Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Anéis Singulares e Anéis Não Singulares

Claires Marcele Sada Boldo
Orientador: Prof. Dr. Oscar Ricardo Janesch

Florianópolis
Maio de 2004

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Anéis Singulares e Anéis Não Singulares

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra Básica.

Claires Marcele Sada Boldo

Florianópolis

Maio de 2004

Anéis Singulares e Anéis Não Singulares

por

Claires Marcele Sada Boldo

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de **Mestre**, área de concentração em Álgebra Básica, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Igor Mozolevski
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Oscar Ricardo Janesch (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)

Prof. Dr. Miguel Ferrero (UFRGS)

Prof. Dr. Waldir Quandt (UFSC)

Florianópolis, Maio de 2004

Ao meu marido, Edson

Às minhas filhas, Flávia e Camile

Agradecimentos

A conclusão deste trabalho só foi possível porque, ao longo de sua realização, eu pude contar com a ajuda e a participação de muitas pessoas.

Na impossibilidade de nomear a todos, agradeço com muito carinho às pessoas que, de alguma forma, participaram desta etapa de minha vida, enriquecendo minha formação acadêmica.

Destaco, de modo especial,

o professor Oscar Ricardo Janesch, que aceitou a orientação deste trabalho. A ele agradeço o apoio, o encorajamento, a confiança, a paciência, a compreensão, as horas gastas em meu benefício, o empenho pessoal, o profissionalismo, a seriedade, a orientação segura, objetiva e competente;

minha mãe, Edeltraud Sada, cuja vida tem se resumido na dedicação aos filhos, dentre os quais eu me incluo com muito orgulho e alegria. A ela agradeço a fiel e constante companhia, sobretudo para minhas filhas, em todos os momentos que, devido ao empenho que este trabalho exigia, não tiveram a atenção merecida.

Obrigado! Devo a vocês este mérito!

Resumo

Neste trabalho fazemos um estudo sobre módulos singulares e módulos não singulares, sobre um anel qualquer, não necessariamente comutativo e possivelmente sem unidade. Dedicamos atenção especial aos anéis singulares e aos anéis não singulares, demonstrando propriedades do ideal singular do anel.

Verificamos que podem ser obtidas informações adicionais sobre módulos, quando consideramos separadamente os módulos singulares e os módulos não singulares, e quando tomamos módulos sobre anéis não singulares.

Apresentamos classes de anéis singulares e anéis não singulares, e mostramos que os anéis não singulares com unidade e comutativos são exatamente os anéis semiprimos.

Utilizando propriedades do radical primo do anel, relacionamos o ideal singular de um ideal unilateral com o ideal singular do ideal bilateral gerado.

Abstract

This dissertation is a result of a study of singular and non-singular modules over an arbitrary ring in which no assumption is made with respect to commutativity or the existence of a unit. We give special attention to singular and non-singular rings and demonstrate properties of the singular ideal of these rings.

Verify that additional information about modules can be obtained when we consider singular and non-singular modules separately and when we consider only modules over singular rings.

We present classes of singular and non-singular rings and show that the commutative non-singular rings with identity are exactly the semi-prime rings.

Using properties of the prime radical of a ring, we are able to relate the singular ideal of a one-sided ideal with singular ideal of the two-sided ideal it generates.

Sumário

Introdução

Os anéis não singulares estão historicamente associados à construção de anéis quocientes e módulos quocientes.

Quando R é um domínio comutativo, temos a construção bem conhecida de um anel de quociente para R, que é o seu corpo de frações. Abandonando a comutatividade de R e a inexistência de divisores de zero em R, ainda podemos obter um anel de quocientes à direita e à esquerda para R, quando R é anel não singular ([6], Corollary 2.3.1, p.60).

Se R é um anel não singular com unidade e M é um R-módulo, obtemos um módulo de quocientes para M, tomando o fecho injetivo de $\frac{M}{Z(M)}$, onde $Z(M)$ é o submódulo singular de M. Este módulo de quocientes é geralmente denotado por $S^{\circ}M$, e a aplicação que associa a cada R-módulo M o $S^{\circ}R$-módulo $S^{\circ}M$ é conhecida como funtor localização não singular. Este funtor foi estudado por Gabriel ([6], ref.65) em 1962, como um caso particular da construção de categorias quocientes de Grothendieck ([6], ref.88) apresentado em 1957.

Em 1976, K. R. Goodearl publicou um livro sobre anéis e módulos singulares e não singulares ([6]). O livro traz uma coletânea de resultados publicados em artigos, unificando linguagem e notação, e relacionando os resultados. Atualmente este livro é uma das principais referências sobre o assunto.

O único anel singular com unidade é o anel trivial $\{0\}$. Como o livro de Goodearl trabalha exclusivamente com anéis com unidade, os anéis singulares não são ali abordados.

Um artigo envolvendo anéis singulares e anéis não singulares sem unidade, foi publicado por Ferrero e Puczylowski ([5]) em 1998. Neste artigo, além de outros resultados, são apresentadas classes de anéis singulares e anéis não singulares sem unidade.

Em nosso trabalho seguimos o primeiro capítulo do livro de Goodearl, verificando quais os principais resultados sobre extensões essenciais, submódulo singular e ideal singular, que continuam valendo para anéis sem unidade. Estes resultados, juntamente com um estudo sobre o radical primo de um anel, foram usados para acompanhar e preencher detalhes de demonstrações das três primeiras seções do artigo de Ferrero e Puczylowski.

Como nosso interesse é por anéis possivelmente sem unidade, verificamos no Capítulo 1 que todo anel é ideal de um anel com unidade. Estudamos também anéis e ideais finitamente gerados, anéis e ideais primos e semiprimos, e provamos que o radical primo é forte à direita e à esquerda.

No Capítulo 2 tratamos com extensões essenciais, ideais essenciais, o submódulo singular e o funtor singular. Apresentamos exemplos e destacamos algumas diferenças com o caso de anéis com unidade.

No último capítulo provamos propriedades do ideal singular e mostramos que resultados adicionais são obtidos para módulos sobre anéis não singulares. Em seguida apresentamos famílias de exemplos de anéis singulares e anéis não singulares, e provamos que a classe dos anéis singulares e a classe dos anéis não singulares não são hereditárias e não são homomorficamente fechadas. Terminamos provando que se I é ideal unilateral e I^* é o ideal bilateral gerado por I, então o anel semiprimo $\frac{I}{\beta(I)}$ é não singular se, e somente se, o anel semiprimo $\frac{I^*}{\beta(I^*)}$ é não singular.

Fixamos as seguintes notações:

- R é um anel qualquer, não necessariamente comutativo e possivelmente sem unidade.
- R^* é o anel com unidade construído a partir de R.
- Se $a \in R$ então $r(a) = \{x \in R\,;\, ax = 0\}$ é o anulador à direita de a em R.
- Se M é um R-módulo à direita então $Z(M)$ é o submódulo singular de M.
- $Z_r(R) = Z(R_R)$ é o ideal singular de R visto como R-módulo à direita.
- $I <_r R$ indica que I é ideal à direita do anel R.

Capítulo 1

ANÉIS, IDEAIS E O RADICAL PRIMO

É comum os cursos básicos de Álgebra tratarem com anéis que têm unidade, e muitos dos resultados e conceitos serem apresentados para anéis comutativos com unidade. Vários resultados vistos nestes cursos valem para anéis em geral, como, por exemplo, os teoremas sobre homomorfismos e a aritmética de ideais.

Quando trabalhamos com anéis possivelmente sem unidade e não necessariamente comutativos, alguns conceitos precisam ser introduzidos. Como exemplo citamos que no caso de anéis não comutativos há vários tipos de ideais primos ([3]), e no caso de anel sem unidade pode ocorrer que o anel não seja finitamente gerado ([9], Exercise 12, p.33).

Neste capítulo desenvolveremos conceitos e resultados relacionados com anéis e ideais finitamente gerados, anéis e ideais primos e semiprimos, e com o radical primo. Faremos esta exposição trabalhando com anéis possivelmente sem unidade e não necessariamente comutativos. Um estudo detalhado sobre estes anéis pode ser encontrado em [8], [9] e [2].

A maior parte dos resultados deste capítulo servirá como base para o último capítulo. Optamos por apresentá-los aqui para que nas seções finais tratemos apenas de propriedades do ideal singular.

Começamos apresentando o anel R^*, que é o anel com unidade construído a partir do anel R. Na seção 2 fazemos uma breve exposição sobre anéis e ideais finitamente gerados. A terceira seção é dedicada à definição e principais equivalências dos conceitos de ideal primo, anel primo, ideal e anel semiprimos, bem como a um estudo do radical primo.

1.1 Adjunção da Unidade

Mencionamos na introdução que um dos principais objetivos deste trabalho é apresentar propriedades do ideal singular de um anel qualquer, não necessariamente com unidade. Uma técnica útil para provar propriedades deste tipo é olhar o anel como subanel de um anel com unidade. Vamos verificar que todo anel é isomorfo a um ideal bilateral de um anel com unidade. Assim, através da identificação via o isomorfismo, todo anel é, em particular, subanel de um anel com unidade.

Sejam R um anel qualquer e $R^* = \mathbb{Z} \times R$. Em R^* defina as operações:

$$(n, r) + (m, s) = (n + m, r + s)$$

e

$$(n, r).(m, s) = (n.m, n.s + m.r + r.s)$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$ e $r, s \in R$, onde o produto de um inteiro $n \in \mathbb{Z}$ por um elemento $r \in R$ é o usual, a saber:

$$n.r = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ r + \cdots + r, & \text{se } n > 0 \\ -(r + \cdots + r), & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

A proposição abaixo diz que R^* é anel com unidade, que $\mathbb{Z}$ é subanel de R^*, que R é ideal bilateral de R^* e que $\frac{R^*}{R} \simeq \mathbb{Z}$.

Proposição 1.1.1. *Seja $R^* = \mathbb{Z} \times R$ com as operações de adição e multiplicação definidas acima. Então:*

(a) R^* é anel com unidade $(1, 0)$ e elemento neutro $(0, 0)$.

(b) A função $\varphi : R \longrightarrow R^*$ dada por $\varphi(r) = (0, r)$ é um homomorfismo injetor de anéis (sem unidade) e $\varphi(R) = \{0\} \times R \simeq R$.

(c) *A função* $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow R^*$ *dada por* $\psi(n) = (n, 0)$ *é homomorfismo injetor de anéis (com unidade) e* $\psi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \{0\} \simeq \mathbb{Z}$.

(d) $\{0\} \times R$ *é um ideal bilateral de* R^**, e* $\frac{R^*}{\{0\}\times R} \simeq \mathbb{Z}$.

Demonstração.
(a) A operação de adição definida em $R^* = \mathbb{Z}\times R$ é exatamente a operação de adição do anel produto cartesiano $\mathbb{Z} \times R$. Portanto, $(R^*, +)$ é um grupo abeliano. Resta provar os axiomas que envolvem a multiplicação.
Sejam $x = (n, r)$, $y = (m, s)$ e $z = (v, w)$ elementos de R^*. Temos então:
Associativa da Multiplicação:

$$\begin{aligned}
(x.y).z &= [(n, r).(m, s)].(v, w) \\
&= (n.m, n.s + m.r + r.s).(v, w) \\
&= (n.m.v, n.m.w + v.(n.s + m.r + r.s) + (n.s + m.r + r.s).w \\
&= (n.m.v, n.m.w + v.n.s + v.m.r + v.r.s + n.s.w + m.r.w + r.s.w) \\
&= (n, r).(m.v, m.w + v.s + s.w) \\
&= (n, r).[(m, s).(v, w)] \\
&= x.(y.z)
\end{aligned}$$

Distributiva:

$$\begin{aligned}
x.(y + z) &= (n, r).[(m, s) + (v, w)] \\
&= (n, r).(m + v, s + w) \\
&= (n.(m + v), n.(s + w) + (m + v).r + r.(s + w)) \\
&= (n.m + n.v, n.s + n.w + m.r + v.r + r.s + r.w) \\
&= (n.m, n.s + m.r + r.s) + (n.v, n.w + v.r + r.w) \\
&= (n, r).(m, s) + (n, r).(v, w) \\
&= x.y + x.z
\end{aligned}$$

Elemento Neutro da Multiplicação:
Tomando $1^* = (1, 0)$ com $1 \in \mathbb{Z}$ e $0 \in R$, temos:
$x.1^* = (n, r).(1, 0) = (n.1, n.0 + 1.r + r.0) = (n, r) = x$
$1^*.x = (1, 0).(n, r) = (1.n, 1.r + n.0 + 0.r) = (n, r) = x$
Ou seja, $(1, 0)$ é a unidade de R^*, o que mostra (a).

(b) Sejam $r, s \in R$. Então:
$\varphi(r+s) = (0, r+s) = (0,r) + (0,s) = \varphi(r) + \varphi(s)$ e
$\varphi(r.s) = (0, r.s) = (0,r).(0,s) = \varphi(r).\varphi(s)$.
A injetividade de φ é óbvia. Também é claro que $\varphi(R) \subseteq \{0\} \times R$. Por outro lado, dado $x = (0,r) \in \{0\} \times R$ temos que $x = \varphi(r) \in \varphi(R)$. Logo, $\varphi(R) = \{0\} \times R$ e, pelo Primeiro Teorema dos Homomorfismos, concluímos que $\varphi(R) = \{0\} \times R \simeq R$.

(c) É análogo ao item (b). Note que 1 é a unidade de $\mathbb{Z}$ e $\psi(1) = (1,0)$ é a unidade de R^*, isto é, ψ é homomorfismo de anéis com unidade.

(d) É fácil ver que $g : R^* \longrightarrow \mathbb{Z}$, $g(n,r) = n$ é homomorfismo sobrejetor de anéis. Como $Ker(g) = \{0\} \times R$, aplicamos o Primeiro Teorema dos Homomorfismos para concluir que $\{0\} \times R$ é ideal bilateral de R^* e que $\frac{R^*}{\{0\} \times R} \simeq \mathbb{Z}$.

$\square$

Identificando R com $\varphi(R) = \{0\} \times R$ temos, pela proposição anterior, que R é ideal bilateral de R^* e $\frac{R^*}{R} \simeq \mathbb{Z}$. Também, identificando $\mathbb{Z}$ com $\psi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \{0\}$, temos que $\mathbb{Z}$ é subanel de R^*. Uma conta simples mostra que se $R \neq (0)$ então $\mathbb{Z}$ não pode ser ideal à direita (nem à esquerda) de R^*. De fato, neste caso, tomando $(1,0) \in \mathbb{Z}$ e $(1,r) \in R^*$ com $r \neq 0$ temos que $(1,0).(1,r) = (1,r).(1,0) = (1,r) \notin \mathbb{Z}$.

A construção acima é, às vezes, chamada de adjunção da unidade ou imersão em anel com unidade. Apesar de ser aplicável a qualquer anel R, neste trabalho a adjunção da unidade deixa de ser interessante quando R já tem unidade. Basta observar que, neste caso, a unidade obtida em R^* é diferente da unidade inicial de R e, portanto, R se torna um subanel com unidade diferente da unidade do anel R^*.

Encerramos esta seção apresentando algumas propriedades do anel R que se estendem para o anel R^*.

Proposição 1.1.2. *Seja R um anel. Então:*

(a) R é comutativo se, e somente se, R^* é comutativo.

(b) Se I é ideal (à direita, à esquerda ou bilateral) de R então $\{0\} \times I$ é ideal (à direita, à esquerda ou bilateral) de R^*.

(c) R não tem elementos nilpotentes não nulos se, e somente se, R^* não tem elementos nilpotentes não nulos.

Demonstração.
(a) Provemos primeiro que se R é comutativo, então R^* é comutativo. Sejam $x, y \in R^*$ com $x = (n, r)$ e $y = (m, s)$. Então $x.y = (n, r).(m, s) = (n.m, n.s + m.r + r.s) = (m.n, m.r + n.s + s.r) = (m, s).(n, r) = y.x$. Suponhamos agora que R^* seja comutativo e tome $r, s \in R$. Então $x.y = y.x$ para quaisquer elementos x, y de R^*. Em particular, para $x = (0, r)$ e $y = (0, s)$ temos $x.y = (0, r).(0, s) = (0, 0.s + 0.r + r.s) = (0, r.s)$ e $y.x = (0, s).(0, r) = (0, 0.r + 0.s + s.r) = (0, s.r)$, o que nos dá $r.s = s.r$. Portanto, R é comutativo e isto provou (a).

(b) Trabalharemos com I um ideal à direita de R. Claro que $\{0\} \times I$ é fechado por diferenças. Sejam $(0, x) \in \{0\} \times I$ e $(n, y) \in R^*$. Então:
$(0, x).(n, y) = (0.n, 0.y + n.x + x.y) = (0, nx + xy) \in \{0\} \times I$ pois $x \in I$.

(c) Se R^* não tem elemento nilpotente não nulo então R não tem elemento nilpotente não nulo pois $R \subseteq R^*$.
Suponha agora que R não tem elemento nilpotente não nulo e que $(n, r) \in R^*$ com $(n, r)^\alpha = (0, 0)$ para algum $\alpha \in \mathbb{N}$. Não é difícil verificar que com o produto de R^* vale:

$$(n, r)^\alpha = (n^\alpha, (n + r)^\alpha - n^\alpha).$$

Assim, $(n, r)^\alpha = (0, 0)$ implica em $n = 0$ e $r^\alpha = 0$. Como R não tem elemento nilpotente não nulo, concluímos que $r = 0$. Portanto, R^* não tem elemento nilpotente não nulo.

$\square$

Se A é um R^*-módulo então é claro que A é um R-módulo (sobre o anel R sem unidade), com a restrição do produto de R^* para $R = \{0\} \times R$.

Vejamos agora a recíproca:

Proposição 1.1.3. *Se A é um R-módulo à direita (à esquerda), então A é R^*-módulo à direita (à esquerda) com a operação*

$$\begin{aligned} \bullet : A \times R^* &\longrightarrow A \\ (a, (n, r)) &\longmapsto na + ar \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \bullet : R^* \times A &\longrightarrow A \\ ((n, r), a) &\longmapsto na + ra. \end{aligned}$$

Demonstração.
Sabemos que $(A, +)$ é grupo abeliano e também Z-módulo com a operação $A \times \mathbb{Z} \longrightarrow A$, $(a, n) \longmapsto an$. Vamos verificar os axiomas de módulo que envolvem produto. Sejam $a, b \in A$ e $(n, r), (m, s) \in R^*$. Então:

- $a.(1, 0) = a$.
- $a.((n, r) + (m, s)) = a.(n + m, r + s) = na + ma + ar + as = a(n, r) + a(m, s)$.
- $a.((n, r).(m, s)) = a.(nm, ns + mr + rs) = (nm)a + a(ns) + a(mr) + a(rs) = (na)m + (na)s + (ma)r + (ar)s = (na + ar).(m, s) = (a(n, r)).(m, s)$.
- $(a + b).(n, r) = na + nb + ar + br = a(n, r) + b(n, r)$.

Analogamente prova-se que A é R^*-módulo à esquerda.

$\square$

Pelo visto acima temos que A é um R-módulo à direita (esquerda) se, e somente se, A é um R^*-módulo à direita (esquerda). Também é fácil ver que B é um R-submódulo de A se, e somente se, B é um R^*-submódulo de A.

Observe que fazendo $A = R$ na Proposição 1.1.3, vem que o R-módulo R é um R^*-módulo com a operação $R \times R^* \longrightarrow R$, $(a, (n, r)) \longmapsto na + ar$.

Por outro lado, $R = \{0\} \times R$ é ideal de R^* e então R é um R^*-módulo com a operação natural $a.(n, r) = (0, a)(n, r) = (0, na + ar) = na + ar$.

Portanto, para olhar R como R^*-módulo é indiferente usar a Proposição 1.1.3 com $A = R$ ou usar o fato de R ser ideal de R^*.

1.2 Ideais e Anéis Finitamente Gerados

Novamente para esta seção R é um anel não necessariamente comutativo e possivelmente sem unidade.

Faremos aqui um estudo sobre ideais finitamente gerados, destacando algumas diferenças do caso em que R tem unidade. Apresentaremos uma descrição do ideal bilateral I^* de R, gerado pelo ideal à direita I de R. Usaremos isso no Capítulo 3.

Abordaremos também os subanéis finitamente gerados, com o objetivo de provar que, se o anel R é finitamente gerado, então o anel R^n também é finitamente gerado.

Seja R um anel qualquer. Todo subconjunto $S \subseteq R$ está contido em um ideal (à direita, à esquerda, bilateral) de R. Na pior hipótese, tomamos este ideal como sendo o próprio R. Além disso, ideais são fechados por intersecção. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 1.2.1. *Seja S um subconjunto do anel R. A intersecção de todos os ideais à direita de R que contém S é chamado de ideal à direita gerado por S.*

Note que o ideal à direita gerado por S é o menor ideal à direita de R que contém S.

Denotaremos por $(S)_r$ o ideal à direita gerado por S. Quando S é finito da forma $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ escreveremos $(a_1, a_2, ..., a_n)_r$ para indicar $(S)_r$.

Analogamente, para $S \subseteq R$, podemos definir:

- $(S)_l$ o ideal à esquerda de R gerado por S;
- (S) o ideal bilateral de R gerado por S.

Definição 1.2.2. *Dizemos que o ideal à direita I do anel R é finitamente gerado, quando existe um conjunto finito $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq R$ tal que $I = (a_1, a_2, ..., a_n)_r$.*

Na definição acima, $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ é o conjunto dos geradores (ou base) do ideal à direita I.

No caso particular de um único gerador $a \in R$, chamamos $(a)_r$ de ideal à direita principal gerado por a.

No decorrer do trabalho será útil conhecer claramente a forma dos elementos dos ideais principais, em um anel qualquer. O próximo exemplo mostra que quando R tem unidade, estes ideais são bem simples.

Exemplo 1.2.1. Se R tem unidade e $a \in R$ então $(a)_r = aR$.
De fato, é fácil ver que aR é ideal à direita de R. Como R tem unidade temos $a \in aR$.

Além disso, qualquer outro ideal à direita de R que contenha a deve conter aR. Portanto, $(a)_r = aR$.

De forma análoga ao exemplo acima, é fácil ver que se R tem unidade e $a \in R$ então $(a)_l = Ra$ e $(a) = RaR$, onde $RaR = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i a s_i \ ; \ n \in \mathbb{N}, r_i, s_i \in R \right\}$.

Se $U(R)$ representa os elementos inversíveis do anel com unidade R e $a \in U(R)$ então $(a)_r = (a)_l = (a) = R$. Isso diz também que um anel com unidade sempre é um ideal finitamente gerado por 1. Ainda no caso em que R tem unidade, consideremos que $S \subseteq R$ e S possui um elemento inversível. Então $(S)_r = (S)_l = (S) = R$.

Daqui em diante, trataremos preferencialmente com ideais à direita. Contudo, ressaltamos que o mesmo procedimento pode ser feito com ideais à esquerda ou bilaterais.

Sejam agora R um anel qualquer e $a \in R$. É claro que aR é ideal à direita de R, mesmo que R não tenha unidade. Mas se R não tem unidade não podemos garantir que $a \in aR$. Tome, por exemplo, $R = 2\mathbb{Z}$ e $a = 2$, e então $a \notin aR = 4\mathbb{Z}$.

Como o ideal gerado por a deve conter a, devemos ter

$$a\mathbb{Z} = \{na \ ; \ n \in \mathbb{Z}\} \subseteq (a)_r \quad \text{e}$$

$$aR \subseteq (a)_r.$$

Logo, $a\mathbb{Z} + aR \subseteq (a)_r$.

Exemplo 1.2.2. Se R é um anel qualquer e $a \in R$ então $(a)_r = a\mathbb{Z} + aR$.
Vimos acima que todo ideal à direita de R que contém a também contém $a\mathbb{Z} + aR$. Assim, para concluir que $(a)_r = a\mathbb{Z} + aR$, basta verificar que $a\mathbb{Z} + aR$ é ideal à direita de R. Para isso tome $na + at, ma + as \in a\mathbb{Z} + aR$ e $\lambda \in R$. Daí
$(na + at) - (ma + as) = (n - m)a + a(t - s) \in a\mathbb{Z} + aR \quad$ e
$(na + at).\lambda = 0.a + a.(n\lambda + t\lambda) \in a\mathbb{Z} + aR$.
Logo, $a\mathbb{Z} + aR$ é ideal à direita de R. Portanto, $(a)_r = a\mathbb{Z} + aR$.

O mesmo raciocínio do Exemplo 1.2.2 pode ser empregado para verificar que

$$(a)_l = \mathbb{Z}a + Ra \quad e$$
$$(a) = \mathbb{Z}a + aR + Ra + RaR.$$

Se R tem unidade então $a \in Ra$ e daí $\mathbb{Z}a \subseteq Ra$. Assim, $\mathbb{Z}a + Ra = Ra$. Também $aR, Ra, \mathbb{Z}a \subseteq RaR$ e as igualdades acima se reduzem para

$$(a)_r = aR$$
$$(a)_l = Ra$$
$$(a) = RaR$$

como vimos no Exemplo 1.2.1.

Veremos agora que se $I = (a_1, ..., a_n)_r$ é um ideal à direita finitamente gerado de R, então seus elementos podem ser descritos através dos elementos dos ideais à direita principais, gerados por $a_1, a_2, ..., a_n$.

Lembramos que se I e J são ideais à direita de R então $I + J = \{x + y \ ; \ x \in I \, \text{e} \, y \in J\}$ é ideal à direita de R. Mais que isso, $I + J$ é o menor ideal à direita de R que contém I e J, pois cada ideal à direita de R que contém I e J deve conter todas as somas $x + y$ com $x \in I$ e $y \in J$. Assim, $I + J$ é o ideal à direita de R gerado por $I \cup J$, ou seja,

$$I + J = (I \cup J)_r.$$

Proposição 1.2.1. *Se $F = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ é subconjunto do anel R, então* $(a_1, a_2, ..., a_n)_r = (a_1)_r + \cdots + (a_n)_r$.

Demonstração.
Como $F = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup ..... \cup \{a_n\}$ temos $(a_1, ..., a_n)_r = (F)_r = (\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup ..... \cup \cup \{a_n\})_r = (a_1)_r + \cdots + (a_n)_r$.

□

Uma prova alternativa para a Proposição 1.2.1 pode ser obtida, notando que $a_1, a_2, ..., a_n$ está no ideal à direita $(a_1)_r + \cdots + (a_n)_r$ e como $(a_1, a_2, ..., a_n)_r$ é o menor ideal com esta propriedade $(a_1, ..., a_n)_r \subseteq (a_1)_r + \cdots + (a_n)_r$. Por outro lado, todo ideal à direita de R que contém $\{a_1, ..., a_n\}$ deve conter $(a_1)_r + \cdots + (a_n)_r$.

No Capítulo 3 usaremos o ideal bilateral gerado por um ideal à direita. De acordo com a Definição 1.2.1, se I é ideal à direita de R então o ideal bilateral de R gerado por I é a intersecção dos ideais bilaterais de R que contém I. Pretendemos, para facilitar as contas, apresentar uma descrição mais conveniente do ideal bilateral gerado por I.

Lembre que $R^* = \mathbb{Z} \times R$ é o anel obtido de R pela adjunção da unidade, e que $R \simeq \{0\} \times R$ é ideal bilateral de R^*.

Proposição 1.2.2. *Seja I um ideal à direita do anel R. Então:*

(a) O ideal bilateral de R gerado por I é

$$I^* = I + RI = \mathbb{Z}I + RI = R^*I.$$

(b) I é ideal à direita de I^*.

Demonstração.
(a) Seja J um ideal bilateral de R tal que $I \subseteq J$. Então $RI \subseteq J$ e $I \subseteq J$ implica em $I + RI \subseteq J$. Logo, $I + RI \subseteq I^*$. Para ver que $I^* = I + RI$ basta provar que $I + RI$ é ideal bilateral de R, pois $I \subseteq I + RI$ e I^* é o menor ideal bilateral de R com esta propriedade. Tome então $u = a + \sum r_i\alpha_i$, $v = b + \sum s_i\beta_i \in I + RI$ e $t \in R$. Assim

- $u - v = (a - b) + \sum r_i\alpha_i + \sum(-s_i)\beta_i \in I + RI$, pois $a - b \in I$ e os somatórios estão em RI.
- $ut = at + \sum r_i(\alpha_i t) \in I + RI$ pois $at, \alpha_i t \in I$ e $r_i \in R$.

Analogamente $tu \in I + RI$. Segue que $I + RI$ é ideal bilateral de R que contém I e, portanto, $I^* = I + RI$.
Como $\mathbb{Z}I = I$, já temos $I^* = I + RI = \mathbb{Z}I + RI$.
Identificando I com $\{0\} \times I \subseteq R^*$ temos $R^*I = (\mathbb{Z} \times R).(\{0\} \times I) = \{0\} \times (\mathbb{Z}I + RI) = \mathbb{Z}I + RI = I + RI = I^*$.
(b) É óbvio pois $I \subseteq I^* \subseteq R$ e I é ideal à direita de R.

$\square$

Destacamos que o ideal bilateral I^* de R gerado pelo ideal à direita I de R, pode ser obtido como $I^* = R^*I$. Se R tem unidade então $I^* = RI$.

Passaremos agora ao estudo de anéis gerados por conjuntos.

Seja F um subconjunto do anel R. Denote

- $-F = \{-x \; ; \; x \in F\}$
- $[F] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m_i} a_{ij} \; ; \; n, m_i \in \mathbb{N} \text{ e } a_{ij} \in F \cup (-F) \right\}$.

Note que $F \subseteq [F]$. É claro que $[F]$ é fechado por somas. Para ver que o simétrico de um elemento de $[F]$ permanece em $[F]$ basta trocar, em cada produto que compõe os somandos, um dos elementos de $F \cup (-F)$ pelo seu simétrico. Finalmente, com algumas contas, mostra-se que $[F]$ é fechado por produtos. Logo, $[F]$ é um subanel de R que contém F.

Se A é um outro subanel de R que contém F então é claro que $[F] \subseteq A$. Assim, $[F]$ é o menor subanel de R que contém F, e podemos escrever

$$[F] = \bigcap \{A \subseteq R \; ; \; A \text{ é subanel de } R \text{ e } F \subseteq A\}.$$

Definição 1.2.3. *Se F é um subconjunto do anel R então $[F]$ é chamado de subanel gerado por F.*

Quando F é finito da forma $F = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ escrevemos $[a_1, a_2, ..., a_n]$ para indicar $[F]$.

Definição 1.2.4. *Dizemos que o subanel A do anel R é finitamente gerado, quando existe um conjunto finito $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq R$ tal que $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$.*

Como caso particular da definição acima, dizemos que o anel R é finitamente gerado, quando existe um conjunto finito $F \subseteq R$ tal que R é o menor (e portanto único) subanel de R que contém F.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.2.3. Se R é um anel e $a \in R$ então

$$[a] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i a^i \; ; \; n \in \mathbb{N}, \; x_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Uma maneira de justificar isso, é notar que o conjunto do lado direito da igualdade acima é um subanel de R que contém a, e qualquer outro subanel que contenha a deve conter este conjunto.

A segunda maneira é usar a expressão

$$[a] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m_i} a_{ij} \ ; \ n, m_i \in \mathbb{N} \text{ e } a_{ij} \in \{a\} \cup \{-a\} \right\}$$

e notar que, neste caso, o produtório se transforma em potências de a ou de $(-a)$. Agrupando os somandos com mesmo expoente chegamos a elementos da forma $\sum_{i=1}^{n} x_i a^i$ com $x_i \in \mathbb{Z}$.

O exemplo acima descreve $[a]$ como o conjunto dos polinômios em a com coeficientes em $\mathbb{Z}$, que têm termo independente nulo.

Convém verificar que $[a]$ não é, em geral, ideal à direita (à esquerda) de R.

Exemplo 1.2.4. Sejam $R = M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)$ e $a = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} \in R$.

É claro que $\left\{ \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} \right\}$ é subanel de R que contém a, e é o menor.

Logo, $[a] = \left\{ \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} \right\}$.

Mas $[a]$ não é ideal à direita, e nem à esquerda, de R pois

$$\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} \notin [a] \quad \text{e}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{bmatrix} \notin [a].$$

Desde que R tem unidade, $(a)_r = aR$ e $(a)_l = Ra$. Então

$$(a)_r = \left\{ \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2) \right\} \; e$$

$$(a)_l = \left\{ \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2) \right\}.$$

A próxima proposição relaciona ideal gerado com subanel gerado.

Proposição 1.2.3. *Seja F um subconjunto do anel R. Então*

$$[F] \subseteq (F)_r \subseteq (F).$$

Demonstração.
Seja I um ideal bilateral de R que contém F. Como I é ideal à direita de R que contém F temos $(F)_r \subseteq I$. Logo, $(F)_r \subseteq (F)$. A inclusão $[F] \subseteq (F)_r$ se justifica analogamente, já que ideais são subanéis.

□

Corolário 1.2.1. *Se R é um anel gerado por F então*

$$[F] = (F)_r = (F) = R.$$

Demonstração.
Basta notar que $R = [F] \subseteq (F)_r \subseteq (F) \subseteq R$.

□

Já comentamos anteriormente que se R tem unidade então $(1)_r = (1) = R$, isto é, R é ideal gerado por 1. Observamos agora que não é verdade, em geral, que $[1] = R$. Por exemplo, $R = \mathbb{R}$ não pode ser gerado por 1 como anel. Aliás, o único anel gerado por 1 é, a menos de isomorfismo, o anel $\mathbb{Z}$.

Abordaremos agora o principal resultado desta seção. A saber, provaremos que se R é um anel finitamente gerado então o anel R^n também é anel finitamente gerado.

A parte crucial da demonstração do resultado acima é provar que se R é gerado pelo conjunto finito F, então R^n será gerado pelo conjunto finito $L = \bigcup_{i=n}^{2n-1} F^i$. Esclarecemos que F^i é formado por todos os produtos finitos de i parcelas de F.
Por exemplo, se $F = \{a, b\}$ então

$$\begin{aligned}
&F^2 = \{a^2, ab, ba, b^2\},\\
&F^3 = \{a^3, a^2b, aba, ab^2, ba^2, bab, b^2a, b^3\},\\
&F^4 = \{a^4, a^3b, a^2ba, a^2b^2, aba^2, abab, ab^2a, ab^3, ba^3, ba^2b, baba, bab^2, b^2a^2, b^2ab, b^3a, b^4\}.
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.1. *Se R é um anel finitamente gerado e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ então R^n é anel finitamente gerado.*

Demonstração.
Seja $F = \{a_1, a_2, ..., a_\alpha\}$ o conjunto de geradores de R. Vamos provar que R^n é gerado por $L = \bigcup_{i=n}^{2n-1} F^i$. É claro que L é finito e também $L \subseteq R^n$, pois todo elemento de L é produto de pelo menos n elementos de R. Segue que $[L] \subseteq R^n$. Para provar a outra inclusão tomemos $u \in R^n$. Então

$$u = \sum_{i=1}^{m} r_{i_1} \ldots . r_{i_n}, \ m \in \mathbb{N}, \ r_{i_j} \in R.$$

Como $[L]$ é fechado por somas, basta verificar que o produto $r_1 . r_2 . \ldots . r_n \in [L]$ quando $r_1, r_2, ..., r_n \in R$, e teremos $u \in [L]$. Note que um elemento de $R = [F]$ é uma soma finita de produtos finitos de elementos a_i, $i \in \{1, 2, ..., \alpha\}$, eventualmente precedidos de sinal negativo. Além disso, em cada parcela da soma há, pelo menos, um elemento não nulo. Logo, cada parcela desta soma tem, pelo menos, um elemento de F. Temos, então, que o produto $r_1 . r_2 . \ldots . r_n$ também é uma soma finita de produtos finitos de elementos a_i, $i \in \{1, 2, ..., \alpha\}$, eventualmente precedidos de sinal negativo. Mais ainda, em cada parcela destas somas há, pelo menos, n elementos de F. Novamente, pelo fato de $[L]$ ser subanel, basta verificar que qualquer produto finito, com uma quantidade $l \geq n$ de elementos de F, está em $[L]$. Provaremos isso usando indução sobre l.
Seja $v = a_{i_1} \ldots . a_{i_l}$, $a_{i_j} \in F$. Se $n \leq l < 2n - 1$, então $v \in F^l \subseteq L \subseteq [L]$.
Consideremos agora $l \geq 2n$. Nossa hipótese de indução é que se $n \leq t \leq l - 1$ e v' tem

t fatores em F então $v' \in [L]$. Agora, reescreva v agrupando os primeiros n fatores e os $(l-n)$ últimos fatores, da seguinte forma:

$$v = (a_{i_1} \ldots . a_{i_n})(a_{i_{n+1}} \ldots . a_{i_l}).$$

Como $a_{i_1} \ldots . a_{i_n}$ tem n fatores de F temos $a_{i_1} \ldots . a_{i_n} \in F^n \subseteq L \subseteq [L]$.
Além disso, $a_{i_{n+1}} \ldots . a_{i_l}$ tem $l-n$ fatores e

$$n \geq 1 \Rightarrow l - n \leq l - 1$$
$$l \geq 2n \Rightarrow l - n \geq n.$$

Logo, $n \leq (l-n) \leq l-1$, e aplicando a hipótese de indução vem que $a_{i_{n+1}} \ldots . a_{i_l} \in [L]$. Como $[L]$ é fechado por produtos concluímos que $v \in [L]$.

$\square$

Para terminar, vejamos uma maneira simples de provar que se $R = [a]$ então R^n é finitamente gerado.

Desde que $F = \{a\}$ então $L = \bigcup_{i=n}^{2n-1} F^i = \{a^n\} \bigcup ..... \bigcup \{a^{2n-1}\}$, isto é, $L = \{a^n, a^{n+1}, ..., a^{2n-1}\}$.

Como todos os elementos de L têm pelo menos n fatores de $F \subseteq R$, vem que $L \subseteq R^n$. Portanto, $[L] \subseteq R^n$. Um elemento de R^n é soma finita de produtos do tipo $r_1.r_2. \ldots .r_n$ com $r_i \in R = [a]$. Isso diz que o produto $r_1.r_2. \ldots .r_n$ é soma finita de potências de a cujo expoente é $m \geq n$. Desde que $[L]$ é anel, basta provar que $a^m \in [L]$ quando $m \geq n$. Claro que consideramos $n > 1$. Deste modo:

$$m = nk \Longrightarrow a^m = (a^n)^k \in [L]$$
$$m = nk + 1 = n(k-1) + n + 1 \Longrightarrow a^m = (a^n)^{k-1} + a^{n+1} \in [L]$$
$$m = nk + 2 = n(k-1) + n + 2 \Longrightarrow a^m = (a^n)^{k-1} + a^{n+2} \in [L]$$
$$\vdots$$
$$m = nk + (n-1) = n(k-1) + 2n - 1 \Longrightarrow a^m = (a^n)^{k-1} + a^{2n-1} \in [L].$$

Assim, para $m \geq n$ temos $a^m \in [L]$.

1.3 Anéis Primos, Anéis Semiprimos e o Radical Primo

Nesta seção trabalharemos com anéis e ideais primos, e anéis e ideais semiprimos. Lembramos que os anéis aqui considerados não são necessariamente comutativos e possivelmente não têm unidade.

Propriedades dos ideais primos e semiprimos serão úteis para estudar o radical primo de um anel, e para o desenvolvimento das duas últimas seções do Capítulo 3.

O principal resultado desta seção é o Teorema 1.3.5, que assegura que o radical primo de um anel é forte à direita e à esquerda. Este resultado será usado na seção 3.3.

Definiremos adiante (Definição 1.3.7) o radical primo de um anel qualquer como a intersecção de seus ideais primos. Desta maneira, nossa definição de ideal primo deverá ser satisfeita por algum ideal do anel.

No caso de anéis comutativos e com unidade temos a definição bem conhecida.

Definição 1.3.1. *Dizemos que o ideal bilateral próprio P do anel comutativo com unidade R é primo quando vale:*

$$(*) \qquad a, b \in R \ \text{ e } \ ab \in P \ \Rightarrow \ a \in P \ \text{ ou } \ b \in P.$$

Se o anel R é não comutativo, existem poucos ideais de R que satisfazem a condição $(*)$. Tais ideais são chamados completamente primos.

Uma definição mais conveniente para ideal primo de anel com unidade mas não necessariamente comutativo, e que contém os ideais completamente primos, é a seguinte.

Definição 1.3.2. *Dizemos que o ideal bilateral próprio P do anel com unidade R é primo quando vale:*

$$(**) \qquad A \ \text{ e } \ B \ \text{ ideais de } \ R \ \text{ e } \ AB \subseteq P \ \Rightarrow \ A \subseteq P \ \text{ ou } \ B \subseteq P.$$

Não há conflito entre as definições anteriores, pois a Definição 1.3.2 aplicada a um anel comutativo com unidade coincide com a Definição 1.3.1. De fato, seja R um anel comutativo com unidade e P um ideal bilateral próprio de R. Admita que valha $(**)$ e tome $a, b \in R$ tais que $ab \in P$. Como $(a) = aR$ e $(b) = bR$ temos $(a)(b) = (ab)R \subseteq P$, e por $(**)$ $(a) \subseteq P$ ou $(b) \subseteq P$. Logo, $a \in P$ ou $b \in P$ e vale $(*)$. Considere agora que valha $(*)$ e sejam A e B ideais de R tais que $AB \subseteq P$. Se $A \nsubseteq P$ existe $a \in A \setminus P$. Para qualquer $b \in B$ temos $ab \in AB \subseteq P$. Usando $(*)$ concluímos que $b \in P$. Portanto, vale $(**)$.

Lembre que um ideal M do anel R é maximal quando $M \neq R$ e não existe ideal I de R tal que $M \subsetneqq I \subsetneqq R$.

Os anéis com unidade sempre possuem ideais primos (próprios). Isso é consequência de dois resultados básicos: todo anel com unidade possui ideal maximal e todo ideal maximal de um anel com unidade é primo.

Quando R não tem unidade pode ocorrer que não exista ideal próprio de R satisfazendo $(**)$.

Exemplo 1.3.1. Seja $R = \overline{2}.\mathbb{Z}_4$. Os ideais de R são $\{\overline{0}\}$ e $R = \{\overline{0}, \overline{2}\}$. Como $R.R \subseteq \{\overline{0}\}$, mas $R \nsubseteq \{\overline{0}\}$, vemos que R não tem ideal próprio para o qual vale $(**)$.

Conforme comentamos, definiremos o radical primo de um anel R qualquer, como a intersecção de seus ideais primos. Para garantir a existência de ideais primos em um anel sem unidade, trabalharemos com a definição abaixo, onde não exigimos que ideais primos sejam próprios. Assim, R é ideal primo de R.

Definição 1.3.3. *Dizemos que o ideal bilateral P do anel R é primo quando vale:*

$$A \text{ e } B \text{ ideais de } R \text{ e } AB \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P \text{ ou } B \subseteq P.$$

Note, no Exemplo 1.3.1, que $P = \{\overline{0}\}$ é ideal maximal de $R = \overline{2}.\mathbb{Z}_4$, mas $P = \{\overline{0}\}$ não é ideal primo de R.

O próximo teorema traz as principais equivalências para a definição de ideal primo de um anel qualquer.

Teorema 1.3.1. *Sejam R um anel e P um ideal de R. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) P é um ideal primo.

(ii) Se $a, b \in R$ e $aRb \subseteq P$, então $a \in P$ ou $b \in P$.

(iii) *Se* (a) *e* (b) *são ideais principais de* R *tais que* $(a).(b) \subseteq P$*, então* $a \in P$ *ou* $b \in P$.

(iv) *Se* A *e* B *são ideais à direita de* R *tais que* $AB \subseteq P$ *então* $A \subseteq P$ *ou* $B \subseteq P$.

(v) *Se* A *e* B *são ideais à esquerda de* R *tais que* $AB \subseteq P$ *então* $A \subseteq P$ *ou* $B \subseteq P$.

(vi) *Se* A *e* B *são ideais de* R *tais que* $P \subseteq A$*,* $P \subseteq B$ *e* $AB \subseteq P$ *então* $A = P$ *ou* $B = P$.

Demonstração.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Como $aRb \subseteq P$ e P é ideal de R, segue que $RaRbR \subseteq P$. Mas $R^2 \subseteq R$ e daí, $(RaR)(RbR) \subseteq RaRbR \subseteq P$. Como RaR e RbR são ideais de R devemos ter $RaR \subseteq P$ ou $RbR \subseteq P$. Suponha $RaR \subseteq P$, e seja $A = (a) = \mathbb{Z}a + aR + Ra + RaR$. Usando que RaR é ideal de R e fazendo contas concluímos que $A^3 \subseteq RaR \subseteq P$. Portanto, devemos ter $A \subseteq P$ e daí $a \in P$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Como $(a) = \mathbb{Z}a + aR + Ra + RaR$ e $(b) = \mathbb{Z}b + bR + Rb + RbR$, temos que $aRb \subseteq (a)(b)$. Assim, $a \in P$ ou $b \in P$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Suponha que $A \nsubseteq P$. Vamos provar que $B \subseteq P$. Tome $a \in A \setminus P$ e $b \in P$. É fácil ver que $(a) \subseteq A + Ra + RA$ e $(b) \subseteq B + Rb + RB$ pois A e B são ideais à direita. Segue que $(a)(b) \subseteq AB + RAB$. Como $AB \subseteq P$ e P é ideal de R temos $(a)(b) \subseteq P$. A hipótese (iii) garante que $(b) \subseteq P$ pois $(a) \nsubseteq P$. Portanto, $b \in P$ e $B \subseteq P$.
$(iii) \Rightarrow (v)$ É análogo a $(iii) \Rightarrow (iv)$.
$(iv) \Rightarrow (vi)$ e $(v) \Rightarrow (vi)$ são facilmente verificadas.
$(vi) \Rightarrow (i)$ Desde que A e B são ideais de R tais que $AB \subseteq P$, então $A + P$ e $B + P$ são ideais de R, contendo P, e $(A + P)(B + P) \subseteq AB + AP + PB + PP \subseteq P$. Pela hipótese (vi) devemos ter $A + P = P$ ou $B + P = P$. Suponha $A + P = P$. Dado $a \in A$ temos $a \in A + P = P$. Assim, $A \subseteq P$.

□

Não é difícil observar que a condição (vi) do teorema acima é equivalente a uma condição análoga, trocando ideais por ideais à direita (ou à esquerda).

Definição 1.3.4. *Dizemos que o anel* R *é primo quando* (0) *é ideal primo de* R.

Através do Teorema 1.3.1 podemos obter várias caracterizações para os anéis primos. Destacaremos a seguir as mais usadas.

Corolário 1.3.1. *Seja* R *um anel. São equivalentes:*

(i) R é anel primo.

(ii) Se A e B são ideais (à direita, à esquerda, bilaterais) de R tais que $AB = (0)$ então $A = (0)$ ou $B = (0)$.

(iii) Se $a, b \in R$ e $aRb = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

Demonstração.
Segue das equivalências $(i) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (ii)$ do Teorema 1.3.1.

□

Podemos verificar, então, que $\mathbb{Z}_6$ não é anel primo pois $\overline{2} \in \mathbb{Z}_6$, $\overline{3} \in \mathbb{Z}_6$ e $\overline{2}.\mathbb{Z}_6.\overline{3} = \overline{0}$ mas $\overline{2} \neq \overline{0} \neq \overline{3}$.

Note que se R é um anel comutativo, então R é anel primo se, e somente se, R não tem divisores de zero. Isso é conseqüência do Corolário 1.3.1 (iii).

A proposição seguinte mostra a correspondência entre ideais primos e anéis primos.

Proposição 1.3.1. *Seja P um ideal do anel R. Então P é ideal primo se, e somente se, $\frac{R}{P}$ é anel primo.*

Demonstração.
Pelo Segundo Teorema dos Homomorfismos, existe uma correspondência biunívoca entre os ideais de R que contém P e os ideais do anel $\frac{R}{P}$, dada por $I \leftrightarrow \frac{I}{P}$. Assim, se $\frac{I}{P}$ e $\frac{J}{P}$ são ideais de $\frac{R}{P}$ tais que $\frac{I}{P}.\frac{J}{P} = (\overline{0}) = \{P\}$ então $IJ \subseteq P$ com I e J ideais de R contendo P. Sendo P ideal primo temos $I = P$ ou $J = P$, que leva a $\frac{I}{P} = (\overline{0})$ ou $\frac{J}{P} = (\overline{0})$. Portanto, $\frac{R}{P}$ é anel primo. Reciprocamente, se I e J são ideais de R contendo P tais que $IJ \subseteq P$, temos que $\frac{I}{P}$ e $\frac{J}{P}$ são ideais de $\frac{R}{P}$ tais que $\frac{I}{P}.\frac{J}{P} = (\overline{0})$. Como $\frac{R}{P}$ é anel primo concluímos que $\frac{I}{P} = (\overline{0})$ ou $\frac{J}{P} = (\overline{0})$. Segue que $I = P$ ou $J = P$ e daí P é ideal primo de R.

□

Além dos anéis primos usaremos neste trabalho outra classe importante de anéis: a classe dos anéis semiprimos. Iniciamos com a definição de ideal semiprimo.

Definição 1.3.5. *Dizemos que o ideal bilateral P do anel R é semiprimo quando:*

$$A \text{ ideal de } R \text{ e } A^2 \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P.$$

Segue imediatamente desta definição que todo ideal primo é semiprimo. Também é claro que a intersecção de ideais semiprimos é um ideal semiprimo.

Teorema 1.3.2. *Sejam R um anel e P um ideal de R. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) P é um ideal semiprimo.

(ii) Se $a \in R$ e $aRa \subseteq P$, então $a \in P$.

(iii) Se (a) é ideal principal de R tal que $(a)^2 \subseteq P$, então $a \in P$.

(iv) Se A é ideal à direita de R tal que $A^2 \subseteq P$, então $A \subseteq P$.

(v) Se B é ideal à esquerda de R tal que $B^2 \subseteq P$ então $B \subseteq P$.

(vi) Se A é ideal de R tal que $P \subseteq A$ e $A^2 \subseteq P$ então $A = P$.

Demonstração.
É uma adaptação da prova do Teorema 1.3.1.

□

Definição 1.3.6. *Dizemos que o anel R é semiprimo quando (0) é ideal semiprimo de R.*

Corolário 1.3.2. *Seja R um anel. São equivalentes:*

(i) R é anel semiprimo.

(ii) Se A é ideal (à direita, à esquerda, bilateral) de R tal que $A^2 = (0)$ então $A = (0)$.

(iii) Se $a \in R$ e $aRa = (0)$ então $a = 0$.

Demonstração.
Segue das equivalências $(i) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (ii)$ do Teorema 1.3.2.

□

Ainda em analogia com os anéis primos temos a proposição seguinte:

Proposição 1.3.2. *Seja P um ideal do anel R. Então P é ideal semiprimo se, e somente se, $\frac{R}{P}$ é anel semiprimo.*

Demonstração.
É idêntica à prova da Proposição 1.3.1.

□

As Definições 1.3.5 e 1.3.6, junto com o Corolário 1.3.2, dizem que um anel é semiprimo quando não possui ideal (à direita, à esquerda, bilateral) não nulo I tal que $I^2 = (0)$. Segue que $\mathbb{Z}_6$ é anel semiprimo pois seus ideais são: $\mathbb{Z}_6$, $\{\overline{0}\}$, $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$, $\{\overline{0}, \overline{3}\}$ e o quadrado dos ideais não nulos é não nulo.

Veremos agora que podemos trocar o expoente "2"por "n".

Proposição 1.3.3. *Seja R um anel. São equivalentes:*

(i) R é anel semiprimo.

(ii) R não possui ideal (à direita, à esquerda, bilateral) nilpotente não nulo.

Demonstração.
$(ii) \Rightarrow (i)$ É óbvio.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja I um ideal (à direita, à esquerda, bilateral) de R tal que $I^n = (0)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Considere n o menor natural com esta propriedade. Se $n > 2$ então $2n - 2 > n$ e $(0) = I^{2n-2} = (I^{n-1})^2$. Aplicando a hipótese (i) ao ideal I^{n-1} vem que $I^{n-1} = (0)$. Isto contradiz a minimalidade de n. Logo, $n = 2$ e neste caso, por hipótese, $I = (0)$.

□

Passaremos agora ao estudo do radical primo de um anel. Veremos que os anéis semiprimos podem ser caracterizados como os anéis cujo radical primo é nulo.

Definição 1.3.7. *O radical primo do anel R é a intersecção de todos os ideais primos de R.*

Denotaremos o radical primo de R por $\beta(R)$.

O radical primo também é conhecido como radical de Baer ou nil radical inferior.

Chamamos a atenção para o fato de que o estudo do radical primo é feito também para ideais. Neste contexto, o radical primo do ideal I de R é a intersecção dos ideais primos de R que contém I. Mas sendo I um anel podemos falar no radical primo do anel I. Estes dois conjuntos (radical primo do ideal I e radical primo do anel I) não coincidem, em geral.

Tome $R = \mathbb{Z}_8$ e $I = \{\overline{0}, \overline{4}\}$. Os ideais de $\mathbb{Z}_8$ são $\{\overline{0}\}$, $\mathbb{Z}_8$, I e $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$. Vemos que o radical primo do anel I é I enquanto que o radical primo do ideal I é $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}\}$.

Neste trabalho trataremos sempre do radical primo do anel I.

Proposição 1.3.4. *Seja R um anel.*

(a) $\beta(R)$ é ideal bilateral de R.

(b) $\beta(R)$ é ideal semiprimo de R.

Demonstração.
(a) É imediato, pois $\beta(R)$ é intersecção de ideais bilaterais.
(b) Vimos que ideais primos são semiprimos e que a intersecção de ideais semiprimos é ideal semiprimo. Logo, $\beta(R)$ é ideal semiprimo de R.

$\square$

Vamos refinar o item (b) da Proposição 1.3.4, provando que $\beta(R)$ é o menor ideal semiprimo de R. Usaremos o lema seguinte:

Lema 1.3.1. *Seja I um ideal de R. São equivalentes:*

(i) I é ideal semiprimo.

(ii) I é uma intersecção de ideais primos.

Demonstração.
$(ii) \Rightarrow (i)$ É análoga à prova do item (b) da Proposição 1.3.4.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $\{P_\alpha\}_{\alpha \in T}$ a família de todos os ideais primos de R que contém I. Chame $H = \bigcap\limits_{\alpha \in T} P_\alpha$. É claro que $I \subseteq H$. Se $I = H$ a prova está concluída. Suponha, por absurdo, que exista $a \in H \setminus I$. Como $a \notin I$ e I é ideal semiprimo segue, do Teorema 1.3.2 (ii), que $aRa \nsubseteq I$. Então, existe $r_1 \in R$ tal que $a_1 = ar_1a \notin I$. O mesmo raciocínio aplicado em a_1 no lugar de a, produz $r_2 \in R$ tal que $a_2 = a_1r_2a_1 \notin I$. Seguindo desta maneira, produzimos uma sequência $S = \{a_0 = a, a_1, a_2, ...\}$ tal que $a_i = a_{i-1}r_ia_{i-1} \notin I$, $i \in \{1, 2, ...\}$. Considere a família $\Im = \{P\ ;\ P$ é ideal de R , $I \subseteq P$ e $P \cap S = \emptyset\}$ ordenado por inclusão. Como $I \in \Im$ temos $\Im \neq \emptyset$. Se $\{L_\beta\}_{\beta \in \Lambda}$ é uma cadeia em $\Im$,

então claramente $L = \bigcup_{\beta\in\Lambda} L_\beta$ é cota superior para a cadeia e $L \in \Im$. Pelo Lema de Zorn, $\Im$ possui um elemento maximal P. Vamos mostrar que P é ideal primo de R, usando o Teorema 1.3.1 (vi). Sejam A e B ideais de R contendo P, e suponha que $P \subsetneqq A$, $P \subsetneqq B$. Pela maximalidade de P em $\Im$ vem que $A, B \notin \Im$, isto é, existem $i, j \in \{0, 1, 2, ...\}$ tais que $a_i \in A$ e $a_j \in B$. Sem perda de generalidade assuma $i \geq j$. Então $a_{i+1} = a_i r_{i+1} a_i = a_i r_{i+1}(a_{i-1} r_i a_{i-1}) = ... = a_i r_{i+1} ... a_j \in AB$. Como $P \cap S = \emptyset$ e $a_{i+1} \in AB$ segue que $AB \nsubseteq P$. Portanto, P é ideal primo, $I \subseteq P$ e $a \notin P$, o que é absurdo pois $a \in H \subseteq P$. Assim, devemos ter $H = I$.

□

Proposição 1.3.5. *Seja R um anel.*

(a) $\beta(R)$ é o menor ideal semiprimo de R.

(b) Se R é comutativo então $\beta(R) = \{x \in R \; ; \; x$ é nilpotente $\}$.

Demonstração.
(a) Já vimos na Proposição 1.3.4 que $\beta(R)$ é ideal semiprimo de R. Seja agora L um ideal semiprimo de R. Pelo Lema 1.3.1, L é uma intersecção de ideais primos de R. Como, por definição, $\beta(R)$ é a intersecção de todos os ideais primos de R temos $\beta(R) \subseteq L$.

(b) Seja $x \in R$ elemento nilpotente, e $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $x^n = 0$. Para cada ideal primo P de R temos $x^n \in P$. Se $n = 1$ então $x \in P$. Se $n > 1$ a comutatividade de R assegura que $xRx^{n-1} \subseteq P$. Daí, $x \in P$ ou $x^{n-1} \in P$. Seguindo o processo concluímos que $x \in P$. Logo, $x \in \beta(R)$. Reciprocamente, suponha que x não é nilpotente. Então o conjunto

$$\Im = \{I \subseteq R \; ; \; I \text{ é ideal de } R \text{ e } x^n \notin I \; , \; \forall n \in \mathbb{N}^*\}$$

é não vazio pois $(0) \in \Im$. Considere em $\Im$ a relação de ordem dada pela inclusão de conjuntos, e tome $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma cadeia em $\Im$. É claro que $I = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$ é cota superior para a cadeia $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ e que $I \in \Im$. Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal $P \in \Im$. Vamos provar que este ideal P é primo, usando o Teorema 1.3.1 (iii). Para isso, tome $a, b \in R$ e suponha que $a, b \notin P$. Como $P \subsetneqq (a) + P$, temos $(a) + P \notin \Im$ e então existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $x^n \in (a) + P$. Analogamente, obtemos $m \in \mathbb{N}^*$ tal que

$x^m \in (b) + P$. Como $x^{n+m} \in (a)(b) + (a)P + (b)P + PP \subseteq (a)(b) + P$ e $x^{n+m} \notin P$, vem que $(a)(b) \nsubseteq P$. Logo, P é ideal primo de R e $x \notin P$. Assim, $x \notin \beta(R)$.

□

Agora podemos caracterizar os anéis semiprimos através do radical primo.

Teorema 1.3.3. *Seja R um anel. São equivalentes:*

(i) R *é anel semiprimo.*

(ii) $\beta(R) = (0)$.

Demonstração.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Como R é anel semiprimo temos que (0) é ideal semiprimo de R. Pela Proposição 1.3.5 devemos ter $\beta(R) = (0)$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Pelo item (b) da Proposição 1.3.4 temos que $(0) = \beta(R)$ é ideal semiprimo de R. Logo, R é anel semiprimo.

□

O próximo corolário destaca que o anel $\frac{R}{\beta(R)}$ é semiprimo.

Corolário 1.3.3. *Se R é um anel então* $\beta\left(\frac{R}{\beta(R)}\right) = (0)$.

Demonstração.
Pela Proposição 1.3.4 sabemos que $\beta(R)$ é ideal semiprimo de R e, pela Proposição 1.3.2, segue que $\frac{R}{\beta(R)}$ é anel semiprimo. O Teorema 1.3.3 assegura que $\beta\left(\frac{R}{\beta(R)}\right) = (0)$.

□

Nosso próximo objetivo é mostrar que se P é ideal bilateral do anel R então $\beta(P) = P \cap \beta(R)$. Lembre que $\beta(P)$ é o radical primo do anel P.

Iniciamos com um lema que relaciona os ideais de R com os ideais de P.

Lema 1.3.2. *Sejam R um anel e P um ideal bilateral de R. Se I é ideal primo de R então $P \cap I$ é ideal primo de P.*

Demonstração.
É claro que $P \cap I$ é ideal de P. Para ver que é ideal primo, tome $a, b \in P$ tais que $aPb \subseteq P \cap I$. Como $b \in P$ e P é ideal bilateral de R temos:

$RbR \subseteq P \Rightarrow a(RbR)b \subseteq aPb \subseteq P \cap I \subseteq I \Rightarrow (aRbR)bR \subseteq IR \subseteq I$.

Desde que $aRbR$ e bR são ideais à direita de R e I é ideal primo de R, aplicamos o Teorema 1.3.1 (iv), obtendo $aRbR \subseteq I$ ou $bR \subseteq I$. Nova aplicação do mesmo teorema a partir da inclusão $aRbR \subseteq I$ leva a $aR \subseteq I$ ou $bR \subseteq I$. Assuma $aR \subseteq I$. Então $aRb \subseteq I$ e como I é ideal primo devemos ter $a \in I$ ou $b \in I$. O caso $bR \subseteq I$ é análogo. Como $a, b \in P$ temos $a \in P \cap I$ ou $b \in P \cap I$ e, portanto, $P \cap I$ é ideal primo de P.

$\square$

Teorema 1.3.4. *Sejam R um anel e P um ideal bilateral de R. Então $\beta(P) = P \cap \beta(R)$.*

Demonstração.

A inclusão $\beta(P) \subseteq P \cap \beta(R)$ segue do Lema 1.3.2. Seja $x \in P \cap \beta(R)$ e suponha que $x \notin \beta(P)$. Então existe um ideal primo I do anel P tal que $x \in P \setminus I$. Considere a família $\Im = \{J \ ; \ J \text{ é ideal de } R \text{ e } J \cap P \setminus I = \emptyset\}$ ordenado por inclusão. Note que $\{0\} \in \Im$ pois $0 \notin P \setminus I$. Assim, $\Im \neq \emptyset$. Seja $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma cadeia em $\Im$ e tome $T = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} T_\alpha$. É claro que T é cota superior para a cadeia e T é ideal de R. Além disso, se tivéssemos $T \cap P \setminus I \neq \emptyset$, existiria $\alpha \in \Lambda$ tal que $T_\alpha \cap P \setminus I \neq \emptyset$. Como isso não é possível, vemos que $T \cap P \setminus I = \emptyset$. Segue que T é cota superior para a cadeia e $T \in \Im$. Pelo Lema de Zorn, a família $\Im$ tem um elemento maximal J. Vamos mostrar que J é ideal primo de R usando o Teorema 1.3.1 (iii). Tome $a, b \in R$ tais que $a \notin J$ e $b \notin J$. Como $J \subsetneqq (a) + J$, a maximalidade de J em $\Im$ produz $m_1 \in ((a) + J) \cap P \setminus I$. Analogamente obtemos $m_2 \in ((b) + J) \cap P \setminus I$.

Como I é ideal primo de P e $m_1, m_2 \in P \setminus I$, o Teorema 1.3.1 (ii) diz que existe $y \in P$ tal que $m_1 y m_2 \in P \setminus I$. Note que $m_1 y \in (a) + J$ pois $(a) + J$ é ideal de R, $y \in P \subseteq R$ e $m_1 \in (a) + J$.

Agora, $m_1 y m_2 \in ((a) + J)((b) + J) = (a)(b) + (a)J + J(b) + JJ \subseteq (a)(b) + J$.

Supondo que $(a)(b) \subseteq J$ vemos que $m_1 y m_2 \in J \cap P \setminus I$, o que não pode ocorrer pois $J \cap P \setminus I = \emptyset$. Resta $(a)(b) \nsubseteq J$ e, portanto, J é ideal primo de R. Mas $x \in P \setminus I$ e então $x \notin J$. Logo, x não está em todo ideal primo de R, isto é, $x \notin \beta(R)$. Esta contradição assegura que $x \in \beta(P)$.

$\square$

Corolário 1.3.4. *Sejam R um anel e P um ideal bilateral de R.*

(a) *Se R é anel semiprimo então P é anel semiprimo.*

(b) $\beta(\beta(R)) = \beta(R)$.

Demonstração.
(a) Como R é anel semiprimo, segue do Teorema 1.3.3 que $\beta(R) = (0)$. Aplicando o Teorema 1.3.4 vem que $\beta(P) = (0)$ e, portanto, P é anel semiprimo.
(b) Pelo item (a) da Proposição 1.3.4, $\beta(R)$ é ideal bilateral de R. Aplicando o Teorema 1.3.4 temos $\beta(\beta(R)) = \beta(R) \cap \beta(R) = \beta(R)$.

□

Uma consequência óbvia do Teorema 1.3.4 é que se I é ideal bilateral do anel R e $\beta(I) = I$ então $I = I \cap \beta(R)$, isto é, $I \subseteq \beta(R)$. O último objetivo desta seção é mostrar que este resultado continua valendo para ideais unilaterais de R.

Se R é um anel qualquer e I é ideal à direita (à esquerda) de R tal que $\beta(I) = I$, provaremos que $I \subseteq \beta(R)$.

No estudo mais geral sobre radicais de anéis, dizemos que o radical de um anel que tem a propriedade acima é um radical forte à direita (à esquerda). Nesta linguagem, nosso objetivo é mostrar que o radical primo é forte à direita e à esquerda.

Note que nosso interesse recai sobre ideais unilaterais I do anel R, tais que $\beta(I) = I$. Estes ideais também recebem nome especial conforme definição abaixo.

Definição 1.3.8. *Um ideal I à direita (à esquerda) do anel R tal que $\beta(I) = I$ é chamado β-ideal de R.*

Um β-ideal de R também é chamado ideal à direita (à esquerda) β-radical de R.

Quando $\beta(R) = R$ dizemos que R é um anel β-radical. Assim, todo ideal unilateral de R que é ideal à direita (à esquerda) β-radical de R, visto como anel, é um anel β-radical.

Na próxima proposição mostraremos que os anéis β-radicais são fechados por imagens homomórficas.

Proposição 1.3.6. *Seja $\varphi : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de anéis.*

(a) Se P é ideal primo próprio de $\varphi(R)$ então $\varphi^{-1}(P)$ é ideal primo próprio de R.

(b) Se $\beta(R) = R$ então $\beta(\varphi(R)) = \varphi(R)$.

Demonstração.

(a) Não é difícil verificar que $\varphi^{-1}(P)$ é ideal de R. Vejamos que é próprio. Como $P \subsetneqq \varphi(R)$, existe $x \in \varphi(R)$ tal que $x \notin P$. Então existe $r \in R$ tal que $\varphi(r) = x \notin P$. Daí, $r \notin \varphi^{-1}(P)$ e $\varphi^{-1}(P) \subsetneqq R$. Para ver que $\varphi^{-1}(P)$ é ideal primo de R, tome A e B ideais de R tais que $AB \subseteq \varphi^{-1}(P)$. Segue que $\varphi(A).\varphi(B) \subseteq \varphi(AB) \subseteq P$. Mas $\varphi(A)$ e $\varphi(B)$ são ideais de $\varphi(R)$ e P é ideal primo de $\varphi(R)$. Assim, $\varphi(A) \subseteq P$ ou $\varphi(B) \subseteq P$, o que leva a $A \subseteq \varphi^{-1}(P)$ ou $B \subseteq \varphi^{-1}(P)$.

(b) Por definição do radical β já temos $\beta(\varphi(R)) \subseteq \varphi(R)$. Supondo que seja diferente, existirá um ideal primo P de $\varphi(R)$ tal que $P \subsetneqq \varphi(R)$. Pelo item (a), $I = \varphi^{-1}(P)$ é ideal primo próprio de R. Logo, $\beta(R) \subseteq I \subsetneqq R$, contradizendo a hipótese $\beta(R) = R$.

$\square$

O trabalho de verificar que o radical primo é forte à direita e à esquerda, é equivalente a uma condição sobre anéis semiprimos.

Proposição 1.3.7. *As condições abaixo são equivalentes:*

(i) Quando R é anel, $I <_r R$ e $\beta(I) = I$ então $I \subseteq \beta(R)$.

(ii) Quando R é anel semiprimo, $I <_r R$ e $\beta(I) = I$ então $I = (0)$.

Demonstração.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Como R é anel semiprimo temos, pelo Teorema 1.3.3, que $\beta(R) = (0)$. Pela hipótese (i) segue trivialmente que $I = (0)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que $I \nsubseteq \beta(R)$. Então existe um ideal primo P de R tal que $I \nsubseteq P$, pois $\beta(R)$ é a intersecção dos ideais primos de R. Note que $\varphi : I \longrightarrow \frac{R}{P}$ dada por $\varphi(x) = \overline{x} = x + P$ é homomorfirmo de anéis e $\varphi(I) = \frac{I+P}{P}$. Como $\beta(I) = I$, usamos o item (b) da proposição anterior e concluímos que $\beta(\varphi(I)) = \varphi(I)$, isto é, $\beta\left(\frac{I+P}{P}\right) = \frac{I+P}{P}$.

Mas $\frac{I+P}{P} <_r \frac{R}{P}$ e $\frac{R}{P}$ é anel primo pois P é ideal primo de R. Logo, pela hipótese (ii), temos que $\frac{I+P}{P} = (0)$ e daí $I + P = P$, implicando em $I \subseteq P$, o que é uma contradição.

$\square$

Naturalmente um resultado análogo é válido para a proposição acima com ideais à esquerda.

Teorema 1.3.5. *O radical primo é forte à direita e à esquerda.*

Demonstração.

Provaremos que o radical primo é forte à direita. Analogamente, prova-se à esquerda. Verificaremos a condição (ii) da Proposição 1.3.7. Para isso, tomamos R um anel semiprimo e I um ideal à direita de R tal que $\beta(I) = I$. Devemos mostrar que $I = (0)$. Inicialmente observe que $l_I(I) = \{\alpha \in I\ ;\ \alpha I = (0)\}$ é ideal de I. Mais que isso, $l_I(I)$ é ideal semiprimo de I. De fato, se $x \in I$ e $xIx \subseteq l_I(I)$ então $(xI)^2 = (xIx)I = (0)$ e, pela Proposição 1.3.3, temos $xI = (0)$, pois xI é ideal à direita nilpotente do anel semiprimo R. Logo, $x \in l_I(I)$ e, portanto, $l_I(I)$ é ideal semiprimo de I. Como $\beta(I) = I$ temos, pela Proposição 1.3.5, que I é o menor ideal semiprimo de I. Conseqüentemente, $I \subseteq l_I(I)$ e $I^2 = (0)$. Aplicando novamente a Proposição 1.3.3 concluimos que $I = (0)$.

□

Capítulo 2

MÓDULOS SINGULARES E MÓDULOS NÃO SINGULARES

Para saber se um R-módulo A é singular ou não singular à direita estudamos o subconjunto $Z(A)$, formado pelos elementos de A cujo anulador à direita intercepta não trivialmente todo ideal à direita não nulo de R. Quando $Z(A) = 0$ dizemos que A é anel não singular à direita e quando $Z(A) = A$ dizemos que A é anel singular à direita.

A definição de $Z(A)$ está relacionada com o conceito de extensão essencial. Assim, iniciamos este capítulo com uma seção sobre extensões essenciais de módulos, e em seguida abordamos o caso particular dos ideais essenciais de um anel. Posteriormente, formalizaremos a definição de $Z(A)$, veremos que trata-se de um submódulo de A e estudaremos outras propriedades. Na última seção definimos o funtor singular Z na categoria dos R-módulos à direita, e mostramos que quando $Z(R) = 0$ este funtor é um radical de torção.

Lembramos que estamos interessados em estudar um anel qualquer. Assim, a menos que se diga o contrário, R denotará um anel possivelmente sem unidade e não necessariamente comutativo.

2.1 Extensão Essencial

Os módulos considerados nesta seção são R-módulos à direita. Usaremos a notação $A \leq B$ para indicar que A é um submódulo à direita do módulo B. Omitindo referências quanto à lateralidade, ressaltamos que os mesmos resultados valem para módulos à esquerda.

O conceito de submódulo essencial foi introduzido em 1951 por R. E. Johnson. A nomenclatura foi usada pela primeira vez, entretanto, em um artigo de B. Eckmann e A. Schopf no ano de 1953.

Definição 2.1.1. *Seja A um R-submódulo do R-módulo B. Dizemos que B é uma extensão essencial de A, ou que A é R-submódulo essencial de B, se todo R-submódulo não nulo de B tem intersecção não nula com A.*

Notação: $A_R \leq_e B_R$, ou simplesmente $A \leq_e B$ quando ficar claro qual é o anel envolvido.

O lema abaixo é bastante usado no caso de anéis com unidade, para verificar quando uma extensão é essencial.

Lema 2.1.1. *Sejam R um anel com unidade e A um R-submódulo do R-módulo B. São equivalentes:*

(i) $A \leq_e B$.

(ii) *Todo R-submódulo cíclico não nulo de B tem intersecção não nula com A.*

(iii) *Se $0 \neq b \in B$ então existe $x \in R$ tal que $0 \neq bx \in A$.*

Demonstração.
$(i) \Rightarrow (ii)$ É facilmente verificada.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Como $b \neq 0$ e R tem unidade, temos $(0) \neq bR \leq B$. Então, por hipótese, $bR \cap A \neq (0)$, isto é, existe $x \in R$ tal que $0 \neq bx \in A$.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Seja $H \leq B$, $H \neq (0)$. Então existe $b \in H \subseteq B$, $b \neq 0$. Por hipótese, existe $x \in R$ tal que $0 \neq bx \in A$. Como $bx \in H$ temos $H \cap A \neq (0)$. Logo, $A \leq_e B$.

$\square$

Quando não assuminos que R tem unidade, as implicações $(iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii)$ do lema anterior continuam valendo. Basta observar que a prova não usou a existência da unidade. Registramos isto para referências futuras.

Lema 2.1.2. *Sejam R um anel qualquer e A um R-submódulo do R-módulo B.*

(a) *Se para cada $0 \neq b \in B$ existe $x \in R$ tal que $0 \neq bx \in A$, então $A \leq_e B$.*

(b) Se $A \leq_e B$ então todo R-submódulo cíclico não nulo de B tem intersecção não nula com A.

$\square$

As demais implicações ($(i) \Rightarrow (iii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$ e $(ii) \Rightarrow (i)$) do Lema 2.1.1 não valem em geral, como veremos nos dois exemplos abaixo. Veja também os Exemplos 2.2.3 e 2.2.4, para o caso específico de ideais.

Exemplo 2.1.1. Sejam $R = 8\mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Z}_8$. É claro que $\mathbb{Z}_8$ é $8\mathbb{Z}$-módulo com a operação de soma usual, e produto definido por

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_8 \times 8\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}_8 \\ (\overline{a}, x) &\longmapsto \overline{ax} = \overline{0} \end{aligned}$$

Como o produto é sempre nulo, os $8\mathbb{Z}$-submódulos de $\mathbb{Z}_8$ são exatamente os subgrupos de $\mathbb{Z}_8$:

$$\mathbb{Z}_8, \ \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}, \ \{\overline{0}, \overline{4}\} \quad \text{e} \quad \{\overline{0}\}.$$

É claro que $\{\overline{0}, \overline{4}\} \leq_e \mathbb{Z}_8$. Assim, vale a condição (i) do Lema 2.1.1 com $A = \{\overline{0}, \overline{4}\}$ e $B = \mathbb{Z}_8$.

No entanto, dado $0 \neq b \in \mathbb{Z}_8$, não conseguimos $x \in 8\mathbb{Z}$ tal que $bx \neq \overline{0}$. Logo, não vale a condição (iii) do Lema 2.1.1. Como todos os submódulos cíclicos de $\mathbb{Z}_8$ são nulos, vale a condição (ii) do Lema 2.1.1.

Portanto, este exemplo mostra que, no caso de anéis sem unidade e com a notação do Lema 2.1.1, $(i) \not\Rightarrow (iii)$ e que $(ii) \not\Rightarrow (iii)$.

Exemplo 2.1.2. Seja $B = \mathbb{Z}_6$ visto como $6\mathbb{Z}$-módulo, com produto análogo aquele do exemplo anterior.

Novamente o produto sempre é nulo e os submódulos de $\mathbb{Z}_6$ são:

$$\mathbb{Z}_6, \ \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, \ \{\overline{0}, \overline{3}\} \quad \text{e} \quad \{\overline{0}\}.$$

Como todos os submódulos cíclicos de $\mathbb{Z}_6$ são nulos, vale a condição (ii) do Lema 2.1.1 para $A = \{\overline{0}, \overline{3}\}$. Porém, não vale a condição (i) do Lema 2.1.1 já que $A = \{\overline{0}, \overline{3}\}$ não é submódulo essencial de $\mathbb{Z}_6$, pois $\{\overline{0}, \overline{3}\} \cap \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \{\overline{0}\}$. Com este exemplo vemos que, no caso de anéis sem unidade e com a notação do Lema 2.1.1, $(ii) \not\Rightarrow (i)$.

Um resultado análogo ao Lema 2.1.1 pode ser obtido para o caso em que R não tem unidade, usando o anel R^* definido no Capítulo 1.

Lembre que vimos na Seção 1 do Capítulo 1 que $A_R \leq B_R$ se, e somente se, $A_{R^*} \leq B_{R^*}$.

Lema 2.1.3. *Sejam R um anel qualquer e A um R-submódulo do R-módulo B. São equivalentes:*

(i) $A_R \leq_e B_R$.

(ii) $A_{R^*} \leq_e B_{R^*}$.

(iii) Todo R^*-submódulo cíclico não nulo de B tem intersecção não nula com A.

(iv) Se $0 \neq b \in B$ então existe $x \in R^*$ tal que $0 \neq bx \in A$.

Demonstração.
Desde que R^* tem unidade, segue do Lema 2.1.1 que $(ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$. A equivalência $(i) \Leftrightarrow (ii)$ é óbvia pois todo R-submódulo (não nulo) de B é R^*-submódulo (não nulo) de B, e vice-versa.

$\square$

Todo R-módulo A possui pelo menos o submódulo essencial A pois $A \leq_e A$. Além disso, é fácil ver que $(0) \leq_e A \Leftrightarrow A = (0)$.

Vejamos mais exemplos.

Exemplo 2.1.3. O único subespaço vetorial essencial do K-espaço vetorial V é o próprio V.
Seja W subespaço vetorial essencial de V. Dado $0 \neq v \in V$, pelo Lema 2.1.1 existe $k \in K$ tal que $0 \neq kv \in W$. Segue que $k \neq 0$ e daí $k^{-1} \in K$. Como $kv \in W$ temos $v = k^{-1}(kv) \in W$. Logo, $V = W$.

Exemplo 2.1.4. Considere $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Se $(0) \neq A \leq B \leq \mathbb{Q}$ então $A \leq_e B$. De fato, se $H \leq B$ e $H \neq (0)$, existe $0 \neq \frac{a}{b} \in H \subseteq \mathbb{Q}$. Como $(0) \neq A$, existe

$0 \neq \frac{c}{d} \in A \subseteq \mathbb{Q}$. Tome $r = bc$, $r' = da \in \mathbb{Z}$. Note que

$$0 \neq ac = \frac{a}{b}.bc = \frac{a}{b}.r \in H,$$
$$0 \neq ac = \frac{c}{d}.da = \frac{c}{d}.r' \in A.$$

Assim, $A \cap H \neq (0)$ e, portanto, $A \leq_e B$.

Como caso particular do Exemplo 2.1.4 temos:

- $\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Q}$.
  Basta tomar $A = \mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Q}$.

- $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.
  Basta tomar $A = n\mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.1.5. Se R é um anel primo então todo ideal bilateral não nulo de R é submódulo essencial de R.
Seja $0 \neq I$ ideal bilateral não nulo de R. Claro que $I \leq R$. Para ver que é essencial, tome J um R-submódulo não nulo de R_R. Como R é anel primo, o ideal (0) é primo. Assim, não podemos ter $J.I \subseteq (0)$, pois I e J são ideais à direita não nulos. Segue que $(0) \neq J.I \subseteq J \cap I$, isto é, $I \leq_e R$.

O exemplo anterior assegura que os ideais não nulos de um domínio sempre são submódulos essenciais. Isso fornece outra maneira de ver que $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$, para $n \neq 0$.

Veremos a seguir algumas propriedades das extensões essenciais.

Proposição 2.1.1. *Sejam A, B e C módulos sobre um anel qualquer R.*

(a) Se $A \leq B \leq C$ então $A \leq_e C \Leftrightarrow A \leq_e B \leq_e C$.

(b) Se $A \leq_e B \leq C$ e $A' \leq_e B' \leq C$ então $A \cap A' \leq_e B \cap B'$.

(c) Se $f : B \longrightarrow C$ é homomorfismo de módulos e $A \leq_e C$ então $f^{-1}(A) \leq_e B$.

Demonstração.
(a) $(\Rightarrow)$ Seja $(0) \neq H \leq B$. Desde que H é submódulo não nulo de C e $A \leq_e C$, temos $A \cap H \neq (0)$. Logo, $A \leq_e B$.
Tomando agora $(0) \neq M \leq C$ e usando o fato de $A \leq_e C$, vem que $M \cap A \neq (0)$. Como

$A \leq B$ obtemos $M \cap B \neq (0)$ e daí, $B \leq_e C$.

($\Leftarrow$) Seja $(0) \neq H \leq C$. Como $B \leq_e C$ temos $(0) \neq B \cap H$. Mas $B \cap H$ é submódulo não nulo de B e $A \leq_e B$ garante que $A \cap (B \cap H) \neq (0)$. Então $A \cap H \neq (0)$ e $A \leq_e C$.

(b) Seja $(0) \neq H \leq B \cap B'$. Então $(0) \neq H \leq B$ e $A \leq_e B$ implicam que $H \cap A \neq (0)$. Agora, $(0) \neq H \cap A \leq B'$ e $A' \leq_e B'$ implicam que $H \cap (A \cap A') \neq (0)$. Portanto, $A \cap A' \leq_e B \cap B'$.

(c) Suponha que $f^{-1}(A)$ não seja submódulo essencial de B. Então existe $(0) \neq H \leq B$ tal que $H \cap f^{-1}(A) = (0)$. Note que

$$0 \in A \Rightarrow f^{-1}(0) \subseteq f^{-1}(A) \Rightarrow Ker(f) \subseteq f^{-1}(A) \Rightarrow Ker(f) \cap H = (0).$$

Assim, $f|_H$ é injetora e então $f|_H : H \longrightarrow f(H)$ é isomorfismo. Seja $x \in f(H) \cap A$, $x = f(h)$, $h \in H$ e $x \in A$. Como $h \in f^{-1}(x) \subseteq f^{-1}(A)$, vemos que $h \in H \cap f^{-1}(A) = (0)$. Segue que $x = 0$ e daí, $f(H) \cap A = (0)$. Como $H \simeq f(H)$ e $H \neq (0)$ temos que $(0) \neq f(H) \leq C$. Mas $A \leq_e C$ e então $f(H) \cap A \neq (0)$, que é uma contradição.

$\square$

Observações:

1) O item (b) da Proposição 2.1.1 não se aplica para intersecções infinitas.
   De fato, para cada $n \neq 0$ vimos que $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$, como $\mathbb{Z}$-módulo. Porém $(0) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} n\mathbb{Z}$ não é submódulo essencial de $\mathbb{Z}$.

2) Segue do item (c) da Proposição 2.1.1 que isomorfirmos preservam submódulos essenciais. De fato, se $f : B \longrightarrow C$ é isomorfirmo e $A \leq_e B$ então $f^{-1} : C \longrightarrow B$ é homomorfismo e, aplicando o item (c) da Proposição 2.1.1 temos que $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A) \leq_e C$.

3) Não é verdade, em geral, que homomorfismos injetores e homomorfismos sobrejetores preservam submódulos essenciais. Vejamos contra-exemplos:

Exemplo 2.1.6. Sejam B um R-módulo não nulo e

$$\begin{aligned} f : B &\longrightarrow B \times B \\ b &\longmapsto (b, 0). \end{aligned}$$

Claro que f é homomorfismo injetor e $B \leq_e B$. Mas $f(B) = B \times (0)$ não é submódulo essencial de $B \times B$ pois $(B \times (0)) \cap ((0) \times B) = (0)$.

Exemplo 2.1.7. Seja

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}_2 \\ n &\longmapsto \overline{n}, \end{aligned}$$

que é homomorfismo sobrejetor de $\mathbb{Z}$-módulos. Sabemos que $2\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$, porém $f(2\mathbb{Z}) = (\overline{0})$ que não é submódulo essencial de $\mathbb{Z}_2$.

É claro, e também pode ser deduzido do item (a) da Proposição 2.1.1, que todo submódulo do módulo C que contém um submódulo essencial de C é essencial em C. Em particular, se $A, B \leq C$ e $A \leq_e C$ então $A + B \leq_e C$.

Uma questão relacionada é a seguinte: Se $A \leq_e B \leq C$ e $A^{'} \leq_e B^{'} \leq C$ então é verdade que $A + A^{'} \leq_e B + B^{'}$?

O próximo exemplo mostra que isso não vale em geral, mesmo que o anel envolvido seja domínio principal.

Exemplo 2.1.8. Consideremos os $\mathbb{Z}$-módulos $C = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, $B = (1, \overline{0}).\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \{\overline{0}\}$, $B^{'} = (1, \overline{1}).\mathbb{Z}$ e $A = A^{'} = (2, \overline{0}).\mathbb{Z} = 2.\mathbb{Z} \times \{\overline{0}\}$.
É fácil ver que $A \leq B \leq C$ e $A^{'} \leq B^{'} \leq C$. Para ver que $A \leq_e B$, tome $0 \neq x = (m, \overline{0}) \in B$. Então $x.2 = (2m, \overline{0}) = (2, \overline{0}).m \in A$ e $x.2 \neq 0$. Segue, do Lema 2.1.1, que $A \leq_e B$.
Para ver que $A^{'} \leq_e B$, tome $0 \neq x = (m, \overline{m}) \in B^{'}$. Então $x.2 = (2m, \overline{0}) = (2, \overline{0}).m \in A$ e $x.2 \neq 0$. Novamente o Lema 2.1.1 garante que $A^{'} \leq_e B^{'}$.
Note que $C = B + B^{'}$ pois, dado $x \in C$, temos duas possibilidades:

$$x = (m, \overline{0}) = (1, \overline{0}).m \in B \subseteq B + B^{'}$$

ou

$$x = (m, \overline{1}) = (1, \overline{1}).1 + (1, \overline{0}).(m - 1) \in B^{'} + B,$$

onde $m \in \mathbb{Z}$.
Verifiquemos agora que $A + A^{'} = A$ não é submódulo essencial de $B + B^{'} = C$.

De fato, $(0,\overline{1}).\mathbb{Z}$ é submódulo não nulo de C e $(0,\overline{1}).\mathbb{Z} \cap A = (0,\overline{1}).\mathbb{Z} \cap (2,\overline{0}).\mathbb{Z} = (0)$.

Veremos a seguir que se $A \leq_e B \leq C$, $A' \leq_e B' \leq C$ e $A \cap A' = (0)$ então $B \cap B' = (0)$ e $A + A' \leq_e B + B'$. Mais que isso, provaremos que este resultado vale para toda família $\{A_\alpha\}_{\alpha \in L}$ de submódulos independentes de C.

Iniciamos com a definição de família independente de submódulos, indexada em um conjunto finito.

Definição 2.1.2. *Seja L' um conjunto finito. A família $\{A_\alpha\}_{\alpha \in L'}$ de submódulos do módulo C é independente quando $A_\alpha \cap \sum\limits_{\substack{\beta \in L' \\ \beta \neq \alpha}} A_\beta = (0)$.*

Naturalmente a definição acima é usada para famílias com mais de um submódulo e todos os submódulos da família independente são distintos.

Definição 2.1.3. *A família $\{A_\alpha\}_{\alpha \in L}$ de submódulos do módulo C é independente quando $\{A_\alpha\}_{\alpha \in L'}$ é independente para todo conjunto finito $L' \subseteq L$.*

Quando $\{A_\alpha\}_{\alpha \in L}$ é família independente de submódulos do módulo C, denotamos o submódulo soma

$$M = \sum_{\alpha \in L} A_\alpha = \left\{ \sum_{\alpha \in L} a_\alpha \ ; \ a_\alpha \in A_\alpha \ \text{ e } \ a_\alpha = 0 \text{ para quase todo } \alpha \right\}$$

por

$$M = \bigoplus_{\alpha \in L} A_\alpha$$

e chamamos de soma direta interna da família independente $\{A_\alpha\}_{\alpha \in L}$.

Note que subfamílias de famílias independentes são famílias independentes.

Proposição 2.1.2. *Se $\{A_\alpha\}_{\alpha \in L}$ é família independente de submódulos do módulo C e $A_\alpha \leq_e B_\alpha \leq C$, para cada $\alpha \in L$, então $\{B_\alpha\}_{\alpha \in L}$ é família independente de submódulos do módulo C e $\bigoplus\limits_{\alpha \in L} A_\alpha \leq_e \bigoplus\limits_{\alpha \in L} B_\alpha$.*

Demonstração.

Consideraremos primeiro o caso em que L é finito, $L = \{1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$, e usaremos o Primeiro Princípio de Indução.

No caso $n = 2$ temos $A_1 \cap A_2 = (0)$, $A_1 \leq_e B_1 \leq C$ e $A_2 \leq_e B_2 \leq C$. Pelo item (b) da Proposição 2.1.1 temos $(0) \leq_e B_1 \cap B_2$ e então $B_1 \cap B_2 = (0)$. Segue que $\{B_1, B_2\}$ é independente. Consideremos as projeções $f_i : B_1 \oplus B_2 \longrightarrow B_i$, $i \in \{1, 2\}$.
Como $A_i \leq_e B_i$ segue do item (c) da Proposição 2.1.1 que $f_i^{-1}(A_i) \leq_e B_1 \oplus B_2$. Logo, $A_1 \oplus B_2 \leq_e B_1 \oplus B_2$ e $B_1 \oplus A_2 \leq_e B_1 \oplus B_2$.
Novamente, pelo item (b) da Proposição 2.1.1 temos $(A_1 \oplus B_2) \cap (B_1 \oplus A_2) \leq_e B_1 \oplus B_2$.

Afirmação: $A_1 \oplus A_2 = (A_1 \oplus B_2) \cap (B_1 \oplus A_2)$.
De fato, se $x = a_1 + a_2 \in A_1 \oplus A_2$ temos:

$$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \subseteq B_2 \Rightarrow x = a_1 + a_2 \in A_1 \oplus B_2$$

e

$$a_1 \in A_1 \subseteq B_1, a_2 \in A_2 \Rightarrow x = a_1 + a_2 \in B_1 \oplus A_2.$$

Logo, $x \in (A_1 \oplus B_2) \cap (B_1 \oplus A_2)$.
Reciprocamente, se $x \in (A_1 \oplus B_2) \cap (B_1 \oplus A_2)$ então $x = a_1 + b_2 = b_1 + a_2$, com $a_i \in A_i$ e $b_i \in B_i$. Segue que $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 \in B_1 \cap B_2 = (0)$. Daí, $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$ e $x = a_1 + a_2 \in A_1 \oplus A_2$.
Segue, da afirmação, que $A_1 \oplus A_2 \leq_e B_1 \oplus B_2$ e o caso $n = 2$ está provado.
Suponha agora que o resultado valha para o conjunto L com $n - 1$ elementos. Seja $\{A_1, ..., A_n\}$ família independente com $A_i \leq_e B_i$ para $i = 1, 2, ..., n$. A hipótese de indução asegura que $\{B_1, ..., B_{n-1}\}$ é independente e $A_1 \oplus A_2 \oplus ...... \oplus A_{n-1} \leq_e B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_{n-1}$. Além disso, $A_n \cap (A_1 \oplus ..... \oplus A_{n-1}) = (0)$ e $A_n \leq_e B_n$. Aplicando o caso $n = 2$ para os submódulos A_n e $A_1 \oplus ... \oplus A_{n-1}$ vem que $(B_1 \oplus ... \oplus B_{n-1}) \cap B_n = (0)$ e $A_1 \oplus .... \oplus A_{n-1} \oplus A_n \leq_e B_1 \oplus .... \oplus B_{n-1} \oplus B_n$.
Note que $\{B_1, B_2, ..., B_{n-1}, B_n\}$ é independente pois se $x \in B_k \cap (B_1 \oplus ... B_{k-1} \oplus B_{k+1} \oplus ... \oplus B_n)$ então $x = b_1 + b_2 + ... + b_{k-1} + b_{k+1} + ... + b_n$ e daí $b_n = -b_1 - b_2 - ..... - b_{k-1} + x - b_{k+1} - ..... - b_{n-1} \in B_n \cap (B_1 \oplus ..... \oplus B_{n-1}) = (0)$, implicando que $x \in B_k \cap (B_1 \oplus ... \oplus B_{k-1} \oplus B_{k+1} \oplus ... \oplus B_{n-1}) = (0)$ pois $\{B_1, ..., B_{n-1}\}$ é independente.
Passemos agora ao caso em que L é um conjunto qualquer. Tome $L' \subseteq L$, L' finito, $L' = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$. Já vimos que $\{B_{\alpha_1}, ..., B_{\alpha_n}\}$ é independente e portanto $\{B_\alpha\}_{\alpha \in L}$ é independente. Tome agora $(0) \neq H \leq \bigoplus_{\alpha \in L} B_\alpha$. Então existe $0 \neq x \in H$, e

$x \in B_{\alpha_1} \oplus ..... \oplus B_{\alpha_n}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, pois x é uma soma finita em $\sum\limits_{\alpha \in L} B_\alpha$. Segue que $(0) \neq H \cap (B_{\alpha_1} \oplus ..... \oplus B_{\alpha_n})$, isto é, $H' = H \cap (B_{\alpha_1} \oplus ..... \oplus B_{\alpha_n})$ é submódulo não nulo de $B_{\alpha_1} \oplus ..... \oplus B_{\alpha_n}$. Mas sabemos que $A_{\alpha_1} \oplus ..... \oplus A_{\alpha_n} \leq_e B_{\alpha 1} \oplus ..... \oplus B_{\alpha_n}$ e, então, $H \cap (B_{\alpha_1} \oplus ..... \oplus B_{\alpha n}) \cap (A_{\alpha_1} \oplus ..... \oplus A_{\alpha_n}) \neq (0)$ e daí $H \cap (A_{\alpha_1} \oplus ..... \oplus A_{\alpha_n}) \neq (0)$. Portanto, $H \cap \bigoplus\limits_{\alpha \in L} A_\alpha \neq (0)$ e $\bigoplus\limits_{\alpha \in L} A_\alpha \leq_e \bigoplus\limits_{\alpha \in L} B_\alpha$.

□

Vejamos agora como extensões essenciais se comportam com relação ao produto direto e à soma direta externa, que serão definidos adiante.

Proposição 2.1.3. *Sejam $A \leq_e B$ e $A' \leq_e B'$. Então $A \times A' \leq_e B \times B'$.*

Demonstração.
Dado $(x, y) \in B \times B'$, $(x, y) \neq (0, 0)$, temos três casos:

(a) $x \neq 0$ e $y = 0$;

(b) $x = 0$ e $y \neq 0$;

(c) $x \neq$ e $y \neq 0$.

No primeiro caso, como $A \leq_e B$, existe $r \in R^*$ tal que $0 \neq xr \in A$. Segue que $(0, 0) \neq (x, y).r = (xr, 0) \in A \times A'$ e pelo Lema 2.1.3 vem que $A \times A' \leq_e B \times B'$.
O segundo caso é análogo ao primeiro.
Para o último caso, novamente temos $r \in R^*$ tal que $0 \neq xr \in A$, e se $yr = 0$ voltamos ao primeiro caso. Considerando então que $0 \neq yr \in B'$ e $A' \leq_e B'$, existe $s \in R^*$ tal que $0 \neq (yr).s \in A'$, e $(xr).s \in A$. Logo, $(0, 0) \neq ((xr).s, (yr).s) = (x, y).rs \in A' \times A$ e pelo Lema 2.1.3 temos $A \times A' \leq_e B \times B'$.

□

Verifica-se, por indução, que a Proposição 2.1.3 vale para uma quantidade finita de extensões essenciais.

A proposição acima não é válida para uma quantidade infinita de extensões essenciais. Apresentaremos um contra-exemplo, mas antes aproveitaremos para definir o produto direto e a soma direta externa de módulos.

Seja $\{A_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma família de R-módulos e denote o produto cartesiano dos membros desta família por $\prod\limits_{\alpha \in L} A_\alpha$. Assim, $u \in \prod\limits_{\alpha \in L} A_\alpha$ implica em $u = (a_\alpha)_{\alpha \in L}$ com

$a_\alpha \in A_\alpha$ para todo $\alpha \in L$. Definindo as operações

$$\begin{aligned} + : \prod_{\alpha\in L} A_\alpha \times \prod_{\alpha\in L} A_\alpha &\longrightarrow \prod_{\alpha\in L} A_\alpha \\ ((a_\alpha)_{\alpha\in L}, (b_\alpha)_{\alpha\in L}) &\longmapsto (a_\alpha + b_\alpha)_{\alpha\in L}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bullet : \prod_{\alpha\in L} A_\alpha \times R &\longrightarrow \prod_{\alpha\in L} A_\alpha \\ ((a_\alpha)_{\alpha\in L}, r) &\longmapsto (a_\alpha . r)_{\alpha\in L} \end{aligned}$$

é fácil ver que $\prod_{\alpha\in L} A_\alpha$ é um R-módulo, chamado produto direto (ou produto cartesiano) da família de R-módulos $\{A_\alpha\}_{\alpha\in L}$.

Definição 2.1.4. *Dizemos que* $(a_\alpha)_{\alpha\in L} \in \prod_{\alpha\in L} A_\alpha$ *é uma sequência quase nula quando* $a_\alpha = 0$*, exceto para uma quantidade finita de índices.*

Seja $A^{(L)} = \left\{ (a_\alpha)_{\alpha\in L} \in \prod_{\alpha\in L} A_\alpha \ ; \ (a_\alpha)_{\alpha\in L} \text{ é sequência quase nula} \right\}$.

É claro que $A^{(L)} \subseteq \prod_{\alpha\in L} A_\alpha$ e que $A^{(L)}$ é fechado por diferenças e por produtos de elementos de R. Logo, $A^{(L)} \leq \prod_{\alpha\in L} A_\alpha$ e $A^{(L)}$ é chamado de soma direta externa da família $\{A_\alpha\}_{\alpha\in L}$.

É comum denotar $A^{(L)} = \dot{\bigoplus_{\alpha\in L}} A_\alpha$.

Quando $\{A_\alpha\}_{\alpha\in L}$ é família independente de submódulos de um módulo C, podemos considerar a soma direta interna e a soma direta externa da família $\{A_\alpha\}_{\alpha\in L}$. Estas somas diretas são isomorfas, como mostra a próxima proposição. Portanto, podemos falar apenas em soma direta, sem nos referir à "interna"ou "externa". Por isso, freqüentemente omite-se o ponto sobre o símbolo $\bigoplus$.

Proposição 2.1.4. *Seja* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in L}$ *uma família independente de* R*-módulos.*
Então $\bigoplus_{\alpha\in L} A_\alpha \simeq \dot{\bigoplus_{\alpha\in L}} A_\alpha$.

Demonstração.
Defina $f : \dot{\bigoplus_{\alpha\in L}} A_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in L} A_\alpha$ por $f((a_\alpha)_{\alpha\in L}) = \sum_{\alpha\in L} a_\alpha$. Desde que $(a_\alpha)_{\alpha\in L}$ é sequência quase nula, f está bem definida. É imediato verificar que f é homomorfismo sobrejetor de R-módulos. Para ver a injetividade tome $(a_\alpha)_{\alpha\in L} \in Ker(f)$.
Segue que $0 = f((a_\alpha)_{\alpha\in L}) = \sum_{\alpha\in L} a_\alpha$, e então existem $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in L$ tais que

$0 = a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + ... + a_{\alpha_n}$ implicando em $a_{\alpha_i} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{\alpha_j} \in A_{\alpha_i} \cap \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} A_{\alpha_j} = (0)$.

Logo, $a_{\alpha_i} = 0$ e portanto $(a_\alpha)_{\alpha \in L} = 0$.

$\square$

Voltemos às extensões essenciais, apresentando um exemplo que mostra que a Proposição 2.1.3 não vale para famílias infinitas.

Exemplo 2.1.9. Considere as famílias de $\mathbb{Z}$-módulos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, onde $A_n = n\mathbb{Z}$ e $B_n = \mathbb{Z}$.

Já vimos que para $n \neq 0$, $A_n \leq_e B_n$. Para ver que $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ não é submódulo essencial de $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$, tome $b \in \prod_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, com $b_n = 1$ para todo n. Note que para qualquer $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$ não podemos ter $b.r \in \prod_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \prod_{n\in\mathbb{N}^*} n\mathbb{Z}$, pois r não pode ser múltiplo de todo número natural. Segue do Lema 2.1.1 que $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ não é submódulo essencial de $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$.

2.2 Ideais Essenciais

Nesta seção estudaremos o caso particular de extensões essenciais $A_R \leq_e B_R$ onde $B = R$ e, portanto, A é um ideal à direita de R. Ideais deste tipo são chamados ideais à direita essenciais. Destacaremos propriedades dos ideias essenciais que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. Aqui, novamente, R é um anel qualquer, isto é, possivelmente sem unidade e não necessariamente comutativo.

Para indicar que I é ideal à direita de R escreveremos $I \leq_r R$ ou $I \leq R_R$. Observe que a notação $I \leq R_R$ sugere que olhemos I como submódulo do R-módulo à direita R. Isto pode ser útil quando comparamos esta seção com a anterior.

Do comentário acima e da Definição 2.1.1 temos:

Definição 2.2.1. *Um ideal à direita I do anel R é chamado de ideal à direita essencial quando $I \leq_e R_R$, isto é, I é submódulo essencial de R_R.*

Segue, da definição acima, que um ideal à direita I do anel R é ideal essencial se, e somente se, $I \cap J \neq (0)$ para todo ideal à direita não nulo J de R.

A definição de ideal à esquerda essencial é análoga.

Trabalharemos com ideais essenciais à direita, mas os resultados obviamente valem para ideais essenciais à esquerda.

Denotaremos o conjunto dos ideias à direita essenciais do anel R por $\Re(R)$. Assim,

$$\Re(R) = \{I \subseteq R\,;\, I \leq_e R_R\}.$$

Exemplo 2.2.1.

(a) Se K é corpo então $\Re(K) = \{K\}$.

(b) $\Re(\mathbb{Z}) = \{n\mathbb{Z}\ ;\ n \neq 0\}$.

(c) $\Re(\lambda\mathbb{Z}) = \{n\mathbb{Z}\ ;\ n = \lambda k,\, k \in \mathbb{N} - \{0\}\}$.

O item (a) é imediato. Vimos que $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ quando $n \neq 0$ e isto justifica o item (b). Os ideais do anel (sem unidade) $\lambda\mathbb{Z}$ são exatamente os subconjuntos da forma $n\mathbb{Z}$, $n = \lambda k$. Desde que $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \neq (0)$ para $m, n \neq 0$, temos que todos são essenciais e, portanto, vale o item (c).

Não é verdade, em geral, que o anel sem unidade R é ideal essencial do anel R^*, como mostra o próximo exemplo. Lembremos que a Proposição 1.1.3 assegura que todo R-módulo é um R^*-módulo.

Exemplo 2.2.2. Tome $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)\,;\, a = c = \overline{0} \right\}$, que é anel sem unidade, e $R^* = \mathbb{Z} \times R$.
Sabemos que $R \leq R^*_{R^*}$, isto é, R é um ideal à direita de R^*. Escolhendo $(2,0) \in R^*$ vemos que para $(n, x) \in R^*$, o produto $(2,0).(n,x) = (2n, 2x) = (2n, 0)$ só estará em $R = \{0\} \times R$ quando $n = 0$. Assim, $(2,0) \in R^*$ não tem múltiplo não nulo em R e, pelo Lema 2.1.3, $R \nleq_e R^*_{R^*}$. Logo, $R \notin \Re(R^*)$.

Como caso particular dos Lemas 2.1.1, 2.1.2 e 2.1.3, destacamos:

Lema 2.2.1. *Seja I um ideal à direita do anel com unidade R. São equivalentes:*

(i) $I \in \Re(R)$.

(ii) Todo ideal principal não nulo de R tem intersecção não nula com I.

(iii) Se $0 \neq b \in R$ então existe $x \in R$ tal que $0 \neq bx \in I$.

$\square$

Lema 2.2.2. *Seja I um ideal à direita de um anel qualquer R. Então, com a notação acima temos*

$$(iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii).$$

$\square$

Lema 2.2.3. *Seja I um ideal à direita de um anel qualquer R. Então I é um R^*-submódulo de R, e são equivalentes:*

(i) $I \in \Re(R)$.

(ii) $I \leq_e R_{R^*}$.

(iii) Todo R^*-submódulo cíclico não nulo de R tem intersecção não nula com I.

(iv) Se $0 \neq b \in R$ então existe $x \in R^*$ tal que $0 \neq bx \in I$.

$\square$

Vimos, nos Exemplos 2.1.1 e 2.1.2, que as implicações $(i) \Rightarrow (iii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$ e $(ii) \Rightarrow (i)$ do Lema 2.1.1 não valem, em geral, quando trabalhamos com módulos sobre anéis sem unidade.

Apresentaremos agora exemplos mais específicos, mostrando que as implicações $(i) \Rightarrow (iii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$ e $(ii) \Rightarrow (i)$ do Lema 2.2.1 não valem, em geral, quando trabalhamos com ideais à direita de um anel sem unidade.

Exemplo 2.2.3. Sejam $R = \overline{2}.\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ e $I = \overline{4}.\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{4}\}$. Desde que I é o único ideal próprio de R, temos $I \in \Re(R)$. Além disso, os ideais principais de R são $\overline{0}.R = \overline{4}.R = (\overline{0})$ e $\overline{2}.R = \overline{6}.R = I$. Assim, são verificadas (i) e (ii). Porém, não vale (iii), pois $\overline{4} \in R$ não tem múltiplo não nulo em I. Portanto, $(i) \not\Rightarrow (iii)$ e $(ii) \not\Rightarrow (iii)$.

Exemplo 2.2.4. Sejam $R = \overline{4}.\mathbb{Z}_8 \times \overline{4}.\mathbb{Z}_8 = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{4}), (\overline{4}, \overline{0}), (\overline{4}, \overline{4})\}$ e $I = \{(\overline{0}, \overline{0}, (\overline{0}, \overline{4})\}$. Os ideais principais de R são todos nulos e, portanto, vale (ii). Por outro lado, $J = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{4}, \overline{0})\}$ é ideal não nulo de R e $I \cap J = \{(\overline{0}, \overline{0})\}$. Isto diz que

$I \notin \Re(R)$. Logo, $(ii) \not\Rightarrow (i)$.

A próxima proposição traz propriedades dos ideais essenciais.

Proposição 2.2.1. *Seja R um anel. Então:*

(a) $R \in \Re(R)$.

(b) Se $I \leq J \leq R_R$ e $I \in \Re(R)$ então $J \in \Re(R)$.

(c) Se $I, J \in \Re(R)$ então $I \cap J \in \Re(R)$.

Demonstração.
(a) É imediata.
(b) e (c) seguem dos itens (a) e (b) da Proposição 2.1.1.

□

Vejamos agora como obter ideais essenciais a partir de um ideal essencial dado. Para isso, introduzimos a notação

$$r^{-1}I = \{x \in R\,;\, rx \in I\},$$

onde I é ideal à direita de R e $r \in R$.

É fácil ver que $r^{-1}I$ é novamente um ideal à direita de R.

Se $r \in U(R)$ então $r^{-1}I$ coincide com o produto de r^{-1} por I. De fato, se x está no produto $r^{-1}.I$, então $x = r^{-1}a$, $a \in I$ e daí $rx = a \in I$. Logo, $x \in r^{-1}I$. Reciprocamente, se $x \in r^{-1}I$ então $rx \in I$. Segue que $x = r^{-1}(rx) \in r^{-1}.I$.

Proposição 2.2.2. *Seja R um anel. Se $I \in \Re(R)$ e $r \in R$ então $r^{-1}I \in \Re(R)$.*

Demonstração.
Desde que $\varphi : R \longrightarrow R$ com $\varphi(x) = rx$ é um homomorfismo de R-módulos à direita e $I \leq_e R_R$, aplicamos o item (c) da Proposição 2.1.1 e obtemos que
$\varphi^{-1}(I) = \{r \in R\ ;\ rx \in I\} \leq_e R_R$. Logo, $r^{-1}I \in \Re(R)$.

□

O Exemplo 2.1.9 mostrou que para famílias $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} = \{n\mathbb{Z}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} = \{\mathbb{Z}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{Z}$-módulos, vale $A_n \leq_e B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$. Mas não é verdade que

$\left(\prod_{n\in\mathbb{N}^*} n\mathbb{Z}\right) \leq_e \left(\prod_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{Z}\right)$ como $\mathbb{Z}$-módulos. Passando para ideais essenciais, o resultado abaixo prova que $\left(\prod_{n\in\mathbb{N}^*} n\mathbb{Z}\right) \leq_e \prod_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{Z}$ como $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{Z}$-módulo.

Proposição 2.2.3. *Sejam $\{R_\alpha\}_{\alpha\in L}$ família de anéis e I_α ideal à direita de R_α, para cada $\alpha \in L$. Se $I_\alpha \in \Re(R_\alpha)$ então $\prod_{\alpha\in L} I_\alpha \leq_e \prod_{\alpha\in L} R_\alpha$ visto como $\prod_{\alpha\in L} R_\alpha$-módulo, isto é, $\prod_{\alpha\in L} I_\alpha \in \Re\left(\prod_{\alpha\in L} R_\alpha\right)$.*

Demonstração.
Claro que $I = \prod_{\alpha\in L} I_\alpha$ é ideal à direita de $R = \prod_{\alpha\in L} R_\alpha$. Para ver que é essencial devemos mostrar que $I \leq_e R_R$ mas, pelo Lema 2.2.3, basta provar que $I \leq_e R_{R^*}$. Seja $0 \neq (b_\alpha)_{\alpha\in L} \in R$. Então existe $\lambda \in L$ tal que $0 \neq b_\lambda \in R_\lambda$. Por hipótese $I_\lambda \in \Re(R_\lambda)$ e, pelo Lema 2.2.3, $(I_\lambda) \leq_e (R_\lambda)_{R^*}$, donde existe $r_\lambda \in R^*$ tal que $0 \neq b_\lambda r_\lambda \in I_\lambda$. Escolha $(s_\alpha)_{\alpha\in L} \in R^*$ da seguinte forma: $s_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \neq \lambda \\ r_\alpha, & \text{se } \alpha = \lambda. \end{cases}$
Assim, $(s_\alpha)_{\alpha\in L} \neq 0$ pois $r_\lambda \neq 0$ já que $b_\lambda r_\lambda \neq 0$. Agora,
$(b_\alpha)_{\alpha\in L}.(s_\alpha)_{\alpha\in L} = (b_\alpha.s_\alpha)_{\alpha\in L} \in I$ e $(b_\alpha)_{\alpha\in L}.(s_\alpha)_{\alpha\in L} \neq 0$ pois $b_\lambda.s_\lambda = b_\lambda.r_\lambda \neq 0$. Logo, $I \leq_e R_{R^*}$.

□

A demonstração acima, trabalhada com sequências quase nulas ao invés de sequências infinitas, prova a próxima proposição.

Proposição 2.2.4. *Sejam $\{R_\alpha\}_{\alpha\in L}$ uma família de anéis e I_α ideal à direita de R_α, para cada $\alpha \in L$. Se $I_\alpha \in \Re(R_\alpha)$ então $\bigoplus_{\alpha\in L} I_\alpha \in \Re\left(\bigoplus_{\alpha\in L} R_\alpha\right)$.*

□

Terminamos esta seção com um outro resultado envolvendo famílias de anéis, e que também usaremos na seção 3.2.

Se $\{R_\alpha\}_{\alpha\in L}$ é família de anéis, então é fácil ver que $\bigoplus_{\alpha\in L} R_\alpha$ é ideal bilateral de $R = \prod_{\alpha\in L} R_\alpha$. Veremos que $\bigoplus_{\alpha\in L} R_\alpha \leq_e R$.
Pelo Lema 2.2.3 basta ver que $\left(\bigoplus_{\alpha\in L} R_\alpha\right) \leq_e R_{R^*}$. Tome $0 \neq (b_\alpha)_{\alpha\in L} \in R$. Então existe $\lambda \in L$ tal que $0 \neq b_\lambda \in R_\lambda$. Escolha $(r_\alpha)_{\alpha\in L} \in R^*$ definido por $r_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \neq \lambda \\ (1,0), & \text{se } \alpha = \lambda. \end{cases}$

Então $(b_\alpha)_{\alpha\in L}.(r_\alpha)_{\alpha\in L} \in \bigoplus_{\alpha\in L} R_\alpha$ e $(b_\alpha)_{\alpha\in L}.(r_\alpha)_{\alpha\in L} \neq 0$ pois $b_\lambda.r_\lambda = b_\lambda.(1,0) = b_\lambda \neq 0$.

Proposição 2.2.5. *Seja $\{R_\alpha\}_{\alpha\in L}$ uma família de anéis.*

(a) Se $I \in \Re\left(\prod_{\alpha\in L} R_\alpha\right)$ então para cada $\alpha \in L$ existe $I_\alpha \in \Re(R_\alpha)$ tal que $\bigoplus_{\alpha\in L} I_\alpha \subseteq I$.

(b) Se $I \in \Re\left(\bigoplus_{\alpha\in L} R_\alpha\right)$ então $I \in \Re\left(\prod_{\alpha\in L} R_\alpha\right)$.

Demonstração.
(a) Fixe $\alpha \in L$. Dado $x \in R_\alpha$, vamos denotar $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ o elemento de $R \subseteq R^* = \mathbb{Z} \times \prod_{\lambda\in L} R_\lambda$ definido por $x_\lambda = \begin{cases} 0, \text{ se } \alpha \neq \lambda \\ x, \text{ se } \alpha = \lambda. \end{cases}$
Seja $I_\alpha = \{x \in R_\alpha \;;\; (x_\lambda)_{\lambda\in L} \in I\}$. Note que $I_\alpha \neq \emptyset$ pois $0 \in I_\alpha$, já que a sequência nula está em I. Vamos verificar que I_α é ideal à direita de R_α. Dados $x, y \in I_\alpha$ e $r \in R_\alpha$ temos $(x_\lambda)_{\lambda\in L}, (y_\lambda)_{\lambda\in L} \in I$ e $(r_\lambda)_{\lambda\in L} \in R$. Como I é ideal à direita de R, vem que $(x_\lambda)_{\lambda\in L} - (y_\lambda)_{\lambda\in L} = (x_\lambda - y_\lambda)_{\lambda\in L} \in I$ e $(x_\lambda)_{\lambda\in L}.(r_\lambda)_{\lambda\in L} = (x_\lambda.r_\lambda)_{\lambda\in L} \in I$. Portanto, $(x - y) \in I_\alpha$ e $(x.r) \in I_\alpha$ e I_α é ideal à direita de R_α. Para ver que $I_\alpha \in \Re(R_\alpha)$ tomamos $0 \neq r \in R_\alpha$, e então pelo Lema 2.2.3, basta obter $\widehat{v} \in (R_\alpha)^*$ tal que $0 \neq r.\widehat{v} \in I_\alpha$. Como $0 \neq (r_\lambda)_{\lambda\in L} \in R$ e $I \in \Re(R)$, existe $v \in R^*$ tal que $0 \neq (r_\lambda)_{\lambda\in L}.v \in I$. Mas $v = (m, (v_\lambda)_{\lambda\in L}) \in \mathbb{Z} \times \prod_{\lambda\in L} R_\lambda = R^*$ e $(r_\lambda)_{\lambda\in L} = (0, (r_\lambda)_{\lambda\in L})$. Daí $0 \neq (r_\lambda)_{\lambda\in L}.v = (0, (r_\lambda)_{\lambda\in L}).(m, (v_\lambda)_{\lambda\in L}) = (0, m.(r_\lambda)_{\lambda\in L} + (r_\lambda)_{\lambda\in L}.(v_\lambda)_{\lambda\in L}) \in I$. Como a única coordenada não nula de $(r_\lambda)_{\lambda\in L}$ é α, segue que $0 \neq m.r + r.v_\alpha \in I_\alpha$. Tome $\widehat{v} = (m, v_\alpha) \in (R_\alpha)^*$ e então $r.\widehat{v} = (0, r_\alpha).(m, v_\alpha) = (mr_\alpha + r_\alpha v_\alpha) \in I_\alpha - \{0\}$ provando que $I_\alpha \in \Re(R_\alpha)$.
Ainda resta mostrar que $\bigoplus_{\alpha\in L} I_\alpha \subseteq I$. Tome $u \in \bigoplus_{\alpha\in L} I_\alpha$. Como u é sequência quase nula podemos escrever $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, onde u_i é sequência quase nula com apenas uma coordenada não nula. Além disso, o elemento correspondente à coordenada não nula de u_i está em I_α para algum $\alpha \in L$. Então, pela construção de I_α, vem que $u_i \in I$ e portanto $u \in I$.

(b) Claro que I é ideal à direita de $R = \prod_{\alpha\in L} R_\alpha$ pois $x \in I$ implica que $x = (x_\alpha)_{\alpha\in L}$ é sequência quase nula em $\{I_\alpha\}$ e $y \in \prod_{\alpha\in L} R_\alpha$ implica que $y = (y_\alpha)_{\alpha\in L}$, com $y_\alpha \in R_\alpha$. Então $x.y = (x_\alpha.y_\alpha)_{\alpha\in L}$ é sequência quase nula em $\{I_\alpha\}$. Assim $I \leq R_R$. Também sabemos que $\bigoplus_{\alpha\in L} R_\alpha \leq_e R_R$ e, por hipótese, $I \leq_e \bigoplus_{\alpha\in L} R_\alpha$ como $\bigoplus_{\alpha\in L} R_\alpha$-módulo. Claro que $I \leq_e \bigoplus_{\alpha \in L} R_\alpha$ como R-módulo. Aplicando a Proposição 2.1.1 na cadeia de R-módulos

$$I \leq_e \bigoplus_{\alpha \in L} R_\alpha \leq_e R_R,$$

obtemos que $I \leq_e R_R$, isto é, $I \in \Re(R)$.

$\square$

2.3 O Submódulo Singular

Nosso objetivo nesta seção é definir o submódulo singular de um módulo dado e estudar algumas propriedades relacionadas. Faremos isto apresentando alguns teoremas e resultados importantes que caracterizam o submódulo singular bem como vários exemplos e contra-exemplos.

Sejam R um anel qualquer e A um R-módulo à direita, com $x \in A$. Fixaremos a notação:
$\Re(R) = \{I \subseteq R\ ;\ I \leq_e R_R\}$ para o conjunto dos ideais à direita essenciais do anel R.

Iniciamos com a seguinte proposição:

Proposição 2.3.1. *Se A é um R-módulo então o conjunto*

$$Z_R(A) = \{x \in A\ ;\ x.I = (0) \text{ para algum } I \in \Re(R)\}$$

é um submódulo de A.

Demonstração.
Claro que $Z_R(A) \neq \emptyset$ pois $0 \in Z_R(A)$, uma vez que $R \leq_e R$ e $0.R = (0)$. Se $x, y \in Z_R(A)$ então $xI = yJ = (0)$ para I e J escolhidos em $\Re(R)$. Pela item (c) da Proposição 2.2.1 temos $I \cap J \in \Re(R)$. Agora, $(x-y).I \cap J = (0)$ implica em $(x-y) \in Z_R(A)$. Dado $r \in R$, como $I \in \Re(R)$ segue, da Proposição 2.2.2, que $r^{-1}I \in \Re(R)$. Mas $xr.r^{-1}I \subseteq xI = (0)$ e daí, $xr \in Z_R(A)$.

$\square$

Definição 2.3.1. *Seja A um R-módulo. O submódulo $Z_R(A)$ é chamado submódulo singular de A.*

Lembre que se A é um R-módulo e $S \subseteq A$ então o anulador à direita de S é o conjunto

$$r_R(S) = \{r \in R \; ; \; Sr = 0\}.$$

É fácil ver que $r_R(S)$ é um ideal à direita de R.

No caso em que $S = \{x\} \subseteq A$ usamos a notação $r_R(x)$ para indicar $r_R(\{x\})$.

Para um R-módulo A definimos o submódulo singular $Z_R(A)$ como os elementos de A que anulam algum ideal à direita essencial de R. Veremos abaixo que $Z_R(A)$ coincide com os elementos de A cujo anulador à direita é ideal à direita essencial de R.

Proposição 2.3.2. *Seja A um R-módulo. Então $Z_R(A) = \{x \in A \; ; \; r_R(x) \in \Re(R)\}$.*

Demonstração.
Se $x \in Z_R(A)$ existe $I \in \Re(R)$ tal que $xI = (0)$. Isso diz que $I \subseteq r_R(x)$. Assim, $I \leq r_R(x) \leq R$ e $I \in \Re(R)$ que implica em $r_R(x) \in \Re(R)$ pelo item (b) da Proposição 2.2.1. Reciprocamente, dado $x \in A$ tal que $r_R(x) \in \Re(R)$, temos que $I = r_R(x) \in \Re(R)$ e $xI = (0)$. Logo, $x \in Z_R(A)$.

$\square$

Para cada anel R destacamos duas subclasses da classe dos R-módulos, usando o submódulo singular. Estas subclasses são formadas pelos módulos singulares, e pelos módulos não singulares, de acordo com a próxima definição.

Definição 2.3.2. *Um R- módulo A é chamado*

- *Módulo singular quando $Z_R(A) = A$.*
- *Módulo não singular quando $Z_R(A) = (0)$.*

Quando não houver possibilidade de confusão em relação ao anel R envolvido, denotaremos $Z_R(A)$ simplesmente por $Z(A)$.

O único R-módulo que é singular e não singular ao mesmo tempo é $A = (0)$.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.3.1. Seja K um corpo e V um K-espaço vetorial. Como $\Re(K) = \{K\}$ temos que $Z(V) = \{x \in V \ ; \ xK = 0\} = (0)$.

Portanto, todo espaço vetorial é K-módulo não singular. Em particular, K é K-módulo não singular, isto é, $Z(K) = (0)$.

Exemplo 2.3.2. Seja A um grupo abeliano visto como $\mathbb{Z}$-módulo. Vimos no Exemplo 2.2.1 que $\Re(\mathbb{Z}) = \{n\mathbb{Z} \ ; \ n \neq 0\}$. Assim, dado $a \in A$ temos:

$$\begin{aligned} x \in Z(A) &\Leftrightarrow x.(n\mathbb{Z}) = (0), \text{ para algum } n \in \mathbb{N} - \{0\}, \\ &\Leftrightarrow xn = 0, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} - \{0\}, \\ &\Leftrightarrow x \in T(A) = \{x \in A \ ; \ nx = 0, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} - \{0\}\}. \end{aligned}$$

Note que $T(A)$ é o conjunto dos elementos do grupo A que tem ordem finita. Desde que $Z(A) = T(A)$ temos que $T(A)$ é subgrupo de A, chamado de subgrupo de torção de A. Concluímos que

$$Z(A) = A \Leftrightarrow A \text{ é grupo de torção e}$$
$$Z(A) = (0) \Leftrightarrow A \text{ é livre de torção } \ (T(A) = (0)).$$

Em particular temos que:

- $Z(\mathbb{Z}) = (0)$, isto é, $\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}$-módulo não singular.
- $Z(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n$, isto é, $\mathbb{Z}_n$ é $\mathbb{Z}$-módulo singular.
- $Z(n\mathbb{Z}) = (0)$, isto é, $n\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}$-módulo não singular.

Exemplo 2.3.3. Sejam $R = 2\mathbb{Z}$ e $A = \mathbb{Z}_4$. Então $\mathbb{Z}_4$ é $2\mathbb{Z}$-módulo com a operação produto induzida do $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_4$. Sabemos que $\Re(2\mathbb{Z}) = \{2\lambda\mathbb{Z}\, ; \, \lambda \neq 0\}$ e então $Z_R(\mathbb{Z}_4) = Z_4$. Logo, $\mathbb{Z}_4$ é $2\mathbb{Z}$-módulo singular.

O próximo exemplo mostra que existem módulos que não são singulares e não são não singulares.

Exemplo 2.3.4. Tome o anel $R = \mathbb{Z}_4$ e $A = \mathbb{Z}_4$. É fácil ver que $\Re(\mathbb{Z}_4) = \{\{\overline{0}, \overline{2}\}, \mathbb{Z}_4\}$

e então $Z_R(A) = \{\overline{0}, \overline{2}\}$. Logo, $\mathbb{Z}_4$ é um $\mathbb{Z}_4$-módulo que não é singular e também não é não singular.

Nosso objetivo agora é provar um teorema que caracteriza módulos singulares e módulos não singulares, através de sequências exatas e conjuntos de homomorfismos. Iniciamos com um lema:

Lema 2.3.1. *Seja $f : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de R-módulos. Então:*

(a) $f(Z(A)) \leq Z(B)$.

(b) Se $C \leq A$ então $Z(C) = C \cap Z(A)$.

(c) $Z(Z(A)) = Z(A)$.

(d) Se f é injetor e B é não singular então A é não singular.

(e) Se f é sobrejetor e A é singular então B é singular.

(f) Se f é isomorfismo então A é singular (respectivamente, não singular) se, e somente se, B é singular (respectivamente, não singular).

Demonstração.
(a) Seja $x \in Z(A)$. Então existe $I \in \Re(R)$ tal que $xI = 0$. É claro que $f(x) \in B$ e $f(x)I = f(xI) = f(0) = 0$. Logo, $f(x) \in Z(B)$ e $f(Z(A)) \leq Z(B)$.

(b) A inclusão $Z(C) \subseteq C \cap Z(A)$ é óbvia. Seja $x \in C \cap Z(A)$. Então $x \in C$ e $xI = 0$ para algum $I \in \Re(R)$ e daí $x \in Z(C)$.

(c) Pela Proposição 2.3.1, $Z(A) \leq A$ e aplicando o item (b) temos $Z(Z(A)) = Z(A) \cap Z(A) = Z(A)$.

(d) Usando o item (a) e o fato de B ser não singular temos

$$f(Z(A)) \leq Z(B) = (0) \Rightarrow f(Z(A)) = (0).$$

Como f é injetora, $Z(A) \leq Ker(f) = \{0\}$, isto é, $Z(A) = (0)$.

(e) Usando o item (a), a sobrejetividade de f e o fato de A ser singular temos $B =$

$f(A) = f(Z(A)) \leq Z(B)$. Logo, $Z(B) = B$.

(f) Segue dos itens (d) e (e).

$\square$

Lembramos que a sequência curta de R-módulos e R-homomorfismos

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

é exata quando f é injetora, g é sobrejetora e $Ker(g) = Im(f)$.

Teorema 2.3.1. *Sejam R um anel e A e C R-módulos. Então:*

(a) Um R-módulo C é não singular se, e somente se, $Hom_R(A, C) = (0)$ para todo R-módulo singular A.

(b) Um R-módulo C é singular se, e somente se, existe uma sequência exata curta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ tal que $f(A) \leq_e B$.

Demonstração.
(a) ($\Rightarrow$) Seja $f \in Hom_R(A, C)$ com C não singular e A singular. Então, pelo item (d) do Lema 2.3.1 temos $A = Z(A)$, $Z(C) = (0)$ e $f(Z(A)) \leq Z(C)$. Assim, $f(A) = f(Z(A)) \leq Z(C) = (0)$. Portanto, $f \equiv 0$.
($\Leftarrow$) Pelo item (b) do Lema 2.3.1 temos $Z(Z(C)) = Z(C)$, isto é, $Z(C)$ é R-módulo singular. Aplicando nossa hipótese para $A = Z(C)$ temos $Hom_R(Z(C), C) = (0)$. Em particular, a aplicação inclusão $i : Z(C) \longrightarrow C$ deve ser nula, isto é, $0 = i(Z(C)) = Z(C)$. Portanto, C é não singular.
(b) ($\Leftarrow$) Seja $b \in B$. A aplicação $\varphi_b : R \longrightarrow B$ com $\varphi_b(r) = br$ é homomorfismo de R-módulos à direita. Por hipótese, existe uma sequência exata curta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ tal que $f(A) \leq_e B$, e então, aplicando o item (c) da Proposição 2.1.1 vem que $\varphi_b^{-1}(f(A)) \leq_e R_R$. Chame $I = \varphi_b^{-1}(f(A)) = \{r \in R\ ;\ br \in f(A)\}$. Assim, $I \in \Re(R)$. Segue que $bI \leq f(A) = Ker(g)$ e então $0 = g(bI) = g(b)I$. Isso mostra que $g(b) \in Z(C)$ pois anula $I \in \Re(R)$, para todo $b \in B$. Concluímos que $g(B) \subseteq Z(C)$, mas sendo g sobrejetora segue que $C = g(B) \subseteq Z(C) \leq C$. Portanto, $Z(C) = C$ e C é R-módulo singular.
($\Rightarrow$) Suponha, agora, que C é R-módulo singular e construa o R-módulo livre B sobre

C. Para este procedimento veja ([10], p.103) ou ([11], p.60-61). Então

$$B = R^{(c)} = \{\lambda : C \longrightarrow R \ ; \ \lambda(c) = 0 \ \text{ para quase todo } \ c \in C\}$$

com base

$$\{b_\alpha\}_{\alpha \in C} = \left\{ \delta_\alpha : C \longrightarrow R \ ; \ \delta_\alpha(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \ \text{se } \alpha \neq x \\ 1, \ \text{se } \alpha = x \end{array} \right. \right\}_{\alpha \in C}.$$

Defina $g : B \longrightarrow C$ por $g(\delta_c) = c$ que é R-homomorfismo sobrejetor. Chame $A = Ker(g) \leq B$ e forme a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \xhookrightarrow{i} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0.$$

Falta provar que $i(A) = A \leq_e B$. Para cada $\alpha \in C$ temos $g(b_\alpha) \in C = Z(C)$. Logo $g(b_\alpha)I_\alpha = 0$ para algum $I_\alpha \in \Re(R)$. Note que $0 = g(b_\alpha I_\alpha)$ e como $A = Ker(g)$ temos $b_\alpha I_\alpha \leq A$. Afirmamos que $b_\alpha I_\alpha \leq_e b_\alpha R$. De fato, como $I_\alpha \leq_e R_\alpha$ basta aplicar o item (c) da Proposição 2.1.1 no R-homomorfismo $\varphi : b_\alpha R \longrightarrow R$, com $\varphi(b_\alpha r) = r$, que está bem definido pois b_α é elemento da base. Logo, $b_\alpha I_\alpha = \varphi^{-1}(I_\alpha) \leq_e b_\alpha R$. Desde que $\{b_\alpha R\}_{\alpha \in C}$ é família independente de R-módulos, temos que $\{b_\alpha I\}_{\alpha \in C}$ também é família independente. Aplicando agora a Proposição 2.1.2 temos $\bigoplus\limits_{\alpha \in C} b_\alpha I_\alpha \leq_e \bigoplus\limits_{\alpha \in C} b_\alpha R_\alpha = B$. Lembre que $b_\alpha I_\alpha \leq A$ e então $\bigoplus\limits_{\alpha \in C} b_\alpha I_\alpha \leq A \leq B$. Finalmente o item (a) da Proposição 2.1.1 garante que $A \leq_e B$.

□

No corolário abaixo apresentamos um caso particular da implicação ($\Leftarrow$) do item (b) do Teorema 2.3.1.

Corolário 2.3.1. *Seja A um R-submódulo de B. Se $A \leq_e B$ então $\frac{B}{A}$ é singular.*

Demonstração.
É claro que a sequência $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} \frac{B}{A} \longrightarrow 0$ é exata quando i é a identidade e π é a projeção canônica. Por hipótese, $i(A) \leq_e B$ e então pelo item (b) do Teorema 2.3.1 temos que $\frac{B}{A}$ é singular.

□

A recíproca do corolário anterior não vale em geral.

Exemplo 2.3.5. Sejam $B = \mathbb{Z}_2$ e $A = (0)$ vistos como $\mathbb{Z}$-módulos. Então $\frac{B}{A} = \mathbb{Z}_2$ que sabemos ser singular pelo Exemplo 2.3.2. Porém, $A = (0)$ não é submódulo essencial de $B = \mathbb{Z}_2$.

Veremos que a recíproca vale em dois casos particulares. A saber, quando o módulo B é não singular e quando $B = R_R$, onde R é anel com unidade. Este último caso fornece uma alternativa para expressar $\Re(R)$ quando R tem unidade.

Proposição 2.3.3. *Seja A um R-submódulo de B. Se B é não singular são equivalentes:*

(i) $A \leq_e B$;

(ii) $\frac{B}{A}$ *é R-módulo singular.*

Demonstração.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Segue do Corolário 2.3.1.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja $x \in B$, $x \neq 0$. Então $\overline{x} \in \frac{B}{A} = Z_R(\frac{B}{A})$ e daí $\overline{x}I = (\overline{0})$ para algum $I \in \Re(R)$. Note que $\overline{x}I = (\overline{0})$ assegura que $xI \leq A$, pois para cada $r \in I$ temos $x\overline{r} = \overline{xr} = \overline{0}$, implicando em $xr \in A$. Como $x \neq 0$ e $Z(B) = (0)$, vemos que $x \notin Z(B)$. Assim, x não anula ideal essencial de R. Em particular, $xI \neq (0)$. Logo, existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in xI \leq A$. Logo, pelo Lema 2.1.2, segue que $A \leq_e B$.

□

Temos agora uma caracterização para os ideais essenciais de um anel com unidade.

Proposição 2.3.4. *Sejam R um anel com unidade e $I \leq R_R$. Então:*

(a) $I \leq_e R_R$ *se, e somente se,* $\frac{R}{I}$ *é singular.*

(b) $\Re(R) = \{I \leq R\, ;\, \frac{R}{I}$ *é singular*$\}$.

Demonstração.
(a)($\Rightarrow$) Segue do Corolário 2.3.1.
($\Leftarrow$) Como R tem unidade 1 e $Z_R(\frac{R}{I}) = \frac{R}{I}$, temos que $\overline{1} \in Z_R(\frac{R}{I})$ e então $\overline{1}J = (\overline{0})$ para algum $J \in \Re(R)$. Mas $\overline{1}J = (\overline{0})$ assegura que $J \leq I \leq R$ e, como $J \leq_e R$ segue, do

item (b) da Proposição 2.2.1, que $I \leq_e R$.
(b) Segue do item (a).

$\square$

O item (a) da Proposição 2.3.4 e, portanto, a caracterização obtida para $\Re(R)$ no item (b) da mesma proposição, não vale para anéis sem unidade.

Exemplo 2.3.6. Seja $J = \{\overline{0}, \overline{2}\} = \overline{2}.\mathbb{Z}_4$ o ideal de $\mathbb{Z}_4$ gerado por $\overline{2}$. Tome o anel

$R = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_4)\,;\, a \in J \text{ e } b \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ que denotaremos por $R = \begin{bmatrix} 0 & J \\ 0 & \mathbb{Z}_4 \end{bmatrix}$.

Nesta notação, considere $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}$ que claramente é ideal à direita de R, isto é, $I \leq R_R$.

Afirmamos que $\frac{R}{I}$ é R-módulo singular.

De fato, note que $C = \begin{bmatrix} 0 & J \\ 0 & J \end{bmatrix}$ também é ideal à direita de R e $f : R \longrightarrow C$,

$f\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b+b \end{bmatrix}$ é R-epimorfismo com $Ker(f) = I$.

Então $\frac{R}{I} \simeq C$ e, pelo item (f) do Lema 2.3.1, basta provar que $Z_R(C) = C$. Para isso, é suficiente verificar que todo elemento de C anula algum ideal à direita essencial de R.

Mas, como $C.C = \begin{bmatrix} 0 & J \\ 0 & J \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & J \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & JJ \\ 0 & JJ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

vemos que todo elemento de C anula C, com $C \leq R_R$. Assim, basta provar que

$C \leq_e R_R$. Seja então $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} \in R - \{0\}$, $x \in J$ e $y \in \mathbb{Z}_4$.

$1^{\underline{o}}$ caso: $y = 0$.

Então $x \neq 0$ e tomando $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{1} \end{bmatrix} \in R$ temos

$$\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in C.$$

Logo, α tem múltiplo não nulo em C.

$2^{\underline{o}}$ caso: $y \neq 0$.

Como vimos no Exemplo 2.3.4, $J \leq_e \mathbb{Z}_4$ e, então, existe $t \in \mathbb{Z}_4$ tal que $0 \neq yt \in J$.

Tomando $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \in R$ temos $\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xt \\ 0 & yt \end{bmatrix} \in C$, pois $xt \in J$ e $yt \in J$.

Logo, α tem múltiplo não nulo em C e $C \leq_e R_R$. Isso conclui a prova de que $Z(\frac{R}{I}) = \frac{R}{I}$.

Falta mostrar que $I \nleq_e R_R$. Mas isso é fácil, pois $B = \begin{bmatrix} 0 & J \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é ideal à direita não nulo de R e $I \cap B = (0)$.

Terminaremos esta seção estudando propriedades gerais de módulos singulares e módulos não singulares. Usaremos a seguinte definição:

Definição 2.3.3. *Seja U uma classe de módulos. Então:*

(a) U é fechada por submódulos quando: $B \in U$ e $A \leq B \Rightarrow A \in U$.

(b) U é fechada por extensões essenciais quando: $A \in U$ e $A \leq_e B \Rightarrow B \in U$.

(c) U é fechada por extensões de módulos quando:
$A, C \in U$ e $0 \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ exata $\Rightarrow B \in U$.

(d) U é fechada por módulos quocientes quando: $B \in U$ e $A \leq B \Rightarrow \frac{B}{A} \in U$.

(e) U é fechada por soma direta (produto direto) quando:

$\{C_\alpha\}_{\alpha\in L} \subseteq U \Rightarrow \bigoplus_{\alpha\in L} C_\alpha \in U \left(\prod_{\alpha\in L} C_\alpha \in U\right)$.

Teorema 2.3.2. *(a) A classe dos módulos não singulares é fechada por submódulos, extensões essenciais, produto direto, soma direta e extensões de módulos.*

(b) A classe dos módulos singulares é fechada por submódulos, módulos quocientes e somas diretas.

Demonstração.

(a) Submódulos: Seja $A \leq B$ e $Z(B) = (0)$. Pelo item (b) do Lema 2.3.1 temos $Z(A) = A \cap Z(B) = (0)$. Logo, A é não singular.

Extensão Essencial: Seja $A \leq_e B$ e $Z(A) = (0)$. Novamente, pelo item (b) do mesmo lema temos $(0) = Z(A) = A \cap Z(B)$. Mas $A \leq_e B$ e $Z(B) \leq B$ então $Z(B) = (0)$.

Produto Direto: Seja $\{C_\alpha\}_{\alpha\in L}$ uma coleção de R-módulos não singulares. Para cada R-módulo singular A e cada $\alpha \in L$ temos, pelo item (a) do Teorema 2.3.1, que $Hom_R(A, C_\alpha) = (0)$. Seja agora $f \in Hom_R\left(A, \prod_{\alpha\in L} C_\alpha\right)$. Então, para cada projeção $P_\alpha : \prod_{\beta\in L} C_\beta \longrightarrow C$ vale $P_\alpha \circ f \in Hom_R(A, C_\alpha) = (0)$. Assim, $f \equiv 0$ pois todas as suas coordenadas são nulas. Segue que $Hom_R\left(A, \prod_{\alpha\in L} C_\alpha\right) = (0)$ e então, pelo item (a) do mesmo teorema, concluímos que $\prod_{\alpha\in L} C_\alpha$ é não singular.

Soma Direta: Seja $\{C_\alpha\}_{\alpha\in L}$ uma coleção de R-módulos não singulares. Como $\bigoplus_{\alpha\in L} C_\alpha \leq \prod_{\alpha\in L} C_\alpha$ e a classe dos módulos não singulares é fechada por produto direto e por submódulo, temos que $\bigoplus_{\alpha\in L} C_\alpha$ é não singular.

Extensões de Módulos: Seja $0 \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de R-módulos onde $Z_R(A) = Z_R(C) = (0)$. Para todo R-módulo singular M, segue do item (a) do Teorema 2.3.1 que $Hom_R(M, A) = Hom_R(M, C) = (0)$ já que A e C são não singulares. Além disso, a exatidão da sequência $0 \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ garante que

$$0 \longrightarrow Hom_R(M, C) \longrightarrow Hom_R(M, B) \longrightarrow Hom_R(M, A)$$

é sequência exata de $\mathbb{Z}$-módulos ([G] p.8). Logo, $Hom_R(M, B) = (0)$ e, portanto, B é R-módulo não singular.

(b) Submódulos: Seja $A \leq B$ e $Z(B) = B$. Pelo item (b) do Lema 2.3.1 temos $Z(A) = A \cap Z(B) = A \cap B = A$. Logo, A é singular.

Módulo Quociente: Seja $A \leq B$ e $Z(B) = B$. A projeção canônica $\pi : B \longrightarrow \frac{B}{A}$ é R-epimorfismo. Logo $\pi(B) = \frac{B}{A}$ e também $\pi(Z(B)) \leq Z(\frac{B}{A})$ pelo item (a) do Lema 2.3.1. Assim, $\frac{B}{A} = \pi(B) = \pi(Z(B)) \leq Z(\frac{B}{A}) \leq \frac{B}{A}$. Portanto, $\frac{B}{A}$ é singular.

Soma Direta: Seja $\{C_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma coleção de módulos singulares. Pelo item (b) do Teorema 2.3.1, para cada $\alpha \in L$ existe uma sequência exata $0 \longrightarrow A_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} B_\alpha \xrightarrow{g_\alpha} C_\alpha \longrightarrow 0$ de R-módulos tal que $f_\alpha(A_\alpha) \leq_e B_\alpha$. Definindo

$$f : \bigoplus_{\alpha \in L} A_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in L} B_\alpha$$

como

$$f((a_i)_{i \in L}) = (f_i(a_i))_{i \in L}$$

onde $a_i \in A_{\alpha_i}$ e

$$g : \bigoplus_{\alpha \in L} B_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in L} C_\alpha$$

de forma análoga, vem que

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in L} A_\alpha \xrightarrow{f} \bigoplus B_\alpha \xrightarrow{g} \bigoplus_{\alpha \in L} C_\alpha \longrightarrow 0$$

é exata. Note que $\{f_\alpha(A_\alpha)\}_{\alpha \in L}$ é família independente do submódulo $\bigoplus\limits_{\alpha \in L} B_\alpha$. Além disso, para cada $\alpha \in L$ temos $f_\alpha(A_\alpha) \leq_e B_\alpha$ e então, pela Proposição 2.1.2, temos $\bigoplus\limits_{\alpha \in L} f_\alpha(A_\alpha) \leq_e \bigoplus\limits_{\alpha \in L} B_\alpha$. Mas $f\left(\bigoplus\limits_{\alpha \in L} A_\alpha\right) = \bigoplus\limits_{\alpha \in L} f_\alpha(A_\alpha)$ e daí, $f\left(\bigoplus\limits_{\alpha \in L} A_\alpha\right) \leq_e \bigoplus\limits_{\alpha \in L} B_\alpha$. Portanto, pelo item (b) do Teorema 2.3.1, temos que $\bigoplus\limits_{\alpha \in L} C_\alpha$ é singular.

□

Naturalmente o Teorema 2.3.2 leva às seguintes questões:

1) A classe dos módulos não singulares é fechada por módulo quociente?

2) A classe dos módulos singulares é fechada por extensões essenciais?

3) A classe dos módulos singulares é fechada por produto direto?

4) A classe dos módulos singulares é fechada por extensões de módulos?

A resposta para cada uma destas questões é negativa. Passemos à construção dos exemplos que justificam nossa resposta.

Exemplo 2.3.7. A classe dos módulos não singulares não é fechada por módulo quociente.
Tome $R = \mathbb{Z}$ que sabemos ser módulo não singular e $I = 2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. O $\mathbb{Z}$-módulo quociente $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2$ é singular, como vimos no Exemplo 2.3.2. Logo, não pode ser não singular.

Exemplo 2.3.8. A classe dos módulos singulares não é fechada por extensões essenciais.
Tome $R = \mathbb{Z}_4$, visto como $\mathbb{Z}_4$-módulo. Vimos no Exemplo 2.3.4 que $I = \{\overline{0}, \overline{2}\} \leq_e R_R$ e que $Z_R(R) = I$, isto é, R não é singular. Mas I é singular pois, pelo item (b) do Lema 2.3.1, temos $Z(I) = I \cap Z(R) = I$.

Exemplo 2.3.9. A classe dos módulos singulares não é fechada por produto direto.
Seja L um conjunto infinito de primos distintos. Para cada $p_i \in L$ sabemos, pelo Exemplo 2.3.2, que $\mathbb{Z}_{p_i}$ é $\mathbb{Z}$-módulo singular. Note que

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} &\longrightarrow \prod_{p_i \in L} \mathbb{Z}_{p_i} \\ x &\longmapsto (\overline{x}, \overline{x}, ...), \end{aligned}$$

onde cada $\overline{x}$ representa a classe em um $\mathbb{Z}_{p_i}$ distinto, é $\mathbb{Z}$-homomorfismo injetor. Como $\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}$-módulo não singular (Exemplo 2.3.2) segue, do item (f) do Lema 2.3.1, que $\varphi(\mathbb{Z})$ é submódulo não singular de $\prod\limits_{p_i \in L} \mathbb{Z}_{p_i}$. Mas pelo item (b) do Teorema 2.3.2 os módulos singulares são fechados por submódulos. Logo, $\prod\limits_{p_i \in L} \mathbb{Z}_{p_i}$ não pode ser $\mathbb{Z}$-módulo singular.

Exemplo 2.3.10. A classe dos módulos singulares não é fechada por extensões de módulos.
Utilizando a notação do Exemplo 2.3.8 vemos que $I = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ é $\mathbb{Z}_4$-módulo singular, mas

$\mathbb{Z}_4$ não é $\mathbb{Z}_4$-módulo singular. Também é fácil ver que $\frac{\mathbb{Z}_4}{I} \simeq I$ e portanto $\frac{\mathbb{Z}_4}{I}$ é $\mathbb{Z}_4$-módulo singular. Assim, temos a sequência exata $0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}_4}{I} \longrightarrow 0$ com I e $\frac{\mathbb{Z}_4}{I}$ singulares mas $\mathbb{Z}_4$ não singular.

2.4 O Funtor Singular

Nesta seção apresentamos a definição e exemplos de categorias e funtores, com o objetivo de verificar que a função que associa a cada R-módulo A o seu submódulo singular $Z(A)$, é um funtor chamado funtor singular, na categoria dos R-módulos.

Em seguida, comparamos o funtor singular com o funtor torção definido na categoria dos módulos sobre domínios comutativos. Provamos que o funtor torção é um funtor radical de torção, mas que o funtor singular não é, em geral, funtor radical de torção.

Terminamos provando que quando o anel R é R-módulo à direita não singular, isto é, $Z_R(R) = (0)$, então o funtor singular definido na categoria dos R-módulos à direita é funtor radical de torção.

Dados dois conjuntos A e B denotaremos

$$\Im(A, B) = \{\, f : A \longrightarrow B \ ; \ \text{f é função} \,\}.$$

A definição de categoria apresentada abaixo é um caso particular de uma definição mais geral ([6], p.11). A particularidade está em considerar apenas conjuntos como objetos da categoria, e também considerar apenas funções como morfismos entre objetos. Para nossos objetivos isso não representa perda.

Definição 2.4.1. *Uma categoria M é uma classe de conjuntos, que são chamados objetos de M e denotados por $Obj(M)$, tal que:*

(i) Se $A, B \in Obj(M)$, existe um conjunto de morfismos $Hom_M(A, B) \subseteq \Im(A, B)$.

(ii) Para cada $A \in Obj(M)$ temos $Id_A \in Hom_M(A, A)$.

(iii) Se $A, B, C \in Obj(M)$, $\varphi \in Hom_M(A, B)$ e $\psi \in Hom_M(B, C)$ então $\psi \circ \varphi \in Hom_M(A, C)$.

(iv) *Se* $\varphi \in Hom_M(A,B)$*,* $\psi \in Hom_M(B,C)$ *e* $\delta \in Hom_M(C,D)$ *então* $(\delta \circ \psi) \circ \varphi = \delta \circ (\psi \circ \varphi)$.

Exemplo 2.4.1. $A \in Obj(M) \Longleftrightarrow A$ é conjunto.

$$Hom_M(A,B) = \{\, f : A \longrightarrow B \ ; \ \text{f é função} \,\}.$$

Temos que M é a categoria dos conjuntos cujos morfismos são funções.

Exemplo 2.4.2. $A \in Obj(M) \Longleftrightarrow A$ é espaço topológico.

$$Hom_M(A,B) = \{f : A \longrightarrow B \ ; \ \text{f é função contínua} \,\}.$$

Temos que M é a categoria dos espaços topológicos.

Exemplo 2.4.3. Seja R um anel. Então

$$A \in Obj(M) \Longleftrightarrow A \text{ é } R\text{-módulo à direita} .$$

$$Hom_M(A,B) = Hom_R(A,B).$$

Temos que M é a categoria dos R-módulos à direita, que denotaremos por Mod-R. Analogamente, R-Mod é a categoria dos R-módulos à esquerda.

A relação entre categorias pode ser efetuada através de uma correspondência chamada funtor.

Definição 2.4.2. *Um funtor da categoria* M *na categoria* N *é uma correspondência* F *tal que:*

(i) F *associa a todo* $A \in Obj(M)$ *um elemento* $F(A) \in Obj(N)$*.*

(ii) *Se* $\alpha \in Hom_M(A,B)$ *então* $F(\alpha) \in Hom_N(F(A),F(B))$*.*

(iii) *Se* $A \in Obj(M)$ *então* $F(Id_A) = Id_{F(A)}$*.*

(iv) *Se* $\alpha \in Hom_M(A,B)$ *e* $\beta \in Hom_M(B,C)$ *então* $F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha)$*.*

Exemplo 2.4.4. Toda categoria tem um funtor natural, a saber:

$$\begin{aligned} I_M : M &\longrightarrow M \\ A &\longmapsto A, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_M : Hom_M(A,B) &\longrightarrow Hom_M(I_M(A), I_M(B)) \\ \alpha &\longmapsto \alpha. \end{aligned}$$

No exemplo abaixo descrevemos o funtor localização comutativa.

Exemplo 2.4.5. Sejam R um domínio comutativo e $S \subseteq R$ tal que: $0 \notin S$; $1 \in S$ e $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$.
Um conjunto S com estas propriedades é chamado de Sistema Multiplicativo. Para cada R-módulo A e cada sistema multiplicativo S, pode-se provar que

$$S^{-1}A = \{as^{-1} \ ; \ a \in A \text{ e } s \in S\}$$

é R-módulo com as operações $as^{-1} + bt^{-1} = (at + bs)(st)^{-1}$ e $as^{-1}r = (ar)s^{-1}$. Chamamos $S^{-1}A$ de localização de A segundo o sistema multiplicativo S.
É fácil ver que

$$\begin{aligned} F : \text{ Mod-R } &\longrightarrow \text{ Mod-R} \\ A &\longmapsto S^{-1}A, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F : Hom_R(A,B) &\longrightarrow Hom_R(F(A), F(B)) \\ \alpha &\longmapsto S^{-1}\alpha, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} S^{-1}\alpha : S^{-1}A &\longrightarrow S^{-1}B \\ as^{-1} &\longmapsto \alpha(a)s^{-1}, \end{aligned}$$

é um funtor, chamado localização.

Exemplo 2.4.6. Sejam R um anel e N um R-módulo. Para cada R-módulo M o conjunto $Hom_R(N, M)$ é grupo abeliano, e portanto $\mathbb{Z}$-módulo, com a operação de soma usual de funções.
Assim, podemos relacionar Mod-R e Mod-$\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} F_N = Hom_R(N, -) : \text{ Mod-R } &\longrightarrow \text{ Mod-}\mathbb{Z} \\ M &\longmapsto Hom_R(N, M) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F_N : Hom_R(A, B) &\longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(Hom_R(N, A), Hom_R(N, B)) \\ \alpha &\longmapsto F_N(\alpha), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} F_N(\alpha) : Hom_R(N, A) &\longrightarrow Hom_R(N, B)) \\ \tau &\longmapsto \alpha \circ \tau. \end{aligned}$$

A distributividade de composição em relação à soma de funções assegura que $F_N(\alpha)$ é $\mathbb{Z}$-homomorfismo. Não é difícil ver que F_N é um funtor.

Observamos que o Exemplo 2.4.6 fornece uma maneira de construir famílias de funtores, já que a cada R-módulo N associa um funtor F_N.

Nosso interesse nesta seção é mostrar que a correspondência que associa a cada R-módulo A o seu submódulo singular $Z(A)$ é um funtor na categoria Mod-R, que chamaremos de Funtor Singular. Para isso, fixe um anel R e considere um R-homomorfismo de módulos $f : A \longrightarrow B$. Defina agora

$$\begin{aligned} Z(f) : Z(A) &\longrightarrow Z(B) \\ x &\longmapsto f(x), \end{aligned}$$

ou seja, $Z(f) = f|_{Z(A)}$.
Pelo item (a) do Lema 2.3.1 temos $Z(f)(Z(A)) = f(Z(A)) \subseteq Z(B)$, e então $Z(f)$ está bem definida e é R-homomorfismo.

Proposição 2.4.1. *Para cada anel R, a aplicação*

$$Z: \; Mod\text{-}R \longrightarrow Mod\text{-}R$$
$$A \longmapsto Z(A),$$

$$Z: Hom_R(A,B) \longrightarrow Hom_R(Z(A),Z(B))$$
$$f \longmapsto Z(f),$$

é um funtor.

Demonstração.
Basta provar que $Z(Id_A) = Id_{Z(A)}$ e que $Z(f \circ g) = Z(f) \circ Z(g)$, para quaisquer R-homomorfismos $g : A \longrightarrow B$ e $f : B \longrightarrow C$.
Desde que Z aplicada a um R-homomorfismo é exatamente a restrição deste R-homomorfismo ao submódulo singular do domínio, estas condições são óbvias.

$\square$

Vamos comparar o submódulo singular com o submódulo de torção.

Lembre que se R é um domínio comutativo e M é um R-módulo, então o conjunto

$$T(M) = \{m \in M \;;\; rm = 0 \text{ para algum } r \in R - \{0\}\}$$

é um submódulo de M, chamado de submódulo de torção.

Quando R não é domínio comutativo pode ocorrer que $T(M)$ não é submódulo de M. Por exemplo, para $R = M = \mathbb{Z}_6$ temos $T(M) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$.

Proposição 2.4.2. *Seja R um domínio comutativo. Então:*

(a) $\Re(R)$ coincide com o conjunto dos ideais não nulos de R.

(b) $T(A) = Z(A)$ para todo R-módulo A.

Demonstração.
(a) Seja I um ideal não nulo de R. Dado o ideal não nulo J de R temos $IJ \neq (0)$ pois R é domínio. Além disso, como R é comutativo, vemos que $(0) \neq IJ \subseteq I \cap J$ e, portanto, $I \leq_e R$, isto é, $I \in \Re(R)$.

(b) Se $a \in T(A)$ então existe $r \in R - \{0\}$ tal que $ar = 0$. O ideal $I = rR \in \Re(R)$ por (a) e $aI = (0)$. Logo, $a \in Z(A)$. Reciprocamente, se $a \in Z(A)$ temos $I \in \Re(R)$ tal que $aI = 0$. Como $I \neq (0)$ existe $0 \neq r \in I$, e $ar = 0$. Logo, $a \in T(A)$.

□

A proposição acima, junto com a Proposição 2.4.1 provam o próximo corolário.

Corolário 2.4.1. *Seja R um domínio comutativo. A aplicação*

$$\begin{aligned} T:\ \textit{Mod-}R &\longrightarrow \textit{Mod-}R \\ A &\longmapsto T(A), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T: Hom_R(A,B) &\longrightarrow Hom_R(T(A),T(B)) \\ f &\longmapsto T(f) = f|_{T(A)}, \end{aligned}$$

é um funtor.

□

Podemos dizer, então, que o funtor singular é uma extensão do funtor torção, quando abandonamos a hipótese de R ser domínio comutativo.

Definição 2.4.3. *Um funtor $F : \textit{Mod-}R \longrightarrow \textit{Mod-}R$ é idempotente quando $F(F(A)) = F(A)$, para todo $A \in \textit{Mod-}R$.*

Segue, do item (c) do Lema 2.3.1, que o funtor singular Z e, portanto, o funtor torção T, são idempotentes em suas respectivas categorias.

Definição 2.4.4. *Um funtor $F : \textit{Mod-}R \longrightarrow \textit{Mod-}R$ é chamado de funtor radical quando, para todo $A, B \in \textit{Mod-}R$ e para todo $f \in Hom_R(A,B)$ valem:*

(a) $F(A) \leq A$.

(b) $f(F(A)) \leq F(B)$.

(c) $F\left(\frac{A}{F(A)}\right) = (0)$.

Já vimos, pelo item (a) do Lema 2.3.1, que $f(Z(A)) \leq Z(B)$ e, por definição, temos $Z(A) \leq A$. No entanto, Z não é um funtor radical, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 2.4.7. Tome $R = \mathbb{Z}_4$ e $A = \mathbb{Z}_4$. Sabemos que $\Re(\mathbb{Z}_4) = \{\{\overline{0}, \overline{2}\}, \mathbb{Z}_4\}$ e $Z(\mathbb{Z}_4) = \{\overline{0}, \overline{2}\}$. Tome $\alpha = \overline{\overline{1}} = \overline{1} + Z(\mathbb{Z}_4) \in \frac{\mathbb{Z}_4}{Z(\mathbb{Z}_4)}$. Como $\alpha\{\overline{0}, \overline{2}\} = (\overline{\overline{0}})$ temos que $\alpha \in Z\left(\frac{\mathbb{Z}_4}{Z(\mathbb{Z}_4)}\right)$ e, portanto, $Z\left(\frac{\mathbb{Z}_4}{Z(\mathbb{Z}_4)}\right) \neq (0)$.

Porém, T é um funtor radical.

Proposição 2.4.3. *O funtor torção é um funtor radical.*

Demonstração.
Desde que o funtor Z satisfaz as condições (a) e (b) da Definição 2.4.4, o mesmo vale para o funtor T avaliado na categoria dos módulos sobre domínios comutativos. Resta verificar que $T\left(\frac{A}{T(A)}\right) = (\overline{0})$. Seja então A um R-módulo e $\overline{a} = a + T(A) \in T\left(\frac{A}{T(A)}\right)$. Assim, $a \in A$ e $\overline{a}.r = \overline{0}$ para algum $r \in R - \{0\}$. Pela definição da multiplicação no módulo quociente $\frac{A}{T(A)}$ vem que $\overline{0} = \overline{a}.r = \overline{ar}$, e daí $ar \in T(A)$. Logo, existe $s \in R - \{0\}$ tal que $(ar)s = 0$. Como R é domínio escrevemos $0 = a(rs)$ com $rs \in R - \{0\}$. Segue que $a \in T(A)$ e, portanto, $\overline{a} = a + T(A) = \overline{0}$.

$\square$

Definição 2.4.5. *Os funtores radicais F definidos sobre a categoria de R-módulos, e que satisfazem $F(A) = A \cap F(B)$ para $A, B \in$ Mod-R e $A \leq B$ são chamados radicais de torção.*

Note que, pelo item (b) do Lema 2.3.1 e pela Proposição 2.4.2, T é um radical de torção quando R é domínio comutativo.

Os funtores radicais de torção são funtores idempotentes pois se $A \in$ Mod-R temos $F(A) \leq A$ e daí, $F(F(A)) = F(A) \cap F(A) = F(A)$.

A importância dos radicais de torção está no fato de que, a partir deles, define-se as teorias de torção que levam à construção de módulos quocientes. Este assunto pode ser visto em [7] e [12].

Comparando a Proposição 2.4.3 com o exemplo anterior a esta proposição, vemos que ao passar do funtor torção T para o funtor singular Z, perdemos uma propriedade importante. A saber, T é radical de torção mas Z não é radical de torção.

Veremos que se R é um anel tal que $Z_R(R_R) = (0)$, então o funtor singular é um radical de torção na categoria Mod-R. Os anéis R tais que $Z_R(R_R) = (0)$ são chamados anéis não singulares à direita. Trataremos deles no próximo capítulo.

Teorema 2.4.1. *Seja R um anel tal que $Z_R(R) = (0)$. Então o funtor singular Z : Mod-$R \longrightarrow$ Mod-R é um radical de torção.*

Demonstração.
Seja $A \in$ Mod-R. Pelo que vimos nesta seção basta provar que $Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right) = (0)$. Como $Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right) \leq \frac{A}{Z(A)}$ segue, do segundo Teorema dos Homomorfismos, que existe um R-módulo C tal que $Z(A) \leq C \leq A$ e $\frac{C}{Z(A)} = Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right)$. Vamos provar que $Z(A) \leq_e C$. Seja $M \leq C$, $M \neq (0)$ tal que $M \cap Z(A) = (0)$. Então $M \leq A$ e, pelo item (b) do Lema 2.3.1, $Z(M) = M \cap Z(A) = (0)$. Definimos $\varphi : M \longrightarrow \frac{C}{Z(A)}$ por $\varphi(m) = m + Z(A)$, que é R-monomorfismo pois $Ker(\varphi) = M \cap Z(A) = (0)$. Portanto, $M \simeq \varphi(M) \leq \frac{C}{Z(A)}$. Note também que $Z\left(\frac{C}{Z(A)}\right) = Z\left(Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right)\right) = Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right) = \frac{C}{Z(A)}$. Desta forma, $\frac{C}{Z(A)}$ é R-módulo singular e, como a classe dos módulos singulares é fechada por isomorfismo (item (f) do Lema 2.3.1) e por submódulos (item (b) do Teorema 2.3.2), segue que M é R-módulo singular. Logo, $M = Z(M) = (0)$ e então $Z(A) \leq_e C$.
Suponha agora que $Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right) \neq (0)$. Então $\frac{C}{Z(A)} \neq (0)$ e existe $x \in (C - Z(A))$. Seja $J = \{r \in R\ ;\ xr = 0\} = r_R(x)$. Como $xJ = (0)$ e $x \notin Z(A)$, segue que $J \notin \Re(R)$, isto é, J não é ideal à direita essencial de R. Logo, existe um ideal à direita não nulo I de R tal que $I \cap J = (0)$. Definimos o R-homomorfismo $\psi : I \longrightarrow xI$ por $\psi(k) = xk$. Claro que ψ é sobrejetor e $Ker(\psi) = \{k \in I\ ;\ xk = 0\} = \{k \in I\ ;\ k \in J\} = I \cap J = (0)$. Portanto, ψ é isomorfismo. Mas $Z(I) = I \cap Z_R(R) = I \cap \{0\} = (0)$ e daí $Z(xI) = (0)$. Como $x \in C \subseteq A$, temos que $xI \leq A$ e então $(0) = Z(xI) = xI \cap Z(A)$. Note que $xI \neq (0)$, pois $xI = (0) \Rightarrow I \subseteq J \Rightarrow (0) = I \cap J = I$, o que contradiz o fato de que $I \neq (0)$.
Desta forma, obtivemos um submódulo não nulo xI de C tal que $xI \cap Z(A) = (0)$, contradizendo o fato de $Z(A) \leq_e C$. Portanto, devemos ter $Z\left(\frac{A}{Z(A)}\right) = (0)$.

$\square$

Capítulo 3

IDEAL SINGULAR

Terminamos o capítulo anterior provando que se R é um anel tal que o R-módulo R_R é não singular à direita então o funtor singular $Z:$ Mod-$R \longrightarrow$ Mod-R é um radical de torção. Esta propriedade desperta interesse por anéis tais que $Z_R(R_R) = (0)$. Estes anéis são chamados anéis não singulares à direita, e no outro extremo, quando $Z_R(R_R) = R$, os anéis são chamados anéis singulares à direita.

Ao estudarmos propriedades de um anel R ou de um módulo A sobre R, obtemos mais informações e resultados quando consideramos, separadamente, os casos em que R é anel singular ou não singular à direita. Por isso, é interessante conhecer melhor as propriedades do ideal $Z_R(R_R)$, chamado ideal singular. Faremos isso na primeira seção deste capítulo. A seção seguinte tratará de propriedades dos anéis singulares e anéis não singulares, com destaque para famílias de exemplos. Terminamos o trabalho com um estudo do funtor $Z(.)$ aplicado a ideais unilaterais. O principal resultado desta última seção assegura que se I é ideal unilateral do anel R então o anel semiprimo $I/\beta(I)$ é não singular se, e somente se, o anel semiprimo $I^*/\beta(I^*)$ é não singular.

3.1 Ideal Singular

Lembramos que o conjunto dos ideais à direita essenciais no anel R é denotado por $\Re(R)$. Isto é,

$$\Re(R) = \{I \subseteq R\ ;\ I \leq_e R_R\}.$$

Pelas Proposições 2.3.1 e 2.3.2 aplicadas ao anel R visto como R-módulo à direita, temos que

$$\begin{aligned} Z_R(R) &= \{x \in R \ ; \ xI = (0) \text{ para algum } I \in \Re(R)\} \\ &= \{x \in R \ ; \ r_R(x) \in \Re(R)\} \end{aligned}$$

é um submódulo de R_R e, portanto, é ideal à direita de R.

Na notação acima, destacamos que olhamos R como módulo à direita sobre R. Por isso, usamos a notação

$$Z_r(R) = Z_R(R),$$

onde o índice "r" indica a lateralidade à direita.

Nesta seção mostraremos que o ideal à direita $Z_r(R)$ é um ideal de R, definiremos os anéis singulares e não singulares e mostraremos propriedades de módulos sobre anéis singulares. Verificaremos também que os anéis comutativos com unidade que são não singulares são exatamente os anéis semiprimos, e apresentaremos exemplos.

Proposição 3.1.1. *Se R é um anel então $Z_r(R)$ é ideal de R.*

Demonstração.
Desde que $Z_r(R)$ é submódulo de R_R, já temos que $Z_r(R)$ é ideal à direita de R. Por outro lado, se $r \in R$ e $x \in Z_r(R)$ então $xI = (0)$ para algum $I \in \Re(R)$. Logo, $(rx)I = r(xI) = (0)$, isto é, $rx \in Z_r(R)$.

□

Definição 3.1.1. *O ideal $Z_r(R)$ é chamado ideal singular à direita de R.*

Analogamente, $Z_l(R) = Z_R({}_RR)$ é ideal de R, chamado ideal singular à esquerda de R.

Definição 3.1.2. *Um anel R é dito:*

(a) Não singular à direita quando $Z_r(R) = (0)$.

(b) Singular à direita quando $Z_r(R) = R$.

Trocando $Z_r(R)$ por $Z_l(R)$ na definição acima temos, respectivamente, os anéis não singulares e singulares à esquerda.

Exemplo 3.1.1. Se $R \neq (0)$ é um anel sem divisores de zero então R é não singular à direita e à esquerda.
De fato, para $x \in Z_r(R)$ temos $I \in \Re(R)$ tal que $xI = (0)$. Como $R \neq (0)$ e $I \leq_e R_R$ devemos ter $I \neq (0)$. Logo, existe $0 \neq y \in R$ e $xy = 0$ implica em $x = 0$. Assim, $Z_r(R) = (0)$ e R é anel não singular à direita.
Analogamente, temos $Z_l(R) = (0)$.

Como casos particulares do exemplo acima destacamos:

- Todo domínio é anel não singular à direita e à esquerda.

- $\mathbb{Z}$ e $n\mathbb{Z}$ são anéis não singulares à direita e à esquerda.

Exemplo 3.1.2. Um anel R com unidade $1 \neq 0$ não é singular à direita.
De fato, supondo que $R = Z_r(R)$ temos $1 \in Z_r(R)$. Logo, 1 deve anular um ideal à direita essencial de R. Segue disso que $(0) \leq_e R_R$ e, portanto, $R = (0)$ o que é uma contradição.

De certa maneira, o exemplo anterior mostra que um estudo geral do ideal singular à direita deve ser feito em anéis onde não exigimos, a priori, a existência de elemento unidade.

Exemplo 3.1.3. Seja $R = \overline{2}.\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$.
Já vimos no Exemplo 2.2.3 que $I = \overline{4}.\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{4}\} \in \Re(R)$. É fácil ver que todos os elementos de R anulam I. Assim, $Z_r(R) = R$ e R é um anel singular.

Outros exemplos de anéis singulares à direita serão apresentados na próxima seção.

Exemplo 3.1.4. Vimos no Exemplo 2.3.4 que o $\mathbb{Z}_4$-módulo $\mathbb{Z}_4$ não é singular e também não é não singular pois $Z(\mathbb{Z}_4) = \{\overline{0}, \overline{2}\}$. Logo, $\mathbb{Z}_4$ é exemplo de anel que não é singular e também não é não singular, tanto à direita quanto à esquerda.

Neste trabalho temos interesse em estudar o ideal singular à direita, para conhecer anéis singulares e não singulares à direita. Chamamos a atenção para o fato de que trocar a lateralidade direita por esquerda não produz os mesmos resultados. Um exemplo disso é que se K é um corpo, então o anel $R = \begin{bmatrix} K & 0 \\ \frac{K[x]}{(x^2)} & \frac{K[x]}{(x^2)} \end{bmatrix}$ é não singular à direita, mas não é não singular à esquerda ([6], p.36).

Notamos que, como consequência do item (c) do Lema 2.3.1, sempre temos $Z_R(Z_R(R_R)) = Z_R(R_R)$, isto é, $Z_R(Z_r(R)) = Z_r(R)$. Portanto, o ideal singular à direita do anel R é um R-módulo à direita singular.

A próxima proposição mostra que isomorfismos de anéis preservam anéis singulares e não singulares.

Proposição 3.1.2. *Seja $f : R \longrightarrow S$ um monomorfismo de anéis. Então:*

(a) $f(Z_r(R)) = Z_r(f(R))$.

(b) Se f é isomorfismo vale:

$$Z_r(R) = (0) \Leftrightarrow Z_r(S) = (0) \quad e$$

$$Z_r(R) = R \Leftrightarrow Z_r(S) = S.$$

Demonstração.
(a) Vamos verificar primeiro que $f(Z_r(R)) \subseteq Z_r(f(R))$. Seja $x \in Z_r(R)$. Então $xI = (0)$ para algum $I \in \Re(R)$. Desde que I é ideal à direita de R, temos que $f(I)$ é ideal à direita de $f(R)$. Veremos que $f(I) \leq_e f(R)$. Seja T um ideal não nulo de $f(R)$. Então $f^{-1}(T)$ é ideal não nulo de R. Como $I \leq_e R$, existe $0 \neq y \in f^{-1}(T) \cap I$. Logo, $0 \neq f(y) \in f(I) \cap T$ e $f(I) \leq_e f(R)$. Assim, $f(I) \in \Re(f(R))$ e $f(x)f(I) \subseteq f(xI) = (0)$, provando que $f(x) \in Z_r(f(R))$.
Para mostrar a outra inclusão, vemos que $f^{-1} : f(R) \longrightarrow R$ é monomorfismo e, pela primeira parte da demonstração, temos $f^{-1}(Z_r(f(R)) \subseteq Z_r(f^{-1}(f(R))) = Z_r(R)$. Aplicando f obtemos que $Z_r(f(R)) \subseteq f(Z_r(R))$, como queríamos demonstrar.

(b) Como $f(R) = S$, o resultado segue diretamente de (a), pois $f(Z_r(R)) = Z_r(f(R)) = Z_r(S)$.

□

Conforme comentamos no início do capítulo podemos obter mais informações sobre um R-módulo quando sabemos que R é um anel singular ou não singular à direita.

A partir de agora destacaremos alguns resultados neste sentido. Lembre também do Teorema 2.4.1 que diz que quando o anel R é não singular à direita, então o funtor singular Z é um radical de torção.

Iniciamos provando que quando $Z_r(R) = (0)$, valem as equivalências do Lema 2.1.1, mesmo que R não tenha unidade. Na verdade, a proposição abaixo fornece um resultado mais geral, para módulos não singulares.

Proposição 3.1.3. *Seja A um R-submódulo de B. Se B é R-módulo não singular são equivalentes:*

(i) $A \leq_e B$.

(ii) Todo R-submódulo cíclico não nulo de B tem intersecção não nula com A.

(iii) Se $0 \neq b \in B$ então existe $x \in R$ tal que $0 \neq bx \in A$.

Demonstração.
Já vimos no Lema 2.1.2 que as implicações $(iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii)$ valem sempre.
$(i) \Rightarrow (iii)$ Seja $0 \neq b \in B$. Pode ocorrer $bR \neq (0)$ ou $bR = (0)$. Se $bR = (0)$ então b anula o ideal essencial R de R e, portanto, $b \in Z_R(B) = (0)$, que é uma contradição. Assim, devemos ter $bR \neq (0)$ e, como $A \leq_e B$, vem que $A \cap bR \neq (0)$. Daí, existe $x \in R$ tal que $0 \neq bx \in A$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Novamente tome $0 \neq b \in B$. Como vimos acima, não pode ocorrer $bR = (0)$ pois $Z_R(B) = (0)$. Logo, $bR \neq (0)$ e, pela hipótese (ii) temos $bR \cap A \neq (0)$. Isso fornece $x \in R$ tal que $0 \neq bx \in A$.

□

Corolário 3.1.1. *Seja I um ideal à direita do anel R. Se $Z_r(R) = (0)$ então são equivalentes:*

(i) $I \in \Re(R)$.

(ii) Todo ideal à direita principal não nulo de R tem intersecção não nula com I.

(iii) Se $0 \neq b \in R$ então existe $x \in R$ tal que $0 \neq bx \in I$.

Demonstração.

Aplique a proposição acima com $B = R$ e $A = I$.

$\square$

Veremos agora um resultado análogo ao item (a) do Teorema 2.3.1, para caracterizar um R-módulo singular quando $Z_r(R) = (0)$.

Proposição 3.1.4. *Seja R um anel tal que $Z_r(R) = (0)$. Então um R-módulo à direita A é singular se, e somente se, $Hom_R(A, C) = (0)$ para todo R-módulo à direita não singular C.*

Demonstração.

$(\Rightarrow)$ Desde que $Z_R(C) = (0)$ e $Z_R(A) = A$ vem, do item (a) do Teorema 2.3.1, que $Hom_R(A, C) = (0)$.

$(\Leftarrow)$ Como $Z_r(R) = (0)$ temos, do Teorema 2.4.1, que $Z_R\left(\frac{A}{Z_R(A)}\right) = (0)$, isto é, $\frac{A}{Z_R(A)}$ é R-módulo à direita não singular. Aplicando nossa hipótese vem que $Hom_R\left(A, \frac{A}{Z_R(A)}\right) = (0)$. Em particular,

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow \frac{A}{Z_R(A)} \\ x &\longmapsto \overline{x}, \end{aligned}$$

é homomorfismo sobrejetor e nulo. Segue que $(0) = \varphi(A) = \frac{A}{Z_R(A)}$. Logo, $A = Z_R(A)$.

$\square$

Observe que, na demonstração da proposição anterior, só usamos a hipótese de R ser anel não singular à direita para mostrar a recíproca da implicação.

Vimos nos Exemplos 2.3.8 e 2.3.10 que a classe dos módulos singulares à direita não é fechada por extensões essenciais e extensões de módulos. Trabalhando sobre anéis não singulares à direita temos:

Proposição 3.1.5. *Seja R um anel tal que $Z_r(R) = (0)$. Então a classe dos módulos singulares à direita sobre R é fechada por extensões essenciais e extensões de módulos.*

Demonstração.

Extensões de Módulos: Seja $0 \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ sequência exata de R-módulos à direita onde A e C são singulares, isto é, $Z_R(C) = C$ e $Z_R(A) =$

A. Devemos provar que B é singular mas, pela proposição anterior, basta mostrar que $Hom_R(B, M) = (0)$ para todo R-módulo à direita não singular M. Aplicando a proposição anterior para os módulos singulares A e C vem que $Hom_R(A, M) = Hom_R(C, M) = (0)$. Por ([6], p.8) a sequência

$$0 \longrightarrow Hom_R(A, M) \longrightarrow Hom_R(B, M) \longrightarrow Hom_R(C, M)$$

é exata. Portanto, $Hom_R(B, M) = (0)$.

Extensões Essenciais: Seja $A \leq_e B$ com $Z_R(A) = A$. Pelo Corolário 2.3.1 $Z_R(\frac{B}{A}) = \frac{B}{A}$. Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow A \hookrightarrow B \longrightarrow \frac{B}{A} \longrightarrow 0.$$

Como A e $\frac{B}{A}$ são R-módulos singulares à direita segue, do item acima, que B é R-módulo singular à direita.

$\square$

Note que a classe dos R-módulos singulares não é fechada por produto direto, mesmo quando $Z_r(R) = (0)$. O mesmo Exemplo 2.3.9 mostra isso. Da mesma maneira, a classe dos R-módulos não singulares não é fechada por módulo quociente mesmo que $Z_r(R) = (0)$, conforme Exemplo 2.3.7.

Não é verdade, em geral, que se $I, J \in \Re(R)$ então $IJ \in \Re(R)$. Como exemplo podemos tomar $R = \mathbb{Z}_4$ e $I = J = \{\overline{0}, \overline{2}\}$. Já vimos no Exemplo 2.3.4 que $I = J \in \Re(\mathbb{Z}_4)$, mas $IJ = \{\overline{0}\}$ que não é essencial em $\mathbb{Z}_4$.

Para o caso dos anéis não singulares à direita temos a proposição seguinte:

Proposição 3.1.6. *Seja R um anel tal que $Z_r(R) = (0)$. Então $\Re(R)$ é fechado por produtos.*

Demonstração.

Sejam $I, J \in \Re(R)$. Como $I \leq_e R_R$, segue do Corolário 2.3.1 que $\frac{R}{I}$ é singular. A igualdade $\left(\frac{I}{IJ}\right) J = (0)$ diz que todo elemento de $\frac{I}{IJ}$ anula o ideal essencial J. Logo, $Z_R\left(\frac{I}{IJ}\right) = \frac{I}{IJ}$. É fácil ver que $\varphi : \frac{R}{IJ} \longrightarrow \frac{R}{I}$ com $\varphi(\overline{x}) = \overline{\overline{x}}$ é um homomorfismo de

R-módulos com $Ker(\varphi) = \frac{I}{IJ}$. Assim, temos a sequência exata de R-módulos

$$0 \longrightarrow \frac{I}{IJ} \hookrightarrow \frac{R}{IJ} \xrightarrow{\varphi} \frac{R}{I} \longrightarrow 0.$$

Como $\frac{I}{IJ}$ e $\frac{R}{I}$ são singulares, usamos a Proposição 3.1.5 para garantir que $\frac{R}{IJ}$ é singular. Agora temos $IJ \leq R_R$, R não singular e $\frac{R}{IJ}$ singular que, pela Proposição 2.3.3, leva a $IJ \leq_e R$.

□

Podemos obter uma caracterização para os anéis não singulares à direita, usando módulos projetivos.

Lembramos que existem várias equivalências para a definição de módulos projetivos (Ver [6], p.9), mas só usaremos o fato que um R-módulo P é projetivo quando é isomorfo a um somando direto de um R-módulo livre.

Teorema 3.1.1. *Para um anel R são equivalentes:*

(i) $Z_r(R) = (0)$.

(ii) Todo R-módulo à direita projetivo é não singular.

Demonstração.
$(ii) \Rightarrow (i)$ É imediato, pois R_R é um módulo projetivo por ser livre. Logo, $(0) = Z_R(R_R) = Z_r(R)$.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja P um R-módulo à direita projetivo. Então existem R-módulos à direita P', Q e F tais que F é livre, $F = P' \oplus Q$ e $P \simeq P'$. Seja $\beta = \{b_\alpha\}_{\alpha \in L} \subseteq F$ uma base livre de F, isto é, $\{b_\alpha\}_{\alpha \in L}$ é um conjunto linearmente independente sobre R e $F = \bigoplus_{\alpha \in L} b_\alpha R$. É claro que

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : R &\longrightarrow b_\alpha R \\ r &\longmapsto b_\alpha r, \end{aligned}$$

é R-homomorfismo sobrejetor e $\varphi_\alpha(r) = 0 \Rightarrow b_\alpha r = 0 \Rightarrow r = 0$, pois $\{b_\alpha\}_{\alpha \in L}$ é linearmente independente sobre R. Portanto, $R \simeq b_\alpha R$. Desde que $Z_R(R_R) = Z_r(R) = (0)$ segue, do item (f) do Lema 2.3.1, que $b_\alpha R$ é R-módulo não singular à direita. Mas, pelo item (a) do Teorema 2.3.2, a classe dos módulos não singulares é fechada por soma direta e por submódulos e, então, $\bigoplus_{\alpha \in L} b_\alpha R = F = P' \oplus Q$ é R-módulo não singular à direita e $P' \simeq P$ é R-módulo não singular à direita. Aplicando novamente o item (f) do Lema 2.3.1 concluímos que P é R-módulo não singular à direita.

$\square$

No caso comutativo com unidade, os anéis não singulares (à direita) são exatamente os anéis semiprimos.

Teorema 3.1.2. *Seja R um anel comutativo com unidade. São equivalentes:*

(i) $Z_r(R) = (0)$.

(ii) *R é anel semiprimo.*

Demonstração.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja I um ideal de R tal que $I^2 = (0)$. Seja J um ideal à direita de R, maximal com relação à propriedade $I \cap J = (0)$. Então $I + J = I \oplus J \leq_e R_R$.
Mas $I(I \oplus J) = (0)$ pois $I^2 = (0)$ e $IJ \subseteq I \cap J = (0)$. Daí, $I \leq Z_r(R) = (0)$. Logo $I = (0)$ e, portanto, R é anel semiprimo.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponha que $Z_r(R) \neq (0)$. Então existe $0 \neq x \in R$ tal que $xI = (0)$ para algum $I \in \Re(R)$. Como $I \leq_e R_R$, $0 \neq x \in R$ e R tem unidade segue, do Lema 2.1.1, que existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in I$. Logo, $xr \in I \cap xR$ e $I \cap xR$ é ideal não nulo de R. Afirmamos que $(xR \cap I)^2 = (0)$. De fato, para $u = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in (xR \cap I)^2$, $a_i = xr_i \in xR \cap I$ e $b_i = xs_i \in xR \cap I$ com $r_i, s_i \in R$ temos, pela comutatividade de R, $a_i b_i = x.(r_i x s_i) \in xI = (0)$, pois $r_i \in R$ e $xs_i \in I$. Obtivemos, assim, um ideal não nulo $J = xR \cap I$ de R tal que $J^2 = (0)$. Portanto, R não é anel semiprimo, contradizendo nossa hipótese.

$\square$

Os resultados anteriores mostram as vantagens de conhecer anéis não singulares à direita. Veremos agora que, a partir de um anel não singular à direita R, podemos produzir R-módulos não singulares e novos anéis não singulares à direita. Convém lembrar que $M_{n\times n}(R)$ é R-módulo à direita com a operação

$$M_{n\times n}(R) \times R \longrightarrow M_{n\times n}(R)$$
$$((a_{ij}), r) \longmapsto (a_{ij} r).$$

Proposição 3.1.7. *Seja R um anel. São equivalentes:*

(i) $Z_r(R) = (0)$.

(ii) $Z_R(M_{n\times n}(R)) = (0)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.
Fazendo $n = 1$ verifica-se claramente que $(ii) \Rightarrow (i)$.
Para ver que $(i) \Rightarrow (ii)$ considere $M = (m_{ij}) \in Z_R(M_{n\times n}(R))$. Então $MI = (0)$ para algum $I \in \Re(R)$. Para cada $a \in I$ temos $(0) = M.a = (m_{ij})a = (m_{ij}a)$, implicando em $m_{ij}I = (0)$. Desde que $I \in \Re(R)$ segue que $m_{ij} \in Z_R(R_R) = Z_r(R) = (0)$.
Portanto, $M = (0)$.

□

Como informação, citamos que quando R tem unidade vale a equivalência

$$Z_r(R) = (0) \Leftrightarrow Z_r(M_{n\times n}(R)) = (0),$$

como pode ser visto em ([6], p.34).

3.2 Propriedades de Anéis Singulares e Anéis Não Singulares

O objetivo desta seção é apresentar famílias de exemplos de anéis singulares e não singulares à direita, bem como mostrar que as classes formadas por estes anéis não são hereditárias. Seguiremos o exposto em ([5], section 2) e usaremos resultados sobre anéis semiprimos e sobre o radical primo, vistos no Capítulo 1.

Mantemos as seguintes notações: R é um anel não necessariamente comutativo e possivelmente sem unidade, $R^* = \mathbb{Z} \times R$ é o anel com unidade (1,0) construído a partir de R e, para cada $x \in R$, consideramos $x^* = (0, x) \in R^*$. Escrevemos $r_R(x)$ para indicar $ann_R(x)$. Quando não houver possibilidade de confusão, escreveremos $ann_r(x) = r(x)$.

Iniciamos com a definição abaixo que se faz necessária para a próxima proposição.

Definição 3.2.1. *O anel R é um nil anel se todo elemento $a \in R$ é nilpotente, isto é, se existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tal que $a^n = 0$.*

Um anel com unidade não é nil anel. Um anel sem unidade pode ser ou não nil anel.

Exemplo 3.2.1. O anel $R = \overline{2}.\mathbb{Z}_4$ é nil anel e $R = \overline{2}.\mathbb{Z}_6$ não é nil anel.

Proposição 3.2.1. *Se R é nil anel comutativo então R é anel singular.*

Demonstração.
Devemos mostrar que $R \subseteq Z(R)$. Pela Proposição 2.3.2, isto equivale a mostrar que $r(a) \leq_e R_R$, para cada $a \in R$. Mas, pelo Lema 2.2.3, basta provar que para $b \in R$, $b \neq 0$, vale $bR^* \cap r(a) \neq (0)$. Sejam então $a \in R$ e $0 \neq b \in R$. Como R é nil anel, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq 1$, tal que $a^{n_1} = 0$. Daí, $a^{n_1}bR^* = (0)$ e podemos escolher n como o menor natural tal que $a^n bR^* = (0)$. Note que $n \neq 0$ pois, caso contrário, teríamos $(1,0)(0,b).R^* = (0,0)$ implicando em $(0,b) = (0,0)$. Mas isso não é possível pois $b \neq 0$. Logo, $n \neq 0$ e $n-1 \in \mathbb{N}$. Pela minimalidade de n temos $(0) \neq a^{n-1}bR^* \subseteq r(a)$. Pela Proposição 1.1.2, a comutatividade de R assegura a comutatividade de R^*, e então $(0) \neq a^{n-1}bR^* = ba^{n-1}R^* \subseteq bR^*$. Isso prova que $bR^* \cap r(a) \neq (0)$.

□

Exemplo 3.2.2. Segue, da proposição anterior e do Exemplo 3.2.1, que $\overline{2}.\mathbb{Z}_4$ é anel singular. Analogamente, $R = \overline{2}.\mathbb{Z}_n$ é anel singular quando n é potência de 2.

Vimos, assim, que a classe dos anéis comutativos e nis é singular. Apresentaremos, através da próxima proposição, uma classe de anéis não singulares, a saber, a classe dos anéis fortemente primos. Antes, porém, precisamos da definição de anel fortemente primo.

Definição 3.2.2. *Um anel R é dito fortemente primo à direita se todo ideal não nulo I de R contém um subconjunto finito F tal que $r_R(F) = (0)$.*

Exemplo 3.2.3. Se R é um anel sem divisores de zero então R é anel fortemente primo.
De fato, seja I um ideal não nulo de R e tome $0 \neq n \in I$. Escolhendo $F = \{n\} \subseteq I$ temos $r_R(F) = \{r \in R\ ;\ nr = 0\} = (0)$.

Proposição 3.2.2. *Se R é anel fortemente primo então R é anel não singular.*

Demonstração.
Suponhamos que $Z(R) \neq (0)$. Pela Proposição 3.1.1, $Z(R)$ é ideal de R e, como R é

anel fortemente primo, existe $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\} \subseteq Z(R)$ tal que $r_R(F) = (0)$. Como $F \subseteq Z(R)$ temos que $f_i \in Z(R)$, $i = 1, 2, ..., n$ e, pela Proposição 2.3.2, $r_R(f_i) \in \Re(R)$, isto é, $r_R(f_i)$ é ideal essencial de R. Pelo item (c) da Proposição 2.2.1 segue que $\bigcap_{i=1}^{n} r(f_i) \in \Re(R)$. É fácil ver que $r_R(F) = \bigcap_{i=1}^{n} r(f_i)$.
Deste modo, $(0) = r_R(F)$ é ideal à direita essencial de R e, conseqüentemente, $R = (0)$. Obtemos assim que $Z(R) = (0)$, o que é uma contradição, pois supomos $Z(R) \neq (0)$. Logo, R é anel não singular.

$\square$

Veremos agora que a Proposição 3.2.1 não vale no caso em que R é anel sem unidade e não comutativo. Para este propósito, precisamos da definição de anel nilpotente, que claramente se aplica apenas aos anéis sem unidade.

Definição 3.2.3. *Seja R um anel. Dizemos que R é anel nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $R^n = (0)$.*

Note que se R é anel nilpotente então R é nil anel. A recíproca desta afirmação não é verdadeira. Um contra-exemplo pode ser visto em ([9], p.31).

Proposição 3.2.3. *Seja R um anel finitamente gerado e não nilpotente. Então existe um ideal M de R tal que $\frac{R}{M}$ é fortemente primo.*

Demonstração.
Inicialmente usaremos o Lema de Zorn para provar que existe um ideal M de R, maximal com respeito à propriedade "$R^n \nsubseteq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$".
Seja $\Im = \{M \subseteq R\ ;\ M$ é ideal bilateral de R e $R^n \nsubseteq M, \forall n \in \mathbb{N}^*\}$, ordenado por inclusão. Sabemos que R é não nilpotente, então $R^n \neq (0)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Como (0) é ideal bilateral de R e $R^n \nsubseteq (0)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, temos que $(0) \in \Im$ e, portanto, $\Im \neq \emptyset$. Seja $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ um subconjunto totalmente ordenado de $\Im$. Tomemos $\widehat{M} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \subseteq R$.
Desde que $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é totalmente ordenado temos que $\widehat{M}$ é um ideal bilateral de R. Além disso, $R^n \nsubseteq \widehat{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. De fato, suponhamos, por absurdo, que exista $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $R^{n_0} \subseteq \widehat{M}$. Como, pelo Teorema 1.2.1, R^{n_0} é finitamente gerado então existe um conjunto finito $J \subseteq R^{n_0}$ tal que $[J] = R^{n_0}$. Desde que J é finito e $J \subseteq R^{n_0} \subseteq \widehat{M} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $J \subseteq M_{\lambda_0}$. Mas M_{λ_0} é ideal de R e então $R^{n_0} = [J] \subseteq M_{\lambda_0}$, o que contradiz o fato de que $M_{\lambda_0} \in \Im$. Portanto, $\widehat{M} \in \Im$. É claro que $\widehat{M}$ é cota superior para a família $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ e então, pelo Lema de Zorn, $\Im$ possui um elemento

maximal M.

Para ver que o anel $\frac{R}{M}$ é fortemente primo, tome $\widehat{I}$ um ideal não nulo de $\frac{R}{M}$. Então $\hat{I} = \frac{I}{M}$, onde I é ideal bilateral de R. Notemos que $M \subsetneq I$ pois $\frac{I}{M} \neq (0)$. Pela maximalidade de M, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $R^n \subseteq I$. Seja F um conjunto finito de geradores de R^n, que existe pelo Teorema 1.2.1. Assim, $F \subseteq R^n \subseteq I$ e daí $\widehat{F} = \frac{F+M}{M} \subseteq \frac{I}{M}$, pois se $u \in \widehat{F}$ então $u = \overline{f+m} = \overline{f} + \overline{m} = \overline{f}$ e $\overline{f} \in \frac{I}{M}$ pois $f \in I$.

Afirmamos que $\widehat{F}$ é finito. Para tal, basta verificar que

$$g : F \longrightarrow \widehat{F}$$
$$x \longmapsto \overline{x}$$

é sobrejetora. Dado $\overline{x+m} \in \widehat{F}$ temos $\overline{x+m} = \overline{x} = g(x)$ com $x \in F$.

Verifiquemos agora que $r_{\frac{R}{M}}(\frac{F+M}{M}) = r_{\frac{R}{M}}(\frac{R^n+M}{M})$.

A inclusão $r_{\frac{R}{M}}(\frac{R^n+M}{M}) \subseteq r_{\frac{R}{M}}(\frac{F+M}{M})$ é imediata pois $\frac{F+M}{M} \subseteq \frac{R^n+M}{M}$. Para a outra inclusão lembre que se $\overline{r} \in r_{\frac{R}{M}}(\frac{F+M}{M})$ então $\overline{v}.\overline{r} = \overline{0}$, $\forall v \in F$. Seja $\overline{u} \in (\frac{R^n+M}{M})$. Então $\overline{u} = \overline{\alpha}$, para $\alpha \in R^n$. Como vimos na seção 1.2, $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{t} \prod\limits_{j=1}^{l_t} a_{j_i}$ com $a_{j_i} \in F$. Desde que $\overline{a_{j_i} r} = \overline{0}$ temos $\overline{\alpha r} = \overline{0}$. Logo, $\overline{ur} = \overline{0}$ e $\overline{r} \in r_{\frac{R}{M}}(\frac{R^n+M}{M})$.

Desde que $\frac{R^n+M}{M}$ é ideal bilateral de $\frac{R}{M}$ temos que $r_{\frac{R}{M}}(\frac{R^n+M}{M})$ é ideal bilateral de $\frac{R}{M}$, e então existe um ideal J de R contendo M tal que $\frac{J}{M} = r_{\frac{R}{M}}(\frac{R^n+M}{M})$. Se $M \subsetneqq J$ então a maximalidade de M implica na existência de $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $R^m \subseteq J$. Daí $R^{n+m} = R^n.R^m \subseteq R^n.J \subseteq M$, contradizendo a escolha de M.

Esta última inclusão $R^n.J \subseteq M$ justifica-se pois, como $r_{\frac{R}{M}}(\frac{R^n+M}{M}) = \frac{J}{M}$ sabemos que para $j \in J$ e $\alpha \in R^n$ temos $\overline{j} \in r_{\frac{R}{M}}(\frac{R^n+M}{M})$ e $\overline{\alpha} \in (\frac{R^n+M}{M})$.

Logo, $\overline{\alpha}.\overline{j} = \overline{0}$, isto é, $\alpha.j \in M$. Assim, devemos ter $M = J$, o que leva a

$$(0) = \frac{J}{M} = r_{\frac{R}{M}}\left(\frac{R^n+M}{M}\right) = r_{\frac{R}{M}}\left(\frac{F+M}{M}\right) = r_{\frac{R}{M}}(\widehat{F}).$$

Portanto, $\frac{R}{M}$ é fortemente primo.

□

Segue, da Proposição 3.2.2, que para o ideal M obtido na proposição anterior temos que $\frac{R}{M}$ é anel não singular.

Proposição 3.2.4. *Seja R um anel finitamente gerado não nilpotente com ideal M tal que $\frac{R}{M}$ é fortemente primo. Se R é nil anel então $\frac{R}{M}$ é anel nil não singular.*

Demonstração.
Já vimos que $\frac{R}{M}$ é não singular. Para ver que $\frac{R}{M}$ é nil, tome $\overline{r} \in \frac{R}{M}$. Então $\overline{r} = r + M$, com $r \in R$. Como R é nil anel, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $r^n = 0$. Assim, $(\overline{r})^n = \overline{r^n} = \overline{0}$, isto é, $\overline{r}$ é nilpotente e, portanto, $\frac{R}{M}$ é nil anel.

□

Concluímos, assim, que se R é nil anel finitamente gerado e não nilpotente, então $\frac{R}{M}$ é nil anel e não singular. Mas a Proposição 3.2.1 assegura que todo anel comutativo e nil é singular. Portanto segue, da conclusão acima, que a hipótese de o anel ser comutativo é essencial para a Proposição 3.2.1.

A próxima proposição nos apresenta uma outra classe de anéis não singulares, a saber, a classe dos anéis reduzidos.

Definição 3.2.4. *Um anel R é reduzido quando não tem elementos nilpotentes não nulos, isto é, se $a \in R$ e $a^n = 0$, para $n \in \mathbb{N}^*$, então $a = 0$.*

O lema abaixo diz que podemos trocar n por 2 na definição de anel reduzido.

Lema 3.2.1. *Seja R um anel. São equivalentes:*

(i) R é anel reduzido.

(ii) Se $a \in R$ e $a^2 = 0$ então $a = 0$.

Demonstração.
$(i) \Rightarrow (ii)$ É óbvio.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponha que R não seja reduzido. Então existe $0 \neq x \in R$ tal que $x^m = 0$ para algum $m \in \mathbb{N}^*$. Seja n o menor expoente tal que $x^n = 0$. Claro que $n > 1$. Assim, $2n - 2 \geq n$ e $0 = x^{2n-2} = (x^{n-1})^2$.
Pela hipótese (ii) temos $x^{n-1} = 0$, o que contradiz a minimalidade de n.

□

Lembre do Capítulo 1, que um anel é semiprimo quando não possui ideais nilpotentes não nulos. Vamos relacionar anéis reduzidos com anéis semiprimos.

Lema 3.2.2. *Se R é anel reduzido então R é anel semiprimo.*

Demonstração.
Vamos supor que R não seja anel semiprimo. Então existem I, ideal não nulo de R, e

$n \in \mathbb{N}^*$ tal que $I^n = (0)$. Como $(0) \neq I$, existe $0 \neq a \in I$. Mas $a^n \in I^n = (0)$. Segue que $a^n = 0$ e, deste modo, a^n é um elemento nilpotente e não nulo de R. Isto leva a um absurdo pois, por hipótese, R é um anel reduzido.

□

Lema 3.2.3. *Se R é anel reduzido então R^* é anel reduzido.*

Demonstração.
Segue do item (c) da Proposição 1.1.2.

□

Corolário 3.2.1. *Se R é anel reduzido então R^* é anel semiprimo.*

Demonstração.
Basta aplicar, em ordem, os Lemas 3.2.3 e 3.2.2.

□

Podemos agora enunciar a proposição que nos garante que a classe dos anéis reduzidos é não singular.

Proposição 3.2.5. *Se R é anel reduzido então R é não singular.*

Demonstração.
Suponha $0 \neq a \in Z(R)$. Pela Proposição 2.3.2 $r(a) \in \Re(R)$. Pelo Lema 2.2.3 (iii) temos $aR^* \cap r(a) \neq (0)$.
Seja $0 \neq x \in aR^* \cap r(a)$, $x = ay$, $y \in R^*$. Então $x = ay \in r(a)$ implica em $ax = a^2y = 0$. Como os elementos de $(ayRa)^2$ são somas de parcelas do tipo $ayr_1(aay)r_2a$ com $r_1, r_2 \in R$, segue que $(ayRa)^2 = (0)$. Seja $ayra \in ayRa \subseteq R$. Como $(ayra)^2 = 0$ e R é anel reduzido temos $ayra = 0$ e, portanto, $ayRa = (0)$. Segue que $(0) = (ayRay) = xRx$. Mas, pelo Lema 3.2.2, R é semiprimo e então $x = 0$, pelo Corolário 1.3.2. Esta contradição mostra que devemos ter $Z(R) = (0)$.

□

Um dos resultados sobre a classe dos anéis singulares e a classe dos anéis não singulares estabelece que elas são fechadas por produtos e por somas diretas. Enunciamos abaixo esta proposição, a qual utilizaremos no decorrer do trabalho.

Proposição 3.2.6. *Seja $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma família de anéis. Então:*

a) $Z\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in\Lambda} Z(R_\alpha)$.

b) $Z\left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha\right) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} Z(R_\alpha)$.

Demonstração.
(a) Vamos primeiramente mostrar que $Z\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha\right) \subseteq \prod_{\alpha\in\Lambda} Z(R_\alpha)$. Seja $a \in Z\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha\right)$. Isto implica que $a = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod R_\alpha$ e $a.I = (0)$, para algum $I \in \Re\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha\right)$. Vimos, pelo item (a) da Proposição 2.2.5, que para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $I_\alpha \leq_e R_\alpha$, tal que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \subseteq I$. Assim, $(0) = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}.\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$. Fixemos $\alpha \in \Lambda$. Para cada $x \in I_\alpha$ temos $u = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$, quando $x_\alpha = x$ e $x_\lambda = 0$ para $\lambda \neq \alpha$. Então $(0) = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}.u$ implica que $a_\alpha.x_\alpha = 0$ e assim $(a_\alpha).x = 0$. Logo, $a_\alpha.I_\alpha = (0)$ e então $a_\alpha \in Z(R_\alpha)$. Portanto, $a = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} Z(R_\alpha)$. Para mostrar a outra inclusão, seja $a \in \prod_{\alpha\in\Lambda} Z(R_\alpha)$. Isto implica que $a = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$ e $a_\alpha \in Z(R_\alpha)$, $\forall \alpha \in \Lambda$. Como $a_\alpha \in Z(R_\alpha)$, então $a_\alpha.I_\alpha = (0)$ para algum $I_\alpha \in \Re(R_\alpha)$. Pela Proposição 2.2.3 temos que $I = \prod_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \in \Re\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha\right)$. Então $a.I = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}.\prod_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha = \prod_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha.I_\alpha = (0)$ implicando que $a \in Z\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha\right)$.

(b) Para mostrar que $Z\left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha\right) \subseteq \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} Z(R_\alpha)$, tomemos $a = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in Z\left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha\right)$. Isto implica que $a \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$ e $a.I = (0)$ para algum $I \leq_e \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$. Pelo item (b) da Proposição 2.2.5 $I \in \Re\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha\right)$ e, pelo item (a) da mesma proposição, vemos que para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $I_\alpha \leq_e R_\alpha$ tal que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \subseteq I$. Assim $(a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}.\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha = (0)$. Fixemos $\alpha \in \Lambda$. Vamos ver que $a_\alpha.I_\alpha = (0)$. Teremos, assim, que $a_\alpha \in Z(R_\alpha)$ pois $I_\alpha \leq_e R_\alpha$. Isso conclui a prova pois implica em $a = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \bigoplus Z(R_\alpha)$. Dado $x \in I_\alpha$, tome $u = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$ definido por $x_\alpha = x$ e $x_\lambda = 0$ para $\lambda \neq \alpha$. Como $(a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}.\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha = (0)$ então $(0) = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}.u$ implica que $a_\alpha.x_\alpha = 0$, ou seja, $a_\alpha.x = 0$. Logo, $a_\alpha.I_\alpha = (0)$, isto é, $a_\alpha \in Z(R_\alpha)$ pois $I_\alpha \leq_e R_\alpha$. Portanto, $a = (a_\alpha) \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} Z(R_\alpha)$.

Mostremos agora que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} Z(R_\alpha) \subseteq Z\left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha\right)$. Seja $a \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} Z(R_\alpha)$. Temos que $a = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha$ e $a_\alpha \in Z(R_\alpha)$, $\forall \alpha \in \Lambda$.
Assim, para cada α existe $I_\alpha \in \Re(R_\alpha)$ tal que $a_\alpha.I_\alpha = (0)$. Pela Proposição 2.2.4, $I = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \in \Re\left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha\right)$ e, então, $a.I = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}.\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha I_\alpha = (0)$, implicando

em $a \in Z\left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} R_\alpha\right)$.

$\square$

Como conseqüência obtemos o seguinte:

Corolário 3.2.2. *As classes dos anéis singulares e dos anéis não singulares são fechadas por produtos diretos e por somas diretas.*

Demonstração.
Segue da Proposição 3.2.6.

$\square$

Destacamos, entretanto, que as classes dos anéis singulares e não singulares não são fechadas por imagens homomórficas. Os próximos exemplos justificam esta afirmação.

Exemplo 3.2.4. A classe dos anéis não singulares não é homomorficamente fechada. Sejam K um corpo e $xK[x]$ o anel dos polinômios com termo constante zero, sobre K. Inicialmente mostremos que o anel $xK[x]$ é não singular. Tome $p \in xK[x]$, $p \neq 0$. Se $p^2 = 0$ implica que $p = 0$. Assim, $xK[x]$ é anel reduzido, isto é, não tem elementos nilpotentes não nulos. Pela Proposição 3.2.5 segue que $xK[x]$ é anel não singular.
Agora defina a aplicação :

$$\varphi : xK[x] \longrightarrow \frac{xK[x]}{x^2K[x]}$$
$$p \longmapsto \overline{p},$$

sendo $\overline{p} = p + x^2K[x]$.
É claro que φ é homomorfismo sobrejetor.
Provemos agora que $\frac{xK[x]}{x^2K[x]}$ é anel singular. Tome $\overline{p} = p + x^2K[x] \in \frac{xK[x]}{x^2K[x]}$. Como $p \in xK[x]$ temos $p^2 \in x^2K[x]$. Assim, $(\overline{p})^2 = \overline{p^2} = \overline{0}$ mostrando que $\frac{xK[x]}{x^2K[x]}$ é nil anel. Também $\frac{xK[x]}{x^2K[x]}$ é comutativo já que K é corpo. Portanto, pela Proposição 3.2.1 temos que $\frac{xK[x]}{x^2K[x]}$ é anel singular.
Deste modo, temos $xK[x]$ anel não singular e $\varphi(xK[x])$ anel singular, o que mostra que a classe dos anéis não singulares não é fechada por imagens homomórficas.

Exemplo 3.2.5. A classe dos anéis singulares não é homomorficamente fechada.

Seja R um anel comutativo e nil para o qual não existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $r^n = 0$, para todo $r \in R$. Considere Λ um conjunto infinito de índices e tome $P = \prod_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha$ e $R_\alpha = R$. Pela Proposição 3.2.1 o anel R é singular, isto é, $Z(R) = R$ e, pelo Corolário 3.2.2, segue que P é singular. Seja $\beta(P)$ o radical primo de P. Pelas Proposições 1.3.4 (a) e 1.3.5 (b) temos que $\beta(P) = \{x \in P \; ; \; x \text{ é nilpotente } \}$ é um ideal bilateral de P. Vamos provar que $\beta(P) \neq P$. Supondo que todo elemento de P seja nilpotente, e usando o fato de Λ ser um conjunto infinito, obteríamos um número natural $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $r^n = 0$, para todo $r \in R$. Isso contradiz a escolha de R. Logo, $\beta(P) \neq P$ e, portanto, $\frac{P}{\beta(P)} \neq (0)$.

Mostremos agora que $\frac{P}{\beta(P)}$ não é singular. Para isso vamos verificar que $\frac{P}{\beta(P)}$ é reduzido e daí, pela Proposição 3.2.5 teremos que $\frac{P}{\beta(P)}$ é não singular.

Seja $\overline{p} \in \frac{P}{\beta(P)}$ tal que $(\overline{p})^2 = \overline{0}$. Então $(\overline{p})^2 = \overline{p^2} = \overline{0} \Rightarrow p^2 \in \beta(P) \Rightarrow p^2$ é nilpotente $\Rightarrow$ p é nilpotente . Portanto, $p \in \beta(P)$, $\overline{p} = \overline{0}$ e $\frac{P}{\beta(P)}$ é anel reduzido. Segue que $\frac{P}{\beta(P)}$ é anel não singular. Além disso, $\frac{P}{\beta(P)} \neq (0)$ diz que $\frac{P}{\beta(P)}$ não é singular pois (0) é o único anel singular e não singular ao mesmo tempo.

Agora considere o homomorfismo projeção canônica $\pi : P \longrightarrow \frac{P}{\beta(P)}$ que é sobrejetor. Como P é um anel singular e $\frac{P}{\beta(P)}$ não é singular, temos que a classe dos anéis singulares não é fechada por imagens homomórficas.

Um anel R que satisfaz as condições requeridas no exemplo acima sempre existe. De fato, sabemos que se n é potência de 2 então $\overline{2}.\mathbb{Z}_n$ é anel comutativo e nil. Tomando $R = \bigoplus_{i \in L} \overline{2}.\mathbb{Z}_{2^i}$ onde L é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, temos que R é comutativo e nil, mas não existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $r^m = 0$ para todo $r \in R$.

Veremos agora que ideal de anel singular (não singular) não é necessariamente um anel singular (não singular). Iniciamos formalizando a definição de classe hereditária.

Definição 3.2.5. *Uma classe M de anéis é hereditária se para todo anel $R \in M$ e todo ideal I de R tivermos $I \in M$.*

Verificaremos, através dos dois próximos exemplos, que as classes dos anéis singulares e dos anéis não singulares não são hereditárias.

Definição 3.2.6. *Sejam K um corpo e A um anel. Dizemos que A é uma K-álgebra quando A é um espaço vetorial sobre K e $k(ab) = (ka)b = a(kb)$, para todos $a, b \in A$ e* *todo $k \in K$. A K-álgebra A é singular quando $Z_A(A) = A$.*

Exemplo 3.2.6. A classe dos anéis singulares não é hereditária.

Sejam K um corpo, A uma K-álgebra singular tal que $A^2 \neq (0)$ e $R = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$.

Inicialmente vamos provar que R é singular, mostrando que para $a = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \in R$ tem-se que $r_R(a)$ é ideal essencial de R.

Chame $I = r_A(x) \cap r_A(y) \cap r_A(z)$. Como $A = Z(A)$ temos que $r_A(x)$, $r_A(y)$ e $r_A(z)$ são ideais essenciais de A. Pela Proposição 2.2.1 segue que $I \in \Re(A)$.

Tome $d = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Como $ad = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xd_1 & xd_2 + yd_3 \\ 0 & zd_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ temos que $\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \subseteq r_R(a)$.

Seja T um ideal à direita não nulo de R e $0 \neq b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \in T \subseteq R$.

1º **caso:** $bR \neq (0)$.

$bR = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1A & b_1A + b_2A \\ 0 & b_3A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix}$ para ideais à direita I_1, I_2, I_3 de A.

Como $bR \neq (0)$, existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $I_i \neq (0)$. Desde que $I \in \Re(A)$ devemos ter $I \cap I_i \neq (0)$. Então $(0) \neq bR \cap \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \subseteq bR \cap r_R(a) \subseteq T \cap r_R(a)$ e, portanto, $r_R(a)$ é ideal essencial de R.

2º **caso:** $bR = (0)$.

Seja P o subanel de K gerado por 1. Claro que $P \simeq \mathbb{Z}_p$. Vimos na seção 1.2 que o ideal à direita de R gerado por b, e o ideal à direita de A gerado por b_i são, respectivamente,

$$(b)_r = b\mathbb{Z} + bR \ \subseteq \ T$$
$$(b_i)_r = b_i\mathbb{Z} + b_iA.$$

Mas $(0) = bR = \begin{bmatrix} b_1A & b_1A + b_2A \\ 0 & b_3A \end{bmatrix}$ assegura que $b_iA = (0)$. Assim,

$$(b)_r = bP = Pb \quad \text{e}$$
$$(b_i)_r = b_iP = Pb_i.$$

Agora, $I \leq_e A_A$ e $Pb_i = (b_i)_r$ é ideal não nulo de A diz que $I \cap Pb_i \neq (0)$, isto é, existe $k_i \in P$, $k_i \neq 0$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $k_ib_i \in I$. Chame $k = k_1k_2k_3 \in P \subseteq K$. Como $b \neq 0$ devemos ter $b_i \neq 0$ para algum i. Mas $0 \neq k \in K$, $0 \neq b_i \in A$ e A é K-espaço vetorial, então $kb_i \neq 0$ e, portanto, $0 \neq kb = \begin{bmatrix} kb_1 & kb_2 \\ 0 & kb_3 \end{bmatrix}$.

Assim, $0 \neq kb \in Pb \cap \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix} = (b)_r \cap \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \subseteq T \cap r_A(a)$ e, portanto, $r_R(a)$ é ideal essencial de R.

Provamos, até agora, que R é anel singular. Escolha $J = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subseteq R$.

É fácil ver que J é ideal de R. Resta provar que J não é anel singular.
Por hipótese, $A^2 \neq (0)$ e então existem $a, b \in A$ tais que $ab \neq 0$. Assim, $b \notin r_A(a)$ e, portanto, $r_A(a) \neq A$.

Afirmação: $r_A(a)$ é K-subespaço vetorial de A.
É claro que $r_A(a)$ é fechado por somas. Tome $u \in r_A(a)$ e $\lambda \in K$. Então $a(u\lambda) = (au)\lambda = 0.\lambda = 0$ diz que $u\lambda \in r_A(a)$.
Assim, $r_A(a)$ é K-subespaço vetorial próprio de A. Vimos, no Exemplo 2.1.3, que os espaços vetoriais não possuem submódulo essencial próprio e, deste modo, $r_A(a)$ não é K-submódulo essencial de A. Portanto, existe um K-subespaço não nulo V de A tal que $V \cap r_A(a) = (0)$.

É fácil ver que $(0) \neq \begin{bmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é ideal à direita de J, pois o produto será sempre nulo.

Mas $r_J\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in J \ ; \ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} =$ $\begin{bmatrix} H & H \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ para $H = r_A(a)$.

Também $\begin{bmatrix} H & H \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (0)$.

Assim, $u = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in J$ e $r_J(u)$ não é essencial em J, isto é, $u \notin Z(J)$ e J não é singular.

Sabemos que $A = \overline{2}.\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ é anel singular e claramente $A^2 \neq (0)$. Olhando A como $\mathbb{Z}_2$-espaço vetorial temos um exemplo específico para o Exemplo 3.2.6.

Como conseqüência do Exemplo 3.2.6 estabelecemos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.3. *A classe dos anéis singulares não é fechada por extensões.*

Demonstração.

Consideremos as mesmas hipóteses do Exemplo 3.2.6 e seja $J = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ideal de R.

Já foi verificado anteriormente que J é ideal bilateral de R e que J não é anel singular.

É fácil ver que $I = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é ideal bilateral de J. Além disso, o produto de elementos de I é sempre nulo e, assim, I é comutativo e nil. Segue, da Proposição 3.2.1, que I é anel singular.

Claramente a função

$$\varphi : J \longrightarrow A$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longmapsto a,$$

é um homomorfismo sobrejetor de anéis com $Ker(\varphi) = I$. Portanto, $\frac{J}{I} \simeq A$. Como A é singular segue, do item (b) da Proposição 3.1.2, que $\frac{J}{I}$ é singular. Assim, temos a seqüência exata curta $0 \longrightarrow I \longrightarrow J \longrightarrow \frac{J}{I} \longrightarrow 0$, com I e $\frac{J}{I}$ anéis singulares mas J não é anel singular.

$\square$

Exemplo 3.2.7. A classe dos anéis não-singulares não é hereditária.

Sejam K um corpo e $R = \begin{bmatrix} K & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix}$. É claro que $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix}$ é ideal de R.

Vejamos primeiro que $Z(I) = I$.

Seja $u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} \in I$. Como $I \in \Re(I)$ e $uI = (0)$ segue, da Proposição 2.3.1, que $u \in Z(I)$. Logo, $Z(I) = I$.

Mostremos agora que R é não singular.

Afirmação: Para cada $x = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} \in R$, $x \neq 0$, temos $r_R(x) = I$.

Para mostrar que $r_R(x) \subseteq I$, tomemos $y = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \in R$, $y \in r_R(x)$.

Então $x.y = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 a & 0 \\ x_2 a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ implica em $x_1 a = 0 = x_2 a$.

Como $x \neq 0$, segue que $x_1 \neq 0$ ou $x_2 \neq 0$ implicando que $a = 0$.

Logo, $y = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \in I$ e, portanto, $r_R(x) \subseteq I$.

Verifiquemos agora que $I \subseteq r_R(x)$.

Seja $y \in I$, $y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_1 & 0 \end{bmatrix}$. Então $x.y = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

ou seja, $y \in r_R(x)$.

É claro que $H = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é ideal à direita não nulo de R e $I \cap H = (0)$.

Assim, $r_R(x) \cap H = (0)$, o que implica que $r_R(x)$ não é ideal à direita essencial de R e, portanto, R é não singular.
Deste modo, temos que R é anel não singular, I é ideal de R mas I não é anel não singular.
Isto mostra que a classe dos anéis não singulares não é hereditária.

Terminamos esta seção apresentando alguns resultados envolvendo o ideal singular e anéis semiprimos. Em particular, veremos que a classe dos anéis semiprimos não singulares é hereditária. Sempre que necessário, para facilitar a compreensão, faremos referências ao que foi exposto no Capítulo 1, resgatando resultados sobre anéis e ideais semiprimos.

Proposição 3.2.7. *Sejam R um anel e I um ideal bilateral de R. Se I é anel semiprimo então $Z(I) = I \cap Z(R)$.*

Demonstração.
Primeiramente vamos mostrar que $Z(I) \subseteq I \cap Z(R)$. Seja $i \in Z(I)$. Então $i \in I$ e é claro que $i \in R$ pois $I \lhd R$. Para ver que $i \in Z(R)$ tome $(0) \neq H <_r R$. Devemos provar que $H \cap r_R(i) \neq (0)$. No caso de $HI = (0)$, então $IH.IH = I.(HI)H = (0)$ o que implica que $(IH)^2 = (0)$. Temos que $H <_r R$. Então $IH <_r I$ e, claramente, $IH \leq_l I$. Isto implica que $IH \lhd I$. Como I é anel semiprimo, IH é ideal de I e $(IH)^2 = (0)$ temos, pelo item (b) da Proposição 1.3.3, que $IH = (0)$. Segue que $H \subseteq r_R(I) \subseteq r_R(i)$. Portanto, $H \cap r_R(i) = H \neq (0)$.

No caso de $HI \neq (0)$ temos, obviamente, que $(0) \neq HI <_r I$, e como $i \in Z(I)$ então $HI \cap r_I(i) \neq (0)$. Mas $HI \subseteq H$ e $r_I(i) \subseteq r_R(i)$. Então $(0) \neq HI \cap r_I(i) \subseteq H \cap r_I(i) \subseteq H \cap r_R(i)$ implica que $H \cap r_R(i) \neq (0)$. Assim, tanto no caso $HI = (0)$ como no caso $HI \neq (0)$ obtivemos $H \bigcap r_R(i) \neq (0)$, provando que $i \in Z(R)$. Logo, como $i \in Z(R)$ e $i \in I$ segue que $i \in I \cap Z(R)$, o que mostra a inclusão desejada.
Para ver que $I \cap Z(R) \subseteq Z(I)$, tomemos $i \in I \cap Z(R)$. Então $i \in I$ e $i \in Z(R)$. Para ver que $i \in Z(I)$, tomemos $(0) \neq H <_r I$. Vamos provar que $r_I(i) \cap H \neq (0)$.
Afirmamos que $HI \neq (0)$. Se fosse $HI = (0)$ então teríamos $HIH = (0)$. Então, para todo $h \in H$ teríamos $hIh = (0)$. Pelo Corolário 1.3.2, como I é anel semiprimo isto implicaria em $h = 0$ e, portanto, $H = (0)$, o que é absurdo. Deste modo, $I \lhd R$ e $HI \neq (0)$ implicam que $(0) \neq HI <_r R$. Do fato de $i \in Z(R)$ segue que $HI \cap r_R(i) \neq (0)$. Mas $H <_r R$ implica que $HI \subseteq H$ e então $(0) \neq HI \cap r_R(i) \subseteq H \cap r_R(i) \subseteq H \cap r_I(i)$. Note aqui que se $x \in H \cap r_R(i)$ então $x \in H$ e $x \in r_R(i)$ e isto implica que $x \in H$ e $ix = 0$. Como $H \subseteq I$ segue que $x \in I$ e $x.i = 0$ e, portanto, $x \in r_I(i)$.
Deste modo, $H \cap r_I(i) \neq (0)$ e assim $i \in Z(I)$, o que conclui a prova.

□

Segue, da Proposição 3.2.7, que o ideal $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix}$ do anel $R = \begin{bmatrix} K & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix}$ visto no Exemplo 3.2.7, não é anel semiprimo pois $Z(I) = I$ e $I \cap Z(R) = (0)$.

Para concluir esta seção enunciamos o corolário abaixo:

Corolário 3.2.4. *A classe dos anéis semiprimos não singulares é hereditária.*

Demonstração.
Sejam R um anel semiprimo tal que $Z(R) = (0)$ e I um ideal bilateral de R. Pelo Corolário 1.3.4 temos que I é semiprimo. Aplicando a Proposição 3.2.7 segue que $Z(I) = I \cap Z(R) = I \cap (0) = (0)$. Logo, I é semiprimo e não singular.

□

3.3 O Ideal Singular de Ideais Unilaterais

Nesta seção desenvolveremos alguns conceitos e resultados relacionados com o ideal singular de um anel e ideais unilaterais. Em particular, veremos como o ideal singular $Z(.)$ se comporta quando trabalhamos com ideais unilaterais.

Fixemos R como sendo um anel qualquer e os ideais considerados nesta seção como ideais à direita. Resultados análogos obtemos trocando a lateralidade dos ideais. Deste modo, usaremos a notação $I <_r R$ para indicar que I é um ideal à direita do anel R. Equivalentemente, $I <_l R$ denota um ideal à esquerda do anel R. Escreveremos $I \lhd R$ para indicar que I é um ideal bilateral do anel R, $\beta(R)$ para indicar o radical primo do anel R e I^* representa o ideal bilateral obtido a partir de I, conforme já foi apresentado no Capítulo 1. Os radicais aqui considerados são sempre radicais de anéis. Assim, mesmo quando $I <_r R$, $\beta(I)$ indica o radical primo do anel I.

O principal resultado desta seção é o seguinte:

Teorema 3.3.1. *Sejam I um ideal unilateral do anel R e I^* o ideal bilateral de R gerado por I. Então $Z\left(\frac{I^*}{\beta(I^*)}\right) \neq (0)$ se, e somente se, $Z\left(\frac{I}{\beta(I)}\right) \neq (0)$.*

A prova deste Teorema está dividida em várias partes. Faremos a sua exposição trabalhando com conceitos relacionados e resultados auxiliares, apresentados seqüencialmente, de acordo com a necessidade.

O próximo lema nos dá resultados importantes para a demonstração do Teorema 3.3.1.

Lema 3.3.1. *Sejam R um anel, I um ideal unilateral de R e I^* o ideal bilateral de R gerado por I ($I^* = R^*I$ ou $I^* = IR^*$). Então:*

(a) $\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}$ *é um ideal unilateral de* $\frac{R}{\beta(R)}$.

(b) $\frac{I^*+\beta(R)}{\beta(R)}$ *é o ideal bilateral de* $\frac{R}{\beta(R)}$ *gerado por* $\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}$.

(c) $\frac{I^*+\beta(R)}{\beta(R)} \simeq \frac{I^*}{\beta(I^*)}$.

(d) $\frac{\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}}{\beta\left(\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}\right)} \simeq \frac{I}{\beta(I)}$.

Demonstração.

(a) Sem perda de generalidade, vamos admitir que $I <_r R$ e provar que $\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)} <_r \frac{R}{\beta(R)}$.
Dados $u, v \in \frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}$ e $\lambda \in \frac{R}{\beta(R)}$ temos:
$u = \overline{x+\alpha}$, $v = \overline{y+\gamma}$ e $\lambda = \overline{a}$ com $x, y \in I$, $\alpha, \gamma \in \beta(R)$ e $a \in R$.
$u - v = \overline{x+\alpha} - (\overline{y+\gamma}) = (\overline{x-y} + (\overline{\alpha-\gamma}) \in \frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}$.
$u.\lambda = (\overline{x+\alpha}).\overline{a} = \overline{xa} + \overline{\alpha a} \ \in \ \frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}$.

(b) Novamente supomos, sem perda de generalidade, que $I <_r R$ e por (a) temos que $\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)} <_r \frac{R}{\beta(R)}$. Assim, o ideal bilateral de $\frac{R}{\beta(R)}$ gerado por $\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}$ é, pelo item (a) da Proposição 1.2.2,

$$\left(\frac{R}{\beta(R)}\right)^* \cdot \left(\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}\right) = \frac{I+\beta(R)}{\beta(R)} + \frac{R}{\beta(R)} \cdot \left(\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}\right) = \frac{I+\beta(R)}{\beta(R)} + \frac{RI+\beta(R)}{\beta(R)} = \frac{(I+RI)+\beta(R)}{\beta(R)} = \frac{I^*+\beta(R)}{\beta(R)}.$$

(c) Desde que $I^* \lhd R$ segue, do Teorema 1.3.4, que $\beta(I^*) = I^* \cap \beta(R)$. Assim, basta provar que $\frac{I^*+\beta(R)}{\beta(R)} \simeq \frac{I^*}{I^* \cap \beta(R)}$.
Mas isso é conseqüência imediata do Teorema dos Homomorfismos, pois

$$\begin{aligned} \varphi : I^* &\longrightarrow \frac{I^* + \beta(R)}{\beta(R)} \\ x &\longmapsto x + \beta(R) \end{aligned}$$

é claramente um homomorfismo. A sobrejetividade de φ segue do fato de que cada $\overline{u} \in \frac{I^*+\beta(R)}{\beta(R)}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \overline{u} &= (x + \lambda) + \beta(R) \quad , x \in I^*, \ \lambda \in \beta(R) \\ &= (x + \beta(R)) + (\lambda + \beta(R)) \\ &= x + \beta(R) \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} x \in Ker(\varphi) &\Leftrightarrow x \in I^* \ \text{ e } \ x + \beta(R) = \beta(R) \Leftrightarrow x \in I^* \ \text{ e } \ x \in \beta(R) \\ &\Leftrightarrow x \in I^* \cap \beta(R). \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{I^*}{I^* \cap \beta(R)} = \frac{I^*}{Ker(\varphi)} \simeq \varphi(I^*) = \frac{I^*+\beta(R)}{\beta(R)}$.

(d) Os homomorfismos

$$\varphi : I \longrightarrow \frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}, \qquad \varphi(x) = \overline{x} = x + \beta(R)$$

e

$$\pi : \frac{I+\beta(R)}{\beta(R)} \longrightarrow \frac{\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}}{\beta\left(\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}\right)}, \qquad \pi(\overline{x}) = \overline{\overline{x}} = \overline{x} + \beta\left(\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}\right)$$

são claramente sobrejetores.

Logo, $\pi \circ \varphi : I \longrightarrow \frac{\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}}{\beta(\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)})}$ também é homomorfismo sobrejetor.

Além disso,

$$\begin{aligned} x \in Ker(\pi \circ \varphi) &\Leftrightarrow \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{0}} \\ &\Leftrightarrow \overline{x} + \beta\left(\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}\right) = \beta\left(\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}\right) \\ &\Leftrightarrow \overline{x} \in \beta\left(\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}\right) \\ &\Leftrightarrow x \in \beta(I). \end{aligned}$$

Assim, $Ker(\pi \circ \varphi) = \beta(I)$ e, pelo Teorema dos Homomorfismos temos $\frac{I}{\beta(I)} \simeq \frac{\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}}{\beta(\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)})}$.
□

O Lema 3.3.1 assegura que basta provar o Teorema 3.3.1 no caso de anéis semiprimos. Os detalhes desta redução podem ser vistos na proposição abaixo. Note que a igualdade $Z\left(\frac{J^*}{\beta(J^*)}\right) = Z(J^*)$ no enunciado da proposição segue do fato de J^* ser ideal bilateral de S, $\beta(S) = (0)$ e do Teorema 1.3.4 que garante que $\beta(J^*) = J^* \cap \beta(S) = (0)$.

Proposição 3.3.1. *Sejam S um anel semiprimo e J um ideal unilateral de S. Suponha que valha a equivalência $Z\left(\frac{J^*}{\beta(J^*)}\right) = Z(J^*) \neq (0) \Leftrightarrow Z\left(\frac{J}{\beta(J)}\right) \neq (0)$.*
Então para todo anel R e todo ideal unilateral I de R vale

$$Z\left(\frac{I^*}{\beta(I^*)}\right) \neq (0) \Leftrightarrow Z\left(\frac{I}{\beta(I)}\right) \neq (0).$$

Demonstração.

Aplicando o Lema 3.3.1 ao anel R e ao ideal I, temos:

(1) $\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}$ é ideal unilateral de $\frac{R}{\beta(R)}$.

(2) $\frac{I^*}{\beta(I^*)} \simeq \frac{I^*+\beta(R)}{\beta(R)}$ é ideal bilateral de $\frac{R}{\beta(R)}$ e $\frac{I^*+\beta(R)}{\beta(R)} = \left(\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}\right)^*$.

(3) $\frac{I}{\beta(I)} \simeq \frac{\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}}{\beta\left(\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}\right)}$.

Por (1), $J = \frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}$ é ideal unilateral de $S = \frac{R}{\beta(R)}$. Também, pelo Corolário 1.3.3, S é anel semiprimo. Então podemos admitir que

$$Z(J^*) \neq (0) \Leftrightarrow Z\left(\frac{J}{\beta(J)}\right) \neq (0).$$

Mas pela última igualdade vista em (2), temos $J^* = \frac{I^*+\beta(R)}{\beta(R)}$. Assim,

$$Z\left(\frac{I^*+\beta(R)}{\beta(R)}\right) \neq (0) \Leftrightarrow Z\left(\frac{\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}}{\beta\left(\frac{I+\beta(R)}{\beta(R)}\right)}\right) \neq (0).$$

Dos isomorfismos estabelecidos em (3) e na primeira parte de (2), junto com a Proposição 3.1.2 concluímos que $Z\left(\frac{I^*}{\beta(I^*)}\right) \neq (0) \Leftrightarrow Z\left(\frac{I}{\beta(I)}\right) \neq (0)$.

$\square$

Segue, da proposição acima, que basta provar o Teorema 3.3.1 no caso do anel R ser semiprimo.

Aplicando o Teorema 1.3.4 ao ideal bilateral I^* do anel semiprimo R, vemos que $\beta(I^*) = I^* \cap \beta(R) = I^* \cap (0) = (0)$. Deste modo, $Z\left(\frac{I^*}{\beta(I^*)}\right) = Z(I^*)$ e reenunciamos o Teorema 3.3.1 da seguinte maneira:

Teorema 3.3.2. *Sejam R um anel semiprimo, I um ideal unilateral de R e I^* o ideal bilateral de R gerado a partir de I. Então*

$$Z(I^*) \neq (0) \Leftrightarrow Z\left(\frac{I}{\beta(I)}\right) \neq (0).$$

Este teorema será provado no final da seção. Antes desenvolveremos alguns resultados para simplificar a prova.

Proposição 3.3.2. *Sejam R um anel e I um ideal à direita de R. Então $Z(I)I \subseteq Z(R)$.*

Demonstração.

Tomemos $z \in Z(I)$ e $i \in I$. Para mostrar que $zi \in Z(R)$ vamos verificar que $r_R(zi)$ é ideal à direita essencial de R. Seja então $(0) \neq H <_r R$. Devemos considerar dois casos:

1º Caso: $iH = (0)$.

Se $iH = (0)$ então $ziH = (0)$. Isto implica em $H \in r_R(zi)$. Daí, $r_R(zi) \cap H \neq (0)$.

2º Caso: $iH \neq (0)$.

Isto implica que $(0) \neq iH <_r I$, pois $i \in I$, $H \subseteq R$ e I é ideal à direita de R.

Como $z \in Z(I)$ e $(0) \neq iH <_r I$ temos que $iH \cap r_I(z) \neq (0)$. Isto implica que existe $0 \neq h \in H$ tal que $ih \neq 0$ e $ih \in r_I(z)$, isto é, $zih = (0)$. Isto mostra que $h \in r_R(zi)$. Como $h \in H$ segue que $H \cap r_R(zi) \neq (0)$.

□

Portanto, $zi \in Z(R)$.

Lema 3.3.2. *Se R é anel semiprimo e $I <_r R$ ($L <_l R$) então $\beta(I)I = (0)$ ($L\beta(L) = (0)$).*

Demonstração.

Sabemos que $\beta(I) \lhd I$, e é claro que $\beta(I)I \lhd \beta(I)$. Segue que $\beta(I)I <_r R$ pois $\beta(I)I$ é fechado por diferenças e $I <_r R$. Além disso, pelo Teorema 1.3.4 e pelo Corolário 1.3.4,

$$\beta(\beta(I)I) = \beta(I)I \cap \beta(\beta(I)) = \beta(I)I \cap \beta(I) = \beta(I)I.$$

Assim, $\beta(I)I$ é β-ideal à direita de R. Mas, pelo Teorema 1.3.5, o radical primo β é forte à direita e então $\beta(I)I \subseteq \beta(R) = (0)$.

Analogamente mostra-se que $L\beta(L) = (0)$ quando $L \leq_l R$.

□

O próximo resultado nos diz que o ideal singular coincide com o radical primo do ideal de um anel, no caso de anéis semiprimos não singulares.

Corolário 3.3.1. *Se R é um anel semiprimo não singular e $I <_r R$ então $Z(I) = \beta(I)$.*

Demonstração.

Devemos mostrar as inclusões:

(a) $Z(I) \subseteq \beta(I)$:

Como $I <_r R$ segue, da Proposição 3.3.2, que $Z(I)I \subseteq Z(R) = (0)$ pois R é não singular. É claro que $(Z(I))^2 \subseteq Z(I).I = (0) \subseteq \beta(I)$. Pelo item (b) da Proposição 1.3.4, $\beta(I)$ é ideal semiprimo de I e então, pelo Teorema 1.3.2 (v), vem que $Z(I) \subseteq \beta(I)$.

(b) $\beta(I) \subseteq Z(I)$:

Como R é semiprimo e $I <_r R$ segue, do Lema 3.3.2, que $\beta(I)I = (0)$. Claro que $I <_e I$. Deste modo, todo elemento de $\beta(I)$ anula o ideal essencial I. Portanto, $\beta(I) \subseteq Z(I)$.

$\square$

Proposição 3.3.3. *Se R é um anel semiprimo e $I <_r R$ então*

$$\frac{(I \cap Z(R)) + \beta(I)}{\beta(I)} \subseteq Z\left(\frac{I}{\beta(I)}\right).$$

Demonstração.

Iniciamos observando que quando $I \cap Z(R) \subseteq \beta(I)$ vale $\frac{(I \cap Z(R))+\beta(I)}{\beta(I)} = (0) \subseteq Z\left(\frac{I}{\beta(I)}\right)$ e a proposição está provada.

É claro que

$$I \cap Z(R) = (0) \Rightarrow I \cap Z(R) \subseteq \beta(I) \text{ e}$$
$$\frac{I}{\beta(I)} = (0) \Rightarrow \beta(I) = I \Rightarrow I \cap Z(R) \subseteq \beta(I).$$

Assim, assumimos $I \cap Z(R) \neq (0)$ e $\frac{I}{\beta(I)} \neq (0)$.

Dado $\overline{z} = z + \beta(I) \in \frac{(I \cap Z(R))+\beta(I)}{\beta(I)}$, $z \in I \cap Z(R)$, devemos provar que $\overline{z} \in Z\left(\frac{I}{\beta(I)}\right)$.

Faremos isso mostrando que $r_{\frac{I}{\beta(I)}}(\overline{z})$ é ideal à direita essencial de $\frac{I}{\beta(I)}$.

Seja então $(0) \neq T <_r \frac{I}{\beta(I)}$. Devemos provar que $T \cap r_{\frac{I}{\beta(I)}}(\overline{z}) \neq (0)$.

Pelo Segundo Teorema dos Homomorfismos, existe $H <_r I$ tal que $\beta(I) \subsetneqq H \subseteq I$ e $(0) \neq \frac{H}{\beta(I)} = T <_r \frac{I}{\beta(I)}$.

Assim, vamos provar que $\frac{H}{\beta(I)} \cap r_{\frac{I}{\beta(I)}}(\overline{z}) \neq (0)$.

Facilmente vemos que $HI <_r R$ e $HI \subseteq H$. Também $HI \neq (0)$ pois se $HI = (0)$ então $(IH)(IH) = (0)$, implicando em $IH = (0)$ pois R é anel semiprimo e $IH <_l R$. Desde que $H \neq (0)$ temos $0 \neq h \in H \subseteq I$ e $hR \subseteq IR \subseteq I$. Logo, $hRh = (hR)h \subseteq IH = (0)$. Mas R sendo semiprimo implica em $h = 0$, que é uma contradição. Portanto, $HI \neq (0)$.

Como $z \in I \cap Z(R)$ e $(0) \neq HI <_r R$ temos $r_R(z) \cap HI \neq (0)$ pois $r_R(z)$ é ideal à direita essencial de R. A igualdade $r_R(z) \cap HI = r_I(z) \cap HI$ é óbvia pois $HI \subseteq I$. Veremos agora que $HI \cap r_I(z) \nsubseteq \beta(I)$. De fato, supondo o contrário, pelo Lema 3.3.2 vem que $[HI \cap r_R(z)]^2 = (HI \cap r_I(z))(HI \cap r_R(z)) \subseteq \beta(I)I = (0)$. Daí, $HI \cap r_R(z)$ é ideal à direita nilpotente e não nulo do anel semiprimo R, que é uma contradição.
Assim, $HI \cap r_I(z) \nsubseteq \beta(I)$ e, portanto,

$$(0) \neq \frac{(HI \cap r_I(z)) + \beta(I)}{\beta(I)} \subseteq \left(\frac{HI + \beta(I)}{\beta(I)}\right) \cap \left(\frac{r_I(z) + \beta(I)}{\beta(I)}\right) \subseteq$$

$$\subseteq \left(\frac{HI + \beta(I)}{\beta(I)}\right) \cap r_{\frac{I}{\beta(I)}}(z + \beta(I)) \subseteq \frac{H}{\beta(I)} \cap r_{\frac{I}{\beta(I)}}(z + \beta(I)).$$

Das três inclusões acima vemos que a primeira é óbvia e a última segue do fato de $HI \subseteq H$.
Para justificar a segunda inclusão observamos que se $\overline{u} = (u + v) + \beta(I) \in \frac{r_I(z)+\beta(I)}{\beta(I)}$, $u \in r_I(z)$ e $v \in \beta(I)$, então $\overline{u} = u + \beta(I)$ com $u \in r_I(z) \subseteq I$, e daí, $\overline{u} \in \frac{I}{\beta(I)}$.
Além disso, $(z + \beta(I))(u + \beta(I)) = zu + \beta(I) = 0 + \beta(I) = \overline{0}$, pois $u \in r_I(z)$.
Assim, $\overline{u} \in r_{\frac{I}{\beta(I)}}(z + \beta(I))$, provando que $\frac{r_I(z)+\beta(I)}{\beta(I)} \subseteq r_{\frac{I}{\beta(I)}}(z + \beta(I))$.
Pelo visto acima, $\frac{H}{\beta(I)} \cap r_{\frac{I}{\beta(I)}}(\overline{z}) \neq (0)$, provando que $\overline{z} \in Z\left(\frac{I}{\beta(I)}\right)$.

□

Corolário 3.3.2. *Sejam R um anel semiprimo, $I <_r R$ e I^* o ideal bilateral de R gerado por I. Se $Z\left(\frac{I}{\beta(I)}\right) = (0)$ então $Z(I^*) = (0)$.*

Demonstração.
Se $Z\left(\frac{I}{\beta(I)}\right) = (0)$, pela Proposição 3.3.3 temos $\frac{(I \bigcap Z(R))+\beta(I)}{\beta(I)} = (0)$.
Ou seja, $(I \bigcap Z(R)) + \beta(I) = \beta(I)$ e, portanto, $I \bigcap Z(R) \subseteq \beta(I)$.
É fácil ver que $I \cap Z(R)$ é ideal bilateral de I e então, pelo Teorema 1.3.4, $\beta(I \cap Z(R)) = (I \cap Z(R)) \cap \beta(I) = I \cap Z(R)$. Assim, $I \cap Z(R)$ é ideal à direita β-radical de R. Sabemos, pelo Teorema 1.3.5, que β é radical forte à direita e como $I \cap Z(R) <_r R$ e $\beta(I \cap Z(R)) = I \cap Z(R)$, segue que $I \cap Z(R) \subseteq \beta(R) = (0)$. Desde que o produto de ideais está contido na intersecção temos $IZ(R) = (0)$.
Seja I^* o ideal bilateral de R gerado por I. Pela Proposição 1.2.2 temos $I^* = R^*I = I + RI$. Do Corolário 1.3.4 tiramos que I^* é semiprimo e, da Proposição 3.2.7 tiramos

que $Z(I^*) = I^* \cap Z(R)$. Multiplicando esta igualdade à direita por $Z(I^*)$ vemos que

$$[Z(I^*)]^2 = [I^* \cap Z(R)]Z(I^*) = [R^*I \cap Z(R)]Z(I^*) \subseteq R^*IZ(I^*) =$$

$$= R^*I[I^* \cap Z(R)] \subseteq R^*IZ(R) = (0),$$

pois $IZ(R) = (0)$. Como R é anel semiprimo concluímos que $Z(I^*) = (0)$.

$\square$

Seja L um ideal à esquerda do anel R. Então L é um anel e $\beta(L) \lhd L$. Assim, temos o anel $\frac{L}{\beta(L)}$ e novamente $Z\left(\frac{L}{\beta(L)}\right)$ é ideal bilateral de $\frac{L}{\beta(L)}$. Pelo Segundo Teorema dos Homomorfismos, existe um ideal bilateral K de L tal que $\beta(L) \subseteq K \lhd L$ e $\frac{K}{\beta(L)} = Z\left(\frac{L}{\beta(L)}\right)$. Com esta notação enunciamos a próxima proposição.

Proposição 3.3.4. *Seja R um anel semiprimo, $L <_l R$ e L^* o ideal bilateral de R gerado por L. Então $LK \subseteq Z(L^*)$.*

Demonstração.
Vamos provar que para $k \in K$, $r_{L^*}(Lk)$ é ideal à direita essencial de L^*. Disso decorrre que $r_{L^*}(u)$ é ideal à direita essencial de L^* para todo $u \in LK$ e, conseqüentemente, $LK \subseteq Z(L^*)$.
Seja então $(0) \neq H <_r L^*$. Basta provar que $H \cap r_{L^*}(Lk) \neq (0)$. Pela Proposição 1.2.2, $L^* = L + LR = LR^*$. Note que $H <_r L^* \lhd R \lhd R^*$ e $HL \subseteq L$, pois $H \subseteq R$ implica em $HL \subseteq RL \subseteq L$.

1º Caso: $HL \subseteq \beta(L)$.
$HL \subseteq \beta(L) \Rightarrow LHL \subseteq L\beta(L) = (0)$, pelo Lema 3.3.2.
$LHL = (0) \Rightarrow (LH)(LH) = (0) \Rightarrow LH = (0)$, pois $LH <_l R$ e R é anel semiprimo.
Agora, $K \subseteq L \Rightarrow LK \subseteq L \Rightarrow LKH \subseteq LH = (0) \Rightarrow H \subseteq r_{L^*}(LK) \Rightarrow (0) \neq H = H \cap r_{L^*}(LK) \Rightarrow H \cap r_{L^*}(Lk) \neq (0)$.

2º Caso: $HL \not\subseteq \beta(L)$.
Neste caso, $(0) \neq \frac{HL+\beta(L)}{\beta(L)}$ é ideal à direita de $\frac{L}{\beta(L)}$. Dado $k \in K$ temos $\overline{k} = k + \beta(L) \in \frac{K}{\beta(L)} = Z\left(\frac{L}{\beta(L)}\right)$ e então $r_{\frac{L}{\beta(L)}}(k + \beta(L)) \cap \left(\frac{HL+\beta(L)}{\beta(L)}\right) \neq (0)$. Portanto, e-xiste $t \in (HL - \beta(L))$ tal que $\overline{t} = t + \beta(L) \in r_{\frac{L}{\beta(L)}}(k + \beta(L))$, isto é, $kt \in \beta(L)$. Novamente, pelo Lema 3.3.2, temos $L\beta(L) = (0)$ e assim $Lkt = (0)$. Segue que

$0 \neq t \in r_{L^*}(Lk) \cap HL$. Mas $H <_r L^*$ e $L \subseteq L^*$ assegura que $HL \subseteq H$. Deste modo, $(0) \neq r_{L^*}(Lk) \cap HL \subseteq r_{L^*}(Lk) \cap H$.
Portanto, em qualquer caso, temos $H \cap r_{L^*}(Lk) \neq (0)$. Isso mostra que $r_{L^*}(Lk)$ é ideal à direita essencial de L^*.

$\square$

Corolário 3.3.3. *Com as hipóteses da Proposição 3.3.4, se* $\frac{K}{\beta(L)} = Z\left(\frac{L}{\beta(L)}\right) \neq (0)$ *então* $Z(L^*) \neq (0)$.

Demonstração.
Suponha que $Z(L^*) = (0)$. Então, pela Proposição 3.3.4, temos que $LK = (0)$ pois $LK \subseteq Z(L^*)$. Segue que $\left(\frac{K}{\beta(L)}\right)^2 = \frac{K}{\beta(L)} \cdot \frac{K}{\beta(L)} \subseteq \frac{LK}{\beta(L)} = (0)$. Mas, pela Proposição 3.1.1, $\frac{K}{\beta(L)} = Z\left(\frac{L}{\beta(L)}\right)$ é ideal bilateral do anel $\frac{L}{\beta(L)}$, e $\frac{L}{\beta(L)}$ é anel semiprimo, pelo Corolário 1.3.3. Segue, da Proposição 1.3.3, que $\frac{K}{\beta(L)} = Z\left(\frac{L}{\beta(L)}\right) = (0)$.

$\square$

Versões simétricas (trocando lateralidade à direita por esquerda e vice-versa) dos Corolários 3.3.2 e 3.3.3 também podem ser obtidas, com um pouco mais de trabalho. Não faremos suas demonstrações e apenas usaremos estes resultados da forma enunciada abaixo:

Proposição 3.3.5. *Sejam R um anel semiprimo, $L <_l R$ e L^* o ideal bilateral de R gerado por L. Se* $Z\left(\frac{L}{\beta(L)}\right) = (0)$ *então* $Z(L^*) = (0)$.

Demonstração.
([5], section 3, Proposition 3.12)

$\square$

Proposição 3.3.6. *Se R é um anel semiprimo, $I <_r R$ e* $Z\left(\frac{I}{\beta(I)}\right) \neq (0)$ *então* $Z(I^*) \neq (0)$*, onde I^* é o ideal bilateral de R gerado por I.*

Demonstração.
([5], section 3, Proposition 3.13)

$\square$

Com os resultados apresentados até agora, estamos prontos para provar o teorema central desta seção.

Reenunciamos o teorema abaixo:

Teorema 3.3.2. *Sejam R um anel semiprimo, I um ideal unilateral de R e I^* o ideal bilateral de R gerado por I. Então*

$$Z(I^*) \neq (0) \Leftrightarrow Z\left(\frac{I}{\beta(I)}\right) \neq (0).$$

Demonstração. No caso em que $I <_r R$ usamos o Corolário 3.3.2 para justificar a direção ($\Rightarrow$), e a Proposição 3.3.6 para a direção ($\Leftarrow$).
Se $I <_l R$ usamos a Proposição 3.3.5 para justificar ($\Rightarrow$), e o Corolário 3.3.3 para a direção ($\Leftarrow$).

$\square$

Como comentamos anteriormente (veja Proposição 3.3.1), o Teorema 3.3.2 garante que vale o

Teorema 3.3.1. *Sejam I um ideal unilateral do anel R e I^* o ideal bilateral de R gerado por I. Então*

$$Z\left(\frac{I^*}{\beta(I^*)}\right) \neq (0) \Leftrightarrow Z\left(\frac{I}{\beta(I)}\right) \neq (0).$$

Assim, o anel semiprimo $\frac{I}{\beta(I)}$ é anel não singular se, e somente se, o anel semiprimo $\frac{I^*}{\beta(I^*)}$ é anel não singular.

Referências Bibliográficas

[1] Bagio, D. *Anéis Quocientes Clássicos e Localização Não Comutativa*. Dissertação de Mestrado. Florianópolis, UFSC, 2000.

[2] Divinsky, N. J. *Rings and Radicals*. University of Toronto Press, Toronto, 1965.

[3] Ferrero, M. *Notas da XIII Escola de Álgebra*. Universidade de Campinas, Campinas, 1994.

[4] Ferrero, M. *Notas da XVI Escola de Álgebra*. Universidade de Brasília, Brasília, 2000.

[5] Ferrero, M. and Puczylowski, E. *The Singular Ideal and Radicals*. J. Australian Mathematical Society, 64 (1998), 195-209.

[6] Goodearl, K. R. *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*. Marcel Dekker, New York, 1976.

[7] Lambeck, J. *Torsion Theories, Additive Semantics, and Rings of Quotients*. Lectures Notes in Mathematics 1977, Springer-Verlag, New York, 1975.

[8] McCoy, N. H. *Rings and Ideals*. Carus Monograph No.8, New York,1948.

[9] McCoy, N. H. *The Theory of Rings*. Mac Millan Co, New York, 1964.

[10] McDonald, B. R. *Linear Algebra Over Commutative Rings*. Marcel Dekker, New York, 1984.

[11] Milies, F. C. P. *Anéis e Módulos*. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1972.

[12] Stenström, B. *Rings of Quotients*. Springer-Verlag, New York, 1975.

[13] Wiegandt, R. *Radical and Semisimple Classes of Rings*. Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics No. 37. Queen's University, Kingston, Ontario, 1974.