Teoria de conjuntos**: intuitiva e axiomática (ZFC). Lisboa: Escolar Editora, 1980.

FRENCH, S. Identity and individuality in classical and quantum physics. **Australasian Journal of Philosophy**, n. 67, p. 432–446, 1989a.

_____. Why the principle of the identity of indiscernibles is not contingently true either. **Synthese**, n. 78, p. 141–166, 1989c.

_____. Identity and individuality in quantum theory. **Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2002. Disponível em: <http://plato.stanford.edu>. Acesso em: 26 jun. 2002.

FRENCH, S.; KRAUSE, D. **Identity and individuality in modern physics**. [S.l.]: Oxford Un. Press, 2004b. A aparecer.

FRENCH, S.; REDHEAD, M. Quantum physics and the identity of indiscernibles. **British Journal for the Philosophy of Science**, n. 39, p. 233–246, 1988.

FRENCH, S.; RICKLES, D. Understanding permutation symmetry. In: BRADING, K.; CASTELLANI, E. (Ed.). **Symmetries in physics**: new reflections. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.

GÖDEL, K. O que é o problema do contínuo de cantor? In: _____. **O teorema de Gödel e a hipótese do contínuo**. [S.l.]: Fundação Calouste-Gulbenkian, 1979. p. 217–235.

GRACIA, J. **Individuality**: an essay on the foundations of metaphysics. Albany, NY: Suny Press, 1988.

HAACK, S. **Filosofia das lógicas**. São Paulo: Unesp, 2002. Trad. Cezar A. Mortari, Luiz H. de A. Dutra.

HALMOS, P. R. Nicolas Bourbaki. **Scientific American**, May 1957.

HAWCKING, S. **O universo numa casca de noz**. 5. ed. [S.l.]: Arx, 2002.

HEISENBERG, W. **Física e filosofia**. 2. ed. Brasilia: Editora da Universidade de Brasília, 1987. (Pensamento Científico).

HESSE, M. **Models and analogies in science**. London: Sheed and Ward, 1963.

HILBERT, D. On the infinite. In: HEIJENOORT, J. v. (Ed.). **From Frege to Göedel**: a sourcebook in mathematical logic. Cambridge: Harvard University Press, 1967. p. 367–392.

JAMMER, M. **The philosophy of quantum mechanics**. New York: John Wiley & Sons, 1974.

JECH, T. About the axiom of choice. In: BARWISE, J. (Ed.). **Handbook of mathematical logic**. Amsterdan: North-Holland, 1977. p. 345–370.

_____. **Set theory**. 2nd. ed. [S.l.]: Springer, 1997.

KRAUSE, D. O conceito bourbakista de estrutura. **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**, v. 8, n. 1, p. 77–102, abril 1987.

_____. On a quasi-set theory. **Notre Dame Journal of Formal Logic**, n. 33 (3), p. 402–411, 1992.

_____. Remarks on individuation, quantum objects and logic. **Logique et Analyse**, n. 155-156, p. 325–333, 1996.

_____. **Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência**. São Paulo: EPU, 2002a.

_____. Why quasi-sets? **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**, v. 20, n. 1/2, p. 73–92, 2002b. 3a. série.

_____. **Identidade e individualidade em física**: estudo de aspectos lógicos e ontológicos da física quântica. 2003. Projeto de Pesquisa junto ao CNPq.

KRAUSE, D.; BÉZIAU, J.-Y.; BUENO, O. Estruturas em ciência. **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**, v. 17, p. 91–111, 1997.

KRAUSE, D.; COELHO, A. Identity, indiscernibility, and philosophical claims. **Axiomathes**, 2004. A aparecer.

KRIVINE, J.-L. **Introduction to axiomatic set theory**. Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company, 1971.

KUNEN, K. **Set theory**: an introduction of independence proofs. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland, 1980. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, v. 102).

LEIBNIZ, G. **Discurso da metafísica**. São Paulo: Abril, 1980. (Os Pensadores).

LÉVY-LEBLOND, J.-M. Quantum words for a quantum world. **Epistemological and experimental perspectives on quantum physics**, p. 16, 1998.

LOCKE, J. **An essay concerning human understanding**. Oxford: Clarendon Press, 1979.

LOWE, E. Primitive substances. **Philosophy and Phenomenological Research**, n. 54, p. 531–552, 1994.

MACLANE, S. **Categories for the working mathematician**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1971.

_____. Structure in mathematics. **Philosophia Mathematica**, v. 3, n. 4, p. 174–183, 1996.

MADDY, P. **Realism in mathematics**. [S.l.]: Oxford University Press, 1992.

_____. **Naturalism in mathematics**. [S.l.]: Oxford University Press, 2000.

MAGEE, B. **The nature of things**. [S.l.]: Routledge & Kegan Paul, 1973.

MARCUS, B. R. **Modalities**: philosophical essays. Oxford: Oxford University Press, 1993.

MENDELSON, E. **Introduction to mathematical logic**. New York: D. Van Nortrand, 1979.

MIKENBERG, E.; da COSTA, N. C. A.; CHUAQUI, R. Pragmatic truth and approximation to truth. **Journal of Symbolic Logic**, n. 51, p. 201–221, 1988.

MOORE, W. **Schrödinger**: life and thought. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989.

MORTARI, C. A. **Introdução à lógica**. São Paulo: Unesp; Imprensa Oficial do Estado, 2001.

MOSCHOVAKIS, Y. N. **Notes on set theory**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1994.

NEUMANN, J. v. Eine axiomatisierung der mengenlehre. **Jounal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 154, p. 219–240, 1925.

POST, H. Individuality and physics. **The Listener**, n. 70, p. 534–537, 1963. Reprinted in Vedanta for East and West 32, p.14-22.

PUTNAM, H. Formalização. In: ROMANO, R. (Dir.). **Enciclopédia Einaudi**: lógica combinatória. São Paulo: Imprensa Nacional, 1988. v. 13, p. 11–71.

QUINE, W. V. O. Relatividade ontológica e outros ensaios. In: RYLE, G. et al. (Ed.). **Ensaios**. São Paulo: Nova Cultural, 1989, (Os Pensadores).

_____. Sobre o que há. In: BRANQUINHO, J. (Org.). **Existência e linguagem**: ensaios de metafísica analítica. Lisboa: Editorial Presença, 1990a. p. 21–39.

_____. Existência e quantificação. In: BRANQUINHO, J. (Org.). **Existência e linguagem**: ensaios de metafísica analítica. Lisboa: Editorial Presença, 1990b. p. 40–59.

_____. **Meaning and Necessity**. [S.l.]: Harvard University Press, 2000.

REDHEAD, M.; TELLER, P. Particles, particle labels, and quanta: the toll of unacknowledged metaphysics. **Foundations of Physics**, n. 21, p. 43–62, 1991.

_____. Particle labels and the theory of indistinguishable particles in quantum mechanics. **British Journal for the Philosophy of Science**, n. 43, p. 201–218, 1992.

RUBIN, H.; RUBIN, J. **Equivalents of the axiom of choice**. Amsterdan: North-Holland, 1963.

RUSSELL, B. **Human knowledge**: its scope and limits. London: Routledge, 1948.

SANT'ANNA, A. Elementary particles, hidden variables, and hidden predicates. **Synthese**, n. 125(1/2), p. 233–245, 2000.

SCHEWE, P. F.; STEIN, B. Having your photon and seeing it too. **The American Institute of Physics Bulletin of Physics News**, n. 439, 1999. Disponível em: <http://www.aip.org/enews/physnews/1999/split/pnu439-1.htm>. Acesso em: 16 jul. 1999.

SCHRÖDINGER, E. **Science and humanism**. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

_____. What is matter? **Scientific American**, p. 52–57, 1953.

_____. **The interpretation of quantum mechanics**: Dublin seminars (1949-1955) and other unpublished essays. Woodbridge Conn.: Ox Bow Press, 1995.

SHAPIRO, S. **Philosophy of mathematics**. Oxford: Oxford University Press, 1997.

SILVA, J. Sebastião e. Para uma teoria geral dos homomorfismos. In: _____. **Obras de José Sebastião e Silva**. Lisboa: Instituto Nacional de Investigação Científica, 1985.

SIMPSON, T. **Linguagem, realidade e significado**. Rio de Janeiro; São Paulo: F. Alves; Ed. da Universidade de São Paulo, 1976.

SKOLEM, T. Some remarks on axiomatized set theory. In: HEIJENOORT, J. v. (Ed.). **From Frege to Göedel**: a sourcebook in mathematical logic. Cambridge: Harvard University Press, 1967. p. 290–301.

SUPPE, F. (Ed.). **The structure of scientific theories**. 2. ed. [S.l.]: Un. Illinois Press, 1977.

SUPPES, P. A comparison of the meaning and uses of models in mathematics and the natural sciences. **Synthese**, n. 12, p. 287–301, 1960.

_____. **Teoria axiomática de conjuntos**. Colombia: Editorial Norma, 1968. Trad. Hernando Alfonso Castillo.

_____. O que é uma teoria científica? In: MORGENBESSER, S. et al. (Ed.). **Filosofia da Ciência**. São Paulo: Cultrix, 1979. p. 109–123.

TARSKI, A. The semantic conception of truth. **Philosophy and Phenomenological Research**, n. 4, 1944.

_____. **Logic, semantic and metamathematics**. New York, Oxford: Oxford University Press, 1956.

TELLER, P. **An interpretive introduction to quantum field theory**. Princeton: Princeton University Press, 1995.

TILLES, M. **The philosophy of set theory**: an historical introduction to cantor's paradise. [S.l.]: Basil Blackwell, 1991.

TORALDO DI FRANCIA, G. What is a physical object. **Scientia**, n. 113, p. 57–65, 1978.

TRUESDELL, C. **Six lectures on modern natural philosophy**. New-York: Springer-Verlag, 1966.

WEYL, H. **Philosophy of mathematics and natural science**. Princeton: Princeton Un. Press., 1949.