UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

JULIO K. INAFUCO

AS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO *SOFTWARE* GRÁFICO

Dissertação de Mestrado

FLORIANÓPOLIS – SC
2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

JULIO K. INAFUCO

AS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO *SOFTWARE* GRÁFICO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal de Santa Catarina, como exigência parcial para a obtenção de título de Mestre do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica.

Orientadora
Prof.ª Dr.ª Neri Terezinha Both Carvalho

FLORIANÓPOLIS – SC
2006

À Juliana, ao Augusto e ao Roberto, pelo inesgotável amor que nutre os nossos sonhos e ilumina a nossa caminhada!

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida!

A meus pais Saburo e Thereza (in memorian), à Elza, Leocádia, Lauro (in memorian), aos meus irmãos Jorge e Cláudia, pelo amor que sempre me deram.

Aos inúmeros colegas de trabalho, professores e alunos, pelo aprendizado que me proporcionam. Agradeço particularmente aos alunos que participaram da pesquisa, pela gentil colaboração.

Aos amigos Cristini, Karina, Ivone, Joceli, Josiane e Roberta pelo inestimável apoio, e demais colegas do curso pelo respeito e companheirismo.

Aos meus professores do PPGECT prof. Arden, prof. Bazzo, prof.ª Edel, prof.ª Nadir, prof.ª Neri, prof. Peduzzi, prof. Pinho, prof.ª Sônia pela dedicação competente e pelo profissionalismo edificante. Aos coordenadores, professores Arden, Angotti e Pinho, pelo apoio e estímulo. Às secretárias Sandra e Lúcia pela atenção dispensada.

Aos integrantes da banca examinadora, prof. Méricles T. Moretti e prof. Vincenzo Bongiovanni pelas indispensáveis e preciosas sugestões de aprimoramento do conteúdo.

Agradeço de forma especial à minha orientadora prof.ª Neri. A palavra orientação teve diversos significados: acompanhamento, exigências, apoio, incentivo... Um sinônimo possível seria doação. Doação de conhecimento, de firmeza e paciência, de tempo, de exemplo pessoal e profissional!

A todos que de alguma maneira contribuíram para a realização desse trabalho.

SUMÁRIO

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo sobre o ensino das equações algébricas no ensino médio. Na prática docente e em alguns livros didáticos percebemos a ênfase dada aos algoritmos para a resolução de equações algébricas, enquanto as soluções ficam restritas ao conjunto dos números racionais e números complexos imaginários. A análise de alguns documentos oficiais tais como Parâmetros Curriculares Nacionais e Orientações Curriculares para o ensino médio mostra a possibilidade de se ensinar outros métodos de resolução. Adotamos conceitos da Didática da Matemática como quadro teórico de referência. Apoiamo-nos em elementos da Transposição Didática de Yves Chevallard para estudar o desenvolvimento histórico do saber Equações Algébricas até a proposição em livros didáticos. Para conhecer a Praxeologia ou Organização Matemática em livros didáticos, adotamos elementos da Teoria Antropológica do Saber de Chevallard. A metodologia de pesquisa baseou-se em elementos teóricos da Engenharia Didática. Aplicamos uma seqüência didática a alunos de ensino médio em que alguns exercícios podiam ser resolvidos pelas técnicas freqüentemente empregadas. Uma das equações, no entanto, não podia ser resolvida pelos algoritmos usuais, pois apresentava como solução um número irracional. Apresentamos aos alunos noções de um método numérico e um *software* gráfico para auxiliar o trabalho de localização de raízes reais. Além de apresentarmos as transformações pelas quais passa o objeto Equações Algébricas, da forma como foi concebido até como saber a ensinar por meio do livro didático, esse trabalho pode subsidiar discussões acerca da prática docente apoiada por programas computacionais.

Palavras-chave: Equações Algébricas – Ensino, Transposição Didática, Praxeologia Matemática

ABSTRACT

The present project presents a study about teaching algebra equations at High school. In the teaching staff practice and in some educational books we realize the great emphasis in algorithms for the resolution of algebra equations, while the solutions are restricted for the rational numbers set and imaginaries complexes numbers. The analysis of some official documents such as "Parâmetros Curriculares Nacionais" and "Orientações Curriculares" for High school shows a possibility to teach other methods for resolution. We use the concepts of Didactic of Mathematics like theoretical reference board. We based ourselves upon elements from Didactic Transposition by Yves Chevallard to study the historical development of knowing of Algebra Equations up to the proposal we find in educational books. In order to know the "Praxeology" or Organization Mathematics in educational books, we use elements from Anthropological Theory by Chevallard. The methodological research was based on theoretical elements from Educational Engineering. We apply an educational sequence to students from High school in order to solve some exercises using known techniques. But in one of these equations the students could not solve by the usual algorithms, because it presented as a solution an irrational number. We presented to the students notions of a numeric method and graphic software to assist the work of location of the real roots. Besides having presented the transformations about the object Algebra Equations from the way it has been conceived up to the way it has been taught in educational books, this work can subsidize discussions about the teaching practice supported by computer programs.

Keywords: Algebra equations – teaching, Didactic Transposition, Praxeology Mathematics

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos encontramo-nos em uma sociedade sob um volume de informações nunca antes visto, constantemente modificadas em função da tecnologia capaz de globalizá-las. Nesse contexto a educação ganha um novo significado. No Brasil, como reflexo de políticas educacionais públicas, as reformas curriculares pautam-se nas condições de produção econômica, no mundo do trabalho e nas relações sociais existentes. Há dez anos, o Ministério da Educação implantou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) 9394/96 onde apresenta uma proposta de reforma no Ensino Médio.

A reforma curricular do Ensino Médio dividiu o conhecimento escolar em três áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Os objetivos, valores e atitudes que se pretende desenvolver são agrupados em competências e habilidades. As competências são de representação e comunicação; investigação e compreensão e contextualização sócio-cultural. Dando continuidade à reforma, foram criados os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), objetivando propiciar aos sistemas de ensino subsídios à elaboração do currículo e à construção do projeto pedagógico.

Na área de Ciências Naturais, Matemática e suas Tecnologias

> "pretende-se promover competências e habilidades que sirvam para o exercício de intervenções e julgamentos práticos. Isto significa, por exemplo, o entendimento de equipamentos e de procedimentos técnicos, a obtenção e análise de informações, a avaliação de riscos e benefícios em processos tecnológicos, de um significado amplo para a cidadania e também para a vida profissional." (BRASIL, 1999, p. 208)

Especificamente em relação à Matemática, quanto à competência de representação e comunicação destacamos a habilidade de utilização adequada dos recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação. Sobre a competência de investigação e compreensão ressaltamos a habilidade de seleção de estratégias de resolução de problemas. Finalmente, a utilização adequada de calculadoras e de programas computacionais, reconhecendo suas limitações e potencialidades, é a habilidade a ser desenvolvida junto à competência de contextualização sócio-cultural.

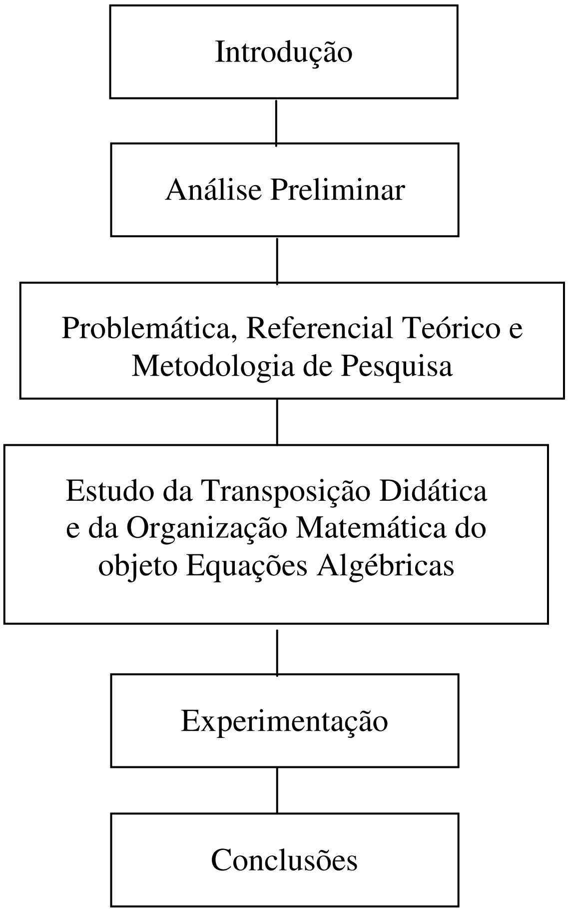
A Lei de Diretrizes e Base da Educação e os Parâmetros Curriculares Nacionais norteiam a elaboração dos projetos pedagógicos das instituições de ensino. Como professor de

Matemática no Ensino Médio acompanho nos livros didáticos a incorporação das propostas no modo de ensinar os conteúdos. Ao trabalhar o tema Equações Algébricas ou Polinomiais, na 3.ª série, percebi que o ensino da resolução de Equações Algébricas presente na maioria dos livros didáticos, como mostraremos no capítulo 3, enfatiza, dentre os números reais, os números racionais. As conversas com colegas docentes reforçaram essa percepção. Em seguida, passaram a chamar minha atenção, nos livros didáticos e em questões de exames vestibulares, os exercícios que perguntavam sobre a existência ou não de solução de uma equação em um intervalo numérico que já é dado, não deixando a possibilidade do aluno questionar o por quê da escolha de um intervalo e não de outro, ou de descobrir o intervalo sozinho, justamente quando a solução é um número real não racional. Essa situação estimulou-me a pesquisar uma possibilidade de ampliar os métodos de ensino de resolução de Equações Algébricas e por quê não, ampliar o conjunto das soluções, ou seja, trabalhar a resolução de Equações Algébricas cujas soluções sejam irracionais e encontrar valores aproximados. As referências freqüentes ao uso de tecnologia no ensino, feitas há tempos por diversos educadores e novamente assinaladas nos PCNEM, e também por reconhecer a necessidade de sua adoção para desenvolver competências do jovem aluno de modo a torná-lo apto a enfrentar os desafios exigidos na vida profissional e/ou acadêmica, a idéia de propor uma situação-problema onde o aluno buscasse identificar o intervalo de resolução e que a solução exigisse um cálculo aproximado, nos levaram a utilizar um *software* gráfico como recurso para essa pesquisa.

Estes elementos levaram-nos a formular algumas questões. É possível, usando programas computacionais, introduzir no ensino médio outros métodos de resolução de equações algébricas diferentes dos já tradicionalmente estudados neste nível de ensino? Haveria alguma vantagem em introduzir outros métodos? Qual seria?

Estas questões iniciais orientam a realização deste estudo. Ao longo do desenvolvimento de nossa pesquisa precisamos estas questões, para as quais, buscamos elementos de resposta em nosso trabalho.

A dissertação está estruturada da seguinte forma:



No capítulo 1 fazemos um estudo de documentos oficiais, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais, os PCN + Ensino Médio, Orientações Curriculares e a Proposta Curricular de Santa Catarina, e de uma pesquisa acadêmica, para conhecermos as orientações oficiais de trabalho para o assunto Equações Algébricas e a proposição de resolução por um método geométrico. Também fazemos um estudo de proposições para o uso da tecnologia informática no ensino.

A problemática, as questões de pesquisa, o quadro teórico e a metodologia de pesquisa estão apresentados no capítulo 2.

No capítulo 3 estudamos as transformações pelas quais passa o objeto Equações Algébricas: o surgimento histórico, sua apresentação na universidade e enquanto saber a ensinar no ensino médio. Apresentamos proposições de matemáticos para o ensino desse assunto e a análise de livro didático.

A partir de um conjunto de exercícios, elaborados com base no estudo realizado no capítulo 3 e aplicados a alunos, constituímos uma experimentação a qual apresentamos junto com os resultados no capítulo 4.

Capítulo 1: ANÁLISE PRELIMINAR

Restringiremos nossa análise preliminar ao estudo de documentos oficiais (Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN + Ensino Médio, Orientações Curriculares para o Ensino Médio, Orientações Curriculares de Matemática do Estado do Paraná e Proposta Curricular de Santa Catarina), de uma pesquisa acadêmica e de proposições de uso de tecnologia informática no ensino.

1.1 Estudo de Documentos Oficiais

Nas décadas de 1960 e 1970 a política educacional brasileira estabelecia, como finalidade para o 2.º grau (atual Ensino Médio), a formação de especialistas que pudessem utilizar máquinas ou dirigir processos produtivos. Na década seguinte houve uma mudança técnico-industrial com a evolução da micro-eletrônica alterando as habilidades exigidas dos trabalhadores. Desde os anos 1990 é crescente o volume de informações, graças à tecnologia, e a educação tem a função tanto de inserir os jovens em um novo cenário de sociedade quanto de servir como um caminho para um desenvolvimento harmonioso, fazendo diminuir as desigualdades sociais. A LDBEN 9394/96 indica que a formação do cidadão não deve tratar de acúmulos de conhecimentos, mas deve oferecer uma visão mais geral e desenvolver outras capacidades como analisar, aprender, formular e criar, dentro da perspectiva de que a educação escolar "deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social" (Art.1º §2 da Lei 9394/96). Com relação ao Ensino Médio, este passou a ter, como uma das finalidades, "o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico". (Inciso III, Art. 35 da Lei 9394/96). O Ensino Médio é convocado a dar uma resposta ao problema social em que alguns jovens se preparam apenas para continuar seus estudos universitários, em que outros já estão inseridos no mercado de trabalho e não prosseguirão seus estudos na Educação Superior, e ainda em que outros jovens trabalharão e cursarão o Ensino Superior ao mesmo tempo.

> Esta é uma oportunidade histórica para mobilizar recursos, inventividade e compromisso na criação de formas de organização institucional, curricular e pedagógica que superem o status de privilégio que o Ensino Médio ainda tem no Brasil, para atender com qualidade, clientelas de origens, destinos sociais e aspirações muito diferenciadas. (BRASIL, 1999, p. 68).

A preparação para a continuidade dos estudos, sinalizada pela LDBEN, deverá ser feita com o desenvolvimento da capacidade de aprender e com a compreensão do mundo físico, social e cultural. A preparação para o trabalho será "*básica,* ou seja, *aquela que deve ser base para a formação de todos e para todos os tipos de trabalho*" (Brasil, 1999, p. 70), sem estar particularmente vinculada a nenhum componente curricular; as diretrizes "estabelecem o conhecimento dos princípios científicos e tecnológicos da produção no nível do *domínio*, reforçando a importância do trabalho no currículo." (BRASIL, 1999, p. 70).

Em Brasil (1999), um objetivo atribuído à área de Ciências e Matemática é o de "compreender as Ciências da Natureza como construções humanas e a relação entre conhecimento científico-tecnológico e a vida social e produtiva". A aprendizagem nesta área visa explicar o funcionamento do mundo por meio dos conhecimentos científicos. A Matemática é concebida como uma linguagem de representação de aspectos reais e instrumento para as diversas ciências, sem desconsiderá-la como uma ciência também. Para a Matemática vê-se ainda a possibilidade de ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos, com a construção efetiva das abstrações matemáticas, evitando a simples memorização dos algoritmos, valorizando a presença dessa ciência no desenvolvimento de habilidades de caráter geométrico, gráfico, algébrico, estatístico e probabilístico.

Nos PCNEM a abordagem sobre tecnologia sinaliza a pretensão em "promover competências e habilidades que sirvam para o exercício de intervenções e julgamentos práticos." (BRASIL, 1999). A velocidade de construção e socialização de conhecimentos tornará ultrapassada a maior parte das competências adquiridas no início de uma vida profissional e isso exige que se aprenda continuamente em um ambiente colaborativo. Nesse sentido não há uma supervalorização do computador mas se reconhece que é o instrumento mais relevante no impacto da tecnologia. O ensino da Matemática, relacionado com a tecnologia, deve possibilitar o desenvolvimento de habilidades – seleção e análise de informações; adequação das tecnologias – e de procedimentos – comunicação e representação de idéias – que permitam o cidadão atuar nesse mundo de informações e conhecimentos em permanente movimento. Quanto a elaboração do currículo em Matemática são apontados, como critérios centrais, a contextualização e a interdisciplinaridade e exemplifica-se com o tema Função que pode ser ensinado de forma integrada com a Trigonometria, Seqüências, Geometria Analítica e ainda com o tema Polinômios e Equações Algébricas, sugerindo-se também "espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos". (BRASIL, 1999)

Nos PCN + Ensino Médio (Brasil, 2002, p.113) destaca-se a importância da resolução de problemas com dois exemplos de exercícios. O primeiro, considerado uma questão aberta, refere-se a um gráfico mostrando a intenção de votos a prefeito de uma cidade. O segundo exemplo é uma questão de vestibular, considerada "disciplinar" porque exige conhecimentos matemáticos específicos de geometria espacial métrica.

> Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução.

Detalhando o sentido das competências em Matemática, antes apresentadas nos PCNEM, nos PCN + cita-se a importância de se compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sócio-culturais, políticas e econômicas, formando a visão crítica da ciência em construção constante, sem certezas definitivas e sem dogmatismos. Quanto a escolha de conteúdos a serem trabalhados no Ensino Médio, nos PCN + apresenta-se a proposta de três eixos ou temas estruturadores:

1. Álgebra: números e funções;
2. Geometria e medidas;
3. Análise de dados.

Em Álgebra destacamos as referências feitas aos Números Complexos e às Equações Algébricas. Considera-se que o tema Números Complexos, quando isolado da resolução de equações, perde sentido para aqueles que não continuarão os estudos acadêmicos em áreas exatas-tecnológicas e por isso propõe-se que seja trabalhado na parte flexível do currículo das escolas. Sobre o estudo das Equações Polinomiais ou Algébricas e dos Sistemas Lineares a sugestão é que se trabalhe enfatizando a importância cultural estendendo os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e de sistemas de duas equações e duas incógnitas.

Outro documento por nós estudado corresponde às Orientações Curriculares para o Ensino Médio. O documento foi elaborado a partir de discussões com as equipes técnicas dos Sistemas Estaduais de Educação, professores e alunos da rede pública e representantes da comunidade acadêmica. As orientações tratam de três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhá-los; o projeto pedagógico e a organização curricular. Em relação aos conteúdos há uma sugestão para se trabalhar funções polinomiais gerais.

> Funções polinomiais mais gerais de grau superior a 2 podem ilustrar as dificuldades que se apresentam nos traçados de gráficos, quando não se conhecem os 'zeros'da função. Casos em que a função polinomial se decompõe em um produto de funções polinomiais de grau 1 merecem ser trabalhados. Esses casos evidenciam a propriedade notável de que, uma vez se tendo identificado que o número c é um dos zeros da função polinomial y = P(x), esta pode ser expressa como o produto do fator (x – c) por outro polinômio de grau menor, por meio da divisão de P por (x – c). (BRASIL, 2006, p. 74).

Nas Orientações (Brasil, 2006, p. 89) há referência à Tecnologia para a Matemática citando-se os *softwares* conhecidos como programas de expressão. Os programas de expressão são aqueles que permitem que os alunos façam experiências, testem hipóteses, esbocem conjecturas, criem estratégias para resolver problemas.

> Em muitos desses programas, pode-se trabalhar tanto com coordenadas cartesianas como com coordenadas polares. Os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função, e o significado geométrico do conjunto-solução de uma equação-inequação.

As Orientações Curriculares de Matemática do Estado do Paraná é um dos documentos que subsidiou a elaboração, pelo MEC, das Orientações Curriculares para o Ensino Médio. As Orientações do Estado do Paraná também foram o resultado de discussões com professores da rede estadual de ensino. Considerando-se as diferentes concepções sobre o ensino da Matemática propõe-se uma reorganização curricular nas escolas por meio dos seguintes conteúdos estruturantes:

1. Números e Álgebra

2.Funções

3. Geometrias

4. Tratamento da Informação

Em Números e Álgebra (Paraná, 2005, p. 9) destaca-se que

> Conhecer os problemas que impulsionaram a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos e dominar os conceitos básicos que surgiram a partir de sua ampliação, proporciona, ao indivíduo, uma inserção mais completa na cultura universal ao longo da História. Na resolução de alguns problemas exige-se a manipulação de constantes e incógnitas. Neste caso, as propriedades das operações com os números reais e com os polinômios são fundamentais nesta manipulação.

Na Proposta Curricular de Santa Catarina encontramos outras orientações relevantes. Nesse documento sugere-se trabalhar os temas de forma articulada, sempre que possível, evitando uma linearidade. Dentro da concepção de que o conhecimento matemático se adquire de forma gradativa, interativa e reflexiva, os conteúdos constam na Proposta Curricular (Santa Catarina, 1998, p. 107-108) em diferentes séries da Educação Básica, do Ensino Fundamental ao Médio, caracterizando a passagem gradativa de um tratamento assistemático para sistemático.

> Tratar assistematicamente um conteúdo significa abordá-lo enquanto noção ou significado social, sem preocupação em defini-lo simbólica ou formalmente. (...) Tratar sistematicamente um conteúdo matemático significa dizer que ele será trabalhado conceitualmente, utilizando-se na medida do possível, a linguagem matemática simbólica tal como foi historicamente convencionada e organizada.

No que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico destaca-se na Proposta Curricular (Santa Catarina, 1998, p. 111) a importância de se adotar atividades que

> permitam ao aluno pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar estas regularidades matematicamente, pensar analiticamente e estabelecer relações entre grandezas variáveis. (...) No processo da apropriação da linguagem algébrica, o registro gráfico exerce um papel fundamental. Daí a necessidade de utilização de diversas formas de representação – diagramas, tabelas, gráficos e expressões matemáticas.

Os Documentos Oficiais estudados indicam novos objetivos para o Ensino Médio e para a área de Ciências da Natureza e Matemática. A versão pré-universitária de Ensino Médio caracteriza-se por enfatizar a divisão do aprendizado em disciplinas e o domínio de cada uma delas é considerado requisito para a continuidade dos estudos. A versão profissionalizante enfatiza os fazeres práticos voltados a atividades produtivas e de serviços, em uma especialização de caráter técnico muitas vezes em detrimento de formação cultural mais ampla. O novo Ensino Médio tem a responsabilidade de completar a Educação Básica e isso significa "preparar para a vida, qualificar para a cidadania e capacitar para o aprendizado permanente." (BRASIL, 2002, p. 8). Para completar a formação geral do estudante indicam-se competências (representação e comunicação; investigação e compreensão; contextualização sócio-cultural) e habilidades necessárias de serem desenvolvidas. O desenvolvimento das mesmas, conforme é assinalado nos Documentos Oficiais, pode ser feito levando-se em consideração as questões de conteúdo, de metodologia e da organização curricular. A seleção de conteúdos a serem trabalhados é um aspecto polêmico na organização do currículo das escolas. Não nos aprofundamos nessa questão por distanciar-se do interesse de nossa pesquisa, mas verificamos a presença do tema Equações Algébricas nas propostas de organização curricular. Sobre o ensino desse tema para alunos do Ensino Médio, reconhecemos a possibilidade de se articular as propostas apresentadas na análise preliminar integrando os aspectos históricos, relacionando o assunto com outros tais como Funções e Polinômios e fazendo uso da tecnologia para a Matemática (programas computacionais) e com essa concepção realizamos nossa pesquisa. Efetuamos um levantamento bibliográfico de outros trabalhos relacionados ao mesmo tema de nossa pesquisa e apresentamos o resultado na próxima seção.

1.2 Estudo de uma Pesquisa Acadêmica

Em um levantamento bibliográfico sobre trabalhos acadêmicos brasileiros relativos ao nosso tema identificamos um trabalho de dissertação de mestrado "Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas" de R. N. Lima (1999) do qual apresentamos alguns elementos. O objetivo é mostrar que outros métodos de resolução de equações algébricas são possíveis de serem abordados no Ensino Médio.

Em sua análise preliminar, Lima constatou que na Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o Ensino Médio (1994) não havia alusão a equações algébricas de grau três. Seu trabalho teve por objetivo estudar a resolução de equações de terceiro grau usando a idéia do método geométrico do matemático árabe Omar Khayyam (1050-1130), utilizando curvas cônicas. Nos quatro livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, citados como os mais usados pelos professores, analisados por Lima, constatou-se que havia uma generalização para o estudo de "Equações de grau n" em três destes livros. Na obra de Bongiovanni, Vissoto e Laureano (1993) havia primeiro um método de trabalho com equações de terceiro grau, generalizado para equações de grau n. Esta abordagem é defendida por Lima por ser a maneira como historicamente desenvolveram-se as idéias sobre a resolução de equações algébricas. O método de Omar Kayyam foi escolhido por utilizar o quadro geométrico, pouco adotado pelos alunos, e por ser considerado mais prático que o método de Cardano e o algoritmo de Briot-Ruffini. Lima aplicou uma seqüência didática a dois grupos. Um grupo de alunos de primeiro ano de Ciência de Computação e um grupo de alunos de terceira série de ensino médio. O seu trabalho foi fundamentado nos aspectos teóricos da dialética ferramenta-objeto e o jogo de quadros de Douady, da transposição didática de

Chevallard, dos registros de representação de Duval e do contrato didático de Brousseau. Na aplicação de sua seqüência didática adotou um recurso tecnológico, o *software* para geometria Cabri-géomètre. Com seu trabalho Lima mostra a possibilidade de aplicação de um método gráfico-geométrico com uso de um software para resolução de Equações Algébricas no Ensino Médio.

1.3 Proposições para o uso da Tecnologia Informática

Reconhecemos a importância de utilização de calculadora e programas computacionais no ensino da matemática. Apresentamos sob esta rubrica elementos, além dos já expostos nos PCN, para justificar a adoção de um *software* em nosso trabalho.

Ao considerarmos a maneira como se pode realizar o estudo de diversos temas da Matemática percebemos a assimetria com as propostas de utilização de recursos tecnológicos – calculadoras e computador. A pequena, ou nenhuma referência ao uso desses recursos em aulas restringe as alternativas para as atividades visando o desenvolvimento de habilidades necessárias na atual sociedade, como selecionar estratégias para a solução de problemas, usar e adequar tecnologias, e em nossa opinião limita a preparação para o trabalho e a formação de uma visão tecnológica-científica que são alguns dos objetivos do Ensino Médio.

Por que usar um programa computacional?

A sociedade da informação não pode ser vista como um modismo, mas como um novo paradigma técnico, econômico e educacional, e se antes o Brasil já tinha que enfrentar o analfabetismo tradicional da leitura e escrita, agora tem de enfrentar o analfabetismo tecnológico devido à exclusão digital. Conforme Amorim (2003), por exclusão digital pode-se entender aquela situação em que o indivíduo fica impossibilitado de usar as tecnologias digitais para se integrar a essa sociedade da informação. “Não ter acesso à internet ou a outras inovações tecnológicas dos nossos dias pode comprometer a mobilidade social e a empregabilidade de uma pessoa." Outros autores, como Borba e Penteado (2001), defendendo a utilização da informática educacional, apontam como a principal razão do computador nas escolas, a "expansão de possibilidades de desenvolvimento da cidadania" uma vez que a democratização do acesso à tecnologia informática faria parte do combate ao que chamam de *apartheid* social. A informática educacional justificar-se-ia pela alfabetização tecnológica – aprendizagem da leitura dessa mídia –, com o computador inserido em atividades essenciais desenvolvidas nas aulas, e pelo direito ao acesso à informática, ampliado com o direito de acesso à tecnologia produzida pela sociedade, constituindo-se em parte da resposta às questões relacionadas à cidadania.

Sob uma abordagem histórica vemos em Brasil (Brasil, 2005) que a Tecnologia Educacional (TE) chegou ao país sendo considerada como a solução para os problemas da educação e introduziu equipamentos nas escolas, fazendo surgir várias posições entre os educadores, tais como os tecnófilos e tecnofóbicos. Com os limites e lacunas da TE a visão de eficiência e modernidade cedeu espaço para novas reflexões e se por um lado admite-se que a TE "não é suficiente para se fazer uma nova educação, por outro, na sociedade da informação não será possível abrir mão de nenhuma delas." (BRASIL, 2005).

Quanto à tecnologia educacional informática, o uso dos computadores vem sendo discutido há muitos anos e como essa questão não se esgota facilmente, freqüentemente é retomada. Borba (1999) considera que o ser humano tem sido ao longo da história ser humano-oralidade, ser humano-escrita e na atualidade, ser humano-informática, ou ainda ser humano-lápis e papel-informática ao observar que estudantes continuam a empregar outras mídias, mesmo quando se enfatiza novas tecnologias, e ao adotar Levy considerando o pensamento como algo coletivo. Levy (1993), analisando a história das mídias, refere-se à oralidade, à escrita e à informática como tecnologias da inteligência, técnicas associadas à memória e ao conhecimento. A oralidade era usada para estender nossa memória; esta é estendida qualitativamente de forma diferente pela escrita que possibilita ênfase à linearidade do raciocínio. Assim, a informática deve ser vista como uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação à oralidade e escrita, desafiando a linearidade de raciocínio por "modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma 'nova linguagem' que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea." (BORBA e PENTEADO, 2001, p. 46). Não se acredita "que a informática irá terminar com a escrita ou com a oralidade, nem que a simulação acabará com a demonstração em Matemática. É bem provável que haverá transformações e reorganizações." (idem, p. 47). Transformações, que no caso do ensino da Matemática, podem surgir quando as mídias informáticas e tecnologias estiverem em ressonância com uma pedagogia que enfatize a experimentação, a visualização, a simulação, a comunicação na busca de resolução de problemas abertos, nos quais se observa o processo de construção e não o produto/resultado, nas salas de aula. Sobre reorganização do pensamento provocada pela inserção da tecnologia informática, Borba (1999, p.286-288) analisa as idéias de Tikhomirov, consideradas atuais, embora escritas nos anos 1970. Tikhomirov elaborou três teorias de como o computador afeta a aprendizagem e o conhecimento humano: a teoria da substituição, da suplementação e da reorganização. Pela teoria da substituição o computador é visto como um substituto do ser humano porque chega aos mesmos resultados mais rapidamente e geralmente com menos erros. Borba (1999, p. 286) refuta tal teoria porque ela ignora a complexidade dos "processos humanos pelos quais um problema é eleito para ser resolvido e como que a busca desenvolvida por humanos é fundamentalmente diferente do desenvolvido pelo computador." Na teoria da suplementação, admitindo o fato de que o computador resolve problemas difíceis para o ser humano, defende-se que aquele complementa o homem. Essa teoria baseia-se na idéia de que o pensamento consiste de pequenas partes, e justamente é criticada por considerar o aspecto quantitativo e não qualitativo do processo de pensamento. A teoria da reorganização sustenta que a informática regula a atividade do homem e nesse sentido aproxima-se da noção proposta por Borba de "modelagem [ou moldagem] recíproca" na qual o computador molda o homem e é moldado por ele ao mesmo tempo. Nessa perspectiva "os seres humanos são constituídos por técnicas que estendem e modificam seu raciocínio e, ao mesmo tempo, esses mesmos seres humanos estão constantemente transformando essas técnicas" (BORBA e PENTEADO, 2001, p. 46), admitindo-se então que o conhecimento não é produzido por indivíduos solitários ou coletivos formados apenas por seres humanos, mas é produzido por um "coletivo formado por seres-humanos-com-mídias".

Na Proposta Curricular de Santa Catarina (Santa Catarina, 1998), dentro de uma concepção histórico-crítica, a tecnologia é vista como mediadora instrumental, ou seja, ferramenta colocada entre o homem e o trabalho, e assim pressupõe-se "a incorporação das novas tecnologias como mediadoras instrumentais na construção da práxis pedagógica." A tecnologia informática é vista como facilitadora do trabalho pedagógico e motivação para o aluno, e nunca como uma forma de treinamento.

> A informática na escola, portanto, deve funcionar como uma estratégia de promoção da participação e da integração entre:
> - o individual e o coletivo;
> - entre o humano e o tecnológico;
> - entre as dimensões cognitiva, afetiva e procedimental da educação e as diferentes áreas do conhecimento.
> (...) Além do mais, estimula a iniciação ao conhecimento tecnológico, a aquisição de instrumentos de trabalho, bem como o exercício de diferentes operações intelectuais, numa perspectiva de formação para a educação permanente.
> (SANTA CATARINA, 2005)

Entre os educadores surgem várias dúvidas: como utilizar melhor os recursos provenientes da tecnologia informática, que mudanças esta mídia traz à escola e ao processo de ensino e aprendizagem. Em uma retrospectiva, Penteado (1998) destaca as ações governamentais traduzidas nos projetos EDUCOM, FORMAR, PRONINFE, o atual PROINFO, e conclui de que maneira as ações têm se manifestado nas escolas. Algumas escolas introduziram a disciplina de Informática no currículo para a aprendizagem de *softwares*, aplicativos de sistemas operacionais e acesso à internet; outras relacionaram o uso do computador às disciplinas do currículo. De qualquer maneira, a implementação da informática educacional depende fundamentalmente do professor.

Em geral, os computadores nas escolas são colocados em uma sala usualmente conhecida como laboratório de informática. O quadro negro e giz são substituídos pelo quadro branco e 'caneta', e os alunos sentam-se em duplas ou em trios. Como aponta Penteado (1999), esse novo cenário altera a maneira como os alunos e professores se comportam e se comunicam durante uma aula. A utilização do computador cria também situações inesperadas quando por exemplo o equipamento ou o *software* não funciona, influenciando a dinâmica das aulas, caracterizando a "zona de risco". Os estudantes podem trazer informações externas à sala de aula das quais os professores não têm conhecimento ou domínio. As informações, que inclusive se renovam velozmente, podem ser acessadas em diferentes fontes por professores e alunos. "É preciso saber organizar esse momento em que diferentes fontes de informações se aglutinam, é preciso saber priorizar e estabelecer relações com os objetivos que se pretendem em uma determinada aula." (PENTEADO, 1999, p. 305).

No entanto, cabe ressaltar que se os recursos tecnológicos, sobretudo o computador, se por um lado motivam os alunos a estudar e os prepara para o mercado de trabalho, mesmo sem querer colocar a educação em mão única direcionada a ele, trazem a possibilidade de um maior aperfeiçoamento profissional, criando novas oportunidades aos educadores, por outro lado, segundo Borba e Penteado (2001), criam uma "zona de risco" para os professores. Ao contrário da “zona de conforto”, onde “quase tudo é conhecido, previsível e controlável”, a “zona de risco” caracteriza-se pelas incertezas e imprevisibilidades, e se constitui de problemas técnicos (configurações de máquinas, por exemplo) e de diversidade de dúvidas dos alunos (mudança de seqüência de procedimentos ou estrutura do *software*). O risco de perda do controle gera medo nos professores. O uso da informática exige que o professor avalie constantemente as conseqüências das ações propostas, reflita sobre seu papel, reveja e amplie seus conhecimentos. Sobre isso, Borba e Penteado (2001) admitem a existência de três tipos de professores: aqueles que desistem, outros que enquadram a tecnologia em antigas rotinas de demonstração de exemplos, e os que avançam em direção às zonas de risco, possibilitando o desenvolvimento do aluno, dele próprio professor e do processo ensino-aprendizagem. Nesse cenário, o professor deve perceber que já não possui mais todo o conhecimento necessário para trabalhar com os alunos e deve concluir que a sala de aula é o espaço em que as informações são organizadas e discutidas na construção de novos conhecimentos.

Também encontramos em Laborde (2002) a reiteração de que o ambiente informatizado permite diversificar as atividades de ensino e de estudar um mesmo conceito sob diferentes representações, contribuindo para se obter uma compreensão melhor e a abstração matemática. Mas surgem problemas na prática dos professores: a gestão das aulas, incluindo o aumento da heterogeneidade dos alunos, o perigo de uma “superatividade” discente diante da tecnologia com prejuízo da reflexão. Laborde ainda coloca algumas questões, que considera anteriores à sala de aula, quanto aos documentos que serão escritos para os alunos, o equilíbrio entre atividades com o computador e com lápis-papel, os exercícios de aplicação e síntese e as novas modalidades de avaliação.

Outros autores abordam o uso da tecnologia. Souza, Bastos e Angotti (1999) admitem que a educação pressupõe a utilização de mídias e que os meios tecnológicos-comunicativos – entendidos como os meios relacionados ao uso do computador, da *web*, da multimídia, de ferramentas de educação a distância e outros recursos digitais – podem auxiliar com o processo de ensino e aprendizagem. E embora os meios tecnológicos-comunicativos sejam, ao menos no discurso, considerados importantes pelos professores, não é o que se observa na prática, e a explicação inferimos estar na existência da zona de risco de que tratam Borba e Penteado.

> Os professores de ciências naturais [e de matemática] – dos quais esperamos apropriação e maior envolvimento, por trabalharem mais próximo desta área – ainda evitam aproximar os meios tecnológicos-comunicativos da sala de aula. O que demonstra ser um problema para nós que defendemos a decodificação destes equipamentos na prática educativa. E introduzir os meios tecnológicos-comunicativos com potencial de intervenção prática na escolaridade básica nos parece fundamental. (SOUZA, BASTOS e ANGOTTI, 1999)

Esses autores destacam ainda que não basta ter o computador na escola; é necessário que haja propostas e critérios para sua utilização, professores que conheçam essas propostas, sejam capazes de criar as suas e saibam utilizar os meios tecnológicos. Souza, Bastos e Angotti (1999) finalizam afirmando que

> Os meios tecnológicos-comunicativos podem permitir as propostas de ensino que procuram transformar professor e educandos em uma comunidade de investigação. Uma possibilidade para planejar, agir e refletir para melhorar e/ou transformar aquilo que fazemos. Isto envolve prever e incorporar o novo, adaptação, valorizar as contribuições de cada um [incluindo parcerias com profissionais de informática], estimular a confiança para o trabalho colaborativo e individual e respeitar os diversos ritmos de aprendizagem.

O uso do computador coloca em questão o uso de outros meios como o lápis e o papel, o quadro e o giz. Acreditamos que não se trata de abandonar esses meios, mas de se avaliar qual a ênfase desejada e qual o meio mais adequado para certos propósitos. Nesse sentido, conforme Borba e Penteado (2001, p.62)

> Quando decidimos que a tecnologia informática vai ser incorporada em nossa prática, temos que, necessariamente, rever a relevância da utilização de tudo o mais que se encontra disponível. Certamente, ao fazermos nossas opções, corremos o risco de deixar de lado certas coisas que julgávamos importante. Mas, aqui, novamente, é preciso considerar qual é o objetivo da atividade que queremos realizar e saber se ela não pode ser desenvolvida com maior qualidade pelo uso, por exemplo, de um *software* específico. Não significa que vamos abandonar as outras mídias, mas temos que refletir sobre sua adequação.

Ao final encontramo-nos diante de um antigo desafio: utilizar a tecnologia educacional informática como ferramenta para o aluno e para o professor, tanto com o objetivo pedagógico de melhorar o ensino e a aprendizagem, quanto com o compromisso de inserirmos os educandos na sociedade.

> A tecnologia educacional não tem o compromisso com o novo ou com o atual, mas sim com a reorientação e melhoria da educação. Não se trata, portanto, de vestir concepções tradicionais com novas roupagens, nem fazer da TE um fator de distração, descomprometido com mudanças significativas. (...) Desvinculada da conotação de modernização, sofisticação e eficientização a tecnologia educacional (...) fundamenta-se em uma opção filosófica centrada no desenvolvimento integral do homem, inserido na dinâmica da transformação social, e concretiza-se pela aplicação de novas teorias, princípios, conceitos e técnicas, num esforço permanente de renovação da educação." (BRASIL, 2005).

Em resumo, vimos algumas concepções que por meio da Matemática no Ensino Médio objetiva-se construir as suas abstrações, desenvolver habilidades de caráter geométrico, gráfico e algébrico, e utilizar a tecnologia informática. A informática no ensino tem compromisso com a aprendizagem e a ampliação dos conhecimentos. Lima (1999) mostra que com auxilio do *software* Cabri-géomètre é possível estudar no ensino médio um método geométrico para resolver equações de grau três. Nós acreditamos que seja possível, com apoio computacional, estudar outros métodos de resolução de equações algébricas, ampliando os conjuntos numéricos e os métodos apresentados nos livros didáticos.

Para nossos estudos destacamos as orientações contidas nos PCNEM, PCN + , nas Orientações e Propostas Curriculares que mostram a possibilidade de se ampliar as formas de ensinar conteúdos da Matemática e a necessidade de se incluir as tecnologias. A articulação dessas proposições buscando ampliar especificamente o estudo das Equações Algébricas no Ensino Médio, incluindo um recurso tecnológico, constitui a nossa problemática.

No próximo capítulo apresentaremos nossas questões de pesquisa, o referencial teórico e a metodologia de pesquisa.

Capítulo 2: PROBLEMÁTICA, REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLOGIA DE PESQUISA

Neste capítulo apresentamos nossa questão de pesquisa a partir da hipótese de que podemos estudar outros métodos de resolução de Equações Algébricas no Ensino Médio com apoio de um recurso tecnológico. Descreveremos elementos teóricos de referência de nosso trabalho e a metodologia de pesquisa.

2.1 Problemática

Em minha prática docente percebi que os métodos estudados no Ensino Médio de resolução de Equações Algébricas restringem-se a um conjunto de técnicas tais como obtendo-se uma solução inteira, divide-se o polinômio correspondente à equação para fatorá-lo e obter as demais raízes; percebi também que os exercícios ficam limitados a casos particulares, enfatizando especificamente as soluções no conjunto dos racionais ou complexos imaginários, reforçando a idéia, por nós indesejada, de uma Matemática com técnicas irrefutáveis. Não obstante os documentos oficiais analisados preliminarmente (PCNEM, PCN +, Orientações Curriculares) e a dissertação de Lima (1999) apontarem para a possibilidade de se trabalhar de forma indissociada os conteúdos, por exemplo, funções com polinômios, e de utilizar programas computacionais e calculadoras no ensino. Entretanto não é essa a proposta que consta nos livros didáticos.

Desse modo, percebemos uma assimetria ao considerar a maneira como é apresentado o conteúdo nos livros didáticos e como se poderia realizar o estudo de Equações Algébricas no Ensino Médio segundo as orientações curriculares contidas nos documentos oficiais, incluindo a indicação de utilização de recursos tecnológicos – calculadoras e computador. Concordamos com a idéia de que a pequena, ou nenhuma referência ao uso desses recursos em aulas, restringe as alternativas para as atividades visando o desenvolvimento de habilidades necessárias na atual sociedade, como selecionar estratégias para a solução de problemas, usar e adequar tecnologias e, em minha opinião, limita a preparação para o trabalho e a formação de uma visão tecnológica-científica que são alguns dos objetivos do Ensino Médio. Preocupando-nos com essa situação formulamos as seguintes questões: Quais métodos de resolução de Equações Algébricas são apresentados nos livros didáticos? Que outros métodos poderiam ser contemplados no Ensino Médio? Um *software* gráfico contribuiria para apoiar o estudo de outros métodos?

As duas últimas questões já estão respondidas em parte no trabalho de Lima (1999).

Dentro desse contexto formulamos a hipótese de que a articulação da proposta de utilizar um recurso tecnológico computacional (*software* gráfico) e de inserir outros métodos de resolução de Equações Algébricas no Ensino Médio contribui para o entendimento, pelo aluno, da coexistência de diferentes métodos de resolução e representação numérico-analítico e gráfico-geométrico, e a ampliação e aprofundamento dos conceitos matemáticos referentes à resolução de Equações Algébricas.

O objetivo geral de nosso trabalho é de investigar se um recurso tecnológico (*software* gráfico) traz contribuições ao ensino e à aprendizagem de Equações Algébricas no Ensino Médio.

Especificamente buscamos:

1) Caracterizar os métodos de resolução das Equações Algébricas em livros didáticos.
2) Desenvolver com alunos atividades envolvendo Equações Algébricas em que se utilize um *software* gráfico.
3) Analisar os resultados caracterizando as possíveis contribuições do uso do *software* apoiando outros métodos de resolução de Equações e buscando ampliar a concepção de solução de uma Equação Algébrica.

Temos assim por finalidade identificar possíveis contribuições trazidas pelo uso de um *software* gráfico para a aprendizagem de resolução de Equações Algébricas.

Com nosso estudo esperamos obter resultados que possam subsidiar a prática docente.

2.2 Referencial Teórico

Nosso quadro teórico de referência centra-se em elementos da Transposição Didática e da Teoria Antropológica do Saber de Yves Chevallard.

2.2.1 Transposição Didática

Desde a origem do conceito matemático, sua concepção e formulação, até a forma como se apresenta nos livros didáticos há diferenças que podem ser identificadas. A noção de transposição didática visa estudar o processo de seleção dos conteúdos a serem ensinados nas escolas, também chamados de saberes escolares, partindo originalmente do conhecimento ou saber científico.

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os 'objetos de ensino'. O 'trabalho' que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, p. 45)

Os saberes científicos são aqueles criados nas universidades e centros de pesquisas, registrados em linguagem codificada, apresentados por meio de relatórios, artigos, teses e livros, e validados pelos paradigmas da área. Os saberes a ensinar correspondem aos conteúdos escolares que se pretende ensinar. Os saberes a ensinar são o conjunto dos conteúdos previstos nas Propostas Curriculares oficiais, nos currículos das disciplinas escolares e são apresentados geralmente pelos livros didáticos. A escola é responsável pelo saber ensinado que corresponde ao que o professor ensina, registrado no plano de aula, não sendo necessariamente igual ao que o aluno aprende, nem o que se intencionava ensinar.

Observa-se que alguns saberes a ensinar, mesmo tendo origem em um saber científico, são inseridos nos programas curriculares escolares como criações didáticas, conteúdos necessários para outras aprendizagem. Nesse sentido, as criações didáticas transformam os conceitos instrumentais em objetos de estudo em si mesmos.

Os saberes sofrem influências durante sua trajetória, redefinindo aspectos conceituais e forma de apresentação. O conjunto das fontes de influência, do qual faz parte cientistas, professores, políticos, autores de livros e outros que interfiram no processo educativo, é chamado por Chevallard de noosfera. A noosfera, portanto, influencia tanto a seleção dos conteúdos escolares quanto os métodos de ensino. Veremos no próximo capítulo como a noosfera apresenta o objeto Equações Algébricas e propõe que seja ensinado.

Enquanto saber a ensinar, analisaremos de que forma está apresentado o objeto Equações Algébricas em alguns livros didáticos de Ensino Médio. Encontramos em Chevallard outros elementos teóricos para essa análise.

2.2.2 A noção de Praxeologia Matemática na Teoria Antropológica do Saber

Concebemos que vivemos em sociedade e nela há a presença da matemática. Há pessoas que fazem matemática para atender a necessidades de outras. Por isso, de acordo com Chevallard, Bosch e Gascón (2001) a presença da matemática e o seu ensino na escola responde a uma necessidade ao mesmo tempo individual e social, pois cada indivíduo precisa saber um pouco de matemática para reconhecer e/ou resolver certos problemas. As necessidades matemáticas podem ser de *origem extramatemática*, para a qual a prioridade absoluta dá origem à “enfermidade utilitarista”, ou de *origem intramatemática* (puramente matemática), para a qual a atenção exclusiva leva à “enfermidade purista”. As necessidades matemáticas na escola deveriam estar subordinadas às necessidades matemáticas da vida em sociedade e não ao contrário. Se essa justificativa para o ensino da matemática for reduzida a um fim em si mesmo, se o valor social for substituído por um mero valor escolar, a matemática feita na escola pode ser considerada um mero artefato, um objeto qualquer. Diante disso surge um problema relativo às atividades escolares e, à pouca visibilidade da matemática no conjunto da sociedade. Decorre que os processos de ensino e aprendizagem da matemática devem ser considerados como aspectos específicos do processo de estudo da matemática, tanto do ponto de vista do aluno quanto do matemático profissional, sendo possível definir-se didática da matemática como a “*ciência do estudo da matemática*”, independentemente se o estudo está voltado para a utilização, para a aprendizagem, para o ensino ou para a criação de uma nova matemática. Embora o adjetivo didático venha do grego *didaktikós* que significa ensinar, aqui ele está relacionado a estudo. O estudo – ou processo didático – tem um sentido mais amplo, não se restringindo ao processo de ensino e aprendizagem, mas englobando-o. O “*ensino* é considerado como *um meio para o estudo*”, não o único, e a aprendizagem é “entendida como o *efeito perseguido* pelo estudo”.

Em nossa experimentação a resolução dos exercícios propostos é um meio para o estudo, os alunos nas tentativas de resoluções operam nesse meio e a aprendizagem é o resultado desse processo.

Estamos interessados em saber o que se ensina sobre o objeto Equações Algébricas e como ele tem lugar nos livros didáticos. Chevallard (1997) considera que um saber não vive isolado e para conhecê-lo devem ser formuladas as seguintes questões:

> O que *existe* e *por quê*? O que *não existe* e *por quê*? O que *poderia* existir? Sob quais *condições*? Quais *objetos* são possíveis de viver, ou ao contrário, são impedidos de viver nestas condições?

Assumindo como elementos primitivos os conceitos de objetos, pessoas e instituições, Chevallard desenvolve sua Teoria Antropológica do Saber. Os objetos são os materiais de base na construção teórica. As pessoas são os sujeitos que fazem parte de uma determinada instituição. As instituições podem ser uma sala de aula, a escola, um curso. Há um conjunto de objetos relacionados a cada instituição chamados de objetos institucionais.

A Teoria Antropológica do Saber situa a atividade matemática, e por conseqüência o estudo em matemáticas, no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. Admite-se, como postulado básico, que toda atividade humana pode ser descrita por um único modelo que Chevallard (1999) resume com o termo praxeologia.

Para se atuar matematicamente com eficiência é necessário entender o que se está fazendo. E para se entender o que se está fazendo necessita-se realizar uma prática matemática eficaz. Desse modo, conforme Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 275)

> Não há práxis sem logos, mas também não há logos sem práxis. Ao unir as duas faces da atividade matemática, obtemos a noção de praxeologia: para responder a um determinado tipo de questão matemática é necessário elaborar uma *praxeologia matemática* constituída por um tipo de problema determinado, uma ou várias técnicas, sua tecnologia e a teoria correspondente.

Tanto o pesquisador quanto o aluno utilizam *técnicas didáticas* como instrumentos para construir uma praxeologia matemática, entendendo o "didático", como concebido anteriormente, no sentido amplo de "relativo ao estudo da matemática". Por exemplo, "o professor utiliza técnicas didáticas para reorganizar certas obras matemáticas de modo que dêem resposta às questões que os alunos apresentam". (idem, p. 276).

Constituindo a praxeologia encontramos a noção de tarefa t, em sentido mais amplo que o da linguagem corrente, dentro de certo tipo de tarefas T. Para o tipo de tarefas supõe-se um objeto relativamente preciso, por exemplo, “calcular o valor de uma função em um ponto" é um tipo de tarefa, mas calcular, simplesmente, é o que se chamará gênero de tarefas. Sobre tarefas, tipo e gêneros de tarefas Chevallard (1999) afirma que não são dados da natureza mas são obras, construções institucionais cujo processo é um problema completo, objetivo da didática.

Para a realização da tarefa *t* pertencente a *T*, requer-se uma determinada maneira de se realizar, de se fazer a tarefa, que será chamada técnica τ, do grego *tekhnê* que significa saber fazer e então tem-se a tarefa T e a técnica τ formando o chamado bloco prático-técnico [T / τ]. Chevallard (1999) acentua que uma técnica pode ser melhor que outra ou até mesmo pode não servir para a realização de uma tarefa. Além disso, esclarece que uma técnica não é necessariamente algorítmica ou quase algorítmica, muitas vezes contrariando a tendência de algoritmização. Ao final assinala que geralmente existe somente uma, ou um pequeno número de técnicas em uma dada instituição *I*, que as reconhece, excluindo técnicas alternativas, que no entanto podem existir em outras instituições. A técnica τ requer um “discurso racional” que a justifique e que foi denominado tecnologia θ. Esta também tem a função de explicar, tornar inteligível, esclarecer a técnica. A tecnologia também produz técnicas quando estas se caracterizam como tecnologias em potencial, enquanto ainda não são tecnologias de alguma técnica. Em vários casos técnica e tecnologia estão integradas. Às vezes na instituição I uma técnica é a única construída e reconhecida assumindo um papel autotecnológico, ou seja, a técnica não exige justificativa porque é uma “boa maneira de atuar (em I)”. A própria tecnologia contém afirmações que podem exigir justificativas que são dadas pela teoria Θ, que retoma, em relação à tecnologia, o papel que esta última tem em relação à técnica. Pode-se supor que exista a teoria da teoria e assim por diante, no entanto Chevallard (1999) considera suficientes os três níveis apresentados – técnica / tecnologia / teoria. A palavra teoria, do grego *theôria*, originalmente estava relacionada à idéia de “contemplação de um espetáculo”, onde o teórico assistia sem participar, e associa-se a isso o fato de os enunciados teóricos aparecerem como “abstratos”, despreocupados com os técnicos e tecnólogos, permitindo porém inúmeras justificativas e explicações devido à capacidade de generalização. Tecnologia e teoria formam o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ].

Em resumo,

> Uma *obra matemática* surge sempre como resposta para uma questão ou para um conjunto de questões. Mas em que se materializa tal resposta? Em uma primeira aproximação, poderíamos dizer que a resposta matemática para uma questão se cristaliza em um conjunto organizado de objetos ligados entre si por diversas inter-relações, isto é, em uma *organização matemática*. Essa organização é o resultado final de uma atividade matemática que, como todo atividade humana, apresenta dois aspectos inseparáveis: a prática matemática ou "práxis ", que consta de *tarefas* e *técnicas*, e o discurso fundamentado ou "logos" sobre essa prática, que é constituída por *tecnologias* e *teorias*." (CHEVALLARD, BOSCH e GASCÓN, 2001, p. 275).

Entretanto, admitindo-se um tema de estudo matemático, deve-se considerar a realidade matemática que pode ser construída em uma aula onde se estuda o tema, e a maneira como se pode realizar o estudo do tema. Esta realidade é que Chevallard (1999) denominou praxeologia matemática ou organização matemática.

Na elaboração de uma praxeologia matemática supõe-se que se entre em um "*processo de estudo* que, como tal, não é um processo homogêneo, mas está estruturado em diferentes *momentos*". No momento do *primeiro encontro* com a técnica faz-se uma referência aos objetos matemáticos que constituem o problema. O problema requer a construção de uma técnica adequada para abordá-lo; seria o *momento exploratório*. O momento do *trabalho da técnica* refere-se ao domínio e novamente criação de técnicas matemáticas. A justificativa da prática ocorre no momento *tecnológico-teórico*. Finalizando a obra matemática em seu conjunto, a resolução, temos os momentos de *institucionalização* e *avaliação*.

Esse enfoque em geral leva a questionar a realidade observável do fato estabelecido, visto como natural.

> (...) se é verdade que, em geral, a realidade é como é porque tem fortes restrições, sempre se pode propor examinar as modificações que, *para um custo aceitável*, por exemplo, deixando intacto o essencial e as condições prevalecentes, poderia criar *um novo estado estável*, considerado mais apropriado. O conjunto desses estados 'próximos' (e viáveis) da realidade constitui *a zona de desenvolvimento próximo* desta realidade. (CHEVALLARD, 1999, grifos do autor).

Os elementos da Transposição Didática e da Teoria Antropológica de Chevallard, mais especificamente a Organização ou Praxeologia Matemática, fornecem a fundamentação teórica para o nosso trabalho para, a partir da realidade observável em livros didáticos, identificarmos a "realidade matemática que pode ser construída" e propormos, a partir da articulação das orientações apresentadas nesse trabalho, situações que permitam criar uma zona de desenvolvimento próximo da realidade observada quanto ao estudo do objeto

Equações Algébricas. Muitas vezes o livro didático, isto quer dizer seu autor, vem se constituindo na referência sobre o saber a ser ensinado e assume um importante papel no processo da transposição didática ao transformar, incluir e excluir objetos de conhecimento matemático. Depende da postura epistemológica do professor ao usar o livro didático o resultado da transposição dos conteúdos em saberes ensinados. Na análise do livro didático pretendemos verificar, dentro do processo de transposição didática, de que modo o objeto Equações Algébricas é apresentado enquanto saber a ensinar. Por meio da Organização Matemática evidenciaremos a prática e a fundamentação (aplicação e conceitos) na resolução de Equações Algébricas para então propormos a utilização de métodos que ampliem os já existentes.

2.3 Metodologia da Pesquisa

Para identificar e caracterizar os métodos apresentados para resolução de Equações Algébricas, usaremos na análise dos livros didáticos, como referência teórica, a condição que estamos tratando de uma instituição Ensino Médio, um objeto matemático "Equações Algébricas" ensinado às pessoas "alunos" e queremos identificar a organização matemática, em termos de tarefa, técnica e tecnologia. Para este estudo utilizaremos os instrumentos disponibilizados pela teoria como descrito na seção anterior.

Nos elementos teóricos da Transposição Didática nos apoiamos para estudar o que acontece com o saber sobre Equações Algébricas desde a história até a proposição de professores-autores em livros didáticos.

Referente à experimentação que realizamos, na sua formulação e estrutura nos apoiamos em alguns conceitos teóricos da Engenharia Didática. O potencial de uma Engenharia Didática se deve ao vínculo com a realidade de sala de aula. Ao se admitir que o quadro teórico não é suficiente para suprimir todos os desafios da complexidade do objeto educacional em estudo, a Engenharia Didática se constitui em uma forma de sistematizar a aplicação de um determinado método na pesquisa didática, reforçando sua confiabilidade.

Segundo Pais (2002, p. 99),

> A engenharia didática caracteriza uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa em didática da matemática. O interesse pelo seu estudo justifica-se pelo fato de se tratar de uma concepção que contempla tanto a dimensão teórica como experimental da pesquisa em didática.

Artigue (1988) faz uma analogia entre o trabalho do pesquisador e o do engenheiro quanto à concepção, planejamento e execução de um projeto. A Engenharia Didática se caracteriza por ser um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências didáticas e com isso sistematiza a pesquisa de modo a manter a articulação entre ciência e técnica, e a melhorar o fluxo entre as fontes de influência descritas pela transposição didática: os resultados da pesquisa constituem o saber acadêmico enquanto as constatações práticas relacionam-se com o saber ensinado.

No âmbito da Didática da Matemática, a Engenharia Didática apresenta-se como a metodologia adequada para observação em classe:

> (...) enquanto procedimento metodológico, a engenharia didática se fundamenta em registros de estudos de casos, cuja validade é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada. (...) É preciso destacar que em função de cada concepção metodológica, a execução de uma engenharia didática é condicionada diferentemente por uma série de variáveis definidoras do contexto em que a pesquisa é realizada. Essa variabilidade não pode alterar a preservação dos princípios essenciais do método escolhido. Por esse motivo, a expressão *técnica de pesquisa* é mais apropriada para caracterizar a engenharia didática em vez de ser uma metodologia.
> (PAIS, 2002, p. 103-105, grifo do autor).

Artigue (1988) distingue quatro fases da Engenharia Didática: análises preliminares; concepção e análise *a priori*; aplicação de uma Seqüência Didática; análise *a posteriori* e validação. Durante as análises preliminares, dentro de um quadro teórico, o objeto é submetido a uma análise para serem feitas inferências, tais como "levantar constatações empíricas, destacar concepções dos sujeitos envolvidos e compreender as condições da realidade sobre a qual a experiência será realizada." (PAIS, 2002, p.101). A análise *a priori* sobre o conjunto das variáveis tem por objetivo determinar quais são aquelas escolhidas "e sobre as quais se torna possível exercer algum tipo de controle, relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os alunos podem desenvolver para a apreensão dos conceitos em questão." (idem, p. 102) Dessa análise também se definirá como será feito o registro das Seqüência Didática. A terceira fase constitui-se efetivamente na parte experimental da pesquisa e corresponde a aplicação da Seqüência Didática. Uma Seqüência Didática equivale a um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com o objetivo de se observar situações de aprendizagem envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Algumas pesquisas exigem a observação direta dos alunos em atividades, possibilitando a obtenção de um maior número de informações que podem ser filmadas, gravadas ou apenas descritas pelo pesquisador, ressaltando-se que as condições reais das atividades devem ser registradas no relatório final da pesquisa. A aplicação da Seqüência Didática pode ser coordenada pelo professor que deve estar consciente dos objetivos da pesquisa. A última fase da Engenharia Didática é a análise *a posteriori* do material recolhido e dos dados e a avaliação. A análise *a posteriori* às vezes exige a aplicação de outras técnicas tais como questionários para complementar os dados obtidos. O importante é que se atinja a realidade da produção dos alunos, quando possível, desvelando seus procedimentos de raciocínio. Para a validação dos resultados faz-se uma "confrontação entre os dados obtidos na análise *a priori* e *a posteriori*, verificando as hipóteses feitas no início da pesquisa." (idem, p. 103) Os momentos das análises *a priori* e *a posteriori* são considerados fundamentais, pois a comparação rigorosa entre eles permite a construção dos resultados da pesquisa.

Em nossa experimentação consideramos os elementos obtidos no capítulo 3 como dados de uma análise preliminar, pois estes dados subsidiam a experimentação. Na escolha dos exercícios para a seqüência didática consideramos, da Teoria de Situações de Brousseau (1986), o conceito de situação didática (1.º e 2.º exercícios) e situação a-didática[1] (3.º exercício) ou pelo menos momentos a-didáticos. Na análise a *priori* e a *posteriori* identificamos as técnicas e tecnologias rotineiras para os alunos, bem como, com o apoio de um *software* gráfico, observarmos a possibilidade da existência de outros métodos de resolução de Equações Algébricas no Ensino Médio. No estudo estamos interessados ao primeiro momento do aluno no encontro com o novo método, a descoberta e formulação de uma nova técnica de resolução de equações obtendo valores aproximados.

---

[1] Situação a-didática é uma situação em que as condições da mesma permitem uma evolução pelo próprio aluno para a aprendizagem de um novo saber, sem a intervenção do professor.

Capítulo 3: ESTUDO DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E DA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DO OBJETO EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Em nosso trabalho estamos interessados em dois grupos da noosfera: os matemáticos que escrevem propondo tarefas e métodos de ensino (técnicas) em livros didáticos, e os pesquisadores que estudam formas alternativas de abordagem e de tratamento do objeto.

Neste capítulo faremos um breve estudo histórico sobre a Equações Algébricas. Em seguida, estudaremos como estes conceitos estão presentes enquanto objetos matemáticos estudados na academia, isto é, enquanto *savoir savant* (saber sábio). Também estudaremos propostas feitas por alguns autores de obras e paradidáticos dirigidos a professores, sobre o quê ensinar de Equações Algébricas e de que maneira. Finalizaremos com o estudo de livros didáticos identificando como é a organização matemática do objeto Equações Algébricas nestes livros.

3.1 Elementos Históricos sobre as Equações Algébricas

Nesta seção apresentamos um estudo sobre o surgimento e a evolução do conceito de Equações Algébricas do ponto de vista histórico, reiterando nossa concepção de que cultura e ciência evoluem com a humanidade.

Um dos mais antigos documentos matemáticos que chegou aos dias atuais é um papiro egípcio com cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento, copiado pelo escriba Ahmes por volta de 1650 a.C. e por isso chamado Papiro Ahmes ou Papiro de Rhind em homenagem ao escocês Henry Rhind que o comprou em 1858. Muitos problemas de Ahmes relacionam-se com objetos concretos como pães e cervejas. Outros problemas equivalem a solucionar equações lineares da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$. A incógnita x é chamada de "aha". Exemplificamos com o problema 24 apresentado em Boyer (1998, p.11) em que se pede o valor de aha sendo que aha mais um sétimo de aha é igual a 19. Em notação moderna o problema seria escrito como $x + \frac{x}{7} = 19$. A solução é feita pelo método da falsa posição. Esse método consiste em atribuir um valor provavelmente falso para aha (a incógnita); se, fazendo a verificação, o problema não estiver solucionado, esse valor é alterado por meio de uma proporção. (MAINVILLE JR, 1992, p. 103).

Do período por volta de 1800-1600 a.C. há registros do interesse por equações cúbicas na antiga civilização babilônica. Os babilônios usavam uma tabela de valores de $n^3 + n^2$, para valores inteiros de n, que possibilitava a resolução de equações como, por exemplo, $2x^3 + 3x^2 = 540$ (HOOD, 1992, p. 46). Em outros textos há registros de duas equações lineares simultâneas a duas incógnitas. Os babilônios notabilizaram-se ainda por apresentar soluções para equações quadráticas com três termos. Essas equações eram classificadas em três tipos: i) $x^2 + px = q$; ii) $x^2 = px + q$; iii) $x^2 + q = px$ (p e q são positivos). Eram numerosos os problemas em que se pedia para achar dois números conhecidos o seu produto e/ou sua soma ou diferença. Tais problemas recaiam na equação do terceiro tipo. Para solucionar a equação quadrática $ax^2 + bx = c$, reduziam-na à forma $y^2 + by = ac$ pela substituição $y = ax$, e usavam um método conhecido como complemento do quadrado. Nas tábulas de argila mesopotâmicas são encontrados somente casos específicos, sem formulações gerais. Nos livros didáticos a fórmula resolutiva para a equação quadrática, ou de segundo grau, é atribuída ao matemático hindu Bhaskara (1114 a cerca de 1185). Os babilônios atingiram um nível de abstração tão grande que equações como $ax^4 + bx^2 = c$ e $ax^8 + bx^4 = c$ eram consideradas equações quadráticas disfarçadas. Tanto a álgebra do Egito quanto a da Babilônia eram retóricas. A Matemática pré-helênica era utilitária, por isso é difícil explicar o que impulsionou a álgebra babilônica na resolução de problemas que supostamente não estavam relacionados à vida real na Babilônia. (BOYER, 1998, p. 23).

A liderança intelectual das civilizações egípcia e babilônia cedeu lugar à civilização grega. As origens da matemática grega concentram-se nas escolas jônia e pitagórica cujos principais representantes foram Tales de Mileto (624-548 a.C, aproximadamente) e Pitágoras de Samos (580-600 a.C, aproximadamente). Tales e Pitágoras foram adquirir informação sobre astronomia e matemática nos antigos centros de conhecimentos, o Egito e a Mesopotâmia. O símbolo da escola pitagórica é a estrela de cinco pontas obtidas traçando-se as cinco diagonais de um pentágono regular. Começando-se com um pentágono regular ABCDE e traçando-se as cinco diagonais, estas se cruzam nos pontos A'B'C'D'E' que formam outro pentágono regular. Cada um desses pontos A', B', C', D' e E' divide uma diagonal em dois segmentos de reta tais que a razão da medida da diagonal toda para a medida do maior segmento é igual à razão da medida do maior segmento para a medida do menor. É a conhecida "secção áurea" de um segmento. Em notação atual, chamando de *a* a medida da diagonal e de *x* a medida do maior segmento temos $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$. Isso leva à equação quadrática $x^2 = a^2 - ax$, uma equação do primeiro tipo dos babilônios. Porém, se *a* é número racional não há solução racional. A solução algébrica dessa equação resulta em $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e faz surgir a seguinte controvérsia: a revelação de grandezas incomensuráveis (*números irracionais* – grifo nosso) deu-se pela secção áurea ou pela aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo isósceles (onde se encontra $\sqrt{2}$)? Acredita-se que os pitagóricos tenham usado um método geométrico semelhante ao apresentado em "Os Elementos" (cerca de 300 a.C.) de Euclides de Alexandria. Assim, com os gregos, a "álgebra aritmética" foi substituída pela "álgebra geométrica". Os antigos problemas, em que conhecida a soma e o produto das medidas de dois lados de um retângulo pediam-se as dimensões, foram resolvidos de forma diferente pelos gregos que usaram um método conhecido como "a aplicação de áreas". Os gregos evitavam razões e por isso a equação ax = bc era considerada como uma igualdade entre áreas. A identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, por exemplo, era concebida como uma igualdade entre áreas: um quadrado de lado de medida *a* e outro de lado de medida *b* e dois retângulos de dimensões *a* e *b* equivalem a um quadrado de lado a + b. Em "Sobre a esfera e o cilindro" de Arquimedes de Siracusa (cerca de 287 a.C. a 217 a.C.), o maior matemático de toda antiguidade, há um interessante problema solucionado com a álgebra geométrica dos gregos. O autor mostra como cortar a esfera dada de modo que os volumes dos dois segmentos estejam em uma razão dada. Em notação moderna teríamos a equação

$$\frac{4a^2}{x^2} = \frac{(3a-x).(m+n)}{am}$$

onde m:n é a razão dos segmentos. A solução dessa equação cúbica foi obtida por meio de intersecções de cônicas.

Com a invasão romana a matemática grega entrou em decadência. Os romanos mostraram pouca inclinação para a lógica e para a investigação especulativa. Porém, entre 250 d.C. e 350 d.C. encontra-se o maior algebrista grego: Diofante de Alexandria. Pouco se sabe sobre sua vida, mas na "Anthologia palatina", obra que reunia inúmeros problemas e cerca de seis mil epigramas, encontra-se o seguinte enigma para se descobrir sua idade:

> Deus lhe deu um sexto da vida como infante; um duodécimo mais como jovem, de barba abundante; e ainda uma sétima parte antes do casamento; em cinco anos nasce-lhe vigoroso rebento. Lástima! O filho do mestre e sábio do mundo se vai. Morreu quando da metade da idade final do pai. Quatro anos mais de estudos consolam-no do pesar; para então, deixando a terra, também ele alívio encontrar."
> (BAUMGART, 1992, p. 9)

Em notação moderna, sendo *x* a idade de Diofante, o problema seria equacionado como

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

Diofante é algumas vezes chamado de pai da álgebra embora sua principal obra "Arithmetica" não tenha formado a base da álgebra elementar moderna. A obra é dedicada em grande parte à resolução exata de equações indeterminadas – duas ou mais equações em várias variáveis que têm uma infinidade de soluções racionais; essas equações passaram a chamar-se diofantinas. A "Arithmetica" constitui-se de uma coleção de cerca de 150 problemas, todos estudados em termos de exemplos numéricos específicos, embora pretendendo conseguir generalidade no método. No caso de haver duas raízes positivas na resolução de equações quadráticas, Diofante dava apenas a maior e não considerava raízes negativas. (BOYER, 1996, p. 123). Entre os problemas encontram-se equações como $x^2 = 1 + 30y^2$, exemplo da chamada "equação de Pell" $x^2 = 1 + py^2$ resolvida por Bhaskara. A "Arithmetica" de Diofante é considerada um florescimento da álgebra babilônica. Conforme Boyer (1996) tal consideração é injusta porque os números de Diofante são abstratos não envolvendo quantidades de grãos, por exemplo, relacionadas aos problemas reais dos babilônios. E Diofante interessava-se somente por soluções que fossem números racionais exatos enquanto os babilônios aceitavam aproximações de soluções irracionais das equações. Em uma simplificação a história da álgebra pode ser dividida em três estágios: i) o primitivo, ou retórico; ii) o intermediário, ou sincopado; iii) o simbólico ou final. A "Arithmetica" situar-se-ia no segundo estágio.

Em 527, o romano Justiniano tornou-se imperador do Oriente. As escolas filosóficas em Atenas foram fechadas e seus membros dispersos por representarem uma ameaça ao cristianismo ortodoxo. Sábios e filósofos refugiaram-se no Oriente. Do Oriente, pouco se sabe sobre a matemática hindu antes do séculos IV ou V. As primitivas noções geométricas formaram um conjunto de conhecimentos conhecido como "Sulvasutras" ou "regras de cordas". Após o período dos "Sulvasutras" seguiu-se o período dos "Siddhantas", ou sistemas de astronomia. Acredita-se que durante o século VI foi escrita a obra "Aryabhatiya" por Aryabhata que compilou resultados de vários matemáticos hindus anteriores. Cerca de um século mais tarde (em 628), na Índia viveu Brahmagupta autor da obra "Brahmasphuta Siddanta". Segundo Boyer (1998, p. 151) aparentemente Brahmagupta foi o primeiro a dar uma solução geral da equação linear diofantina ax + by = c, onde *a*, *b* e *c* são inteiros. Ele também sugeriu a equação quadrática $x^2 = 1 + py^2$ que erradamente leva o nome de John Pell, e que foi resolvida por Bhaskara. Este é considerado o mais importante matemático do século XII tanto por resolver a equação de Pell, proposta antes por Brahmagupta, quanto por ser o primeiro a considerar a divisão por zero. Suas obras "Lilavati" e "Vija-Ganita" contém inúmeros problemas sobre equações lineares e quadráticas.

A Índia, assim como a Pérsia, a Mesopotâmia, norte da África e Espanha, foi conquistada pelos árabes com o advento do islamismo. Em 766 uma obra astronômico-matemática (um "Siddhanta") foi levada da Índia para Bagdá e em 775 foi traduzido para o árabe; cerca de cinco anos depois a obra grega "Tetrabiblos" de Ptolomeu também foi traduzida. Esses fatos mostram com que avidez os árabes absorveram a cultura de seus vizinhos. Do período arábico destaca-se o matemático al-Khowarismi porque seus livros foram posteriormente traduzidos para o latim em cerca de 1200 influenciando fortemente a matemática européia. (BAUMGART, 1992, p. 11). A palavra aritmética deriva diretamente do grego *arithmos* que quer dizer número enquanto a palavra álgebra não tem uma tradução fiel. Álgebra é uma variação latina de *al-jabr* encontrada no título *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, livro árabe escrito em cerca de 825 por Mohammed ibn-Musa al-Khowarismi. Este expressou no prefácio do livro que os profetas Maomé e al-Mamum o tinham motivado a "compor uma breve obra sobre cálculos por (regras de) complementação e redução, restringindo-a ao que é mais fácil e útil essa aritmética" (BOYER, 1998, p. 156) com a finalidade de ajudar os homens em suas necessidades no comércio, em casos de heranças, em partições, em atividades de medir terras ou escavar canais.

Não se conhece bem o significado dos termos *al-jabr* e *muqabalah*, mas presume-se que o primeiro equivale a “restauração” ou “complementação” e o segundo corresponda a “redução” ou “equilíbrio”, referindo-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação e ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação. Baumgart (1992) sugere que a melhor tradução do título do livro de al-Khowarismi poderia ser “a ciência das equações”. A obra, que é considerada um elo de ligação entre a matemática hindu, com sinais da matemática grega, e a Europa, tratava essencialmente da resolução de equações de 1.º e 2.º graus, da maneira de se efetuar algumas operações e de se resolver certos problemas. Caraça (1970, p. 156) chama a atenção para o fato das idéias da matemática grega terem sido transmitidas à Europa não pelos romanos, que seria o caminho normal, mas pelos árabes, passando pela Índia e completa:

> Mas é sempre assim; a Cultura e a Ciência, produtos humanos, acompanham os homens e forjam-se nas suas lutas, nas suas marchas inquietas para fugir ao sofrimento e buscar uma vida melhor.

A tradução latina de "Álgebra" de al-Khowarismi traz três tipos de equações formadas com três espécies de quantidades: raízes, quadrados e números (x, x^2 e números). Os seis casos de equações lineares e quadráticas que têm uma raiz positiva são apresentados nos seis capítulos da obra. Em notação moderna expressaríamos os exemplos: i) $x^2 = 5x$; ii) quadrado = número; iii) raiz = número; iv) $x^2 + 10x = 39$; v) $x^2 + 21 = 10x$; vi) $3x + 4 = x^2$. A exposição de al-Khowarismi era tão sistemática que mereceu ser chamado o pai da álgebra. A "Álgebra" era um dos melhores textos de álgebra da época e a melhor exposição elementar até os tempos modernos, porém necessitava substituir a forma retórica por uma notação simbólica (BOYER, 1998, p. 160). A matemática árabe não se resumiu ao trabalho de al-Khowarismi. Os árabes também contribuíram com generalizações para a geometria que vinha da Grécia. Nesse sentido destacou-se Omar Khayyam (cerca de 1050-1122) que escreveu uma "Álgebra" que avançava em relação a al-Khowarismi tratando de equações cúbicas gerais. Omar Khayyam dava tanto soluções aritméticas quanto geométricas às equações quadráticas. Para as equações cúbicas acreditava que não havia soluções aritméticas e apresentava apenas resoluções geométricas usando cônicas (elipse, hipérbole e parábola) que se cortam. Em enunciado moderno a resolução consistiria no seguinte. Seja a equação cúbica $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$. Se for substituído x^2 por $2py$ obtém-se $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$. Esta equação representa uma hipérbole e $x^2 = 2py$, uma parábola; ao traçar as curvas cônicas sobre um mesmo conjunto de eixos e coordenadas, as abscissas dos pontos de intersecção serão as raízes da equação. Nem todas as raízes de uma equação cúbica eram obtidas, pois ele não aceitava as raízes negativas. Como o espaço não possui mais que três dimensões, Omar Khayyam não imaginava métodos geométricos semelhantes para equações de grau maior que três.

No início do século XII os europeus latinos superaram a barreira com a cultura árabe fazendo uma série de traduções. "Os Elementos" de Euclides foi uma das primeiras obras matemáticas clássicas a serem traduzidas do árabe para o latim pelo inglês Adelard de Bath.

Em Toledo, na Espanha, grande parte da população falava o árabe o que facilitava a tradução por isso havia muitos homens nessa atividade. No século XIII alguns matemáticos europeus ajudaram a popularizar os numerais indo-arábicos. Um deles foi o comerciante italiano Leonardo de Pisa (cerca de 1180-1250) também conhecido como Fibonacci. No livro "Liber abaci", escrito em 1202, Fibonacci apresenta a equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ e prova a impossibilidade da existência de raiz racional e de irracional da forma $a + \sqrt{b}$, ou seja, não se podia achar solução exata por meios algébricos. Não se sabe como Fibonacci apresentou a raiz positiva mas supõe-se que tenha aprendido o método de Horner com os árabes.

Nos séculos seguintes a Fibonacci a álgebra desenvolveu-se pouco na Europa. Alguns historiadores consideram que após o "Liber abaci" a obra mais significativa tenha sido a "Summa de arithmetica, geometrica, proportioni e proportionalita", em 1494, de Luca Pacioli, ou Luca di Borgo, (1445-1514). A "Summa" é uma compilação de material de aritmética, álgebra, geometria euclidiana e contabilidade representando o conhecimento geral da época e obras não publicadas do autor. Pacioli julgava, como Omar Khayyam, que equações cúbicas também não podiam ser resolvidas algebricamente. Na primeira metade do século XVI surgiram algumas álgebras alemãs e entre elas a mais importante foi a "Arithmetica integra" (1544) de Michael Stifel (cerca de 1487-1567). Embora em 1545 já estivesse superada a "Arithmetica integra" constituía um tratamento completo da álgebra tal como era conhecida até o ano da sua publicação. (BOYER, 1998, p. 193). Stifel deu muitos problemas levando a equações quadráticas mas nenhum que levasse a equações cúbicas mistas pois não sabia mais que Pacioli ou Omar Khayyam. Na Itália, entre 1515 e 1545 voltaram a surgir muitos algebristas, época em que publicaram muitos livros. No entanto preferiam usar seus conhecimentos em competições públicas desafiando-se uns aos outros na resolução de problemas. Scipione del Ferro (cerca de 1465-1526) descobriu o método da resolução da equação cúbica $x^3 + px = q$ (cubos e raízes igualados a um número) em 1515 mas não difundiu seu trabalho. Niccolo Fontana, ou NiccoloTartaglia (cerca de 1500-1557), resolveu essa mesma equação cúbica e ainda $x^3 + px^2 = q$ (cubos e quadrados igualados a um número). Tartaglia disputou e venceu uma competição matemática contra Antonio Maria Fior, um discípulo de del Ferro. Na época as equações cúbicas não eram todas da mesma forma e havia tantos tipos quantas as possibilidades de coeficientes positivos e negativos. O médico, matemático, estudioso e controverso Girolamo (ou Gerônimo) Cardano (1501-1576) aproximou-se de Tartaglia e, prometendo guardar segredo, conseguiu que este lhe fornecesse a solução para a equação cúbica. Tartaglia, sem indicação de demonstração, apresentou a solução em forma de versos. Depois disso, Cardano aperfeiçoou o método e publicou a solução completa de todas as variedades de equações cúbicas para raízes positivas na obra "Ars magna" em 1545. (BOYER, 1998, p. 193-195; SLOYEN, 1992, p. 80). O ano de 1545 freqüentemente é considerado como marco do início do período da matemática moderna. Cardano usava pouca sincopação, sendo considerado um discípulo de al-Khowarizmi, e pensava nas equações com coeficientes numéricos específicos como representantes de categorias gerais. Para a equação $x^3 + px + q = 0$, Cardano conclui na sua obra uma formulação verbal equivalente a

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

Tartaglia, descontente com a quebra da promessa de Cardano publica os "Quesiti e Inventioni Diverse" em 1546 onde o ataca.

A fórmula de Tartaglia-Cardano aplica-se à equação cúbica geral como encontramos em Lima (1987).

Seja $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. A equação equivale a

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Desse modo basta considerar equações em que o coeficiente de x^3 é igual a 1.

Admitindo-se agora a equação

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

fazendo-se a substituição $x = y - \frac{a}{3}$ temos

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

que é uma equação desprovida de termo do segundo grau. Isto significa que é suficiente estudar as equações cúbicas da forma

$$x^3 + px + q = 0.$$

Para a sua solução, fazendo x = u + v e substituindo temos

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

Se forem obtidos números u e v tais que

$$u^3 + v^3 = -q \text{ e } uv = -\frac{p}{3} \Rightarrow u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

então x = u + v será solução da equação cúbica $x^3 + px + q = 0$. Sendo u^3 e v^3 dois números cuja soma é – q e cujo produto é $-\frac{p^3}{27}$, então u^3 e v^3 são raízes da equação quadrática

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$$

cujas soluções, facilmente obtidas, são

$$w_1 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \text{ e } w_2 = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Portanto,

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

é uma raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Chama a atenção o fato de a fórmula resolutiva da equação quadrática, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, exibir as duas raízes da equação enquanto que a de Tartaglia-Cardano indica somente uma. (GARBI, 1997, p. 35; 37).

Para a equação $x^3 = 15x + 4$ (p = – 15 e q = – 4) aplicando a fórmula, encontra-se $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Embora Cardano soubesse que x = 4 é uma raiz, não entendia o significado das raízes quadradas de números negativos e referia-se a elas como "sofísticas". Também deparou-se com as sofísticas no problema que consistia em dividir 10 em duas partes tais que o produto fosse igual a 40. Na "Ars magna" Cardano apresentou a resolução de equações quárticas descoberta por seu secretário, Ludovico (ou Luigi) Ferrari

(1522-1565). A Cardano foi proposto o seguinte problema: "dividir 10 em três partes formando uma proporção e tais que a primeira parte multiplicada pela segunda dê 6 como produto." Não conseguindo a resolução, Cardano o propõe a Ferrari. Em notação atual, o problema consiste em encontrar três números *u*, *v* e *w*, tais que

$$\begin{cases} u + v + w = 10 \\ \dfrac{u}{v} = \dfrac{v}{w} \\ uv = 6 \end{cases}$$

Isso equivale a resolver a equação quártica $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$. A equação quártica geral $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ pode ser associada à equação $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ fazendo $x = y + m$ e anulando o termo em y^3. A resolução de Ferrari é recuperada em Mahammed (1995).

Para resolver a equação

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \qquad (1)$$

considera-se que para todo número real *t* temos

$$(x^2 + p + t)^2 - (x^4 + px^2) = (p + 2t)x^2 + p^2 + 2pt + t^2 \qquad (2)$$

Ferrari estabeleceu essa relação usando um único argumento geométrico em seu método para examinar a área do quadrado $AD = DE = x^2 + p + t$, onde $AB = x^2$, $BC = p$ e $CD = t$.

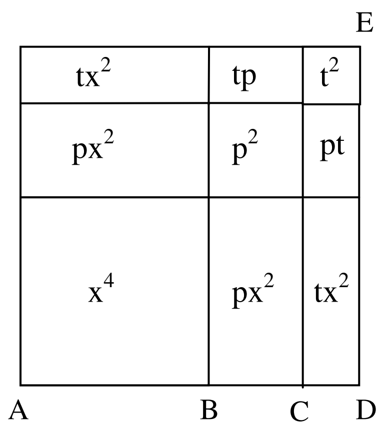


Fig. 1. Resolução geométrica

Segue:

$$(x^2 + p + t)^2 - (x^4 + px^2 + qx + r) = (p + 2t)x^2 - qx + p^2 - r + 2pt + t^2 \qquad (3)$$

Se x é uma raiz de (1), o segundo membro da equação anterior deve ser um quadrado e portanto deve admitir x como raiz dupla (discriminante nulo).

$$q^2 - 4.(p + 2t).(p^2 - r + 2pt + t^2) = 0$$

$$8t^3 + 20pt^2 + 8(2p^2 - r)t + 4p^3 - 4pr - q^2 = 0 \qquad (4)$$

Esta é uma equação cúbica em *t*, que o método de Tartaglia-Cardano permite resolver. Tal equação é chamada "uma resolvente" de (1). Seja t_0 uma raiz dessa resolvente, ela vem de (3),

$$(x^2 + p + t_0)^2 - (x^4 + px^2 + qx + r) = (p + 2t_0).\left[x - \frac{q}{2(p+2t_0)}\right]^2$$

$$(x^2 + p + t_0)^2 - (p + 2t_0).\left[x - \frac{q}{2(p+2t_0)}\right]^2 = x^4 + px^2 + qx + r$$ [2]

Por conseqüência, as raízes de (1) são as raízes de duas equações quadráticas

$$x^2 + \sqrt{p+2t_0}\,.x + p + t_0 - \frac{q}{2\sqrt{p+2t_0}} = 0 \quad \text{e}$$

$$x^2 - \sqrt{p+2t_0}\,.x + p + t_0 + \frac{q}{2\sqrt{p+2t_0}} = 0$$

Conforme Boyer (1998, p. 197), é possível que a resolução das equações cúbicas e quárticas tenha sido a maior contribuição à álgebra desde que os babilônios aprenderam a completar o quadrado para equações quadráticas. A resolução dessas equações não foi motivada por considerações práticas. Era de se esperar que os estudos fossem generalizados na resolução da equação quíntica e de equações de qualquer grau. Por isso a importância das descobertas publicadas na "Ars magna" de Cardano deve-se ao impulso dado à pesquisa em álgebra. Um resultado imediato da resolução das equações cúbicas foi a primeira observação significativa de um novo conjunto de números, os irracionais. Outra conseqüência, como dissemos, foi que a fórmula de Tartaglia-Cardano levava a raízes quadradas de números negativos. Outro algebrista italiano, Rafael Bombelli (cerca de 1526-1573), ao considerar a equação $x^3 = 15x + 4$, de solução conhecida igual a 4, embora pela fórmula se obtivesse $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, notou que os dois radicandos das raízes cúbicas diferem apenas por um sinal. Com um raciocínio engenhoso, Bombelli concluiu que se a

[2] Na tradução, o segundo membro consta como zero.

soma das partes reais é 4, a parte real de cada radical obtido pela fórmula é igual a 2; e se um número da forma 2 + b$\sqrt{-1}$ deve ser uma raiz cúbica de 2 + 11$\sqrt{-1}$, então b deve ser 1, e assim, x = 2 + 1$\sqrt{-1}$ + 2 – 1$\sqrt{-1}$ = 4. Essa observação de Bombelli não ajudou muito na resolução de cúbicas porque era preciso saber antecipadamente o valor de uma das raízes.

No início da segunda metade do século XVI, na Europa Ocidental, a álgebra árabe estava dominada e fora aperfeiçoada pela resolução das equações cúbicas, quárticas e por um uso parcial de simbolismo. No entanto a álgebra durante o tempo dos árabes e o começo do período moderno tratava mais de casos particulares; as resoluções de equações consistiam em "soluções manipulativas" e a preocupação era encontrar a "coisa" (incógnita) em equações de coeficientes específicos (BAUMGART, 1992, p. 14; BOYER, 1998, p. 208). A figura mais importante no desenvolvimento da matemática durante a transição da Renascença para o mundo moderno foi o francês François Viète (em latim, Franciscus Vieta, 1540-1603). Seu principal mérito foi ter possibilitado o progresso do simbolismo algébrico. No livro "In artem analyticam isagoge", adotou a utilização de letras latinas na resolução de problemas. Na obra expõe o desenvolvimento algébrico para resolver um problema. Deve-se começar pela adoção de um sistema de notações próprio considerando todas as grandezas envolvidas e as relações entre elas; a seguir deve-se estudar as equações obtidas; por último é necessário resolver, aritmeticamente ou geometricamente, essas equações. Viète introduziu o uso de uma vogal para representar algebricamente uma quantidade desconhecida e uma consoante para uma grandeza conhecida. Com relação às equações algébricas, Viète fazia substituições de incógnitas de modo a obter resoluções mais fáceis. Com seus conhecimentos de trigonometria percebeu que esta poderia auxiliar na resolução de equações. Isso ocorreu quando observou que o problema de trissecção do ângulo levava a uma equação cúbica. Para a equação $x^3 + px + q = 0$ apresentou a fórmula $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ fazendo a substituição $x = k\cos\alpha$. Observou ainda que se $x^3 + q = px$ ($p>0$, $q>0$) tem duas raízes positivas x_1 e x_2 então havia uma relação entre as raízes e os coeficientes tal que

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = p$$

$$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = q.$$

Viète chegou a afirmar que a equação

$$x^3 - (u + v + w)x^2 + (uv + vw + uw)x - uvw = 0$$

tem três raízes, u, v, w. Tal descoberta perde um pouco de valor porque Viète considerava apenas coeficientes e raízes positivas. Com isso, Viète aproximou-se da teoria das funções simétricas das raízes na teoria das equações. Denomina-se função simétrica de duas ou mais variáveis à função que não é afetada quando permutam-se duas quaisquer das variáveis. Um exemplo envolvendo uma equação algébrica pode ser descrito a seguir. Considerando a equação cúbica

$$x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3 = 0$$

de raízes r_1 , r_2 e r_3 temos

$$r_1 + r_2 + r_3 = - C_1;\ \ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = C_2;\ \ r_1r_2r_3 = - C_3.$$

Os coeficientes da equação cúbica são funções simétricas das raízes r_1, r_2, r_3.

Na obra "De numerosa potestatum ad exegesiam resolutione de 1600, Viète usou um método para resolução aproximada de equação (método de aproximações sucessivas), conhecido há muito antes na China e praticamente é o que hoje chama-se método de Ruffini-Horner. Para resolver a equação quadrática

$$x^2 + 7x = 60750 \qquad (1)$$

Viète considerou como uma primeira aproximação $x_0 = 200$ e portanto $x = 200 + x_1$. Substituindo em (1) tem-se

$$x_1^2 + 407x_1 = 19350. \qquad (2)$$

Considerando como solução positiva aproximada da equação (2) o valor $x_2 = 40$ então $x_1 = 40 + x_3$ que substituindo em (2) resulta em

$$x_3^2 + 487x_3 = 1470$$

cuja solução positiva é $x_3 = 3$. Logo, $x_1 = 40 + x_3 = 43$; e $x = 200 + x_1 = 243$ é a solução da equação inicial (BOYER, 1998, p. 207-211; MAHAMMED, 1995; WOLFE, 1992, p. 92).

Coube a Albert Girard (1590-1633), que admitia a existência de raízes negativas e imaginárias, enunciar as relações entre raízes e coeficientes em 1629, no Teorema II na obra "Invention nouvelle en l'algèbre" (Invenção nova em álgebra).

> Todas as equações [algébricas] têm tantas soluções quanto o indica [o expoente] da grandeza maior, salvo as equações incompletas; e o primeiro agrupamento das soluções é igual ao coeficiente do primeiro composto, seu segundo agrupamento ao do segundo composto, seu terceiro ao terceiro composto e assim sucessivamente até o último agrupamento que é igual ao seu fechamento e isto levando em conta os sinais que podem ser observados em ordem alternada. (MAHAMMED, 1995).

O que Girard chama de primeiro agrupamento de números é a soma destes; segundo agrupamento corresponde à soma dos produtos desses números, dois a dois; terceiro agrupamento, à soma dos produtos dos números, três a três e assim sucessivamente até o último agrupamento que é o produto de todos os números. O termo de maior grau na equação de grau n é denominado de alta extremidade; o termo cujo grau é inferior de uma unidade do grau da equação é chamado de primeiro composto e assim por diante; o termo de grau 0 (termo independente) Girard denomina de fechamento ou baixa extremidade. Essas relações entre coeficientes e raízes são apresentadas nos livros didáticos de Ensino Médio como Relações de Girard. Ao afirmar que as equações completas (aquelas em que todos os graus se configurem) têm tantas soluções quanto indica o maior expoente dos termos (grau da equação), Girard considera uma idéia de um importante teorema. O matemático alemão Peter Roth em 1608 já tinha afirmado em sua "Arithmetica philosophica" que uma equação polinomial de grau n tem n raízes. Essa idéia é conhecida como Teorema Fundamental da Álgebra que só foi demonstrado por Gauss anos mais tarde (BOYER, 1998, p. 209; MAHAMMED, 1995; WOLFE, 1992, p. 92;93).

Do século XVII em diante a Matemática se desenvolveu mais em termos de lógica interna do que sob a ação de forças econômicas, sociais ou tecnológicas. Desse período merece destaque René Descartes (1596 – 1650). Considerado o pai da filosofia moderna, em sua obra "Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences" (Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências) de 1637 ele anunciou seu programa de pesquisa filosófica. Um dos três apêndices do "Discours de la méthode" é "La géométrie". Esta pode ser entendida como a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica. Em "La géométrie" a álgebra simbólica formal é apresentada em seu auge e ainda, o autor mostra que as cinco operações aritméticas correspondem a construções simples com régua e compasso. Geometria cartesiana é sinônimo de geometria analítica. "Todo problema de geometria pode facilmente ser reduzido a termos tais que o conhecimento dos comprimentos de certos segmentos basta para a construção" afirmou Descartes. O seu objetivo era uma construção geométrica e não necessariamente reduzir a geometria à álgebra. Seu método consiste em partir de um problema geométrico, traduzi-lo em linguagem de equação algébrica e depois de simplificá-la ao máximo, resolvê-la geometricamente. Para isso deviam ser usados os meios simples de acordo com o grau da equação: retas e circunferências para equações quadráticas; secções cônicas para equações cúbicas e quárticas. Esse conhecimento ele já demonstrara quando, em uma carta a um amigo em 1628, deu uma regra para a construção das raízes de qualquer equação cúbica ou quártica por meio de uma parábola, método que Omar Khayyam fizera por volta de 1100. Para resolver equações quadráticas utilizava métodos geométricos, como os gregos antigos (fig. 2). Assim, por exemplo, para a equação $z^2 = az + b^2$ deve-se traçar um segmento LM de comprimento b e em L traça-se um segmento LN, perpendicular a LM, de comprimento $\frac{a}{2}$. Com centro em N constrói-se uma circunferência de raio $\frac{a}{2}$ e traça-se a reta por M e N que interceptará a circunferência em P e O. Desse modo, z = OM é o segmento desejado. (BOYER, 1998, p. 229; 233).

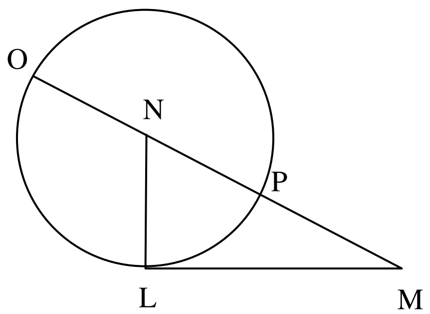


Fig. 2. Resolução geométrica

Graças à sua geometria analítica Descartes pode seguir além de onde os gregos tinham alcançado. Os matemáticos gregos discriminavam as curvas construtíveis somente com régua e compasso e as que necessitavam de outros instrumentos na construção. Descartes desenvolveu a idéia de que era necessário simplificar uma curva ao invés de simplificar sua construção. Para esclarecer esta noção de linha mais simples abordou a natureza das equações. No livro III da "La géométrie" explica como se pode diminuir o grau de uma equação quando se conhece uma de suas raízes reais. "A soma de uma equação que contém várias raízes, pode sempre ser dividida por um binômio composto pela quantidade incógnita menos o valor de uma das raízes verdadeiras [positivas], ou mais o valor de uma das falsas [negativas]." Dessa forma, dado um polinômio P de R, se P(a) = 0, então P é divisível por x – a. Na segunda parte do livro III, Descartes ocupa-se com o estudo da redução de equações quando o problema que as originou é um problema plano, ou seja, é solúvel por construção com régua e compasso. Ao buscar um critério de construtibilidade das raízes (reais) de uma equação cúbica por meio de régua e compasso, conclui que a equação de terceiro grau deve ser divisível por um binômio de primeiro grau (redução da resolução de uma equação cúbica para a resolução de uma equação quadrática). Desse modo considera a equação

$$y^6 - 8y^4 - 12y^2 - 64 = 0$$

que é do terceiro grau em y^2. Ele pesquisa as eventuais raízes racionais e experimenta os divisores 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 do último termo 64. Assim, $y^2 - 16$ é divisor do primeiro membro da equação e

$$y^6 - 8y^4 - 12y^2 - 64 = (y^2 - 16).(y^4 + 8y^2 + 4)$$

Descartes mostra explicitamente a maneira de efetuar a divisão de $y^6 - 8y^4 - 12y^2 - 64$ por $y^2 - 16$. Do ponto de vista algébrico, não aprofundou a questão da decomposição de um polinômio em fatores irredutíveis e ignorou o problema da pesquisa de um critério de resolubilidade algébrica de uma equação por extração de radicais. Descartes interessa-se pela determinação do número de raízes reais positivas ou negativas que uma equação pode ter e enuncia, sem demonstração, a seguinte regra denominada mais tarde de Regra dos sinais de Descartes: "Em cada equação, pode-se ter tantas raízes verdadeiras quantas forem as vezes que se encontra mudança dos sinais + e – , e tantas as falsas quantas as vezes que se encontra dois sinais +, ou dois sinais – que se seguem um ao outro."

Isto significa que dada a equação geral

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

onde $a_i \in$ IR ($0 \leq i \leq n$), o número de raízes positivas é igual, ou difere de um número par, ao número de variações de sinal que a seqüência formada por seus coeficientes

$$a_0 , a_1 , ... , a_{n-1} , a_n$$

apresenta. (MAHAMMED, 1995). Assim, se considerarmos a equação $x^3 + 0x^2 + x + 1 = 0$ correspondente ao exercício 3 da Seqüência Didática da experimentação, não há mudança de sinal, logo, não há raízes positivas; o sinal + se mantém três vezes, portanto são três ou uma raiz real negativa. É interessante ressaltar que a Descartes devem-se os termos "real" e "imaginário" para os números complexos.

Em meados do século XVII nasceu na Inglaterra aquele que consensualmente é considerado um dos maiores gênios da ciência: Isaac Newton (1642-1727). Antes de completar 25 anos Newton havia feito quatro de suas principais descobertas: o teorema binomial; o cálculo; a lei da gravitação; a natureza das cores. Para a teoria das equações algébricas Newton contribuiu com métodos algébricos aproximados para encontrar raízes reais, com um método não algébrico (conhecido como método de Newton) e um conjunto de critérios numéricos para a pesquisa de raízes como a determinação de números chamados cotas inferiores e cotas superiores.

Newton adotou um método algébrico para o cálculo aproximado de raízes, ilustrado em Garbi (1997, p.84-85), a partir de uma equação que ele próprio resolvera. Considerando a equação

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

por inspeção verifica-se que uma das raízes está situada entre 2 e 3 (Teorema de Bolzano) (grifo nosso). Fazendo $x = 2 + x_1$ com $0 < x_1 < 1$ substitui-se na equação

$$(2 + x_1)^2 - 2.(2 + x_1) - 5 = 0$$

$$x_1^3 + 6x_1^2 + 10x_1 - 1 = 0$$

Os valores x_1^3 e $6x_1^2$ são pequenos em relação a $10x_1$ pois $x_1 < 1$; considera-se que $10x_1 - 1$ é aproximadamente zero e portanto x_1 é aproximadamente 0,1. Sendo assim $x_1 = 0,1 + x_2$ e $x = 2 + x_1 = 2,1 + x_2$. Substituindo x novamente temos

$$x_2^3 + 6,3x_2^2 + 11,23x_2 + 0,061 = 0$$

e novamente desprezando as duas primeiras parcelas,

$$x_2 \cong -\frac{0,061}{11,23} = -0,0054 \text{ e } x = 2 + 0,1 - 0,0054 + x_3 = 2,0946 + x_3.$$

O valor correto da raiz até a quarta casa decimal é 2,0945 de onde se percebe a boa aproximação obtida.

Os três livros de Newton melhores conhecidos atualmente são "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", "Methodus fluxionum et serierum infinitorum" e "Opticks", mas a quarta obra "Arithmetica universalis" foi mais publicada que as outras três no século XVIII. O "Principia", que chega a ser considerado o livro científico mais importante de todos os tempos, foi o último tratado a ser composto e o primeiro a ser publicado em 1687. Em o "Método dos fluxos", escrito por volta de 1671, encontramos o método de Newton para a solução aproximada de equações. Se a equação a ser resolvida é f(x) = 0, primeiro coloca-se a raiz desejada no intervalo $(a_1; b_1)$ em que nem a primeira nem a segunda derivada se anulam ou deixam de existir. Então, para um dos valores, por exemplo, $x = a_1$, f(x) e f'(x) terão o mesmo sinal. O valor $x = a_2$ será uma melhor aproximação se

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)};$$

aplicando-se iterativamente esse processo obtém-se uma aproximação a_n tão precisa quanto se queira. A importância desse método é muito grande porque, em princípio, aplica-se a qualquer função e não apenas às funções algébricas, embora somente as raízes reais são pesquisáveis. O método foi simplificado por Raphson (1690) e continua sendo usado atualmente, às vezes com o nome de método de Newton-Raphson. O livro "Opticks" inclui o tratado "Enumerativo linearum tertii ordinis" escrito em cerca de 1676. Newton observou setenta e duas espécies de equações cúbicas e traçou uma curva de cada espécie usando sistematicamente de forma inédita dois eixos e as coordenadas negativas sem hesitação. Entre as propriedades estão o fato de uma curva de terceiro grau não poder ter mais de três assíntotas e que todas as cúbicas são projeções de uma parábola divergente

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Em "Arithmetica universalis", escrita entre 1673 e 1683, apresenta importantes contribuições. Cardano sabia que a soma das raízes de

$$x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

é $-a_1$. Viète vislumbrou a teoria das funções simétricas e Girard avançou na descoberta das relações entre coeficientes e raízes. Embora este conhecesse a soma dos quadrados, a soma dos cubos e das quartas potências das raízes de uma equação, foi Newton quem generalizou isso para todas as potências. Na "Arithmetica universalis" há ainda a generalização da regra de sinais de Descartes para determinar o número de raízes imaginárias de um polinômio. Na seção mais longa dessa obra, Newton trata da resolução de questões geométricas. Considerava que construções geométricas que utilizasse outras curvas que não fosse a reta e a circunferência era parte da álgebra e não da geometria. Nesse sentido ele apresenta a solução de equações cúbicas feita com a ajuda de cônicas. Outra idéia importante foi a de cotas inferiores e superiores. Seja o polinômio

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n.$$

Dividindo-o por um binômio $x - L$ obtém-se

$$P(x) = (x - L).(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-2}x + b_{n-1}) + R.$$

Se for encontrado um valor de L que faça todos os coeficientes b_i e o resto R positivos, então $P(x) > 0$ para qualquer $x > L$ e L é chamado de cota superior das raízes. Para encontrar cotas inferiores basta substituir x por – x. Na nova equação de cota superior das raízes L, as raízes reais são x < L, ou seja, – x > – L e – L é chamado de cota inferior das raízes da equação original e representado por l. Admitindo por exemplo a equação

$$x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 8x + 23 = 0$$

o dispositivo de Briot-Ruffini para a divisão de polinômios permite encontrar o valor da cota superior das raízes L *partindo de um valor arbitrário 1* (grifo nosso).

	1	– 2	3	–7	–8	23
1	1	–1	2	–5	–13	10
2	1	0	3	–1	–10	3
3	1	1	6	11	25	98

Para L = 3, os coeficientes do quociente e o resto são positivos sendo portanto a cota superior das raízes. Substituindo x por – x na equação original obtemos

$$-\ x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 8x + 23 = 0 \text{ ou}$$

$$x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 7x^2 - 8x - 23 = 0.$$

Utilizando o algoritmo para obter a cota L dessa equação temos

	1	2	3	7	–8	–23
1	1	3	6	13	5	–18
2	1	4	11	29	50	82

Sendo L = 2 a cota superior da nova equação, l = – 2 é a cota inferior das raízes. As raízes reais da equação $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 8x + 23 = 0$ encontram-se no intervalo – 2 e 3 (BOYER, 1998, p. 269-295; GARBI, 1997, p. 76-97). Newton possuía um rival intelectual, Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) que teria sido o primeiro a usar a palavra função já com o significado que este conceito tem na matemática. Entre estudantes de Ensino Médio, Newton é mais conhecido por suas contribuições à Física, mas a herança que deixou à Matemática é valiosíssima.

No início do século XVIII uma figura importante foi um o suíço Leonhard Euler (1707-1783). Autor de "Introductio in analysin infinitorum", obra considerada 'chave de abóbada da análise', assim como "Os elementos" de Euclides e "Al jabr wa'l muqabalah" de al-Kowarismi são pedras fundamentais da geometria e da álgebra, Euler é responsável por quase toda a notação simbólica atual usada na matemática de nível universitário. Foi o matemático que mais produziu e publicou em todos os tempos. A ele se deve o uso da letra *e* para 'aquele número cujo logaritmo hiperbólico é igual a 1'; o uso definitivo da letra π para o já conhecido número irracional; o uso em uma das primeiras vezes do símbolo *i* para $\sqrt{-1}$; e a importante notação, f(x) para uma função de x. No "Introductio" encontra-se a definição de função de uma quantidade variável como "qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes". Hoje a definição é inaceitável por sua imprecisão, mas presume-se que Euler primariamente imaginava as funções algébricas e as funções transcendentes. Na mesma obra encontra-se de forma generalizada o equivalente à igualdade

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

considerada uma das mais célebres na Matemática.

Euler, após Bombelli, Leibniz e Abraham de Moivre, este, um amigo de Newton, dominou os números complexos de forma quase completa. É responsável pelos conceitos que atualmente usamos sobre módulo e argumento de um número complexo e pela forma trigonométrica. Descobriu a operação de multiplicação e conseqüentemente a de potenciação de complexos, atribuída posteriormente a de Moivre. Quando Euler tentou obter a operação inversa da potenciação, a extração da raiz n-ésima (n inteiro) de um complexo descobriu que qualquer número complexo não nulo tem exatamente n raízes n-ésimas. Ao aprender a extrair raízes de números complexos o problema que incomodou Cardano e Bombelli estava resolvido (BOYER, 1998, p. 305;306; GARBI, 1997, p. 98-112).

Nesse mesmo período a França teve como seu principal matemático Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783). d'Alembert colaborou com Denis Diderot (1713-1784) nos vinte e oito volumes da "Encyclopédie" escrevendo a maior parte dos artigos matemáticos e científicos. Esforçou-se intensamente tentando provar o teorema conjeturado por Girard que toda equação polinomial f(x) = 0, a coeficientes complexos e grau n ≥ 1 tem pelo menos uma raiz complexa. Devido a essa dedicação, atualmente na França o teorema é conhecido como teorema de d'Alembert (BOYER, 1998, p. 303-310).

A demonstração do teorema coube a aquele considerado por muitos como o maior matemático de todos os tempos, o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Com dezenove anos incompletos superou um conhecimento que durava dois milênios. Até aquela época sabia-se construir com régua e compasso alguns polígonos regulares com número de lados múltiplo de dois, três e cinco, mas nenhum outro com número de lados primo. Gauss mostrou que o heptadecágono regular também pode ser construído com régua e compasso e ainda provou que a construção pode ser feita quando os números de lados dos polígonos são primos da forma $2^{2^n}+1$. Quanto às equações, desde Cardano suspeitava-se que as cúbicas tinham três raízes, as quárticas tinham quatro raízes e assim por diante. Euler descobriu que qualquer número tem n raízes n-ésimas (n inteiro) e d'Alembert tentou provar sem sucesso o Teorema Fundamental da Álgebra. A tese de doutorado de Gauss apresentada em 1799, quando tinha apenas 21 anos, é o mais importante alicerce da teoria das equações algébricas, expresso no próprio título "Nova demonstração do teorema que toda função algébrica racional inteira [polinomial] em uma variável pode ser decomposta em fatores reais de primeiro ou segundo grau". O próprio Gauss fez mais três demonstrações desse Teorema por maneiras diferentes, a última quando já tinha setenta anos de idade. Em Boyer (1998, p.345) reproduz-se o pensamento do Gauss sobre o Teorema.

Admitamos a equação $x^2 - 4i = 0$ cuja solução é o número complexo $x = a + bi$. Fazendo a substituição temos

$$(a + bi)^2 - 4i = 0$$

$$(a^2 - b^2) + (2ab - 4).i = 0$$

$$a^2 - b^2 = 0 \text{ e } ab - 2 = 0$$

$$a + b = 0 \text{ ou } a - b = 0; \quad ab = 2.$$

Interpretando *a* e *b* como quantidades variáveis e representando-as em um conjunto de eixos esboçam-se duas curvas: a reta e a hipérbole conforme a figura[3] 3.

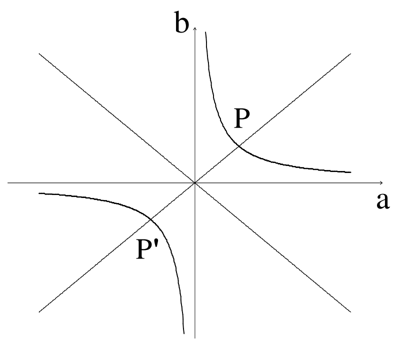


Fig. 3. Representação geométrica

[3] Figura construída com o auxílio do *software* Winplot.

Um dos ramos da primeira curva (a reta a – b = 0) afasta-se da origem segundo a direção $\theta = \frac{1\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Um dos ramos da segunda curva, a hipérbole, move-se assintoticamente para as direções $\theta = \frac{0\pi}{4}$ e $\theta = \frac{2\pi}{4}$. O ponto P de intersecção encontra-se entre as duas últimas direções $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. As coordenadas *a* e *b* de P são as partes real e imaginária do número complexo que é solução da equação $z^2 - 4i = 0$. Para uma equação de grau n existirá um ramo de uma curva de direções assintóticas $\theta = \frac{1\pi}{2n}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2n}$, enquanto que um ramo da outra curva terá direções assintóticas $\theta = \frac{0\pi}{2n}$ e $\theta = \frac{2\pi}{2n}$. Esses ramos necessariamente interceptar-se-ão no intervalo de $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{n}$ e as coordenadas *a* e *b* do ponto de intersecção serão as partes real e imaginária do número complexo que satisfaz a equação. Gauss usava os gráficos das curvas em questão para mostrar que se interceptam. Em 1920, A. Ostrowski deu provas rigorosas às suposições geometricamente óbvias que Gaus fez. Utilizando o resultado encontrado, Gauss provou a tese da possibilidade de fatorar qualquer polinômio em fatores de primeiro ou segundo grau. Desse modo, se r_1 é raiz do polinômio

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

então P(x) pode ser escrito como um produto do binômio $x - r_1$ por um polinômio de grau $n - 1$:

$$P(x) = (x - r_1).(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-2}x + b_{n-1}).$$

Se ao polinômio de grau n – 1 for aplicado o Teorema Fundamental da Álgebra, sendo r_2 a raiz, ele poderá ser decomposto tendo como um dos fatores um polinômio de grau n – 2.

$$P(x) = (x - r_1).(x - r_2).(c_0x^{n-2} + c_1x^{n-3} + ... + c_{n-3}x + c_{n-2})$$

e assim sucessivamente. Dessa forma temos que

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = a_0. (x - r_1).(x - r_2). ... . (x - r_{n-1}).(x - r_n).$$

Como existem n valores de r_i que anulam um a um os n binômios, o polinômio P(x) de grau n tem exatamente n raízes, eventualmente repetidas (BAUMGART, 1992, p. 87-89; BOYER, 1998, p. 343-345; GARBI, 1997, p. 113-131).

A partir do Teorema Fundamental da Álgebra podem-se demonstrar ainda outros teoremas e propriedades ensinadas no Ensino Médio e relacionadas à Teoria das Equações Algébricas: as chamadas relações de Girard entre coeficientes e raízes da equação P(x) = 0, o Teorema das Raízes Complexas e o Teorema de Bolzano. Pelo Teorema das Raízes Complexas, "se uma equação algébrica de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $z = a + bi$ ($b \neq 0$), então essa equação também admite como raiz o número $\bar{z} = a - bi$". O matemático Bernhard Bolzano (1781-1848) demonstrou um teorema que pode ser expresso como encontramos em Iezzi (1993, p. 134; 135).

> Sejam P(x) = 0 uma equação polinomial com coeficientes reais e]a; b[um intervalo real aberto. Se P(a) e P(b) têm mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais ou não existem raízes da equação em]a; b[. Se P(a) e P(b) têm sinais contrários, então existe um número ímpar de raízes reais da equação em]a; b[.

Verifica-se pois que se a raiz r_i é interna ao intervalo]a; b[significa que $a < r_i < b$, ou seja,

$$\begin{cases} a - r_i < 0 \\ b - r_i > 0 \end{cases} \Rightarrow (a - r_i).(b - r_i) < 0.$$

Se a raiz r_e é externa ao intervalo temos, por exemplo, $a < b < r_e$ e portanto

$$\begin{cases} a - r_e < 0 \\ b - r_e < 0 \end{cases} \Rightarrow (a - r_e).(b - r_e) > 0.$$

Dada a equação P(x) = 0 e sendo r_i as raízes reais e z_i as complexas não reais é feito o produto P(a).P(b) de tal modo que

$$P(a).P(b) = [a_0.(a - r_1). \dots .(a - r_p).(a - z_1).(a - \bar{z}_1). \dots .(a - z_q).(a - \bar{z}_q)].$$
$$.[a_0.(b - r_1). \dots .(b - r_p).(b - z_1).(b - \bar{z}_1). \dots .(b - z_q).(b - \bar{z}_q)]$$

$$P(a).P(b) = [a_0^2].[(a - r_1).(b - r_1)]. \dots .[(a - r_p).(b - r_p)].$$
$$.[(a - z_1).(a - \bar{z}_1)].[(b - z_1).(b - \bar{z}_1)]. \dots .$$
$$.[(a - z_q).(a - \bar{z}_q)].[(b - z_q).(b - \bar{z}_q)]$$

Notemos que o produto $(x - z).(x - \bar{z})$ é positivo para qualquer valor real de x pois, sendo $z = \alpha + \beta i$ e $\bar{z} = \alpha - \beta i$, segue que

$$(x - z).(x - \bar{z}) = [x - (\alpha + \beta i)].[x - (\alpha - \beta i)] = (x - \alpha)^2 + \beta^2 > 0.$$

Desse modo, $a_0^2 > 0$ e $[(a - z_1).(a - \overline{z_1})]. \ldots .[(b - z_q).(b - \overline{z_q})] > 0$, pois neste caso a cada raiz complexa corresponde outra que é sua conjugada. O sinal do produto P(a).P(b) depende da quantidade de fatores do tipo $(a - r_i).(b - r_i)$ que já sabemos serem negativos, sendo r_i raiz real interna ao intervalo]a; b[. Logo, quando P(a) e P(b) têm mesmo sinal, isto é, P(a).P(b) > 0, existe um número par de fatores negativos do tipo $(a - r_i).(b - r_i)$ e, portanto existe um número par de raízes reais em]a; b[. Se P(a) e P(b) têm sinais diferentes, isto é, P(a).P(b) < 0, existe um número ímpar de fatores $(a - r_i).(b - r_i)$ e conseqüentemente existe um número ímpar de raízes em]a; b[. O Teorema de Bolzano não indica qual é o número exato de raízes reais no intervalo]a; b[. Em 1829 o matemático suíço Charles Sturm apresentou um método para saber-se quantas raízes existem no intervalo utilizando técnicas do Cálculo Diferencial.

As equações cúbicas e quárticas despertaram interesse de importantes matemáticos ao longo da história e foram matemáticos italianos que demonstraram que as raízes das cúbicas e quárticas se expressam em função dos coeficientes e por meio das quatro operações aritméticas e radiciações. A partir disso realizaram-se esforços para demonstrar se o mesmo valeria para equações de grau maior que quatro pois Gauss provou que toda equação algébrica admite ao menos uma raiz complexa. Outro matemático italiano, Paolo Ruffini (1765-1822) apresentou em 1813 uma demonstração satisfatória de que era impossível resolver equações de grau maior que quatro por radicais. No entanto, do ponto de vista matemático os argumentos de Ruffini foram considerados vagos (HOOD, 1992, p. 49). Niels Henrik Abel (1802-1829) tentou resolver a equação quíntica geral e abordou o problema da resolução da equação algébrica geral de grau n. Acreditou que tivesse obtido a solução, mas ao descobrir seu erro chegou a se questionar se era possível uma solução algébrica declarando que matemáticos eminentes tentaram provar isso resolvendo equações sem saber se de fato eram possíveis. Afirmou que "se por azar a solução fosse impossível, poder-se-ia tentar por toda uma eternidade, sem encontrá-la”. Em seu artigo "Sobre a resolução algébrica de equações" expõe a não resolubilidade da quíntica definindo funções algébricas polinomiais. Depois apresenta uma classificação de funções algébricas que sugere a formação de um corpo de funções. Abel passou por Berlim e Paris em busca de reconhecimento para os resultados de suas pesquisas. Voltou à Noruega, sua pátria, onde morreu de tuberculose. Dois dias após sua morte chegou de Berlim uma carta de August L. Crelle (1780-1855) oferecendo-lhe uma posição em um periódico matemático (BOYER, 1998, p. 361-362).

Outro matemático que não recebeu o reconhecimento que procurava e que também morreu muito jovem foi o francês Évariste Galois (1811-1832). Galois foi influenciado diretamente pelo trabalho de Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Este, como outros matemáticos, também buscava uma solução para a equação polinomial geral. No livro "Reflexões sobre a resolução algébrica de equações" de 1770, para a resolução de equações quadráticas, cúbicas e quárticas, Lagrange fez uso das permutações das raízes da equação, chave da teoria dos grupos de permutações. Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matemático considerado da estatura de Gauss, publicou em 1815 um artigo sobre teoria dos grupos. Mas a Galois atribuem-se as maiores contribuições nesse tema. Os conceitos de grupo usados até hoje se devem a ele e por esse motivo é considerado o pai da Álgebra Moderna. Uma coleção de elementos forma um grupo com relação a uma dada operação se (i) a coleção é fechada sob a operação; (ii) a coleção contém um elemento neutro com relação à operação; (iii) para cada elemento da coleção há um elemento inverso com relação à operação; (iv) a operação é associativa.

Consideremos, por exemplo, o conjunto $G = \{I; a; b; c; d; e\}$ onde os seis elementos correspondem às permutações dos três elementos de $E = \{x_1; x_2; x_3\}$ tal que:

$I = (x_1, x_2, x_3)$, chamada de permutação idêntica, transforma cada valor em si mesmo;

$a = (x_1, x_3, x_2)$, transforma x_1 em x_1, x_2 em x_3 e x_3 em x_2;

$b = (x_2, x_1, x_3)$, transforma x_1 em x_2, x_2 em x_1 e x_3 em x_3;

$c = (x_2, x_3, x_1)$, transforma x_1 em x_2, x_2 em x_3 e x_3 em x_1;

$d = (x_3, x_1, x_2)$, transforma x_1 em x_3, x_2 em x_1 e x_3 em x_2;

$e = (x_3, x_2, x_1)$, transforma x_1 em x_3, x_2 em x_2 e x_3 em x_1.

Para a operação de multiplicação, o produto a.b é definido como primeiro sendo efetuada a permutação b e em seguida é efetuada a permutação a sobre o resultado de b. Desse modo, sendo $b = (x_2, x_1, x_3)$, aplicando-se a em (x_2, x_1, x_3), obtemos (x_2, x_3, x_1) que é igual a c. Portanto, dizemos que $ab = c$. Todos os possíveis produtos são dados na tábua a seguir.

	I	a	b	c	d	e
I	I	a	b	c	d	e
a	a	I	c	b	e	d
b	b	d	I	e	a	c
c	c	e	a	d	I	b
d	d	b	e	I	c	a
e	e	c	d	a	b	I

A partir da tábua verificam-se as seguintes propriedades.

1) O conjunto G é fechado com relação à operação de multiplicação definida, isto é, o produto de dois elementos quaisquer de G pertence a G.

2) O conjunto G tem um elemento neutro com relação à operação (no exemplo, I).

3) Para cada elemento de G há um elemento inverso com relação à operação; no exemplo utilizado, vemos que o inverso de a é o próprio a; de b é o próprio b; de c é o elemento b, etc.

4) A operação definida possui a propriedade associativa. De fato, (ab).c = a.(bc) pois

(ab).c = (c).c = d;

a.(bc) = a.(e) = d.

Conclui-se, portanto que G é um grupo e como seus elementos são as permutações dos elementos de E, dizemos que G é um grupo das permutações sobre E ou grupo simétrico.

A Teoria de Galois associa a cada equação algébrica um grupo simétrico. As propriedades do grupo simétrico fornecem as condições necessárias e suficientes para que a equação possa ser resolvida por radicais. Galois, em cerca de 1831, descobriu que uma equação é resolúvel por radicais se, e somente se, o grupo simétrico sobre suas raízes é resolúvel. A descrição de um grupo resolúvel envolve relações entre o grupo e seus subgrupos. Como para equações de grau maior que quatro, há equações cujo grupo não é simétrico, ficou provada a impossibilidade da resolução geral de equações algébricas por meio de radicais. A ênfase do enfoque de Galois na teoria das equações se dirige mais à estrutura algébrica que ao tratamento de casos específicos. Suas idéias só foram elucidadas muitos anos mais tarde. Além de manter uma paixão pela matemática Galois dedicava-se aos assuntos da França e participava fortemente de movimentos políticos. Morreu em um duelo antes de completar 21 anos encerrando precocemente uma trajetória que mesmo curta o coloca entre os mais brilhantes matemáticos da história. O desenvolvimento da Teoria dos Grupos prosseguiu com Cauchy, Arthur Cayley (1821-1895), Leopold Kronecker (1823-1891) e Camille Jordan (1838-1922). Essa teoria, resultado dos estudos de Galois envolvendo equações algébricas, é um campo bastante abstrato e constitui-se em um dos mais importantes pilares das ciências modernas. (BAUMGART, 1992, p. 16; 17; 23; BOYER, 1998, p. 364-366; 379).

Uma síntese histórica

A origem das equações remonta ao período das civilizações egípcias e mesopotâmicas. Para os babilônios as equações não representavam apenas problemas da vida cotidiana; eles demonstravam interesse por cálculo e aceitavam valores aproximados; há indícios de resolução de equações cúbicas. Os conhecimentos matemáticos do Egito e da Mesopotâmia influenciaram os gregos que desenvolveram a "álgebra geométrica". Os gregos apresentavam métodos geométricos de resolução para equações quadráticas. Os sábios e filósofos gregos que refugiaram-se no Oriente estenderam os conhecimentos matemáticos aos árabes. Quanto às equações, os árabes dedicaram-se à resolução de equações quadráticas e cúbicas e empregavam métodos aritméticos para as primeiras e métodos geométricos para as últimas. Os conhecimentos sobre equações foram transmitidos do Oriente para a Europa. No início do século XIII resolviam-se até equações cúbicas. Até o final do século XV acreditava-se que as equações só podiam ser resolvidas geometricamente. Em meados do século XVI, na Itália, surgiram as soluções algébricas para as equações cúbicas e quárticas com Cardano-Tartaglia Ludovico Ferrari respectivamente. No entanto a preocupação principal continuava sendo em encontrar a incógnita em uma equação com coeficientes numéricos específicos. Viète deixou uma grande contribuição à teoria das equações e à álgebra quando adotou o uso de letras latinas para representar coeficientes (parâmetros) e incógnitas (quantidades desconhecidas). Outras grandes contribuições para a resolução de equações nos séculos XVII e início do século XVIII foram feitas por Descartes e Newton. Ambos empregavam métodos geométricos como apoio na resolução como era feito pelos antigos. No método algébrico de Newton para aproximação do valor de raízes é feita uma inspeção ou uma verificação de valores arbitrários e apropriados para se determinar o intervalo em que se encontra a raiz; e no método algébrico de cotas superiores e inferiores é feita a tentativa de se descobrir os extremos do intervalo também de forma arbitrária. Destacamos as contribuições de Euler à teoria das Equações Algébricas, com os conceitos apresentados sobre números complexos; à Girard e d'Alembert que perceberam a existência de ao menos uma raiz complexa para a equação polinomial $P(x) = 0$. E principalmente devemos a Gauss a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, teoria que permite o desenvolvimento de diversas tecnologias que justificam as técnicas empregadas no estudo de resoluções de Equações Algébricas no Ensino Médio. Abel na tentativa em vão de obter a solução da equação quíntica, abordou a questão da resolubilidade algébrica de uma equação polinomial geral. Galois o mesmo problema concluiu que não era possível a solução de uma equação algébrica ou polinomial geral de grau n por meio de radicais. Devido a seus estudos pode desenvolver importantes conceitos ensinados atualmente na disciplina de Álgebra em alguns cursos superiores, a Teoria dos Grupos.

Concluindo, sendo dada uma equação algébrica ou se conhecem as fórmulas (envolvendo radicais e coeficientes e isto é possível até as equações quárticas) ou o problema transforma-se em obter uma melhor aproximação possível para o valor da raiz por meio de métodos numéricos (métodos algébricos e não algébricos) como os de Newton.

A partir desse estudo histórico podemos observar o processo de Transposição Didática. Na transformação do saber sábio em saber a ser ensinado, o recorte feito na Teoria das Equações Algébricas elementariza o conhecimento científico e enfatiza as regras e algoritmos de resolução das Equações, assim como no passado as mesmas eram resolvidas somente para casos particulares. Dentro dessa transposição preocupamo-nos em estudar de que outras maneiras é possível trabalhar o saber Equações Algébricas no Ensino Médio.

Além disso, esse estudo histórico mostra claramente como a Matemática não é pronta e nem é imutável. A construção dos conceitos matemáticos pelo homem atende sua necessidade em buscar soluções para problemas relacionados às suas atividades e ao mundo que o cerca, ou para solucionar questões internas à própria ciência, como o desenvolvimento da teoria das Equações Algébricas que em última análise resultou na Teoria dos Grupos em Álgebra. E para finalizar, como afirmou Boyer (1998, p. 208). "Não é dado a um só homem fazer toda uma dada transformação; ela deve vir em passos sucessivos".

3.2 Equações Algébricas enquanto Saber a Ensinar na Academia

Vimos que a palavra álgebra está associada historicamente à resolução de equações. O desenvolvimento das idéias na Álgebra levou à Teoria dos Grupos, assunto atualmente estudado nos cursos de graduação de Matemática do Ensino Superior.

Domingues e Iezzi (1982, p. 129), na Teoria dos Grupos, inicialmente definem anel em relação à adição e à multiplicação, chamadas de leis de composição interna, como sendo um conjunto A, não vazio, em que valem as propriedades associativa e comutativa da adição, e a existência dos elementos neutro e simétrico para essa primeira lei. Para a multiplicação, valem as propriedades associativa e distributiva em relação à adição. A definição para polinômio é apresentada da seguinte forma por Domingues e Iezzi (1982, p. 177):

> Dado um anel A, uma seqüência $(a_0, a_1, a_2, ...)$ sobre A recebe o nome de *polinômio sobre A* se existe um índice $r \in N$ tal que $a_m = 0$ para todo $m > r$.

Essa definição assegura que uma seqüência (a_i) é um polinômio quando os termos posteriores a um certo a_r são todos nulos, nada impondo aos termos anteriores; em resumo, uma seqüência é um polinômio quando apresenta um número finito de termos não nulos. Desse modo são dados como exemplos de polinômios as seqüências

(4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, ..., 0,...), (0, 0, 0, ..., 0,...), ((1, 1), (1, 1), (0, 0), (0, 0), ..., (0, 0), ...);

a segunda é chamada de polinômio nulo; já as seqüências

(1, 1, 1, ..., 1, ...) e ((1, 0), (1, 0), ..., (1, 0), ...)

não são polinômios. Grau de um polinômio não nulo é o número natural n tal $a_n \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > n$. A multiplicação de polinômios é definida da seguinte maneira:

> Dadas duas seqüências $f = (a_i)$ e $g = (b_i)$ sobre um anel A, chama-se *produto* de f por g a seqüência $h = (c_k)$ tal que:
>
> $c_0 = a_0b_0$; $c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$; $c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$; ...
>
> $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + ... + a_kb_0$ isto é $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ para cada $k \in N$.
>
> (DOMINGUES e IEZZI, 1982, p. 176)

Ainda, sendo A um anel, esse é isomorfo ao subanel $L = \{(a, 0, 0,...0,...) \mid a \in A\}$. Isso implica em particular que 0 = (0, 0,...0,...) e 1 = (1, 0, 0,...,0,...). O polinômio X = (0, 1, 0, 0, ..., 0, ...) é denominado *indeterminada* sobre A. A partir do produto de polinômios temos $X^2 = X.X = (0, 0, 1, 0, 0, ..., 0, ...)$; $X^3 = X^2.X = (0, 0, 0, 1, 0, ..., 0,...)$ e assim por diante; o polinômio X^n é um polinômio em que os n primeiros termos são nulos, $a_n = 1$ e os termos seguintes a a_n também são nulos. Para finalizar, dado um polinômio $f = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, ...)$ temos que

$$f = (a_0, 0, 0,..., 0,...) + (0, a_1, 0, 0,...0,...) + (0, 0, a_2, 0,..., 0, ...) + ... + (0, 0,..., a_n, 0,..., 0,...)$$

$$f = a_0 + a_1(0, 1, 0,...,0,...) + a_2(0, 0, 1,...,0,...) + ... + a_n(0, 0,...,1, 0,...,0,...)$$

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n.$$

Queremos destacar que esta notação, chamada de notação polinomial ou notação usual, assemelha-se com a que encontramos nos livros didáticos de Ensino Médio quando o assunto é polinômios. Prosseguindo, sendo f um polinômio de um anel A, a raiz de $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$, é o elemento u, de um anel comutativo B do qual A é subanel unitário, tal que $f(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 +...+ a_nu^n = 0$ (zero de B). Domingues e Iezzi (1982) fazem a distinção entre polinômios e função polinomial. Sendo A um anel comutativo com unidade define-se a função polinomial $f_A : A \rightarrow A$, dada por $f_A (a) = f(a)$, $\forall\, a \in A$; significa que a função f_A associa a cada $a \in A$ o valor de f em a.

Nos cursos superiores de graduação, as equações algébricas são estudadas na disciplina de Cálculo Numérico onde se enfatizam os métodos numéricos de resolução.

Encontramos em Campos Filho (2001, p. 241; 242) os elementos básicos de um método numérico.

> O problema de calcular uma raiz pode ser dividido em duas fases:
> 1. Isolamento da raiz, isto é, encontrar um intervalo [a; b] que contenha uma, e somente uma, raiz de $f(x) = 0$ [representando a equação algébrica].
> 2. Refinamento da raiz, ou seja, a partir de um valor inicial $x_0 \in [a; b]$ gerar uma seqüência $\{x_0; x_1; x_2; ... x_k; ...\}$ que convirja para uma raiz exata ξ de $f(x) = 0$.

Para isolar a raiz, ou seja, localizá-la, utiliza-se o Teorema do Valor Intermediário ou Teorema de Bolzano: se os valores numéricos de um polinômio em *a* e em *b* têm sinais contrários, então haverá uma raiz entre *a* e *b*. Graficamente explica-se pelo fato de que a curva que representa uma função polinomial no sistema cartesiano só muda de semiplanos determinados pelo eixo Ox se cruzar este eixo. Sobre essas idéias não vemos em livros didáticos de ensino médio tentativas de se fazer conexão entre os conceitos a serem adquiridos em polinômios e os já aprendidos em funções polinomiais de 1.º e 2.º graus.

Isolada a raiz, existem alguns métodos e aqui citamos o método numérico da bisseção para resolução de Equações Algébricas porque também existe a proposta de que seja estudado no ensino médio como veremos adiante. Em Cálculo Numérico o método da bisseção é apresentado, por exemplo, em Cláudio e Marins (2000, p. 144).

> Seja [a; b] um intervalo que contenha uma raiz de f(x) = 0 [sendo f(x) um polinômio de grau n] e f(a).f(b) < 0, ou seja, f(x) corta o eixo x num ponto em [a; b].
> 1. Calcula-se f(x) no ponto médio de [a; b]
>
> $$x_m = \frac{a+b}{2}$$
>
> 2. Se $f(x_m) \neq 0$ e $f(a).f(x_m) < 0$ ou $f(x_m).f(b) < 0$, escolhe-se um novo intervalo de modo que *f* tenha sinais opostos na extremidade.
> 3. Repete-se o processo, voltando para 1 até que tenhamos chegado "suficientemente perto da raiz", ou seja, ter um critério de parada satisfeito.

No entanto, segundo esses autores, o método pode ter falhas apesar de teoricamente seguro. Se houver um erro de arredondamento, ainda que pequeno, quando um *software* computacional ou uma calculadora for avaliar o sinal do ponto médio pode haver um intervalo em que efetivamente não exista uma raiz. Outra restrição é a dificuldade de se encontrar [a; b] tal que f(a).f(b) < 0, dentre outros motivos, no caso de raízes de multiplicidade par ou muito próximas.

Assim temos que na academia estudam-se Equações Algébricas em Cálculo Numérico e elas são apresentadas a partir da definição de raízes de Polinômios. Estes são estudados na disciplina Álgebra como seqüências em um Anel. Ressaltamos no entanto que historicamente a teoria das Equações desenvolveu-se dissociada dos Polinômios enquanto estrutura algébrica.

3.3 Equações Algébricas enquanto Saber a Ensinar no Ensino Médio

As Equações Algébricas enquanto saber a ensinar são tratadas em três situações distintas sob a influência dos noosferianos, as instituições e sujeitos que constituem a noosfera definida por Chevallard. Primeiramente nas orientações curriculares e documentos oficiais que subsidiam o trabalho de organização de currículos conforme apresentamos em nosso estudo. Como mostraremos a seguir, os próximos dois grupos noosferianos são os educadores-matemáticos e pesquisadores que propõem outras maneiras de se ensinar o objeto Equações e os autores de livros didáticos participantes do processo de transposição didática e do ensino desse saber.

3.3.1 Proposições noosferianas para o ensino de Equações Algébricas

Na análise preliminar de documentos oficiais encontramos sugestões para a organização curricular nos PNCEM, nos PCN + , nas Orientações Curriculares do Ensino Médio, nas Orientações Curriculares da Secretaria de Educação do Estado do Paraná e na Proposta Curricular de Santa Catarina. Nesses documentos encontramos referências quanto à possibilidade de se estudar as Equações Algébricas no Ensino Médio.

Em 2004 foi lançada pela Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação a Coleção Explorando o Ensino. A coleção, destinada aos professores, refere-se à área de Ciências da Natureza e Matemática e é constituída de três volumes para cada disciplina. Com o objetivo de apoiar o trabalho docente, a coleção de Matemática apresenta vários artigos adaptados da Revista do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática com apoio da Universidade de São Paulo. No volume 3, considerando-se a possibilidade de se ter na organização do currículo da 3.ª série o estudo de Polinômios e Equações Algébricas há textos sobre esses saberes. Em "A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau" (BRASIL, 2004 b, p. 38-45) abordam-se os aspectos históricos sobre a resolução de equações cúbicas. Em "Uso de polinômios para surpreender" (BRASIL, 2004 b, p. 65-68) aborda-se a manipulação de expressões usando a aritmética dos polinômios. E no capítulo 6, "Problemas" temos "Resolver a equação $x^2 + \sqrt{x} - 18 = 0$". Duas formas de resolução são apresentadas, uma algébrica e outra gráfica. A resolução algébrica exige alguns artifícios e consiste em

$$x^2 + \sqrt{x} - 18 = 0$$

$$x^2 + \sqrt{x} - 16 - 2 = 0$$

$$x^2 - 16 = 2 - \sqrt{x}$$

$$(x - 4)(x + 4) = 2 - \sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(x + 4) = 2 - \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} - 2 = 2 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 4, \text{ ou}$$

$$(\sqrt{x} + 2)(x + 4) = \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} = -1.$$

Como $x \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 2)(x + 4) > 0$. Portanto, $(\sqrt{x} + 2)(x + 4) = -1$ não tem solução real.

Para a resolução gráfica é necessário reescrever a equação do seguinte modo

$$x^2 + \sqrt{x} - 18 = 0$$

$$x^2 - 18 = -\sqrt{x}$$

e em seguida esboçar em um mesmo sistema de eixos os gráficos das funções

$$y = x^2 - 18 \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{x}$$

e procurar os pontos de interseção conforme figura 4 a seguir[4].

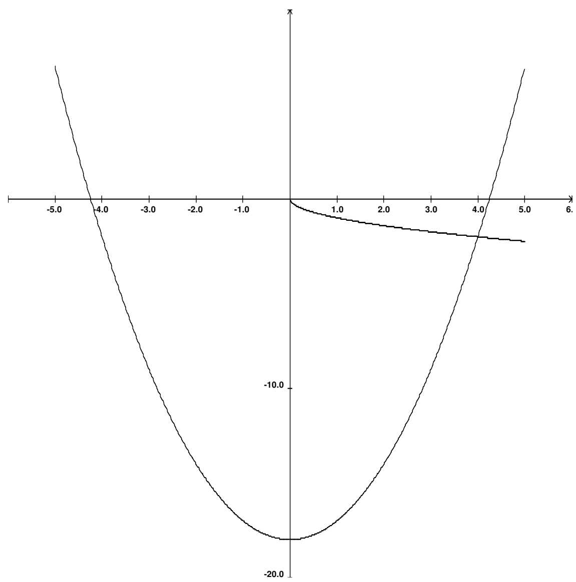


Fig. 4. Gráfico de funções

Mesmo a equação $x^2 + \sqrt{x} - 18 = 0$ não sendo uma equação algébrica, a sugestão da resolução gráfica vem de encontro com o propósito de nossa pesquisa.

Além da "Coleção Explorando o Ensino: Matemática", para professores em formação inicial ou continuada encontramos outras proposições noosferianas de educadores matemáticos e matemáticos pesquisadores sobre "o quê" e "como" ensinar Equações Algébricas.

[4] Gráfico construído com o auxílio do *software* Winplot

Atualmente nos livros didáticos para Ensino Médio, como mostraremos mais adiante, as Equações Algébricas são estudadas como uma igualdade entre um polinômio e zero. Caraça também apresentava esta proposta.

> Chama-se *polinómio inteiro* em *x* a toda a expressão analítica da forma
> 2) $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$
> onde $a_0, a_1, ..., a_n$ denominados *coeficientes* do polinómio, são números reais quaisquer, e *n*, chamado *grau* do polinómio, é um número inteiro e positivo. (...) O nome polinómio inteiro usa-se <u>indistintamente</u> para designar a expressão analítica 2) e a função definida pela igualdade
> 3) $y = P(x)$.
> A toda igualdade da forma
> 4) $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$,
> obtida igualando um polinómio inteiro a *zero*, chama-se uma *equação algébrica*; o grau do polinómio diz-se *grau* da equação. (...)
> A todo número *a* que, posto em lugar de *x*, transforma a equação numa identidade, isto é, tal que
> 6) $P(a) \equiv 0$
> chama-se *raiz* da equação 4) ou um *zero* do polinómio 2).
> (Caraça, 1970, p. 142-143, grifos do autor)

Determinar a(s) raiz(es) da equação algébrica constitui-se no problema fundamental sobre o assunto. Esse problema dividir-se-ia em dois, conforme esse autor:

1.º) A equação tem raízes? Quantas?

2.º) Se tem, como determiná-las?

Caraça não distingue polinômios de funções polinomiais da mesma forma que outros autores fazem atualmente, diferente do que é feito por Domingues e Iezzi (1982) quando tratam do saber acadêmico. Em outras duas obras destinadas a aprofundamento no Ensino Médio ou formação inicial de professores, ambas de Iezzi (1973; 1993) encontramos formas diferentes de apresentação dos conceitos relacionados a Polinômios e Equações Algébricas permitindo-nos um acompanhamento do processo de transposição didática.

Em "'Álgebra III", Iezzi e Dolce (1973, p. 52, grifos dos autores) sem se referirem aos conceitos relacionados à Teoria dos Anéis, definem Polinômios como seqüências quase-nulas, semelhante à forma como se estuda tal objeto como saber acadêmico.

> Uma seqüência f é *quase nula* se, e somente se, todos os termos que sucedem um certo termo $a_n \in$ f são nulos. Assim, a seqüência f = (a_i) é quase-nula se existe um número natural *n* tal que $a_i = 0$ para todo índice i > n.
>
> $f = (a_i)$ é quase-nula $\Leftrightarrow \exists\, n \in N \mid a_i = 0, \forall\, i > n$."

A seguir, em Iezzi e Dolce (1973, p. 58, grifos dos autores) definem-se igualdade, adição e multiplicação de seqüências e Polinômio de coeficientes reais.

> Chama-se conjunto dos polinômios de coeficientes reais, e representa-se por P, o conjunto das seqüências quase-nulas para as quais foram definidas a igualdade, a adição e a multiplicação. Assim, cada seqüência quase-nula passa doravante a ser chamada *polinômio de coeficientes reais*.

Da mesma maneira como foi feito em Domingues e Iezzi (1982), a partir do polinômio notável x = (0, 1, 0, 0, 0, ..., 0, ...), também denominado indeterminada x, e da operação multiplicação, de onde se obtém x^2 = (0, 0, 1, 0, ..., 0, ...), x^3 = (0, 0, 0, 1, 0, ..., 0, ...), etc, apresenta-se a notação usual dos polinômios

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_mx^m = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i .$$

Define-se também função polinomial.

> Dado um polinômio f na indeterminada X, isto é, f = $a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$, chama-se função polinomial associada ao polinômio f a aplicação de C em C definida por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Isto quer dizer que a cada seqüência quase-nula de números complexos f = (a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, 0, 0, 0, ...) estamos associando uma função $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ onde x pode assumir qualquer valor complexo. (IEZZI e DOLCE, 1973, p. 87, grifos dos autores)

No processo de transposição didática vemos este saber a ensinar apresentado nos atuais livros didáticos, como mostraremos a seguir, sem maiores detalhes sobre a diferença entre a definição de funções estudadas pelos alunos geralmente na 1.ª série do Ensino Médio e esta definição de função polinomial. Por isso, nessa obra que estudamos ressaltamos a observação feita pelos autores.

> Procuramos destacar que na definição o *X* do polinômio f = $a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + {}+a_nX^n$ e o *x* da função polinomial $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ não têm o mesmo significado. De fato, lembremos que *X* = (0, 1, 0, 0, 0, ..., 0, ...) é uma seqüência especial enquanto que *x* é uma variável complexa, isto é, é um símbolo que pode ser substituído por qualquer outro número complexo. Muitos autores consideram isso uma 'sutileza' sem importância e preferem confundir os conceitos de polinômios e funções polinomiais, inclusive em problemas de exames vestibulares. Com bom senso, entretanto, é fácil perceber a qual dos conceitos se referem.
> (IEZZI e DOLCE, 1973, p. 88, grifos dos autores)

Considerando-se duas funções polinomiais f(x) e g(x), as Equações Polinomiais ou Algébricas são definidas como uma igualdade entre elas: f(x) = g(x). A raiz é todo número r que, substituído em lugar de x, torna a sentença verdadeira: f(r) = g(r). Sendo possível transformar qualquer equação f(x) = g(x) em uma equação equivalente P(x) = f(x) – g(x) = 0, toda Equação Polinomial ou Algébrica é redutível à forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

que é a maneira como se define tal objeto do conhecimento matemático na atualidade. Os exercícios propostos pelos autores e os testes de vestibulares que constam em "Álgebra III" são semelhantes aos exercícios cujos exemplos apresentaremos adiante como tarefas dentro da Organização Matemática dos livros didáticos que estudamos.

Em outra coleção de Iezzi (1993, p. 54; 55, grifos dos autores), destinada também a aprofundamento pelos estudantes ou a formação inicial de professores, encontramos a definição de polinômio e raiz assim como em Caraça.

> Dada a seqüência de números complexos ($a_0; a_1; a_2; ...; a_n$), consideremos a função f:C→C dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. A função *f* é denominada *função polinomial* ou *polinômio* associado à seqüência dada. (...) Em particular, se *a* é um número complexo e *f* é um polinômio tal que $f(a) = 0$, dizemos que *a* é uma *raiz* ou um zero de *f*.

Dessa mesma forma encontramos nos atuais livros didáticos. Resumindo, no atual Ensino Médio as Equações Algébricas ou Polinomiais, enquanto saber matemático, são relacionadas com Polinômios e estes com Funções Polinomiais. As Equações são obtidas fazendo-se o polinômio P(x), de grau um ou maior, igual a zero e resolver uma equação algébrica consiste em determinar suas raízes. Embora exista essa estreita relação verificamos que, geralmente, o tema Funções Polinomiais é apresentado antes de Polinômios e sem conexões, por exemplo, de que a raiz de um polinômio, solução da respectiva equação algébrica, é o zero da função polinomial correspondente, o que possibilitaria ao aluno imaginar o uso de gráficos na resolução de atividades.

Sobre os métodos de resolução, em Brasil (2004 a) há a sugestão de se fazer conexão com o cálculo numérico aproximado. Matemáticos pesquisadores apresentam algumas proposições acerca do ensino de métodos numéricos no ensino médio.

Carneiro (1999, p. 33, grifos do autor), por exemplo, cita a "necessidade de motivar os temas da Matemática a partir de problemas interessantes e realistas" e alerta para o prejuízo em se deixar de apresentar questões que recaiam em equações algébricas de grau superior a dois. Propõe então quatro atividades e um método numérico, o método de Newton, para a resolução das equações que aparecem. Conforme vimos e aqui reapresentado por Carneiro, o procedimento básico e geral de um método numérico, resumidamente, consiste em:

(1) ter uma primeira idéia, ainda que vaga, de onde se encontram as raízes; é o que se chama de *localizar as raízes*;
(2) dentro do domínio onde se localizou uma raiz, escolher para ela um *valor inicial* x_0 (uma tentativa);
(3) conceber um *processo iterativo* (ou seja, repetitivo) que gere, a partir de x_0, uma seqüência de valores x_1, ..., x_n, ... que *convergem* à raiz procurada, isto é, aproximam-se tanto quanto se quiser dessa raiz.

Lima (1998) também apresenta métodos numéricos de resolução de equações. Um deles é o da bisseção. Partindo do Teorema de Bolzano, conhecido o intervalo [a; b], ao qual pertence a raiz, calcula-se *m*, o valor médio entre *a* e *b*, e a seguir compara-se o sinal do valor numérico nesse ponto com o sinal do valor em *a* e em *b* para se determinar o novo intervalo [a; m] ou [m; b]. O comprimento do intervalo teria se reduzido à metade. O processo pode ser repetido indefinidamente obtendo a aproximação desejada para o resultado. Nos outros métodos numéricos, o da secante e o de Newton, este apresentado por Carneiro, é necessário, como dissemos anteriormente, localizar as raízes, conhecer o intervalo [a; b] que contém uma raiz da equação algébrica.

Lima mostra o seguinte exemplo.

Vamos usar o método da bisseção para calcular a raiz cúbica de 10. A equação a ser resolvida é $p(x) = x^3 - 10 = 0$. Temos $p(2) = -2$ e $p(3) = 17$. Isto indica que a raiz desejada está (como na verdade já sabíamos) entre 2 e 3. O ponto médio do intervalo [2; 3] é m = 2,5. Como p(2,5) = 5,625, a raiz está no intervalo [2; 2,5] e assim sucessivamente. A tabela abaixo mostra o resultado obtido em 5 iterações do método.

a [p(a) < 0]	b [p(b) > 0]	m	p(m)
2	3	2,5	5,625 > 0
2	2,5	2,25	1,390 > 0
2	2,25	2,125	– 0,404 < 0
2,125	2,25	2,1875	0,467 > 0
2,125	2,1875	2,15625	0,025 > 0

Após 5 iterações obtemos a aproximação 2,15625 para a raiz cúbica de 10. Para efeito de comparação, a raiz cúbica de 10 com 5 casas decimais é 2,15443. Deste modo, após 5 iterações temos 2 casas decimais corretas." (LIMA, 1998, p. 240).

Lima (1998, p. 240; 241) mostra ainda outro método numérico de resolução de Equações, o método da secante.

> Para obter uma melhor estimativa para a raiz contida no intervalo [a; b], podemos aproximar o gráfico da função polinomial em [a; b] através do segmento de extremos (a; p(a)) e (b; p(b)) (este segmento determina uma secante à curva que representa o gráfico de p; daí a razão do nome do método). A reta que passa por (a; p(a)) e (b; p(b)) tem equação
>
> $$y = p(a) + \frac{p(b) - p(a)}{b - a}.(x - a)$$
>
> A abscissa x_1 de seu ponto de interseção com o eixo dos x fornece nossa primeira aproximação para a raiz procurada.

Para se obter o valor de x_1 pertencente ao eixo Ox, a partir da equação anterior, iguala-se y a zero.

$$0 = p(a) + \frac{p(b) - p(a)}{b - a}.(x_1 - a)$$

$$\frac{p(b) - p(a)}{b - a}.(x_1 - a) = -p(a)$$

$$x_1 = a + \frac{-p(a)(b - a)}{p(b) - p(a)}$$

$$x_1 = \frac{ap(b) - bp(a)}{p(b) - p(a)}$$

A figura 5 a seguir[5] mostra a aplicação do método da secante.

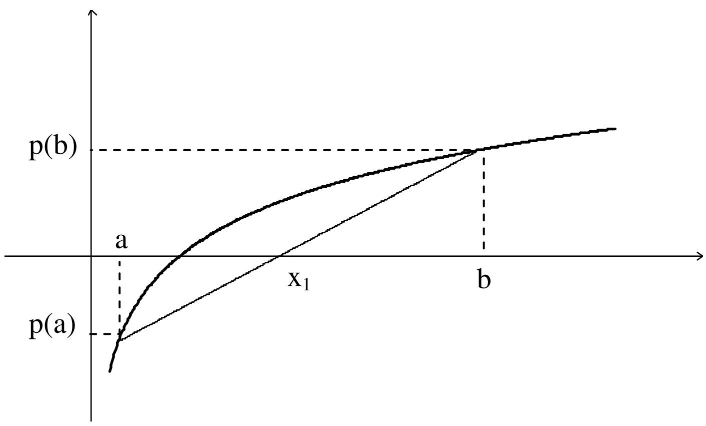


Fig. 5. Gráfico de funções

Convém representar os extremos do intervalo a e b por x_0 e x_1 respectivamente. Recursivamente obtemos a seqüência de aproximações do valor da raiz.

---

[5] Gráfico construído com o auxílio do *software* Winplot.

$$x_2 = \frac{x_0 p(x_1) - x_1 p(x_0)}{p(x_1) - p(x_0)} \;;\; x_3 = \frac{x_1 p(x_2) - x_2 p(x_1)}{p(x_2) - p(x_1)} \;; ...$$

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} p(x_i) - x_i p(x_{i-1})}{p(x_i) - p(x_{i-1})} \text{, para } i = 1, 2, ...$$

O Método de Newton (também conhecido por Newton-Raphson) mencionado por Lima é o terceiro e último método de resolução numérica de uma equação algébrica. As aproximações lineares para o gráfico de uma função polinomial p(x) são obtidas por tangentes ao invés de secantes. Para a raiz procurada considera-se uma primeira aproximação x_0 como um dos extremos do intervalo que contém a raiz. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de p(x) no ponto (x_0; p(x_0)) é o valor da derivada de p(x) em x_0. Assim, a equação da tangente é

$$y = p(_0) + p'(x_0)(x - x_0).$$

Novamente, para se obter outra aproximaçãox_1 da raiz de p(x) se faz y = 0 e assim

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)}.$$

Recursivamente chega-se à função de iteração que fornecerá aproximações cada vez melhores da raiz procurada,

$$x_i = x_{i-1} - \frac{p(x_{i-1})}{p'(x_{i-1})} \text{, para } i = 1, 2, ...$$

O que nos surpreende nesses métodos numéricos é o "mistério e o bom senso" envolvendo a localização de uma raiz. Por exemplo, para equações que representem situações relacionadas a medidas de comprimentos, de áreas ou volumes, não se adotam números negativos e, nesse caso, "pelo bom senso" só seriam admitidos valores positivos para candidatos a raízes. Lima (1998, p. 244, grifo nosso) adverte para uma restrição dos métodos.

> Apesar de seu desempenho, é bom frisar que o método de Newton, assim como o método da secante, é um método local: <u>exige que o ponto de partida esteja próximo da raiz procurada</u>. Se isso não ocorre, pode convergir para uma outra raiz não desejada ou simplesmente não convergir.

Em geral, desconhecendo-se completamente a raiz, não é uma tarefa fácil localizá-la e isso pode ser feito, como sugere alguns autores, com o apoio de uma calculadora gráfica ou um *software* gráfico.

Utilizando um *software* para o esboço do gráfico do polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_0 ,$$

admitindo-o como uma função polinomial, torna-se possível a determinação do intervalo]a; b[, condição para o isolamento da raiz, uma das etapas para a resolução numérica de uma Equação Algébrica.

Assim, enquanto saber a ensinar, segundo proposições noosferianas identificamos algumas orientações.

a) Os polinômios são identificados com funções e não há referência à Teoria dos Grupos. As Equações Algébricas são igualdades de um polinômio com zero. Neste caso poder-se-ia enfatizar que resolver uma equação corresponde a obter os zeros ou raízes da função.

b) Devem ser valorizados os processos de aproximação na resolução de equações.

c) Há propostas e possibilidade de se trabalhar métodos numéricos de resolução no Ensino Médio: bisseção e secante (o de Newton exige conhecimento de cálculo diferencial).

Vejamos agora o que é proposto nos livros didáticos.

3.3.2 Estudo de Livros Didáticos

Além dos documentos oficiais (LDBEN 9394/96, os PCNEM, os PCN + , as Orientações Curriculares) e das proposições de matemáticos noosferianos recorremos a outro documento para conhecer a extensão da proposta de reforma do Ensino Médio. Desde 1985 o Ministério da Educação - MEC, distribui livros didáticos aos alunos matriculados no ensino fundamental da rede pública e, visando garantir a qualidade do ensino, a partir de 1993 passou a analisar as obras distribuídas. Entusiasmado com a experiência no ensino fundamental, o MEC decidiu ampliar a análise e a distribuição de livros. Com esse propósito surgiu o Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2005: Matemática (Brasil, 2004 a). Para os livros didáticos de Matemática, o Programa estabelece a distribuição de uma coleção composta de três volumes, cada um dedicado ao conteúdo de ano, a alunos da rede pública de ensino das regiões Norte e Nordeste, para ser usada de 2005 a 2007. Após análise por especialistas, foram aprovadas 11 coleções para escolha pelos professores. Sobre o aspecto metodológico das obras analisadas, a respeito de equações algébricas, os analistas apontam que

> Os processos de aproximação na resolução de equações assumem maior importância nas aplicações do que as fórmulas, e podem ser tratados de forma acessível ao aluno do ensino médio. Mais amplamente o tema da aproximação pode ser estudado em conexão com o cálculo numérico aproximado. Em especial, podem ser tratadas as soluções de equações algébricas de graus mais elevados ou mesmo de equações não-algébricas e, por fim, a determinação da área ou do volume aproximado de figuras geométricas, entre outros casos. (BRASIL, 2004 a, p. 73, grifo nosso).

No estudo dos livros didáticos, usando os conceitos de Praxeologia ou Organização Matemática, analisamos como vive tal objeto na instituição livro didático e no plano de aula de professores.

Estudamos o livro "Matemática: ciência e aplicações, volume 3" de Gelson Iezzi et alli por termos considerado o objeto Equações enquanto saber científico em um livro do mesmo autor e porque a coleção foi indicada no PNLEM/2005. Outra obra indicada no Programa que também utilizamos em nosso estudo é "Matemática – volume 3 – ensino médio" de Smole e Diniz (2003). Dante (2003) teve sua obra indicada no Programa e estudamos "Matemática: contexto e aplicações, volume 3" porque é o livro adotado pelos alunos que participaram da experimentação.

Estudo do livro "Matemática: ciência e aplicações, volume 3" (Iezzi et alli, 2001)

O objeto Equações Polinomiais ou Algébricas é apresentado no capítulo 8 (p. 276-309) dando continuidade a outro tema, Polinômios. Neste estudo explicitamos elementos teóricos, ou seja, conforme Chevallard, elementos da tecnologia que vão justificar as técnicas de resolução dos exercícios.

A definição de Equação Algébrica é a seguinte:

> *Equação polinomial* ou *algébrica* é toda equação redutível à forma $p(x) = 0$, em que $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ é um polinômio de grau n, $n \geq 1$, com coeficientes em C e a variável x assume um valor qualquer em C.
> (IEZZI et al., 2001, p. 277, grifos dos autores).

Esta mesma definição também foi dada por Caraça (1970). Iezzi et al. (2001, p. 277, grifos dos autores) apresentam o conceito de raiz:

> Um número complexo *r* é *raiz* da equação polinomial $p(x) = 0$, em que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, quando, substituindo *x* por *r* na equação e efetuando os cálculos, obtemos $p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$. Em outras palavras, *r* é raiz de uma equação $p(x) = 0$ se for raiz do *polinômio p(x)*.

O Teorema Fundamental da Álgebra, conforme vimos enunciado por D'Alembert e demonstrado por Gauss, também é citado sem demonstração:

> Todo polinômio de grau *n*, $n \geq 1$, admite ao menos uma raiz complexa.

Esse importante teorema na Teoria das Equações Algébricas permite a demonstração do Teorema da Decomposição.

> Seja $p(x)$ um polinômio de grau *n*, $n \geq 1$, dado por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$). Então, $p(x)$ pode ser decomposto em *n* fatores do 1.º grau sob a forma $p(x) = a_n.(x - r_1).(x - r_2) \ldots (x - r_n)$, em que $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são as raízes de $p(x)$ e a_n é o coeficiente dominante de $p(x)$. (IEZZI et al., p. 278, grifos dos autores).

A conseqüência imediata do Teorema da Decomposição é que

> Toda equação polinomial de grau *n*, $n \geq 1$, admite exatamente *n* raízes complexas. (idem, p.279, grifos dos autores)

Outras conseqüências importantes são observadas:

a) $p(x)$ é divisível por, individualmente, cada um de seus fatores;

b) para a divisão de $p(x)$ pelo fator $(x - a)$ é possível aplicar o dispositivo prático de Briot-Ruffini, estudado no capítulo 7 de Polinômios (p. 246-275) desse livro considerado.

A partir da definição de raiz de uma equação algébrica e de propriedades dos números complexos, encontramos em Iezzi et alli a demonstração para o Teorema das Raízes Complexas:

> Se um número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação com *coeficientes reais*, então $\bar{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação. (idem, p. 288, grifo dos autores).

Como conseqüência esse teorema traz a propriedade de que as raízes complexas não reais sempre ocorrem aos pares e portanto, uma equação de coeficientes reais e grau ímpar apresenta ao menos uma raiz real.

Considerando-se novamente a definição de raiz demonstra-se o Teorema das Raízes Racionais.

> Seja a equação polinomial de coeficientes *inteiros* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$. Se o racional $\frac{p}{q}$, $p \in Z$ e $q \in Z^*$ (*p* e *q* primos entre si) é raiz dessa equação, então *p* é divisor de a_0 e *q* é divisor de a_n. (idem, p. 298).

O teorema não garante a existência de raízes racionais de uma equação de coeficientes inteiros. No caso de existirem tais raízes o teorema mostra quais são os racionais possíveis.

Há também nesse livro estudado outros conceitos: multiplicidade de uma raiz e relações de Girard.

> (...) dizemos que *r* é uma raiz de *multiplicidade m* ($m \geq 1$) da equação $p(x) = 0$ se $p(x) = (x - r)^m.q(x)$; com $q(r) \neq 0$. (IEZZI et al., 2001, p. 283, grifo dos autores)

As relações conhecidas por Relações de Girard, citadas em nosso estudo histórico, são apresentadas da seguinte maneira em Iezzi et alli (2001, p. 292)

> Seja a equação $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$ e r_1, r_2, ..., r_n suas raízes (...) vem:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + ... + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \text{ (soma das n raízes)} \\ r_1.r_2 + r_1.r_3 + ... + r_n.r_{n-1} = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \text{ (soma dos produtos das raízes tomadas 2 a 2)} \\ r_1.r_2.r_3 + r_1.r_2.r_4 + ... + r_{n-2}.r_{n-1}.r_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \text{ (soma dos produtos das raízes tomadas 3 a 3)} \\ ... \\ r_1.r_2.....r_n = (-1)^n.\dfrac{a_0}{a_n} \text{ (produto das n raízes)} \end{cases}$$

Com esses conceitos, definições e corolários temos o que Chevallard identifica como bloco teórico-tecnológico $[\Theta,\theta]$ que se constitui de tecnologia representada por θ (elementos da teoria, resultados teóricos) e de teoria, neste caso a Teoria das Equações Algébricas, representada por Θ.

Com o objetivo de conhecer a organização matemática referente ao objeto Equações Algébricas no livro "Matemática: ciência e aplicações, v. 3" de Gelson Iezzi et alli, fizemos o estudo dos exercícios e resumimos as Tarefas, Técnicas e Tecnologia no quadro a seguir. Apresentamos os tipos de tarefas propostas, a técnica de resolução correspondente à tarefa bem como a tecnologia que justifica a técnica segundo a proposição do livro didático em questão.

Estudo dos exercícios

Identificamos algumas tarefas e técnicas justificadas pela tecnologia correspondente conforme apresentamos a seguir.

No livro há um total de vinte exercícios resolvidos e oitenta e sete exercícios propostos aos alunos, além de uma seção com quarenta e dois testes de vestibulares e desafios. Identificamos sete grupos de tarefas que denominaremos de T_1 até T_7 e apresentamos a seguir um exercício do livro para ilustrar cada tarefa, e a nossa resolução onde destacamos as técnicas e tecnologias envolvidas.

Tarefa T_1 : Fatorar um polinômio ou escrever uma equação conhecendo-se as raízes.

Exercício 5, p. 282: "Escreva uma equação do 4.º grau cujas raízes são 0, 2, – 3i e 3i".

Pelo Teorema da Decomposição podemos escrever

$$a_n.(x - 0)(x - 2)(x + 3i)(x - 3i) = 0,$$

onde a_n é um número complexo não nulo. Se arbitrariamente escolhermos $a_n = 1$ e se aplicarmos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição temos a equação

$$x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 18x = 0.$$

Tarefa T_2 : Resolver uma equação conhecendo-se uma ou mais raízes.

Exercício 10, p. 282: "Resolva, em C, a equação $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são 1 e – 2."

Conhecendo-se as duas raízes, pelo Teorema da Decomposição, o polinômio correspondente à equação é divisível por (x – 1)(x + 2) ou seja, por $x^2 + x - 2$. Efetuando a divisão pelo método da chave temos

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 - 6x + 8 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2}
-\ (x^3 + x^2 - 2x) & x - 4 \\ \hline
-4x^2 - 4x + 8 & \\
-\ (-4x^2 - 4x + 8) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Assim,

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x^2 + x - 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = 4.$$

Tarefa T_3: Escrever ou resolver uma equação conhecendo-se uma raiz de multiplicidade maior que um.

Exercício 28, p. 286: "Sabendo que a equação $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0$ apresenta – *i* e *i* como raízes duplas, determine seu conjunto solução."

Pelo Teorema da Decomposição temos que $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3$ é divisível por $(x+i)^2.(x-i)^2$, isto é,

$$(x+i)^2.(x-i)^2 = [(x+i).(x-i)]^2 = [(x^2 - i^2)]^2 = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1.$$

Fazendo a divisão pelo método da chave e decompondo temos

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3 = (x^4 + 2x^2 + 1).(x - 3) = 0 \therefore S = \{3; \pm i\}.$$

Tarefa T_4 : Resolver uma equação de coeficientes reais conhecendo-se alguma raiz não real (complexo imaginário).

Exercício 43, p. 290: “(Vunesp-SP) Sabe-se que a unidade imaginária *i* é raiz do polinômio real $p(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + 2$. Nessas condições:

a) Determine o valor de a.

b) Encontre o conjunto solução da equação p(x) = 0."

Sendo *i* raiz do polinômio, deve verificar a igualdade p(i) = 0.

$$i^4 - 3i^3 + 3i^2 + a.i + 2 = 0 \;\Rightarrow\; a = -3 \in \mathrm{IR}$$

Como corolário do Teorema das Raízes Complexas, se a equação de coeficientes reais tiver raízes complexas imaginárias, elas existirão aos pares. Ou seja, – *i*, o conjugado de i, também é raiz. O polinômio p(x) é divisível por (x + i).(x – i), isto é, por $x^2 + 1$. Efetuando a divisão pelo método da chave temos:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-\ (x^4 \qquad + x^2) & x^2 - 3x + 2 \\ \hline
-3x^3 + 2x^2 - 3x + 2 & \\
-\ (-3x^3 \qquad - 3x) & \\ \hline
+2x^2 \qquad + 2 & \\
-\ (2x^2 \qquad + 2) & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

O quociente é um dos fatores de p(x) e, portanto, suas raízes 1 e 2 também são raízes do polinômio. O conjunto solução da equação p(x) = 0 é S = { ± i; 1; 2}

Tarefa T_5: Resolver uma equação conhecendo-se alguma relação entre as raízes, cuja técnica de resolução são as Relações de Girard entre coeficientes e raízes.

Exercício 61, p. 297: "Resolva a equação $x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 4x - 12 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são *i* e *2i*."

Pelo Teorema das Raízes Complexas, os números – i e – 2i são também raízes da equação de coeficientes reais. Sendo *r* a raiz que falta ser determinada, pela primeira das Relações de Girard temos que

$$i + (-i) + 2i + (-2i) + r = -\frac{-3}{1} = 3 \;\Rightarrow\; r = 3.$$

Ainda relacionado à tarefa T_5, selecionamos o exercício 74, um teste de vestibular, p. 298, devido ao fato de trabalhar com a representação gráfica da função polinomial (fig. 5).

"(Vunesp-SP) O gráfico da figura[6] representa o polinômio real $f(x) = -2x^3+ax^2+bx+c$. Se o produto das raízes de $f(x) = 0$ é igual à soma dessas raízes, qual o valor de $a + b + c$?"

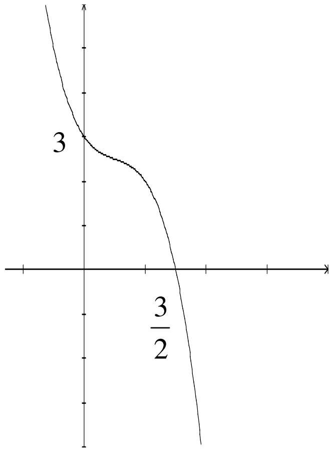


Fig. 6. Gráfico de função polinomial

Da análise do gráfico observamos que $f(0) = 3$, o que implica em $c = 3$. Se o produto e a soma das raízes são iguais, então

$$-\frac{c}{-2} = -\frac{a}{-2} \quad \Rightarrow \quad a = c = 3.$$

O polinômio reescreve-se como

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + bx + 3.$$

Como o gráfico mostra que $\frac{3}{2}$ é raiz da função polinomial f(x), então,

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + b\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -2.$$

Portanto, $a + b + c = 3 + (-2) + 3 = 4$.

Tarefa T_6 : Resolver uma equação de coeficientes inteiros desconhecendo qualquer raiz.

Exercício 78, p. 302: "Resolva a equação $3x^3 + 5x^2 + 4x - 2 = 0$."

---

[6] Gráfico construído com o auxílio do *software* Winplot.

A tecnologia do Teorema das Raízes Racionais garante que as possíveis racionais da equação de coeficientes inteiros são do tipo $\frac{p}{q}$, onde p é divisor de – 2 e q é divisor de 3:

$$p \in \{\pm 1; \pm 2\};\ \ q \in \{\pm 1; \pm 3\};\ \ \frac{p}{q} \in \left\{\pm 1; \pm 2; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{2}{3}\right\}.$$

Fazendo a verificação no polinômio P(x) correspondente à equação obtemos $P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$. Determinamos uma raiz e P(x) e efetuando a divisão pelo dispositivo de Briot-Ruffini temos que:

$\frac{1}{3}$	3	5	4	-2
$\times$	3	6	6	0

Assim,

$$3x^3 + 5x^2 + 4x - 2 = \left(x - \frac{1}{3}\right).(3x^2 + 6x + 6) = 3.\left(x - \frac{1}{3}\right).(x^2 + 2x + 2).$$

Resta encontrar as raízes de $x^2 + 2x + 2 = 0$. Pela fórmula resolutiva conhecida por fórmula de Bháskara obtemos

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i \quad \Rightarrow \quad S = \left\{\frac{1}{3}; -1 \pm i\right\}.$$

Tarefa T_7 : Mostrar que uma equação de coeficientes inteiros não admite raízes racionais.

Aproximando-se do objetivo da nossa pesquisa, ressaltamos o exercício 80, p. 302: "Mostre que a equação $2x^3 - x + 3 = 0$ não admite raízes racionais".

Verificamos quais são as possíveis raízes racionais $\frac{p}{q}$.

$$p \in \{\pm 1; \pm 3\};\ q \in \{\pm 1; \pm 2\};\ \frac{p}{q} \in \left\{\pm 1; \pm 3; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}\right\}.$$

Nenhum dos valores racionais $\frac{p}{q}$ verificados é raiz da equação, portanto não há racionais. Como a equação tem grau ímpar e um número ímpar de raízes, o corolário do Teorema das Raízes Complexas garante que existe uma raiz real. A conclusão imediata é que se a raiz não é um número racional só pode ser um número irracional.

Analogamente selecionamos o exercício 81, p. 302:

"Mostre que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ não admite raízes inteiras."

As possíveis raízes racionais são os inteiros $\frac{p}{q} \in \{\pm 1; \pm 2\}$. De acordo com a definição de raiz, fazendo a verificação observamos que nenhum desses valores torna a igualdade verdadeira. Novamente, como a equação de coeficientes inteiros tem grau e número ímpar de raízes e não há raízes racionais, inteiras nesse caso, há certamente uma raiz que é um número irracional. Percebemos claramente que não se pergunta se há uma raiz real e a qual conjunto numérico pertenceria; pergunta-se apenas se existe ou não raiz racional. Consideramos que isso ocorre porque as técnicas apresentadas restringem os métodos de resolução. Não se enfatiza a representação gráfica associada à função polinomial correspondente ao polinômio e à equação algébrica como ocorreu no exercício 74 citado anteriormente.

Sintetizamos os sete grupos de tarefas, as correspondentes técnicas de resolução e a tecnologia que justifica a técnica no quadro seguinte.

Tarefas T	Técnicas τ	Tecnologia
T_1: Fatorar um polinômio ou escrever uma equação conhecendo-se as raízes	Decomposição do polinômio em fatores contendo as raízes	Teorema da Decomposição
T_2: Resolver uma equação conhecendo-se uma ou mais raízes	Decomposição em fatores contendo as raízes; divisão pelo(s) fator(es)[1]; resolução de equações por métodos já estudados[2]	Teorema da Decomposição; Divisão de polinômios
T_3: Escrever ou resolver uma equação conhecendo-se uma raiz de multiplicidade maior que um	Decomposição e/ou divisão pelos fatores contendo raízes iguais	Multiplicidade de uma raiz; Teorema da decomposição
T_4: Resolver uma equação de coeficientes reais conhecendo-se alguma raiz não real (complexo imaginário)	Aplicação do teorema das raízes complexas; decomposição do polinômio; divisão pelo método da chave[3]	Teorema das raízes complexas; Teorema da decomposição
T_5: Resolver uma equação conhecendo ou aplicando alguma relação entre as raízes e coeficientes	Aplicação das relações de Girard; aplicação do teorema das raízes complexas	Relações de Girard; teorema das raízes complexas
T_6: Resolver uma equação de coeficientes inteiros desconhecendo qualquer raiz	Pesquisa das possíveis raízes racionais; verificação em $p(x) = 0$; divisão pelo fator $x - r$ sendo r uma raiz racional; fatoração do polinômio; resolução da equação de grau menor	Teorema das raízes racionais; divisão de polinômios; teorema da decomposição
T_7: Mostrar que uma equação de coeficientes inteiros não admite raízes racionais[4]	Pesquisa das possíveis raízes racionais; verificação em $p(x) = 0$	Teorema das raízes racionais; definição de raiz; teorema das raízes complexas

Tabela 1. Tarefas, técnicas e tecnologia

Do quadro-resumo ressaltamos que: (1) Quando a divisão for por um binômio do 1.º grau, é possível aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini estudado na divisão de Polinômios; (2) Para a resolução de equações de 1.º e 2.º grau (incluindo equações biquadradas e irracionais) os métodos são estudados, respectivamente, na 6.ª e 8.ª série do Ensino Fundamental; (3) A divisão pelo método da chave também é estudada em Polinômios; (4) Se uma equação de coeficientes inteiros não possui raiz racional e for de grau ímpar, da conseqüência do teorema das raízes complexas, pode-se afirmar que pelo menos uma raiz é irracional; se o grau for par, nada se pode afirmar sobre as raízes: se são irracionais ou se são números complexos imaginários.

Caracterizando a Organização Matemática dos outros livros didáticos estudados, apresentamos os resultados a seguir.

Estudo do livro didático "Matemática – volume 3 – ensino médio" (Smole e Diniz, 2003)

Na obra "Matemática – volume 3 – ensino médio" de Smole e Diniz (2003), o objeto Equações Polinomiais (ou Algébricas) é apresentado como saber a ensinar na Unidade 10, p. 255-276. As definições e teoremas (tecnologias) são apresentados em uma seqüência semelhante à da outra obra que estudamos: definição de Equação Polinomial e raiz; teorema fundamental da Álgebra e teorema da decomposição; multiplicidade de uma raiz; relações de Girard; raízes imaginárias (teorema das raízes complexas); pesquisa de raízes racionais. Observamos que além da apresentação dos conceitos teóricos há similaridade com a obra de Iezzi et alii quanto aos exercícios. Há treze resolvidos pelas autoras e quarenta e seis exercícios propostos aos alunos.

Identificamos o mesmo conjunto de sete tarefas apresentadas na outra obra analisada e uma nova tarefa que denominaremos T_8.

Tarefa T_8 : Verificar se certos valores são raízes.

Exemplificamos com o exercício 1, p. 257. "Quais dos seguintes números: 0, – 1, 1, $\frac{1}{2}$, 2, – i, i, 2i, são soluções da equação $2x^3 - (1+2i)x^2 + (4 + i)x - 2 = 0$?"

A técnica de resolução consiste em aplicar a definição de raiz, ou seja, substituir os valores no polinômio correspondente à equação para verificar a igualdade $P(x) = 0$.

Dentre os exercícios apresentados como tarefas, devido a relação com o objetivo de nossa pesquisa, mostramos a resolução do exercício 40, p. 272, referente à tarefa T_7: "Mostre que a equação $x^n + 2ax + 2 = 0$, com $a \in Z$ e $n \in N$, $n \geq 2$, não admite raízes inteiras".

De acordo com a tecnologia do Teorema das Raízes Racionais, as possíveis raízes racionais $\frac{p}{q}$ são os inteiros {± 1; ± 2}. Nas condições dadas, pela definição de raízes, temos:

$$1^n + 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \notin Z;$$

$$(-1)^n - 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{(-1)^n + 2}{2} \notin Z;$$

$$2^n + 4a + 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{2^n + 2}{4} \notin Z;$$

$$(-2)^n - 4a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{(-2)^n + 2}{4} \notin Z.$$

O exercício pede para mostrar a inexistência de raízes racionais inteiras e não exige outras considerações. Por exemplo, no caso particular de n ser ímpar ($n \geq 2$), a equação não admitirá uma raiz inteira mas admitirá uma raiz irracional pois o grau será ímpar (tecnologia do teorema das raízes complexas e corolário). Observamos isso como uma restrição imposta pelos métodos propostos no livro didático.

Assim como fizemos no estudo do livro didático anterior elaboramos um quadro-resumo com tarefas, técnicas e um exemplo de tarefa, conforme o anexo 1.

Outra obra que consideramos foi de Dante (2003) cujos resultados apresentamos a seguir.

Estudo do livro didático "Matemática: contexto e aplicações, volume 3" (Dante, 2003)

Escolhemos a coleção que é adotada na escola onde aplicamos nossa Seqüência Didática e cujo autor foi indicado pelo PNLEM/2005. Trata-se do livro didático "Matemática: contexto e aplicações, volume 3" de Dante (2003). As Equações Algébricas são apresentadas como as seções 8 e 9 (p. 171-193) do capítulo 5. A definição de Equação Polinomial ou Algébrica e raiz não difere dos outros autores que estudamos.

> Denomina-se *equação polinomial* ou *algébrica* toda equação que pode ser escrita na forma:
>
> $$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \text{ (com } a_n \neq 0)$$
>
> em que os a_i (a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0) são elementos do conjunto dos números complexos, $n \in N^*$ e **n** é o grau da equação. (DANTE, 2003, p. 171)

A raiz α ou zero da equação é o valor que substituído em lugar de x satisfaz a igualdade. Dante refere-se aos Polinômios ao afirmar que determinar as raízes de uma equação corresponde a resolver equações da forma p(x) = 0, em que p(x) é um polinômio. Como em Iezzi et alii e em Smole e Diniz, a seqüência de apresentação dos saberes a ensinar (tecnologias) referente ao objeto Equações é similar: Teorema Fundamental da Álgebra e Teorema da Decomposição; Multiplicidade da raiz; Relações de Girard; Pesquisa de Raízes Racionais; Teorema das Raízes Complexas; e métodos numéricos para resoluções de equações.

Em métodos numéricos, Dante (2003, p. 187) apresenta o Teorema de Bolzano.

> Se, para α e β números reais, tivermos $p(\alpha)$ e $p(\beta)$ com sinais contrários, isto é, $p(\alpha).p(\beta)< 0$, então existe uma raiz real no intervalo $]\alpha; \beta[$. (...) Podemos melhorar a qualidade da estimativa, calculando p(m) tal que m seja o ponto médio do intervalo $]\alpha; \beta[$. Assim, $p(m) = 0$ ou $p(m) \neq 0$, de tal forma que $p(m).p(\alpha) < 0$ ou $p(m).p(\beta) < 0$. Então, podemos gradativamente reduzir o intervalo até obter a precisão desejada.

Dentre os três livros didáticos estudados, somente este apresenta uma proposta de ensino de um método numérico de resolução de equações algébricas, embora de um total de vinte e um exercícios resolvidos e sessenta e um exercícios propostos na seção haja apenas dois resolvidos e um proposto com esse método numérico, mesmo o autor afirmando que na prática, nem as equações de 3.º e 4.º graus são resolvidas por métodos algébricos, ou seja, por fórmulas e que o comum é utilizar métodos numéricos.

Observamos que as tarefas e técnicas utilizadas para a resolução dos exercícios são semelhantes às dos outros dois livros didáticos estudados. Os exercícios podem ser agrupados no mesmo conjunto de oito tarefas da obra de Smole e Diniz. Não aparecem as tarefas T_1 (fatorar um polinômio ou escrever uma equação conhecendo-se as raízes) e T_7 (mostrar que uma equação de coeficientes inteiros não admite raízes racionais). O anexo 2 consiste no quadro-resumo com as tarefas e técnicas encontradas no livro. Identificamos uma nona tarefa que denominaremos T_9.

Tarefa T_9 : Resolver uma equação pelo método numérico da bisseção.

Para exemplificar a tarefa T_9 resolvemos o exercício 121, item b, p. 188: "Descubra uma raiz real pelo método da bisseção, usando uma calculadora ou planilha eletrônica: $x^5 - x^3 + 16 = 0$."

Inicialmente notemos que não foi dado o intervalo de localização da raiz. Sendo $p(x) = x^5 - x^3 + 16 = 0$ uma equação de coeficientes inteiros e grau ímpar isso significa que há pelo menos uma raiz real. As possíveis raízes racionais são $\frac{p}{q} \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16\}$. A trabalhosa substituição dos valores mostraria que nenhum deles é raiz. Portanto a equação admite uma raiz irracional que pode ser determinada pelo método proposto da bisseção.

Consideremos alguns valores inteiros como possíveis extremos do intervalo onde se encontra a raiz.

$p(1) = p(0) = p(-1) = 16 > 0$

$p(-2) = -8 < 0$

Há uma raiz no intervalo $]-2; -1[$. O ponto médio do intervalo é $-1,5$.

$p(-1,5) \cong 11,78 > 0$

Logo, há uma raiz no intervalo $]-2; -1,5[$ e o ponto médio é $-1,75$.

$p(-1,75) \cong 4,94 > 0$

Entre -2 e $-1,75$ existe uma raiz; o ponto médio do intervalo é $-1,875$.

$p(-1,875) \cong -0,58 < 0$

Como $p(-1,875) < 0$ e $p(-1,75) > 0$, há uma raiz no intervalo $]-1,875; -1,75[$ e o ponto médio é $-1,8125$. Repetindo-se esse processo mais algumas vezes chegaremos ao valor aproximado de $-1,863$.

$p(-1,863) \cong 0,02$

Em primeiro lugar notemos as tentativas aleatórias de se obter os extremos do intervalo onde se localiza a raiz substituindo-se valores no polinômio correspondente para se comparar os sinais e aplicar o teorema de Bolzano. Em segundo lugar o método numérico da bisseção é um processo trabalhoso. A próxima figura[7] mostra tanto a possibilidade de

[7] Esboço do gráfico construído com o auxílio do *software* Winplot

identificar o intervalo em que se localiza a raiz quanto o seu valor aproximado (menu "one" e opção "zeros" do *software* Winplot; resultado – 1,86348).

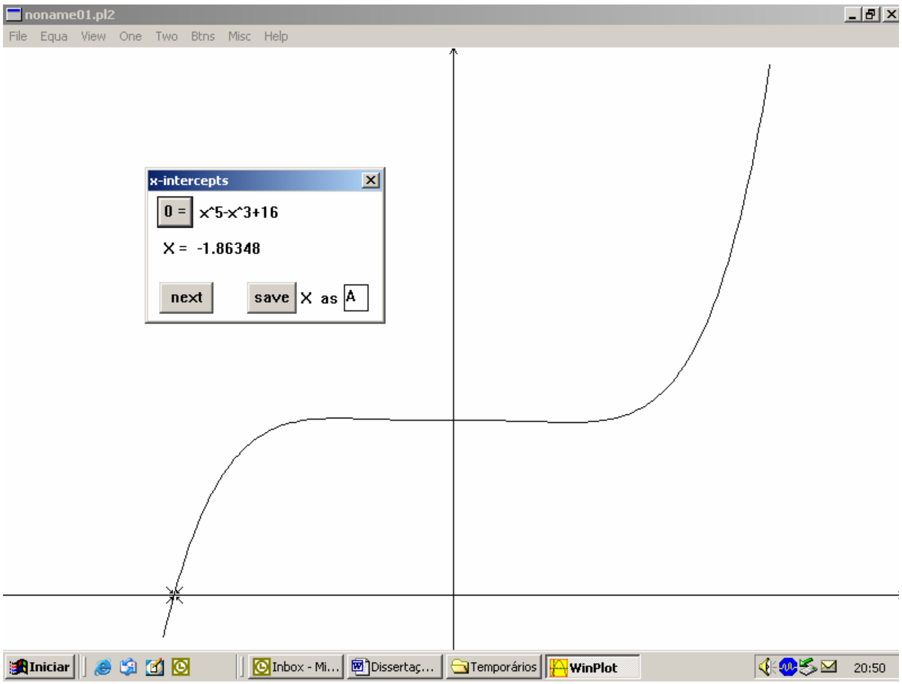


Fig. 7. Gráfico da função polinomial e indicação de uma raiz real

Como o objetivo no ensino do objeto Equações é que o aluno desenvolva competências relacionadas ao próprio cálculo numérico valorizando o processo e não apenas o resultado, o uso do *software* nesse caso não é para obter a raiz da equação ou o zero da função polinomial, mas deve ser para apoiar a técnica de resolução.

Conclusão sobre o estudo dos livros didáticos

O estudo que fizemos dos três livros didáticos mostra que dentro do processo de Transposição Didática os polinômios são relacionados indistintamente com as funções polinomiais, no entanto a representação gráfica dessas funções não é enfatizada. Resolver uma equação algébrica corresponde a obter a raiz do polinômio ou o zero da função polinomial correspondente à equação.

Sabemos que não há método algébrico (fórmula) para a resolução de equações de grau maior que 4. Na praxeologia matemática dos livros estudados, as tarefas e técnicas sobre a resolução de equações remetem a situações específicas e não a situações gerais como historicamente também ocorreu nas primeiras tentativas de resolução de equações cúbicas e quárticas. Nesse sentido poder-se-ia explorar os métodos numéricos, apoiados por representação gráfica, para ampliar as técnicas de resolução de equações. Nos três livros considerados, de um total de 54 exercícios resolvidos e 194 exercícios propostos encontramos apenas 6 exercícios discutindo a existência de raízes reais fora do conjunto dos racionais ou seja, admitindo a existência de raízes irracionais, sendo que apenas 1 exercício resolvido e 1 proposto pede para se obter tal número irracional em equações de grau maior que 2.

Portanto, considerando o objeto Equações Algébricas não houve a ampliação do método e do conjunto numérico para a resolução das Equações nos livros didáticos estudados, conforme sugerem Carneiro (1999), Lima (1998), os PCN (Brasil, 1999). Sem a inserção de programa computacional que auxilie a representação gráfica das funções polinomiais correspondentes às equações, a proposta de utilização da tecnologia informática (Borba e Penteado, 2001) também fica limitada.

Concordamos com a opinião da equipe de analistas do PNLEM/2005 em que se reconhece que o livro didático não é o único, mas é um importante instrumento mobilizado no processo ensino-aprendizagem. Os analistas sugerem que no livro haja atividades que empreguem outros recursos, sejam materiais concretos, instrumentos de medição e construção de figuras, jogos e recursos tecnológicos como calculadora e computadores.

> Um outro elemento tecnológico de importância inegável é o computador. Num livro didático podem ser propostas atividades que empreguem o computador como meio auxiliar na aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos, bem como atividades que auxiliem a formação do aluno para o mundo do trabalho. Algumas dessas atividades podem ser apontadas: explorar a articulação entre a representação gráfica e algébrica de funções; utilizar a planilha eletrônica para auxiliar a compreensão de vários conteúdos matemáticos, como fórmulas, gráficos, entre outros; fazer uso dos programas de geometria dinâmica nas construções geométricas e na formulação de conjecturas de propriedades pela observação de padrões geométricos. Há de se ter o cuidado de não impedir que o aluno que não disponha desse instrumento tenha dificuldade em seguir a proposta pedagógica do livro didático. (BRASIL, 2004 a, p. 78)

Em conclusão, percebemos que o uso de recursos tecnológicos – calculadora e computador – muitas vezes nem chega a ser cogitado nos livros didáticos, mesmo naqueles recomendados pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – PNLEM/2005.

Conclusão do Capítulo 3

No plano histórico da produção intelectual dos conceitos inerentes a Equações Algébricas pudemos perceber os problemas reais e as dificuldades na elaboração dos conhecimentos. Na gênese desses conhecimentos, em al-Khowarismi, estava a necessidade de se resolver problemas práticos relacionados ao comércio e a partição de terras, por exemplo. Na seqüência, parece-nos que o desenvolvimento dos conceitos ocorreu de forma quase espontânea e foram impulsionados novamente por questões mais complexas como as da astronomia.

Enquanto saber científico, em Álgebra, os Polinômios são estudados como seqüências em um anel. As raízes *r* de um polinômio P(x) surgem no caso de se ter P(r) = 0. Nos cursos superiores os métodos de resolução de Equações Algébricas não são estudados em Álgebra como seria de se supor até mesmo pelo desenvolvimento histórico. Concluímos que da maneira como se estudam as Equações Algébricas no atual Ensino Médio, elas são uma criação didática ao se definir P(x) = 0 e tornam-se um objeto de estudo em si mesmo sendo suficiente alguma relação com polinômios sem ampliação de métodos (técnicas) e conceitos (tecnologias).

Do saber científico para o saber a ensinar, estudando a Organização Matemática em livros didáticos constatamos como principal tarefa a resolução de equações em que as raízes são números inteiros ou imaginários em detrimento dos números racionais e mais ainda dos números irracionais. Estes estão presentes em tarefas em que não se pede o valor aproximado da raiz irracional, mas que apenas se confirme se existem ou não raízes racionais. Apenas em Dante (2003) encontramos três exercícios em que se pedia para determinar raízes irracionais por aproximação pelo método numérico da bisseção. As principais tecnologias que justificam a aplicação das técnicas são o teorema fundamental da álgebra, o teorema da decomposição (fatoração), a divisão de polinômios, usando-se principalmente o algoritmo de Briot-Ruffini, teorema das raízes complexas e pesquisa das raízes racionais.

Assim, pelo estudo realizado nesses livros didáticos encontramos o objeto Equações Algébricas reduzido a um conjunto específico de tarefas sem atender às proposições noosferianas de ampliar métodos de resolução e de ampliar os conjuntos-solução dentro de conjuntos numéricos. Havendo essa redução, consideramos que nesses livros não há exercícios que efetivamente valorizem a utilização de recursos tecnológicos, sejam calculadoras ou programas computacionais.

Capítulo 4: EXPERIMENTAÇÃO

Conforme consta nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, para a Matemática vê-se a possibilidade de ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos, evitando a simples memorização dos algoritmos, valorizando a presença dessa ciência no desenvolvimento de habilidades de caráter geométrico, gráfico e algébrico entre outros. O ensino da Matemática relacionado ao uso do computador, por exemplo, enquanto um instrumento relevante, devem possibilitar o desenvolvimento de habilidades e procedimentos. Sobre o computador, este também é indicado como meio auxiliar na aprendizagem de conceitos matemáticos e sugere-se que sejam trabalhadas atividades em livros didáticos que façam uso desse recurso (Brasil, 2004 a, p.78). Sobre a resolução de equações, foi assinalado que os processos de aproximação assumem maior importância nas aplicações do que as fórmulas (Brasil, 2004 a, p.73) e autores de obras dirigidas a professores, em formação inicial ou continuada, apontam métodos numéricos como outras formas de se trabalhar a resolução das equações como apresentamos no capítulo 3.

Lima (1999) já mostra a possibilidade de resolução de equações cúbicas utilizando as cônicas no método geométrico de Omar Khayyam, com as construções geométricas realizadas em um programa computacional. Dentro dessas possibilidades já mencionadas e aqui reapresentadas, elaboramos a hipótese de que com o uso de um *software* gráfico é possível ampliar os métodos freqüentes de resolução de equações algébricas em geral, sobretudo as equações cujas soluções sejam números irracionais, ou seja, valores não exatos, para os quais não há métodos algébricos. Dessa forma se ampliaria o ensino das resoluções por meio de propriedades e algoritmos encontrados nos livros didáticos, e seria possível explorar outros métodos numéricos.

Elaboramos uma seqüência didática a qual apresentamos a seguir onde mostramos que é possível introduzir o método numérico da bisseção no Ensino Médio com o apoio de um programa computacional.

4.1 Apresentação da Seqüência Didática

A seqüência didática organizada e aplicada é constituída de três exercícios listados a seguir.

Seqüência Didática

1. Obtenha, no conjunto dos complexos, as raízes do polinômio $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 3$.

2. Considere a seguinte equação polinomial: $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$.
   a) Mostre que esta equação tem uma raiz racional e encontre esta raiz.
   b) Mostre que esta equação tem uma raiz irracional.

3. Teorema de Bolzano: "Seja a equação $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ com coeficientes reais. O número de raízes reais situadas no intervalo aberto]a; b[é *ímpar*, se $P(a).P(b) < 0$, ou seja, se o valor do polinômio para $x = a$ e para $x = b$ têm sinais contrários; é *par* (inclusive zero, isto é, nenhuma raiz real no intervalo]a; b[ ) se $P(a).P(b) > 0$, ou seja, se o valor do polinômio para $x = a$ e para $x = b$ têm sinais iguais."

Determine as raízes da equação $x^3 + x + 1 = 0$.

Os dois primeiros exercícios podem ser resolvidos por métodos rotineiros com a aplicação das técnicas estudadas no Ensino Médio. O terceiro exercício, em uma situação que caracterizamos como a-didática, segundo a teoria de situação de Brousseau, exige uma informação (dado) que o aluno irá identificar usando o *software* gráfico, cujo uso apresentaremos na análise a priori.

Para o estudo dos exercícios da seqüência consideramos os elementos tarefa, técnica, e tecnologia da Organização Matemática de Chevallard. As tarefas apresentadas são resolver equações algébricas de grau maior que 2 incluindo as subtarefas de resolver equações de 1.º e de 2.º grau. As técnicas, justificadas pelas respectivas tecnologias, necessárias à resolução das tarefas são substituição de valores no polinômio P(x), divisão de polinômios pelo algoritmo de Briot-Ruffini, fatoração, pesquisa de raízes racionais, teorema das raízes complexas e teorema de Bolzano.

Constatamos a presença, em livros didáticos e em exames vestibulares, de questões sobre equações algébricas cujas soluções, na maioria delas, são os números inteiros (– 1) ou (1), ou os números racionais $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ou $\left(\frac{1}{2}\right)$. No primeiro dos exercícios da seqüência, propusemos uma equação onde uma das soluções fosse o número racional $\left(\frac{1}{2}\right)$, diferente daqueles costumeiramente encontrados.

No item (a) do segundo exercício, novamente pedimos a solução racional, diferente daquelas que são freqüentes; no item (b) perguntamos sobre a existência ou não de uma raiz irracional, e não pedimos que o aluno descobrisse, no papel, algebricamente, qual seria essa solução, da mesma forma que aparece em livros e vestibulares.

Finalmente, no terceiro exercício pedimos a resolução de uma equação algébrica cuja única solução real é um número irracional, apresentando o Teorema de Bolzano, uma propriedade apresentada em livros didáticos e estudada pelos alunos da 3.ª série do Ensino Médio que participaram da nossa pesquisa.

Desconsideramos as tarefas onde se aplica a técnica de "relacionar coeficientes de uma equação algébrica e as raízes" (complexas sejam reais ou imaginárias), apoiadas na tecnologia "Relações de Girard". Privilegiamos as tarefas de resolver equações algébricas, discutir a existência de raízes irracionais e, existindo tal número irracional, encontrar um valor aproximado para ele pois o objetivo de nossa pesquisa é ampliar os métodos de resolução por processos algorítmicos para resolução por um método numérico apoiado ainda por um *software* gráfico.

Na análise a priori apresentamos explicitamente cada técnica possível de ser usada e a tecnologia que justifica cada técnica.

4.2 Coleta de Dados

A seqüência didática foi aplicada em início de dezembro de 2005 a cinco duplas de alunos, estudantes do Ensino Médio, de um colégio particular em Curitiba, Paraná. Denominaremos as duplas da seguinte forma: dupla 1, alunos G e C; dupla 2, alunos A e M; dupla 3, alunos J e Y; dupla 4, alunos E e D e dupla 5, alunos F e Ge. Os alunos J e Y estudavam na 2.ª série com o professor B de Matemática e já haviam trabalhado com o conteúdo; todos os demais foram alunos do professor B em 2004 quando estudaram o conteúdo referente a essa seqüência didática; em 2005 eram concluintes do Ensino Médio, em turmas diferentes, onde revisaram e aprofundaram o conteúdo com o professor C. Na resolução dos exercícios foi permitida a consulta ao livro didático.

Ao todo, a seqüência durou cerca de três horas-aula. Durante a aplicação da seqüência, cada dupla foi acompanhada por um observador, que designaremos por O. O professor fez o papel de mediador durante a aplicação e suas intervenções identificamos por P.

A resolução dos exercícios da seqüência de cada dupla foi registrada em papel por um dos alunos, conforme Anexo 2, e os diálogos foram gravados em fita cassete e depois transcritos dando origem aos protocolos conforme Anexo 3. Na execução do terceiro exercício (duração de cerca de uma hora), primeiro deixamos que os alunos tentassem resolver com papel e lápis e depois permitimos que utilizassem, por dupla, um computador e o *software*. Encerramos a aplicação da seqüência após as três horas-aula.

4.3 Apresentação do *Software*

Em nossa pesquisa pretendemos utilizar o *software* Winplot. Este é um programa *freeware*, ou seja, é distribuído gratuitamente pois foi tornado público por seus autores (Barufi e Lauro, s/d). O seu criador, Richard Parris, tem controle de sua distribuição e do direito de se fazer novas versões. O Winplot encontra-se disponível na internet, sendo possível efetuar um *download* do endereço http://www.exeter.edu/~rparris, ou ainda na página do Laboratório de Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, http://www.ime.usp.br/~leo/free.html . Em Brandão e Faria (2002, p.2) encontramos mais algumas informações sobre o *software*.

> Suas principais características estão agrupadas nas categorias 2D e 3D, respectivamente, duas e três dimensões. O programa pode traçar gráficos de funções em coordenadas polares ou retangulares e também na forma paramétrica ou implícita (do tipo f(x,y)=0). O Winplot ainda pode realizar animações (variando parâmetros da equação) e fazer gráficos de derivadas ou integrais.

O programa foi escrito em 1985 em linguagem C e rodava no ambiente DOS. A versão para o ambiente *Windows 98* foi criada em 2001 e escrita em linguagem C^{++}. O programa é numérico e não algébrico e por isso utiliza-se de algoritmos aproximativos, o que implica em alguma demora dependendo do microcomputador utilizado.

Um algoritmo pode ser conceituado como uma seqüência de procedimentos que em seu decurso fornece a solução para um dado problema. Os procedimentos "devem aparecer em um número finito e serem executáveis mecanicamente com uma quantidade limitada de esforço." (Cláudio e Marins, 2000, p. 18) O computador só pode auxiliar na solução de um problema se for fornecida a seqüência de etapas e operações de modo formal, se for fornecido um algoritmo. Um programa numérico, como o Winplot, é constituído por algoritmos numéricos, isto é, as operações aritméticas {+, – , *, / } formam a essência do algoritmo, cujo objetivo é obter resultados numéricos.

4.4 Análise *a priori* dos exercícios da seqüência didática

Apresentamos a análise *a priori* de cada exercício explicitando as técnicas utilizadas freqüentemente.

Análise a priori do Exercício 1

Exercício 1 Obtenha, no conjunto dos complexos, as raízes do polinômio $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 3$.

Essa atividade corresponde à tarefa "obter as raízes de um polinômio de grau maior que 2" ou "resolver uma equação algébrica de grau maior que 2".

Supomos a priori que os alunos tentarão resolver primeiramente usando a técnica de "substituir valores freqüentes", que não levará à solução. Frente ao insucesso, outras técnicas como a "fatoração" e a "pesquisa das raízes racionais", acompanhadas de outras técnicas de resolução de equações quando os fatores da expressão forem polinômios do 1.º ou 2.º grau, serão evocadas. Vejamos as resoluções possíveis a priori.

Técnica 1 - Substituição de valores inteiros e racionais freqüentes

Supomos que essa técnica será utilizada pela ênfase que é dada à mesma nos livros didáticos.

Se forem substituídos os valores -1, 1, $-\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}$ não se verificará a igualdade $P(x) = 0$. Portanto, segundo a definição, nenhum desses valores testados com freqüência pelos alunos, será uma raiz do polinômio.

Técnica 2 – Fatoração do polinômio

Pelo teorema fundamental da Álgebra e pelo teorema de D'Alembert[8], todo polinômio pode ser fatorado em binômios do primeiro grau.

Sendo dado $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 3$, temos que $P(x) = 0$, então,

$$-2x^3 + 3x^2 - 2x + 3 = 0$$

Pela propriedade distributiva temos:

$$-x^2.(2x - 3) - (2x - 3) = 0 \text{ e assim,}$$

$$(2x - 3).(-x^2 - 1) = 0$$

Portanto pela propriedade do anulamento nos números reais temos que:

$$2x - 3 = 0 \text{ ou } -x^2 - 1 = 0$$

Considerando $2x - 3 = 0$, pela condição da existência do simétrico e do inverso, temos:

$$2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (raiz racional)}$$

Considerando $-x^2 - 1 = 0$, pela condição da existência do simétrico e da definição de radiciação temos:

$$-x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\ i \text{ (raízes complexas imaginárias)}$$

Portanto, as raízes do polinômio P(x) são $\frac{3}{2}$ e $\pm$ i.

Observemos que as soluções são diferentes das rotineiras propostas nos livros didáticos.

---

[8] Teorema de D'Alembert: Se r é raiz de p(x) então p(x) é divisível por x – r.

Técnica 3 – Pesquisa de Raízes Racionais, Divisão de Polinômios e Fatoração

A terceira técnica é um conjunto envolvendo a Pesquisa de Raízes Racionais, a Divisão de Polinômios e a Fatoração.

Pesquisa de Raízes Racionais

Essa técnica é justificada pelo já citado teorema das raízes racionais.

> Seja a equação polinomial de coeficientes *inteiros* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$. Se o racional $\frac{p}{q}$, $p \in Z$ e $q \in Z^*$ (*p* e *q* primos entre si) é raiz dessa equação, então *p* é divisor de a_0 e *q* é divisor de a_n. (IEZZI et al., 2001, p. 298).

Sabemos que obter as raízes do polinômio P(x) implica em determinar as raízes da equação algébrica P(x) = 0.

Sendo $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 3$, consideremos a equação $-2x^3 + 3x^2 - 2x + 3 = 0$, onde os coeficientes são $a_0 = 3$ e $a_n = -2$. Assim temos a relação dos valores de p (divisores inteiros de $a_0 = 3$): $p \in \{\pm 1; \pm 3\}$; e a relação de valores de q (divisores inteiros de $a_n = -2$): $q \in \{\pm 1; \pm 2\}$. Desse modo obtemos ao conjunto de valores $\frac{p}{q}$, candidatos a raiz da equação:

$$\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1; \pm 3; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}\right\}$$

Substituindo alguns dos valores $\frac{p}{q}$ temos que $\frac{3}{2}$ é raiz da equação

$$-2x^3 + 3x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \text{pois}$$

$$-2.\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3.\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2.\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 0$$

Divisão de polinômios

Aplicando o algoritmo da divisão de polinômios obtemos o quociente, um outro fator do polinômio, de grau uma unidade menor que o grau do mesmo. A divisão pode ser feita pelo método geral da chave ou no caso particular do divisor ser um polinômio (ax + b) pode ser usado o algoritmo de Briot-Ruffini.

i) Método da chave

$$
\begin{array}{r|l}
-2x^3 + 3x^2 - 2x + 3 & x - \frac{3}{2} \\ \cline{2-2}
-\ (-2x^3 + 3x^2) \qquad\quad & -2x^2 \\ \cline{1-1}
0 \quad - 2x + 3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-2x^3 + 3x^2 - 2x + 3 & x - \frac{3}{2} \\ \cline{2-2}
-\ (-2x^3 + 3x^2) \qquad\quad & -2x^2 - 2 \\ \cline{1-1}
0x^3 + 0x^2 - 2x + 3 & \\
-\ (-2x + 3) & \\ \cline{1-1}
0x + 0 &
\end{array}
$$

ii) Algoritmo prático de Briot-Ruffini –

raiz obtida — coeficientes da equação de grau n

$\frac{3}{2}$	– 2	3	– 2	3
	– 2	0		

$\frac{3}{2}$	– 2	3	– 2	3
	– 2	0	– 2	

$\frac{3}{2}$	– 2	3	– 2	3
	– 2	0	– 2	0

coeficientes do quociente de grau n – 1

Por qualquer um dos métodos, a divisão do polinômio $(-2x^3 + 3x^2 - 2x + 3)$ por $\left(x - \frac{3}{2}\right)$ resulta no quociente $(-2x^2 - 2)$.

Fatoração

A divisão exata do polinômio P(x) por um binômio (ax – b) resulta em um quociente q(x) e, portanto P(x) = (ax – b).q(x). Assim, a equação algébrica P(x) = 0 equivale a (ax – b).q(x) = 0. Novamente, utilizando a propriedade do anulamento nos números reais, do simétrico e do inverso e a definição de radiciação temos:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right).(-2x^2 - 2) = 0$$

$$x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou}$$

$$-2x^2 + 0x - 2 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\ i$$

Portanto, as raízes do polinômio P(x) são $\frac{3}{2}$ e $\pm$ i.

Conforme vimos, nesse nível de ensino podem ser utilizadas três técnicas das quais duas levam à resolução: fatoração e o conjunto iniciando pela pesquisa de raízes racionais. A técnica da fatoração é justificada pelos elementos da tecnologia: Teorema Fundamental da Álgebra e Teorema de D'Alembert com o apoio de propriedades como a distributiva, a do anulamento, e da condição de existência do elemento simétrico e inverso. A técnica da pesquisa de raízes racionais justifica-se pela tecnologia: Teorema da Pesquisa de Raízes Racionais.

Análise a priori do Exercício 2, item a

Exercício 2 Considere a seguinte equação polinomial: $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$. a) Mostre que esta equação tem uma raiz racional e encontre esta raiz.

Essa tarefa consiste na discussão da existência de raízes reais e a tarefa de obtenção da raiz de uma equação polinomial ou algébrica. Em nossa análise *a priori*, consideramos as técnicas de substituição de valores e de pesquisa de raízes racionais.

Técnica 1 – Substituição de valores

A partir da definição de raiz busca-se, por tentativa, descobrir um valor que torne verdadeira a igualdade $P(x) = 0$. Os valores racionais inteiros mais freqüentes são (-1), 1, (-2), 2. Por substituição na equação verifica-se que (-2) é solução da mesma.

Técnica 2 – Pesquisa de raízes racionais

Inicialmente buscamos os possíveis valores racionais utilizando a técnica da pesquisa de raízes justificada pela tecnologia do Teorema das Raízes Racionais.

Relacionamos os valores de p (divisores inteiros de $a_0 = -6$) e de q (divisores inteiros de $a_n = 1$) e determinamos o conjunto de valores $\frac{p}{q}$, que é relação de possíveis raízes racionais.

$$p \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\} \;;\; q \in \{\pm 1\} \;;\; \frac{p}{q} \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$$

É possível verificar se algum desses valores é raiz por substituição ou pela divisão segundo o método da chave e o dispositivo de Briot-Ruffini que apresentaremos.

i) Verificação por substituição

Pela técnica de substituir valores, apoiada na tecnologia da definição de raízes, verificamos no conjunto dos valores $\frac{p}{q}$ que (– 2) é raiz da equação:

$(-2)^4 + 2.(-2)^3 + (-2)^2 - (-2) - 6 = 0 \Rightarrow$ o racional (– 2) é raiz.

ii) Algoritmo de Briot-Ruffini

O algoritmo de Briot-Ruffini para a divisão permite que se verifique se um valor é raiz, apoiado no teorema de D'Alembert.

– 2	1	2	1	– 1	– 6
	1	0	1	– 3	0

Análise a priori do Exercício 2, item b

Exercício 2

Considere a seguinte equação polinomial: $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$.
b) Mostre que esta equação tem uma raiz irracional.

Após termos encontrado a raiz racional (– 2), para obter as demais raízes, dividimos o polinômio correspondente à equação por (x + 2). A divisão pode ser feita pelo método da chave ou por Briot-Ruffini, o qual apresentaremos. Obtido o quociente, um polinômio de grau 3, fatoramos a expressão efetuando a multiplicação do divisor pelo quociente. As demais raízes serão as raízes do quociente e para obtê-las repetimos as técnicas descritas anteriormente: pesquisa de raízes e substituição de valores.

Técnica – Divisão, fatoração e pesquisa de raízes racionais

Aplicamos a técnica do dispositivo prático de Briot-Ruffini (divisão de um polinômio de grau n por um binômio da forma ax + b), a partir da raiz racional que foi obtida, para obter outro fator, de grau n –1, do polinômio.

– 2	1	2	1	– 1	– 6
	1	0	1	– 3	0

O quociente é o polinômio $x^3 + 0x^2 + x - 3$. Devemos resolver a equação

$x^3 + 0x^2 + x - 3 = 0$

Relacionamos os valores de p (divisores inteiros de $a_0 = -3$) e de q (divisores inteiros de $a_n = 1$) e determinamos o conjunto de valores $\frac{p}{q}$, candidatos a raiz dessa nova equação.

$p \in \{\pm 1; \pm 3\}$; $q \in \{\pm 1\}$; $\frac{p}{q} \in \{\pm 1; \pm 3\}$

Verificamos, por substituição, se algum dos valores $\frac{p}{q}$ é raiz da equação e conforme a tecnologia da definição de raiz, $\pm 1; \pm 3$, não são raízes.

Conclui-se que não há raízes racionais. Ou as raízes são irracionais ou são imaginárias.

A tecnologia do Teorema das Raízes Complexas apresenta uma importante conseqüência: se um número complexo $z = a + bi$ com $a, b \in IR$ e $b \neq 0$ é raiz da equação algébrica $P(x) = 0$, de coeficientes reais, então o seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ é também raiz da mesma equação. As raízes complexas não reais de uma equação algébrica de coeficientes reais ocorrem aos pares. Portanto, toda equação de grau ímpar, com coeficientes reais, admite pelo menos uma raiz real.

A equação possui coeficientes reais e grau ímpar, portanto admite pelo menos uma raiz real. Como verificamos pela técnica da pesquisa que a raiz real existente não é racional, concluímos que ela é irracional.

Análise a priori do Exercício 3

> Exercício 3
>
> Teorema de Bolzano:
> "Seja a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ com coeficientes reais. O número de raízes reais situadas no intervalo aberto]a; b[é *ímpar*, se $P(a).P(b) < 0$, ou seja, se o valor do polinômio para $x = a$ e para $x = b$ têm sinais contrários; é *par* (inclusive zero, isto é, nenhuma raiz real no intervalo]a; b[ ) se $P(a).P(b) > 0$, ou seja, se o valor do polinômio para $x = a$ e para $x = b$ têm sinais iguais."
>
> Determine as raízes da equação $x^3 + x + 1 = 0$.

Esse exercício corresponde à tarefa "obter as raízes de um polinômio de grau maior que 2" ou "resolver uma equação algébrica de grau maior que 2".

Supomos *a priori* que os alunos tentarão resolver primeiramente usando a técnica de "substituir valores freqüentes", que não levará à solução. Frente ao insucesso, outras técnicas como a "fatoração" e a "pesquisa das raízes racionais", acompanhadas de outras técnicas de resolução de equações quando os fatores da expressão forem polinômios do 1.º ou 2.º grau, serão evocadas. Vejamos as resoluções possíveis *a priori*.

Técnica 1 – Substituição de valores

Supomos *a priori* que essa técnica será utilizada pela ênfase que é dada à mesma nos livros didáticos.

Se forem substituídos os valores – 1, 1, $-\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}$ não se verificará a igualdade P(x) = 0. Portanto, segundo a definição, nenhum desses valores testados com freqüência pelos alunos, será uma raiz do polinômio.

Técnica 2 – Pesquisa de raízes racionais

Essa técnica é justificada pelo teorema das raízes racionais, já apresentado anteriormente.

Consideremos a equação dada $x^3 + x + 1 = 0$, onde os coeficientes são $a_0 = 1$ e $a_n = 1$. Assim temos a relação dos valores de p (divisores inteiros de $a_0 = 1$): $p \in \{\pm 1\}$; e a relação de valores de q (divisores inteiros de $a_n = 1$): $q \in \{\pm 1\}$. Desse modo obtemos o conjunto de valores $\frac{p}{q}$, candidatos a raiz da equação, $\frac{p}{q} \in \{\pm 1\}$.

A substituição desses valores já havia sido feita na aplicação da primeira técnica e verificou-se que nenhum deles é raiz da equação, nenhum torna a sentença verdadeira.

A equação possui coeficientes reais e grau ímpar, portanto admite pelo menos uma raiz real. Como nenhum dos valores racionais, candidatos a raiz, verificou a sentença P(x) = 0, as possíveis raízes reais não são racionais e, portanto, há pelo menos uma raiz irracional.

Técnica 3 – Teorema de Bolzano e método da bisseção

A equação proposta é de grau 3. Como conseqüência do teorema das raízes complexas, sabemos que existe pelo menos uma raiz real. A pesquisa de raízes racionais indicou que as possíveis raízes reais não são racionais.

Pelo Teorema de Bolzano procura-se determinar os extremos a e b do intervalo aberto (a; b). A escolha dos extremos do intervalo pode ser arbitrária ou a partir do esboço do gráfico da função correspondente ao polinômio.

Considerando-se a função polinomial $f(x) = x^3 + x + 1$, com o auxílio do software Winplot esboçamos o gráfico.

Primeiramente surge a tela para a escolha, no *menu*, de gráfico em duas dimensões 2-D ou três dimensões 3-D.

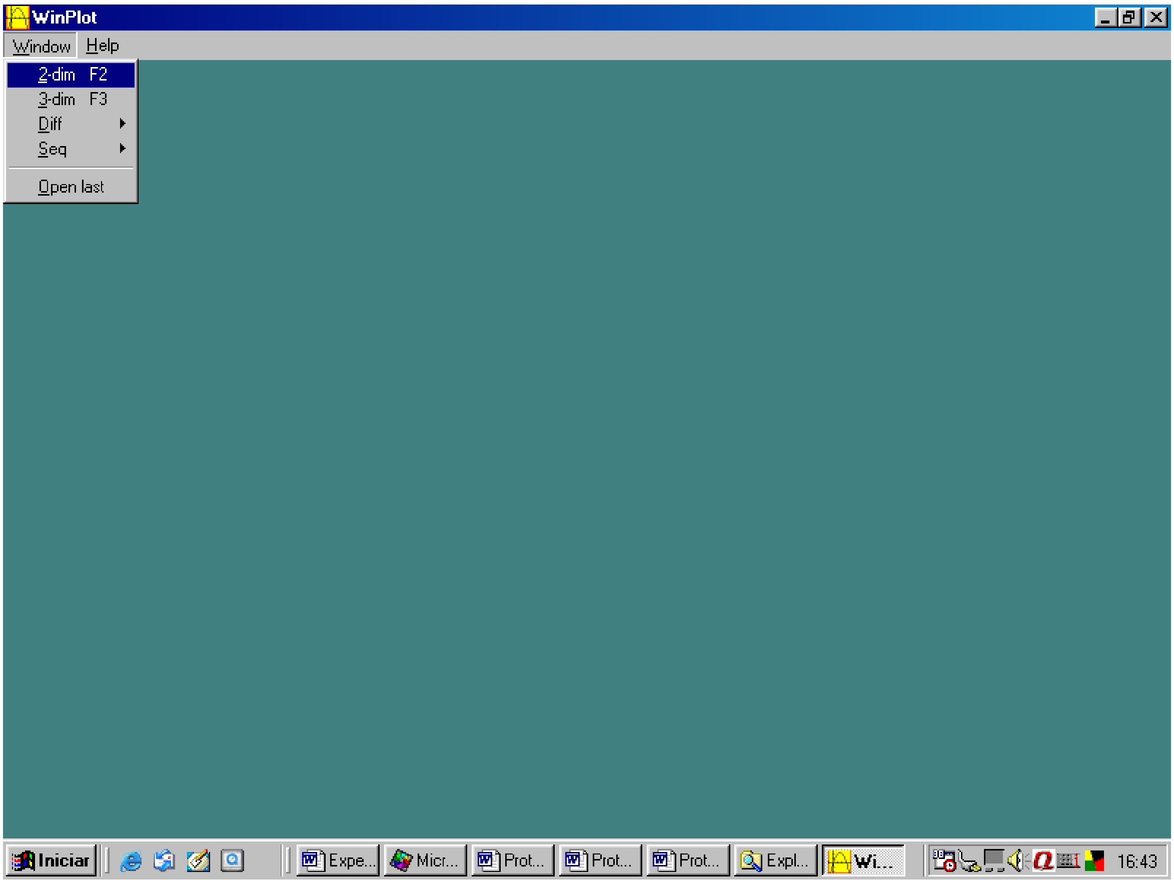


Fig. 8. Tela do *software* gráfico

Em seguida surge a tela com os eixos coordenados. No menu "Equa" escolhemos a forma explícita para escrever y em função de x. (y = f(x)).

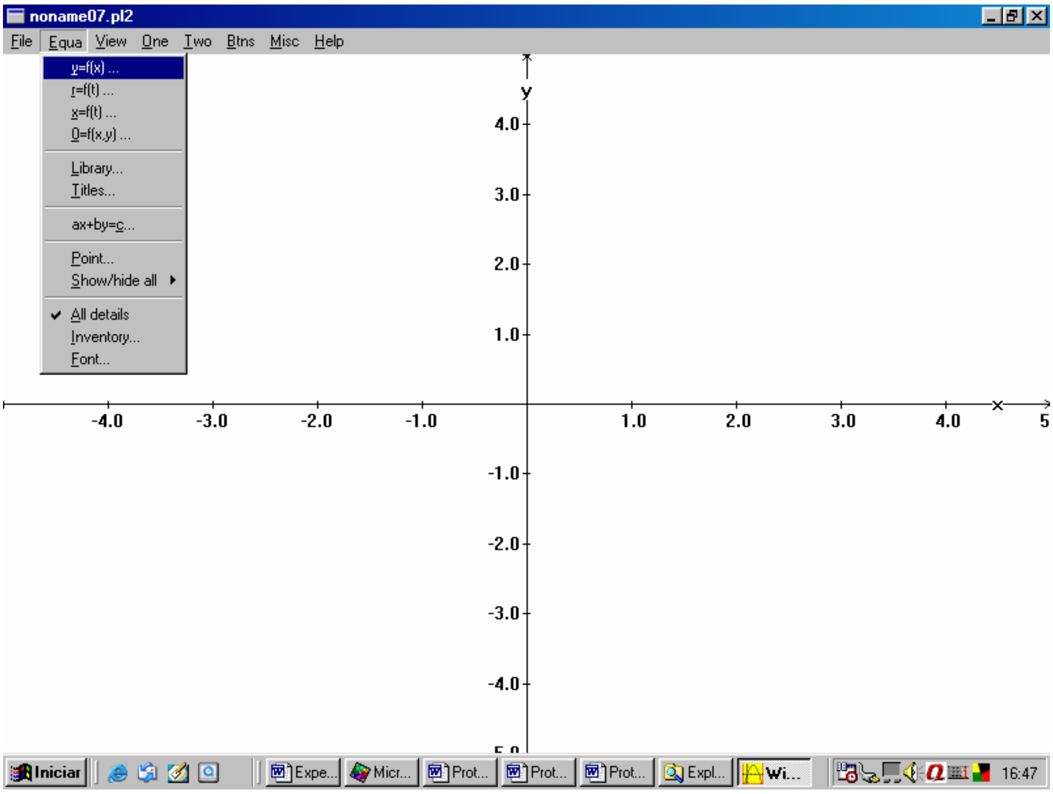


Fig. 9. Tela do *software* gráfico

Digitamos a expressão da função na janela que se abrirá: y = x^3 + x + 1. Selecionamos o intervalo "lock interval" e o gráfico pode ser visualizado na próxima tela.

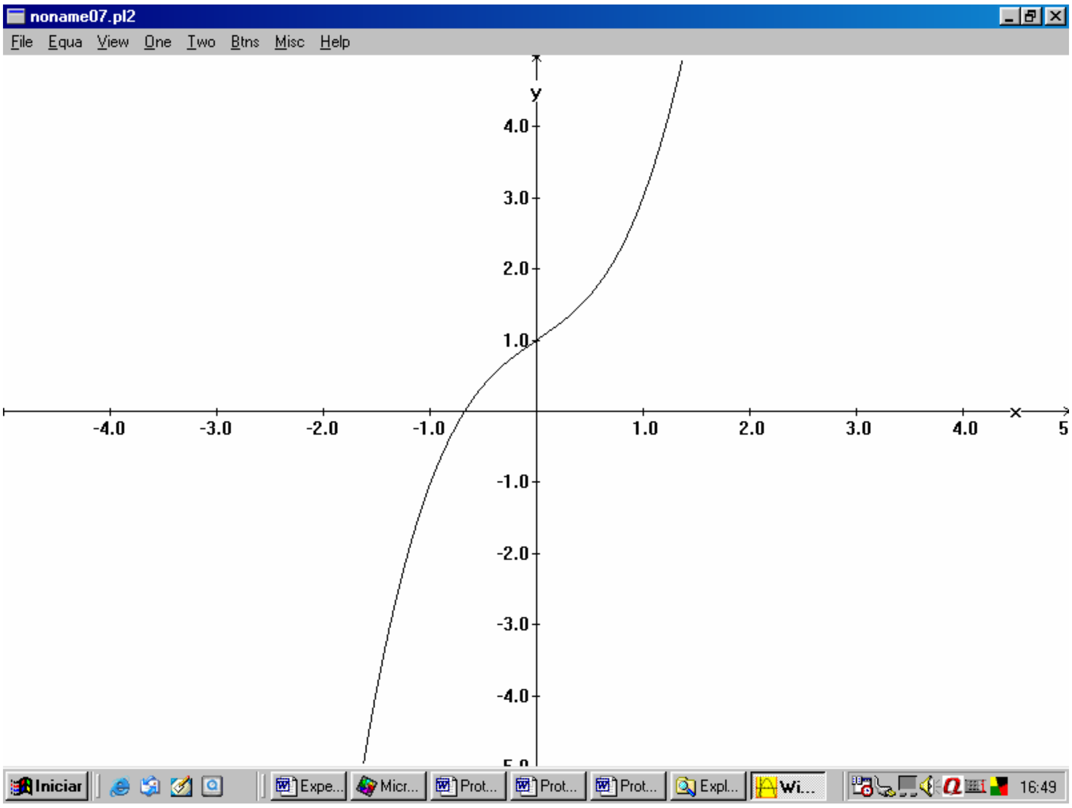


Fig. 10. Tela do *software* gráfico

Podemos identificar o intervalo (– 1; 0) onde se encontra uma raiz irracional.

É possível verificar o que é proposto no teorema de Bolzano:

$$P(-1) = (-1)^3 + (-1) + 1 = -1$$

$$P(0) = 0^3 + 0 + 1 = 1$$

$$P(-1).P(0) = (-1).1 = -1 < 0$$

Portanto existe uma raiz real irracional entre – 1 e 0.

Prossegue-se com o objetivo de se obter intervalos com amplitude cada vez menor. Considera-se a média m dos valores extremos a e b (– 1 e 0), inicialmente determinados.

$$m = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{8}$$

Considerando-se os valores $\left(-\frac{1}{2}\right)$ e 0 temos:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) . P(0) = \frac{3}{8} . 1 > 0.$$

O número de raízes no intervalo $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ é par. Não se pode afirmar que há uma raiz nesse intervalo.

Considerando-se (– 1) e $\left(-\frac{1}{2}\right)$ temos:

$$P(-1).P\left(-\frac{1}{2}\right) = (-1). \frac{3}{8} < 0.$$

Portanto, existe uma raiz irracional entre -1 e $-\frac{1}{2}$.

Na tentativa de se obter um novo intervalo, considera-se a média dos valores entre – 1 e $-\frac{1}{2}$.

$$\frac{-1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{3}{4}$$

Calcula-se o valor de $P\left(-\frac{3}{4}\right)$.

$$P\left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 + \left(-\frac{3}{4}\right) + 1 = -\frac{11}{64}$$

Considerando-se (– 1) e $\left(-\frac{3}{4}\right)$ aplica-se o teorema de Bolzano.

$$P(-1). P\left(-\frac{3}{4}\right) = (-1). \left(-\frac{11}{64}\right) > 0.$$

O número de raízes no intervalo $\left(-1; -\dfrac{3}{4}\right)$ é par. Não se pode afirmar que há uma raiz nesse intervalo.

Agora, considera-se $\left(-\dfrac{3}{4}\right)$ e $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ e novamente aplica-se o teorema de Bolzano.

$$P\left(-\frac{3}{4}\right).P\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{11}{64}\right).\frac{3}{8} < 0.$$

Portanto, existe uma raiz real irracional entre $-\dfrac{3}{4}$ e $-\dfrac{1}{2}$.

Pode-se prosseguir com esse procedimento.

$$\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{5}{8}$$

$$P\left(-\frac{5}{8}\right) = \left(-\frac{5}{8}\right)^3 + \left(-\frac{5}{8}\right) + 1 \Rightarrow P\left(-\frac{5}{8}\right) > 0.$$

$$P\left(-\frac{5}{8}\right).\ P\left(-\frac{1}{2}\right) > 0.$$

O número de raízes no intervalo $\left(-\dfrac{5}{8}; -\dfrac{1}{2}\right)$ é par. Não se pode afirmar que há uma raiz nesse intervalo.

$$P\left(-\frac{3}{4}\right).P\left(-\frac{5}{8}\right) < 0.$$

Portanto, existe uma raiz real irracional entre $-\dfrac{3}{4}$ e $-\dfrac{5}{8}$.

Sabe-se que uma raiz real irracional encontra-se no intervalo $\left(-\dfrac{3}{4}; -\dfrac{5}{8}\right)$ = (– 0,75; – 0,625). O processo de obtenção dos extremos do intervalo aberto, onde encontra-se uma raiz irracional, pode repetir-se de acordo com o grau de aproximação desejado.

Notemos que com o uso do programa, a identificação do intervalo que contém uma solução torna-se visível a aplicação do Teorema de Bolzano consecutivamente assegura a determinação aproximada da raiz.

4.5 Análise *a posteriori* dos exercícios da seqüência didática

Nessa seção apresentamos a análise *a posteriori* das resoluções dos alunos. De acordo com o que descrevemos sobre a experimentação, dez alunos trabalharam em cinco duplas. Os exercícios foram resolvidos por escrito, conforme o Anexo 2; os diálogos foram gravados em fita cassete e depois transcritos gerando os protocolos, conforme Anexo 3.

Análise *a posteriori* do Exercício 1

O estudo dos documentos produzidos pelos alunos e dos protocolos permitiu-nos identificar as técnicas que eles utilizaram na realização da tarefa.

Exercício 1

Obtenha, no conjunto dos complexos, as raízes do polinômio $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 3$.

A primeira técnica da substituição foi tentada por duas duplas: G e C e A e M, que depois a abandonaram. A técnica 2 da fatoração foi usada por quatro duplas; só não foi usada pela dupla A e M. Esta dupla usou a técnica 3.

Técnica 1 – Substituição de valores

As duplas G e C e A e M utilizaram primeiramente a técnica da substituição de valores, como previsto na análise a priori.

Diálogo da dupla G e C

1 G Aqui não dá porque com –1 não dá 0 tá ligado? Você tem que por em evidência primeiro. Ou não? Pera aí. (...)
5 C 1 não é.

Diálogo da dupla A e M

1 M $- 2x^3 + 3x^2 + ...$
2 A A soma dos coeficientes não é zero. Menos 1... o 1 não é raiz.

Técnica 2 – Fatoração

Excetuando a dupla A e M, as demais quatro utilizaram essa técnica.

Resolução da dupla J e Y

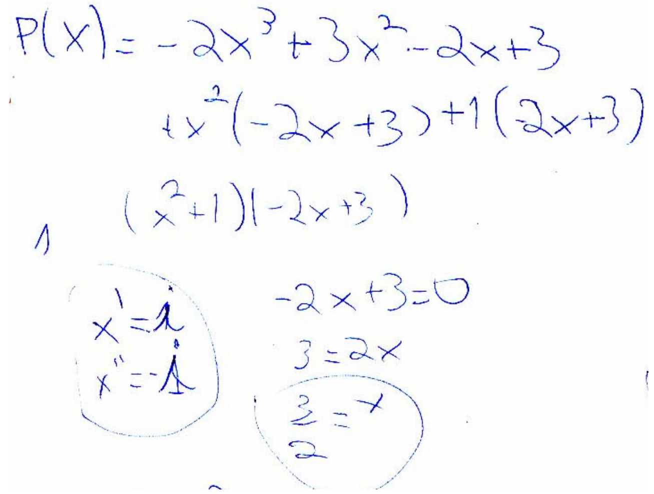


Fig. 11. Exercício 1 - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla J e Y

2 Y Obtenha as raízes do polinômio $P(x) = - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 3$. Briot-Ruffini? Põe em evidência. Tipo -2 e -2 aqui e 3 com 3.
3 J Põe x^2 em evidência. Fica $- 2x +3$.
4 Y x igual a 1 e -1 né? 3/2. Então daí x' é 1 e x" é –1. Daí o outro vai dar 3/2:

$-2x + 3 = 0;\ \ 3/2$

A dupla J e Y inicialmente errou a resolução da equação $x^2 + 1 = 0$. Os alunos não aplicaram a definição de raiz para validar o resultado encontrado, acreditamos que seja por falta de hábito, ou seja, por uma cultura estabelecida já que o livro didático e possivelmente o professor não propõem essa estratégia. Se tivessem substituído os números encontrados perceberiam o erro o que os levaria a rever a resolução.

Resolução da dupla E e D

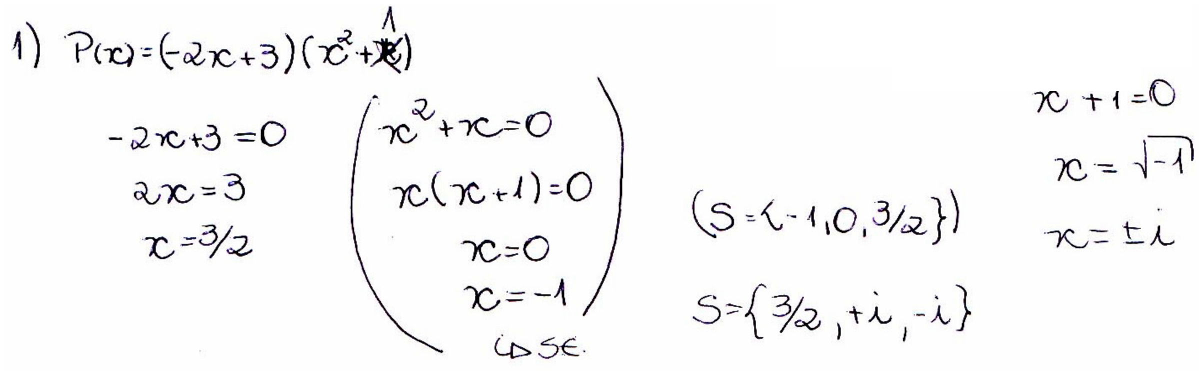


Fig. 12. Exercício 1 - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla E e D

1 E O melhor que tem é fatorar, porque tem o 2. Quer que eu escreva? Dá para colocar 2x; menos 2x. Menos 2x, mais 3, vezes x^2 mais x.
2 D Um é raiz não é?
3 E Daí tem que fazer separado. Menos 2x mais três igual a zero; $x^2 + x$ igual a zero. Aqui fatora de novo.
4 D x igual a menos 1 é raiz.
5 E x igual a zero ou x igual a - 1. (...)

A dupla E e D fez a fatoração sendo que um dos fatores, $(x^2 + x)$ está incorreto. Obtiveram a raiz racional correta, porém ao invés das raízes imaginárias, chegaram a valores inteiros. Não perceberam, por exemplo, que se zero for raiz, o termo independente do polinômio seria zero. Adiante, enquanto resolviam o exercício 2 perceberam o erro, refizeram o exercício 1 e obtiveram a resposta correta. Novamente os alunos não validaram o resultado encontrado.

Resolução da dupla G e C

A dupla G e C fez outras tentativas sem resultado, conforme apresentamos a seguir em "Outras técnicas", até resolverem corretamente o exercício por fatoração.

1

$$2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x^2(2x-3) + 2x - 3 = 0$$
$$2x - 3\,(x^2+1) = 0$$
$$2x - 3 = 0 \qquad x^2 + 1 = 0$$
$$2x = 3 \qquad x^2 = -1$$
$$x_1 = 3/2 \qquad x_2 = i \quad x_3 = -i$$

Fig. 13. Exercício 1 - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla G e C

62	G	Põe em evidência! x^2 ...
63	Obs	O que vocês fizeram?
64	C	Pomos em evidência.
65	G	Ou esse é igual a 0 ou esse. Eu falei isso no começo e ele deu risada da minha cara.
66	C	$x^2 + 1 = 0$. $x_2 = i$ e $x_3 = - i$.

Os alunos da dupla G e C não perceberam de início a possibilidade se fatorar o polinômio da maneira como se aprende no ensino fundamental (em geral na 7.ª série) e revisado por Dante (2003). Uma vez que não se ensinam métodos algébricos para resolução de equações de grau maior que 2, tentaram as técnicas relacionadas ao objeto que aprenderam mais recentemente. Ainda assim, quando fatoraram por agrupamento não utilizaram o símbolo de agrupamento (parênteses) mas concluíram corretamente. Não sabemos se ao denominarem as raízes de x_1, x_2 e x_3 estariam empregando a conseqüência do teorema da composição que garante a existência de n raízes para a equação de grau n. Mais uma vez não vimos a validação do resultado pelos alunos.

Resolução da dupla F e Ge

A dupla F e Ge pensou em fazer pela técnica 2 (Fatoração) conforme aparece no diálogo; pensaram também em usar a técnica 3 (Pesquisa, Divisão e Fatoração) mas acabaram optando pela técnica 2.

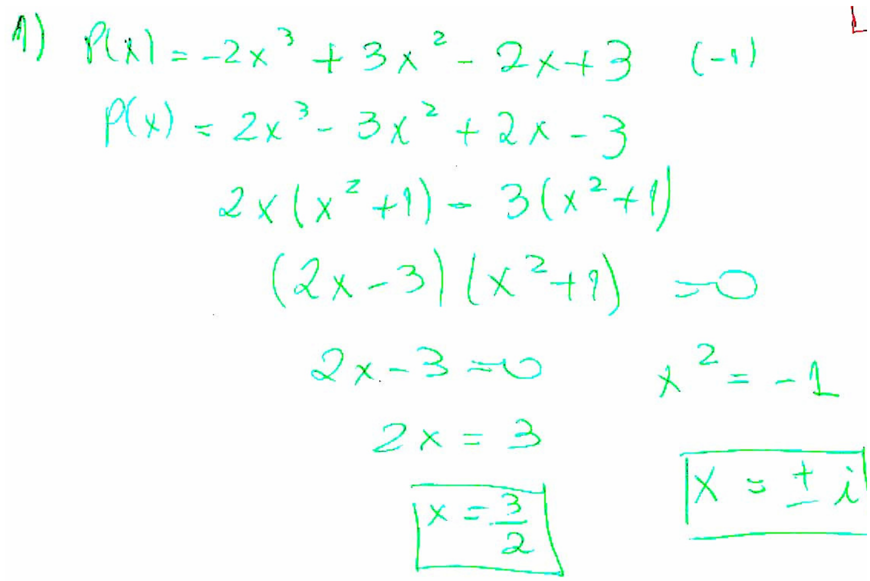


Fig. 14. Exercício 1 - Resolução dos alunos

Observamos que logo no início os alunos multiplicaram o polinômio P(x) por (– 1) o que resultaria no polinômio oposto [– P(x)], porém não modificaram o sinal do primeiro membro da igualdade, P(x), como indica a resolução. Esse erro não impediu de obterem as raízes corretas pois afinal P(x) = 0 e – P(x) = 0 são equivalentes.

Diálogo da dupla F e Ge

3 F Eu acho que a gente podia fazer, sabe aquele de agrupar? Mas a gente podia multiplicar por – 1antes.
4 Ge Ou fazer por pesquisas de raízes para poder baixar o grau.
5 F É também dá para fazer assim. Vou tentar fazer por fatoração. (...)
7 F Fatoração deu tudo tranqüilo aqui, olhe.
8 Ge Deu? Eu também estava pensando em fazer assim.
9 F 2x... 2x – 3. Veja se dá a mesma coisa? Daí, $x^2 + 1$.
10 Ge Daí você faz separado e aqui vai dar – 1.
11 F Aqui vai dar 2x – 3 = 0; 2x = 3; x = 3/2.
12 Ge Daí tem que tentar substituir para baixar o grau não é?

13 F É, mas acabou aí. As raízes são essas não são?
14 Ge Sim, claro. i; – i.

O diálogo "4. Ge" indica que o aluno Ge propôs as técnicas de pesquisar as raízes racionais e baixar o grau (por fatoração). De fato, tais técnicas são as mais gerais para a resolução de equações de grau maior que 2 quando as raízes não são números inteiros.

Das cinco duplas, somente os alunos F e Ge conferiram a resolução. Isso pode indicar a falta do hábito dos alunos em conferir a resolução e a resposta. Os alunos F e Ge não usaram a definição de raiz para verificar se acertaram, mas conferiram os cálculos feitos como mostra o diálogo.

15 F Pronto.
16 Ge São essas três aqui.
17 F Deu, não deu? Vamos conferir as contas primeiro. 2x e fica $x^2 + 1$ daqui. Aqui eu pego –3 e fica $x^2 + 1$ de volta. $2x - 3$; $x^2 + 1$; $2x - 3$ igual a 0; $2x = 3$; $x = 3/2$; $x^2 = -1$... está certo não é?
18 Ge Acho que sim.

Outras técnicas

A dupla G e C inicialmente tentou encontrar uma possível raiz aplicando o teorema de D'Alembert e o algoritmo da divisão de Briot-Ruffini.

Tentativa da divisão por Briot-Ruffini pela dupla G e C

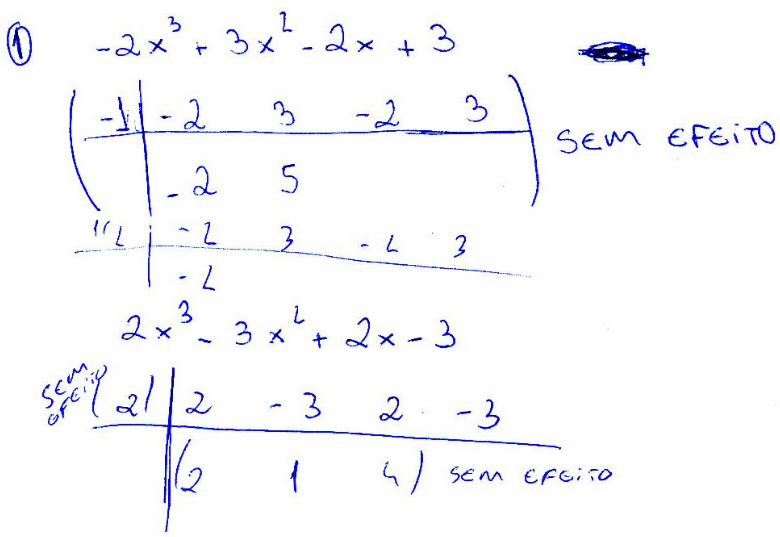


Fig. 15. Exercício 1 - Resolução dos alunos

A dupla não fez a pesquisa de raízes racionais senão teria percebido que as únicas possíveis raízes inteiras são $\{\pm 1; \pm 3\}$ e não teria tentado o valor 2.

Diálogo da dupla G e C

2	C	Tenta dividir por 2.
3	G	Como?
4	C	Faz Briot-Ruffini.
5	G	1 não é.
6	C	Tá. Faz –1.
7	G	– 2... 3... 5... – 7... não é! (risos) Sem efeito?
10	C	Dois ao cubo dá oito, vezes dois dá dezesseis. Dois ao quadrado dá quatro... mais dois; menos quatro... não dá também! (risos) Vamos tentar por meio.
11	G	Meio?
12	C	Às vezes dá certo. Menos dois vezes meio... Como faz para achar as raízes imaginárias?
13	G	Quer usar i? Faz por 1/2 eu faço por –2.

Após as tentativas com os inteiros 1 (mentalmente), – 1 e 2 (usando Briot-Ruffini) desistiram dessa técnica. Chegaram a pensar em usar o imaginário i e o racional $\frac{1}{2}$ mas abandonaram a idéia porque, acreditamos, os cálculos seriam mais trabalhosos. Os alunos consultaram o livro e tentaram a técnica das Relações de Girard.

Tentativa da dupla G e C usando as Relações de Girard

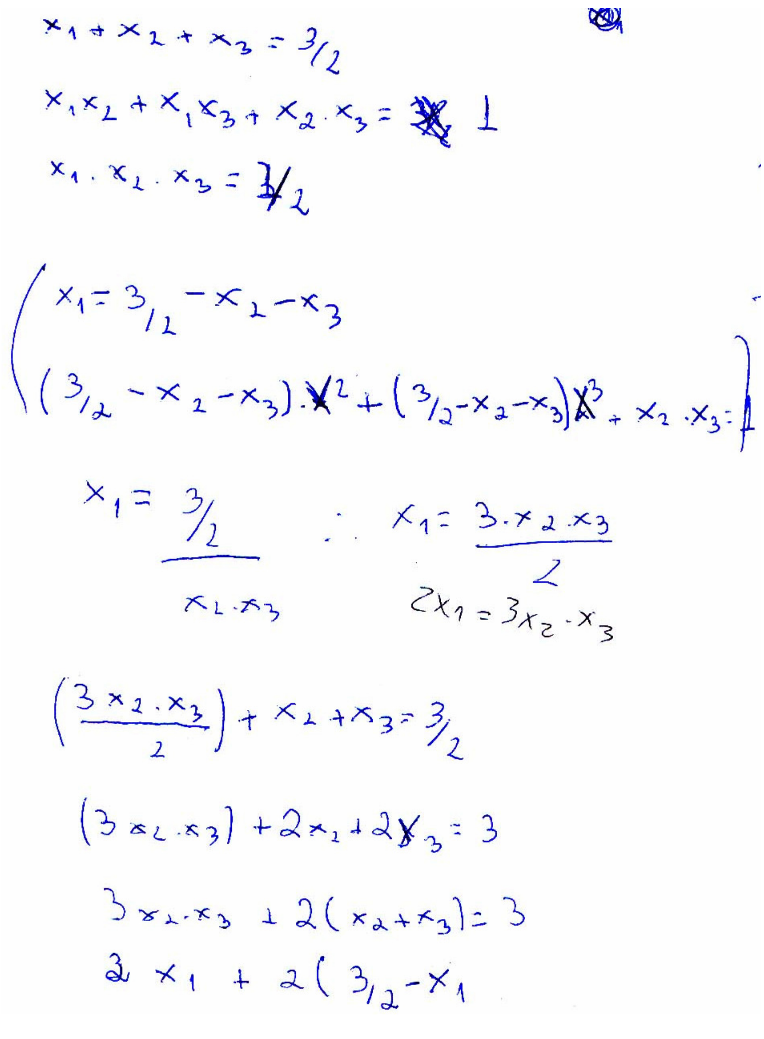


Fig. 16. Exercício 1 - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla G e C

18 C a + b... como é o nome disso? [consultando o livro]

19 G Relações de Girard. São três raízes. x_1 mais x_2 mais x_3... igual a (– b) sobre a... vai

dar 3... 3/2

20 C x_1 mais x_2 mais x_3 igual a 3/2

21 G Deixa isso aí.

22 C x um dois... x_1x_2... x_2x_3 igual a – c sobre a. $x_1x_2x_3$...

23 G 3/2 também

Para expressar as relações de Girard os alunos não tiveram dúvidas que existem três raízes (reais ou não, distintas ou não) para a equação cúbica. No entanto, a dupla não percebeu que quando o exercício não fornece informações sobre as raízes, as relações de Girard levam a um sistema de equações cuja resolução é muito trabalhosa, tanto que desistiram quando perceberam isso. O professor fez perguntas aos alunos conforme indica o diálogo.

41 P Como vocês estão tentando obter a primeira raiz?

42 C A gente tentou Briot-Ruffini primeiro e a gente não conseguiu. (...)

43 G A gente tentou 2 porque era mais fácil.

44 C A gente jogou em Girard e tentou resolver o sistema.

Conforme a análise *a priori*, reforçado pela afirmação 43. G, os alunos fazem tentativas primeiro com números inteiros porque na substituição o cálculo é mais fácil.

Conclusões sobre o Exercício 1

As soluções do exercício foram um número racional e dois imaginários. Propomos valores além daqueles que costumeiramente são soluções dos exercícios apresentados nos livros didáticos - certos números inteiros (1 e – 1) ou certos números racionais ($\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$) cujo utilização nos cálculos durante a substituição como raiz é mais fácil, conforme vimos no diálogo 43. G. A técnica da fatoração foi utilizada por quatro duplas, e a técnica conjunta da pesquisa de raízes racionais, divisão e fatoração e algoritmo de Briot-Ruffini foi adotada por uma dupla. Essa dupla fez a divisão de polinômios pelo algoritmo de Briot-Ruffini e não pelo método da chave o que nos leva a questionar se a opção do uso do algoritmo de Briot-Ruffini e não do método da chave para a divisão de polinômios é conseqüência da prática de ensino do professor nessa escola ou é conseqüência da característica dos métodos apresentados nos livros.

Nenhuma dupla utilizou a definição de raiz para conferir a resposta, ou seja, nenhuma das duplas verificou se os valores encontrados eram de fato soluções das equações algébricas, tanto que a dupla J e Y inicialmente errou o exercício. Apenas a dupla F e Ge conferiu os cálculos. Supomos que isso se deve ao fato dos livros didáticos e do professor não enfatizarem esse procedimento.

A tarefa do exercício 1 é obter as raízes do polinômio e nenhum dos alunos teve dúvidas sobre a equivalência dessa tarefa com a de resolver uma equação algébrica. Ao encontrarem três raízes nessa tarefa, não sabemos dizer se os alunos associam à conseqüência do teorema da decomposição que indica que seriam três raízes para a equação cúbica, ou se simplesmente sentem-se seguros por terem resolvido o exercício e não questionam se a quantidade de raízes está correta.

Análise *a posteriori* do Exercício 2, item a

Considere a seguinte equação polinomial: $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$.

a) Mostre que esta equação tem uma raiz racional e encontre esta raiz.

O estudo dos documentos e diálogos registrados das cinco duplas nos permitiu a análise que apresentamos a seguir.

Técnica 1 – Substituição de valores freqüentes

Verificamos que as duplas A e M, F e Ge fizeram a substituição pelo valor 1 e verificaram se era raiz. Além desse valor, F e Ge citaram 0.

Diálogo da dupla A e M

19 A Quarto grau. Mostre que esta equação tem uma raiz racional e encontre essa raiz. Um mais dois, três; mais um, quatro...
20 M ...menos sete... Um não dá.

Diálogo da dupla F e Ge

20 Ge Esse não dá para fazer pelo... não, não dá.
21 F Pelo quê?
22 Ge Quando 1 é raiz.
23 F Ah, sim. 'Mostre que essa equação tem uma raiz racional e encontre essa raiz'. Acho que vai ter que fazer... 1 não é raiz. Como tem termo independente, 0 também não é. A gente tem que pensar no seguinte: como a gente vai fazer esse? Por fatoração não dá. Então vamos tentar fazer... tá colocando em evidência também não dá.

A substituição por 1 mostra que os alunos não têm dúvidas sobre os números inteiros serem números racionais. Os alunos continuam tentando os valores inteiros cujo cálculo após a substituição na expressão é mais fácil. Quatro duplas fizeram a pesquisa de raízes racionais: G e C; A e M; E e D; F e Ge como supomos na análise a priori e que apresentamos a seguir.

Técnica 2 – Pesquisa de Raízes Racionais

A pesquisa de raízes racionais foi utilizada por quatro duplas, excetuando a dupla J e Y. As duplas G e C, A e M, E e D, cujas resoluções mostramos, verificaram quais dentre os possíveis valores era raiz usando o teorema de D'Alembert e o algoritmo de Briot-Ruffini.

Resolução da dupla E e D

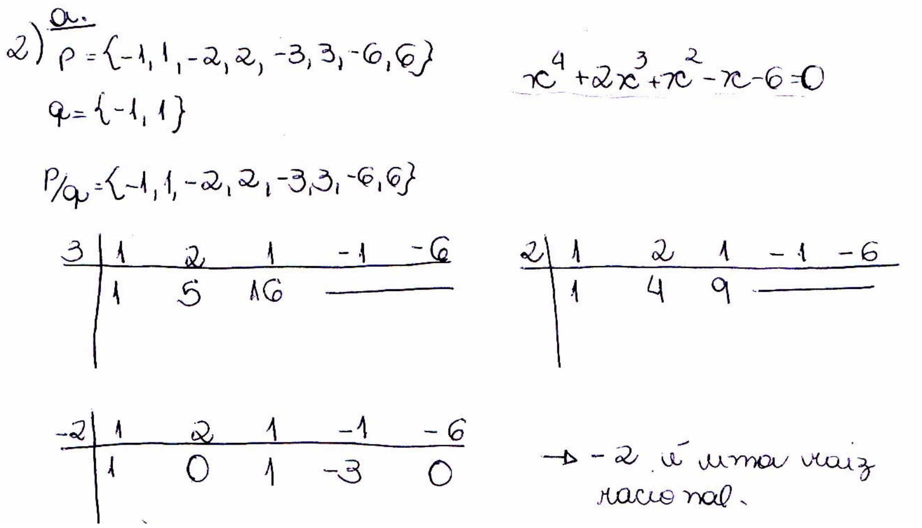


Fig. 17. Exercício 2 a - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla E e D

6	E	Acho que tem que fazer os... divisores do último termo e os divisores do primeiro né? -1; 1; -2; 2; -3; 3; -6; 6; q é só -1 e 1. Daí vai ficar igual a p. Agora tem que escolher desse aqui qual é divisível. Um não é. Talvez menos 1 dê. Não, menos 1 não vai dar. Eu acho que vai precisar tirar com p.
7	D	Vamos tentar com 3.
8	E	Dá 5; 15 mais 1 dá 16... 4... 8... Eu acho que tem que ser negativo para ir balanceando.
9	D	Tenta -2 que é o valor mais baixo.
10	E	Então fica 0, 1, -3...
11	D	-2 é uma raiz. É a raiz racional.

A dupla E e D cometeu, diríamos, um erro sintático ao usar equivocadamente o símbolo "=" ao invés de "$\in$" quando quis relacionar p, q e $\frac{p}{q}$ com os conjuntos aos quais pertenceriam.

Os alunos da dupla F e Ge, a seguir, pesquisaram as raízes racionais e verificaram por substituição conforme supomos na análise *a prior*i.

Resolução da dupla F e Ge

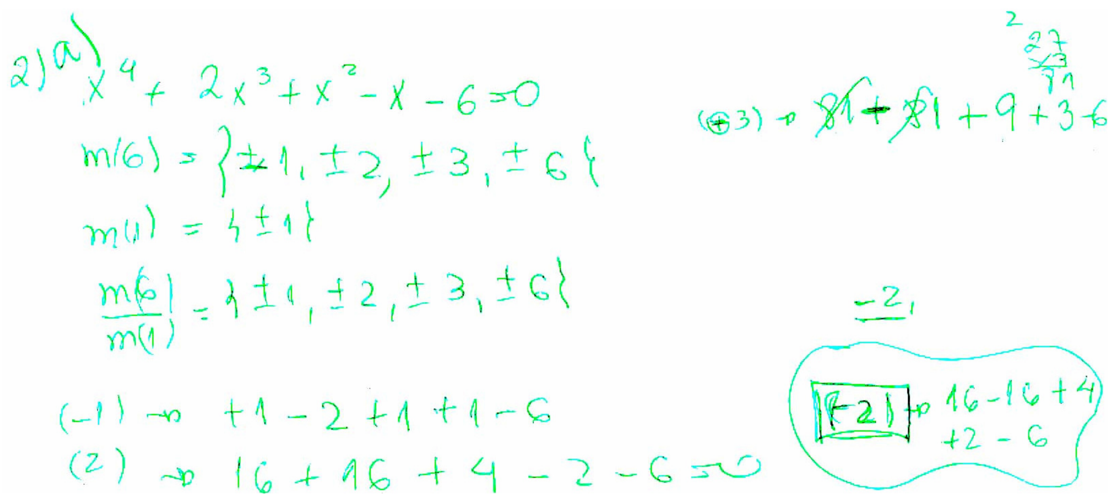


Fig. 18. Exercício 2 a - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla F e Ge

29 F Então os múltiplos de 6...
30 Ge Faz ± 1, ± 2, ±3 e ±6.
31 F ... ± 6. E os múltiplos de 1...
32 Ge ± 1. Vai dar a mesma coisa daí. Vai dar os de 6. (...)
35 F Então vamos colocar aqui: ± 1, ± 2, ±3 e ±6. Agora tem que... Briot-Ruffini?
36 Ge Vamos ver se uma dessas dá. Se uma dessas dá zero. 1 não vai ser de qualquer forma.
37 F 1 não dá; – 1: +1 – 2 + 1 + 1 – 6 não dá. Agora vamos tentar 2; 16 + 16 + 4... não vai dar, acho.
38 Ge É – 16 não é?
39 F Mais 16...
40 Ge Ah, você fez com 2. Eu fiz com –2.
41 F Tenta então – 2 e eu tento + 2. Eu acho que –2 vai dar. Não deu, + 2 não deu também. –2 o que deu?
42 Ge Deixe eu fazer aqui... Deu, deu certo. Então é só fazer Briot-Ruffini junto.

No diálogo os alunos diziam "múltiplos" ao invés de "divisores". Conseqüentemente cometeram um erro ao denominar de "m(1)", "m(6)" e "$\frac{m(6)}{m(1)}$" ao invés de "D(6)", "D(1)" e "$\frac{D(6)}{D(1)}$" o conjunto dos divisores de 6, de 1 e o quociente entre os valores dos divisores. Após a pesquisa das raízes racionais, a dupla F e Ge fez a verificação dos valores por substituição e obteve a raiz racional (– 2). Aplicando o teorema de D'Alembert, para obter o quociente, cujas raízes serão raízes do polinômio, fez a divisão por Briot-Ruffini. Ambas as maneiras foram previstas na análise *a priori*.

Divisão por Briot-Ruffini pela dupla F e Ge

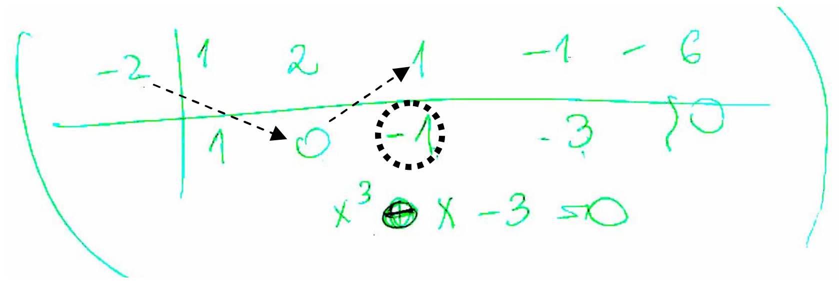


Fig. 19. Exercício 2 a - Resolução dos alunos

Notemos pelas nossas indicações que os alunos erraram ao efetuarem – 2.0 + 1 obtendo – 1 quando o correto seria 1.

Diálogo da dupla F e Ge

43 F Tentar já Briot-Ruffini?
44 Ge Eu vou fazer só para baixar...
45 F É melhor. $x^3 + x - 3 = 0$?
46 Ge Eu fiz alguma coisa errada.
47 F O que você fez de errado? –2... 0; 0 vezes –2 com +1...
48 Ge – 1.
49 F – 1.
50 Ge 2...
51 F Ué? Com calma! –2 com 2 é 0; 0 vezes –2 é –2 com +1 é –1; é – x.
52 Ge Ahã! Aqui é – x + x...
53 F –1... dá +2; + 2 com – 3... aqui vai dar errado. Por quê?
54 Ge Boa pergunta. Acho que a gente fez alguma coisa errada aqui.
55 F Será que é isso mesmo? $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$. Vamos tentar fazer de volta. – 2 é mesmo, certeza absoluta? Pior que dá. –2 está certo. –2 é raiz mesmo.

Após terem encontrado e confirmado a raiz – 2 pela pesquisa de raízes racionais, ao tentarem baixar o grau pela aplicação do teorema de D'Alembert e Briot-Ruffini, os alunos F e Ge erraram no cálculo durante a aplicação do dispositivo e foi preciso confirmar pelo método da chave.

Divisão pelo método da chave pela dupla F e Ge

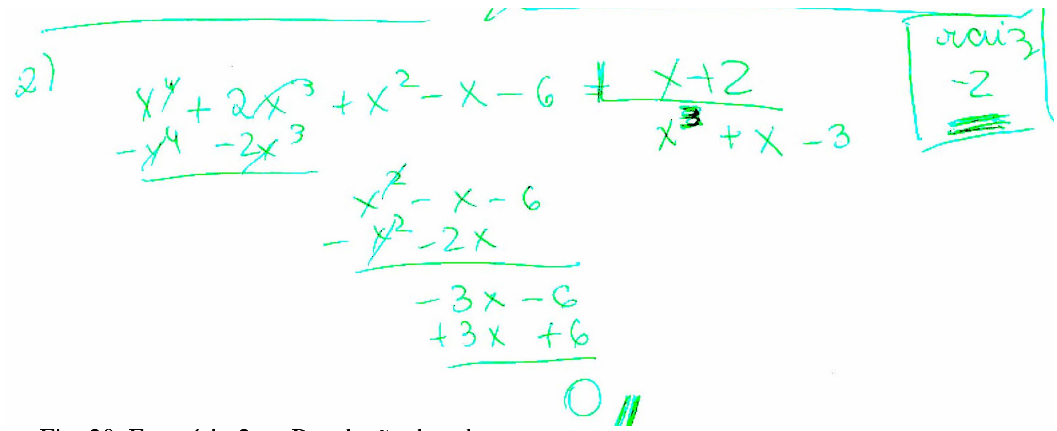


Fig. 20. Exercício 2 a - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla F e Ge

73 F A gente não errou Briot-Ruffini. Muito estranho. Vamos começar desde o início de volta. Você achou alguma coisa? (...)
77 F Não tem como errar isso. Tá, vamos testar. Se deu resto é porque não é divisível.
78 Ge Por –2 teria que dar 0. Eu vou fazer por divisão normal. Eu vou fazer por chave mesmo que é mais garantido. (...)
80 Ge Eu vou dividir por x – 2... por x + 2. Se –2 é raiz, então divide por x + 2. (...)
86 Ge Vai dar.
87 F Beleza. Agora eu quero ver a partir daqui.
88 Ge A gente errou Briot-Ruffini.
89 F Ou a gente não pode fazer por Briot-Ruffini. Ter errado Briot-Ruffini é meio difícil. Vamos pensar aqui. Como a gente vai fazer agora? Não é 1 a raiz. Ah, chutar 6... Não vai dar.

Conforme o diálogo, a dupla F e Ge julga difícil errar o algoritmo de Briot-Ruffini e chegou a afirmar em 89. F. "Ou a gente não pode fazer por Briot-Ruffini. Ter errado Briot-Ruffini é meio difícil."

Uma vez descoberta uma raiz r isso indica que o polinômio correspondente à equação é divisível por x – r (teorema de D'Alembert). Com isso, o algoritmo de Briot-Ruffini para a divisão por x – r é uma técnica prevista na análise *a priori*. Como tal técnica é usada com freqüência, os alunos sentem-se seguros em empregá-la questionando até mesmo se outras técnicas que adotaram foram utilizadas corretamente.

Outras técnicas

Na análise *a posteriori* das resoluções do exercício 2, item a, pelas duplas, constatamos mais algumas técnicas empregadas.

Relações de Girard

A dupla G e C pensou em usar uma das relações de Girard, conforme o diálogo mas não perceberam que sem informações sobre as raízes, como no exemplo de tarefa do livro didático, as relações resultam em um sistema de equações não lineares cujo desenvolvimento só comprovaria as igualdades das equações desse sistema.

67	G	A soma das raízes é positiva quando a raiz é racional. Faz dar aí.
68	C	- b sobre a é 2. É menos 2. Não é então. A soma dá negativo.
69	G	Tem alguma coisa relacionada com isso.

A dupla J e Y também pensou nas relações de Girard, assim como G e C, e na pesquisa de raízes racionais, mas não chegou a tentar resolver de nenhum desses modos. A dupla decidiu tentar a resolução pela divisão por Briot-Ruffini chamando a raiz genericamente de *a*.

Tentativa de resolução da dupla J e Y

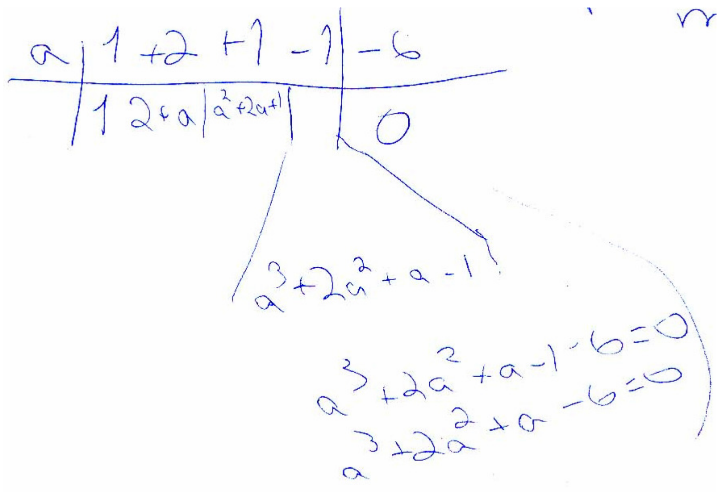


Fig. 21. Exercício 2 a - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla J e Y

27 J (...) Mostre que esta equação tem uma raiz racional e encontre esta raiz. Tá, vamos tentar o Girard de novo.
28 Y Não, quer dizer você tem quatro incógnitas. Dá para tentar Girard, mas eu acho que não é assim, sei lá. Pesquisa de raízes, tá aqui. Seja p/q com p e q inteiros, p/q é uma raiz racional. (...)
30 Y Precisava ter uma raiz para fazer aquilo. Será que tem como fazer o inverso? Partir do zero assim?
31 J Tem que ter alguma raiz ou alguma coisa que se divida.
32 Y Tá e se a gente fizer assim: usar lá o 'carinha' Briot-Ruffini só que botar tipo *a* a raiz? Tentar dividir. Tem que chegar no zero. Vamos tentar fazer isso aqui. 1, +2, +1, -1, -6; a vezes 1, a. Mais 2, é 2+a. a vezes 2+a, 2a + a^2... é a^2 + 2a mais 1. Vezes a: $a^3 + 2a^2 + a - 1 - 6$ tem que ser igual a zero.

A expressão $a^3 + 2a^2 + a – 1 – 6$ foi igualada a zero incorretamente. Admitindo-se a raiz *a*, na continuação do algoritmo de Briot-Ruffini usado pela dupla J e Y, o resto $a^4 + 2a^3 + a^2 – a – 6$ é que deve ser igual a 0, o que equivale à equação inicial. Os alunos J e Y continuaram pensando na divisão, agora pelo método da chave, como indica o diálogo.

38 Y E se a gente fizer aquele jeito de dividir lá: q(x), p(x)
J Como? Pelo o quê a gente está dividindo entendeu? Se a gente tivesse pelo o quê
39 dividir a gente teria uma raiz, esse é o problema!

Como percebeu o aluno J, é necessário que se tenha uma raiz do polinômio, que é a raiz do divisor. As demais raízes do polinômio são as mesmas raízes do quociente obtido pela divisão exata.

Resolução da dupla J e Y

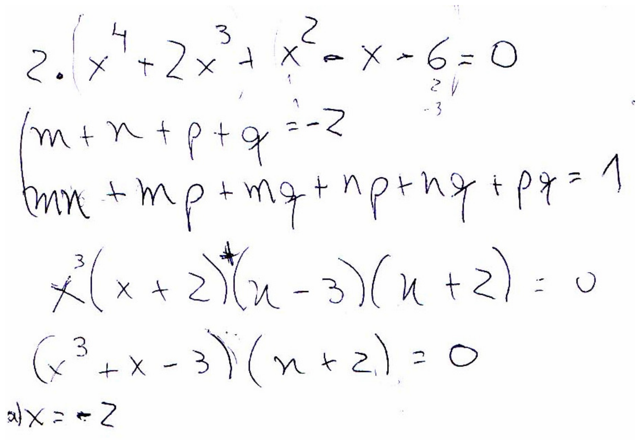


Fig. 22. Exercício 2 a - Resolução dos alunos

A dupla J e Y viu a possibilidade de fatorar o trinômio de 2.º grau e então para $x^4 + 2x^3$ colocou x^3 em evidência e lembrou que $ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2)$, onde $a \neq 0$ e x_1 , x_2 são raízes do trinômio e fizeram $x^2 - x - 6 = (x - 3).(x + 2)$. Não supomos essa técnica na análise *a priori*.

Diálogo da dupla J e Y

43 J Olhe Y. Não sei se é certo fazer isso aqui: $x^3 + x - 3$ vezes x + 2, igual a 0.

44 Y x + 2 igual a 0; -2 vai ser uma raiz. Piá é bem isso. Uma raiz é -2. Como é que você fez isso?

45 J Fiz em duas partes. Coloquei x^3 em evidência. Daí ficou x^3 vezes x + 2; mais... daí eu resolvi isso aqui. Eu fatorei: x - 3 vezes x + 2.

46 Y É eu tinha pensado em fazer tipo 2x + 2 mas eu não me lembrei... Daí o outro vai ser... 3 não é? É melhor a gente resolver aqui. Uma raiz é -2 e a outra é 3.

47 J Como é 3?

48 Y x é - 3.

49 J Não, não, não. Esse aqui a gente tem que resolver. Uma raiz é x... -2.

A dupla quis verificar pelo dispositivo de Briot-Ruffini se –2 era raiz da equação. Em seguida verificaram se –2 era raiz novamente (se fosse raiz teria multiplicidade 2) e concluíram que não, chegando ao quociente $x^3 + x - 3$.

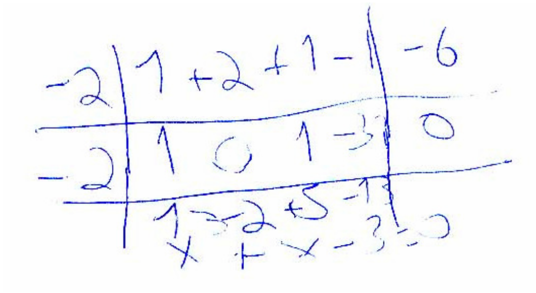


Fig. 23. Exercício 2 a - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla J e Y

50 Y Agora dá para fazer Briot-Ruffini: -2, 1, +2, +1, -1, -6. Um vezes -2 é -2, mais 2 é 0; -2 vezes 0 é 0 mais 1 é 1; -2 e - 1 é -3; 6... deu bem certinho aqui tá! Faz Ruffini aqui: 1, 0, 1, -3... resto 0. Menos 2 é raiz mesmo. (...)

53 J A gente chegou aqui, no mesmo lugar; em x ao cubo. ... Ah aqui. Divida essa aqui por -2.

54 Y Daquele jeito lá. Não ao contrário. Na equação é que põe -2. Tem que ver se essa é raiz: ... + 2 - 3 = 0. 2 ao cubo é 8. Tô provando que não é raiz.

55 J É - 2.

56 Y Então, -2; -5. Dessa equação não é raiz.

57 J Mas se é raiz desta aqui, é raiz dessa também.

58 Obs Você poderia explicar quando diz 'raiz desta aqui', qual 'desta aqui'?

59 Y Ah, é da equação inicial.

60 Obs E depois, da outra?

61 J A mesma da fatorada. Você pode usar a mesma. Vamos tentar né?

62 Y Tem que ver. Se não der zero não é raiz. - 2 mais 0, -2; 4 mais 1, 5; -2 vezes 5 dá -10; menos 3 dá -13.

63 J Não deu então.

64 Y Bom a gente provou que tinha uma raiz racional e encontramos ela. Metade está feito; é a letra a. Mostre que essa equação tem uma raiz irracional.

Ao aplicarem Briot-Ruffini pela segunda vez para verificar se – 2 era raiz, os alunos J e Y ficaram uma dúvida quando perceberam que não era. Se fosse raiz do quociente obtido, então a raiz – 2 teria multiplicidade 2. Como estavam seguros da técnica que utilizaram para descobrir essa raiz racional, permaneceram na dúvida e seguiram na resolução da próxima tarefa.

Conclusão da análise *a posteriori* do Exercício 2, item a

Todas as cinco duplas de alunos chegaram à solução correta da equação. Quatro duplas usaram a técnica da pesquisa de raízes racionais seguida pela verificação por substituição ou por divisão como supomos na análise *a priori*. A dupla dos alunos J e Y utilizou uma técnica que não supomos que foi a fatoração do trinômio de 2.º grau e a fatoração do polinômio correspondente à equação. Como os alunos descobriram que a raiz é o número inteiro – 2 e não questionaram que é também um número racional de acordo com a tarefa, acreditamos que eles sabem da inclusão de Z em Q ($Z \subset Q$).

Análise *a posteriori* do Exercício 2, item b

Considere a seguinte equação polinomial: $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$. b) Mostre que esta equação tem uma raiz irracional.

O estudo dos documentos e diálogos registrados das duplas de alunos nos permitiu a análise que apresentamos a seguir.

Técnica – Divisão pelo algoritmo de Briot-Ruffini e pesquisa de raízes racionais

A dupla G e C concluiu que poderia existir raízes imaginárias e que portanto haveria mais uma raiz real. Porém não admitiram de início que poderia ser um número irracional.

Diálogo da dupla G e C

91 G Mostre que essa equação tem uma raiz irracional. Tá a gente poderia continuar usando uma dessas daqui para poder continuar usando para poder abaixar o grau. Se –2 é raiz, o 2 também não é?

92 Obs Como é que é G? O que você falou aí?

93 G A gente vai tentar achar a outra raiz para abaixar o grau para do segundo. Daí como o –2 é raiz, o conjugado é raiz, não é? Daí 2 é raiz!

94 C Imaginário!

95 G Ah, imaginário! Tá mas vamos tentando do mesmo jeito! [risos]

99 C É do 3.º grau. Se uma raiz é imaginária a conjugada também é; *então tem mais de uma raiz racional.* (grifo nosso)

A seguir, como supomos, verificaram as possíveis raízes racionais pelo algoritmo da divisão de Briot-Ruffini.

Verificação das possíveis raízes racionais pela dupla G e C

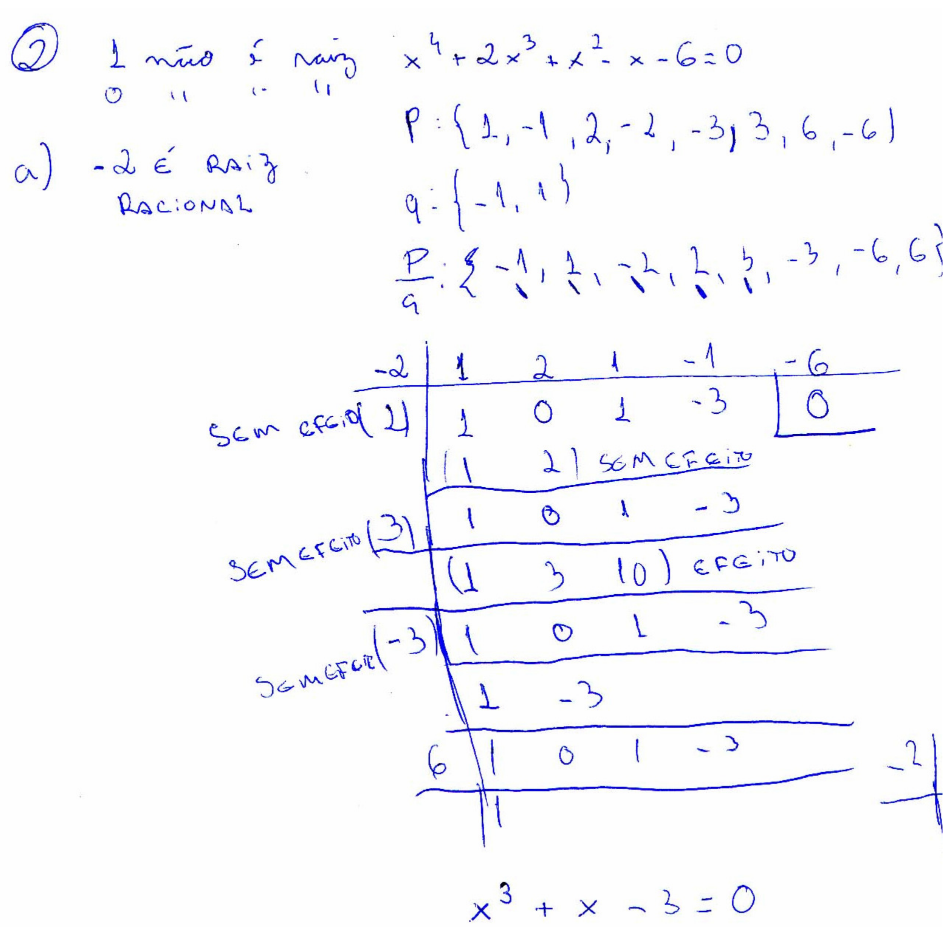


Fig. 24. Exercício 2 b - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla G e C

100 G Tenta o 2. Não é. Agora tenta o 3. Vai tentando!
101 Obs O que vocês estão tentando achar?
102 C É que é assim né: tem quatro raízes; uma é racional e aqui pede para mostrar que tem uma irracional. Se ela tem uma irracional a conjugada também é raiz.
103 Obs Então leia bem. Concentração na leitura e naquilo que fala.
104 G Então baixa aí!
105 Prof. Vocês testaram todas as raízes racionais? Vocês testaram todas as possíveis raízes racionais?
106 C Sim.
107 G Porque p sobre q deu todos os valores possíveis. Daí a gente testou e só – 2 é que deu.
108 Prof. O que vocês podem concluir então?
109 C Que só tem uma. Uma raiz racional.
110 Prof. E as outras?
111 G/C São irracionais... Não! Duas...

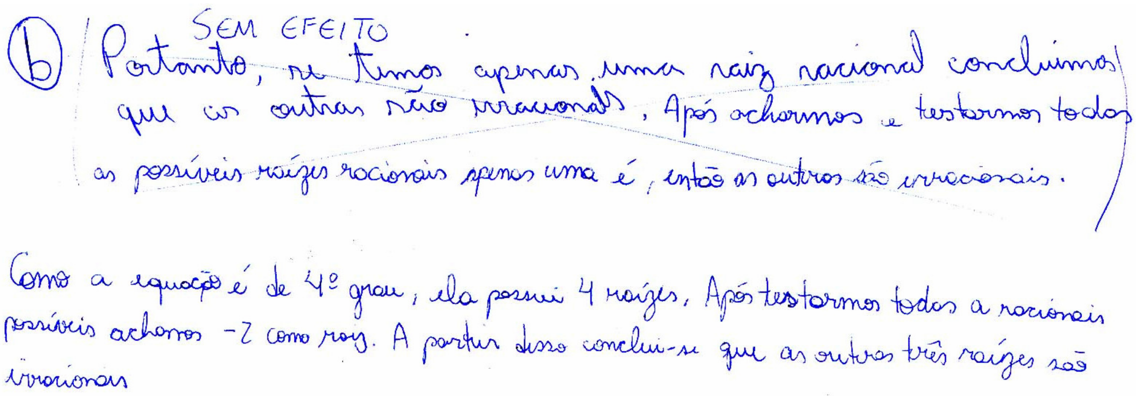
Nota-se aqui a confusão entre irracionais e imaginários conjugados, conforme as frases de número 102 a 111 do diálogo. Isso ocorreu porque havia sido ensinado pelo professor da turma o Teorema das Raízes Irracionais: "Se uma equação algébrica de coeficientes racionais admite a raiz irracional $a+\sqrt{b}$, então admite $a-\sqrt{b}$ como raiz também." Para esclarecer isso, o professor faz perguntas a fim de que os alunos cheguem a uma conclusão.

113 C Não pode ter três raízes irracionais.
114 G Se ela tiver uma então ela tem duas. (risos)
115 C Tem algo errado aqui.
116 Prof Vocês estão apontando para um teorema do livro: das raízes irracionais. Como tem que ser essa raiz irracional?
117 G $a+\sqrt{b}$ e $a-\sqrt{b}$
118 Prof. Vocês descobriram que os outros valores racionais não são raízes. Qual é a conclusão a partir disso?
119 C Só tem uma racional. Que as outras são irracionais.
120 Prof. Essa é a conclusão ou vocês estão em dúvida?
121 G A gente está em dúvida.
122 Prof. Qual a dúvida sobre isso?
123 C Se as outras são irracionais mesmo. Porque ela tem que ter quatro raízes.
124 G A raiz –2 é de multiplicidade um. Então ela não vai se repetir. Uma raiz irracional tem o conjugado que também é uma raiz. A gente está em dúvida só sobre essa outra.
125 Prof. Vocês estão falando "o conjugado da raiz irracional". Toda raiz irracional apresenta o conjugado como raiz também?
126 G O teorema aqui diz. "Se uma equação admite a raiz $a+\sqrt{b}$ então admite $a-\sqrt{b}$ como raiz".
127 Prof. Todos os números irracionais têm a forma $a+\sqrt{b}$?
128 G Não!? Hum!

129 Prof. Quantas raízes ainda têm para vocês acharem?
130 C Três.
131 Prof. Alguma dessas três é racional?
132 G/C Não.
133 C Não porque a gente já tentou todas as possíveis racionais.
134 Prof. Alguma dessas três é complexa não real ou real? Você pode afirmar isso?
135 G Não!? Não sei. [risos]
136 Prof. Continuem. Podem continuar.
137 C Tá, olha aqui. Se tem uma raiz irracional e a gente não tem certeza que são racionais, então elas são irracionais... não é?
138 G Então a gente pode afirmar que tem uma raiz irracional mostrando que as outras não são racionais. Não pode?
139 C Ele não pediu qual.
140 G É, então põe aí.
141 Obs Qual é a conclusão 1B?
142 C Se a gente tem só uma raiz racional, as outras raízes são irracionais.
143 Obs Quer dizer que as outras são irracionais. Mas pede para mostrar não é.
144 C É. "Mostre que"!
145 G Tá então põe aí ó.
146 C Tá mas "mostre que" não diz que você tem que mostrar a raiz certo?
147 G Só "provar que..."
148 C Mostre que tem uma raiz irracional. Você tem que provar que...
149 G Porque de todas as racionais possíveis só tem uma. Como é uma equação de 4.º grau, ela tem que ter quatro raízes. Como uma é racional e mais nenhuma é racional, as outras são irracionais.
150 C Será que isso basta?

A dupla G e C chegou à conclusão correta de que não existia mais nenhuma raiz racional. Como mostramos na análise *a priori,* supomos que a dupla chegasse à conclusão de que das três raízes restantes, como conseqüência do teorema das raízes complexas, no máximo duas poderiam ser raízes imaginárias, logo haveria uma raiz irracional. O teorema das raízes irracionais para equações de coeficientes racionais ensinado pelo professor da turma como uma nova tecnologia, fez com que os alunos G e C admitissem todos os irracionais como sendo da forma $a \pm \sqrt{b}$. Com a intervenção do professor perceberam esse erro e concluíram que poderia ser de outras formas, no entanto precipitaram-se ao admitir que as raízes restantes por não serem racionais seriam irracionais, esquecendo a possibilidade de existirem duas imaginárias. De fato, conforme mostramos no estudo de livros didáticos, os exercícios envolvendo raízes racionais, irracionais e possíveis raízes imaginárias não são freqüentes, lembrando que os números negativos, os irracionais e os imaginários não eram aceitos quando surgiram durante o desenvolvimento histórico dos conceitos relacionados ao objeto equações.

Resolução da dupla G e C


(b) SEM EFEITO

~~Portanto, se temos apenas uma raiz racional concluimos que as outras são irracionais, Após acharmos e testarmos todos as possíveis raízes racionais apenas uma é, então as outras são irracionais.~~

Como a equação é de 4º grau, ela possui 4 raízes, Após testarmos todos a racionais possíveis achamos −2 como raiz. A partir disso conclui-se que as outras três raízes são irracionais

Fig. 25. Exercício 2 b - Resolução dos alunos

A dupla A e M concluiu rapidamente que não havia mais raízes racionais. Logo, as demais seriam irracionais ou imaginárias.

Diálogo da dupla A e M

26	M	(...) Letra b: Mostre que essa equação tem uma raiz irracional.
27	A	Uma raiz irracional. Vai ter mais então. Dá para escrever um texto aqui. Porque de acordo com a pesquisa da... se com o método da pesquisa não foi encontrada outra raiz racional só restam outras raízes irracionais.
28	Prof.	Como você sabe que têm mais raízes reais e que devem ser irracionais?
29	A	Bom, nós chegamos e reduzimos esta de quarto grau do enunciado para uma de terceiro. Então tem três raízes. Repetidas ou não. Seguindo o método da pesquisa de raízes...
30	M	Nenhuma mais é racional.
31	A	Nenhuma mais vai ser raiz do problema, então só restam raízes irracionais.

O professor, percebendo a conclusão precipitada de que as raízes restantes seriam todas irracionais, intervém e pergunta porque não poderiam ser imaginárias.

32	Prof.	Você disse que é de grau três e tem mais três raízes.
33	M	Isso. A gente reduziu.
34	Prof.	Como vocês sabem que elas não são todas complexas?
35	A	Porque mais nenhuma possibilidade da pesquisa de raízes apresentou-se como uma raiz propriamente dita.

36 Prof. Vocês disseram que tem mais três raízes. E concluíram que uma é irracional. Por que as três não podem ser complexas?
37 A Porque a complexa tem... Bom, se há uma complexa, há outra... como é o nome? Aquela que tem um traço em cima? Conjugada!?
38 M Conjugada!
39 A Uma *irracional* tem que ter conjugada. (grifo nosso)
40 M Tem que ter duas. Pode ser duas.
41 A Não pode ter a terceira separada.
42 Prof. Está bem.
43 M Escreve então. Como só tem a possibilidade de ter duas imaginárias complexas, uma tem que ser irracional.
44 A Então eu vou escrever um testamento. (...)

Nota-se na frase número 39 que o aluno quis dizer imaginário, confirmado pela frase número 43. A dupla apresentou a resposta a seguir, onde se percebe uma pequena confusão entre irracionais e complexos imaginários, mas corrigido ao final.

Resolução da dupla A e M

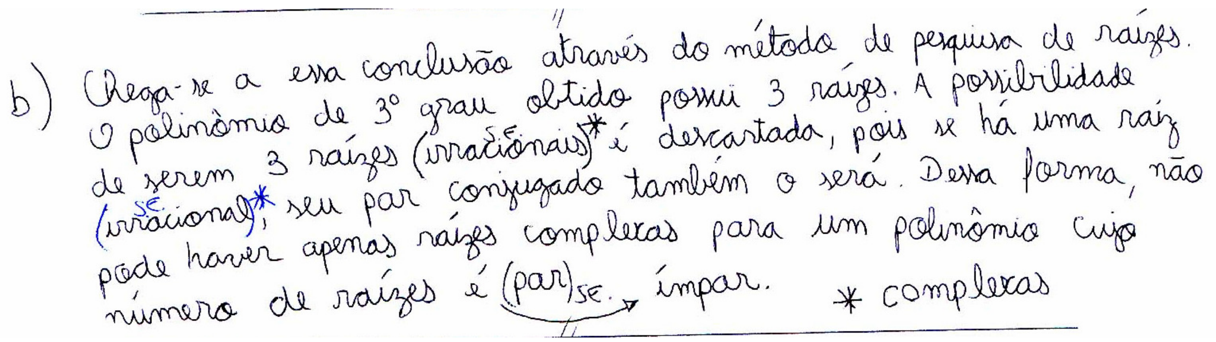

b) Chega-se a essa conclusão através do método de pesquisa de raízes. O polinômio de 3º grau obtido possui 3 raízes. A possibilidade de serem 3 raízes (irracionais)* é descartada, pois se há uma raiz (irracional)* se seu par conjugado também o será. Dessa forma, não pode haver apenas raízes complexas para um polinômio cujo número de raízes é (par) se. ímpar. * complexas

Fig. 26. Exercício 2 b - Resolução dos alunos

Após encontrarem a raiz racional e terem feito a divisão do polinômio correspondente à equação, a dupla E e D procurou as raízes do quociente $x^3 + x - 3$. Para isso continuaram verificando os possíveis valores racionais, obtidos pela pesquisa de raízes, no algoritmo da divisão de Briot-Ruffini.

Resolução da dupla E e D

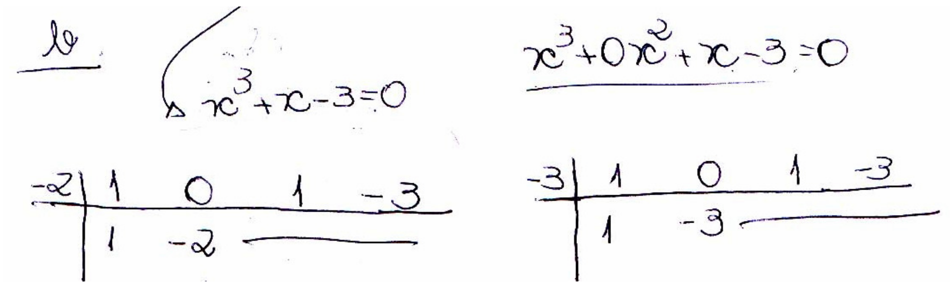


Fig. 27. Exercício 2 b - Resolução dos alunos

A dupla verificou que não havia mais raízes racionais e admitiu a existência de raízes irracionais. Na realidade não necessitava utilizar – 2 como mostra a resolução pois os únicos valores inteiros possíveis de serem solução de $x^3 + x - 3 = 0$ são $\{\pm 1; \pm 3\}$. A dupla não usou a conseqüência do Teorema das Raízes Complexas e procurou obter a raiz irracional.

Diálogo da dupla E e D

51 D Temos três raízes: x_1 , x_2 e x_3. E se a gente usar Girard? Só que vai ficar muito grande.

52 E Se ela tiver uma irracional ela vai ter que ter uma oposta à outra. Ela não pode ter imaginária também senão ia ter que ter duas imaginárias. Então ela deve ter uma raiz de multiplicidade 2. Deve ter uma raiz que seja dupla. Bem, talvez por Girard dê para a gente fazer. Tá então vamos chamar as raízes de a + ...

53 D Não. Chama de x_1 , x_2 e x_3.

54 E Não. É na forma irracional. Que a gente coloca a raiz e já vai anular. Se a gente tiver uma raiz que seja $a + \sqrt{b}$ a outra raiz com certeza vai ser com certeza $a - \sqrt{b}$. E na hora de somar a gente já vai anular a raiz; na hora de colocar na relação de Girard. Só que tem uma raiz que a gente não conhece. Não, mas vamos fazer então. Tá, e a outra raiz a gente vai chamar de...

Para obter a raiz irracional, chamou-a de $a + \sqrt{b}$ e admitiu a existência da conjugada, como fez a dupla G e C, indicando a confusão existente entre o teorema das raízes irracionais e o teorema das raízes complexas imaginárias.

A dupla E e D prosseguiu utilizando as Relações de Girard agora com as raízes irracionais.

Resolução da dupla E e D

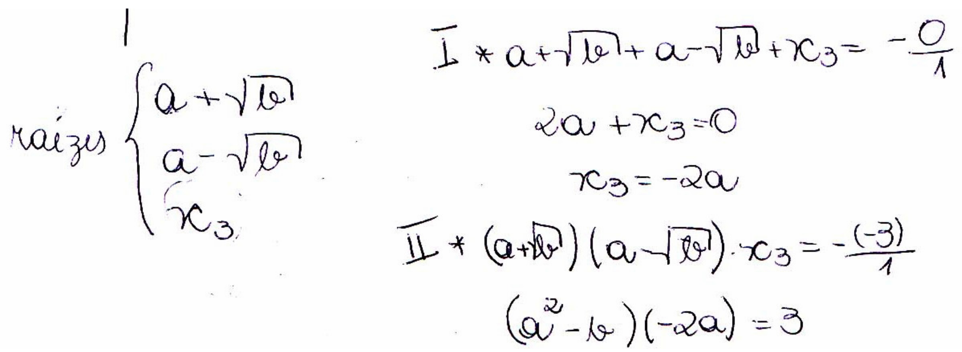


Fig. 28. Exercício 2 b - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla E e D

55 D Chama de x_3. Fica 2a... Tá põe a + $\sqrt{b}$ + a – $\sqrt{b}$ + x_3 igual a menos...

56 E É. Aí vai dar zero. Menos 0 sobre 1; 0. Vai ficar 2a + x_3 = 0. Tá. Então aqui já dá para colocar que x_3 = – 2a. Porque na hora de usar x_3 já põe 2a.

58 E Multiplicação se a gente fizer vai ficar com b também né. Mas olhe, daí a gente faz... se a gente for multiplicar tudo vai ficar a + $\sqrt{b}$ vezes a – $\sqrt{b}$ vezes x_3 vai ter que ser igual a – (– 3) sobre 1. Então vai ficar o quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo menos b, vezes – 2a que é o x_3 ...

59 D ...igual a 3. Vamos ter que fazer a outra.

60 E a + $\sqrt{b}$ vezes a – $\sqrt{b}$ mais a + $\sqrt{b}$ vezes x_3 mais a – $\sqrt{b}$ vezes x_3 vai ser igual a 3 sobre 1.

64 E Aqui a gente pode chamar de – 2a e aqui também de – 2a. Daí vai ficar $-2a^2$ – $2a\sqrt{b}$. Aí vai ficar – $2a^3$, cubo não, ao quadrado... mais $2a\sqrt{b}$ ... igual a 1.

66 E É. Esse com esse, o $2a\sqrt{b}$ ... Esse também vai cancelar... não, aqui fica mais. Continua igual. Então vai ficar a^2 – b...

74 E Então aqui é a^2 – b vezes – 2a igual a 3. Vai ficar 1 + ... Sabe onde a gente vai chegar, eu acho? Em uma equação do 3.º grau comum. Vamos ver. $4a^2$ vezes –2a igual a 2. Vai ficar *– 2a – 8a³ = 3* (grifo nosso). $8a^3 + 2a - 3 = 0$. Chegamos em uma equação do 3.º grau igual.

Logo no início da aplicação das relações de Girard, a dupla já havia chegado em x_3 = – 2a. Substituindo na equação $x^3 + x - 3 = 0$, para a qual se busca solução, obtém-se $8a^3 - 2a - 3 = 0$, semelhante à grifada por nós na frase número 74.

Os alunos E e D obtiveram a equação $-2a - 8a^3 = 3$. No momento de explicitá-la erraram os sinais e escreveram $8a^3 + 2a - 3 = 0$ ao invés de $-8a^3 - 2a - 3 = 0$. Para solucionar a equação $8a^3 + 2a - 3 = 0$ tentaram novamente a pesquisa de raízes racionais e o algoritmo de Briot-Ruffini.

Resolução da dupla E e D

$$(a^2 - b)(-2a) = 3$$
$$(1 + 4a^2)(-2a) = 3$$
$$-2a - 8a^3 = 3$$
$$8a^3 + 2a - 3 = 0$$

$$\left(a = -\frac{3}{4}\right)^{\text{SEM EFEITO}}$$

$$p = \{-1, 1, -3, 3\}$$
$$q = \{-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8\}$$
$$\frac{p}{q}\left\{\pm 1, \pm 3, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 1/8, \pm 3/2, \pm 3/4, \pm 3/8\right\}$$

S. E.

$$\begin{array}{c|ccc} 3/2 & 8 & 2 & -3 \\ \hline & 8 & 14 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 3/4 & 8 & 2 & -3 \\ \hline & 8 & 8 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 3/8 & 8 & 2 & -3 \\ \hline & 8 & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} -3/4 & 8 & 2 & -3 \\ \hline & \underbrace{8 \quad -4} & & 0 \end{array}$$

Fig. 29. Exercício 2 b - Resolução dos alunos

Percebemos que a dupla não notou que resolver a equação $-8a^3 - 2a - 3 = 0$ não levaria à raiz irracional de $x^3 + x - 3 = 0$ mas a faria obter somente o valor de a, parte do número $a + \sqrt{b}$, que admitiu equivocadamente como a forma geral dos números irracionais, a mesma raiz procurada para a equação $x^4 + 2x^3 + x - x - 6 = 0$ e para a equação $x^3 + x - 3 = 0$.

Constatamos na frase número 92 do diálogo adiante, que depois os alunos entenderam que não estavam efetivamente obtendo a raiz mas parte do número irracional que eles admitiriam ser a solução.

Diálogo da dupla E e D

80 E A gente já fez aqui. p vai ser – 1 e 1; – 3 e 3; q: – 1 e 1; – 2 e 2...

81 D ... – 4 e 4; – 8 e 8. (...)

86 E Vamos colocar no Briot-Ruffini: oito, dois, menos três. Aqui nenhum inteiro pode ser.

87 D Chuta 1/2.

88 E 1/2, mas daí só vamos ter valores pares. Multiplicar par e somar par vai dar, e daí o –3 ? Tem que ser um desses aqui: 3 dividido por alguma coisa.

89 D Então vamos tentar 3/2.

90 E Oito vezes 3/2 vai dar 4... 12; não vai dar... 7 vezes 3... Vamos tentar com 4... 3/4; 8 daí dá 6 com mais 2, 8 de novo, daí dá 6 com – 3... não vai dar. 3/8! Vai dar 3 com mais 2, 5. Aí vai ficar 15/8. 3/4 negativos. É, eu acho que vai dar certo. 8, 2, –6... com mais 2 dá –4, vezes... vai dar zero. Certo!

91 D –3/4 é uma raiz.

92 E Não, é um valor de a.

A dupla E e D esqueceu do coeficiente 0 de x^2. Resolveram novamente a equação $x^3 + x - 3 = 0$, com $x_3 = -2a$, mantendo o erro anterior quanto ao sinal.

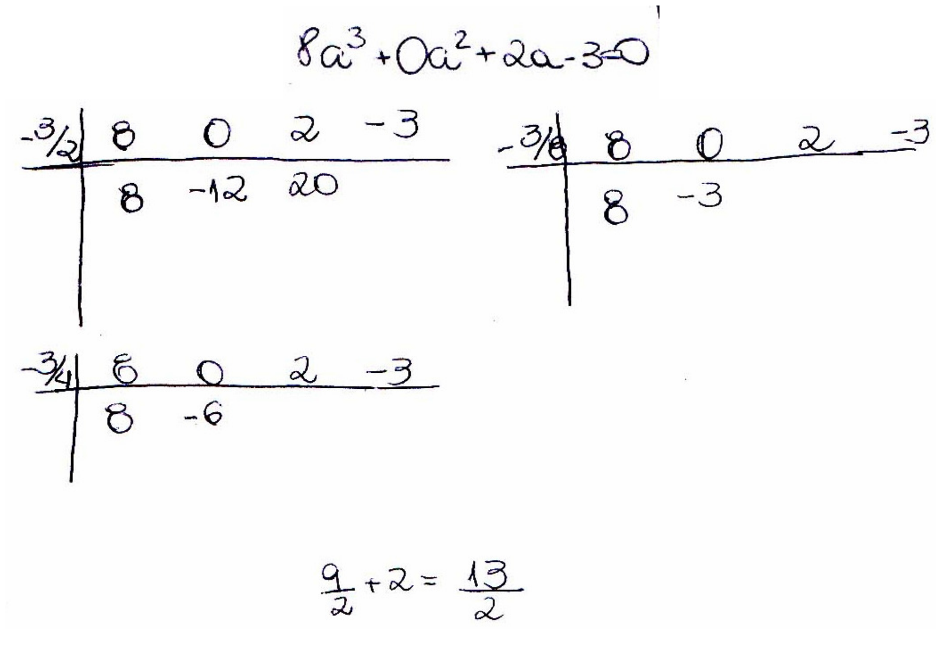


Fig. 30. Exercício 2 b - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla E e D

94 E a igual a –3/4. Mas aqui a gente vai ter mais dois valores para a. Aqui a gente ficou com... Não! Deu errado. Porque a gente esqueceu do x^2 do a^2.
95 D Puxa. Então escreve de novo.
96 E 8, 0, 2, –3.
97 D Começa por aqui: mais 3/4. Não começa pelo número negativo.
98 E Vamos começar por –3/2. Aqui vai ficar 8, –12... hum, já não vai dar.
99 D –3/4.
100 E Acho que –3/8 porque se –3/4 deu aqui provavelmente não dê agora.
101 D ... 9/8
102 E 9/8 com mais 2...
103 D Não vai dar.
104 E Então vamos fazer com –3/4. 8, aqui vai dar –6... vai dar 9/2 mais 2, igual a 13/2. Também não vai dar certo. Olhe aqui no número 3 ele vai pedir a raiz de uma equação do 3.º grau mas ele está dando uma explicação. Vamos passar para o número 3 e depois a gente volta para o número 2. (...)

Os alunos E e D observaram que no exercício 3 havia uma equação do 3.º grau para resolver, assim como a que estavam tentando solucionar, com uma orientação: o Teorema de Bolzano. Por esse motivo deixaram o exercício 2, item b, e passaram ao exercício 3.

Para provar a existência da raiz irracional, a dupla J e Y tenta obtê-la admitindo a existência da irracional e da conjugada. Os alunos J e Y não denominam o número irracional de forma geral e tentam utilizar as relações de Girard.

Resolução da dupla J e Y

$$m + n + p + q = -2$$
$$mn + mp + mq + np + nq + pq = 1$$
$$mnp + mnq + npq = +1$$
$$mnpq = -6$$

Fig. 31. Exercício 2 b - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla J e Y

64 Y Bom a gente provou que tinha uma raiz racional e encontramos ela. Metade está feito; é a letra a. Mostre que essa equação tem uma raiz irracional.
65 J Se a gente achar uma raiz irracional, a gente vai ter as duas que é o conjugado. Agora tem que achar a raiz irracional.
66 Y A gente tem a equação fatorada.
67 J Se a gente tem uma aqui... m, n, p, q... dá para fazer por...
68 Y Girard! É trabalhoso!
69 J Faz aí por Girard.
70 Y Deixa eu só pegar I; é mais rápido.
71 J Você vai ficar com três equações. Não. Quatro equações. Falta uma aqui.
72 Y d/a. Que é -6. Agora sabe que uma das raízes é -2.

A dupla J e Y tinha encontrado a raiz racional – 2 e utilizou-a para reescrever as relações e tentar resolver o sistema de equações não lineares que surgiu. Os alunos não percebem que, se não for dada no exercício uma informação das raízes, as relações de Girard não são uma técnica adequada para resolução.

Resolução pela dupla J e Y

$mnpq = -6$

I $-2mpq = -6$

$mpq = 3$

$-p-q(pq) = 3$

$-p^2 - pq - pq - q^2 = 3$

$-p^2 - 2pq - q^2 = 3$

II $-2m + mp + mq + (-2)p - 2q + pq = -1$

$-2(mpq) + mp + mq + pq = -1$

$-6 + mp + mq + pq = -1$

$mp + mq + pq = 5$

III $mnp + mpq + 3 = 1$

$(-2mp + mpq (+3) = (1))$

$\cancel{2m}$

$-2mp + mpq = -2$

$mp(-2+q) = -2$

$(-p-q)p(-2+q) = -2$

$(-p^2 - pq)(-2+q) = -2$

IV $-m - 2 + p + q = -2$

$m + p + q = 0$

$-m = +p + q$

Fig. 32. Exercício 2 b - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla J e Y

73 J Põe −2 em alguma: m, n, p ou q.
74 Y Como n; −2mpq... mpq sabe que é 3. E agora...
75 J Nas outras também.
76 Y −2m + mp + mq + (−2p) − 2q + pq = −1. Vamos deixar o −2 em evidência. -2mpq. Dá 3, mpq; + mp + mq + pq = −1; −6 + mp + mq + pq = −1; mp + mq + pq = 5. Agora vamos para a 3.ª
77 J mp + mq + pq dá 5.
78 Y Espera aí. Vamos fazer nessa aqui. Eu chamei essa de I, essa aqui eu chamei de II.
79 J mpq substitui 3 aqui não é, na terceira?
80 Y mnp + mnq + 3 = 1. Agora sabe que... o coisa aqui, como é o nome? −2 é raiz, é o n. −2mp + mpq + 3 =1. Dá para deixar mp em evidência. Só deixa eu passar esse 3 para lá. Deixa eu fazer de volta... + mpq daí o 3 vai para lá fica −2.
81 J Isso, −2. Põe mp em evidência.
82 Y Fica −2 + q igual a −2. Agora o 4.º que é esse aqui. Nesse a gente já sabe que n é o −2; m + p + q é igual a 0.
83 J Então m vai ser igual...
84 Y A p + q. Quer dizer − p − q. ...-q vezes p... −2+q = -2
85 J Não sei se vai dar certo. Vai tentanto aí.
86 Y $-p^2$ − pq... −2 + q. Espera aí cara. Está muito confuso. Eu vou substituir esse daqui aqui. É melhor. −p vezes p, p^2; −pq; −qp... −pq de volta; $-q^2 = 3$. Então, $-p^2 - 2pq$...
87 J Acho que é um produto notável isso.
88 Y ... $-2q^2 = 3$.
89 J Espera aí. Você tem o valor de p+q?
90 Y p + q? −m... n = −2! (risos) Está suado este.
91 Prof. Vocês descobriram alguma raiz?
92 J/Y Descobrimos. Estamos atrás da irracional agora. Só que está difícil. A gente vem tentando por Girard agora mas é bem trabalhoso.

A dupla tem dificuldade porque tem que resolver um sistema de equações não lineares de três incógnitas. Em certo momento confundem a raiz irracional com as raízes imaginárias citando o conjugado; os alunos J e Y também têm a idéia de substituir x pelo número imaginário i. Observamos que além dos valores inteiros, os imaginários i e – i também são utilizados freqüentemente.

93 Prof. Como vocês sabem que existe mais uma raiz?
94 Y x^4 são quatro raízes. Pode ter multiplicidade...
95 J Se tiver uma irracional, o conjugado é a outra.
96 Prof. Como vocês estão procurando essa raiz irracional? Por qual método vocês estão tentando fazer?
97 J A gente tentou por Briot-Ruffini e por Girard.
98 Y E se gente tentar fazer uma loucura e tentar no chute mesmo e botar um *i* ali. Se a gente achar montando a equação ali... Nessa aqui tem que ter...
99 J Tem que ter. É ao cubo. Tem que ter uma real. Tem que ter duas irracionais. Não.

Real ou racional. Tem que ter duas irracionais né? Se a gente pegar essa daqui e dividir essa aqui.

100 Obs Você poderia explicar de novo quando diz 'dividir essa por esta daqui', quem é essa...

101 J Aqui olhe. A gente vai pegar x + 2 vai dividir a equação x^3, vai dividir por x+2. Não sei se é certo fazer isso. Eu vou tentar né. −2 + 1 é −1; mais 2... dá −1. O resto é −1.

A dupla J e Y utiliza as estratégias e técnicas de resolução que recordam. Quando consultam o livro didático encontram a conseqüência do teorema das raízes complexas, conforme mostra o diálogo mas não chegam à conclusão correta.

102 Y Está aqui. Teorema das raízes irracionais. Está aqui, olhe. Se uma equação de coeficientes reais tem grau ímpar, então essa equação admite pelo menos uma raiz real. Essa equação tem grau par. Vamos pensar se tem mesmo raiz. Não pede para achar a raiz. Pede para mostrar que tem. E ela tem né; tá afirmando isso. Deixa eu fazer uma coisa... *i* não é raiz.

103 J A soma não deu 0 né?

104 Y Dos coeficientes? Não! 4 – 7: −3. Se fosse 0, 0 também seria uma raiz.

105 J Espera aí. É *i* aqui. É *i* aqui. Não 1. Resolva Bháskara.

106 Y Ah sim! Nossa!

107 Obs O que você tentou ali?

108 Y Eu peguei $x^3 + x + 3$ que era a equação né, daí tentei compor ele. Deixando x em evidência. Não sei se está certo isso.

109 Obs Para que você fez isso?

110 Y Para ver se achava as raízes dessa equação. Daria x = 1 e x = −3. Viu J. Pondo x^3+x+3... decompondo aqui...

111 J Não, mas tem que ter um... tem que deixar algum em evidência para ser o mesmo. Eu acho que não dá para fazer assim não.

112 Obs Deixem essa se vocês esgotaram as estratégias e voltem para a atividade 3 então.

Na frase número 102 do diálogo constatamos que se os alunos J e Y não perceberam que o polinômio $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6$ tem como um dos fatores o polinômio $x^3 + x - 3$. Poderiam ter concluído que sendo este um polinômio de 3.º grau, grau ímpar, admite pelo menos uma raiz real, que já se sabe que não é racional, portanto seria irracional.

Se considerarmos o que foi escrito pela dupla J e Y, conforme resolução que apresentamos, poderíamos concluir o que segue.

Em I, a dupla obteve mpq = 3, ou seja, $pq = \frac{3}{m}$. E em IV obteve $-m = p + q$. Em III encontraram mnp + mnq + npq = 1 enquanto o correto seria mnp + mnq + *mpq* + npq = 1. (grifo nosso) Substituindo-se I e IV na expressão III correta e sendo $n = -2$ temos:

$$mnp + mnq + mpq + npq = 1$$

$$mn.(p + q) + mpq + n.(pq) = 1$$

$$-2m.(-m) + 3 + (-2).\frac{3}{m} = 1$$

$$2m^2 - \frac{6}{m} + 2 = 0$$

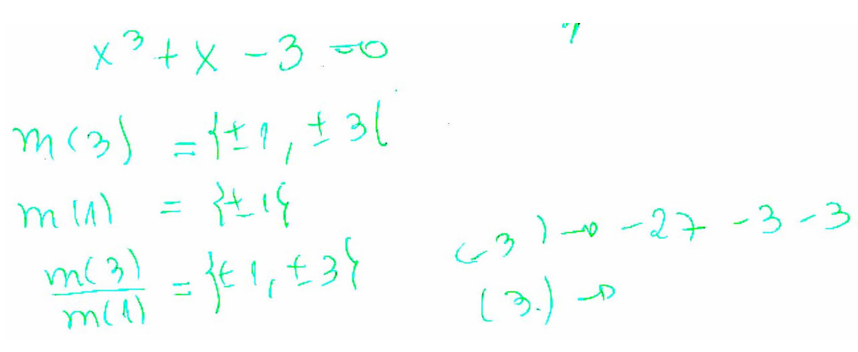
$$m^3 + m - 3 = 0$$

que equivale à equação $x^3 + x - 3 = 0$ cuja solução se procura.

Como afirmamos anteriormente, as Relações de Girard não são a estratégia adequada para a resolução de uma equação se não se conhece uma informação sobre as raízes. Após ter tentado algumas estratégias a dupla J e Y deixou o exercício 2, item b, para resolver o exercício 3.

Considerando a equação $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$, a dupla F e Ge encontrou a raiz racional -2 e dividindo, pelo método da chave, o polinômio $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6$ por $x + 2$ obteve o quociente $x^3 + x - 3$. A raiz desse quociente também será raiz do polinômio e da equação. Por isso a dupla continua tentando resolver a equação $x^3 + x - 3 = 0$ e mostrar que a raiz é um número irracional.

Resolução da dupla F e Ge


$x^3 + x - 3 = 0$

$m(3) = \{\pm 1, \pm 3\}$

$m(1) = \{\pm 1\}$

$\frac{m(3)}{m(1)} = \{\pm 1, \pm 3\}$

$(-3) \to -27 - 3 - 3$

$(3.) \to$

Fig. 33. Exercício 2 b - Resolução dos alunos

Na pesquisa de raízes racionais assim como ocorreu no exercício 2, item a, os alunos representaram os divisores de 3 por m(3); também usaram m(1) e o quociente no sentido de divisores.

Diálogo da dupla F e Ge

91 F E agora como a gente vai fazer a partir daí?
92 Ge Tentar substituir essas raízes aqui.
93 F Que raízes?
94 Ge Fazer a pesquisa dessa daqui.
95 F Ah tá, fazer a pesquisa dessa parte.
96 Ge ± 1; ± 3. -1 não é; -3...
97 F 3 a gente já viu que não era.
98 Ge Não, mas desse aqui acho que é diferente.
118 Prof. Uma vocês já acharam?
119 Ge Deu –2.
120 F –2 porque se deu resto 0 aqui...
121 Prof. Essa é a racional.
122 F A racional. Uma das.
123 Prof. Uma das. Então qual vocês estão procurando agora?
124 F É que são mais irracionais não é? Ah não, tem uma irracional só. Ah, achamos a racional já. A gente tem que achar a irracional.
125 Ge Beleza, então o problema é esse.
126 F É. Achar a irracional. Como? Se ela é irracional... Tentar de volta? Podia tentar com essa de cima com x^2. Aqui tem uma irracional e agora?
127 Ge x^4 primeiro ...
128 F Agora vai ser um problema porque... Vamos pensar. Ela é irracional por quê? Porque vai dar número imaginário, correto não é?
129 Ge Sim.
130 F Tá. Mas ela tem uma raiz.
131 Ge Porque provavelmente vai ser uma raiz, um número... não vai dar um número certo; um número exato ali.

Os alunos F e Ge, pela frase número 128 do diálogo, confundem número irracional com imaginário. O aluno Ge, conforme a frase número 131, concluiu corretamente que o irracional algébrico não é exato e apresenta um radical. Assim como as duplas E e D, J e Y, esta também decide usar as relações de Girard.

Resolução e diálogo da dupla F e Ge

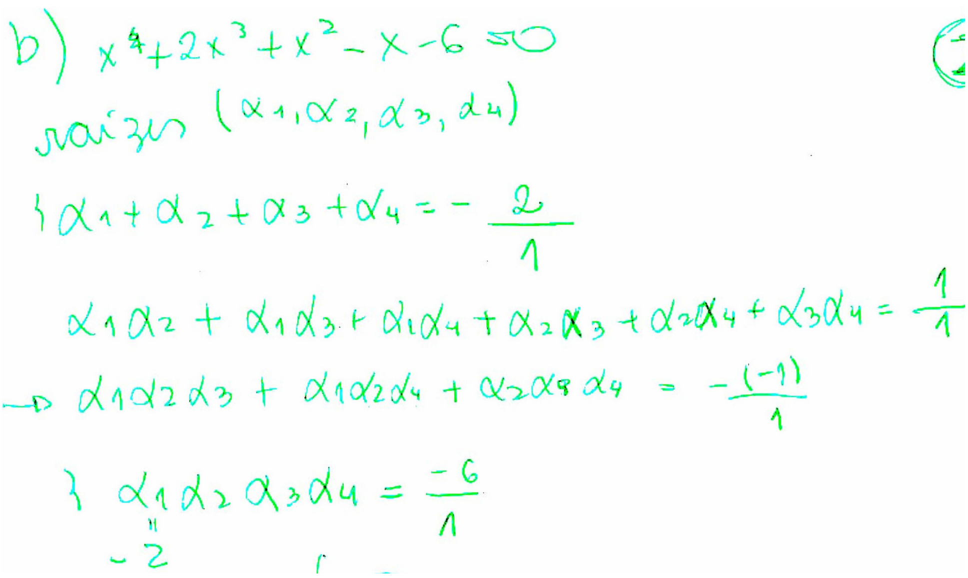


Fig. 34. Exercício 2 b - Resolução dos alunos

136 F (...) O que você fez? Girard? Não dá? Girard tem que ter as raízes! Mas se a gente chutasse as raízes? Aí! Girard e a gente faz raiz α sabe?
137 Ge Sei.
138 F A gente faz α_1, α_2, α_3... Vamos ver direitinho. Vamos ter que fazer Girard de quatro. Vamos tentar. Vamos chamar aqui as raízes...
139 Ge A soma, mas não vai dar certo isso.
140 F Calma, tem que ter calma. Vamos tentar. São quatro raízes: α_1, α_2, α_3 e α_4. Começo somando todas né?
141 Ge Soma é igual a menos b sobre...
142 F ...tracinho 1... 2 Aí α_1... aí dois a dois agora né?
143 Ge Sim.
144 F $\alpha_1 . \alpha_2 + \alpha_1 . \alpha_3 + \alpha_1 . \alpha_4 + \alpha_2 . \alpha_3 + \alpha_2 . \alpha_4 + \alpha_3 . \alpha_4$ igual a traço de fração...1 sobre 1 que é 1 né? Agora tem que fazer... três a três. $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ...$
145 Ge Não vai dar certo!
146 F Calma! Vamos tentar! É não vai certo... $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ ... igual a –6 sobre 1, e o último é todos juntos: 1 sobre –6. Fazemos um sistema desse com esse.
147 Ge É muita coisa. Não vai ter sistema suficiente para fazer.
148 F Tem quatro equações e quatro incógnitas. Eu acho que errei mesmo essa parte aqui. A gente está tentando usar Girard, não tem que usar. Teorema de Bolzano...

Assim como fez a dupla J e Y, na terceira relação correspondente à soma dos produtos das raízes, multiplicadas três a três, escreveram $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4$ ao invés de $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \boldsymbol{\alpha_1\alpha_3\alpha_4} + \alpha_2\alpha_3\alpha_4$ (grifo nosso). A dupla F e Ge percebeu que as relações de Girard levam a um sistema de equações não lineares de resolução trabalhosa. Se prosseguissem na resolução do sistema chegariam a equações equivalentes às já obtidas.

Após tentarem algumas estratégias os alunos F e Ge consultam o que foi ensinado pelo professor da turma e encontram o teorema das raízes irracionais: "Se uma equação polinomial de coeficientes racionais admite o número a + $\sqrt{b}$ como uma das raízes, então admite o número a – $\sqrt{b}$ como raiz também." A partir disso tentam novas técnicas para resolver a equação $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$, para a qual já conheciam a raiz – 2 e não percebem que bastaria resolver a equação $x^3 + x - 3 = 0$.

Resolução da dupla F e Ge

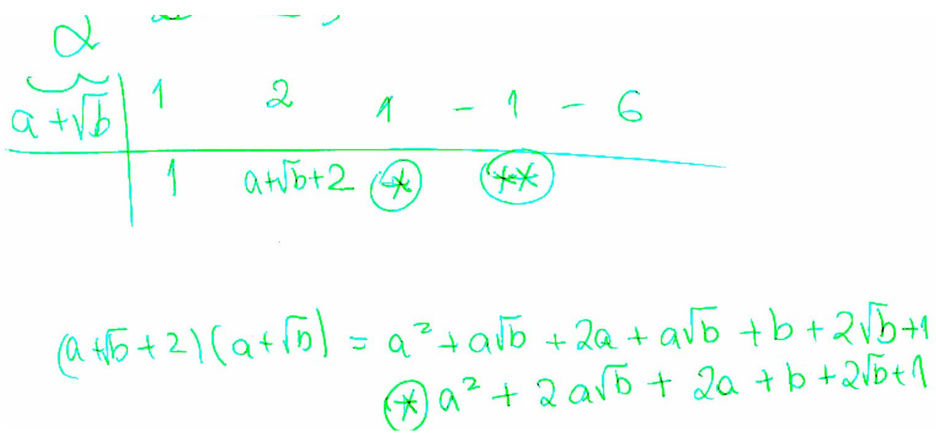


Fig. 35. Exercício 2 b - Resolução dos alunos

Como a tarefa do exercício 2, item b, consiste em mostrar que existe uma raiz irracional para a equação dada, os alunos admitiram como os outros que o irracional é da forma $a \pm \sqrt{b}$.

Diálogo da dupla F e Ge

154 F Não dá para fazer por fatoração; não dá para fazer por pesquisa; não dá para fazer por Girard. Como a gente vai encontrar essa raiz irracional? Tem que ter alguma conseqüência lógica esse teorema.

155 Ge Mas por que ele está falando: 'tem uma'? Por que ele está falando 'uma' exatamente 'uma raiz irracional'?

156 F Não sei. Eu acho que ele só quer uma, não sei. Vamos pensar: 'teorema das raízes irracionais: Se uma equação polinomial de coeficientes racionais...' todos os coeficientes são racionais...
157 Ge Huhum...
158 F ...admite o número a + $\sqrt{b}$ como uma das suas raízes, então admite... E se a gente usasse esse genérico tipo a + $\sqrt{b}$, usasse a – $\sqrt{b}$ e fizesse Briot-Ruffini com elas, com isso, será? Vamos tentar! Não vai dar muito certo eu acho. Só que vou multiplicar por 1 senão fica muito ruim de fazer, ou fatoramos algo errado. 1, 2, 1, –1, – 6 .
159 Obs Qual o método que vocês estão usando?
160 F É o teorema das raízes irracionais que é do tipo se você tem a + $\sqrt{b}$, tem a – $\sqrt{b}$ daí a gente vai tentar fazer por isso. Só tentar por enquanto.
161 Ge Para fazer um método...
162 F Olhe só! Aqui vai um número igual a zero e com a – $\sqrt{b}$ vai outro número igual a zero e a gente faz um sistema.
163 Ge É. Tente pôr esse mais esse.
164 F Vai ter que ser a + $\sqrt{b}$ ...
165 Ge vezes...
166 F ...a + $\sqrt{b}$. Vai ser igual a *a* vezes *a*... $a^2 + a\sqrt{b} + 2a + a\sqrt{b} + b + 2\sqrt{b} + 1$; $a^2 + 2a\sqrt{b} + 1$. Calma. $a^2 + 2a\sqrt{b} + 2a$ ...
167 Ge Eu acho que vai dar na mesma: uma equação de quarto grau ou maior.
168 F Vamos tentar. Este daqui corresponde a esse aqui. Vamos fazer o outro. Vai ficar: meu Deus, vou ter que multiplicar tudo isto por isso daí?
169 Ge Sim, vai dar um grau maior sendo que você tem dois sistemas.

Constatamos que os alunos F e Ge não ficam em dúvida sobre duas situações, como ocorreu com a dupla E e D: i) o teorema diz "Se o número a + $\sqrt{b}$ é raiz ..."; não se tem certeza sobre sua existência e o número já é tomado como uma solução da equação; ii) a representação geral dos números irracionais como números da forma $a \pm \sqrt{b}$ é incorreta.

A dupla F e Ge tenta encontrar uma nova estratégia como mostra a frase número 180 do diálogo.

Diálogo da dupla F e Ge

170 F Chamo de α igual à trigonometria entendeu? Depois substituo.
171 Obs O que você está tentando fazer agora?
172 F A gente estava tentando fazer por Briot-Ruffini com esse a + $\sqrt{b}$ só que daí começou a ficar muito grande aí chamei esse a + $\sqrt{b}$ de número α como se fosse uma raiz genérica e estou tentando fazer por isso agora, estou fazendo as contas para ver se cai em alguma coisa que dê para a gente usar.
173 Ge Como se faz na trigonometria.
174 F Como depois vai dar α, quando a gente achar a raiz, der um número aqui a gente

vai substituir no final por a + $\sqrt{b}$. Aluno Ge cheguei ao seguinte: $\alpha^4 + 2\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha - 6 = 0$. Você tem que usar isso para alguma coisa.

175 Ge Não vai dar.

176 F Chegou na mesma coisa.

177 Ge Então.

178 F Por quê?

179 Ge Porque na verdade você substituindo... a raiz genérica... a única coisa que você fez foi ao invés de chamar de x você chamou de α.

180 F Colega Ge nós temos que achar *outro método*. (grifo nosso)

181 Ge É pois a única coisa que você fez foi chamar x de α mas não deixa de ser uma raiz.

Após terem tentado a pesquisa de raízes racionais, a divisão, tanto pelo algoritmo de Briot-Ruffini quanto pelo método da chave, e as relações de Girard, encontraram no livro didático a conseqüência do teorema das raízes complexas mas não chegaram à conclusão na realização da tarefa. Nesse ponto parece-nos que não está claro a esses alunos que ao encontrarem a raiz do quociente de grau 3, um dos fatores obtidos pelo teorema da decomposição, estarão obtendo a raiz da equação inicial de grau 4.

Diálogo da dupla F e Ge

182 F "Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar...!"

183 Ge Não. É par.

184 F "O número de raízes imaginárias de uma equação polinomial de coeficientes reais é necessariamente par."

185 Ge Eu acho que ela tem alguma imaginária, será que não tem? Porque de qualquer forma se tem uma racional e uma irracional vai ter duas imaginárias.

186 F Tudo bem, e como é que a gente vai achar essas duas imaginárias? Se a gente fizer pesquisa a gente vai cair no – 2 de volta. Tá, mas o que significa achar o resto?

187 Ge É que se gente fizer por pesquisa vai dar para ver que não necessariamente vai ser esses valores. Pode ser que não seja nenhum desses. E aqui de qualquer forma deu um só.

A dupla encontrou na apostila usada pelo professor da turma o teorema da Decomposição e decidiu aplicar essa tecnologia.

Resolução da dupla F e Ge

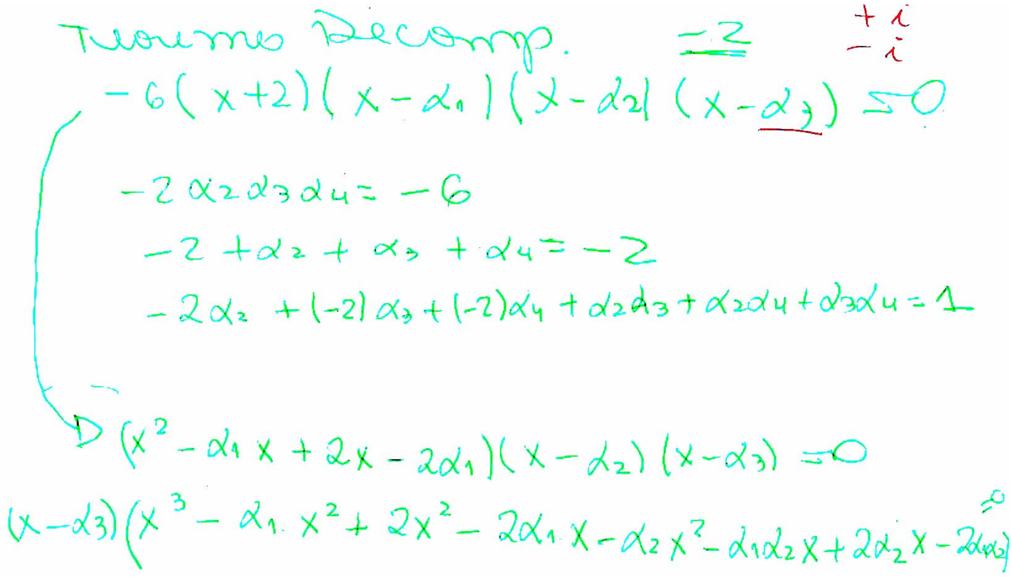


Fig. 36. Exercício 2 b - Resolução dos alunos

Diálogo da dupla F e Ge

190	F	Colega Ge acho que achei alguma coisa. Tem citado o Teorema da decomposição aqui. Vamos ver se dá para usar para alguma coisa. "Qualquer equação algébrica de grau n, pode ser decomposta e fatorada em n fatores do 1.º grau da seguinte maneira."
191	Ge	Claro. Teria que fatorar com a raiz que a gente já conhece, vezes o *termo independente*. (grifo nosso; quis dizer coeficiente dominante)
192	F	Ah é colega Ge. Vamos tentar. Teorema da decomposição. Como é o esquema? A gente descobriu que –2 é raiz. Primeiro é –6 vezes...
193	Ge	x + 2.
194	F	...vezes...
195	Ge	As outras três raízes que a gente não sabe.
196	F	$x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$, $x-\alpha_3$
197	Ge	Tem que dar zero.
198	F	Olhe aqui. Tem mais coisa aqui. Teorema fundamental da álgebra. Demonstração. Temos que P(x) admite uma raiz complexa. Chamemos de x_1 essa raiz. Podemos escrever $(x-x_1).Q(x)$ onde Q(x) tem grau n – 1. Conseqüência. Uma equação polinomial de grau n admite exatamente n raízes complexas. Não necessariamente distintas entre si. Se a gente tem uma raiz de grau 4 vai ter 4 raízes complexas. Mas a gente achou 1, não pode ser 4; a gente achou uma racional já.
199	Ge	Não mas é que complexos engloba tudo ali, de certa forma.
200	F	Observação. Decomposição de polinômios em um produto de fatores do 1.º grau é único exceto pela ordem dos fatores. Não dá para saber. Vamos tentar fazer o seguinte. Se tem uma raiz irracional, vamos supor que a gente acha a raiz *irracional* (grifo nosso, quis dizer imaginária), vamos supor que a gente ache mais i, uma delas vai ser – i. Tem duas que são mais ou menos parecidas entendeu? A gente tem que achar a 3.ª daí.
201	Ge	As complexas vão ser ela e o conjugado. *A outra é que vai ser diferente de tudo.* (grifo nosso)

Os alunos F e Ge deveriam considerar a equação $x^3 + x - 3 = 0$ para chegar à conclusão correta de que, não existindo raízes racionais, se houver duas imaginárias, a terceira raiz é um número irracional. No entanto, consideram a equação inicial $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$ não percebendo que tendo descoberto a raiz – 2 no item a, agora resta encontrar a raiz do quociente da divisão. A dupla novamente utilizou as Relações de Girard conforme a resolução anterior e o diálogo seguinte.

Diálogo da dupla F e Ge

202 F O que a gente pode fazer? Não dá para fazer sistema com nada, isso e que é o pior. Dá para fazer sistema com Girard será?

203 Ge Dá uma coisa gigantesca, mas não sei se vai dar. Será que vai certo?

204 F Tem esse α_1, α_2, α_3 e α_4 ...

205 Ge Sendo que α_1 a gente já sabe.

206 F A gente já sabe. É igual a 2.

207 Ge Menos 2 daí.

208 F Menos 2. Será que não dá para fazer sistema. $-2\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -6$; $-2 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -2$. Colega B, alguma coisa tem que sair daqui. A gente tem três incógnitas e três equações.

209 Ge A gente tem três equaçõesinhas no sistema, agora...

210 F O problema é que a gente for multiplicar cada um desses vai chegar em uma coisa muito gigantesca.

211 Ge Faz um outro de Girard aqui. Qual era a outra relação?

212 F Tem mais duas ainda. É que são quatro.

213 Ge Usa uma daquelas. Senão vai ficar o x no meio.

214 F Ah é tem essa daqui. $-2.\alpha_2 + (-2).\alpha_3 + (-2).\alpha_4 + \alpha_2.\alpha_3 + \alpha_2.\alpha_4 + \alpha_3.\alpha_4 = 1$. Esse pode ser achado porque a hora que a gente for multiplicar aqui... Vamos fazer o seguinte... Queria passar esse daqui para cá mas daí vai dar zero, vai acabar sumindo com isso. Vamos ver o que vai acontecer se a gente desenvolver isso. $(x^2 - \alpha_1.x + 2x - 2.\alpha_1).(x - - \alpha_2).(x - \alpha_3) = 0$. $(x^3 - \alpha_1.x^2 + 2x^2 - 2\alpha_1.x - \alpha_2.x^2 - \alpha_1.\alpha_2.x + 2\alpha_2.x - 2\alpha_1.\alpha_2)$ tudo isso vezes $(x - \alpha_3)$ vai ser igual a 0. O que é o x?

215 Ge O x é o x mesmo.

216 F É tipo uma incógnita?

217 Ge É que sempre fica x menos a raiz 1, x menos a raiz 2, ...

218 F A gente vai cair na mesma coisa?

Percebendo a dificuldade em usar o Teorema da Decomposição, a dupla F e Ge retomou a equação $x^3 + x - 3 = 0$.

Resolução da dupla F e Ge

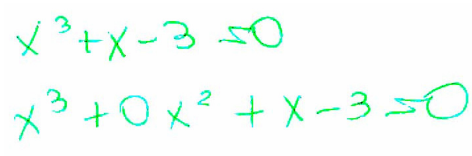


Fig. 37. Exercício 2 b - Resolução dos alunos

Diálogo da Dupla F e Ge

219 Ge De novo! Será que não é mais fácil tentar a partir dessa daqui em que a gente já achou!? De qualquer forma a gente vai achar as duas imaginárias e a irracional a partir daqui.

220 F Então vamos pegar. $(x^3 + x - 3) = 0$. Mas como a gente vai partir daqui. Fazer pesquisa.

221 Ge Não vai dar. Eu já tentei. (-1) não dá; (-3) nem (+3) vai dar certo aqui. A raiz real já foi. Se for para achar as outras duas, vão ser as duas imaginária, teoricamente, e mais a irracional. Se a gente achar a irracional fica mais fácil.

222 F Não tem como sair daqui.

223 Ge O que o prof. tinha falado quando no exercício não tiver dado nenhuma certo?

224 F Não lembro. Não dá para usar multiplicidade também não é? Não dá para usar divisões sucessivas. (1) não é raiz. (0) não é raiz.

225 Ge Nem o (3) nem o (– 3) aqui. É, mas só vai poder ser mesmo uma irracional aqui no meio. Vamos tentar substituir.

226 F Não lembro como é que chega. Eu até pensei nisso mas é impossível. Existem milhões de raízes irracionais. Irracional acho que não é só imaginário também. Não dá para fatorar. Não dá para fazer pesquisa. Não dá para fazer... nada. Eu acho que a gente deveria fazer o seguinte. Deixa um pouco de lado esse para a gente pensar depois. Vamos tentar fazer o 3.

A dupla F e Ge deixa o exercício 2, item b e passa ao exercício 3.

Conclusões sobre a análise *a posteriori* do Exercício 2, item b

A partir dos diálogos registrados e das anotações das cinco duplas, constatamos que apenas a dupla A e M justificou corretamente a existência da raiz irracional pela conseqüência do Teorema das Raízes Complexas, conforme supomos na análise *a priori*. A dupla G e C aceitou a existência da raiz irracional mas não justificou corretamente.

As demais três duplas preocuparam-se em encontrar a raiz irracional embora o exercício não pedisse isso. Nenhuma dessas duplas conseguiu resolver a equação algébrica com uma das soluções igual a um número irracional porque, conforme o estudo dos livros didáticos, métodos numéricos não são estudados no ensino médio. A dupla E e D admitiu a existência da raiz irracional e de sua conjugada, denominando-as de $a + \sqrt{b}$ e $a - \sqrt{b}$ e usou as relações de Girard. Abandonou essa técnica por não conseguir encontrar a raiz. A dupla J e Y admitiu a existência da raiz irracional e tentou resolveu a equação pelas Relações de Girard denominando as raízes da equação de 4.º grau genericamente de m, n, p e q, sendo que uma delas era a raiz racional encontrada. Os alunos J e Y também não conseguiram encontrar a raiz e deixaram o exercício. A dupla F e Ge admitiu a existência da raiz irracional porém, como as outras duplas, não soube justificar e tentou achá-la resolvendo a equação. Tentou as Relações de Girard denominando genericamente as raízes da equação, como fez a dupla J e Y. Depois admitiu a raiz irracional como um número da forma $a + \sqrt{b}$ e aplicou o algoritmo de Briot-Ruffini e chegou a usar o Teorema da Decomposição que antes de ser uma técnica é uma tecnologia que justifica algumas estratégias adotadas para a resolução de equações. A dupla F e Ge também deixou o exercício 2, item b, para tentar resolver o exercício 3.

Não havia a necessidade de se encontrar a raiz irracional da equação proposta. Da maneira como as três duplas tentaram resolver o exercício 2, item b, serviu para antecipar-lhes a tarefa do exercício 3 e apresentar-nos as dificuldades que supomos na análise *a priori*.

Para finalizar, notamos que os alunos não apresentaram dúvidas quanto ao número de raízes da equação. Devido ao teorema das raízes irracionais ensinado pelo professor da turma confundiram-se com o teorema da raízes complexas e acabaram admitindo os irracionais como sendo todos da forma $a \pm \sqrt{b}$. Como os alunos tentaram calcular a raiz irracional, embora o exercício pedisse apenas para mostrar a existência, uma das técnicas empregadas foram as relações de Girard. No entanto não associaram essa técnica à tarefa de resolver uma equação quando se conhece uma informação sobre as raízes, como o exemplo citado no estudo do livro didático.

Análise *a posteriori* do Exercício 3, antes do uso do *software*

> Exercício 3
>
> Teorema de Bolzano:
> "Seja a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ com coeficientes reais. O número de raízes reais situadas no intervalo aberto $]a; b[$ é *ímpar*, se $P(a).P(b) < 0$, ou seja, se o valor do polinômio para $x = a$ e para $x = b$ têm sinais contrários; é *par* (inclusive zero, isto é, nenhuma raiz real no intervalo $]a; b[$) se $P(a).P(b) > 0$, ou seja, se o valor do polinômio para $x = a$ e para $x = b$ têm sinais iguais."
>
> Determine as raízes da equação $x^3 + x + 1 = 0$.

O estudo dos documentos produzidos pelos alunos e dos protocolos, nos permitiu identificar os seguintes resultados.

Três duplas puderam realizar a tempo essa tarefa. As duplas G e C e E e D executavam a tarefa do exercício 2, item b.

A dupla A e M utilizou corretamente a técnica 2 fazendo a pesquisa de raízes racionais, como supomos na análise *a priori*. No diálogo afirma que os possíveis valores racionais – 1 e 1 eram fáceis de serem verificados, mas ao invés de fazer a substituição dos valores das possíveis raízes, testou no algoritmo de Briot-Ruffini concluindo que não eram soluções.

Resolução e diálogo da dupla A e M

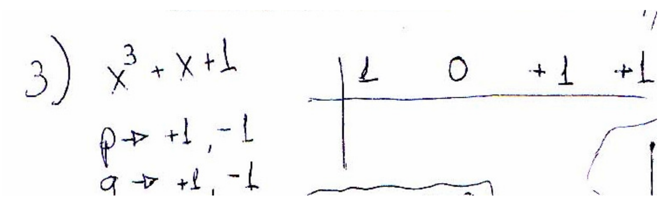


Fig. 38. Exercício 3 - Resolução sem uso do *software*

56 A Olhe. O q e o p são 1. Então pesquisa de raízes fica fácil.
57 M 1, 0, 1, 1.
58 A Mais um, menos um. Zero não.

59 M Não, tudo bem o zero não. Mas é no Briot-Ruffini tem que ter o zero porque não tem x^2.
60 A É, tem que ter um espaço para o x^2... Não dá.
61 M É, acho que vai ter que usar Bolzano.

A dupla J e Y tentou a fatoração e errou quando fez o agrupamento.

Resolução e diálogo da dupla J e Y

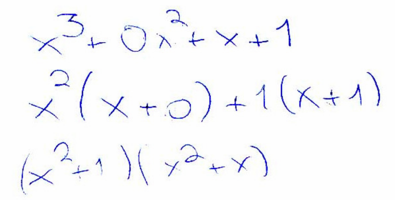


Fig. 39. Exercício 3 - Resolução sem uso do *software*

116 Y Olhe 3A. Se eu fizesse assim: $0x^2$ certo? Se tentar fazer fatorando?
117 J Tem que ter tipo...
118 Y $x + 1$
119 J Teria que ter esses dois iguais. Você pega um, não tem como.

Acreditamos que os alunos tenham tentado primeiro a fatoração porque essa técnica permitiu que resolvessem os exercícios anteriores.

A dupla A e M também tentou a fatoração.

97 A Dá para reduzir para segundo grau? Dá para por em evidência?
98 M Não, a gente não sabe nenhuma.
99 A x que vai multiplicar $x^2 + 1$, mais 1, igual a zero. Olha dá para descobrir porque x não é 1.
100 M (risos) x não é 1, não é 0, não é - 1.

Busca da compreensão do Teorema de Bolzano

As duplas leram o teorema de Bolzano e da forma como interpretaram, tentaram aplicá-lo.

A dupla F e Ge, por exemplo, entendeu de forma incorreta que os extremos a e b do intervalo seriam as raízes, conforme a frase 234 do diálogo, e fizeram a substituição no polinômio correspondente à equação.

Resolução e diálogo da dupla F e Ge

$$X^3 + X + 1 = 0$$

$$P(a) \to a^3 + a + 1$$
$$P(b) \to b^3 + b + 1$$

$$(a^3 + a + 1).(b^3 + b + 1) =$$

Fig. 40. Exercício 3 - Resolução sem uso do *software*

234	F	Vamos tentar transpor o que está escrito no enunciado aqui para a folha para ver se a gente entende. Então é o seguinte. "O número de raízes situadas no intervalo aberto]a; b[é ímpar se P(a).P(b) < 0..." As raízes são a e b.
235	Ge	Sim.
236	F	a e b é ímpar. Não, o número de raízes é ímpar. É isso?
237	Ge	O número de raízes é ímpar.

Esperávamos que os alunos escolhessem valores arbitrários para os extremos do intervalo com o objetivo de localizar a raiz.

A princípio pareceu-nos que a dupla A e M fez isso escolhendo os valores a = 1 e b = 0 e calculando o valor numérico do polinômio.

Resolução da dupla A e M

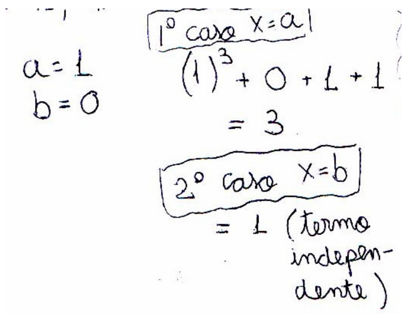


Fig. 41. Exercício 3 - Resolução sem uso do *software*

No entanto percebemos depois que a escolha não foi arbitrária. Os valores extremos a e b do intervalo foram confundidos pela dupla A e M com os coeficientes da equação dada $x^3 + 0x^2 + x + 1 = 0$ como aparece no diálogo.

Diálogo da dupla A e M

62 A Seja a equação... raízes reais situadas no intervalo aberto... para x igual a a, para x igual a b. Espera aí então. x igual a a, x igual a b. O a nessa equação é... é 1. E o b é 0 não é? Vamos colocar x igual a a. ... três, mais um, mais um. Vai dar um, mais um, mais um, vai dar três. Segundo caso, x igual a b. Zero, vai dar o termo independente.

Ressaltamos que em seguida, sem que fosse uma tarefa, a dupla A e M teve a iniciativa de esboçar o gráfico no papel. Desconhecemos a razão pela qual isso não foi feito nos exercícios anteriores por esses alunos. Acreditamos que foram motivados pelo fato de terem encontrado o intercepto[9] do gráfico com o eixo y ao calcularem P(0).

[9] Ponto em que o gráfico cruza os eixos do plano cartesiano.

Resolução da dupla A e M

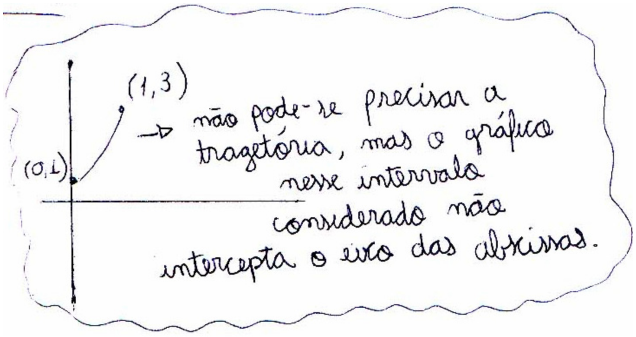


Fig. 42. Exercício 3 - Resolução sem uso do *software*

O gráfico está correto no intervalo]0; 1[, como mostra a análise *a priori*. Mas a conclusão a que chegou a dupla A e M está incorreta. Pelo teorema de Bolzano, se P(a).P(b) > 0, há um número par de raízes no intervalo]a; b[. Poderia haver duas raízes reais e o gráfico interceptaria o eixo das abscissas em dois pontos.

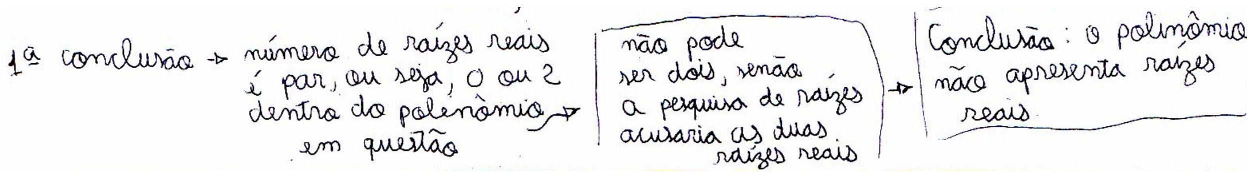


Fig. 43 Exercício 3 - Resolução sem uso do *software*

Para a dupla A e M, como observamos na frase número 75 do diálogo, a pesquisa de raízes indicaria todas as raízes reais, enquanto a pesquisa indica apenas as possíveis raízes racionais.

Diálogo da dupla A e M

71 Professor Na questão 3 vocês concluíram que não tem raízes reais. De que grau é a equação?

72 A/M Terceiro grau.

73 A Ela deve apresentar três raízes. Fazendo aqui o método de Bolzano você pegando o

primeiro caso x igual a a e o segundo caso, x igual a b, e multiplicando os dois resultados obtidos você vai obter um número par. Significa que o número de raízes reais é...

74 M Número positivo.

75 A É, perdão, número positivo. Significa que o número de raízes reais é par: 0 ou 2. Não pode ser 2 porque senão a pesquisa de raízes acusaria essas duas soluções reais levando à conclusão de que o polinômio em questão tem apenas raízes... não apresenta raízes reais.

Outras tentativas

Algumas duplas tentaram encontrar as raízes por outros métodos e abandonaram quando perceberam que não obteriam a raiz irracional.

O aluno J, por exemplo, utilizou as relações de Girard. Essa técnica deve ser aplicada quando há alguma informação conhecida para as raízes da equação. Não foi dada nenhuma informação sobre as raízes no exercício 3.

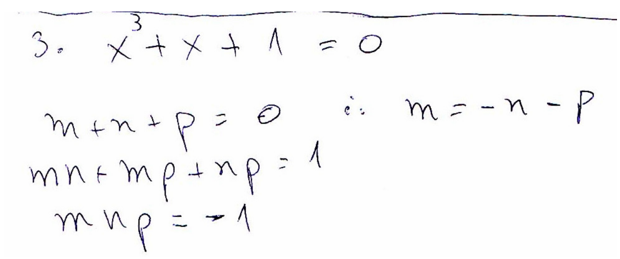


Fig. 44. Exercício 3 - Resolução sem uso do *software*

Em uma tentativa de resolução diferente, a dupla A e M pensou em substituir valores na equação, como supomos na análise *a priori*, mas de números complexos imaginários, porém não levaram a idéia adiante.

Diálogo da dupla A e M

103 A Aparentemente simples. Eu vou tentar um número fácil aqui: 1 + i. Só o número i não é.

104 M Não tem como chutar um raiz complexa.

O aluno Y entendeu do teorema de Bolzano que P(a).P(b) indicaria um outro polinômio de 2.º grau, divisor do polinômio correspondente à equação e utilizou o método da chave pensando em decompor o polinômio da equação. Vemos que a técnica de decomposição a partir da divisão de polinômios está presente com muita freqüência. Isso ocorre porque, na inexistência de um método algébrico geral e pelo desconhecimento pelos alunos de um método numérico, a aplicação de tal técnica permite a realização de um grande número de tarefas propostas nos livros didáticos.

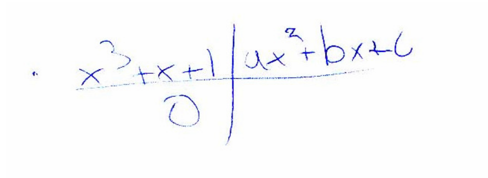


Fig. 45. Exercício 3 - Resolução sem uso do *software*

Uma retomada do exercício

A dupla J e Y relê o enunciado e analisa o teorema de Bolzano.

Diálogo da dupla J e Y

120	Y	Eu acho que dá para fazer. Será que não mesmo? Vou tentar entender isso aqui. Daí tem três raízes. Tem dois pontos, tipo ponto a e ponto b. Daí tem duas equações, ponto a e ponto b; multiplicadas dão menor que zero. O valor do polinômio para x = a e x = b tem sinais contrários.
121	J	Tem que ser uma positiva e uma negativa para dar menor que zero, e aqui tem que ser as duas positivas ou as duas negativas. Mas no que ajuda isso?
122	Observador	Não fazem o gráfico; permanecem no método algébrico.
123	Y	$x^3 + x + 1 = 0$; ax^2+bx+c. Vai dar resto 0. Tem que achar Q(x).

Observamos que esses alunos permanecem buscando um método algébrico. Não experimentam esboçar o gráfico no papel.

A dupla F e Ge, relacionou a tarefa proposta com as tarefas presentes no livro didático e procurou entender o significado dos extremos a e b do intervalo.

Diálogo da dupla F e Ge

248 F ($x^3 + x + 1 = 0$). Eu não consigo entender o que é esse a e o que é esse b. É o intervalo.

250 F Mas é que ele não dá o intervalo. Muito estranho. (...)

254 F Tudo dá o intervalo. O nosso não dá o intervalo.

255 Ge Ali se pergunta quantas e aqui se pergunta quais. P(0) vai dar 1. Então entre P(0) e P(2), deixa eu ver se tem alguma raiz nesse intervalo... (11). Nesse intervalo, tem sinais iguais, então ou não tem nenhuma ou tem um número par. Não ajuda muito.

Ressaltamos que os alunos F e Ge chegaram à conclusão de que falta o intervalo]a; b[onde se localiza a raiz e perceberam a dificuldade de quando o mesmo não é dado. Resolvem então fazer tentativas até descobrirem o intervalo] –2; 0[.

Diálogo da dupla F e Ge

256 F Eu fiz com (+1) e (– 1). P(a) e P(b) tem sinais contrários. Aqui na verdade eles têm o mesmo sinal, (+3) e (+1) entendeu. Daí (3.1) vai dar maior que zero.

257 Ge Não quer dizer nada porque pode ser que não tenha nenhuma também. Vou fazer P(– 2): (– 8 – 2 + 1)

258 F Mas aí você vai chegar em quê?

259 Ge Não, é só para saber quantas raízes têm nesse intervalo. Não vai ajudar muito.

260 F Dá (– 9). Deu sinais contrários, então quer dizer que tem um número ímpar.

261 Ge Tem alguma raiz aí no meio.

262 F Tem um número ímpar de raízes aqui no meio.

263 Ge Então quer dizer que tem alguma pelo menos. Se é um número ímpar pelo menos uma vai ter. Agora, se fosse número par pode ser que não tenha nenhuma.

264 F Que raiz vai dar aqui?

265 Ge Entre (–2) e (0) vai ter uma.

266 F Tá, mas vamos descobrir uma raiz aqui então nesse intervalo. (2) não dá. (1) não dá. (0) não dá. (–1)...

267 Ge Entre (0) e ... é um intervalo aberto, não é? Então, entre (0) e (– 2) de qualquer forma vai ter uma.

268 F Ah tá, então pode ser 1/2 e essa 'coisarada' toda... Eu realmente não sei. Não consigo ver saída para isso. Se tivesse o intervalo era mais fácil, mas não tem.

269 Ge Mas mesmo que tivesse você ia ter que achar quais. Se tivesse perguntado o número de raízes até tudo bem, mas agora quer saber quais. E aqui mesmo nesse exercício feito tinha e pergunta quantas.

Os alunos F e Ge demonstraram desconhecer uma técnica que permita encontrar, até mesmo aproximadamente, o valor de uma raiz, em um certo intervalo real. Os livros didáticos que estudamos e o que é ensinado pelo professor da turma não inclui métodos numéricos de resolução. Na frase número 259, o aluno Ge não percebeu que tendo o intervalo inicial poderia ir diminuindo o intervalo pelo método da bisseção desenvolvendo uma técnica (método numérico) diferente daquelas que os alunos do ensino médio aprendem. As tarefas que encontram entre os exercícios trabalhados pelo professor da turma apresentam o intervalo e se pergunta quantas são as possíveis raízes localizadas nele.

Diálogo da dupla F e Ge

271 Ge Tem alguma aqui no meio. Pode ser infinitas raízes.

272 F Colega B, pesquisa!

273 Ge Faz pesquisa, legal. Esse sobre esse vai ser (– 1) e (+1) e nenhum deles vai dar. Porque (– 1) não dá. (1) não vai dar certo, pela pesquisa de qualquer forma.

275 Ge Eu acho que não vai ter nenhuma raiz real pelo jeito aqui. Eu acho que não tem, porque as que poderiam ser *reais* aqui seriam (–1) e (+1), mas nenhuma delas dá certo. (grifo nosso)

Nesse momento há uma confusão pois os alunos referiram-se a números reais quando deveria ser racionais.

Um momento de organização da ação

A dupla F e Ge abandonou a idéia de obter a raiz pelo teorema de Bolzano e preferiu relacionar as técnicas correspondentes à tarefa conforme apresentamos a seguir.

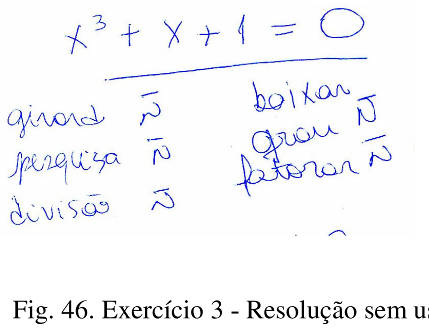


Fig. 46. Exercício 3 - Resolução sem uso do *software*

Diálogo da dupla F e Ge

278 F A gente vai ter que achar uma saída. Pesquisa, Girard, intervalo, não dá nada. Tem que ter uma saída.
279 Ge A gente viu todos os capítulos ali já? Tem mais algum depois desse?
280 F Eu acho que esse é o último. Bolzano é o último. Girard, pesquisa e equações.
281 Ge Pesquisa não dá. Pelo menos não *real*. (grifo nosso)

As duas técnicas que são divisão (pelo método da chave ou pelo algoritmo de Briot-Ruffini) e decomposição (fatoração) dependem de se conhecer uma raiz. A outra técnica citada, Girard, aplica-se quando na tarefa há alguma informação de relação entre as raízes. A outra técnica, pesquisa de raízes racionais, estava prevista na análise *a priori*. O aluno Ge referiu-se novamente a reais ao invés de racionais. Como a pesquisa de raízes racionais que foi feita não permitiu encontrar nenhuma, a dupla F e Ge chegou à conclusão correta sobre a existência mas não sobre como encontrar a raiz irracional.

Diálogo da dupla F e Ge

282 F Se a gente fez pesquisa e não dá é porque só tem irracional.
283 Ge Ou imaginárias.

Conforme a análise *a priori*, como a equação tem grau ímpar, após a pesquisa de raízes indicar a inexistência de raízes racionais, sabe-se da existência de pelo menos uma raiz real. Como a raiz real não é racional, chega-se à conclusão de que esta deve ser irracional. Embora não apresente esse rigor, o aluno F concluiu corretamente conforme indica sua afirmação na linha 282.

Admitindo a existência da raiz irracional, novamente de maneira equivocada representando-a na forma $a \pm \sqrt{b}$, a dupla prossegue na tentativa na obter o seu valor.

Resolução da dupla F e Ge

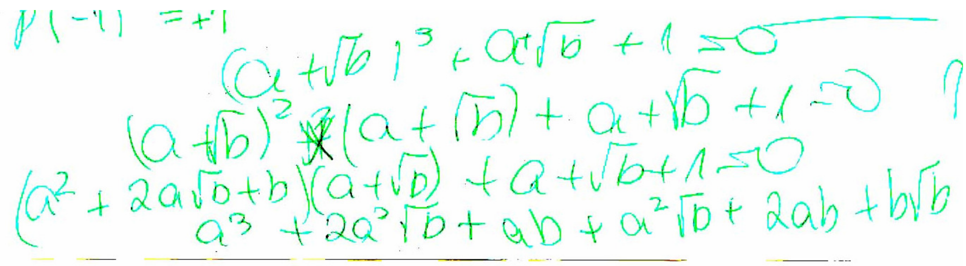


Fig. 47. Exercício 3 - Resolução sem uso do *software*

Diálogo da dupla F e Ge

Os alunos fazem a substituição do número que eles acreditam representar todos os irracionais.

290 F Mas mesmo na pesquisa dá o resultado; se esse for menor que esse, vai dar fração daí. Vamos colocar aqui $a + \sqrt{b}$. Vou tentar um negócio aqui colega Ge.
291 Ge Eu tento desse lado. Vou tentar chutar uns valores irracionais aqui no meio.
292 F Não vai dar. Muito grande.
293 Ge Nem com o i dá certo.

Com um irracional na forma $a + \sqrt{b}$ a dupla fez a substituição e desenvolveu a expressão mas depois abandonou a idéia. Fizemos alguns questionamentos e constatamos que a dupla F e Ge interpretaram corretamente o teorema de Bolzano.

298 Prof Mas o que vocês já concluíram a respeito da quantidade de raízes no intervalo?
299 Ge Assim, por exemplo, entre (0) e (2) tem o mesmo sinal. Então quer dizer que tem um número par ou nenhuma raiz aqui nesse intervalo. E aqui como deu ímpar, tem pelo menos uma, não sei. Pelo menos uma raiz já que a quantidade é ímpar obrigatoriamente uma vai ter.
300 Prof Então vocês já sabem que no intervalo]-2; 0[tem uma quantidade ímpar de raízes.
(...)
304 Prof Por que vocês concluíram que não têm raízes racionais?
305 F Porque a gente fez a pesquisa de raízes e não deu nenhuma. Daí a gente chegou a conclusão que só têm raízes irracionais.
306 Ge Mas vai ter pelo menos uma real no caso porque o coeficiente, o grau é ímpar.

Durante o questionamento soubemos porque a dupla escreveu o irracional na forma $a \pm \sqrt{b}$. Conforme observamos anteriormente, o professor da turma apresenta o teorema das raízes irracionais. Concluímos que os alunos não entendem que o teorema não garante a existência de raízes irracionais nem mostra uma técnica para obtê-las. Simplesmente garante que se existir a raiz $a+\sqrt{b}$, então existirá a raiz $a-\sqrt{b}$. Por ser parecido com o teorema das raízes complexas os alunos confundem-se.

Diálogo da dupla F e Ge

301 F/Ge Achar as raízes.
302 Prof O que você escreveu aqui aluna A?
303 F Que a raiz irracional é ($a \pm \sqrt{b}$), porque a gente acha que só tem raízes irracionais, não tem raízes racionais. (...)
308 F ($a \pm \sqrt{b}$) foi isso que a gente encontrou no livro.
309 Prof Vocês consultaram o livro?
310 B Sim.
311 Prof Todos os irracionais, alunos A e B, têm a forma $a \pm \sqrt{b}$?
312 B De certa forma sim porque se o a for (0) vai ser só a raiz.

Constatamos que a dupla admitiu corretamente a existência de uma raiz irracional porém a representaram genericamente de forma equivocada devido o teorema das raízes irracionais.

Conforme apresentamos a seguir, o aluno F relacionou os números irracionais com os imaginários possivelmente porque se forem raízes, seus conjugados também serão. No entanto representou de forma errada os irracionais em geral e os números complexos imaginários.

Fig. 48. Exercício 3 - Resolução sem uso do *software*

313 F Depende, se tem imaginário tem que ter o i. Daí o imaginário seria ($a \pm \sqrt{b}.i$) e o irracional seria ($a \pm \sqrt{b}$).

Conclusão da análise a posteriori do Exercício 3, antes do uso do *software*

Os alunos não interpretaram com segurança o teorema de Bolzano porque não entenderam os sinais de P(a) e P(b) onde a e b são os extremos do intervalo. Acreditamos que o estudo do teorema de Bolzano a partir de gráficos, conforme consta em Dante (2003), facilitaria o entendimento. A seguir apresentamos alguns exemplos[10].

i) P(a) e P(b) têm sinais iguais → há um número par de raízes no intervalo]a; b[.

P(–1) e P(2) têm sinais iguais e há quatro raízes reais no intervalo]– 1; 2[

P(–1) e P(2) têm sinais iguais e não há nenhuma raiz real em]– 1; 2[

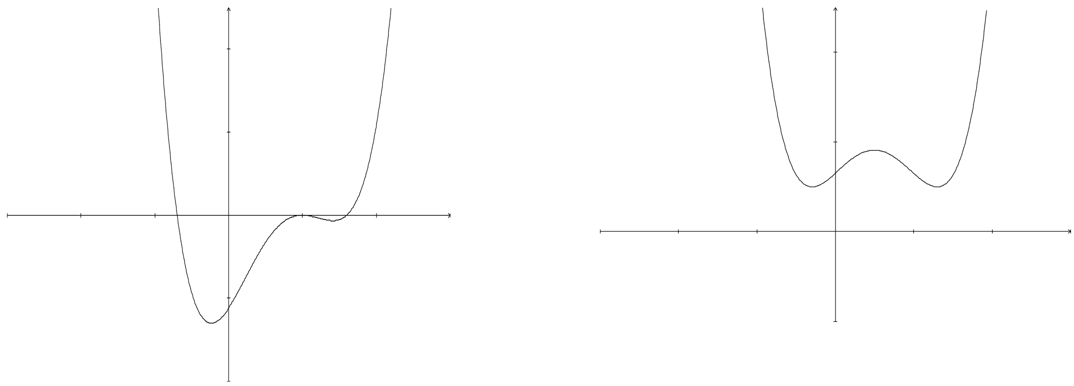


Fig. 49. Interpretação gráfica do teorema de Bolzano

ii) P(a) e P(b) têm sinais diferentes → há um número ímpar de raízes em]a; b[.

P(– 1) e P(1) têm sinais diferentes e há três raízes reais no intervalo]– 1; 1[

P(– 1) e P(1) têm sinais diferentes e há uma raiz real no intervalo]– 1; 1[

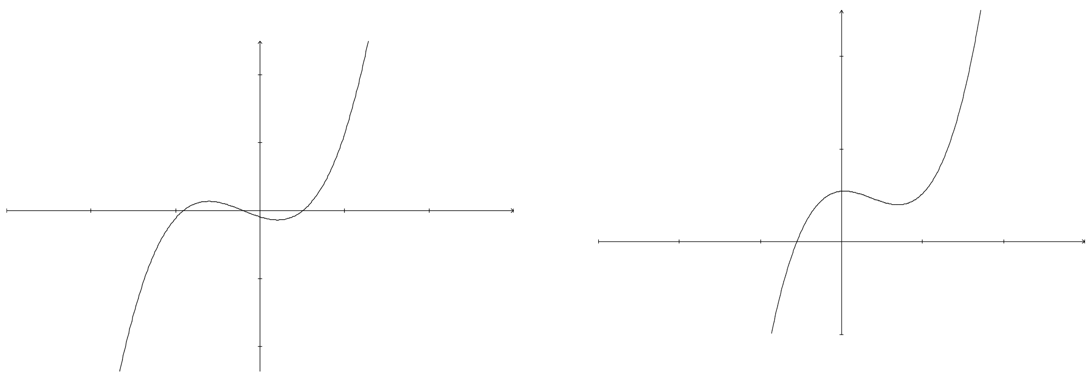


Fig. 50. Interpretação gráfica do teorema de Bolzano

[10] Gráficos construídos com o auxílio do *software* Winplot.

Os alunos concluíram corretamente a existência da raiz irracional após realizarem a pesquisa das raízes racionais. Embora não exista uma forma de representação algébrica geral para os números irracionais, o fato do professor da turma ter ensinado o teorema das raízes irracionais fez com que os alunos admitissem a raiz irracional na forma $a + \sqrt{b}$ e as duplas tentaram usar as técnicas conhecidas sem perceber que havia a intenção de apresentar-lhes uma nova técnica, um novo método de resolução.

Os métodos numéricos exigem o intervalo de localização das raízes. Apenas a dupla A e M fez a escolha de valores porém não souberam justificá-la a partir do teorema de Bolzano. As demais tentativas sem sucesso, feitas pelos alunos, para obter uma raiz irracional para a equação empregando as técnicas apresentadas nos livros didáticos, justifica a proposta de uma nova técnica de resolução (método numérico) com o apoio de um *software* gráfico.

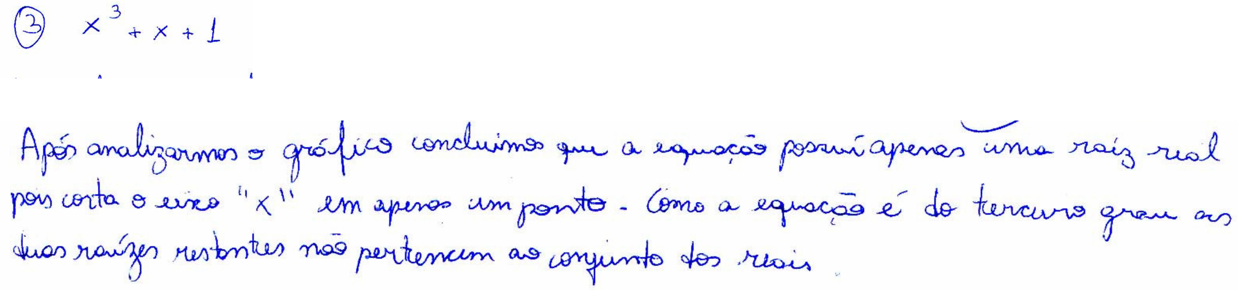
Análise *a posteriori* do Exercício 3, após uso do *software*

Após a explicação do uso do software, as duplas rapidamente plotaram o gráfico do polinômio considerado como função. Com a análise do gráfico, voltaram a procurar a raiz irracional.

A dupla G e C reconhece a existência de apenas uma raiz real e concluem que as outras duas raízes são imaginárias. No entanto, a escolha da amplitude do intervalo[11] interfere nessa conclusão pois as demais raízes poderiam ser exteriores ao intervalo estabelecido. Uma maneira de saber se há mais raízes, ou seja, se a função polinomial mudará novamente de sinal (teorema de Bolzano), pode ser pelo estudo do crescimento da função utilizando noções de derivada. No caso da função associada ao polinômio $P(x) = x^3 + x + 1$, considerando a raiz real α podemos dividir $P(x)$ por $x - \alpha$ obtendo o quociente $x^2 + \alpha x + \alpha^2 + 1$. Como o discriminante Δ do quociente é negativo, não há outras raízes reais.

[11] O intervalo corresponderá ao domínio da função cujo gráfico será esboçado.

Resolução e diálogo da dupla G e C



(3) $x^3 + x + 1$

Após analizarmos o gráfico concluimos que a equação possui apenas uma raiz real pois corta o eixo "x" em apenas um ponto. Como a equação é do terceiro grau as duas raízes restantes não pertencem ao conjunto dos reais.

Fig. 51. Exercício 3 – Resolução após uso do *software*

159	Prof	Os valores que aparecem representados no eixo x são números de qual conjunto.
160	G	Reais.
161	Prof	Reais. Certo. Então eu pergunto: todas as raízes são reais?
162	C	Tem apenas uma.

Na justificativa da existência de apenas uma raiz real confundem-se quando associam irracionais com complexos, como ocorreu com a dupla F e Ge antes do uso do *software*. A dupla considerou a tecnologia do Teorema das Raízes Complexas pela qual se sabe que se a + bi é raiz de uma equação algébrica de coeficientes reais, então a – bi também é raiz dessa equação. Julgamos que confundiu com os irracionais conjugados porque os números irracionais são os que estão sendo discutidos.

163	Prof	Pelo menos é o que vocês vêem nesse intervalo.
164	G	Sim. Ah então as outras não são reais.
165	C	Faz sentido porque ela é do 3.º grau.
166	G	As outras são da forma a mais raiz de b. Mais ou menos raiz de b não é?

Os alunos G e C não realizaram a pesquisa de raízes racionais e observando o gráfico, estimaram o valor da raiz em $-\frac{1}{4}$ e quiseram verificar se de fato era solução da equação pelo algoritmo de Briot-Ruffini.

Resolução e diálogo da dupla G e C

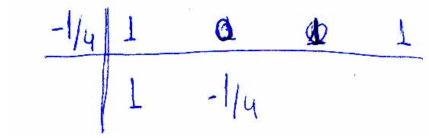


Fig. 52. Exercício 3 – Resolução após uso do *software*

177 G Põe então que as outras não pertencem ao conjunto dos reais. Agora tem que achar os valores. Quer tentar...
178 C Por chute? (...)
181 G/C Menos um quarto, menos um sexto...
182 C Vai escrevendo Briot. (...)
186 C Mais um. Dezessete sobre dezesseis. Quer saber. Esquece.
190 Prof Essa raiz que vocês estão procurando é uma raiz real. De onde vocês tiraram essa conclusão?
191 G/C Do gráfico.
192 Prof Do gráfico. E que valores vocês assumiram para essa raiz?
193 C Ela é menor...não. Ela está entre menos um e zero.
194 Prof Ok. E que valores vocês escolheram para fazer um teste?
195 C Menos um quarto.
196 Prof E por que menos um quarto e não, por exemplo, menos meio?
197 G Está para cá um pouco do menos meio então a gente foi pela lógica.

Permitimos que os alunos G e C tentassem realizar a tarefa de obter uma raiz irracional após terem descoberto o intervalo graficamente, mas não conseguiram.

Uma intervenção do professor: um momento didático

O professor auxilia os alunos G e C no uso do Teorema de Bolzano para descoberta do método numérico que se constituiria em uma nova técnica. Partindo do intervalo]– 1; 0[já obtido pelos alunos devido a visualização gráfica, faz perguntas sobre como a dupla saberia algebricamente se a raiz está entre – 1 e – 0,5 ou entre – 0,5 e 0.

Diálogo da dupla G e C

273 Prof. Vou fazer uma pergunta para vocês. Se eu perguntar se a raiz está entre zero e um o que vocês me respondem?
274 C Não. Entre zero e um?
275 Prof. Entre zero e um.
276 C Não.
277 Prof. Como vocês sabem?
278 G Porque não corta o eixo dos x.
279 Prof. Se eu perguntar para vocês: a raiz está entre menos um e menos meio, ou se ela está entre menos meio e zero, como vocês me responderiam isso?
280 G Está entre menos um e menos meio. Porque aparentemente corta o eixo x nesse intervalo.
281 Prof. Mas vocês poderiam usar o Teorema de Bolzano para me afirmar isso: que está entre menos um e menos meio?
282 G A gente fez entre menos um e zero daí a gente descobriu que o teorema está certo.

Uma nova técnica em uso

Após o entendimento do Teorema aplicaram-no na tentativa de descobrir uma boa aproximação para a raiz irracional. Para isso, como mostra a resolução e o diálogo, verificaram novos extremos de intervalo usando o ponto médio. Fizeram isso porque o professor perguntou ou talvez porque estimaram o valor após visualizarem o gráfico. Desse modo, aplicaram o teorema de Bolzano para os valores – 1 e $-\frac{1}{2}$.

Resolução e diálogo da dupla G e C

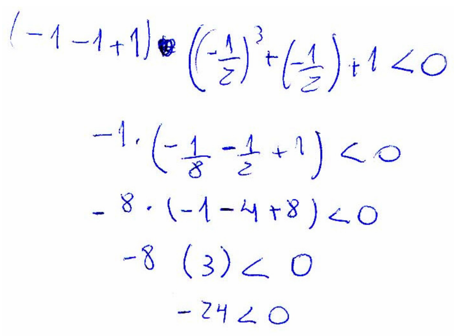


Fig. 53. Exercício 3 – Resolução após uso do *software*

283 C Então *a* a gente fixa entre menos um e menos meio, foi o que você pediu? Dá menos um, menos um, mais um vezes menos meio ao cubo, mais menos meio, mais um, mais um.

284 Prof O que vocês concluíram?

285 C Que a raiz está entre menos um e menos meio?

286 Prof Como é que vocês descobriram isso?

287 C Através do Teorema de Bolzano. (...)

289 C A gente fez p de a, a gente fixou de *a* a *b*, que seja menos um e menos meio e fez p de a, que é menos um, e p de b, que é menos meio, multiplicou os dois, chega (– 24) que é menor que zero, então a raiz está entre menos um e menos meio.

Insistimos com as perguntas com o objetivo de fazer com que a dupla chegasse à conclusão de que poderia aplicar o Teorema de Bolzano seguidamente. Não adotamos o critério de fazer a bisseção do intervalo e permitimos que os alunos utilizassem valores decimais arbitrários. Sabendo que a raiz localizava-se entre –1 e – 0,5, aplicaram o teorema de Bolzano para o valor – 0,7 e verificaram que a raiz localiza-se agora entre – 0,7 e – 0,5.

Resolução e diálogo da dupla G e C

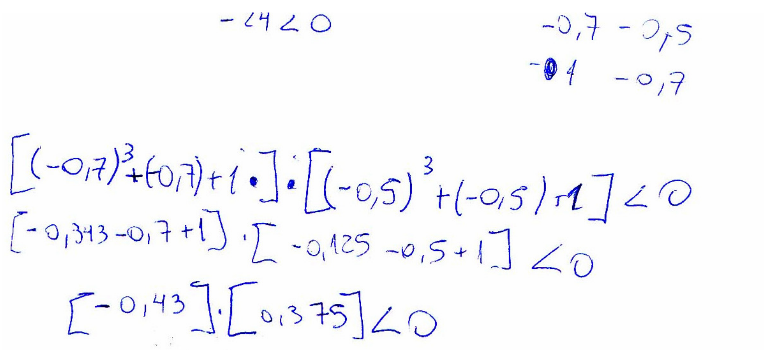


Fig. 54. Exercício 3 – Resolução após uso do *software*

290 Prof Ótimo. Se eu perguntar a vocês: a raiz está entre menos um e menos 0,7, ou se está entre menos 0,7 e menos 0,5, como é que vocês vão saber isso?

291 G Menos 1 e menos 0,7?

292 Prof Vocês já sabem que está entre menos 1 e menos 0,5. Agora eu quero saber se está entre menos 1 e menos 0,7 ou se está entre menos 0,7 e menos 0,5.

293 G Nossa cara: 0,7 ao cubo.

A partir do entendimento de que poderia aplicar o teorema de Bolzano seguidamente, a dupla G e C prossegue na tentativa de obter a melhor aproximação e aplicam o teorema considerando os valores – 0,7 e – 0,6 e identificam um novo intervalo de localização da raiz.

Resolução e diálogo da dupla G e C

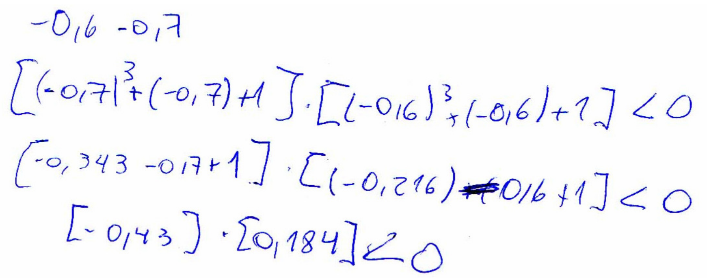


Fig. 55. Exercício 3 – Resolução após uso do *software*

294 C Tá aqui. Pode ser menos 0,6? [risos]
295 Obs O que vocês vão fazer?
296 G Chutar. Menos 0,6. A gente descobriu que está entre menos 0,7 e menos 0,5. Então pode ser menos 0,6.
297 C Nossa vai dar um negócio muito quebrado.
298 G Daí chuta de novo. Vai diminuir o intervalo. 0,6 e 0,5. 0,6 e 0,7.
299 C Menos 0,6 e 0,5. Fechado?
300 G A gente está diminuindo o intervalo. Vamos ver até onde isso dá certo. 0,7 ao cubo.

Intuitivamente estão adotando o valor médio dos extremos do intervalo]– 0,7; – 0,6[usando – 0,65 e – 7.

Nova intervenção do professor

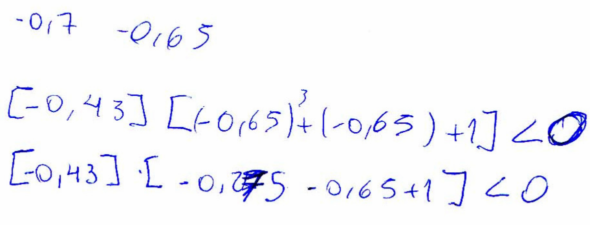


Fig. 56. Exercício 3 – Resolução após uso do *software*

304 Prof Vocês chegaram à conclusão em que intervalo está?
305 G A gente está diminuindo.
306 C A gente fez 0,7 e 0,5; 0,6 e 0,7 e vai ver até onde dá. (...)
310 G Beleza. É menor que zero. Tá. Agora a gente pode diminuir mais. [risos] Vamos tentar um valor?
311 C O que você quer tentar?
312 G 0,65. Está bem no meio.

Explicitando um procedimento

Com o objetivo de fazer com que a dupla entendesse que estava encontrando uma nova técnica, pedimos que explicassem o por quê da escolha dos valores extremos fazendo com que a amplitude do intervalo fosse diminuindo.

318 Prof. Como vocês estão finalizando para obter esse valor?
319 C A gente fez os intervalos. Foi diminuindo os intervalos e concluiu que ela está entre menos 0,7 e menos 0,65.
320 Prof. E vocês escolheram esses valores com que critério?
321 G A gente foi baixando os valores. Fizemos entre menos 1 e meio; menos meio. Daí a gente baixou menos 0,7 e menos 0,5. Daí deu certo. A gente baixou mais. Menos 0,6 e menos 0,7.
322 Prof. Vocês esperam encontrar um valor...
323 C Aproximado.
324 Prof. Por que aproximado?
325 C Porque os valores vão dar muito quebrado. A gente está tendo que aproximar os valores para conseguir fechar a conta certa.

Os alunos também chegaram à conclusão correta que a raiz irracional tem o valor aproximado conforme a afirmação que fizeram (frases 323 e 325).

A visualização gráfica permitida pelo *software* possibilitou a localização do intervalo em que se encontra a raiz. Os questionamentos pelo professor, permitiu à dupla o entendimento da necessidade de diminuir o intervalo para obter uma melhor localização**.** A partir disso, a dupla G e C passou a aplicar o Teorema de Bolzano chegando a uma boa aproximação do valor da raiz irracional, que não é exato.

Outra dupla, a dos alunos A e M, havia descoberto que existia uma raiz irracional. Após visualizar o gráfico no computador e perceberem que a raiz real existente era única, reproduziram-no no papel.

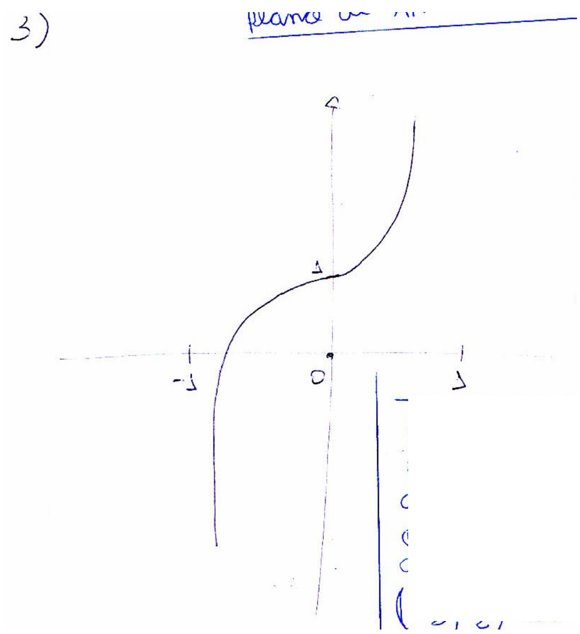


Fig. 57. Exercício 3 – Resolução após uso do *software*

No entanto os alunos A e M equivocaram-se quando foram justificar as demais raízes da equação cúbica proposta como tarefa no exercício 3: confundiram raízes imaginárias com raízes irracionais. Se tivessem lembrado da conseqüência do teorema das raízes complexas para equações de grau ímpar[12], teriam chegado à conclusão correta após analisarem o gráfico.

130 A Ela continua para baixo. Quer dizer, ela bate uma vez aqui. A raiz é ímpar; não par. Ah não, mas é o número de raízes reais. O polinômio é do 3.º grau não é? (...)

132 A Ela quer as três raízes todas iguais. (...)

134 A Ele pode ter três raízes mas são repetidas. Na verdade não quer dizer nada. (...)

136 A Não consigo ver sentido nela. Aquelas três raízes, que por sinal são as mesmas que a gente não conseguiu achar, elas estão entre o 0 e -1 no eixo das abscissas. (...).

138 A Olhe! Espere aí. Se essas raízes estão entre 0 e -1 e é uma só e são três raízes repetidas, então das duas possibilidades que a gente tinha que eram duas complexas, uma o conjugado da outra, mais uma irracional já é descartada. Então são todas irracionais; as três irracionais.

139 M Concordo. Não tem como ser complexa.

[12] As equações algébricas de coeficientes reais e grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

Observando no gráfico apenas um ponto de interseção da curva com o eixo Ox concluíram equivocadamente que as raízes eram repetidas[13]. Porém pareceram inseguros pois decidiram fazer outras tentativas retornando ao exercício anterior.

Representando graficamente a função polinomial, o *software* permitiu que os alunos explorassem a equação ($x^3 + x - 3 = 0$) que surge no item (b) da Atividade 2, em que buscavam resposta à tarefa de mostrar que existia uma raiz irracional.

140 A E a 2 (b) também comprovou isso. Deixa só eu refazer o gráfico. Ela corta uma vez só.
141 M Só uma raiz irracional então.
142 A Três irracionais. E três raízes iguais no caso.

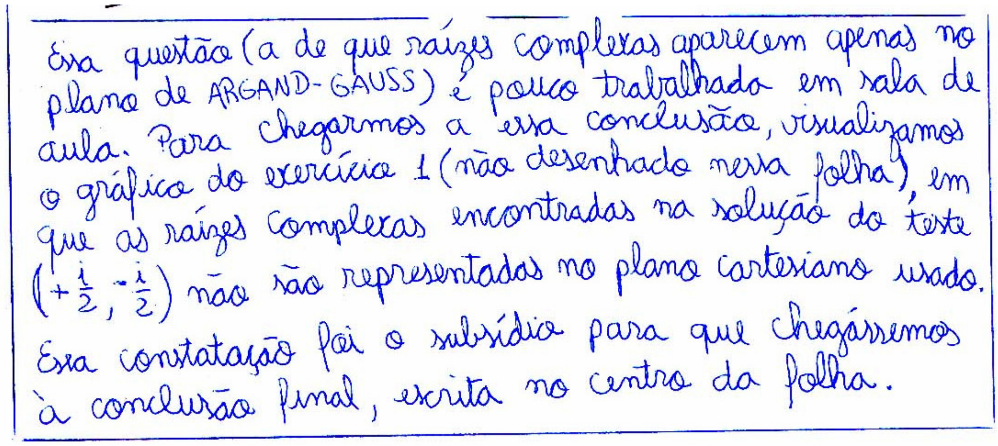
Acreditamos que ainda não estivessem seguros da conclusão sobre as raízes terem multiplicidade m porque continuaram tentando validar na tarefa 1, onde encontraram corretamente a raiz racional $\frac{3}{2}$ e duas imaginárias $\pm\frac{i}{2}$, embora as corretas fossem $\pm$ i, e chegaram a criar outra equação, $-2x^2 - 0{,}5 = 0$, para validar a idéia sobre raízes repetidas, como apresentamos a seguir.

157 M Se bem que essa equação aqui só vai dar essa raiz. Tipo nessa equação aqui, a única raiz é 3/2. Daqui mudou já.
158 A Não, mas o -i/2 e o i/2 também servem como raízes.
159 M Não aqui de primeira eu acho se a gente tentar resolver.
160 A Eu acho que dá sim. Eu acho que foi mal digitado. E se eu tentar asterisco?
161 A/M Deu a mesma coisa.
162 A Vamos tentar uma nova?
163 M $- 2x^2 - 1/2$. (...)
166 A Mesma coisa. $-2x^2 - 0{,}5$. Ah, mas tem o seguinte né? São raízes complexas. Vão estar no plano de Argand-Gauss. Elas não vão aparecer aqui. Será que tem Argand-Gaus aqui?
167 M Sei lá.
168 A Vamos perguntar ao Prof.. Olha 2B, mas tem o seguinte: analisando aqui. A gente fez com o 1 o teste das raízes: mais ou menos i/2 e elas não foram representadas nesse plano. Só podem no plano de Argand-Gauss. Mas aqui no 3?
169 M É porque é irracional, não é complexa.
170 A Por que não pode ser duas complexas? Elas não iam aparecer do mesmo jeito concorda? Pode ser uma irracional aqui...
171 M ... e duas complexas...
172 A ... que não aparecem no gráfico. (...)

[13] Quando a raiz tem multiplicidade m maior que 1, o gráfico tangencia o eixo Ox, como ocorre com a parábola que representa a função polinomial de segundo grau em que o discriminante é igual a zero.

Após terem esboçado o gráfico correspondente às atividade 1, 2 (b) e 3 e criado a equação $-2x^2 - 0{,}5 = 0$ e analisado a representação gráfica, os alunos A e M afirmaram que trabalha-se pouco em sala de aula a representação dos complexos no plano de Argand-Gauss.

Resolução da dupla A e M



Essa questão (a de que raízes complexas aparecem apenas no plano de ARGAND-GAUSS) é pouco trabalhado em sala de aula. Para chegarmos a essa conclusão, visualizamos o gráfico do exercício 1 (não desenhado nessa folha), em que as raízes complexas encontradas na solução do teste $\left(+\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\right)$ não são representadas no plano cartesiano usado. Essa constatação foi o subsídio para que chegássemos à conclusão final, escrita no centro da folha.

Fig. 58. Exercício 3 – Resolução após uso do *software*

174 A A conclusão que a gente chegou foi a seguinte: era um polinômio do 3.º grau, mas que todas as raízes não poderiam ser complexas porque para ter uma raiz complexa ela precisa ter conjugado. Então não pode ter apenas raízes complexas deve ter alguma irracional.

175 M Mas tem uma irracional.

176 A Tem uma irracional. E mesmo que tenha raízes complexas elas não apareceriam nesse plano aqui. Por isso que deixa em aberto. Não é conclusivo. (...)

Os alunos A e M anotam a conclusão correta a respeito dos planos cartesiano e de Argand-Gauss. Se há uma raiz irracional e duas imaginárias conjugadas, estas não aparecem no mesmo plano que as raízes reais. Contudo não conseguiram esclarecer a dúvida da unicidade da raiz real por acreditarem que poderia ser três raízes iguais e por isso o gráfico estaria interceptando o eixo Ox apenas em um ponto. Diferente das outras duplas, A e M não utilizou o teorema das raízes irracionais conjugadas que poderia aumentar ainda mais a dúvida.

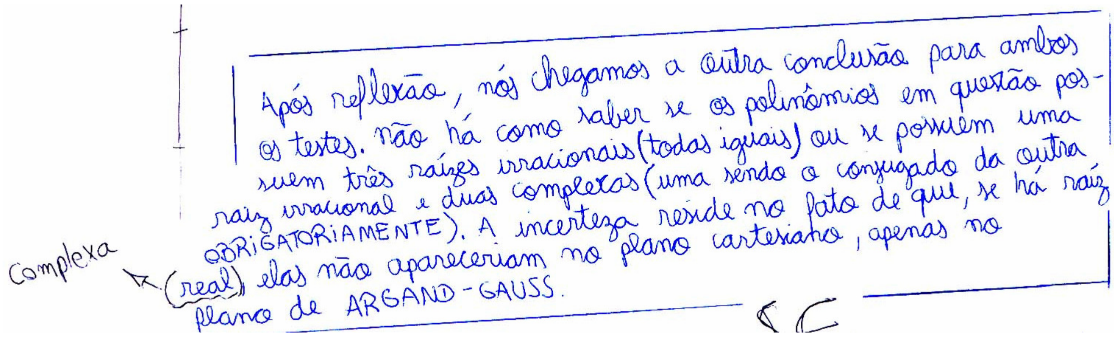

Após reflexão, nós chegamos a outra conclusão para ambos
os testes. não há como saber se os polinômios em questão pos-
suem três raízes irracionais (todas iguais) ou se possuem uma
raiz irracional e duas complexas (uma sendo o conjugado da outra
OBRIGATORIAMENTE). A incerteza reside no fato de que, se há raiz
Complexa (real) elas não apareceriam no plano cartesiano, apenas no
plano de ARGAND-GAUSS.
G C

Fig. 59. Exercício 3 – Resolução após uso do *software*

Uma contribuição do uso do software para esclarecimento dos alunos

A exploração do *software* em diferentes tarefas, mesmo validando aquelas já realizadas em papel, permitiu que os alunos chegassem à conclusão correta a respeito da representação da raiz real no plano cartesiano e das raízes imaginárias.

O professor, assim como fez com a dupla G e C, questionou à dupla A e M se era possível obter uma aproximação para o valor da raiz procurada.

O objetivo é que percebesse a necessidade de outro método pois a aproximação é considerada pelos alunos um processo demorado e impreciso.

Diálogo da dupla A e M

182	Prof.	Se vocês já conhecem o intervalo, onde está a dificuldade em saber que valor é esse?
183	A	Eu desconheço, pelo menos no Ensino Médio, qualquer jeito de encontrar esse número irracional.
184	M	Dá para chutar. (...)
187	M	Que dá para você delimitar. Tipo entre -1/2 e -1.
188	A	Está mais próximo do -1 aqui.
189	Prof.	Como vocês observaram isso?
190	M	No gráfico. (...) Aqui no gráfico está mais próximo do -1.
191	A	Se fosse isso, testando desvairadamente pares ordenados justamente teríamos números muito próximos mas isso é um processo...
192	M	Demorado!
193	A	Demanda bastante trabalho e mesmo assim você não chegaria a um resultado tão preciso assim da raiz irracional.

Os alunos A e M perceberam a possibilidade de se obter um valor aproximado para a raiz irracional, apoiando-se na visualização do gráfico, mesmo sem se referir ao Teorema de Bolzano.

Uma resolução gráfica

A dupla E e D tentou primeiro resolver o exercício 2 (b) após terem esboçado o gráfico com o Winplot. Obteve a solução da tarefa que pedia para mostrar que $x^3 + x - 3 = 0$ admitia uma raiz irracional.

145 E Tem que achar a raiz irracional de $x^3 + x - 3$.
146 D Nesse intervalo mesmo?

Após terem feito a pesquisa das raízes racionais, os alunos E e D sabiam da existência da raiz irracional e decidiram esboçar em um mesmo par de eixos o gráfico do polinômio $x^3 + x - 3$ e do polinômio $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6$. O primeiro polinômio é o quociente da divisão do segundo polinômio por $x + 2$, uma vez que a raiz (-2) já havia sido encontrada. A raiz do quociente será raiz do polinômio também, conseqüentemente os gráficos se interceptarão.

164 E Mas não adianta. A gente precisa saber essa raiz. Tem que ver como a gente vai saber essa raiz.
165 D Vamos tentar fazer da outra equação. Dessa de x^4.

De fato, ao analisarem os gráficos os alunos E e D perceberam a existência de um ponto comum, correspondente à raiz do quociente do polinômio dividendo. Essa raiz é o valor irracional que a tarefa 2, item b, pede para mostrarem que existe. Na análise *a priori* supomos que a justificativa seria feita pela conseqüência da tecnologia do teorema das raízes complexas e não graficamente. Apresentamos a figura a seguir, por nós construída, para ilustrar a tentativa de resolução por essa dupla.

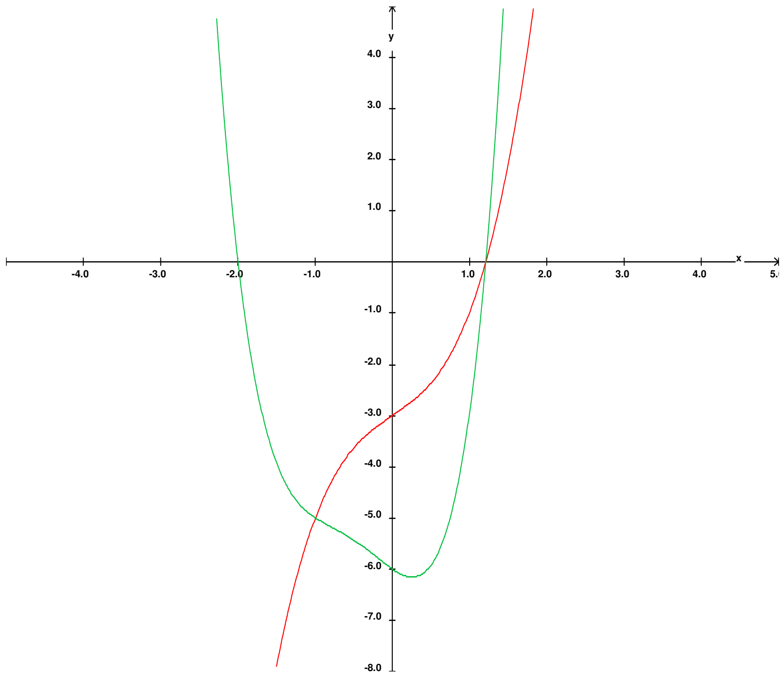


Fig. 60. Resolução gráfica

Diálogo da dupla E e D

170	E	O problema é encontrar esse ponto. Como é que é a expressão inicial, de 4.º grau? $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6$. Ah, aqui...
171	D	Tem uma raiz em comum. (...)
176	Prof.	O que são esses dois gráficos que vocês fizeram?
177	D	O gráfico vermelho é da equação $x^3 + x - 3 = 0$.
178	Prof.	De onde veio essa equação?
179	D	Da raiz que a gente tirou por Briot-Ruffini, dá –2, a gente tirou a equação do 3.º grau. E o gráfico verde é da equação inicial.
180	Prof.	Certo. E o que vocês viram no gráfico vermelho e verde?
181	D	–2 a gente viu mesmo que era uma raiz da equação inicial.

A análise do gráfico possibilitou que confirmassem que – 2 era raiz de $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$. A dupla não menciona mas o gráfico mostra que a raiz irracional encontra-se em]1; 2[. Para tentar obter a outra raiz irracional tentaram um processo algébrico.

Resolução e diálogo da dupla E e D

$$\begin{cases} x^3+x-3=0 \\ x^4+2x^3+x^2-x-6=0 \end{cases}$$

$$x^4+2x^3+x^2-x-6=x^3+x-3$$

$$x^4+x^3+x^2-2x-3=0$$

Fig. 61. Resolução após uso do *software*

188 E Você vai achar um ponto em comum. Mas elas têm dois pontos em comum. Se a gente igualar as duas a gente vai achar os dois pontos.

189 D Então vamos tentar fazer. Pode fazer cálculo não é?

191 E Vamos fazer em outra folha. Era o $x^3 + x - 3 = 0$ e $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$. Vai ficar $x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$. Se a gente colocar essa equação ali?

Ressaltamos o que a dupla fez nesse momento do exercício 2, item b. Baseados na técnica de comparação de resolução de sistemas, igualaram as expressões das duas equações. A técnica da comparação em um sistema de várias incógnitas consiste em isolar a mesma incógnita em duas equações do sistema e depois, por ser a solução comum, igualar as expressões. Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ y=2-3x \end{cases} \Rightarrow 1-2x=2-3x$$

Porém, não se pode fazer o mesmo igualando-se as expressões em equações de uma incógnita. Vejamos um exemplo.

O sistema $\begin{cases} x^2+1=0 \\ x^3+1=0 \end{cases}$ não possui solução nos reais. Se fizermos a comparação temos:

$$x^3 + 1 = x^2 + 1 \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Desse modo, a partir do sistema obtido os alunos E e D igualaram, equivocadamente, as duas expressões chegando a uma terceira $x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$ cujo gráfico da função polinomial correspondente acabaram traçando com o *software*.

192 D Uma raiz da equação é 1. Não, –1.
193 E É –1. Então, esse ponto aqui é o –1.
194 D Qual ponto?
195 E Esse aqui, em que a linha verde e a vermelha... Daí a gente substituindo acha o ponto. Mas o nosso interesse não é esse. É o outro ponto que a gente não sabe qual é.
196 D Vamos substituir nessa.

A dupla E e D substituem o valor (– 1) visualizado no gráfico a partir da terceira equação obtida, $x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$ e confirmam tratar-se da raiz dessa equação. Restaria saber se é raiz das duas primeiras $x^3 + x - 3 = 0$ e $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$, que deram origem a aquela.

Resolução da dupla E e D

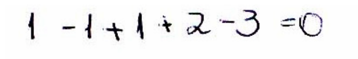


Fig. 62. Resolução após uso do *software*

Os alunos E e D aplicaram a definição de raiz em $x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$ substituindo x por – 1.

Diálogo da dupla E e D

197 E Vai dar 1 – 1 + 1 + 2 – 3. Vai dar zero. É que se a gente substituir esse –1 em cada uma dessas aqui a gente vai achar o mesmo valor. Porque vai dar –1 + 1, vai dar –3.
198 D Como –3 é igual a 0? Isso não existe.
199 E Mas aqui a gente está fazendo y igual a isso. Mas –3 não é...
200 D Tem que digitar essa equação igual a zero, não a y.

As verificarem se – 1 era solução das equações $x^3 + x - 3 = 0$ e $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$ descobriram que não. Os alunos reconheceram ter dificuldades quando as técnicas necessárias não são as rotineiras e afirmaram isso ao professor quando se trata de descobrir soluções que não são números inteiros.

Diálogo da dupla E e D

204 Prof Onde está a dificuldade em achar o valor dessa raiz? Por que vocês não estão conseguindo achar esse valor? É um valor conhecido?
205 D Não parece conhecido.
206 E É que não é um valor inteiro.

Uma vez que se busca descobrir uma raiz irracional, o professor incentivou os alunos da dupla a utilizarem o teorema de Bolzano referindo-se ao intervalo]1; 2[onde estaria localizada a raiz irracional do exercício 2, item b.

230 Prof Vocês já descobriram o intervalo em que está esta raiz. Vocês não vêem como aplicar o teorema de Bolzano novamente, tentando obter o valor dessa raiz? Pensem nisso.
231 E A não ser que a gente vá usando aqui, ampliando o gráfico para tentar descobrir onde está ...na horizontal. A gente sabe que a raiz é maior que 1 e menor que 2. Vamos colocar 1 e 1,5.

Os alunos E e D preferiram explorar o *software* determinando arbitrariamente intervalos onde a raiz irracional poderia estar localizada. Reproduzimos o gráfico na tentativa de ilustrar o que esses alunos teriam feito.

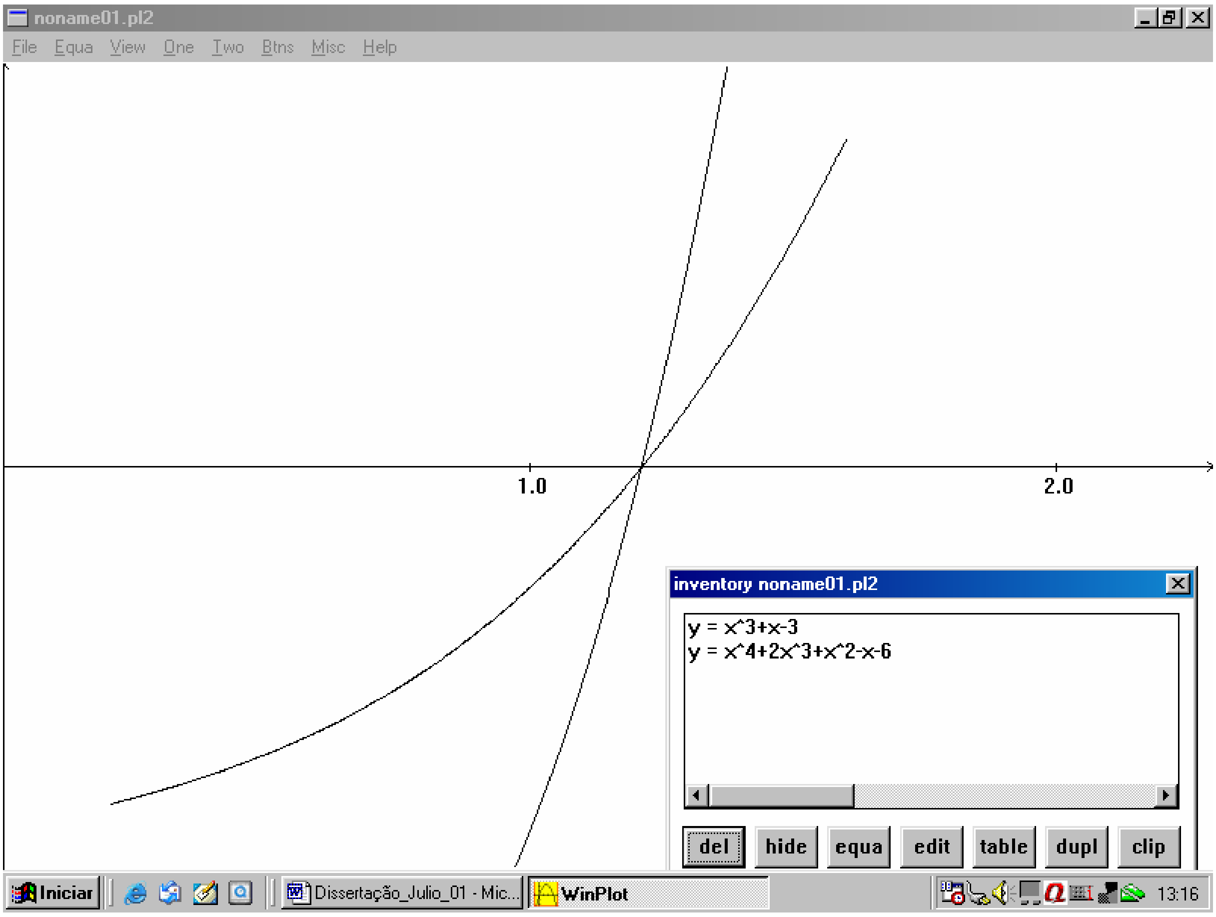


Fig. 63. Resolução gráfica

Diálogo da dupla E e D

232 D Aqui é o maior, aqui está 1,5 certo? Aqui está 1, aqui está 1,5.
233 (...)
241 E A gente viu que estava entre 1,20 e 1,25. A gente pode até aproximar mas a gente não consegue chegar na raiz. Põe 1,26.
242 D Ele vai correr mais para cá não é? Põe 1,22; 1,22 acabei de por.
243 E Então aqui a gente põe 1,21. Só que como a gente vai saber o ponto. A gente não vai achar o ponto exato.
244 Prof Qual é a tentativa que vocês estão fazendo?
245 D A gente estava tentando aproximar para ver se dava para ter alguma noção.
246 Prof O que vocês estão tentando aproximar?
247 D A gente está tentando aproximar o ponto que a gente descobriu que está entre 1,2 e 1,25 mais ou menos. (...)
251 D A gente aproximou o gráfico para o intervalo 1,2 e 1,25. E a raiz continua lá entre esses...
252 Prof Você fez essa aproximação entre 1,2 e 1,25 como? Como fez isso? No papel?
253 D Não, no computador.

Constatamos que essa dupla de alunos preferiu utilizar o software para ir obtendo um valor próximo da raiz da equação $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$ proposta como tarefa no exercício 2, item b. Na análise *a priori* supomos que os alunos fossem utilizar o teorema de Bolzano.

A dupla F e Ge soube aplicar corretamente o teorema de Bolzano após ter feito o gráfico da função polinomial $x^3 + x + 1$. Identificou que o intervalo em que localiza a raiz é $]-1; 0[$.

Resolução da dupla F e Ge

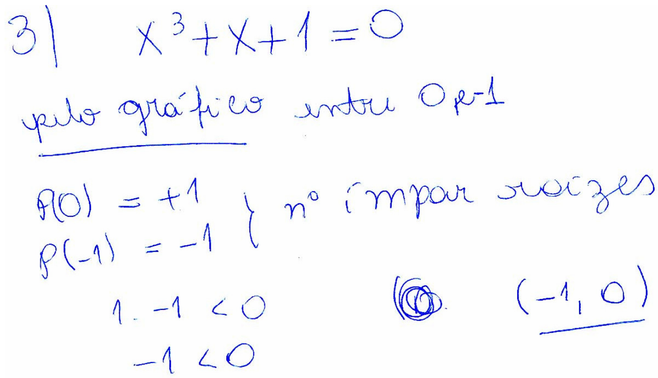


Fig. 64. Exercício 3 – Resolução após uso do *software*

322 Ge P(0) dá (+1). Agora P(-1)...
(...)
324 Ge Não. (-1) ao cubo vai dar (-1) e (-1) aqui dá (-2); vai dar (-1).
325 F Beleza. Tudo bem, a gente tem o intervalo agora. Se eles têm sinais trocados é um número ímpar de raízes. (...)
327 F É um número ímpar de raízes. Descobrimos que tem uma raiz, de acordo com o gráfico. Falta descobrir qual é essa raiz.

Da mesma maneira que ocorreu a dupla A e M, como o gráfico indicava apenas uma raiz real, correspondente ao ponto onde a curva intercepta o eixo x, os alunos F e Ge consideraram que a raiz tivesse multiplicidade três. Vimos que os livros didáticos não associam a representação gráfica da função polinomial com a correspondente equação. Isso impede que se trabalhe com os alunos o conceito de que quando a multiplicidade de uma raiz é maior que 1 o gráfico tangencia o eixo Ox, conforme dissemos anteriormente.

482 Ge Mas essa raiz deve ter multiplicidade 3 não é? Só está cortando em um lugar e tem que 3 raízes. Deve ser uma raiz só de multiplicidade 3.
483 F Se uma raiz tem multiplicidade 3...
484 Ge Tem que transformar em um negócio daqueles lá: $(x - \alpha)$

Os alunos F e Ge admitindo que a raiz α procurada tem multiplicidade três, tentaram equivocadamente aplicar a técnica das relações de Girard. Essa técnica é adequada somente quando é dada alguma informação acerca das raízes. Em nenhum dos três exercícios propostos houve a possibilidade de aplicação dessa técnica mas por constar nos livros didáticos e por ser ensinado pelo professor, é uma técnica bastante lembrada pelos alunos.

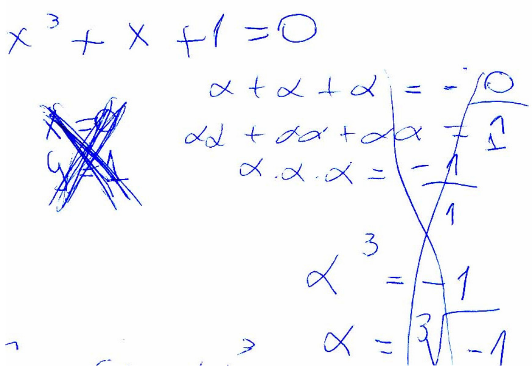


Fig. 65. Resolução após uso do *software*

488 Ge Mas o que seria a $(\sqrt[3]{-1})$?
489 F (α), uma das raízes. Se é a mesma raiz com multiplicidade 3, eu fiz por Girard. Mas esse é o segundo ou o terceiro? É o segundo não é? Seria $\alpha\alpha + \alpha\alpha + \alpha\alpha$, seria (1). Só que a raiz cúbica de (-1) é (-1). Não é (-1)!
490 Ge Não é (–1). É maior que (–1).

O aluno Ge afirma que a raiz é maior que – 1 porque pode visualizar o gráfico e perceber o intervalo onde está a raiz. Porém a dupla não vê a possibilidade de usar Bolzano diminuindo a amplitude do intervalo]–1; 0[para obter subconjuntos desse.

511 F Não sei nem por onde começar porque eu não entendo como pode usar Bolzano nisso. Para mim, Bolzano é só para confirmar é pronto. Usei ali, confirmei e pronto, entendeu?
512 Ge Tentando usar o Bolzano no intervalo. Se a gente fizer o Bolzano para comprovar que ela está no intervalo]-1; 0[dá na mesma. (...)

514 Ge Que está entre (-1) e (0) a gente sabe. Que é negativa a gente sabe. E se for ver, é um pouquinho menor que (0,5)... (-0,5). É menor que (-0,5).

O professor questionou como o teorema de Bolzano poderia ser aplicado conhecendo-se já o intervalo]– 1; 0[onde se localiza a raiz irracional: de acordo com o gráfico se eles acreditam que a raiz esteja entre –1 e – 0,5 ou entre – 0,5 e 0. As mesmas perguntas foram feitas à dupla G e C com a finalidade dos alunos perceberem a possibilidade de aplicarem o teorema de Bolzano consecutivamente, bastando diminuir a amplitude do intervalo inicial.

537 Prof Se eu perguntar se a raiz está entre (-1) e (-0,5) ou entre (-0,5) e (0), o que vocês me responderiam?
538 Ge Entre (-1) e (-0,5).
541 Prof Como vocês sabem que está entre (-1) e (-0,5), algebricamente, usando o teorema de Bolzano?
542 F É só por (0,5) aqui e ver quanto que dá, se dá sinal contrário. Põe (0,5) lá: (1/8 + 1/2 + 1= 0; 13/8). Esse é P(0,5). E o P(-1) a gente descobriu que é... (-1). A gente sabe que está nesse intervalo... que tem uma raiz nesse intervalo por causa dos sinais que são contrários.
543 Prof Então está entre (-1) e (-0,5). Se eu perguntar se está entre (-1) e (-0,7), ou se está entre (-0,7) e (-0,5), como vocês saberiam responder?
544 F Tem que fazer...
548 F Temos que fazer, vamos lá. (0,7) ao cubo?

Com as perguntas os alunos aplicaram o teorema de Bolzano para determinar um intervalo de menor amplitude em que estaria localizada a raiz e encontraram]– 0,7; – 0,5 [nessa primeira aproximação e perceberam a possibilidade de utilização do teorema seguidas vezes.

Resolução da dupla F e Ge

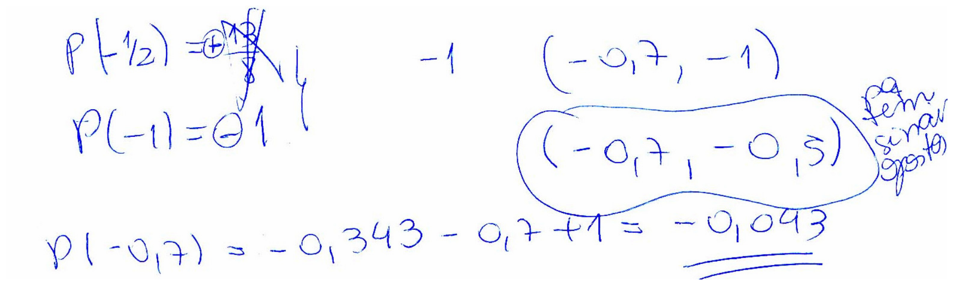


Fig. 66. Aproximação do valor da raiz

559 Prof Vocês descobriram se está entre (-0,7) e (-0,5) ou entre (-1) e (-0,7)?
560 Ge Entre (0,7) e (0,5).
561 Prof Vocês descobriram isso usando...?
562 Ge Usando Bolzano.
563 Prof Usando Bolzano? Está bem!
564 F A gente já sabe que está entre (0,7) e (0,5).
565 Ge Foi isso que ele falou. A gente vai aproximando cada vez mais, para ver, mais ou menos, aproximado, qual é a raiz! (...)

Constatamos que intuitivamente escolhem o valor médio dos extremos para obter o novo intervalo.

575 Ge Faz P(0,6). Vamos ver. (0,6) vezes (0,6): (0,36)...
576 F A gente sabe que está entre (0,7) e (0,5). Você está fazendo (0,6).
577 Ge Sim. Dá (0,216), $(0,6)^3$; só que menos. Menos, menos (0,6) de novo, mais (1). Vai dar positivo isso.
586 F Está entre (-0,6) e (-0,7). Agora a gente tenta o quê? Agora a gente chuta!

Chegaram a uma aproximação melhor do valor ao descobrirem que a raiz está em]–0,7; –0,6 [

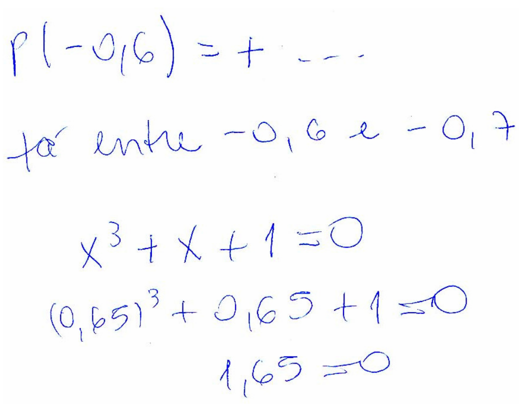


Fig. 67. Aproximação do valor da raiz

Continuaram a aplicar a técnica porém equivocaram-se ao usar + 0,65 quando o correto seria – 0,65, conforme indica a resolução anterior.

587	Ge	Chuta alguma coisa no meio.
588	F	(0,65). Será que é raiz. (...)
592	Prof	O que vocês descobriram? (...)
594	F	Entre (-0,6) e (-0,7). (...)
597	Prof	E vocês esperam encontrar um valor exato ou aproximado?
598	Ge	Mais aproximado. (...)
600	Prof	Por que aproximado?
601	F	Porque é um número muito pequeno; tem um intervalo muito pequeno entre eles; eu acho que vai ser um número mais aproximado.

Os alunos da dupla F e Ge utilizaram *o software* para determinar o intervalo inicial onde a raiz estaria localizada. Com os questionamentos do professor sobre os possíveis extremos que determinariam o novo intervalo de amplitude menor, puderam perceber a aplicação do Teorema de Bolzano consecutivamente e chegaram à conclusão da possibilidade de obter apenas o valor aproximado uma vez que se trata de uma raiz irracional.

A dupla J e Y, na resolução do Exercício 3, ao lerem o enunciado do teorema de Bolzano ficam em dúvida sobre a principal idéia que em seguida permite que se obtenha o valor mais aproximado para a raiz.

Resolução da dupla J e Y

147 Y Teorema de Bolzano: 'Seja a equação P(x), a_nx^n que nesse caso seria ax^3; mais $a_{n-1}x^{n-1}$ que é 2 (referindo-se a n-1); nesse caso a é 0. Pois é mas aqui estava dizendo que todos os coeficientes eram iguais. Não, não é. Lembra-se do Teorema (triângulo) de Pascal? Mas quais são esses intervalos aí? Quem são a e b? (...)

151 Y O problema é quem é a e quem é b? As raízes são o cruzamento dessa curva com o eixo x. P(a) vezes P(b) é menor que zero. Número ímpar de raízes reais. Você pode ter 3 raízes reais ou 1 raiz real. Tem que achar uma irracional. Uma raiz.

152 J Tem 3 porque uma é negativa e outra é positiva.

153 Y Tá, então tem 3 raízes. Aqui, olha, ele diz: as raízes do polinômio são o cruzamento dessa curva com o eixo x. Então uma das raízes vai ser aquele ponto ali. Dá para descobrir. 0,69; 0,7. Menos 0,7 aproximadamente.

Inicialmente a dupla J e Y entendeu o teorema pois não afirmaram que a e b, extremos do intervalo, seriam as raízes. Somente com a visualização do gráfico a dupla estimou bem um valor, – 0,7, e verificou se era raiz pelo algoritmo de Briot-Ruffini e não por substituição como supomos *a priori* que seriam feitas as verificações. Como espera-se um número irracional, o decimal exato – 0,7 não será raiz. A substituição de valores é adequada para aplicação novamente do teorema de Bolzano.

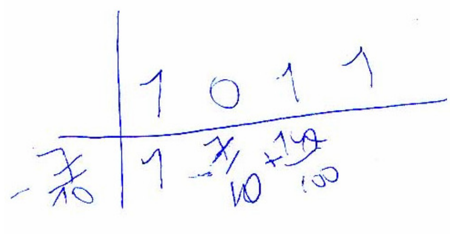


Fig. 68. Resolução após uso do *software*

164 J É menos aqui não é? É menos 7/10.

165 Y É mesmo. -7/10 vezes 1, -7/10. -7/10 vezes -7/10, 49/100 mais 1, 149/100. vezes -7/10 mais 1...

166 J Não deu 0. ... existe um número ímpar de raízes reais entre a e b.

A priori supomos que os alunos fariam a pesquisa de raízes racionais para relacionar os possíveis valores. Se isso fosse feito pela dupla J e Y seria desnecessário verificar que 0,7 ou $\frac{7}{10}$ não é raiz.

O aluno Y observando o gráfico, explorou o *software* na tentativa de descobrir alguma ferramenta. Ao se clicar com o botão esquerdo do *mouse* sobre um ponto do gráfico, o programa apresenta as coordenadas cartesianas daquele ponto.

177 Y Vemos que tem uma raiz aqui. Pomos um ponto, mas não deu certo.
178 Prof O que você está experimentando 3B? O que você descobriu com o mouse?
179 Y Estou tentando descobrir uma raiz.
180 Prof Mas o que você descobriu? O que você está fazendo com o mouse e achando ali Y?
181 Y Estou achando onde intercepta no ponto x.
182 Prof E como você está fazendo isso? Com o mouse?
183 Y Com o mouse! (...)

Representamos a seguir o que o aluno Y teria feito na exploração do software ao clicar com o *mouse* sobre a raiz (intercepto do eixo Ox).

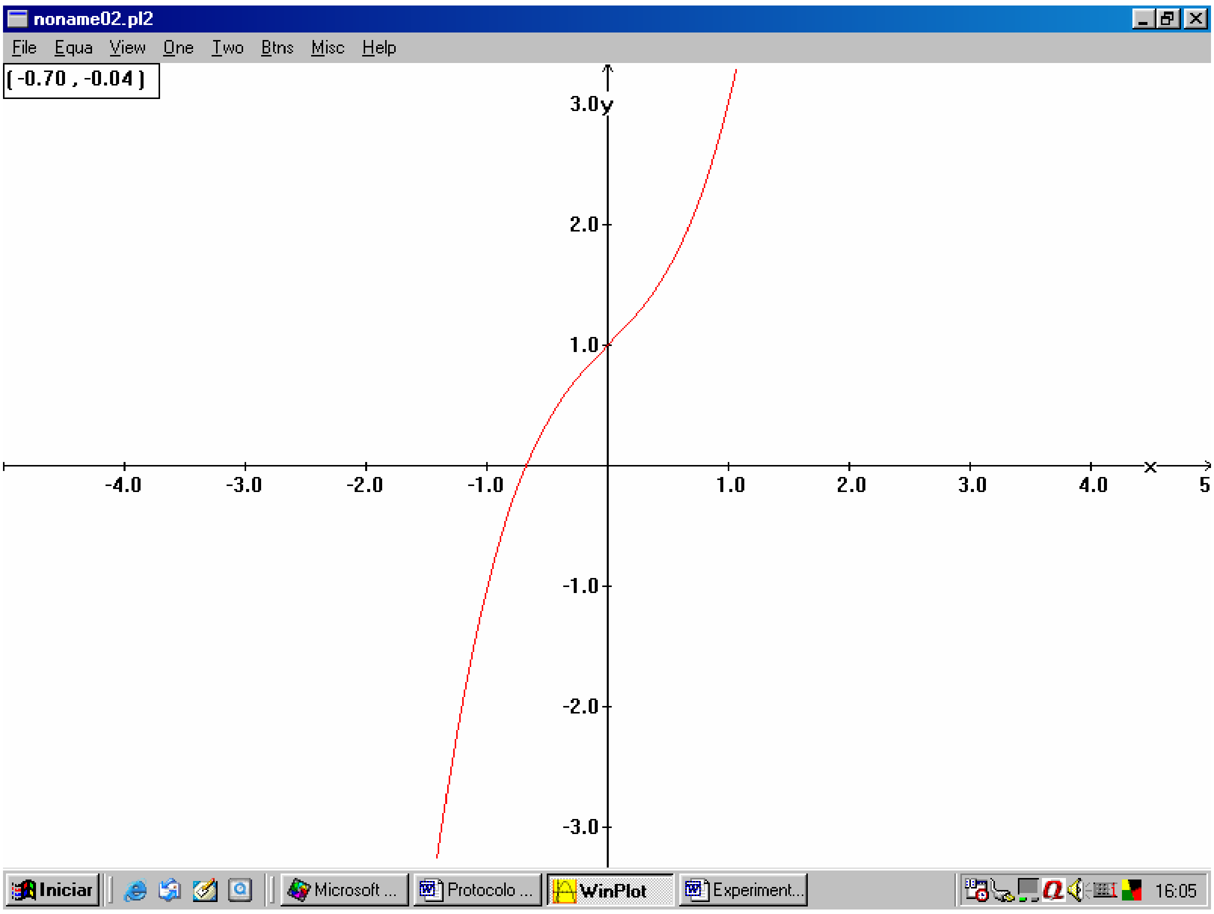


Fig. 69. Exploração do *software* pelo aluno

186 Prof O que você descobriu ali 3B com o mouse?
187 Y Onde corta o eixo x que é o intervalo (a; b). Então seria uma raiz... (...)
189 Y Só que não deu certo. Dá... 700 mais ou menos com 0,7. No Briot-Ruffini não deu 0 o resto.
191 Y A não ser que seja 0,66 ali. Menos 0,66.
192 Prof Você testou esse valor decimal e verificou que não é solução.
193 Y É. A gente fez aproximado 7/10.
194 J Daí não zerou, não deu certo.

A dupla verifica novamente o valor $-\frac{7}{10}$, embora digam $+\frac{7}{10}$, por substituição, para saber se é raiz.

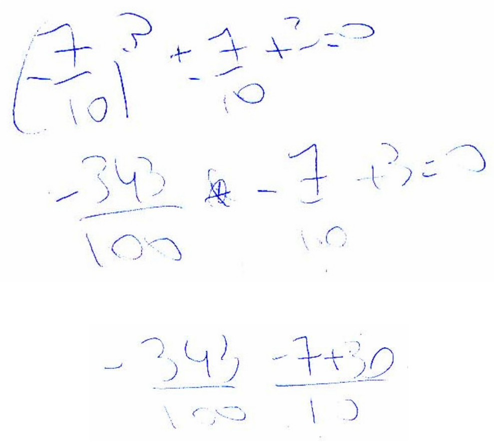


Fig. 70. Resolução após uso do *software*

202 Y Olhe 0,66. É isso aí 0,69. Vamos substituir aqui na equação 7/10. É mais fácil que fazer Briot-Ruffini.
203 J 343/100 + 70/100... é não deu.

O observador e o professor estimulam os alunos a associarem o teorema de Bolzano e a visualização gráfica permitida pelo *software*. Fazem perguntas para que os alunos J e Y percebam a possibilidade de partindo de um intervalo inicial, pela aplicação do teorema ir diminuindo a amplitude do intervalo obtendo assim o valor aproximado da raiz irracional.

204 Obs. Uma pergunta: esse teorema com a ajuda do gráfico não sugere a vocês uma estratégia?

205 Y Sugerir... A raiz estaria aqui não é? Nesse ponto em que intercepta a reta x só que não dá certo.

206 J A gente não está interpretando direito.

207 Obs. Então como vocês poderiam criar uma estratégia para encontrar a solução aproximada pelo menos?

208 J É chegar lá que a gente não está conseguindo matematicamente. Só ali como a gente viu. A gente conseguiria se tivesse mais um valor. Ou uma raiz. Algo que poderia dividir essa equação, eu não sei.... (...)

216 Prof Vocês têm o intervalo em que está a raiz. Usando esse teorema vocês não conseguem obter essa raiz sem ser no gráfico com o mouse, mas de uma forma agora algébrica, com o teorema?

A dupla J e Y prossegue interpretando o significado de P(a) e P(b) no teorema de Bolzano. Escolhe dois valores, – 2 e 2 e calcula aproximadamente o valor numérico do polinômio.

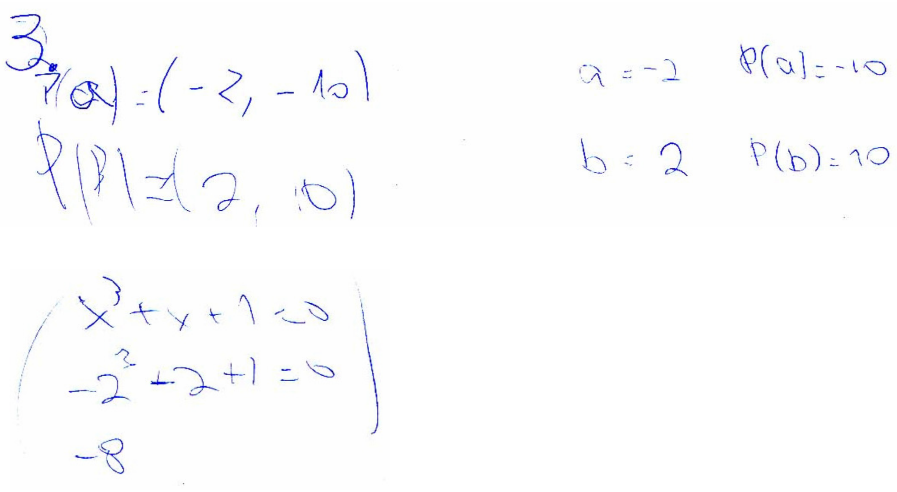


Fig. 71. Interpretação do teorema de Bolzano

221 Y Deixe eu achar bem certinho: -2 aproximadamente; e - 10. Vamos por 2 e 10 também para ficar simétrico. Agora tem que multiplicar P(a) e P(b).

O observador abordou uma questão que permitiu que concluíssem qual era o intervalo, embora com amplitude maior que o intervalo mostrado pelo gráfico. Perguntou quem eram a e b (extremos do intervalo) e obteve a resposta correta pelos alunos J e Y.

222 Obs. Uma contribuição: quem é o a e quem é o b?
223 J É o intervalo aberto.
224 Y Vai ser no x. É o intervalo no x. Então é só -2 e 2.
225 J Ponto a e o b. Qual ponto?
226 Y Pontos? -2 e 2. Não, P(b) você fala? 10 e -10. Agora tem que ver se P(a) pode P(b).
227 J Tem que ter o intervalo. E multiplicar as raízes nesse intervalo.
228 Y Então tem uma raiz no intervalo -2 e 2.

De acordo com os exercícios resolvidos em sala empregando o teorema de Bolzano, os alunos J e Y reconhecem que a tarefa de analisar o número de raízes é mais freqüente que a tarefa de determinar as raízes quando se trata de valores irracionais. Isso requer, como vimos, métodos numéricos. O diálogo apresenta a afirmação.

Diálogo da dupla J e Y

229 Prof O que vocês viram nos exercícios? Que característica vocês perceberam nos exercícios do livro?
230 J Eu acho que tem o mesmo propósito. Você tem que ter o intervalo para achar as raízes dentro daquele intervalo.
231 Prof Os exercícios do livro pedem para vocês acharem as raízes?
232 Y Pedem quantas raízes. O número de raízes. Pelo menos nos exercícios que eu vi.
233 Prof Só pedem a quantidade de raízes. Por que será que não pedem para vocês determinarem as raízes? Qual a dificuldade que estão tendo nas atividades que propusemos a vocês?
234 Y Achar as raízes...
235 J ... e não o número.

O professor fez a mesma pergunta dirigida às outras equipes referindo-se a intervalos de menor amplitude, que podem ser determinados pela utilização do teorema de Bolzano.

248 Prof Se eu perguntasse a vocês se existe uma raiz entre -1 e 0, o que responderiam?
249 J -1 e 0? Sim!
253 Prof Se eu perguntasse a vocês se essa raiz está entre -1 e -0,5, ou se essa raiz está entre -0,5 e 0, como vocês saberiam responder isso?
254 Y Pela localização que ela está ali.

Diante da pergunta constatamos que o aluno apoiava-se no gráfico possibilitado pelo *software*. O professor e o observador continuam questionando os alunos J e Y sobre a aplicação do teorema de Bolzano nos intervalos, para que percebam a nova técnica de resolução da tarefa, neste caso um método numérico.

256	Prof	Matematicamente, algebricamente usando o teorema de Bolzano. Vocês viram que no livro era dado o intervalo e perguntava a quantidade de raízes. Na atividade que propusemos não é dado o intervalo, vocês graficamente descobriram e agora pergunto: usando o mesmo teorema como vocês responderiam se essa raiz está entre -1 e -0,5 ou entre -0,5 e 0?
257	Obs	Com o auxílio do cursor, do mouse, vocês identificaram com certeza qual era a raiz?
258	J/Y	Aproximadamente
259	Obs	Aproximadamente. Isso que é um indicativo para vocês. Usem essa informação para aplicarem o teorema. Mesmo usando o teorema vocês podem achar um valor aproximado, não exato. Essa é a idéia.

Através desses questionamentos o observador identifica que a dúvida está em reconhecer os extremos do intervalo onde se localiza a raiz. Partindo da informação que os alunos conheciam de que havia uma raiz em]– 1; – 0,5[, são feitas novamente as perguntas estimulando a descoberta da técnica.

281	Obs	Então olhe bem se é isso. Olhe quem é a, quem é b e quem deve ter sinais contrários?
282	Y	x = a, intervalo no eixo x; daí substitui lá; -0,5; -1 e -0,5. Então a seria -1 e b seria -0,5.
283	J	Não tem que ter sinais contrários?
284	Y	Pois é, isso que acho estranho.
285	Obs	Olhem no enunciado se eles têm que ter sinais contrários.

A dúvida dos alunos quanto ao significado de *a* e *b* como extremos do intervalo ainda permanece. O observador faz perguntas e pede para os alunos lerem o teorema cuidadosamente para perceberem o seu erro e esclarecer a dúvida sobre a, P(a), b e P(b). Na leitura o aluno Y entendeu corretamente esses conceitos. Quando os alunos esclarecem a dúvida, passam a diminuir a amplitude do intervalo admitindo outros valores para os extremos *a* e *b*.

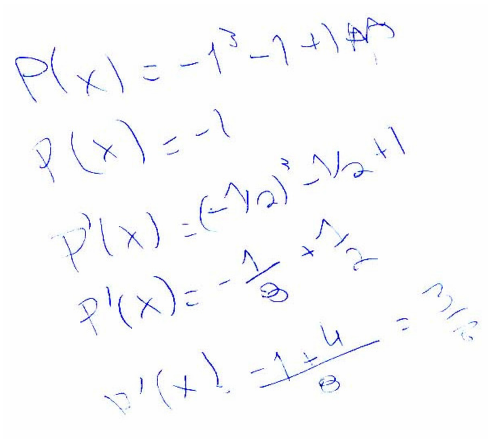


Fig. 72. Interpretação do teorema de Bolzano

286 Y Ou então tem mais de uma raiz. O número de raízes é ímpar... se o valor do polinômio para x = a e x = b têm sinais contrários. Só se tiver mais raízes.
287 Obs Então leia de novo dessa frase para frente.
288 J/Y Se o valor do polinômio para x = e x = b...
289 Y Ah, do polinômio está ligado. Do polinômio é esse aqui. Não é necessariamente a e b. É P(x). *a* vale menos 1. Então vamos ver se têm sinais contrários. P(x)... -1^3-1+1. P(x) é igual a -1. Deu negativo. Agora vamos ver o outro número que daí vai ser -1/2. $(-1/2)^3$ - 1/2 + 1. $(-1/2)^3$ dá -1/8; aqui dá 1/2...
290 J O que a gente achou?
291 Y A gente achou que P(x) tem sinais contrários. Tem uma raiz ali.

Mesmo sem falar em bisseção constatamos que os alunos J e Y entenderam a nova técnica. O observador pede para que expliquem a conclusão. A dupla responde que pode ir diminuindo o intervalo até obter a raiz. No caso de raiz irracional é possível obter o valor com o grau de precisão desejado.

294 Obs Que conclusão vocês tiram daquilo ali?
295 Y Tem uma raiz nesse intervalo
296 Obs Isso. Então vocês podem fazer o quê com o intervalo? (...)
298 Obs A raiz pertence ao intervalo. Então, o que vocês podem fazer com o intervalo?
299 J Reduzir até chegar a um ponto... Ah! Se a gente reduzir vai ter um ponto que vai se igualar à raiz.
300 Y - 7/10... se o P(x) dá negativo até chegar no ponto... só que tem que dar um positivo e um negativo.

O valor $-\frac{7}{10}$ já foi verificado por substituição conforme mostramos. A partir do intervalo $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$, conhecido por esses alunos, é necessário estabelecer um outro extremo para o intervalo. A dupla, sem nenhum critério aparente, escolhe o intervalo $\left]-1;-\frac{9}{10}\right[$ e afirmam para o professor que terminariam a atividade diminuindo cada vez mais o intervalo.

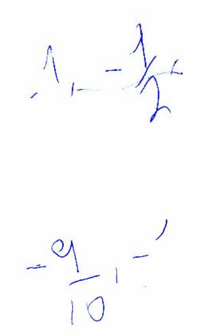


Fig. 73. Aproximação do valor da raiz

304 Y Então vamos fazer -1... 9/10.
305 Prof Como vocês terminarão a atividade?
306 Y A gente descobriu o intervalo em que pertence o ponto. A gente ia reduzir o intervalo até ...
307 J Até chegar à raiz.
308 Prof E vocês iriam reduzir o intervalo com qual critério?
309 Y Tentativa mesmo. Até chegar a P(x) e a outro P(x), P(b) e P(a) com valores de sinais contrários.

Embora a dupla J e Y não adotou, nem intuitivamente, o critério do valor médio que supomos em nossa análise *a priori*, concluiu corretamente que deveriam ir diminuindo o intervalo e aplicando o teorema de Bolzano na tentativa de localizar a raiz, primeiro passo de um método numérico de resolução de uma equação algébrica.

Conclusão da análise *a posteriori* do exercício 3, após o uso do *software*

Como conseqüência do teorema das raízes complexas e da pesquisa das raízes racionais sabemos da existência de uma raiz irracional, conforme supomos na análise *a priori*. Uma vez que não é freqüente o ensino de métodos numéricos de resolução de equações propusemos como tarefa a resolução de uma equação dentro do conjunto dos números irracionais, apresentando junto ao exercício o teorema de Bolzano que corresponde à tecnologia para o desenvolvimento de uma nova técnica. Assim será possível constituir o bloco prático-técnico [T / τ] definido por Chevallard.

A utilização do programa computacional (*software* gráfico) permitiu que os alunos visualizassem a representação do gráfico da função polinomial correspondente à equação algébrica. Os alunos não questionaram sobre isso embora mesmo em situações mais simples, como na resolução de equações quadráticas, não se costuma representar o gráfico da respectiva função polinomial de segundo grau e a interseção com o eixo x (raízes), objeto matemático estudado na primeira série do Ensino Médio.

Sabendo que uma equação de grau três tem três raízes e observando apenas um ponto de interseção com o eixo Ox, os alunos demonstraram dúvidas quanto as raízes múltiplas e a representação gráfica indicando a pouca ênfase dada nos livros didáticos e no trabalho em sala de aula.

O *software* permitiu que uma dupla fizesse a interseção de gráficos, uma técnica útil em exercícios de funções, como citamos de Brasil (2004 b), e exercícios de geometria analítica plana no ensino médio. A mesma dupla validou a unicidade da raiz irracional e da racional quando refez outro exercício resolvido antes pelas técnicas dos algoritmos costumeiramente estudados (pesquisa de raízes, divisão e decomposição). As outras quatro duplas não chegaram a obter uma função iterativa por isso desenvolveram parcialmente o método numérico. No entanto perceberam que para certos tipos de tarefa há a necessidade de uma nova técnica. Um aluno de uma das duplas explorando o software descobriu uma ferramenta que indica as coordenadas dos pontos do gráfico e que pode ser usada na validação dos resultados encontrados.

Conclusão do capítulo 4

A partir do estudo dos livros didáticos constatamos que as tarefas apresentadas enfatizam os algoritmos de resolução de equações principalmente com soluções inteiras e imaginárias em detrimento de métodos numéricos, como o da bisseção proposto para o ensino médio, e com isso o processo de aproximação de valores não ganha importância deixando os números irracionais em segundo plano.

Com o propósito de inserir uma nova técnica (método numérico) justificada por uma tecnologia (teorema de Bolzano), elaboramos e aplicamos uma seqüência didática a cinco duplas de alunos.

A primeira tarefa corresponde ao exercício 1: Obter as raízes do polinômio $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 3$. Os alunos não tiveram dúvidas em relacionar polinômios com equações algébricas. Essa tarefa foi resolvida por quatro das cinco duplas por fatoração (agrupamento). Outra dupla resolveu com a técnica conjunta da pesquisa de raízes racionais, divisão de polinômios e fatoração. A divisão foi feita pelos alunos por meio do algoritmo de Briot-Ruffini. Acreditamos que o algoritmo é adequado quando que se deseja dividir um polinômio por outro binômio $x - r$ do primeiro grau, em que r é raiz do polinômio, além de ser uma conseqüência dos métodos apresentados nos livros didáticos. Todos os alunos sabiam que a equação cúbica tinha três raízes. Como não mencionaram nada não sabemos dizer se pensaram na conseqüência do teorema da decomposição ou se sentiam-se seguros por terem encontrado as soluções. Nenhuma das duplas soube validar corretamente o resultado, ou seja, após terem obtido os valores das raízes não os substituiu para verificar se de fato $P(r) = 0$. Uma dupla preocupou-se em conferir os cálculos. É provável que isso indique um hábito, uma característica cultural.

No exercício 2, item a, pede-se para mostrar que a equação $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$ tem uma raiz racional e encontrá-la. A técnica a ser empregada foi a pesquisa de raízes racionais, a divisão e a decomposição (fatoração). Uma dupla mostrou habilidade algébrica quando fatorou o trinômio do 2.º grau. A raiz racional obtida é o inteiro -2. Nesse caso, os alunos não tiveram dúvida quanto a inclusão dos inteiros nos racionais ($Z \subset Q$). Verificamos que os alunos estavam seguros na utilização das técnicas conhecidas e propostas nos livros didáticos e ensinados pelo professor. No item b em que se pedia para mostrar que a mesma equação tinha uma raiz irracional, bastava argumentar que havia apenas a raiz racional – 2; as raízes imaginárias em equações de coeficientes reais existem somente aos pares. Portanto a equação apresentada tem uma raiz irracional. Constatamos que embora não esteja presente nos livros didáticos que estudamos, o professor da turma ensina o teorema das raízes irracionais para equações de coeficientes racionais, sem justificativa da tecnologia (existência aos pares das raízes $a \pm \sqrt{b}$). Esse teorema causou confusão com o teorema das raízes complexas por causa dos conjugados dos números. Este modo de representar os irracionais é um modo particular. Uma quantidade infinita de números irracionais deixou de ser representada. Enquanto todos os alunos executaram a tarefa 2, item a, tiveram dificuldades em realizar a tarefa 2, item b. Confirmamos a pouca ênfase que é dada aos números irracionais nos livros didáticos e pelo professor da turma.

No exercício 3 pediu-se que fossem determinadas as raízes da equação $x^3 + x + 1 = 0$. Foi apresentado junto à tarefa o teorema de Bolzano que exige conhecimento do objeto funções pela relação que é estabelecida entre equações algébricas, polinômios e funções polinomiais. As técnicas propostas nos livros didáticos e que aqui já estudamos não levam à resolução. Sem o uso do *software*, os alunos tiveram dificuldade em interpretar P(a) e P(b) sendo a e b extremos do intervalo]a; b[. Isso significa que os alunos não souberam empregar as técnicas da obtenção de imagem de um elemento por meio da função (ou valor numérico de um polinômio) e respectiva representação gráfica. Também não souberam associar raiz de funções elementares de 1.º e 2.º grau com o valor da abscissa do intercepto com o eixo Ox. Após verificarem que não existem raízes racionais, os alunos apresentaram a tendência de denominar equivocadamente os irracionais pela forma geral $a \pm \sqrt{b}$. Notamos também que os alunos seguem uma seqüência de técnicas muito semelhante à apresentada nos livros para a resolução de equações:

1) determinação de uma das raízes (por tentativa ou pela pesquisa das raízes racionais);

2) fatoração (teorema da decomposição);

3) relações de Girard (mesmo quando desconhecem informações sobre as raízes);

4) teorema das raízes complexas.

Essa seqüência esteve evidente toda vez que os alunos não conseguiam realizar a tarefa, ou seja, quando não conseguiam resolver a equação proposta principalmente os exercícios 2-b e 3 onde haviam soluções irracionais.

Com o *software* os alunos puderam visualizar a existência de uma raiz irracional e localizar o intervalo em que está localizada. Com a participação do professor, quatro das cinco duplas desenvolveram parcialmente um método numérico de refinamento de valores diminuindo a amplitude do intervalo pela aplicação consecutiva do teorema de Bolzano, e permitindo obter um valor aproximado da raiz. A investigação do *software* pelos alunos permitiu também a descoberta de ferramentas dessa tecnologia informática e a validação, por uma das duplas, de técnicas de resolução gráfica de equações, mesmo que essas não sejam algébricas (BRASIL, 2004 b).

CONCLUSÃO

O caráter dualista do Ensino Médio está colocado em questão na atual Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN). Quanto à continuidade dos estudos pelos alunos ao terminarem o Ensino Médio, a LDBEN assinala que a preparação deve ser feita com a capacidade de aprender e com a compreensão do mundo ao nosso redor. A preparação para o trabalho será básica e cabe à área de Ciências da Natureza e Matemática levar o aluno à compreensão de que as ciências são construções humanas e das relações entre o conhecimento científico-tecnológico e a vida social e produtiva.

No estudo de documentos oficiais[14] encontramos a proposição de se trabalhar os conteúdos em Matemática no Ensino Médio de modo a desenvolver as competências de representação e comunicação, investigação e compreensão, contextualização sócio-cultural. Para a Matemática aponta-se a possibilidade de construção de abstrações, evitando memorização de algoritmos, e de se desenvolver habilidades de caráter algébrico, geométrico, gráfico, probabilístico e estatístico. Os Parâmetros e Orientações Curriculares assinalam a importância da escolha do conteúdo a ser estudado e a forma como esse conteúdo será ensinado. Esses fatos nos levaram a estudar de que modo se ensina o assunto Equações Algébricas no Ensino Médio. Para isso estudamos as transformações sofridas desde a criação do conhecimento, o saber sábio, até a apresentação nos livros didáticos como saber a ensinar. Esse processo de transformação é identificado no fenômeno da Transposição Didática de Yves Chevallard. Na caracterização do objeto Equações Algébricas como saber a ensinar, realizamos um estudo de livros didáticos utilizando elementos teóricos da Organização ou Praxeologia Matemática da Teoria Antropológica do Saber, também de Chevallard, em termos de descrição de tarefas, técnicas e tecnologia que justifica as técnicas.

Atentos à importância de utilização de recursos tecnológicos (calculadoras e computadores), e ao mesmo tempo interessados em acrescentar uma técnica para a realização da tarefa de resolver uma Equação Algébrica considerando todo o conjunto dos números reais

[14] Documentos oficiais estudados: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio; Parâmetros Curriculares Nacionais +; Orientações Curriculares para o Ensino Médio; Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio; Orientações Curriculares de Matemática para o estado do Paraná; Proposta Curricular de Santa Catarina.

e não apenas um subconjunto, o dos racionais, buscamos resposta à nossa questão de pesquisa: "O uso de um *software* gráfico traz contribuições ao estudo das Equações Algébricas no Ensino Médio?"

Para buscar essa resposta elaboramos e aplicamos uma Seqüência Didática onde os alunos utilizarão um programa computacional. Realizamos a análise *a priori* dos exercícios propostos e *a posteriori* com os dados recolhidos por registro de resolução dos alunos e protocolos de diálogos gravados e transcritos.

Elementos históricos sobre as Equações Algébricas

O desenvolvimento histórico da teoria das Equações Algébricas relaciona-se intrinsecamente com o desenvolvimento da própria Álgebra. As antigas civilizações egípcia e mesopotâmica possuíam conhecimento sobre resolução de equações e não se limitavam a problemas da vida cotidiana e já havia indícios de resolução de equações cúbicas. Os conhecimentos desses povos influenciaram outra civilização. Os gregos desenvolveram a álgebra geométrica utilizando métodos geométricos de resolução de equações quadráticas. Da Grécia os conhecimentos matemáticos chegaram aos árabes que passaram a resolver equações quadráticas por métodos aritméticos e cúbicas por métodos geométricos. Do Oriente, o próximo destino foi a Europa. Até o final do século XV as equações eram resolvidas geometricamente. Em meados do século XVI surgiram as soluções algébricas para as equações cúbicas e quárticas. Importantes matemáticos contribuíram para a teoria das Equações Algébricas: Cardano e Tartaglia pela resolução das cúbicas e quárticas por métodos algébricos; Viète pelo simbologismo; Newton e Descartes pelos resoluções algébricas-geométricas; Euler pelos conceitos relacionados a números complexos; Girard e D'Alembert que perceberam a existência de ao menos uma raiz para a equação polinomial $P(x) = 0$; e Gauss que demonstrou o Teorema Fundamental da Álgebra onde prova que toda equação polinomial $f(x) = 0$, a coeficientes complexos e grau $n \geq 1$, admite ao menos uma raiz complexa. A demonstração do teorema permitiu a demonstração de outras importantes propriedades dentro da teoria das Equações: o teorema da decomposição; o teorema das raízes complexas; o teorema das raízes racionais, dentre outros.

Na busca da solução algébrica para a equação algébrica geral, Abel e Galois desenvolveram conceitos que hoje constituem a Teoria dos Grupos em Álgebra. Galois demonstrou que não existe método algébrico de resolução de equações algébricas de grau maior que quatro.

Equações Algébricas enquanto Saber a Ensinar na Academia

Na academia as equações algébricas são definidas como P(x) = 0 onde P(x) é um polinômio. Em Álgebra, os polinômios são seqüências sobre um anel A e são diferenciadas de funções polinomiais. Estas são aplicações dentro de um anel comutativo, associando elementos do anel a um valor obtido por meio do polinômio. Na disciplina de Álgebra não se estudam resoluções de equações algébricas. São estudados métodos numéricos de resolução em Cálculo Numérico e em alguns métodos utilizando conceitos de cálculo diferencial (método de Newton-Raphson). Portanto, na academia as Equações Algébricas são dissociadas de polinômios e estudadas em disciplinas diferentes.

Equações Algébricas enquanto Saber a Ensinar no Ensino Médio

Os documentos oficiais e orientações curriculares não detalham a maneira de se trabalhar o objeto Equações Algébricas no Ensino Médio. Buscando proposições de noosferianos[15] encontramos em Brasil (2004 a) sugestões de se trabalhar aspectos históricos das Equações Algébricas e de se resolver equações graficamente, mesmo que não sejam algébricas. Constatamos em Iezzi e Dolce (1973) que o objeto polinômios era apresentado a alunos secundaristas como seqüências quase-nulas, de maneira semelhante à ensinada na academia; os autores definem funções polinomiais e façam distinção entre estas e polinômios na indeterminada X. Já em Iezzi (1993) encontramos outra definição para polinômios, dessa vez sem distinção com as funções polinomiais. Nos livros didáticos atuais também não se faz

---

[15] Os noosferianos (Prof.es, professores, políticos, etc.) são os integrantes da noosfera, definida por Chevallard como o conjunto das fontes de influência do processo educativo.

diferenciação. Desde a academia até o ensino médio, as equações algébricas são definidas como uma igualdade da forma P(x) = 0, onde P(x) representa um polinômio.

Destacamos as sugestões de Lima (1998) para o ensino de métodos numéricos de resolução de equações algébricas. Um deles é o da bisseção, um método simples que pode ser estudado por alunos de ensino médio. De modo geral, nos métodos numéricos é necessário isolar a raiz, isto é, encontrar um intervalo]a; b[onde ela se localiza e a partir de um valor inicial elaborar um processo iterativo que gere valores que se aproximem do valor da raiz.

Para conhecermos de que modo o objeto Equações Algébricas apresenta-se como saber a ensinar no ensino médio, estudamos três livros didáticos: Iezzi et alii (2001), Smole e Diniz (2003) e Dante (2003). Os autores ou suas obras foram indicados no Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (2004). Nesse estudo constatamos que não é feita distinção entre os polinômios e as funções polinomiais. Pelo contrário, definem-se polinômios como funções de variáveis complexas, associadas a uma seqüência de números complexos que serão os coeficientes da expressão algébrica da função. As equações são ensinadas em seguida a polinômios e são definidas como a igualdade P(x) = 0. Verificamos que não obstante o fato de polinômios serem ensinados como funções, determinar as raízes de um polinômio não é ensinado como uma tarefa equivalente a obter os zeros ou raízes da função, o que faz com que os alunos não percebam a possibilidade de representação gráfica da função polinomial. Nos livros didáticos considerados, descrevemos os exercícios em termos de tarefas, cuja resolução necessitam de técnicas justificadas por conceitos ou tecnologias. Tarefas, técnicas e tecnologias são elementos da Organização ou Praxeologia Matemática de Chevallard.

Agrupamos os exercícios em Iezzi et alli (2001) e identificamos sete tipos de tarefas:

T_1: Fatorar um polinômio ou escrever uma equação conhecendo-se as raízes.

T_2: Resolver uma equação conhecendo-se uma ou mais raízes.

T_3: Escrever ou resolver uma equação conhecendo-se uma raiz de multiplicidade maior que um.

T_4: Resolver uma equação de coeficientes reais conhecendo-se alguma raiz imaginária.

T_5: Resolver uma equação conhecendo-se uma relação entre as raízes.

T_6: Resolver uma equação de coeficientes inteiros desconhecendo qualquer raiz.

T_7: Mostrar que uma equação de coeficientes inteiros não admite não admite raízes racionais.

Em Smole e Diniz (2003), além das anteriores, encontramos um outro conjunto de tarefas:

T_8: Verificar se certos valores são raízes.

Dante (2003) além das tarefas conhecidas anteriormente apresenta um outro grupo qual seja:

T_9: Resolver uma equação pelo método numérico da bisseção.

Sobre essa última tarefa, são apresentados no livro didático de Dante, dois exercícios resolvidos e um exercício proposto, indicando que não é dada ênfase à tarefa em que se usa o método numérico. Embora haja sugestão de uso de calculadora e programa computacional, nos exercícios resolvidos não são utilizados gráficos e a localização da raiz em um intervalo foi feita por tentativa.

O estudo dos livros possibilitou identificar a ênfase dada à resolução de equações por meio das propriedades e algoritmos embora vimos que historicamente os conceitos não foram construídos dessa forma. As soluções ficaram limitadas ao conjunto dos números racionais (números exatos) e complexos imaginários. Embora no ensino médio relacionem-se indistintamente polinômios e função polinomial, não se faz a representação gráfica das funções polinomiais correspondentes às equações, sendo que estas surgem quando se deseja obter os zeros ou raízes das funções. A inexistência de método algébrico para resolver equações de grau maior que quatro[16] implicaria no ensino de métodos numéricos mas a opção foi pelo ensino dos teoremas que permitem obter soluções particulares no conjunto dos números racionais e dos complexos. Essa opção traz conseqüências restritivas à aprendizagem. Acreditamos que prejudica o desenvolvimento de habilidades de caráter algébrico e gráfico-geométrico – suprime o método numérico; usa pouco os números irracionais; não valoriza a representação gráfica – e enfraquece a necessidade do uso de recursos tecnológicos (calculadora e programas computacionais).

[16] Embora haja fórmulas para resolver equações algébricas de grau três e quatro elas não são ensinadas e as equações cúbicas e quárticas são estudadas no capítulo Equações Algébricas de grau n ($n \geq 1$).

Analisando o processo de Transposição Didática do objeto Equações Algébricas, de saber sábio a saber a ensinar na academia e no ensino médio, identificamos os seguintes efeitos da transposição.

i) De saber sábio a saber a ensinar, os conceitos relacionados ao objeto Equações Algébricas são apresentados de forma organizada e sistemática nos livros didáticos de ensino médio, não refletindo as dificuldades e incertezas durante a construção desses conceitos na História. A aceitação de idéias sobre coeficientes negativos, de raízes de números negativos e de números irracionais em equações por exemplo, foi conflituosa quando surgiram. Muitas descobertas haviam sido feitas antes da demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra por Gauss e nos livros o Teorema aparece como a tecnologia necessária para justificar a demonstração de outros teoremas. Essa forma linear de se apresentar os conceitos reforça nos alunos a concepção de uma ciência matemática perfeita. Mesmo para as equações de grau 3 e 4, em que existem métodos algébricos de resolução, no ensino médio estudam-se os algoritmos de resolução dentro do conjunto dos reais, especificamente racionais, e conjunto dos números complexos. Não se estudam os métodos para obtenção de valores aproximados, ou seja, os métodos numéricos que são mais adequados para a resolução de equações de grau 3 ou maior.

ii) Na academia o interesse pelas equações algébricas está especificamente nos métodos numéricos de resolução, sendo estudadas dissociadas de polinômios em outra disciplina.

iii) Tanto na academia como no ensino médio, as equações algébricas são definidas como uma igualdade P(x) = 0 onde P(x) é um polinômio, daí serem denominadas também de equações polinomiais. Sobre polinômios vemos uma transformação na forma como é ensinado ao longo dos anos a alunos do ensino médio. Na academia, polinômios na indeterminada X são definidos como seqüências quase-nulas sobre um anel A e funções polinomiais são aplicações dentro do anel. Nos anos 1970 constatamos que, mesmo sem esse rigor, de forma semelhante como era feita na academia, no 2.º grau definiam-se polinômios como seqüências, e funções polinomiais como aplicações associadas a seqüências. Uma diferença considerada "sutil" (Iezzi e Dolce, 1973). Atualmente não se enfatiza as diferenças entre polinômios e funções polinomiais no ensino médio indicando uma elementarização desses saberes. Nas orientações curriculares governamentais há sugestões para que se faça conexões entre os dois assuntos uma vez que são estudados separadamente, em geral, na 3.ª série e 1.ª série do ensino médio.

Diante das proposições para o ensino do objeto Equações Algébricas e conhecendo a Praxeologia Matemática nos livros didáticos de ensino médio que estudamos, elaboramos e aplicamos uma Seqüência Didática em que uma das tarefas foi realizada com apoio do *software* gráfico.

Resultados da Experimentação

A análise das resoluções e dos diálogos dos alunos nos levou às seguintes conclusões.

Os alunos utilizaram corretamente as técnicas quando a tarefa proposta (exercícios 1 e 2-a da seqüência) foi semelhante às tarefas mais freqüentes apresentadas nos livros didáticos, ou seja, resolução de equações por meio de propriedades e algoritmos, com raízes racionais e complexas imaginárias. Além das técnicas aprendidas para o objeto Equações, os alunos usaram a técnica da fatoração por agrupamento que já haviam aprendido no ensino fundamental. Observamos que esses alunos não validaram os resultados encontrados tanto que empregaram as técnicas corretas, obtiveram a raiz racional mas alguns erraram as raízes imaginárias. Nos exercícios dos livros didáticos que estudamos não há indicação para se fazer a validação e acreditamos que nem na forma de ensinar do professor.

Quando apresentamos a segunda tarefa de mostrar a existência de raízes irracionais (exercício 2-b) os alunos tiveram dificuldades. Inicialmente porque alguns não entenderam que se tratava apenas de justificar a existência de raízes irracionais. Depois porque julgaram que para mostrar a existência seria necessário encontrar o valor da raiz irracional e não conheciam técnicas para isso. Além disso, como o professor da turma havia ensinado o teorema das raízes irracionais[17] os alunos passaram a representar, sem questionamento, um número irracional como sendo um número na forma $a \pm \sqrt{b}$. Foi necessária a intervenção do professor para desfazer esse erro. Embora tenha surgido essa dúvida entre as duplas, os alunos A e M conseguiram realizar a tarefa e resolver o exercício 2-b.

[17] O teorema das raízes irracionais para equações algébricas de coeficientes racionais não consta nos livros didáticos considerados em nosso estudo.

O exercício 3 correspondeu à tarefa de resolver uma equação cúbica cujas raízes são um número irracional e dois complexos imaginários. Para obtenção da raiz irracional apresentou-se aos alunos o teorema de Bolzano que poderia ser aplicado na resolução do exercício mesmo sem calculadora ou programa computacional. Sem a visualização do gráfico da função polinomial correspondente à equação os alunos não entenderam o teorema, principalmente o significado dos extremos a e b do intervalo]a; b[, confundidos com as raízes da equação, e dos valores numéricos ou imagens P(a) e P(b). Verificamos que apenas uma dupla de alunos teve a iniciativa de representar graficamente o conceito que o teorema de Bolzano aborda (número de raízes em um intervalo real). Acreditamos que tenham feito isso porque o teorema menciona os números a e b e os valores numéricos/imagens P(a) e P(b). As demais duplas de alunos tentaram usar as conhecidas técnicas de resolução até perceberem que não eram suficientes para aquele exercício.

Após a apresentação do *software* os alunos o utilizaram para esboçar o gráfico da função polinomial correspondente à equação e assim puderam visualizar a localização da raiz (irracional), sendo esse o primeiro passo para aplicação de um método numérico a fim de se obter um valor aproximado da raiz. O professor interferiu fazendo perguntas sobre a amplitude dos intervalos e pedindo a aplicação do teorema de Bolzano seguidamente, sem estabelecer o critério da bisseção. Alguns alunos intuitivamente passaram a considerar o ponto médio do intervalo. Outros se basearam na visualização do gráfico. Dessa forma, quatro das cinco duplas chegaram a desenvolver o método numérico semelhante ao da bisseção.

O uso do *software* pelos alunos para apoiar a resolução da equação permitiu-nos observar ainda outros aspectos. Os alunos sabiam da existência de uma raiz real (equação de coeficientes reais e grau ímpar) e concluíram que era irracional pois pela pesquisa de raízes não era racional. Como não podiam decompor a equação cúbica e resolver a equação quadrática, não sabiam afirmar se havia apenas uma ou se as três raízes eram reais. O gráfico indicou a existência de uma única raiz real. Alguns alunos então afirmaram que as três raízes eram iguais (multiplicidade três). Embora isso seja equivocado mostrou a preocupação em considerar todas as raízes. Uma dupla de alunos usou o *software* para conferir a solução (uma raiz racional e duas imaginárias) do exercício 1 que já haviam feito pelas técnicas conhecidas e ao verem que apenas a raiz real aparecia na tela do computador, lembraram que as raízes complexas imaginárias são representadas no plano de Argand-Gauss. Outra observação que fizemos foi a de um aluno que investigando o *software* descobriu o recurso de clicar sobre o ponto do gráfico e obter as coordenadas do ponto. Tal recurso pode ser usado para validar o resultado aproximado obtido pelo método numérico. E para finalizar, vimos que uma dupla esboçou os gráficos da função polinomial e de um dos fatores da decomposição no mesmo par de eixos, ou seja, na mesma tela, e visualizou a interseção das curvas. Em seguida utilizou o próprio *software* para estabelecer (digitar) intervalos cada vez menores em que se permanecesse o ponto de interseção.

Com essa pesquisa apresentamos as transformações pelas quais passa o objeto Equações Algébricas da forma como foi concebido até ser apresentado como saber a ensinar por meio do livro didático no ensino médio. Para isso estudamos a Organização Matemática do objeto em alguns livros didáticos e identificamos as tarefas, técnicas e tecnologias o que nos permitiu caracterizar a forma como se propõe o ensino das Equações Algébricas. Esse trabalho pode subsidiar discussões acerca da prática docente apoiada por programas computacionais.

Perspectivas

Analisando os resultados de nosso trabalho surgiram algumas questões para as quais não temos resposta.

1) Sem os conceitos de cálculo diferencial para estudo da monotonicidade de funções, o apoio de um *software* gráfico é suficiente para ensinar ao aluno sobre o número de raízes visualizadas na tela sem o risco de esquecer outras soluções devido a escala adotada no gráfico?

2) No estudo das funções polinomiais do 2.º grau, os professores e alunos representam os zeros ou raízes quando são irracionais? Como representam?

3) A representação gráfica de funções polinomiais confere significado ao conceito de multiplicidade de raiz?

Essas questões podem aprofundar o estudo sobre o ensino do objeto Equações Algébricas e contribuir para o processo de ensino-aprendizagem desse assunto que consideramos tão atraente na Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMORIM, J. A. A Educação Matemática, a internet e a exclusão digital no Brasil. In: **Educação Matemática em Revista.** São Paulo, SBEM, ano 10, n. 14, p. 58-65, ago. 2003.

ARTAUD, M. **Cours Introduction à L'Aprroche Ëcologique du Didactique – L'Ecologie des Organizations Mathématiques et Didactiques.** Creshsto, Orléans, 1997.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. Recherches en didactique des mathématiques, v. 9, n. 3, p. 281-308, Grenoble, La Pensée Sauvage éditions, 1988. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa, Pt: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BAUMGART, J. K. **História da álgebra.** Trad. Hygino H. Domínguez. São Paulo: Atual, 1992.

BONGIOVANNI, VISSOTO e LAUREANO. **Matemática e Vida. vol. 3.** São Paulo: Ática, 1993.

BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO. M. A. V. (org.) **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: Unesp, 1999.

____________ e PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** 2.ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOYER, C. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1998.

BRANDÃO, L. O. e FARIA, M. H. P. **Introdução ao uso do Winplot.** 3.ª edição. São Paulo: IME/LEM/USP, 2002.

BRASIL, MEC, SEMTEC. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio.** Brasília: Ministério da Educação, 1999.

_________. **Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Média Tecnológica. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

_______. **Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2005: Matemática.** Brasília: MEC, SEMTEC, FNDE, 2004 a.

________. **Coleção Explorando o Ensino: Matemática: ensino médio; vol. 3.** Org. Suely Druck. Brasília: MEC, SEB, 2004 b.

_________. **Tecnologias Educacionais no Ensino Médio: para quê?** Brasília: Ministério da Educação. www.mec.gov.br , acesso em 14.01.2005

_______. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio; vol. 2.** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC, SEB, 2006.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, v. 7, n. 2, p. 33-115, Grenoble, La Pensée Sauvage éditions, 1986. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa, Pt: Instituto Piaget, 1996. p. 35-113.

CAMPOS FILHO, F. F. **Algoritmos Numéricos.** Rio de Janeiro: LTC, 2001.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa, Pt: Fotogravura Nacional, Lda, 1970.

CARNEIRO, J. P. Q. Equações algébricas de grau maior que dois: assunto para o ensino médio? In: **Revista do professor de Matemática**, Rio de Janeiro, Soc. Bras. de Matemática, n. 40, p. 31-40, 1999.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en didactique des mathématiques, v. 12, n. 1, p. 73-111, Grenoble, La Pensée Sauvage éditions, 1992. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa, Pt: Instituto Piaget, 1996. p. 115-152

_____________ . **La Transposición Didáctica. Del saber sábio al saber enseñado**. Trad. Claudia Gilmann. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 1991.

_____________ . L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en didactique des mathématiques**, v.19, n. 2, p. 221-266, Grenoble, La Pensée Sauvage éditions, 1999.

_____________ , BOSCH. M. e GASCÓN J. **Estudar Matemática: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.** Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CLÁUDIO, D. M. e MARINS, J. M. **Cálculo numérico computacional: teoria e prática.** São Paulo: Atlas, 2000.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações, vol. 3.** São Paulo: Ática, 2003.

DOMINGUES, H. H. e IEZZI, G. **Álgebra Moderna.** São Paulo: Atual, 1982.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas.** São Paulo: Makron Books, 1997.

HOOD, R. **Solução da equação polinomial de grau três a graus maiores.** In BAUMGART, J.K. **História da Álgebra.** São Paulo: Atual, 1992.

IEZZI, G. e DOLCE, O. **Álgebra III**. São Paulo: Moderna, 1973.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar, vol. 6: complexos, polinômios, equações.** 6.ª ed. - São Paulo: Atual, 1993.

______ et alli. **Matemática: ciência e aplicações, v. 3.** São Paulo: Atual, 2001.

LABORDE, C. **Geometria com o Cabri. Cenários para o Ensino Médio.** Trad.: Mirian Buss Gonçalves. Florianópolis: UFSC, CFM, 2002.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LIMA, E. L. **A equação do terceiro grau.** In: **Matemática Universitária, n. 5.** Rio de Janeiro: SBM, 1987. p. 9-23.

LIMA, E. L. et alli. **A Matemática do Ensino Médio, vol. 3**. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

LIMA, R. N. **Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas.** Dissertação de Mestrado. Almouloud, S. Ag (orientador). PUC-SP, 1999.

MAHAMMED, N. **Sur la résolutions des équations algébriques.** Tradução livre de Rosana Nogueira de Lima. Lille, França: IREM, 1995.

MAINVILLE JR. W. E. **Regra de falsa posição.** In BAUMGART, J.K. **História da Álgebra.** São Paulo: Atual, 1992.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PARANÁ. **Orientações Curriculares de Matemática.** Curitiba: SEED; Departamento de Ensino Médio, 2005.

PENTEADO, M. G. et alli. Informática como veículo para mudança. In: **Zetetiké.** São Paulo, CEMPEM-FE/UNICAMP, v. 6, n.10, p.77-86, jul./dez. 1998.

_______________ . Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: BICUDO, M. A. V. (org.) **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: Unesp, 1999.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. **Proposta Curricular de Santa Catarina: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio: Disciplinas Curriculares.** Florianópolis: COGEN, 1998.

_________________ . Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. **Matrizes Curriculares do Ensino Médio.** Florianópolis: SED, 2005. Disponível em www.sed.rct-sc.br; acesso em 24.01.2005.

SOUZA, C. A., de BASTOS, F. P., ANGOTTI, J. A.P. **Atas Eletrônicas do II ENPEC.** Valinhos: 1999.

SLOYEN, M. S. Álgebra na Europa, 1200-1850**.** In BAUMGART, J.K. **História da Álgebra.** São Paulo: Atual, 1992.

SMOLE, K. S. e DINIZ, M. I. **Matemática, vol. 3 – ensino médio.** São Paulo: Saraiva, 2003.

WOLFE, D. Funções simétricas. In BAUMGART, J.K. **História da Álgebra.** São Paulo: Atual, 1992.

ANEXO 1

Síntese do estudo dos exercícios propostos no livro didático "Matemática – volume 3 – ensino médio" (Smole e Diniz, 2003)

Tarefas T	Técnicas τ	Exemplo de tarefa
T_1: Verificar se certos valores são raízes	Substituição dos valores em lugar de x	Exercício 1, p. 257. Quais dos seguintes números: 0, –1, 1, $\frac{1}{2}$, 2, –i, i, 2i, são soluções da equação $2x^3 - (1+2i)x^2 + (4+i)x - 2 = 0$?
T_2: Fatorar um polinômio ou escrever uma equação conhecendo-se as raízes	Decomposição do polinômio em fatores contendo as raízes	Exercício 10, item a, p. 261. Forme uma equação polinomial cujas raízes são -3, $2 + i$ e $2 - i$.
T_3: Resolver uma equação conhecendo-se uma ou mais raízes	Decomposição em fatores contendo as raízes; divisão pelo(s) fator(es); resolução de equações por métodos já estudados	Exercício 3, item b, p. 261. Decomponha P(x) em produto de fatores do 1.º grau: $P(x) = 5x^3 - 30x^2 + 55x - 30$, sabendo que 2 é uma das raízes.
T_4: Escrever ou resolver uma equação conhecendo-se uma raiz de multiplicidade maior que um	Decomposição e/ou divisão pelos fatores contendo raízes iguais; resolução de equações por métodos já estudados	Exercício 9, p. 261. Resolva $3x^4 + 7x^3 - 6x^2 - 12x + 8 = 0$, sabendo-se que -2 é raiz dupla.
T_5: Resolver uma equação conhecendo ou aplicando alguma relação entre as raízes e coeficientes	Aplicação das relações de Girard	Exercício 17, p. 266. Resolva $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes vale 6.
T_6: Resolver uma equação de coeficientes reais conhecendo-se alguma raiz não real (complexo imaginário)	Aplicação do teorema das raízes complexas; decomposição do polinômio; divisão pelo método da chave[3]	Exercício 28, p. 269. Resolva $3x^4 - 11x^3 + 27x^2 - 29x + 10 = 0$, sabendo que $1 + 2i$ é uma de suas raízes.
T_7: Resolver uma equação de coeficientes inteiros desconhecendo qualquer raiz	Pesquisa das possíveis raízes racionais; verificação em $p(x) = 0$; divisão pelo fator $x - r$ sendo r uma raiz racional; fatoração do polinômio; resolução da equação de grau menor	Exercício 38, item a, p. 272. Resolver a equação $10x^3 - 7x^2 - 2x + 2 = 0$
T_8: Mostrar que uma equação de coeficientes inteiros não admite raízes racionais	Pesquisa das possíveis raízes racionais; verificação em $p(x) = 0$	Exercício 40, p. 272. Mostre que a equação $x^n + 2ax + 2 = 0$, com $a \in Z$ e $n \in N$, $n \geq 2$, não admite raízes inteiras.

ANEXO 2

Síntese do estudo dos exercícios propostos no livro didático "Matemática: contexto e aplicações, volume 3" (Dante, 2003)

Tarefas T	Técnicas τ	Exemplo de tarefa
T_2: Resolver uma equação conhecendo-se uma ou mais raízes	Decomposição em fatores contendo as raízes; divisão pelo(s) fator(es); resolução de equações por métodos já estudados.	Exercício 69, p. 175. Sabendo que 2 é raiz da equação $x^3 + 2x^2 - 5x + c = 0$, calcule o valor de c e o conjunto solução da equação.
T_3: Escrever ou resolver uma equação conhecendo-se uma raiz de multiplicidade maior que um	Decomposição e/ou divisão pelos fatores contendo raízes iguais; resolução de equações por métodos já estudados	Exercício 83, p. 177. O número 3 é raiz dupla da equação $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$. Determine as outras duas raízes da equação.
T_4: Resolver uma equação de coeficientes reais conhecendo-se alguma raiz não real (complexo imaginário)	Aplicação do teorema das raízes complexas; decomposição do polinômio; divisão pelo método da chave	Exercício 115, p. 187. (Fuvest-SP) Resolva a equação $x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 19x + 10 = 0$, sabendo que o número complexo $z = 1 + 2i$ é uma das suas raízes.
T_5: Resolver uma equação conhecendo ou aplicando alguma relação entre as raízes e coeficientes	Aplicação das relações de Girard	Exercício 93, p. 182. Resolva a equação algébrica $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a 5.
T_6: Resolver uma equação de coeficientes inteiros desconhecendo qualquer raiz	Pesquisa das possíveis raízes racionais; verificação em $p(x) = 0$; divisão pelo fator $x - r$ sendo r uma raiz racional; fatoração do polinômio; resolução da equação de grau menor	Exercício 105, p. 184. (FEI-SP) Resolve a equação cúbica $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$.
T_8: Verificar se certos valores são raízes	Substituição dos valores em lugar de x	Exercício 64, item a, p. 172. Verifique se o x indicado é raiz da equação dada: $x = 2$; equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.
T_9: Resolver uma equação pelo método numérico da bisseção	Pesquisa das possíveis raízes racionais; verificação em $p(x) = 0$; aplicação do teorema de Bolzano	Exercício 121, item b, p. 188. Descubra uma raiz real pelo método da bisseção, usando uma calculadora ou planilha eletrônica. $x^5 - x^3 + 16 = 0$.

ANEXO 3

Protocolos das transcrições dos diálogos dos alunos

	DUPLA 1, ALUNO G; ALUNO C; OBSERVADORA: R 1.ª Atividade
1	G Aqui não dá porque com –1 não dá 0 tá ligado? Você tem que por em evidência primeiro. Ou não? Pera aí.
2	C Tenta dividir por 2.
3	G Como?
4	C Faz Briot-Ruffini.
5	G 1 não é.
6	C Tá. Faz –1.
7	G – 2... 3... 5... – 7... não é! (risos) Sem efeito?
8	C É. Risca.
9	G Por que tem anotar tudo que nós estamos falando? (risos)
10	C Dois ao cubo dá oito, vezes dois dá dezesseis. Dois ao quadrado dá quatro... mais dois; menos quatro... não dá também! (risos) Vamos tentar por meio.
11	G Meio?
12	C Às vezes dá certo. Menos dois vezes meio... Como faz para achar as raízes imaginárias?
13	G Quer usar i? Faz por 1/2 eu faço por –2.
14	C Não tem jeito de resolver isso.
15	G Pega o livro. Vai tentando que eu vou ... Faz assim. Deixa o coeficiente de – 2 positivo para ficar mais fácil.
16	C Tá. Zero não é. Dois você já olhou? Um não é. Menos dois não é... Dois!
17	G Dois não é. Caiu a casa.
18	C a + b... como é o nome disso? [consultando o livro]
19	G Relações de Girard. São três raízes. x_1 mais x_2 mais x_3... igual a – b sobre a... vai dar 3... 3/2
20	C x_1 mais x_2 mais x_3 igual a 3/2
21	G Deixa isso aí.
22	C x um dois... x_1x_2... x_2x_3 igual a – c sobre a. $x_1x_2x_3$...
23	G 3/2 também
24	C Tem três incógnitas
25	G Tá mas isola uma e joga ali.
26	C x_1 vezes x_2
27	G mais x_1 vezes x_3; mais x_2 vezes x_3 é igual a c sobre a. Tem que ir substituindo. Escalonamento não dá certo.
28	C Não. É melhor a gente substituir x.
29	G Vai dar uma equação de 2.º grau. É pior ainda.
30	C Eu já resolvi isso antes. Essas duas equações são iguais.
31	G x_1 ... x_2 ...
32	C Tá, mas não vai levar a nada. $x_1 + x_2 + x_3$ igual a 3/2. $x_1.x_2.x_3$ igual a 3/2
33	G $x_1.x_2.x_3$ igual a 3/2...
34	C Não é
35	G Então põe aí... Risca. Risca. Joga esse aqui. Depois você isola e joga nisso aqui, manja? Vai

		ficar complicado mas não dá nada! A gente está isolando nessa equação e jogando nela mesma.
36	C	Tem que jogar em outra. Tipo a gente isola na primeira e joga no segundo.
37	G	A segunda é difícil. (risos) Joga na terceira, vai!
38	C	Tá então relaxa.
39	G	Isola esse aqui. Deixa em função dele. Como a gente em esse daqui... depois a gente substitui.
40	C	Tenta!
41	Prof.	Como vocês estão tentando obter a primeira raiz?
42	C	A gente tentou Briot-Ruffini primeiro e a gente não conseguiu. A gente viu que zero não era raiz.
43	G	A gente tentou 2 porque era mais fácil.
44	C	A gente jogou em Girard e tentou resolver o sistema.
45	Prof.	Está bem. Continuem.
46	G	Aqui pode cortar x_3 com x_3?
47	C	Está multiplicando.
48	G	Tá mas está tudo multiplicando. Aqui era x_1 aqui também... daí ... não adiantou nada continuou com três incógnitas.
49	C	Então mas agora vou jogar nesse aqui. Vai ficar só com x_2 e x_3. Será que está certo?
50	G	Tá bem complicado. Com duas é mais difícil né véio?
51	C	Vai dar uma raiz negativa.
52	G	Quer ficar tentando Girard?
53	C	Vai dar muito trabalho. [consultam livro didático] Todos os exercícios dão uma dica...
54	G	É mas esse aqui não! Vai tentando por Briot que eu tentando por aqui.
55	C	Tá. Vai cair em uma ao cubo.
56	Obs	Prestem atenção no que vocês estão fazendo.
57	G	Faz assim: raízes indeterminadas. (risos)
58	C	Isolei na terceira aqui. Isolei x_1. Ficou x_1 igual a 3 vezes x_2 vezes x_3 sobre 2. Então tentei jogar na primeira no lugar de x_1. Daí ficou $3x_2x_3$ sobre 2 mais x_2 mais x_3 igual a 3/2.
59	G	Joga esse 2 multiplicando. Entendeu? Não precisa. É só tirar o mínimo. Dá $2x_1$ aqui... 3/2 mais x_1. $2x_1$ daí fica mais 2 vezes $3/2 – x_1$... Demos a volta. Entendeu?
60	Obs	Que tal dar uma parada, olhar bem, ler bem? Que tal fazer isso? Leiam bem a questão. Veja o que se pode fazer.
61	C	A soma das raízes é igual ao produto das raízes. Tem coisa aí não tem? Pelo menos uma raiz é real. $2x^3 – 3x^2 + 2x – 3 = 0$. [reescreveram a equação]
62	G	Põe em evidência! x^2 ...
63	Obs	O que vocês fizeram?
64	C	Pomos em evidência.
65	G	Ou esse é igual a 0 ou esse. Eu falei isso no começo e ele deu risada da minha cara.
66	C	$x^2 + 1 = 0$. $x_2 = i$ e $x_3 = - i$. [duração: cerca de 30min]
67	2.ª Atividade – Item a G	 soma das raízes é positiva quando a raiz é racional. Faz dar aí.
68	C	- b sobre a é 2. É menos 2. Não é então. A soma dá negativo.
69	G	Tem alguma coisa relacionada com isso.
70	Obs	Parem. Leiam bem a questão. Tentem interpretar e depois comecem a fazer.
71	C	Nossa lembro disso.
72	G	O termo independente é – 6.
73	C	Esse é o p né? 1, – 1
74	G	Tem 1/2 não tem?

75	C	Não. Só inteiros. Agora divide p por q.
76	G	– 1 . Dá 1, 2, – 2 , 3, – 3, 6, – 6
77	Prof.	O que vocês estão fazendo agora?
78	C	A gente tá tentando pelo teorema das raízes racionais.
79	G	Faz p sobre q e sai chutando as raízes.
80	Prof.	Para quê?
81	G/C	Para achar a raiz real.
82	Prof.	Raiz...
83	G	Raiz racional, perdão. Daí a gente fez p sobre q para saber qual que é.
84	C	Ou quais são. Um a gente viu que não é.
85	G	Não risca. Só faz uma marquinha embaixo.
86	C	A gente achou que –2 é raiz racional da equação.
87	G	Mostre que essa equação tem uma raiz racional e encontre essa raiz. [lendo o enunciado]
88	C	Tá então põe aqui. Ele pediu para mostrar uma. Mostrou uma!?
89	G	Ele pediu uma raiz. A gente fez uma, então acabou?
90	C	Vamos para a b!
91	2.ª Atividade – Item b G	Mostre essa equação tem uma raiz irracional. [lendo o enunciado] Tá a gente poderia continuar usando uma dessas daqui para poder continuar usando para poder abaixar o grau. Se –2 é raiz, o 2 também não é?
92	Obs	Como é que é 1A? O que você falou aí?
93	G	A gente vai tentar achar a outra raiz para abaixar o grau para do segundo. Daí como o –2 é raiz, o conjugado é raiz, não é? Daí 2 é raiz!
94	C	Imaginário!
95	G	Ah, imaginário! Tá mas vamos tentando do mesmo jeito! [risos]
96	Prof.	O que vocês vão tentar agora?
97	C	Agora vamos pegar essas outras raízes para testar os outros valores para baixar o grau. Daí fica mais fácil né.
98	Prof.	Está bem.
99	C	É do 3.º grau. Se uma raiz é imaginária a conjugada também é; então tem mais de uma raiz racional.
100	G	Tenta o 2. [1B usa o algoritmo de Briot-Ruffini] Não é. Agora tenta o 3. [1B usa o algoritmo de Briot-Ruffini] Vai tentando!
101	Obs	O que vocês estão tentando achar?
102	G	É que é assim né: tem quatro raízes; uma é racional e aqui pede para mostrar que tem uma irracional. Se ela tem uma irracional a conjugada também é raiz.
103	Obs	Então leia bem. Concentração na leitura e naquilo que fala.
104	G	Então baixa aí!
105	Prof.	Vocês testaram todas as raízes racionais? Vocês testaram todas as possíveis raízes racionais?
106	G	Sim.
107	C	Porque p sobre q deu todos os valores possíveis. Daí a gente testou e só – 2 é que deu.
108	Prof.	O que vocês podem concluir então?
109	C	Que só tem uma. Uma raiz racional.
110	Prof.	E as outras?
111	G/C	São irracionais... Não! Duas...
112	Prof.	Essa é a pergunta. É essa a conclusão a que chegaram?

113	C Não pode ter três raízes irracionais.
114	G Se ela tiver uma então ela tem duas. (risos)
115	C Tem algo errado aqui.
116	Prof. Vocês estão apontando para um teorema do livro: das raízes irracionais. Como tem que ser essa raiz irracional.
117	G $a+\sqrt{b}$ e $a-\sqrt{b}$
118	Prof. Vocês descobriram que os outros valores racionais não são raízes. Qual é a conclusão a partir disso?
119	C Só tem uma racional. Que as outras são irracionais.
120	Prof. Essa é a conclusão ou vocês estão em dúvida?
121	C A gente está em dúvida.
122	Prof. Qual a dúvida sobre isso?
123	C Se as outras são irracionais mesmo. Porque ela tem que ter quatro raízes.
124	G A raiz –2 é de multiplicidade um. Então ela não vai se repetir. Uma raiz irracional tem o conjugado que também é uma raiz. A gente está em dúvida só sobre essa outra.
125	Prof. Vocês estão falando o conjugado da raiz irracional. Toda raiz irracional apresenta o conjugado como raiz também?
126	G O teorema aqui diz. "Se uma equação admite a raiz $a+\sqrt{b}$ então admite $a-\sqrt{b}$ como raiz".
127	Prof. Todos os números irracionais têm a forma $a+\sqrt{b}$?
127	G Não!? Hum!
129	Prof. Quantas raízes ainda têm para vocês acharem?
130	C Três.
131	Prof. Alguma dessas três é racional?
132	G/C Não.
133	C Não porque a gente já tentou todas as possíveis racionais.
134	Prof. Alguma dessas três é complexa não real ou real? Você pode afirmar isso?
135	C Não!? Não sei. [risos]
136	Prof. Continuem. Podem continuar. [passam a consultar o livro didático]
137	C Tá, olha aqui. Se tem uma raiz irracional e a gente não tem certeza que são racionais, então elas são irracionais... não é?
138	G Então a gente pode afirmar que tem uma raiz irracional mostrando que as outras não são racionais. Não pode?
139	C Ele não pediu qual.
140	G É, então põe aí.
141	Obs Qual é a conclusão 1B?
142	C Se a gente tem só uma raiz racional, as outras raízes são irracionais.
143	Obs Quer dizer que as outras são irracionais. Mas pede para mostrar não é.
144	C É. Mostre que!
145	G Tá então põe aí ó.
146	C Tá mas "mostre que" não diz que você tem que mostrar a raiz certo?
147	G Só provar que...
148	C Mostre que tem uma raiz irracional. Você tem que provar que...
149	G Porque de todas as racionais possíveis só tem uma. Como é uma equação de 4.º grau, ela tem que ter quatro raízes. Como uma é racional e mais nenhuma é racional, as outras são irracionais.
150	C Será que isso basta? [duração: cerca de 30 min]
151	3.ª Atividade

	C	A gente fez b sobre a nessa equação.
152	Prof.	Está bem.
153	C	A gente tem que achar três raízes.
154	Prof.	Tá. O que vocês estão enxergando no gráfico.
155	C	Que para x = 0, y é menor que 1. Não. É entre 0 e –1.
156	Prof.	Uma das raízes.
157	C	A outra... E daí, x zero, y um...
158	C	Porque a raiz não é racional ela não encontra o eixo.
159	Prof.	Os valores que aparecem representados no eixo x são números de qual conjunto.
160	G	Reais.
161	Prof.	Reais. Certo. Então eu pergunto: todas as raízes são reais?
162	C	Tem apenas uma.
163	Prof.	Pelo menos é o que vocês vêem nesse intervalo.
164	G	Sim. Ah então as outras não são reais.
165	C	Faz sentido porque ela é do 3.º grau.
166	G	As outras são da forma a mais raiz de b. Mais ou menos raiz de b não é?
167	Prof.	Procurem encontrar alguma raiz dessa equação. Pelo menos uma das raízes dessa equação. E façam a letra b também.
168	G	Essa aqui? A b da dois? A gente escreveu só.
169	Prof.	Está bem.
170	C	Entre zero e menos um.
171	G	Só que esse número... tipo não pode ser meio?
172	C	Não é meio.
173	G	Então? É maior que meio.
174	C	É menor que meio. Menor que menos meio. Quer escrever. A gente faz passo a passo.
175	Obs	Ao que vocês chegaram?
176	C	A gente analisou o gráfico e concluiu que tem apenas uma raiz real. Porque ele corta o eixo x em apenas um ponto. Então as outras não pertencem ao conjunto dos reais.
177	G	Põe então que as outras não pertencem ao conjunto dos reais. Agora tem que achar os valores. Quer tentar...
178	C	Por chute?
179	G	... dividir por um quarto, um sexto...
180	Prof.	Será?
181	G/C	Menos um quarto, menos um sexto...
182	C	Vai escrevendo Briot
183	G	Um, zero, um. Perdão.
184	C	Menos um quarto... um oitavo menos um... um dezesseis, desculpa.
185	G	Mais um.
186	C	Mais um. Dezessete sobre dezesseis. Quer saber. Esquece.
187	Obs	Leiam de novo o que vocês escreveram lá em cima.
188	C	Aqui em cima? "Após analisarmos o gráfico concluímos que a equação possui apenas uma raiz real".
189	Obs	Então pensem no que vocês escreveram e por aí comecem.
190	Prof.	Essa raiz que vocês estão procurando é uma raiz real. De onde vocês tiraram essa conclusão?
191	G/C	Do gráfico.
192	Prof.	Do gráfico. E que valores vocês assumiram para essa raiz?

193	C	Ela é menor...não. Ela está entre menos um e zero.
194	Prof.	Ok. E que valores vocês escolheram para fazer um teste?
195	C	Menos um quarto.
196	Prof.	E por que menos um quarto e não, por exemplo, menos meio?
197	G	Está para cá um pouco do menos meio então a gente foi pela lógica.
198	Prof.	Vocês podem repetir por favor.
199	C	Ela está um pouco mais para a esquerda do x menos meio. Então a gente deduz que ela é menor que menos meio.
200	Prof.	Está bem. Obrigado.
201	C	O que a gente pode fazer para ajudar?
202	G	Não sei velho! [risos]
203	C	E essa parada "p de a vezes p de b menor que zero?"
204	G	Tá mas para isso a gente tem que ter as raízes.
205	C	Esse "p de a vezes p de b" a gente não pode estar multiplicando pelo conjugado? Vai ser o quadrado da primeira menos o quadrado da segunda.
206	G	A gente sabe que o número de raízes reais é par. É ímpar, desculpa. Então p de a vezes p de b é menor que zero. Porque possui apenas uma raiz real.
207	G	Como o número de raízes reais é ímpar, p de a vezes p de b é menor que zero, né?
208	Prof.	Como é que vocês concluíram que o número...
209	G	... de raízes reais é ímpar? Porque cruza o eixo em apenas um ponto.
210	Prof.	Ok. P de a vezes p de b é menor que zero. É o que diz o teorema.
211	C	Esse p de a vezes p de b eu posso estar multiplicando as raízes conjugadas?
212	Prof.	Quem são a e b?
213	C	São as raízes.
214	Prof.	O que diz o teorema?
215	G	Ah, é o intervalo. Então não são as raízes.
216	Prof.	Isso mesmo. Continuem.
217	G	Agora a gente tem que saber o intervalo.
218	C	Mas a gente que fixou o intervalo.
219	G	Tá mas não pode fixar o intervalo.
220	C	Se eu multiplicar –4 por 4 vai dar um número negativo.
221	G	Agora, e em um intervalor menor? Vai ficar sempre assim.
222	C	Vai.
223	G	Então!?
224	G	Você compreendeu o que eu estou pensando em fazer? Ir diminuindo até chegar ali.
225	C	Mas se diminuir vai cortar sempre aquela função. Ah diminuir só isso aqui?
226	G	Você cortou demais. Você só podia cortar de um lado.
227	C	Então é menor que menos um quarto.
228	G	Não piá. A gente tem que diminuir o de cima porque o valor que a gente quer é esse aqui.
229	C	Então mas você tinha cortado... Põe negativo. Eu acho que aqui é negativo.
230	G	É menor. Eu acho que é menor.
231	Obs	O que você quer fazer. Deixe bem claro o que você quer fazer.
232	G	Tem que chegar lá no x.
233	Obs	O que ele tem que chegar aonde?
234	G	Chegar certinho no ponto onde vai cruzar o eixo x para...
235	Obs	Vocês querem ir tentando valores para que o gráfico corte em um número inteiro ali no eixo x.
236	G/C	Isso!

237	G O y é zero.
238	Obs para o Prof. Eles querem dar valores para que o gráfico corte o eixo x em um número inteiro. É isso que eles estão tentando.
239	C Só que a gente não sabe como?
240	Prof. Vocês estão tentando fazer o quê? Qual a tentativa de vocês?
241	C Achar o ponto onde corta o eixo x.
242	G Assim a gente acha a raiz, certo? É uma boa tentativa?
243	Prof. Vocês têm que fazer essa experiência.
244	Obs Fazendo vocês vão saber.
245	C A gente não consegue. [risos]
246	Obs Vejam bem. Vocês têm uma função ali.
247	C Tá, uma função.
248	G Se x é zero, então... então... p de zero é um... p de um é três.
249	C p de um é três?
250	G É. Se não, é quase. [risos]
251	Obs Você tem que fazer em cima da função.
252	C x é ... y é um
253	Obs Você quer passar essa curva aqui aonde?
254	C Aqui para saber o valor.
255	Obs Quer achar esse valor para quê?
256	C É o valor da raiz.
257	Obs Esse valor é de quem?
258	C Esse valor é de x.
259	Obs Você tem o valor de y? Qual o valor de y aqui?
260	C Zero. x é zero, y é um. x é?
261	G Escreve aqui. Se y for um, x é zero.
262	C Eu quero saber quanto vale x quando y é zero.
263	Prof. Vocês já acharam o intervalo em que está localizada a raiz. Usando o Teorema de Bolzano vocês não conseguiriam obter o valor dessa raiz?
264	C Tá. O a vai ser igual a menos um e o b, igual a zero; p de a vezes p de b menor que zero. P de a: menos um ao cubo, mais menos um, mais...
265	G Mas aí vai ficar sem incógnita.
266	C Como o intervalo vai ser menos um e zero? Aqui a e b são o intervalo... onde está a raiz. Se p de a vezes p de b é menor que zero, está entre zero e menos um.
267	G Mas a gente não sabe p de zero.
268	C Não sabe mesmo... p de zero...
269	G A gente pode deixar indicado? [risos] Está entre zero e menos um.
270	C Eu sei se multiplicar x ... p de menos um é menor que zero; p de zero é um...; p de menos um dá zero; aí não vai dar menor que zero. P de zero é um; p de menos um é um.
271	G A única conclusão que a gente chegou é que o teorema deu certo. [duração: cerca de 30min] Ah Prof., a gente não chega mesmo. Só sabemos que o teorema está certo.
272	C A gente quer fazer p de a vezes p de b; a gente fixou o intervalo entre menos um e zero.
273	Prof. Vou fazer uma pergunta para vocês. Se eu perguntar se a raiz está entre zero e um o que vocês me respondem?
274	C Não. Entre zero e um?
275	Prof. Entre zero e um.
276	C Não.
277	Prof. Como vocês sabem?

278	G	Porque não corta o eixo dos x.
279	Prof.	Se eu perguntar para vocês: a raiz está entre menos um e menos meio, ou se ela está entre menos meio e zero, como vocês me responderiam isso?
280	G	Está entre menos um e menos meio. Porque aparentemente corta o eixo x nesse intervalo.
281	Prof.	Mas vocês poderiam usar o Teorema de Bolzano para me afirmar isso: que está entre menos um e menos meio?
282	G	A gente fez entre menos um e zero daí a gente descobriu que o teorema está certo.
283	C	Então a a gente fixa entre menos um e menos meio, foi o que você pediu? Dá menos um, menos um, mais um vezes menos meio ao cubo, mais menos meio, mais um, mais um.
284	Prof.	O que vocês concluíram?
285	C	Que a raiz está entre menos um e menos meio?
286	Prof.	Como é que vocês descobriram isso?
287	C	Através do Teorema de Bolzano.
288	Prof.	Tá, mas com que...
289	C	A gente fez p de a, a gente fixou de a a b, que seja menos um e menos meio e fez p de a, que é menos um, e p de b, que é menos meio, multiplicou os dois, chega menos 24 que é menor que zero, então a raiz está entre menos um e menos meio.
290	Prof.	Ótimo. Se eu perguntar a vocês: a raiz está entre menos um e menos 0,7, ou se está entre menos 0,7 e menos 0,5, como é que vocês vão saber isso?
291	G	Menos 1 e menos 0,7?
292	Prof.	Vocês já sabem que está entre menos 1 e menos 0,5. Agora eu quero saber se está entre menos 1 e menos 0,7 ou se está entre menos 0,7 e menos 0,5.
293	G	Nossa cara: 0,7 ao cubo. [passaram a efetuar os cálculos]
294	C	Tá aqui. Pode ser menos 0,6? [risos]
295	Obs	O que vocês vão fazer?
296	G	Chutar. Menos 0,6. A gente descobriu que está entre menos 0,7 e menos 0,5. Então pode ser menos 0,6.
297	C	Nossa vai dar um negócio muito quebrado.
298	G	Daí chuta de novo. Vai diminuir o intervalo. 0,6 e 0,5. 0,6 e 0,7.
299	C	Menos 0,6 e 0,5. Fechado?
300	G	A gente está diminuindo o intervalo. Vamos ver até onde isso dá certo. 0,7 ao cubo.
301	C	Já fez.
302	G	0,6 ao cubo.
303	C	0,216.
304	Prof.	Vocês chegaram à conclusão em que intervalo está?
305	G	A gente está diminuindo.
306	C	A gente fez 0,7 e 0,5, 0,6 e 0,7 e vai ver até onde dá.
307	Prof.	Está ok.
308	G	0,4 menos 0,216.
309	C	0,184.
310	G	Beleza. É menor que zero. Tá. Agora a gente pode diminuir mais. [risos] Vamos tentar um valor?
311	C	O que você quer tentar?
312	G	0,65. Está bem no meio.
313	C	Então vai.
314	G	Se a gente conseguisse trabalhar com isso aqui a gente achava esse valor aqui.
315	C	Não é. Eu acho que é menor que menos 0,65.
316	G	Tá então põe aí. Menos 0,65 e menos 0,7. 0, 2, 4, 7... 7, 4

317	G	Não precisa ir muito longe. É só para descobrir o sinal.
318	Prof.	Como vocês estão finalizando para obter esse valor?
319	C	A gente fez os intervalos. Foi diminuindo os intervalos e concluiu que ela está entre menos 0,7 e menos 0,65.
320	Prof.	E vocês escolheram esses valores com que critério?
321	G	A gente foi baixando os valores. Fizemos entre menos 1 e meio, menos meio, daí a gente baixou menos 0,7 e menos 0,5. Daí deu certo. A gente baixou mais. Menos 0,6 e menos 0,7.
322	Prof.	Vocês esperam encontrar um valor...
323	C	Aproximado.
324	Prof.	Por que aproximado?
325	C	Porque os valores vão dar muito quebrado. A gente está tendo que aproximar os valores para conseguir fechar a conta certa.
326	Prof.	Está bem. Muito obrigado. [fim da gravação; duração: cerca de 20min]

	DUPLA 2, ALUNO A; ALUNA M; OBSERVADORA: B 1.ª atividade	
1	M	$- 2x^3 + 3x^2 + ...$
2	A	A soma dos coeficientes não é zero. Menos 1... o 1 não é raiz.
3	M	Zero também não é raiz.
4	A	Vamos fazer pesquisa deles?
5	M	$- 2x^3$...
6	A	Vamos ver quem é o p: + 1, - 1, + 3, - 3; e o q: + 1, - 1, + 2, - 2, certo? Vamos fazer um Briott aqui. Menos 1 é raiz. Tô fazendo de cabeça primeiro. Não vai dar.
7	M	Um não é...
8	A	Vamos ter que ir para as frações. 3/2... vai ficar complicada essa resolução mas vamos lá.
9	M	Vamos então usar 3/2.
10	A	3/2? Se é que vai ter raiz real não é? Vamos tentar 3/2. Menos 3 mais 3... zero. Passa para cá, 4... –1/2. Ô deu certo hein? Ficou um polinômio do 2.º grau. Vamos por Bháskara que é mais fácil.
11	Prof.	Vocês podem explicar o que fizeram?
12	A	Primeiro fizermos a pesquisa das raízes. Os divisores p e q. Menos 1 mentalmente dá para fazer e não é. Um também não porque a soma dos coeficientes não resulta em zero. Então a 2B sugeriu 3/2 e foi o que deu certo. Reduzindo o grau do polinômio fizemos Bháskara. E agora estamos desenvolvendo Bháskara para as outras duas raízes.
13	Prof.	Ok. Obrigado.
14	A	Menos com menos, mais; mais com menos, menos.
15	M	Menos 4.
16	A	Mais ou menos 2i sobre menos 4. Mais ou menos i sobre 2.
17	M	3/2; - i/2; i/2
	2.ª atividade	
18	M	Considere a seguinte equação polinomial: $x^4 + 2x^3 + x^2 – x – 6 = 0$
19	A	Quarto grau. Mostre que esta equação tem uma raiz racional e encontre essa raiz. Um mais dois, três; mais um, quatro...
20	M	...menos sete... Um não dá.

21	A	Mas olhe aqui. Um e seis. O p e o q são pequenos. Vamos fazer pesquisa de raízes. Mais um, menos um; mais dois, menos dois; mais tre, menos três e o próprio 6 e menos 6. E o q, mais um, menos um. Vamos fazer de novo o Briott.
22	M	Um, mais dois, um, menos um, menos seis. Um não é. Acho que o dois vai dar.
23	A	Não. Talvez menos dois. Um, zero,... Menos dois dá. Terceiro grau. Um e menos um não; três.
24	M	Não. Acho que vai que ter uma raiz irracional.
25	A	Isso, uma raiz irracional.
26	M	É para achar a raiz racional. A gente achou a raiz racional. Então a letra a é menos dois. Letra b: Mostre que essa equação tem uma raiz irracional.
27	A	Uma raiz irracional. Vai ter mais então. Dá para escrever um texto aqui. Porque de acordo com a pesquisa da... se com o método da pesquisa não foi encontrada outra raiz racional só restam outras raízes irracionais.
28	Prof.	Como você sabe que têm mais raízes reais e que devem ser irracionais.
29	A	Bom, nós chegamos e reduzimos esta de quarto grau do enunciado para uma de terceiro. Então tem três raízes. Repetidas ou não. Seguindo o método da pesquisa de raízes...
30	M	Nenhuma mais é racional.
31	A	Nenhuma mais vai ser raiz do problema, então só restam raízes irracionais.
32	Prof.	Você disse que é de grau três e tem mais três raízes.
33	M	Isso, a gente reduziu.
34	Prof.	Como vocês sabem que elas não são todas complexas.
35	A	Porque mais nenhuma possibilidade da pesquisa de raízes apresentou-se como uma raiz propriamente dita.
36	Prof.	Vocês disseram que tem mais três raízes. E concluíram que uma é irracional. Por que as três não podem ser complexas?
37	A	Porque a complexa tem... Bom, se há uma complexa, há outra... como é o nome? Aquela que tem um traço em cima? Conjugada!?
38	M	Conjugada!
39	A	Uma irracional tem que ter conjugada.
40	M	Tem que ter duas. Pode ser duas.
41	A	Não pode ter a terceira separada.
42	Prof.	Está bem.
43	M	Escreve então. Como só tem a possibilidade de ter duas imaginárias complexas, uma tem que ser irracional.
44	A	Então eu vou escrever um testamento. Vai dando uma olhada na próxima.
45	M	Tô lendo já.
46	A	Conjugada é o nome da raiz?
47	M	Acho que é conjugado. Não custa procurar. É conjugado.
48	A	Três raízes irracionais não. É complexas não é?
49	M	É. Racional é o que gente quer.
50	3.ª Atividade A	 Ah, teorema de Bolzano. Lembra do Bolzano?
51	M	Vagamente.
52	A	Pega um ponto em baixo, um ponto em cima, multiplica os dois; se for ímpar o número de raízes é ímpar... se for negativo o número de raízes é par; se for positivo é ímpar. É porque se você pega uma em cima e uma embaixo... Determine as raízes da equação. Será que tem que usar Bolzano?
53	M	É bem isso que eu tava pensando. Não há necessidade.
54	A	Tem uma rota alternativa.
55	M	Vamos tentar por essa, depois de não der certo: $x^3 + x + 1$.

56	A Olhe. O q e o p são 1. Então pesquisa de raízes fica fácil.
57	M 1, 0, 1, 1.
58	A Mais um, menos um. Zero não.
59	M Não, tudo bem o zero não. Mas e no Briot-Rufinni tem que ter o zero porque não tem x^2.
60	A É, tem que ter um espaço para o x^2... Não dá.
61	M É, acho que vai ter que usar Bolzano.
62	A Seja a equação... raízes reais situadas no intervalo aberto... para x igual a a, para x igual a b. Espera aí então. x igual a a, x igual a b. O a nessa equação é... é 1. E o b é 0 não é? Vamos colocar x igual a a. ... três, mais um, mais um. Vai dar um, mais um, mais um, vai dar três. Segundo caso, x igual a b. Zero, vai dar o termo independente.
63	M Que é 1.
64	A Sendo assim, o produto delas, 1 e 3 vai dar 3. Número par.
65	M Não, ímpar.
66	A Número par não, número positivo, está ok. Número de raízes situadas no intervalo aberto... Tá.
67	M Vai ser...
68	A Maior que zero. Então o número de raízes é... leva aqui... fazendo o gráfico ele vai voltar... ele é par!? Sim, ele vai ser par. O número de raízes é par.
69	M Vai ser par. Mas o 3 não é par. (risos)
70	A Ele fala o número de raízes o quê? Reais. Então quer dizer que o número de raízes reais é par. Um polinômio de grau três. Ou é zero, ou é dois. Dois não pode ser. Dois não pode ser porque pela pesquisa de raízes nem o 1 nem -1 são raízes. Então é zero. Não possui raízes reais. Deixe eu tomar nota dessa conclusão.
71	Professor Na questão 3 vocês concluíram que não tem raízes reais. De que grau é a equação?
72	A/M Terceiro grau.
73	A Ela deve apresentar três raízes. Fazendo aqui o método de Bolzano você pegando o primeiro caso x igual a a e o segundo caso, x igual a b, e multiplicando os dois resultados obtidos você vai obter um número par. Significa que o número de raízes reais é...
74	M Número positivo.
75	A É, perdão, número positivo. Significa que o número de raízes reais é par: 0 ou 2. Não pode ser 2 porque senão a pesquisa de raízes acusaria essas duas soluções reais levando à conclusão de que o polinômio em questão tem apenas raízes... não apresenta raízes reais.
76	Prof. Vocês falaram agora há pouco, em uma outra questão, porque a equação era de grau três...
77	M Só poderia ter duas complexas.
78	Prof. Só poderia ter duas complexas. Essa equação também é de grau três. Quantas raízes...
79	M Ela só pode ter duas complexas.
80	A Duas complexas porque se há raiz complexa, o conjugado também será.
81	Prof. Então a terceira raiz...?
82	A É irracional.
83	Prof. É irracional!
84	A Assim como demos a resposta no b.
85	Prof. Mas você afirmou que ela não tem raízes reais.
86	M É, não tem como.
87	Prof. Você afirmou que o produto dos valores deu positivo. Mas isso é para todos os valores de x, para todos os intervalos ou em algum intervalo escolhido?
88	A Só no intervalo delimitado, entre x igual a a e x igual a b, o que não é subsídio... uma conclusão mais concreta. Mas é o proposto pelo teorema de Bolzano!
89	M Eu acho que esse polinômio não existe.
90	Pesq Vocês disseram que não tem raízes ou que são duas, no intervalo...
91	M É isso, segundo o teorema: se o número é positivo vai ter um número de raízes par.

92	Prof.	Para todos os valores de x ou para alguns valores de x?
93	A	Só para os valores de x propostos aqui no enunciado da questão. Dá para fazer um gráfico inclusive. Deixa eu desenhar o gráfico. Para x igual a a, x igual a 1, 4. E para zero aqui vai ser 1. Não se pode, mas tudo bem. Abscissas, palavra difícil de escrever. Dois "esses" não é?
94	M	É. Exercício de matemática exigindo português né?
95	A	Bom. De qualquer maneira ele pede as raízes da equação.
96	M	Não tem como achar.
97	A	Dá para reduzir para segundo grau? Dá para por em evidência?
98	M	Não, a gente não sabe nenhuma.
99	A	x que vai multiplicar $x^2 + 1$, mais 1, igual a zero. Olha dá para descobrir porque x não é 1.
100	M	(risos) x não é 1, não é 0, não é - 1.
101	A	Se pelo menos tivessem as raízes reais.
102	M	É só escrever que não existem... Parece tão fácil! Um polinomiozinho, pequeninhinho.
103	A	Aparentemente simples. Eu vou tentar um número fácil aqui: 1 + i. Só o número i não é.
104	M	Não tem como chutar um raiz complexa.
105	A	É um conjunto muito amplo, é claro. Vamos tentar outra opção. Aqui, a interpretação leva a essa conclusão. O número de raízes situadas no intervalo aberto (a; b) é ímpar se o produto de P(a) por P(b) for menor que zero, o que não é o caso. E a quantidade de raízes reais é par, inclusive zero, isto é, nenhuma raiz real no intervalo (a; b). Esse é o caso, se o produto de P(a) por P(b) for maior que zero, que é o caso do 3 que nós encontramos. Ou seja, se o valor do polinômio em x a e x b tem sinais iguais, dois não é. Então pode... só resta a opção do zero. Sendo o zero, existem duas possiblidades: ela pode ter três raízes irracionais ou duas complexas e uma irracional. De qualquer maneira, nesse momento, nós não estamos conseguindo achar nenhum método capaz de precisar essas duas raízes, ficando com a conclusão de que o polinômio não apresenta raízes reais. É só. Eu desisto.
106	M	Eu também.
107	Após a explicação do uso do software A	 2 b, pega a equação do 2b!
108	M	x^3
109	A	Não cruza no 2! Qual era a resposta?
110	M	Era só para indicar que tinha uma raiz irracional. Só deixa eu... É 1 aqui?
111	A	É um sim. Vamos aumentar para ver onde ele bate. Olhe aqui! Desci um pouco mais para ver onde ele bate e é em -1, -2, - 3. Foi o que a gente achou não foi?
112	M	A gente achou -2. Mas a agente achou -2 para a equação do 4.º grau. Não para essa. Essaaqui é uma nova.
113	A	No entanto ela bate no y. Ela tem uma raiz. Ou seja, ela tem uma raiz entre o 1 e o 2.
114	M	É mais perto de 1; é 1,5 eu acho.
115	A	E do 3?
116	M	Qual 3?
117	A	Desses 3 aqui. Vamos fazer o gráfico.
118	M	Ei espera aí. Não é a mesma. Mas tem alguma coisa parecida. É só trocar - 3 por +1 aqui. (referindo-se à equação encontrada em 2a e a equação em 3)
119	A	Não tem o b?
120	M	Não.
121	A	Será que está certo esse comando aqui?
122	M	Eu acho que sim.
123	A	Vou tentar digitar de jeito diferente.
124	M	Tenta xxx.

125	A	Será que o mais tem que estar perto.
126	M	Eu acho que não faz diferença.
127	A/M	É a mesma coisa.
128	A	Olhe que estranho. Ela bate aqui em uma raiz ímpar. Vou aumentar o limite horizontal para ver se ela bate lá na frente. De repente ela faz uma curva para baixo: - 10. Como é que fica.
129	M	Ela continua. Olhe.
130	A	Ela continua para baixo. Quer duzer, ela bate uma vez aqui. A raiz é ímpar; não par. Ah não, mas é o número de raízes reais. O polinômio é do 3.º grau não é?
131	M	É.
132	A	Ela quer as três raízes todas iguais.
133	M	Mas como?
134	A	Ele pode ter três raízes mas são repetidas. Na verdade não quer dizer nada.
135	M	Não faz sentido. Só não conseguimos encontrar as raízes.
136	A	Não consigo ver sentido nela. Aquelas três raízes, que por sinal são as mesmas que a gente não conseguiu achar, elas estão entre o 0 e -1 no eixo das abscissas. O 1 ratificou o que a gente fez aquela hora, que era o termo independente.
137	M	É. E o 1 bate no 3.
138	A	Olhe! Espere aí. Se essas raízes estão entre 0 e -1 e é uma spo e são três raízes repetidas, então das duas possibilidades que a gente tinha que eram duas complexas, uma o conjugado da outra, mais uma irracional já é descartada. Então são todas irracionais; as três irracionais.
139	M	Concordo. Não tem como ser complexa.
140	A	E a 2b também comprovou isso. Deixa só eu refazer o gráfico. (com o software) Ela corta uma vez só.
141	M	Só uma raiz irracional então.
142	A	Três irracionais. E três raízes iguais no caso.
143	M	Então vamos justificar isso.
144	A	Deixe eu escrever a conclusão.
145	M	O gráfico confirma o encontrado no exercício. Dentro do intervalo considerado apenas há uma raiz. Dessa forma fica evidente a impossibilidade de haver raízes complexas (pois, se assim fosse, ter-se-ia três raízes distintas em lugar de três raízes iguais).
146	A	E essa mesma conclusão é encontrada para o exercício 3. Embora eu venha escrever a conclusão é praticamente a mesma.
147	M	Então coloca aí.
148	A	O fato de haver apenas uma raiz no intervalo dado praticamente descarta a possibilidade de haver raiz...
149	M	complexa.
150	A	É... complexa. Não sei com relação ao infinito porque nós consideramos o intervalo bem pequeno. Faz um teste. Coloca limites bem altos. Não, corners. View, corners. (software).
151	M	Cem. (software)
152	A	Mesmo com 100 no limite de x, a reta fica mais estreita mas mesmo assim não cruza em mais de uma vez o gráfico.
153	M	Ele teria que voltar e não tem como.
154	A	E é interessante ver que o teorema de Bolzano se aplica para raízes reais. Nada se pode concluir sobre as raízes totais.
155	M	Vamos fazer o (exercício) 1 só para verificar: $- 2x^3 + 3x^2 - 2x + 3$. As raízes que a gente achou: 3/2...
156	A	-i/2... Espera aí. Vamos abrir mais esse intervalo. Horizontal não é? -5, 5 (software)
157	M	Se bem que essa equação aqui só vai dar essa raiz. Tipo nessa equação aqui, a única raiz é 3/2. Daqui mudou já.
158	A	Não, mas o -i/2 e o i/2 também servem como raízes.

159	M Não aqui de primeira eu acho ee a gente tentar resolver.
160	A Eu acho que dá sim. Eu acho que foi mal digitado. E se eu tentar asterisco? (software)
161	A/M Deu a mesma coisa.
162	A Vamos tentar uma nova?
163	M $- 2x^2 - 1/2$.
164	A Tem que ver se essa barra vai ser para tudo que vem escrito ou para o 1 mas vamos tentar (símbolo de agrupamento; software) Eu acho que ele pegou o conjunto inteiro.
165	M É. Tenta 0.5... Tem que ser ponto.
166	A Mesma coisa. $-2x^2 - 0.5$. Ah mas tem o seguinte né? São raízes complexas. Vão estar no plano de Argand-Gauss. Elas não vão aparecer aqui. Será que tem Argand-Gaus aqui?
167	M Sei lá.
168	A Vamos perguntar ao Prof.. Olha 2B mas tem o seguinte analisando aqui. A gente fez com o (exercício) 1 o teste das raízes: mais ou menos i/2 e elas não foram representadas nesse plano. Só podem no plano de Argand-Gauss. Mas aqui no (exercício) 3?
169	M É porque é irracional, não é complexa.
170	A Por que não pode ser duas complexas? Elas não iam aparecer do mesmo jeito concorda? Pode ser uma racional aqui...
171	M ... e duas complexas...
172	A ... que não aparecem no gráfico. Quer dizer que eu vou anular o que a gente escreveu aqui. Pode haver sim uma raiz complexa na (atividade) 2.
173	M Não! Na 2?
174	A A conclusão que a gente chegou foi a seguinte: era um polinômio do 3.º grau, mas que todas as raízes não poderiam ser complexas porque para ter uma raiz complexa ela precisa ter conjugado. Então não pode ter apenas raízes complexas deve ter alguma irracional.
175	M Mas tem uma irracional.
176	A Tem uma irracional. E mesmo que tenha raízes complexas elas não apareceriam nesse plano aqui. Por isso que deixa em aberto. Não é conclusivo. Nem o (exercício) 3.
177	Prof. Qual é a dificuldade que vocês estão encontrando para descobrir o valor dessa raiz?
178	M A gente não consegue definir se tem ou não raiz complexa porque ela não aparece nesse gráfico. A gente fica no escuro.
179	A Só no plano de Argand-Gauss.
180	Prof. E vocês, pelo gráfico que acabaram desenhar no folha de papel , já sabem o intervalo em que a raiz real está localizada.
181	A Inclusive nesse exercício eu cheguei a explicitar o intervalo x = -1 e x =0.
182	Prof. Se vocês já conhecem o intervalo, onde está a dificuldade em saber que valor é esse?
183	A Eu desconheço, pelo menos no Ensino Médio, qualquer jeito de encontrar esse número irracional.
184	M Dá para chutar.
185	A Mas eu acredito que ele venha a ter uma série incontável de casas decimais que...
186	Prof. 2B, o que você disse?
187	M Que dá para você delimitar. Tipo entre -1/2 e -1.
188	A Está mais próximo do -1 aqui.
189	Pequisador Como vocês observaram isso?
190	M No gráfico. Espera aí que o programa fechou. (software) Aqui no gráfico está mais próximo do -1.
191	A Se fosse isso, testando desvairadamente pares ordenados justamente teríamos números muito próximos mas isso é um processo...
192	M Demorado!
193	A Demanda bastante trabalho e mesmo assim você não chegaria a um resultado tão preciso assim da raiz irracional.

194	Prof. Está bem. Obrigado.
195	A Eu vou anular isso aqui. Vou colocar um S.E. (sem efeito) aqui porque eu coloquei que não poderia ser complexa.
196	M Você gostou de escrever hoje (risos). Não tem como definir se tem ou não complexa. (encerraram registrando por escrito suas conclusões)

1	DUPLA 3, ALUNO J; ALUNO Y; OBSERVADORA: N 1.ª atividade J Tem que escrever o nome!?
2	Y Obtenha as raízes do polinômio $P(x) = - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 3$. Briot-Ruffini? Põe em evidência. Tipo -2 e -2 aqui e 3 com 3.
3	J Põe x^2 em evidência. Fica - 2x +3.
4	Y x igual a 1 e -1 né? 3/2. Então daí x' é -1 e x" é 1. Daí o outro vai dar 3/2: -2x + 3 = 0, 3/2
5	Y Considere a seguinte equação polinomial: $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$. Mostre que esta equação tem uma raiz racional e encontre essa raiz. Dá para fazer... se a gente for transformando e for reduzindo.
6	J Nossa! Como é que vai fazer?
7	Y A gente não tem nenhuma raiz.
8	J Por igualdade?
9	y Vamos pensar... Vamos para a b daí? Vamos para a 3. Teorema de Bolzano. Seja a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}$ tal, o número de raízes reais situadas no intervalo (a; b) é ímpar se P(a).P(b) for menor que 0...
10	j ...se o valor do polinômio para x = a e para x = b têm sinais contrários; é par, inclusive zero, nenhuma raiz no intervalo (a;b) ... Determine as raízes da equação $x^3 + x + 1 = 0$.
11	Y Vamos ler esse aqui de volta.
12	J Dá para fazer... Girard? m + n + p é igual a...
13	Y - b/a
14	J Dá zero. mn + mp + np é igual a 1.
15	Y c/a
16	J mnp é igual a...
17	Y d/a.
18	J ... - 1. O número de raízes reais situadas... tá.
19	Y Vamos tentar fazer assim.
20	J Tá. Então substitui...
21	y Tenta - n - p vezes... Aqui já dá direto. Acho melhor fazer aqui. É mais fácil. m é - n - p vezes np é igual a -1. $-n^2p - np^2 = -1$. Deixa o n em evidência daí.
22	J Põe np em evidência.
23	Y Ah é. np é igual a -1/n. Daí fica... mn + np -1/m = 1.
24	J Vai ficar com três incógnitas do mesmo jeito.
25	Y Pois é. Não adianta.
26	Observadora Posso fazer uma proposição? Tentem trabalhar o (exercício) 2 antes de ir para o 3.
27	j Certo. Mostre que esta equação tem uma raiz racional e encontre esta raiz. Tá, vamos tentar o Girard de novo.
28	J Não, quer dizer você tem quatro incógnitas. Dá para tentar Girard mas eu acho que não é assim, sei lá. Pesquisa de raízes, tá aqui. Seja p/q com p e q inteiros, p/q é uma raiz racional.

29	J	Resolver a equação tal. Uma equação apresenta...
30	y	Precisava ter uma raiz para fazer aquilo. Será que tem como fazer o inverso? Partir do 0 assim?
31	J	Tem que ter alguma raiz ou alguma coisa que se divida.
32	y	Tá e se a gente fizer assim: usar lá o 'carinha' Briot-Ruffini só que botar tipo *a* a raiz? Tentar dividir. Tem que chegar no zero. Vamos tentar fazer isso aqui. 1, +2, +1, -1, -6; a vezes 1, a. Mais 2, é 2+a. a vezes 2+a, 2a + a^2... é a^2 + 2a mais 1. Vezes a: $a^3 + 2a^2 + a - 1 - 6$ tem que ser igual a zero.
33	J	É ao cubo o negócio. Bem, pelo menos a 1 a gente resolveu né?
34	Y	Equações polinomiais...
35	J	Vamos ver como ele descobre... Para fazer esse aqui você tem que ter a raiz não é?
36	y	Lembra-se que o prof. tinha falado: soma dá zero... 3... 7... 4... não dá. E do outro lado? 1 + 1, 2; mais 1, três.
37	J	Teorema das raízes irracionais. Teorema das raízes imaginárias.
38	Y	E se a gente fizer aquele jeito de dividir lá: q(x), p(x)
39	j	Como? Pelo o quê a gente está dividindo entendeu? Se a gente tivesse pelo o quê dividir a gente teria uma raiz, esse é o problema!
40	Prof.	Como vocês estão tentando obter a raiz dessa equação?
41	J	A gente está tentando de tudo quanto é jeito... mas a gente está tentando decompor.
42	y	A gente tentou Briot-Ruffini mas não deu. Tentamos fazer por Girard mas também não conseguimos. Agora a gente está pensando.
43	J	Olhe 3B. Não sei se é certo fazer isso aqui: $x^3 + x - 3$ vezes x + 2, igual a 0.
44	y	x + 2 igual a 0; -2 vai ser uma raiz. Piá é bem isso. Uma raiz é -2. Como é que você fez isso?
45	j	Fiz em duas partes. Coloquei x^3 em evidência. Daí ficou x^3 vezes x + 2; mais... daí eu resolvi isso aqui ($x^2 - x - 6$). Eu fatorei: x - 3 vezes x + 2.
46	y	É eu tinha pensado em fazer tipo 2x + 2 mas eu não me lembrei... Daí o outro vai ser... 3 não é? É melhor a gente resolver aqui. Uma raiz é -2 e a outra é 3.
47	J	Como é 3?
48	Y	x é - 3.
49	J	Não, não, não. Esse aqui a gente tem que resolver. Uma raiz é x... -2.
50	Y	Agora dá para fazer Briot-Ruffini: -2, 1, +2, +1, -1, -6. (atividade 2) Um vezes -2 é -2, mais 2 é 0; -2 vezes 0 é 0 mais 1 é 1; -2 e - 1 é -3; 6... deu bem certinho aqui tá! Faz Ruffini aqui: 1, 0, 1, -3... resto 0. Menos 2 é raiz mesmo. Antes era x a quanto?
51	J	x a quarta. Agora é x ao cubo.
52	Y	Agora dá para ...
53	J	A gente chegou aqui, no mesmo lugar; em x ao cubo. ... Ah aqui. Divida essa aqui por -2.
54	Y	Daquele jeito lá. Não ao contrário. Na equação é que põe -2. Tem que ver se essa é raiz: ... + 2 - 3 = 0 (testando 2 em $x^3 + x - 3$ a partir de Ruffini na atividade 2) 2 ao cubo é 8. Tô provando que não é raiz.
55	J	É - 2.
56	Y	Então, -2; -5. Dessa equação não é raiz.
57	J	Mas se é raiz desta aqui, é raiz dessa também.
58	Observadora	Você poderia explicar quando diz 'raiz desta aqui', qual 'desta aqui'?
59	J	Ah, é da equação inicial.
60	Observadora	E depois, da outra?
61	J	A mesma da fatorada. Você pode usar a mesma. Vamos tentar né?
62	Y	Tem que ver. Se não der zero não é raiz. (usando Ruffini com -2 em $x^3 + x - 3$) - 2 mais 0, -2; 4 mais 1, 5; -2 vezes 5 dá -10; menos 3 dá -13.
63	J	Não deu então.
64	Y	Bom a gente provou que tinha uma raiz racional e encontramos ela. Metade está feito; é a letra a. Mostre que essa equação tem uma raiz irracional.
65	J	Se a gente achar uma raiz irracional, a gente vai ter as duas que é o conjugado. Agora tem que

	achar a raiz irracional.
66	Y A gente tem a equação fatorada.
67	J Se a gente tem uma aqui... m, n, p, q... dá para fazer por...
68	Y Girard! É trabalhoso!
69	J Faz aí por Girard.
70	Y Deixa eu só pegar I; é mais rápido.
71	J Você vai ficar com três equações. Não. Quatro equações. Falta uma aqui.
72	Y d/a. Que é -6. Agora sabe que uma das raízes é -2.
73	J Põe -2 em alguma: m, n, p ou q.
74	Y Como n; -2mpq... mpq sabe que é 3. E agora...
75	J Nas outras também.
76	Y -2m + mp + mq + (-2p) - 2q + pq = -1. Vamos deixar o -2 em evidência. -2mpq. Dá 3, mpq; + mp + mq + pq = -1; -6 + mp + mq + pq = -1; mp + mq + pq = 5. Agora vamos para a 3.ª
77	J mp + mq + pq dá 5.
78	Y Espera aí. Vamos fazer nessa aqui. Eu chamei essa de I, essa aqui eu chamei de II.
79	J mpq substitui 3 aqui não é, na terceira?
80	Y mnp + mnq + 3 = 1. Agora sabe que... o coisa aqui, como é o nome? -2 é raiz, é o n. -2mp + mpq + 3 =1. Dá para deixar mp em evidência. Só deixa eu passar esse 3 para lá. Deixa eu fazer de volta... + mpq daí o 3 vai para lá fica - 2.
81	J Isso, -2. Põe mp em evidência.
82	Y Fica -2 + q igual a -2. Agora o 4.º que é esse aqui. Nesse a gente já sabe que n é o -2. m + p + q é igual a 0.
83	J Então m vai ser igual...
84	Y A p + q. Quer dizer - p - q. (voltando à 3.ª relação) ...-q vezes p...-2+q = -2
85	J Não sei se vai dar certo. Vai tentanto aí.
86	Y - p^2 - pq... -2 + q. Espera aí cara. Está muito confuso. Eu vou substituir esse daqui aqui. É melhor. (voltando à 1.ª relação) -p vezes p, p^2; -pq; -qp... -pq de volta; $-q^2 = 3$. Então, $-p^2 - 2pq$...
87	J Acho que é um produto notável isso.
88	Y ...- $2q^2 = 3$.
89	J Espera aí. Você tem o valor de p+q?
90	Y p + q? -m... n = -2! (risos) Está suado este.
91	Prof. Vocês descobriram alguma raiz?
92	J/Y Descobrimos. Estamos atrás da irracional agora. Só que está difícil. A gente vem tentando por Girard agora mas é bem trabalhoso.
93	Prof. Como vocês sabem que existe mais uma raiz?
94	Y x^4 são quatro raízes. Pode ter multiplicidade...
95	3ª Se tiver uma irracional, o conjugado é a outra.
96	Prof. Como vocês estão procurando essa raiz irracional? Por qual método vocês estão tentando fazer?
97	J A gente tentou por Briot-Ruffini e por Girard.
98	Y E se gente tentar fazer uma loucura e tentar no chute mesmo e botar um i ali. Se a gente achar montando a equação ali... Nessa aqui tem que ter...
99	J Tem que ter. É ao cubo. Tem que ter uma real. Tem que ter duas irracionais. Não. Real ou racional. Tem que ter duas irracionais né? Se a gente pegar essa daqui e dividir essa aqui.
100	Observadora Você poderia explicar de novo quando diz 'dividir essa por esta daqui', quem é essa...
101	J Aqui olhe. A gente vai pegar x + 2 vai dividir a equação x^3, vai dividir por x+2. Não sei se é certo fazer isso. Eu vou tentar né. (algoritmo de Briot-Ruffini, p. 1 da folha) -2 + 1 é -1; mais 2... dá -1. O resto é -1.
102	Y (consultando o material) Está aqui. Teorema das raízes irracionais. Está aqui, olhe. Se uma equação de coeficientes reais tem grau ímpar, então essa equação admite pelo menos uma raiz real. Essa

	equação tem grau par. Vamos pensar se tem mesmo raiz. Não pede para achar a raiz. Pede para mostrar que tem. E ela tem né; tá afirmando isso. Deixa eu fazer uma coisa... i não é raiz.
103	J A soma não deu 0 né?
104	Y Dos coeficientes? Não: 4 - 7, -3. Se fosse 0, 0 também seria uma raiz.
105	J Espera aí. É i aqui (retornando à atividade 1). É i aqui. Não 1. Resolva Bháskara.
106	Y Ah sim! Nossa!
107	Observadora O que você tentou ali?
108	Y Eu peguei $x^3 + x + 3$ que era a equação né, daí tentei compor ele. Deixando x em evidência. Não sei se está certo isso.
109	Observadora Para que você fez isso?
110	Y Para ver se achava as raízes dessa equação. Daria x = 1 e x = -3. Viu 3A. Pondo x^3+x+3... decompondo aqui...
111	J Não, mas tem que ter um... tem que deixar algum em evidência para ser o mesmo. Eu acho que não dá para fazer assim não.
112	Observadora Deixem essa se vocês esgotaram as estratégias e voltem para a atividade 3 então.
113	J Tem que aprender esse teorema de Bolzano.
114	Y Deve ter raízes imaginárias. O número de raízes reais no intervalo (a;b)...
115	J (consultando o livro) ... número par de raízes reais... A gente não aprendeu isso aqui.
116	Y Olhe 3A. Se eu fizesse assim: $0x^2$ certo? Se tentar fazer fatorando?
117	J Tem que ter tipo...
118	Y x + 1
119	J Teria que ter esses dois iguais. Você pega um, não tem como.
120	Y Eu acho que dá para fazer. Será que não mesmo? Vou tentar entender isso aqui. (relê a atividade 3) Daí tem três raízes. Tem dois pontos, tipo ponto a e ponto b. Daí tem duas equações, ponto a e ponto b (lendo o que seria P(a) e P(b)); multiplicadas dão menor que zero. O valor do polinômio para x = a e x = b tem sinais contrários.
121	J Tem que ser uma positiva e uma negativa para dar menor que zero, e aqui tem que ser as duas positivas ou as duas negativas. Mas no que ajuda isso?
122	Observadora (não fazem o gráfico; permanecem no método algébrico)
123	Y (divisão pelo método da chave) $x^3 + x + 1 = 0$; ax^2+bx+c. Vai dar resto 0. Tem que achar Q(x).
124	Observadora O que vocês estão fazendo agora?
125	J (retoma a atividade 2) Estou refazendo essa 2 aqui. Pegando a raiz e dividindo a equação
126	Y Olha aqui. P(a) vezes P(b) vai ser menor que 0 porque o número de raízes é ímpar. É igual a 3. (risos) Saiu alguma coisa. Uma raiz vai ser o conjugado da outra. Isso deve ser irracional.
127	J Vamos fazer o (exercício) 2 ainda.
128	Y Vamos fazer xxxx que é mais fácil: $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$. Vamos aumentar o intervalo aqui. 10?
129	J Vermelho está bom. Tenta no view. Então a primeira é 2; -2.
130	Y Mas lembra aquela equação $x^3 + x + 3$? Lembra? Vamos por essa aqui. Vamos tentar.
131	J Eu não sei como acha isso! Precisa de mais uma raiz.
132	Y Então era $x^3 + x + 3$ vezes x + 2. Ou era x - 2?
133	J x + 2.
134	Y Agora, $x^3 + x + 3$. Vamos pensar. Deixa eu dar uma olhada aqui.
135	Observadora Posso fazer uma pergunta? Essa curva é de qual equação?
136	Y $x^3 + x + 3$.
137	Observadora E em qual atividade está propondo essa aí?
138	Y Na 2. A gente decompôs e multiplicou por x + 2. A gente achou uma raiz que é -2. Agora tem que achar as outras três. Se a gente conseguisse fatorar em duas de x^2 seria bem mais fácil.

139	J	A gente achou -2 não é? Daria para dividir $x^3 + x + 3$? É pouca informação.
140	Y	Aqui o resto vai dar 2. A raiz é -2. Mas a gente não tem Q(x) (referindo-se ao método da chave) nem S(x).
141	J	A gente pode passar para a 3.ª (atividade) e depois voltar para a 2.ª?
142	Observadora	Pode.
143	J	xxx + x + 1. (a raiz) x é 1. Não é 1. Passa pelo (eixo) x não é?
144	Y	É. Passa pelo x. Nesse caso não é 1. Como a gente pode usar esse negócio?
145	J	Se o valor de y é 1, o de x é 0.
146	Observadora	Vou propor para vocês relerem o enunciado.
147	Y	Teorema de Bolzano: 'Seja a equaçãp P(x), $a_n x^n$ que nesse caso seria ax^3; mais $a_{n-1}x^{n-1}$ que é 2 (referindo-se a n-1); nesse caso a é 0. Pois é mas aqui estava dizendo que todos os coeficientes eram iguais. Não, não é. Lembra-se do Teorema (triângulo) de Pascal? Mas quais são esses intervalos aí? Quem são a e b?
148	J	... se o valor do polinômio para x = a e x = b têm sinais contrários.
149	Y	Sim, mas o número de raízes nós sabemos quantas? Ah não, de reais não é?
150	J	... se o valor do polinômio para x = a e para x = b têm sinais contrários. Uma é positiva e outra é negativa.
151	Y	O problema é quem é a e quem é b? (consulta o livro) As raízes são o cruzamento dessa curva com o eixo x. P(a) vezes P(b) é menor que zero. Número ímpar de raízes reais. Você pode ter 3 raízes reais ou 1 raiz real. Tem que achar uma irracional. Uma raiz
152	J	Tem 3 porque uma é negativa e outra é positiva.
153	Y	Tá, então tem 3 raízes. Aqui olha ele diz: as raízes do polinômio são o cruzamento dessa curva com o eixo x. Então uma das raízes vai ser aquele ponto ali. Dá para descobrir. 0,69; 0,7. Menos 0,7 aproximadamente.
154	J	E zero.
155	Y	Vamos tentar usar desse jeito. 0,7. Quanto que é isso em fração? Vamos transformar em fração que é melhor.
156	J	Sete décimos.
157	Y	Sete décimos e zero. Então vamos fazer Briot-Ruffini agora.
158	J	Não podem ser as três iguais? Tem que ser três.
159	Y	Então vamos conferir só para ver se dá zero o resto. (7/10 em Briot-Ruffini)
160	J	1; 0. Tem que por o zero...
161	Y	49/100. Mais 1.
162	J	149/100. Não vai dar...
163	Y	7/10 não vai ser raiz. Talvez não esteja bem certinho ali.
164	J	É menos aqui não é? É menos 7/10.
165	Y	É mesmo. -7/10 vezes 1, -7/10. -7/10 vezes -7/10, 49/100 mais 1, 149/100. vezes -7/10 mais 1...
166	J	Não deu 0. ... existe um número ímpar de raízes reais entre a e b.
167	Observadora	Faço uma pergunta a vocês: esse a e b são raízes?
168	J	São.
169	Y	Não. a e b não são raízes. Quem é raiz é o ponto x aqui; o a e b não.
170	J/Y	São o intervalo.
171	Y	Estão nesse intervalo as raízes.
172	J	Tá, então tem uma raiz só né?
173	Y	Real. É, tem uma raiz real só. Real ou irracional.
174	Prof.	Como está a discussão de vocês?
175	Y	Agora, a gente achou o gráfico da equação do número 3 daí a gente tá tentando...
176	J	O prof. não deu essa matéria.

177	Y	Vemos que tem uma raiz aqui. Pomos um ponto mas não deu certo.
178	Prof.	O que você está experimentando 3B? O que você descobriu com o mouse?
179	Y	Estou tentando descobrir uma raiz.
180	Prof.	Mas o que você descobriu? O que você está fazendo com o mouse e achando ali 3B?
181	Y	Estou achando onde intercepta no ponto x.
182	Prof.	E como você está fazendo isso? Com o mouse?
183	Y	Com o mouse!
184	Prof.	Está bem.
185	J	Eu não sei chegar com o cálculo aí.
186	Prof.	O que você descobriu ali 3B com o mouse?
187	Y	Onde corta o eixo x que é o intervalo (a; b). Então seria uma raiz...
188	Prof.	Certo...
189	Y	Só que não deu certo. Dá... 700 mais ou menos com 0,7. No Briot-Ruffini não deu 0 o resto.
190	Prof.	Certo.
191	Y	A não ser que seja 0,66 ali. Menos 0,66.
192	Prof.	Você testou esse valor decimal e verificou que não é solução.
193	Y	É. A gente fez aproximado 7/10.
194	J	Daí não zerou, não deu certo.
195	Prof.	Ok, 3A.
196	Y	Agora falta a gente achar a raiz Descobrimos que tem. ... Não pede para achar entende? Tem que mostrar que tem uma raiz irracional (referem-se à atividade 2b; consultam o livro). Olha aqui: se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar então essa equação admite pelo menos uma raiz real. Pronto. Ah não, mas é par. Não, mas aqui é ímpar (vendo a decomposição em fatores).
197	J	Espera aí. Lê de novo.
198	Y	Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar... olhe aqui: x^3. Sabe quando você fatora aqui. Então essa equação admite pelo menos uma raiz real. Acontece que essa aqui não é ímpar. Porque a raiz dessa não vai ser raiz dessa.
199	J	Então não tem raízes... irracionais.
200	Y	0,66 ali?
201	J	Eu acho que não.
202	Y	Olhe 0,66. É isso aí 0,69. Vamos substituir aqui na equação 7/10. É mais fácil que fazer Briot-Ruffini.
203	J	343/100 + 70/100... é não deu.
204	Observadora	Uma pergunta: esse teorema com a ajuda do gráfico não sugere a vocês uma estratégia?
205	Y	Sugerir... A raiz estaria aqui não é? Nesse ponto em que intercepta a reta x só que não dá certo.
206	J	A gente não está interpretando direito.
207	Observadora	Então como vocês poderiam criar uma estratégia para encontrar a solução aproximada pelo menos?
208	J	É chegar lá que a gente não está conseguindo matematicamente. Só ali como a gente viu. A gente conseguiria se tivesse mais um valor. Ou uma raiz. Algo que poderia dividir essa equação, eu não sei.... Vamos voltar para a 2 3b?
209	Y	Só tem aquela condição para ser irracional né?
210	J	Então vamos escrever a resposta.
211	Prof.	Vamos voltar para a 3. Vocês já tinham com o mouse determinado o valor da raiz. Usando o teorema vocês não conseguem esse valor da raiz com o apoio do teorema também?
212	J	Não conseguimos; por enquanto não.
213	Y	Quanto vale P(a) e P(b)?
214	J	Temos que usar o teorema.

215	Y	Dá mesmo menor que zero?
216	Prof.	Vocês têm o intervalo em que está a raiz. Usando esse teorema vocês não conseguem obter essa raiz sem ser no gráfico com o mouse, mas de uma forma agora algébrica, com o teorema?
217	Y	Tá. ... Oito mais ou menos.
218	J	Qual? a ou b?
219	Y	O P(a).
220	J	a e b. São dois pontos.
221	Y	Desse eu achar bem certinho: -2 aproximadamente; e - 10. Vamos por 2 e 10 também para ficar simétrico. Agora tem que multiplicar P(a) e P(b).
222	Observadora	Uma contribuição: quem é o a e quem é o b?
223	J	É o intervalo aberto.
224	Y	Vai ser no x. É o intervalo no x. Então é só -2 e 2.
225	J	Ponto a e o b. Qual ponto?
226	Y	Pontos? -2 e 2. Não, P(b) você fala? 10 e -10. Agora tem que ver se P(a) pode P(b).
227	J	Tem que ter o intervalo. E multiplicar as raízes nesse intervalo.
228	Y	Então tem uma raiz no intervalo -2 e 2.
229	Prof.	O que vocês viram nos exercícios? Que característica vocês perceberam nos exercícios do livro?
230	J	Eu acho que tem o mesmo propósito. Você tem que ter o intervalo para achar as raízes dentro daquele intervalo.
231	Prof.	Os exercícios do livro pedem para vocês acharem as raízes?
232	Y	Pedem quantas raízes. O número de raízes. Pelo menos nos exercícios que eu vi.
233	Prof.	Só pedem a quantidade de raízes. Por que será que não pedem para vocês determinarem as raízes? Qual a dificuldade que estão tendo nas atividades que propusemos a vocês?
234	Y	Achar as raízes...
235	J	... e não o número.
236	Prof.	O número de raízes vocês já sabem?
237	J/Y	Já. Sim. Pelo grau.
238	J	Agora o problema é achar as raízes.
239	Prof.	Vocês não viram como usar o teorema para achar o valor dessas raízes? Não viram como aplicar?
240	J	A gente não entendeu mesmo como aplicar o teorema de Bolzano.
241	Prof.	Está ótimo. Continuem pensando e discutindo.
242	J	O duro é achar.
243	Y	Não tem como! Olhe. O número de raízes é ímpar. Isso a gente já sabia antes. P(a) vezs P(b) é menor que zero, é! Dá 100, menos 100.
244	J	P(a) e P(b) menor que zero. Tem um número.
245	Y	Não sei. Ah sim! Tem uma raiz.
246	Prof.	Se eu perguntasse a vocês agora se existe, nessa última equação, uma raiz entre 0 e 1 o que me responderiam?
247	Y	Eu não sei. Tem que ter entre -2 e 2. Mas entre entre 0 e 1...
248	Prof.	Se eu perguntasse a vocês se existe uma raiz entre -1 e 0, o que responderiam?
249	J	-1 e 0? Sim!
250	Prof.	Sim!
251	J	Menos 0.7 a gente achou.
252	Y	Aproximadamente.
253	Prof.	Se eu perguntasse a vocês se essa raiz está entre -1 e -0,5, ou se essa raiz está entre -0,5 e 0, como vocês saberiam responder isso?
254	Y	Pela localização que ela está ali.

255	J Matematicamente?
256	Prof. Matematicamente, algebricamente usando o teorema de Bolzano. Vocês viram que no livro era dado o intervalo e perguntava a quantidade de raízes. Na atividade que propusemos não é dado o intervalo, vocês graficamente descobriram e agora pergunto: usando o mesmo teorema como vocês responderiam se essa raiz está entre -1 e -0,5 ou entre -0,5 e 0?
257	Observadora Com o auxílio do cursor, do mouse, vocês identificaram com certeza qual era a raiz?
258	J/Y Aproximadamente
259	Observadora Aproximadamente. Isso que é um indicativo para vocês. Usem essa informação para aplicarem o teorema. Mesmo usando o teorema vocês podem achar um valor aproximado, não exato. Essa é a idéia.
260	J Mas nós não estamos conseguindo chegar algebricamento ao resultado, usando o teorema.
261	Observadora Mas é aproximado também. Usando o teorema, como vocês podem chegar mais próximo do valor da raiz.
262	Y E se gente pegou o valor errado? Numa dessa é 0,66.
263	J Acredito que isso não vai mudar.
264	Y Vou mudar aqui, colocar 0,66.
265	Prof. Após ter perguntado se a raiz está -1 e -0,5 ou entre -0,5 e 0, vocês não viram como aplicar o teorema de Bolzano?
266	y Algebricamente?
267	Prof. Algebricamente.
268	J Algebricamente é o problema.
269	Prof. O que vocês teriam que fazer para aplicar o teorema de Bolzano? Que cálculos teriam que fazer?
270	Y Era isso que a gente precisava saber!
271	Observadora Achamos que vocês têm condições de sair, de ter uma estratégia, de criar uma estratégia a partir disso. Se vocês identificam o intervalo, como vão fazendo para se aproximar da raiz?
272	Y Tem de -1 a -0,5. Nesse intervalo tem uma raiz.
273	Observadora Isso. Então como vocês testam se o P(a) é positivo se e o P(b) é negativo; se o produto é maior que zero ou menor que zero? Se tem uma raiz no intervalo, o produto tem que ser ... menor que zero. Vocês tem que ir afinando. Como fazer isso?
274	Y Tem uma raiz aqui. Então os sinais vão ser diferentes para x = a e x = b.
275	Observaora Podem desenhar também.
276	Y -0,5 aqui né? -1 a -0,5. Tipo, aqui os dois têm o sinal igual não é?
277	J -1 e 0,5 é o valor disso aqui não é?
278	Y Não. É a e b. Só que tem que ter sinal contrário mas não tem.
279	Obsevadora Mas quem tem que ter sinais contrários?
280	Y O a e o b, não é?
281	Observadora Então olhe bem se é isso. Olhe quem é a, quem é b e quem deve ter sinais contrários?
282	Y x = a, intervalo no eixo x; daí substitui lá; -0,5; -1 e -0,5. Então a seria -1 e b seria -0,5.
283	J Não tem que ter sinais contrários?
284	Y Pois é, isso que acho estranho.
285	Observadora Olhem no enunciado se eles têm que ter sinais contrários.
286	Y Ou então tem mais de uma raiz. O número de raízes é ímpar... se o valor do polinômio para x = a e x = b têm sinais contrários. Só se tiver mais raízes.
287	Observadora Então leia de novo dessa frase para frente.
288	J/Y Se o valor do polinômio para x = e x = b...
289	Y Ah, do polinômio está ligado. Do polinômio é esse aqui. Não é necessariamente a e b. É P(x). a vale menos 1. Então vamos ver se têm sinais contrários. P(x)... -1^3-1+1. P(x) é igual a -1. Deu negativo. Agora vamos ver o outro número que daí vai ser -1/2. $(-1/2)^3$ - 1/2 + 1. $(-1/2)^3$ dá -1/8. Aqui dá 1/2.

290	J	O que a gente achou?
291	Y	A gente achou que P(x) tem sinais contrários. Tem uma raiz ali.
292	J	Já é um começo. Agora, determine as raízes da equação.
293	Y	É onde intercepta o eixo x.
294	Observadora	Que conclusão vocês tiram daquilo ali?
295	Y	Tem uma raiz nesse intervalo
296	Observadora	Isso. Então vocês podem fazer o quê com o intervalo?
297	Y	Pertence ao ...
298	Observadora	A raiz pertence ao intervalo. Então, o que vocês podem fazer com o intervalo?
299	J	Reduzir até chegar a um ponto... Ah! Se a gente reduzir vai ter um ponto que vai se igualar à raiz.
300	Y	- 7/10... se o P(x) dá negativo até chegar no ponto... só que tem que dar um positivo e um negativo.
301	J	Daí a gente reduz.
302	Y	Daí o intervalo vai ser dois pontos só.
303	J	Ou um ponto só. Vai ser a raiz.
304	Y	Então vamos fazer -1... 9/10 (redefiniram o intervalo)
305	Prof.	Como vocês terminarão a atividade?
306	Y	A gente descobriu o intervalo em que pertence o ponto. A gente ia reduzir o intervalo até ...
307	J	Até chegar à raiz.
308	Prof.	E vocês iriam reduzir o intervalo com qual critério?
309	Y	Tentativa mesmo. Até chegar a P(x) e a outro P(x), P(b) e P(a) com valores de sinais contrários.
310	Prof.	Buscando sinais contrários e a escolha dos valores seria com que critério?
311	Y	Com base no a e b. Como aqui o a era...
312	Prof.	De inteiro a inteiro, de quanto a quanto?
313	Y	A gente descobriu primeiro que era de -1 a -0,5. Então a gente reduziu, -9/10, daí foi fazendo assim.
314	Prof.	Está ótimo.

1	DUPLA 4, ALUNO E; ALUNO D; OBS. NA E	O melhor que tem é fatorar, porque tem o 2. Quer que eu escreva? Dá para colocar 2x; menos 2x. Menos 2x, mais 3, vezes x^2 mais x.
2	D	Um é raiz não é?
3	E	Daí tem que fazer separado. Menos 2x mais três igual a zero; $x^2 + x$ igual a zero. Aqui fatora de novo.
4	D	x igual a menos 1 é raiz.
5	E	x igual a zero ou x igual a - 1. Número 2.
6	E	Acho que tem que fazer os... divisores do penúltimo termo e os divisores do primeiro né? -1; 1; -2; 2; -3; 3; -6; 6; q é só -1 e 1. Daí vai ficar igual a p. Agora tem que escolher desse aqui qual é divisível. Um não é. Talvez menos 1 dê. Não, menos 1 não vai dar. Eu acho que vai precisar tirar com p.
7	D	Vamos tentar com 3.
8	E	Dá 5; 15 mais 1 dá 16... Quatro, oito... Eu acho que tem que ser negativo para ir balanceando.
9	D	Tenta -2 que é o valor mais baixo.
10	E	Então fica 0, 1, -3...

11	D	-2 é uma raiz. É a raiz racional.
12	Prof.	Por que vocês chegaram a essa conclusão?
13	E	Porque o polinômio pode ser dividido por um termo que tem -2 como raiz. -2 é uma raiz racional.
14	D	"Mostre que tem uma raiz irracional".
15	E	Para achar a raiz irracional a gente vai ter que transformar isso aqui em 2.º grau para achar as raízes.
16	D	x^3 mais x^2, não. x^3 mais x mais 3 é iguala 0.
17	E	A gente vai ter que fatorar de novo. Daqui... $x^3 + x + 3 = 0$. A gente vai ter que fatorar de novo para chegar em uma de 2.º grau. E continua sendo com os mesmos... 1 não pode ser...
18	D	Tenta - 2 de novo.
19	E	... 5, não vai dar. Aqui talvez -3... Vai dar muito já.
20	D	-1... Não vai dar.
21	E	Então 2. Oito, dez...não.
22	D	-2.
23	E	-2 a gente já fez. Então... 3 também não vai dar. Aqui não pode ser -6 né? Não é divisor do... [quis dizer do -3]. Eu acho que agora todas as raízes daqui vão ser irracional. Real não tem mais nenhuma.
24	D	-1 não dá. 1 soma dos coeficientes não dá. -2 aqui fica positivo, aqui fica negativo já estoura. 2 fica muito alto. Qualquer número desses não vai dar certo.
25	E	O problema agora é achar a raiz irracional. Mas pode ser... ela não é imaginária; ela é irracional, com raiz [referindo-se à radiciação]. Soma dos coeficientes. Só que a gente tem que achar a primeira. Será que está certo a primeira?
26	Prof.	Como vocês encontraram essa raiz racional dessa questão 2?
27	E	Fazendo a divisão do polinômio pelos divisores do último termo divididos pelos divisores do primeiro termo. Daí como -2 deu uma divisão exata, -2 é uma raiz...racional.
28	Prof.	E o que vocês estão procurando agora?
29	E/D	Uma raiz irracional.
30	Prof.	Uma raiz irracional para qual equação?
31	D	Por enquanto a gente achou uma raiz que é -2. Daí a gente baixou o grau. do 4.º grau para a de 3.º
32	Prof.	Então seria uma raiz irracional para essa equação do 3.º grau?
33	E	Se for raiz dessa de 3.º grau vai ser raiz dessa de 4.º grau.
34	Prof.	Obrigado.
35	E	É porque aqui não dá para fatorar.
36	D	Raiz de quatro...
37	E	Raiz de quatro daí seria o dois. Mas aqui se ela tiver... ela tem que ter mais três raízes. Duas delas vai ser uma o inverso da outra [conjugadas] só que a terceira não vai ser racional porque a gente já achou que não tem mais nenhuma racional. Então vão ter que ter duas iguais.
38	D	Tem que ser da forma... tem que ser duas raízes da forma $a + \sqrt{b}$.
39	E	A outra tinha que ser racional também.
40	D	Pode ser raiz imaginária.
41	E	Mas aí teria que ter duas imaginárias.
42	E	Deve ter mais uma racional aqui. Vamos tentar de novo.
43	D	Escreve a equação: $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$. Um não é. Zero também não é porque tem termo independente.
44	E	Zero não é porque tem termo independente. A gente já achou essa aqui. Agora a raiz daqui vai ser raiz também da de 3.º grau, também vai ser raiz da de 4.º grau. Porque são fatores...
45	D	$x^3 + 0x^2 + x - 3$

46	E	– 1 – 1 – 3 já não dá. – 2...
47	D	– 2 dá – 8, mais 2 dá – 6; dá – 9.
48	E	p são os divisores do termo independente né? Foi o que a gente fez aqui; p dividido por q. É, porque aqui o p sobre vai ficar – 1 e 1; – 2, mas aí não dá. – 1 e 1, –3 e 3.
49	D	E o q? Só o 1 e – 1.
50	E	Então esse – 2 que a gente fez nem precisava ter feito. Já não dava. Com 3. Com 3 não; com o 1.
51	D	Temos três raízes: x_1 , x_2 e x_3. E se a gente usar Girard? Só que vai ficar muito grande.
52	E	Se ela tiver uma irracional ela vai ter que ter uma oposta à outra. Ela não pode ter imaginária também senão ia ter que ter duas imaginárias. Então ela deve ter uma raiz de multiplicidade 2. Deve ter uma raiz que seja dupla. Bem, talvez por Girard dê para a gente fazer. Tá então vamos chamar as raízes de a + ...
53	D	Não. Chama de x_1 , x_2 e x_3.
54	E	Não. É na forma irracional. Que a gente coloca a raiz e já vai anular. Se a gente tiver uma raiz que seja a + $\sqrt{b}$ a outra raiz com certeza vai ser com certeza a – $\sqrt{b}$. E na hora de somar a gente já vai anular a raiz; na hora de colocar na relação de Girard. Só que tem uma raiz que a gente não conhece. Não, mas vamos fazer então. Tá, e a outra raiz a gente vai chamar de...
55	D	Chama de x_3. Fica 2a... Tá põe a + $\sqrt{b}$ + a – $\sqrt{b}$ + x_3 igual a menos...
56	E	É. Aí vai dar zero. Menos 0 sobre 1; 0. Vai ficar 2a + x_3 = 0. Tá. Então aqui já dá para colocar que x_3 = – 2a. Porque na hora de usar x_3 já põe 2a.
57	D	Então põe x_1 ...
58	E	Multiplicação se a gente fizer vai ficar com b também né. Mas olhe, daí a gente faz... se a gente for multiplicar tudo vai ficar a + $\sqrt{b}$ vezes a – $\sqrt{b}$ vezes x_3 vai ter que ser igual a – (– 3) sobre 1. Então vai ficar o quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo menos b, vezes – 2a que é o x_3 ...
59	D	...igual a 3. Vamos ter que fazer a outra.
60	E	a + $\sqrt{b}$ vezes a – $\sqrt{b}$ mais a + $\sqrt{b}$ vezes x_3 mais a – $\sqrt{b}$ vezes x_3 vai ser igual a 3 sobre 1.
61	D	Quadrado do primeiro...
62	E	a^2 menos b... dá para a gente substituir depois mas primeiro a gente tem que isolar ele. Só que aqui também vai ficar com a e b. Não vai adiantar.
63	D	Calma. Vamos...
64	E	Aqui a gente pode chamar de – 2a e aqui também de – 2a. Daí vai ficar $–2a^2$ – 2a$\sqrt{b}$. Aí vai ficar – $2a^3$, cubo não, ao quadrado... mais 2a$\sqrt{b}$ ... igual a 1.
65	D	Olhe aí.Aqui vai cancelar.
66	E	É. Esse com esse, o 2a$\sqrt{b}$ ... Esse também vai cancelar... não, aqui fica mais. Continua igual. Então vai ficar a^2 – b...
67	D	Põe tudo entre parênteses.
68	E	Não agora a gente tem que tirar esses parênteses para ver o que vai sobrar aqui. Vamos continuar. Menos $4a^2$ igual a 1.
69	D	Agora que deu outra.
70	E	Então aqui a gente vai deixar $a^2 – b = 1 + 4a^2$. Daí isso a gente pode substituir...
71	D	...no outro lá.
72	E	1 + $4a^2$. Deixa eu numerar. Aqui é I, aqui é II, aqui é III.
73	D	III em II. (alto da pág 2 das anotações)
74	E	Então aqui é a^2 – b vezes – 2a igual a 3. Vai ficar 1 + ... Sabe onde a gente vai chegar, eu acho? Em uma equação do 3.º grau comum. Vamos ver. $4a^2$ vezes –2a igual a 2. Vai ficar – 2a – $8a^3$ = 3. $8a^3$ + 2a – 3 = 0 (expressaram errado) Chegamos em uma equação do 3.º grau igual. (comparam com equação obtida anteriormente por Briot-Ruffini)
75	D	Não é igual.
76	E	Não só mudam os valores.

77	D Não dá para fatorar.
78	E A gente achou isso aqui olhe. Substituindo x_3 aqui. Vou isso que a gente achou. Ia ver se –2 não é raiz dupla mas a gente já tentou e não deu certo.
79	D p sobre q não vai dar?
80	E A gente já fez aqui. p vai ser – 1 e 1; – 3 e 3; q: – 1 e 1; – 2 e 2...
81	D ... – 4 e 4; – 8 e 8.
82	E Aqui vai dar grande.
83	D Vai dar todo o conjunto p por causa do –1 e 1.
84	E E depois cada um deles dividido por q. Vai dar ± 1, ± 3, que a gente já tentou e não conseguiu, daí vai dar ± 1/2, ± 1/4, ± 1/8; daí tem ainda com 3: ± 3/2, ± 3/4, ± 3/8.
85	D Um não é raiz.
86	E Vamos colocar no Briot-Ruffini: oito, dois, menos três (faltou 0 ref. x^2) Aqui nenhum (nenhuma raiz) inteiro pode ser.
87	D Chuta 1/2.
88	E 1/2, mas daí só vamos ter valores pares. Multiplicar par e somar par vai dar, e daí o –3 ? Tem que ser um desses aqui: 3 dividido por alguma coisa.
89	D Então vamos tentar 3/2.
90	E Oito vezes 3/2 vai dar 4... 12; não vai dar... 7 vezes 3... Vamos tentar com 4... 3/4; 8 daí dá 6 com mais 2, 8 de novo, daí dá 6 com – 3... não vai dar. 3/8! Vai dar 3 com mais 2, 5. Aí vai ficar 15/8. 3/4 negativos.É, eu acho que vai dar certo. 8, 2, –6... com mais 2 dá –4, vezes... vai dar zero. Certo!
91	D –3/4 é uma raiz.
92	E Não, é um valor de a.
93	D Primeiro passo a para cá.
94	E a igual a –3/4. Mas aqui a gente vai ter mais dois valores para a. Aqui a gente ficou com... Não! Deu errado. Porque a gente esqueceu do x^2 do a^2.
95	D Puxa. Então escreve de novo.
96	E 8, 0, 2, –3.
97	D Começa por aqui: mais 3/4. Não começa pelo número negativo.
98	E Vamos começar por –3/2. Aqui vai ficar 8, –12... hum, já não vai dar.
99	D –3/4. (outra possível raiz)
100	E Acho que –3/8 porque se –3/4 deu aqui provavelmente não dê agora.
101	D ... 9/8
102	E 9/8 com mais 2...
103	D Não vai dar.
104	E Então vamos fazer com –3/4. 8, aqui vai dar –6... vai dar 9/2 mais 2, igual a 13/2. Também não vai dar certo. Olhe aqui no número 3 (a próxima atividade) ele vai pedir a raiz de uma equação do 3.º grau mas ele está dando uma explicação. Vamos passar para o número 3 e depois a gente volta para o número 2. (Lêem a atividade 3) Mas aqui a gente vai achar o número de raízes, não as raízes. (interpretam corretamente)
105	D Mas ele quer as raízes.
106	E (consultam o livro) Pode ou não ter porque pode ter nenhuma nos 'números pares' (de raízes) A gente não vai saber se tem ou não tem. O problema 3 é igual ao que a gente chegou no 2. É uma equação do 3.º grau sem o valor de x^2. Não adianta esse teorema porque as raízes reais (quis dizer racionais) a gente consegue achar; tem que estar no conjunto do p dividido por q. Irracionais é que... (consultam o livro) O problema está aqui. Se as raízes irracionais têm a mesma característica das imaginárias, uma o inverso da outra (quis dizer conjugada), olhe aqui, 'Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então essa equação admite pelo menos uma raiz real.' Então essa...
107	D ...pelo menos uma (raiz) real.
108	E Tem que ter pelo menos uma real. E se a gente não achou na outra... Essa aqui que a gente chegou dividindo na letra a, também tem que ter uma real. O conjunto lá que dá as possíveis raízes a gente não... (consultam o livro) A gente tinha que achar mais uma raiz ali. (olham as próprias anotações)

	Aqui daria 1/8 na verdade. Ficaria 1, mais 1, menos 3.
109	D Se usasse 3 igual a isso. (sugere substituir em $x^3 - x + 1$)
110	E Aí ficaria 27 – 3 + 1. Vai sobrar. Mas eu acho que o problema nem é esse aqui. O problema é a equação que a gente chegou aqui. Aqui precisa ter mais uma real, senão a gente não vai conseguir achar a raiz irracional. É aqui que a gente precisa achar mais uma. (mais uma raiz na atividade 2) Se a gente resolver o número 2 a gente já...
111	D ... tem uma forma de resolver o 3. Pelo menos a gente tem uma idéia.
112	Prof. Qual questão vocês estão resolvendo agora?
113	D 2 b
114	Prof. O que vocês estão procurando na 2b?
115	D A gente continua procurando uma raiz para $x^3 + x - 3 = 0$.
116	E A gente quer achar mais uma raiz real, para conseguir achar as duas irracionais.
117	D Se ele tem uma irracional... se ele tem (raiz) irracional ele tem duas (raízes irracionais) certo?
118	E É que se tem uma irracional tem duas, uma o...
119	D Uma na forma $a + \sqrt{b}$ e a outra $a - \sqrt{b}$.
120	E Só que para isso tem que ter mais raiz real.
121	Prof. E por que vocês não estão conseguindo achar a outra raiz real?
122	E Porque a gente fez pelo conjunto dos divisores do termo independente dividido pelo conjunto dos divisores do primeiro termo. E ali devem estar as prováveis raízes reais (quis dizer 'racionais') mas nenhum dos valores que a gente achou ali... na verdade só um, que é – 2 é uma raiz racional. E a gente não conseguiu achar mais nenhuma, mais nenhum que fosse raiz.
123	Prof. Aquelas raízes eram reais de que 'tipo'? Ou aqueles possíveis valores eram reais de que 'tipo'? De qual subconjunto dos reais?
124	E Dos inteiros. Não sei.
125	Prof. Vocês afirmaram que tem mais uma raiz real e vocês não estão conseguindo encontrar essa raiz.
126	E/D Isso.
127	Prof. Mas admitem que há duas raízes irracionais. Como sabem que existem duas raízes irracionais?
128	D A gente acha porque se fosse uma raiz imaginária seriam 4 raízes. Seriam duas irracionais que a gente acha que tem, mais duas na forma a + bi e a – bi.
129	Prof. De que forma vocês admitiram ser esse número irracional? Como ele é escrito?
130	E $a + \sqrt{b}$ e $a - \sqrt{b}$.
131	Prof. Todo número irracional é escrito dessa forma? Ou seja, esse teorema (das raízes irracionais) se aplica a todos os números irracionais?
132	D Acho que não.
133	Prof. Por que você acha que não?
134	D Não está 'rolando' aqui.
135	E Senão daria certo!
136	D As outras três raízes a gente conseguiria achar.
137	Prof. Está bem, continuem.
138	D (leram as próprias anotações) E se a gente usasse isso aqui?
139	E O quê? O teorema (de Bolzano) ? Só que a gente só vai saber o número de raízes, número par ou número ímpar. O problema é achar 'as' raízes. Qual é o conjunto dos irracionais? (risos) Naturais, inteiros, ...
140	D Reais.
141	E ... reais, racionais, irracionais.
142	D Espera aí. Tem o conjunto dos inteiros, dos naturais, ...
143	E Dos naturais, dos inteiros, ...
144	D É para começar pelo b do número 2. É para começar pela equação $x^3 + x - 3$.

145	E	Tem que achar a raiz irracional de $x^3 + x - 3$.
146	D	Nesse intervalo mesmo?
147	E	Pode ser. Não. A gente vai ter que diminuir. Aqui tem uma raiz real. Essa raiz é a que a gente tem que achar.
148	D	Você quer diminuir o gráfico.
149	E	Diminui. Não sei se vai...
150	D	Aqui?
151	E	Vai ter que... aumentar eu acho?
152	D	Aumentar? (movimentam o gráfico de $P(x) = x^3 + x - 3$)
153	E	Para poder ver mais. Este ponto aqui que 'ele' achou...
154	D	É uma raiz.
155	E	É a raiz x_3 que a gente não estava achando.
156	D	Como você sabe que é a raiz x_3?
157	E	Porque a gente não disse que precisava de mais uma raiz para ter duas irracionais? Então essa aqui onde está cruzando o x é a racional. É o x_3, e as irracionais a gente não tem. Só que a gente precisa achar ainda.
158	D	explora o software
159	E	Está bom. Veja ali onde ele está...
160	D	Espere aí. Deixe eu aumentar um pouco.
161	E	Não, eu acho que... Quanto menor o intervalo que a gente deixar, mais próximo...
162	Prof.	Vocês sabem em qual intervalo está a raiz? Não tem 'as marcas' (os pontos) no eixo x. Vou colocar para vocês.
163	D	Diminuiu um pouco não é?
164	E	Mas não adianta. A gente precisa saber essa raiz. Tem que ver como a gente vai saber essa raiz.
165	D	Vamos tentar fazer da outra equação. Dessa de x^4.
166	E	Mas aí a gente vai achar... Ele vai cruzar nesse mesmo ponto e no –2 também. O problema é achar aquele ponto que está entre 1 e 2, mas...
167	D	3/2... (estima visualmente)
168	E	Aí seria bem no meio.
169	D	A raiz é menor.
170	E	O problema é encontrar esse ponto. Como é que é a expressão inicial, de 4.º grau? $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6$. (constroem o gráfico com o software) Ah, aqui...
171	D	Tem uma raiz em comum.
172	E	Sim, tem que ter uma raiz comum porque... Se isso fosse uma equação do 2.º grau, a distância desse ponto até o x do vértice seria a mesma da distância de cada um.. Cada raiz teria a mesma distância até o x do vértice. Mas é do 4.º grau. A gente precisava descobrir...
173	D	Mas aqui não é a mesma distância.
174	E	Não é a mesma distância do eixo y. Seria a mesma distância do vértice. O –2 que a gente achou é uma raiz. A outra raiz é a que falta.
175	D	Que é igual a que a gente procura.
176	Prof.	O que são esses dois gráficos que vocês fizeram? (no mesmo par de eixos)
177	D	O gráfico vermelho é da equação $x^3 + x - 3 = 0$.
178	Prof.	De onde veio essa equação?
179	D	Da raiz que a gente tirou por Briot-Ruffini, dá –2, a gente tirou a equação do 3.º grau. E o gráfico verde é da equação inicial.
180	Prof.	Certo. E o que vocês viram no gráfico vermelho e verde?
181	D	–2 a gente viu mesmo que era uma raiz da equação inicial.
182	Prof.	Estou interessado no comentário que ouvi agora há pouco. Que o gráfico verde e o vermelho apresentaram o quê?

183	D	Eles têm uma raiz em comum.
184	Prof.	Que é a raiz que estão procurando?
185	E/D	Que é a raiz que estamos procurando.
186	Prof.	Obrigado, continuem.
187	D	O que acontece quando dois gráficos se cruzam?
188	E	Você vai achar um ponto em comum. Mas elas têm dois pontos em comum. Se a gente igualar as duas a gente vai achar os dois pontos.
189	D	Então vamos tentar fazer. Pode fazer cálculo não é?
190	Observador	Pode.
191	E	Vamos fazer em outra folha. Era o $x^3 + x - 3 = 0$ e $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$. (escreve como sistema e depois iguala) Vai ficar $x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$. (além da raiz comum, há a raiz que procuram) Se a gente colocar essa equação ali? (no software)
192	D	Uma raiz da equação é 1. Não, –1.
193	E	É –1. Então, esse ponto aqui é o –1.
194	D	Qual ponto?
195	E	Esse aqui, em que a linha verde e a vermelha... Daí a gente substituindo acha o ponto. Mas o nosso interesse não é esse. É o outro ponto que a gente não sabe qual é.
196	D	Vamos substituir nessa. (resultado da igualdade de ambas)
197	E	Vai dar 1 – 1 + 1 + 2 – 3. Vai dar zero. É que se a gente substituir esse –1 em cada uma dessas aqui a gente vai achar o mesmo valor. Porque vai dar –1 + 1, vai dar –3.
198	D	Como –3 é igual a 0? Isso não existe.
199	E	Mas aqui a gente está fazendo y igual a isso. Mas –3 não é...
200	D	Tem que digitar essa equação igual a zero, não a y. (conceito de raiz por meio do gráfico)
201	Prof.	O que vocês estão fazendo?
202	D	A gente igualou as equações: a inicial com a que a gente tinha para achar os pontos em comum. Daí deu o gráfico em azul.
203	E	A gente continua procurando a raiz que todas elas têm em comum. A gente não acha.
204	Prof.	Onde está a dificuldade em achar o valor dessa raiz? Por que vocês não estão conseguindo achar esse valor? É um valor conhecido?
205	D	Não parece conhecido.
206	E	É que não é um valor inteiro.
207	Prof.	Não é um valor inteiro. Está bem, continuem.
208	D	Se a gente fizer essa equação, vai dar a mesma que a vermelha.
209	E	Vai ser parecida com a vermelha. $x^3 + 2x - 3$.
210	D	Ponto em comum, mas...
211	E	Ponto em comum porque é o termo independente.
212	D	Tem uma raiz desconhecida ali também. Porque não é 1/2.
213	E	É, porque a gente já tentou com 1/2. A gente não tentou com 1/2? Tentamos sim.
214	D	Tenta 3/4.
215	E	Mas 3/4 não pode ser esse ponto aqui; tá muito próximo.
216	D	Muito próximo?
217	E	Do número 1.
218	Prof.	O que é o 3/4?
219	D	A gente pensou em usar o 3/4 mas não dá, senão tinha que ficar mais próximo do número 1.
220	E	Eu acho que com essa equação a gente não vai chegar a lugar nenhum com ela. Porque ela na verdade... foi uma tentativa...
221	D	Um fruto de uma equação que a gente já tem.
222	E	Se a gente diminuísse, aliás ampliasse o gráfico para tentar enxergar. Isso, daí tem que diminuir

	o espaço (domínio) Põe – 2.
223	D 2 e – 3.
224	E Não. Só para ver esse ponto. A gente não vai conseguir enxergar. No número 2 e no número 3 a gente tem o mesmo problema: achar a raiz... real.
225	Olhei de volta para o número 1. O número 1 está errado.
226	D Está errado? Por quê?
227	E Aqui não é x. Aqui é 1.
228	D Então vamos fazer.
229	E Não, esse aqui é só no papel mesmo. Então isso aqui está errado. O certo seria $x^2+1 = 0$; $x = \sqrt{-1}$; $x = \pm i$. Porque voltei a olhar aqui. A gente põe x^2 em evidência. Fica –2x+3. Quando coloca –2x+3 em evidência aqui sobra 1. E não x. Então isso aqui está errado. Aqui sim está certo e a solução não é essa. A solução seria 3/2, +i e –i. Agora sim está certo. (observar que há duas resoluções na pág.1)
230	Prof. Vocês já descobriram o intervalo em que está esta raiz. Vocês não vêem como aplicar o teorema de Bolzano novamente, tentando obter o valor dessa raiz? Pensem nisso.
231	A A não ser que a gente vá usando aqui, ampliando o gráfico para tentar descobrir onde está ...na horizontal. A gente sabe que a raiz é maior que 1 e menor que 2. Vamos colocar 1 e 1,5 (no eixo x do software)
232	D Aqui é o maior, aqui está 1,5 certo? Aqui está 1, aqui está 1,5.
233	E 1,25. Seria a metade. Vamos colocar aqui. (ver anotações do observador) 1,20. Olhe, é aqui. Esse é o ponto. Mas a gente não vai conseguir achar esse ponto aproximando muito.
234	D Está entre 1 e 1,25.
235	E Sim.
236	D 1 sobre 8 dá quanto? 0,125. Não tem nada a ver. A gente achou que está entre 1 e 1,25. Mais para o lado do... Está bem no meio não é? Precisava ver o teorema de Bolzano. Ah, ela tem duas raízes. Nem lembro qual era a equação.
237	E A azul pode apagar porque com ela a gente não chegou em nada.
238	D Tá. Ela tem duas raízes, certo? P(a) vezes P(b) é maior que zero.
239	A Só que não adianta a gente saber. A gente já sabe o intervalo e o número de raízes nesse intervalo. (ver anotação do observador)
240	D O que você está pensando?
241	E A gente viu que estava entre 1,20 e 1,25. A gente pode até aproximar mas a gente não consegue chegar na raiz. Põe 1,26.
242	B Ele vai correr mais para cá não é? Põe 1,22; 1,22 acabei de por.
243	E Então aqui a gente põe 1,21. Só que como a gente vai saber o ponto. A gente não vai achar o ponto exato.
244	Prof. Qual é a tentativa que vocês estão fazendo?
245	D A gente estava tentando aproximar para ver se dava para ter alguma noção.
246	Prof. O que vocês estão tentando aproximar?
247	D A gente está tentando aproximar o ponto que a gente descobriu que está entre 1,2 e 1,25 mais ou menos.
248	Prof. Se eu perguntasse a vocês se a raiz está entre 1 e 1,5 ou entre 1,5 e 2, como saberiam me responder isso?
249	D Entre 1 e 1,5.
250	Prof. Por que você acha isso?
251	D A gente aproximou o gráfico para o intervalo 1,2 e 1,25. E a raiz continua lá entre esses...
252	Prof. Você fez essa aproximação entre 1,2 e 1,25 como? Como fez isso? No papel?
253	D Não, no computador.
254	Prof. Você mudou algum intervalo? Você experimentou mudar valores de x no programa e viram que existe (raiz) naquele intervalo?
255	D É isso.

256	Prof. Está bem. Muito obrigado.
257	D E o que a gente faz? Não vem nada na minha cabeça.
258	Observador Vocês podem tentar desenvolver um pouco o 3.º exercício.
259	E A gente já chegou à conclusão que o problema que a gente tem no 3.º é igual ao que a gente tem no 2 (b). Se a gente achar um jeito de resolver o 2 (b) a gente consegue resolver o outro. É um ponto que também não é inteiro. (encerraram suas anotações)

1	DUPLA 5, ALUNA F; ALUNO GE; OBSERVADORA: J F Primeiro a gente faz no rascunho e depois a gente passa para a folha de resolução.
2	Ge Beleza!
3	F Eu acho que a gente podia fazer, sabe aquele de agrupar? (fatoração) Mas a gente podia multiplicar por – 1antes.
4	Ge Ou fazer por pesquisas de raízes para poder baixar o grau.
5	F É também dá para fazer assim. Vou tentar fazer por fatoração. Depois a gente compara.
6	Ge Está certo.
7	F Fatoração deu tudo tranqüilo aqui, olhe.
8	Ge Deu? Eu também estava pensando em fazer assim.
9	F 2x... 2x – 3. Veja se dá a mesma coisa? Daí, $x^2 + 1$.
10	Ge Daí você faz separado e aqui vai dar – 1.
11	F Aqui vai dar 2x – 3 = 0; 2x = 3; x = 3/2.
12	Ge Daí tem que tentar substituir para baixar o grau não é?
13	F É mas acabou aí. As raízes são essas não são?
14	Ge Sim, claro. i; – i.
15	F Pronto.
16	Ge São essas três aqui.
17	F Deu, não deu? Vamos conferir as contas primeiro. 2x e fica $x^2 + 1$ daqui. Aqui eu pego –3 e fica $x^2 + 1$ de volta. 2x – 3; $x^2 + 1$; 2x – 3 igual a 0; 2x = 3; x = 3/2; $x^2 = – 1$... está certo não é?
18	Ge Acho que sim.
19	F Beleza! Vamos ver o 2.
20	Ge Esse não dá para fazer pelo... não, não dá.
21	F Pelo quê?
22	Ge Quando 1 é raiz.
23	F Ah, sim. 'Mostre que essa equação tem uma raiz racional e encontre essa raiz'. Acho que vai ter que fazer... 1 não é raiz. Como tem termo independente, 0 também não é. A gente tem que pensar no seguinte: como a gente vai fazer esse? Por fatoração não dá. Então vamos tentar fazer... tá colocando em evidência também não dá.
24	Ge Ah, vai ter que ser por pesquisa mesmo.
25	F Acho que eu não me lembro como se faz. Tenta fazer aí.
26	Ge Faz os múltiplos desse aqui daí divididos pelos desse depois substitui.
27	F Ah, lembro, lembro. Mas é p sobre q ou q sobre p?
28	Ge Dá na mesma. É esse por esse, aí você faz uma substituição.
29	F Então os múltiplos de 6...
30	Ge Faz ± 1, ± 2, ±3 e ±6.
31	F ... ± 6. E os múltiplos de 1...
32	Ge ± 1. Vai dar a mesma coisa daí. Vai dar os de 6.

33	F	Vai dar o quê?
34	Ge	Os de 6.
35	F	Então vamos colocar aqui: ± 1, ± 2, ±3 e ±6. Agora tem que... Briot-Ruffini?
36	Ge	Vamos ver se uma dessas dá. Se uma dessas dá zero. 1 não vai ser de qualquer forma.
37	F	1 não dá; – 1... +1 – 2 + 1 + 1 – 6 não dá. Agora vamos tentar 2; 16 + 16 + 4... não vai dar, acho.
38	Ge	É – 16 não é?
39	F	Mais 16...
40	Ge	Ah, você fez com 2. Eu fiz com –2.
41	F	Tenta então – 2 e eu tento + 2. Eu acho que –2 vai dar. Não deu, + 2 não deu também. –2 o que deu?
42	Ge	Deixe eu fazer aqui... Deu, deu certo. Então é só fazer Briot-Ruffini junto.
43	F	Tentar já Briot-Ruffini?
44	Ge	Eu vou fazer só para baixar...
45	F	É melhor. $x^3 + x - 3 = 0$?
46	Ge	Eu fiz alguma coisa errada.
47	F	O que você fez de errado? –2... 0; 0 vezes –2 com +1...
48	Ge	– 1.
49	F	– 1.
50	Ge	2...
51	F	Ué? Com calma! –2 com 2 é 0; 0 vezes –2 é –2 com +1 é –1; é – x.
52	Ge	Ahã! Aqui é – x + x...
53	F	–1... dá +2; + 2 com – 3... aqui vai dar errado. Por quê?
54	Ge	Boa pergunta. Acho que a gente fez alguma coisa errada aqui.
55	F	Será que é isso mesmo? $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$. Vamos tentar fazer de volta. – 2 é mesmo, certeza absoluta? Pior que dá. –2 está certo. –2 é raiz mesmo.
56	Ge	Então por que não deu certo?
57	F	Então calma, vamos tentar fazer de volta. 1 vezes –2 é –2; mais 2 dá 0; 0 vezes –2 é –2 mais 1 dá –1; –1... dá 2... Vamos tentar achar outra raiz. Eu tento 3 e você tenta –3 para ver se dá, já que a gente não conseguiu com 2... –2. Mais 3 não vai dar e –3? –3 também não deu.
58	Ge	Não, não deu.
59	F	Então vamos tentar com 6; vai dar muito grande. O que a gente está fazendo errado? Eu acho que é esse sobre esse não é?
60	Ge	Eu acho que não. De qualquer forma deu certo se a gente fez...
61	F	p sobre q. Aqui é p. p é o divisor do termo independente. Ah é, é o último sobre o primeiro. É p sobre q. Alguma coisa deu errado. Tinha que dar certo na hora de dividir.
62	Ge	Claro né, a gente fez errado, inverteu... espera aí.
63	F	A pesquisa está certo. Os múltiplos estão certos.
64	Ge	Era –2 mesmo.
65	F	–2 está certo. Dá mesmo –2.
66	Ge	–2 é raiz de qualquer forma.
67	F	De qualquer forma. Acontece que... ah, tem uma é imaginária... tem uma irracional, melhor dizendo, e daí 6... +6 vai ser porque se não deu ± 1, só deu –2 e não deu ± 3, ± 6 vai ter que ser.
68	Ge	Porque é do 4.º grau.
69	F	É. Entendeu. Vamos tentar com +6 por Briot-Ruffini então. + 6 é melhor que –6. Você entendeu? Tem uma irracional. A gente achou uma racional, entendeu? Então tem que ter mais duas. Se a gente tentou todos esses e não deu, só pode ser esta. Vamos tentar.
70	Ge	Mas irracional seria... sim claro.
71	F	Vamos primeiro tentar assim... Não, calma. 37 vezes 6 dá 221... não vai dar.

72	Ge	Deixe eu ver. Vou olhar isso de novo. Hum, acho que já sei o que gente fez de errado.
73	F	A gente não errou Briot-Ruffini. Muito estranho. Vamos começar desde o início de volta. Você achou alguma coisa?
74	Ge	Não, não.
75	F	Vamos fazer a pesquisa de novo?
76	Ge	Mas a pesquisa acho que deu certo; deu zero.
77	F	Não tem como errar isso. Tá, vamos testar. Se deu resto é porque não é divisível.
78	Ge	Por –2 teria que dar 0. Eu vou fazer por divisão normal. Eu vou fazer por chave mesmo que é mais garantido.
79	F	Dividir por quê?
80	Ge	Eu vou dividir por x – 2... por x + 2. Se –2 é raiz, então divide por x + 2.
81	F	Sei. Certo. Tenta, enquanto isso vou dar uma lida aqui.
82	Ge	Nossa faz tanto tempo que eu não vejo isso que eu estou enferrujado.
83	F	Então você vai tentando por aí que eu vou de volta tentar por pesquisa. A gente não pode estar errando por pesquisa. Vou tentar por chave também e vamos ver o que vai dar. – 2 é que é raiz, então tem que ser por x + 2. Não dá vai sobrar 12. Vai sobrar –12. Termina, conclui.
84	Ge	Tá beleza. Vamos ver se o teu dá diferente.
85	F	Ah, não. Tá certo. Vai dar 0. $x^3 + x - 3$
86	Ge	Vai dar.
87	F	Beleza. Agora eu quero ver a partir daqui.
88	Ge	A gente errou Briot-Ruffini.
89	F	Ou a gente não pode fazer por Briot-Ruffini. Ter errado Briot-Ruffini é meio difícil. Vamos pensar aqui. Como a gente vai fazer agora? Não é 1 a raiz. Ah, chutar 6... Não vai dar.
90	Ge	Não. Vai dar 216 – 6 + 3. Não.
91	F	E agora como a gente vai fazer a partir daí?
92	Ge	Tentar substituir essas raízes aqui.
93	F	Que raízes?
94	Ge	Fazer a pesquisa dessa daqui.
95	F	Ah tá, fazer a pesquisa dessa parte.
96	Ge	± 1; ±3. – 1 não é; –3...
97	F	3 a gente já viu que não era.
98	Ge	Não, mas desse aqui acho que é diferente.
99	Pesq	Que raízes vocês estão procurando nessa atividade?
100	F/Ge	As racionais.
101	Ge	As racionais e por enquanto a gente está meio perdido.
102	F	É que a gente não conseguiu fazer por Briot-Ruffini.
103	Ge	Daí a gente achou aqui e baixou o grau.
104	F	Na verdade a gente fez a pesquisa e achou –2 para raiz. A gente tentou fazer por Briot-Ruffini e não deu. Daí a gente está fazendo por chave para baixar o grau. E agora estamos fazendo a pesquisa dessa de volta.
105	Pesq	O que não deu por Briot-Ruffini?
106	F	Não deu resto 0.
107	Pesq	Com a racional ou com a irracional?
108	F	Com a racional.
109	Pesq	Com a racional?
110	F	É. Não deu resto 0.
111	Ge	Provavelmente foi algum errinho.
112	F	Ou a gente conta, sei lá, a gente refez mil vezes e a gente não conseguiu achar o erro assim. E

	agora a gente está fazendo a pesquisa de volta desse que a gente baixou o grau entendeu?
113	Pesq Não deu certo por Briot-Ruffini e que método vocês tentando usar?
114	Ge A chave.
115	Pesq A chave para baixar o grau?
116	F Não estamos conseguindo achar de volta a (nova) raiz. A gente achou uma, faltam duas ainda. Você achou?
117	Ge Não está dando certo.
118	Professor Uma vocês já acharam?
119	Ge Deu –2.
120	F –2 porque se deu resto 0 aqui...
121	Pesq Essa é a racional.
122	F A racional. Uma das.
123	Pesq Uma das. Então qual vocês estão procurando agora?
124	F É que são mais irracionais não é? Ah não, tem uma irracional só. Ah, achamos a racional já. A gente tem que achar a irracional.
125	Ge Beleza, então o problema é esse.
126	F É. Achar a irracional. Como? Se ela é irracional... Tentar de volta? Podia tentar com essa de cima com x^2. Aqui tem uma irracional e agora?
127	Ge x^4 primeiro ...
128	F Agora vai ser um problema porque... Vamos pensar. Ela é irracional por quê? Porque vai dar número imaginário, (confundiram irracional com imaginário) correto não é?
129	Ge Sim.
130	F Tá. Mas ela tem uma raiz.
131	Ge Porque provavelmente vai ser uma raiz, (radical) um número... não vai dar um número certo; um número exato ali.
132	F Conceito. Se a gente fizer a pesquisa de volta vai cair na mesma coisa.
133	Ge É. Vai cair na mesma coisa.
134	F Não vai adiantar. Vamos pensar. (consultam o material) 'Teorema das raízes imaginárias: se um número imaginário...' Ah, esse é aquele 'se um positivo o outro tem que ser negativo? [refereindo-se ao conjugado]
135	Ge É, mas tem que ser imaginário e o nosso é irracional.
136	F Tá. 'Teorema das raízes irracionais: se uma equação...' Se uma é positiva a outra vai ser negativa, isso é o que a gente sabe só. Vamos ler de volta: 'Teorema das raízes irracionais: Se uma equação polinomial de coeficientes racionais admite o número $a + \sqrt{b}$ como uma das raízes, ela admitirá também o número $a - \sqrt{b}$. Tá, mas como eu chego nesse número $a + \sqrt{b}$? O que você fez? Girard? Não dá? Girard tem que ter as raízes! Mas se a gente chutasse as raízes? Aí! Girard e a gente faz raiz α sabe?
137	Ge Sei.
138	F A gente faz α_1, α_2, α_3... Vamos ver direitinho. Vamos ter que fazer Girard de quatro. Vamos tentar. Vamos chamar aqui as raízes...
139	Ge A soma, mas não vai dar certo isso.
140	F Calma, tem que ter calma. Vamos tentar. São quatro raízes: α_1, α_2, α_3 e α_4. Começo somando todas né?
141	Ge Soma é igual a menos b sobre...
142	F ...tracinho 1... 2 Aí α_1... aí dois a dois agora né?
143	Ge Sim.
144	F $\alpha_1 . \alpha_2 + \alpha_1 . \alpha_3 + \alpha_1 . \alpha_4 + \alpha_2 . \alpha_3 + \alpha_2 . \alpha_4 + \alpha_3 . \alpha_4$ igual a traço de fração...1 sobre 1 que é 1 né? Agora tem que fazer... três a três. $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ...$
145	Ge Não vai dar certo!

146	F	Calma! Vamos tentar! É não vai certo... $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ ... igual a –6 sobre 1, e o último é todos juntos: 1 sobre –6. Fazemos um sistema desse com esse.
147	Ge	É muita coisa. Não vai ter sistema suficiente para fazer.
148	F	Tem quatro equações e quatro incógnitas. Eu acho que errei mesmo essa parte aqui. A gente está tentanto usar Girard, não tem que usar. Teorema de Bolzano.
149	Obs	O que vocês estão procurando agora?
150	F	Tentando achar alguma coisa para usar.
151	Obs	Vocês desistiram da outra?
152	F	Que outra? Do Girard acho que sim porque não vai dar muito certo. Muito grande. Muita raiz.
153	Ge	A gente deve ter feito alguma besteira.
154	F	Não dá para fazer por fatoração; não dá para fazer por pesquisa; não dá para fazer por Girard. Como a gente vai encontrar essa raiz irracional? Tem que ter alguma conseqüência lógica esse teorema.
155	Ge	Mas por que ele está falando: 'tem uma'? Por que ele está falando 'uma' exatamente 'uma raiz irracional'? [questiona a existência do irracional conjugado]
156	F	Não sei. Eu acho que ele só quer uma, não sei. Vamos pensar: 'teorema das raízes irracionais: Se uma equação polinomial de coeficientes racionais...' todos os coeficientes são racionais...
157	Ge	Huhum...
158	F	...admite o número $a + \sqrt{b}$ como uma das suas raízes, então admite... E se a gente usasse esse genérico tipo $a + \sqrt{b}$, usasse $a - \sqrt{b}$ e fizesse Briot-Ruffini com elas, com isso, será? Vamos tentar! Não vai dar muito certo eu acho. Só que vou multiplicar por 1 senão fica muito ruim de fazer, ou fatoramos algo errado. 1, 2, 1, –1, – 6 .
159	Obs	Qual o método que vocês estão usando?
160	F	É o teorema das raízes irracionais que é do tipo se você tem $a + \sqrt{b}$, tem $a - \sqrt{b}$ daí a gente vai tentar fazer por isso. Só tentar por enquanto.
161	Ge	Para fazer um método...
162	F	Olhe só! Aqui vai um número igual a zero e com $a - \sqrt{b}$ vai outro número igual a zero e a gente faz um sistema.
163	Ge	É. Tente pôr esse mais esse.
164	F	Vai ter que ser $a + \sqrt{b}$ ...
165	Ge	vezes...
166	F	...$a + \sqrt{b}$. Vai ser igual a *a* vezes *a*... $a^2 + a\sqrt{b} + 2a + a\sqrt{b} + b + 2\sqrt{b} + 1$; $a^2 + 2a\sqrt{b} + 1$. Calma. $a^2 + 2a\sqrt{b} + 2a$ ...
167	Ge	Eu acho que vai dar na mesma: uma equação de quarto grau ou maior.
168	F	Vamos tentar. Este daqui corresponde a esse aqui. Vamos fazer o outro. Vai ficar: meu Deus, vou ter que multiplicar tudo isto por isso daí?
169	Ge	Sim, vai dar um grau maior sendo que você tem dois sistemas.
170	F	Chamo de α igual à trigonometria entendeu? Depois substituo.
171	Obs:	O que você está tentando fazer agora?
172	F	A gente estava tentando fazer por Briot-Ruffini com esse $a + \sqrt{b}$ só que daí começou a ficar muito grande aí chamei esse $a + \sqrt{b}$ de número α como se fosse uma raiz genérica e estou tentando fazer por isso agora, estou fazendo as contas para ver se cai em alguma coisa que dê para a gente usar.
173	Ge	Como se faz na trigonometria.
174	F	Como depois vai dar α, quando a gente achar a raiz, der um número aqui a gente vai substituir no final por $a + \sqrt{b}$. Aluno B cheguei ao seguinte: $\alpha^4 + 2\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha - 6 = 0$. Você tem que usar isso para alguma coisa.
175	Ge	Não vai dar.
176	F	Chegou na mesma coisa.

177	Ge Então.
178	F Por quê?
179	Ge Porque na verdade você substituindo... a raiz genérica... a única coisa que você fez foi ao invés de chamar de x você chamou de α.
180	F Colega B nós temos que achar outro método.
181	Ge É pois a única coisa que você fez foi chamar x de α mas não deixa de ser uma raiz.
182	F "Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar...!"
183	Ge Não. É par.
184	F "O número de raízes imaginárias de uma equação polinomial de coeficientes reais é necessariamente par."
185	Ge Eu acho que ela tem alguma imaginária, será que não tem? Porque de qualquer forma se tem uma racional e uma irracional vai ter duas imaginárias.
186	F Tudo bem, e como é que a gente vai achar essas duas imaginárias? Se a gente fizer pesquisa a gente vai cair no – 2 de volta. Tá, mas o que significa achar o resto?
187	Ge É que se gente fizer por pesquisa vai dar para ver que não necessariamente vai ser esses valores. Pode ser que não seja nenhum desses. E aqui de qualquer forma deu um só.
188	F Aqui deu um certo resto. O que significa dar esse certo resto? Que ela não é raiz!?
189	Ge Certo. O grau aqui é 1, aqui é 2.
190	F Colega Ge acho que achei alguma coisa. Tem citado o Teorema da decomposição aqui. Vamos ver se dá para usar para alguma coisa. "Qualquer equação algébrica de grau n, pode ser decomposta e fatorada em n fatores do 1.º grau da seguinte maneira."
191	Ge Claro. Teria que fatorar com a raiz que a gente já conhece, vezes o termo independente.
192	F Ah é colega B. Vamos tentar. Teorema da decomposição. Como é o esquema? A gente descobriu que –2 é raiz. Primeiro é –6 vezes...
193	Ge x + 2.
194	F ...vezes...
195	Ge As outras três raízes que a gente não sabe.
196	F $x - \alpha_1$, $x - \alpha_2$, $x - \alpha_3$
197	Ge Tem que dar zero.
198	F Olhe aqui. Tem mais coisa aqui. Teorema fundamental da álgebra. Demonstração. Temos que P(x) admite uma raiz complexa. Chamemos de x_1 essa raiz. Podemos escrever $(x - x_1).Q(x)$ onde Q(x) tem grau n – 1. Conseqüência. Uma equação polinomial de grau n admite exatamente n raízes complexas. Não necessariamente distintas entre si. Se a gente tem uma raiz (quis dizer equação) de grau 4 vai ter 4 raízes complexas. Mas a gente achou 1, não pode ser 4; a gente achou uma racional já.
199	Ge Não mas é que complexos engloba tudo ali, de certa forma.
200	F Observação. Decomposição de polinômios em um produto de fatores do 1.º grau é único exceto pela ordem dos fatores. Não dá para saber. Vamos tentar fazer o seguinte. Se tem uma raiz irracional, vamos supor que a gente acha a raiz irracional (quis dizer imaginária), vamos supor que a gente ache mais i, uma delas vai ser – i. Tem duas que são mais ou menos parecidas entendeu? A gente tem que achar a 3.ª daí.
201	Ge As complexas vão ser ela e o conjugado. A outra é que vai ser diferente de tudo.
202	F O que a gente pode fazer? Não dá para fazer sistema com nada, isso e que é o pior. Dá para fazer sistema com Girard será?
203	Ge Dá uma coisa gigantesca, mas não sei se vai dar. Será que vai certo?
204	F Tem esse α_1, α_2, α_3 e α_4 ...
205	Ge Sendo que α_1 a gente já sabe.
206	F A gente já sabe. É igual a 2.
207	Ge Menos 2 daí.
208	F Menos 2. Será que não dá para fazer sistema. $-2\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -6$; $-2 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -2$. Colega B, alguma coisa tem que sair daqui. A gente tem três incógnitas e três equações.
209	Ge A gente tem três equaçõesinhas no sistema, agora...

210	F	O problema é que a gente for multiplicar cada um desses vai chegar em uma coisa muito gigantesca.
211	Ge	Faz um outro de Girard aqui. Qual era a outra relação?
212	F	Tem mais duas ainda. É que são quatro.
213	Ge	Usa uma daquelas. Senão vai ficar o x no meio.
214	F	Ah é tem essa daqui. $-2.\alpha_2 + (-2).\alpha_3 + (-2).\alpha_4 + \alpha_2.\ \alpha_3 + \alpha_2.\ \alpha_4 + \alpha_3.\ \alpha_4 = 1$. Esse pode ser achado porque a hora que a gente for multiplicar aqui... Vamos fazer o seguinte... Queria passar esse daqui para cá mas daí vai dar zero, vai acabar sumindo com isso. Vamos ver o que vai acontecer se a gente desenvolver isso. $(x^2 - \alpha_1.x + 2x - 2.\alpha_1).(x - \alpha_2).(x - \alpha_3) = 0$. $(x^3 - \alpha_1.x^2 + 2x^2 - 2\alpha_1.x - \alpha_2.x^2 - \alpha_1.\alpha_2.x + 2\alpha_2.x - 2\alpha_1.\alpha_2)$ tudo isso vezes $(x - \alpha_3)$ vai ser igual a 0. O que é o x?
215	Ge	O x é o x mesmo.
216	F	É tipo uma incógnita?
217	Ge	É que sempre fica x menos a raiz 1, x menos a raiz 2, ...
218	F	A gente vai cair na mesma coisa?
219	Ge	De novo! Será que não é mais fácil tentar a partir dessa daqui em que a gente já achou!? De qualquer forma a gente vai achar as duas imaginárias e a irracional a partir daqui.
220	F	Então vamos pegar. $(x^3 + x - 3) = 0$. Mas como a gente vai partir daqui. Fazer pesquisa.
221	Ge	Não vai dar. Eu já tentei. (-1) não dá; (-3) nem (+3) vai dar certo aqui. A raiz real já foi. Se for para achar as outras duas, vão ser as duas imaginária, teoricamente. (não admitem raízes irracionais) e mais a irracional. Se a gente achar a irracional fica mais fácil.
222	F	Não tem como sair daqui.
223	Ge	O que o prof. tinha falado quando no exercício não tiver dado nenhuma certo?
224	F	Não lembro. Não dá para usar multiplicidade também não é? Não dá para usar divisões sucessivas. (1) não é raiz. (0) não é raiz.
225	Ge	Nem o (3) nem o (– 3) aqui. (referem-se à equ. $x^3 + x - 3$; pág.3) É, mas só vai poder ser mesmo uma irracional aqui no meio. Vamos tentar substituir.
226	F	Não lembro como é que chega. Eu até pensei nisso mas é impossível. Existem milhões de raízes irracionais. Irracional acho que não é só imaginário também. Não dá para fatorar. Não dá para fazer pesquisa. Não dá para fazer... nada. Eu acho que a gente deveria fazer o seguinte. Deixa um pouco de lado esse para a gente pensar depois. Vamos tentar fazer o 3.
227	Atividade 3 Ge	É, eu lembro disso.
228	F	Aqui tem o Teorema de Bolzano.
229	Ge	É, esse é facilzinho até.
230	F	Teorema de Bolzano.
231	Ge	Teorema de Bolzano é mais tranqüilo. Eu lembro alguma coisa.
232	F	Ah, é aquele negócio que se tiver sinal contrário vai ser ímpar.
233	Ge	Sim, um número ímpar de raízes. Ou um determinado número par de raízes, inclusive zero.
234	F	Vamos tentar transpor o que está escrito no enunciado aqui para a folha para ver se a gente entende. Então é o seguinte. "O número de raízes situadas no intervalo aberto]a; b[é ímpar se P(a).P(b) < 0..." As raízes são a e b.
235	Ge	Sim.
236	F	a e b é ímpar. Não, o número de raízes é ímpar. É isso?
237	Ge	O número de raízes é ímpar.
238	F	Eu não entendi uma coisa. O que quer dizer isso aqui. "...ou seja, o valor do polinômio para x = a e x = b tem sinais contrários." Tipo, se for (1) a outra vai ser (– 1)?
239	Ge	Não.
240	F	Ou seja, se o valor do polinômio para x = a e x = b tem valores contrários. Se for P(a).P(b) < 0

	tem número ímpar de raízes, e eu vou ter sinal contrário da outra.
241	Ge Não, acho que não necessariamente, se o número de raízes tem que ser... se fosse (+1) e (– 1), quer ver?
242	F Então o que quer dizer isso? Se o valor do polinômio para x = a e x = b tem sinais contrários? O que quer dizer isso? Se P(a) e P(b) tem sinais contrários então existe um número ímpar de raízes.
243	Ge Aqui diz que tem mesmo sinal.
244	F Sinal contrário.
245	Ge Aqui não. Nesse caso.
246	F Ah tá. Se for par. Se P(a).P(b) > 0 o número de raízes é par e P(a) tem mesmo sinal que P(b). Está certo assim? Se P(a).P(b) for menor que zero, número de raízes ímpar. P(a) tem sinal contrário que P(b). Se P(a).Pb) for maior que zero, número de raízes é par. P(a) tem mesmo sinal que P(b).
247	Ge Ou não tem raízes. O que ele queria aqui?
248	F ($x^3 + x + 1 = 0$). Eu não consigo entender o que é esse a e o que é esse b. É o intervalo.
249	Ge É tipo, de tal a tal lugar tem tantas raízes. Por exemplo, escolhemos esse ponto como a e esse ponto como b. Entre eles tem duas raízes. Chute um valor aí.
250	F Mas é que ele não dá o intervalo. Muito estranho. Vamos tentar fazer assim. Eu chutei a e b de valores. Vamos ver o que vai dar. (pág. 3) Se for ($a^3 + a + 1$).($b^3 + b + 1$), vai ser igual ao quê?
251	Ge Não vai ter como você saber o sinal.
252	F É estranho porque ele não dá o intervalo.
253	Ge (consultam o material) Aqui eles dão o intervalo.
254	F Tudo dá o intervalo. O nosso não dá o intervalo.
255	Ge Ali se pergunta quantas e aqui se pergunta quais. P(0) vai dar 1. Então entre P(0) e P(2), deixa eu ver se tem alguma raiz nesse intervalo... (11). Nesse intervalo, tem sinais iguais, então ou não tem nenhuma ou tem um número par. Não ajuda muito.
256	F Eu fiz com (+1) e (– 1). P(a) e P(b) tem sinais contrários. Aqui na verdade eles têm o mesmo sinal, (+3) e (+1) entendeu. Daí (3.1) vai dar maior que zero.
257	Ge Não quer dizer nada porque pode ser que não tenha nenhuma também. Vou fazer P(– 2): (– 8 – 2 + 1)
258	F Mas aí você vai chegar em quê?
259	Ge Não, é só para saber quantas raízes têm nesse intervalo. Não vai ajudar muito.
260	F Dá (– 9). Deu sinais contrários, então quer dizer que tem um número ímpar.
261	Ge Tem alguma raiz aí no meio.
262	F Tem um número ímpar de raízes aqui no meio.
263	Ge Então quer dizer que tem alguma pelo menos. Se é um número ímpar pelo menos uma vai ter. Agora, se fosse número par pode ser que não tenha nenhuma.
264	F Que raiz vai dar aqui?
265	Ge Entre (–2) e (0) vai ter uma.
266	F Tá, mas vamos descobrir uma raiz aqui então nesse intervalo. (2) não dá. (1) não dá. (0) não dá. (–1)...
267	Ge Entre (0) e ... é um intervalo aberto, não é? Então, entre (0) e (– 2) de qualquer forma vai ter uma.
268	F Ah tá, então pode ser 1/2 e essa 'coisarada' toda... Eu realmente não sei. Não consigo ver saída para isso. Se tivesse o intervalo era mais fácil, mas não tem.
269	Ge Mas mesmo que tivesse você ia ter que achar quais. Se tivesse perguntado o número de raízes até tudo bem, mas agora quer saber quais. E aqui mesmo nesse exercício feito tinha (o intervalo) e pergunta quantas (raízes).
270	F Eu não lembro disso, não lembro mesmo. Muito estranho. E precisamos fazer o 2b e o 3 ainda.
271	Ge Tem alguma aqui no meio. Pode ser infinitas raízes.
272	F Colega B, pesquisa!
273	Ge Faz pesquisa, legal. Esse sobre esse vai ser (– 1) e (+1) e nenhum deles vai dar. Porque (– 1) não dá. (1) não vai dar certo, pela pesquisa de qualquer forma.

274	F	A gente tem três possibilidades para fazer isso. Ou a gente chuta valores nisso aqui. Ou a gente faz Girard. Mas não dá.
275	Ge	Eu acho que não vai ter nenhuma raiz real pelo jeito aqui. Eu acho que não tem, porque as que poderiam ser reais aqui seriam (–1) e (+1), mas nenhuma delas dá certo. (confundem racionais com reais)
276	F	E se a gente chutar intervalos?
277	Ge	Chutar a gente chutou. Eu chutei um intervalo aqui. Descobri que vai ter pelo menos uma aqui no meio, mas pode ser qualquer valor.
278	F	A gente vai ter que achar uma saída. Pesquisa, Girard, intervalo, não dá nada. Tem que ter uma saída.
279	Ge	A gente viu todos os capítulos (do livro) ali já? Tem mais algum depois desse?
280	F	Eu acho que esse é o último. Bolzano é o último. Girard, pesquisa e equações.
281	Ge	Pesquisa não dá. Pelo menos não real.
282	F	Se a gente fez pesquisa e não dá é porque só tem irracional.
283	Ge	Ou imaginárias.
284	F	É.
285	Ge	Mas se for qual aqui... 2 ao cubo...
286	F	É ao cubo. Se fosse ao quadrado é mais compreensível, mas é ao cubo!
287	Ge	Mas real vai ter que ter uma de qualquer forma porque é ímpar. Se o coeficiente (quis dizer grau) é ímpar, vai ter que ter uma real não vai? Não me lembro disso agora.
288	F	Acho que não necessariamente. Mas a gente fez a pesquisa e não deu.
289	Ge	Mas real não necessariamente vai ser uma inteira, ou seja, real pode ser...
290	F	Mas mesmo na pesquisa dá o resultado; se esse for menor que esse vai dar fração daí. Vamos colocar aqui a $+\sqrt{b}$. Vou tentar um negócio aqui colega B.
291	Ge	Eu tento desse lado. Vou tentar chutar uns valores irracionais aqui no meio.
292	F	Não vai dar. Muito grande.
293	Ge	Nem com o i dá certo.
294	Pesq	O que vocês estão tentando nessa atividade 3?
295	F	Na verdade não é nem tentando porque a gente está meio perdido porque não tem o intervalo para a gente fazer, entendeu? Não foi dado. A gente chutou o intervalo. A gente sabe que aqui dá. Tem ímpar raízes aqui.
296	Ge	Entre (0) e (-2).
297	F	Ou entre (2) e (-2) dá. Só que a gente não pode chutar assim, a gente tinha que ter o intervalo. Como a gente não tem, estamos meio perdidos.
298	Pesq	Mas o que vocês já concluíram a respeito da quantidade de raízes no intervalo?
299	Ge	Assim, por exemplo, entre (0) e (2) (o polinômio) tem o mesmo sinal. Então quer dizer que tem um número par ou nenhuma raiz aqui nesse intervalo. E aqui como deu ímpar, tem pelo menos uma, não sei. Pelo menos uma raiz já que a quantidade é ímpar obrigatoriamente uma vai ter.
300	Pesq	Então vocês já sabem que no intervalo]-2; 0[tem uma quantidade ímpar de raízes. E qual é a dificuldade agora?
301	F/Ge	Achar as raízes.
302	Pesq	O que você escreveu aqui aluna A?
303	F	Que a raiz irracional é (a $\pm\sqrt{b}$), porque a gente acha que só tem raízes irracionais, não tem raízes racionais.
304	Pesq	Por que vocês concluíram que não têm raízes racionais?
305	F	Porque a gente fez a pesquisa de raízes (racionais) e não deu nenhuma. Daí a gente chegou a conclusão que só têm raízes irracionais.
306	Ge	Mas vai ter pelo menos uma real no caso porque o coeficiente, o grau é ímpar.
307	Pesq	De que forma você escreveu o irracional aluna A?
308	F	(a $\pm\sqrt{b}$) foi isso que a gente encontrou no livro.

309	Pesq	Vocês consultaram o livro?
310	Ge	Sim.
311	Pesq	Todos os irracionais, alunos A e B, têm a forma a ± $\sqrt{b}$?
312	Ge	De certa forma sim porque se o a for (0) vai ser só a raiz.
313	F	Depende, se tem imaginário tem que ter o i. Daí o imaginário seria (a ± $\sqrt{b}$ .i) e o irracional seria (a ± $\sqrt{b}$ i).
314	Pesq	Está bem, continuem.
315		2.ª etapa F (utilizam o software) y = x^3 + x + 1. Não tem o intervalo. Vamos colocar - ∞. Não dá para por infinito?
316	Pesq	Suponha que você esteja com (5) aqui. Você pode escrever (– 5) a (5).
317	F	Vamos fazer de (-5) a (5) então. Vamos fazer a linha um pouco mais grossa. Põe (2).
318	Ge	Põe um verde escuro na cor.
319	F	O que a gente tem que descobrir? As raízes.
320	Ge	Tem uma aqui pelo menos.
321	F	É raiz quando passa pelo eixo x. Então ela está entre 0 e 1. Tem que fazer P(0) e P(1).
322	Ge	P(0) dá (+1). Agora P(-1)...
323	F	...vai dar (1) também. Isso não é bom.
324	Ge	Não. (-1) ao cubo vai dar (-1) e (-1) aqui dá (-2); vai dar (-1).
325	F	Beleza. Tudo bem, a gente tem o intervalo agora. Se eles têm sinais trocados é um número ímpar de raízes.
326	Ge	É, vai ter uma.
327	F	É um número ímpar de raízes. Descobrimos que tem uma raiz, de acordo com o gráfico. Falta descobrir qual é essa raiz.
328	Ge	Vai ser real pelo menos. Não vai ser inteira mas vai ser real.
329	F	Agora temos que descobrir como a gente vai achar essa raiz.
330	Ge	Vamos descobrir pelo programa.
331	F	A gente só pode usar isso. Acabou o que a gente pode usar. Usar Bolzano agora. Descobrimos que ela está no intervalo]-1; 1[. Não sei se aberto ou fechado.
332	Ge	Aberto, eu acho. O intervalo é aberto.
333	F	De –1 a 1, aberto. Sabemos que é negativa.
334	Ge	A raiz é negativa.
335	F	Não sei como sair daqui.
336	Ge	Seria uma raiz tripla, uma de multiplicidade três? Só vai cortar em um ponto.
337	F	Pode ter irracional também. Quem garante que não tem irracional?
338	Ge	Pode ter imaginária não é?
339	F	É. Por isso não dá para tirar nada. A gente precisa descobrir a raiz. E agora colega B?
340	Ge	Você já tentou racionalizar isso daqui ou não?
341	F	Como assim racionalizar?
342	Ge	Essa equação aqui.
343	F	Fatorar?
344	Ge	É, fatorar.
345	F	Fatorar não dá porque ou você tem um termo comum ou você tem que fazer dois a dois. Pelo menos é assim que a gente aprende.

346	Ge	Vamos tentar...
347	F	A não ser que... eu não sei se pode fazer isso mas olhe só.
348	Ge	Então, ($x^3 + x = -1$) não é? Foi o que pensei. [$x(x^2+1)= -1$ e $x = -1$ ou $x = \pm\sqrt{2}.i$; usaram como a propriedade do anulamento; ver p. 4 das anotações]
349	F	Por mais incrível que pareça a gente achou três.
350	Ge	Mas eu acho que não está certo. Será que é possível isso?
351	F	Se é possível eu não sei mas a gente achou três raízes.
352	Ge	Mas se esse aqui é –1, não necessariamente o todo vai ser –1, entendeu? Qual foi a conclusão de que x é –1 aqui? Se (x) for –1, aqui dá 2 (em $x^2 + 1$, vezes –1 dá –2 e não –1) entendeu?
353	F	Ah é. Isso aqui não deu certo.
354	Ge	Na verdade não existe isso. (referiram-se a "*se a.b = c então a = c ou b = c*")
355	F	Vamos tentar o seguinte. Vamos fazer de forma gradual. Vamos tentar fazer o 2. Depois a gente volta para o 3. 2b só que falta.
356	Ge	Vamos fazer o gráfico daí; pelo menos a gente tem uma noção onde está.
357	F	x^4 + 2x^3 + x^2 – x – 6 (usam o software) Aumenta aqui (na espessura da linha) Põe 3 aqui por favor. Cor a gente põe... Sempre mudamos; vamos deixar essa mesmo.
358	Ge	Acho que tem que colocar um intervalo menor.
359	F	É, para a gente conseguir ver onde ela está. Na verdade dá para fazer por aqui. Põe (–2), (2), (–1) e (1).
360	Ge	Acho que a gente aumentou muito. Não tem que ser o contrário. Tem que aumentar.
361	F	Só no high? Oito.
362	Ge	Oito, tá. E aqui embaixo?
363	F	Cinco. Menos cinco; cinco.
364	Ge	Melhorou um pouco.
365	F	Tem que diminuir ainda aqui não é? Na vertical não é?
366	Ge	Sim.
367	F	Aumentar ou diminuir? Aumentar não é?
368	Ge	Aumentar um pouquinho.
369	F	Melhorou. Corta aqui e corta aqui.
370	Ge	Em –2 não é? Sim, isso a gente já sabe.
371	F	Agora essa daqui.
372	Ge	Está entre (1) e (2).
373	F	Entre (+1) e (+2). Isso é o melhor de tudo.
374	Pesq	Qual o gráfico que vocês fizeram?
375	Ge	Da "2".
376	F	Vai estar entre (+1) e (+2). Agora como a gente vai descobrir? A gente tem que voltar à nossa velha questão. Como a gente vai descobrir? A gente poderia fazer o seguinte...
377	Pesq	Esse gráfico que vocês construíram é de qual função?
378	F	($x^4 + 2x^3 + x^2 – x – 6$).
379	Pesq	O que vocês observaram de imediato nesse gráfico?
380	F	Que tem a raiz (-2), que a gente já tinha descoberto pelas contas, e uma outra raiz que se encontra entre (+1) e (+2) e que a gente não sabe qual é ainda, e que provavelmente vai ser a irracional. A gente tem que descobrir.
381	Pesq	Como você sabe que ela é irracional? Como concluiu isso?
382	F	Porque provavelmente é, porque a gente não tinha achado nenhuma outra racional. Então, provavelmente vai ser a outra irracional que falta. Só que gente não sabe como chegar nessa raiz ainda. Quer dizer, ainda não, a gente está tentando há um bom tempo. E agora colega B?
383	Ge	E agora?

384	F	A gente precisa chegar a uma conclusão.
385	Ge	Isso me lembra outra redução. Além daquele (-2) não dá para fazer mais nada. Tem que dar para fazer alguma coisa.
386	F	Temos que descobrir. A gente já usou ele lá em cima.
387	Ge	É, a gente já diminuiu o grau...
388	F	Então vai dar o quê?: (x^3 ...)
389	Ge	E se a gente fizer o gráfico de (x^3 + ...)?
390	F	Boa!
391	Ge	Qual era mesmo? Ah está aqui: ($x^3 + x - 3$).
392	F	A gente baixou o grau. Deixa nesse intervalo mesmo não é? Deixa aí. Deixa os dois.
393	Ge	É, vai dar na mesma. Sabe que vai se uma (raiz) ali.
394	F	Essa só tem uma raiz, (referindo-se a x+2) que é um bom indício. Deixe ela aí. Vamos ver se a gente descobre por isso. A gente vai ter que descobrir por essa equação. E se gente descobrir por essa equação, é o mesmo caminho que a gente vai ter que usar para o outro. A gente está pensando tanto para esse "2b" quanto para o "3".
395	Ge	A gente vai fazer para essa daqui que é de um grau menor.
396	F	Olhe, é menor que (0,5).
397	Ge	É menor que (0,5). Está entre (1) e (1,5) na verdade.
398	F	Está entre (1) e (2), menor que (0,5).
399	Ge	Raiz de (2) é quanto?
400	F	(1,44)
401	Ge	É, pode até ser. Se for $\sqrt{2}$... $(\sqrt{2})^3$ ...
402	F	Vamos tentar então.
403	Ge	Vai ser um valor que não vai dar para chutar. Vai ter que chegar no valor, não adianta.
404	F	Temos que ficar olhando para ela, tentando chegar a uma conclusão. E agora, chegou a alguma conclusão, alguma coisa assim que dê para fazer? A gente descobriu que isso é uma raiz e a gente tem a outra que é (-2): Girard!?
405	Ge	Mas nesse aqui que é da outra equação? Essa vai ter uma. Se fosse nessa até dava mas...
406	F	O que você falou?
407	Ge	Nessa aqui dá. Só que a gente não fez com soma. (referem-se às relações de Girard)
408	F	Só que a gente fez com quatro não com duas (raízes); a gente pensou que tinham quatro. Será?
409	Ge	Não dá certo. Não quer dizer que tenham só duas. São quatro só que a multiplicidade é dois. Então, e se dividíssemos por (2)... por (-2) de novo? ($x^3 + x - 3$) dividido por ($x + 2$) (usam o método da chave).
410	F	Mas foi o que você falou. É da outra equação, não dessa.
411	Ge	É mas vamos ver o que acontece. Esqueci do zero. Vamos fazer "bonitinho", senão fica sem espaço. (escreveram $x^3 + 0x^2 + x - 3$)
412	F	Sobrou (–13).
413	Ge	É. Não dá. Deixa só eu terminar. É não vai dar.
414	F	Olha o que eu achei. Achei (± 2i). (pág. 4-verso) Tipo mesmo assim estou apelando já que a gente não chega a nada. Peguei isso aqui (o quociente) e igualei a zero. Achei delta, (-16), (raiz de) (-16) é (4i), x é (± 2i).
415	Ge	Mas isso é, de qualquer forma, imaginária e a gente precisa da irracional.
416	F	Mas a irracional é imaginária.
417	Ge	Não necessariamente. (há uma confusão entre reais irracionais e imaginários)
418	F	Tá, não necessariamente, mas pode ser.
419	Ge	Não, mas o imaginário está fora.
420	F	Não, está junto. Eu acho que está junto.
421	Ge	Como eram os conjuntos? Naturais, inteiros... daí tem os racionais, daí os irracionais estavam

		fora não é? Irracionais aqui...
422	F	E dentro dos irracionais têm os imaginários?
423	Ge	E os complexos estão em tudo.
424	F	Ah, os complexos estão em tudo. Então está errado.
425	Ge	Foi isso que eu falei. A gente precisa da irracional. A irracional não é a imaginária.
426	F	A gente está discutindo conjuntos aqui para tentar entender se irracional é necessariamente imaginária ou não. Aí a gente chegou à conclusão que não, que pode ser, mas que não é necessariamente. A gente está na mesma dúvida porque a gente chegou a uma equação do mesmo tipo que essa, entendeu? E a gente não consegue fazer isso porque se a gente conseguir fazer essa a gente consegue usar o mesmo raciocínio. Só que a gente não consegue. Já tentamos abaixar o grau, tentamos fazer de tudo. Tentamos pesquisa, tentamos Girard, tentamos de tudo.
427	Pesq	Por que será que vocês não descobrem que valor é esse?
428	F	Porque não existe.
429	Pesq	Se não existe, o que o gráfico está mostrando?
430	Ge	Eu acho que tem sim, mas a gente não está conseguindo achar.
431	F	Por que a gente não está conseguindo achar?
432	Ge	Boa pergunta!
433	F	Tá, essa daqui está errada. Por que será?
434	Ge	Mas a gente precisa necessariamente achar qual é a raiz? Porque aqui mostra que tem uma raiz. Só precisa demonstrar que tem uma raiz.
435	F	Mas como a gente vai demonstrar que tem uma irracional?
436	Ge	Só precisa demonstrar, mas eu não sei como agora. Não precisa falar, não está pedindo qual. Está pedindo que encontre.
437	F	Na de baixo pede.
438	Ge	Na de baixo sim, mas essa aqui pede para encontrar a raiz, essa aqui só quer que mostre que tem uma raiz irracional.
439	F	Boa. Como a gente vai mostrar?
440	Ge	De qualquer forma, se fizer a pesquisa vai ver que não vai ter nenhuma raiz.
441	F	Então e isso que a gente podia por. Se o gráfico está apontando que tem uma raiz, se por pesquisa a gente não achou nenhuma racional, pela determinação lógica você tem uma irracional.
442	Ge	Porque pela pesquisa não dá nenhuma... nenhum número inteiro assim não é? Porque você vai ver que os únicos valores possíveis são (-1, -3, +1, +3) e nenhum deles aqui vai zerar a equação, então não vai ser nenhum racional.
443	F	Será que só falar isso vai ser suficiente?
444	Ge	Teria que demonstrar isso.
445	F	Não é "demonstre", é "mostre". Deixa ele (Prof.) passar aqui. Prof. olhe só. Aqui está pedindo para mostrar a raiz; a gente não precisa encontrar essa raiz.
446	Pesq	Só mostrar que existe.
447	F	Pode ser (resposta) discursivo.
448	Pesq	Pode dar resposta discursiva.
449	F	A gente fez por pesquisa de raízes. Aí só deu a (–2); as outras não deram.
450	Ge	Como por pesquisa não se consegue chegar a nenhum outro valor que seja...
451	F	...racional!
452	Ge	...que seja inteiro...
453	F	Como o gráfico está apontando uma outra raiz, uma outra determinação lógica seria uma outra irracional.
454	Pesq	Essa é a conclusão?
455	F	Seria uma das, porque encontrar mesmo não dá; não está dando para encontrar, entendeu?
456	Pesq	Certo. Na atividade 3 que está pedindo para encontrar a raiz...
457	F	Daí a gente vai ter que pensar depois.

458	Pesq	Sim.
459	F	Então vamos fazer o seguinte. Me ajuda montar a resposta. "Há uma raiz irracional pois com pesquisas de raízes só encontramos a raiz racional (-2). Se no gráfico mostra que há outra raiz então ela só pode ser irracional." (anotaram na folha) Agora a gente vai ter que quebrar a cabeça na 3.
460	Ge	Começa a 3.
461	F	O que a gente já descobriu? A gente fez bastante gráfico, bastante coisa.
462	Ge	Vamos apagar esse aqui e fazer outro só da 3.
463	F	$x^3 + x$ ... é só o último! Não, não, não! Limpa só o último. (na linha onde se escreve a expressão no software) Limpa. (+1). (escrevem no software, $x^3 + x + 1$)
464	Ge	Beleza.
465	F	A raiz está entre (0) e (-1).
466	Ge	Isso a gente já tinha concluído.
467	F	Já sim. Pelo gráfico. A gente faz P(0) que dá (+1) e P(-1) que dá (-1), então "número ímpar de raízes".
468	Ge	Ou seja, pelo menos tem uma distinta ali. Se ela tem multiplicidade eu não sei.
469	F	E agora como a gente vai encontrar? Tem uma coisa. Olhe só. Se a gente colocar aqui ($y = x^3 + x + 1$), quando ele corta o eixo y... o eixo x, o y é (0). Vai chegar na mesma coisa!
470	Ge	Sim, quando y for (0) o x vai ser tal. O "P" dessa raiz vai ser (0). Quando o x é (0), o y é (1), certo?
471	F	Quando o x é (0)... sim!
472	Ge	Então vamos fazer, y ...
473	Pesq	Vocês já acharam o intervalo em está a raiz.
474	F	Sim.
475	Pesq	Vocês não tem como aplicar o teorema novamente, tentando obter essa raiz?
476	F	Sinceramente não.
477	Pesq	Aplicando o teorema de Bolzano novamente tentando obter essa raiz.
478	Ge	Aqui, quando o x é (0), o y é (1), daí tentar... mas não dá por sistema com isso. Com y sendo (1), x é (0). Quando y é (0), x é alguma coisa?
479	F	Não dá. Tem que tentar por Bolzano mesmo. Vamos ver se a gente encontra alguma coisa de volta naquela folha de Bolzano. Eu lembro que eu fiz esses exercícios, mas eu não lembro assim.
480		(obs - folha 5-verso) consultam o material. B Pior que eu também fiz, eu lembro que o professor fez em sala, copiei todos, eu fiz bonitinho. Fiz em casa, entendi, daí chega...
481	F	Não tem nada escrito ali que não esteja escrito aqui, entendeu?
482	Ge	Mas essa raiz deve ter multiplicidade 3 não é? Só está cortando em um lugar e tem que 3 raízes. Deve ser uma raiz só de multiplicidade 3.
483	F	Se uma raiz tem multiplicidade 3...
484	Ge	Tem que transformar em um negócio daqueles lá: $(x - \alpha)$
485	F	Mas eu pensei no seguinte... (escreve as relações de Girard)
486	Ge	$(-\alpha)$ de novo que é a mesma; $(-\alpha)$ de novo, vezes (1); ah, o termo independente é (1). Isso tem que dar (0).
487	F	$(\alpha^3 = -1)$. $(\alpha = \sqrt[3]{-1})$
488	Ge	Mas o que seria a $(\sqrt[3]{-1})$?
489	F	(α), uma das raízes. Se é a mesma raiz com multiplicidade 3, eu fiz por Girard. Mas esse é o segundo ou o terceiro? É o segundo não é? Seria $\alpha\alpha + \alpha\alpha + \alpha\alpha$, seria (1). Só que a raiz cúbica de (-1) é (-1). Não é (-1)!
490	Ge	Não é (–1). É maior que (–1).
491	F	Quanto vale i?

492	Ge	i? Eu sei que i^2 é (-1).
493	F	Tá, mas tinha um valor, você lembra?
494	Ge	i é raiz de (–1) não é?
495	F	Mas tinha um valor! E quanto é a raiz de (–1)? i. Ah tá. Não consigo enxergar como usar Bolzano de volta. Eu não consigo enxergar isso.
496	Ge	Eu também.
497	F	Hum... Diminuiu um aqui. ($a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} ... a_1x^1 + a_0$). Não dá.
498	Ge	Eu fiz (x - α)((x - α)(x - α) igual a zero, porque α é raiz.
499	F	Mas tem termo independente ainda.
500	Ge	O termo independente é (1).
501	F	Tá, mas multiplica então.
502	Ge	Mas de qualquer forma vai dar a mesma coisa.
503	F	Será? $(x - \alpha)^3$ dá $(x^2 - x\alpha + \alpha^2)$ vezes... é verdade, dá a mesma coisa. $(x^3 - x^2\alpha + x\alpha^2 - \alpha^3)$ é igual a (0). Não é a mesma coisa.
504	Ge	Na verdade é porque você fez ao cubo ali. Assim como se fosse ao quadrado.
505	F	Vamos pensar o que a gente pode fazer a partir daqui. A gente pôs que α é raiz de (m = 3) (multiplicidade) Agora dá para agrupar de 2 a 2. ($x^2(x - \alpha) + \alpha^2(x - \alpha)$; $(x^2 + \alpha^2).(x - \alpha) = 0$; $x^2 + \alpha^2 = 0$ ou $x - \alpha = 0$). É, acho que não fez muita diferença. (x = α)
506	Ge	É, isso a gente já sabia.
507	F	Ou achar que ($x^2 = - \alpha^2$). Como se um é igual ao outro, um ao quadrado vai ser negativo do outro? Vamos numerar e ver o que a gente fez e que não deu certo. Ele deu a dica que a gente tem que usar Bolzano, mas eu não consigo.
508	Ge	O importante, já que ele falou, é tentar fazer por isso.
509	F	Mas eu não sei, não tem como.
510	Ge	Eu também não sei.
511	F	Não sei nem por onde começar porque eu não entendo como pode usar Bolzano nisso. Para mim, Bolzano é só para confirmar é pronto. Usei ali, confirmei e pronto, entendeu?
512	Ge	Tentando usar o Bolzano no intervalo. Se a gente fizer o Bolzano para comprovar que ela está no intervalo]-1; 0[dá na mesma.
513	F	Eu já fiz isso. Está aqui.
514	Ge	Que está entre (-1) e (0) a gente sabe. Que é negativa a gente sabe. E se for ver, é um pouquinho menor que (0,5)... (-0,5). É menor que (-0,5).
515	F	Um pouco menor.
516	Ge	Bem pouco.
517	Obs	O que vocês concluíram até agora.
518	F	Que está no intervalo]-1; 0[; que é menor que (-0,5) e até agora é isso.
519	Ge	Que é negativa, é óbvio.
520	Obs	E o que vocês estão procurando agora, então?
521	F	A raiz.
522	Obs	E o que vocês já tentaram fazer para procurar essa raiz.
523	F	Girard, pesquisa, divisão... Já tentamos o que mais? Já tentamos de tudo um pouco... baixar grau...
524	Ge	Tentamos de tudo, estamos agora tentando fazer pelo teorema de Bolzano, como o Prof. falou.
525	F	Só que assim. A gente não sabe como usar Bolzano a raiz, porque a gente usa o Bolzano só para confirmar o que a gente achou no gráfico, entendeu?
526	Ge	Só para confirmar que ela está nesse intervalo e que tinha, por exemplo, um número ímpar de raízes.
527	F	Agora, para descobrir a raiz a gente não consegue entender como, entendeu? Bolzano não serve para isso, entendeu? A gente já tentou várias coisas: Girard, baixar grau...

528	Ge	É que a forma como a gente aprendeu Bolzano a gente aprendeu mais para o número de raízes, se tinha a possibilidade de estar em um intervalo.
529	F	E daí? Alguma novidade?
530	Ge	Qual?
531	F	Não, estou perguntando se você tem novidade porque para mim...
532	Ge	Baixar grau?
533	F	Mais uma vez eu vou ter que escrever a equação aqui para ver se tem alguma coisa. Não dá para fatorar, deixa eu escrever mais coisa que a gente fez. Fatorar não dá.
534	Ge	Porque se for fatorar vai dar na mesma.
535	F	A gente não fez aquele negócio de igualar a (-1) não é?
536	Ge	Fez? Qual?
537	Pesq	Se eu perguntar se a raiz está entre (-1) e (-0,5) ou entre (-0,5) e (0), o que vocês me responderiam?
538	Ge	Entre (-1) e (-0,5).
539	F	Entre (-1) e (-0,5)!
540	Ge	E bem próximo de (-0,5) por sinal.
541	Pesq	Como vocês sabem que está entre (-1) e (-0,5), algebricamente, usando o teorema de Bolzano?
542	F	É só por (0,5) aqui e ver quanto que dá, se dá sinal contrário. Põe (0,5) lá: (1/8 + 1/2 + 1= 0; 13/8). Esse é P(0,5). E o P(-1) a gente descobriu que é... (-1). A gente sabe que está nesse intervalo... que tem uma raiz nesse intervalo por causa dos sinais que são contrários.
543	Pesq	Então está entre (-1) e (-0,5). Se eu perguntar se está entre (-1) e (-0,7), ou se está entre (-0,7) e (-0,5), como vocês saberiam responder?
544	F	Tem que fazer...
545	Ge	Também fazendo assim.
546	F	Como você falou?
547	Pesq	(-1) e (-0,7) ou entre (-0,7) e (-0,5).
548	F	Temos que fazer, vamos lá. (0,7) ao cubo?
549	Ge	(0,7; 0,49)
550	F	(7) vezes (9), (63)... um, dois, três... (-0,343 - 0,7 + 1) vai ser igual (0,343) com (0,7); três, quatro,... vai dar igual (-0,043). P(-1) é (-1) e P(-0,5) eu não sei.
551	Ge	P(0,7)...
552	F	Não, P(0,5) agora.
553	Ge	Eu só vou copiar o seu resultado agora. (0,043), (-0,043). P de qual que faltou, P de... deu 13/8 não é?
554	F	Não. Eu fiz errado. Eu fiz positivo.
555	Ge	Ah, é (-0,5).
556	F	Dá (-5/8).
557	Ge	Eu fiz a mesma coisa, eu fiz os dois positivos.
558	F	Mentira... (-4/8). O que ele perguntou? Ah, está entre (0,7) e (0,5). Não. Para mim está entre (0,5) e (1).
559	Pesq	Vocês descobriram se está entre (-0,7) e (-0,5) ou entre (-1) e (-0,7)?
560	Ge	Entre (0,7) e (0,5).
561	Pesq	Vocês descobriram isso usando...?
562	Ge	Usando Bolzano.
563	Pesq	Usando Bolzano? Está bem!
564	F	A gente já sabe que está entre (0,7) e (0,5).
565	Ge	Foi isso que ele falou. A gente vai aproximando cada vez mais, para ver, mais ou menos, aproximado, qual é a raiz.
566	F	Mas, por que você sabe que está entre (0,7) e (0,5)?

567	Ge	Porque seu sinal diferente.
568	F	Não, deu negativo nos dois.
569	Ge	Não, aqui dá mais, porque o (1) é mais. Dá (+0,5) aqui, não dá (-0,5) aqui.
570	F	Oito dividido por oito, dá um; vezes menos um: menos um. Oito dividido por dois: quatro; vezes menos um: menos quatro. (mmc-pág. 5-verso) Ah, lógico.
571	Ge	Daí vai dar quanto?
572	F	(3/8).
573	Ge	Eu não vi quanto dava, mas eu vi que dava positivo. Então está entre eles.
574	F	Está entre eles, beleza!
575	Ge	Faz P(0,6). Vamos ver. (0,6) vezes (0,6): (0,36)...
576	F	A gente sabe que está entre (0,7) e (0,5). Você está fazendo (0,6).
577	Ge	Sim. Dá (0,216), $(0,6)^3$; só que menos. Menos, menos (0,6) de novo, mais (1). Vai dar positivo isso.
578	F	Vai dar positivo.
579	Ge	Isso aqui deu negativo não é?
580	F	Sim.
581	Ge	Ah, então está entre (0,6) e (0,7).
582	F	Entre (0,6) e (0,7). Isso aqui é P(0,6) vai dar igual a...
583	Ge	Vai dar positivo, porque isso é menor que (1); se somar os dois...
584	F	Vai dar mais alguma coisa.
585	Ge	Mais alguma coisa.
586	F	Está entre (-0,6) e (-0,7). Agora a gente tenta o quê? Agora a gente chuta!
587	Ge	Chuta alguma coisa no meio.
588	F	(0,65). Será que é raiz.
589	Ge	Resolva com (0,65).
590	F	Agora eu quero ver a gente fazer $(0,65)^3$.
591	Ge	Dá (0,65) vezes... vai dar... (erraram porque usaram 0,65 ao invés de –0,65)
592	Prof.	O que vocês descobriram?
593	Ge	Que está entre (0,6) e (0,7).
594	F	Entre (-0,6) e (-0,7).
595	Prof.	A escolha desses valores foi com que critérios?
596	F	Bolzano!
597	Prof.	E vocês esperam encontrar um valor exato ou aproximado?
598	Ge	Mais aproximado.
599	F	Mais aproximado.
600	Prof.	Por que aproximado?
601	F	Porque é um número muito pequeno; tem um intervalo muito pequeno entre eles; eu acho que vai ser um número mais aproximado.
602	Prof.	Está bem. Está ótimo. Muito obrigado. (encerraram suas anotações)

ANEXO 4

ANOTAÇÕES DOS ALUNOS "G" E "C"

① $-2x^3+3x^2-2x+3$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} -1 & -2 & 3 & -2 & 3 \\ \hline & -2 & 5 & & \end{array}\right) \text{ SEM EFEITO}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1/2 & -2 & 3 & -2 & 3 \\ \hline & -2 & & & \end{array}$$

$2x^3-3x^2+2x-3$

SEM EFEITO
$$\left(\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & -3 & 2 & -3 \\ \hline & 2 & 1 & 4 & \end{array}\right) \text{ SEM EFEITO}$$

$x_1+x_2+x_3=3/2$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2\cdot x_3=1$

$x_1\cdot x_2\cdot x_3=3/2$

$x_1=3/2-x_2-x_3$

$(3/2-x_2-x_3)\cdot x_2+(3/2-x_2-x_3)x_3+x_2\cdot x_3=1$

$x_1=\dfrac{3/2}{x_2\cdot x_3}$ $\therefore$ $x_1=\dfrac{3\cdot x_2\cdot x_3}{2}$

$2x_1=3x_2\cdot x_3$

$\left(\dfrac{3x_2\cdot x_3}{2}\right)+x_2+x_3=3/2$

$(3x_2\cdot x_3)+2x_2+2x_3=3$

$3x_2\cdot x_3+2(x_2+x_3)=3$

$2x_1+2(3/2-x_1$

$2x^3-3x^2+2x-3=0$

$x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}$

$x_1+x_2+x_3=\dfrac{3}{2}$ $\rightarrow x_2=\frac{3}{2}-x_1-x_3$

$x_1\cdot x_2\cdot x_3=3/2$

$x_1=\dfrac{3}{2}-x_2-x_3$

$\boxed{x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=1}$

Sem efeito

$(x_1+x_2+x_3)=x_1\cdot x_2\cdot x_3$

$\left(\dfrac{3}{2}-x_2-x_3\right)\cdot(x_2)\cdot(x_3)$

$\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}+x_1+x_3-x_2-x_3\cdot(x_2)(x_3)$

① $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 0$

$x^2(2x-3) + 2x - 3 = 0$

$2x-3\,(x^2+1) = 0$

$2x - 3 = 0 \qquad x^2 + 1 = 0$

$2x = 3 \qquad x^2 = -1$

$x_1 = 3/2 \qquad x_2 = i \quad x_3 = -i$

---

② 1 não é raiz $\quad x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$

0 " " "

$P: \{1, -1, 2, -2, -3, 3, 6, -6\}$

a) -2 é raiz racional

$q: \{-1, 1\}$

$\frac{P}{q}: \{\frac{-1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, -3, -6, 6\}$

-2	1	2	1	-1	-6
sem efeito (2)	1	0	1	-3	$\boxed{0}$
	(1	2) sem efeito			
sem efeito (3)	1	0	1	-3	
	(1	3	10) efeito		
sem efeito (-3)	1	0	1	-3	
	1	-3			
6	1	0	1	-3	
	1				

-2	1	0	1	-3
	1	-2	?	

$x^3 + x - 3 = 0$

ⓑ SEM EFEITO ~~Portanto, se temos apenas uma raiz racional concluimos que as outras são irracionais. Após acharmos e testarmos todas as possíveis raízes racionais apenas uma é, então as outras são irracionais.~~

Como a equação é de 4º grau, ela possui 4 raízes. Após testarmos todas a racionais possíveis achamos -2 como raiz. A partir disso conclui-se que as outras três raízes são irracionais

2

③ $x^3 + x + 1$

Após analizarmos o gráfico concluimos que a equação possui apenas uma raiz real pois corta o eixo "x" em apenas um ponto. Como a equação é do terceiro grau as duas raízes restantes não pertencem ao conjunto dos reais.

$-1/4$	1	0	0	1
	1	$-1/4$		

$X = 0 \rightarrow y = 1$ $\qquad a = -1$

$X = ? \rightarrow y = 0$ $\qquad b = -\frac{1}{2}$

$P(A) \cdot P(B) < 0$

$|(-1)^3 + (-1) + 1 \quad + 1 < 0|$ s/ EFEITO

$\times$

$(-1 - 1 + 1) \cdot \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 < 0\right.$

$-1 \cdot \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1\right) < 0$

$-8 \cdot (-1 - 4 + 8) < 0$

$-8 \ (3) < 0$

$-24 < 0$

$-0{,}7 \quad -0{,}5$

$-1 \quad -0{,}7$

$[(-0{,}7)^3 + (0{,}7) + 1] \cdot [(-0{,}5)^3 + (-0{,}5) + 1] < 0$

$[-0{,}343 - 0{,}7 + 1] \cdot [-0{,}125 - 0{,}5 + 1] < 0$

$[-0{,}43] \cdot [0{,}375] < 0$

3

$-0{,}6 \quad -0{,}7$

$[(-0{,}7)^3+(-0{,}7)+1] \cdot [(-0{,}6)^3+(-0{,}6)+1] < 0$

$[-0{,}343 - 0{,}7+1] \cdot [(-0{,}216) - 0{,}6+1] < 0$

$[-0{,}43] \cdot [0{,}184] < 0$

$-0{,}7 \quad -0{,}65$

$[-0{,}43]\ [(-0{,}65)^3+(-0{,}65)+1] < 0$

$[-0{,}43] \cdot [-0{,}275 - 0{,}65+1] < 0$

4

ANOTAÇÕES DOS ALUNOS "A" E "M"

1) $p \rightarrow +1\ -1\ +3\ -3$

$q \rightarrow +1\ -1\ +2\ -2$

$3/2$	-2	$+3$	-2	$+3$
	-2	0	$-1/2$	0

$\rightarrow -2x^2 - 1/2 = 0$

houve um engano na transposição dos resultados.

$a = -2$
$b = 0$
$c = -1/2$

$\rightarrow \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$0 \pm \sqrt{0 - 4(-2)(-1/2)}$

$0 \pm \dfrac{\sqrt{-4}}{2a} \rightarrow \dfrac{\pm 2i}{-4} = \boxed{\dfrac{\pm i}{2}}$

Resposta: $\boxed{S = \left\{-2i, \frac{3}{2}, +2i\right\}}$ S.E.

$\rightarrow S = \left\{\frac{-i}{2}, \frac{3}{2}, \frac{+i}{2}\right\}$

---

2) $p \rightarrow +1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6$

$q \rightarrow +1, -1$

-2	1	$+2$	$+1$	-1	-6
	1	0	$+1$	-3	0

letra a) Resposta: a raiz racional é -2

---

b) Chega-se a essa conclusão através do método de pesquisa de raízes. O polinômio de 3º grau obtido possui 3 raízes. A possibilidade de serem 3 raízes (irracionais)* é descartada, pois se há uma raiz (irracional)* seu par conjugado também o será. Dessa forma, não pode haver apenas raízes complexas para um polinômio cujo número de raízes é (par) se → ímpar. * complexas

---

3) $x^3 + x + 1$

	1	0	$+1$	$+1$

$p \rightarrow +1, -1$
$q \rightarrow +1, -1$

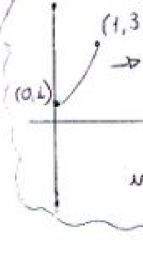
$a = 1$
$b = 0$

$\boxed{1^{\circ}\text{ caso } x = a}$

$(1)^3 + 0 + 1 + 1$
$= 3$

$\boxed{2^{\circ}\text{ caso } x = b}$

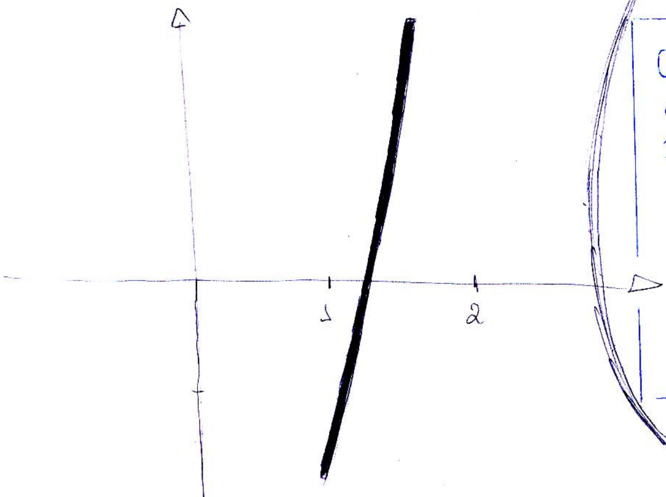
$= 1$ (termo independente)



→ não pode-se precisar a trajetória, mas o gráfico nesse intervalo considerado não intercepta o eixo das abscissas.

1ª conclusão → número de raízes reais é par, ou seja, 0 ou 2 dentro do polinômio em questão → não pode ser dois, senão a pesquisa de raízes acusaria as duas raízes reais → Conclusão: o polinômio não apresenta raízes reais

2b)

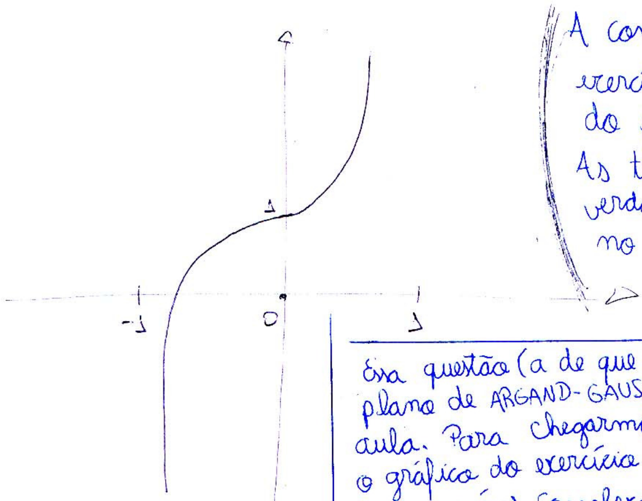


S.E.

Conclusão: o gráfico confirma o encontrado no exercício. Dentro do intervalo considerado, apenas há uma raiz. Dessa forma, fica evidente a impossibilidade de haver raízes complexas (pois, se assim fosse, ter-se-ia três raízes distintas em lugar de três raízes iguais)

Após reflexão, nós chegamos a outra conclusão para ambos os testes. Não há como saber se os polinômios em questão possuem três raízes irracionais (todas iguais) ou se possuem uma raiz irracional e duas complexas (uma sendo o conjugado da outra OBRIGATORIAMENTE). A incerteza reside no fato de que, se há raiz Complexa (real) elas não apareceriam no plano cartesiano, apenas no plano de ARGAND-GAUSS.

3)



S.E.

A conclusão encontrada neste exercício é semelhante àquela do problema anterior. As três raízes irracionais (que em verdade são iguais) encontram-se no intervalo entre $x = -1$ e $x = 0$.

Essa questão (a de que raízes complexas aparecem apenas no plano de ARGAND-GAUSS) é pouco trabalhada em sala de aula. Para chegarmos a essa conclusão, visualizamos o gráfico do exercício 1 (não desenhado nesta folha), em que as raízes complexas encontradas na solução do teste $\left(+\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\right)$ não são representadas no plano cartesiano usado. Essa constatação foi o subsídio para que chegássemos à conclusão final, escrita no centro da folha.

ANOTAÇÕES DOS ALUNOS "J" E "Y"

$$1.\ P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 3$$
$$+ x^2(-2x + 3) + 1(-2x + 3)$$
$$(x^2 + 1)(-2x + 3)$$

$$x' = -i$$
$$x'' = i$$
$$x''' = \frac{3}{2}$$

$$2.\ x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m + n + p + q = -2 \\ mn + mp + mq + np + nq + pq = 1 \end{array}\right) \to \text{completo na folha}$$

$$x^3(x + 2)(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} -2 & 1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \text{ERRAD}$$

$$(x^3 + x - 3)(x + 2) = 0$$

a) $x = -2$

$$3.\ x^3 + x + 1 = 0$$

$$m + n + p = 0 \quad \therefore \quad m = -n - p$$
$$mn + mp + np = 1$$
$$mnp = -1$$

2. $\left(\begin{array}{l} x^3 + x - 3 \equiv (ax^2 + bx + c) + 1 \\ x^3 + x - 2 \\ \\ x^3 + x \end{array} \right)$

3. $x^3 + 0x^2 + x + 1 = 0$

$$2. \quad -2 \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right.$$

$$(x^3 + x - 3).(x + 2) = 0$$

$P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 3$

$+x^2(-2x+3) + 1(-2x+3)$

$(x^2+1)(-2x+3)$

1

$x' = i$
$x'' = -i$

$-2x+3=0$
$3 = 2x$
$\frac{3}{2} = x$

$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$

$2 \quad a$

$\boxed{x' = -2}$

$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$

$x^2(x+2) + x(x - 1 - 6)$

$x^3(x+2) + (x-3)(x+2)$

$(x^2 - x + 3)(x+2)$

$x^3 - y + 1 = 0$

$m+n+p=0$
$m = -n-p$

$(-n-p)n + (-n-p)p + np = 1$
$-n^2 -$

$m+n+p = -\frac{b}{a} = 0$

$mn + mp + np = \frac{c}{a} = 1$

$mnp = -\frac{d}{a} = -1$

$(-n-p)(np) = -1$

$-n^2p - np^2 = -1$

$mn + np + \frac{1}{m} = 1$

$\frac{\quad}{m} = m$

$np = \frac{-1}{m}$

7	3
1	2

a	1	+2	+1	-1	-6
	1	2+a	a^2+2a+1		0

$P(x)$

$a^3 + 2a^2 + a - 1$

$a^3 + 2a^2 + a - 1 - 6 = 0$

$a^3 + 2a^2 + a - 6 = 0$

$a^3 + 2a^2 + a$

	1	+2	+1	-1	-6
-2	1	0	1	-3	0
-2	1	-2	+5	-13	

$x^2 + x - 3 = 0$

$2^3 + 2 - 3 = 0$ $\quad x($

$-8 + 2 - 3 = 0$

$-8 - 5 =$

$m+n+p+q=-2$

$mn+mp+mq+np+nq+pq=1$

$mnp+mnq+npq=+1$

$mnpq=-6$

I $-2mpq=-6$

$mpq=3$

$-p-q(pq)=3$

$-p^2-pq-pq-q^2=3$

$-p^2-2pq-q^2=3$

II $-2m+mp+mq+(-2)p-2q+pq=-1$

$-2(mpq)+mp+mq+pq=-1$

$-6+mp+mq+pq=-1$

$mp+mq+pq=5$

III $mnp+mpq+3=1$

$(-2mp+mpq(+3)=(1))$

$\cancel{2m}$

$-2mp+mpq=-2$

$mp(-2+q)=-2$

$(-p-q)p(-2+q)=-2$

$(-p^2-\cancel{p}q(-2+q)=-2)$

IV $-m-2+p+q=-2$

$m+p+q=0$

$-m=+p+q$

$2.\ x^3+x-3 \mid ax^2+bx+c-1$

$\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1}$

$(-1)(-1)$

$i^4+2(i)^3+i^2-i-6=0$

$1+2(-i)+\cancel{(-1)}-i-6=0$

$-2i-i-6$

$-3i=-6$

$i=$

x^3+x+3

$x(x^2+x)+3$

$(x+3)(x^2+x)$

$x=-3 \quad x^2+x=0$

$x^2=x$

$x=1$

3ª atividade

$x^3+x+1=0$

$x(x+1)+1$

$(x+1)(x+1)=0$

x^3+0x^2+x+1

$x^2(x+0)+1(x+1)$

$(x^2+1)(x^2+x)$

x^3+x+0x^2+1

$x(x^2+1)\theta(x^2+$

$x^3+x+1 \mid ax^2+bx+c$

0

$x^3 + x + 3 = 0$

$(x^3 + x + 3)(x + 2) = 0$

$x^3 + x + 3 = 0$

$f(x)$

$x^3 + x + 3$	$ax^2 +$
-2	ax^2

$Q(x)$

$P(x) = a_n x^n$

$ax^3 + bx^2$ $\quad 0,7 \quad \frac{7}{10}$

$3x^3 + 2x^2 + x$

$\frac{7}{10}$	$x^3 + x + 1$
	$x \quad 1$

$\frac{7}{10}$	$10 + 1 + 1$

	1	0	1	1
$-\frac{7}{10}$	1	$-\frac{7}{10}$	$+\frac{49}{100}$	

$\left(-\frac{7}{10}\right)^3 + -\frac{7}{10} + 3 = 0$

$-\frac{343}{100} - \frac{7}{10} + 3 = 0$

$\frac{49}{100} + 1 = \frac{149}{100} \cdot \frac{7}{10} = \frac{1043}{1000} + 1000 =$

$-\frac{343}{100} \quad \frac{-7+30}{10}$

$\begin{array}{r} 49 \\ 7 \\ \hline 343 \end{array}$

$-\frac{343}{100} + \frac{280}{100}$

3. $P(a) = (-2, -10)$

$P(b) = (2, 10)$

$a = -2 \quad P(a) = -10$

$b = 2 \quad P(b) = 10$

$(-2, 2)$

$x^3 + x + 1 = 0$

$-2^3 + 2 + 1 = 0$

-8

$0{,}66$

$\frac{-66}{100} = \frac{-33}{50}$

$-1, -\frac{1}{2}$

$-\frac{9}{10}, -$

$P(x) = -1^3 - 1 + 1$

$P(x) = -1$

$P'(x) = (-1/2)^3 - 1/2 + 1$

$P'(x) = -\frac{1}{8} + 1/2$

$P'(x) = \frac{-1+4}{8} = 3/8$

ANOTAÇÕES DOS ALUNOS "E" E "D"

1

1) $P(x)=(-2x+3)(x^2+\overset{1}{\cancel{x}})$

$-2x+3=0$
$2x=3$
$x=3/2$

$\left(\begin{array}{c} x^2+x=0 \\ x(x+1)=0 \\ x=0 \\ x=-1 \end{array} \right)$
$\to$ SE

$(S=\{-1,0,3/2\})$

$S=\{3/2,+i,-i\}$

$x^2+1=0$
$x=\sqrt{-1}$
$x=\pm i$

2) a.
$p=\{-1,1,-2,2,-3,3,-6,6\}$
$q=\{-1,1\}$

$x^4+2x^3+x^2-x-6=0$

$p/q=\{-1,1,-2,2,-3,3,-6,6\}$

$$\begin{array}{c|ccccc} 3 & 1 & 2 & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & 5 & 16 & \text{——} & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} 2 & 1 & 2 & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & 4 & 9 & \text{——} & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} -2 & 1 & 2 & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$\to -2$ é uma raiz racional.

b.

$\to x^3+x-3=0$

$x^3+0x^2+x-3=0$

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & \text{——} & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} -3 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & \text{——} & \end{array}$$

raízes $\begin{cases} a+\sqrt{b} \\ a-\sqrt{b} \\ x_3 \end{cases}$

$\mathrm{I} * \; a+\sqrt{b}+a-\sqrt{b}+x_3=-\dfrac{0}{1}$
$2a+x_3=0$
$x_3=-2a$

$\mathrm{II} * \; (a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})\cdot x_3=-\dfrac{(-3)}{1}$
$(a^2-b)(-2a)=3$

2

$$\text{III} * (a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) + (a+\sqrt{b})\overset{(-2a)}{\cancel{x_3}} + (a-\sqrt{b})\overset{(-2a)}{\cancel{x_3}} = \frac{1}{1}$$

$$a^2 - b + (-2a^2 - \cancel{2a\sqrt{b}}) + (-2a^2 + \cancel{2a\sqrt{b}}) = 1$$

$$a^2 - b - 4a^2 = 1$$

$$a^2 - b = 1 + 4a^2$$

IN

III em II

$$(a^2-b)(-2a) = 3$$

$$(1+4a^2)(-2a) = 3$$

$$-2a - 8a^3 = 3$$

$$8a^3 + 2a - 3 = 0$$

$$\left(a = -\frac{3}{4}\right) \to \text{SEM EFEITO}$$

$$8a^3 + 0a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$p = \{-1, 1, -3, 3\}$$

$$q = \{-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8\}$$

$$\frac{p}{q}\left\{\pm 1, \pm 3, \pm 1/2, \underset{S.E.}{\pm 1/4}, \pm 1/8, \pm 3/2, \pm 3/4, \pm 3/8\right\}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 3/2 & 8 & 2 & -3 \\ \hline & 8 & 14 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 3/4 & 8 & 2 & -3 \\ \hline & 8 & 8 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 3/8 & 8 & 2 & -3 \\ \hline & 8 & 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} -3/4 & 8 & 2 & -3 \\ \hline & 8 & -4 & 0 \end{array}$$

$$8 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 = 0$$

$$\cancel{4} -$$

$$\begin{array}{c|cccc} -3/2 & 8 & 0 & 2 & -3 \\ \hline & 8 & -12 & 20 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} -3/8 & 8 & 0 & 2 & -3 \\ \hline & 8 & -3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} -3/4 & 8 & 0 & 2 & -3 \\ \hline & 8 & -6 & & \end{array}$$

$$\begin{cases} x^3 + x - 3 = 0 \\ x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = x^3 + x - 3$$

$$x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$1 - 1 + 1 + 2 - 3 = 0$$

ANOTAÇÕES DOS ALUNOS "F" E "Ge"

1

1) $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 3 \quad (-1)$

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$

$2x(x^2+1) - 3(x^2+1)$

$(2x-3)(x^2+1) = 0$

$2x - 3 = 0 \qquad x^2 = -1$

$2x = 3$

$\boxed{x = \frac{3}{2}} \qquad \boxed{x = \pm i}$

2) a) $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$

$2 \quad 27 \times 3 = 81$

$(+3) \rightarrow \cancel{81} + \cancel{81} + 9 + 3 - 6$

$m(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$m(1) = \{\pm 1\}$

$\frac{m(6)}{m(1)} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$-2,$

$\boxed{(-2)} \rightarrow 16 - 16 + 4 + 2 - 6$

$(-1) \rightarrow +1 - 2 + 1 + 1 - 6$

$(2) \rightarrow 16 + 16 + 4 - 2 - 6 = 0$

-2	1	2	1	-1	-6
	1	0	-1	-3	0

$x^3 + x - 3 = 0$

-2	1	2	1	-1	-6
	1	0	-1		

+6	1	2	1	−1	−6
	1	8	37	22~~2~~	

$$\begin{array}{r} {}^{4}37 \\ \times 6 \\ \hline 222 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{l|l} x^4+2x^3+x^2-x-6 & x+2 \\ \hline \cancel{-x^4}-2\cancel{x^3} & x^3+x-3 \\ \quad \cancel{x^2}-x-6 & \\ \quad -\cancel{x^2}-2x & \\ \hline \qquad -3x-6 & \\ \qquad +3x+6 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$\boxed{\text{raiz } -2}$

$x^3+x-3=0$

$m(3)=\{\pm1,\pm3\}$

$m(1)=\{\pm1\}$

$\dfrac{m(3)}{m(1)}=\{\pm1,\pm3\}$

$(-3)\to -27-3-3$

$(3)\to$

-3

b) $x^4+2x^3+x^2-x-6=0$ 2

raízes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = -\dfrac{2}{1} \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4 = \dfrac{1}{1} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\dfrac{(-1)}{1} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \dfrac{-6}{1} \end{cases}$$

$\alpha_1 = -2$

α 2 ~ 3

$\underbrace{a+\sqrt{b}}_{\alpha}$	1	2	1	-1	-6
	1	$a+\sqrt{b}+2$	(*)	(**)	

$$(a+\sqrt{b}+2)(a+\sqrt{b}) = a^2+a\sqrt{b}+2a+a\sqrt{b}+b+2\sqrt{b}+1$$

$$(*)\ a^2+2a\sqrt{b}+2a+b+2\sqrt{b}+1$$

α	1	2	1	-1	-6
	1	$\alpha+2$	$\alpha^2+2\alpha+1$	(*)	x

$$(\alpha^2+2\alpha+1)\alpha-1 = \alpha^3+2\alpha^2+\alpha-1 \ (*)$$

$$(\alpha^3+2\alpha^2+\alpha-1)\cdot\alpha-6 = \alpha^4+2\alpha^3+\alpha^2-\alpha-6$$

$$\alpha^4+2\alpha^3+\alpha^2-\alpha-6=0$$

Tiramos Decomp. $\underline{\underline{-2}}$ $\pm i$

$$-6(x+2)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\underline{\alpha_3})=0$$

$$-2\alpha_2\alpha_3\alpha_4=-6$$

$$-2+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-2$$

$$-2\alpha_2+(-2)\alpha_3+(-2)\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4=1$$

$$\Rightarrow (x^2-\alpha_1 x+2x-2\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)=0$$

$$(x-\alpha_3)(x^3-\alpha_1 x^2+2x^2-2\alpha_1 x-\alpha_2 x^2-\alpha_1\alpha_2 x+2\alpha_2 x-2\alpha_1\alpha_2)\overset{?}{=}0$$

$x^3+x-3=0$

$x^3+0x^2+x-3=0$

3

3) $P(a)P(b)<0$ → nº raízes ímpar

$P(a)$ tem sinal contrário $P(b)$

$P(a).P(b)>0$ → nº raízes par

$P(a)$ tem mesmo sinal $P(b)$

$$X^3+X+1=0$$

2b
3

$P(a) \to a^3+a+1$

$P(b) \to b^3+b+1$

$(a^3+a+1).(b^3+b+1)=$

$P(1)=+3$

$a \pm \sqrt{b}\, i$

$P(-1)=+1$

$(a+\sqrt{b})^3+a+\sqrt{b}+1=0$

$(a+\sqrt{b})^2 (a+\sqrt{b})+a+\sqrt{b}+1=0$

$(a^2+2a\sqrt{b}+b)(a+\sqrt{b})+a+\sqrt{b}+1=0$

$a^3+2a^2\sqrt{b}+ab+a^2\sqrt{b}+2ab+b\sqrt{b}$

3) $P(0) = 1$ { nº impar raízes
$P(-1) = -1$

4

1 → gráfico

$1 \cdot -1 < 0$
$-1 < 0$

$x^3 + x + 1 = 0$ $\cancel{[1, -1]}$?

$\cancel{x(x^2+1)+1}$

$(-1, 1)$

$x^3 + x = -1$ sabe-se q. é ⊖.

$x(x^2+1) = -1$

$\cancel{x = -1}$ $x^2 + 1 = -1$

$x^2 = -2$ errado!

$x = \pm\sqrt{2}\, i$

u

2/b) pelo gráfico → raiz tá +1 e +2
menor q 0,5.

$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0$ raiz $= -2$.

baixou grau c/ -2 → $\boxed{x^3 + x - 3} = 0$

$\cancel{P(a) = 0}$

$-2 + x = -\frac{2}{1}$
$-2x = 1$ (erro!

$$\begin{array}{l} x^{3}+0x^{2}+x-3 \\ -x^{3}-2x^{2} \\ \hline \quad -2x^{2}+x-3 \\ \quad +2x^{2}+4x \\ \hline \qquad 5x-3 \\ \qquad -5x-10 \\ \hline \qquad\quad -13 \end{array} \quad \begin{array}{|l} x+2 \\ \hline x^{2}-2x+5 \end{array}$$

ERRO!

$$x^2-2x+5=0$$

$$\Delta = 4-4.1.5$$

$$\Delta = -16$$

$$x = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

$$\boxed{x' = \pm 2i}$$

b) Há uma raiz irracional pois com pesquisas de raízes só encontramos a raiz racional −2. Se no gráfico mostra que há outra raiz então ela só pode ser irracional.

3) $x^3+x+1=0$ ⑤

pelo gráfico entre 0 e -1

$f(0) = +1$
$f(-1) = -1$ } nº ímpar raízes

$1 \cdot -1 < 0$ ⓪ $(-1, 0)$

$-1 < 0$

$x^3 + x + 1 = 0$

$\alpha + \alpha + \alpha = -0$

$\alpha\alpha + \alpha\alpha + \alpha\alpha = 1$

$\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = -1$

$\alpha^3 = -1$

$\alpha = \sqrt[3]{-1}$

$(x-\alpha)^3$

$(x^2 - x\alpha + \alpha^2)(x-\alpha)$ α é raiz de $M=3$

$\rightarrow x^3 - x^2\alpha + x\alpha^2 - \alpha^3 = 0$

$x^2(x-\alpha) + \alpha^2(x-\alpha) = 0$

$(x^2+\alpha^2)(x-\alpha) = 0$

$x^2+\alpha^2 = 0$ $x-\alpha = 0$

$x^2 = -\alpha^2$ $x = \alpha$

? 0

$x^3 + x + 1 = 0$

girar ñ | baixar
pesquisa ñ | grau ñ
divisão ñ | fatorar ñ

$(-1, 0)$

menor q $-0,5$

$P(a) \cdot P(b) < 0$

$P(x) = x^3 + x + 1$

$a^3 + a + 1 \cdot \cancel{b^3} + b + 1 < 0$

$0,7 \times 0,7 = 0,49$

$0,49 \times 0,7 = 0,343$

$x^3 + x + 1 = 0$

$\cancel{\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1+4+8}{8} = \frac{13}{8}}$

$P(-1/2) = \cancel{+\frac{13}{8}}$ -1 $(-0,7, -1)$

$P(-1) = -1$

$(-0,7, -0,5)$ tem sinal oposto

$P(-0,7) = -0,343 - 0,7 + 1 = -0,043$

$-0,343$
$0,7\cancel{07}$
$1,043$

$-\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 = 0$

$\frac{-1 - 4 + 8}{8} = 0$

$P(-1) = -1$

$P(-0,5) = +\frac{5}{8} = +\frac{3}{2} = +0,5$

6

$(-0{,}7\,,\,-0{,}5)$

$p(-0{,}6) = + \ldots$

tá entre $-0{,}6$ e $-0{,}7$.

$$x^3 + x + 1 = 0$$

$$(0{,}65)^3 + 0{,}65 + 1 = 0$$

$$1{,}65 = 0$$

$$\begin{array}{r} 0{,}65 \\ \times\, 0{,}65 \\ \hline 325 \\ 390 \\ \hline 0{,}4225 \end{array}$$