

EBRAHIM SAMER EL'YOUSSEF

**ANÁLISE E APLICAÇÃO DE CONTROLE DE SISTEMAS
NÃO-LINEARES COM OBSERVADORES DE ESTADOS:
CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO LINEARIZANTE
ROBUSTA E CONTROLE ENERGY SHAPING**

FLORIANÓPOLIS

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ANÁLISE E APLICAÇÃO DE CONTROLE DE SISTEMAS
NÃO-LINEARES COM OBSERVADORES DE ESTADOS:
CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO LINEARIZANTE
ROBUSTA E CONTROLE ENERGY SHAPING**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

EBRAHIM SAMER EL'YOUSSEF

Florianópolis, Agosto de 2007.

**ANÁLISE E APLICAÇÃO DE CONTROLE DE SISTEMAS
NÃO-LINEARES COM OBSERVADORES DE ESTADOS:
CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO LINEARIZANTE ROBUSTA
E CONTROLE ENERGY SHAPING**

EBRAHIM SAMER EL'YOUSSEF

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Controle, Automação e Sistemas*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

Ubirajara Franco Moreno, Dr.
Orientador

Kátia Campos de Almeida, Ph. D.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

Ubirajara Franco Moreno, Dr.
Presidente

Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.

Edson Roberto De Pieri, Dr.

Alejandro Rafael Garcia Ramirez, Dr

*Aos meus pais e irmã,
Ali Mohamed El'youssef
Lizeth Alves de Souza El'youssef
Helen Cristine de Souza El'youssef*

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus familiares, principalmente aos meus pais e minha irmã, que sempre me apoiaram e deram suporte para que eu obtivesse o grau de mestre.

Agradeço ao meu orientador que sempre se mostrou prestativo, assim como aos outros professores da área de controle que também sempre estavam predispostos a ajudar. Agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Agradeço aos amigos com quem dividi o tempo, durante o qual cursei o mestrado, em Florianópolis, aos que auxiliaram na minha dissertação, aos que aconselharam, aos que a convivência não se restringiu ao laboratório do programa de mestrado e aos amigos com quem morei.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

**ANÁLISE E APLICAÇÃO DE CONTROLE DE SISTEMAS
NÃO-LINEARES COM OBSERVADORES DE ESTADOS:
CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO LINEARIZANTE ROBUSTA
E CONTROLE ENERGY SHAPING**

Ebrahim Samer El'youssef

Agosto/2007

Orientador: Ubirajara Franco Moreno, Dr.

Área de Concentração: Controle, Automação e Informática Industrial

Palavras-chave: Controle não-linear, observadores, levitação magnética

Número de Páginas: xi + 83

Nesta dissertação de mestrado são abordadas duas técnicas de controle não-linear, a técnica de controle de realimentação linearizante robusto e a técnica de controle de *energy shaping* IDA PBC (*interconnection and damping assignment passive based control*). Estas técnicas são combinadas com observadores lineares e aplicadas a um sistema plataforma de teste. O controle de realimentação linearizante robusto consiste no projeto de uma lei de controle e uma transformação de estados (difeomorfismo), que aplicados a um sistema não-linear colocam-no em uma forma linearizada em torno de um ponto de equilíbrio, permitindo que a ele seja possível aplicar as técnicas de controle linear. A técnica de controle *energy shaping* IDA PCB aborda o sistema em termos de energia. Seu objetivo é, através do projeto de uma lei de controle adequada, moldar a energia do sistema de tal forma que um equilíbrio desejado seja o ponto de menor energia da função que representará a energia do sistema em malha fechada. A realimentação linearizante necessita de acesso à informação de todos os estados e o *energy shaping*, em geral, também. Entretanto esta é uma situação pouco comum. Para contornar essa dificuldade foi utilizado um observador de alto ganho com a realimentação linearizante e um observador de Luenbeger com o *energy shaping*. O sistema plataforma de teste escolhido foi o sistema de levitação magnética de um pólo, devido sua característica de apresentar não-linearidades inerentes e a ser instável em malha aberta. Isto o torna, também, atrativo para área da didática. Finalmente, são apresentados estudos de casos e comparações qualitativas entre as técnicas para mostrar suas características.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

**ANALYSIS AND APPLICATION OF NONLINEAR SYSTEMS
CONTROL WITH STATE OBSERVERS: ROBUST FEEDBACK
LINEARIZATION CONTROL AND ENERGY SHAPING CONTROL**

Ebrahim Samer El'youssef

August/2007

Advisor: Ubirajara Franco Moreno, Dr.

Area of Concentration: Control, Automation and Industrial Informatics

Key words: Nonlinear Control, Observers, Magnetic Levitation

Number of Pages: xi + 83

In this master dissertation two nonlinear control techniques, the robust feedback linearization technique and the energy shaping IDA PBC (interconnection and damping assignment passive based control), combined with linear observers are studied. Then, these techniques are applied to a test platform system. The robust feedback linearization control linearizes a nonlinear system around a desired equilibrium point applying the design of control law and a state transformation (diffeomorphism). So that the linear control techniques can be applied to the linearized system. The energy shaping IDA control technique treats the system using an energy approach. Its objective is to shape the energy of the system, such that, a desired equilibrium becomes the minimum energy point of the closed loop system function energy by designing an adequate control law. The feedback linearization needs access to the information of all system states, so, in general, does the energy shaping. However, this is a situation that is not common. To overcome this difficulty the robust feedback linearization is combined with a high-gain observer and the energy shaping IDA PBC is combined with a Luenberger observer. A magnetic levitation of one pole was chosen as the test platform system, because it has inherent nonlinearities and is an open loop unstable system. Such characteristics of this system are attractive to the didactic area. Finally, case studies and quantitative comparison between the techniques are presented.

Sumário

Notação	xii
1 Introdução	1
1.1 Sistema de Levitação Magnética	4
1.1.1 Introdução	4
1.1.2 Descrição e Modelagem Matemática	4
1.2 Organização do Trabalho	8
2 Realimentação Linearizante Robusta com Observador	9
2.1 Introdução	9
2.2 Motivação	11
2.3 Controle de Realimentação Linearizante Robusta	16
2.4 Observador de Alto Ganho	22
2.4.1 Comentário	29
2.5 Aplicação	31
2.5.1 Controle linearizante robusto	31
2.5.2 Controle Linear de Rastreamento de Trajetória Multivariável	36
2.6 Conclusão	36

3	<i>Energy Shaping IDA PCB</i>	38
3.1	Introdução	38
3.2	Sistema de Hamiltoniano de Portas Controladas - PCH	39
3.3	Desenvolvimento	40
3.4	Observador de Estados	43
3.5	Aplicação	44
3.6	Conclusão	51
4	Simulações e Análises	52
4.1	Introdução	52
4.2	Parâmetros do Sistema de Levitação Magnética de um Pólos	52
4.3	Ajuste do controle de Realimentação Linearizante Robusto	53
4.4	Ajuste do Controlador de <i>Energy Shaping</i>	54
4.5	Simulações	55
4.5.1	Controle Linearizante Robusto	55
4.5.2	Controle <i>Energy Shaping</i>	63
4.6	Análises	67
5	Conclusão	70
A	Conceitos de Geometria Diferencial	73
B	Conceitos da Teoria de Sistemas Não-Lineares	75
C	Prova	77

Lista de Figuras

1.1	Representação esquemática do sistema de levitação magnética de um pólo.	5
1.2	Representação esquemática do subsistema elétrico da levitação magnética de um pólo.	6
1.3	Representação esquemática do subsistema mecânico da levitação magnética de um pólo.	7
2.1	Diagrama do princípio de funcionamento da técnica de realimentação linearizante.	9
2.2	Controle dinâmico de realimentação linearizante pela saída.	23
2.3	Controle de seguimento de trajetória	36
4.1	Gráfico da posição da esfera, sem saturação	57
4.2	Gráfico do sinal de controle sem saturação	58
4.3	Gráfico da trajetória de posição da esfera com realimentação linearizante	59
4.4	Gráfico da trajetória de velocidade, com realimentação linearizante	59
4.5	Gráfico da trajetória do fluxo magnético, com realimentação linearizante	60
4.6	Gráfico do sinal de controle, com realimentação linearizante	60
4.7	Gráfico da trajetória de posição, com variação de parâmetros, com o linearizante	61
4.8	Gráfico da trajetória de posição, com variação de parâmetros, com o linearizante	62
4.9	Gráfico da trajetória de posição, com variação de parâmetros, com o linearizante	62
4.10	Gráfico da trajetória de posição, com variação de parâmetros, com o linearizante	63
4.11	Gráfico das trajetórias de posição, com <i>energy shaping</i>	64

4.12	Gráfico das trajetórias de velocidade, com <i>energy shaping</i>	65
4.13	Gráfico das trajetórias de fluxo, com <i>energy shaping</i>	65
4.14	Gráfico do sinal de controle, com <i>energy shaping</i>	66
C.1	Diagrama representado as diferenças entre o controle com e sem observador	79

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros do sistema de levitação magnética de um pólo	53
4.2	Ganho ajustados para leis de controle de <i>energy shaping</i>	54
4.3	Comparação entre a dinâmica do erro dos observadores	56
4.4	Características do controle linearizante robusto	68
4.5	Características do controle <i>energy shaping</i>	69

Notação

Símbolos

\mathfrak{R}	:	conjunto dos números reais
\mathfrak{R}^n	:	conjunto dos vetores reais de dimensão n
$\text{span}(x_1, \dots, x_r)$:	subespaço vetorial gerado por x_1, \dots, x_r
M^T	:	transposta da matriz M
M^{-1}	:	inversa da matriz M
$\dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(x)}$:	derivadas de ordem $1, 2, \dots, n$ de y
f^{-1}	:	inversa de uma função f
$f \circ g$:	composição das funções f e g
$\frac{\partial f}{\partial x} \Big _{x_0}$:	derivada parcial de f com respeito a x em x_0
∇h	:	gradiente de h
$L_f^n h$:	derivada de Lie de ordem n de h com respeito a f
$ad_f^n g$:	colchete de Lie de ordem n de f e g
$0_{m \times n}$:	matriz nula de ordem $m \times n$

Acrônimos

IDA	:	interconnection and damping assignment, (atribuição de interconexão e amortecimento)
PCB	:	passive based control, (controle baseado em passividade)
PDE	:	partial diferencial equation, (equação diferencial parcial)

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos diversas técnicas de controle não-linear têm sido propostas na literatura. A área de controle não-linear é um campo de pesquisa que está sendo explorado devido às diferentes possibilidades que esta classe de técnicas de controle tem a oferecer, cada uma com suas particularidades. Podem-se destacar as técnicas de controle não linear baseadas na teoria de Lyapunov, baseadas em passividade e técnicas de linearização através de realimentação. Estas técnicas têm sido bastante pesquisadas por se apresentarem como uma opção interessante para o controle de sistemas que necessitam de uma representação matemática mais complexa, contendo não-linearidades, para se obter uma boa modelagem de seus comportamentos dinâmicos, como é o caso, por exemplo, de sistemas robóticos e de suspensões magnéticas.

A possibilidade de aplicação de cada técnica, bem como o desempenho dos controladores projetados, depende em geral de características estruturais de cada sistema e também da possibilidade de acesso às informações do sistema. Portanto, dado um problema de projeto de controladores para sistemas não-lineares, é importante que o projetista tenha o conhecimento de diversas técnicas, de modo a escolher a que melhor se adapte ao problema em questão.

Neste trabalho são abordadas duas técnicas de controle não-linear com a utilização de observadores lineares, que são aplicadas a um sistema plataforma de teste e mostrados resultados de simulação desta aplicação. Finalizando o trabalho são apresentadas comparações qualitativas entre estas técnicas, tendo como um objetivo poder auxiliar um projetista na escolha de uma técnica de controle adequada a sua aplicação.

As técnicas de controle não-linear abordadas são a técnica de controle de realimentação robusta e a técnica de controle *energy shaping* IDA PCB (*interconnection and damping assignment passive based control*, em português, controle de moldagem de energia com atribuição de interconexão

e amortecimento baseado em passividade). Estas técnicas foram escolhidas devido a diversidade de suas concepções e requisitos estruturais para a sua aplicação. O controle *energy shaping*, em geral, necessita de acesso a todos os estados do sistema, já para a técnica de controle linearizante robusto o acesso a todos os estados é obrigatório. Em sistemas reais esta situação não é comumente possível, devido, em alguns casos, aos estados escolhidos para modelagem do sistema não possuírem sentido físico, impossibilitando uma medição direta, e por questões tecnológicas. Este fato limitaria a aplicação dessas técnicas. Para contornar esta dificuldade são empregados observadores de estado para obter estimativas dos estados do sistema ao qual o controle é aplicado.

Os observadores utilizados para aplicação das leis de controles abordadas neste trabalho, são observadores lineares com estrutura de Luenberger. Esta escolha foi feita devido a simplicidade que está relacionada ao projeto de tais observadores, e também, porque no caso específico do controle de realimentação linearizante robusto é proposta a utilização do ajuste do ganho do observador com abordagem em alto ganho, chamado de observador de alto ganho, o qual apresenta características interessantes de recuperação de desempenho [Atassi e Khalil, 1999]. O observador de alto ganho pode ser combinado com a técnica de realimentação robusta devido às características desta técnica.

O sistema plataforma de teste escolhido foi um sistema de levitação magnética de um pólo. Este sistema é uma representação simplificada de suspensão magnética utilizada na indústria, por exemplo, em máquinas com eixo rotativo. Ele tem sido empregado, com frequência, como uma plataforma de testes para controladores não-lineares [Munaro *et al.*, 2002b; Ortega *et al.*, 2001; Queiroz e Dawson, 1996; Rodriguez *et al.*, 2000], pois apresenta características interessantes como: não-linearidades inerentes, instabilidade em malha aberta e a possibilidade de ser modelado em termos de energias envolvidas no sistema.

A técnica de controle de realimentação linearizante robusto, proposta em [Guillard e Bourlès, 2000], é derivada da técnica de controle linearizante clássico [Isidori, 1995; Slotine e Li, 1991]. A aplicação da técnica clássica em sistemas não-lineares resulta em um sistema linearizado na forma canônica de Brunovsky, qualquer que seja o sistema. A aplicação da técnica robusta, diferentemente da clássica, resulta na aproximação linear do sistema não-linear em torno de um ponto de equilíbrio, e, portanto, possui maiores informações sobre o sistema. E assim sendo, em [Guillard e Bourlès, 2000] é mostrado que a técnica robusta é uma estratégia para se poder controlar robustamente um sistema não-linear incerto em torno de um ponto de operação. Em [Franco *et al.*, 2005], [Franco *et al.*, 2006] e [Franco, 2006] é mostrada a característica de robustez do controle linearizante robusto associado com controle H_∞ , que é um controle que seria difícil de ser combinado com a técnica clássica.

Conforme mencionado anteriormente as técnicas de controle de realimentação linearizante ne-

cessitam de acesso a todos os estados. Para contornar esta dificuldade é proposta na literatura a utilização de observadores lineares e não-lineares. Em [Franco, 2006] são apresentadas a aplicação do observador de Luenberger de ordem reduzida e de observadores não-lineares combinados com a realimentação linearizante robusta e o controle H_∞ aos sistemas de levitação magnética de um e quatro pólos, abordando aspectos de robustez. Em [Munaro *et al.*, 2002a] é apresentado o projeto do controle de realimentação linearizante clássico utilizando estados estimados por um observador de Luenberger. Nesse artigo são oferecidas provas de que sobre certas condições é possível obter um sistema estável em malha fechada. Em [Munaro *et al.*, 2002b], fazendo uso dos resultados mostrados em [Munaro *et al.*, 2002a], apresenta-se uma aplicação do controle de realimentação linearizante clássico combinado com um observador linear e um controle linear de seguimento de trajetória PI. Em [Munareto *et al.*, 2006] é apresentada outra aplicação do controle linearizante clássico com um observador linear combinado com o controle linear baseado em modelo de referência. Entretanto nesse caso é utilizado um ajuste do observador em alto ganho.

O observador de alto ganho é apresentado formalmente em [Atassi e Khalil, 1999; Khalil, 2002], onde é demonstrado um princípio de separação para utilização de um observador de alto ganho para uma certa classe de sistemas não-lineares e controladores. A característica interessante do observador de alto ganho é que quando utilizado para projetar uma estrutura de realimentação dinâmica da saída do sistema possibilita a recuperação do desempenho da estrutura de controle de realimentação de estados. Entretanto, a classe de sistemas não-lineares abordados em [Atassi e Khalil, 1999] não engloba os sistemas não-lineares aos quais, em geral, deseja-se aplicar a técnica de linearização. Porém, o sistema linearizado pela realimentação linearizante clássica apresenta características estruturais que possibilitam a aplicação do observador de alto ganho, uma vez que ele é um observador de Luenberger o qual foi abordado em (Munaro *et al.* [2002a]), onde apesar de apresentar provas de que é possível um ajuste que permite obter estabilidade local, não apresenta a prova da recuperação de desempenho descrita em [Atassi e Khalil, 1999].

Neste trabalho, portanto, um dos propósitos é apresentar a aplicação do observador de alto ganho à técnica de controle de realimentação linearizante robusta. Esta técnica de controle é escolhida por ser recente e apresentar características que permitem o ajuste de um controle linear robusto, conforme mencionado em [Guillard e Bourlès, 2000]. A escolha do observador de alto ganho é devido a sua característica de recuperação do desempenho conforme descrito em [Atassi e Khalil, 1999].

A técnica de controle *energy shaping* IDA PCB é abordada teoricamente em [Ortega *et al.*, 2002, 2001]. Em [Ortega *et al.*, 2001] é apresentada uma retrospectiva dos controladores baseados em passividade e posteriormente é proposto o controle *energy shaping* IDA PCB, que é aplicado ao

sistema de levitação de um pólo. Esta técnica apresenta, em relação às outras, a vantagem de oferecer a possibilidade de moldar a energia total do sistema, permitindo alterar sua estrutura, abrangendo, desta forma, uma gama maior de sistemas. Em [Ortega *et al.*, 2002] é apresentada e explanada com maior formalismo a técnica de controle *energy shaping* IDA PCB. A teoria de passividade pode ser encontrada em [Sepulchre e Kokotovic, 1997]. Em [Rodríguez *et al.*, 2000] é apresentada a aplicação da técnica de controle *energy shaping* IDA PCB ao sistema de suspensão magnética de quatro pólos e ao sistema de levitação de um pólo, para o qual são apresentados resultados experimentais, empregando um observador linear. Conforme dito anteriormente, o *energy shaping* necessita, em geral, de acesso a todos os estados, entretanto nem sempre é possível esta situação. Para contornar essa situação é utilizado um observador linear para estimar os estados para serem utilizados na aplicação da lei de controle.

Na seção que segue é apresentado, com maiores detalhes, o sistema de levitação magnética que foi escolhido como sistema plataforma de teste para a aplicação das técnicas abordadas neste trabalho.

1.1 Sistema de Levitação Magnética

1.1.1 Introdução

O sistema de levitação magnética de um pólo foi escolhido como uma plataforma de teste para as técnicas de controle que são apresentadas neste trabalho, devido a ser um sistema instável e possuir não-linearidades inerentes, características que o tornam interessante para este fim. Pode ser considerado como representação aproximada de um sistema de suspensão magnética de mancais de máquinas elétricas. Portanto, está relacionado a vários tipos de aplicações, como centrífugas em usinas nucleares, armazenadores de energia, motores entre outras. Ele é também empregado com frequência com objetivo didático [Lundberg *et al.*, 2004].

O objetivo desta seção é descrever o sistema de levitação magnética e apresentar uma modelagem matemática para o sistema.

1.1.2 Descrição e Modelagem Matemática

O sistema de levitação magnética de um pólo é constituído de uma bobina, um corpo com propriedades ferro magnéticas a ser levantado, e do sistema de acionamento e controle. No caso específico

deste trabalho considera-se uma esfera de material ferromagnético, porém também podem ser utilizados corpos magnéticos. A bobina funciona como um eletroímã cuja intensidade do campo magnético pode ser controlada pela corrente ou pela tensão aplicada a ela. A bobina é constituída, em geral, de um enrolamento de cobre e um núcleo de material ferromagnético. O sistema de acionamento e controle pode envolver diferentes dispositivos dependendo da aplicação e de como se pretende acionar a bobina, pela corrente ou pela tensão. Esta opção é uma questão de controle e não construtiva. Neste trabalho a opção é por acionar a bobina pela tensão aplicada, e logo a modelagem é feita em função desta escolha. A figura 1.1 representa este sistema.

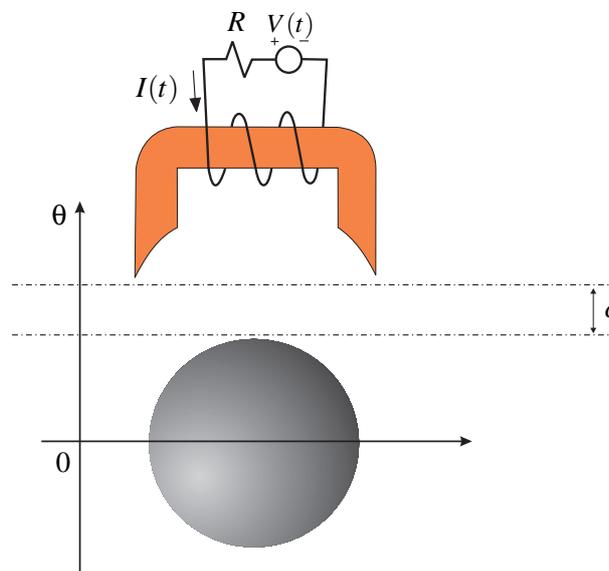


Figura 1.1: Representação esquemática do sistema de levitação magnética de um pólo.

A modelagem deste sistema é feita dividindo-o em dois subsistemas, um elétrico e outro mecânico. As figuras 1.2 e 1.3 representam, respectivamente, os diagramas esquemáticos destes subsistemas. Na modelagem do subsistema elétrico considera-se um circuito elétrico formado pela reatância da bobina, uma fonte de tensão e eventualmente uma resistência adicional. A modelagem do subsistema mecânico é feita considerando o equilíbrio de forças do diagrama de corpo livre do sistema, onde estão envolvidas a força peso da esfera e a força eletromagnética proveniente da bobina que atua sobre a esfera, em sentido contrário a gravidade. A modelagem da força eletromagnética é complexa. Em [Hajjaji e Ouladsine, 2001] e [Naumović, 2003] é apresentada a formulação matemática utilizando conceitos da teoria de eletromagnetismo, que são relativamente complexos. Entretanto para fins de controle na literatura é utilizada uma formulação aproximada para a força eletromagnética, descrita como proporcional à razão entre o quadrado da corrente e o quadrado da distância que separa a esfera da bobina.

A dinâmica do subsistema elétrico, representado na figura 1.2, é descrita pela equação (1.1) conforme apresentado em [Levine *et al.*, 1996] e [Ortega *et al.*, 2001].

$$RI_L + L(\theta)\frac{dI_L}{dt} + I_L\frac{dL(\theta)}{dt} = V \quad (1.1)$$

sendo R a resistência da bobina, L a indutância da bobina, que varia em função de θ , que representa a distância entre a esfera e a bobina, I_L representa a corrente na malha da bobina e V a tensão de entrada. Este é, portanto, um sistema de primeira ordem.

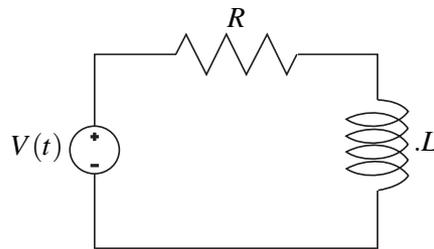


Figura 1.2: Representação esquemática do subsistema elétrico da levitação magnética de um pólo.

A dinâmica do subsistema mecânico, representado na figura (1.3), é equacionada utilizando o equilíbrio de força como segue:

$$F_m - mg = m\ddot{\theta} \quad (1.2)$$

onde m é a massa da esfera, g a aceleração da gravidade, F_m a força magnética e θ , novamente, a distância entre a esfera e a bobina. Este subsistema, diferente do elétrico, é um sistema de segunda ordem.

Em algumas formulações, ao invés da corrente utiliza-se o fluxo magnético, tendo como vantagem a simplificação do modelo e como desvantagem o uso de uma variável cujo sentido físico é mais complexo. Neste trabalho opta-se por representar o sistema em função do fluxo magnético ao invés da corrente, portanto a força magnética é formulada em função do fluxo magnético representado por λ .

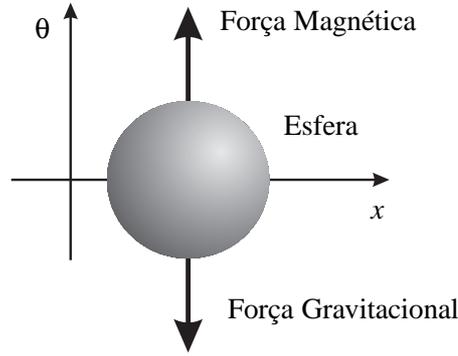


Figura 1.3: Representação esquemática do subsistema mecânico da levitação magnética de um pólo.

A força magnética pode ser formulada em função da corrente e da indutância da bobina como mostrado em [Ortega *et al.*, 2001]:

$$F_m = \frac{1}{2} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} (\theta) I_L^2 \quad (1.3)$$

Considerando a relação entre a corrente e fluxo, e uma aproximação aceitável para a indutância, válida no domínio $(-\infty < \theta < c)$ [Ortega *et al.*, 2001], conforme segue:

$$\lambda = L(\theta) I_L \quad (1.4)$$

$$L(\theta) = \frac{k}{c - \theta} \quad (1.5)$$

onde c é a distância nominal entre a bobina e a esfera, e k é a constante positiva que depende do número de espiras da bobina. Logo, a força magnética pode ser modelada em função do fluxo magnético λ como:

$$F_m = \frac{1}{2k} \lambda^2 \quad (1.6)$$

O próximo passo é reescrever a dinâmica do subsistema elétrico e do mecânico em função do fluxo magnético λ , conforme segue:

$$\dot{\lambda} + \frac{R}{k} (c - \theta) \lambda = V \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{2k} \lambda^2 - mg = m\ddot{\theta} \quad (1.8)$$

Finaliza-se desta forma a modelagem matemática do sistema de levitação magnética. Entretanto, nos próximos dois capítulos, onde são tratadas as técnicas de realimentação linearizante robusta e o *energy shaping*, esta modelagem será retomada. O sistema será colocado na forma de equações de estado para aplicação da realimentação linearizante robusta e na forma de sistema de hamiltoniano

de portas controladas (PCH - *Port Controlled Hamiltonian*) para aplicação da técnica de *energy shaping*.

1.2 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado como segue. No capítulo 2 apresenta-se a teoria da aplicação da técnica de controle de realimentação linearizante robusto, o projeto do observador de alto ganho e a aplicação desta técnica ao sistema de levitação magnética de um pólo. No capítulo 3 apresenta-se a teoria da aplicação da técnica de controle *energy shaping*, o projeto observador linear e a aplicação desta técnica ao sistema de levitação magnética de um pólo. No capítulo 4 apresentam-se estudos de casos sobre a aplicação das técnicas de controle, com os seus respectivos observadores, ao sistema de levitação magnética, e também análises comparativas entre as técnicas. No capítulo 5 são apresentadas as conclusões do trabalho e as perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Realimentação Linearizante Robusta com Observador

2.1 Introdução

A realimentação linearizante é uma técnica difundida na área de controle não-linear. Essa técnica tem por base gerar um sinal de controle que seja capaz de cancelar não-linearidades presentes em um sistema não-linear que se pretende controlar ao qual se aplicando um mapeamento, conhecido como difeomorfismo¹, obtém-se um sistema linear. Sendo que nesse sistema linear é possível a aplicação das técnicas de controle linear que são bem difundidas e consolidadas na literatura. O diagrama mostrado na figura (2.1) ilustra o princípio de funcionamento desta técnica.

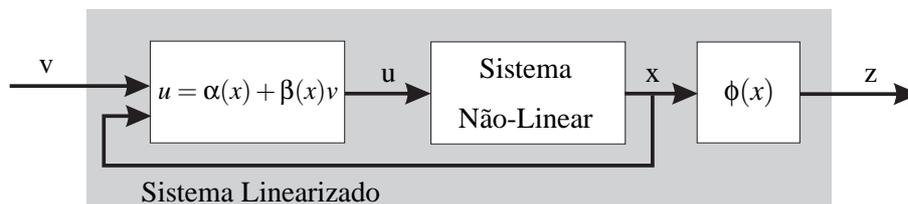


Figura 2.1: Diagrama do princípio de funcionamento da técnica de realimentação linearizante.

Na figura (2.1), u representa a lei de controle linearizante, tratada aqui também como transformação de entrada, $\phi(x)$ representa o difeomorfismo, tratado também como transformação de estados, x são os estados do sistema não-linear, z são os estados do sistema linearizado e v representa uma

¹Definição: consultar apêndice B.

nova entrada de controle para o sistema linearizado, que é projetada utilizando as técnicas de controle linear.

A realimentação linearizante é projetada através do cálculo de uma transformação de estados (difeomorfismo), e uma transformação de entrada. O difeomorfismo é calculado para que o sistema não-linear seja transformado em um sistema, também não-linear, porém com as não-linearidades diretamente relacionadas às entradas de controle. Então uma transformação de entrada é calculada para cancelar as não-linearidades e prover uma nova entrada de controle para o sistema linearizado.

Na literatura existem duas abordagens da realimentação linearizante: a técnica de controle de realimentação linearizante clássica [Isidori, 1995; Slotine e Li, 1991] e a técnica de controle de realimentação linearizante robusta [Guillard e Bourlès, 2000]. A clássica quando aplicada a um sistema não-linear qualquer, o transforma em um sistema na forma canônica de Brunovsky, onde o sistema é composto por cascatas de integradores, enquanto que a robusta o transforma em sua aproximação linear em torno de um ponto de equilíbrio. Esta característica traz vantagens, pois mantém informações do sistema original.

Parte do foco deste Capítulo é a realimentação linearizante robusta que é uma técnica caracterizada por realizar uma transformação não-linear, baseada na realimentação linearizante clássica, sobre o sistema não-linear, que é transformado em um sistema linearizado; e uma transformação linear sobre o sistema linearizado obtido inicialmente, que é, então, transformado em um sistema linearizado em torno de um ponto de um equilíbrio.

Naturalmente a aplicação desta técnica possui restrições. Necessita-se uma modelagem que represente precisamente o comportamento dinâmico do sistema não-linear, uma vez que a partir da modelagem será sintetizada uma lei de controle que cancelará as não-linearidades, porém podem existir perturbações paramétricas. A existência de um difeomorfismo é restringida pela necessidade do sistema não-linear atender às condições necessárias e suficientes que garantam que ele seja linearizável pela realimentação, ao menos em uma região do espaço de estados. Outra restrição, é a necessidade de acesso a informação de todos os estados, que representam grandezas utilizadas na modelagem dinâmica do sistema, para implementação da lei de controle. Entretanto, sabe-se que geralmente não é possível ter acesso a todos estados, algumas vezes pelo fato dos estados não terem sentido físico e por motivos financeiros.

A última restrição, a necessidade de acesso aos estados do sistema, é impeditiva, todavia pode ser contornada utilizando um observador para estimar o valor dos estados. Um observador linear de Luenberger é uma solução possível, e apresenta validade local no espaço de estados. Porém, na

presença de incertezas paramétricas, pode ser inviável a utilização de tal observador com alocação arbitrária dos pólos da sua dinâmica, sendo necessária a utilização de uma técnica mais apurada.

Tendo em vista à questão da necessidade de acesso a informação dos estados do sistema para aplicação da técnica de controle de realimentação linearizante robusto e de que sistema não-lineares mesmo quando bem modelados podem sofrer perturbações paramétricas, neste Capítulo propõe-se um observador de alto ganho para ser aplicado com essa técnica de controle. Este observador é escolhido devida às características de concepção da técnica de realimentação linearizante robusta, que se encaixam com as características estruturas desse observador.

O observador de alto ganho tem uma estrutura similar ao observador de Luenberger, porém determina-se seu ganho de forma diferenciada. O observador de alto ganho permite a recuperação do desempenho de um controlador de realimentação de estados pelo controlador de realimentação dinâmica da saída, conforme é mostrado em [Atassi e Khalil, 1999] para vários tipos de controladores, porém não engloba a linearização clássica e tão pouco a linearização robusta. Neste trabalho aplica-se um observador de alto ganho à técnica de controle de realimentação linearizante robusta. Todavia, não se apresentou, uma prova formal mostrando a estabilidade em malha fechada e que garanta a propriedade de recuperação de performance. Entretanto, mostra-se ser possível, sobre algumas restrições, obter estabilidade local, conforme é feito em [Munaro *et al.*, 2002a] para o caso da técnica de realimentação linearizante clássica com um observador de Luenberger.

O Capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 2.2 apresenta-se uma motivação para utilização da técnica de linearização, com objetivo de explicar de forma simples o conceito envolvido na técnica de realimentação linearizante. Na Seção 2.3 introduz-se a técnica de controle de realimentação linearizante robusto e na Seção 2.50 propõe-se o observador de alto ganho. Na Seção 2.4.1 apresenta-se uma discussão sobre a combinação do observador de alto ganho com a técnica de realimentação linearizante robusta para o caso mono variável. Posteriormente, na Seção 2.5 aplica-se esta técnica sobre o sistema de levitação magnética de um pólo. Finalmente apresenta-se na Seção 2.6 a conclusão do Capítulo.

2.2 Motivação

Nesta Seção trata-se a linearização pela realimentação clássica de um sistema SISO, com o objetivo de facilitar a compreensão do método que será apresentado de forma generalizada na próxima Seção para o projeto do controle de realimentação linearizante robusta. Ressalta-se que a técnica de controle de realimentação linearizante robusta é derivada da técnica clássica.

Considere um sistema SISO não-linear, afim no controle e totalmente linearizável, conforme segue:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ representa os estados do sistema, $u \in \mathfrak{R}^m$ a entrada de controle, $y \in \mathfrak{R}^p$ a saída do sistema, $f(x)$ e $g(x)$ são campos vetoriais suaves definidos em um subconjunto aberto de \mathfrak{R}^n .

Antes de seguir com o equacionamento do problema de linearização pela realimentação do sistema não-linear (2.1) será introduzido o conceito de grau relativo para sistemas não-lineares. De forma simplificada o grau relativo é definido como o número de vezes que é necessário derivar a saída do sistema para atingir a entrada de controle². Portanto, o sistema (2.1) tem grau relativo r em um ponto de equilíbrio, x_e , se for necessário derivar r vezes a saída y para que entrada u apareça no equacionamento, ou seja:

1. $L_g L_f^k h(x) = 0$ para todo x na vizinhança de x_e e $\forall k < r - 1$;
2. $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$.

sendo $L_f h(x)$ denominada derivada de Lie³. O conceito de grau relativo se tornará mais claro ao longo do texto.

Ao aplicar a técnica de realimentação linearizante clássica ao sistema (2.1), tem-se como objetivo obter uma transformação de estados (difeomorfismo), e uma transformação de entrada que linearizem esse sistema, colocando-o na forma de canônica de Brunovsky:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c v_c \\ y &= C_c x_c\end{aligned}\tag{2.2}$$

onde x_c é o estado linearizado, sendo que as matrizes $A_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_c \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ e $C_c \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$, e ainda:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_c = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]\tag{2.3}$$

²Uma definição mais formal pode ser encontrada no apêndice A

³A derivada de Lie é definida como $L_f h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x)$, ou seja, o gradiente de $h(x)$ na direção do campo vetorial $f(x)$. Para maiores detalhes sobre a teoria relacionada a derivada de Lie consultar apêndice A.

Assume-se que existe um difeomorfismo $\phi_c(x) : \mathfrak{X}^n \rightarrow \mathfrak{X}^n$ válido numa região Ω para o sistema (2.1). A aplicação dessa transformação de estados sobre o sistema não-linear discutido deve transformá-lo em um sistema, também não linear, porém com as não-linearidades diretamente relacionadas ao controle, como parte do sistema na forma de cascata de integradores, conforme segue:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{c_1} &= x_{c_2} \\
 \dot{x}_{c_2} &= x_{c_3} \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{c_{n-1}} &= x_{c_n} \\
 \dot{x}_{c_n} &= f^*(x) + g^*(x)u_c
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Para tornar o sistema (2.4) em um sistema linear é necessário projetar uma transformação de entrada, $u_c(x)$, que cancele as não-linearidades desse sistema e forneça uma nova entrada de controle para o sistema. Completa-se, assim, a transformação do sistema não-linear (2.1) na sua respectiva forma canônica de Brunovsky (2.2). A transformação de entrada pode ser projetada como:

$$u_c(x) = \frac{v_c - f^*(x)}{g^*(x)} \tag{2.5}$$

O problema a ser equacionado e solucionado é, portanto, a determinação do difeomorfismo $\phi_c(x)$ que transforme o sistema (2.1) no sistema (2.4). Sem perda de generalidade será assumido a igualdade $\phi_c(x) = x_c(x)$. Considere a derivada temporal do difeomorfismo $\phi_c(x) = x_c$ calculada conforme segue:

$$\dot{x}_c = \frac{\partial x_c}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial x_c}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \tag{2.6}$$

Sabendo-se que o difeomorfismo é um campo vetorial e pode ser escrito como:

$$x_c(x) = [x_{c_1}(x) \ x_{c_2}(x) \ \dots \ x_{c_{n-1}}(x) \ x_{c_n}(x)]^T$$

pode-se reescrever a equação (2.6) como um sistema de equações diferenciais parciais, utilizando a notação de derivadas de Lie, conforme segue:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{c_1} &= L_f x_{c_1}(x) + L_g x_{c_1}(x)u_c \\
 \dot{x}_{c_2} &= L_f x_{c_2}(x) + L_g x_{c_2}(x)u_c \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{c_{n-1}} &= L_f x_{c_{n-1}}(x) + L_g x_{c_{n-1}}(x)u_c \\
 \dot{x}_{c_n} &= L_f x_{c_n}(x) + L_g x_{c_n}(x)u_c
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Igualando o sistema (2.7) ao sistema desejado (2.4), pode-se reescrever o sistema de equações (2.7) em função de x_{c_1} através de um processo recursivo, obtendo o equacionamento que segue abaixo:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{c_1} &= L_f L_f^0 x_{c_1}(x) + L_g L_f^0 x_{c_1}(x) u_c = x_{c_2} \\
\dot{x}_{c_2} &= L_f L_f^1 x_{c_1}(x) + L_g L_f^1 x_{c_1}(x) u_c = x_{c_3} \\
&\vdots \\
\dot{x}_{c_{n-1}} &= L_f L_f^{n-2} x_{c_1}(x) + L_g L_f^{n-2} x_{c_1}(x) u_c = x_{c_n} \\
\dot{x}_{c_n} &= L_f L_f^{n-1} x_{c_1}(x) + L_g L_f^{n-1} x_{c_1}(x) u_c = v_c
\end{aligned} \tag{2.8}$$

O conjunto de equações (2.8) pode ser escrito, de forma compacta, como:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{c_k} &= L_f L_f^{k-1} x_{c_1}(x) + L_g L_f^{k-1} x_{c_1}(x) u_c = x_{c_{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\
\dot{x}_{c_n} &= L_f L_f^{n-1} x_{c_1}(x) + L_g L_f^{n-1} x_{c_1}(x) u_c = v
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Analisando o conjunto de equações (2.9), pode-se concluir que para que a igualdade entre (2.9) e (2.4) seja obtida é necessário que:

$$\begin{aligned}
L_f L_f^k x_{c_1}(x) &= x_{c_{k+1}} \\
L_g L_f^k x_{c_1}(x) u_c &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2 \\
L_g L_f^{n-1} x_{c_1}(x) &\neq 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Supondo que $y = x_{c_1}(x)$, então as condições descritas pelo conjunto de equações (2.10) é equivalente a dizer que o sistema tem grau relativo $r = n$.

Utilizando a notação de colchetes de Lie⁴, e o fato de que:

$$L_g x_c = L_g L_f x_c = \dots = L_g L_f^k x_c = 0 \tag{2.11}$$

é, conforme mostrado em [Slotine e Li, 1991], equivalente a

$$L_g x_c = L_{ad_f^k g} x_c = \dots = L_{ad_f^{n-1} g} x_c = 0 \tag{2.12}$$

pode-se reescrever o conjunto de condições descritos pela equação (2.10) como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_{c_1}}{\partial x} ad_f^k g &= 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2 \\
\frac{\partial x_{c_1}}{\partial x} ad_f^{n-1} g &\neq 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

⁴O colchete de Lie é definido como $[f(x), g(x)] = \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x)$, comumente escrito como $ad_f g(x)$ ($[f, g]$). Consulte o apêndice A para maiores detalhes.

Considerando-se os campos vetoriais definidos como:

$$G_1 = \{ g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g \} \quad (2.14)$$

$$G_2 = \{ g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g \} \quad (2.15)$$

Pode-se afirmar que para que o conjunto de equações (2.13) seja verificado, o campo vetorial (2.14) deve ser linearmente independente em uma região $\Omega \in \mathfrak{R}^n$, caso contrário a última equação do conjunto de equações (2.13) seria igual a zero. Essa condição é equivalente a condição de controlabilidade para sistemas lineares, uma vez que o campo vetorial (2.14) se calculado para um sistema linear é equivalente a sua matriz de controlabilidade.

Além disso, para que seja possível calcular uma transformação de estados a partir do sistema de equações (2.9), atendendo as condições impostas no conjunto de equações (2.13), é necessário que o campo vetorial (2.15) seja involutivo na região $\Omega \in \mathfrak{R}^n$, conforme segue do teorema de Frobenius [Slotine e Li, 1991].

Verificando-se que o campo vetorial (2.14) seja linearmente independente e o campo vetorial (2.15) seja involutivo em uma região Ω , então pode-se afirmar que existe uma função escalar $x_{c_1}(x)$ diferente de zero que satisfaz o equacionamento (2.13), com grau relativo igual a n . Logo o difeomorfismo pode ser definido como:

$$x_c(x) = \begin{bmatrix} x_{c_1}(x) \\ L_f x_{c_1}(x) \\ L_f^2 x_{c_1}(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-2} x_{c_1}(x) \\ L_f^{n-1} x_{c_1}(x) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

e a transformação de entrada (2.5) pode ser reescrita como:

$$u_c(x) = \frac{-L_f^n x_{c_1} + v}{L_g L_f^{n-1} x_{c_1}} \quad (2.17)$$

Analisando o desenvolvimento apresentado nesta Seção pode-se concluir que o sistema (2.1) pode ser dito linearizável pela realimentação caso sejam verificadas as condições de independência linear do campo vetorial (2.14) e involutividade do campo vetorial (2.15). Então existirá um difeomorfismo $\phi_c(x) = x_c(x)$, e uma transformação de entrada $u_c(x)$ que linearizam o sistema, colocando-o

na forma de Brunovsky.

Terminada essa primeira abordagem, onde buscou-se dar uma visão simplificada do procedimento de linearização pela realimentação, dá-se início a próxima Seção onde será apresentado um procedimento generalizado para realizar o projeto do controle de realimentação linearizante robusto.

2.3 Controle de Realimentação Linearizante Robusta

Nesta Seção apresenta-se a técnica realimentação linearizante robusta. Esta técnica, proposta em [Guillard e Bourlès, 2000], tem por base uma transformação não-linear, derivada da técnica de realimentação linearizante clássica, que lineariza o sistema não-linear transformando-o em um sistema na forma canônica de Brunovsky. A este aplica-se uma transformação linear que o transforma na aproximação linear do sistema não-linear em torno de um ponto de equilíbrio. Em [Guillard e Bourlès, 2000] apresenta-se um resultado onde se prova por w -estabilidade que a linearização robusta é robusta para pequenas variações paramétricas, pois possui a característica de manter mais informações sobre o sistema. A técnica de linearização robusta, equivalentemente à clássica, visa encontrar uma transformação de estados $\phi_r(x) = x_r$ e uma transformação de entrada $u_r(x)$, porém que transformem o sistema não-linear na sua aproximação linear em torno de um ponto de equilíbrio, ao invés de colocá-lo na forma canônica de Brunovsky como ocorre na técnica de linearização clássica.

Serão considerados no projeto do controle de realimentação linearizante robusta os sistemas multivariáveis afins no controle, totalmente linearizáveis que podem ser modelados como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j = f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.18}$$

com $g(x) \triangleq [g_1(x) \dots g_m(x)]^T$, $u \triangleq [u_1 \dots u_m]^T$, onde os estados são representados por $x \in \mathfrak{R}^n$, a entrada de controle por $u \in \mathfrak{R}^m$ e a saída por $y \in \mathfrak{R}^p$. Sendo $f(x)$, $g_1(x), \dots, g_m(x)$ e $h(x)$ campos vetoriais suaves, ou seja, contínuos e deriváveis, definidos em um subconjunto aberto de \mathfrak{R}^n .

O primeiro passo para projeto do controle linearizante robusto é verificar se o sistema descrito pelo equacionamento (2.17) é linearizável pela realimentação.

Proposição 2.3.1 *O sistema não-linear (2.17) é dito linearizável pela realimentação se, e somente se existe uma região Ω tal que as seguintes condições sejam atendidas [Guillard e Bourlès, 2000; Isidori, 1995; Slotine e Li, 1991]:*

- as distribuições $G_i = \text{span}\{ad_f^k g_j : 0 \leq k \leq i, 1 \leq j \leq m\}$, $0 \leq i \leq n-1$ são linearmente independentes;
- as distribuições $G_i = \text{span}\{ad_f^k g_j : 0 \leq k \leq i, 1 \leq j \leq m\}$, $0 \leq i \leq n-2$ são involutivas.

Agora como um passo consecutivo apresenta-se o procedimento para projetar a transformação não-linear que lineariza o sistema não-linear colocando-o na forma de Brunovsky.

Proposição 2.3.2 *Assumindo que o sistema é linearizável pela realimentação então existem funções reais válidas $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ definidas em Ω , que podem ser escolhidas como saídas, respectivamente, com graus relativos r_1, \dots, r_m sendo que $r_1 + \dots + r_m = n$, então as seguintes condições são verificadas:*

1. para $i \in [1, m]$, todos $j \in [1, m]$, todos $x \in \Omega$ $L_{g_i} L_f^0 \lambda_j(x) = \dots = L_{g_i} L_f^{r_j-2} \lambda_j(x) = 0$

2. a matriz $m \times m$

$$M(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} \lambda_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} \lambda_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} \lambda_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} \lambda_m(x) \end{bmatrix}$$

é não singular em Ω

A transformação de estados $\phi_c(x) = x_c$ e a transformação de saída $u_c(x)$ que são referentes a técnica de realimentação linearizante clássica e que colocam o sistema não-linear na sua forma equivalente de Brunovsky, são calculadas como:

$$\begin{aligned} \phi_c(x) &\triangleq [\phi_{c_1}(x) \ \dots \ \phi_{c_m}(x)]^T \\ \phi_{c_i}(x) &\triangleq [\lambda_i L_f^{r_i-1} \lambda_i(x) \ \dots \ L_f^{r_i-1} \lambda_i(x)]^T \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$u_c(x, v_c) = \alpha_c(x) + \beta_c(x) v_c \quad (2.20)$$

onde

$$\alpha_c(x) \triangleq -M^{-1}(x)N(x), \quad \beta_c(x) \triangleq M^{-1}(x), \quad (2.21)$$

$$N(x) \triangleq [L_f^{r_1} \lambda_1(x) \ L_f^{r_2} \lambda_2(x) \ \dots \ L_f^{r_m} \lambda_m(x)]^T \quad (2.22)$$

sendo v_c é a entrada de controle do sistema linearizado na forma canônica de Brunovsky. Verifica-se que esta formulação é a generalização da formulação apresentada na Seção 2.2. Portanto, a aplicação

das transformações de estado (2.19) e de entrada (2.20) ao sistema (2.18) o coloca na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c v_c \\ y &= C_c x_c\end{aligned}\quad (2.23)$$

onde x_c é o estado linearizado, sendo que as matrizes $A_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_c \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ e $C_c \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, e ainda:

$$\begin{aligned}A_c &= \begin{bmatrix} A_{c_1} & 0_{r_1 \times r_2} & \cdots & 0_{r_1 \times r_m} \\ 0_{r_2 \times r_1} & A_{c_2} & \cdots & 0_{r_2 \times r_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{r_m \times r_1} & 0_{r_m \times r_2} & \cdots & A_{c_m} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} B_{c_1} & 0_{r_1 \times 1} & \cdots & 0_{r_1 \times 1} \\ 0_{r_2 \times 1} & B_{c_2} & \cdots & 0_{r_2 \times 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{r_m \times r_1} & 0_{r_m \times 1} & \cdots & B_{c_m} \end{bmatrix} \\ C_c &= \begin{bmatrix} C_{c_1} & 0_{r_1 \times 1} & \cdots & 0_{r_1 \times 1} \\ 0_{r_2 \times 1} & C_{c_2} & \cdots & 0_{r_2 \times 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{r_m \times r_1} & 0_{r_m \times 1} & \cdots & C_{c_m} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.24)$$

Sendo cada A_{c_i} uma matriz $r_i \times r_i$ cuja diagonal superior é formada por uns e todos os outros elementos são zeros, ou seja, uma cascata de integradores, B_{c_i} é um vetor coluna $r_i \times 1$ cujo último elemento é um e todos os outros zero e C_{c_i} é um vetor linha $1 \times r_i$ cujo primeiro elemento é um e todos os outros são zero, ou seja:

$$A_{c_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{c_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{c_i} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]\quad (2.25)$$

Finalizada a transformação não-linear, inicia-se o projeto da transformação linear, onde v_c é projetado para transformar o sistema linearizado obtido da transformação não-linear na aproximação linear do sistema não-linear em torno de um ponto de equilíbrio desejado. Supondo que este ponto de equilíbrio seja dado por x_e e v_{r_e} , o sistema linearizado que se pretende obter é representado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= A_r x_r + B_r v_r \\ y &= C_r x_r\end{aligned}\quad (2.26)$$

escolhendo-se como ponto de equilíbrio a origem, ou seja, $x_e = 0$:

$$A_r \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (2.27)$$

$$B_r \triangleq g(0) \quad (2.28)$$

$$C_r = C_c T \quad (2.29)$$

Supondo que o par (A_r, B_r) é controlável, então existem matrizes $T(n \times n)$, $L(m \times n)$ e $R(m \times m)$ tais que verificam a seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} x_c &= T x_r \\ T(A_r - B_r R L) T^{-1} &= A_c \\ T B_r R &= B_c \end{aligned} \quad (2.30)$$

sendo as matrizes T e R não singulares.

Utilizando, portanto, as matrizes T , L e R é possível fazer uma transformação de similaridade sobre sistema linearizado (2.18), de maneira a transformá-lo no sistema (2.19).

Substituindo as relações descritas pelo equacionamento (2.30) no sistema (2.23) e pré-multiplicando por T^{-1} obtém-se:

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r (R v_c - R L x_r) \quad (2.31)$$

Comparando equação (2.26) e a equação (2.31) concluí-se que:

$$v_r = R v_c - R L x_r \quad (2.32)$$

A partir da equação (2.32) é possível determinar a lei de controle v_c , que transforma o sistema na forma de Brunovsky (2.23) na aproximação linear do sistema não-linear em torno de um ponto de equilíbrio (2.26), como:

$$v_c = R^{-1} v_r + L T^{-1} x_c \quad (2.33)$$

Pode-se unir o resultado da transformação não-linear e da transformação linear para se obter a transformação de estados $\phi_r(x)$, difeomorfismo, a transformação de saída $u_r(x)$ referentes a técnica de realimentação linearizante robusta.

Da equação (2.30) concluí-se que o difeomorfismo $\phi_r(x) = x_r(x)$ é calculado como:

$$\phi_r(x) = T^{-1}\phi_c(x) \quad (2.34)$$

A transformação de entrada $u_r(x, v_r)$ é calculada substituindo-se a equação (2.33) na equação (2.20) resultando em:

$$u_r(x, v_r) = \alpha_r(x) + \beta_r(x)v_r \quad (2.35)$$

onde

$$\alpha_r(x) = \alpha_c(x) + \beta_c(x)LT^{-1}\phi_c(x) \quad (2.36)$$

$$\beta_r(x) = \beta_c(x)R^{-1} \quad (2.37)$$

Resta agora determinar as matrizes T , R e L . Isso será feito de forma a garantir que a transformação de estados (2.34) e a transformação de entrada (2.35) transformem o sistema não-linear na sua aproximação linear em torno de um ponto de equilíbrio.

Considere a aplicação da transformação de entrada (2.35) sobre o sistema não-linear (2.18):

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha_r(x) + g(x)\beta_r(x)v_r \quad (2.38)$$

Calculando as matrizes A_r e B_r a partir da equação (2.38) conforme é feito em (2.27) e (2.28) obtém-se:

$$A_r = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_e} + \left. \frac{\partial g(x)}{\partial x} \alpha_r(x) \right|_{x=x_e} + \left. \frac{\alpha_r(x)}{\partial x} g(x) \right|_{x=x_e} \quad (2.39)$$

$$B_r = \left. g(x)\beta_r(x) \right|_{x=x_e} \quad (2.40)$$

Para que o projeto das transformações de estado (2.34) e de entrada (2.35) cumpram o objetivo de transformar o sistema não-linear (2.18) na sua aproximação linear em torno de um ponto de equilíbrio, é necessário que as equações (2.27) e (2.39) sejam iguais, assim como equações (2.28) e (2.39) também. Logo, comparando tais equações é possível concluir que é necessário que sejam atendidas

as seguintes condições:

$$\alpha_r(x_e) = 0 \quad (2.41)$$

$$\left. \frac{\partial \alpha_r(x)}{\partial x} \right|_{x=x_e} = 0 \quad (2.42)$$

$$\beta_r(x_e) = I \quad (2.43)$$

Iniciando-se pelo cálculo da matriz T . Considerando-se o fato de que no equilíbrio o gradiente do difeomorfismo robusto $\phi_r(x)$ é igual a matriz identidade, ou seja:

$$\left. \frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x} \right|_{x=x_e} = I \quad (2.44)$$

Relacionado as equações (2.34) e (2.44) obtém-se:

$$\left. \frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x} \right|_{x=x_e} = T^{-1} \left. \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial x} \right|_{x=x_e} = I$$

de onde pode-se calcular a matriz T como:

$$T = \left. \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial x} \right|_{x=x_e} \quad (2.45)$$

Calculada a matriz T , calcula-se a matriz R relacionando a condição descrita na equação (2.43) e a equação (2.37), tendo então que:

$$\beta(x_e) = \beta_c(x_e) R^{-1} = I \quad (2.46)$$

de onde obtém-se:

$$R = \beta_c(x_e) = M^{-1}(x_e) \quad (2.47)$$

Finalmente, calcular-se a matriz L relacionando a condição descrita pela equação (2.41) e a equação (2.36), conforme segue:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \alpha_r(x)}{\partial x} \right|_{x=x_e} &= \left. \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_c(x) + \beta_c(x) L T^{-1} x_c) \right|_{x=x_e} = 0 \\ 0 &= \left[\frac{\partial \alpha_c(x)}{\partial x} + \frac{\partial \beta_c(x)}{\partial x} L T^{-1} \phi_c(x) + \beta_c(x) L T^{-1} \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial x} \right] \Big|_{x=x_e} \end{aligned} \quad (2.48)$$

sabendo-se que $\phi_c(x_e) = 0$ e substituindo-se a equação (2.45) no equacionamento (2.48) obtém-se:

$$0 = \left. \frac{\partial \alpha_c(x)}{\partial x} \right|_{x=x_e} + L \left. \beta_c(x) \right|_{x=x_e}$$

resultando em:

$$L = -\left. \beta_c(x_e) \frac{\partial_c(x)}{x} \right|_{x=x_e} = -M^{-1}(x_e) \left. \frac{\partial_c(x)}{x} \right|_{x=x_e} \quad (2.49)$$

Todos os parâmetros necessários para projetar o controle de realimentação linearizante foram determinados. Sendo que o processo para se determinar esse controle para um dado sistema não-linear seria:

1. Determinar se o sistema é linearizável pela realimentação;
2. Calcular a transformação de estados (2.34) e a transformação de saída (2.35).

Como se pode observar pelo equacionamento dessa técnica, existe a necessidade de acesso a informação de todos os estados do sistema. Essa necessidade é uma desvantagem da técnica, porque em geral não é possível medir todos os estados. Porém, pode-se contornar essa dificuldade utilizando um observador de estados, conforme será mostrado na próxima Seção.

2.4 Observador de Alto Ganho

Nesta Seção é proposto um observador para estimar os estados do sistema linearizado pela realimentação linearizante robusta e são fornecidas condições suficientes que garantem que é possível um ajuste onde o sistema tenha estabilidade local. Como já discutido anteriormente, a técnica de realimentação linearizante necessita acesso a informação de todos os estados. A medição de todos os estados, em geral, é inviável financeiramente, sendo que em alguns casos os estados não possuem interpretação física. Para contornar essa dificuldade, sem aumentar a complexidade do problema, propõe-se a utilização de um observador de alto ganho cuja estrutura é similar a do observador linear de Luenberger. A opção por este tipo de observador é interessante para ser aplicado com a técnica linearização, cuja aplicação resulta em um sistema linear para ao qual se pode empregar um observador linear. Entretanto, como a técnica de controle utilizada é baseada em modelo, pode haver dinâmicas não modeladas e perturbações paramétricas, que devem ser levadas em consideração. Para tanto, é necessário que se realize o ajuste adequado do ganho do observador garantindo a convergência do mesmo e certa margem de robustez.

Considere um sistema não-linear totalmente linearizável, que pode ser representado conforme é mostrado na equação (2.18). Suponha que se deseja aplicar a técnica de controle de realimentação linearizante robusta a este sistema, porém não se tem acesso a todos estados do sistema. Para realizar esta aplicação, contornando este problema de falta de informação sobre o sistema, é possível projetar um controle por realimentação dinâmica de saída, onde um observador de estados é adicionado a dinâmica do controlador. Como está se tratando de uma técnica de controle não-linear específica que lineariza o sistema, a proposta nesse trabalho é utilizar um observador, cuja estrutura é similar a do observador linear de Luenberger para estimar os estados linearizados, aos quais é aplicado o difeomorfismo inverso (transformação de estados inversa), para se obter uma estimativa dos estados do sistema não-linear. Estas, então, serão utilizadas no lugar dos estados reais, dos quais não se tem informação, para a implementação da técnica.

Baseando-se na estrutura do sistema linearizado (2.26), propõe-se o observador linear com a estrutura a seguir:

$$\dot{\hat{x}}_r = A_r \hat{x}_r + B_r v_r + H(y - C_r \hat{x}_r) \quad (2.50)$$

Os estados não-lineares estimados \hat{x} são obtidos aplicando o difeomorfismo inverso aos estados linearizados \hat{x}_r . O difeomorfismo inverso é obtido resolvendo-se o equacionamento do difeomorfismo (2.34) em função de x .

Utilizando-se o observador (2.50) pode-se então projetar um controle dinâmico de realimentação linearizante pela saída. Conforme é ilustrado no diagrama da figura (2.2).

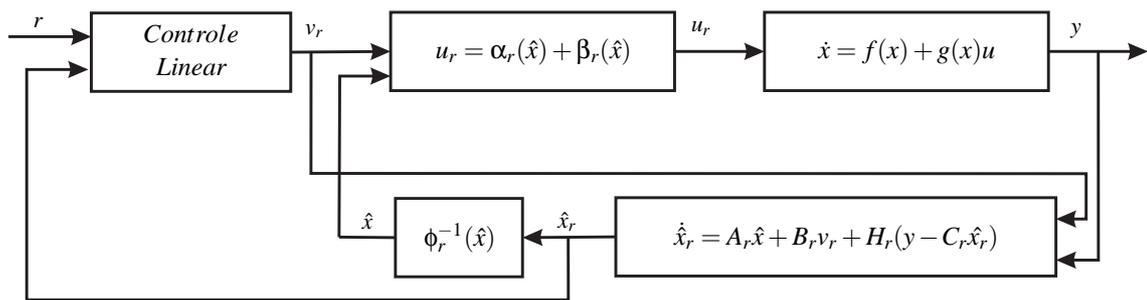


Figura 2.2: Controle dinâmico de realimentação linearizante pela saída.

Proposição 2.4.1 Se $\mu_r(\phi_r^{-1}(x_r)) = \frac{\partial \phi_r}{\partial x}(x)g(x)$ é localmente limitado em $x_{r_{eq}} = \phi_r(x_{eq})$, $\alpha_r \circ \phi_r^{-1}$ e $\beta_r \circ \phi_r^{-1}$ são localmente Lipschitz em $x_{r_{eq}}$ e o par (C_r, A_r) é observável, então, considerando que a entrada v_r é limitada, é possível escolher o ganho do observador H , tal que a origem da dinâmica do erro de estimação dos estados, pelo observador (2.50), seja localmente assintoticamente estável, e

assim também o seja o sistema não-linear (2.1) em malha fechada utilizando o controle linearizante robusto pela realimentação da saída com o observador dado pela equação (2.50).

A prova desta proposição é apresentada no apêndice C. Sabendo que é possível escolher o ganho do observador tal que a dinâmica do sistema realimentado seja estável, apresenta-se o observador de alto ganho.

O observador de alto ganho que será utilizado para estimar os estados do sistema controlado pela técnica de controle linearizante robusto é, basicamente, um observador de Luenberger onde o ganho é ajustado de uma forma característica. Este observador é apresentado na literatura, para ser aplicado para estimar os estados de um sistema, que esteja na forma de Brunovsky (2.23) [Munareto *et al.*, 2006], ou em uma forma similar [Atassi e Khalil, 1999; Khalil, 2002]. É possível associá-lo a técnica de controle linearizante clássico conforme feito em [Munareto *et al.*, 2006]. Para obter um observador de alto ganho para aplicar ao controle de realimentação linearizante robusto, propõe-se aplicar as transformações lineares, descritas nas equações (2.33) e (2.34), à estrutura do observador de alto ganho, apresentado em [Atassi e Khalil, 1999], de tal forma a obter um observador cuja estrutura seja igual ao sistema linearizado pela realimentação linearizante robusta.

O observador de alto ganho, apresentado em [Atassi e Khalil, 1999; Khalil, 2002] e combinado com a realimentação linearizante clássica em [Munareto *et al.*, 2006], possui a seguinte estrutura:

$$\dot{\hat{x}}_c = A_c x_c + B_c u_c + H_c (y - \hat{y}) \quad (2.51)$$

onde A_c e B_c são descritos por (2.24).

O ganho desse observador, H_c , é ajustado conforme segue:

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0_{r_1 \times 1} & \cdots & 0_{r_1 \times 1} \\ 0_{r_2 \times 1} & H_2 & \cdots & 0_{r_2 \times 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{r_m \times 1} & 0_{r_m \times 1} & \cdots & H_m \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

sendo

$$H_i = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^i}{\varepsilon} \\ \frac{\alpha_2^i}{\varepsilon^2} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_{r_i-1}^i}{\varepsilon^{r_i-1}} \\ \frac{\alpha_{r_i}^i}{\varepsilon^{r_i}} \end{bmatrix}_{r_i \times 1} \quad (2.53)$$

onde ε é uma constante positiva a ser escolhida e os coeficientes α_i são escolhidos tal que as raízes do polinômio:

$$s^{r_i} + \alpha_1^i s^{r_i-1} + \dots + \alpha_{r_i-1}^i s + \alpha_{r_i}^i = \quad (2.54)$$

estejam no semiplano esquerdo do plano complexo, para todo $i = 1, \dots, m$.

Considerando-se a aplicação da realimentação linearizante clássica utilizando os estados estimados ao sistema não-linear (2.18), a dinâmica em malha fechada desta aplicação pode ser obtida aplicando-se o difeomorfismo $x_c = \phi_c(x)$ e a lei de controle $u_c(\hat{x}) = \alpha_c(\hat{x}) + \beta_c(\hat{x})v_c$ ao sistema não-linear (2.18). E, para fins de análise, considera-se a adição e subtração do termo $\alpha_c(x) + \beta_c(x)v_c$ a lei de controle, obtendo:

$$\dot{\hat{x}}_c = A_c \hat{x}_c + B_c v_c + \delta_c(x, \hat{x}) \quad (2.55)$$

onde

$$\delta_c(x, \hat{x}) = \mu_c(x) \left[\alpha_c(\hat{x}) - \alpha_c(x) + \left(\beta_c(\hat{x}) - \beta_c(x) \right) v_c \right] \quad (2.56)$$

sendo $\mu_c(x) = \frac{\partial \phi_c}{\partial x}(x)g(x)$ e $x = \phi_c^{-1}(x_c)$, $\hat{x} = \phi_r^{-1}(\hat{x}_c)$. Note que $\frac{\partial \phi_c}{\partial x}(x)g(x)\beta(x) = B_c$, então tem-se que $\mu_r(x) = B_c \beta_c^{-1}(x)$.

Pode-se então escrever a dinâmica do erro entre o estado linearizado real x_c e o estado estimado \hat{x}_c , dado por $e_c = x_c - \hat{x}_c$:

$$\dot{e}_c = (A_c - H_c C_c) + B_c \beta_c^{-1}(x) \delta_c(x, \hat{x}) \quad (2.57)$$

Definido uma nova variável denominada erro escalado, η_c , definida como:

$$\eta_c = D^{-1}(\varepsilon) e_c \quad (2.58)$$

onde

$$D(\varepsilon) = \text{blocodiag}[D_1, \dots, D_p] \quad (2.59)$$

sendo

$$D_i = \text{diag}[\varepsilon^{r_i-1}, \varepsilon^{r_i-2}, \dots, \varepsilon^{r_i-1}, 1]$$

Pode-se então reescrever a dinâmica do erro (2.57) utilizando o conceito do erro escalado como:

$$\varepsilon^{r_i-1} \dot{\eta}_c = A_0 \eta_c + \varepsilon D^{-1}(\varepsilon) B_c \delta(x, \hat{x}) \quad (2.60)$$

onde $\frac{1}{\varepsilon}A_0 = D^{-1}(\varepsilon)(A_c - H_c C_c)$. Note ainda que

$$D^{-1}(\varepsilon)B_c = B_c, \quad (2.61)$$

isso devido a estrutura de ambas as matrizes. Logo, pode-se concluir que diminuindo o valor de ε diminui-se o efeito de δ_c .

O próximo passo agora é obter um observador para ser utilizado com a técnica de controle de realimentação linearizante robusta, através da aplicação das transformações (2.33) e (2.34) sobre o observador (2.51), obtendo então:

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r v_r + T^{-1} H_c (y - \hat{y}) \quad (2.62)$$

Note que observador (2.62) possui a mesma estrutura do observador proposto anterior (2.50). Entretanto no observador (2.62) o ganho é ajustado como $H_r = T^{-1} H_c$.

Para verificar o efeito do ajuste do ganho $H_r = T^{-1} H_c$ do observador (2.62), a ser utilizado com o controle de realimentação linearizante robusta, considera-se inicialmente a dinâmica do erro de estimação, ou seja, $e_r = x_r - \hat{x}_r$ ⁵, é dada por:

$$\dot{e}_r = (A_r - H_r C_r) e_r + B_r \beta_r^{-1}(x) \delta_r(x) \quad (2.63)$$

Agora, definindo o erro escalado para esse caso, como $\eta_r = D^{-1}(\varepsilon) e_r$, sendo que $D(\varepsilon)$ está definido em (2.59), obtém-se a seguinte dinâmica:

$$\dot{\eta}_r = D^{-1}(\varepsilon)(A_r - H_r C_r) D(\varepsilon) \eta_r + B_r \beta_r^{-1}(x) \delta_r(x, \hat{x}) \quad (2.64)$$

Utilizando-se as relações (2.30) pode-se então reescrever (2.64) como:

$$\dot{\eta}_r = D^{-1}(\varepsilon) T^{-1} (A_c - H_c C_c + B_c L T^{-1}) T D(\varepsilon) \eta_r + B_r \beta_r^{-1}(x) \delta_r(x, \hat{x}) \quad (2.65)$$

Supondo-se que T seja uma matriz diagonal, pode-se reescrever (2.65) como:

$$\dot{\eta}_r = T^{-1} D^{-1}(\varepsilon) (A_c - H_c C_c) D(\varepsilon) T + D^{-1}(\varepsilon) B_c L T^{-1} D(\varepsilon) T \eta_r + D^{-1}(\varepsilon) B_r \beta_r^{-1}(x) \delta_r(x, \hat{x}) \quad (2.66)$$

⁵Para maiores detalhes consulte o apêndice C.

Utilizando-se do fato de que:

$$\frac{1}{\varepsilon}A_0 = D^{-1}(\varepsilon)(A_c - H_c C_c), \quad (2.67)$$

e ainda assumindo que a matriz B_r tenha estrutura similar a matriz B_c , que implica a partir da relação descrita em (2.61) que $D^{-1}(\varepsilon)B_r = B_r$, e logo pode-se concluir que:

$$\varepsilon\dot{\eta}_r = T^{-1}A_0T + \varepsilon(B_cLT^{-1})D(\varepsilon)T\eta_r + \varepsilon B_r\beta_r^{-1}(x)\delta_r(x, \hat{x}) \quad (2.68)$$

Pode-se então, intuitivamente concluir que, a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$, a dinâmica descrita por (2.68) tende a ser similar a dinâmica descrita por (2.60), logo o observador (2.62) tende a ter comportamento dinâmico similar ao observador (2.51) a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$. Relembrando-se que foi assumido que B_r tem estrutura similar a B_c . É evidente que o termo $\beta_r^{-1}(x)\delta_r(x, \hat{x})$ pode ser negligenciado a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$, porém não é possível afirmar com tanta firmeza sobre o termo B_cLT^{-1} , pois ele influencia diretamente a dinâmica do sistema. Portanto, assume-se que é necessária uma prova matemática concreta derivada de uma investigação maior sobre esta questão. Neste trabalho não foi possível obter esta prova, todavia para o caso mono variável é apresentado um comentário na Seção 2.4.1, que fortalece esta conclusão, e no Capítulo 4 é feito um estudo de caso sobre esta questão.

Para tentar contornar as limitações é possível definir o erro escalado de forma diferente:

$$\eta_r = D(\varepsilon)Te_r \quad (2.69)$$

Seguindo os mesmos passos anteriores, a dinâmica do erro desse novo erro escalonado é dado por:

$$\dot{\eta}_r = D^{-1}T(\varepsilon)(A_r - H_r C_r)T^{-1}D(\varepsilon)\eta_r + B_r\beta_r^{-1}(x)\delta_r(x, \hat{x}) \quad (2.70)$$

A equação (2.70) pode então ser reescrita utilizando as transformações dispostas na equação (2.30), como:

$$\dot{\eta}_r = D^{-1}(\varepsilon)(A_c - H_c C_c)D(\varepsilon) + D^{-1}(\varepsilon)B_cLT^{-1})D(\varepsilon)T\eta_r + D^{-1}(\varepsilon)B_r\beta_r^{-1}(x)\delta_r(x, \hat{x}) \quad (2.71)$$

Aplicando as relações (2.61) e (2.67) em (2.71) obtém-se:

$$\varepsilon\dot{\eta}_r = A_0 + \varepsilon(B_cLT^{-1})D(\varepsilon)\eta_r + \varepsilon B_cR^{-1}\beta_r^{-1}(x)\delta_r(x, \hat{x}) \quad (2.72)$$

para a qual pode-se fazer os mesmo comentários feitos anteriormente para a equação (2.68).

Essas duas abordagens em erro escalado foram mostradas para tentar evidenciar que as características do observador de alto ganho empregadas ao sistema descrito na forma de Brunovsky podem ser herdadas por um observador linear de Luenberger quando ajustado de forma específica. Entretanto, além de herdadas as boas características existe uma deficiência que é intrínseca do observador de alto ganho, que também é herdada.

Analisando as dinâmicas escritas para o erro estimado, equações (2.65) e (2.72), verifica-se que reduzindo o valor de ε diminui-se o efeito da perturbação dada pelo termo $\delta_r(x, \hat{x})$ e do termo $B_c L T^{-1}$, fazendo que observador proposto (2.62) tenda a ter um comportamento similar ao observador (2.51). Entretanto, verifica-se, também, que as condições iniciais das dinâmicas escaladas serão de ordem $O(\frac{1}{\varepsilon})$ sempre que condições do sistema e do observador sejam diferentes. Conseqüentemente, a resposta temporal dos sistemas escalados possuirá termos do tipo $\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{at}{\varepsilon}}$ para algum $a > 0$. Embora esse modo exponencial decaia rapidamente, apresenta um comportamento impulsivo onde o transitório apresenta picos da ordem de $O(\varepsilon)$, antes de decair rapidamente para zero, ou seja, a função $\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{at}{\varepsilon}}$ tende a uma função impulso a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$. Esse comportamento é conhecido, em inglês, como *peaking phenomenon*, ou seja, fenômeno de *peaking*. Este efeito descreve a deficiência do observador de alto ganho.

O fenômeno de *peaking* é presente nas estimativas dos estados que são utilizados na lei de controle, que por vez sua também apresentará o mesmo fenômeno e o transmitirá para os estados do sistema. Esta situação pode então causar um resultado contrário ao esperado quando se reduz o valor de ε , que seria o sistema de realimentação de saída tende-se ao sistema de realimentação de estados, ou ainda pior, esse fenômeno pode fazer com que os estados do sistema apresentem um comportamento impulsivo que pode fazer com que saia da região de atração do seu equilíbrio, instabilizando o sistema.

Contudo, o fenômeno de *peaking* pode ser contornado utilizando um controle limitado, ou seja, saturando o controle. Isso pode ser feito saturando diretamente a lei de controle ou os estados estimados.

O observador de alto ganho quando aplicado em uma estrutura de controle de realimentação dinâmica da saída permite que o controle recupere a performance do controle feito pela realimentação dos estados. Esta recuperação de desempenho acontece no sentido de que a região de atração do sistema realimentado pelos estados é recuperada pelo sistema realimentado dinamicamente pela saída, e as trajetórias do sistema controlado pela realimentação dinâmica da saída tendem para as trajetórias do sistema controlado pela realimentação dos estados a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$ [Atassi e Khalil, 1999].

2.4.1 Comentário

Essa Seção é dedicada a investigar o efeito do termo $B_c L T^{-1}$ na dinâmica do erro do observador de alto ganho aplicado com a técnica de controle linearizante robusto para o caso de sistemas mono variáveis.

Considere a dinâmica do erro de estimação dada na equação (2.63), utilizando-se as relações descritas em (2.30), esta dinâmica pode ser reescrita como:

$$\dot{e}_r = T^{-1}(A_c - H_c C_c + B_c L T^{-1}) T e_r + B_r \beta_r^{-1}(x) \delta_r(x) \quad (2.73)$$

O termo $\beta_r^{-1}(x) \delta_r(x)$ pode ser negligenciado devido às características do observador de alto ganho, conforme dito na Seção 2.4. Então, o foco do estudo nessa Seção é efeito do termo $B_c L T^{-1}$ sobre a dinâmica do erro de estimação para o caso de sistemas mono variáveis. Para facilitar a compreensão, considere o caso genérico de um sistema de ordem $n = 5$, e concentrado o estudo especificamente no termo $(A_c - H_c C_c + B_c L T^{-1})$. Então tem-se para este caso que:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

$$H_c = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{\varepsilon} \\ \frac{\alpha_2}{\varepsilon^2} \\ \frac{\alpha_3}{\varepsilon^3} \\ \frac{\alpha_4}{\varepsilon^4} \\ \frac{\alpha_5}{\varepsilon^5} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

A matrizes L e T são matrizes que não possuem nenhuma peculiaridade em suas estruturas, e ainda $L \in \mathfrak{R}^{1 \times 5}$ e $T \in \mathfrak{R}^{5 \times 5}$, entretanto o termo $B_c LT^{-1}$ tem uma estrutura definida, devido a estrutura de B_c , que é dada por:

$$B_c LT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_3 & \bar{\alpha}_4 & \bar{\alpha}_5 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Assim tem-se que:

$$(A_c - H_c C_c + B_c LT^{-1}) = \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_5 + \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_3 & \bar{\alpha}_4 & \bar{\alpha}_5 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

onde $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\varepsilon^i}$. A equação característica de (2.79) pode ser escrita como:

$$s^5 + \gamma_1 s^4 + \gamma_2 s^3 + \gamma_3 s^2 + \gamma_4 s + \gamma_5 = \quad (2.80)$$

onde:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\beta_1 - \bar{\alpha}_5 \\ \gamma_2 &= -\beta_2 - \bar{\alpha}_4 + \beta_1 + \bar{\alpha}_5 \\ \gamma_3 &= -\beta_3 - \bar{\alpha}_3 + \beta_1 + \bar{\alpha}_4 + \beta_2 + \bar{\alpha}_5 \\ \gamma_4 &= -\beta_4 - \bar{\alpha}_2 + \beta_1 + \bar{\alpha}_3 + \beta_2 + \bar{\alpha}_4 + \beta_3 + \bar{\alpha}_5 \\ \gamma_5 &= -\beta_5 - \bar{\alpha}_1 \beta_1 + \bar{\alpha}_2 + \beta_2 + \bar{\alpha}_3 + \beta_3 + \bar{\alpha}_4 + \beta_4 + \bar{\alpha}_5 \end{aligned} \quad (2.81)$$

esse equacionamento pode ser generalizado pela seguinte equação:

$$\gamma_i = -\beta_i - \bar{\alpha}_{n+1-i} + \sum_{k=1}^{i-1} \beta_k \bar{\alpha}_{n+1-i+k} \quad (2.82)$$

onde n é a dimensão do sistema, e $i = 1, \dots, n$. A equação (2.82) pode ser reescrita, sabendo-se que $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\varepsilon^i}$, como:

$$\gamma_i = \frac{1}{\varepsilon^i} \left[\alpha_i - \varepsilon \bar{\alpha}_{n+1-i} - \sum_{k=1}^{i-1} \varepsilon^{i-k} \alpha_k \alpha_{n+1-i+k} \right] \quad (2.83)$$

Analisando a equação (2.83) pode-se verificar que o termo α_i tende ser preponderante em

relação aos outros termos, à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim sendo, a equação característica da dinâmica dada por $(A_c - H_c C_c + B_c L T^{-1})$ tende a ser similar a equação característica da dinâmica dada por $(A_c - H_c C_c)$, ou seja, a dinâmica $(A_c - H_c C_c + B_c L T^{-1})$ tende a ser similar a dinâmica $(A_c - H_c C_c)$. Portanto o termo $B_c L T^{-1}$ pode ser negligenciado, e pode-se afirmar que a dinâmica do observador dado por (2.62) tende a ser similar ao observador dado por (2.51) a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.5 Aplicação

2.5.1 Controle linearizante robusto

Nesta Seção é apresentada a aplicação do controle de realimentação linearizante robusta utilizando um observador linear com abordagem de alto ganho sobre o sistema de levitação magnética de um pólo.

O primeiro passo é representar o sistema no espaço de estados, considere inicialmente a modelagem matemática realizada na Seção 1.1 dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} + \frac{R}{k}(c - \theta)\lambda &= V \\ \frac{1}{2k}\lambda^2 - mg &= m\ddot{\theta} \end{aligned}$$

sendo que a saída do sistema é a posição da esfera, ou seja, θ .

Considerando-se a seguinte escolha de estados $x = [x_1 \ x_2 \ x_3] = [\theta \ \dot{\theta} \ \lambda]$ é possível representar o sistema de levitação magnética de um pólo no espaço de estados como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2km}x_3^2 - g \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{k}(c - x_1)x_3 + u \end{aligned} \tag{2.84}$$

e a saída do sistema dada por:

$$y = x_1 \tag{2.85}$$

Necessita-se, agora, determinar o equilíbrio do sistema. Isso é feito considerando $\dot{x} = 0$, obtendo-se então como equilíbrio $x_e = [x_{10} \ x_{20} \ x_{30}] = [x_{10} \ 0 \ \sqrt{2kmg}]$, tem-se, então, a liberdade de se escolher x_{10} . Por simplicidade escolhe-se a origem como equilíbrio, logo se tem que $x_e = [0 \ 0 \ \sqrt{2kmg}]$ e pode-se então determinar também o equilíbrio da tensão de entrada do sistema, dada

por $u_0 = \frac{R}{k}(c - x_{1_0})x_{3_0}$. O próximo passo então é transladar a origem do sistema para o ponto de equilíbrio, determinando uma nova variável de $\tilde{x} = x - x_e$ e de controle $\tilde{u} = u - u_0$. Esse processo é feito pois facilita as análises feitas sobre a técnica de realimentação linearizante. O sistema transladado é dado então por:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \tilde{x}_2 + x_{2_0} \\ \tilde{x}_2 &= \frac{1}{2km}(\tilde{x}_3 + x_{3_0}) \\ \tilde{x}_3 &= -\frac{R}{k}[c - (\tilde{x}_1 + x_{1_0})](\tilde{x}_3 + x_{3_0}) + \tilde{u} + u_0\end{aligned}\quad (2.86)$$

e sua saída dada por:

$$y = \tilde{x}_1 + x_{1_0} \quad (2.87)$$

O sistema descrito pelas equações (2.86)-(2.87) está em conformidade com o tipo de sistema que foi assumido para aplicação da técnica de controle pela realimentação robusta, sistema (2.1), ou seja:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= f(\tilde{x}) + g(\tilde{x})\tilde{u} \\ y &= h(\tilde{x})\end{aligned}\quad (2.88)$$

onde

$$f(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 + x_{2_0} \\ \frac{1}{2km}(\tilde{x}_3 + x_{3_0}) \\ -\frac{R}{k}[c - (\tilde{x}_1 + x_{1_0})](\tilde{x}_3 + x_{3_0}) + u_0 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

$$g(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

$$h(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 + x_{1_0} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

sendo, então, este um sistema mono variável de ordem $n = 3$, e logo $m = p = 1$.

Pode-se então agora aplicar a técnica de controle de realimentação linearizante robusta sobre o sistema descrito pelas equações (2.86) e (2.87). Inicialmente deve ser verificado se o sistema pode ser linearizado pela realimentação, ou seja, se atende as condições descritas na proposição 2.3.1. Essa proposição é verificada para o sistema de levitação magnética de um pólo, processo que pode ser feito utilizando uma ferramenta de programação simbólica. Entretanto, por motivos de limitação devido ao padrão de formatação do documento de dissertação a aplicação da proposição 2.3.1 sobre o sistema em questão é omitida.

Uma vez que o sistema é linearizável pela realimentação, então segundo a proposição 2.3.2 existe uma função $\lambda(x)$ com grau relativo $r = n$, a partir da qual, procedendo como descrito na Seção

2.3, podem-se calcular as transformações de estado $\phi_r(x)$ e de entrada $u_r(x)$, que aplicadas ao sistema não-linear o linearizam em torno do ponto de equilíbrio desejado. E ainda, se a saída do sistema for uma composição linear dos estados do sistema, então o sistema será totalmente linearizável.

Escolhendo-se $\lambda(x) = x_1 = \tilde{x}_1 + x_{1_0}$, que possui grau relativo $r = n$, o sistema será totalmente linearizável, uma vez que a saída do sistema é justamente x_1 . Seguindo o procedimento descrito na Seção 2.3, inicia-se o projeto calculando a transformação não-linear, ou seja, a clássica. São calculados então $\phi_c(\tilde{x})$, $\alpha_c(\tilde{x})$ e $\beta_c(\tilde{x})$, necessários para o cálculo dos parâmetros da técnica robusta.

Resolvendo a equação (2.19) para sistema de levitação tem-se que:

$$\phi_c(x) = \begin{bmatrix} \lambda(x) \\ L_f \lambda(x) \\ L_f^2 \lambda(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 + x_{2_0} \\ \frac{1}{2km}(\tilde{x}_3 + x_{3_0}) + g \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Calculada a transformação de estado $\phi_c(\tilde{x})$, calcula-se, agora, os parâmetros $\alpha_c(\tilde{x})$ e $\beta_c(\tilde{x})$, é necessário, primeiro, calcular as matrizes M e N , conforme a equação (2.21). A formulação para o cálculo da matriz M é dada na proposição 2.3.2 e a formulação para o cálculo da N na equação (2.22), logo:

$$M = \begin{bmatrix} L_g L_f^2 \lambda(\tilde{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{km}(\tilde{x}_3 + x_{3_0}) \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

$$N = \begin{bmatrix} L_f \lambda(\tilde{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{km}(\tilde{x}_3 + x_{3_0}) \left(-\frac{R}{k}(c - \tilde{x}_1 - x_{1_0})(\tilde{x}_3 + x_{3_0}) + u_0 \right) \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

A partir da equação (2.21) é possível então calcular $\alpha_c(\tilde{x})$ e $\beta_c(\tilde{x})$ como:

$$\alpha_c(\tilde{x}) \triangleq -M^{-1}(\tilde{x})N(\tilde{x}) = \frac{R}{k}(c - \tilde{x}_1 - x_{1_0})(\tilde{x}_3 + x_{3_0}) - u_0 \quad (2.95)$$

$$\beta_c(\tilde{x}) \triangleq M^{-1}(x) = \frac{km}{\tilde{x}_3 + x_{3_0}} \quad (2.96)$$

Este último passo encerra o cálculo da transformação não-linear envolvida na técnica. O próximo passo é, portanto, o cálculo da transformação linear que agregada à não-linear, resulta nos parâmetros da técnica de realimentação linearizante robusta, a saber, $\phi_r(\tilde{x})$ e $u_r(\tilde{x}) = \alpha_r(\tilde{x}) + \beta_r(\tilde{x})v_r$. A transformação linear é calculada pela determinação das matrizes T , R e L . O equacionamento necessário para o cálculo dessas matrizes é dado pelas equações (2.45), (2.47) e (2.49), respectivamente.

Obtêm-se então:

$$T = \left. \frac{\partial \phi_c}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}) \right|_{\tilde{x}=\tilde{x}_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{km}x_{30} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

$$R = M^{-1}(\tilde{x}_0) = \frac{km}{x_{30}} \quad (2.98)$$

$$L = -M(\tilde{x}_0) \left. \frac{\partial \alpha_c}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}) \right|_{\tilde{x}=\tilde{x}_0} = \begin{bmatrix} \frac{R}{k^2m}x_{30} & 0 & -\frac{R}{k^2m}x_{30}(c - x_{10}) \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Finalizado o cálculo dos parâmetros da transformação linear pode-se então calcular os parâmetros da técnica de controle de realimentação linearizante robusta, o difeomorfismo $\phi_r(\tilde{x})$ (2.34) e a lei de controle $u_r(\tilde{x})$ (2.35). Iniciando pela transformação de estados $\phi_r(\tilde{x})$ que é dada pela equação (2.34), obtém-se:

$$\phi_r(x) = T^{-1}\phi_c(x) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 + x_{20} \\ \frac{(\tilde{x}_3 + x_{30})^2}{2x_{30}} - \frac{kmg}{x_{30}} \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

Para aplicação do controle de realimentação linearizante robusto utilizando o observador é necessário o cálculo do difeomorfismo inverso, ou seja, $\phi_r^{-1}(x_r)$. Para obtê-lo deve-se apenas resolver o equacionamento referente a difeomorfismo, equação (2.100), em função dos estados \tilde{x} . Existem duas soluções devido a existência de um termo quadrático no equacionamento do difeomorfismo, equação (2.100), e estão descritas abaixo:

$$\phi_r^{-1}(x_r) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} - x_{20} \\ +\sqrt{2x_{r3}x_{30} + 2kmg} - x_{30} \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

$$\phi_r^{-1}(x_r) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} - x_{20} \\ -\sqrt{2x_{r3}x_{30} + 2kmg} - x_{30} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

A opção nesse trabalho é pelo difeomorfismo inverso descrito na equação (2.101). A escolha é necessária, e como resultado espera-se que a região de validade do controle seja reduzida em relação a um caso onde existisse apenas uma solução, entretanto esta é uma questão que não é aprofundada nesse trabalho. O cálculo do difeomorfismo inverso $\phi_r^{-1}(x_r)$, em ambos os casos, apresenta um região onde sua validade é perdida, ou seja, onde a raiz presente no equacionamento gera números comple-

os, sendo então que seu domínio de validade para o controle é restrito à $x_{r3} > \frac{x_{30}}{2}$. Esse assunto é retomado no Capítulo 4.

Finalmente, calculam-se os parâmetros $\alpha_r(\tilde{x})$ e $\beta_r(\tilde{x})$ da lei de controle

$$u_r(\tilde{x}) = \alpha_r(\tilde{x}) + \beta_r(x)v_r \quad (2.103)$$

como:

$$\alpha_r(\tilde{x}) = \alpha_c(\tilde{x}) + \beta_c(\tilde{x})LT^{-1}\phi_c(\tilde{x}) = \frac{R}{k} \left[\left(\frac{c-x_{10}}{2} - \tilde{x}_1 \right) (\tilde{x}_3 + x_{30}) + \frac{1}{\tilde{x}_3 + x_{30}} (x_{30}^2 \tilde{x}_1 + (c-x_{10})mg) \right] \quad (2.104)$$

$$\beta_r(x) = \beta_c(x)R^{-1} = \frac{x_{30}}{\tilde{x}_3 + x_{30}} \quad (2.105)$$

Aplicando o difeomorfismo (2.102) e a lei de controle (2.103) ao sistema de levitação magnética tratado aqui obtém-se um sistema na forma descrita em (2.26), ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r v_r \\ y &= C_r x_r \end{aligned} \quad (2.106)$$

onde

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_{30}}{km} \\ \frac{R}{k}x_{30} & 0 & -\frac{R}{k}(c-x_{10}) \end{bmatrix} \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

Finaliza-se o projeto do controle de realimentação linearizante, entretanto nesse ponto é necessário projetar o controle v_r que estabilize o sistema linearizado, que é representado pela formulação (2.26). Como o projeto de v_r é feito sobre sistema linearizado em torno de um ponto de equilíbrio, permite que sejam utilizadas as ferramentas clássicas de controle linear. A opção feita para o caso da levitação magnética linearizada pela realimentação linearizante robusta, foi um controle de seguimento de trajetória. Essa escolha foi feita devido à característica de que ao se adicionar um integrador na malha de controle obtém-se erro zero em regime permanente e ainda para poder verificar o desempenho do observador quando se utilizam trajetórias como sinal de referência de entrada para o sistema. O procedimento para o projeto de tal controle é apresentado na Seção 2.5.2.

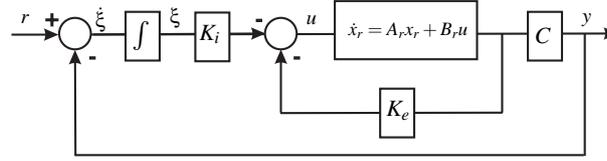


Figura 2.3: Controle de seguimento de trajetória

2.5.2 Controle Linear de Rastreamento de Trajetória Multivariável

Nesta Seção é apresentada a técnica de controle linear de seguimento de trajetória, escolhida para ser aplicada ao sistema linearizado pela realimentação linearizante robusta.

Considere o sistema dado pela equação (2.26), dado que o par (A_r, B_r) é controlável, então a estrutura de controle mostrada na figura 2.3 pode ser utilizada para fazer seguimento de trajetória, onde aplica-se sobre o erro de seguimento, definido como $\xi = r(t) - y_r(t)$, à ação integral. Sendo que $r(t)$ é a referência a ser seguida. Essa estrutura de controle é representada no espaço de estados como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}}_{x_a} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} A_r & 0 \\ -C_r & 0 \end{bmatrix}}_{A_a} - \underbrace{\begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_a} \underbrace{\begin{bmatrix} K_e & K_i \end{bmatrix}}_{K_a} \right) \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}}_{x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{E_a} r \quad (2.108)$$

onde K_e e K_i são o ganho de realimentação de estados e ganho de integração, respectivamente. O projeto de controle resume a calcular a matriz $K_a = [K_e \ K_i]$, tal que o sistema realimentado dado por:

$$\dot{x}_a = (A_a - B_a K_a) x_a + E_a r \quad (2.109)$$

seja estável. Sendo o par (A_a, B_a) controlável então é possível alocar os pólos de $(A_a - B_a K_a)$, utilizando alguma ferramenta linear de alocação de pólos.

2.6 Conclusão

Neste Capítulo apresentou-se a técnica de controle de linearização robusta. Inicialmente foi abordada a aplicação da técnica de controle de realimentação linearizante clássica em um sistema mono variável para facilitar a compreensão da técnica de realimentação linearizante. Posteriormente,

foi introduzida a formulação geral do projeto do controle de realimentação linearizante robusto. Na seqüência foi proposto um observador de alto ganho para ser aplicado ao controle de realimentação linearizante robusto que apresentou um resultado que garante ser possível obter estabilidade local e assintótica para um ajuste de um observador com estrutura semelhante ao observador de Luenberger. Entretanto, este resultado não considera o ajuste feito para o observador de alto ganho e sua propriedade de recuperação de performance. Sendo assim, é necessária uma prova formal considerando estas características. Todavia, para o caso onde o sistema é mono variável, foi apresentada uma discussão que fortalecesse as expectativas de se obter uma prova formal para o caso. Finalmente foi apresentada a aplicação da técnica ao sistema plataforma de teste, o sistema de levitação magnética de um pólo, assim como o projeto de um controle linear para estabilizar o sistema linearizado.

Capítulo 3

Energy Shaping IDA PCB

3.1 Introdução

Neste Capítulo apresenta-se a técnica de controle não-linear *energy shaping IDA PCB*¹ - *Interconnection and damping assignment passive based control*, controle de moldagem de energia com atribuição de interconexão e amortecimento baseado em passividade. Como esta técnica é baseada em passividade, logo, tem por objetivo estabilizar o sistema a ser controlado garantindo sua passividade e fazendo com que o mínimo estado de energia do sistema seja um ponto de equilíbrio desejado, [Ortega *et al.*, 2002,ii2001]. O *energy shaping* clássico se estende apenas a tratar os sistemas mecânicos e alguns sistemas que também apresentam dissipação finita, que justamente é o caso dos sistemas mecânicos, onde necessita-se apenas moldar a energia potencial do sistema. O *energy shaping* com a abordagem IDA supre essa deficiência e pode ser aplicado a uma larga faixa de sistemas.

A técnica de controle abordada neste Capítulo requer que o sistema seja representado na forma de um hamiltoniano de portas controladas, onde entradas e saídas são consideradas como as portas controláveis e o hamiltoniano representa a energia total do sistema [Ortega *et al.*, 2001]. Essa forma de representar o sistema evidencia as estruturas de interconexão e dissipação de energia do sistema.

Anteriormente ao *energy shaping IDA*, outras técnicas foram utilizadas, como, por exemplo, o *energy balancing*, ou balanceamento de energia, onde é necessário atender a uma equação que descreve o balanço de energia desejado através da definição de função de energia a ser associada, o que pode ser uma tarefa complexa. O *energy shaping IDA* é uma abordagem onde o controle é calculado diretamente de um conjunto de equações parciais diferenciais (PDEs), que embora sejam difíceis de

¹Por simplicidade os termos IDA e PCB são omitidos, referindo-se à técnica apenas por *energy shaping*.

serem solucionadas, permitem que a partir de conhecimento físico do sistema seja associado ao problema, através da atribuição de uma estrutura de interconexão e dissipação desejada, podendo facilitar a solução das PDEs. Além disso, a formulação das PDEs permite que sejam utilizadas ferramentas computacionais.

A técnica de *energy shaping*, em geral, necessita de acesso aos estados do sistema. Entretanto, na prática, essa situação não é comum. A mensuração de todos os estados por muitas vezes é inviável devido aos estados, em alguns casos, não possuírem sentido físico, o que tornaria difícil a mensuração e logo por dificuldades tecnológicas, que poderiam acarretar em custos indesejáveis. Para contornar essa situação, nesse trabalho será utilizado em conjunto com a técnica de *energy shaping*, um observador linear de Luenberger para estimar os estados do sistema a serem utilizados na lei de controle.

Na Seção 3.2 é apresentada a modelagem do sistema como PCH. A formulação da técnica de controle não-linear *energy shaping* IDA é apresentada na Seção 3.3. Na Seção 3.4 é apresentado o projeto do observador linear a ser utilizado em conjunto com a esta técnica de controle e na Seção 3.5 é apresentada a aplicação da técnica ao sistema de levitação magnética. Finalmente na Seção 3.6 é apresentada a conclusão do Capítulo.

3.2 Sistema de Hamiltoniano de Portas Controladas - PCH

Nesta Seção é introduzida a modelagem necessária para a aplicação da técnica de *energy shaping*, a modelagem na forma PCH. O sistema deve ser descrito na forma de hamiltoniano de portas controladas, definidas como a entrada e a saída do sistema, sendo que o produto interno entre as entradas pelas saídas tem conotação de potência. O hamiltoniano é uma função de energia que, naturalmente, tem o objetivo de descrever a energia envolvida no sistema. Essa representação do sistema explicita sua estrutura de interconexão e de dissipação e a dependência em relação à função de energia.

O sistema descrito como hamiltoniano de portas controladas é representado como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [\mathcal{J}(x) - \mathcal{R}(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u \\ y &= g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde a matriz anti-simétrica $\mathcal{J}(x)$, ou seja, $\mathcal{J}(x) = -\mathcal{J}^T(x)$, representa a estrutura de interconexão do sistema, a matriz semi-definida positiva $\mathcal{R}(x)$, ou seja, $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}^T(x) \geq 0$, representa a estrutura de dissipação do sistema, $H(x)$ é o hamiltoniano do sistema que representa a energia do sistema.

3.3 Desenvolvimento

O *energy shaping* IDA é fundamentado na equação de balanço de energia dada abaixo:

$$\underbrace{H(x(t)) - H(x(0))}_{\text{acumulada}} = \underbrace{\int_0^t u^T(s)y(s)ds}_{\text{fornecida}} - \underbrace{d(t)}_{\text{dissipação}} \quad (3.2)$$

onde $H(x)$ representa a energia do sistema, y representa saída, u representa a entrada do sistema, e ainda $d(t)$ representa a energia dissipada pelo sistema. Um sistema é dito passivo se atende à equação de balanço de energia (3.2), para uma função suave $H(x)$ e satisfaz $H(x_e) = 0$, onde x_e denota um ponto equilíbrio.

O sistema descrito como PCH (3.1) atende a equação de balanço de energia (3.2), uma vez que é descrito em função da energia envolvida no sistema explicitando a estrutura de interconexão e dissipação, assim como, as portas controladas cuja integral temporal do produto interno é equivalente à energia fornecida ao sistema.

O objetivo do controle baseado em passividade é projetar uma lei de controle $u = \beta(x) + v$ tal que a dinâmica do sistema em malha fechada satisfaça uma nova equação de balanço de energia da por:

$$H_d(x(t)) - H_d(x(0)) = \int_0^t v^T(s)y(s)ds - d_d(t) \quad (3.3)$$

onde $H_d(x)$ é a função energia total desejada. Esta função possui um mínimo em x_d , sendo x_d um equilíbrio desejado, y é uma saída passiva, o termo $d_d(t) \geq 0$ representa o termo de dissipação, que se refere os casos onde ocorre o aumento da taxa de convergência [Ortega *et al.*, 2001]. A atribuição de uma função de energia com mínimo em um valor desejado é, em geral, conhecida como *energy shaping*, em português poderia ser traduzido como: moldagem de energia.

Para a classe de sistemas que possuem dissipação finita, por exemplo, a classe dos sistemas mecânicos, é possível a partir da equação de balanço (3.2) achar uma função $\beta(x)$ tal que, para alguma função de energia a ser atribuída $H_a(x)$, satisfaça a relação:

$$-\int_0^t \beta^T(x(s))y(s)ds = H_a(x(t)) + \kappa \quad (3.4)$$

onde $\kappa \geq 0$ é uma constante, e, portanto a lei de controle $u = \beta(x) + v$, atende a equação de balanço energia desejada (3.3) assumindo que:

$$H_d(x) \triangleq H(x) + H_a(x) \quad (3.5)$$

e, além disso, que $H_d(x)$ possua mínimo no ponto equilíbrio desejado x_d , o que implica que será estável.

Existem dificuldades na aplicação desta metodologia, pois esta se restringe a uma classe de sistemas e além da necessidade de se definir uma $H_d(x)$ a partir de poucas informações.

Para contornar essa situação foi proposta a técnica de *energy shaping* IDA [Ortega *et al.*, 2001; Rodriguez *et al.*, 2000], que utiliza a modelagem do sistema sob a forma de PCH, sendo que o controle é obtido da solução de um conjunto de PDEs, e a formulação do problema permite incorporar informações sobre o sistema para simplificar a solução das PDEs. Especificamente, para o sistema descrito como PCH é possível escolher estruturas de interconexão e dissipação desejadas para a malha fechada, aumentando o grau de liberdade do controle.

O objetivo do *energy shaping* IDA é obter um sistema malha fechada da seguinte forma:

$$\dot{x} = [\mathcal{J}_d(x) - \mathcal{R}_d(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \quad (3.6)$$

sendo $\mathcal{J}_d(x) = -\mathcal{J}_d^T(x)$ a matriz de interconexão desejada, $\mathcal{R}_d(x) = \mathcal{R}_d(x) \geq 0$ a matriz de amortecimento desejada.

Considere inicialmente o seguinte conjunto de PDEs:

$$[\mathcal{J}(x) + \mathcal{J}_a(x) - \mathcal{R}(x) - \mathcal{R}_a(x)] \frac{\partial H_a}{\partial x}(x) = -[\mathcal{J}_a(x) - \mathcal{R}_a(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) \quad (3.7)$$

onde

$$\mathcal{J}_a(x) \triangleq \mathcal{J}_d(x) - \mathcal{J}(x), \quad \mathcal{R}_a(x) \triangleq \mathcal{R}_d(x) - \mathcal{R}(x) \quad (3.8)$$

são novos parâmetros de ajuste que podem auxiliar na solução das PDEs, de forma a obter um controle que estabilize-se o sistema em malha fechada. Verifica-se que substituindo o conjunto de PDEs (3.7) no sistema descrito em forma de PCH (3.1) obtém-se o sistema em malha fechada na forma de PCH (3.6).

Em [Ortega *et al.*, 2001; Rodriguez *et al.*, 2000] é apresentada uma proposição que será reproduzida na sequência. Para se obter um sistema em malha fechada na forma descrita na equação (3.6), dado que são conhecidos $\mathcal{J}(x, u)$, $\mathcal{R}(x)$, $H(x)$, $g(x)$ e o equilíbrio desejado $x_e \in \mathfrak{X}^n$, assume-se que é possível obter $\mathcal{R}_a(x)$, $\mathcal{J}_a(x)$ e, através da solução das PDEs (3.7), $\beta(x)$ e uma função vetorial $\frac{\partial H_a}{\partial x}(x) = K(x)$ tais que as condições que seguem sejam atendidas:

1. Preservação da estrutura - A estrutura de PCH deve ser mantida em malha fechada, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x) + \mathcal{J}_a(x) &= -[\mathcal{J}(x) + \mathcal{J}_a(x)]^T, \\ \mathcal{R}(x) + \mathcal{R}_a(x) &= [\mathcal{R}(x) + \mathcal{R}_a(x)]^T \end{aligned} \quad (3.9)$$

2. Integrabilidade - Para que $K(x)$, que é a solução das PDEs, seja realmente o gradiente da função escalar $H_d(x)$ é necessário que a seguinte condição de integrabilidade seja atingida:

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x) = \left[\frac{\partial K}{\partial x} \right]^T \quad (3.10)$$

3. Atribuição de equilíbrio - Para que x_d seja um equilíbrio do sistema é necessário que $K(x)$ verifique:

$$K(x_d) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x_d) \quad (3.11)$$

A partir da definição de $H_d(x)$, equação (3.5), é possível notar que essa condição é equivalente a:

$$\frac{\partial H_d}{\partial x}(x) = 0$$

ou seja, x_d deve ser um ponto de extremo energia da função de energia do sistema em malha fechada $H_d(x)$.

4. Estabilidade de Lyapunov - Para que x_d seja um equilíbrio estável, além da condição anterior, é necessário também que o jacobiano de $K(x)$, em x_d , satisfaça:

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x_d) > -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_d) \quad (3.12)$$

Novamente a partir da definição de $H_d(x)$, equação (3.5), é possível notar que essa condição é equivalente a:

$$\frac{\partial H_d}{\partial x}(x_d) > 0$$

ou seja, ela é equivalente a dizer que sendo x_d um ponto extremo de $H_d(x)$ ele é, também, um ponto de mínimo dessa função.

Atendidas essas condições, o sistema em malha fechada utilizando a lei de controle $u = \beta(x)$ terá a forma PCH desejada descrita na equação (3.6). Sendo ainda que x_d será um equilíbrio localmente estável do sistema realimentado, se o maior conjunto invariante, em malha fechada, contido

em:

$$\left\{ x \in \mathfrak{R}^n \mid \left[\frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \right]^T \mathcal{R}_d(x) \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) = 0 \right\} \quad (3.13)$$

for igual a x_d , então x_d será um equilíbrio assintoticamente estável. Essa condição é derivada do princípio da invariância de La Salle [Slotine e Li, 1991].

3.4 Observador de Estados

A técnica de *energy shaping*, em geral, necessita de acesso a todos os estados do sistema para que seja aplicada, entretanto, como mencionado anteriormente, a informação dos estados do sistema geralmente não está disponível. Para contornar essa situação propõe-se a utilização de observador linear de Luenberger para fazer a estimação dos estados do sistema.

O projeto do observador linear para estimar os estados do sistema não-linear é baseado na aproximação linear do sistema em torno de um ponto de equilíbrio. Portanto, esse observador terá uma região de validade que é limitada pela validade desta aproximação.

Inicialmente assume-se o cálculo da aproximação linear do sistema não-linear em torno de um ponto de equilíbrio x_0 . Consideram-se para o projeto do observador os sistemas não-lineares que podem ser modelados como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ representa os estados do sistema, $u \in \mathfrak{R}^m$ a entrada de controle, $y \in \mathfrak{R}^p$ a saída do sistema, $f(x)$ e $g(x)$ são campos vetoriais suaves, ou seja, contínuos e deriváveis, definidos em um subconjunto aberto de \mathfrak{R}^n .

O modelo linearizado do sistema não-linear é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=x_0} + \left[u \frac{\partial g}{\partial x}(x) \right] \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \\ B &= g(x_0) \\ C &= \left. \frac{\partial h}{\partial x}(x) \right|_{x=x_0} \end{aligned} \quad (3.16)$$

sendo $\tilde{x} \triangleq x - x_0$, $\tilde{u} \triangleq u - u_0$ e $\tilde{y} \triangleq y - y_0$.

Assumindo-se que o par (A, C) é observável, pode-se utilizar o observador de Luenberger (3.17), para estimar os estados do sistema linearizado.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\tilde{u} + K_o(\tilde{y} - \hat{y}) \quad (3.17)$$

onde \hat{x} é a estimativa dos estados linearizados, \hat{y} é a estimativa da saída e K_o é o ganho do observador. Para determinar como deve ser projetado o ganho do observador, escreve-se a dinâmica do erro entre o estado linearizado e o estado estimado, $e = \tilde{x} - \hat{x}$, dada por:

$$\dot{e} = A\tilde{x} + B\tilde{u} - A\hat{x} - B\tilde{u} - K_o C\tilde{y} - \hat{y} \quad (3.18)$$

sabendo-se que $\tilde{y} = C\tilde{x}$ e $\hat{y} = C\hat{x}$, obtém-se:

$$\dot{e} = (A - K_o C)e \quad (3.19)$$

Portanto, projetando o ganho do observador K_o tal que os pólos de $(A - K_o C)$ estejam no semi-plano complexo esquerdo, garante-se que o erro de estimação (3.19) convirja para zero, e dessa forma que a dinâmica do observador seja estável tendendo para os estados linearizados. O ganho K_o pode então ser projetado utilizando alguma ferramenta de controle linear, como alocação de pólos arbitrária, ou utilizando alguma norma.

Devido a este observador ser projetado para o sistema linearizado, quando aplicado para obter os estados do sistema não-linear ele terá sua validade limitada à região de validade da aproximação linear do sistema não-linear.

3.5 Aplicação

Nessa Seção apresenta-se a aplicação da técnica de *energy shaping* ao sistema de levitação magnética, apresentado na Seção 1.1. Inicialmente o sistema de levitação magnética será descrito na forma de PCH, depois será apresentado o projeto do controle *energy shaping* sem a abordagem IDA, ou seja, sem considerar modificações na estrutura de interconexão e dissipação. Depois se apresenta o projeto do *energy shaping* com abordagem IDA. Adicionalmente apresenta-se o projeto do observador linear para ser aplicado com esta técnica. Esta aplicação foi proposta em [Ortega *et al.*, 2001; Rodriguez *et al.*, 2000].

O primeiro passo para aplicar a técnica de *energy shaping* é escrever na forma de PCH o sistema de levitação magnético descrito na Seção 1.1 é reproduzido aqui como:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} + \frac{R}{k}(c - \theta)\lambda &= V \\ \frac{1}{2k}\lambda^2 - mg &= m\ddot{\theta}\end{aligned}$$

Para se escrever o sistema na forma PCH, considere inicialmente a seguinte escolha de estados onde $x = [\lambda \ \theta \ m\dot{\theta}]$. É necessário, agora, definir o hamiltoniano do sistema, ou seja, a função que descreve a energia total do sistema. Na dinâmica do sistema estão envolvidas a energia magnética armazenada no indutor, a energia potencial e a cinética, referente à dinâmica da esfera. Portanto o hamiltoniano pode ser escrito como:

$$H(x) = \frac{1}{2k}(c - x_2)x_1^2 + \frac{1}{2m}x_3^2 + mgx_2 \quad (3.20)$$

Calculando-se o o gradiente do hamiltoniano:

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x) = \left[\frac{1}{k}(c - x_2)x_1 \quad -\frac{1}{2k}x_1^2 + mg \quad \frac{1}{m}x_3 \right] \quad (3.21)$$

obtém-se a seguinte representação do sistema em PCH:

$$\dot{x} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_J - \underbrace{\begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \right) \frac{\partial H}{\partial x}(x) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_g u \quad (3.22)$$

O ponto de equilíbrio desejado é escolhido em função de uma posição desejada, $x_{2,d}$, onde se deseja manter a esfera levitando, como $[\sqrt{2kmg} \ x_2 \ 0]^T$.

Definidos o sistema na forma PCH e o ponto de equilíbrio desejado, aplica-se a técnica de *energy shaping* sem abordagem IDA. Considere inicialmente o equacionamento das PDEs, equação (3.7):

$$\begin{aligned}-RK_1(x) &= \beta(x) \\ K_2(x) &= 0 \\ K_3(x) &= 0\end{aligned} \quad (3.23)$$

sendo

$$K(x) = \begin{bmatrix} K_1(x) & K_2(x) & K_3(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial H_a(x)}{\partial x}$$

Analisando o conjunto de PDEs (3.23) pode verificar que uma solução para $H_a(x)$ depende unicamente de x_1 . Portanto, a função de energia desejada que descreva a energia total do sistema será dada por:

$$H_d(x) = \frac{1}{2k}(1-x_2)x_1^2 + \frac{1}{2m}x_3^2 + mgx_2 + H_a(x_1) \quad (3.24)$$

Para se determinar $H_a(x)$ e a lei de controle $u(x) = \beta(x)$ que estabiliza o sistema e o coloque na forma desejada, é necessário solucionar as PDEs (3.23) atendendo às condições descritas anteriormente. Mesmo sendo possível atribuir o equilíbrio desejado, ao analisar-se o hessiano de $H_d(x)$, dado por:

$$\frac{\partial^2 H_d}{\partial x} (x) = \begin{bmatrix} \frac{(1-x_2)}{k} + \frac{\partial^2 H_a(x_1)}{\partial x_1^2} & -\frac{x_1}{k} & 0 \\ -\frac{x_1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

pode-se verificar que ele é indefinido para qualquer que seja $H_a(x)$, sendo impossível atender a condição 3 referente à estabilidade de Lyapunov.

Para solucionar este problema, que é derivado da falta de acoplamento entre os sistemas mecânico e elétrico, é necessário propor uma nova estrutura de interconexão. O sistema mecânico não possui nenhum termo dissipativo, portanto não tem como dissipar a energia contida nele. Entretanto o sistema elétrico possui a resistência elétrica que é um termo dissipativo. É possível acoplar estes sistemas para dissipar, também, a energia envolvida no sistema elétrico. Em [Ortega *et al.*, 2001; Rodriguez *et al.*, 2000] é proposta para a malha fechada a seguinte estrutura de interconexão:

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

onde α é uma constante a ser ajustada. Logo a matriz de interconexão a ser atribuída J_a é definida como:

$$J_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

onde α é uma constante.

Pode se então reescrever as PDEs como:

$$\begin{aligned} -RK_1(x) &= \frac{\alpha}{m}x_3 + \beta(x) \\ K_3(x) &= 0 \\ \alpha K_1(x) - K_2(x) &= -\frac{\alpha}{k}(1-x_2)x_1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Analisando as PDEs (3.28) verifica-se a primeira equação da PDE define o controle $u = \beta(x)$. A partir da solução da última PDE do conjunto de PDEs (3.28), e utilizando alguma ferramenta computacional de matemática simbólica, obtém-se a expressão que segue para $H_a(x)$:

$$H_a(x) = \frac{1}{6k\alpha}x_1^3 + \frac{1}{2k}x_1^2(x_2 - 1) + \Phi\left(x_2 + \frac{1}{\alpha}x_1\right) \quad (3.29)$$

onde $\Phi(\cdot)$ é uma função arbitrária contínua e diferenciável, que deve ser escolhida de forma a atender as condições que garantam que x_d é um equilíbrio estável da nova função de energia desejada.

Resumidamente têm-se:

1. x_d será um equilíbrio de H_d se $\left. \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \right|_{x=x_0} = 0$;
2. e será estável se em adicional $\left. \frac{\partial^2 H_d}{\partial x^2}(x) \right|_{x=x_0} > 0$.

Considerando que a função de energia seja calculada como:

$$H_d(x) = H(x) + H_a(x) = \frac{1}{6ka}x_1^3 + \frac{1}{2m}x_3^2 + mgx_2 + \Phi\left(x_2 + \frac{1}{\alpha}x_1\right) \quad (3.30)$$

e definindo:

$$\begin{aligned} \omega &= x_2 + \frac{1}{\alpha}x_1 \\ \omega_0 &= x_{2_0} + \frac{1}{\alpha}x_{1_0} \end{aligned} \quad (3.31)$$

então, a partir da primeira condição, referente à atribuição do equilíbrio desejado, infere-se que:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}(\omega) \right|_{\substack{x_1=x_{1_0} \\ x_2=x_{2_0}}} = -mg \quad (3.32)$$

Uma possível escolha, conforme proposto em [Ortega *et al.*, 2001], para $\Phi(\cdot)$ que a atende a condição dada pela equação (3.32):

$$\Phi(\omega) = -mg(\omega - \omega_0) + \frac{\Gamma}{2}(\omega - \omega_0)^2 \quad (3.33)$$

que pode ser escrita como:

$$\Phi\left(x_2 + \frac{1}{\alpha}x_1\right) = -mg\left(\tilde{x}_2 + \frac{1}{\alpha}\tilde{x}_1\right) + \frac{\Gamma}{2}\left(\tilde{x}_2 + \frac{1}{\alpha}\tilde{x}_1\right)^2 \quad (3.34)$$

onde $\tilde{x}_i \triangleq x_i - x_{d_i}$, sendo ainda α e Γ constantes a serem ajustadas. Verifica-se que cálculo gradiente de $H_d(x)$ no equilíbrio escolhido é igual à zero para a escolha feita de $\Phi(\cdot)$. Com isso, o equilíbrio desejado foi atribuído ao sistema. Agora é necessário verificar se esse equilíbrio será estável e para quais condições, verificando se o hessiano de $H_d(x)$ é definido positivo no ponto de equilíbrio. O hessiano de $H_d(x)$ é dado por:

$$\left.\frac{\partial^2 H_d}{\partial x^2}(x)\right|_{x=x_0} = \begin{bmatrix} \frac{x_{10}\alpha + \Gamma k}{k\alpha^2} & \frac{\Gamma}{\alpha} & 0 \\ \frac{\Gamma}{\alpha} & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

O hessiano de $H_d(x)$ será definido positivo para $\alpha, \Gamma > 0$, e assim garante-se que o equilíbrio desejado seja estável.

Portanto para escolha feita de $\Phi(\cdot)$ e das constantes $\alpha, \Gamma > 0$, concluí-se que o equilíbrio desejado será estável em malha fechada utilizando a lei de controle $u = \beta(x)$. Sendo que $\beta(x)$ é calculado a partir do conjunto de PDEs (3.28) como:

$$u = \frac{R}{k}(c - x_2)x_1 - K_p\left(\frac{1}{\alpha}\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2\right) - K_v x_3 - \frac{R}{2k\alpha}(x_1^2 - 2kmg) \quad (3.36)$$

onde $K_p \triangleq \frac{R\Gamma}{\alpha}$ e $K_v \triangleq \frac{\alpha}{m}$ sendo a estabilidade garantida para $\alpha, \Gamma > 0$. Para ilustrar alteração da matriz de amortecimento, propõe-se eliminar o termo quadrático em x_1 , da lei de controle (3.36), que pode ser indesejado, caso resulte na saturação do controle. Conforme proposto em [Ortega *et al.*, 2001; Rodriguez *et al.*, 2000], pode-se eliminar este termo através da atribuição da seguinte matriz de amortecimento:

$$\mathcal{R}_\alpha = \begin{bmatrix} -R & 0 & 0 \\ 0 & R_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

onde R_a é uma constante positiva a ser ajustada. O amortecimento foi removido do sistema elétrico e adicionado ao subsistema mecânico.

Escrevendo-se as PDEs para esse caso, obtém-se:

$$\begin{aligned} -\alpha K_3(x) &= -\frac{R}{k}(c-x_2)x_1 + \frac{\alpha}{m}x_3 + \beta(x) \\ -R_a K_2(x) + K_3(x) &= -\frac{R_a}{2k}(x_1^2 + mg) \\ \alpha K_1(x) - K_2(x) &= -\frac{\alpha}{R}(c-x_2)x_1 \end{aligned} \quad (3.38)$$

A partir das duas últimas equações das PDEs (3.38) é possível calcular a função $H_a(x)$ como:

$$H_a(x) = \frac{1}{6k\alpha}x_1^3 - \frac{1}{2k}(c-x_2)x_1^2 - mgx_2 - \frac{1}{\alpha}mgx_1 + \Phi(x_3 + \frac{1}{R_a}x_2 + \frac{1}{R_a\alpha}x_1) \quad (3.39)$$

e logo obtém-se:

$$H_d(x) = H(x) + H_a(x) = \frac{1}{6k\alpha}x_1^3 - \frac{1}{\alpha}mgx_1 + \frac{1}{2m}x_2^2 + \Phi(x_3 + \frac{1}{R_a}x_2 + \frac{1}{R_a\alpha}x_1) \quad (3.40)$$

Seguindo os mesmos passos feitos para o caso anterior, considerando inicialmente a condição de atribuição do equilíbrio à função desejada e para este caso:

$$\begin{aligned} \omega &= x_3 + \frac{1}{R_a}x_2 + \frac{1}{R_a\alpha}x_1 \\ \omega_0 &= x_{3_0} + \frac{1}{R_a}x_{2_0} + \frac{1}{R_a\alpha}x_{1_0} \end{aligned} \quad (3.41)$$

obtém-se que é necessário que:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}(\omega) \right|_{x=x_0} = 0 \quad (3.42)$$

Uma possível escolha para $\Phi(\cdot)$ que satisfaça (3.42) é dada por:

$$\Phi(\omega) = \frac{\Gamma R_a}{2\alpha}(\omega - \omega_0)^2 \quad (3.43)$$

que pode ser reescrita como:

$$\Phi(x_3 + \frac{1}{R_a}x_2 + \frac{1}{R_a\alpha}x_1) = \frac{\Gamma R_a}{2\alpha}(\tilde{x}_3 + \frac{1}{R_a}\tilde{x}_2 + \frac{1}{R_a\alpha}\tilde{x}_1)^2 \quad (3.44)$$

onde $\tilde{x}_i \triangleq x_i - x_{d_i}$, sendo α , Γ e R_a constantes a serem ajustadas. Da mesma forma como foi citado para caso anterior, verificar-se-á que o cálculo do gradiente de $H_d(x)$ no equilíbrio escolhido é igual à zero para a escolha feita de $\Phi(\cdot)$. Com isso o equilíbrio desejado foi atribuído ao sistema.

Através do hessiano de $H_d(x)$ verifica-se para quais condições o equilíbrio é estável. O hessiano

de $H_d(x)$ é dado por:

$$H_d(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_{1_0} + \alpha^3 R_a + \Gamma k}{k \alpha^4 R_a} & \frac{\Gamma}{R_a \alpha^3} & \frac{\Gamma}{\alpha^3} \\ \frac{\Gamma}{R_a \alpha^3} & \frac{\Gamma}{R_a \alpha^2} & \frac{\Gamma}{\alpha^2} \\ \frac{\Gamma}{\alpha^3} & \frac{\Gamma}{\alpha^2} & \frac{\alpha^2 + \Gamma R_a m}{m \alpha^2} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

O hessiano de $H_d(x)$ é definido positivo para $\alpha, R_a, \Gamma > 0$, e assim garante-se que o equilíbrio desejado seja estável.

Portanto para escolha feita de $\Phi(\cdot)$ e das constantes $\alpha, R_a, \Gamma > 0$, conclui-se que o equilíbrio desejado será estável em malha fechada utilizando a lei de controle $u = \beta(x)$. Sendo que $\beta(x)$ é calculado a partir da primeira equação do conjunto de PDEs (3.38) como:

$$u = \frac{R}{k}(c - x_2)x_1 - K_p \left(\frac{1}{\alpha} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \right) - K_v x_3 \quad (3.46)$$

onde, agora, $K_p \triangleq \frac{\Gamma}{\alpha}$ e $K_v \triangleq \frac{\alpha}{m} + \frac{R_a \Gamma}{\alpha}$, sendo $\alpha, \Gamma, R_a > 0$.

A aplicação da técnica, portanto, pode ser sumarizada como:

1. descrever o sistema na forma de PCH: esta é uma tarefa complexa devido às restrições impostas para construção das matrizes $\mathcal{J}(x)$ e $\mathcal{R}(x)$, ou seja, a matriz $\mathcal{J}(x)$ deve ser anti-simétrica e $\mathcal{R}(x)$ definida positiva. Portanto, modelos diferentes e escolhas de estados diferentes podem facilitar essa tarefa;
2. análise da necessidade de alterar as matrizes de $\mathcal{J}(x)$ e $\mathcal{R}(x)$, definindo caso necessário as respectivas matrizes a serem atribuídas;
3. equacionar as PDEs e solucioná-las obtendo a função de energia a ser atribuída $H_a(x)$ e a lei de controle $u = \beta(x)$, finalizando assim o procedimento de aplicação da técnica.

Finalizada a aplicação do *energy shaping* sobre o sistema de levitação magnética, inicia-se, agora, o projeto do observador linear para ser utilizado em conjunto com esta técnica.

Considere inicialmente o cálculo da aproximação linear do sistema de levitação magnética, cujo modelo matemático foi desenvolvido na Seção 1.1, dado como:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} + \frac{R}{k}(c - \theta) &= V \\ \frac{1}{2k}\lambda^2 - mg &= m\ddot{\theta} \end{aligned}$$

utilizando-se a mesma representação de estados utilizada para aplicação do controle de *energy shaping*, $x = [\lambda \ \theta \ m\dot{\theta}]$. Pode-se então construir a modelagem descrita pela equação (3.14), como;

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{k}(c - x_2)x_1 + u \\ \frac{1}{m}x_3 \\ \frac{1}{2k}x_1^2 - mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.47)$$

Agora se calcula a aproximação linear do sistema de levitação magnética a partir do sistema descrito pela equação (3.47), conforme foi descrito na Seção 3.4, como:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{k}(c - x_{2_0}) & \frac{R}{k}x_{1_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{k}x_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Com a informação das matrizes A , B e C pode-se então construir um observador linear, cuja estrutura é descrita na equação (3.17). Uma proposta de projeto do ganho do observador é apresentada no Capítulo 4.

3.6 Conclusão

Neste Capítulo apresentou-se a técnica de controle *energy shaping* IDA, que é baseada em passividade. Posteriormente, foi apresentado um observador de Luenberger para ser utilizado com esta técnica de controle. Finalmente aplicou-se esta técnica ao sistema plataforma de teste, o sistema de levitação magnética de um pólo.

Capítulo 4

Simulações e Análises

4.1 Introdução

Este Capítulo é dedicado à apresentação dos resultados de simulações que foram realizadas para mostrar o desempenho da aplicação sobre o sistema de levitação magnética de um pólo das técnicas de controle apresentadas nesse trabalho: controle de realimentação linearizante robusto com observador de alto ganho e controle de *energy shaping* com observador de Luenberger. Além do resultado das simulações, são apresentadas análises qualitativas destas técnicas com o objetivo de traçar um paralelo entre elas, explicitando suas características, de forma a auxiliar a um projetista na escolha entre estas abordagens para um caso de controle.

O Capítulo é iniciado descrevendo os dados referentes aos parâmetros do sistema de levitação, posteriormente mostrando-se o ajuste dos controladores em conjunto com seus respectivos observadores. Inicia-se pelo controle de realimentação linearizante robusta, finalizando com o controle *energy shaping*.

4.2 Parâmetros do Sistema de Levitação Magnética de um Pólos

O sistema de levitação magnética de um pólo utilizado nas simulações foi modelado conforme apresentado em [Rodríguez *et al.*, 2000], e os parâmetros utilizados são provenientes da mesma referência e são dispostos na tabela que segue:

Tabela 4.1: Parâmetros do sistema de levitação magnética de um pólo

Grandezas	Valor
m [kg]	0,0844
R [Ω]	2,52
g [m/s^2]	9,81
k [Nm/A]	$6,4042 \times 10^{-5}$
c [m]	0,005

4.3 Ajuste do controle de Realimentação Linearizante Robusto

A aplicação do controle de realimentação linearizante robusto foi desenvolvida na Seção 2.5, e como pode ser verificado não é necessário nenhum ajuste específico, o que deve ser ajustado é o ganho do controle linear de seguimento de trajetória, proposto na Seção 2.5.2, e o ganho do observador proposto na Seção 2.4.

Inicialmente, considere o sistema de levitação magnética de um pólo descrito no espaço de estados pelo seu modelo linearizado definido em (2.106), com parâmetros apresentados na tabela 4.1:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1905.2 \\ 405.22 & 0 & -196.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.1)$$

Aplicando-se a técnica de controle de seguimento de trajetória apresentado na Seção 2.5.2, constrói-se, inicialmente, o sistema aumentado dado pela equação (2.108), como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1905.2 & 0 \\ 405.22 & 0 & -196.75 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.2)$$

O próximo passo é projetar o ganho K_a , tal que o sistema (4.2) seja estável. O método escolhido foi a alocação arbitrária de pólos. Através de simulação foram alocados, arbitrariamente, os pólos em $[-100 \quad -90 \quad -95 \quad -85]$, e o ganho K_a foi determinado como:

$$K_a = \begin{bmatrix} 2060.8 & 26.913 & 173.25 & -38145 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

deve-se ter em mente que, em se tratando de um sistema não-linear, esse ajuste do ganho do contro-

lador linear não é trivial e a alocação tem validade local. Adicionalmente, o sinal de controle u_r é saturado no intervalo de $[0, 10]$ para evitar o efeito do fenômeno de *peaking*, descrito na Seção 2.4.

O observador (2.62), utilizado nas simulações, foi projetado escolhendo os coeficientes do polinômio (2.54), tal que suas raízes sejam $[-1 \ -2 \ -3]$, e o valor do parâmetro ε foi determinado através de simulação como $\varepsilon = 0,001$.

Em alguns estudos de caso, diferentes ajustes serão considerados para evidenciar melhor as características do controlador.

4.4 Ajuste do Controlador de *Energy Shaping*

A aplicação da técnica de controle *Energy Shaping* sobre sistema de levitação magnética de um pólo é mostrada na Seção 3.5. Analisando as leis de controle (3.36) e (3.46) pode-se verificar que é necessário ajustar os ganhos K_p , α para ambas e, também, o parâmetro R_a para (3.46). Estes parâmetros foram ajustados através da análise do desempenho do sistema em malha fechada em simulação e estão apresentados na tabela 4.2.

Tabela 4.2: Ganho ajustados para leis de controle de energy shaping

		Γ	α	R_a
u_1 (3.36)		100	10	- -
u_2 (3.46)	u_{2a}	200	4	3
	u_{2b}	200	4	6

Para calcular o ganho do observador considera-se inicialmente o cálculo do modelo linearizado do sistema levitação magnética dado pela equação (3.48). Utilizando os dados do sistema descritos na tabela 4.1, como:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} -196.75 & 405.22 & 0 \\ 0 & 0 & 11.848 \\ 160.8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para este sistema linearizado pode-se projetar um observador com a estrutura descrita na equação (3.17). É, portanto, necessário calcular o ganho deste observador, K_o . Ele é ajustado alocando-se

arbitrariamente os pólos de $(A - K_0C)$ em $[-850 \quad -410 \quad -280]$, objetivando que sejam aproximadamente cinco vezes mais rápidos que os pólos do modelo linearizado do sistema de levitação magnética, equação (4.4). Para esta alocação de pólos o ganho foi projetado como:

$$K_0 = \begin{bmatrix} 6492.7 \\ 1343.3 \\ 36885 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

4.5 Simulações

4.5.1 Controle Linearizante Robusto

Nesta Seção são mostrados os resultados de estudos de casos e simulações feitas utilizando o controle de realimentação linearizante robusta com observador de alto ganho aplicado ao sistema de levitação magnética de um pólo abordado neste trabalho. O objetivo é verificar as características teóricas descritas sobre a técnica de controle. Inicialmente é realizado um estudo de caso para verificar a influência do termo B_cLT^{-1} que aparece na dinâmica do erro de estimação e_r e adicionalmente é feito um comentário sobre a restrição relativa à transformação inversa $\phi_r^{-1}(x_r)$, apresentada na Seção 2.5. Posteriormente, em outro estudo de caso, discute-se a necessidade de saturar o controle para evitar o fenômeno de *peaking*. Em seguida é mostrado como o sistema controlado pelo controle de realimentação linearizante robusto, usando uma abordagem de realimentação dinâmica da saída se comporta, tendendo ao desempenho do sistema controlado pela realimentação de estados. Finalmente trata-se da situação de presença de perturbação paramétrica, para avaliar se o controle apresenta algum grau de robustez.

Estudo de caso 1 Para verificar a influência do termo B_cLT^{-1} sobre a dinâmica do erro de estimação (2.63), considere aplicação das relações (2.30) sobre a dinâmica do erro dada por (2.63), ou seja:

$$\dot{e}_r = T^{-1}(A_c - H_cC_c + B_cLT^{-1})Te_r + B_r\beta_r^{-1}(x)\delta_r(x, \hat{x}) \quad (4.6)$$

pode-se verificar que a dinâmica do erro de estimação e_r difere do erro de estimação e_c , dado em (2.57), pelo termo B_cLT^{-1} . Entretanto a partir de ambas as equações de erro estimado (2.68) e (2.71) sabe-se que o termo B_cLT^{-1} é multiplicado por ε . Portanto, para se verificar o efeito do termo B_cLT^{-1} frente à variação do parâmetro ε sobre o erro de estimação e_r faz-se um paralelo entre as dinâmicas

Tabela 4.3: Comparação entre a dinâmica do erro dos observadores de alto ganho aplicado à técnica de linearização clássica e robusta.

		Parâmetro ε		
		0.1	0.001	0.0001
Pólos	Dinâmica			
	$(A_c - H_c C_c)$	-30	-3000	-30000
		-20	-2000	-20000
		-10	-1000	-10000
	$(A_r - H_r C_r)$	$-141,77 + 20,121i$	-3158,9	-30191
		$-141,77 - 20,121i$	$-1518,9 + 526,47i$	-19382
26.804		$-1518,9 - 526,47i$	-10623	

$(A_r - H_r C_r)$ e $(A_c - H_c C_c)$, comparando seus pólos. Para tanto, considere a tabela 4.3, onde estão relacionados os pólos referentes a essas dinâmicas com a variação do parâmetro ε .

Analisando-se a tabela (4.3) pode-se verificar que o termo $B_c L T^{-1}$ pode até instabilizar a dinâmica do erro, como acontece para $\varepsilon = 1$. Entretanto, à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$ a dinâmica de e_r tende a ser similar a dinâmica de e_c . Deve-se observar que o ajuste do observador influi na região de atração do equilíbrio do sistema, podendo torná-la pequena.

Realizada a análise do termo $B_c L T^{-1}$ sobre a dinâmica do sistema de malha fechada, agora foca-se no caso da restrição de validade do difeomorfismo inverso $\phi_r^{-1}(x_r)$, equação (2.101). Como mencionado na Seção 2.5, a validade desta função é restringida a $x_{r3} > \frac{x_{30}}{2}$, para ser utilizada no controle. O estado x_{r3} é estimado pelo observador de alto ganho e utilizado para calcular a estimativa \tilde{x}_3 do estado x_3 através do difeomorfismo inverso. Existem duas opções para implementar a restrição necessária. A primeira seria restringir o valor da estimativa \tilde{x}_{r3} apenas para o cálculo de \tilde{x}_3 pelo difeomorfismo inverso $\phi_r^{-1}(x)$. A segunda seria restringir o valor da estimativa \tilde{x}_{r3} para todo o sistema, ou seja, tanto para o cálculo de \tilde{x}_{r3} , como na dinâmica do observador. Foram implementadas ambas as abordagens e simulados diversos casos, nos quais a primeira apresentou melhores resultados, referente à região de validade do controle. E portanto, as simulações apresentadas nesse trabalho são referentes a primeira abordagem. Todavia, assume-se que esta questão necessita de maior investigação, tendo em vista que a opção foi feita empiricamente para um caso específico.

Para tanto, foi realizado uma simulação variando a trajetória de posição rastreada em degraus de diferentes amplitudes. Foi considerado como condição inicial para o sistema, a esfera posicionada em $-2,5mm$, com velocidade zero e o fluxo gerado pela bobina igual ao fluxo de equilíbrio, ou seja, $[x_{10} \ x_{20} \ x_{30}] = [-0,0025 \ 0 \ \sqrt{2kmg}]$, considerando o sistema internacional de medidas. A condição inicial do observador foi definida como zero.

Estudo de caso 2 O fenômeno de *peaking* como explicado na Seção 2.4 é uma característica intrínseca do observador de alto ganho. Esse fenômeno pode degradar o comportamento do sistema em malha fechada, ou até mesmo instabilizá-lo. Para ilustrar este caso, foi simulado um caso onde se assumiu o ajuste do controlador apresentado na Seção 4.3, porém sem saturação no controle. Sob esta condição, o fenômeno de *peaking* ocorre e se manifesta instabilizando os sistemas como pode ser visto nas figuras (4.1) e (4.2) onde se representam, respectivamente, a trajetória de posição e o sinal de controle para caso em questão. Para contornar esta situação, gerada pela presença do fenômeno de *peaking*, utiliza-se a saturação da lei de controle u_r conforme descrito na Seção 4.3. Outra possibilidade seria alterar o valor de ε e reajustar o controle, contudo podendo penalizar o desempenho do controle em malha fechada. As simulações foram realizadas variando a trajetória de posição rastreada em degraus de diferentes amplitudes, considerado como condição inicial para o sistema, a esfera posicionada em $-2,5\text{mm}$, com velocidade zero e o fluxo gerado pela bobina igual ao fluxo de equilíbrio, ou seja, $[x_{1_0} \ x_{2_0} \ x_{3_0}] = [-0,0025 \ 0 \ \sqrt{2kmg}]$, considerando o sistema internacional de medidas. A condição inicial do observador foi definida como zero. Os próximos estudos de caso mostram o sistema controlado utilizando a saturação.

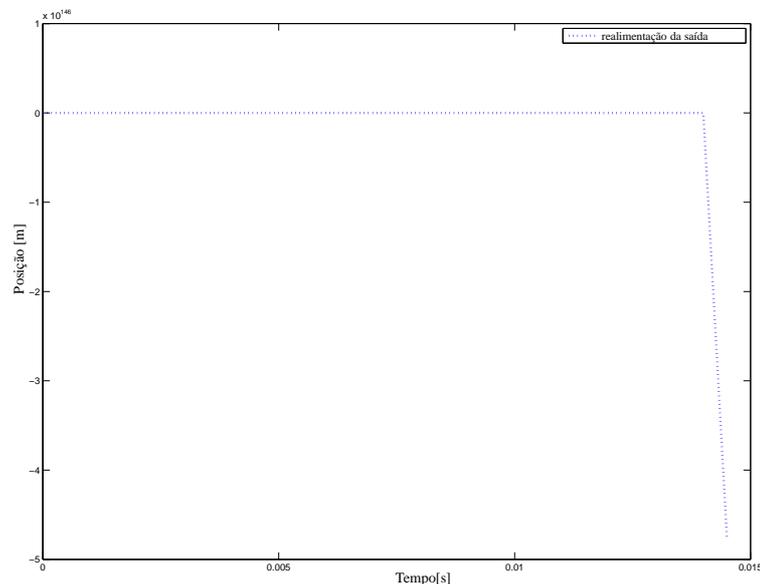


Figura 4.1: Gráfico da posição da esfera do sistema, sem saturação no controle, cujo comportamento se mostrou instável.

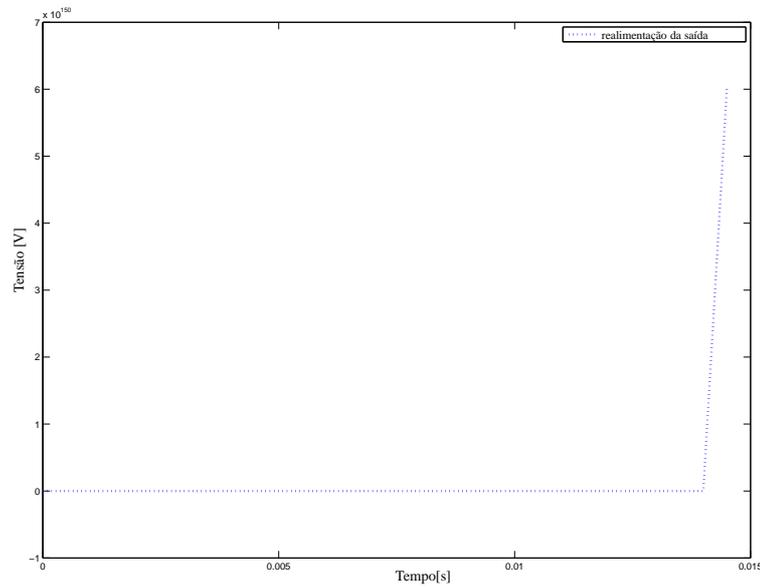


Figura 4.2: Gráfico do sinal de controle do sistema, sem saturação no controle, cujo comportamento se mostrou instável.

Estudo de caso 3 Pretende-se, neste estudo, mostrar e avaliar o desempenho do sistema em malha fechada utilizando o controlador de realimentação robusta com o observador de alto ganho. Para avaliar seu desempenho são mostrados juntamente com os resultados de suas simulações, os resultados das simulações do sistema controlado utilizando os estados verdadeiros, considerando os mesmos ajustes para os dois, sendo estes ajustes apresentados na Seção 4.3. Deseja-se mostrar que o comportamento do sistema realimentado pela saída tende para o sistema realimentado pelos estados verdadeiros e também avaliar a região de validade do controle. Para tanto, foi realizada uma simulação variando a trajetória de posição rastreada em degraus de diferentes amplitudes. Foi considerado como condição inicial para o sistema, a esfera posicionada em $-2,5\text{mm}$, com velocidade zero e o fluxo gerado pela bobina igual ao fluxo de equilíbrio, ou seja, $[x_{1_0} \ x_{2_0} \ x_{3_0}] = [-0,0025 \ 0 \ \sqrt{2\text{kmg}}]$, considerando o sistema internacional de medidas. A condição inicial do observador foi definida como zero. Nas figuras (4.3)-(4.6) mostra-se o resultado das simulações.

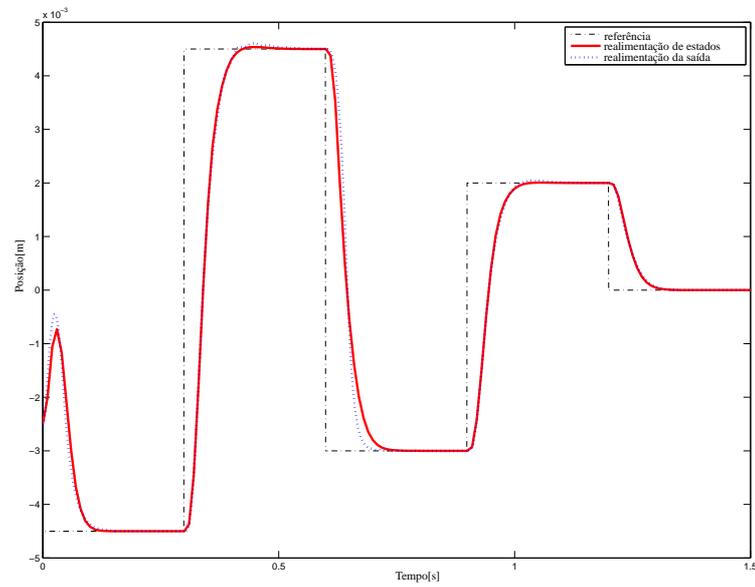


Figura 4.3: Gráfico da trajetória de posição da esfera do sistema controlado pela realimentação de estados e pela realimentação da saída, com $x_{10} = -2,5\text{mm}$.

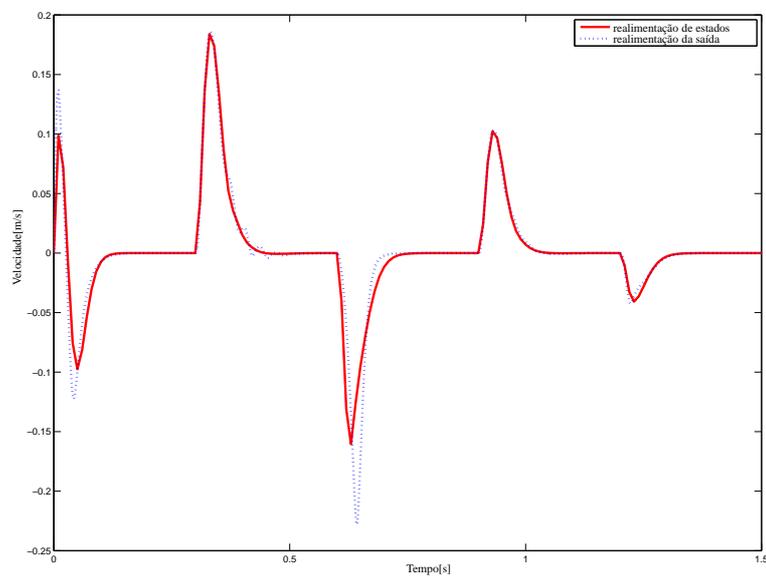


Figura 4.4: Gráfico da trajetória de velocidade do sistema controlado pela realimentação de estados e pela realimentação da saída, com $x_{10} = -2,5\text{mm}$.

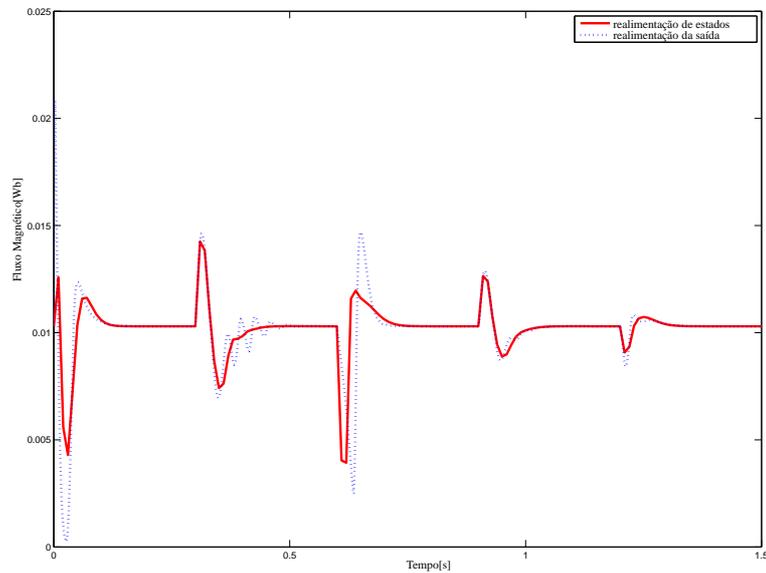


Figura 4.5: Gráfico da trajetória do fluxo magnético do sistema controlado pela realimentação de estados e pela realimentação da saída, com $x_{10} = -2,5\text{mm}$.

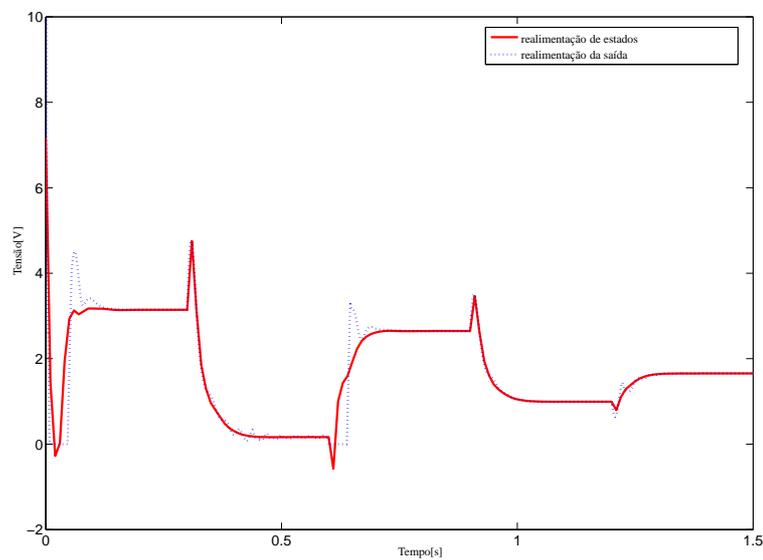


Figura 4.6: Gráfico do sinal de controle do sistema controlado pela realimentação de estados e pela realimentação da saída, com $x_{10} = -2,5\text{mm}$.

Analisando as figuras (4.3)-(4.6) pode-se verificar que o comportamento dinâmico do sistema controlado pela realimentação linearizante da saída com observador de alto ganho tende para o com-

portamento dinâmica do sistema controlado pela realimentação linearizante dos estados reais do sistema. Com relação à região de atração, o que se deseja mostrar, é a amplitude com que os sinais variam, mostrando que existe uma região válida para o controle. Porém, isso não significa que essa seja a região de atração do equilíbrio do sistema em malha fechada.

Estudo de caso 4 Neste último estudo o objetivo é verificar se o controle apresenta algum grau de robustez na presença de perturbação paramétrica. Para isso, considera-se o ajuste realizado na Seção 4.3 e perturbações paramétricas nos parâmetros k e m de $\pm 20\%$. Nas figuras (4.7)-(4.10) são mostrados os resultados das simulações feitas para este caso, onde foram considerados as mesmas condições iniciais e sinais de referência do estudo de caso anterior, além das possíveis combinações das perturbações paramétricas.

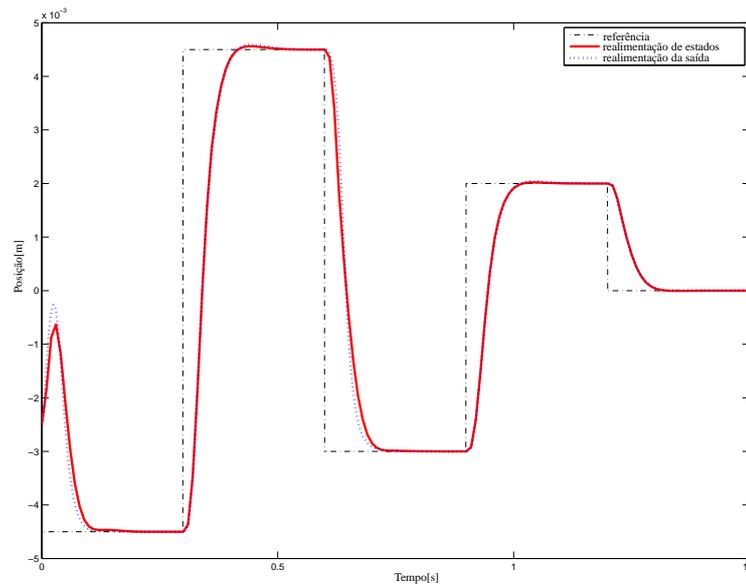


Figura 4.7: Gráfico da trajetória de posição da esfera do sistema controlado pela realimentação de estados e pela realimentação da saída, considerando perturbação paramétrica de -20% em ambos os parâmetros m e k , e $x_{1_0} = -2,5\text{mm}$.

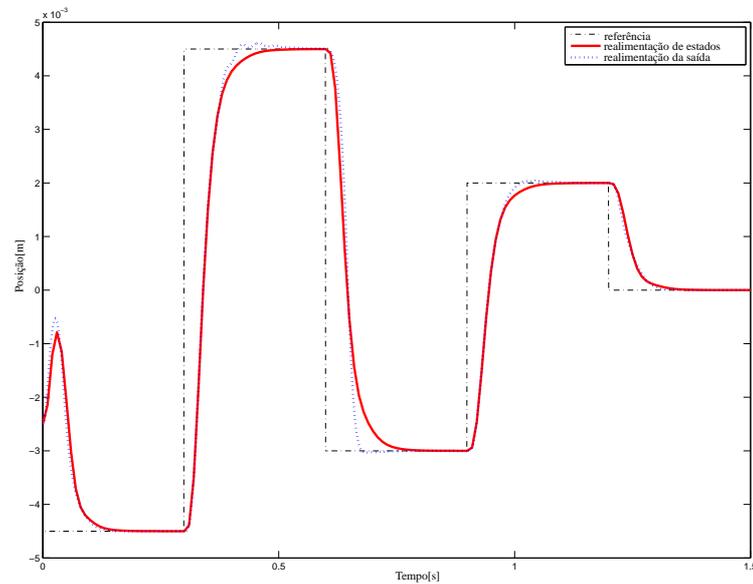


Figura 4.8: Gráfico da trajetória de posição da esfera do sistema controlado pela realimentação de estados e pela realimentação da saída, considerando perturbação paramétrica de +20% em ambos os parâmetros m e k , e $x_{1_0} = -2,5\text{mm}$.

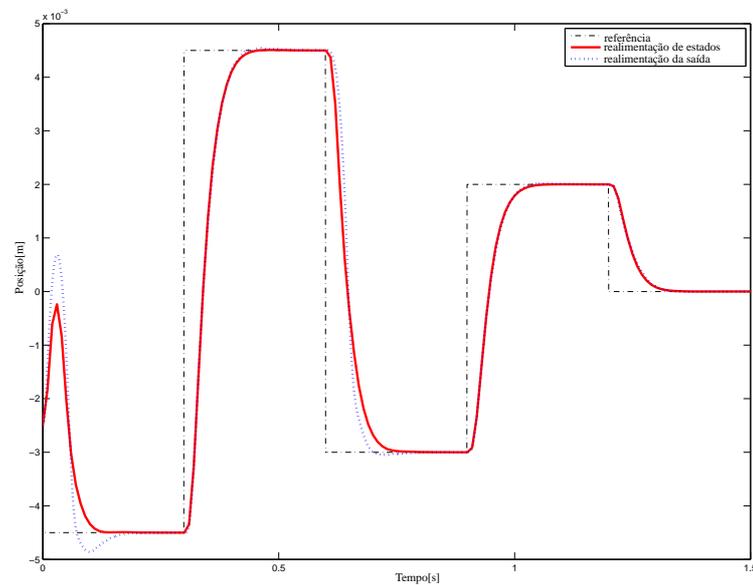


Figura 4.9: Gráfico da trajetória de posição da esfera do sistema controlado pela realimentação de estados e pela realimentação da saída, considerando perturbação paramétrica de +20% no parâmetro k e -20% no parâmetro m , e $x_{1_0} = -2,5\text{mm}$.

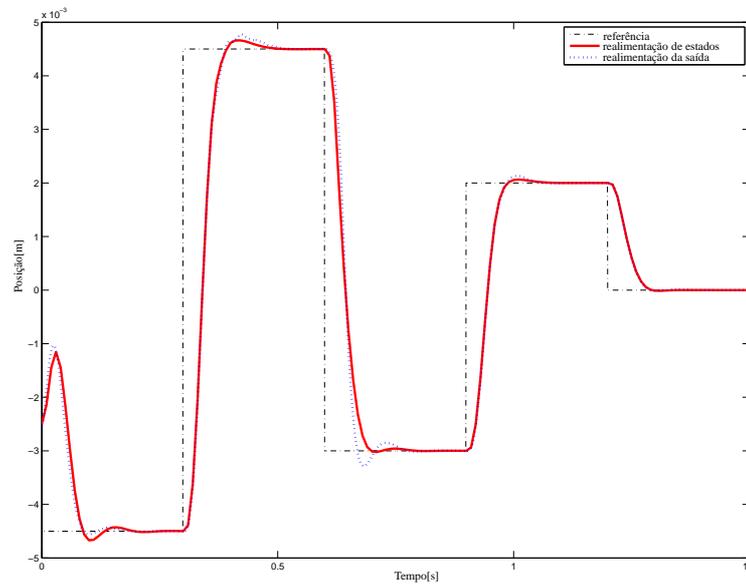


Figura 4.10: Gráfico da trajetória de posição da esfera do sistema controlado pela realimentação de estados e pela realimentação da saída, considerando perturbação paramétrica de -20% no parâmetro k e $+20\%$ no parâmetro m , e $x_{1_0} = -2,5\text{mm}$.

A partir da análise das figuras (4.7)-(4.10) pode-se verificar que a técnica apresenta certo nível de robustez para perturbação paramétrica, ao menos para esse caso específico. Entretanto, assume-se que não existe nenhuma prova teórica que essa técnica apresente aspectos de robustez.

4.5.2 Controle *Energy Shaping*

Nesta Seção são mostrados os estudos de casos e os resultados das simulações realizadas utilizando o controle *energy shaping* com o observador de Luenberger aplicados ao sistema de levitação magnética de um pólo. O ajuste do controle é descrito na Seção 4.4. São realizados dois estudos de caso, objetivando no primeiro caso verificar a diferença entre as leis de controle (3.36) e (3.46), ou seja, o efeito da modificação da estrutura de amortecimento do sistema em malha fechada pela lei de controle (3.46). No segundo, consideram-se perturbações paramétricas no sistema para o estudo de robustez do controle.

Estudo de caso 1 Neste primeiro estudo deseja-se mostrar a diferença de comportamento que se pode obter da aplicação das duas diferentes leis de controle u_1 (3.36) e u_2 (3.46), projetadas utilizando a técnica de controle *energy shaping* IDA. A diferença entre elas é devido ao fato de que a lei de

controle u_2 altera a estrutura de amortecimento do sistema, de forma que o termo resistivo é extraído do subsistema elétrico. Este termo é associado na lei de controle u_1 a um termo quadrático, que pode ser indesejável. Um novo termo de amortecimento é então adicionado, porém relacionado diretamente com a variável de posição. Considerando o ajuste feito na Seção 4.4 para de controle u_1 e os dois diferente ajustes feitos para de controle u_2 , nomeados, respectivamente, como u_{2a} e u_{2b} (tabela 4.2), que se diferenciam apenas no ajuste de R_a . Os resultados das simulações realizadas estão dispostos nas figuras (4.11)-(4.14), que mostram as trajetórias de posição, velocidade, fluxo magnético e sinal de controle para as diferentes leis de controle e ajustes, onde foi considerado um sinal de referência de diferentes degraus e como condição inicial o fluxo magnético iniciando no equilíbrio, a velocidade em zero, e a posição da esfera em $1mm$, ou seja, $x_0 = [\sqrt{2kmg} \ 0,001 \ 0]$.

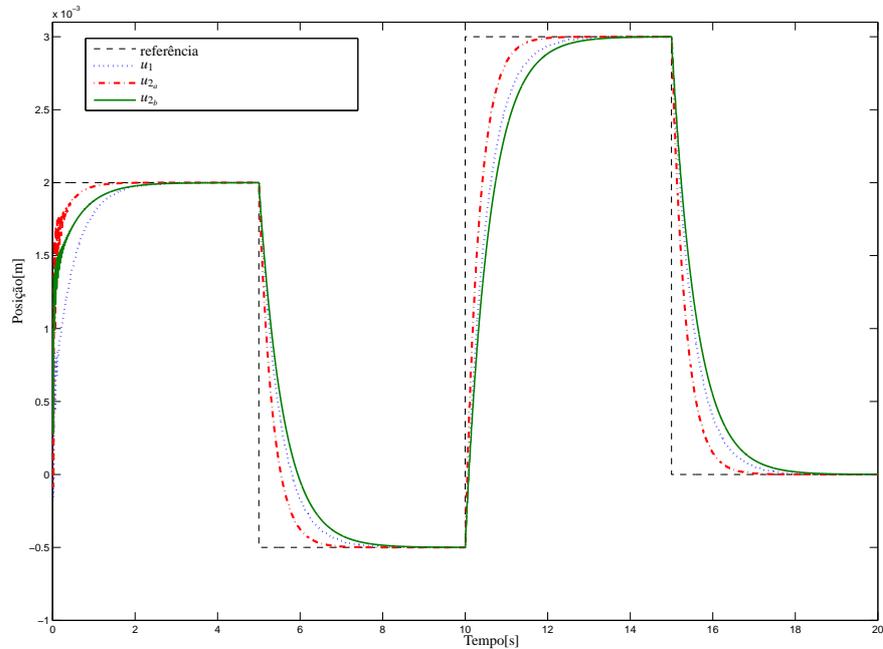


Figura 4.11: Gráfico das trajetórias de posição da esfera do sistema para as diferentes configurações de controle.

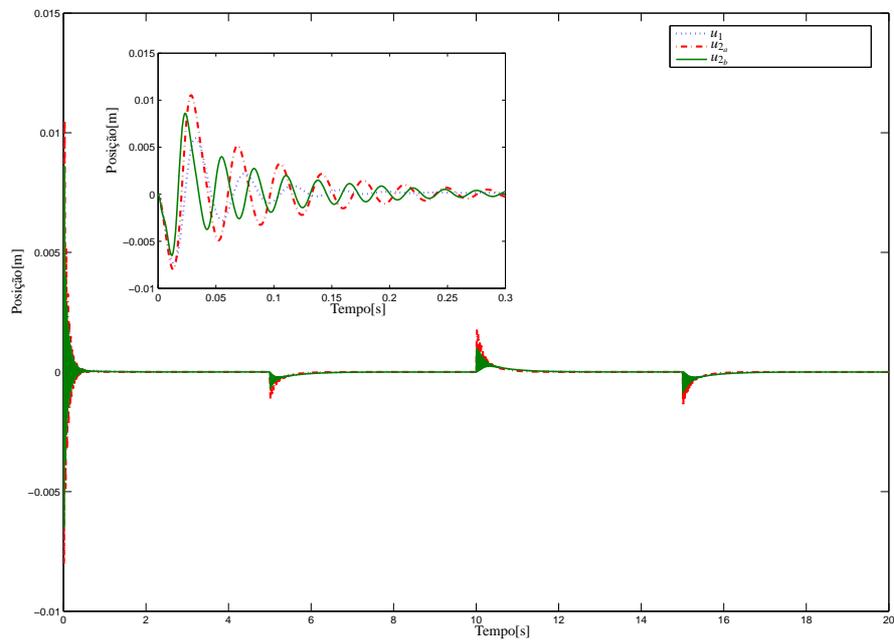


Figura 4.12: Gráfico das trajetórias de velocidade da esfera do sistema para as diferentes configurações de controle.

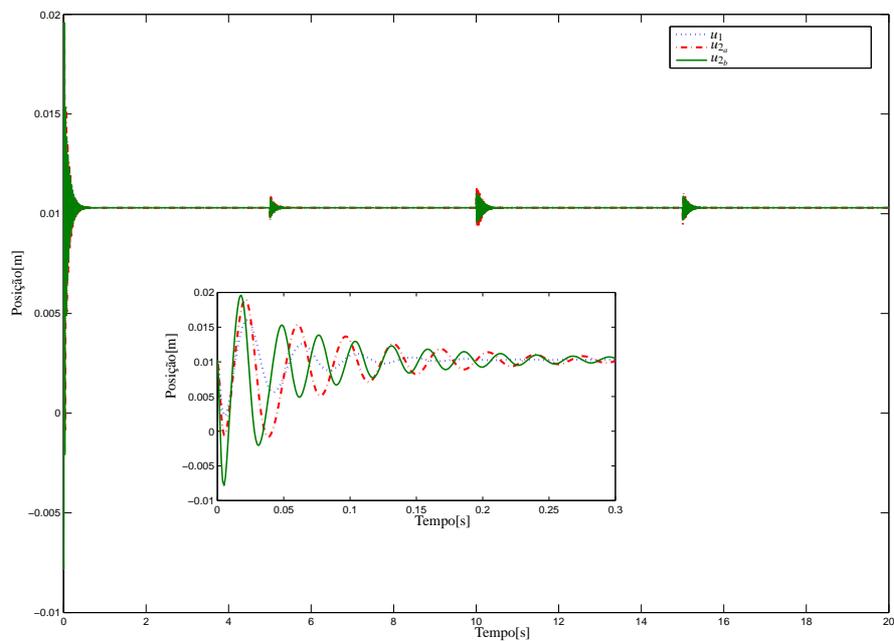


Figura 4.13: Gráfico das trajetórias de fluxo da esfera do sistema para as diferentes configurações de controle.

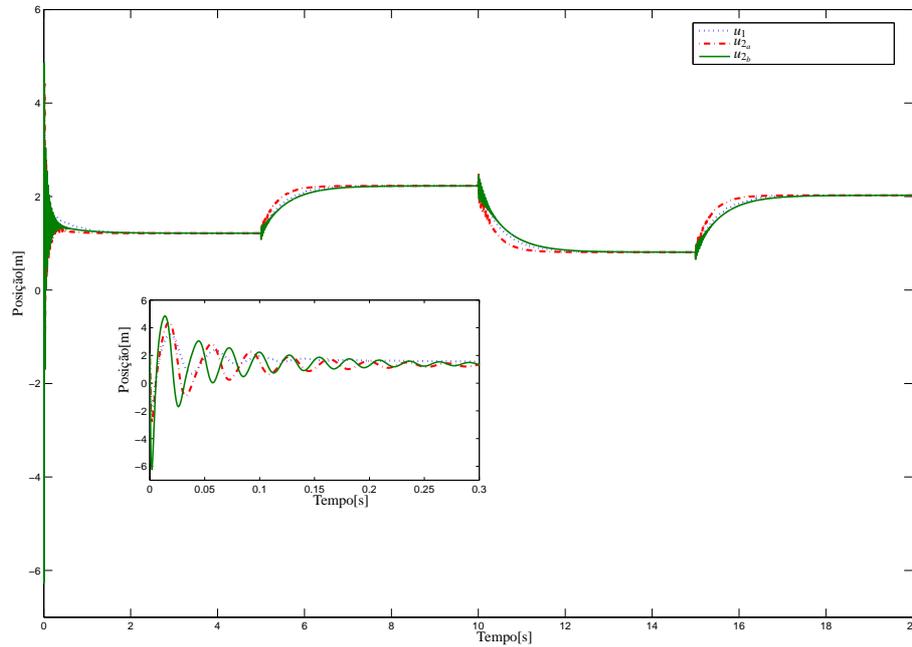


Figura 4.14: Gráfico dos sinais de controle.

Analisando os resultados das simulações mostrados nas figuras (4.11)-(4.14) pode-se verificar que o desempenho dos controlares foi satisfatório. A dinâmica do sinal referente a trajetória da esfera é satisfatória, entretanto os sinais de velocidade, fluxo e controle apresentaram oscilação. A alteração da estrutura de amortecimento, pela utilização da lei de controle u_2 oferece um grau de liberdade a mais, o parâmetro R_a , que permite alterar diretamente o amortecimento na saída do sistema. Porém, como se utilizou cancelamento de um termo do controle, a dinâmica do sistema controlado pela lei controle u_2 apresentou maior oscilação antes de atingir o regime permanente do que o sistema controlado por u_1 .

Estudo de caso 2 Neste segundo estudo de caso, o objetivo era verificar a robustez do sistema para perturbações nos parâmetros k e m de $\pm 10\%$. Simulações foram feitas considerando as diferentes combinações de perturbações que pudessem ocorrer e a mesmas condições assumidas no estudo anterior. Ao se considerarem perturbações de $+10\%$ e -10% para ambos os parâmetros, o sistema manteve-se estável e não apresentou erro em regime, entretanto com perturbações de $+10\%$ para um parâmetro, -10% para outro e vice-versa o sistema se mostrou instável para as três as configurações do controle. Configurações diferentes dos parâmetros de controle foram testadas, mas sem sucesso.

4.6 Análises

Essa Seção é dedicada a descrever as características de ambos os controladores através de uma comparação qualitativa. Visa-se auxiliar um projetista na escolha de uma técnica que possa ser mais adequada para o controle de um sistema específico.

A idéia principal do controle de realimentação linearizante robusto é obter um sistema linearizado aplicando-se uma transformação de estados e uma lei de controle (transformação de entrada) ao sistema não-linear. Esta idéia tem um objetivo claro, entretanto a teoria utilizada para projetar este controle possui um teor complexo de matemática. Todavia, o método apresenta uma característica singular de aplicação, ou seja, não apresenta grandes modificações ao ser aplicado para diferentes sistemas, permitindo que se construa um algoritmo genérico para o projeto do controle, assim como foi proposto em [Franco, 2006], facilitando a aplicação do projeto do controle.

A principal vantagem da técnica de realimentação linearizante robusta é permitir que se utilizem sobre o sistema linearizado as ferramentas de controle linear, que são bem conhecidas e consolidadas na literatura, e possuir uma região de validade maior do que um controle linear aplicado diretamente ao sistema não linear, [Franco, 2006]. Em específico o controle de realimentação linearizante robusto apresenta vantagem sobre clássico, pois mantém a informação do sistema de origem, diferente do que ocorre com o caso clássico onde a estrutura canônica de Brunovsky é padrão para qualquer que seja o sistema que se esteja linearizando. Devido a este fato, o controle linearizante robusto torna mais fácil à aplicação de certas ferramentas lineares para controlar o sistema, isto é, ferramentas que necessitam informação do sistema para serem projetadas, como é o caso das normas H_2 , H_∞ e algumas técnicas de controle linear robusto.

A aplicação da técnica de controle de realimentação linearizante limita-se a sistemas que atendam as condições descritas na proposição 2.3.1, ou seja, que possuam m funções para as quais o sistema possui grau relativo n . O método também se limita pela necessidade de acesso a todos estados do sistema, entretanto esta limitação pode ser contornada utilizando um observador de estados. Para o caso específico do controle linearizante o observador linear de Luenberger é uma opção interessante, devido ao resultado da aplicação da técnica de controle ser um sistema linearizado e ainda a aplicação deste observador é relativamente simples. Contudo, existem outros tipos observadores que podem ser aplicados, como é mostrado em [Franco, 2006]. Neste trabalho foi abordado o observador de alto ganho para ser combinado com esta técnica de controle. Os resultados obtidos em simulação são animadores. O sistema realimentado dinamicamente pela saída, utilizando este observador, recupera a performance do sistema realimentado pelos estados, propriedade que é descrita

em [Atassi e Khalil, 1999] para utilização do observador de alto ganho, porém com outras técnicas de controle. Portanto, é necessária a continuação desta pesquisa para se obter uma prova formal da propriedade de recuperação de performance para o caso tratado neste trabalho.

O princípio da técnica de *energy shaping* IDA é tornar o sistema, que esteja representado na forma PCH, em um sistema em malha fechada, que tenha como estado de mínima energia um equilíbrio desejado, mantendo-se a forma PCH. A teoria utilizada no projeto do controle é relativamente complexa, pois necessita da solução de equações diferenciais, apesar de alguns conceitos um pouco mais simples serem utilizados, como mínimo de uma função e estabilidade de Lyapunov. A utilização do observador de Luenberger com a técnica de *energy shaping* apresentou dentro região limitado um comportamento razoável.

As vantagens desta técnica são poder utilizar conhecimento físico do sistema para o projeto da lei de controle, o que permite uma melhor interpretação do controle em termos físicos; e poder tratar o sistema em função de energia, que é uma opção diferente que, eventualmente, pode oferecer algum tipo de melhoria no controle de algum sistema, como por exemplo robôs manipuladores com flexibilidades.

As dificuldades da aplicação do controle *energy shaping* IDA são: a limitação da técnica a sistemas que possam ser escritos na forma PCH; a necessidade de solucionar equações diferenciais parciais sob a restrição de condições que garantam estabilidade para o sistema controlado. Nas tabelas 4.4 e 4.4 sintetiza-se a análise apresentada nesta Seção.

Tabela 4.4: Características do controle linearizante robusto

Controle de Realimentação Linearizante	
Objetivo	Obter um difeomorfismo e uma lei de controle tais que aplicados ao sistema não-linear, resulte na aproximação linear desse sistema em torno de um ponto de equilíbrio
Vantagens	Permite o uso de controle linear; Possui região de validade maior do que o controle linear aplicado diretamente ao sistema; Mantém informação do sistema original, facilitando o projeto de controladores robustos Possui características interessantes para aplicação de observadores lineares; Permite a construção de um algoritmo genérico para o projeto do controle, utilizando uma ferramenta computacional.
Desvantagens	Restrito a sistemas que possam ser linearizáveis; Necessidade de acesso a todos os estados.

Tabela 4.5: *Características do controle energy shaping*

<i>Controle Energy Shaping</i>	
Objetivo	Obter uma lei de controle tal que em malha fechada o sistema controlado esteja na forma PCH e o mínimo energia que o descreve corresponda ao equilíbrio desejado.
Vantagens	Permite utilizar conhecimentos físicos; Trata o sistema em termos de energia.
Desvantagens	Restrito a sistemas que possam ser escritos na forma PCH; Necessidade, em geral, de acesso a todos os estados; Necessidade da solução de PDEs, porém pode-se utilizar ferramentas computacional.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho foram abordadas duas técnicas de controle não-linear, o controle de realimentação linearizante robusto e o controle *energy shaping* IDA, para os quais foram apresentados projetos de observadores. Um observador de alto ganho foi projetado para ser utilizado com o controle linearizante robusto e um observador linear de Luenberger foi projetado para ser utilizado com o controle *energy shaping*. Estas técnicas foram aplicadas a um sistema de levitação magnética de um pólo, escolhido com plataforma de teste devido suas características não-lineares e por ser instável em malha aberta. Finalmente, foram apresentados os resultados de simulações da aplicação das técnicas ao sistema plataforma de teste.

Inicialmente foi apresentado o sistema de levitação magnética, desenvolvendo a uma modelagem matemática para representá-lo. Em seqüência, foi abordada a técnica de linearização robusta, onde se pretendeu oferecer uma compreensão simples da teoria envolvida no projeto deste controle. Apesar do objetivo da técnica ser simples e claro, os passos desenvolvidos para se obter o algoritmo de projeto desta técnica envolvem conceitos matemáticos complexos, o que torna a compreensão relativamente difícil. Entretanto, o algoritmo de projeto é bem definido e a aplicação não apresenta grandes variações frente às particularidades que cada sistema tenha. Em conjunto com esta técnica é apresentado um observador de alto ganho. O emprego deste observador com a técnica de realimentação linearizante robusta é possível devido às características desta técnica de controle ser derivada da realimentação linearizante clássica. O controle de realimentação dinâmica da saída, empregando o observador de alto ganho, possui a propriedade de recuperar a performance do controle de realimentação dos estados, entretanto, ainda não obteve-se uma prova formal desta propriedade para o caso abordado neste trabalho. Posteriormente, foi apresentada a técnica de controle *energy shaping* IDA PCB. Esta técnica foi apresentada de forma sucinta devido aos conceitos utilizados serem relativa-

mente mais intuitivos. Entretanto, deve-se comentar que a aplicação do projeto a um dado sistema pode ter um nível de complexidade considerável. Em conjunto com esta técnica foi apresentado o projeto de um observador linear de Luenberger para estimar os estados do sistema para aplicação do controle. Finalmente, foram apresentados estudos de casos sobre aplicação destas técnicas sobre o sistema plataforma de teste e análises qualitativas para criar um quadro comparativo entre estas duas técnicas.

A técnica de controle de realimentação linearizante com observador de alto ganho, apesar não ter sido apresentada uma prova formal adequada da sua estabilidade de malha fechada na qual a propriedade de recuperação de performance fosse evidenciada, mostrou-se uma estratégia de controle interessante, pois apresentou bons resultados de simulação e foram apresentados indícios que comprovariam sua estabilidade em malha fechada. A aplicação da técnica é bem definida e não apresenta variações consideráveis caso a caso.

A técnica de controle *energy shaping* com observador linear dentro de algumas limitações apresentou resultados satisfatórios. O procedimento para seu projeto é bem definido, entretanto há variações grandes na aplicação do método, devido à necessidade da solução de equações diferenciais parciais cuja construção varia de acordo com a estrutura do sistema, o que eventualmente pode ter suas vantagens e desvantagens.

As principais contribuições do trabalho foram a proposta de combinar o controle de realimentação linearizante robusto com um observador de alto ganho e a comparação qualitativa realizada entre as técnicas de controle não-linear abordadas.

As perspectivas de trabalhos futuros são:

- realizar testes experimentais sobre um sistema plataforma de teste, aplicando-se as técnicas de controle e os respectivos observadores propostos, para complementar as análises já iniciadas através de simulações;
- obter uma prova formal da estabilidade do sistema controlado pela técnica de controle linearizante robusta com o observador de alto ganho, explicitando a propriedade de recuperação de performance;
- pesquisar e definir padrões para realizar estudos de comparação quantitativas entre as técnicas;
- adicionar outras técnicas de controle ao estudo comparativo, visando montar um quadro comparativo que possa auxiliar projetistas e pesquisadores em uma escolha entre diversas técnicas de controle não-linear.

Publicações Durante o Mestrado

- El'youssef, E. S., Moreno, U. F., Pieri, E. R. D., e de Bona Castelan Neto, E. (2006). Controladores não-lineares uma comparação qualitativa - sistema de suspensão magnética de 2 pólos. Proc. XVI - Congresso Brasileiro da Automática.
- El'youssef, E. S., Moreno, U. F., Pieri, E. R. D., e de Bona Castelan Neto, E. (2007). A high-gain observer approach applied to the robust feedback linearization control. Proc. 3rd IFAC SYMPOSIUM on SYSTEM, STRUCTURE and CONTROL.

Apêndice A

Conceitos de Geometria Diferencial

Neste apêndice apresentam-se alguns conceitos de geometria diferencial, os quais foram obtido em [Slotine e Li, 1991], que são empregados no desenvolvimento dessa dissertação.

Dadas uma função escalar $h(x)$ e campo vetorial $f(x)$, define-se:

Definição A.1 - Gradiente: *Seja $h : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função escalar suave de $x \in \mathfrak{R}^n$. O gradiente de $h(x)$, denotado como ∇h , é definido como:*

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{A.1})$$

sendo, então, o gradiente de $f(x)$ um vetor linha, cujos elementos são $(\nabla h)_j = \frac{\partial h}{\partial x_j}$

Definição A.2 - Jacobiano: *Seja $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^p$ um campo vetorial suave de $x \in \mathfrak{R}^n$. O jacobiano de $f(x)$, ∇f , é definido como:*

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (\text{A.2})$$

sendo, então, o jacobiano de $f(x)$ uma matriz $p \times n$, cujos elementos $(\nabla f)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Definição A.3 - Derivada de Lie: *Sejam $h : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função escalar suave, e $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ um campo vetorial suave em \mathfrak{R}^n , então a derivada de Lie de h com respeito à f denotada por $L_f h$, é uma função escalar definida como*

$$L_f h = \nabla h f \quad (\text{A.3})$$

Então, a derivada de Lie $L_f h$ é simplesmente a derivada direcional de h ao longo da direção do vetor f .

A derivada de Lie pode ser aplicada repetidamente, e definida recursivamente como:

$$\begin{aligned} L_f^0 h &= h \\ L_f^i h &= L_f(L_f^{i-1} h) = \nabla \quad i \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Se g outro campo vetorial, então de forma similar, tem-se que a função $L_g L_f h(x)$ é dada por:

$$L_g L_f h = \nabla(L_f h)g \quad (\text{A.5})$$

Definição A.4 - Colchetes de Lie: Sejam $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ e $g : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ dois campos vetoriais suaves em \mathfrak{R}^n . O colchete de Lie de f e g , denotado por $[f, g]$, é também um campo vetorial definido como:

$$[f, g] = \nabla g f - \nabla f g \quad (\text{A.6})$$

O colchete de Lie $[f, g]$ é comum escrito, também, como $ad_f g$. E pode ser aplicado repetidamente, e logo ser escrito recursivamente como:

$$\begin{aligned} ad_f^0 g &= g \\ ad_f^i g &= [f, ad_f^{i-1} g] = ad_f(ad_f^{i-1} g) \quad i \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

O colchete de Lie apresenta as seguintes propriedades:

1. *Bilinearidade:*

$$\begin{aligned} [\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g] &= \alpha_1 [f_1, g] + \alpha_2 [f_2, g] \\ [f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2] &= \alpha_1 [f, g_1] + \alpha_2 [f, g_2] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

2. *Anti-simetria:*

$$[f, g] = -[g, f] \quad (\text{A.9})$$

3. *Identidade de Jacobi:*

$$L_{ad_f g} h = L_f L_g h - L_g L_f h \quad (\text{A.10})$$

Se $f_1 : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $f_2 : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $g_1 : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $g_2 : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ campos vetoriais suaves, e $\alpha_1 \in \mathfrak{R}$, $\alpha_2 \in \mathfrak{R}$, constantes.

Apêndice B

Conceitos da Teoria de Sistemas Não-Lineares

Neste apêndice apresentam-se alguns conceitos da teoria de sistemas não-lineares, os quais foram obtido em [Franco, 2006; Slotine e Li, 1991], que são empregados no desenvolvimento dessa dissertação.

Definição B.1 - Difeomorfismo: A aplicação $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, na qual Ω é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n , é denominada um difeomorfismo se $\phi^{-1}(x)$ existe e se $\phi(x)$ e $\phi^{-1}(x)$ são diferenciáveis e contínuas em Ω . Se, adicionalmente, $\Omega = \mathbb{R}^n$, então $\phi(x)$ é um difeomorfismo global.

Definição B.2 - Distribuição: Uma distribuição D em uma variedade M é uma função que atribui a cada $p \in M$ um subespaço linear $D(p)$ do espaço tangente T_pM .

Definição B.3 - Involutividade: Uma distribuição D é chamada involutiva se $[X, Y] \in D$ sempre que X e Y são campos vetoriais em D .

Definição B.4 - Grau Relativo: Seja o sistema não-linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{B.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ representa os estados, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^p$ é a saída e $f(x)$, $g_1(x), \dots, g_m(x)$, $h(x)$ são campos vetoriais suaves definidos em um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Cada

saída $h_i(x)$ tem grau relativo r_j , se:

$$L_{g_i} h_i = L_{g_i} L_f h_j(x) = \cdots = L_{g_i} L_f^{r_j-2} h_j(x) = 0 \quad \forall i \in [1, m] \quad (\text{B.2})$$

e se existe pelo menos um i tal que

$$L_{g_i} L_f^{r_j-1} \neq 0 \quad (\text{B.3})$$

O sistema não-linear (B.1) tem grau relativo $r = r_1 + \cdots + r_p$.

Apêndice C

Prova

Neste apêndice expõe-se a prova da proposição 2.4.1 apresentada no capítulo 2. Esta proposição oferece condições que garantem ser possível ajustar o ganho observador de alto ganho, tal que o sistema em malha fechada pelo controle de realimentação linearizante robusto e observador de alto ganho seja estável. A prova em questão é uma adequação da mostrada em [Munaro *et al.*, 2002a], que se refere ao caso do linearização clássica com o observador linear, para o caso tratado neste trabalho.

Considerando-se um sistema não-linear conforme descrito em (2.18), ou seja:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (\text{C.1})$$

$$y = h(x) \quad (\text{C.2})$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ representa os estados do sistema, $u \in \mathfrak{R}^m$ a entrada de controle, $y \in \mathfrak{R}^p$ a saída do sistema, $f(x)$ e $g(x)$ são campos vetoriais suaves definidos em um subconjunto aberto de \mathfrak{R}^n .

Assumindo que este sistema seja totalmente linearizável e que os estados são acessíveis, então existe o difeomorfismo $\phi_r(x)$ e a lei de controle:

$$u_r = \alpha_r + \beta_r(x)v_r \quad (\text{C.3})$$

tais que aplicados ao sistema não-linear (C.1)-(C.2), o transformam em sistema linearizado em torno de um ponto equilíbrio escolhido, conforme mostrado pela equação 2.26, e replicado aqui:

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r v_r \quad (\text{C.4})$$

$$y = C_r x_r \quad (\text{C.5})$$

onde A_r , B_r e C_r são definidas conforme mostrado (2.27)-(2.29).

Considerando-se agora o caso onde se utiliza a estimativa do estado do sistema para aplicação da técnica de linearização. A dinâmica do sistema não-linear aplicando-se a linearização robusta com os estados estimados pode ser obtida pela aplicação do difeomorfismo $x_r = \phi_r(x)$ e a lei de controle $u_r(\hat{x}) = \alpha_r(\hat{x}) + \beta_r(\hat{x})v_r$ ao sistema não-linear dado pela equação (C.1). Para fins de análise, se consideradas a adição e subtração do termo $\alpha_r(x) + \beta_r(x)v_r$ à lei de controle, obtém-se o seguinte equacionamento para dinâmica do sistema:

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r v_r + \delta_r(x, \hat{x}) \quad (\text{C.6})$$

onde

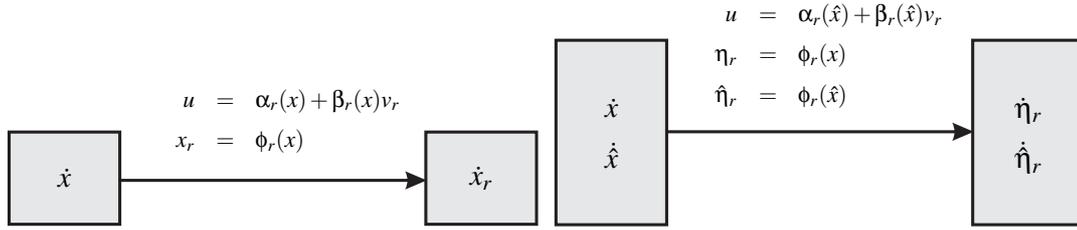
$$\delta_r(x, \hat{x}) = \mu_r(x) \left[\alpha_r(\hat{x}) - \alpha_r(x) + \left(\beta_r(\hat{x}) - \beta_r(x) \right) v \right] \quad (\text{C.7})$$

sendo $\mu_r(\phi_r^{-1}(x_r)) = \frac{\partial \phi_r}{\partial x}(x)g(x)$ e $x = \phi_r^{-1}(x_r)$, $\hat{x} = \phi_r^{-1}(\hat{x}_r)$. Note que $\frac{\partial \phi_r}{\partial x}(\partial x)g(x)\beta(x) = B_r$, então se tem que $\mu_r(x) = B_r \beta_r^{-1}(x)$.

Então, como $y = Cx_r$, pode-se utilizar o observador descrito na equação (2.50) para estimar x_r .

Na aplicação da técnica de controle linearizante pela realimentação da saída com o observador são utilizadas a transformação de entrada, $u_r(\hat{x}) = \alpha_r(\hat{x}) + \beta_r(\hat{x})v_r$, e a transformação de estados estimada, $\hat{x}_r(\hat{x}) = \phi_r(\hat{x})$, ambas baseadas nos estados estimados. Além disso, para este caso, existe a transformação de estados baseada nos estados reais do sistema, aos quais na realidade não se tem acesso, que será denotada como $x_r(x) = \phi_r(x)$ e utilizada no estudo de estabilidade.

Em contraste com essa situação, na aplicação da técnica de controle linearizante pela realimentação dos estados são utilizadas a transformação de entrada, $u_r(x) = \alpha_r(x) + \beta_r(x)v_r$, e a transformação de estados, $\eta_r(x) = \alpha_r(x)$, ambas baseadas nos estados reais do sistema. Note que $x_r(x)$ e $\eta_r(x)$ apresentam a diferença sutil de que uma é referente a um sistema onde utiliza-se uma lei de controle baseada em estados estimados e a outra nos estados reais do sistema. A figura (C.1) ilustra as transformações envolvidas nos dois casos recém descritos.



(a) realimentação linearizante com estados verdadeiros

(b) realimentação linearizante com observador

Figura C.1: C.1(a) Diagrama representando as diferenças entre o controle feito com os estados reais e C.1(b) o controle feito com os estados estimados.

Condições suficientes que garantem que o sistema em malha fechada utilizando o observador terá estabilidade assintótica local serão, então, derivadas garantindo que o erro definido x_r e η , ou seja, $\varepsilon = x_r - \eta$, tenda assintoticamente para zero. Dessa forma, o controle de realimentação linearizante utilizando o observador apresentará um comportamento similar ao do controle feito com os estados reais do sistema.

Para mostrar que o erro $\varepsilon = x_r - \eta$ tende assintoticamente para zero, propõe-se a separação desse erro em dois termos, ou seja, $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, onde $\varepsilon_1 = x_r - \hat{x}_r$ e $\varepsilon_2 = \hat{x}_r - \eta$. Então se mostra que ambos ε_1 e ε_2 tendem para zero sob certas condições.

Proposição C.1 Se μ_r é limitado localmente em $\eta_{r0} = \phi_r(x_0)$, $\alpha_r \circ \phi^{-1}$ e $\beta_r \circ \phi^{-1}$ são localmente Lipschitz em η_{r0} e o par (C, A) é observável, considerando que v_r seja limitada, então é possível projetar o ganho do observador H em (2.50), tal que esse observador seja localmente exponencialmente estável, ou seja, a dinâmica do erro ε_1 é localmente estável.

Prova 1 : A dinâmica do erro ε_1 é dada por

$$\dot{\varepsilon}_1 = (A_r - HC_r)\varepsilon_1 + \mu_r(\eta_r)[\alpha_r(\hat{x}) - \alpha_r(x) + (\beta_r(\hat{x}) - \beta_r(x))v_r] \quad (C.8)$$

cuja resposta temporal é dada por:

$$\varepsilon_1(t) = e^{(A_r - HC_r)t} \varepsilon_1(0) + \int_0^t e^{(A_r - HC_r)(t - \tau)} \mu_r(\eta_r(\tau)) [\alpha_r(\hat{x}(\tau)) - \alpha_r(x(\tau)) + (\beta_r(\hat{x}(\tau)) - \beta_r(x(\tau)))v_r(\tau)] d\tau \quad (C.9)$$

Supondo que o par (C, A) é observável, então é possível projetar H tal que $(A_r - HC_r)$ seja

estável. Logo, existem constantes $c > 0$ e $\gamma > 0$ tais que:

$$\|\varepsilon_1(t)\| \leq ce^{-\gamma t} \|\varepsilon_1(0)\| + \int_0^t e^{(A_r - HC_r)(t-\tau)} \mu_r(\eta_r(\tau)) [\alpha_r(\hat{x}(\tau)) - \alpha_r(x(\tau)) + (\beta_r(\hat{x}(\tau)) - \beta_r(x(\tau)))v_r(\tau)] d\tau \quad (C.10)$$

Se μ_r for limitado localmente em η_{r0} , $\alpha_r \circ \phi_r^{-1}$ e $\beta_r \circ \phi_r^{-1}$ forem localmente Lipschitz em η_{r0} , então existem as constantes $M_1 > 0$, $L_1 > 0$ e $L_2 > 0$, tais que, na vizinhança de η_{r0} , as seguintes inequações são verificadas:

$$\begin{aligned} \|\mu(\eta_r)\| &\leq M_1 \\ \|\alpha_r(\hat{x}) - \alpha_r(x)\| &\leq L_1 \|\hat{\eta}_r - \eta_r\| = L_1 \|\varepsilon_1\| \\ \text{Vert} \beta_r(\hat{x}) - \beta_r(x) &\leq L_2 \|\hat{\eta}_r - \eta_r\| = L_1 \|\varepsilon_1\| \end{aligned} \quad (C.11)$$

Então, considerando que v_r seja limitada, ou seja, $\|v_r(\tau)\| \leq M_2$, para uma constante $M_2 > 0$, obtém-se combinando as relações (C.10) e (C.11):

$$\|\varepsilon_1(t)\| \leq ce^{-\gamma t} \|\varepsilon_1(0)\| + \int_0^t cMe^{-\gamma(t-\tau)} \|\varepsilon_1(\tau)\| d\tau \quad (C.12)$$

onde $M = M_1(L_1 + L_2M_2)$.

Pode-se reescrever (C.12) como:

$$c^{-1} \|\varepsilon_1(t)\| e^{\gamma t} \leq \|\varepsilon_1(0)\| + \int_0^t cM(c^{-1} \|\varepsilon_1(\tau)\| e^{\gamma \tau}) d\tau \quad (C.13)$$

Aplicando o lema de Gronwall-Bellman à equação (C.13) obtém-se:

$$\|\varepsilon_1(t)\| e^{\gamma t} \leq ce^{(cM-\gamma)t} \|\varepsilon_1(0)\| \quad (C.14)$$

Portanto se o par (C,A) for observável, é possível projetar o ganho do observador H , tal que $\gamma > cM$, garantindo a estabilidade local exponencial do erro ε_1 .

Considere agora a dinâmica do erro ε_2 . O estudo da convergência de ε_2 é feito considerando o sistema (C.4) realimentado por $v_r = -Kx_r$ e a dinâmica do observador (2.50) realimentada por $v_r = -K\hat{x}_r$, onde K é uma matriz a ser projetada. Então, a dinâmica da equação do erro ε_2 é dada por:

$$\dot{\varepsilon}_2 = (A_r - B_rK)\varepsilon_2 + LC\varepsilon_1. \quad (C.15)$$

cuja resposta temporal é dada por:

$$\varepsilon_2(t) = e^{(A_r - B_r K)t} \varepsilon_2(0) + \int_0^t e^{(A_r - B_r K)(t-\tau)} LC \varepsilon_1(\tau) d\tau. \quad (C.16)$$

Se o par (A_r, B_r) for controlável, é possível projetar K , tal que $(A_r - B_r K)$ seja estável. Então, existem constantes $c_0 > 0$ e $\gamma_0 > 0$ tais que:

$$\|\varepsilon_2(t)\| = c_0 e^{-\gamma_0 t} \|\varepsilon_2(0)\| + \int_0^t c_0 e^{-\gamma_0(t-\tau)} \|LC\| \|\varepsilon_1(\tau)\| d\tau. \quad (C.17)$$

Assumindo a hipótese da proposição C.1, é possível projetar H tal que:

$$\|\varepsilon_1(t)\| e^{\gamma t} \leq c e^{-\gamma_1 t} \|\varepsilon_1(0)\| \quad (C.18)$$

sendo $c > 0$ e $\gamma_1 > 0$ constantes.

A partir das equações (C.17) e (C.18) pode-se concluir que:

$$\|\varepsilon_2(t)\| = c_0 e^{-\gamma_0 t} \|\varepsilon_2(0)\| + \int_0^t c_0 e^{-\gamma_0(t-\tau)} \|LC\| \|c e^{-\gamma_1 \tau} \|\varepsilon_1(0)\| d\tau \quad (C.19)$$

Caso $\gamma_0 = \gamma_1$ então se pode concluir de (C.19):

$$\|\varepsilon_2(t)\| = c_0 e^{-\gamma_0 t} \|\varepsilon_2(0)\| + c - 0c \|LC\| t \|e^{-\gamma_0 t} \|\varepsilon_1(0)\| \quad (C.20)$$

e caso $\gamma_0 \neq \gamma_1$, então

$$\|\varepsilon_2(t)\| = c_0 e^{-\gamma_0 t} \|\varepsilon_2(0)\| + \frac{c_0 c \|LC\|}{\gamma_0 - \gamma_1} (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_0 t}) \|\varepsilon_1(0)\| \quad (C.21)$$

Em ambos os casos, equações (C.20) e (C.21), a estabilidade assintótica do erro ε_2 é garantida. Então com isso conclui-se a prova da proposição 2.4.1, replicada abaixo.

Proposição C.2 *Se $\mu_r(\phi_r^{-1}(x_r)) = \frac{\partial \phi_r}{\partial x}(x)g(x)$ é localmente limitado em $x_{req} = \phi_r(x_{eq})$, $\alpha_r \circ \phi_r^{-1}$ e $\beta_r \circ \phi_r^{-1}$ são localmente Lipschitz em x_{req} e o par (C_r, A_r) é observável, então, considerando que a entrada v_r é limitada, é possível escolher o ganho do observador H , tal que a origem da dinâmica do erro $\varepsilon = x_r - \eta$ seja assintoticamente estável, e assim também o seja o sistema não-linear (2.1) em malha fechada utilizando o controle linearizante robusto pela realimentação da saída com o observador dado pela equação (2.50).*

Referências Bibliográficas

- Atassi, A. N. e Khalil, K. (1999). A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Vol. 44, No. 9, pp. 1672–1687.
- El'youssef, E. S., Moreno, U. F., Pieri, E. R. D., e de Bona Castelan Neto, E. (2006). Controladores não-lineares uma comparação qualitativa - sistema de suspensão magnética de 2 pólos. Proc. XVI - Congresso Brasileiro da Automática.
- El'youssef, E. S., Moreno, U. F., Pieri, E. R. D., e de Bona Castelan Neto, E. (2007). A high-gain observer approach applied to the robust feedback linearization control. Proc. 3rd IFAC SYMPOSIUM on SYSTEM, STRUCTURE and CONTROL.
- Franco, A. L. D. (2006). *Controle Não-Linear Robusto: Um Método Baseado em uma Linearização por Realimentação. Tese de Doutorado*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC.
- Franco, A. L. D., Bourlès, H., e Pieri, E. R. D. (2006). Robust nonlinear control association robust feedback linearization and H_∞ control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, No. 7, pp. 1200–1207.
- Franco, A. L. D., Bourlès, H., e Pieri, E. R. D. (2005). A robust nonlinear controller with application to a magnetic bearing system. Proc. of the 44th IEEE Conference on Decision and Control.
- Guillard, H. e Bourlès, H. (2000). Robust feedback linearization. Proc. 14th Int. Symp. Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS'2000), pp. 1–6, Perpignan, France.
- Hajjaji, A. E. e Ouladsine, M. (2001). Modeling and nonlinear control of magnetic levitation systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 48pp. 831–838.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 3 edição.

- Levine, J., Lottin, J., e Ponsart, J. C. (1996). A nonlinear approach to the control of magnetic bearings. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, Vol. 4, No. 5, pp. 524–544.
- Lundberg, K. H., Lilienkamp, K. A., e Marsden, G. (2004). Low-cost magnetic levitation project kits. *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 2pp. 65 – 69.
- Munareto, S. S., Munaro, C. J., e Rosado, M. (2006). Model reference control using feedback linearization for uncertain systems. *Proc. XVI - Congresso Brasileiro da Automática*.
- Munaro, C. J., Filho, M. R., Borges, R. M., da Silva Munareto, S., e Costa, W. T. (2002a). Stabilizing control design of fully linearizable systems via estimated states. *Proc. Conference on Control Applications*, pp. 1333–1338, Glasgow, Scotland, U.K.
- Munaro, C. J., Rosado, M., Borges, R. M., Munareto, S. S., e Costa, W. T. (2002b). Nonlinear tracking control design for magnetic levitation system. *Proc. XIV - Congresso Brasileiro da Automática*.
- Naumović, M. B. (2003). Modeling of a didactic magnetic levitation system for control education. *Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Service, 2003. TELSIS 2003. 6th International Conference on*, Vol. 2.
- Ortega, R., van der Schaft, A., e Bernhard Maschke, G. E. (2002). Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, Vol. 38, No. 4, pp. 585–596.
- Ortega, R., van der Schaft, A. J., Mareels, I., e Maschke, B. (2001). Putting energy back in control. *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 21, No. 2, pp. 18–33.
- Queiroz, M. S. e Dawson, D. M. (1996). Nonlinear control of active magnetic bearings: A backstepping approach. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, Vol. 4, No. 5, pp. 545–552.
- Rodríguez, H., Ortega, R., e Siguerdidjane, H. (2000). Passivity-based control of magnetic levitation systems: theory and experiments. *Proc. 14th International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS'2000)*.
- Sepulchre, M. e Kokotovic, P. (1997). *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag.
- Slotine, J. J. E. e Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, New Jersey.