

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**MÉTODO DE GALERKIN LIVRE DE ELEMENTOS APLICADO A PLACAS DE  
MATERIAIS COMPOSTOS LAMINADOS**

**Dissertação submetida à**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**para a obtenção do grau de**

**MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**TIAGO FRANCO DE GÓES TELES**

**Florianópolis, Novembro de 2007**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**MÉTODO DE GALERKIN LIVRE DE ELEMENTOS APLICADO  
A PLACAS DE MATERIAIS COMPOSTOS LAMINADOS**

**TIAGO FRANCO DE GÓES TELES**

**Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de**

**MESTRE EM ENGENHARIA**

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA  
sendo aprovada em sua forma final.**

---

**Marcelo Krajnc Alves, Ph.D. - Orientador**

---

**Fernando Cabral, Ph.D. - Coordenador do Curso**

**BANCA EXAMINADORA**

---

**José Carlos Pereira, Dr.- Presidente**

---

**Hazim Ali Al-Qureshi, Ph.D.**

---

**Cláudio Roberto Ávila da Silva Júnior, Dr.**

# AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Marcelo Krajnc Alves pelo apoio, paciência, dedicação e, principalmente, pelo exemplo.

Ao CNPq pelos 6 meses de bolsa que ajudaram a me manter longe da minha terra natal.

À Universidade Federal de Santa Catarina e ao POSMEC pela oportunidade de me integrar ao corpo discente como mestrando em engenharia mecânica.

Aos professores do curso: Edison da Rosa, José Carlos, Marcelo Alves e Paulo de Tarso que muito contribuíram para minha formação básica em análise de projetos.

Aos meus colegas que iniciaram o mestrado comigo, Enildo Oliveira, Guilherme Machado, Pablo Medeiro, Renato Rafaelli e Thiago Guinzani pelo companherismo e cooperativismo durante nosso primeiro ano.

Aos meus colegas do GMAC (grupo de mecânica aplicada e computacional) pela troca contínua de materiais e informações.

Por fim, a Luiza e a Jussara pelo incentivo e paciência.

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	vi
LISTA DE TABELAS .....	vii
NOMENCLATURA .....	viii
RESUMO.....	xi
ABSTRACT .....	xii
1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Motivação e Objetivo do Trabalho.....	1
1.2 Metodologia .....	2
1.3 Revisão Bibliográfica.....	3
1.4 Apresentação do Trabalho.....	4
2 MATERIAIS COMPOSTOS LAMINADOS.....	6
2.1 Introdução .....	6
2.2 Propriedades da Lâmina .....	7
2.3 Comportamento do Laminado .....	12
2.4 Teoria de Primeira Ordem de Mindlin .....	18
3 MODELO DE PLACAS .....	31
3.1 Introdução .....	31
3.2 Elasticidade Infinitesimal 3D.....	32
3.3 Teoria de Placas .....	34
3.4 Teoria de Mindlin.....	35
3.5 Aplicação do Princípio da Mínima Energia Potencial Total .....	38
3.6 Determinação da Formulação Forte .....	44
3.7 Formulação Fraca do Problema da Placa de Mindlin.....	50
4 MÉTODO DE GALERKIN LIVRE DE ELEMENTOS .....	53
4.1 Métodos sem Malha .....	53
4.2 Método de Galerkin Livre de Elementos.....	55
4.3 Aproximação por Mínimos Quadrados Móveis.....	56
4.4 Funções Peso.....	62
4.5 Tipos de Função Peso.....	68

4.6 Imposição das Condições de Contorno Essenciais .....	71
4.7 Integração Numérica .....	74
4.8 Discretização Numérica.....	75
5 RESULTADOS NUMÉRICOS .....	87
5.1 Introdução .....	87
5.2 Avaliação da Densidade de Partículas.....	88
5.3 Avaliação do Fator de Abrangência .....	90
5.4 Avaliação da Função Peso .....	93
5.5 Comparativo com Outros Métodos .....	95
6 CONCLUSÕES .....	99
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	101

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Sistema de eixos de ortotropia da lâmina. ....	8
Figura 2.2 – Sistemas de eixos de ortotropia e referência. ....	12
Figura 2.3 – Identificação das lâminas no laminado. ....	24
Figura 3.1 – Problema elástico tridimensional. ....	33
Figura 3.2 – Hipóteses cinemáticas aplicadas a materiais compostos laminados. ....	35
Figura 3.3 – Graus de liberdade de um ponto da placa. ....	36
Figura 3.4 – Direções normal e tangente à borda da placa. ....	41
Figura 4.1 – Fluxograma comparativo MFree e FEM. ....	54
Figura 4.2 – Representação do domínio do problema pelo EFG. ....	56
Figura 4.3 – Funções peso em um problema unidimensional. ....	58
Figura 4.4 – Domínio de influência retangular e circular. ....	65
Figura 4.5 – Suporte do ponto “x”. ....	66
Figura 4.6 – Significado geométrico do parâmetro $r_{l_{max}}$ . ....	66
Figura 4.7 – Células de integração do Método de Galerkin livre de elementos. ....	75
Figura 5.1 – Laminado simplesmente apoiado (SS-1) com carregamento uniforme. ....	89
Figura 5.2 – Laminado simplesmente apoiado (SS-2) com carregamento uniforme. ....	91
Figura 5.3 – Laminado simplesmente apoiado (SS-2) com carregamento senoidal. ....	94
Figura 5.4 – Laminado simplesmente apoiado (SS-1) com carregamento senoidal. ....	97
Figura 5.7 – Configuração deformada da placa. ....	98

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Formulação forte do problema da placa de Mindlin. ....	49
Tabela 4.1 – Algoritmo do método de Galerkin livre de elementos. ....	56
Tabela 5.1 – Resultados para avaliação da influência da densidade de partículas. ....	89
Tabela 5.2 – Resultados para avaliação e escolha do fator de abrangência. ....	92
Tabela 5.3 – Resultados para avaliação e escolha da função peso. ....	94
Tabela 5.4 – Resultados comparativos com outros métodos. ....	96

# NOMENCLATURA

CLPT	teoria clássica de laminados
FEM	método de elementos finitos
EFG	método de Galerkin livre de elementos
FSDT	teoria de primeira ordem
MFree	método sem malha
MLS	método dos mínimos quadrados móveis
TSDT	teoria de terceira ordem
$E_i$	módulo de elasticidade na direção $i$
$G_{ij}$	módulo de cisalhamento no plano $i - j$
$\nu_{ij}$	coeficiente de Poisson referente à deformação na direção $j$ causada por uma solicitação na direção $i$
$\varepsilon_{ii}$	deformação no eixo $i$
$\gamma_{ij}$	deformação angular total no plano $i - j$
$\sigma_{ii}$	tensão normal no eixo $i$
$\sigma_{ij}$	tensão cisalhante no plano $i - j$
$(\bullet)^L$	sobrescrito “L” indica que a grandeza encontra-se no sistema de eixos de ortotropia da lâmina
$[S^L]$	matriz de flexibilidade
$[Q^L]$	matriz de rigidez
$\{\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z\}$	base cartesiana ortonormal do sistema de referência
$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$	base cartesiana ortonormal do sistema de eixos de ortotropia da lâmina
$\vec{r}$ e $\vec{v}$	vetores arbitrários
$\theta$	ângulo formado entre os eixos $\bar{e}_1$ e $\bar{e}_x$
$[R]$	matriz de rotação entre os sistemas de referência e ortotropia



$[T_\sigma]$	matriz de rotação entre os sistemas de referência e ortotropia para o vetor de tensões
$[T_\varepsilon]$	matriz de rotação entre os sistemas de referência e ortotropia para o vetor de deformações
$\bar{u}$	campo de deslocamento
$u, v$ e $w$	deslocamentos definidos na superfície média da placa ou laminado
$\theta_x$ e $\theta_y$	rotações definidas na superfície média da placa ou laminado
$\bar{\kappa}$	vetor das deformações generalizadas da placa ou laminado
$\bar{M}$	vetor dos esforços generalizados da placa ou laminado
$[C]$	matriz constitutiva que relaciona os esforços e as deformações generalizadas
$[A], [B], [D]$ e $[F]$	matrizes auxiliares para a determinação de $[C]$
$N$	número de lâminas do laminado
$h$	espessura total do laminado
$z_k$ e $z_{k+1}$	coordenadas inferior e superior da lâmina $k$ do laminado
$(\bullet)^{(k)}$	sobrescrito $(k)$ indica que a grandeza associada à $k$ -ésima lâmina do laminado
$\Omega$	subregião do $R^3$ com fronteira regular ocupada por um corpo elástico
$\Gamma_t$	região do contorno de um corpo com tração prescrita
$\Gamma_u$	região do contorno de um corpo com deslocamento prescrito
$\Pi(\bar{w})$	funcional da energia potencial total
$\bar{b}$	força de corpo
$\bar{t}$	tração prescrita no contorno
$\bar{u}$	deslocamento prescrito no contorno
$\eta$	constante do método da penalidade exterior
$\bar{u}_0$ e $\bar{\theta}$	vetores dos deslocamentos e rotações generalizados
$\rho$	densidade do material
$\bar{g}$	aceleração da gravidade
$A_t$	área do contorno da placa com tração prescrita
$A_u$	área do contorno da placa com deslocamento prescrito

$\{\bar{e}_n, \bar{e}_s, \bar{e}_z\}$	base cartesiana ortonormal auxiliar para impor as condições de contorno
$\alpha$	ângulo formado entre $\bar{e}_n$ e $\bar{e}_x$
$[\alpha 3]$ e $[\alpha 2]$	matrizes de rotação entre as bases $\{\bar{e}_n, \bar{e}_s, \bar{e}_z\}$ e $\{\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z\}$
$\bar{N}_t$ e $\bar{M}_t$ ,	esforços generalizados prescritos no contorno da placa
$\bar{p}(\bar{x})$	base intrínseca do MLS
$\bar{a}(\bar{x})$	conjunto de coeficientes a determinar no MLS
$m$	número de elementos de $\bar{p}(\bar{x})$
$w(\bar{x})$	função peso do MLS
$J(\bar{a})$	norma de erro discreta
$\Phi_t(\bar{x})$	função de forma global do EFG
$\mathbf{A}(\bar{x})$	matriz momento do EFG
$r_{i_{\max}}$	máxima distância da partícula “ $P$ ” às partículas adjacentes
$s$	fator de abrangência
$\bar{r}_i$	raio do domínio de influência do nó “ $P$ ”
$r$	distância parametrizada entre partículas
$J$	matriz jacobiana

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é desenvolver um programa de análise de placas de materiais compostos laminados usando o Método de Galerkin livre de elementos sem o problema de travamento ao cisalhamento (*shear locking*), como acontece no Método de Elementos Finitos. Este resultado é obtido através da melhoria das funções de interpolação, não sendo necessários artifícios como a integração numérica seletiva reduzida.

O Método de Galerkin livre de elementos pertence à classe dos métodos sem malha, que se caracteriza pelas funções de forma de suporte compacto, fraca dependência dos pontos de aproximação e pela pouca dependência da malha de integração utilizada.

Foi adotada a teoria de primeira ordem para laminados, o que equivale à teoria de placa de Mindlin, por ser sensível ao problema de travamento em placas de pequena espessura. A condição de contorno essencial foi imposta através do Método da Penalidade Exterior. Diversos testes foram realizados para determinar os melhores parâmetros do método, como a escolha da função peso, o domínio de influência e a densidade de partículas.

Por fim, a ausência do fenômeno de travamento ao cisalhamento é confirmada comparando os resultados obtidos pelo método de Galerkin livre de elementos com outros métodos numéricos, com o método de elementos finitos e com soluções analíticas.

# ABSTRACT

The objective of this work is to develop a code for laminated composite plate analysis using the element-free Galerkin Method without the shear locking problem, as is the case for the finite element method. This result is achieved through the improvement of the interpolation functions, and does not resort to the reduced selective integration scheme.

The element-free Galerkin Method belongs to the class of the so called mesh-free methods, which have compact support, weak dependence on the approximation points and little dependence on the integration mesh used.

The first order deformation theory for laminated composites was adopted, which is equivalent to the Mindlin theory, as it is sensitive to locking problem in thin plates. The essential boundary condition was imposed by External Penalty Method. Several tests have been done to determine the better method parameters, like weight function choice, the domain of influence and particles density.

At last, the shear locking absence is confirmed comparing the results from element-free Galerkin Method to other numeric methods, to Finite Element Method and to analytical solutions.

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação e Objetivo do Trabalho

Dentro da área de análise de projetos e mecânica computacional, o método de elementos finitos continua sendo a técnica numérica mais popular, como evidenciado pelas numerosas publicações desde a década de 1970, Liu, Chua e Ghista (2006). Todavia, o método de elementos finitos requer a geração de malha, que é extremamente tediosa e consome muito tempo do processo de análise.

Tendo em vista a redução do custo do processamento computacional e o aumento do custo de recursos humanos, os métodos sem malha têm se apresentado como uma alternativa atraente. Por exemplo, o método de Galerkin livre de elementos pertence à classe dos métodos sem malha e caracteriza-se pelas funções de forma de suporte compacto, fraca dependência dos pontos de aproximação e pouca dependência da malha de integração utilizada.

Além disso, no método de elementos finitos (FEM) o problema de travamento ao cisalhamento em placas e cascas é superado através de artifícios numéricos, como a integração seletiva e reduzida. Comercialmente, são os elementos MITC que têm melhores resultados e conseqüentemente maior aplicação, Bathe, Brezzi e Cho (1989).

O fenômeno do travamento ao cisalhamento (*shear locking*) é resultado da inconsistência entre a rotação e o deslocamento transversal em placas e cascas. Quando a espessura diminui, o travamento ao cisalhamento aparece por causa da incapacidade de representar um estado em que a deformação transversal se anule. O método de Galerkin livre de elementos (EFG) permite a definição de aproximações suaves e consistentes para a rotação e o deslocamento. As funções de forma para a rotação são construídas com a correspondente derivada parcial das funções de forma para o deslocamento. Isto leva à eliminação da inconsistência entre os campos de deslocamento e rotação e, conseqüentemente, à eliminação do travamento ao cisalhamento. Contudo, o desenvolvimento de um procedimento numérico que seja geral e ótimo para todas as categorias é muito raro, bem como a análise matemática

dos esquemas numéricos disponíveis. Assim, é crucial ter disponível problemas testados numericamente e usá-los de maneira a avaliar a capacidade de um método.

Então, em função do cenário exposto acima, é desenvolvida a implementação numérica do método de Galerkin livre de elementos aplicado à análise de placas de materiais compostos laminados sem o defeito do travamento ao cisalhamento (*shear locking*). No método de elementos finitos o problema de travamento é superado através do artifício da integração seletiva reduzida, ao passo que neste trabalho é através da melhoria das funções de interpolação.

Nas aplicações numéricas deste método serão apresentadas avaliações para decidir qual melhor densidade de partícula, melhor fator de abrangência e melhor função peso para esta aplicação. Na seqüência, é verificada a ausência de travamento ao cisalhamento e comparado o desempenho com outros métodos. Este conjunto de resultados poderá contribuir para futuros trabalhos de pesquisa nesta área.

## 1.2 Metodologia

O desenvolvimento deste trabalho seguiu as seguintes etapas: pesquisa e revisão bibliográfica, implementação numérica, comparação de resultados e conclusão.

A etapa de pesquisa e revisão bibliográfica teve o papel de contextualizar o trabalho, descobrir os avanços mais recentes dos assuntos abordados e conferir fundamentação teórica para o desenvolvimento numérico da aplicação do método.

A implementação numérica do método de Galerkin livre de elementos foi feita com base nos aspectos teóricos pesquisados e aproveitando trabalhos da mesma linha de pesquisa já desenvolvidos.

A validação do trabalho foi obtida através da comparação com outros métodos numéricos existentes e soluções analíticas disponíveis na literatura. Esta etapa necessita do acompanhamento das publicações mais recentes, de forma a confirmar a relevância da pesquisa.

Por fim, são feitas as considerações finais e as oportunidades de pesquisas futuras são identificadas. Na conclusão pondera-se quanto ao atendimento dos objetivos iniciais da proposta, bem como quais pontos carecem de maior aprofundamento.

### 1.3 Revisão bibliográfica

O histórico dos métodos sem malha é apresentado por Chen, Lee e Eskandarian (2006). "Smooth Particle Hydrodynamics" (SPH) foi o primeiro método sem malha, proposto em 1977, Lucy (1977 apud CHEN, LEE e ESKANDARIAN, 2006) e Gingold e Monaghan (1977 apud CHEN, LEE e ESKANDARIAN, 2006). Este método foi usado para modelar fenômenos astrofísicos sem contorno, como explosões de estrelas e nuvens de poeira. Desde então tem sido feito extensivo desenvolvimento em muitas variedades com diferentes nomes: método de diferenças finitas generalizado (*generalized finite difference method*), Lyszka e Orkisz (1980 apud CHEN, LEE e ESKANDARIAN, 2006); método de elementos difusos (*diffuse element method*), Nayroles, Touzot e Villon (1992); método da partícula na célula (*particle in cell method*), Sulsky, Chen e Schhreyer (1992 apud CHEN, LEE e ESKANDARIAN, 2006); "*wavelet galerkin method*", Qian e Weiss (1993 apud CHEN, LEE e ESKANDARIAN, 2006); "*reproducing kernel particle method*" (RKPM), Liu, Jun e Zhang (1995); método de Galerkin livre de elementos (*element-free Galerkin*) (EFG), Belytschko, Lu e Gu (1994); partição da unidade (*partition of unity*, PU), Babuska e Melenk (1996); "*Hp clouds*", Duarte e Oden (1996); método dos pontos finitos (*finite point method*), Onate *et al.* (1996a,b); método livre de malha (*free-mesh method*), Yagawa e Furukawa (2000); "*meshless local boundary integration equation method*" e "*meshless local Petrov-Galerkin method*" (MLPG), Atluri e Zhu (2000) e Zhu (1999); e "*multiscale methods*", Liu *et al.* (1997 e 2000).

As principais fontes de pesquisa que deram suporte à elaboração deste trabalho, seja pelo embasamento teórico, seja pela implementação numérica ou pelo comparativo de resultados, são apresentadas a seguir:

- Mecânica do contínuo e teoria de placas: Malvern (1969), Coimbra (1978), Flügge (1972), Zienkiewicz (2000a e 2000b), Cook (2002);
- Materiais compostos laminados: Reddy (1997), Mendonça (2005), Pereira (2004), Goswami (2006);
- Travamento ao cisalhamento em placas: Cook (2002), Belo (2006), Donning e Liu (1998);
- Visão Geral dos métodos sem malha: Liu (2002); Chen, Lee e Eskandarian (2006); Belytschko *et al.* (1996a); Méndez (2001); Idelsohn e Oñate (2006);

- Implementação numérica: Dhatt, Touzot (1984), Leon (1999);
- Soluções analíticas para placas: Reddy (1997), Young e Budynas (2002);
- Soluções numéricas para placas de compostos laminados: Ferreira, Roque e Jorge (2005 e 2006), Calixto (1998), Belo (2006).

## 1.4 Apresentação do Trabalho

Este trabalho está dividido em seis capítulos: introdução, materiais compostos laminados, modelo de placas, método de Galerkin livre de elementos, resultados numéricos e conclusões.

No primeiro capítulo é apresentado o contexto do trabalho, a motivação, os objetivos, a metodologia adotada, as contribuições, a divisão do trabalho e as fontes de pesquisa que fundamentaram o desenvolvimento do tema.

Os três capítulos seguintes mostram um resumo das teorias que embasam o desenvolvimento numérico. O capítulo 2 aborda os fundamentos de materiais compostos laminados com enfoque na relação constitutiva de placas usando FSDT, que equivale à teoria de Mindlin.

O capítulo 3 trata da teoria de placa usada para a aplicação do método sem malha. Inicia com a aplicação das hipóteses da placa de Mindlin na equação diferencial de um corpo elástico da mecânica do contínuo. Obtém-se a forma forte e a forma fraca do problema de placa e acrescenta-se um termo de penalidade ao funcional para impor as condições de contorno essenciais.

O capítulo 4 apresenta uma visão geral dos métodos sem malha e detalha o método de Galerkin livre de elementos. É apresentada a aproximação por mínimos quadrados móveis usando funções peso do tipo *spline* e são desenvolvidas as funções de forma que serão implementadas para interpolar os parâmetros nodais do problema de placa.

No quinto capítulo é apresentada a verificação do programa. É avaliada a influência da densidade de partículas no resultado do problema; é investigada a melhor escolha de função peso; é avaliado o melhor fator de influência das funções peso; e, por fim, é comparado com soluções analíticas, com soluções aproximadas pelo método de elementos finitos e por outros métodos encontrados na literatura.



No último capítulo é apresentada a conclusão do trabalho, os pontos fortes e fracos encontrados no método, o que deve ser mais aprofundado, sugerida novas aplicações e avaliada a contribuição deste trabalho de pesquisa.

## Capítulo 2

# Materiais Compostos Laminados

### 2.1 Introdução

Pode ser definido formalmente um material composto como: “um conjunto de dois ou mais materiais diferentes, combinados em escala macroscópica, para funcionarem como uma unidade, visando obter um conjunto de propriedades que nenhum dos componentes individualmente apresenta”, Mendonça (2005).

As estruturas laminadas, fabricadas em materiais compostos, consistem na sobreposição de várias lâminas, que são formadas por fibras unidirecionais envolvidas por uma matriz (resina). Estas fibras podem estar orientadas diferentemente e têm a finalidade de oferecer resistência mecânica necessária à estrutura, enquanto que a matriz garante sua rigidez. A possibilidade do componente possuir resistência diferente em determinadas direções é uma das principais vantagens que os materiais compostos laminados apresentam em relação aos materiais isotrópicos. Com isso, pode-se projetar um componente com resistência elevada somente nas direções das solicitações.

Considerando que o material composto é formado por constituintes distintos, as propriedades equivalentes de cada lâmina são determinadas a partir das propriedades elásticas de seus constituintes. Esse modelo considera o material composto laminar como sendo um material homogêneo, porém anisotrópico. Em consequência das diferentes propriedades materiais das diferentes lâminas, o laminado resultante é modelado através da teoria da lâmina equivalente, que considera uma adesão perfeita na interface das lâminas, isto é, considera os deslocamentos e as deformações contínuas através da espessura do laminado.

Na análise de tensões de materiais compostos, divide-se o estudo em duas áreas: a micromecânica e a macromecânica. A micromecânica estuda as interações microscópicas entre os elementos constituintes de uma lâmina. Este estudo é utilizado para determinar as constantes de engenharia do material composto. Outra forma de se obter estas constantes é experimentalmente, através de ensaios de tração. A macromecânica refere-se ao

comportamento da lâmina apenas quando propriedades mecânicas aparentes médias são consideradas.

## 2.2 Propriedades da Lâmina

O objetivo da micromecânica é determinar, para uma dada camada de material composto laminar reforçado por fibras, a equação constitutiva referente ao material homogêneo de camada equivalente.

No estudo da micromecânica, as seguintes hipóteses são feitas:

- A lâmina é macroscopicamente homogênea e ortotrópica;
- A lâmina é elástica linear e livre de qualquer tensão interna ou térmica;
- As fibras são uniformes nas propriedades e diâmetros, são contínuas, paralelas e regularmente espaçadas;
- A matriz é considerada homogênea, isotrópica e de comportamento elástico linear;
- Existe perfeita adesão entre matriz e fibra e não existem vazios.

Para o estudo das propriedades mecânicas de uma lâmina, define-se um sistema de coordenadas ortogonal que coincide com o sistema de eixos de ortotropia da lâmina, onde a direção “1” é a longitudinal das fibras; a direção “2” é transversal às fibras, porém no plano da lâmina; e a direção “3” é transversal em relação as fibras e ortogonal ao plano da lâmina. A figura (2.1) mostra este sistema, Young e Budynas (2002).

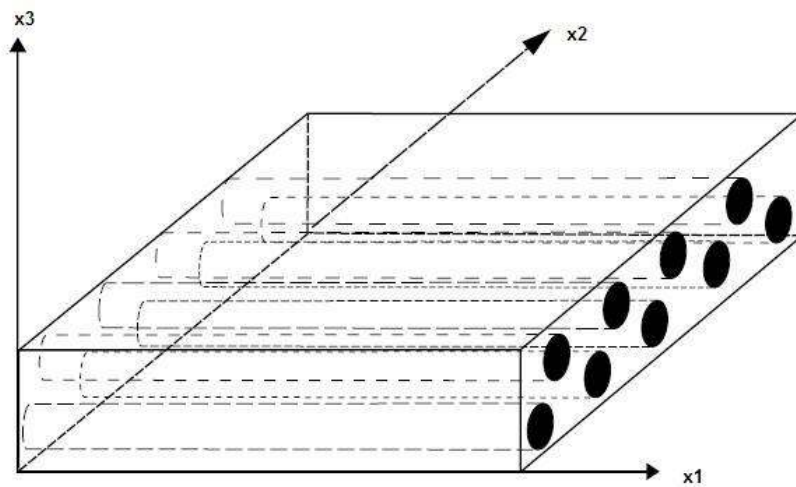


Figura 2.1 – Sistema de eixos de ortotropia da lâmina.

Com base neste sistema de eixos, definem-se as propriedades mecânicas elásticas da lâmina. As constantes de engenharia necessárias para descrever o comportamento do material ortotrópico são:

- $E_i$ : módulo de elasticidade na direção  $i$ ;
- $G_{ij}$ : módulo de cisalhamento no plano  $i-j$ ;
- $\nu_{ij}$ : coeficiente de Poisson referente à deformação na direção  $j$  causada por uma solitação na direção  $i$ .

A equação (2.1) a seguir apresenta a relação entre tensão e deformação dada pela matriz de flexibilidade para este material:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.1)$$

sendo  $\varepsilon_{ii}$  é a deformação no eixo  $i$ ;  $\gamma_{ij}$  é a deformação angular total no plano  $i-j$ ;  $\sigma_{ii}$  é a tensão normal no eixo  $i$ ; e  $\sigma_{ij}$  é a tensão cisalhante no plano  $i-j$ .

A partir da equação (2.1), nota-se que existem apenas nove coeficientes materiais independentes:  $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{23}, G_{13}, \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$ , considerando a simetria da matriz de flexibilidade.

Como as direções “2” e “3” são transversais às fibras e a matriz é considerada isotrópica, é comum considerar a propriedade de isotropia transversa para uma lâmina. As conseqüências desta consideração são mostradas na equação (2.2), reduzindo de nove para seis as constantes materiais:

$$\nu_{12} = \nu_{13}; \quad G_{12} = G_{13}; \quad E_2 = E_3. \quad (2.2)$$

A matriz de flexibilidade, equação (2.1), pode ser escrita na forma matricial compacta como mostra a equação (2.3);

$$\vec{\varepsilon}^L = [S^L] \cdot \vec{\sigma}^L \quad (2.3)$$

Na equação (2.3), o índice  $L$  indica que são valores no sistema de eixos de ortotropia, ou sistema de eixos da lâmina.

Invertendo a matriz de flexibilidade  $[S^L]$ , obtém-se a matriz de rigidez  $[Q^L]$ , i.e.,

$$[Q^L] = [S^L]^{-1} \quad (2.4)$$

Desta forma, pode-se escrever a relação constitutiva de uma lâmina, como mostra a equação (2.5),

$$\vec{\sigma}^L = [Q^L] \cdot \vec{\varepsilon}^L \quad (2.5)$$

As propriedades materiais de uma lâmina ortotrópica podem ser obtidas tanto por uma abordagem teórica quanto por testes de laboratório.

Na abordagem teórica, chamada de abordagem micromecânica, as constantes podem ser expressas em termos dos módulos de elasticidade, coeficientes de Poisson e frações volumétricas dos constituintes. Seja:

- $E_f$  : módulo de elasticidade da fibra;
- $E_m$  : módulo de elasticidade da matriz;
- $\nu_f$  : coeficiente de Poisson da fibra;
- $\nu_m$  : coeficiente de Poisson da matriz;
- $V_f$  : fração volumétrica da fibra;
- $V_m$  : fração volumétrica da matriz.

Então, as constantes de engenharia da lâmina são obtidas usando as equações (2.6) a (2.11), Mendonça (2005),

$$E_1 = E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m ; \quad (2.6)$$

$$\nu_{12} = \nu_f \cdot V_f + \nu_m \cdot V_m ; \quad (2.7)$$

$$E_2 = \frac{E_f \cdot E_m}{E_f \cdot V_m + E_m \cdot V_f} ; \quad (2.8)$$

$$G_2 = \frac{G_f \cdot G_m}{G_f \cdot V_m + G_m \cdot V_f} ; \quad (2.9)$$

$$G_f = \frac{E_f}{2 \cdot (1 + \nu_f)} ; \quad (2.10)$$

$$G_m = \frac{E_m}{2 \cdot (1 + \nu_m)} . \quad (2.11)$$

Os parâmetros de engenharia podem ser determinados experimentalmente usando um corpo de prova do material apropriadamente construído. Por exemplo,  $E_1$  e  $\nu_{12}$  podem ser mensurados através de um ensaio de tração uniaxial. O ensaio consiste em várias camadas do material com todas as fibras alinhadas com a direção longitudinal. O corpo de prova é então submetido a uma carga longitudinal e as deformações são medidas por extensometria. A tensão na direção da fibra,  $\sigma_{11}$ , é obtida dividindo a carga aplicada pela área da secção transversal do corpo de prova.  $\varepsilon_{11}$  e  $\varepsilon_{22}$  são obtidos diretamente dos extensômetros instalados na direção longitudinal e transversal, respectivamente. Para diferentes carregamentos os valores de  $\sigma_{11}$ ,  $\varepsilon_{11}$  e  $\varepsilon_{22}$  podem ser armazenados.  $E_1$  é a inclinação da curva que relaciona  $\sigma_{11}$  e  $\varepsilon_{11}$ .  $\nu_{12}$  é a inclinação da curva que relaciona  $\varepsilon_{22}$  e  $\varepsilon_{11}$ . De maneira similar as demais constantes são obtidas.

## 2.3 Comportamento do Laminado

Como um laminado é composto de diversas lâminas com orientações diferentes, é necessário adotar um sistema de coordenadas de referência para todas as lâminas, de modo que se possa sobrepor as propriedades particulares de cada lâmina e obter a propriedade do laminado. A figura (2.2) mostra a rotação do sistema de ortotropia em relação ao sistema de referência. O eixo  $x_3$  do sistema de ortotropia coincide com o eixo  $z$  do sistema de referência.

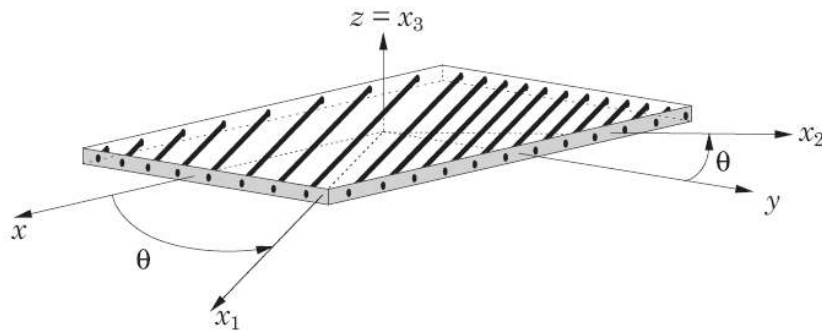


Figura 2.2 – Sistemas de eixos de ortotropia e referência.

Para determinar o comportamento da lâmina no sistema de referência (tensão, deformação e matriz de rigidez), é necessário rotacionar os valores obtidos no sistema de ortotropia para o sistema de referência. Os dois sistemas de coordenadas cartesianas ortonormais são definidos pelas bases  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  e  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  e um vetor arbitrário  $\vec{r}$  pode ser representado como mostra a equação (2.12):

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \\ &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (2.12)$$



Sendo  $\theta$  o ângulo formado entre os eixos  $\bar{e}_1$  e  $\bar{e}_x$ , os vetores das bases são relacionados como indicado na equação (2.13),

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 &= \cos(\theta)\bar{e}_x + \sin(\theta)\bar{e}_y \\ \bar{e}_2 &= -\sin(\theta)\bar{e}_x + \cos(\theta)\bar{e}_y \\ \bar{e}_3 &= \bar{e}_z\end{aligned}\quad (2.13)$$

Assim, o vetor  $\vec{r}$  pode ser escrito como mostra a equação (2.14):

$$\vec{r} = [x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta)]\bar{e}_x + [x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta)]\bar{e}_y + x_3 \bar{e}_z \quad (2.14)$$

As componentes do vetor  $\vec{r}$  no sistema de ortotropia são transformadas nas componentes no sistema de referência através da matriz de rotação  $[R]$ , conforme as equações (2.15) e (2.16), i.e.,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

e

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Sendo  $[\sigma]$  e  $[\sigma^L]$  as matrizes que representam o tensor tensão nas bases  $\{\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z\}$  e  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ , respectivamente, a identidade dada pela equação (2.17) é válida, i.e.,

$$[\sigma]\vec{v} \cdot \vec{v} = [\sigma]^L \vec{v}^L \cdot \vec{v}^L \quad (2.17)$$

Fazendo a transformação de base do vetor  $\vec{v}^L$ , ou seja, fazendo  $\vec{v} = [R]\vec{v}^L$  na equação (2.17), obtem-se a transformação das componentes do tensor  $[\sigma]$  entre os sistemas de coordenadas, equações (2.18) e (2.19). Vale ressaltar que, como as bases são ortonormais, a inversa da matriz de rotação é igual à sua transposta, i.e.,  $[R]^{-1} = [R]^T$ , Malvern (1969).

$$[\sigma]^L = [R]^T [\sigma] [R] \quad (2.18)$$

e, analogamente,

$$[\sigma] = [R][\sigma]^L [R]^T \quad (2.19)$$

Desde que o tensor  $[\sigma]$  seja simétrico, suas seis componentes em cada sistema de coordenadas estão relacionadas como mostra a equação (2.20):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \cos^2(\theta) - 2\sigma_{12} \sin(\theta) \cos(\theta) + \sigma_{22} \sin^2(\theta) \\ \sigma_{11} \sin^2(\theta) + 2\sigma_{12} \sin(\theta) \cos(\theta) + \sigma_{22} \cos^2(\theta) \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \sin(\theta) + \sigma_{23} \cos(\theta) \\ \sigma_{13} \cos(\theta) - \sigma_{23} \sin(\theta) \\ \sigma_{11} \sin(\theta) \cos(\theta) + \sigma_{12} [\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] - \sigma_{22} \sin(\theta) \cos(\theta) \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

O tensor tensão pode ser expresso em forma vetorial, como

$$(\vec{\sigma}^L)^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\} \quad (2.21)$$

e

$$\vec{\sigma}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}\} \quad (2.22)$$

A equação (2.20) pode ser rearrumada e a transformação passa a ser dada pela matriz  $[T_\sigma]$ , equação (2.23), i.e.

$$\vec{\sigma} = [T_\sigma] \vec{\sigma}^L \quad (2.23)$$

A equação (2.24) mostra os elementos da matriz de rotação  $[T_\sigma]$ :

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

A matriz  $[T_\sigma]$  também é válida para o vetor de deformações, conforme a equação (2.25):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} = [T_\sigma] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Porém, quando se trabalha com os componentes do tensor deformação na forma vetorial, usa-se  $\gamma_{ij}$  ao invés de  $\varepsilon_{ij}$ , para  $i \neq j$ , onde  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ . Com a finalidade de manter a consistência da energia interna de deformação dada pelo produto interno da tensão e deformação, seja na forma vetorial ou tensorial, i.e.,

$$[\sigma] \bullet [\varepsilon] = \bar{\sigma} \bullet \bar{\varepsilon}, \quad (2.26)$$

é necessário efetuar alguns algebrismos.

As equações (2.27) e (2.28) mostram os vetores de deformação nos sistemas de ortotropia e de referência, respectivamente.

$$\left(\bar{\varepsilon}^L\right)^T = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}\} \quad (2.27)$$

e

$$\bar{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}\}. \quad (2.28)$$

A equação (2.29) mostra a transformação dos vetores  $\bar{\varepsilon}$  e  $\bar{\varepsilon}^L$  através da matriz de rotação para a deformação  $[T_\varepsilon]$ , construída de forma a compensar a relação  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ , para  $i \neq j$ :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T_\varepsilon] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.29)$$

A equação (2.30) mostra os elementos da matriz de rotação  $[T_\varepsilon]$ :

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sin(2\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sin(2\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -2\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

As matrizes de rotação,  $[T_\sigma]$  e  $[T_\varepsilon]$ , estão relacionadas conforme a equação (2.31) a seguir:

$$[T_\varepsilon]^{-1} = [T_\sigma]^T \quad (2.31)$$

Resumindo, as matrizes  $[T_\sigma]$  e  $[T_\varepsilon]$  transformam as tensões e deformações dadas no sistema de coordenadas de ortotropia em tensões e deformações no sistema de coordenadas de referência, respectivamente.

O objetivo agora é obter a relação constitutiva no sistema de coordenadas de referência representada pela equação (2.32):

$$\bar{\sigma} = [Q] \bar{\varepsilon} \quad (2.32)$$

Para isso tomam-se as equações (2.5), (2.29) e (2.31) e substitui-se na equação (2.23). Como resultado obtém-se a relação dada pela equação (2.33):

$$\bar{\sigma} = [T_\sigma] [Q^L] [T_\sigma]^T \bar{\varepsilon} \quad (2.33)$$

A partir das equações (2.32) e (2.33) pode-se concluir a relação entre a matriz constitutiva no sistema de referência  $[Q]$  e no sistema de ortotropia  $[Q^L]$ , conforme a equação (2.34) abaixo:

$$[Q] = [T_\sigma][Q^L][T_\sigma]^T \quad (2.34)$$

Uma vez calculadas as matrizes de rigidez das lâminas, pode-se estabelecer o comportamento mecânico do laminado.

Até aqui foram apresentadas as relações de tensão, deformação e constitutiva para um sólido tridimensional. Para reduzir o custo computacional e melhorar o condicionamento numérico do sistema modelado, simplifica-se o problema de três para duas dimensões, através de uma hipótese cinemática. Usualmente trabalha-se com as hipóteses da Teoria Clássica de Laminados (*classical laminated plate theory*, CLPT) e da Teoria de Primeira Ordem (*first-order shear deformation theory*, FSDT). Neste trabalho será abordada a Teoria de Primeira Ordem, cuja hipótese cinemática é a utilizada pela teoria de placa de Mindlin, que prevê as solicitações de cisalhamento transverso. Por simplificação, não será considerado o carregamento térmico, ou seja, as tensões e deformações provenientes de variação de temperatura.

## 2.4 Teoria de Primeira Ordem de Mindlin

Para o desenvolvimento do modelo matemático da teoria de primeira ordem são assumidas as hipóteses a seguir, Reddy (1997).

- Uma linha reta perpendicular à superfície média antes da deformação permanece reta após a deformação;
- As normais transversas não sofrem deformações,  $\varepsilon_{zz} = 0$ ;
- Com a deformação do laminado as normais transversas podem rotacionar em relação à superfície média, diferindo da teoria clássica que assume a

conservação da perpendicularidade;

- É negligenciada a tensão normal transversal do laminado, ou seja, é considerado o estado plano de tensões adicionado das duas tensões cisalhantes transversas (apenas  $\sigma_{zz} = 0$ ).

O campo de deslocamentos é dado pela equação (3.35) a seguir:

$$\vec{u} = U(x, y, z) \cdot \vec{e}_x + V(x, y, z) \cdot \vec{e}_y + W(x, y, z) \cdot \vec{e}_z, \quad (3.35)$$

onde:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u(x, y) - z \cdot \theta_y(x, y) \\ V(x, y, z) &= v(x, y) + z \cdot \theta_x(x, y) \\ W(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Na equação (2.36), as funções  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$  representam os deslocamentos generalizados.  $u$ ,  $v$  e  $w$  são deslocamentos, definidos na superfície média, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.  $\theta_x$  e  $\theta_y$  representam as rotações das normais transversais sobre os eixos  $x$  e  $y$ , e obedecem a regra da mão direita.

O campo de deformações infinitesimais está relacionado ao campo de deslocamentos generalizados conforme as equações (2.37) a (2.42) a seguir:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \varepsilon_{xx}^0 + z \cdot \kappa_{xx}; \quad (2.37)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \varepsilon_{yy}^0 + z \cdot \kappa_{yy}; \quad (2.38)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0; \quad (2.39)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \gamma_{xy}^0 + z \cdot \kappa_{xy} \quad (2.40)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.41)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.42)$$

Os termos  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$ ,  $\gamma_{xy}^0$ ,  $\kappa_{xx}$ ,  $\kappa_{yy}$ ,  $\kappa_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{xz}$  definem as deformações generalizadas e podem ser representadas por um vetor  $\bar{\kappa}$ , conforme mostra a equação (2.43):

$$\bar{\kappa}^T = \left\{ \varepsilon_{xx}^0 \quad \varepsilon_{yy}^0 \quad \gamma_{xy}^0 \quad \kappa_{xx} \quad \kappa_{yy} \quad \kappa_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \right\} \quad (2.43)$$

Como a maioria dos laminados são tipicamente finos e são sujeitos a tensões planas, tem-se  $\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ , porém a teoria de primeira ordem admite as tensões cisalhantes transversas,  $\sigma_{23}$  e  $\sigma_{13}$ . Então, em virtude da imposição da condição  $\sigma_{33} = 0$ , a matriz de flexibilidade e os vetores tensão e deformação, no sistema de ortotropia, são da forma mostrada nas equações (2.44), (2.45) e (2.46).



$$[S^L] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix}; \quad (2.44)$$

$$\left(\bar{\sigma}^{-L}\right)^T = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13}\}; \quad (2.45)$$

$$\left(\bar{\varepsilon}^{-L}\right)^T = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{13}\}. \quad (2.46)$$

Com a matriz de flexibilidade  $[S^L]$ , dada pela equação (2.44), as matrizes de rotação dos vetores tensão e deformação passam a ser definidos pelas equações (2.47) e (2.48), respectivamente, onde  $\theta$  é o ângulo formado entre o eixo 1, alinhamento das fibras, e o eixo de referência  $x$ .

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & -2.\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 2.\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

e

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 \\ 2.\sin(\theta)\cos(\theta) & -2.\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Na forma matricial compacta, as mesmas relações válidas para o caso tridimensional, valem para a Teoria de Primeira Ordem, bidimensional, como mostram as equações (2.49) a (2.52):

$$\bar{\varepsilon}^L = [S^L] \bar{\sigma}; \quad (2.49)$$

$$[Q^L] = [S^L]^{-1}; \quad (2.50)$$

$$\bar{\sigma} = [Q] \bar{\varepsilon}; \quad (2.51)$$

$$[Q] = [T_\sigma] [Q^L] [T_\sigma]^T. \quad (2.52)$$

Os vetores tensão e deformação no sistema de referência passam a ser redefinidos conforme as equações (2.53) e (2.54), i.e.,

$$\bar{\sigma}^{-T} = \{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \} \quad (2.53)$$

e

$$\bar{\varepsilon}^{-T} = \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \}. \quad (2.54)$$

Os esforços generalizados são de três tipos: membrana, momentos e cortantes. Os esforços generalizados de membrana são definidos pela equação (2.55); os momentos pela equação (2.56); e os cortantes pela equação (2.57); conforme Pereira (2004):

$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx} \cdot dz; \quad N_{yy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yy} \cdot dz; \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xy} \cdot dz; \quad (2.55)$$

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx} \cdot z \cdot dz; \quad M_{yy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yy} \cdot z \cdot dz; \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xy} \cdot z \cdot dz; \quad (2.56)$$

$$Q_{yz} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yz} \cdot dz; \quad Q_{xz} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xz} \cdot dz. \quad (2.57)$$

Os esforços generalizados podem ser representados por um vetor  $\bar{M}$ , conforme mostra a equação (2.58):

$$\bar{M}^T = \{N_{xx} \quad N_{yy} \quad N_{xy} \quad M_{xx} \quad M_{yy} \quad M_{xy} \quad Q_{yz} \quad Q_{xz}\}. \quad (2.58)$$

O objetivo agora é definir a relação constitutiva entre os esforços e as deformações generalizadas, matriz  $[C]$  da equação (2.59), onde:

$$\bar{M} = [C] \bar{\kappa}. \quad (2.59)$$

Para se determinar a matriz  $[C]$ , é necessário definir a identificação das lâminas do laminado, bem como as coordenadas inferior e superior de cada lâmina. A figura (2.4) mostra o critério adotado neste trabalho. O laminado tem  $N$  lâminas, a espessura total do laminado é  $h$  e uma lâmina qualquer  $k$  tem coordenada inferior  $z_k$  e coordenada superior  $z_{k+1}$ .

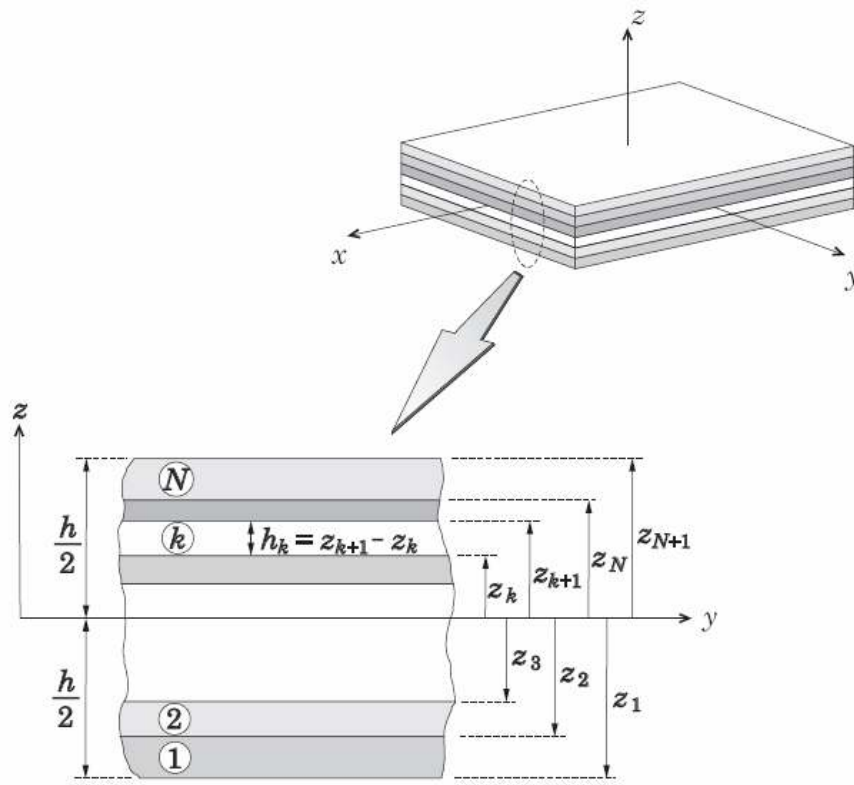


Figura 2.3 – Identificação das lâminas no laminado.

No caso de se considerar materiais compostos, têm-se, para cada lâmina  $k$ , a relação constitutiva dada pela equação (2.60),

$$\bar{\sigma} = [Q^{(k)}] \bar{\varepsilon}, \tag{2.60}$$

sendo que a matriz  $[Q^{(k)}]$  representa a matriz constitutiva associada à  $k$ -ésima lâmina. A expressão da matriz  $[Q^{(k)}]$  é obtida pela equação (2.61), onde  $[Q^{L(k)}]$  significa a matriz de rigidez da lâmina no sistema de eixos de ortotropia e  $[T_{\sigma}^{(k)}]$  é a matriz de rotação definida pela equação (2.47).

$$[Q^{(k)}] = [T_\sigma^{(k)}][Q^{L(k)}][T_\sigma^{(k)}]^T \quad (2.61)$$

Conseqüentemente, a matriz  $[Q^{(k)}]$  tem a forma dada pela equação (2.62) abaixo.

$$[Q^{(k)}] = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & Q_{13}^{(k)} & 0 & 0 \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & Q_{23}^{(k)} & 0 & 0 \\ Q_{31}^{(k)} & Q_{32}^{(k)} & Q_{33}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}^{(k)} & Q_{45}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{54}^{(k)} & Q_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Observando a forma da matriz  $[Q^{(k)}]$ , conclui-se que as tensões de cisalhamento transversal,  $\sigma_{yz}$  e  $\sigma_{xz}$ , são desacopladas das tensões no plano  $x-y$ ,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$  o que acarreta nas seguintes relações:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & Q_{13}^{(k)} \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & Q_{23}^{(k)} \\ Q_{31}^{(k)} & Q_{32}^{(k)} & Q_{33}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^0 + z \cdot \kappa_{xx} \\ \epsilon_{yy}^0 + z \cdot \kappa_{yy} \\ \epsilon_{xy}^0 + z \cdot \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.63)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44}^{(k)} & Q_{45}^{(k)} \\ Q_{54}^{(k)} & Q_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

A partir da definição dos esforços generalizados de membrana, equação (2.55), obtém-se

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.65)$$

Substituindo a equação (2.63) na equação (2.65) e resolvendo a integral, obtém-se a equação (2.66), que relaciona os esforços de membrana generalizados com as deformações generalizadas.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

As matrizes  $[A]$  e  $[B]$  são definidas pelas equações (2.67) e (2.68), i.e.,

$$[A] = \sum_{k=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & Q_{13}^{(k)} \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & Q_{23}^{(k)} \\ Q_{31}^{(k)} & Q_{32}^{(k)} & Q_{33}^{(k)} \end{bmatrix} (z_{k+1} - z_k) \right\} \quad (2.67)$$

e

$$[B] = \sum_{k=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & Q_{13}^{(k)} \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & Q_{23}^{(k)} \\ Q_{31}^{(k)} & Q_{32}^{(k)} & Q_{33}^{(k)} \end{bmatrix} \frac{(z_{k+1}^2 - z_k^2)}{2} \right\} \quad (2.68)$$

Procedendo de forma análoga para os momentos generalizados, equação (2.56), obtém-se

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.69)$$

Substituindo a equação (2.63) na equação (2.69) e resolvendo a integral, obtém-se a equação (2.70), que relaciona os momentos generalizados com as deformações generalizadas.

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

A matriz  $[B]$  já foi definida pela equação (2.68) e a matriz  $[D]$  é definida pela equação (2.71).

$$[D] = \sum_{k=1}^N \begin{Bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & Q_{13}^{(k)} \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & Q_{23}^{(k)} \\ Q_{31}^{(k)} & Q_{32}^{(k)} & Q_{33}^{(k)} \end{Bmatrix} \frac{(z_{k+1}^3 - z_k^3)}{3} \quad (2.71)$$

Finalmente, pode-se escrever a equação (2.72) sobre os esforços cortantes generalizados, i.e.,

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = k_\sigma \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.72)$$

As tensões cisalhantes no modelo matemático da teoria de primeira ordem são constantes ao longo da espessura do laminado, ao passo que as tensões reais variam parabolicamente. Portanto, o fator  $k_\sigma$  é aplicado no cálculo destas tensões para corrigir esta

discrepância.  $k_\sigma$  é chamado de fator de correção do cisalhamento e é comumente adotado o valor de 5/6.

Substituindo a equação (2.64) na equação (2.72) e resolvendo a integral, obtem-se a equação (2.73), que relaciona os cortantes generalizados com as deformações generalizadas, i.e.,

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = k_\sigma [F] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.73)$$

A matriz  $[F]$  é definida pela equação (2.74), dada por

$$[F] = \sum_{k=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} Q_{44}^{(k)} & Q_{45}^{(k)} \\ Q_{54}^{(k)} & Q_{55}^{(k)} \end{bmatrix} (z_{k+1} - z_k) \right\} \quad (2.74)$$

Conseqüentemente, a matriz  $[C]$  que relaciona os esforços e deformações generalizadas, equação (2.59), pode ser determinada calculando-se separadamente as matrizes  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[D]$  e  $[F]$  e montando-as conforme a equação (2.75), i.e.,

$$[C] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$



Uma vez obtido os valores das deformações generalizadas do laminado,  $k$ , no sistema de coordenadas de referência, é possível calcular as deformações em cada lâmina,  $\bar{\varepsilon}^{(k)}$ , usando as relações apresentadas na equação (2.76), onde  $z^{(k)}$  é a coordenada do ponto de interesse e  $z_k \leq z^{(k)} \leq z_{k+1}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(k)} &= \varepsilon_{xx}^0 + z^{(k)} \cdot \kappa_{xx}; & \varepsilon_{yy}^{(k)} &= \varepsilon_{yy}^0 + z^{(k)} \cdot \kappa_{yy}; \\ \gamma_{xy}^{(k)} &= \gamma_{xy}^0 + z^{(k)} \cdot \kappa_{xy}; & \gamma_{yz}^{(k)} &= \gamma_{yz}^0; & \gamma_{yz}^{(k)} &= \gamma_{yz}^0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

Assim, aplica-se a equação (2.77) e obtém-se o vetor das deformações da lâmina no sistema de eixos de ortotropia,  $\bar{\varepsilon}^{(k)L}$ , como

$$\bar{\varepsilon}^{(k)L} = \left[ T_{\sigma}^{(k)} \right]^T \bar{\varepsilon}^{(k)} \quad (2.77)$$

Por fim, usam-se as matrizes de rigidez da lâmina, no sistema de eixos de ortotropia ou de referência, para se obter as tensões da lâmina,  $\bar{\sigma}^{(k)L}$  ou  $\bar{\sigma}^{(k)}$ , conforme as equações (2.78) e (2.79), i.e.,

$$\bar{\sigma}^{(k)L} = \left[ Q^{(k)L} \right] \bar{\varepsilon}^{(k)L} \quad (2.78)$$

e

$$\bar{\sigma}^{(k)} = \left[ Q^{(k)} \right] \bar{\varepsilon}^{(k)} \quad (2.79)$$

Neste capítulo foi mostrado como obter a relação constitutiva dos esforços e deformações generalizados para uma placa de material composto laminado, considerando a Teoria de Primeira Ordem de Mindlin. Também foram definidas as propriedades, convenções e simplificações adotadas neste trabalho.

Este conjunto de informações é essencial para o desenvolvimento da teoria de placas, capítulo 3, e posterior discretização numérica utilizando o método de Galerkin livre de elementos, capítulo 5.

## Capítulo 3

# Modelo de Placas

### 3.1 Introdução

O assunto de placas sob flexão e suas extensões, segundo Zienkiewicz (2000b), foi um dos primeiros em que o método de elementos finitos foi aplicado, no início da década de 1960. Nesta época várias dificuldades foram encontradas e não totalmente compreendidas, razão pela qual este tema continua sendo pesquisado até os dias de hoje.

Placas e cascas são formas particulares de sólidos tridimensionais, cujo tratamento não apresenta nenhuma dificuldade teórica, ao menos no caso da elasticidade. A espessura destas estruturas é pequena quando comparada com as outras dimensões. Assim o tratamento numérico tridimensional não é somente custoso, mas também pode levar a sérios problemas numéricos de mal-condicionamento.

Uma placa de espessura  $h$  tem uma superfície média a uma distância de  $h/2$  de cada uma das superfícies laterais. Para análise, a superfície média fica localizada no plano  $xy$ , podendo ser identificada por  $z = 0$ .

Considerando a superfície média, é possível simplificar um problema tridimensional a um problema bidimensional através de uma teoria de placas.

Existem várias teorias para análise de placas que podem ser divididas em três categorias principais: teoria de placas finas, de placas semi-espessas e de placas espessas. A seguir alguns exemplos de teorias:

- Teoria de placa fina, também conhecida como teoria clássica de placas ou teoria de placa de Kirchhoff, em reconhecimento a pesquisa sobre teoria de placas realizada em 1850;
- Teoria de placa semi-espessa, também conhecida como teoria de placa de

primeira ordem, teoria de placa de Mindlin ou Mindlin-Reissner, desenvolvida em torno de 1950;

- Teorias de ordem superior, a exemplo da teoria de Kant e a teoria de terceira ordem de Readdy.

A teoria de Kirchhoff despreza o cisalhamento transversal, motivo pelo qual só é aplicada a placas finas. A teoria de Mindlin considera o cisalhamento transversal, porém assume ser constante, o que leva a alguns erros como o aparecimento de modos espúrios e travamento ao cisalhamento (*shear locking*). As teorias de ordem superior permitem uma melhor aproximação das tensões cisalhantes, porém com um custo computacional maior.

Como o objetivo deste trabalho é aplicar um método sem malha à teoria de placa e verificar a melhoria na aproximação, será usada a teoria de Mindlin, por ser mais sensível aos problemas numéricos. Assim, esta teoria será detalhada na seqüência deste capítulo.

## 3.2 Elasticidade Infinitesimal 3D

O problema clássico da elasticidade linear sob pequenas deformações e deslocamentos 3D pode ser formulado, segundo Malvern (1969), como indicado na equação (3.1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \vec{b} = 0 \text{ em } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \vec{n} = \vec{t} \text{ em } \Gamma_t \\ \vec{u} = \vec{\bar{u}} \text{ em } \Gamma_u \end{array} \right. \quad (3.1)$$

A figura (3.1) ilustra este problema, no qual  $\Omega$  é uma subregião do  $R^3$  com fronteira regular ocupada por um corpo elástico;  $\Gamma_t$  é a região do contorno deste corpo com tração prescrita;  $\Gamma_u$  é a região do contorno com deslocamento prescrita;  $\partial\Omega = \Gamma_t \cup \Gamma_u$  é todo o contorno; e  $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$ .

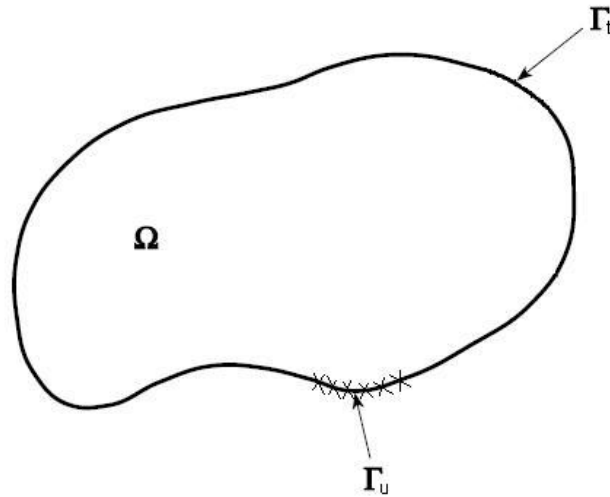


Figura 3.1 – Problema elástico tridimensional.

Agora, o problema clássico da elasticidade pode ser escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{determinar } u_i \in H^1(\Omega) \text{ solução de} \\ \bar{u} = \underset{\forall \bar{w} \in S}{\text{arg min}} \Pi(\bar{w}) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Na equação (3.2),  $S = \{u_i \in H^1(\Omega) \mid u_i - \bar{u}_i = 0 \text{ em } \Gamma_u\}$  e o funcional  $\Pi(\bar{w})$  é dado pela equação (3.3) da energia potencial total, Zienkiewicz (2000a), i.e.,

$$\Pi(\bar{w}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \bar{b} \cdot \bar{w} \cdot d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{t} \cdot \bar{w} \cdot d\Gamma \quad (3.3)$$

Este problema pode ser reformulado acrescentando ao funcional (3.3) um termo de penalidade que incorpora a condição de contorno essencial, ou seja, o funcional modificado irá impor implicitamente o deslocamento prescrito na região  $\Gamma_u$ .

O funcional da energia potencial total modificado  $\Pi_\eta(\vec{w})$ , incorporando a condição de contorno essencial, é dado por

$$\Pi_\eta(\vec{w}) = \frac{1}{2} \int_\Omega \vec{\sigma} \cdot \vec{\varepsilon} \, d\Omega - \int_\Omega \vec{b} \cdot \vec{w} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \vec{t} \cdot \vec{w} \, d\Gamma + \frac{1}{2\eta} \int_{\Gamma_u} \left\| \vec{u} - \vec{u} \right\|^2 \, d\Gamma \quad (3.4)$$

Desta forma, o problema passa a ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{determinar } u_i \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \vec{u} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \vec{u}_\eta \end{array} \right. , \quad (3.5)$$

em que  $\vec{u}_\eta$  é solução de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } \eta > 0 \text{ determinar } u_i \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \vec{u}_\eta = \arg \min_{\vec{w} \in S} \Pi_\eta(\vec{w}) \end{array} \right. . \quad (3.6)$$

### 3.3 Teoria de Placas

As teorias de placas usadas para análise de materiais compostos laminados diferem basicamente na hipótese cinemática, Reddy (1997). A figura (3.2) ilustra as três hipóteses cinemáticas mais comuns: a teoria clássica (*classical laminated plate theory*, CLPT), a teoria de primeira ordem (*first-order shear deformation theory*, FSDT) e a teoria de terceira ordem (*third-order shear deformation theory*, TSDT). A teoria clássica assume que: uma linha reta perpendicular à superfície média antes do carregamento permanece reta e perpendicular após o carregamento, a placa é inextensível ao longo da espessura e as deformações cisalhantes são nulas. A teoria de primeira ordem, ou de Mindlin, difere da teoria clássica por admitir que, na configuração deformada, a linha reta não é necessariamente perpendicular à superfície média

e as deformações cisalhantes não são nulas, porém constantes ao longo da espessura. Na teoria de terceira ordem, o campo de deslocamento permite uma variação quadrática das tensões de cisalhamento.

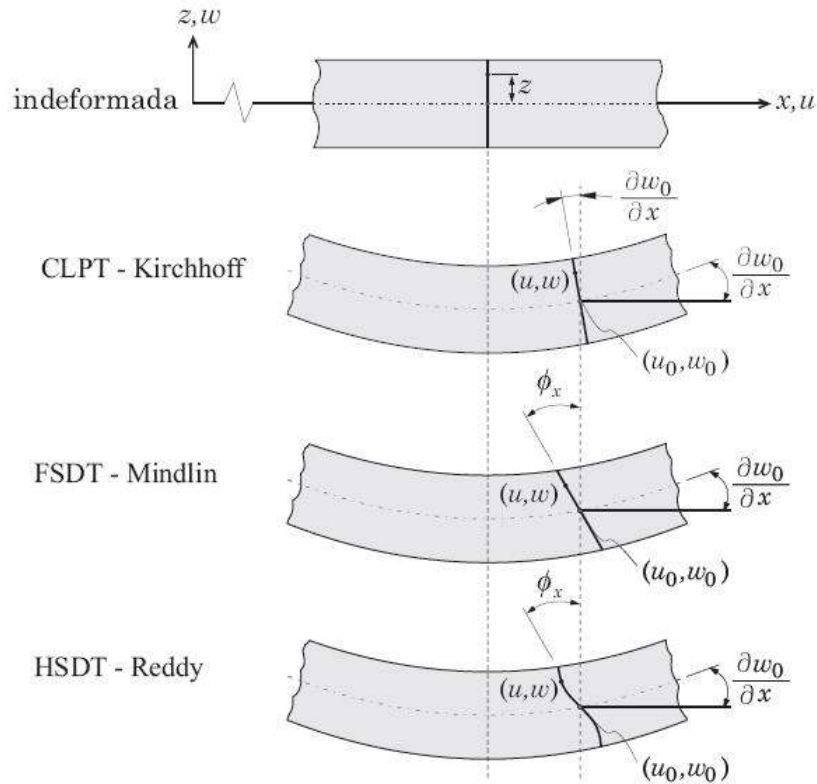


Figura 3.2 – Hipóteses cinemáticas aplicadas a materiais compostos laminados.

### 3.4 Teoria de Mindlin

Segundo Cook (2002), a teoria de Mindlin idealiza o comportamento da placa, assumindo que uma linha reta e normal à superfície média antes do carregamento permanece reta, mas não necessariamente normal à superfície média após a aplicação do carregamento. A figura (3.3) mostra os graus de liberdade de um ponto de um elemento diferencial de placa.

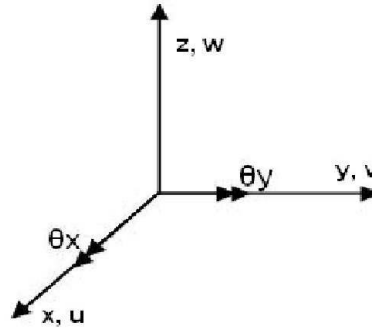


Figura 3.3 - Graus de liberdade de um ponto da placa.

Considera-se o corpo  $\Omega$  representando uma placa fina onde o efeito da tensão transversal cisalhante é considerado (Teoria de Placa Semi-espessa).

Hipóteses:

i) A teoria de Mindlin considera o campo de deslocamento dado por

$$\vec{u}(x, y, z) = \vec{u}_0(x, y) - z \vec{\theta}(x, y) \quad (3.7)$$

Na equação (3.7), os vetores  $\vec{u}_0$  e  $\vec{\theta}$  são chamados de deslocamentos generalizados (deslocamentos e rotações) e são definidos pelas equações

$$\vec{u}_0(x, y) = u(x, y) \cdot \vec{e}_x + v(x, y) \cdot \vec{e}_y + w(x, y) \cdot \vec{e}_z \quad (3.8)$$

e

$$\vec{\theta}(x, y) = -\theta_x(x, y) \cdot \vec{e}_x + \theta_y(x, y) \cdot \vec{e}_y \quad (3.9)$$

O campo de deslocamento também pode ser escrito de outra forma, como mostram as equações (3.10) e (3.11), i.e.,



$$\vec{u}(x, y, z) = U(x, y, z)\vec{e}_x + V(x, y, z)\vec{e}_y + W(x, y, z)\vec{e}_z \quad (3.10)$$

em que

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u(x, y) - z\theta_y(x, y) \\ V(x, y, z) &= v(x, y) + z\theta_x(x, y) \\ W(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (3.11)$$

A dependência do campo de deslocamento em relação à coordenada  $z$  passa a ser explícita, permitindo que o funcional do problema, equação (3.3), possa ser integrado em  $z$ , tornando o problema bidimensional.

ii) Considera-se que a tensão normal ao longo da espessura é nula,  $\sigma_{zz} \approx 0$ .

iii) Os componentes do tensor de deformação infinitesimal podem ser expressos pelas equações (3.12) e (3.13).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad (3.12)$$

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}; \quad 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}; \quad 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \quad (3.13)$$

Substituindo as componentes do campo de deslocamento nas equações (3.12) e (3.13), obtém-se:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \varepsilon_{xx}^o + z \cdot \kappa_{xx} \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \varepsilon_{yy}^o + z \cdot \kappa_{yy} \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (3.16)$$

$$\gamma_{xy} = \left[ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right] = \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] + z \left[ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right] = \gamma_{xy}^o + z \cdot \kappa_{xy} \quad (3.17)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.18)$$

e

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.19)$$

Os termos  $\varepsilon_{xx}^o$ ,  $\varepsilon_{yy}^o$ ,  $\gamma_{xy}^o$ ,  $\kappa_{xx}$ ,  $\kappa_{yy}$ ,  $\kappa_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  definem as deformações generalizadas e podem ser representados por um vetor  $\vec{\kappa}$ , conforme mostra a equação (3.20), i.e.,

$$\vec{\kappa}^T = \left\{ \varepsilon_{xx}^o \quad \varepsilon_{yy}^o \quad \gamma_{xy}^o \quad \kappa_{xx} \quad \kappa_{yy} \quad \kappa_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \right\} \quad (3.20)$$

### 3.5 Aplicação do Princípio da Mínima Energia Potencial Total

O princípio da mínima energia potencial total pode ser formulado como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{determinar } u_i \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \vec{u} = \arg \min_{\forall \vec{w} \in S} \Pi(\vec{w}) \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Na equação (3.21),  $S = \{u_i \in H^1(\Omega) \mid u_i - \bar{u}_i = 0 \text{ em } \Gamma_u\}$  e o funcional  $\Pi(\bar{w})$  é dado pela equação (3.22) da energia potencial total, Shames (1985), i.e.,

$$\Pi(\bar{w}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon \, d\Omega - \int_{\Omega} \bar{b} \cdot \bar{w} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{t} \cdot \bar{w} \, d\Gamma \quad (3.22)$$

Considerando a hipótese cinemática, a dependência do campo de deslocamento em relação à coordenada  $z$  passa a ser explícita, permitindo que o funcional do problema, equação (3.22), possa ser integrado em  $z$ , transformando o problema tridimensional em bidimensional. O primeiro termo do funcional pode ser expresso como mostra a equação (3.23),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\bar{u}) \cdot \varepsilon(\bar{u}) \, d\Omega &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} \right] \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \sigma_{xx} \left( \varepsilon_{xx}^o + z \kappa_{xx} \right) + \sigma_{yy} \left( \varepsilon_{yy}^o + z \kappa_{yy} \right) + \right. \\ &\quad \left. \sigma_{xy} \left( \gamma_{xy}^o + z \kappa_{xy} \right) + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} \right] \, dz \, dA \end{aligned} \quad (3.23)$$

Os esforços generalizados são de três tipos: membrana, momentos e cortantes. Estes esforços foram definidos no capítulo 2, conforme as equações (2.55), (2.56) e (2.57), e podem ser representados por um vetor  $\vec{M}$ , conforme a equação (2.58).

Aplicando a definição de esforços generalizados e do campo de deformações na equação (3.23), obtém-se a equação (3.24):

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\bar{u}) \cdot \varepsilon(\bar{u}) \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_A \vec{M} \cdot \vec{\kappa} \, dA \quad (3.24)$$

Supondo o material linear elástico, a relação constitutiva é dada por

$$\vec{M} = [C] \cdot \vec{\kappa}, \quad (3.25)$$

em que  $[C]$  é obtido conforme visto no capítulo 2.

Substituindo a equação (3.25) na equação (3.24), encontra-se a igualdade dada por

$$\frac{1}{2} \int_A \vec{M} \cdot \vec{\kappa} \cdot dA = \frac{1}{2} \int_A [C] \cdot \vec{\kappa} \cdot \vec{\kappa} \cdot dA \quad (3.26)$$

O segundo termo do funcional, considerando o peso próprio e a hipótese cinemática, pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} \cdot d\Omega &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^k \cdot \vec{g} \cdot \vec{u} \cdot dz \cdot dA \\ &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho^k \cdot \vec{g} \cdot [\vec{u}_0 - z \vec{\theta}] \cdot dz \cdot dA \\ &= \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k \cdot (h^{k+1} - h^k) \right\} \cdot \vec{g} \cdot \vec{u}_0 \cdot dA \end{aligned} \quad (3.27)$$

Na equação (3.27),  $\rho$  significa a densidade do material,  $\vec{g}$  a aceleração da gravidade, o sobrescrito  $k$  identifica a lâmina e  $n$  é o número total de lâminas do laminado.

O contorno da placa pode ser dividido em três regiões. A primeira região é a superfície delimitada pelo contorno e a espessura da placa, que pode ser chamada de borda. A segunda região é a superfície com coordenada  $z = +\frac{h}{2}$ , ou superfície superior. A terceira região é a superfície com coordenada  $z = -\frac{h}{2}$ , ou superfície inferior. Desta forma o termo do funcional referente ao carregamento prescrito, o terceiro termo, deve ser dividido em três, conforme a equação (3.28),

$$\int_{\Gamma_i} \vec{t} \cdot \vec{u} \, d\Gamma = \int_{\partial A_i} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\vec{t} \cdot \vec{u}) \, dz \, dS + \int_{A_i(z=+h/2)} (\vec{t} \cdot \vec{u}) \, dA + \int_{A_i(z=-h/2)} (\vec{t} \cdot \vec{u}) \, dA \quad (3.28)$$

Por simplicidade, será considerado o carregamento na borda da placa e o distribuído na superfície neutra ( $z = 0$ ). Assim, o termo de carregamento prescrito do funcional pode ser representado como mostra a equação (3.29),

$$\int_{\Gamma_i} \vec{t} \cdot \vec{u} \, d\Gamma = \int_{\partial A_i} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\vec{t} \cdot \vec{u}) \, dz \, dS + \int_{A_i} (\vec{t} \cdot \vec{u}) \, dA \quad (3.29)$$

O carregamento prescrito na borda pode ter 3 direções: normal à superfície “ $n$ ”, tangente à superfície “ $s$ ” e na direção de “ $z$ ”, figura (3.4). Estas três direções formam um sistema de coordenadas,  $(\vec{e}_n, \vec{e}_s, \vec{e}_z)$ , Reddy (1997). Logo, o carregamento prescrito na borda pode ser decomposto nestas coordenadas, conforme a equação (3.30),

$$\begin{aligned} \vec{t} &= t_n \cdot \vec{e}_n + t_s \cdot \vec{e}_s + t_z \cdot \vec{e}_z \\ &= t_x \cdot \vec{e}_x + t_y \cdot \vec{e}_y + t_z \cdot \vec{e}_z \end{aligned} \quad (3.30)$$

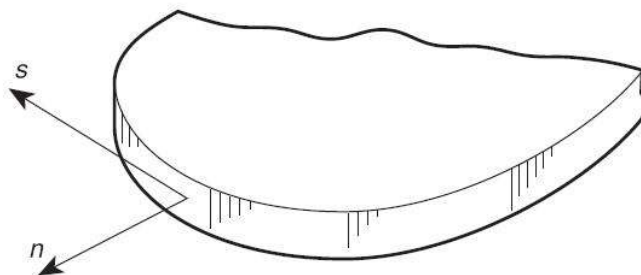


Figura 3.4 – Direções normal e tangente à borda da placa.

Considerando  $\alpha$  o ângulo formado entre  $\vec{e}_n$  e  $\vec{e}_x$ , a transformação de coordenadas entre os dois sistemas é realizada de acordo com a equação (3.31),

$$\begin{aligned}\vec{e}_n &= \cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y \\ \vec{e}_s &= -\sin(\alpha)\vec{e}_x + \cos(\alpha)\vec{e}_y\end{aligned}\quad (3.31)$$

A decomposição do vetor  $\vec{t}$  pode ser reescrita em função da base cartesiana como mostra a equação (3.32),

$$\vec{t} = [t_n \cos(\alpha) - t_s \sin(\alpha)]\vec{e}_x + [t_n \sin(\alpha) + t_s \cos(\alpha)]\vec{e}_y + t_z \vec{e}_z \quad (3.32)$$

Com base na decomposição do vetor  $\vec{t}$ , o termo de carregamento prescrito na borda da placa é desenvolvido como

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} \cdot \vec{u} \, dz \, dS &= \int_{\partial A} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} \cdot [\vec{u}_0 - z \vec{\theta}] \, dz \, dA \\ &= \int_{\partial A} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ [t_n \cos(\alpha) - t_s \sin(\alpha)] u + \right. \\ &\quad + [t_n \sin(\alpha) + t_s \cos(\alpha)] v + \\ &\quad + t_z w + [t_n \cos(\alpha) - t_s \sin(\alpha)] z \theta_y + \\ &\quad \left. - [t_n \sin(\alpha) + t_s \cos(\alpha)] z \theta_x \right\} dz \, dA\end{aligned}\quad (3.33)$$

A definição de esforços de carregamento prescritos generalizados é dada por

$$\begin{aligned}\bar{N}_n &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_n \cdot dz; \quad \bar{N}_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_s \cdot dz; \quad \bar{N}_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_z \cdot dz; \\ \bar{M}_n &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_n \cdot z \cdot dz; \quad \bar{M}_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_s \cdot z \cdot dz\end{aligned}\tag{3.34}$$

A equação (3.33) pode ser reescrita usando os esforços generalizados, obtendo-se

$$\begin{aligned}\int_{\partial A_i} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} \cdot \vec{u} \cdot dz \cdot dS &= \int_{\partial A_i} \left\{ \left[ \bar{N}_n \cdot \cos(\alpha) - \bar{N}_s \cdot \sin(\alpha) \right] \cdot u + \right. \\ &+ \left[ \bar{N}_n \cdot \sin(\alpha) + \bar{N}_s \cdot \cos(\alpha) \right] \cdot v + \\ &+ \bar{N}_z \cdot w + \left[ \bar{M}_n \cdot \cos(\alpha) - \bar{M}_s \cdot \sin(\alpha) \right] \cdot \theta_y + \\ &\left. - \left[ \bar{M}_n \cdot \sin(\alpha) + \bar{M}_s \cdot \cos(\alpha) \right] \cdot \theta_x \right\} \cdot dA\end{aligned}\tag{3.35}$$

Os esforços de carregamento generalizados podem ser representados pelos vetores  $\bar{\bar{N}}_t$  e  $\bar{\bar{M}}_t$ , conforme a equação (3.36),

$$\begin{aligned}\bar{\bar{N}}_t &= \{ \bar{N}_n, \bar{N}_s, \bar{N}_z \} \\ \bar{\bar{M}}_t &= \{ \bar{M}_n, \bar{M}_s \}\end{aligned}\tag{3.36}$$

Na forma matricial, a equação (3.36) pode ser reescrita como

$$\int_{\partial A_i} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{t} \cdot \vec{u} \cdot dz \cdot dS = \int_{\partial A_i} \left( [\alpha 3] \cdot \bar{\bar{N}}_t \cdot \vec{u}_0 - [\alpha 2] \cdot \bar{\bar{M}}_t \cdot \vec{\theta} \right) \cdot dS\tag{3.37}$$

Na equação (3.37), as matrizes  $[\alpha 3]$  e  $[\alpha 2]$  são definidas pela equação

$$[\alpha 3] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } [\alpha 2] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Aplicando a hipótese cinemática no termo de carregamento prescrito na superfície neutra ( $z = 0$ ) obtém-se

$$\int_{A_t} \bar{\bar{q}} \cdot \bar{u} \, dA = \int_A \bar{\bar{q}} \cdot [\bar{u}_0 - z \bar{\theta}] \, dA = \int_A \bar{\bar{q}} \cdot \bar{u}_0 \, dA \quad (3.39)$$

Substituindo os termos desenvolvidos, equações (3.24), (3.27), (3.37) e (3.39) no funcional do problema, equação (3.22), encontra-se

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{u}_0, \bar{\theta}) = & \frac{1}{2} \int_A \bar{M} \cdot \bar{\kappa} \, dA - \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k (h^{k+1} - h^k) \right\} \bar{g} \cdot \bar{u}_0 \, dA \\ & - \int_{\partial A_t} \left( [\alpha 3] \cdot \bar{N}_t \cdot \bar{u}_0 - [\alpha 2] \cdot \bar{M}_t \cdot \bar{\theta} \right) \, dS - \int_A \bar{\bar{q}} \cdot \bar{u}_0 \, dA \end{aligned} \quad (3.40)$$

A equação (3.41) determina a condição necessária de optimalidade, dada por

$$\delta \Pi(\bar{u}_0, \bar{\theta}) = 0, \quad \forall (\delta \bar{u}_0, \delta \bar{\theta}) \quad (3.41)$$

### 3.6 Determinação da Formulação Forte

O objetivo agora é determinar as equações diferenciais de equilíbrio, equações de Euler-Lagrange, e as condições de contorno essenciais e naturais associadas ao modelo de placa de Mindlin.



Toma-se a equação (3.41) e impõe-se uma função variacional arbitrária e os demais iguais a zero. O desenvolvimento da equação (3.41), mostrando as cinco funções variacionais,  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ ,  $\delta\theta_x$  e  $\delta\theta_y$ , é apresentado na equação (3.42),

$$\begin{aligned}
& \int_A \left\{ N_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) + M_{xx} \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} - M_{yy} \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} \right. \\
& + M_{xy} \left( \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} \right) + Q_{xz} \left( \delta \theta_y + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + Q_{yz} \left( -\delta \theta_x + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \left. \right\} dA \\
& - \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k (h^{k+1} - h^k) \right\} \left\{ g_x \delta u + g_y \delta v + g_z \delta w \right\} dA \\
& - \int_{\partial A} \left\{ \left[ \bar{N}_n \cos(\alpha) - \bar{N}_s \sin(\alpha) \right] \delta u + \left[ \bar{N}_n \sin(\alpha) + \bar{N}_s \cos(\alpha) \right] \delta v + \right. \\
& + \bar{N}_z \delta w + \left[ \bar{M}_n \cos(\alpha) - \bar{M}_s \sin(\alpha) \right] \delta \theta_y - \left[ \bar{M}_n \sin(\alpha) + \bar{M}_s \cos(\alpha) \right] \delta \theta_x \left. \right\} dS \\
& - \int_A \left( \bar{q}_x \delta u + \bar{q}_y \delta v + \bar{q}_z \delta w \right) dA \\
& = 0; \quad \forall (\delta u, \delta v, \delta w, \delta \theta_x, \delta \theta_y)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

A partir da equação (3.42) e tomando  $\delta u$  arbitrário e as demais funções variacionais nulas, obtem-se

$$\begin{aligned}
& \int_A \left( N_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) dA - \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k (h^{k+1} - h^k) \right\} g_x \delta u dA \\
& - \int_{\partial A} \left[ \bar{N}_n \cos(\alpha) - \bar{N}_s \sin(\alpha) \right] \delta u dS - \int_A \left( \bar{q}_x \delta u + \bar{q}_y \delta v + \bar{q}_z \delta w \right) dA \\
& = 0, \quad \forall \delta u, \delta v = \delta w = \delta \theta_x = \delta \theta_y = 0
\end{aligned} \tag{3.43}$$

As propriedades do cálculo apresentadas nas equações (3.44) a (3.47) são necessárias para se obter as equações de Euler-Lagrange, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial x} (N_{xx} \delta u) = N_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \delta u, \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(N_{xy}\delta u) = N_{xy} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u, \quad (3.45)$$

$$\int_A \frac{\partial}{\partial x}(N_{xx}\delta u) dA = \int_{\partial A_t} N_{xx}n_x \delta u ds, \quad (3.46)$$

e

$$\int_A \frac{\partial}{\partial y}(N_{xy}\delta u) dA = \int_{\partial A_t} N_{xy}n_y \delta u ds. \quad (3.47)$$

Nas equações (3.46) e (3.47),  $\vec{n} = n_x\vec{e}_x + n_y\vec{e}_y$  é o vetor unitário normal à superfície da borda da placa. Aplicando-se estas propriedades à equação (3.43), obtem-se

$$\begin{aligned} & -\int_A \left( \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u dA - \int_A \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k (h^{k+1} - h^k) \right\} g_x \delta u dA \\ & - \int_{\partial A_t} \left[ \bar{N}_n \cos(\alpha) - \bar{N}_s \sin(\alpha) \right] \delta u dS - \int_A \bar{q}_x \delta u dA \\ & + \int_{\partial A_t} (N_{xx}n_x + N_{xy}n_y) \delta u ds \\ & = 0, \quad \forall \delta u, \delta v = \delta w = \delta \theta_x = \delta \theta_y = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Consequentemente, a equação de Euler-Lagrange e as condições de contorno são dadas pelas equações (3.49), (3.50) e (3.51), i.e.,

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k (h^{k+1} - h^k) \right\} g_x + \bar{q}_x = 0 \text{ em } A, \quad (3.49)$$

$$N_{xx}n_x + N_{xy}n_y = \bar{N}_n \cos(\alpha) - \bar{N}_s \sin(\alpha) \text{ em } \partial A_t, \quad (3.50)$$

e

$$u = \bar{u} \text{ em } \partial A_u \quad (3.51)$$

A partir da equação (3.42) e tomando  $\delta v$  arbitrário e as demais funções variacionais nulas, obtém-se, de maneira análoga, a equação de Euler-Lagrange e as condições de contorno, equações (3.52), (3.53) e (3.54), i.e.,

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k (h^{k+1} - h^k) \right\} g_y + \bar{q}_y = 0 \text{ em } A \quad (3.52)$$

$$N_{yy} n_y + N_{xy} n_x = \bar{N}_n \cdot \sin(\alpha) + \bar{N}_s \cdot \cos(\alpha) \text{ em } \partial A_t \quad (3.53)$$

e

$$v = \bar{v} \text{ em } \partial A_v \quad (3.54)$$

A partir da equação (3.42) e tomando  $\delta w$  arbitrário e as demais funções variacionais nulas, obtém-se, de maneira análoga, a equação de Euler-Lagrange e as condições de contorno, equações (3.55), (3.56) e (3.57), i.e.,

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k (h^{k+1} - h^k) \right\} g_z + \bar{q}_z = 0 \text{ em } A \quad (3.55)$$

$$Q_{xz} n_x + Q_{yz} n_y = \bar{N}_z \text{ em } \partial A \quad (3.56)$$

e

$$w = \bar{w} \text{ em } \partial A_w \quad (3.57)$$

A partir da equação (3.42) e tomando  $\delta\theta_x$  arbitrário e as demais funções variacionais nulas, obtém-se, de maneira análoga, a equação de Euler-Lagrange e as condições de contorno, equações (3.58), (3.59) e (3.60), i.e.,

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_{yz} = 0 \text{ em } A \quad (3.58)$$

$$M_{yy}n_y + M_{xy}n_x = -\left[\bar{M}_n \cdot \sin(\alpha) + \bar{M}_s \cdot \cos(\alpha)\right] \text{ em } \partial A_t, \quad (3.59)$$

e

$$\theta_x = \bar{\theta}_x \text{ em } \partial A_u. \quad (3.60)$$

A partir da equação (3.42) e tomando  $\delta\theta_y$  arbitrário e as demais funções variacionais nulas, obtém-se, de maneira análoga, a equação de Euler-Lagrange e as condições de contorno, equações (3.61), (3.62) e (3.63), i.e.,

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_{xz} = 0 \text{ em } A \quad (3.61)$$

$$M_{xx}n_x + M_{xy}n_y = \bar{M}_n \cdot \cos(\alpha) - \bar{M}_s \cdot \sin(\alpha) \text{ em } \partial A_t, \quad (3.62)$$

e

$$\theta_y = \bar{\theta}_y \text{ em } \partial A_u. \quad (3.63)$$

A tabela (3.1) agrupa as equações de equilíbrio e as condições de contorno da formulação forte do problema da placa de Mindlin.

Tabela 3.1 – Formulação forte do problema da placa de Mindlin.

$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k (h^{k+1} - h^k) \right\} g_x + \bar{q}_x = 0$	em $A$
$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k (h^{k+1} - h^k) \right\} g_y + \bar{q}_y = 0$	
$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + \sum_{k=1}^n \left\{ \rho^k (h^{k+1} - h^k) \right\} g_z + \bar{q}_z = 0$	
$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_{yz} = 0$	
$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_{xz} = 0$	
$N_{xx} \cdot n_x + N_{xy} \cdot n_y = \bar{N}_n \cdot \cos(\alpha) - \bar{N}_s \cdot \sin(\alpha)$	em $\partial A_t$
$N_{yy} \cdot n_y + N_{xy} \cdot n_x = \bar{N}_n \cdot \sin(\alpha) + \bar{N}_s \cdot \cos(\alpha)$	
$Q_{xz} \cdot n_x + Q_{yz} \cdot n_y = \bar{N}_z$	
$M_{yy} \cdot n_y + M_{xy} \cdot n_x = - \left[ \bar{M}_n \cdot \sin(\alpha) + \bar{M}_s \cdot \cos(\alpha) \right]$	
$M_{xx} \cdot n_x + M_{xy} \cdot n_y = \bar{M}_n \cdot \cos(\alpha) - \bar{M}_s \cdot \sin(\alpha)$	
$u = \bar{u}$	em $\partial A_u$
$v = \bar{v}$	
$w = \bar{w}$	
$\theta_x = \bar{\theta}_x$	
$\theta_y = \bar{\theta}_y$	

### 3.7 Formulação Fraca do Problema da Placa de Mindlin

O princípio da mínima energia potencial total pode ser formulado como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } (\vec{u}_0, \vec{\theta}) \in G \text{ tal que} \\ (\vec{u}_0, \vec{\theta}) = \underset{\forall (\vec{u}_0, \vec{\theta}) \in G}{\text{arg min}} \mathfrak{S}(\vec{u}_0, \vec{\theta}) \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Na equação (3.64),  $G$  é o espaço definido pela equação (3.65) e  $\mathfrak{S}$  é o funcional definido pela equação (3.66), i.e.,

$$G = \{(\vec{u}_0, \vec{\theta}) \mid \text{suf.regular}, (\vec{u}_0, \vec{\theta}) = (\vec{\bar{u}}_0, \vec{\bar{\theta}}) \text{ em } \Gamma_u\} \quad (3.65)$$

e

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\vec{u}_0, \vec{\theta}) = & \frac{1}{2} \int_A [\mathbf{C}] \vec{\kappa} \bullet \vec{\kappa} \, dA - \int_A \sum_{k=1}^n \{\rho^k h^k\} \vec{g} \bullet \vec{u}_0 \, dA \\ & - \int_{\partial A_t} \{\vec{N} \bullet \vec{u}_0 - \vec{M} \bullet \vec{\theta}\} \cdot dS - \int_A \vec{q} \bullet \vec{u}_0 \, dA \end{aligned} \quad (3.66)$$

O vetor das deformações generalizadas  $\vec{\kappa}$  pode ser representado em função de  $\vec{u}_0$  e  $\vec{\theta}$ , como

$$\vec{\kappa} = \left\{ \varepsilon_{xx}^o(\vec{u}_0), \varepsilon_{yy}^o(\vec{u}_0), \gamma_{xy}^o(\vec{u}_0), \kappa_{xx}(\vec{\theta}), \kappa_{yy}(\vec{\theta}), \kappa_{xy}(\vec{\theta}), \gamma_{xz}(\vec{u}_0, \vec{\theta}), \gamma_{yz}(\vec{u}_0, \vec{\theta}) \right\} \quad (3.67)$$

A imposição da condição de contorno essencial pode ser relaxada através da introdução de um termo de penalidade cuja função é implicitamente assegurar a satisfação da condição de contorno essencial. Desta forma, podemos reformular a forma fraca do problema da placa de Mindlin como: determinar  $(\vec{u}_0, \vec{\theta})$  tal que

$$(\bar{u}_0, \bar{\theta}) = \lim_{\eta \rightarrow 0} (\bar{u}_{0\eta}, \bar{\theta}_\eta), \quad (3.68)$$

em que  $(\bar{u}_{0\eta}, \bar{\theta}_\eta)$  é solução do problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } \eta > 0 \text{ determinar } (\bar{u}_{0\eta}, \bar{\theta}_\eta) \text{ solução de} \\ (\bar{u}_{0\eta}, \bar{\theta}_\eta) = \arg \min_{\forall (\bar{u}_0^\Delta, \bar{\theta}^\Delta)} \mathfrak{S}_\eta(\bar{u}_0^\Delta, \bar{\theta}^\Delta) \end{array} \right. \quad (3.69)$$

O funcional  $\mathfrak{S}_\eta$  contemplando o termo de penalidade é dado por

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_\eta(\bar{u}_0, \bar{\theta}) = & \frac{1}{2} \int_A [\mathbf{C}] \cdot \bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{k}} \, dA - \int_A \sum_{k=1}^n \rho^k h^k \cdot \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 \, dA - \int_A \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 \, dA \\ & - \int_{\partial A} \left( [\alpha 3] \cdot \bar{\mathbf{N}}_t \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 - [\alpha 2] \cdot \bar{\mathbf{M}}_t \cdot \bar{\theta} \right) \cdot dS \\ & + \frac{1}{2\eta} \int_{\partial A} \left( \|\bar{\mathbf{u}}_0 - \bar{\mathbf{u}}\|^2 + \|\bar{\theta} - \bar{\theta}\|^2 \right) dS \end{aligned} \quad (3.70)$$

Os quadrados das normas de  $(\bar{\mathbf{u}}_0 - \bar{\mathbf{u}})$  e  $(\bar{\theta} - \bar{\theta})$  são definidos como

$$\|\bar{\mathbf{u}}_0 - \bar{\mathbf{u}}\|^2 = (u - \bar{u})^2 + (v - \bar{v})^2 + (w - \bar{w})^2 \quad (3.71)$$

e

$$\|\bar{\theta} - \bar{\theta}\|^2 = (\theta_x - \bar{\theta}_x)^2 + (\theta_y - \bar{\theta}_y)^2 \quad (3.72)$$

Substituindo as equações (3.71) e (3.72) no termo de penalidade do funcional, obtem-se

$$\begin{aligned}
 & \delta \left[ \frac{1}{2\eta} \int_{\partial A_u} \left( \left\| \bar{\vec{u}}_0 - \bar{\vec{u}}_0 \right\|^2 + \left\| \bar{\vec{\theta}} - \bar{\vec{\theta}} \right\|^2 \right) dS \right] = \\
 & = \delta \left\{ \frac{1}{2\eta} \int_{\partial A_u} \left[ (u - \bar{u})^2 + (v - \bar{v})^2 + (w - \bar{w})^2 + (\theta_x - \bar{\theta}_x)^2 + (\theta_y - \bar{\theta}_y)^2 \right] dS \right\} \quad (3.73) \\
 & = \frac{1}{\eta} \int_{\partial A_u} \left\{ \left( \bar{\vec{u}}_0 - \bar{\vec{u}}_0 \right) \cdot \delta \bar{\vec{u}}_0 + \left( \bar{\vec{\theta}} - \bar{\vec{\theta}} \right) \cdot \delta \bar{\vec{\theta}} \right\} dS
 \end{aligned}$$

A condição necessária de otimalidade para que  $(\bar{\vec{u}}_0, \bar{\vec{\theta}})$  seja mínimo é dada pela equação (3.74), forma fraca do problema, i.e.,

$$\begin{aligned}
 & \int_A [\mathbf{C}] \cdot \bar{\vec{\kappa}} \cdot \delta \bar{\vec{\kappa}} dA - \int_A \sum_{k=1}^n \{ \rho^k h^k \} \bar{\vec{g}} \cdot \delta \bar{\vec{u}}_0 dA - \int_{\partial A_t} \left( [\alpha 3] \cdot \bar{\vec{N}}_t \cdot \bar{\vec{u}}_0 - [\alpha 2] \cdot \bar{\vec{M}}_t \cdot \bar{\vec{\theta}} \right) dS \\
 & - \int_A \bar{\vec{q}} \cdot \delta \bar{\vec{u}}_0 dA + \frac{1}{\eta} \int_{\partial A_u} \left\{ \left( \bar{\vec{u}}_0 - \bar{\vec{u}}_0 \right) \cdot \delta \bar{\vec{u}}_0 + \left( \bar{\vec{\theta}} - \bar{\vec{\theta}} \right) \cdot \delta \bar{\vec{\theta}} \right\} dS = 0, \quad \forall (\delta \bar{\vec{u}}_0, \delta \bar{\vec{\theta}})
 \end{aligned} \quad (3.74)$$



## Capítulo 4

# Método de Galerkin Livre de Elementos

### 4.1 Métodos sem Malha

Uma boa definição dos métodos sem malha é dada por Mendéz (2001), na qual os métodos livres de malha têm o objetivo de eliminar pelo menos parte da dependência da malha no método de solução através da construção do espaço de aproximação utilizando funções definidas inteiramente em termos dos nós. No contexto dos métodos sem malha, os nós são usualmente chamados de partículas e os elementos são chamados de células de integração, pois em alguns métodos, como o método de Galerkin livre de elementos, usa-se uma malha semelhante à de elementos finitos para aplicar uma regra de integração numérica visando a integração da forma fraca do problema.

Nos últimos anos, os métodos sem malha têm sido objeto de atenção e extensivamente aplicados a problemas da mecânica dos sólidos. Várias abordagens foram propostas, a exemplo do *smooth particle hydrodynamics* (SPH), *reproducing kernel particle method* (RKPM), *h-p clouds method*, *meshless local Petrov-Galerkin method* (MLPG) e *element-free Galerkin method* (EFGM), que usam aproximação por mínimos quadrados móveis para construir as funções base.

O procedimento do método de elementos finitos (FEM) e dos métodos sem malha (MFree) podem em princípio ser esboçados pelo fluxograma da figura (4.1), Liu (2002). Estes dois métodos divergem no estágio da criação da malha e a diferença fundamental entre estes dois métodos é a construção das funções base ou de forma. No FEM, as funções de forma são construídas usando elementos, e estas funções serão as mesmas para cada elemento. Estas funções de forma são usualmente predefinidas para diferentes tipos de elementos antes do início da análise por elementos finitos. Nos métodos sem malha, todavia, as funções de forma são construídas para um ponto particular de interesse. As funções de forma mudam quando a localização do ponto de interesse muda. A construção das funções de forma livre de elementos é feita durante a análise, e não antes, como no método de elementos finitos.

Uma vez estabelecido o sistema global de equações discretizadas, os métodos sem malha seguem um procedimento similar ao do método de elementos finitos, exceto por algumas diferenças mínimas, em detalhes da implementação.

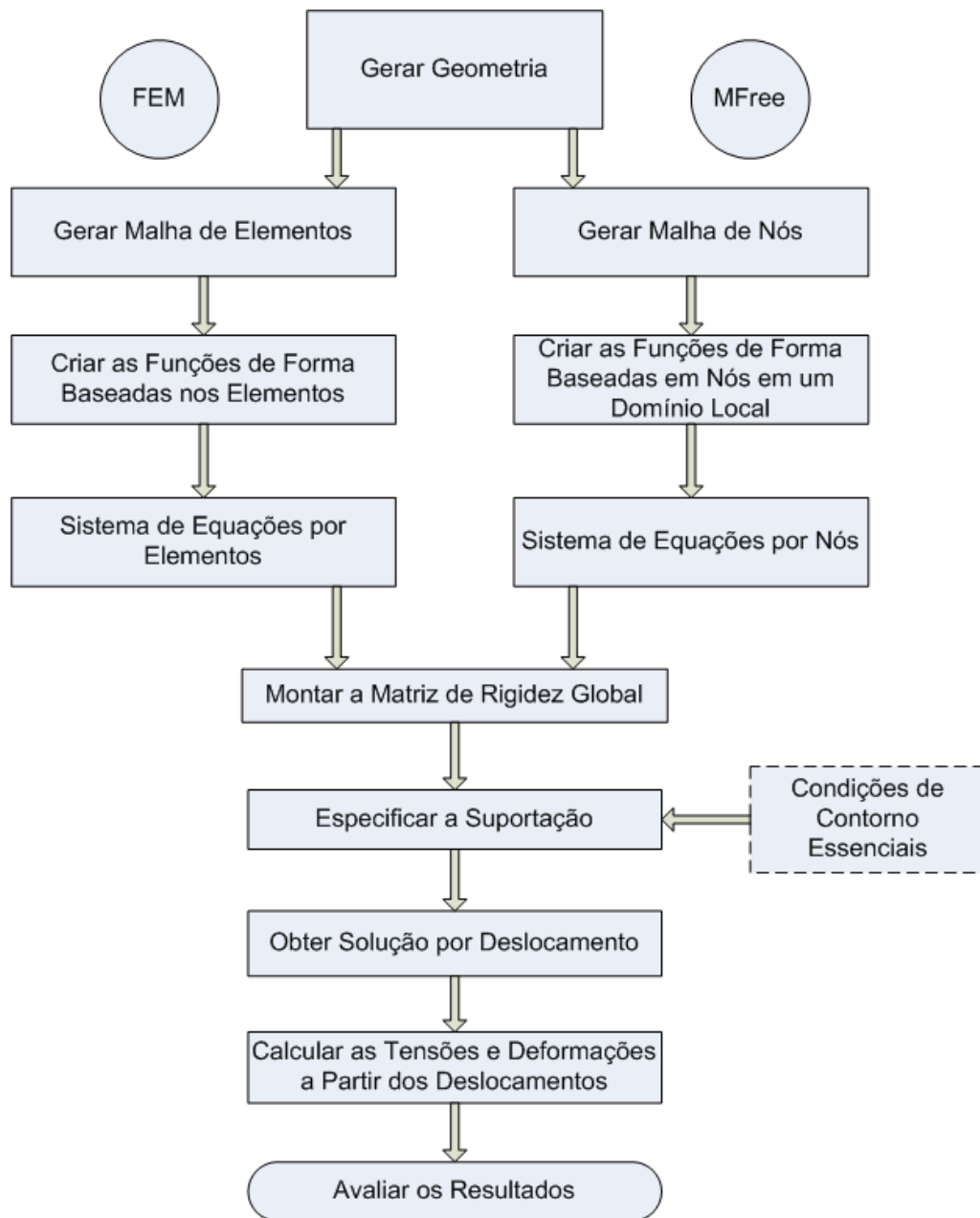


Figura 4.1 – Fluxograma comparativo MFree e FEM.

## 4.2 Método de Galerkin Livre de Elementos

O método de Galerkin livre de elementos consiste basicamente na construção de um conjunto de funções base ou de forma que definem o espaço de aproximação, o qual é utilizado para a determinação de uma aproximação pela aplicação do método de Galerkin. Tais funções de forma são construídas através da aproximação por mínimos quadrados móveis, Rossi (2005).

O método de Galerkin livre de elementos usa a aproximação por mínimos quadrados móveis (MLS) para construir as funções base ou de forma. Esta aproximação tem sido usada em estatística desde 1920 sob o nome de regressão local para ajustar curvas e superfícies de dados distribuídos, Krysl e Belystschko (1996 e 1997).

Segundo Liu (2002), as principais características do método de Galerkin livre de elementos são:

- O emprego da aproximação por mínimos quadrados móveis para a construção da função de forma;
- O emprego da forma fraca de Galerkin para desenvolver o sistema de equações discretizado;
- É requerida uma malha de células para possibilitar a integração e cálculo das matrizes do sistema.

O procedimento de solução do método de Galerkin livre de elementos é similar ao do método de elementos finitos. Primeiramente é modelada a geometria do domínio do problema e um conjunto de nós é gerado para representar o domínio do problema, como mostra a figura (4.2). As matrizes do sistema são montadas via dois laços (loop). O laço externo é para todas as células de integração da malha (equivalente aos elementos do FEM) e o laço interno é para todos os pontos de integração numérica de cada célula.

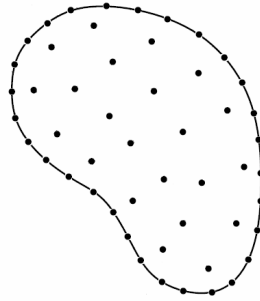


Figura 4.2 – Representação do domínio do problema pelo EFG.

O algoritmo para análise de tensões usando o método de Galerkin livre de elementos é apresentado na tabela (4.1).

Tabela 4.1 – Algoritmo do método de Galerkin livre de elementos.

Gerar geometria
Gerar a malha de nós e células de integração
Para “cada célula de integração”
Para “cada ponto de integração” (x)
Identificar os nós que participam do cômputo do ponto x (suporte de x)
Calcular as funções de forma do suporte de x no ponto x por MLS
Calcular as matrizes nodais do ponto x
Montar a matriz nodal na matriz global
Fim “cada ponto de integração”
Fim “cada célula de integração”
Solucionar o sistema de equações para os deslocamentos dos parâmetros nodais
Calcular os deslocamentos usando as funções de forma MLS
Calcular as tensões e deformações

### 4.3 Aproximação por Mínimos Quadrados Móveis

Apesar da aproximação por mínimos quadrados móveis (MLS) ser usada desde 1920 em estatística, foi inicialmente aplicada na engenharia em 1981 por Lancaster e Salkauskas

(1981). Este método consiste em uma aproximação por mínimos quadrados ponderada, na qual uma função de aproximação  $u^h$  é construída a partir de um conjunto de dados discretos  $(u_I, x_I)$ ,  $I = 1 \dots n_T$ , em que  $n_T$  é o número total de partículas em um domínio  $\Omega$ . A função de aproximação é definida pela equação (4.1), i.e.,

$$u^h(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\bar{x}) a_j(\bar{x}) = \bar{p}(\bar{x}) \cdot \bar{a}(\bar{x}) \quad (4.1)$$

Na equação (4.1),  $\bar{p}(\bar{x})$  representa a base intrínseca,  $\bar{a}(\bar{x})$  é o conjunto de coeficientes a determinar e  $m$  é o número de elementos de  $\bar{p}(\bar{x})$ . Este método consiste no uso de uma base  $\bar{p}(\bar{x})$  e de uma função peso  $w(\bar{x})$ , que determina a influência de quantas partículas serão consideradas para a determinação de  $\bar{a}(\bar{x})$ .

Para determinar  $\bar{a}(\bar{x})$  é aplicada a norma de erro discreta,  $J(\bar{a})$ , dada por

$$J(\bar{a}) = \sum_{I=1}^n w(\bar{x} - \bar{x}_I) [\bar{p}(\bar{x}_I) \cdot \bar{a}(\bar{x}) - u_I]^2 \quad (4.2)$$

A função peso  $w(\bar{x} - \bar{x}_I)$  determina quantas partículas  $n$  da vizinhança de  $\bar{x}$  participa da determinação de  $\bar{a}(\bar{x})$ , ou seja, quais as partículas  $u_I$  (localizadas em  $\bar{x}_I$ ) têm  $w(\bar{x} - \bar{x}_I) \neq 0$ , como mostra a figura (4.3) para o caso unidimensional.

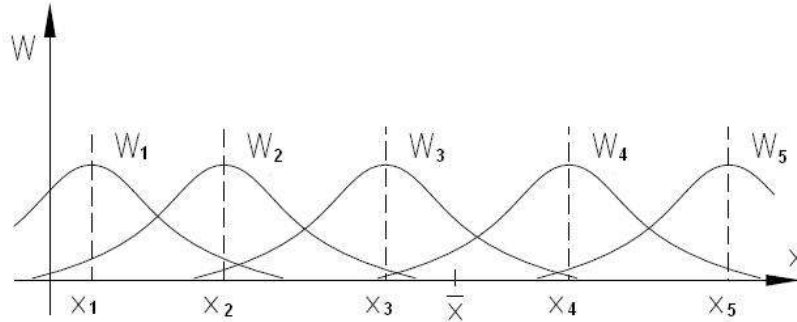


Figura 4.3 – Funções peso em um problema unidimensional.

Tomando como exemplo a figura (4.3), a determinação de  $u^h(\bar{x})$  depende dos pontos “3” e “4”. Assim, a medida de erro é dada pela equação (4.3),

$$J(\bar{a}) = w_3(\bar{x}) \left[ \bar{p}(x_3) \cdot \bar{a}(\bar{x}) - u_3 \right]^2 + w_4(\bar{x}) \left[ \bar{p}(x_4) \cdot \bar{a}(\bar{x}) - u_4 \right]^2 \quad (4.3)$$

Como resultado da minimização de  $J(\bar{a})$  é obtida a relação entre  $u^h(\bar{x})$  e os valores discretos  $u_l$  da vizinhança de  $\bar{x}$ , como mostra a equação (4.4),

$$u^h(\bar{x}) = \sum_{l=1}^n \Phi_l(\bar{x}) u_l \quad (4.4)$$

Na equação (4.4),  $\Phi_l(\bar{x})$  é chamada de função de forma global e é obtida por

$$\Phi_l(\bar{x}) = \bar{p}(\bar{x}) \cdot \mathbf{A}(\bar{x})^{-1} \bar{b}_l(\bar{x}) \quad (4.5)$$

Na equação (4.5),  $\mathbf{A}(\bar{x})$  é denominada matriz momento e é obtida pela equação (4.6). Já  $\bar{b}_l(\bar{x})$  é obtida pela equação (4.7), i.e.,

$$\mathbf{A}(\bar{x}) = \sum_{l=1}^n w(\bar{x} - \bar{x}_l) [\bar{p}(\bar{x}_l) \otimes \bar{p}(\bar{x}_l)] \quad (4.6)$$

e

$$\bar{b}_l(\bar{x}) = w(\bar{x} - \bar{x}_l) \bar{p}(\bar{x}_l) \quad (4.7)$$

A base intrínseca  $\bar{p}(\bar{x})$  é comumente a base polinomial. As equações (4.8) e (4.9) apresentam as bases bidimensional linear e quadrática, respectivamente.

$$\bar{p}^T(\bar{x}) = [1 \quad x \quad y] \quad (4.8)$$

e

$$\bar{p}^T(\bar{x}) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad x.y \quad y^2] \quad (4.9)$$

As derivadas parciais de  $\Phi_l(\bar{x})$  com relação as componentes de  $\bar{x}$  são dadas pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_l(\bar{x})}{\partial x_i} &= \frac{\partial \bar{p}(\bar{x})}{\partial x_i} \cdot \mathbf{A}(\bar{x})^{-1} \bar{b}_l(\bar{x}) + \\ &+ \bar{p}(\bar{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\bar{x})^{-1}}{\partial x_i} \bar{b}_l(\bar{x}) + \bar{p}(\bar{x}) \cdot \mathbf{A}(\bar{x})^{-1} \frac{\partial \bar{b}_l(\bar{x})}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (4.10)$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi_I(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 \bar{p}(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \mathbf{A}(\bar{x})^{-1} \bar{b}_I(\bar{x}) + \frac{\partial \bar{p}(\bar{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\bar{x})^{-1}}{\partial x_j} \bar{b}_I(\bar{x}) + \\
&+ \frac{\partial \bar{p}(\bar{x})}{\partial x_i} \cdot \mathbf{A}(\bar{x})^{-1} \frac{\partial \bar{b}_I(\bar{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}(\bar{x})}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\bar{x})^{-1}}{\partial x_i} \bar{b}_I(\bar{x}) + \\
&+ \bar{p}(\bar{x}) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\bar{x})^{-1}}{\partial x_i \partial x_j} \bar{b}_I(\bar{x}) + \bar{p}(\bar{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\bar{x})^{-1}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{b}_I(\bar{x})}{\partial x_j} + \\
&+ \frac{\partial \bar{p}(\bar{x})}{\partial x_j} \cdot \mathbf{A}(\bar{x})^{-1} \frac{\partial \bar{b}_I(\bar{x})}{\partial x_i} + \bar{p}(\bar{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\bar{x})^{-1}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{b}_I(\bar{x})}{\partial x_i} + \\
&+ \bar{p}(\bar{x}) \cdot \mathbf{A}(\bar{x})^{-1} \frac{\partial^2 \bar{b}_I(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

As derivadas da matriz momento para o calculo das derivadas das funções de forma podem ser obtidas como

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\bar{x})^{-1}}{\partial x_i} = -\mathbf{A}(\bar{x})^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}(\bar{x})}{\partial x_i} \mathbf{A}(\bar{x})^{-1} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{A}(\bar{x})^{-1}}{\partial x_i \partial x_j} &= -\frac{\partial \mathbf{A}(\bar{x})^{-1}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{A}(\bar{x})}{\partial x_i} \mathbf{A}(\bar{x})^{-1} \\
&- \mathbf{A}(\bar{x})^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{A}(\bar{x})^{-1} - \mathbf{A}(\bar{x})^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}(\bar{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{A}(\bar{x})^{-1}}{\partial x_j}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\bar{x})}{\partial x_i} = \sum_{I=1}^n \frac{\partial w(\bar{x} - \bar{x}_I)}{\partial x_i} [\bar{p}(\bar{x}_I) \otimes \bar{p}(\bar{x}_I)] \tag{4.14}$$

e

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{I=1}^n \frac{\partial^2 w(\bar{x} - \bar{x}_I)}{\partial x_i \partial x_j} [\bar{p}(\bar{x}_I) \otimes \bar{p}(\bar{x}_I)] \tag{4.15}$$



As derivadas de  $\bar{b}_I(\bar{x})$  são obtidas por

$$\frac{\partial \bar{b}_I(\bar{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial w(\bar{x} - \bar{x}_I)}{\partial x_i} \bar{p}(\bar{x}_I) \quad (4.16)$$

e

$$\frac{\partial^2 \bar{b}_I(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 w(\bar{x} - \bar{x}_I)}{\partial x_i \partial x_j} \bar{p}(\bar{x}_I) \quad (4.17)$$

A ordem de consistência de uma aproximação,  $k$ , é definida como a ordem arbitrária polinomial que pode ser representada de forma exata pelo processo de ajuste ou aproximação. Uma das propriedades importantes da aproximação por mínimos quadrados móveis é a capacidade de representar exatamente combinações das funções da base intrínseca  $\bar{p}(\bar{x})$ , ou seja, a consistência da aproximação depende da ordem monomial utilizada para definir  $\bar{p}(\bar{x})$ . Se a ordem completa for  $k$ , a função aproximação gerada terá consistência  $k$ . Deste modo, para satisfazer a consistência linear é necessário apenas utilizar  $\bar{p}^T(\bar{x}) = [1 \quad x \quad y]$ , em que  $m=3$ . Neste caso são obtidas as relações expressas nas equações (4.18), (4.19) e (4.20). A primeira equação, (4.18), representa uma propriedade obrigatória para habilitar a função a reproduzir qualquer movimento de corpo rígido. Consequentemente o conjunto  $\{\Phi_I(\bar{x}), I = 1, 2, \dots, n_T\}$  define uma *partição da unidade*, i.e.,

$$\sum_{I=1}^{n_T} \Phi_I(\bar{x}) = 1 \quad (4.18)$$

Adicionalmente, temos

$$\sum_{I=1}^{n_T} \Phi_I(\bar{x}) \cdot x_I = x \quad (4.19)$$

e

$$\sum_{I=1}^{n_T} \Phi_I(\bar{x}) \cdot y_I = y \quad (4.20)$$

Como estas funções de forma obtidas da aproximação por mínimos quadrados móveis, em geral, não satisfazem a condição de delta de Kronecker, i.e.,  $\Phi_I(\bar{x}_J) \neq \delta_{IJ}$ , as condições de contorno essenciais não podem ser impostas diretamente pela prescrição dos valores nodais. De fato, no método de Galerkin livre de elementos os valores encontrados na solução do problema são parâmetros nodais, e não soluções nodais, como no método de elementos finitos.

Outra propriedade importante é a classe da função de forma. Se a função peso e suas  $k$  primeiras derivadas forem contínuas, então a função base ou de forma e suas  $k$  primeiras derivadas também serão contínuas, ou seja, de classe  $C^k$ .

A aproximação por mínimos quadrados padrão é obtida se a função peso for constante por todo o domínio. Contudo, todas as incógnitas serão totalmente acopladas. Se a função peso tiver um grande domínio de influência, a aproximação se comportará como um polinômio de ordem maior que a de  $\bar{p}(\bar{x})$ . Limitando a função peso a ser diferente de zero em um pequeno subdomínio, resulta em um sistema de equações esparso. A formulação de elementos finitos padrão será obtida se a função peso for constante em cada elemento.

## 4.4 Funções Peso

As funções peso desempenham um importante papel no desempenho dos métodos sem malha. Elas devem ser construídas de forma que:

- Sejam positivas;
- Garantam a solução única para  $\vec{a}(\bar{x})$ ;
- Sejam funções monotônicas decrescentes com respeito à distância de  $\bar{x}$  para  $\bar{x}_I$ , ou seja, devem apresentar um decréscimo em sua magnitude à medida que a distância de  $x$  com relação  $x_I$  aumenta.

As funções peso são comumente usadas como dependentes da distância entre dois pontos,  $r$ , como representa a equação (4.21),

$$w(\bar{x} - \bar{x}_I) = w_I(r) = w(r_I); \text{ onde } r_I = \|\bar{x} - \bar{x}_I\| \quad (4.21)$$

Mais especificamente, funções peso têm a forma dada como

$$w_I(r(\bar{x})) = w_I(r^{(2k)}(\bar{x})) \quad (4.22)$$

Na equação (4.22),  $w_I(r^{(2k)}(\bar{x}))$  é assumido ser contínuo juntamente com as  $m$ -derivadas com relação a  $r$ . Consideram-se, então, as condições que o termo  $k$  deve satisfazer, de maneira a garantir que as primeiras  $m$ -ésimas derivadas de  $w_I(r^{(2k)})$  com relação à  $x_i$  existam para cada ponto  $\bar{x}$ , equação (4.23), em que  $(\bar{x} - \bar{x}_I)_j = \langle (\bar{x} - \bar{x}_I), e_j \rangle$ , sendo  $e_j$  o  $j$ -ésimo vetor da base cartesiana. Temos então que

$$\frac{\partial w_I}{\partial x_j} = 2k r^{(2k-1)} \frac{\partial w_I}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} = 2k (\bar{x} - \bar{x}_I)_j r^{(2k-2)} \frac{\partial w_I}{\partial r} \quad (4.23)$$

O limite de  $\frac{(\bar{x} - \bar{x}_I)_j}{r}$ , quando  $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_I$ , não existe. Todavia, as derivadas da equação (4.23) existirão se e somente se  $k > \frac{1}{2}$ . A equação (4.24) apresenta a segunda derivada da função peso, para  $k \geq 1$ , dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_I}{\partial x_j^2} = & 2k(2k-2) (\bar{x} - \bar{x}_I)_j^2 r^{(2k-4)} \frac{\partial w_I}{\partial r} + \\ & + 2k r^{(2k-2)} \frac{\partial w_I}{\partial r} + 4k^2 (\bar{x} - \bar{x}_I)_j^2 r^{(4k-4)} \frac{\partial^2 w_I}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Calculando-se a  $m$ -ésima derivada da função peso,  $w_I(r^{(2k)})$ , com relação à  $x_j$ , para o caso de problemas bidimensionais, pode-se dizer que: se  $k$  é um inteiro positivo, a derivada da função peso  $w_I(r^{(2k)})$  com relação à  $x_j$  existirá até a  $m$ -ésima ordem,  $m = 2k$ . Caso  $k$  não seja um inteiro positivo, porém  $k > \frac{n}{2}$ , a derivada de função peso  $w_I(r^{(2k)})$  com relação à  $x_j$  existirá até a  $m$ -ésima ordem.

Assim, a escolha adequada das funções peso é mais ou menos arbitrária à medida que a função seja positiva e contínua, juntamente com suas derivadas até o grau desejado. A escolha do tamanho da região em que a função peso é não nula deve garantir que a matriz momento  $\mathbf{A}(\bar{x})$ , definida na equação (4.6), seja invertível. De acordo com as referências Beissel e Belytschko (1996) e Huerta e Méndez (2000), a distribuição de partículas deve satisfazer uma condição de estabilidade para que exista a inversa de  $\mathbf{A}(\bar{x})$ . Esta condição de estabilidade pode ser enunciada como mostra a equação (4.25),

$$\text{card}\{\bar{x}_i | \Phi_i(\bar{x}) \neq 0\} \geq \dim[\mathbf{A}(\bar{x})] \quad (4.25)$$

Neste ponto, é importante definir suporte e domínio de influência.

O domínio de influência de uma partícula  $I$  é a região do domínio do problema,  $\Omega_I \subset \Omega$ , em que a função peso  $w_I$  é não nula. A figura (4.4) mostra os dois tipos principais de domínio de influência para problemas bidimensionais: retangular e circular. O suporte de um ponto qualquer  $\bar{x}$  é o conjunto de partículas cuja função peso é diferente de zero em  $\bar{x}$ . Por exemplo, para um problema bidimensional,  $\bar{\Omega} \in R^2$ , e um polinômio linear como base intrínseca,  $\bar{p}^T(\bar{x}) = [1 \quad x \quad y]$ , a distribuição de partículas deve ser tal que todo ponto do domínio,  $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ , possua um suporte de pelo menos três partículas, isto é,  $\bar{x}$  deve estar incluído no domínio de influência de pelo menos três partículas. Ainda: em problemas bidimensionais não basta apenas observar a cardinalidade de partículas cujo domínio de

influência contenha  $\bar{x}$ , mas também se estas partículas formam um triângulo com área não nula.

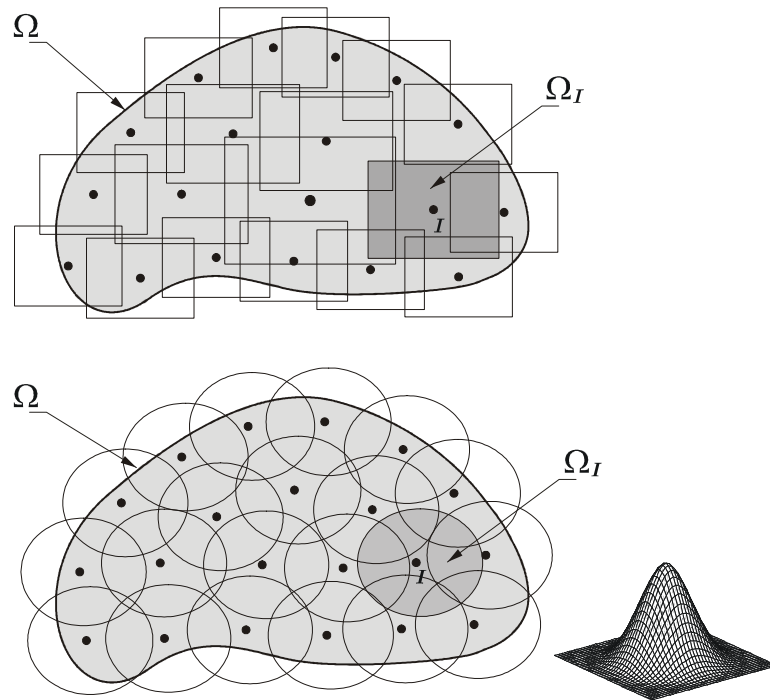


Figura 4.4 – Domínio de influência retangular e circular.

Como exemplo, na figura (4.5), nota-se que a vizinhança para os cálculos no ponto  $\bar{x}$ , inclui os nós “1”, “2” e “3”, uma vez que seus domínios de influência contêm o ponto  $\bar{x}$ . O nó “4” foi excluído da vizinhança de  $\bar{x}$ , já que seu domínio de influência não contém o ponto  $\bar{x}$ .

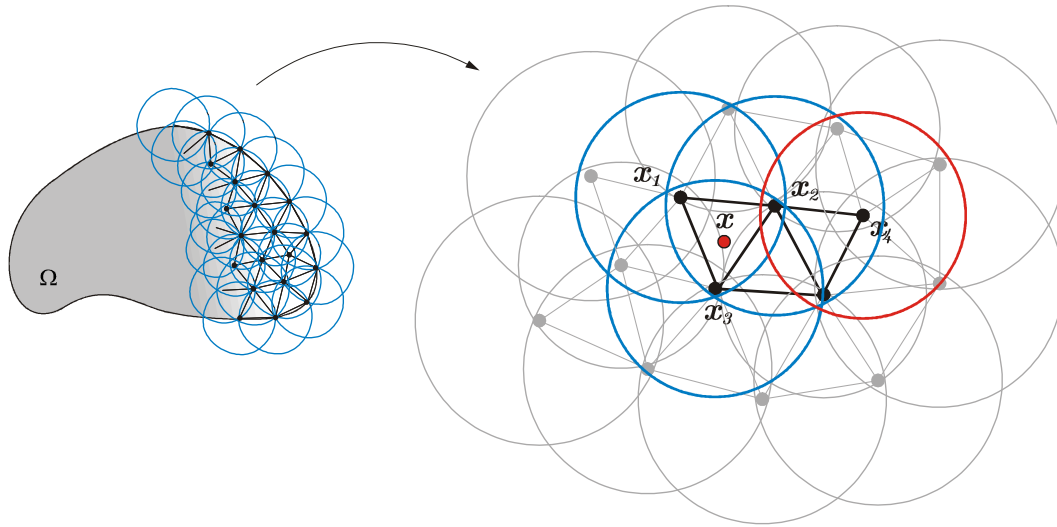


Figura 4.5 – Suporte do ponto “x”.

Assim, a abrangência do domínio de influência de uma partícula “ $I$ ” deve ser calculada em função da distância de  $\vec{x}_i$  em relação às partículas adjacentes na malha de integração. A figura (4.6) ilustra o significado de  $r_{I_{max}}$ , definindo como a máxima distância de  $\vec{x}_i$  às partículas adjacentes. Este parâmetro não é necessariamente a máxima distância, mas sim algum valor relacionado às distâncias das partículas. Por exemplo, Belinha e Diniz (2006 e 2007) usam a distância média para o cálculo do domínio de influência das partículas.

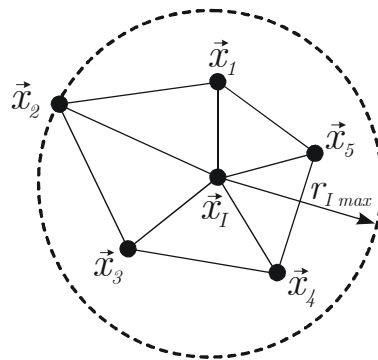


Figura 4.6 – Significado geométrico do parâmetro  $r_{I_{max}}$ .

Neste trabalho, como também em Alves e Rossi (2003), foi adotado o seguinte procedimento para determinar o domínio de influência de cada partícula “ $T$ ”:

- Compõe-se a lista de nós adjacentes,  $\vec{L}_T$ , associada à  $\vec{x}_T$ ;
- Determina-se o valor de  $r_{T_{\max}}$ , definido pela equação (4.26),

$$r_{T_{\max}} = \max_i \|\vec{x}_i - \vec{x}_T\|; \text{ com } i \in \vec{L}_T; \quad (4.26)$$

- Arbitra-se o valor do fator de abrangência  $s > 1$ , com  $s \in R$ ;
- Calcula-se o valor do raio do domínio de influência  $\vec{r}_T$  do nó “ $T$ ”, conforme equação (4.27),

$$\vec{r}_T = s.r_{T_{\max}}. \quad (4.27)$$

O valor atribuído ao fator de abrangência,  $s$ , deve ser tal que o domínio de influência de cada partícula “ $T$ ” satisfaça às seguintes condições:

- Seja grande o suficiente para que o número de partículas que fazem parte do suporte de cada ponto de integração garanta a invertibilidade da matriz momento;
- Seja grande o suficiente para assegurar que a informação passe pelos quatro quadrantes de todos os pontos de integração, exceto os pontos do contorno;
- Seja suficientemente pequeno para conferir uma adequada característica local à aproximação por mínimos quadrados móveis;
- Não seja muito grande para não tornar o problema com o custo computacional muito elevado.

Na escolha da base  $\vec{p}(\vec{x})$ , quanto maior for sua dimensão, maior será a quantidade de partículas necessárias no suporte de cada ponto de integração. A condição de cardinalidade, equação (4.25), deve ser válida em todos os pontos do domínio. Portanto, é necessário ter cuidado no critério a utilizar para a escolha do fator de influência  $s$ , e uma forma de implementação mais robusta pode contemplar testes de condicionamento da matriz  $\mathbf{A}(\vec{x})$ .

## 4.5 Tipos de Função Peso

Várias são as funções peso utilizadas na literatura. A seguir são apresentadas as funções peso mais encontradas:

- Função peso exponencial, equação (4.28),

$$w(r) = \begin{cases} e^{-2\frac{r}{a}} & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1, \end{cases} \quad (4.28)$$

- Função peso *spline* cúbica, equação (4.29),

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{para } r \leq 0,5 \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{para } 0,5 < r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} ; \quad (4.29)$$

- Função peso *spline* quártica, equação (4.30),

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1, \end{cases} \quad (4.30)$$



- Função peso *spline* de sétima ordem, equação (4.31),

$$w(r) = \begin{cases} 1 - \frac{47}{10}r^2 + 12r^4 - 10r^5 + \frac{1}{2}r^6 + \frac{6}{5}r^7 & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1, \end{cases} \quad (4.31)$$

- Função peso *spline* usada no método SPH, equação (4.32),

$$w(r) = \frac{2}{3\alpha} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}r^2 + \frac{3}{4}r^3 & \text{para } r \leq 1 \\ \frac{1}{4} \cdot (2-r)^3 & \text{para } 1 < r \leq 2 \\ 0 & \text{para } > 2 \end{cases} ; \quad (4.32)$$

- Função peso gaussiana, equação (4.33),

$$w(r) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2} - e^{-\left(\frac{r_l}{\alpha}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{r_l}{\alpha}\right)^2}} & \text{para } r \leq 1 \\ 0 & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (4.33)$$

Nas equações acima  $\alpha$  é um parâmetro numérico para ajustar os pesos. A distância de  $\vec{x}$  a  $\vec{x}_l$ , raio  $r_l$ , é parametrizada entre  $[0,1]$  conforme a equação (4.34),

$$r = \frac{r_l}{\bar{r}_l}; \text{ com } r_l = \|\vec{x} - \vec{x}_l\| \quad (4.34)$$

O tipo de função peso mais comum no método de Galerkin livre de elementos é a *spline* quártica, equação (4.30). A primeira e a segunda derivada em relação à  $\bar{x}$  das funções peso são apresentadas nas equações (4.35) e (4.36), para  $r \leq 1$ , i.e.,

$$\frac{\partial w(r)}{\partial x_j} = \frac{\partial w(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r(\bar{x})}{\partial x_j} \quad (4.35)$$

e

$$\frac{\partial^2 w(r)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r(\bar{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r(\bar{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial w(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_i} \quad (4.36)$$

Para o cálculo das derivadas das funções peso é necessário determinar as derivadas da distância parametrizada  $r$  em relação à  $\bar{x}$ , que pode ser feito como mostram as equações (4.37) e (4.38). Logo,

$$\frac{\partial r(\bar{x})}{\partial x_j} = \frac{(x_j - x_{jl})}{\bar{r}_l \cdot r} \quad (4.37)$$

e

$$\frac{\partial^2 r(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{1}{\bar{r}_l} \left[ \frac{\delta_{ji}}{r} - \frac{(x_i - x_{il}) \cdot (x_j - x_{jl})}{r^3} \right] \quad (4.38)$$

As condições observadas nas equações (4.39), (4.40) e (4.41) mostram que as derivadas de primeira e segunda ordem da função peso, bem como da aproximação por mínimos quadrados móveis, são contínuas, i.e.,

$$w(0) = 1; w(1) = 0, \quad (4.39)$$

$$\left. \frac{\partial w(r)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \left. \frac{\partial w(r)}{\partial r} \right|_{r=1} = 0 \quad (4.40)$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} \right|_{r=1} = 0 \quad (4.41)$$

## 4.6 Imposição das Condições de Contorno Essenciais

No contexto dos métodos sem malha, as funções de forma geralmente não verificam a propriedade do delta de Kronecker. Isto é, o conjunto de funções de forma, para os métodos sem malha, é uma partição da unidade, mas a função de forma associada a uma partícula não se anula em outras partículas. Sendo assim, impor a condição de contorno de Dirichlet não é trivial como no método de elementos finitos.

Nos últimos anos, muitas técnicas específicas para a implementação das condições de contorno essenciais nos métodos sem malha têm sido desenvolvidas.

O trabalho de Mendéz (2004) trata da aplicação dos principais métodos e nele foi proposta a classificação das técnicas em dois principais grupos: métodos baseados na modificação da forma fraca e métodos que podem ser interpretados como uma modificação das funções base ou de forma. No primeiro grupo estão os métodos dos multiplicadores de Lagrange, da penalidade e de Nitsche. Estes métodos permitem o uso de funções que não se anulam no contorno essencial. No segundo grupo, várias alternativas são também disponíveis. Pela introdução de uma extensão do parâmetro de dilatação em cada partícula, as funções de forma sem malha podem ser forçadas a verificar a propriedade do delta de Kronecker no contorno. Um método de transformação que expressa as variáveis como uma combinação linear das variáveis nodais permite a definição das funções de forma que verificam a propriedade do delta de Kronecker. Assim as condições de contorno essenciais são facilmente impostas. Um método considerando o princípio de D'Alembert pode ser aplicado para impor todos os tipos de restrições lineares.

O método dos multiplicadores de Lagrange, Belytschko *et al.* (1994), é um dos mais largamente usados devido à implementação ser direta para todos os tipos de problema.

Multiplicadores de Lagrange são geralmente usados em procedimentos numéricos e são um modo efetivo para impor restrições em problemas de otimização. Este método introduz uma nova função, a dos multiplicadores de Lagrange. O espaço de interpolação dos multiplicadores de Lagrange deve ser cuidadosamente selecionado: deve ser rico o suficiente para obter uma solução aceitável, mas o sistema de equações resultante torna-se singular se o número de graus de liberdade para a discretização for muito grande.

O método da penalidade, Zhu e Atluri (1998) e Gavete *et al.* (2001), impõe que as condições de contorno se verifiquem de forma aproximada por meio de um fator de penalização. O uso do fator de penalização não acarreta um aumento do número de graus de liberdade, contudo pode levar a um mal condicionamento do sistema de equações lineares resultante, caso a penalidade escolhida seja muito elevada. Por outro lado, caso a penalidade escolhida seja fraca, ocorrerá uma violação indesejada da condição de contorno essencial que se quer impor. Do ponto de vista pragmático, o problema fundamental do método de penalidade está na escolha de um fator de penalização adequado.

Já o método de Nitsche, Mendéz (2004), não sofre do mal condicionamento. De toda forma, a implementação do método de Nitsche não é trivial como a do método de Lagrange e da Penalidade, no sentido da modificação da forma fraca ser diferente para cada problema particular.

Existe ainda o método do Lagrangeano aumentado, que consiste em uma combinação natural dos métodos dos multiplicadores de Lagrange e da penalidade exterior, Rossi (2005). Assim, este método trata de um compromisso entre a representação exata da condição imposta e a facilidade ocasionada pelos termos de penalidade ao processo de iteração.

Alternativamente, a modificação das funções de forma para acoplar ao método dos elementos finitos próximo ao contorno essencial permite a imposição direta dos valores prescritos no contorno, Belytschko *et al.* (1994), Krongauz e Belytschko (1996), Huerta e Méndez (2000). Desta forma, o domínio deve ser dividido em duas regiões: uma definida por um conjunto de nós associado ao método de elementos finitos e o outro definido por um conjunto de partículas associadas ao método livre de malha, EFG por exemplo. Além disso, no domínio de transição onde os suportes das funções de forma EFG e FEM se sobrepõem, a função de forma resultante é dada por uma soma das funções de forma EFG e FEM. Como resultado, para satisfazer a condição de consistência, isto é, para representar uma base

completa de polinômios exatamente até uma determinada ordem, um procedimento especial é requerido neste domínio de transição.

Em Rossi (2005), a imposição das condições de contorno essenciais foi realizada pelo uso de uma função de peso derivada, que foi chamado de método modificado dos elementos livres de Galerkin em que as funções peso são baseadas na partição da unidade estendida, *extended partition of unity finite element method* (EPuFem). Estas funções pesos EPuFem foram dispostas apenas na vizinhança do contorno essencial do problema. Assim, o domínio restante foi coberto através de funções peso EFG tradicionais. Além disso, como o espaço de aproximação final construído com base no MLS usando uma só base intrínseca para todo o domínio, a sobreposição das funções peso EPF (EPuFem) e EFG tornaram-se natural. De fato, o método proposto pode ser visto como um método EFG convencional, que contém um conjunto de funções de pesos diferentes, com a habilidade de selecionar para cada partícula o tipo de função de peso adequada. A este método foi dado o nome de *método de Galerkin livre de elementos modificado, modified element-free Galerkin method* (MEFG). A necessidade do uso de funções de peso EPF surge do fato de que é necessário satisfazer uma condição de consistência que está associada com a base intrínseca adotada. Tal condição não é satisfeita se forem utilizadas funções de peso oriundas do PuFem clássico para uma base intrínseca aumentada, fazendo com que surjam pontos onde a matriz de momento é singular. Usando o MEFG proposto, as funções de forma resultantes satisfazem, no sentido de limite, as condições de contorno essenciais, possuindo a propriedade de delta de Kronecker sobre tal contorno. Além disso, as funções de forma restantes são construídas de forma que o seu suporte não sobreponha o contorno onde as condições de contorno essenciais são prescritas. Desta forma, as condições de contorno essenciais são impostas da mesma maneira que no método de elementos finitos.

Existem ainda muitos outros métodos testados na literatura, como: métodos de colocação, Belytschko e Tabbara (1996), Mukherjee e Mukherjee (1997) e Zhu e Atluri (1998); uso de funções singulares, Lancaster e Salkauskas (1981) e Duarte e Oden (1996); método dos elementos finitos baseados na partição da unidade (*partition of unity finite element method*, PuFem), Melenk e Babuska (1996); método dos elementos finitos generalizados (*generalized finite element method*, GFEM), Stroubolis *et al.* (2000).

## 4.7 Integração Numérica

Um dos maiores dilemas em métodos sem malha são os cálculos das integrais na forma fraca, em outras palavras, como obter as matrizes do sistema de equações. Algumas abordagens têm sido propostas e estudadas como:

- Integração Nodal, Beissel e Belytschko (1996);
- Malha de integração, Liu (2002);
- Células de Wigner-Seitz, Chen, Lee, Eskandarian (2006).

Em geral, por simplicidade, como adotado nesta dissertação, as integrações numéricas são feitas via quadratura de Gauss usando uma malha de células de integração. Para problemas bidimensionais, esta malha é simplesmente a subdivisão do domínio em formas simples, distintas e sem sobreposição, como triângulos e quadriláteros, contanto que o domínio do problema seja coberto pela união destas formas. A subdivisão da geometria não precisa ser de fato uma malha de elementos finitos válida. Em particular, pode existir uma incompatibilidade arbitrária na malha cujos vértices não precisam ser compartilhados com os elementos adjacentes, como mostra a figura (4.7). A subdivisão em células não precisa de nenhuma maneira estar relacionada à distribuição das partículas EFG, embora seja conveniente posicionar estas partículas nos vértices das células de integração.

Maiores detalhes sobre integração numérica, via quadratura de Gauss e tabelas de valores, podem ser encontrados em Dhatt, Touzot (1984).

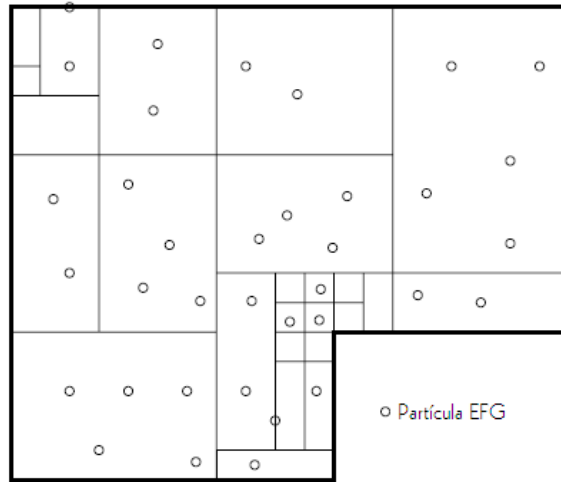


Figura 4.7 - Células de integração do Método de Galerkin livre de elementos.

## 4.8 Discretização Numérica

O problema de placa a ser discretizado pelo método de Galerkin livre de elementos pode ser definido pela sua forma forte, conforme detalhado no capítulo 3, como: Encontrar  $(\vec{u}_0, \vec{\theta})$  que satisfaça as equações e condições de contorno apresentadas na tabela (3.1).

Para discretizar é necessário encontrar a formulação fraca do problema. Aplicando o princípio variacional pode-se escrever o problema como: Encontrar  $(\vec{u}_0, \vec{\theta}) \in G$ ,  $G = \left\{ (\vec{u}_0, \vec{\theta}) \mid \text{suf. regular, } (\vec{u}_0, \vec{\theta}) = (\vec{u}_0, \vec{\theta}) \text{ em } \Gamma_u \right\}$ , tal que  $(\vec{u}_0, \vec{\theta}) = \arg \min_{\forall (\vec{u}_0^\Delta, \vec{\theta}^\Delta) \in G} \mathfrak{I}(\vec{u}_0^\Delta, \vec{\theta}^\Delta)$ , em que o funcional  $\mathfrak{I}$  é dado pela equação (3.66).

A imposição da condição de contorno essencial pode ser relaxada modificando a formulação variacional através da introdução de um termo de penalidade que implicitamente, assegura a satisfação da condição de contorno essencial. A formulação fraca passa a ser determinar  $(\vec{u}_0, \vec{\theta})$  tal que  $(\vec{u}_0, \vec{\theta}) = \lim_{\eta \rightarrow 0} (\vec{u}_{0_\eta}, \vec{\theta}_\eta)$ , em que  $(\vec{u}_{0_\eta}, \vec{\theta}_\eta)$  é solução de: Dado  $\eta > 0$ , determinar  $(\vec{u}_{0_\eta}, \vec{\theta}_\eta)$  solução  $(\vec{u}_{0_\eta}, \vec{\theta}_\eta) = \arg \min_{\forall (\vec{u}_0^\Delta, \vec{\theta}^\Delta)} \mathfrak{I}_\eta(\vec{u}_0^\Delta, \vec{\theta}^\Delta)$ . O funcional  $\mathfrak{I}_\eta$  é dado pela equação (3.70).

A equação de equilíbrio associada pode ser determinada pela imposição da condição de estacionaridade no ponto de mínimo. Neste caso, o problema pode ser formulado como:

Encontrar  $(\bar{u}_0, \bar{\theta})$  tal que satisfaça a formulação fraca dada por

$$\begin{aligned} & \int_A [C] \cdot \bar{\kappa} \cdot \delta \bar{\kappa} \, dA - \int_A \sum_{k=1}^n \{ \rho^k h^k \} \bar{g} \cdot \delta \bar{u}_0 \, dA - \int_{\partial A_t} \left( [\alpha 3] \cdot \bar{N}_t \cdot \bar{u}_0 - [\alpha 2] \cdot \bar{M}_t \cdot \bar{\theta} \right) \cdot dS \\ & - \int_A \bar{q} \cdot \delta \bar{u}_0 \cdot dA + \frac{1}{\eta} \int_{\partial A_u} \left\{ \left( \bar{u}_0 - \bar{u}_0 \right) \cdot \delta \bar{u}_0 + \left( \bar{\theta} - \bar{\theta} \right) \cdot \delta \bar{\theta} \right\} \cdot dS = 0, \quad \forall (\delta \bar{u}_0, \delta \bar{\theta}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Com a finalidade de se obter as equações discretas relativas à forma fraca, tanto os campos  $\bar{u}_0$  e  $\bar{\theta}$ , quanto  $\delta \bar{u}_0$  e  $\delta \bar{\theta}$  serão construídos com base na aproximação do método de Galerkin livre de elementos, conforme as equações abaixo

$$\begin{aligned} u^h(\bar{x}) &= \sum_{I=1}^n \Phi_I(\bar{x}) u_I, \quad v^h(\bar{x}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\bar{x}) v_I, \quad w^h(\bar{x}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\bar{x}) w_I \\ \theta_y^h(\bar{x}) &= \sum_{I=1}^n \frac{\partial \Phi_I}{\partial x}(\bar{x}) \theta_{y_I}, \quad \theta_x^h(\bar{x}) = \sum_{I=1}^n \frac{\partial \Phi_I}{\partial y}(\bar{x}) \theta_{x_I} \end{aligned} \quad (4.43)$$

e

$$\begin{aligned} \delta u^h(\bar{x}) &= \sum_{I=1}^n \Phi_I(\bar{x}) \delta u_I, \quad \delta v^h(\bar{x}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\bar{x}) \delta v_I, \quad \delta w^h(\bar{x}) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\bar{x}) \delta w_I \\ \delta \theta_y^h(\bar{x}) &= \sum_{I=1}^n \frac{\partial \Phi_I}{\partial x}(\bar{x}) \delta \theta_{y_I}, \quad \delta \theta_x^h(\bar{x}) = \sum_{I=1}^n \frac{\partial \Phi_I}{\partial y}(\bar{x}) \delta \theta_{x_I} \end{aligned} \quad (4.44)$$

A fim de estabelecer o problema na forma discreta vai se denotar  $\mathbf{K}^h$  e  $\mathbf{V}^h$  como o *espaço de aproximação*. Com base na discretização apresentada podemos formular o problema na forma discreta como: Encontrar  $(\bar{u}_0^h, \bar{\theta}^h) \in \mathbf{K}^h$  solução de



$$\begin{aligned}
& \int_A [\mathbf{C}] \cdot \bar{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{u}}_0^h, \bar{\boldsymbol{\theta}}^h) \cdot \delta \bar{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{u}}_0^h, \bar{\boldsymbol{\theta}}^h) dA \\
& - \int_A \sum_{k=1}^n \{ \rho^k h^k \} \bar{\mathbf{g}} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}_0^h dA - \int_{\partial A_t} \left( [\alpha 3] \cdot \bar{\bar{N}}_t \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}_0^h - [\alpha 2] \cdot \bar{\bar{M}}_t \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}^h \right) dS \\
& - \int_A \bar{\bar{q}} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}_0^h dA + \frac{1}{\eta} \int_{\partial A_u} \left\{ \left( \bar{\mathbf{u}}_0^h - \bar{\bar{u}}_0 \right) \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}_0^h + \left( \bar{\boldsymbol{\theta}}^h - \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}} \right) \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}^h \right\} dS = 0, \quad \forall (\delta \bar{\mathbf{u}}_0^h, \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}^h) \in \mathbf{V}^h
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Os vetores deslocamento  $\bar{\mathbf{u}}_0^h$  e sua variação  $\delta \bar{\mathbf{u}}_0^h$  podem ser expressos na forma matricial como

$$\bar{\mathbf{u}}_0^h(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{Bmatrix} u^h(\bar{\mathbf{x}}) \\ v^h(\bar{\mathbf{x}}) \\ w^h(\bar{\mathbf{x}}) \end{Bmatrix} = [\bar{\Phi}^g(\bar{\mathbf{x}})] \{ \bar{\mathbf{u}}^g \} \tag{4.46}$$

e

$$\delta \bar{\mathbf{u}}_0^h(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{Bmatrix} \delta u^h(\bar{\mathbf{x}}) \\ \delta v^h(\bar{\mathbf{x}}) \\ \delta w^h(\bar{\mathbf{x}}) \end{Bmatrix} = [\bar{\Phi}^g(\bar{\mathbf{x}})] \{ \delta \bar{\mathbf{u}}^g \} \tag{4.47}$$

O vetor  $\bar{\mathbf{u}}^g$  representa os graus de liberdade associados ao problema e é definido pela equação (4.48), e sua variação  $\delta \bar{\mathbf{u}}^g$  é definida pela equação (4.49), i.e.,

$$\bar{\mathbf{u}}^{g^T} = \left[ u_1^h \quad v_1^h \quad w_1^h \quad \theta_{y_1}^h \quad -\theta_{x_1}^h \mid u_2^h \quad v_2^h \quad w_2^h \quad \theta_{y_2}^h \quad -\theta_{x_2}^h \mid \dots \right. \\
\left. u_n^h \quad v_n^h \quad w_n^h \quad \theta_{y_n}^h \quad -\theta_{x_n}^h \right] \tag{4.48}$$

e

$$\delta \bar{\mathbf{u}}^{g^T} = \left[ \delta u_1^h \quad \delta v_1^h \quad \delta w_1^h \quad \delta \theta_{y_1}^h \quad -\delta \theta_{x_1}^h \mid \delta u_2^h \quad \delta v_2^h \quad \delta w_2^h \quad \delta \theta_{y_2}^h \quad -\delta \theta_{x_2}^h \mid \dots \right. \\
\left. \delta u_n^h \quad \delta v_n^h \quad \delta w_n^h \quad \delta \theta_{y_n}^h \quad -\delta \theta_{x_n}^h \right] \tag{4.49}$$

Em que a matriz  $[\bar{\Phi}^g(\bar{\mathbf{x}})]$  é definida como

$$\left[ \bar{\Phi}^g(\bar{x}) \right] = \left[ \Phi_1(\bar{x}) \mid \Phi_2(\bar{x}) \mid \dots \mid \Phi_a(\bar{x}) \mid \dots \mid \Phi_n(\bar{x}) \right], \quad (4.50)$$

onde  $\Phi_a(\bar{x})$  representa as matrizes em bloco:

$$\left[ \bar{\Phi}_a(\bar{x}) \right] = \begin{bmatrix} \Phi_a(\bar{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_a(\bar{x}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_a(\bar{x}) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Os vetores rotação  $(\theta_y^h, -\theta_x^h)$  e sua variação  $(\delta\theta_y^h, -\delta\theta_x^h)$  podem ser expressos na forma matricial como indicado pelas equações (4.52) e (4.53), respectivamente, i.e.,

$$\begin{Bmatrix} \theta_y^h(\bar{x}) \\ -\theta_x^h(\bar{x}) \end{Bmatrix} = \left[ \bar{\Psi}^g(\bar{x}) \right] \{ \bar{u}^g \} \quad (4.52)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \delta\theta_y^h(\bar{x}) \\ -\delta\theta_x^h(\bar{x}) \end{Bmatrix} = \left[ \bar{\Psi}^g(\bar{x}) \right] \{ \delta\bar{u}^g \} \quad (4.53)$$

em que a matriz  $\left[ \bar{\Psi}^g(\bar{x}) \right]$ , é definida como

$$\left[ \bar{\Psi}^g(\bar{x}) \right] = \left[ \Psi_1(\bar{x}) \mid \Psi_2(\bar{x}) \mid \dots \mid \Psi_a(\bar{x}) \mid \dots \mid \Psi_n(\bar{x}) \right], \quad (4.54)$$

onde  $\Psi_a(\bar{x})$  representa as matrizes em bloco:

$$[\bar{\Psi}_a(\vec{x})] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_a(\vec{x})}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_a(\vec{x})}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

A determinação das deformações generalizadas  $\bar{\kappa}$  a partir dos deslocamentos generalizados é feita através da matriz deformação  $[\bar{\mathbf{B}}^s(\vec{x})]$ , i.e.,

$$\bar{\kappa} = [\bar{\mathbf{B}}^s(\vec{x})] \{ \bar{u}^s \}. \quad (4.56)$$

A matriz deformação  $[\bar{\mathbf{B}}^s(\vec{x})]$  é definida como

$$[\bar{\mathbf{B}}^s(\vec{x})] = [ \mathbf{B}_1(\vec{x}) \mid \mathbf{B}_2(\vec{x}) \mid \dots \mid \mathbf{B}_a(\vec{x}) \mid \dots \mid \mathbf{B}_n(\vec{x}) ], \quad (4.57)$$

onde  $\mathbf{B}_a(\vec{x})$  representa as matrizes em bloco:

$$\left[ \mathbf{B}_a(\bar{x}) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_a(\bar{x})}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_a(\bar{x})}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Phi_a(\bar{x})}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_a(\bar{x})}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \Phi_a(\bar{x})}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \Phi_a(\bar{x})}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \Phi_a(\bar{x})}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \Phi_a(\bar{x})}{\partial x \partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_a(\bar{x})}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_a(\bar{x})}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_a(\bar{x})}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \Phi_a(\bar{x})}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Por analogia, a variação das deformações generalizadas é obtida por

$$\delta \bar{\kappa} = \left[ \bar{\mathbf{B}}^s(\bar{x}) \right] \{ \delta \bar{u}^s \} \quad (4.59)$$

Substituindo as relações matriciais definidas nas equações (4.46) a (4.59) na equação de equilíbrio (4.45) obtém-se

$$\begin{aligned}
& \int_A [\mathbf{C}] \cdot [\bar{\mathbf{B}}^g(\bar{x})] \{\bar{u}^g\} \cdot [\bar{\mathbf{B}}^g(\bar{x})] \{\delta \bar{u}^g\} dA \\
& - \int_A \sum_{k=1}^n \{\rho^k h^k\} \bar{\mathbf{g}} \cdot [\bar{\Phi}^g(\bar{x})] \{\delta \bar{u}^g\} dA \\
& - \int_{\partial A_t} \left( [\alpha 3] \cdot \bar{N}_t \cdot [\bar{\Phi}^g(\bar{x})] \{\delta \bar{u}^g\} - [\alpha 2] \cdot \bar{M}_t \cdot [\bar{\Psi}^g(\bar{x})] \{\delta \bar{u}^g\} \right) dS \\
& - \int_A \bar{q} \cdot [\bar{\Phi}^g(\bar{x})] \{\delta \bar{u}^g\} dA \\
& + \frac{1}{\eta} \int_{\partial A_u} \left\{ \left( [\bar{\Phi}^g(\bar{x})] \{\bar{u}^g\} - \bar{u}_0 \right) \cdot [\bar{\Phi}^g(\bar{x})] \{\delta \bar{u}^g\} \right. \\
& \left. + \left( [\bar{\Psi}^g(\bar{x})] \{\bar{u}^g\} - \bar{\theta} \right) \cdot [\bar{\Psi}^g(\bar{x})] \{\delta \bar{u}^g\} \right\} dS \\
& = 0, \quad \forall (\delta \bar{u}_0^h, \delta \bar{\theta}^h) \in \mathbf{V}^h
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Realizando-se as integrações indicadas na equação (4.60) encontra-se:

$$\left\{ \left[ [\mathbf{K}] + [\mathbf{K}^\eta] \right] \{\bar{u}^g\} - (\mathbf{F}^g + \mathbf{F}^N + \mathbf{F}^M + \mathbf{F}^q + \mathbf{F}^u + \mathbf{F}^\theta) \right\} \cdot \delta \bar{u}^g = 0, \quad \forall \delta \bar{u}^g \tag{4.61}$$

Os vetores e matrizes que aparecem na equação (4.61) são definidos nas equações (4.62) a (4.69), i.e.,

$$[\mathbf{K}] = \int_A [\bar{\mathbf{B}}^g(\bar{x})]^T [\mathbf{C}] [\bar{\mathbf{B}}^g(\bar{x})] dA, \tag{4.62}$$

$$\mathbf{F}^g = \int_A [\bar{\Phi}^g(\bar{x})]^T \cdot \sum_{k=1}^n \{\rho^k h^k\} \cdot \bar{\mathbf{g}} \cdot dA, \tag{4.63}$$

$$\mathbf{F}^N = \int_{\partial A_t} [\bar{\Phi}^g(\bar{x})]^T [\alpha 3] \cdot \bar{N}_t \cdot dS, \tag{4.64}$$

$$\mathbf{F}^M = \int_{\partial A_t} [\bar{\Psi}^g(\bar{x})]^T [\alpha 2] \cdot \bar{M}_t \cdot dS, \tag{4.65}$$

$$\mathbf{F}^q = \int_A [\bar{\Phi}^g(\bar{x})]^T \bar{q} dA, \quad (4.66)$$

$$\mathbf{F}^u = \frac{1}{\eta} \int_{\partial A_u} [\bar{\Phi}^g(\bar{x})]^T \bar{u}_0 dS, \quad (4.67)$$

$$\mathbf{F}^\theta = \frac{1}{\eta} \int_{\partial A_u} [\bar{\Psi}^g(\bar{x})]^T \bar{\theta} dS \quad (4.68)$$

e

$$[\mathbf{K}^\eta] = \frac{1}{\eta} \int_{\partial A_u} [\bar{\Phi}^g(\bar{x})]^T [\bar{\Phi}^g(\bar{x})] dS + \frac{1}{\eta} \int_{\partial A_u} [\bar{\Psi}^g(\bar{x})]^T [\bar{\Psi}^g(\bar{x})] dS \quad (4.69)$$

Finalmente, o problema discretizado pode ser formulado como: determinar  $\bar{u}^g$ , solução de

$$([\mathbf{K}] + [\mathbf{K}^\eta]) \{ \bar{u}^g \} = \mathbf{F}^g + \mathbf{F}^N + \mathbf{F}^M + \mathbf{F}^q + \mathbf{F}^u + \mathbf{F}^\theta \quad (4.70)$$

Para a determinação das integrais de área, ou seja, em  $A$ , efetua-se a mudança de variáveis indicada pelas equações (4.71) e (4.72), considerando células de integração triangulares. Logo,

$$x = x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 x_i N_i(\xi, \eta) \quad (4.71)$$

e

$$y = y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 y_i N_i(\xi, \eta) \quad (4.72)$$

As funções  $N_i(\xi, \eta)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são definidas pelas equações (4.73), (4.74) e (4.75), i.e.,

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad (4.73)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \xi, \quad (4.74)$$

e

$$N_3(\xi, \eta) = \eta. \quad (4.75)$$

Para possibilitar a integração numérica é feita a parametrização do domínio, conforme a equação (4.76), em que  $f(x, y)$  é uma função genérica,  $J(\xi, \eta)$  é o determinante da matriz jacobiana e  $A_e$  é o domínio da integração, também chamada de célula de integração pelo método de Galerkin livre de elementos.

$$\int_{A_e} f(x, y).dx.dy = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)).J(\xi, \eta).d\eta.d\xi \quad (4.76)$$

O determinante da matriz jacobiana é dado pela equação (4.77), i.e.,

$$\begin{aligned} J = \det[\mathbf{J}] &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^3 y_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^3 y_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Uma vez feita a mudança de variáveis e a parametrização do domínio da célula de integração, pode-se calcular a integral por meio da quadratura de Gauss, equação (4.78).

Neste trabalho foram usados doze pontos de integração por célula, devido ao fato da função de interpolação não ser polinomial, Dhatt e Touzot (1984).

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} h(\xi, \eta) . d\eta . d\xi \simeq \sum_{i=1}^{12} h(\xi_i, \eta_i) W_i \quad (4.78)$$

Como resultado, a integração, para o caso de uma partição do domínio em células triangulares, é dada pelas equações (4.79), (4.80) e (4.81), i.e.,

$$[\mathbf{K}_e] \simeq \sum_{i=1}^{12} [\bar{\mathbf{B}}^g(\bar{x}(\xi_i, \eta_i))]^T \cdot [\mathbf{C}] \cdot [\bar{\mathbf{B}}^g(\bar{x}(\xi_i, \eta_i))] \cdot J(\xi_i, \eta_i) \cdot W_i \quad (4.79)$$

$$\mathbf{F}_e^g \simeq \sum_{i=1}^{12} \sum_{k=1}^n \{ \rho^k h^k \} [\bar{\Phi}^g(\bar{x}(\xi_i, \eta_i))]^T \cdot \bar{g} \cdot J(\xi_i, \eta_i) \cdot W_i \quad (4.80)$$

e

$$\mathbf{F}_e^q \simeq \sum_{i=1}^{12} [\bar{\Phi}^g(\bar{x}(\xi_i, \eta_i))]^T \cdot \bar{q} \cdot J(\xi_i, \eta_i) \cdot W_i \quad (4.81)$$

No caso de integrais de linha, a parametrização é feita conforme as equações (4.82) e (4.83), dadas por

$$x(\tau) = \sum_{i=1}^2 x_i \phi_i(\tau) \quad (4.82)$$

e

$$y(\tau) = \sum_{i=1}^2 y_i \phi_i(\tau) \quad (4.83)$$

As funções  $\phi_i(\tau)$ ,  $i = 1, 2$ , são definidas pelas equações (4.84) e (4.85), i.e.,



$$\phi_1(\tau) = \frac{1-\tau}{2} \quad (4.84)$$

e

$$\phi_2(\tau) = \frac{1+\tau}{2} \quad (4.85)$$

O equivalente da matriz jacobiana, para a integral de linha, é calculado seguindo os passos seguintes: definem-se o vetor posição  $\vec{r}(\tau)$  e sua derivada  $d\vec{r}$ , equações (4.86) e (4.87), respectivamente, dadas por

$$\vec{r}(\tau) = x(\tau) \vec{e}_x + y(\tau) \vec{e}_y \quad (4.86)$$

e

$$d\vec{r} = \left\{ \frac{dx(\tau)}{d\tau} \vec{e}_x + \frac{dy(\tau)}{d\tau} \vec{e}_y \right\} d\tau \quad (4.87)$$

Um comprimento diferencial de arco  $ds$  é calculado conforme a equação (4.88).

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} \\ &= \sqrt{\left( \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy(\tau)}{d\tau} \right)^2} d\tau \\ &= \sqrt{\left( \frac{x_2 - x_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{y_2 - y_1}{2} \right)^2} d\tau \\ &= \frac{L_e}{2} d\tau \end{aligned} \quad (4.88)$$

Na equação (4.88),  $L_e$  é o comprimento em módulo da aresta ligando  $\vec{x}_1 = (x_1, y_1)$  a  $\vec{x}_2 = (x_2, y_2)$ . A integral de linha pode então ser definida como:

$$\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} h(\bar{x}) ds = \int_{-1}^1 h(\bar{x}(\tau)) \frac{L_e}{2} d\tau \quad (4.89)$$

Este procedimento pode ser aplicado aos vetores de carga e à contribuição da matriz de rigidez advinda do termo de penalidade, equações (4.90) a (4.94), i.e.,

$$\mathbf{F}_e^N \simeq \sum_{i=1}^3 [\bar{\Phi}^g(\bar{x}(\tau_i))]^T \cdot [\alpha 3] \cdot \bar{N}_i \cdot \frac{L_e}{2} \cdot W_i, \quad (4.90)$$

$$\mathbf{F}_e^M \simeq \sum_{i=1}^3 [\bar{\Psi}^g(\bar{x}(\tau_i))]^T \cdot [\alpha 2] \cdot \bar{M}_i \cdot \frac{L_e}{2} \cdot W_i, \quad (4.91)$$

$$\mathbf{F}_e^u \simeq \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\eta} \cdot [\bar{\Phi}^g(\bar{x}(\tau_i))]^T \cdot \bar{u}_0 \cdot \frac{L_e}{2} \cdot W_i, \quad (4.92)$$

$$\mathbf{F}_e^\theta \simeq \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\eta} \cdot [\bar{\Psi}^g(\bar{x}(\tau_i))]^T \cdot \bar{\theta} \cdot \frac{L_e}{2} \cdot W_i, \quad (4.93)$$

e

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_e^\eta] &\simeq \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\eta} \cdot [\bar{\Phi}^g(\bar{x}(\tau_i))]^T [\bar{\Phi}^g(\bar{x}(\tau_i))] \cdot \frac{L_e}{2} \cdot W_i \\ &+ \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\eta} \cdot [\bar{\Psi}^g(\bar{x}(\tau_i))]^T [\bar{\Psi}^g(\bar{x}(\tau_i))] \cdot \frac{L_e}{2} \cdot W_i \end{aligned} \quad (4.94)$$

## Capítulo 5

# Resultados Numéricos

### 5.1 Introdução

No capítulo anterior foi detalhada a implementação numérica proposta neste trabalho, onde o problema de placa de materiais compostos laminados foi discretizado usando o método de Galerkin livre de elementos. Neste capítulo, o programa é testado através da comparação com soluções analíticas e são avaliadas a escolha do fator de influência e o tipo de função peso adotada.

Os resultados apresentados foram adimensionalizados, exceto quando indicado o contrário, conforme as equações (5.1), (5.2) e (5.3), sendo  $h$  a espessura da placa,  $a$  o comprimento característico,  $q_0$  a intensidade do carregamento atuante (caso de carregamento distribuído) e  $E_2$  o módulo de elasticidade na direção transversal às fibras.

$$\bar{w} = w \cdot \left( \frac{E_2 \cdot h^3}{q_0 \cdot a^4} \right) \cdot 10^2 \quad (5.1)$$

$$\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \cdot \left( \frac{h^2}{q_0 \cdot a^2} \right); \bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} \cdot \left( \frac{h^2}{q_0 \cdot a^2} \right); \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} \cdot \left( \frac{h^2}{q_0 \cdot a^2} \right) \quad (5.2)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz} \cdot \left( \frac{h}{q_0 \cdot a} \right); \bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \cdot \left( \frac{h}{q_0 \cdot a} \right) \quad (5.3)$$

Em todos os exemplos foi considerado um laminado de carbono/ epoxy com propriedades do material encontradas em diversos artigos. Foi negligenciada a inconsistência

entre os valores do módulo de cisalhamento e coeficiente de Poisson para não perder a referência de outros resultados publicados.

## 5.2 Avaliação da Densidade de Partículas

Para avaliar o efeito da densidade de partículas na solução de problemas, será usado como referência o problema descrito a seguir:

- Dimensões da placa:  $a = 1m$ ,  $b = 1m$  e  $h = 10mm$ ,  $h = 50mm$  ou  $h = 100mm$ ;
- Propriedades do material (carbono/ epoxy):  $E_1 = 25.E_2$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0,5.E_2$ ,  
 $G_{23} = 0,2.E_2$ ,  $\nu_{12} = 0,25$  e  $k = \frac{5}{6}$ ;
- Seqüência de empilhamento: laminado simétrico [0/90/0];
- Condições de contorno essenciais: placa simplesmente apoiada (SS-1), ou seja,  $v = w = \theta_x = 0$  em  $x = 0$  e  $x = a$ ,  $u = w = \theta_y = 0$  em  $y = 0$  e  $y = b$ ;
- Carregamento: esforço uniformemente distribuído na superfície da placa de intensidade  $q_0 = 10N/m^2$  na direção  $z$ ;
- Malha de 25 a 400 partículas no total;
- Função peso: *spline* de sétima ordem;
- Fator de abrangência:  $s = 1,8$ .

A solução analítica para este problema é encontrada em Reddy (1997). A figura (5.3) ilustra este problema.

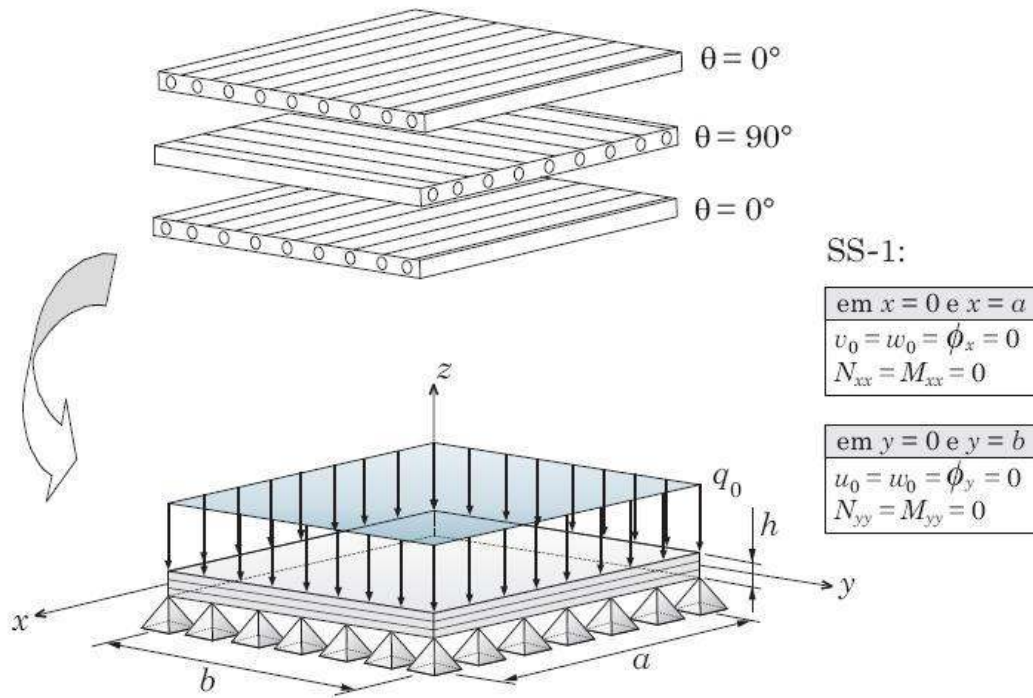


Figura 5.1 – Laminado simplesmente apoiado (SS-1) com carregamento uniforme.

A tabela (5.1) apresenta os resultados adimensionalizados nos pontos:  $\bar{w}$  em  $(a/2, b/2, 0)$ ,  $\bar{\sigma}_{xx}$  em  $(a/2, b/2, h/2)$  e  $\bar{\sigma}_{yz}$  em  $(a/2, 0)$  na lâmina 2.

Tabela 5.1 – Resultados para avaliação da influência da densidade de partículas.

$a/h$	Solução	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
10	25 Partículas	0,8389	0,6908	0,164
	49 Partículas	1,1176	0,7488	0,340
	100 Partículas	1,1014	0,8140	0,255
	196 Partículas	1,0690	0,7883	0,236
	289 Partículas	1,0576	0,7785	0,208
	400 Partículas	1,0499	0,7790	0,210

	Solução Analítica de Reddy	1,0219	0,7719	0,311
20	25 Partículas	0,1234	0,0376	0,009
	49 Partículas	0,5416	0,5307	0,230
	100 Partículas	0,7579	0,7777	0,199
	196 Partículas	0,7789	0,8079	0,205
	289 Partículas	0,7790	0,8054	0,168
	400 Partículas	0,7725	0,8050	0,202
	Solução Analítica de Reddy	0,7572	0,7983	0,290
100	25 Partículas	0,1050	0,0772	0,406
	49 Partículas	0,7613	0,7770	0,398
	100 Partículas	0,7187	0,8532	0,196
	196 Partículas	0,6939	0,8222	0,254
	289 Partículas	0,6882	0,8151	0,047
	400 Partículas	0,6789	0,8107	0,240
	Solução Analítica de Reddy	0,6697	0,8072	0,284

A partir da análise dos resultados apresentados na tabela (5.1), pode-se concluir que quanto maior a densidade de partículas melhor, sendo que 196 partículas já apresentam um bom resultado.

### 5.3 Avaliação do Fator de Abrangência

Para avaliar a escolha do fator de abrangência será usado como referência o seguinte problema:

- Dimensões da placa:  $a=1m$  e  $b=1m$  com  $h=10mm$ ,  $h=50mm$  e

- $h = 100mm$  ;
- Propriedades do material (carbono/ epoxy):  $E_1 = 25.E_2$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0,5.E_2$ ,  
 $G_{23} = 0,2.E_2$ ,  $\nu_{12} = 0,25$  e  $k = \frac{5}{6}$  ;
- Seqüência de empilhamento: laminado antisimétrico [-45/45];
- Condições de contorno essenciais: placa simplesmente apoiada (SS-2), ou seja,  $u = w = \theta_x = 0$  em  $x = 0$  e  $x = a$ ,  $v = w = \theta_y = 0$  em  $y = 0$  e  $y = b$  ;
- Carregamento: esforço uniformemente distribuído na superfície da placa de intensidade  $q_0 = 10N / m^2$  na direção  $z$  ;
- Malha de 400 particulas no total;
- Função peso: *spline* de sétima ordem;
- Fator de abrangência: de  $s = 1,5$  a  $s = 4,0$  .

A solução analítica para este problema é encontrada em Reddy (1997). A figura (5.4) ilustra este problema.

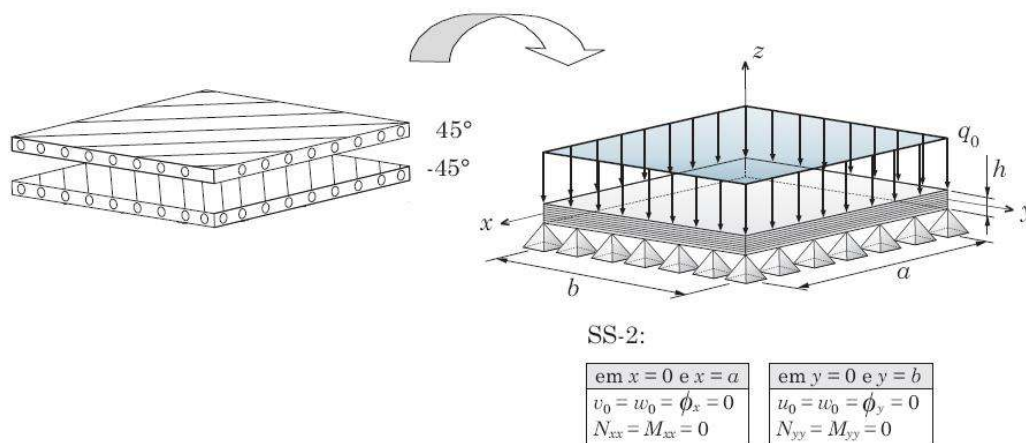


Figura 5.2 – Laminado simplesmente apoiado (SS-2) com carregamento uniforme.

A tabela (5.2) apresenta os resultados adimensionalizados nos pontos:  $\bar{w}$  em  $(a/2, b/2, 0)$ ,  $\bar{\sigma}_{xx}$  em  $(a/2, b/2, h/2)$  e  $\bar{\sigma}_{xz}$  em  $(0, b/2)$  na lâmina 2.

Tabela 5.2 – Resultados para avaliação e escolha do fator de abrangência.

$a/h$	Solução	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
10	Fator de abrangência = 1,5	1,3032	0,3514	0,298
	Fator de abrangência = 1,8	1,3461	0,3627	0,228
	Fator de abrangência = 2,4	1,4797	0,4237	0,098
	Fator de abrangência = 3,0	1,5360	0,4190	0,625
	Fator de abrangência = 4,0	1,8522	0,5710	1,508
	Solução Analítica de Reddy	1,2792	0,3476	0,424
20	Fator de abrangência = 1,5	1,1096	0,3529	0,297
	Fator de abrangência = 1,8	1,1497	0,3650	0,205
	Fator de abrangência = 2,4	1,2624	0,4162	0,117
	Fator de abrangência = 3,0	1,3128	0,4118	0,689
	Fator de abrangência = 4,0	1,5015	0,5476	1,638
	Solução Analítica de Reddy	1,0907	0,3496	0,421
100	Fator de abrangência = 1,5	1,0504	0,3484	0,306
	Fator de abrangência = 1,8	1,0745	0,3515	0,329
	Fator de abrangência = 2,4	1,2053	0,3846	0,054
	Fator de abrangência = 3,0	1,2974	0,3833	0,329
	Fator de abrangência = 4,0	1,4715	0,5073	2,551
	Solução Analítica de Reddy	1,0305	0,3504	0,419

O menor valor do fator de abrangência para que a matriz momento fosse invertível foi 1,5. Sendo assim, foram apresentados os resultados para valores de 1,5 a 4,0. Percebe-se que para valores do fator de abrangência acima de 2,0 o resultado começa a piorar. A



explicação para isto é o fato da aproximação por mínimos quadrados móveis perder a característica local, aparecendo uma espécie de travamento numérico.

## 5.4 Avaliação da Função Peso

A escolha da função peso será avaliada a partir do problema descrito abaixo:

- Dimensões da placa:  $a = 1m$  e  $b = 1m$  com  $h = 10mm$ ,  $h = 50mm$  e  $h = 100mm$ ;
- Propriedades do material (carbono/ epoxy):  $E_1 = 25.E_2$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0,5.E_2$ ,  $G_{23} = 0,2.E_2$ ,  $\nu_{12} = 0,25$  e  $k = \frac{5}{6}$ ;
- Seqüência de empilhamento: laminado antisimétrico [-45/45];
- Condições de contorno essenciais: placa simplesmente apoiada (SS-2), ou seja,  $u = w = \theta_x = 0$  em  $x = 0$  e  $x = a$ ,  $v = w = \theta_y = 0$  em  $y = 0$  e  $y = b$ ;
- Carregamento: esforço senoidalmente distribuído na superfície da placa de intensidade  $q(x, y) = q_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{x \cdot \pi}{a}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{y \cdot \pi}{b}\right)$ , com  $q_0 = 10N/m^2$  na direção  $z$ ;
- Malha de 196 partículas no total;
- Função peso: *spline* cúbica, *spline* quártica e *spline* de sétima ordem;
- Fator de abrangência:  $s = 1,5$ .

A solução analítica para este problema é encontrada em Reddy (1997). A figura (5.5) ilustra este problema.

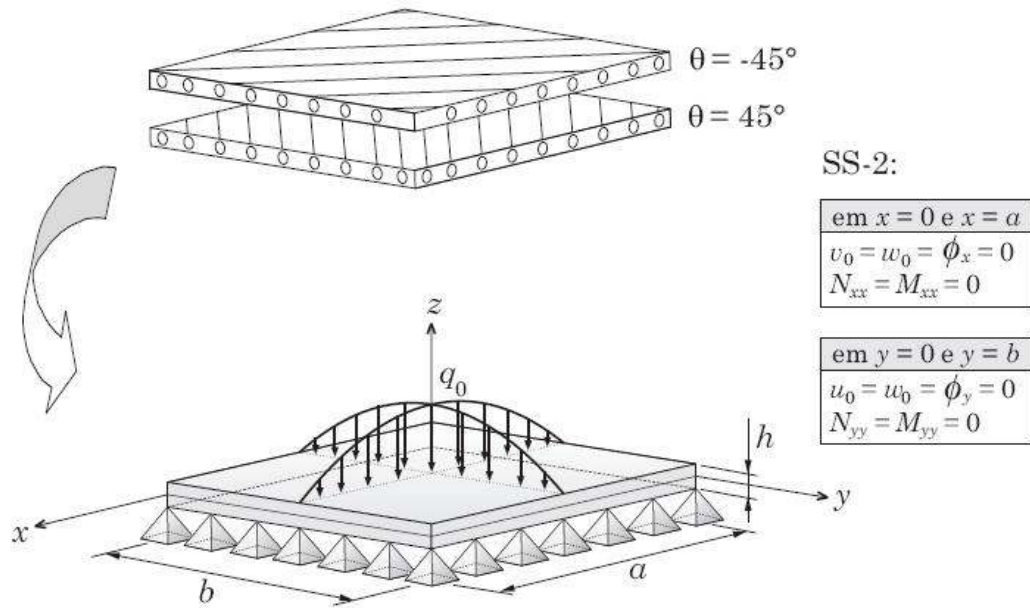


Figura 5.3 – Laminado simplesmente apoiado (SS-2) com carregamento senoidal.

A tabela (5.3) apresenta os resultados adimensionalizados nos pontos:  $\bar{w}$  em  $(a/2, b/2, 0)$ ,  $\bar{\sigma}_{xx}$  em  $(a/2, b/2, h/2)$  e  $\bar{\sigma}_{xz}$  em  $(0, b/2)$  na lâmina 2.

Tabela 5.3 – Resultados para avaliação e escolha da função peso.

$a/h$	Função Peso	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{xy}$
10	<i>spline</i> cúbica	0,8890	0,2510	0,2383
	<i>spline</i> quártica	0,8594	0,2538	0,2126
	<i>spline</i> de sétima ordem	0,8550	0,2519	0,2142
	Solução Analítica de Reddy	0,8284	0,2498	0,2336
20	<i>spline</i> cúbica	0,7329	0,2489	0,2334
	<i>spline</i> quártica	0,7163	0,2520	0,2018
	<i>spline</i> de sétima ordem	0,7149	0,2507	0,2087

	Solução Analítica de Reddy	0,6981	0,2498	0,2336
100	<i>spline</i> cúbica	0,6847	0,2442	0,2272
	<i>spline</i> quártica	0,6775	0,2502	0,2271
	<i>spline</i> de sétima ordem	0,6765	0,2486	0,2238
	Solução Analítica de Reddy	0,6564	0,2498	0,2336

Não foi possível identificar qual a melhor função peso para problemas de placas. Todas as três *splines* apresentaram resultados próximos, sendo que as *splines* quárticas e de sétima ordem foram sutilmente melhores que a *spline* cúbica.

## 5.5 Comparativo com Outros Métodos

Para comparar o método de Galerkin livre de elementos com outros métodos será aplicado ao problema descrito abaixo:

- Dimensões da placa:  $a=1m$  e  $b=1m$  com  $h=10mm$ ,  $h=50mm$  e  $h=100mm$ ;
- Propriedades do material (carbono/ epoxy):  $E_1 = 25.E_2$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0,5.E_2$ ,  $G_{23} = 0,2.E_2$ ,  $\nu_{12} = 0,25$  e  $k = \frac{5}{6}$ ;
- Seqüência de empilhamento: laminado simétrico [0/90/90/0];
- Condições de contorno essenciais: placa simplesmente apoiada (SS-1), ou seja,  $v = w = \theta_x = 0$  em  $x=0$  e  $x=a$ ,  $u = w = \theta_y = 0$  em  $y=0$  e  $y=b$ ;
- Carregamento: esforço senoidalmente distribuído na superfície da placa de intensidade  $q(x,y) = q_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{x\pi}{a}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{y\pi}{b}\right)$ , com  $q_0 = 10N/m^2$  na direção  $z$ ;
- Malha de 400 partículas no total;
- Função peso: *spline* quártica;

- Fator de abrangência:  $s = 1,5$ .

O resultado encontrado usando o método de Galerkin livre de elementos será comparado com os resultados encontrados no trabalho de Belo (2006). A figura (5.6) ilustra este problema.

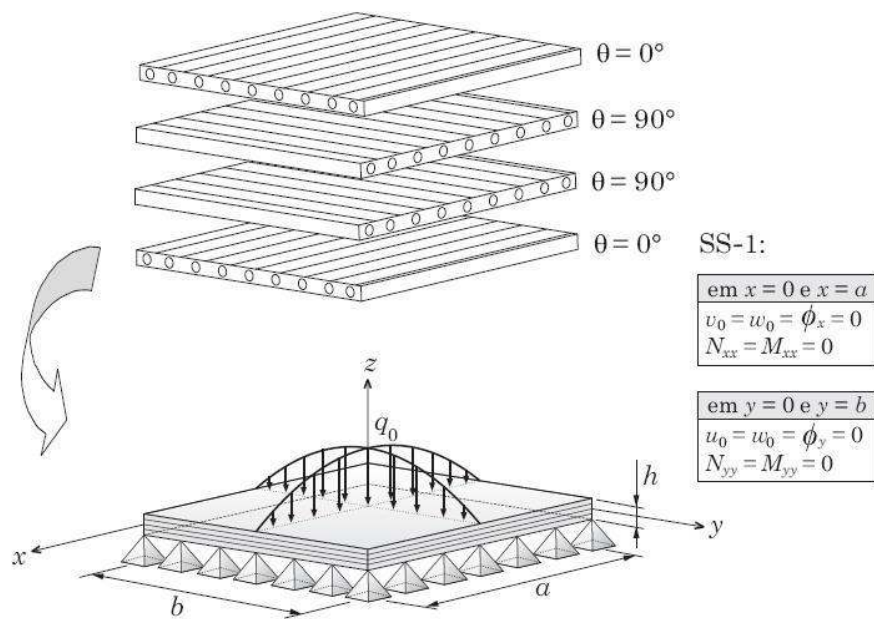


Figura 5.4 – Laminado simplesmente apoiado (SS-1) com carregamento senoidal.

A tabela (5.4) apresenta os resultados adimensionalizados nos pontos:  $\bar{w}$  em  $(a/2, b/2, 0)$ ;  $\bar{\sigma}_{xx}$  e  $\bar{\sigma}_{yy}$  em  $(a/2, b/2, h/2)$ ;  $\bar{\sigma}_{xz}$  em  $(0, b/2)$  na lâmina 3.

Tabela 5.4 – Resultados comparativos com outros métodos.

$a/h$	Método de Solução	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
10	FEM Q4	0,5901	0,3339	0,2454	0,316
	<i>Strain Gradient</i>	0,6289	0,4627	0,3376	0,391

	EFG	0,6735	0,5008	0,3640	0,297
	Solução Analítica de Navier	0,6627	0,4989	0,3614	0,417
	Solução Analítica de Pagano	0,7370	0,5590	0,4010	0,301
20	FEM Q4	0,3236	0,2645	0,1491	0,303
	<i>Strain Gradient</i>	0,4636	0,4896	0,2752	0,411
	EFG	0,4978	0,5294	0,2972	0,310
	Solução Analítica de Navier	0,4912	0,5273	0,2956	0,437
	Solução Analítica de Pagano	0,5128	0,5430	0,3080	0,328
100	FEM Q4	0,0315	0,0299	0,0151	0,023
	<i>Strain Gradient</i>	0,4081	0,4999	0,2512	0,418
	EFG	0,4399	0,5406	0,2721	0,316
	Solução Analítica de Navier	0,4337	0,5382	0,2704	0,445
	Solução Analítica de Pagano	0,4347	0,5390	0,2710	0,339

Na tabela (5.4) os resultados intitulados de EFG são provenientes da implementação numérica deste trabalho. Os demais resultados foram apresentados no trabalho de Belo (2006). “FEM Q4” é o método de elementos finitos com elementos quadrangulares de quatro nós e integração completa. “Strain Gradient” é o método proposto no trabalho de Belo (2006) onde os termos espúrios são eliminados. A figura (5.7) mostra a configuração deformada da placa.

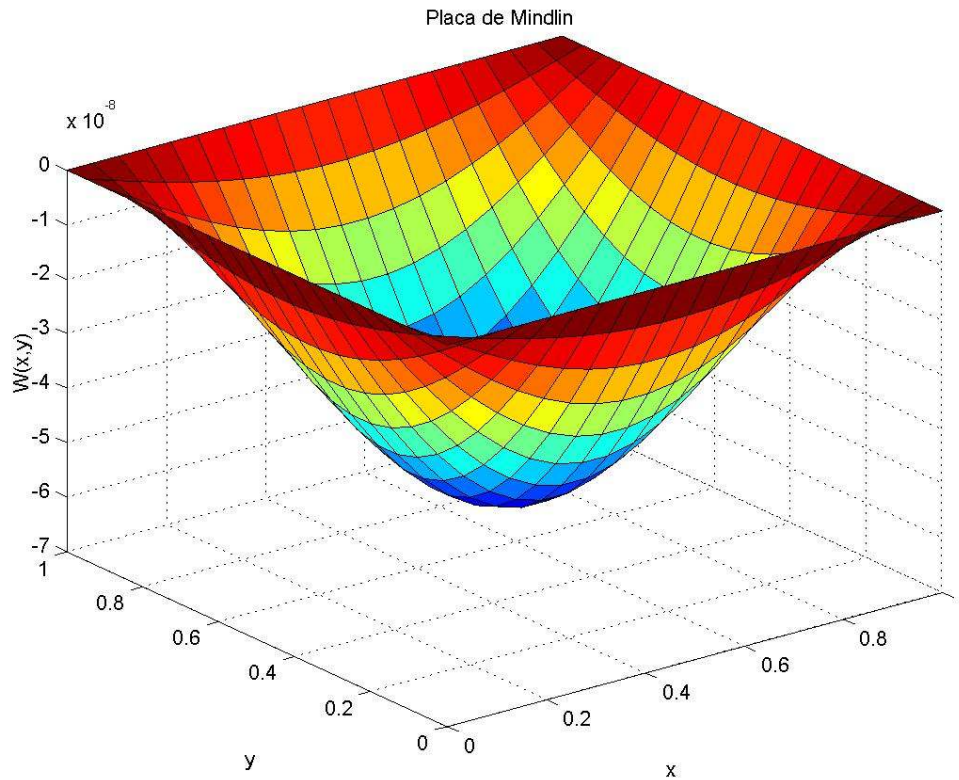


Figura 5.7 – Configuração deformada da placa.

Como se pode observar, à medida que a razão “a/h” aumenta não há perda de precisão nos resultados do método de Galerkin livre de elementos, mostrando que se trata de um método livre de travamento ao cisalhamento.

## Capítulo 6

# Conclusão

Este trabalho aplicou o método de Galerkin livre de elementos ao problema de placas de materiais compostos laminados. Uma série de testes foi feita e podem-se destacar os seguintes pontos:

- Não apresentou travamento ao cisalhamento quando se diminuía a espessura da placa;
- As funções peso do tipo *spline* quártica e de sétima ordem apresentaram melhores resultados;
- Usando uma base intrínseca polinomial quadrática, são necessárias aproximadamente 200 partículas para descrever os campos de deslocamento, tensão e deformação de uma área quadrada;
- O fator de abrangência das funções peso deve ter seu valor entre 1,5 e 2,0, considerando o critério adotado neste trabalho;
- A constante de penalidade pode ser arbitrada como o inverso do produto do módulo de elasticidade e a espessura da placa, adequando-se de forma satisfatória a qualquer problema.

Esta linha de pesquisa pode, e deve, ter continuidade. Este trabalho abordou a questão do travamento ao cisalhamento, mas uma série de variações sobre este problema precisa ser testada, como:

- Aplicação de outros métodos de imposição das condições de contorno, como o método do lagrangeano aumentado, Rossi (2005);
- Extensão ao problema de casca;

- Introdução de uma teoria de dano;
- Trabalho com grandes deformações;
- Modelamento de problemas de estampagem em chapas.

Por fim, pode-se afirmar que a implementação numérica do método de Galerkin livre de elementos aplicado a problemas de placa de materiais compostos laminados atendeu às expectativas iniciais. Através dos exemplos o método apresentou estabilidade numérica e sem travamento ao cisalhamento, desde que atendidas as configurações avaliadas neste trabalho. Consequentemente, a delimitação e desenvolvimento da pesquisa, nos termos em que foi proposta, foram atendidos, fazendo surgir várias oportunidades de aprofundamento do tema.



# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, M. K., ROSSI, R. *A modified element-free Galerkin method with essential boundary conditions, enforced by an extended partition of unity finite element weight function.*

International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 57, p. 1523-1552, 2003.

ATLURI, S. N., ZHU, T. *New concept in meshless method.* Int. J. Numer. Methods Eng., v. 47, p. 537-556, 2000.

BABUSKA, I., MELENK, J. M. *The partition of unity finite element method: Basic theory and applications.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 139, p. 289-315, 1996.

BATHE, Klaus-Jürgen, BREZZI, Franco, CHO, Seong Wook. *The MITC7 and MITC9 Plate bending elements.* Computers and Structures, v. 32, p. 797-814, 1989.

BEISSEL, Stephen, BELYTSCHKO. *Nodal Integration of the Element-Free Galerkin Method.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 139, p. 49-74, 1996.

BELINHA, J., DINIS, L. M. J. S. *Analysis of plates and laminates using the element-free Galerkin method.* Computers and Structures, v. 84, p. 1547-1559, 2006.

BELINHA, J., DINIS, L. M. J. S. *Nonlinear Analysis of plates and laminates using the element-free Galerkin method.* Composite Structures, v. 78, p. 337-350, 2007.

BELO, Ivan Moura. *Análise Eficiente de Compósitos Laminados Planos Utilizando-se a Formulação de Elementos Finitos Corrigida A-priori sem os Efeitos do Travamento.* 2006. 140f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba.

BELYTSCHKO, T., KRONGAUZ, Y., ORGAN, D., FLEMING, M., KRYSL, P. *Meshless Methods: An Overview and Recent Developments.* Computer Methods in Applied Mechanics

and Engineering, v. 139, p.3-47, 1996.

BELYTSCHKO, T., LU, Y. Y., GU, L., *Element free Galerkin methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 37, p. 229-256, 1994.

BELYTSCHKO, T., TABBARA, M. *Dynamic fracture using element-free Galerkin methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 39, p. 923-938, 1996.

CALIXTO, Alexandre Kaelble. *Análise e Otimização de Cascas de Materiais Compostos Laminados*. 1998. 109f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

CHEN, Youping, LEE, James D., ESKANDARIAN, Azim. *Meshless Methods in Solid Mechanics*. Washington, DC: Springer, 2006.

COIMBRA, Alberto Luiz. *Lições de Mecânica do Contínuo*. São Paulo, SP: Edgard Blücher, 1978.

COOK, Robert D. et alii. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4<sup>th</sup> Edition. New York: John Wiley & Sons, 2002.

DHATT, Gouri, TOUZOT, Gilbert. *The Finite Element Method Displayed*. Translated by Gilles Cantin. New York: John Wiley & Sons, 1984.

DONNING, Brian M., LIU, Wing Kam. *Meshless methods for shear-deformable beams and plates*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 152, p. 47-71, 1998.

DUARTE, C. A. M., ODEN, J. T. *An h-p adaptive method using clouds*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 139, p. 237-262, 1996.

FERREIRA, A. J. M., ROQUE, C. M. C., JORGE, R. M. N. *Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics*. Computers and Structures, v.

83, p. 2225-2237, 2005.

FERREIRA, A. J. M., ROQUE, C. M. C., JORGE, R. M. N. *Modelling cross-ply laminated elastic shells by a higher-order theory and multiquadratics*. Computers and Structures, v. 84, p. 1288-1299, 2006.

FLÜGGE, Wilhelm. *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1972.

GAVETE, L., FALCÓN, S., RUIZ, A. *An Error Indicator for the Element Free Galerkin Method*. Eur. J. Mech. A/Solids, v. 20, p. 327-341, 2001.

GINGOLD, R. A., MONAGHAN, J. J. *Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars*. Mon. Not. R. Astron. Soc., v. 181, p. 375-387, 1977. *apud* CHEN, Youping, LEE, James D., ESKANDARIAN, Azim. *Meshless Methods in Solid Mechanics*. Washington, DC: Springer, 2006.

GOSWAMI, Sanjib. *A  $C^0$  plate bending element with refined shear deformation theory for composite structures*. Composite Structures, v. 72, p. 375-382, 2006.

HUERTA, A., MÉNDEZ, S.F. *Enrichment and coupling of the finite element and meshless methods*. International Journal for Numerical Methods In Engineering, v. 48, p. 1615-1636, 2000.

IDELSOHN, Sergio R., OÑATE, Eugenio. *To Mesh or not to Mesh. That is the Question...* Compututer Methods in Applied Mechanics and Engineering., v. 195, p. 4681-4696, 2006.

KRONGAUZ, Y., BELYTSCHKO, T. *Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., v. 131, p. 133-145, 1996.

KRYSL, Petr, BELYTSCHKO, Ted. *Analysis of Thin Plates by the Element-Free Galerkin*

*Method. Int. J. Solids Structures*, v. 33, p. 3057-3080, 1996.

KRYSL, Petr, BELYTSCHKO, Ted. *Element-Free Galerkin Method: Convergence of the Continuous and discontinuous Shape Functions*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 148, p. 257-277, 1997.

LANCASTER, P., SALKAUSKAS, K. *Surfaces generated by moving least squares methods*. *Mathematical of Computational*; v. 37, p. 141-158, 1981.

LEON, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações*. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. 4ª Edição. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LISZKA, T., ORKISZ, J. *The Finite Difference Method for Arbitrary Meshes*. *Comput. Struct.*, v. 5, p. 45-58, 1980. *apud* CHEN, Youping, LEE, James D., ESKANDARIAN, Azim. *Meshless Methods in Solid Mechanics*. Washington, DC: Springer, 2006.

LIU, G. R. *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. New York: CRC Press, 2002.

LIU, L., CHUA, L. P., GHISTA, D. N. *Element-free Galerkin Method for Static and Dynamic Analysis of Spatial Shell Structures*. *Journal of Sound and Vibration*, v. 295, p. 388-406, 2006.

LIU, W., JUN, S., ZHANG, Y. F. *Reproducing Kernel Particle Methods*. *Int. J. Numer. Methods Fluid*, v. 20, p. 1081-1106, 1995.

LIU, W. K., LI, S., BELYTSCHKO, T. *Moving least-square reproducing kernel methods (I) Methodology and convergence*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 143, p. 113-154, 1997.

LIU, W. K., HAO, S., BELYTSCHKO, T., LI, S., CHANG, C. *Multi-scale methods*. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 47, p. 1343-1361, 2000.

LUCY, L. B. *A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis*. Astron. J., v. 8, p. 1013-1024, 1977. *apud* CHEN, Youping, LEE, James D., ESKANDARIAN, Azim. *Meshless Methods in Solid Mechanics*. Washington, DC: Springer, 2006.

MALVERN, L. E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Upper Side River, NJ: Prentice Hal, 1969.

MELENK, J. M., BABUSKA, I. *The partition of unity finite element method: basic theory and applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 39, p. 289-314, 1996.

MÉNDEZ, Sonia Fernández, HUERTA, Antonio. *Imposing Essential Boundary Conditions in Mesh-Free Methods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 193, p. 1257-1275, 2004.

MÉNDEZ, Sonia Fernández. *Mesh-Free Methods and Finite Elements: Friend or Foe?*. 2001. 144f. Tese de doutorado – Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

MENDONÇA, Paulo de Tarso R. *Materiais Compostos & Estruturas-Sanduíche: Projeto e Análise*. Barueri, SP: Manole, 2005.

MUKHERJEE, Y. X., MUKHERJEE, S. *On boundary conditions in the element-free Galerkin method*. Int. J. Numer. Methods Eng., v. 19, p. 229-256, 1997.

NAYROLES, B., TOUZOT, G., VILLON, P. *Generalizing the Finite Element Method: diffuse approximation and diffuse elements*. Computational Mechanics, v. 10, p. 307-318, 1992.

ONATE, E., IDELSOHN, S., ZIENKIEWICZ, O. C. *Finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow*. Int. J. Numer. Methods Eng., v. 39, p. 3838-3866, 1996.

ONATE, E., IDELSOHN, S., ZIENKIEWICZ, O. C. *Stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 139, p. 315-346, 1996.

PEREIRA, José Carlos. *Curso de Projeto Estrutural com Materiais Compostos*. 2004. 139f. Apostila – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

QIAN, S., WEISS, J. *Wavelet and the Numerical Solution of Partial Differential Equation*. J. Comput. Phys., v. 106, p. 155, 1993. *apud* CHEN, Youping, LEE, James D., ESKANDARIAN, Azim. *Meshless Methods in Solid Mechanics*. Washington, DC: Springer, 2006.

REDDY, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*. New York: CRC Press, 1997.

ROSSI, Rodrigo. *Proposições e Aplicações Considerando o Método de Galerkin Livre de Elementos*. 2005. 205f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

SHAMES, Irving H., DYM, Clive L. *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1985.

STROUBOLIS, T., BABUSKA, I., COPPS, K. *The design and analysis of generalized finite element method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 181, p. 43-69, 2000.

SULSKY, D., CHEN, Z., SCHHREYER, H. L. *The Application of a Material-Spatial Numerical Method to Penetration*. New Methods in Transient Analysis, ASME, v. 246, p. 91-102, 1992. *apud* CHEN, Youping, LEE, James D., ESKANDARIAN, Azim. *Meshless Methods in Solid Mechanics*. Washington, DC: Springer, 2006.

YAGAWA, G., FURUKAWA, T. *Recent development of free mesh method*. Int. J. Numer. Methods Eng., v. 47, p. 1419-1443, 2000.

YOUNG, Warren C., BUDYNAS, Richard G. *Roark's Formulas for Stress and Strain*. 7<sup>th</sup> Edition. New York: McGraw-Hill, 2002.

ZHU, T., ATLURI S. N. *A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method*. Comput. Mech., v. 21, p. 211-222, 1998.

ZHU, T. *A new meshless regular local boundary integral equation (MRLBIE) approach*. Int. J. Numer. Methods Eng., v. 46, p. 1237-1252, 1999.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method: Volume 1 The Basis*. 5<sup>th</sup> Edition. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method: Volume 2 Solid Mechanics*. 5<sup>th</sup> Edition. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.