Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Operadores Lineares em Espaços de Hilbert e Aplicações

Everaldo Amaral

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Adolfo T. F. da Costa

Florianópolis, Fevereiro de 2006

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Operadores Lineares em Espaços de Hilbert e Aplicações

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com área de Concentração em Física-Matemática.

Everaldo Amaral

Florianópolis, Fevereiro de 2006

Operadores Lineares em Espaços de Hilbert e Aplicações

por

Everaldo Amaral

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre",
Área de Concentração em Física Matemática, e aprovada em sua forma
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.

Prof. Dr. Igor Mozolevski

Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Gustavo Adolfo T. F. da Costa (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Luiz Augusto Saeger (UFSC)

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC)

Prof. Dr. Gustavo Perla Menzala (LNCC/UFRJ)

Florianópolis, Fevereiro de 2006.

Agradecimentos

Deus escreveu o universo usando a matemática em forma de poesia.

Agradeço a minha família pelo apoio e insentivo, em especial minha esposa Mariléia Lampunhani Amaral que, em todos os momentos esteve junto e participando de todas as vitórias e derrotas.

Agradeço a Deus pela vida.

Agradeço aos colegas pelo companheirismo e amizade construída no decorrer deste curso, em especial ao colega Jocemar Chagas.

Agradeço ao Departamento de Matemática pelos trabalhos realizados em prol do conhecimento, e em especial a Elisa Amaral pela sua simpatia e competência.

Agradeço aos professores que, em curso, demonstraram compromisso e conhecimento na condução das disciplinas de Análise, Introdução a Álgebra Linear, Equações Diferenciais Ordinárias, Equações Diferenciais Parciais, Computação Científica e Análise Funcional.

Agradeço ao professor Gustavo Adolfo T. F. da Costa pela seriedade e conhecimento na condução deste trabalho. Aprendemos neste trabalho, não somente demonstrar algum conhecimento, mas escrever o conhecimento de forma clara e compreensível.

Sumário

Resumo

Nesta dissertação nós estudamos propriedades gerais de operadores lineares em espaços de Hilbert e aplicações. Em particular, o problema de existência e unicidade de extensões autoadjuntas de um operador linear é considerado. Vários exemplos importantes são trabalhados em detalhe: os operadores de multiplicação e os operadores diferenciais de Laplace e Schrödinger.

Abstract

In this dissertation we study general properties of linear operators in Hilbert spaces and aplications. In particular, the problem of existence and uniqueness of selfdjoint extensions of a linear operator is considered. Several important examples are worked out in detail: the multiplication and Laplace and Schrödinger's differential operators.

Introdução

O objetivo desta dissertação é o estudo de algumas propriedades gerais de operadores lineares em um espaço de Hilbert e, em especial, das extensões autoadjuntas de um operador linear para um domínio maior no mesmo espaço e quando esta é única. Vários exemplos de operadores lineares são considerados: os operadores multiplicação e derivada, operador de Laplace e operador de Schrödinger.

No capítulo 1, introduzimos os conceitos de operador limitado, operador ilimitado e de continuidade de um operador. Examinamos, em seguida, o problema de existência de extensão de um operador limitado e, definimos os conceitos de operador adjunto, fechado, fechável, simétrico, o fecho de um operador, e o operador autoadjunto, importantes no estudo de operadores ilimitados. Vários propriedades decorrentes destes conceitos são examinados.

No capítulo 2, os operadores multiplicação e derivada são considerados em detalhes. Através destes exemplos, ilustramos os conceitos definidos no capítulo anterior com casos concretos. Em especial, verifica–se que um operador ilimitado pode ter uma infinidade de extensões adjuntas, ou ainda, nenhuma.

No capítulo 3, discutimos brevemente a solução do problema de existência de extensões autoadjuntas de um operador linear devida a *von Neumann*, com base na teoria dos índices de deficiência desenvolvida por ele. Em seguida consideramos, em detalhes, o caso de operadores que admitem uma única extensão autoajunta, chamados de operadores essencialmente autoadjuntos. Várias propriedades destes operadores são apresentados, juntamente com vários critérios que podem ser empregados para se determinar quando um operador é essencialmente autoadjunto. Alguns desses critérios são aplicados no capítulo 4.

No último capítulo da dissertação, o capítulo 4, consideramos os operadores de Laplace e de Schrödinger, que estão associados à equação de Schrödinger, uma das equações mais importantes da física-matemática, que descreve sistema de partículas da física atômica. Consideramos o problema de Cauchy para esta equação e, em especial, discutimos o papel de destaque em que os operadores autoadjuntos desempenham para garantir a unicidade de solução do problema de Cauchy. Alguns critérios do capítulo anterior são aplicados para se provar, sob certas condições, que o operador de Schrödinger é essencialmente autoadjunto. Grande parte das pesquisas sobre operadores de Schrödinger no século passado consistem em se determinar estas condições. Em particular, a condição de Stummel é aplicada.

No apêndice, alguns resultados básicos empregados ao longo da dissertação são apresentados sem prova.

Capítulo 1

Operadores Lineares

Neste capítulo, são apresentadas as definições e propriedades básicas de operadores lineares em um espaço de *Hilbert* separável (definição A.1.3). De modo geral, indicaremos este espaço com a letra H.

1.1 Definição de operador linear e de extensão de um operador

Definição 1.1.1. *Seja H um espaço de Hilbert. Um operador*

$$A : D(A) \subseteq H \to H \tag{1.1}$$

é uma aplicação que para cada elemento $u \in D(A)$ associa um único elemento $f \in H$, e nesse caso, indica–se f=Au. O conjunto D(A) é chamado domínio do operador A, e o conjunto

$$R(A) = \{f \in H | f = Au,\ u \in D(A)\} \tag{1.2}$$

é chamado de conjunto imagem do operador A. Diz–se que A é um operador densamente definido quando seu domínio é denso em H.

Definição 1.1.2. *Considere o operador A: D(A)$\subseteq H \rightarrow H$, onde D(A) é um subespaço vetorial de H. O operador A é chamado de operador linear quando para quaisquer elementos u,v $\in$ D(A) e para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tem–se*

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av. \tag{1.3}$$

Denotaremos por $L(H)$ o conjunto de todos os operadores lineares definidos em $D \subseteq H \rightarrow H$, que depende do operador.

Definição 1.1.3. *Seja A um operador linear em H com domínio D(A) e imagem R(A). Chama–se operador inverso de A, e indica–se por A^{-1}, a aplicação que associa a cada elemento $f \in R(A)$ um único $u \in D(A)$ tal que $Au = f$.*

O operador inverso de um operador linear A, quando existe, é também linear.
A condição de que $D(A)$ seja subespaço vetorial de H é necessária para que

$$\alpha u + \beta v \in D(A),$$

e assim a definição de operador linear faça sentido. Notamos que $R(A)$ também é subespaço vetorial de H. De fato, sejam $y, w \in R(A)$. Então, $y = Au$ e $w = Av$, para algum $u, v \in D(A)$. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ obtemos,

$$\alpha y + \beta w = \alpha Au + \beta Av = A(\alpha u + \beta v), \tag{1.4}$$

pela linearidade de A. Como $\alpha u + \beta v \in D(A)$, segue que $\alpha y + \beta w \in R(A)$.

Definição 1.1.4. *O número $\lambda \in \mathbb{C}$ chama–se autovalor do operador A quando existir $u \neq 0$ em D(A) tal que $Au = \lambda u$.*

Teorema 1.1.1. *Seja $A \in L(H)$. O operador inverso de A existe se, e somente se, $\lambda = 0$ não é autovalor de A.*

Prova: Suponha que existe o operador inverso A^{-1} com domínio $D(A^{-1}) = R(A)$. Seja $u \in D(A)$ tal que $Au = 0$. Assim,

$$A^{-1}(Au) = 0.$$

Mas, $A^{-1}(Au) = u$, isto é, $u = 0$. Então, por definição de autovalor, $\lambda = 0$ não pode ser autovalor.

Agora suponha que $\lambda = 0$ não é autovalor de A. Queremos mostrar que existe o operador inverso A^{-1}, isto é, que para todo $f \in D(A^{-1}) = R(A)$ corresponda a exatamente um elemento $u \in D(A)$ tal que $Au = f$. Para ver isso, suponha que f corresponda a dois elementos $u_1, u_2 \in D(A)$. Então, $Au_1 = f$ e $Au_2 = f$, ou seja,

$$A(u_1 - u_2) = 0. \tag{1.5}$$

Mas $\lambda = 0$ não é autovalor de A, ou seja, não pode ser $u_1 - u_2 \neq 0$. Então $u_1 - u_2 = 0$, isto é,

$$u_1 = u_2. \tag{1.6}$$

Logo, existe o operador inverso A^{-1}. $\square$

Definição 1.1.5. *Dois operadores A e B com domínios D(A) e D(B), respectivamente, são ditos iguais quando:*

(1) D(A) = D(B)=D,

(2) $Au = Bu$, $\forall\ u \in D$.

Definição 1.1.6. *Diz-se que o operador* $B : D(B) \subseteq H \to H$ *é uma extensão do operador* $A : D(A) \subseteq H \to H$ *quando:*

(1) $D(A) \subseteq D(B)$*; e*

(2) $Au = Bu, \forall\ u \in D(A)$.

Nesse caso, indica–se $A \subseteq B$*. Em especial, quando* $A \subset B$*, diz–se que* B *é uma extensão própria de* A.

Uma questão importante é a de saber se um operador possui extensão para um domínio maior no mesmo espaço de *Hilbert*. Veremos mais adiante que um operador limitado, com domínio denso, possui uma única extensão. Esse não é o caso, em geral, se o operador não for limitado.

1.2 Operadores Limitados e Ilimitados

Definição 1.2.1. *Um operador* $A : D(A) \subseteq H \to H$ *é chamado de limitado quando existe* $K \in \mathbb{R}$*,* $K > 0$*, tal que, para todo* $f \in D(A)$*, tem–se que*

$$||Af|| \leqslant K||f||. \tag{1.7}$$

A norma do operador A *é o número que se indica por* $||A||$*, e definido por*

$$||A|| = \sup_{\substack{f \in D(A) \\ f \neq 0}} \left\{ \frac{||Af||}{||f||} \right\}. \tag{1.8}$$

Um operador A *é chamado de ilimitado quando não é limitado.*

Definição 1.2.2. *Diz-se que um operador* $A \in L(H)$ *é contínuo em* $f_0 \in D(A)$ *quando para qualquer sequência* $(f_n) \subset D(A)$*, tal que* $||f_n - f_o||_H \to 0$*, então*

$$||Af_n - Af_0||_H \to 0, \text{ quando } n \to \infty \tag{1.9}$$

Quando A é contínuo em todo $f \in D(A)$*, dizemos que A é contínuo em D(A).*

Teorema 1.2.1. *Um operador linear A é contínuo em seu domínio D(A) se, e somente se, A é contínuo em algum* $f_0 \in D(A)$*.*

Prova: Suponha que A é contínuo em $D(A)$. Então, A é contínuo em todo f $\in D(A)$. Suponha, agora, que A é contínuo em algum $f_0 \in D(A)$. Seja $f \in D(A)$, qualquer, e $(f_n) \subset D(A)$ tal que $f_n \to f$. Então, $(f_n - f + f_0) \to f_0$, de modo que

$$||Af_n - Af|| = ||A(f_n - f)|| = ||A(f_n - f + f_0) - Af_0|| \to 0. \tag{1.10}$$

Como f é arbitrário, obtemos a continuidade em todo D(A). $\square$

Teorema 1.2.2. *Seja* $A \in L(H)$*. Então A é contínuo se, e somente se, A é limitado.*

Prova: Suponha que o operador A é limitado e $\|A\| = K_1$, e seja $(f_n) \subset D(A)$, tal que $f_n \to 0$. Então

$$||Af_n|| \leq K_1 ||f_n|| \tag{1.11}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, quando $n \to \infty$, $||f_n - 0|| \to 0$, e

$$\lim_{n\to\infty} ||Af_n - A.0|| \leq K_1 \lim_{n\to\infty} ||f_n - 0|| = 0. \tag{1.12}$$

Logo, A é contínuo em $f = 0$ e, pelo teorema 1.2.1, o operador A é contínuo em todo $D(A)$.

Suponha, agora, que A é contínuo em $D(A)$. Então, A é contínuo em qualquer $f_0 \in D(A)$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$ tal que para todo f satisfazendo $||f - f_0|| \leq \delta$ implica

$$||Af - Af_0|| \leq \varepsilon. \tag{1.13}$$

Seja $g \in D(A)$, qualquer, com $g \neq 0$ e

$$f = f_0 + \frac{\delta}{||g||} g.$$

Assim, $||f - f_0|| = \delta$. Como A é linear,

$$||Af - Af_0|| = ||A(f - f_0)|| = \left|\left| A\frac{\delta g}{||g||} \right|\right| = \frac{\delta}{||g||}||Ag|| \leq \varepsilon. \tag{1.14}$$

Logo, $||Ag|| \leq K_2||g||$ para todo $g \in D(A)$ com $K_1 = \dfrac{\varepsilon}{\delta}$. Isto é, o operador A é limitado em todo $D(A)$. $\square$

Para mostrar que um operador A não é limitado é suficiente encontrar uma sequência limitada $(f_n) \subset D(A)$, isto é, $||f_n|| \leq M$, para algum $M > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $||Af_n|| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Como para um operador linear ser limitado é equivalente a ser contínuo, não ser limitado é equivalente a não ser contínuo em todos os pontos do seu domínio.

Teorema 1.2.3. *Seja $A \in L(H)$ contínuo em D(A). Então, A tem uma única extensão para um operador linear contínuo definido no fecho $\overline{D(A)}$. Em particular, se D(A) é denso em H, ou seja, $\overline{D(A)} = H$, então A tem uma única extensão para um operador linear contínuo em todo H.*

Prova: Vamos primeiro estender A de $D(A)$ para o fecho $\overline{D(A)}$. Para todo $f \in \overline{D(A)}$ existe uma sequência de Cauchy $(f_n) \subset D(A)$ tal que $f_n \to f$. Como A é contínuo em $D(A)$, então A é limitado em $D(A)$, pelo teorema anterior, e

$$||Af_n - Af_m|| = ||A(f_n - f_m)|| \leq ||A||.||f_n - f_m|| \to 0 \tag{1.15}$$

quando $n, m \to \infty$, pois (f_n) é de Cauchy. Portanto, a sequência (Af_n) é de Cauchy e converge para algum elemento em H.

Para cada $f \in \overline{D(A)}$, escolha $(f_n) \subset D(A)$ tal que $f_n \to f$ e defina a extensão $\tilde{A}$ de A, definida em $\overline{D(A)}$, da seguinte forma:

$$\tilde{A}f := \lim_{n\to\infty} Af_n. \tag{1.16}$$

O operador $\tilde{A}$ está bem definido pela (1.16). De fato, seja (g_n) outra sequência de Cauchy em $D(A)$ que converge para $f \in \overline{D(A)}$ tal que (Ag_n) converge para algum elemento em H. Vamos provar que

$$\lim_{n\to\infty} Af_n = \lim_{n\to\infty} Ag_n \tag{1.17}$$

De fato, como

$$\begin{aligned} \|Af_n - Ag_n\| &\leq \|A\|.\|f_n - g_n\| \\ &= \|A\|.\|f_n - f + f - g_n\| \\ &\leq \|A\|.(\|f_n - f\| + \|g_n - f\|) \end{aligned} \tag{1.18}$$

então, no limite $n \to \infty$, o lado direito converge para zero, seguindo–se que (Af_n) e (Ag_n) tem o mesmo limite.

O operador $\tilde{A}$ é de fato extensão de A pois $D(A) \subset \overline{D(A)}$ e se $f \in D(A)$, então

$$\tilde{A}f = \lim_{n\to\infty} Af_n = Af. \tag{1.19}$$

A segunda igualdade segue da continuidade de A. No que segue será provado que $\tilde{A}$ é linear e limitado, o que implicará, pelo teorema anterior, na continuidade de $\tilde{A}$ em $\overline{D(A)}$.

Para provar a linearidade de $\tilde{A}$ em $\overline{D(A)}$, sejam (f_n) e (g_n) sequências em $D(A)$ convergindo em $\overline{D(A)}$ para f e g, respectivamente. Pela linearidade de A, obtém–se

$$\begin{aligned} \tilde{A}(f+g) &= \lim_{n\to\infty} A(f_n + g_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (Af_n + Ag_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} Af_n + \lim_{n\to\infty} Ag_n \\ &= \tilde{A}f + \tilde{A}g. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Em seguida, prova-se que $\tilde{A}$ é limitado em $\overline{D(A)}$. Temos que

$$||\tilde{A}f|| = ||\lim_{n\to\infty} Af_n|| = \lim_{n\to\infty} ||Af_n||, \tag{1.21}$$

pela continuidade da norma. Como A é contínuo em $D(A)$ e, portanto, limitado,

$$||Af_n|| \leq ||A||.||f_n||. \tag{1.22}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} ||Af_n|| \leq ||A||. \lim_{n\to\infty} ||f_n|| = ||A||.|| \lim_{n\to\infty} f_n|| = ||A||.||f||. \tag{1.23}$$

Assim,

$$||\tilde{A}f|| \leq ||A||.||f||. \tag{1.24}$$

Portanto, $\tilde{A}$ é limitado. Ora, como $\tilde{A}$ é linear e limitado, $\tilde{A}$ é contínuo em $\overline{D(A)}$.

Resta provar que $\tilde{A}$ é a única extensão de A para $\overline{D(A)}$. Suponha que existe B, outra extensão contínua de A para $\overline{D(A)}$. Daí, para todo $f \in \overline{D(A)}$, tome $(f_n) \subset D(A)$ tal que $f_n \to f$. Como $\tilde{A}$ é contínuo em $\overline{D(A)}$, então

$$\tilde{A}f = \lim_{n\to\infty} \tilde{A}f_n = \lim_{n\to\infty} Af_n. \tag{1.25}$$

Como B é também extensão contínua de A em $\overline{D(A)}$, então

$$Bf = \lim_{n\to\infty} Bf_n = \lim_{n\to\infty} Af_n = \tilde{A}f, \tag{1.26}$$

para todo $f \in \overline{D(A)}$. Então, $B = \tilde{A}$ em $\overline{D(A)}$ e podemos concluir que a extensão de A para $\overline{D(A)}$ é única.

Suponha que $D(A)$ é denso em H, isto é, $\overline{D(A)} = H$. Como H é espaço de $Hilbert$ e $\overline{D(A)}$ é fechado, então $H = \overline{D(A)} \bigoplus \overline{D(A)}^{\perp}$.

Seja $C : H \to H$ o operador definido por

$$Cf = \begin{cases} \tilde{A}f, & se \quad f \quad \in \overline{D(A)} \\ 0, & se \quad f \quad \in \overline{D(A)}^{\perp} \end{cases} \tag{1.27}$$

C é extensão de A para H e $Cf = \tilde{A}f = Af$, para todo $f \in D(A)$, pois $D(A) \subseteq \overline{D(A)}$.

□

1.3 Operadores Adjuntos

Teorema 1.3.1. *Sejam $A \in L(H)$ um operador densamente definido em H e $\langle .,. \rangle$ o produto interno em H. Seja $v \in H$, tal que existe um elemento $h \in H$, com h=h(v), tal que*

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, h \rangle , \tag{1.28}$$

para todo $u \in D(A)$. Então h é único.

Prova: O conjunto dos pares (v, h) satisfazendo (1.28) é não vazio, pois o par $(0, 0)$ está no conjunto. Suponha, agora, que h não é único, isto é, existe $w \neq h$ tal que

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, h \rangle = \langle u, w \rangle , \forall u \in D(A). \tag{1.29}$$

Assim,

$$\langle u, h - w \rangle = 0, \forall u \in D(A). \tag{1.30}$$

Mas, $D(A)$ é denso em H, logo o único elemento de H ortogonal a $D(A)$ é o elemento nulo, pelo teorema A.2 do Apêndice, de modo que $h - w = 0$, isto é, $h = w$. $\square$

Com base neste último resultado, pode-se definir o operador adjunto A^* de A:

Definição 1.3.1. *Seja $A \in L(H)$ densamente definido. O operador*

$$A^* : D(A^*) \subseteq H \to H, \tag{1.31}$$

onde

$$D(A^*) = \{v \in H|\ tal\ que\ \exists\ h(v) \in H\ com\ \langle Au, v \rangle = \langle u, h \rangle , \forall u \in D(A)\} \tag{1.32}$$

e $h = A^*v$, é chamado de operador adjunto de A.

A aplicação A^* está bem definida como operador, pois o conjunto dos pares v e h tais que $\langle Au, v \rangle = \langle u, h \rangle$, para todo $u \in D(A)$, é não vazio (ver a prova do teorema 1.3.1) e, dado $v \in H$, h é unicamente determinado por v pois $D(A)$ é denso em H, por isso se indica $h := A^*v$ e tem-se que o operador A^* é a aplicação que associa a cada $v \in D(A^*)$ o único elemento $h = A^*v \in H$. Portanto, se um operador é densamente definido, existe o seu operador adjunto.

Teorema 1.3.2. *Seja $A \in L(H)$, $D(A)$ denso em H. O operador adjunto de A é um operador linear em $D(A^*)$.*

Prova: Como $D(A)$ é denso, existe o operador $A^* : D(A^*) \subseteq H \to H$. Sejam $v_1, v_2 \in D(A^*)$. Existe um único $A^*(\alpha v_1 + \beta v_2) \in H$ tal que

$$\langle Au, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle = \langle u, A^*(\alpha v_1 + \beta v_2) \rangle, \tag{1.33}$$

para todo $u \in D(A)$. Mas,

$$\langle Au, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle = \overline{\alpha} \langle Au, v_1 \rangle + \overline{\beta} \langle Au, v_2 \rangle, \tag{1.34}$$

para todo $u \in D(A)$. Como $v_1, v_2 \in D(A^*)$,

$$\begin{aligned} \langle Au, v_1 \rangle &= \langle u, A^*v_1 \rangle, \\ \langle Au, v_2 \rangle &= \langle u, A^*v_2 \rangle \end{aligned} \tag{1.35}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle Au, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle &= \overline{\alpha} \langle u, A^*v_1 \rangle + \overline{\beta} \langle u, A^*v_2 \rangle \\ &= \langle u, \alpha A^*v_1 \rangle + \langle u, \beta A^*v_2 \rangle \\ &= \langle u, \alpha A^*v_1 + \beta A^*v_2 \rangle, \end{aligned} \tag{1.36}$$

para todo $u \in D(A)$. De (1.33) segue que para todo $u \in D(A)$,

$$\langle u, A^*(\alpha v_1 + \beta v_2) \rangle = \langle Au, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle = \langle u, \alpha A^*v_1 + \beta A^*v_2 \rangle, \tag{1.37}$$

ou ainda,

$$\langle u, A^*(\alpha v_1 + \beta v_2) - \alpha A^*v_1 - \beta A^*v_2 \rangle = 0. \tag{1.38}$$

Como $D(A)$ é denso, então, pelo teorema A.1.2, o único elemento de H ortogonal a todo $u \in D(A)$ é o vetor nulo. Portanto,

$$A^*(\alpha v_1 + \beta v_2) - \alpha A^* v_1 - \beta A^* v_2 = 0. \quad (1.39)$$

Isto é,

$$A^*(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A^* v_1 + \beta A^* v_2. \quad (1.40)$$

Portanto, A^* é linear em $D(A^*)$. □

Teorema 1.3.3. *Sejam A e B dois operadores lineares densamente definidos em H.*

(a) Se $A \subseteq B$, então $B^* \subseteq A^*$.

(b) Se $D(B^*)$ é denso em H, então $B \subseteq B^{**}$.

Prova de (a): Se $A \subseteq B$, então

$$Ax = Bx, \forall x \in D(A). \quad (1.41)$$

Sendo $D(B)$ denso em H, existe seu adjunto B^* de modo que

$$\langle Ax, y\rangle = \langle Bx, y\rangle = \langle x, B^*y\rangle, \forall x \in D(A), \forall y \in D(B^*). \quad (1.42)$$

Mas, como $D(A)$ é denso em H, existe o adjunto A^* e, portanto, de (1.42), deve–se ter que

$$A^*y = B^*y \quad (1.43)$$

Isto é, $y \in D(A^*)$ e $A^*y = B^*y$, para todo $y \in D(B^*)$. Portanto, $D(B^*) \subseteq D(A^*)$, ou seja, $B^* \subseteq A^*$.

Prova de (b): Como B é densamente definido, existe B^* tal que

$$\langle Bx, y\rangle = \langle x, B^*y\rangle, \forall x \in D(B), \forall y \in D(B^*). \quad (1.44)$$

Tomando o complexo conjugado, temos pela propriedade do produto interno:

$$\overline{\langle Bx, y\rangle} = \overline{\langle x, B^*y\rangle}, \quad (1.45)$$

ou ainda,

$$\langle y, Bx \rangle = \langle B^*y, x \rangle, \forall x \in D(B), \forall y \in D(B^*). \tag{1.46}$$

Suponha que B^* é densamente definido em H. Existe $B^{**} := (B^*)^*)$ tal que

$$\langle B^*y, x \rangle = \langle y, B^{**}x \rangle, \forall y \in D(B^*), \forall x \in D(B^{**}). \tag{1.47}$$

Comparando (1.46) e (1.47) segue que, para todo $x \in D(B)$, devemos ter que $x \in D(B^{**})$ e $B^{**}x = Bx$, ou seja $D(B) \subseteq D(B^{**})$. $\square$

1.4 Operadores Simétricos

Definição 1.4.1. *Um operador $A \in L(H)$, $D(A)$ denso em H, é chamado de operador simétrico quando*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \forall x, y \in D(A). \tag{1.48}$$

Teorema 1.4.1. *Um operador $A \in L(H)$, densamente definido em H, é simétrico se, e somente se, $A \subseteq A^*$; ou seja, A^* é uma extensão de A.*

Prova: Suponha que A é simétrico. Então,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \forall x, y \in D(A). \tag{1.49}$$

Como $D(A)$ é denso, existe A^* e (1.49) diz que

$$A^*y = Ay, \; \forall \; y \in D(A). \tag{1.50}$$

Isto é, $D(A) \subseteq D(A^*)$.

Agora, suponha que $A \subseteq A^*$. Como

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \forall x \in D(A), \forall y \in D(A^*), \tag{1.51}$$

segue que para todo $y \in D(A) \subseteq D(A^*)$,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \forall x \in D(A). \tag{1.52}$$

Portanto, A é simétrico. □

O teorema a seguir permite concluir que um operador linear, simétrico e ilimitado, não pode estar definido em todo H, isto é, o domínio do operador A é um subconjunto próprio de H.

Teorema 1.4.2 (Hellinger-Toeplitz). *Se $A \in L(H)$ é um operador simétrico com domínio D(A)=H, então A é limitado em H e $A = A^*$.*

Prova: Seja $(y_n) \subset H$ tal que $||y_n|| = 1$ e $\|Ay_n\| \neq 0$. Definimos o funcional $f_n : H \to \mathbb{C}$ por

$$f_n(x) = \langle x, Ay_n \rangle, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in H. \tag{1.53}$$

para cada n, f_n está definido em todo H. Da linearidade do produto interno e do operador A, segue que f_n é linear. Para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n é limitado, pois usando a desigualdade de Schwarz,

$$|f_n(x)| = |\langle x, Ay_n \rangle| \leq ||Ay_n||.||x|| < \infty, \tag{1.54}$$

pois x e Ay_n estão em H. Além disso, para cada $x \in H$, a sequência $(f_n(x))$ é limitada. De fato, usando a simetria de A e a desigualdade de *Schwarz*, mais o fato de que $||y_n|| = 1$, nós temos

$$|f_n(x)| = |\langle Ax, y_n \rangle| \leq ||Ax||.||y_n|| = ||Ax||.1 = ||Ax|| < \infty. \tag{1.55}$$

Agora, usando o Teorema da Limitação Uniforme, teorema A.1.3, a sequência f_n é limitada, isto é, existe um $K > 0$ tal que $||f_n|| < K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto diz que para todo $x \in H$,

$$|f_n(x)| \leq ||f_n||.||x|| \leq K||x||, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.56}$$

Tomando $x = Ay_n$, segue que

$$\|x\|^2 = \|Ay_n\|^2 = \langle Ay_n, Ay_n \rangle = f_n(Ay_n) \leq \|f_n\|.\|Ay_n\| \leq K\|Ay_n\|. \tag{1.57}$$

Isto é,

$$\|Ay_n\|^2 \leq K\|Ay_n\| \tag{1.58}$$

Portanto,$\|Ay_n\| \leq K = K\|y_n\|$, isto é, $\|A\| \leq K$, e a prova de que A é limitado está completa. Vamos provar que $A = A^*$ (um operador que satisfaz esta propriedade é chamado de autoadjunto. Operadores autoadjuntos serão estudados mais adiantes na seção 1.6). Como $A \subseteq A^*$, então $H = D(A) \subseteq D(A^*) \subseteq H$. Logo, $D(A^*) = H$. $\square$

Teorema 1.4.3. *Seja A um operador simétrico. Se B é simétrico e $A \subseteq B$, então $B \subseteq A^*$.*

Prova: Como $A \subseteq B$, então pelo teorema 1.3.3,

$$B^* \subseteq A^*. \tag{1.59}$$

Sendo B simétrico, pelo teorema 1.4.1, obtém–se que

$$B \subseteq B^*. \tag{1.60}$$

Logo, $B \subseteq A^*$. $\square$

Teorema 1.4.4. *Um operador $A \in L(H)$ é simétrico se, e somente se, $D(A)$ é denso em H e $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$, para todo $x \in D(A)$.*

Prova: Suponha que A é simétrico. Então, pela definição 1.4.1, $D(A)$ é denso em H. Ademais,

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}, \forall x \in D(A). \tag{1.61}$$

Portanto,

$$\langle Ax, x \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}, \forall x \in D, \tag{1.62}$$

e conclui–se que $Im \langle Ax, x \rangle = 0$, ou seja $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$.

Suponha, agora, que $D(A)$ é denso em H e $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$, para todo $x \in D(A)$. Pode–se verificar, para todo par $v, w \in D(A)$, que

$$\begin{aligned} \langle Av, w \rangle \quad &= \langle A(v+w), v+w \rangle \\ &- \langle A(v-w), v-w \rangle \\ &+ i \langle A(v+iw), v+iw \rangle \\ &- i \langle A(v-iw), v-iw \rangle , \end{aligned} \tag{1.63}$$

e

$$\begin{aligned} \langle v, Aw \rangle \quad &= \langle v+w, A(v+w) \rangle \\ &- \langle v-w, A(v-w) \rangle \\ &+ i \langle v+iw, A(v+iw) \rangle \\ &- i \langle v-iw, A(v-iw) \rangle , \end{aligned} \tag{1.64}$$

Da hipótese $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$, para todo $x \in D$, segue que

$$\langle Ax, x \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \langle x, Ax \rangle , \forall x \in D. \tag{1.65}$$

Aplicando este último resultado em cada parcela de (1.63) implica que (1.63)=(1.64), e portanto,

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle , \forall v, w \in D. \tag{1.66}$$

Logo, A é simétrico. □

Consequência do resultado anterior é que:

Corolário 1.4.1. *Os autovalores de um operador simétrico, quando existem, são reais.*

Prova: Seja A um operador simétrico e suponha que λ é um autovalor de A com autofunção u. Então,

$$\langle Au, u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle = \lambda \langle u, u\rangle = \lambda ||u||^2, \tag{1.67}$$

Como $\langle Au, u\rangle \in \mathbb{R}$, então $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Definição 1.4.2. *Seja $A \in L(H)$ um operador densamente definido em H. Suponha que $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $x \in D(A)$. Diz–se que o operador A é limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle Au, u\rangle \geq a \langle u, u\rangle \tag{1.68}$$

para todo $u \in D(A)$.

Observe que todo operador linear densamente definido e limitado inferiormente é um operador simétrico em seu domínio, pelo teorema 1.4.4 e definição 1.68.

Definição 1.4.3. *Um operador simétrico $A \in L(H)$ limitado inferiormente é dito positivo quando $a \geqslant 0$ e estritamente positivo quando $a > 0$.*

Teorema 1.4.5. *Seja $A \in L(H)$ um operador simétrico e limitado inferiormente, satisfazendo (1.68). Se λ é autovalor de A, então $\lambda \geqslant a$.*

Prova: Sejam φ e λ tais que $A\varphi = \lambda\varphi$, então

$$\lambda \langle \varphi, \varphi\rangle = \langle \lambda\varphi, \varphi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle \geq a \langle \varphi, \varphi\rangle . \tag{1.69}$$

Como $\langle \varphi, \varphi\rangle = ||\varphi||^2 \neq 0$, segue o resultado. $\square$

1.5 Operadores Fechados e Fecháveis

Definição 1.5.1. *Um operador $A \in L(H)$ é chamado fechado quando dada qualquer sequência $(x_n) \subset D(A)$, com $x_n \to x \in H$, e $(Ax_n) \to y \in H$, tem–se que $x \in D(A)$ e y=Ax.*

Um operador que é contínuo é também fechado, mas a recíproca não vale sempre. De fato, se A é contínuo, então a convergência de $(x_n) \subset D(A)$ para x implica a convergência de (Ax_n) para Ax, por definição, e $y = Ax$. Em geral, se A é um operador fechado, a convergência da sequência (x_n) não precisa implicar a convergência de (Ax_n), como está claro na definição 1.5.1. Considere, por exemplo um operador A que é ilimitado em $D(A)$. Sabemos, pelos teoremas 1.2.1 e 1.2.2, que A é descontínuo em todo o seu domínio. Portanto, se $(x_n) \subset D(A)$ é uma sequência convergente para $x \in H$, certamente isso não pode implicar que (Ax_n) converge para Ax. Se A for fechado, no entanto, então (Ax_n) convergirá para $Ax \in H$ sem que isso seja devido ao fato de que $x_n \to x$. No capítulo 2, dicute–se o caso concreto do operador derivada A_1, que é limitado, logo descontínuo, em seu domínio, mas é fechado.

Teorema 1.5.1. *Seja $A \in L(H)$, D(A) denso em H. Seu adjunto A^* é um operador fechado.*

Prova: Sejam $(x_n) \subset D(A^*)$ e (A^*x_n) sequências convergentes em $D(A^*)$ e H, respectivamente, isto é

$$x_n \to x \in D(A^*) \;\; e \;\; A^*x_n \to y \in H. \tag{1.70}$$

Para todo $z \in D(A)$, tem-se que

$$\langle Az, x_n \rangle = \langle z, A^*x_n \rangle . \tag{1.71}$$

Tomando $n \to \infty$, tem–se, também, pela continuidade do produto interno,

$$\langle Az, x \rangle = \langle z, y \rangle . \tag{1.72}$$

Como $x \in D(A^*)$,

$$\langle Az, x \rangle = \langle z, A^* x \rangle \tag{1.73}$$

e, portanto,

$$\langle z, A^* x \rangle = \langle z, y \rangle . \tag{1.74}$$

ou

$$\langle z, A^* x - y \rangle = 0, \quad \forall z \in D(A). \tag{1.75}$$

Como D(A) é denso, $A^*x - y = 0$ e $y = A^*x$. Portanto A^* é fechado. $\square$

Definição 1.5.2. *Um operador $A \in L(H)$ é chamado de fechável quando dada uma sequência $(x_n) \subset D(A)$ com $x_n \to 0$ em $D(A)$, e a sequência (Ax_n) também converge em H, tem–se que $(Ax_n) \to 0$.*

Definição 1.5.3. *Seja $A \in L(H)$ um operador fechável. O operador fecho de A é a aplicação $\overline{A}$ com domínio*

$$D(\overline{A}) = \{x \in H \ \ | \ \ \exists (x_n) \subset D(A), \ \ x_n \to x, \ \ e \ \ Ax_n \to y \in H\} \tag{1.76}$$

e definida como

$$\overline{A}x = \lim_{n \to \infty} Ax_n, \tag{1.77}$$

onde x e (x_n) são como em $D(\overline{A})$.

A razão para ter–se A fechável na definição 1.5.3 é para garantir que $\overline{A}$ esteja bem definido. De fato, a definição (1.77) não depende da escolha da sequência (x_n) que converge para x. De fato, sejam (x_n) e (z_n) duas sequências em $D(A)$ que convergem para $x \in H$. Suponha que $Ax_n \to y \in H$ e $Az_n \to w \in H$. Então, $x_n - z_n \to 0$ e

$$A(x_n - z_n) = Ax_n - Az_n \to y - w, \tag{1.78}$$

pois A é linear. Como A é fechável, segue que $y - w = 0$, isto é, $y = w$.

Teorema 1.5.2. *Seja $A \in L(H)$ um operador fechável. O operador $\overline{A}$ é uma extensão linear fechada de A.*

Prova: Dado $x \in D(A)$, tome $(x_n) \subset D(A)$, com $x_n = x$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $x_n \to x$ e $Ax_n \to Ax \in H$, e

$$\overline{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax. \tag{1.79}$$

Conclui–se que $D(A) \subseteq D(\overline{A})$ e $\overline{A}x = Ax$, se $x \in D(A)$. Logo, $\overline{A}$ é extensão de A.

Para provar que $\overline{A}$ é um operador linear, sejam $(x_n) \subset D(A)$ e $(y_n) \subset D(A)$ duas sequências convergentes para x, y em $D(\overline{A})$ respectivamente, com

$$(Ax_n) \to \overline{A}x \tag{1.80}$$

e

$$(Ay_n) \to \overline{A}y. \tag{1.81}$$

Sendo A um operador linear, temos que

$$\begin{aligned} \overline{A}(x+y) &= \lim_{n\to\infty} A(x_n + y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (Ax_n + Ay_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} Ax_n + \lim_{n\to\infty} Ay_n \\ &= \overline{A}x + \overline{A}y. \end{aligned} \tag{1.82}$$

Portanto, o operador $\overline{A}$ é um operador linear.

Agora, provaremos que o operador $\overline{A}$ é um operador fechado. Seja (x_n) uma sequência em $D(\overline{A})$ tal que $x_n \to x \in H$, $\overline{A}x_n \to y \in H$. Daí, dado $\varepsilon_1 > 0$ qualquer, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ implica que

$$||x_n - x|| < \varepsilon_1. \tag{1.83}$$

Como x_n está em $D(\overline{A})$, então para cada n, existe uma sequência convergente (w_k) em $D(A)$ tal que, para $k \to \infty$,

$$w_k(n) \to x_n \;\; e \;\; Aw_k(n) \to \overline{A}x_n. \tag{1.84}$$

Mais precisamente, dado $\varepsilon_2 > 0$ qualquer, para cada n, existe um $k_0(n) \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$ implica que

$$||w_k(n) - x_n|| < \varepsilon_2. \tag{1.85}$$

Seja $(z_n) \subset D(A)$ onde $z_n = w_k(n)$ e $n \geq n_0$, $k \geq k_0(n)$. Então,

$$\begin{aligned} ||z_n - x|| &= ||z_n - x_n + x_n - x|| \\ &\leq ||z_n - x_n|| + ||x_n - x|| \\ &< \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{aligned} \tag{1.86}$$

Como ε_1 e ε_2 são quaisquer, tome $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Nesse caso,

$$||z_n - x|| < \varepsilon. \tag{1.87}$$

Logo, $z_n \longrightarrow x$.

Similarmente, prova–se que

$$||Az_n - y|| \leq ||Az_n - \overline{A}x_n|| + ||\overline{A}x_n - y|| \rightarrow 0. \tag{1.88}$$

Conclui–se que existe uma sequência $(z_n) \subset D(A) \subseteq D(\overline{A})$ tal que $z_n \rightarrow x$ e $Az_n \rightarrow y$. A definição de $\overline{A}$ implica que $x \in D(\overline{A})$ e $y = \overline{A}x$. Como $(z_n) \subset D(A)$, $z_n \rightarrow x$ e $\overline{A}z_n \rightarrow y$ implica que $x \in D(\overline{A})$ e $y = \overline{A}x$. Logo $\overline{A}$ é fechado. $\square$

Teorema 1.5.3. *Um operador $A \in L(H)$ é fechável se, e somente se, existe uma extensão lienar fechada de A.*

Prova: Suponha A é fechável. Existe o operador fecho $\overline{A}$ que é uma extensão linear fechada de A, pelo teorema anterior.

Suponha, agora, que A tem uma extensão fechada $\tilde{A}$. Seja $(x_n) \subset D(A)$ tal que $x_n \rightarrow 0$ em H e $Ax_n \rightarrow y \in H$. Como $\tilde{A}$ é extensão de A, $x_n \in D(\tilde{A})$ e $\tilde{A}x_n \rightarrow y$. Sendo $\tilde{A}$ fechado, $\tilde{A}0 = y$ e $y = 0$; logo, o operador A é fechável. $\square$

Teorema 1.5.4. *Seja $A \in L(H)$. Então, $A = \overline{A}$ se, e somente se, A é fechado.*

Prova: Suponha $A = \overline{A}$. Seja $(x_n) \subset D(A)$, com $x_n \to x \in H$ e $Ax_n \to y \in H$. Como $D(A) = D(\overline{A})$, então, pela definição de $D(\overline{A})$ segue que $x \in D(\overline{A}) = D(A)$ e

$$y = \overline{A}x = Ax. \tag{1.89}$$

Portanto, A é fechado.

Suponha, agora, que A é fechado e $(x_n) \subset D(A)$ com

$$x_n \to x \quad e \quad Ax_n \to y. \tag{1.90}$$

Assim, $x \in D(A)$ e $y = Ax$. Claro que $x \in D(\overline{A})$, pois $D(A) \subseteq D(\overline{A})$. Como A é fechado, o limite de qualquer sequência convergente está em $D(A)$. Portanto, esse limite está também em $D(\overline{A})$. Assim, $D(A) = D(\overline{A})$. Logo, $A = \overline{A}$. $\square$

Teorema 1.5.5. *Seja $A \in L(H)$ um operador fechável. Então, toda extensão fechada de A contém $\overline{A}$, ou seja, $\overline{A}$ é a extensão fechada mínima de A.*

Prova: Seja B outra extensão fechada de A. Para todo $x \in D(\overline{A})$, existe uma sequência $(x_n) \subset D(A)$, onde $x_n \to x$ e

$$Ax_n \to \overline{A}x. \tag{1.91}$$

Mas $(x_n) \subset D(B)$ pois B é extensão de A e, como B é fechado, temos que

$$x \in D(B). \tag{1.92}$$

Assim, $D(\overline{A}) \subseteq D(B)$. Como B é qualquer extensão fechada de A, segue que $\overline{A}$ é a menor extensão fechada de A. $\square$

Teorema 1.5.6. *Seja $A \in L(H)$ um operador simétrico, então*

(a) A é fechável

(b) $\overline{A}$ é simétrico

Prova de (a): Seja $A \in L(H)$ um operador simétrico. Pelos teoremas 1.4.1 e 1.5.1 A^* é fechado, e portanto, A^* é uma extensão fechada de A. Logo, o operador A é fechável pelo teorema 1.5.3.

Prova de (b): Como A é um operador fechável, por (a), então existe o operador $\overline{A}$. Assim, para todo $f, g \in D(\overline{A})$, existem sequências (f_n) e (g_n) em D(A) tais que

$$f_n \to f \quad e \quad g_n \to g, \tag{1.93}$$

$$Af_n \to \overline{A}f \quad e \quad Ag_n \to \overline{A}g. \tag{1.94}$$

Como A é simétrico, por (1.93) e por (1.94), obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{A}f, g \right\rangle &= \left\langle \lim_{n\to\infty} Af_n, \lim_{m\to\infty} g_m \right\rangle \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \left\langle Af_n, g_m \right\rangle \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \left\langle f_n, Ag_m \right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{n\to\infty} f_n, \lim_{m\to\infty} Ag_m \right\rangle \\
&= \left\langle f, \overline{A}g \right\rangle .
\end{aligned} \tag{1.95}$$

Portanto, $\overline{A}$ é simétrico. $\square$

Teorema 1.5.7. *Seja $A \in L(H)$ um operador simétrico. Então $(\overline{A})^* = A^*$*

Prova: Como $\overline{A}$ é extensão fechada de A, então $A \subseteq \overline{A}$, e

$$(\overline{A})^* \subseteq A^*, \tag{1.96}$$

pelo teorema 1.3.3. Pela definição de $\overline{A}$, para cada $x \in D(\overline{A})$, existe uma sequência $(x_n) \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to Ax$. Para todo $y \in D(A^*)$, tem–se

$$\langle Ax_n, y \rangle = \langle x_n, A^*y \rangle . \tag{1.97}$$

Mas,

$$\left\langle \overline{A}x, y \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, A^*y \rangle = \langle x, A^*y \rangle , \tag{1.98}$$

pela continuidade do produto interno. Como $A \subseteq \overline{A}$, então $\overline{A}$ está densamente definido. Existe, então, o operador adjunto $\overline{A}^*$ e, para todo $y \in D(A^*)$,

$$\langle \overline{A}x, y \rangle = \left\langle x, \overline{A}^* y \right\rangle. \tag{1.99}$$

Portanto, devemos ter

$$D(A^*) \subseteq D(\overline{A}^*) \tag{1.100}$$

Isto é,

$$A^* \subseteq \overline{A}^* \tag{1.101}$$

Assim, por (1.96) e por (1.101), temos que

$$A^* = \overline{A}^*. \; \square$$

Lema 1.5.1. *Seja $A \in L(H)$ um operador simétrico. Então, existe o operador A^{***}, e $A^{***} = A^*$.*

Prova: Como A é simétrico, então pelo teorema 1.4.1,

$$A \subseteq A^*, \tag{1.102}$$

e A^* está densamente definido. Portanto, existe o operador fechado A^{**}. Pelo teorema 1.3.3,

$$A^{**} \subseteq A^*. \tag{1.103}$$

Sendo A simétrico, então A é fechável e existe o operador fecho $\overline{A}$. Como $D(A^*)$ é denso, pelo teorema 1.3.3(b),

$$A \subseteq A^{**}, \tag{1.104}$$

e, por isso, o operador A^{**} é extensão fechada de A e A^{**} está densamente definido. Existe, portanto o operador A^{***}. Pelo teorema 1.5.5, $\overline{A}$ é a menor extensão fechada de A, implicando que

$$\overline{A} \subseteq A^{**}. \tag{1.105}$$

Pela (1.105) e pelo teorema 1.3.3,

$$A^{***} \subseteq (\overline{A})^*. \tag{1.106}$$

Como A é simétrico, segue, pelo teorema anterior, que $(\overline{A})^* = A^*$ e

$$A^{***} \subseteq (\overline{A})^* = A^*. \tag{1.107}$$

Para todo $x \in D(A)$ e para todo $y \in D(A^*)$,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle . \tag{1.108}$$

Pela (1.104), $A \subseteq A^{**}$, então $x \in D(A) \subseteq D(A^{**})$ e $A^{**}x = Ax$. Para todo $y \in D(A^*)$,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle A^{**}x, y \rangle = \langle x, A^{***} y \rangle . \tag{1.109}$$

Logo,

$$A^* \subseteq A^{***}. \tag{1.110}$$

Portanto, por (1.107) e (1.110), obtemos que $A^* = A^{***}$. $\square$

Como $A^{**} \subseteq A^* = A^{***} := (A^{**})^*$, então $A^{**} \subseteq (A^{**})^*$. Já provamos que um operador B é simétrico se, e somente se, $B \subseteq B^*$. Por isso, A^{**} é também simétrico.

Lema 1.5.2. *Seja $A \in L(H)$ um operador densamente definido em H. Então, A é fechado se, e somente se, $D(A^*)$ é denso em H e $A = A^{**}$.*

Prova: Ver ref[6], Apêndice A.

Teorema 1.5.8. *Seja $A \in L(H)$ um operador densamente definido e simétrico, então $\overline{A} = A^{**}$.*

Prova: Pelo teorema 1.5.7, temos que $(\overline{A})^* = A^*$, resultado equivalente ao fato de que $A^* \subseteq (\overline{A})^* \subseteq A^*$ ou, usando o teorema 1.3.3(b),

$$A^{**} \subseteq \overline{A}^{**} \subseteq A^*. \tag{1.111}$$

O lema 1.5.2 garante que um operador linear B densamente definido e fechado satisfaz $B = B^{**}$. Tomando $B = \overline{A}$ temos que $\overline{A}^{**} = \overline{A}$. Substituindo e, (1.111) obtemos que

$$A^{**} \subseteq \overline{A} \subseteq A^{**} \tag{1.112}$$

ou, equivalentemente, $\overline{A} = A^{**}$, provando o resultado. $\square$

1.6 Operadores Autoadjuntos

Definição 1.6.1 (Operador Autoadjunto). *Seja $A \in L(H)$, com $D(A)$ denso em H. O operador A é chamado de autoadjunto quando $D(A) = D(A^*)$ e $Ax = A^*x$, para todo $x \in D(A)$, isto é, $A = A^*$.*

Na referência [1], a definição 1.6.1 é apresentado como um teorema, e o próximo resultado como definição de operador autoadjunto. Por conveniência, e em conformidade com o estudo da análise funcional, optamos pela definição 1.6.1 de operador autoadjunto. No próximo teorema estaremos demonstrando satisfatoriamente esta relação.

Teorema 1.6.1. *Seja $A \in L(H)$, $D(A)$ denso em H e E o operador identidade. Então A é autoadjunto se, e somente se,*

(i) *A é simétrico*

(ii) $(A + iE)D(A) = H$

(iii) $(A - iE)D(A) = H$

onde $i = \sqrt{-1}$, com (ii) e (iii) significando que o conjunto imagem do operador $(A \pm iE)$, quando aplicado em todos os elementos de $D(A)$, é todo o espaço de Hilbert H.

Prova: Sendo A densamente definido, existe o operador adjunto A^*. Suponha que A é autoadjunto. Nesse caso, $D(A) = D(A^*)$ e, para todo $u, v \in D(A)$ obtemos

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle = \langle u, Av \rangle . \tag{1.113}$$

Portanto, o operador A é simétrico. Isto implica que

$$||(A \pm iE)u||^2 = ||Au||^2 + ||u||^2 \geq ||u||^2. \tag{1.114}$$

Suponha que $\lambda = 0$ é autovalor de $(A \pm iE)u$. Então existe $u \neq 0$ tal que $(A \pm iE)u = 0$ e, nesse caso, $\pm i$ são autovalores complexos de A, o que contradiz o resultado anterior de que A é simétrico. Logo, $\lambda = 0$ não pode ser autovalor de $(A \pm iE)u$. O teorema 1.1.1 permite concluir, então, que existem os operadores inversos $(A \pm iE)^{-1}$. Esses operadores são limitados. De fato, sejam

$$D_1 = D((A + iE)^{-1}) \tag{1.115}$$

e

$$D_2 = D((A - iE)^{-1}). \tag{1.116}$$

Seja $f \in D_1$. Existe $u \in D(A)$ tal que

$$u = (A + iE)^{-1} f. \tag{1.117}$$

Substituindo na desigualdade (1.114),

$$||(A + iE)^{-1} f|| \leq ||(A + iE)(A + iE)^{-1} f|| = ||f||, \tag{1.118}$$

isto é, para todo $f \in D_1$,

$$||(A + iE)^{-1} f|| \leq ||f||, \tag{1.119}$$

Vamos provar, agora, que $D_1 = H$. Isso será feito em duas etapas.

1. D_1 é denso em H. Para provar essa afirmação, notamos que se assim não fosse, existiria um $g \in H$, $g \neq 0$, tal que $\langle (A + iE)u, g \rangle = 0$, para todo $u \in D(A)$, isto é,

$$\langle Au, g \rangle + i \langle u, g \rangle = 0, \tag{1.120}$$

ou

$$\langle Au, g \rangle = \langle u, ig \rangle \,. \tag{1.121}$$

Mas, $\langle Au, g \rangle = \langle u, A^*g \rangle$; logo, $g \in D(A^*)$ e, portanto, $\langle u, A^*g - ig \rangle = 0$, para todo $u \in D(A)$. Sendo $D(A)$ denso em H, pelo teorema A.1.2, $A^*g = ig$. Como $A = A^*$, obtemos $Ag = ig$ caracterizando i como autovalor de A, o que não pode, pois A é simétrico. Logo, somente $g = 0$ é possível e D_1 é denso em H.

2. $D_1 = H$. Para provar esta segunda afirmação, note que que como D_1 é denso em H, então para todo $f \in H$ existe uma sequência de Cauchy $(f_n) \subset D_1$ tal que

$$f_n \to f. \tag{1.122}$$

Vamos mostrar que $f \in D_1$. Seja $(g_n) \subset D(A)$ tal que

$$g_n = (A + iE)^{-1} f_n, \tag{1.123}$$

daí, por (1.119),

$$\begin{aligned} ||g_n - g_m|| &= ||(A + iE)^{-1} f_n - (A + iE)^{-1} f_m|| \\ &= ||(A + iE)^{-1}(f_n - f_m)|| \leq ||f_n - f_m|| \to 0. \end{aligned}$$

Então (g_n) é uma sequência de Cauchy e, portanto, existe um $g \in H$ tal que

$$g_n \to g. \tag{1.124}$$

Note que, sendo A simétrico,

$$\langle Au, g_n \rangle = \langle u, Ag_n \rangle = \langle u, f_n - ig_n \rangle \,, \tag{1.125}$$

pois $(A + iE)g_n = f_n$, isto é,

$$Ag_n + ig_n = f_n, \tag{1.126}$$

ou ainda,

$$Ag_n = f_n - ig_n. \tag{1.127}$$

No limite quando $n \to \infty$,

$$\langle Au, g \rangle = \langle u, f - ig \rangle \tag{1.128}$$

para todo $u \in D(A)$. Mas,

$$\langle Au, g \rangle = \langle u, A^* g \rangle , \tag{1.129}$$

isto é, $A^* g = f - ig$, ou também, $(A^* + iE)g = f$. Como $A^* = A$, então

$$(A + iE)g = f, \tag{1.130}$$

portanto, $f \in D_1$, para todo $f \in H$. Então, concluímos que

$$D_1 = H. \tag{1.131}$$

De forma análoga, prova–se também que

$$D_2 = H. \tag{1.132}$$

Suponha, agora, que o operador A satisfaz as condições (i), (ii) e (iii). Vamos mostrar que $A = A^*$.

O operador A é simétrico pela condição (i). O teorema 1.4.1, então, garante que

$$D(A) \subseteq D(A^*). \tag{1.133}$$

Para provar que $D(A^*) \subseteq D(A)$, seja $g \in D(A^*)$ qualquer. Então, existe $f \in H$ tal que $f = A^* g$ e, para todo $u \in D(A)$,

$$\langle Au, g \rangle = \langle u, f \rangle . \tag{1.134}$$

Note que

$$\langle Au, g \rangle + \langle iu, g \rangle = \langle u, f \rangle + \langle iu, g \rangle = \langle u, f - ig \rangle . \tag{1.135}$$

Portanto,

$$\langle (A + iE)u, g \rangle = \langle u, f - ig \rangle , \tag{1.136}$$

para todo $u \in D(A)$. Pela condição (iii),

$$(A - iE)D(A) = H. \tag{1.137}$$

Então,

$$f - ig = (A - iE)v \tag{1.138}$$

para algum $v \in D(A)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \langle Au + iu, g \rangle &= \langle u, Av - iv \rangle = \langle u, Av \rangle + \langle iu, v \rangle \\ &= \langle Au, v \rangle + \langle iu, v \rangle \\ &= \langle Au + iu, v \rangle \end{aligned} \tag{1.139}$$

para todo $u \in D(A)$. Então,

$$\langle Au + iu, g - v \rangle = 0 \tag{1.140}$$

ou ainda,

$$\langle (A + iE)u, g - v \rangle = 0, \tag{1.141}$$

para todo $u \in D(A)$. Como $(A + iE)D(A) = H$, somente $g - v = 0$ é possível. Logo, $g = v \in D(A)$, e podemos concluir que

$$D(A^*) \subseteq D(A). \tag{1.142}$$

De (1.133) e (1.142), $D(A^*) = D(A)$, e $A = A^*$. $\square$

Capítulo 2

Operadores de Multiplicação e Derivada

No capítulo anterior vimos que um operador linear A, densamente definido e limitado em seu domínio, pode ser estendido de modo único para um operador $\tilde{A}$ definido em todo espaço de *Hilbert* H. Suponha que $\tilde{A}$ é um operador simétrico. O teorema 1.4.2 (Hellinger-Toeplitz) afirma que um operador simétrico definido em todo H é auto-adjunto. O mesmo teorema garante que o operador também é limitado. Podemos concluir que $\tilde{A}$ é a única extensão autoadjunta de A.

Suponha, agora, que A é um operador simétrico ilimitado. Dependendo do operador A, pode não haver extensões autoadjuntas ou apenas uma, ou ainda, infinitas delas, como veremos neste capítulo. Seja A um operador simétrico e suponha que A admite extensões autoadjuntas. Seja B uma extensão autoadjunta qualquer de A. Temos que $A \subseteq A^*$ e $A \subseteq B$. Então, $B^* \subseteq A^*$ pelo teorema 1.3.3, e podemos concluir que

$$A \subseteq B = B^* \subseteq A^*. \tag{2.1}$$

Desse modo, A^* é a extensão maximal de A, e o problema de se construir uma extensão autoadjunta de A consiste em escolher $D(B)$ "entre" $D(A)$ e $D(A^*)$. A ação de B pode então ser definida restringindo A^* sobre $D(B)$.

Neste capítulo consideramos alguns exemplos importantes de operadores lineares e a existência de extensões. Nestes exemplos fica claro que um operador ilimitado pode ter uma infinidade de extensões autoadjuntas ou nenhuma, ou apenas uma. A referência básica utilizada neste capítulo foi a [6].

2.1 Operadores Multiplicação

Definição 2.1.1. *Um operador $M : D(M) \subseteq H \to H$, $H = L^2(I)$ onde $I \subseteq \mathbb{R}$, dado por*

$$(Mf)(x) = m(x)f(x) \tag{2.2}$$

é chamado de um operador multiplicação, com D(M) o domínio de M, e D(f)=D(m)=I o domínio f e m.

No que segue investigaremos as propriedades desse operador em dois domínios distintos do espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, com $m(x) = x$.

Definição 2.1.2. *Seja M_1 o operador multiplicação definido no domínio*

$$D(M_1) = \Big\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} | f \in L^2([a,b]) \ \ e \ \ M_1 f \in L^2([a,b]) \Big\} \tag{2.3}$$

por

$$(M_1 f)(x) = x f(x) \tag{2.4}$$

Teorema 2.1.1. *O operador M_1 está densamente definido e é limitado.*

Prova: O domínio $D(M_1)$ é denso em $L^2([a,b])$, pois $C([a,b])$ é denso em $L^2([a,b])$. Como

$$||M_1 f||^2 = \int_a^b |xf(x)|^2 dx \leq \max_{[a,b]} |x|^2 \int_a^b |f|^2 dx, \tag{2.5}$$

temos

$$||M_1 f|| \leq |b|.\|f\|. \tag{2.6}$$

Logo, M_1 é limitado. $\square$

Teorema 2.1.2. *O operador M_1 é autoadjunto.*

Prova: Como M_1 está densamente definido, existe o operador adjunto M_1^*. Sejam $f, g \in D(M_1)$ tal que

$$\int_a^b (M_1 f)\overline{g}dx = \int_a^b xf\overline{g}dx = \int_a^b f\overline{xg}dx. \tag{2.7}$$

Portanto,

$$\langle M_1 f, g\rangle = \langle f, xg\rangle = \langle f, M_1 g\rangle \tag{2.8}$$

para todo $f \in D(M_1)$ e $g \in D(M_1)$. Logo, M_1 é simétrico e, pelo teorema 1.4.1

$$M_1 \subseteq M_1^* \tag{2.9}$$

e

$$\langle M_1 f, g\rangle = \langle f, M_1^* g\rangle. \tag{2.10}$$

Para provar que $M_1^* \subseteq M_1$, seja $g \in D(M_1^*)$ e $h = M_1^* g \in L^2([a,b])$. Daí, para todo $f \in D(M_1)$,

$$\langle M_1 f, g\rangle = \langle f, M_1^* g\rangle = \langle f, h\rangle. \tag{2.11}$$

Comparando com (2.8),

$$\langle f, xg - h\rangle = 0, \tag{2.12}$$

para todo $f \in D(M_1)$. Como $D(M_1)$ é denso, então

$$xg - h = 0 \tag{2.13}$$

em $L^2([a,b])$. Portanto, $xg = h \in L^2([a,b])$, o que nos permite obter $xg \in L^2([a,b])$ e $M_1^* g = xg$. Portanto, $g \in L^2([a,b])$, e $M_1^* g \in L^2([a,b])$. Comparando com (2.3), obtemos que $D(M_1^*) = D(M_1)$ e, assim, M_1 é autoadjunto. $\square$

Sendo autoadjunto, o operador M_1 é fechado, pois $M_1 = M_1^*$, e M_1^* é um operador fechado. Sendo assim, $\overline{M_1} = M_1$.

Definição 2.1.3. *Seja M_2 o operador com domínio*

$$D(M_2) = \Big\{ f | f \in L^2(\mathbb{R}) \quad e \quad M_2 f \in L^2(\mathbb{R}) \Big\} \tag{2.14}$$

definido por

$$(M_2 f)(x) = x f(x) \tag{2.15}$$

Teorema 2.1.3. *O operador M_2 está definido em um subconjunto próprio denso do espaço $L^2(\mathbb{R})$, e é ilimitado.*

Prova: O conjunto $D(M_2)$ é não vazio, pois o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R})$ das funções de suporte compacto em $\mathbb{R}$, está em $D(M_2)$. De fato, seja $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ qualquer, com suporte $\Omega \subset \mathbb{R}$. Temos

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^2 dx = \int_{\Omega} |h(x)|^2 dx < \infty \tag{2.16}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} |M_2 h(x)|^2 dx = \int_{\Omega} x^2 |h(x)|^2 dx < \infty, \tag{2.17}$$

o que nos permite concluir que $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset D(M_2)$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$, então $D(M_2)$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$. A função

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & se \quad x \geq 1 \\ 0, & se \quad x < 1; \end{cases} \tag{2.18}$$

satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1 < \infty \tag{2.19}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} |(M_2 g)(x)|^2 dx = \int_1^\infty 1 dx = \infty. \tag{2.20}$$

Portanto, $g \in L^2(\mathbb{R})$, mas $M_2 g \notin L^2(\mathbb{R})$, logo, $D(M_2) \neq L^2(\mathbb{R})$.

Para provar que M_2 é ilimitado, considere a sequência $(f_n) \subset D(M_2)$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in [n, n+1] \\ 0, & se \quad x \notin [n, n+1]. \end{cases} \tag{2.21}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $||f_n|| = 1$. A sequência $(M_2 f_n)$ não é limitada pois

$$||M_2 f_n|| = \left(\int_n^{n+1} x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} > n||f_n||, \tag{2.22}$$

e,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||M_2 f_n||}{||f_n||} \to \infty, \tag{2.23}$$

e completa–se assim a prova do teorema. □

Teorema 2.1.4. *O operador M_2 é autoadjunto.*

Prova: Pelo teorema anterior, o operador M_2 está densamente definido em $L^2(\mathbb{R})$. Existe, então, o operador adjunto M_2^*. O operador M_2 é simétrico, pois, para todo $u, v \in D(M_2)$,

$$\langle M_2 u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}} (xu(x))\overline{v(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\overline{xv(x)}dx = \langle u, M_2 v \rangle \tag{2.24}$$

Pelo teorema 1.4.1,

$$D(M_2) \subseteq D(M_2^*) \tag{2.25}$$

Por outro lado, para todo $w \in D(M_2^*)$ e $u \in D(M_2)$,

$$\langle M_2 u, w \rangle = \langle u, M_2^* w \rangle . \tag{2.26}$$

Mas,

$$\langle M_2 u, w \rangle = \int_{\mathbb{R}} (xu)\overline{w}dx = \int_{\mathbb{R}} u\overline{(xw)}dx \tag{2.27}$$

e

$$\langle u, M_2^* w \rangle = \int_{\mathbb{R}} u\overline{(M_2^* w)}dx \tag{2.28}$$

Então, para todo $u \in D(M_2)$,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \left[\overline{xw(x)} - \overline{M_2^* w}\right] dx = 0. \tag{2.29}$$

Como $D(M_2)$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$, segue, pelo teorema A.2 do Apêndice, que o único elemento de $L^2(\mathbb{R})$ ortogonal a $D(M_2)$ é o elemento nulo. Assim,

$$\overline{xw(x) - M_2^* w} = 0, \tag{2.30}$$

em $L^2(\mathbb{R})$ ou, equivalentemente,

$$xw(x) - M_2^* w = 0, \tag{2.31}$$

isto é,

$$M_2^* w = xw = M_2 w, \tag{2.32}$$

para todo $w \in D(M_2^*)$. Assim, pode–se concluir que

$$D(M_2^*) \subseteq D(M_2). \tag{2.33}$$

Os resultados (2.25) e (2.33) implicam que $D(M_2^*) = D(M_2)$. Logo, M_2 é um operador autoadjunto. $\square$

Sendo M_2 um operador autoadjunto, então M_2 é um operador fechado pelos teoremas 1.5.1 e 1.5.4, e $\overline{M_2} = M_2$. Um operador não precisa ter autovalores, como veremos no proximo resultado.

Teorema 2.1.5. *O operador M_2 não tem autovalores.*

Prova: Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, qualquer, e $u \in D(M_2)$ tal que

$$M_2 u = \lambda u. \tag{2.34}$$

Então,

$$\|(M_2 - \lambda E)\|^2 = 0. \tag{2.35}$$

Mas,

$$\|(M_2 - \lambda E)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |M_2 u - \lambda u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |x - \lambda|^2 |u|^2 dx. \tag{2.36}$$

Como $|x - \lambda| > 0$, para todo $x \neq \lambda$, segue que $u(x) = 0$. Portanto, λ não é autovalor de M_2. $\square$

2.2 Operadores Derivada

Definição 2.2.1. *Um operador $A : D(A) \subseteq H \to H$, $H = L^2(I)$ onde $I \subseteq \mathbb{R}$, dado pordado por*

$$(Af)(x) = a\frac{df}{dx} \tag{2.37}$$

com coeficiente constante $a \in \mathbb{C}$ é chamado de um operador derivada, com $D(A)$ e D(f)=I os domínios de A e f, respectivamente.

No que segue, A será considerado com coeficiente $a = i = \sqrt{-1}$, em vários domínios no espaço de Hilbert é $L^2([\alpha, \beta])$, com com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

Teorema 2.2.1. *Seja $I = [\alpha, \beta]$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ e $AC(I)$ o espaço das funções absolutamente contínuas definidas em I. Seja A_1 o operador com domínio*

$$D(A_1) = \Big\{ f \in L^2(I) | f \in AC(I), f' \in L^2(I) \text{ e } f(\alpha) = f(\beta) = 0 \Big\} \tag{2.38}$$

definido por

$$A_1 f = i\frac{df}{dx}, \tag{2.39}$$

onde $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$. Então,

a) $D(A_1)$ é denso em $L^2(I)$

b) A_1 é um operador ilimitado

c) A_1 é simétrico.

Prova

(a): O conjunto das funções

$$\Phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\beta-\alpha}} sen\left[\frac{k\pi}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\right] \tag{2.40}$$

com $k = 1, 2, 3, ...$ é um conjunto ortonormal completo em $L^2([\alpha, \beta])$. Além disso, $\Phi_k(x) \in D(A_1)$, para todo k. Portanto, $D(A_1)$ é denso em $L^2([\alpha, \beta])$.

(b): Seja $n \geq \frac{2}{\beta-\alpha}$. Defina

$$f_n(x) = \begin{cases} n(x-\alpha) & , x \in \left[\alpha, \alpha + \frac{1}{n}\right] \\ 2 - n(x-\alpha) & , x \in \left[\alpha + \frac{1}{n}, \alpha + \frac{2}{n}\right] \\ 0 & , x \in \left[\alpha + \frac{2}{n}, \beta\right] \end{cases} \tag{2.41}$$

Temos que $f_n \in D(A_1)$ e

$$||f_n||^2 \leq \frac{2}{n}. \tag{2.42}$$

Ademais,

$$f_n'(x) = \begin{cases} n & , x \in \left(\alpha, \alpha + \frac{1}{n}\right) \\ -n & , x \in \left(\alpha + \frac{1}{n}, \alpha + \frac{2}{n}\right) \\ 0 & , x \in \left(\alpha + \frac{2}{n}, \beta\right) \end{cases} \tag{2.43}$$

com

$$||A_1 f_n||^2 = ||i f_n'||^2 = \int_\alpha^\beta |f_n'(x)|^2 dx = 2n. \tag{2.44}$$

Segue que

$$\frac{\|A_1 f_n\|}{\|f_n\|} \geq \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{\frac{2}{n}}} = n. \tag{2.45}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|A_1 f_n\|}{\|f_n\|} = \infty \tag{2.46}$$

e A_1 é um operador ilimitado.

(c): Fazendo integração por partes,

$$\langle A_1 f, g\rangle - \langle f, A_1 g\rangle = i\int_\alpha^\beta f'(x)\overline{g(x)}dx + i\int_\alpha^\beta f(x)\overline{g'(x)} = if(x)\overline{g(x)}\Big|_\alpha^\beta = 0 \quad (2.47)$$

Então,

$$\langle A_1 f, g\rangle = \langle f, A_1 g\rangle\,, \quad (2.48)$$

para todo $f, g \in D(A_1)$. □

Teorema 2.2.2. *Seja*

$$F = \Big\{f \in L^2(I) | f \in AC(I),\ f' \in L^2(I)\Big\} \quad (2.49)$$

O operador A_1 tem adjunto A_1^* definido em

$$D(A_1^*) = F \quad (2.50)$$

por

$$A_1^* f = if' \quad (2.51)$$

Prova: O operador A_1 é densamente definido pelo teorema anterior. Isso garante a existência de A_1^*. Seja $D(A_1^*)$ o domínio de A_1^*. Vamos mostrar que $F \subseteq D(A_1^*)$. Sejam $f \in D(A_1)$ e $g \in F$. Fazendo integração por partes, obtemos que

$$\int_\alpha^\beta (A_1 f)\overline{g}dx = \int_\alpha^\beta f\overline{(ig')}dx + if(\beta)\overline{g(\beta)} - if(\alpha)\overline{g(\alpha)} \quad (2.52)$$

Como $f \in D(A_1)$, então $f(\beta) = f(\alpha) = 0$ e concluímos que

$$\langle A_1 f, g\rangle = \langle f, ig'\rangle \quad (2.53)$$

para todo $f \in D(A_1)$ e $g \in F$. Mas, da existência de A_1^*, segue que

$$\langle A_1 f, g\rangle = \langle f, A_1^* g\rangle\,. \quad (2.54)$$

Então, $g \in D(A_1^*)$, para todo $g \in F$; logo,

$$F \subseteq D(A_1^*) \quad (2.55)$$

e, para $g \in F$,

$$A_1^* g = ig', \tag{2.56}$$

pois pelas (2.53) e (2.54),

$$\langle f, A_1^* g - ig' \rangle = 0, \ \forall f \in D(A). \tag{2.57}$$

Como $D(A)$ é denso, a (2.54) segue. Para provar que $D(A_1^*) \subseteq F$, seja $g \in D(A_1^*)$. Defina a função $h(x)$, $x \in I$, por

$$h(x) = \int_\alpha^x (A_1^* g)(t)dt + \delta, \tag{2.58}$$

onde $\delta \in \mathbb{C}$. Como $g \in L^2(I)$ e $A_1^* g \in L^2(I)$ então g e $(A_1^* g) \in L^1(I)$. Pelo teorema A.6 do Apêndice, h é absolutamente contínua em I e

$$h' = A_1^* g. \tag{2.59}$$

A função h é contínua em I, pois é absolutamente contínua em I e, portanto, também integrável em I. Podemos, então, definir

$$\delta := \frac{i}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta \left[g(x) + i \int_\alpha^x (A_1^* g) dt \right] dx \tag{2.60}$$

Com esta definição de δ, segue que

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{i}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta \Big[g(x) + i(h(x) - \delta) \Big] dx \\
&= \frac{i}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta \Big[g(x) + ih(x) \Big] dx + \frac{i}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta \Big[-i\delta \Big] dx \\
&= \delta + \frac{i}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta \Big[g(x) + ih(x) \Big]
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Portanto,

$$\int_\alpha^\beta \Big[g(x) + ih(x) \Big] dx = 0 \tag{2.62}$$

Temos, também, que para todo $f \in D(A_1)$ e $g \in D(A_1^*)$,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta if'(x)\overline{g(x)}dx &= \langle A_1 f, g\rangle = \langle f, A_1^* g\rangle = \langle f, h'\rangle \\ &= \int_\alpha^\beta f\overline{h'}dx.\end{aligned} \tag{2.63}$$

Integrando por partes, como no teorema A.3.2,

$$\int_\alpha^\beta if'(x)\overline{g(x)}dx = f(x)\overline{h(x)}\ \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)\overline{h(x)}dx. \tag{2.64}$$

Lembrando que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, obtemos

$$\int_\alpha^\beta (if')\overline{g}dx = -\int_\alpha^\beta f'\overline{h}dx = -\int_\alpha^\beta (if')\overline{(ih)}dx \tag{2.65}$$

ou seja,

$$\int_\alpha^\beta if'\overline{[g(x) + ih(x)]}dx = 0. \tag{2.66}$$

Seja $q(x)$ a função dada por

$$q(x) = \int_\alpha^x \Big[g(t) + ih(t)\Big]\,dt \tag{2.67}$$

que está bem definida para cada $x \in I$ pois $g, h \in L^1(I)$. Pelo teorema A.3.1, $q(x)$ é absolutamente contínua em I e, portanto, contínua em I e $q(x) \in L^2(I)$. A função $q(x)$ tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}&q(\alpha) = q(\beta) = 0, \quad pela \ \ (2.62)\\ &q'(x) = g(x) + ih(x) \in L^2(I)\\ &q(x) \in L^2(I)\end{aligned} \tag{2.68}$$

Podemos concluir que $q(x) \in D(A_1)$. Tome $f = q(x)$ em (2.66). Então da relação (2.66) obtemos

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\overline{[g(x) + ih(x)]}dx = \int_\alpha^\beta |g(x) + ih|^2 dx = 0, \tag{2.69}$$

o que implica

$$g(x) = -ih(x) = -i\int_\alpha^x (A_1^* g)(t)dt - i\delta \tag{2.70}$$

quase sempre em I e

$$\delta = ig(\alpha). \tag{2.71}$$

Como $A_1 g \in L^1(I)$, g é absolutamente contínua em I e

$$g'(x) = -i(A_1^* g)(x) \in L^2(I) \tag{2.72}$$

para todo $g \in D(A_1^*)$. Estas propriedades de g mostram que $g \in F$, para todo $g \in D(A_1^*)$. Então,

$$D(A_1^*) \subseteq F. \tag{2.73}$$

Como já provamos que $F \subseteq D(A_1^*)$ segue que

$$D(A_1^*) = F, \tag{2.74}$$

completando assim a prova do teorema. □

Segue do teorema 2.2.2 que $D(A_1^*)$ é formado pelas funções de $L^2(I)$, absolutamente contínuas, cuja derivada primeira pertence a $L^2(I)$, sem condições nos extremos α e β. Portanto, $D(A_1) \subset D(A_1^*)$, isto é, A_1^* é uma extensão própria de A_1. Logo, A_1 não pode ser autoadjunto.

Teorema 2.2.3. *O operador A_1 é fechado.*

Prova: Consideremos a sequência $(u_n) \subset D(A_1)$ tal que

$$\begin{cases} u_n \to u \\ u_n' \to iv \end{cases} \tag{2.75}$$

em $L^2(I)$. Notar que $u_n' \to iv$ é equivalente a $Au_n \to -v$. Devemos provar que $u \in D(A_1)$ e $Au = -v$. Com esse objetivo, sejam $t \in I = [\alpha, \beta]$, $(U_n(t))$ a sequência definida por

$$U_n(t) = \int_\alpha^t u_n'(x)dx \tag{2.76}$$

e a função

$$V(t) = i\int_\alpha^t v(x)dx. \tag{2.77}$$

Pela desigualdade de Schwarz,

$$\begin{aligned}
\Big|U_n(t) - V(t)\Big| &= \left|\int_\alpha^t (u_n' - iv)1dx\right| \\
&\leq \left(\int_\alpha^t |u_n' - iv|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\alpha^t dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_\alpha^\beta |u_n' - iv|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\alpha^\beta dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u_n' - iv\|_{L^2(I)}(\beta - \alpha)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{2.78}$$

$$\|u_n' - iv\| \to 0, \ \textit{quando } n \to \infty \tag{2.79}$$

resultando que

$$V(t) = \lim_{n\to\infty} U_n(t). \tag{2.80}$$

Como $U_n(t) = u_n(t)$ e $u_n \to u$ em $L^2(I)$, conclui–se que

$$V(t) = u(t). \tag{2.81}$$

Então,

$$u(t) = \int_\alpha^t iv(x)dx, \tag{2.82}$$

implicando que $u(\alpha) = 0$ e, u é absolutamente contínua pelo teorema A.3.1. Além disso,

$$V(\beta) = \lim_{n\to\infty} U_n(\beta) = \lim_{n\to\infty} u_n(\beta). \tag{2.83}$$

Como $u_n \in D(A_1)$, temos $u_n(\beta) = 0$, de sorte que $V(\beta) = 0$ e, portanto, $u(\beta)$=0. Então, $u \in D(A_1)$. De (2.82), obtém–se

$$u' = iv \tag{2.84}$$

e, portanto, $iu' = -v = Au$. □

A prova do teorema 2.2.3 é baseado na referência [16]. Vimos anteriormente que A_1 é um operador fechado e simétrico, mas não é autoadjunto. No que segue construímos as extensões autoadjuntas de A_1.

Teorema 2.2.4. *Seja $\theta \in \mathbb{R}$ e B_θ o operador linear definido no domínio*

$$D(B_\theta) = \Big\{ f \in L^2(I) | f \in AC(I),\ \ f' \in L^2(I),\ \ f(\alpha) = e^{i\theta} f(\beta) \Big\}$$

por

$$B_\theta f = if'. \tag{2.85}$$

O operador B_θ é uma extensão autoadjunta do operador A_1.

Prova: Comparando $D(B_\theta)$ com $D(A_1)$, segue que

$$D(A_1) \subset D(B_\theta). \tag{2.86}$$

Logo, B_θ é uma extensão própria de A_1. Sendo $D(A_1)$ denso em $L^2(I)$, o operador B_θ também está densamente definido em $L^2(I)$. Para todo $f, g \in D(B_\theta)$,

$$\begin{aligned} \langle B_\theta f, g\rangle - \langle f, B_\theta g\rangle &= \int_\alpha^\beta (if')\overline{g} dx - \int_\alpha^\beta f\overline{(ig')} dx \\ &= \ if\overline{g}\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta (if)\overline{g}' dx + i\int_\alpha^\beta f\overline{g}' dx \\ &= if(\beta)\overline{g(\beta)} - if(\alpha)\overline{g(\alpha)} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.87}$$

após substituirmos

$$\begin{cases} f(\beta) = e^{-i\theta} f(\alpha) \\ \overline{g(\beta)} = e^{i\theta} \overline{g(\alpha)} \end{cases} \tag{2.88}$$

Portanto, o operador B_θ é simétrico. Sabemos que

$$D(A_1) \subset D(B_\theta)$$

Daí, pelo teorema 1.3.3,

$$D(B_\theta^*) \subset D(A_1^*). \tag{2.89}$$

Disto segue–se que

$$g \in AC(I) \;\; e \;\; B_\theta^* g = ig' \tag{2.90}$$

para toda função $g \in D(B_\theta^*)$. Para todo $f \in D(B_\theta)$ e $g \in D(B_\theta^*)$ temos

$$\langle B_\theta f, g \rangle = \; if\overline{g}\Big|_\alpha^\beta + \langle f, B_\theta^* g \rangle\,. \tag{2.91}$$

Mas, $\langle B_\theta f, g \rangle = \langle f, B_\theta^* g \rangle$, então

$$if(\beta)\overline{g(\beta)} - if(\alpha)\overline{g(\alpha)} = 0. \tag{2.92}$$

Usando que $f(\alpha) = e^{i\theta} f(\beta)$, este último resultado implica

$$\overline{g(\beta)} = e^{i\theta} \overline{g(\alpha)} \tag{2.93}$$

ou

$$g(\alpha) = e^{i\theta} g(\beta) \tag{2.94}$$

para todo $g \in D(B_\theta^*)$. Reunindo os resultados (2.90) e (2.94), concluímos que

$$D(B_\theta^*) = D(B_\theta), \tag{2.95}$$

provando assim, que B_θ é autoadjunto. $\square$

Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, o operador B_θ é uma extensão autoadjunta do operador A_1. Há portanto uma infinidade não enumerável delas. Além disso, estas são as únicas extensões de A_1, como mostra o teorema seguinte.

Teorema 2.2.5. *Seja $\tilde{A}$ uma extensão simétrica do operador A_1 em $L^2(I)$. Então, $\tilde{A} = A_1$ ou $\tilde{A} = B_\theta$, para algum $\theta \in \mathbb{R}$.*

Prova: Por hipótese temos que $A_1 \subseteq \tilde{\mathrm{A}}$ e, pelo teorema 1.3.3, segue que $\tilde{\mathrm{A}}^* \subseteq A_1^*$. Como $\tilde{\mathrm{A}}$ é simétrico, $\tilde{\mathrm{A}} \subseteq \tilde{\mathrm{A}}^*$ e, assim,

$$\tilde{\mathrm{A}} \subseteq A_1^* \tag{2.96}$$

Lembrando a definição de A_1^*, obtemos que $g \in AC(I)$ e $\tilde{\mathrm{A}}f = if'$. Além disso, como $\tilde{\mathrm{A}}$ é simétrico, para todo $f, g \in D(\tilde{\mathrm{A}})$,

$$\left\langle \tilde{\mathrm{A}}f, g \right\rangle = \left\langle f, \tilde{\mathrm{A}}g \right\rangle. \tag{2.97}$$

Fazendo a integração por partes,

$$\left\langle \tilde{\mathrm{A}}f, g \right\rangle = \langle if', g \rangle = \left. if\overline{g} \right|_\alpha^\beta + \left\langle f, \tilde{\mathrm{A}}g \right\rangle. \tag{2.98}$$

Comparando (2.97) e (2.98),

$$f(\beta)\overline{g(\beta)} = f(\alpha)\overline{g(\alpha)}. \tag{2.99}$$

Em particular, para $f = g$, obtemos

$$|f(\beta)|^2 = |f(\alpha)|^2. \tag{2.100}$$

Então, $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, ou

$$f(\alpha) = e^{i\theta} f(\beta), \tag{2.101}$$

provando–se o resultado. □

Dos resultados anteriores temos

$$D(A_1) \subset D(B_\theta) \subset D(B_\theta^*) \subset D(A_1^*) \tag{2.102}$$

Portanto, A_1^* é extensão de B_θ, para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Assim, A_1^* é a extensão maximal do operador A_1. A menor extensão é dada pelo operador fecho $\overline{A_1}$, de A_1 (teorema 1.5.3). Como A_1 é fechado, então pelo teorema 1.5.4, $\overline{A_1} = A_1$.

Teorema 2.2.6. *Seja A_3 o operador definido no domínio*

$$D(A_3) = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}) | f \textit{ é absolutamente contínua} \\ \textit{em todo compacto } K \subset \mathbb{R},\ f' \in L^2(\mathbb{R}) \Big\} \tag{2.103}$$

por

$$A_3 f = i f'. \tag{2.104}$$

Então $D(A_3)$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$ e A_3 é um operador autoadjunto.

Prova: O conjunto das funções $\Big\{ \phi_n(x) \Big\}_{n=0}^{\infty}$, onde

$$\phi_n(x) = c_n x^n e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{2.105}$$

e c_n é tal que $\|\phi_n(x)\| = 1$, é um conjunto ortonormal completo em $L^2(\mathbb{R})$. Ademais, $\phi_n \in D(A_3)$, para todo n. Portanto, $D(A_3)$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$ e existe o operador adjunto A_3^*. Temos também que para todo $f, g \in D(A_3)$,

$$\langle if', g \rangle - \langle f, ig' \rangle = \ i f(x)\overline{g(x)}\Big|_{-\infty}^{+\infty}. \tag{2.106}$$

Toda função $f \in L^2(\mathbb{R})$ que é absolutamente contínua em todo compacto $K \subset \mathbb{R}$ e, $f' \in L^2(\mathbb{R})$, pelo teorema A.3.3, tem a propriedade de que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0. \tag{2.107}$$

Por esta propriedade segue, então, que

$$\langle if', g \rangle = \langle f, ig' \rangle . \tag{2.108}$$

Portanto, o operador A_3 é simétrico e $A_3 \subseteq A_3^*$. Para provar que A_3 é autoadjunto basta provar que $A_3^* \subseteq A_3$. Seja $g \in D(A_3^*)$ e $K = [\alpha, \beta]$, com $\alpha < \beta$. Podemos repetir a prova do teorema 2.2.2 para verificar que $g \in AC(K)$ e $g' = -iA_3^* g$ quase sempre em K. Como K é arbitrário, podemos concluir que

$$\begin{cases} g' = -iA_3^* g \textit{ quase sempre em } \mathbb{R} \\ g' = -iA_3^* g \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{2.109}$$

Então, $g \in D(A_3)$. Logo, $D(A_3^*) \subseteq D(A_3)$. $\square$

Teorema 2.2.7. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, $J = [\alpha, \infty)$ e o operador A_2 definido no domínio*

$$D(A_2) = \Big\{ f \in L^2(J) | f \quad \text{é absolutamente contínua}$$

$$\text{em} \quad [\alpha, \beta], \forall \beta > \alpha, \quad f' \in L^2(J) \quad e \quad f(\alpha) = 0 \Big\}$$

por

$$A_2 f = i f'. \tag{2.110}$$

Então, $D(A_2)$ é denso em $L^2(J)$ e A_2 é simétrico.

Prova: As funções $f_n(x)$, $n = 1, 2, ...$ dadas por

$$f_n(x) = c_n (x - \alpha)^n e^{-\frac{1}{2}(x-\alpha)^2}, \tag{2.111}$$

onde c_n é tal que $\|f_n\| = 1$, formam um conjunto ortonormal completo em $L^2(J)$ e $f_n(x) \in D(A_2)$, para todo $n = 1, 2, ...$ Portanto, $D(A_2)$ é denso em $L^2(J)$. Pode–se provar que A_2 é ilimitado (ver Ref [6]). Para todo $f, g \in D(A_2)$,

$$\langle A_2 f, g \rangle - \langle f, A_2 g \rangle = \; i f \overline{g} \Big|_{\alpha}^{\infty} = 0 \tag{2.112}$$

usando que $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ e a propriedade de que toda função f absolutamente contínua tal que $f' \in L^2(J)$ satisfaz

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0. \tag{2.113}$$

Portanto, A_2 é simétrico. $\square$

Teorema 2.2.8. *Seja A_2 o operador definido no teorema anterior e seja*

$$G = \Big\{ f \in L^2(J) | f \quad \text{é absolutamente contínua}$$

$$\text{em} \quad [\alpha, \beta], \forall \beta > 0 \quad e \quad f' \in L^2(J) \Big\} \tag{2.114}$$

Então, $D(A_2^*) = G$ e $A^* f = i f'$.

Prova: Análoga a do teorema 2.2.2. $\square$

Teorema 2.2.9. *O operador A_2 é fechado.*

Prova: Análoga a do teorema 2.2.3. $\square$

Portanto, o operador A_2 é fechado e simétrico. No entanto, observe que $D(A_2)$ está estritamente contido em $D(A_2^*)$ e, por isso, A_2 não pode ser autoadjunto. Além disso, o operador A_2^* não é simétrico, pois

$$\langle A_2^* f, g\rangle - \langle f, A_2^* g\rangle = -if(\alpha)\overline{g(\alpha)} \tag{2.115}$$

não é igual a zero para todo $f, g \in D(A_2^*)$.

O teorema seguinte permite concluir que A_2 não tem extensões autoadjuntas.

Teorema 2.2.10. *Seja S uma extensão simétrica do operador A_2 em $L^2(J)$. Então, $S = A_2$.*

Prova: Por hipótese temos que $A_2 \subseteq S$ e pelo teorema 1.3.3, $S^* \subseteq A_2^*$. Como S é simétrico, $S \subseteq S^*$ e, assim,

$$S \subseteq A_2^*. \tag{2.116}$$

Como A_2^* não é simétrico, não podemos ter $S = A_2^*$ (A_2^* é uma extensão de A_2, porém não é simétrica). Como $S \subset A_2^*$, lembrando a definição de A_2^*, segue então que $f \in D(S)$ é absolutamente contínua em todo compacto $I = [\alpha, \beta]$, $f' \in L^2(J)$ e $Sf = if'$.

Vamos supor que existe $h \in D(S)$ tal que $h(\alpha) \neq 0$. Como S é simétrico, então

$$\langle Sf, g\rangle = \langle f, Sg\rangle \tag{2.117}$$

para todo $f, g \in D(S)$. Por outro lado,

$$\langle Sf, g\rangle = \int_\alpha^\infty if'\overline{g}dx = \left. if\overline{g}\right|_\alpha^\infty + \langle f, Sg\rangle . \tag{2.118}$$

Então,

$$\langle Sf, g\rangle - \langle f, Sg\rangle = -if(\alpha)\overline{g(\alpha)}, \tag{2.119}$$

pois f, sendo absolutamente contínua e $f' \in L^2(J)$, satisfaz

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \tag{2.120}$$

Tomando $f = g = h$, segue que

$$\langle Sh, h \rangle - \langle h, Sh \rangle = -i\|h(\alpha)\| \neq 0, \tag{2.121}$$

o que contradiz o fato de que S é simétrico. Podemos concluir que não pode existir $h \in D(S)$ tal que $h(\alpha) \neq 0$ e, assim,

$$D(S) = D(A_2), \tag{2.122}$$

completanto assim a prova do teorema. □

Este último resultado permite concluir que o operador A_2 não tem extensões simétricas autoadjuntas.

Capítulo 3

Operadores Essencialmente Autoadjuntos

No capítulo anterior vimos exemplos de um operador simétrico e fechado que admite uma infinidade de extensões autoadjuntas. Consideramos, também, um exemplo de operador que não admite extensões autoadjuntas.

Portanto, no caso de um operador ilimitado não está garantida a existência, nem a unicidade de uma extensão autoadjunta. A motivação que tornam os operadores autoadjuntos relevantes será discutida no próximo capítulo.

É devido a *von Neumann* a solução do problema de existência de extensões autoadjuntas de um operador simétrico ilimitado. Mencionamos aqui, sem provar, o seu resultado principal baseado na teoria dos índices de deficiência que ele desenvolveu.

Seja A um operador linear densamente definido num espaço de *Hilbert* H. Seja A^* o operador adjunto de A. Defina

$$\begin{cases} D_+(A) = \{u \in D(A^*) | A^*u = iu\} \\ D_-(A) = \{u \in D(A^*) | A^*u = -iu\} \end{cases}$$

Os espaços $D_+(A)$ e $D_-(A)$ são chamados de espaços de deficiência do operador A. As dimensões (finita ou não) dos espaços $D_\pm$, indicadas por $n_\pm$, respectivamente, são chamados também de índices de deficiência do operador A. *von Neumann* provou o seguinte teorema:

Teorema. *Seja A um operador simétrico. Então:*

1. *A é autoajunto se, e somente se, $n_+ = n_- = 0$*

2. *A tem extensões autoadjuntas se, e somente se, $n_+ = n_-$*

3. *Se $n_+ = 0 \neq n_-$, ou $n_- = 0 \neq n_+$, então A não tem extensões simétricas.*

Prova: Ver Ref. [7], Vol II

Exemplo: No capítulo 2 estudamos o operador simétrico A_1 definido por

$$A_1 f = i\frac{df}{dx}, \tag{3.1}$$

com domínio

$$D(A_1) = \Big\{ f \in L^2(I) | f \in AC(I), f' \in L^2(I) \;\; e \quad f(\alpha) = f(\beta) = 0 \Big\} \tag{3.2}$$

onde $I = [\alpha, \beta]$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ e $AC(I)$ o espaço das funções absolutamente contínuas definidas em I, e provamos que

$$\begin{cases} A_1^* f = if' \\ D(A_1^*) = AC(I) \end{cases} \tag{3.3}$$

Vamos determinar $D_\pm(A)$ e $n_\pm$, nesse caso. Temos que

$$D_\pm(A) = \Big\{ f \in D(A^*) \mid f' = \pm f \Big\} \tag{3.4}$$

Portanto, $D_\pm(A)$ é o espaço das soluções da equação $f' = \pm f$, cuja solução geral se expressa por

$$f_\pm = ke^{\pm x}, \tag{3.5}$$

implicando $n_\pm = dim D_\pm(A_1) = 1$ e $n_+ = n_-$.

Assim, pelo teorema de *von Neumann*, o operador A_1 tem extensões autoadjuntas.

Neste capítulo estudaremos o caso de operadores que admitem uma única extensão autoadjunta, chamados de operadores essencialmente autoajuntos. Vários critérios para determinar–se quando um operador é essencialmente autoadjunto são apresentados juntamente com algumas de suas propriedades. A referência básica utilizada aqui é a [1].

3.1 Definição e propriedades

Definição 3.1.1. *Um operador $A \in L(H)$, com $D(A)$ denso em H, é chamado de essencialmente autoadjunto quando*

(a) A é simétrico

(b) $(A \pm iE)D(A)$ são densos em H

Teorema 3.1.1. *Seja $A \in L(H)$ um operador essencialmente autoadjunto. Então o operador fecho de A é autoadjunto, isto é, $\overline{A} = \overline{A}^*$.*

Prova: Seja $A \in L(H)$ um operador essencialmente autoadjunto. Pela definição, A é simétrico e, pelo teorema 1.5.6, é fechável. Assim, existe o operador fecho $\overline{A}$ que é também simétrico, pelo teorema 1.5.6. Como $(A + iE)D$ é denso em H, existem, para todo $y \in H$ sequências (x_n) e (y_n), ambas em H tal que $y_n = (A+iE)x_n$, e (y_n) converge para y. Usando a simetria e linearidade de A,

$$\begin{aligned} ||y_n - y_m||^2 &= ||(A+iE)x_n - (A+iE)x_m||^2 \\ &= ||A(x_n - x_m) + i(x_n - x_m)||^2 \\ &= ||A(x_n - x_m)||^2 + ||x_n - x_m||^2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como $||y_n - y_m|| \to 0$ quando $n, m \to \infty$, obtemos que

$$||A(x_n - x_m)|| \to 0 \;\; quando \;\; n, m \to \infty \tag{3.7}$$

e

$$||x_n - x_m|| \to 0 \;\; quando \;\; n, m \to \infty \tag{3.8}$$

Os limites (3.7) e (3.8) dizem que as sequências Ax_n e x_n são sequências de Cauchy e convergem em H, pois H é completo e $x_n \to x$; pela definição de operador fecho, $Ax_n \to \overline{A}x$ e x $\in D(\overline{A})$. Portanto,

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n\to\infty} y_n \\ &= \lim_{n\to\infty} (A + iE)x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} Ax_n + i \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= \overline{A}x + ix \end{aligned} \tag{3.9}$$

Assim, para $x \in D(\overline{A})$, obtemos que

$$y = \overline{A}x + ix = (\overline{A} + iE)x, \tag{3.10}$$

para todo $y \in H$. Portanto,

$$(\overline{A} + iE)D(\overline{A}) = H. \tag{3.11}$$

De forma análoga, prova–se que

$$(\overline{A} - iE)D(\overline{A}) = H. \tag{3.12}$$

Logo, pelo teorema 1.6.1, $\overline{A}$ é autoadjunto. □

Teorema 3.1.2. *Seja $A \in L(H)$ um operador essencialmente autoadjunto. Então, A possui uma única extensão autoadjunta que é o operador $\overline{A}$.*

Prova: Como A é um operador essencialmente autoadjunto, então A é simétrico, e assim, pelo teorema 1.5.6, é fechável. Existe o operador fecho $\overline{A}$ que é a menor das extensões fechadas de A, se houver outras. Pelo teorema anterior, $\overline{A}$ é autoadjunto. Suponha que existe Ã, outra extensão autoadjunta de A. Nesse caso,

$$\tilde{A}^* = \tilde{A} \tag{3.13}$$

e

$$A \subseteq \tilde{A}. \tag{3.14}$$

Temos que $\tilde{A}^*$ é fechado, pois o adjunto de qualquer operador é fechado, conforme o teorema 1.5.1. Então Ã é fechado, por (3.13). Mas, sendo $\overline{A}$ a menor das extensões fechadas de A, segue que

$$\overline{A} \subseteq \tilde{A}. \tag{3.15}$$

e, pelo teorema 1.3.3

$$\tilde{A}^* \subseteq \overline{A}^* \tag{3.16}$$

Daí, pelo fato de $\overline{A}$ ser autoadjunto,

$$\tilde{A}^* \subseteq \overline{A}^* = \overline{A}. \tag{3.17}$$

Portanto,

$$\tilde{A} \subseteq \overline{A}. \tag{3.18}$$

Por outro lado, pela (3.15)

$$\overline{A} \subseteq \tilde{A}. \tag{3.19}$$

Da (3.18) e (3.19) conclui–se que $\overline{A} = \tilde{A}$. Então A tem uma única extensão autoadjunta que é o operador fecho $\overline{A}$. □

O seguinte teorema é recíproco ao teorema anterior.

Teorema 3.1.3. *Seja $A \in L(H)$ um operador densamente definido e simétrico. Suponha que A tem uma única extensão autoadjunta. Então A é essencialmente autoadjunto.*

Prova: Sendo A simétrico, pelo teorema 1.5.6, é fechável. Existe então, o operador $\overline{A}$, a menor das extensões fechadas de A. Como, por hipótese, A tem uma única extensão autoadjunta que é, portanto, fechada, $\overline{A}$ é esta extensão. Sendo, pois, $\overline{A}$ um operador autoadjunto, podemos aplicar o teorema 1.6.1 nos garantindo que

$$(\overline{A} \pm iE)D(\overline{A}) = H, \tag{3.20}$$

ou, equivalentemente,

$$\overline{(A \pm iE)D(A)} = H, \tag{3.21}$$

provando a densidade de $(A \pm iE)D(A)$ em H. Então o operador A é essencialmente autoadjunto. □

O seguinte teorema é o recíproco do teorema 3.1.1.

Teorema 3.1.4. *Seja $A \in L(H)$ um operador densamente definido e simétrico. Suponha que $\overline{A}$, o operador fecho de A, é autoadjunto. Então, A é essencialmente autoadjunto.*

Prova: Como A é simétrico, pelo teorema 1.5.6, existe o operador fecho $\overline{A}$, a menor extensão fechada de A. Suponha que A admita outra extensão fechada, digamos $\tilde{\mathrm{A}}$, autoadjunta. Então,

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq \tilde{\mathrm{A}} = (\tilde{\mathrm{A}})^* \tag{3.22}$$

Como $\overline{A} \subseteq \tilde{\mathrm{A}}$ então, pelo teorema 1.3.3,

$$(\tilde{\mathrm{A}})^* \subseteq (\overline{A})^* \tag{3.23}$$

e, pela (3.22), $\overline{A} \subseteq (\tilde{\mathrm{A}})^*$. Por hipótese,

$$(\overline{A})^* = \overline{A}. \tag{3.24}$$

Reunindo (3.22), (3.23) e (3.24),

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq \tilde{\mathrm{A}} = (\tilde{\mathrm{A}})^* \subseteq (\overline{A})^* = \overline{A} \tag{3.25}$$

Conclusão, $\overline{A} \subseteq \tilde{A}$ e $\tilde{A} \subseteq \overline{A}$. Assim,

$$\overline{A} = \tilde{A} \tag{3.26}$$

O operador $\overline{A}$ é a única extensão autoadjunta de A. Pelo teorema 3.1.3, A é um operador essencialmente autoadjunto. □

Teorema 3.1.5. *Seja $A \in L(H)$ um operador densamente definido e simétrico. Então, $\overline{A}$ é autoadjunto se, e somente se, A^* é simétrico.*

Prova: Suponha que $\overline{A}$ é autoadjunto. Daí, sendo D denso por hipótese, existe A^*. Também, por hipótese, sendo A simétrico,

$$A \subseteq A^* \tag{3.27}$$

e

$$A^* = (\overline{A})^* \tag{3.28}$$

pelo teorema 1.5.7. Daí, sendo $\overline{A}$ autoadjunto, $\overline{A}^* = \overline{A}$. Portanto,

$$A^* = (\overline{A})^* = \overline{A}. \tag{3.29}$$

Como A é simétrico, $\overline{A}$ também é simétrico, pelo teorema 1.5.6, logo A^* é simétrico. Agora suponha que o operador A^* é simétrico, assim A também é simétrico, pois $A \subseteq A^*$. Pelos teoremas 1.5.7 e 1.5.8 $(\overline{A})^* = A^*$ e $\overline{A} = A^{**}$. Como $\overline{A}$ é também simétrico, pelo teorema 1.5.6, segue que

$$\overline{A} \subseteq (\overline{A})^*. \tag{3.30}$$

Pela simetria de A^*,

$$A^* \subseteq A^{**}. \tag{3.31}$$

Portanto,

$$\overline{A}^* = A^* \subseteq A^{**} = \overline{A}. \tag{3.32}$$

Daí, por (3.30) e (3.32), $\overline{A} = (\overline{A})^*$, o que permite concluir que o operador $\overline{A}$ é auto-adjunto. $\square$

Os resultados anteriores permitem concluir que no caso de um operador essencialmente autoadjunto, o operador fecho $\overline{A}$ de A é a única extensão autoadjunta de A, e nesse caso, $\overline{A} = A^*$. Portanto, as extensões mínima e máxima coincidem.

3.2 Alguns Critérios

Nesta seção, estudaremos vários critérios que são ferramentas importntes para se provar que um operador é essencialmente autoadjunto. Alguns desses critérios serão aplicados no próximo capítulo.

Teorema 3.2.1. *O operador $A \in L(H)$ satisfazendo as seguintes condições:*

(1) A é simétrico,

(2) $R(A)$ é denso em H, e

(3) A é estritamente positivo, isto é, existe $a > 0$ tal que $||Au|| \geq a||u||$ para todo $u \in D(A)$,

é essencialmente autoadjunto.

Prova: Suponha $Au = 0$. Então $u = 0$, pois por hipótese, $a > 0$ e $0 = ||0|| \geq a||u||$. Assim $\lambda = 0$ não é autovalor de A. Pelo teorema 1.1.1, o operador inverso A^{-1} existe. Por hipótese, $D(A^{-1}) = R(A)$ é denso em H. Se tomarmos $f = Au$, com $u \in D(A)$ e $u = A^{-1}f$, então

$$||f|| = ||Au|| \geq a||u|| = a||A^{-1}f||, \tag{3.33}$$

ou seja,

$$||A^{-1}f|| \leq \frac{1}{a}||f|| \tag{3.34}$$

para todo $f \in D(A^{-1})$. Temos que o operador A^{-1} é limitado. Além disso, é simétrico, pois para $u, v \in D(A)$, e

$$\begin{cases} f = Au, \quad u = A^{-1}f \\ g = Av, \quad v = A^{-1}g, \end{cases} \tag{3.35}$$

segue que

$$\left\langle A^{-1}f, g \right\rangle = \left\langle A^{-1}Au, Av \right\rangle = \langle u, Av \rangle = \langle Au, v \rangle = \left\langle f, A^{-1}g \right\rangle \tag{3.36}$$

pela simetria de A, para todo $f, g \in D(A^{-1})$. Mostraremos que $(A \pm iE)D(A)$ é denso em H. Em particular, considere o operador $(A + iE)$ aplicado em $D(A)$. Queremos mostrar que para todo $u \in D(A)$, tem–se que

$$\langle h, (A + iE)u \rangle = 0, \tag{3.37}$$

apenas para $h = 0$. Por hipótese, $R(A)$ é denso em H. Então existe uma sequência $h_n \subset R(A)$ e, portanto, uma sequência $u_n \subset D(A)$, com $h_n = Au_n$, tal que

$$\lim_{n \to \infty} ||h_n - h|| = 0. \tag{3.38}$$

Portanto, por (3.37), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h, (A + iE)u_n \rangle = \langle h, Au_n + iu_n \rangle \\ &= \langle h, Au_n \rangle + \langle h, iu_n \rangle = \langle h, Au_n \rangle - i \langle h, u_n \rangle \\ &= \langle h, h_n \rangle - i \langle h, A^{-1}h_n \rangle . \end{aligned} \tag{3.39}$$

Daí, por (3.39),

$$\begin{aligned}\langle h_n, h_n\rangle - i\left\langle h_n, A^{-1}h_n\right\rangle &= \langle h_n, h_n\rangle - i\left\langle h_n, A^{-1}h_n\right\rangle - 0\\ &= \langle h_n, h_n\rangle - i\left\langle h_n, A^{-1}h_n\right\rangle\\ &- \Big[\langle h, h_n\rangle \; - i\left\langle h, A^{-1}h_n\right\rangle\Big]\\ &= \langle h_n - h, h_n\rangle - i\left\langle h_n - h, A^{-1}h_n\right\rangle .\end{aligned} \tag{3.40}$$

Como $\lim_{n\to\infty} ||h_n - h|| = 0$, a sequência h_n é uma sequência de Cauchy em H, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$, tem–se que

$$||h_n - h_m|| < \varepsilon. \tag{3.41}$$

Isso segue da seguinte desigualdade:

$$||h_n - h_m|| \leq ||h_n - h|| + ||h_m - h||. \tag{3.42}$$

Como A^{-1} é limitado, existe um $a > 0$ tal que

$$||A^{-1}u|| \leq a||u||, \tag{3.43}$$

para todo $u \in D(A^{-1})$. Tome $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{a}$:

$$\begin{aligned}||A^{-1}h_n - A^{-1}h_m|| &= ||A^{-1}(h_n - h_m)|| \leq ||A^{-1}||.||h_n - h_m||\\ &\leq a||h_n - h_m|| \leq a.\frac{\varepsilon'}{a} = \varepsilon'.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Isto diz que a sequência $(A^{-1}h_n)$ é uma sequência de Cauchy. Os resultados (3.38) e (3.40) implicam que

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} \langle h_n - h, h_n\rangle & = 0,\\ \lim\limits_{n\to\infty} \left\langle h_n - h, A^{-1}h_n\right\rangle & = 0,\\ \lim\limits_{n\to\infty} \Big[||h_n||^2 - \, i\left\langle h_n, A^{-1}h_n\right\rangle\Big] & = 0.\end{cases} \tag{3.45}$$

Mas, A^{-1} é simétrico, ou seja,

$$\left\langle A^{-1}h_n, h_n\right\rangle = \left\langle h_n, A^{-1}h_n\right\rangle = \overline{\langle A^{-1}h_n, h_n\rangle}. \tag{3.46}$$

Assim, $\langle h_n, A^{-1}h_n\rangle \in \mathbb{R}$, isto é,

$$Im\left\langle h_n, A^{-1}h_n\right\rangle = 0. \tag{3.47}$$

Nesse caso, como para $a, b \in \mathbb{R}$, $a + bi = 0$ somente se $a = b = 0$, segue que

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} ||h_n||^2 = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} (h_n, A^{-1}h_n) = 0. \end{cases} \tag{3.48}$$

Mas como $h_n \to h$,

$$\lim_{n\to\infty} ||h_n||^2 = ||h||^2 = 0. \tag{3.49}$$

Logo, $h = 0$. Portanto, $(A + iE)D$ é denso em H. De forma análoga prova–se que $(A - iE)D$ é denso em H. Então o operador A é essencialmente autoadjunto. $\square$

Teorema 3.2.2. *O operador $A \in L(H)$ satisfazendo as seguintes condições:*

(1) A é simétrico em $D(A)$ e

(2) $R(A) = H$,

é autoadjunto.

Prova: Primeiramente, vamos mostrar que o operador A é essencialmente autoadjunto. Para provar que A é essencialmente autoadjunto, devemos mostrar que $(A \pm iE)D(A)$ é denso em H. Por contradição, suponha o contrário. Primeiro suponha que $(A + iE)D(A)$ não é denso em H, assim existe um elemento $h \in H$, com $h \neq 0$, tal que, para todo $u \in D(A)$ tem–se que

$$\langle h, (A + iE)u\rangle = 0. \tag{3.50}$$

Como, por hipótese, $R(A) = H$, então existe um $g \in D(A)$ tal que $h = Ag$. Daí, tomando $u = g$, obtemos

$$0 = \langle Ag, Ag + ig \rangle = ||Ag||^2 - i \langle Ag, g \rangle = ||h||^2 - i \langle Ag, g \rangle \tag{3.51}$$

Como A é simétrico, $\langle Ag, g \rangle$ é real, e

$$Re \left\{ \|h\|^2 \ - i \langle Ag, g \rangle \right\} = \|h\|^2 = 0, \tag{3.52}$$

então $h = 0$, contradizendo a suposição de que $(A + iE)D(A)$ não é denso em H. Portanto, $(A+iE)D(A)$ é denso em H. Similarmente, $(A-iE)D(A)$ também é denso em H. Logo, o operador A é essencialmente autoadjunto.

Agora, como $(A + iE)D(A)$ é denso em H, então para todo elemento $v \in H$, existe uma sequência de Cauchy $(u_n) \subset H$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$ com $v_n = (A+iE)u_n$. Temos:

$$\begin{aligned} ||v_n - v_m||^2 &= ||(A + iE)u_n - (A + iE)u_m||^2 = ||Au_n + iu_n - Au_m - iu_m||^2 \\ &= ||Au_n - Au_m + iu_n - iu_m||^2 \leq ||Au_n - Au_m||^2 + ||iu_n - iu_m||^2 \\ &= ||Au_n - Au_m||^2 + ||u_n - u_m||^2. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Como H é completo, existem $u, z \in H$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u, \quad e \quad \lim_{n\to\infty} Au_n = z. \tag{3.54}$$

Mais, como $R(A) = H$, existe um $w \in D(A)$ tal que $z = Aw$. Seja $f \in R(A) = H$ qualquer, então existe $\psi \in D(A)$ com $f = A\psi$, e

$$\langle u - w, f \rangle = \langle u - w, A\psi \rangle = \langle u, A\psi \rangle - \langle w, A\psi \rangle . \tag{3.55}$$

Pela simetria de A,

$$\begin{aligned} \langle u, A\psi \rangle - \langle w, A\psi \rangle &= \langle u, A\psi \rangle - \langle Aw, \psi \rangle \\ &= \langle u, A\psi \rangle - \langle z, \psi \rangle \\ &= \langle u, A\psi \rangle - \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, \psi \rangle \\ &= \langle u, A\psi \rangle - \lim_{n\to\infty} \langle u_n, A\psi \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle u - u_n, A\psi \rangle \\ &= \langle u - u, A\psi \rangle = 0, \end{aligned}$$

$$(3.56)$$

para todo $f \in H$, isto é, $\langle u - w, f \rangle = 0$ para todo $f \in H$. Logo, temos que $u - w = 0$, $u = w$. Assim,

$$\begin{aligned} v &= \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} (A + iE)u_n = \lim_{n\to\infty} Au_n + \lim_{n\to\infty} iu_n \\ &= \lim_{n\to\infty} Au_n + i \lim_{n\to\infty} u_n = Au + iu = (A + iE)u. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Portanto, para todo $v \in H$, existe um $u \in D(A)$ tal que $v = (A + iE)u$. Logo, $(A + iE)D(A) = H$.

De forma análoga, prova–se que $(A - iE)D(A) = H$. Pelo teorema 1.6.1, A é um operador autoadjunto. □

Lema 3.2.1. *Seja $B \in L(H)$ um operador limitado com domínio $D(B)$, denso em H, tal que $||B|| = 1 - \delta$, $0 < \delta \leq 1$. Então $(B + E)D(B)$ é denso em H.*

Prova: A prova será feita por contradição supondo que $(B + E)D(B)$ não é denso em H. Nesse caso, existe um elemento $w \in H$, $w \neq 0$, tal que

$$\langle w, (B + E)u \rangle = 0, \quad \forall u \in D(B). \tag{3.58}$$

Como $D(B)$ é denso em H, existe uma sequência $(u_n) \subset D(B)$ tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = w$. E por (3.58),

$$\begin{aligned} 0 &= \langle w, (B + E)u_n \rangle = \langle w, Bu_n \rangle + \langle w, u_n \rangle \\ &= \langle w, Bu_n \rangle + \langle w, u_n \rangle + \langle w, w \rangle - \langle w, w \rangle \\ &= \langle w, w \rangle + \langle w, u_n - w \rangle + \langle w, Bu_n \rangle . \end{aligned} \tag{3.59}$$

Portanto,

$$||w||^2 = - \langle w, u_n - w \rangle - \langle w, Bu_n \rangle . \tag{3.60}$$

Aplicando a desigualdade de Schwartz, a este último resultado obtemos que

$$||w||^2 \leq ||w||.||u_n - w|| + ||w||.||Bu_n||. \tag{3.61}$$

Como, por hipótese, $||Bu_n|| \leq (1-\delta)||u_n||$, e $||w|| \neq 0$, resulta

$$||w|| \leq ||u_n - w|| + (1-\delta)||u_n||. \tag{3.62}$$

No limite quando $n \to \infty$, $u_n \to w$ e, obtém–se

$$||w|| \leq (1-\delta)||w||, \tag{3.63}$$

isto é, que $\delta \leq 0$, sendo assim uma contradição com a hipótese de que $\delta > 0$. Essa contradição foi originada ao supormos que $(B+E)D(B)$ não é denso em H. Portanto, $(B+E)D(B)$ é denso em H. $\square$

O próximo resultado será empregado para provar–se o teorema 3.2.5, relevante no próximo capítulo.

Teorema 3.2.3. *Seja $A \in L(H)$ um operador com domínio D(A), densamente definido, satisfazendo as seguintes condições:*

(1) A é simétrico,

(2) Existe um número complexo λ com $Im(\lambda) \neq 0$ tal que $(A \pm \lambda E)D(A)$ são densos em H,

é essencialmente autoadjunto.

Prova: Vamos mostrar que $(A+iE)D(A)$ é denso em H. Considere o o operador $\tilde{A} = A - \lambda E$ e o problema de autovalores $\tilde{A}u = \mu u$, para $u \in D(A)$. Suponha que $\mu = 0$ é autovalor. Nesse caso existe $u \in D(A)$, com $u \neq 0$, tal que $0 = \tilde{A}u = Au - \lambda u$, ou seja, $Au = \lambda u$ e u é autofunção correspondente ao autovalor λ de A. Como A é simétrico, então $\lambda \in \mathbb{R}$, o que é uma contradição com a hipótese de que $Im(\lambda) \neq 0$. Logo, $\mu = 0$ não pode ser autovalor de $\tilde{A}$, o que implica na existência do operador inverso $\tilde{A}^{-1} = (A - \lambda E)^{-1}$ definido em $(A - \lambda E)D(A)$. Daí, para todo $u \in D(A)$:

$$\begin{aligned}||(A-\lambda E)u||^2 &= ||Au-\lambda u||^2 = \langle Au-\lambda u, Au-\lambda u\rangle \\ &= \langle Au, Au\rangle - \langle Au, \lambda u\rangle - \langle \lambda u, Au\rangle + \langle \lambda u, \lambda u\rangle \\ &= ||Au||^2 - \overline{\lambda}\,\langle Au, u\rangle - \lambda\,\langle u, Au\rangle + |\lambda|^2||u||^2.\end{aligned} \tag{3.64}$$

Como A é simétrico, $\langle u, Au\rangle = \langle Au, u\rangle$, e assim,

$$||(A-\lambda E)u||^2 = ||Au||^2 - 2Re(\lambda)\,\langle u, Au\rangle + |\lambda|^2||u||^2. \tag{3.65}$$

Da mesma forma,

$$||(A-\overline{\lambda}E)u||^2 = ||Au||^2 - 2Re(\lambda)\,\langle Au, u\rangle + |\lambda|^2||u||^2. \tag{3.66}$$

Portanto,

$$||(A-\lambda E)u||^2 = ||(A-\overline{\lambda}E)u||^2. \tag{3.67}$$

Agora, se tomarmos $u = (A-\lambda E)^{-1}v$, na expressão (3.67), obtemos, para todo $v \in (A-\lambda E)D(A)$,

$$||(A-\overline{\lambda}E)(A-\lambda E)^{-1}v|| = ||v||. \tag{3.68}$$

Portanto, o operador $(A-\overline{\lambda}E)(A-\lambda E)^{-1}$ é limitado com norma

$$||(A-\overline{\lambda}E)(A-\lambda E)^{-1}|| = 1. \tag{3.69}$$

O lema anterior permite concluir que o domínio

$$\left[c(A-\overline{\lambda}E)(A-\lambda E)^{-1} + E\right](A-\lambda E)D(A) \tag{3.70}$$

é denso em H para todo número complexo c, satisfazendo $|c| < 1-\delta$ e $0 < \delta \leq 1$. Daí, calculamos, para $u \in D(A)$,

$$
\begin{aligned}
&\left[c(A-\overline{\lambda}E)(A-\lambda E)^{-1}+E\right](A-\lambda E)u\\
&= c(A-\overline{\lambda}E)u+(A-\lambda E)u = cAu - c\overline{\lambda}u + Au - \lambda u\\
&= Ac + A - \lambda E - c\overline{\lambda}E = (c+1)Au - \lambda u - c\overline{\lambda}u\\
&= (c+1)\left(A - \frac{\lambda + c\overline{\lambda}}{c+1}E\right)u.
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

A densidade de $(A+iE)D(A)$ segue, agora, escolhendo–se c tal que

$$
-\frac{\lambda + c\overline{\lambda}}{c+1} = i. \tag{3.72}
$$

Isto é,

$$
c = -\frac{\lambda + i}{\overline{\lambda} + i}, \tag{3.73}
$$

Então, $|c| < 1$ para todo número complexo λ com $Im(\lambda) < 0$. Assim, podemos encontrar um δ_λ tal que

$$
|c| \leq 1 - \delta_\lambda \;\; com \;\; 0 < \delta_\lambda \leq 1. \tag{3.74}
$$

Trocando–se $\overline{\lambda}$ por λ nas relações acima obtem–se, similarmente, que

$$
\left[c(A-\lambda E)(A-\overline{\lambda}E)^{-1}+E\right](A-\overline{\lambda}E)D(A) \tag{3.75}
$$

é denso em H se $|c| < 1-\delta$ com $0 < \delta \leq 1$. Segue–se, como antes, para $u \in D$

$$
\left[c(A-\lambda E)(A-\overline{\lambda}E)^{-1}+E\right](A-\overline{\lambda}E)u = (c+1)\left(A - \frac{\overline{\lambda} + c\lambda}{c+1}E\right)u. \tag{3.76}
$$

A densidade de $(A-\lambda E)D$ é obtida escolhendo c tal que

$$
-\frac{\overline{\lambda} + c\lambda}{c+1} = i,
$$

ou seja,

$$
c = -\frac{\overline{\lambda} + i}{\lambda + 1}.
$$

Tem–se que $|c| < 1$ para todo λ com $Im(\lambda) > 0$, e para cada λ, existe um número δ'_λ tal que

$$
|c| \leq 1 - \delta'_\lambda \;\; com \;\; 0 < \delta'_\lambda \leq 1.
$$

De forma análoga, prova–se que $(A - iE)D(A)$ é denso em H.

Pode–se concluir que $(A + iE)D(A)$ e $(A - iE)D(A)$ são densos em H. Juntamente com a simetria de A, isso implica que o operador A é um operador essencialmente autoadjunto. □

A recíproca do Teorema anterior é verdadeira, como prova–se a seguir:

Teorema 3.2.4. *Seja $A \in L(H)$ um operador essencialmente autoadjunto. Então temos que $(A - \mu E)D(A)$ é denso em H para todo número complexo μ com $Im(\mu) \neq 0$.*

Prova: Como A é um operador essencialmente autoadjunto, então $(A + iE)D(A)$ e $(A - iE)D(A)$ são densos em H. Substituindo λ por i e $-i$ nas fórmulas obtidas no teorema 3.2.3, obtemos que

$$(c+1)\left(A - \frac{i - ci}{c+1}E\right)D(A) \ \ e \ \ (c+1)\left(A - \frac{ci - i}{c+1}E\right)D(A) \tag{3.77}$$

são densos em H, para todo número complexo c com $|c| \leq 1 - \delta$ e $0 < \delta \leq 1$. Escolhendo c tal que

$$\frac{i - ci}{c+1} = \mu, \tag{3.78}$$

implica que

$$c = \frac{i - \mu}{i + \mu}. \tag{3.79}$$

Agora, para todo μ com $Im(\mu) \neq 0$, tomamos um δ_μ tal que $|c| < 1 - \delta_\mu$ e $0 < \delta_\mu \leq 1$. Da mesma forma, tomando

$$\frac{ci - i}{c+1} = \mu, \tag{3.80}$$

implica

$$c = \frac{i - \mu}{i + \mu}; \tag{3.81}$$

e, para todo μ com $Im(\mu) \neq 0$, escolhendo–se um δ'_μ tal que $|c| < 1 - \delta'_\mu$ e $0 < \delta'_\mu \leq 1$. Daí, por (3.77), $(A - \mu E)D(A)$ é denso em H para todo número complexo μ com $Im(\mu) \neq 0$. □

Teorema 3.2.5 (Kato-Rellich). *Sejam $B, C \in L(H)$ dois operadores, com mesmo domínio D, satisfazendo às seguintes condições:*

(1) B é essencialmente autoadjunto.

(2) C é simétrico, e

(3) $||Cu|| \leq \varepsilon ||Bu|| + \delta ||u||$ para constantes δ e ε, $0 \leq \varepsilon < 1$, e todo $u \in D$.

Então o operador $B + C$ é essencialmente autoadjunto.

Prova: Sejam $B, C \in L(H)$ satisfazendo as hipóteses acima. Como B é essencialmente autoadjunto, então B é simétrico, donde, para todo x, y em D, tem–se que

$$\langle Bx, y \rangle = \langle x, By \rangle . \tag{3.82}$$

Também, pelo fato de que C é simétrico, para todo x, y em D,

$$\langle Cx, y \rangle = \langle x, Cy \rangle . \tag{3.83}$$

O operador $B + C$ também é simétrico, pois para todo x, y em D:

$$\langle Bx, y \rangle + \langle Cx, y \rangle = \langle Bx + Cx, y \rangle = \langle (B + C)x, y \rangle , \tag{3.84}$$

e,

$$\begin{aligned} \langle Bx, y \rangle + \langle Cx, y \rangle &= \langle x, By \rangle + \langle x, Cy \rangle \\ &= \langle x, By + Cy \rangle = \langle x, (B + C)y \rangle . \end{aligned} \tag{3.85}$$

Isto é,

$$\langle (B + C)x, y \rangle = \langle x, (B + C)y \rangle . \tag{3.86}$$

Logo, $B + C$ é simétrico. Pelo teorema 3.2.3, é suficiente mostrar que existe um número real $k \neq 0$ tal que $((B+C) \pm ikE)D$ é denso em H. Como B é essencialmente autoadjunto, pelo teorema 3.2.4 concluímos que $(B + ikE)D$ é denso em H para todo número real $k \neq 0$.

Seja $B' = (B - \lambda E)$, com $\lambda = -ik$, $k \neq 0$. Considere o problema de autovalores $B'u = \mu u, u \in D$, e suponha que $\mu = 0$ é autovalor. Nesse caso, existe $\varphi \in D(B')$, $\varphi \neq 0$, tal que

$$0 = B'\varphi = (B - \lambda E)\varphi = B\varphi - \lambda\varphi. \tag{3.87}$$

Logo, $B\varphi = \lambda\varphi$. Isto diz que φ é autofunção de B com autovalor complexo λ, o que não pode ocorrer, pois B é simétrico. Logo $\mu = 0$ não pode ser autovalor de B'. Então existe o operador inverso $(B - \lambda E)^{-1} = (B + ikE)^{-1}$, denso no domínio de definição. Daí, calculamos

$$||(B + ikE)u||^2 = ||Bu||^2 + k^2||u||^2 \geq k^2||u||^2. \tag{3.88}$$

Agora, seja $f = (B + ikE)u$ e $u = (B + ikE)^{-1}f$. Como $||(B + ikE)u||^2 \geq k^2||u||^2$, então, por (3.88),

$$||f||^2 \geq k^2||(B + ikE)^{-1}f||^2, \tag{3.89}$$

ou

$$||(B + ikE)^{-1}f|| \leq \frac{1}{|k|}||f|| \tag{3.90}$$

e

$$||(B + ikE)^{-1}|| \leq \frac{1}{|k|}. \tag{3.91}$$

Agora, pela hipótese (3), com $u = (B + ikE)^{-1}f$,

$$||C(B + ikE)^{-1}f|| \leq \varepsilon||B(B + ikE)^{-1}f|| + \delta||(B + ikE)^{-1}f|| \tag{3.92}$$

Note que, sendo

$$||(B + ikE)u||^2 = ||Bu||^2 + k^2||u||^2 \geq ||Bu||^2, \tag{3.93}$$

então

$$||Bu|| \leq ||(B + ikE)u||. \tag{3.94}$$

Lembrando que $u = (B + ikE)^{-1}f$, segue

$$||B(B + ikE)^{-1}f|| \leq ||(B + ikE)(B + ikE)^{-1}f|| = ||f||. \tag{3.95}$$

e

$$||B(B + ikE)^{-1}f|| \leq ||f||, \tag{3.96}$$

isto é, para todo $f \in (B + ikE)D$,

$$||B(B + ikE)^{-1}|| \leq 1. \tag{3.97}$$

Daí,

$$||C(B + ikE)^{-1}f|| \leq \varepsilon||f|| + \frac{\delta}{|k|}||f|| = \left(\varepsilon + \frac{\delta}{|k|}\right)||f||. \tag{3.98}$$

Tome $|k|$ tal que $\varepsilon + \dfrac{\delta}{|k|} < 1$. Então $C(B + ikE)^{-1}$ é um operador limitado com

$$||C(B + ikE)^{-1}f|| < 1. \tag{3.99}$$

Pelo lema anterior, $[C(B+ikE)^{-1}+E](B+ikE)D$ é denso em H. Mas, simplificando esta expressão, obtemos,

$$\begin{aligned} [C(B + ikE)^{-1} + E](B + ikE)D &= [C(B + ikE)^{-1}(B + ikE) + (B + ikE)]D \\ &= (C + B + ikE)D = ((C + B) + ikE)D. \end{aligned} \tag{3.100}$$

Ora, isto diz que $((C + B) + ikE)D$ é denso em H. De forma análoga, se tomarmos k ao invés de $-k$, então $((C + B) - ikE)D$ é denso em H. Estes resultados dizem que $((C + B) \pm ikE)D$ é denso em H. Portanto, por definição, o operador $B + C$ é essencialmente autoadjunto. □

Teorema 3.2.6. *Sejam $B, C \in L(H)$ dois operadores, com mesmo domínio D, satisfazendo as seguintes condições:*

(1) B é essencialmente autoadjunto.

(2) C é simétrico, e

(3) $||Cu||^2 \leq p_1 \langle u, Bu\rangle + p_2||u||^2$, para todo $u \in D$, com $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$.

Então o operador $B+C$ é essencialmente autoadjunto.

Prova: Sejam $B, C \in L(H)$ satisfando as hipóteses acima. Da prova do teorema anterior, temos que o operador $B + C$ é simétrico, pois os operadores B e C são simétricos. Ainda, da prova do teorema anterior, é suficiente mostrar que existe $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ tal que $(C + B - ikE)D$ é denso em H. Como B é essencialmente autoadjunto, pelo teorema 3.2.4, $(B + ikE)D$ é denso em H. Para todo $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ e existe o operador $(B + ikE)^{-1}$ com norma satisfazendo

$$||(B + ikE)^{-1}|| \leq \frac{1}{|k|}. \tag{3.101}$$

Além disso,

$$||Bu|| \leq ||(B + ikE)u||. \tag{3.102}$$

e

$$||B(B + ikE)^{-1}|| \leq 1. \tag{3.103}$$

Seja $u = (B + ikE)^{-1}f$, $f \in (B + ikE)D$. Daí, pela condição (3),

$$\begin{aligned} ||C(B + ikE)^{-1}f||^2 &\leq p_1 \left\langle (B + ikE)^{-1}f, B(B + ikE)^{-1}f \right\rangle + p_2||(B + ikE)^{-1}f||^2 \\ &\leq p_1||(B + ikE)^{-1}f||.||B(B + ikE)^{-1}f|| + p_2||(B + ikE)^{-1}f||^2 \\ &\leq p_1||(B+ikE)^{-1}||.||B(B+ikE)^{-1}||.||f||^2+p_2||(B+ikE)^{-1}||^2.||f||^2 \end{aligned} \tag{3.104}$$

Segue de (3.101) e (3.103) que

$$||C(B + ikE)^{-1}f|| \leq \frac{p_1}{|k|}.||f||^2 + \frac{p_2}{|k|^2}.||f||^2 = \left(\frac{p_1}{|k|} + \frac{p_2}{|k|^2}\right) ||f||^2. \tag{3.105}$$

Seja $|k|$ suficientemente grande para que

$$\left(\frac{p_1}{|k|} + \frac{p_2}{|k|^2}\right) ||f||^2 < 1. \tag{3.106}$$

Assim,

$$||C(B + ikE)^{-1}|| < 1. \tag{3.107}$$

O lema 3.2.1, então, implica que

$$[C(B+ikE)^{-1}+E](B+ikE)D \tag{3.108}$$

é denso em H. Como

$$\begin{aligned} [C(B+ikE)^{-1}+E](B+ikE)D &= C(B+ikE)^{-1}(B+ikE)D+(B+ikE)D \\ &= CD+(B+ikE)D \\ &= (C+B+ikE)D. \end{aligned} \tag{3.109}$$

$(C+B+ikE)D$ é denso em H. De forma análoga, tomando $-k$ no lugar de k, obtemos também que $(C+B-ikE)D$ é denso em H. Conclusão:

(i) $B+C$ é simétrico

(ii) $(C+B\pm ikE)D$ são densos em H.

Assim, por definição, o operador $(B+C)$ é essencialmente autoadjunto. □

Um último critério para determinar–se se um operador é essencialmente autoadjunto é o seguinte:

Teorema 3.2.7. *Seja $A\in L(H)$ um operador simétrico tal que existe uma base ortonormal completa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em H formada por autovetores de A, isto é, para todo $n\in\mathbb{N}$, $f_n\in D(A)$ e*

$$Af_n=\lambda_n f_n, \tag{3.110}$$

com $\lambda_n\in\mathbb{R}$. Então o operador A é essencialmente autoadjunto.

Prova: Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é completo em H, então todo $u\in H$ pode ser expresso como

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}a_nf_n \tag{3.111}$$

onde $a_n=\langle u,f_n\rangle$. Seja $(u_N)\subset D(A)$ definida por

$$u_{N}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\langle u,f_n\rangle}{\lambda_n+i}f_n \tag{3.112}$$

e $v_{_N} := (A+i)u_{_N} \in (A+iE)D(A)$. Então

$$
\begin{aligned}
v_{_N} &= (A+i)\sum_{n=1}^{N} \frac{\langle u, f_n\rangle}{\lambda_n + i} f_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{\langle u, f_n\rangle}{\lambda_n + i}(A+i) f_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} \langle u, f_n\rangle\, f_n
\end{aligned}
\tag{3.113}
$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{f_n\}$ ortonarmal,

$$
\begin{aligned}
\|u - v_{_N}\|^2 &= \|u - (A+i)u_{_N}\|^2 \\
&= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle u, f_n\rangle\, f_n \right\|^2 \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} |\,\langle u, f_n\rangle\,|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\,\langle u, f_n\rangle\,|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\,\langle u, f_n\rangle\,|^2.
\end{aligned}
\tag{3.114}
$$

A série é convergente, pois $\{f_n\}$ é completo, e pelo teorema de Parseval,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\,\langle u, f_n\rangle\,|^2 = \|u\|^2 < \infty. \tag{3.115}$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$\|u - v_{_N}\| < \varepsilon \tag{3.116}$$

para N suficientemente grande. Portanto, $(A+iE)D(A)$ é denso em H. De modo análogo prova–se que $(A-iE)D(A)$ é também denso em H. Portanto, A é um operador essencialmente autoadjunto. $\square$

Capítulo 4

Operadores de Schrödinger

4.1 Introdução

Um operador de Schrödinger A é um operador linear da forma geral

$$A = \sum_{j,r=1}^{n} D_j(a_{jr})D_r + q(x), \tag{4.1}$$

onde

$$D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j} + b_j(x) \tag{4.2}$$

e a_{jr}, b_j, q são funções reais definidas em algum aberto do $\mathbb{R}^n$, com $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$. Estes operadores tem domínio $D(A)$ definido no espaço de *Hilbert* das funções quadraticamente integráveis $L^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, o caso mais importante nas aplicações. Sob condições apropriadas sobre as funções a_{jk}, $b_j(x)$, $q(x)$ e $D(A)$ é possível obter um operador autoadjunto, ou essencialmente autoadjunto. Muitos resultados foram obtidos no século passado com o objetivo de obter estas condições. Nosso objetivo neste capítulo é o de apresentar alguns destes resultados no caso em que $b_j(x) \equiv 0$ e

$$\begin{cases} a_{jr} \equiv 1 \; \textit{quando} \; j = r \\ a_{jr} = 0 \; \textit{quando} \; j \neq r \end{cases}$$

ou seja,

$$A = -\Delta + q(x), \tag{4.3}$$

onde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{4.4}$$

é o operador de Laplace. A relevância dos operadores de Schrödinger aqui considerados reside na sua íntima conexão com a equação de Schrödinger

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -iAf(x,t) \\ f(x,s) = \phi(x) \end{cases} \tag{4.5}$$

onde $t \in \mathbb{R}$ representa o tempo, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e A é um operador linear da forma (4.3), definido em $D(A) \subseteq L^2(\Omega)$, com $\phi \in D(A)$ e $f(x,t) \in D(A)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Esta equação descreve a evolução de sistemas físicos ao nível microscópico em mecânica quântica, um dos campos da física atômica. Um teorema devido a *Stone*, que tem por base o teorema espectral de *von Neumann*, garante a existência e unicidade da solução do problema de Cauchy (4.5) no caso em que o operador A for autoadjunto. Ver [7,9 e 12].

Aqui reside a relevância do operador A ser autoadjunto ou ter extensões autoadjuntas. Dado que existe solução, isto é, uma função continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$ (na variável t), com valores em $D(A)$, vamos verificar que a solução é de fato única, supondo que o operador A é autoadjunto. Suponha o contrário, ou seja, o problema de Cauchy admite outra solução $g(x,t)$. Nesse caso, $\varphi = f - g$ é outra solução satisfazendo $\varphi(x,s) = 0$. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\varphi\|^2 &= \frac{d}{dt}\langle \varphi, \varphi \rangle = \frac{d}{dt}\int_\Omega \varphi(x,t)\overline{\varphi(x,t)}dx \\ &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \varphi \right\rangle + \left\langle \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t}\overline{\varphi} + \int_\Omega \varphi \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} \\ &= -i\langle A\varphi, \varphi\rangle + i\langle \varphi, A\varphi\rangle = -i\langle \varphi, A^*\varphi\rangle + i\langle \varphi, A\varphi\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

pois $A = A^*$, por hipótese.

Podemos concluir que φ é uma constante, relativamente a variável t. Mas, como $\varphi(x,s) = 0$, pela condição inicial, esta constante é igual a zero e, portanto, $f = g$. O teorema de *Stone* [9], diz que a solução é da forma

$$f(x,t) = U(t)\phi(x) \tag{4.7}$$

onde $U(t)$ tem as propriedades de grupo de operadores $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, com $\|U(t)\| = 1$ e

$$iAf = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t) - E)\phi \tag{4.8}$$

Por causa disto é comum indicar–se formalmente a relação (4.8) como

$$U(t) = e^{itA} \tag{4.9}$$

A justificativa rigorosa destes resultados será omitida aqui. Ver Ref [7,9,12].

Neste capítulo, na seção 4.3, estudaremos o operador de Schrödinger nos casos $q(x) = 0$ e $q(x) \neq 0$, com $q(x)$ satisfazendo condições para que o operador seja essencialmente autoadjunto, como será provado.

4.2 O operador de Laplace

Nessa seção, estudaremos o operador de Schrödinger $T = -\Delta f + q(x)$, com a função $q(x) \equiv 0$ para todo x no domínio de definição $D(T)$. O que, nesse caso, chama–se operador de *Laplace*.

Teorema 4.2.1. *Seja T o operador definido no espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$, com domínio de definição $D(T) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e dado por*

$$Tf = -\Delta f. \tag{4.10}$$

O operador T é essencialmente autoadjunto.

Para provar o teorema vamos utilizar o seguinte lema:

Lema 4.2.1 (Lema de Weyl). *Seja $\eta(x) \in C^1(\Omega)$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto simplesmente conexo, não necessariamente limitado. Seja w(x) uma função localmente integrável em Ω, isto é, $w \in L^1(K)$, em qualquer compacto $K \subset \Omega$. Suponha que, para todo $u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ tem–se que*

$$\int_\Omega w(x)Tudx = \int_\Omega \eta(x)u(x)dx. \tag{4.11}$$

onde $Tu = -\Delta u$. Então, w(x) coincide quase sempre em Ω com uma função $\tilde{w}(x)$ $\in C^2(\Omega)$.

Prova: Ver [1].

Prova do teorema 4.2.1: Para porvar que T é essencialmente autoadjunto, devemos verificar que T é simétrico e $(T \pm iE)D(T)$ são densos em H. O operador T está densamente definido, pois $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para todo $f, g \in D(T)$, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e fechado contendo os suportes de f e g. Então, usando a segunda identidade de *Green* (teorema A.3.2),

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle - \langle f, Tg\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\Delta f\overline{g} + f\overline{\Delta g}\right) dx \\
&= \int_\Omega \left(-\Delta f\overline{g} + f\overline{\Delta g}\right) dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial n}\overline{g} - f\overline{\frac{\partial g}{\partial n}}\right) dS \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

pois $f = g = 0$ em $\partial\Omega$. Portanto, T é um operador simétrico. Devemos provar, agora, que

$$\begin{cases} (T + iE)C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \\ (T - iE)C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

são densos em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Primeiramente vamos provar que $(T+iE)C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$. A prova será por contradição. Assim, suponha que $(T+iE)C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ não é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nesse caso, existe um $w \in L^2(\mathbb{R}^n)$, com $w \neq 0$, tal que

$$\langle w, (A+iE)u\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} w(x)\left[-\Delta\overline{u} - \,i\overline{u}\right] dx = 0 \tag{4.13}$$

para todo $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sendo $w \in L^2(\mathbb{R}^n)$, w também é localmente integrável. Podemos aplicar assim o lema de Weyl tomando $\eta \equiv 0$. Então, $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Seja Ω um aberto limitado contendo o suporte de u. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x)\left[-\Delta\overline{u} - \,i\overline{u}\right] dx = \int_{\Omega}\left(-w\Delta\overline{u} - \,iw\overline{u}\right) dx \tag{4.14}$$

Fazendo a integração por partes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(-\Delta w - \,iw\right)\overline{u}dx = 0 \tag{4.15}$$

para todo $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Não ocorrem termos de superfície, pois $u = 0$ em $\partial\Omega$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$, pelo teorema A.1.2,

$$-\Delta w - iw = 0, \tag{4.16}$$

ou seja

$$-\Delta w = iw. \tag{4.17}$$

Ora, a equação (4.17) diz que o operador $-\Delta$ tem um autovalor $\lambda = i$ complexo, o que contradiz a simetria deste operador. Logo, a existência de $w \neq 0$ não pode ser possível. Isso prova que $(T+iE)C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Similarmente, prova–se o mesmo resultado para $(T-iE)C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo, o operador T é essencialmente autoadjunto. $\square$

O teorema permanece válido para $D(T) = C_0^\infty(\Omega)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sendo T essencialmente autoadjunto, temos que a única extensão autoadjunta de T é o operador $\overline{T} = T^*$.

Teorema 4.2.2. *Seja*

$$P = \Big\{f|f \in L^2(\mathbb{R}^n) \ e \ \ -\Delta f \in L^2(\mathbb{R}^n) \ \textit{no sentido das distribuições}\Big\}.$$

Então, $D(T^*) = P$, *e* $T^*f = -\Delta f$.

Prova: Seja $h \in P$. Então, $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e existe $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, com $g = -\Delta h$ no sentido das distribuições (Apêndice), tal que

$$\langle T\varphi, h\rangle = \langle \varphi, g\rangle \tag{4.18}$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mas, como T é denso, há um único $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $v = T^*h$, e

$$\langle T\varphi, h\rangle = \langle \varphi, v\rangle \tag{4.19}$$

Comparando (4.18) e (4.19) obtemos

$$\langle \varphi, g - v\rangle = 0 \tag{4.20}$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso, $g = v$. Então, $T^*h = -\Delta h$ e $h \in D(T^*)$. Portanto,

$$P \subseteq D(T^*) \tag{4.21}$$

Agora vamos provar que $D(T^*) \subseteq P$. Seja $f \in D(T^*)$. Então, há um único $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $u = T^*f$, tal que

$$\langle T\varphi, f\rangle = \langle -\Delta\varphi, f\rangle = \langle \varphi, T^*f\rangle \tag{4.22}$$

para todo $\varphi \in D(T) = C_0^\infty \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Então, $u = -\Delta f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ no sentido das distribuições (ver A.2.2). Podemos concluir que para todo $f \in D(T^*)$, obtem–se que $f \in P$. Como $f \in D(T^*)$ é qualquer, temos

$$D(T^*) \subseteq P. \tag{4.23}$$

De (4.21) e (4.23), obtemos que $D(T^*) = P$ e $T^* = -\Delta$. □

Observe que $D(T) \subset D(T^*)$. Portanto, T não é autoadjunto. No entanto, vamos provar que o operador T^* definido em $D(T^*) = P$ é autoadjunto. Portanto, T^* é a única extensão autoadjunta de T, pois T é essencialmente autoadjunto, pelo teorema 4.2.1. Como T é essencialmente autoadjunto, o operador fecho $\overline{T}$ é autoadjunto, isto é, $(\overline{T})^* = \overline{T}$. Por outro lado, pelo teorema 1.5.8, $\overline{T} = T^{**}$. Então, pelo lema 1.5.1,

$$T^{**} = \overline{T} = (\overline{T})^* = T^{***} = T^* \tag{4.24}$$

Conclui–se que $T^{**} = T^*$, o seja, T^* é autoadjunto. Provamos, assim, que o operador de *Laplace* definido em P é autoadjunto.

Observação 4.2.1. *O conjunto P, definido no teorema 4.2.2, é equivalente ao espaço de Sobolev*

$$H^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^n)\ e\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\} \tag{4.25}$$

Uma prova deste equivalência é indicada na ref [16], cap. IX, p. 340. Pode–se provar que $H^2(\mathbb{R}^n) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^m)}$, na norma de $H^2(\mathbb{R}^n)$. Provamos, assim, o seguinte teorema:

Teorema 4.2.3. *O operador de Laplace definido no espaço de Sobolev $H^2(\mathbb{R}^n)$, é autoadjunto.*

4.3 O operador $-\Delta + q(x)$

Nesta seção vamos considerar o operador de Schrödinger $A = -\Delta + q(x)$, onde o operador A está definido no domínio $D(A) = C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $q(x)$ uma função real. Como A é a soma de dois operadores $B = -\Delta$ e $C = q(x)$, A só estará bem definido como operador para $D(A) = D(B) \cap D(C) \subseteq L^2(\Omega)$.
Como no caso anterior, tomemos $D(B) = C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, de sorte que devemos ter

$qf \in L^2(\Omega)$ para $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Para tanto, é suficiente que $q \in {L^2}_{loc}(\Omega)$, isto é, q é quadraticamente localmente integrável em todo compacto $K \subset \Omega$. Assim,

$$\|qf\| = \int_\Omega |qf|^2 dx = \int_{K \equiv sup\ f} |qf|^2 dx < \infty \tag{4.26}$$

e, portanto,

$$\|Af\| \leq \|Bf\| + \|qf\| < \infty. \tag{4.27}$$

Nas condições acima, o operador de Schrödinger A está densamente definido em $L^2(\Omega)$ e $Af \in L^2(\Omega)$.

Grande parte da pesquisa sobre operadores de Schrödinger no século passado teve como objetivo determinar condições sobre a função $q(x)$ que tornam o operador A autoadjunto ou essencialmente autoadjunto. Os resultados mais importantes estão associados com os pesquisadores $T.Kato$, $F.Stummel$ e $B.Simon$, para citar os principais. Muitos desses resultados podem agora ser consultados, por exemplo nas referências [1], [7], [9] e [13].

No que segue consideramos dois exemplos de operadores de Schrödinger essencialmente autoadjuntos.

Definição 4.3.1. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e A o operador definido em $L^2(\Omega)$ no domínio*

$$D(A) = \Big\{u | u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \;\; u(x) = 0 \; para \; x \in \partial\Omega)\Big\} \tag{4.28}$$

dado por

$$Au = -\Delta u + q(x)u, \tag{4.29}$$

onde a função q(x) é real, $q(x) \geq 0$ e $q(x) \in C^1(\overline{\Omega})$.

Notamos que como $u \in C^2(\Omega)$ então $-\Delta u \in C(\Omega)$. Ademais, como $q \in C^1(\overline{\Omega})$, $qu \in C^1(\overline{\Omega})$. Disso decorre que $Au \in L^2(\Omega)$. Portanto, A está bem definido como operador.

Teorema 4.3.1. *O operador A acima admite um conjunto ortonormal de autofunções $f_1, f_2, ...$ em D(A) completo em $L^2(\Omega)$.*

Prova: Ver ([1], seção 7.7).

Teorema 4.3.2. *O operador A é essencialmente autoadjunto.*

Prova: O domínio $D(A)$ é denso em $L^2(\Omega)$, pelo teorema anterior. Portanto, existe o operador adjunto A^*. Vamos mostrar que A é simétrico. De fato, como q é real,

$$\begin{aligned} \langle Af, g\rangle - \langle f, Ag\rangle &= \int_\Omega \Big[(-\Delta f + qf)\overline{g} - f(-\Delta\overline{g} + q\overline{g})\Big] \\ &= \int_\Omega \Big(-\Delta f\overline{g} - f\,(-\Delta\overline{g})\Big) \\ &= \int_\Omega \Big(f\Delta\overline{g}\ - (\Delta f)\overline{g}\Big) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial\overline{g}}{\partial\eta} - \overline{g}\frac{\partial f}{\partial\eta}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

pois $f = g = 0$ em $\partial\Omega$.

O teorema 4.3.2 mais o teorema 3.2.7 implicam que A é essencialmente autoadjunto.

□

Tomando $q(x) \equiv 0$, resulta que o operador de *Laplace* definido em $D(A)$ com condições de *Dirichlet* é essencialmente autoadjunto.

O operador de Schrödinger, considerado no próximo teorema, tem uma função $q(x)$ que satisfaz a chamada condição de *Stummel*, dada pela desigualdade (4.31). A classe das funções satisfazendo esta condição é chamada de classe de *Stummel*. Os teoremas 4.3.3 e 4.3.4 foram demonstrados primeiramente por *Stummel* e *Kato* nas referências [14] e [15]. No entanto, seguimos aqui a exposição da ref [1] que considera um caso especial.

Teorema 4.3.3. *Seja $q(x)$ uma função real, $q(x) \in {L^2}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, e satisfazendo a seguinte desigualdade*

$$\int_{|x-y|\leq R} \frac{q^2(y)}{|x-y|^{n-4+\alpha}} dy \leq M, \tag{4.31}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, com $0 < R < 1$, e constantes M e $0 < \alpha < 4$. Então, o operador $A = -\Delta + q(x)$ definido em $L^2(\mathbb{R}^n)$ no domínio $D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, densamente definido em $L^2(\mathbb{R}^n)$, é

i) limitado inferiormente, e

ii) simétrico.

Para provar este teorema precisamos dos seguintes lemas:

Lema 4.3.1. *Seja $n \geq 2$, $0 < \beta < n$, $R > 0$. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\int_{|x-y|\leq R} \frac{dy}{|x-y|^\beta} = \frac{\omega R^{n-\beta}}{n-\beta}, \tag{4.32}$$

onde ω é a área da superfície da bola unitária no $\mathbb{R}^n$

Prova: Ver ([1], pg 53).

Lema 4.3.2. *Seja $\varphi(t) \in C^2(0 \leq t \leq 1)$, tal que*

$$\begin{cases} \varphi(t) \equiv 1, & se \;\; 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ \varphi(t) \equiv 0, & se \;\; \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \\ 0 \leq \varphi \leq 1. & se \;\; 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{4.33}$$

Toda função $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ pode ser representada por

$$u(x) = -\int_{|x-y|\leq R} s(x,y)\Delta\left[u(y)\varphi\left(\frac{|x-y|}{R}\right)\right] dy \tag{4.34}$$

onde

$$s(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\omega}|x-y|^{2-n}, \;\; n \geq 3 \\ \\ -\dfrac{1}{2\pi} log|x-y|, \;\; n = 2 \end{cases} \tag{4.35}$$

ou por

$$u(x) = \frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{n}\int_{|y-x|\leq R}\frac{(x_i-y_i)}{|x-y|^n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left[u(y)\varphi\left(\frac{|x-y|}{R}\right)\right]dy, \tag{4.36}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$, *e* $n \geq 2$. *Além disso, existem constantes* k_1 *e* k_2 *satisfazendo as seguintes desigualdades*

(a) $|s(x,y)|\left|\Delta\varphi\left(\frac{|x-y|}{R}\right)\right| \leq k_1 R^{-n}$

(b) $|\nabla(s(x,y))|\left|\nabla\left(\varphi\left(\frac{|x-y|}{R}\right)\right)\right| \leq k_2 R^{-n}$

Prova: Ver Ref [1].

Lema 4.3.3. *Sejam* $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, $0 < \gamma < 2$ *e* $R \in (0,1)$. *Então* u *satisfaz à desigualdade*

$$|u(x)|^2 \leq c_2 R^\gamma \int_{|x-y|\leq R}\frac{|\nabla u|^2}{|x-y|^{n+\gamma-2}}dy + c_3 R^{\gamma-2}\int_{|x-y|\leq R}\frac{|u|^2}{|x-y|^{n+\gamma-2}}dy,$$

onde c_2 *e* c_3 *são constantes positivas.*

Prova: Seja $0 < \gamma < 2$ e $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. De acordo com o lema 4.3.2 temos

$$u(x) = \frac{1}{\omega}\int_{|x-y|\leq R}\frac{1}{|x-y|^{\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{2}}}\frac{\Sigma_{i=1}^n (x_i-y_i)\left[u(y)\varphi(\frac{|x-y|}{R})\right]_{y_i}}{|x-y|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{2}}}dy. \tag{4.37}$$

Aplicando a desigualdade de Schwarz a $|u(x)|$ obtemos que,

$$|u(x)|^2 \leq \frac{1}{w^2}I_1(x)I_2(x), \tag{4.38}$$

para

$$I_1 = \int_{|x-y|\leq R}\frac{dy}{|x-y|^{n-\gamma}} \tag{4.39}$$

e

$$I_2 = \int_{|x-y|\leq R}\frac{k(x,y)}{|x-y|^{n+\gamma}}dy, \tag{4.40}$$

onde

$$k(x,y) := \left|\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)\left[u(y)\varphi\left(\frac{|x-y|}{R}\right)\right]_{y_i}\right|^2 \tag{4.41}$$

Aplicando a $k(x,y)$ a desigualdade de Schwarz para somas, segue:

$$k(x,y) \leq |x-y|^2 \sum_{i=1}^{n} \left| \left[u(y)\varphi\left(\frac{|x-y|}{R}\right)\right]_{y_i} \right|^2. \tag{4.42}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial y_i}\left[u(y)\varphi\left(\frac{|x-y|}{R}\right)\right]\right|^2 &= \left| u_{y_i}\varphi\left(\frac{|x-y|}{R}\right) + u(y)\varphi_{y_i}\left(\frac{|x-y|}{R}\right)\right|^2 \\ &\leq 2\left| u_{y_i}\varphi\left(\frac{|x-y|}{R}\right)\right|^2 + 2\left| u\varphi_{y_i}\left(\frac{|x-y|}{R}\right)\right|^2 \\ &\leq 2|u_{y_i}|^2 + 2|u|^2.|\varphi_{y_i}|^2 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Este último resultado foi obtido aplicando a desigualdade

$$|a+b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2 \tag{4.44}$$

e que $0 \leq \varphi \leq 1$, sempre. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \left[u(y)\varphi\left(\frac{|x-y|}{R}\right)\right]_{y_i} \right|^2 \leq 2|\nabla u|^2 + 2|u|^2 \sum_{i=1}^{n} |\varphi_{y_i}|^2, \tag{4.45}$$

onde $\nabla u := (u_{y_1}, u_{y_2}, ..., u_{y_n})$ é o gradiente de u.

Lembrando a definição de φ no lema 4.3.2

$$\begin{cases} \varphi(t) \equiv 1, \quad para \;\; 0 \leq |x-y| \leq \frac{R}{3} \\ \varphi(t) \equiv 0, \quad para \;\; \frac{2R}{3} \leq |x-y| \leq R \end{cases} \tag{4.46}$$

onde $0 < R < 1$. Portanto, $\varphi_{y_i} = 0$ quando $0 \leq |x-y| \leq \frac{R}{3}$, ou $\frac{2R}{3} \leq |x-y| \leq R$. Nos demais casos, isto é, para $\frac{R}{3} \leq |x-y| \leq \frac{2R}{3}$, temos

$$\varphi_{y_i}\left(\frac{|x-y|}{R}\right) = \varphi'(t)\frac{(y_i - x_i)}{R|x-y|}. \tag{4.47}$$

em $t = \frac{|x-y|}{R}$. Nesse caso,

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_{y_i}|^2 = \frac{|\varphi'(t)|^2}{R^2|x-y|^2} \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^2 = \frac{|\varphi'(t)|^2}{R^2}. \tag{4.48}$$

Como $\varphi \in C^2(0 \leq t \leq 1)$, $|\varphi'(t)|^2$ está limitada por uma constante no intervalo $[0,1]$. Todos os casos podem ser englobados no seguinte resultado:

$$k(x,y) \leq |x-y|^2 \left(|\nabla u|^2 + c_1 |u|^2 \frac{1}{R^2} \right) \tag{4.49}$$

para alguma constante $c_1 \geq 0$. Assim, concluímos que

$$I_2 \leq \int_{|x-y|\leq R} \frac{|\nabla u|^2}{|x-y|^{n+\gamma-2}} dy + \frac{c_1}{R^2} \int_{|x-y|\leq R} \frac{|u|^2}{|x-y|^{n+\gamma-2}} dy. \tag{4.50}$$

Como $0 < \gamma < 2 \leq n$, então $0 < \gamma < n$ e $0 < n - \gamma < n$. Podemos aplicar o lema 4.3.1, com $\beta = n - \gamma$ para obter

$$I_1(x) = \frac{\omega}{\gamma} R^\gamma \tag{4.51}$$

Reunindo os resultados (4.51), (4.50) e (4.38) segue então

$$|u(x)|^2 \leq c_2 R^\gamma \int_{|x-y|\leq R} \frac{|\nabla u|^2}{|x-y|^{n+\gamma-2}} dy + c_3 R^{\gamma-2} \int_{|x-y|\leq R} \frac{|u|^2}{|x-y|^{n+\gamma-2}} dy, \tag{4.52}$$

para constantes positivas c_2 e c_3, adequadas que podem depender de γ, ω e c_1. $\square$

Lema 4.3.4. *Seja $q(x)$ uma função real, como no teorema 4.3.3 satisfazendo a desigualdade (4.31) e $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |q(x)|.|u(x)|^2 dx \leq c_5 R^{\frac{\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dy + c_6 R^{\frac{\alpha}{2}-2} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dy. \tag{4.53}$$

Prova: Considere a integral

$$\int_{|x|\leq\beta} |q(x)||u(x)|^2 dx, \tag{4.54}$$

onde $\beta > 0$. O lema 4.3.3 implica

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leq\beta} |q(x)||u(x)|^2 dx \quad & \leq c_2 R^\gamma \int_{|x|\leq\beta} |q(x)| \left(\int_{|x-y|\leq R} \frac{|\nabla u|^2}{|x-y|^{n+\gamma-2}} dy \right) dx \\ & + c_3 R^{\gamma-2} \int_{|x|\leq\beta} |q(x)| \left(\int_{|x-y|\leq R} \frac{|u|^2}{|x-y|^{n+\gamma-2}} dy \right) dx. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Mudando a ordem de integração, tomando $\gamma = \dfrac{\alpha}{4}$ e $|y| \leq |y-x| + |x| \leq R + \beta$, segue de (4.55):

$$\int_{|x|\leq\beta} |q(x)||u(x)|^2 dx \leq c_2 R^{\frac{\alpha}{4}} \int_{|y|\leq R+\beta} |\nabla u|^2 \left(\int_{|x-y|\leq R} \frac{|q(x)|}{|x-y|^{n+\frac{\alpha}{4}-2}} dx \right) dy$$

$$+c_3 R^{\frac{\alpha}{4}-2} \int_{|y|\leq R+\beta} |u(y)|^2 \left(\int_{|x-y|\leq R} \frac{|q(x)|}{|x-y|^{n+\frac{\alpha}{4}-2}} dx \right) dy. \tag{4.56}$$

A desigualdade de Schwarz, (4.31) e o lema 4.3.1 implicam que

$$\begin{aligned} \left(\int_{|x-y|\leq R} \frac{|q(x)|}{|x-y|^{n+\frac{\alpha}{4}-2}} dx \right)^2 &= \left(\int_{|x-y|\leq R} \frac{|q(x)|}{|x-y|^{\frac{n}{2}+\frac{\alpha}{2}-2}} . \frac{1}{|x-y|^{\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{4}}} dx \right)^2 \\ &\leq \int_{|x-y|\leq R} \frac{(q(x))^2}{|x-y|^{n+\alpha-4}} dx \int_{|x-y|\leq R} \frac{1}{|x-y|^{n-\frac{\alpha}{2}}} dx \\ &\leq M \int_{|x-y|\leq R} \frac{1}{|x-y|^{n-\frac{\alpha}{2}}} dx = c_4 M R^{\frac{\alpha}{2}}, \end{aligned} \tag{4.57}$$

(a hipótese $\alpha < 4$ é importante aqui, pois $n \geq 2$ e $\frac{\alpha}{2} < 2$. Assim, $0 < n - \frac{\alpha}{2} < n$, como requer o lema 4.3.1) e, portanto,

$$\int_{|x-y|\leq R} \frac{|q(x)|}{|x-y|^{n+\frac{\alpha}{4}-2}} dx \leq c_4' R^{\frac{\alpha}{4}}. \tag{4.58}$$

Aplicando este resultado em (4.56), obtemos

$$\int_{|x|\leq\beta} |q(x)||u(x)|^2 dx \leq c_5 R^{\frac{\alpha}{2}} \int_{|y|\leq R+\beta} |\nabla u|^2 dy + c_6 R^{\frac{\alpha}{2}-2} \int_{|y|\leq R+\beta} |u(y)|^2 dy. \tag{4.59}$$

As integrais em (4.59) estão bem definidas quando $\beta \to \infty$, pois $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Daí, a expressão (4.59) vale em todo $\mathbb{R}^n$ e obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |q(x)||u(x)|^2 dx \leq c_5 R^{\frac{\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dy + c_6 R^{\frac{\alpha}{2}-2} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dy. \ \square \tag{4.60}$$

Prova do teorema 4.3.3:

i) Temos

$$\langle Au, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} [-\Delta u + q(x)u]\overline{u} dx = - \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)\overline{u} dx + \int_{\mathbb{R}^n} q(x)|u|^2 dx. \tag{4.61}$$

Pela primeira fórmula de Green,

$$- \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)\overline{u} dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla(u), \nabla(u) \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u)|^2 dx, \tag{4.62}$$

seguindo–se que

$$\langle Au, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} q(x)|u|^2 dx. \tag{4.63}$$

Se $q(x) \geq 0$ então $q(x) \geq -|q(x)|$; se $q(x) < 0$, então $q(x) = -|q(x)|$. Em ambos os casos, $q(x) \geq -|q(x)|$. Daí, é verdade, então, que

$$\langle Au, u\rangle \quad \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} |q(x)|.|u|^2 dx. \tag{4.64}$$

Aplicando o lema 4.3.4, obtemos que

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle &\geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - c_5 R^{\frac{\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u)|^2 dy - c_6 R^{\frac{\alpha}{2}-2} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dy \\ &= \left(1 - c_5 R^{\frac{\alpha}{2}}\right) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - c_6 R^{\frac{\alpha}{2}-2} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dy.\end{aligned} \tag{4.65}$$

Agora, escolhendo $R \in (0, 1)$ tal que $1 - c_5 R^{\frac{\alpha}{2}} \geq 0$, obtemos que

$$(1 - c_5 R^{\frac{\alpha}{2}}) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \geq 0 \tag{4.66}$$

e

$$\langle Au, u\rangle \geq a \langle u, u\rangle, \tag{4.67}$$

onde $a = -c_6 R^{\frac{\alpha}{2}}$. Portanto, A é um operador limitado inferiormente.

ii) Visto que $\langle Au, u\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois $a\langle u, u\rangle \in \mathbb{R}$, então, pelo teorema 1.4.4, A é simétrico, ou seja,

$$\langle Au, w\rangle = \langle u, Aw\rangle, \tag{4.68}$$

para todo $u, w \in D(A)$. □

Para provar que o operador A do teorema 4.3.3 é essencialmente autoadjunto, precisamos do seguinte lema:

Lema 4.3.5. *Sejam $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, com $n \geq 3$, $0 < \alpha < 4$, e $0 < R < 1$. Então,*

$$|u(x)|^2 \leq c_1 \frac{R^\alpha}{\alpha} \int_{|y-x|\leq R} \frac{|\Delta u(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}} dy + c_2 \frac{R^{\alpha-4}}{\alpha} \int_{|y-x|\leq R} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}} dy, \tag{4.69}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde c_1 e c_2 são constantes positivas independentes de x, $u(x)$, R e α.

Prova: Sem perda de generalidade, vamos considerar $u(x)$ real. Temos, pelo lema 4.3.2,

$$u(x) = -\int_{|y-x|\leq R} s(x,y)\Delta\left[u(y)\varphi\left(\frac{|x-y|}{R}\right)\right]dy, \tag{4.70}$$

onde

$$s(x,y) = \frac{1}{(n-2)\omega}|x-y|^{2-n} \tag{4.71}$$

para $n \geq 3$. Mas,

$$\begin{aligned} s\Delta[u\varphi] &= s\sum_{i=1}^{n}[u\varphi]_{y_iy_i} = s\sum_{i=1}^{n}\left[u_{y_iy_i}\varphi + 2u_{y_i}\varphi_{y_i} + u\varphi_{y_iy_i}\right] \\ &= s(\Delta u)\varphi + 2s\left\langle \nabla u, \nabla\varphi\right\rangle + su(\Delta\varphi) \end{aligned} \tag{4.72}$$

Note que

$$s\left\langle \nabla u, \nabla\varphi\right\rangle = s\sum_{i=1}^{n}u_{y_i}\varphi_{y_i} = \sum_{i=1}^{n}(su_{y_i})\varphi_{y_i}. \tag{4.73}$$

Ao substituirmos

$$su_{y_i} = (su)_{y_i} - us_{y_i}, \tag{4.74}$$

obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}(su_{y_i})\varphi_{y_i} = \sum_{i=1}^{n}(su)_{y_i}\varphi_{y_i} - u\sum_{i=1}^{n}s_{y_i}\varphi_{y_i} = \left\langle \nabla(su), \nabla\varphi\right\rangle - u\left\langle \nabla s, \nabla\varphi\right\rangle. \tag{4.75}$$

Portanto,

$$u(x) = -\int_{|z-y|\leq R}[su\Delta\varphi + s\varphi\Delta u + 2\left\langle \nabla(su), \nabla\varphi\right\rangle - 2u\left\langle \nabla s, \nabla\varphi\right\rangle]dy, \tag{4.76}$$

Aplicando a primeira fórmula de Green, obtemos

$$\int_{|y-x|\leq R} su\Delta\varphi dy = -\int_{|y-x|\leq R}\left\langle \nabla(su), \nabla(\varphi)\right\rangle dy. \tag{4.77}$$

Substituindo em (4.76), obtemos

$$u(x) = \int_{|y-x|\leq R} su\Delta\varphi - \int_{|y-x|\leq R} s\varphi\Delta u dy + \int_{|y-x|\leq R} 2u\left\langle \nabla(s), \nabla(\varphi)\right\rangle dy, \tag{4.78}$$

e

$$|u(x)| \leq \int_{|y-x|\leq R} |s|.|\varphi|.|\Delta u| dy + \int_{|y-x|\leq R} \{|s|.|\Delta\varphi| + 2|\nabla(s)|.|\nabla(\varphi)|\}|u| dy. \quad (4.79)$$

Substituindo as desigualdades do lema 4.3.2 em (4.79), obtemos

$$|u(x)| \leq b_1 \int_{|x-y|\leq R} \frac{|\Delta u|}{|x-y|^{n-2}} dy + b_2 R^{-n} \int_{|x-y|\leq R} |u| dy \quad (4.80)$$

e

$$|u(x)|^2 \leq \left(b_1 \int_{|x-y|\leq R} \frac{|\Delta u|}{|x-y|^{n-2}} dy + b_2 R^{-n} \int_{|x-y|\leq R} |u| dy \right)^2. \quad (4.81)$$

Aplicando a desigualdade $(a+b)^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$ neste último resultado segue–se que

$$|u(x)|^2 \leq b_1' \left(\int_{|x-y|\leq R} \frac{|\Delta u|}{|x-y|^{n-2}} dy \right)^2 + b_2' \left(R^{-n} \int_{|x-y|\leq R} |u| dy \right)^2. \quad (4.82)$$

Mas,

$$\int_{|x-y|\leq R} \frac{|\Delta u|}{|x-y|^{n-2}} dy = \int_{|x-y|\leq R} \frac{|\Delta u|}{|x-y|^{\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{2}} |x-y|^{\frac{n}{2}-2+\frac{\alpha}{2}}} dy. \quad (4.83)$$

Aplicando a desigualdade de Schwarz no lado direito da (4.83) obtemos

$$\int_{|x-y|\leq R} \frac{|\Delta u|}{|x-y|^{n-2}} dy \leq \left(\int_{|x-y|\leq R} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|x-y|\leq R} \frac{|\Delta u|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}} dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.84)$$

Temos também que

$$\int_{|x-y|\leq R} |u| dy = \int_{|x-y|\leq R} \frac{|x-y|^{\frac{n}{2}-2+\frac{\alpha}{2}}}{|x-y|^{\frac{n}{2}-2+\frac{\alpha}{2}}} |u| dy. \quad (4.85)$$

Novamente, utilizando a desigualdade de Schwarz, implica que

$$\int_{|x-y|\leq R} |u| dy \leq \left(\int_{|x-y|\leq R} |x-y|^{n-4+\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|x-y|\leq R} \frac{|u|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}} dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.86)$$

Usando o lema 4.3.1,

$$\int_{|y-x|\leq R} \frac{dy}{|x-y|^{\beta}} = \omega \frac{R^{n-\beta}}{n-\beta}, \quad (4.87)$$

com $\beta = n-\alpha$, em (4.84), e $\beta = -n+4-\alpha$ em (4.86), obtemos

$$|u(x)|^2 \leq c_1 \frac{R^{\alpha}}{\alpha} \int_{|y-x|\leq R} \frac{|\Delta u|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}} dy + c_2 \frac{R^{\alpha-4}}{2n-4+\alpha} \int_{|y-x|\leq R} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}} dy, \quad (4.88)$$

onde $2n-4>0$. $\square$

Teorema 4.3.4. *O operador A definido no teorema 4.3.3 é essencialmente autoadjunto.*

Prova: Consideramos aqui apenas o caso $n \geq 3$. Seja $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{C})$, daí pelo lema 4.3.5,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |q(x)u(x)|^2 dx \leq{} & \frac{c_1 R^\alpha}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|y-x|\leq R} \frac{q^2(x)|\Delta u(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}} dy \right) dx \\ & + \frac{c_2 R^{\alpha-4}}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|y-x|\leq R} \frac{q^2(x)|u(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\alpha}} dy \right) dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\frac{c_1 R^\alpha}{\alpha} |\Delta u(y)|^2 + \frac{c_2 R^{\alpha-4}}{\alpha} |u(y)|^2 \right) \int_{|x-y|\leq R} \frac{q^2(x)}{|x-y|^{n-4+\alpha}} dx \right] dy.\end{aligned} \tag{4.89}$$

Usando a condição (4.31),

$$||q(x)u(x)|| \leq k_1 R^{\frac{\alpha}{2}} M^{\frac{1}{2}} ||\Delta u(x)|| + k_2 R^{\frac{\alpha-4}{2}} M^{\frac{1}{2}} ||u(x)||. \tag{4.90}$$

Para $Bu := -\Delta u$, $Cu := q(x)u$, o resultado (4.90) é da forma

$$||Cu|| \leq \varepsilon ||Bu|| + \delta ||u||. \tag{4.91}$$

com $\varepsilon = k_1 R^{\frac{\alpha}{2}} M^{\frac{1}{2}}$ e $\delta = k_2 R^{\frac{\alpha-4}{2}} M^{\frac{1}{2}}$. Observamos que

1. O operador C é simétrico, pois tomando $Au = q(x)u(x)$, obtemos que

   $$\langle Af, g \rangle = \langle q(x)f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} q(x)f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{q(x)g(x)}dx = \langle f, Ag \rangle$$

   para todo $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. B é essencialmente autoadjunto em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ pelo teorema 4.2.1

Escolhendo $R \in (0,1)$ suficientemente pequeno e $\varepsilon \in (0,1)$, temos que o operador $B + C$ é essencialmente autoadjunto, pelo teorema 3.2.5. Ora,

$$(B + C)u = Bu + Cu = -\Delta u + q(x)u = Au \tag{4.92}$$

que é o operador de Schrödinger. Logo, o operador de Schrödinger A é essencialmente autoadjunto. □

4.4 Exemplo de função satisfazendo a condição de Stummel

Nesta secção damos um exemplo de função $q(x)$ satisfazendo a condição (4.31).

Teorema 4.4.1. *Sejam as funções $b(x)$ e ϱ, tais que $b(x) = \varrho^{-\delta}$, onde*

$$\varrho(x) = \left(\sum_{\nu=1}^{m} x^2{}_{\nu} \right)^{\frac{1}{2}},$$

com $1 \leq m \leq n$ e $\delta > 0$. Suponha que $2\delta < 4 - \alpha \leq m$, para $\alpha < 4$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

$$\int_{|x-y|\leq R} \frac{b^2(y)}{|x-y|^{n-4+\alpha}} dy \leq M, \tag{4.93}$$

para todo $0 < R < 1$.

Prova: Vamos aumentar o domínio de integração para o bloco

$$W := \{|y_i - x_i| \leq R, \ i = 1, 2, ..., n\} \tag{4.94}$$

Sejam W_1 e W_2 tais que

$$\begin{cases} W_1 = \{(y_1, ..., y_m)| \ |y_i - x_i| \leq R, \ i = 1, ..., m\} \\ W_2 = \{(y_{m+1}, ..., y_n)| \ |y_i - x_i| \leq R, \ i = m+1, ..., n\} \end{cases}$$

Como b depende apenas de $y \in W_1$,

$$I_W(x) := \int_W \frac{b^2(y)}{|x-y|^{n-4+\alpha}} dy = \int_{W_1} b^2(y) I_{W_2}(x, y) dy_1 dy_2 ... dy_m, \tag{4.95}$$

onde

$$I_{W_2}(x, y) = \int_{W_2} \frac{dy_{m+1} dy_{m+2} ... dy_n}{|x-y|^{n-4+\alpha}} \tag{4.96}$$

Consideremos a integral I_{W_2} em separado. Defina

$$r_1{}^2 := \sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i)^2, \tag{4.97}$$

e

$$r_2{}^2 := \sum_{i=m+1}^{n} (y_i - x_i)^2, \tag{4.98}$$

tal que $|x-y|^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2$. Usando que $|y_i - x_i| \leq R$, temos

$$|r_2|^2 \leq \sum_{i=m+1}^{n} |y_i - x_i|^2 \leq R^2(n-m) \tag{4.99}$$

Além disso, como $R < 1$, $r_1{}^2 < 1$ e

$$|x-y|^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2 < 1 + \delta^2 R^2 \tag{4.100}$$

onde $\delta := (n-m)^{\frac{1}{2}}$. Seja $\beta := 4 - \alpha$. Vamos mostrar que

$$I_{W_2} \leq \frac{c_{\varepsilon,\delta}}{r_1^{m_1-\beta+\varepsilon}} \tag{4.101}$$

onde $\varepsilon > 0$. É conveniente considerar vários casos.

Caso 1: $m \leq n-2$. Usando coordenadas polares e (4.99) obtemos

$$I_{W_2} \leq \omega \int_0^{\delta R} \frac{r_2^{n-m-1}}{(r_1{}^2 + r_2{}^2)^{\frac{n-\beta}{2}}} dr_2 = \omega \int_0^{\delta R} \frac{(r_2{}^2)^{\frac{n-m-2}{2}} r_2}{(r_1{}^2 + r_2{}^2)^{\frac{n-\beta}{2}}} dr_2 \tag{4.102}$$

onde ω é a bola unitária no $\mathbb{R}^n$. Prosseguindo, temos ainda que

$$I_{W_2} \leq \frac{\omega}{2} \int_0^{\delta R} \frac{(r_1{}^2 + r_2{}^2)^{\frac{n-m-2}{2}} d(r_2{}^2)}{(r_1{}^2 + r_2{}^2)^{\frac{n-\beta}{2}}} = \frac{\omega}{2} \int_0^{\delta R} \frac{1.d(r_2{}^2)}{(r_1{}^2 + r_2{}^2)^{\frac{m-\beta+2}{2}}} \tag{4.103}$$

De (4.100) e para $\varepsilon > 0$, qualquer,

$$(1 + \delta^2 R^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} > (r_1{}^2 + r_2{}^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \tag{4.104}$$

e, portanto,

$$\frac{(1 + \delta^2 R^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{(r_1{}^2 + r_2{}^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}} > 1 \tag{4.105}$$

Substituindo esta última integral em (4.103),

$$I_{W_2} < \frac{\omega}{2} \int_0^{\delta R} \frac{(1 + \delta^2 R^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} d(r_2{}^2)}{(r_1{}^2 + r_2{}^2)^{\frac{m-\beta+\varepsilon+2}{2}}} < \frac{\omega}{2} (1 + \delta^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} I_k \tag{4.106}$$

onde $k = \frac{m-\beta+\varepsilon+2}{2}$ e

$$I_k = \int_{r_1{}^2}^{\delta^2 R^2 + r_1^2} \frac{dt}{t^k} \leq \frac{c_k}{r_1^{m-\beta+\varepsilon}}, \tag{4.107}$$

mostrando (4.101). Em seguida, substituimos este último resultado em I_W para obter

$$I_W \leq c_{\varepsilon,\delta} \int_{W_1} \frac{b^2(y)}{r_1^{m_1-\beta+\varepsilon}} dy_1, ..., dy_m \tag{4.108}$$

ou, explicitamente

$$I_W \leq c_{\varepsilon,\delta} \int_{W_1} \frac{dy_1, ..., dy_m}{\varrho^{2\delta} r_1^{m_1-\beta+\varepsilon}} \tag{4.109}$$

Caso 2. $m = n-1$ Nesse caso, $\delta = 1$ e $m - \beta \geq 0$ e

$$\begin{aligned} I_{W_2} &\leq c_1 \int_0^R \frac{dr_2}{({r_1}^2 + {r_2}^2)^{\frac{n-\beta}{2}}} = c_1 \int_0^R \frac{dr_2}{({r_1}^2 + {r_2}^2)^{\frac{n-\beta+\varepsilon-\varepsilon+1}{2}}} \\ &\leq \frac{c_1}{r_1^{m-\beta+\varepsilon}} \int_0^R \frac{dr_2}{r_2^{1-\varepsilon}} \leq c_4 \frac{1}{r_1^{m-\beta+\varepsilon}}, \end{aligned} \tag{4.110}$$

onde se verifica a validade de (4.109) Caso 3. $m = n$. Já temos que

$$\int_{|x-y|\leq R} \frac{b^2(y)}{|x-y|^{n-4+\alpha}} dy \leq c_3 \int_{W_1} \frac{dy}{\varrho^{2\delta} r_1^{m-\beta}} \leq \int_{W_1} \frac{(R\sqrt{n})^{\varepsilon} dy}{\varrho^{2\delta} r_1^{m-\beta+\varepsilon}} \leq c_5 \int_{W_1} \frac{dy_1...dy_n}{\varrho^{2\delta} r_1^{m-\beta}} \tag{4.111}$$

Vamos aplicar a desigualdade de Hölder com

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} = \dfrac{2\delta}{2\delta + m - \beta + \varepsilon} \\ \\ \dfrac{1}{q} = \dfrac{m - \beta + \varepsilon}{2\delta + m - \beta + \varepsilon} \end{cases} \tag{4.112}$$

à integral (4.109). Resulta

$$\begin{aligned} \int_{|x-y|\leq R} \frac{b^2(y)}{|x-y|^{n-4+\alpha}} dy &\leq c_3 \int_W \frac{1}{\varrho^{2\delta} r_1^{m-\beta+\varepsilon}} dy_1...dy_m \\ &\leq c_3 \left(\int_{W_1} \frac{dy_1...dy_m}{\varrho^{2\delta+m-\beta+\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{W_1} \frac{dy_1...dy_m}{r_1^{2\delta+m-\beta+\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{4.113}$$

Como $\varepsilon > 0$ é qualquer, tome $\varepsilon = \frac{\beta}{2} - \delta$. Então,

$$2\delta + m - \beta + \varepsilon = m - \varepsilon < m \tag{4.114}$$

implica na existência das integrais em (4.113). Denote o volume de W_1 por $V_1(W_1)$, então $V_1(W_1) = R^m < 1$, e usando que

$$\int_{W_1} \frac{1}{|x-y|^\alpha} dy \leq \frac{\omega_n}{m-\alpha} \left(m \frac{V(W_1)}{\omega_n} \right)^{1-\frac{\alpha}{m}} \tag{4.115}$$

(Ver Ref [1], seção 4.3) com $m \geq 2$,

$$\begin{aligned} \int_{W_1} \frac{dy_1 ... dy_m}{\varrho^{2\delta+m-\beta+\varepsilon}} &= \int_{W_1} \frac{dy_1 ... dy_m}{\varrho^{m-\varepsilon}} \leq \frac{\omega_m}{\varepsilon} \left(\frac{m}{\omega_m} \right)^{\frac{\varepsilon}{m}}, \quad e \\ \int_{W_1} \frac{dy_1 ... dy_m}{r_1^{2\delta+m-\beta+\varepsilon}} &= \int_{W_1} \frac{dy_1 ... dy_m}{r_1^{m-\varepsilon}} \leq \frac{\omega_m}{\varepsilon} \left(\frac{m}{\omega_m} \right)^{\frac{\varepsilon}{m}}. \end{aligned} \tag{4.116}$$

O caso $m = 1$ é trivial. Isso completa a prova. $\square$

Exemplo 4.4.1. *O potencial de Coulomb $q(x) = \|x\|^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^3$, satisfaz à condição de Stummel. Tome n=3, m=3, $\delta = 1$ e $\alpha = 1$ no teorema anterior.*

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Neste Apêndice apresentaremos - sem demonstração - alguns resultados básicos conhecidos utilizados nos capítulos anteriores.

A.1 Espaço de Hilbert

Definição A.1.1. *Seja V um espaço vetorial complexo. Uma aplicação*

$$\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{C} \tag{A.1}$$

é chamada de um produto interno em V quando para todo x,y,$z \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, as seguintes condições forem satisfeitas:

(a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *(A barra denota a conjugação complexa)*

(b) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(c) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \ \forall \ \alpha \in \mathbb{C}$

(d) $\langle x, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in H.$

(e) $\langle x, x \rangle = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$

O par $(V, \langle ., . \rangle)$ é chamado de um espaço produto interno. Todo produto interno induz uma norma dada por

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}. \tag{A.2}$$

O par $(V, ||.||)$), onde $||.||$ é a norma induzida, é chamado de espaço normado.

Segue de (a) que

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle x, y \rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle y, x \rangle \tag{A.3}$$

Definição A.1.2 (Espaço de Hilbert). *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle ., . \rangle$, cuja norma é induzida pelo produto interno. Se diz que V é um espaço de Hilbert se ele é completo nessa norma.*

Definição A.1.3. *Um espaço de Hilbert é chamado de separável se ele possui um subconjunto enumerável denso.*

Teorema A.1.1. *Seja S um subespaço fechado de H e $S^{\perp}$ o seu complemento ortogonal. Todo elemento $u \in H$ pode ser escrito de forma única como $u = v + w$, onde $v \in S$ e $w \in S^{\perp}$.*

Prova: Ver Ref [1].

Teorema A.1.2. *Um subespaço $S \subseteq H$ é denso em H se, e somente se, $v = 0$ é o único elemento de H ortogonal a S.*

Prova: Ver Ref [1].

Teorema A.1.3 (Teorema da Limitação Uniforme). *Seja H um espaço de Hilbert e Y um espaço vetorial normado. Seja (T_n) uma família de operadores lineares limitados $T_n : H \to Y$. Suponha que para cada $x \in H$, a sequência $(\|T_n x\|)$ é limitada em Y, isto é,*

$$\|T_n x\| \leq c(x), \ n = 1, 2, .. \tag{A.4}$$

onde $c(x)$ é uma constante que depende de x. Nessas condições, a sequência $(\|T_n\|)$ é limitada, ou seja, existe c tal que

$$\|T_n\| \leq c \tag{A.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Ver Ref. [3].

A.2 Espaços L^p

Definição A.2.1. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Indica–se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das funções:*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{C} \mid u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\} \tag{A.6}$$

Os espaços L^p são espaços de *Banach* com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{A.7}$$

Em particular, $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert* complexo, com produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u(x) \overline{v(x)} dx, \ \forall u, v \in L^2(\Omega) \tag{A.8}$$

Teorema A.2.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam p e q conjugados, ou seja,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{A.9}$$

e $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$. Então $fg \in L^1(D)$ e

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x) \right| \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \tag{A.10}$$

Teorema A.2.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sejam $u, v \in L^2(\Omega)$. Então,*

$$| \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} | \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \tag{A.11}$$

Definição A.2.2. *Dada uma função $u(x) \in L^2(\Omega)$, se diz que ela é a derivada de ordem α, no sentido das distribuições, de uma função $v \in L^2(\Omega)$ quando*

$$\int_\Omega u(x)\psi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x) D^\alpha \psi(x)dx \tag{A.12}$$

para todo $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Indica–se a derivada de v, com o mesmo símbolo D^α, isto é, $u(x) = D^\alpha v$, mas subtendendo–se que isso é verdade no sentido das distribuições.

A.3 Funções absolutamente contínuas

Definição A.3.1. *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é chamada de absolutamente contínua quando dado $\varepsilon > 0$, qualquer, existe um $\delta > 0$ tal que para toda coleção finita $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)$, de subintervalos de $[a, b]$, dois a dois disjuntos satisfazendo a condição*

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \tag{A.13}$$

tem–se que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \tag{A.14}$$

Toda função absolutamente contínua é também contínua e uniformemente contínua.

Teorema A.3.1. *Uma função $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua se, e somente se, existe uma função $u \in L^1(I)$ tal que*

$$f(t) = f(a) + \int_a^t u(s)ds, \ t \in I. \tag{A.15}$$

Nesse caso, existe a derivada de f, f', quase sempre em I e $f' = u$ quase sempre em I.

Prova: Ver Ref. [6,11].

Teorema A.3.2. *Sejam f e g funções absolutamente contínuas em $I = [\alpha, \beta]$. Então, $fg' \in L^1(I)$, $f'g \in L^1(I)$ e*

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx \tag{A.16}$$

Prova: Ver Ref. [6].

Teorema A.3.3. *Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$ e suponha que f é absolutamente contínua em todo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $f' \in L^2(\mathbb{R})$. Então a função f satisfaz*

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \tag{A.17}$$

O mesmo resultado vale para $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, nas mesmas condições.

Prova: Ver Ref. [6].

A.4 Identidades de Green e Teorema de Fubini

Teorema A.4.1 (Primeira Fórmula de Green). *Sejam $u(x) \in C^1(\overline{D})$ e $v(x) \in C^2(\overline{D})$. Então,*

$$\begin{aligned}\int_D u(x)\overline{\Delta v(x)}dx &= \int_{\partial D} u(x)\overline{v_\nu(x)}dS - \sum_{j=1}^{n}\int_D u_{x_j}(x)\overline{v_{x_j}(x)}dx \\ &= \int_{\partial D} u(x)\overline{v_\nu(x)}dS - \int_D (grad(u), grad(v))dx,\end{aligned} \tag{A.18}$$

sendo v_ν a derivada normal de v em $x \in \partial D$.

Prova: Ver Ref [1].

Teorema A.4.2 (Segunda Fórmula de Green). *Considere agora as funções $u(x)$ e $v(x)$ em $C^2(\overline{D})$. Então,*

$$\int_D \left(u(x)\overline{\Delta v(x)} - \overline{v(x)}\Delta u(x)\right) dx = \int_{\partial D} \left(u(x)\overline{v_\nu(x)} - u_\nu(x)\overline{v(x)}\right) dS \tag{A.19}$$

sendo v_ν a derivada normal de v em $x \in \partial D$ e u_ν a derivada normal de u em $x \in \partial D$.

Prova: Ver Ref [1].

Teorema A.4.3 (Teorema de Fubini). *Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ dois abertos e $f : \Omega_1 X \Omega_2$ uma função limitada e integrável. Para cada $x \in \Omega_1$, definir a função $f_x : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ integrável para todo $x \in \Omega_1$. Então*

$$\int_{\Omega_1 X \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_x(y)dy\right) dx \tag{A.20}$$

Do mesmo modo, se a função $f_y : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ for integrável para todo $y \in \Omega_2$, então

$$\int_{\Omega_1 X \Omega_2} f = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f_x(y)dx\right) dy \tag{A.21}$$

Referências Bibliográficas

[1] Hellwig, G. **Differential Operators Of Mathematical Physics**, Addison-Wesley Series in Mathematicz. Berlin, 1964.

[2] Brézis, H. **Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones**. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[3] Kreyszig, E. **Introductory Functional Analysis With Applications**. John Wiley & Sons. Inc. New York, 1978.

[4] Schecter, M. **Principles Of Functional Analysis**. Academic Press, Inc. New York, 1971.

[5] Davies, E.B.**Spectral Theory and Differential Operators**. Cambridge University Press, 1995.

[6] Helmberg, G. **Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space**. North-Holland Publishing Co, 1969.

[7] Simon B., Reed. M, **Methods of Modern Mathematical Physics. Vol I-II**. Academic Press, 1975.

[8] Barut, A.O. **Theory of Group Representations an Applications**. Polish Scientific. Publishers, 1977.

[9] Weidmann, J., **Linear Operators in Hilbert Space**. Springer, 1980.

[10] Debnath, L., Mikusinski, P., **Introduction to Hilbert Space with Aplications**. Academic Press, 1990.

[11] Naylor, A.W., **Linear Operator Theory in Engineering and Science**. Academic Press, 1990.

[12] Iório, R.J., **Tópicos na Teoria da Equação de Schrödinger**. Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1987.

[13] Kato, T., **Perturbation Theory for Linear Operators**. Springer, 1984.

[14] Stummel, F., **Math. Annalen. 132**. (1956), 150-176.

[15] Ikebe, T., Kato, T.**Arch. Rational Mech**. Anal 9 (1962), 77-92.

[16] Iório, R.J.; Iório, V.M., **Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução**. Projeto Euclides. IMPA, 1988.