Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

C^*-álgebras geradas por isometrias

Alda Dayana Mattos
Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel Filho

Florianópolis
Abril de 2007

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

C^*-álgebras geradas por isometrias

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Alda Dayana Mattos
Florianópolis
Abril de 2007

C^*-álgebras geradas por isometrias

por

Alda Dayana Mattos

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre",
Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.

Prof. Dr. Clóvis Caesar Gonzaga
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Exel Filho (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Danilo Royer (UFSC)

Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)

Prof. Dr. Fernando Raúl Abadie Vicens
(Universidad de la República Oriental del Uruguay - UDELAR)

Florianópolis, Abril de 2007.

À minha mãe

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a minha família, minha mãe Jussara Mattos e meu irmão Vanderlei Antônio de Mattos Junior, por terem sempre me apoiado e me dado suporte para realizar meus sonhos, não importando se a princípio eles pareciam não levar a lugar algum. Obrigado por terem acreditado que eu seria capaz e por terem confiado em mim.

Ao meu grande amor, Fernando de Lacerda Mortari, por ter se feito tão presente, mesmo estando fisicamente tão distante, por ser quem você é, por ser o amor da minha vida, o meu melhor amigo, a minha melhor companhia, o principal motivo de eu ser tão feliz. Obrigada por ter acompanhado de perto a realização deste sonho e por ter contribuído de inúmeras formas para que ele se realizasse. Obrigada por tudo!

Ao meu orientador professor Ruy Exel Filho, por ter me aceito como sua aluna, por toda a sua paciência e dedicação. Foi um prazer e uma honra ter podido conviver estes dois anos com o professor Ruy, a sua maneira de ensinar matemática é incrivelmente eficiente, estonteantemente bela e entusiasmante.

Ao professor Eliezer Batista, a quem eu carinhosamente chamo de Mestre, por ter sido sempre um porto seguro, alguém com quem conversar, tirar dúvidas (muitas dúvidas), pegar material emprestado, mas principalmente por ter sido ao longo de todos estes anos uma verdadeira fonte de energia. Obrigado por ter sempre me motivado e acreditado no meu potencial.

Ao professor Danilo Royer, por sempre ter estado disposto a tirar minhas dúvidas, por mais que ele não tivesse nada a ver com elas, por ter me ajudado em uma parte crucial deste trabalho e por isso dedico a ele todo o capítulo 3 desta dissertação.

Ao professor José Luiz Rosas Pinho, que apesar de ter tantos alunos para se preocupar nunca se esquece de seus velho alunos. Obrigada por ter me ensinado muito do que eu sei, por ter me apresentado o maravilhoso mundo das olimpíadas de matemática, por ser um exemplo como professor e como pessoa.

Aos meu três queridos e preciosos amigos: Rodrigo Maciel Rosa, Jucavo Savie Rocha e Giuliano Boava. Rodrigo por ser sempre uma companhia mais do que muito agradável, tê-lo por perto no segundo ano do meu mestrado fez com que os dias ficassem mais alegres, descontraídos e menos difíceis. Jucavo por ter me acompanhado ao longo destes anos, por ter aceito estudar Ánalise Funcional comigo mais do que ele precisava, por ser um verdadeiro amigo. Giuliano por ter sido meu parceiro nestes últimos dois anos, o melhor parceiro que eu poderia ter: extremamente inteligente, prestativo e amigo. Tenho certeza de que entre ações parciais, representações parciais e produtos cruzados parciais nasceu uma verdadeira amizade.

A Capes, por ter me concedido uma bolsa de mestrado, que sem a qual eu não teria feito esta dissertação. Gostaria de aproveitar para fazer um agradecimento especial a toda a equipe da Capes que trabalha com as bolsas de doutorado pleno no exterior, principalmente por todo o carinho que trataram os candidatos a bolsa durante as entrevistas no processo de seleção deste ano; é uma sorte ter pessoas como vocês trabalhando para realizar os sonhos de muitos estudantes.

Por fim, mas não menos importante, ao meu fiéis companheiros felinos peludos Barich e Zica por terem literalmente se debruçado sobre as minhas notas comigo e por fazerem meus dias mais felizes.

Resumo

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ duas isometrias. Dizemos que S_1 e S_2 são *compatíveis* se S_1 comuta com S_2 e, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $S_1^m (S_1^*)^m$ comuta com $S_2^n (S_2^*)^n$, isto é, as projeções finais de S_1^m e S_2^n (ou seja, as projeções ortogonais sobre as imagens de S_1^m e S_2^n) comutam.

Nosso principal objetivo neste trabalho é caracterizar a C^*-álgebra gerada por duas isometrias compatíveis como um produto cruzado parcial. Para isto, desenvolveremos a teoria de ações parciais, representações parciais e produtos cruzados parciais. Além disso, no capítulo final construiremos uma classe de representações desta C^*-álgebra fazendo uso da teoria de representações induzidas.

Abstract

Let $\mathcal{H}$ be a separable Hilbert space and $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ be two isometries. We say that S_1 and S_2 are *compatible* if S_1 commutes with S_2 and, for any $m, n \in \mathbb{N}$, we have that $S_1^m (S_1^*)^m$ commutes with $S_2^n (S_2^*)^n$, that is, the final projections of S_1^m and S_2^n (that is, the orthogonal projections over the images of S_1^m and S_2^n) commute.

Our main goal is to characterize the C^*-algebra generated by two compatible isometries as a partial crossed product. In order to do this, we will develop the theory of partial actions, partial representations and partial crossed products. Moreover, on the final chapter we will construct a class of representations of this C^*-algebra using the theory of induced representations.

Sumário

Introdução **1**

1 C*-álgebra gerada por uma isometria **4**

1.1 A C^*-álgebra gerada por um shift 5

1.2 A C^*-álgebra gerada pela soma direta de um operador unitário com um shift 11

1.3 O caso geral 13

1.4 A C^*-álgebra universal gerada por uma isometria 13

2 Conceitos Básicos e Resultados Preliminares **17**

2.1 Ações parciais 17

2.2 Produto cruzado parcial algébrico 29

2.2.1 A álgebra de multiplicadores 30

2.2.2 A associatividade do produto cruzado parcial algébrico 39

2.3 Representações parciais 42

2.4 A álgebra parcial de grupo 54

3 Produto cruzado parcial e C^*-álgebras com geradores e relações **59**

3.1 Produto cruzado parcial 59

3.2 C^*-álgebra parcial de grupo 64

3.3 C^*-álgebra parcial de grupo com mais relações 78

4 Exemplos de C*-álgebras universais geradas por isometrias **86**

4.1 Isometrias compatíveis e isometrias duplamente comutantes 87

4.2 A C^*-álgebra universal gerada por duas isometrias compatíveis 92

4.3 A C^*-álgebra universal gerada por duas isometrias duplamente comutantes 100

5 Representações Induzidas **112**

A C*-álgebra universal e envolvente **128**
A.1 C*-álgebra universal 128
A.2 C*-álgebra envolvente 139

B C*-módulos de Hilbert e Fibrados de Fell **141**
B.1 C*-módulos de Hilbert 142
B.2 Fibrados de Fell 151

Referências Bibliográficas **169**

Introdução

Quando queremos estudar um operador, temos em geral duas abordagens: podemos estudar um operador concreto, no sentido que você conhece sua fórmula e o espaço de Hilbert onde ele age, ou podemos estudar um operador no caso mais geral possível - você sabe que ele satisfaz uma determinada propriedade e somente isso. Por exemplo, podemos estudar o operador identidade entre a C^*-álgebra dos números complexos, que é uma isometria; este se encaixa na primeira abordagem - ou, estudar o operador que é uma isometria não unitária sobre um espaço de Hilbert arbitrário, que se encaixa na segunda abordagem. De uma certa forma, a segunda abordagem é muito mais geral do que a primeira. Uma vez querendo estudar um operador no caso geral, estudar a C^*-álgebra gerada por ele nos traz informações a respeito do operador.

A linguagem moderna para estudar a C^*-álgebra gerada por um operador abstrato que satisfaz certas propriedades é estudar a C^*-álgebra universal gerada por ele com as determinadas relações. Uma vez construída esta C^*-álgebra, no intuito de estudar o operador, ou os operadores, temos novamente dois enfoques: estudar a C^*-álgebra em si ou estudar as representações desta C^*-álgebra. Uma vez conhecendo as representações, conhecemos como os espaços de Hilbert onde estes operadores agem se comportam e sendo assim, conhecemos o comportamento destes operadores; e, quando tivermos um operador concreto, teremos uma representação deste operador e, se conhecemos todas as representações, saberemos como ele se comporta.

Em 1967 Coburn [2] caracterizou a C^*-álgebra gerada por uma isometria e, como uma conseqüência, possibilitou um estudo mais aprofundado desta C^*-álgebra e de suas representações. Naturalmente, uma vez conhecendo este trabalho, podemos nos perguntar se é possível caracterizar a C^*-álgebra gerada por duas isometrias. Como este é um problema bem geral, também é natural acrescentarmos algumas hipóteses sobre estas duas isometrias, no intuito de obter uma caracterização mais específica. Em 2002 Exel, Laca e Quigg [5] caracterizaram as C^*-álgebras dadas por geradores e um conjunto específico de relações como produtos cruzados parciais. No desejo de aplicar esta teoria ao estudo da C^*-álgebra universal gerada por duas isometrias que comutam, nos deparamos com a necessidade de acrescentar mais hipóteses sobre estas isometrias para poder fazer uso de tal caracterização.

Uma vez construído o isomorfismo entre a C^*-álgebra universal gerada por duas isometrias que comutam com mais alguma hipótese e um produto cruzado parcial, nos perguntamos se através deste isomorfismo poderíamos obter informações sobre as representações desta C^*-álgebra, já que o estudo de representações da C^*-álgebra gerada por duas isometrias que somente comutam é muito complexo. Em geral, os artigos conseguem decompor o espaço de Hilbert onde estas isometrias atuam em muitas partes, determinam a maioria delas, mas em pelo menos uma das partes nada conseguem afirmar. Como acrescentamos uma hipótese adicional, nos perguntamos se a complexidade do problema diminuiria. Foi então que nos deparamos com o trabalho de Horák and Müller [8], no qual eles acrescentavam a mesma hipótese sobre o par de isometrias que comutam e determinavam as representações da C^*-álgebra gerada por elas. As técnicas usadas para isto foram muito diferentes das técnicas estudas nesta dissertação, no entanto, conseguimos obter uma classe de representações fazendo uso do fato que podemos ver esta C^*-álgebra como um produto cruzado parcial. Esta classe de representações, que obtivemos fazendo uso da teoria de representações induzidas, também foi obtida no artigo [8] e, pelo que consta neste artigo, esta classe é muito importante no estudo das representações desta C^*-álgebra. Possivelmente usando outras técnicas seria possível reconstituir o teorema principal deste artigo, no qual os autores determinam todas as representações desta C^*-álgebra, mas não fomos tão longe.

No capítulo 1 nós faremos um estudo da abordagem de Coburn sobre a C^*-álgebra gerada por uma isometria; apesar destas técnicas serem também completamente distintas das técnicas que usaremos para estudar a C^*-álgebra gerada por duas isometrias que comutam e satisfazem mais uma relação, achamos importante citar este trabalho, já que ele nos serviu como uma motivação. No capítulo 2, abordamos a teoria básica de ações parciais e representações parciais que será usada no capítulo 3, para demonstrar o teorema que dá a caracterização de C^*-álgebras geradas por um conjunto de geradores e com um conjunto específico de relações como um produto cruzado parcial. Uma vez feito o teorema em abstrato, iremos no capítulo 4 em busca de quais hipóteses acrescentar sobre o par de isometrias que comutam, para fazer uso do teorema anteriormente citado. Por fim, no capítulo 5 estudamos um pouco da teoria de representações induzidas, para construir uma classe de representações da C^*-álgebra em questão. Além disso, acrescentamos a este trabalho dois apêndices: o primeiro trata da teoria de C^*-álgebra universais e envolventes, que é a linguagem moderna para tratar o problema em questão e o segundo, sobre a teoria de C^*-módulos de Hilbert e fibrados de Fell, que são duas teorias que nos auxiliarão em alguns resultados.

Para a leitura deste trabalho, recomenda-se que o leitor tenha algum conhecimento de análise funcional, teoria básica de operadores e topologia geral.

Por fim, apenas gostaríamos de mencionar que todo o trabalho se passa na categoria das C^*-álgebra unitais; alguns resultados podem ser generalizados para a categoria das C^*-álgebras não unitais, no entanto como o objetivo desta dissertação era estudar uma C^*-álgebra que é unital nos restringimos a esta categoria. Além disso, toda vez que nos referirmos a um homomorfismo, estamos nos referindo ao homomorfismo da categoria em questão, por exemplo, quando estivermos falando de $*$-álgebras normadas, os homomorfismo, são os $*$-homomorfismos contrativos e assim por diante. Quando nos referirmos aos ideais, também estaremos nos referindo aos ideais da categoria, por exemplo, toda vez que nos referirmos aos ideais de uma C^*-álgebra, estamos nos referindo aos ideais bilaterais fechados, a menos que se diga o contrário. Também, todos os espaços topológicos e conjuntos considerados serão não vazios.

Capítulo 1

C*-álgebra gerada por uma isometria

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, onde $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ denota a álgebra dos operadores lineares e limitados sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, com unidade denotada por 1 (observe que a unidade desta álgebra é a aplicação identidade sobre $\mathcal{H}$), tal que $U^*U = 1$, ou seja, U é uma isometria. Considere a sub-C^*-álgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ gerada por U, isto é, a menor sub-C^*-álgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que contém U, que denotaremos por $C^*\{U\}$. O que podemos determinar da estrutura de $C^*\{U\}$? Veremos que podemos dizer muito a respeito desta C^*-álgebra. Vamos primeiramente fixar a notação.

Um operador $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dito ser um *operador de shift à direita* sobre $\mathcal{H}$, quando existir uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$, tal que S é o operador determinado por $S(e_i) = e_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. No que segue, nos referiremos ao operador S simplesmente por um shift. Por um shift de multiplicidade α, entende-se a soma direta de α cópias de S, agindo sobre o espaço de Hilbert, que é a soma direta de α cópias de $\mathcal{H}$, onde $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ denotará o ideal (bilateral que não é fechado) dos operadores de posto finito sobre $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ o ideal dos operadores compactos sobre $\mathcal{H}$.

Para começar, sabemos que uma isometria é um operador muito bem determinado. Pelo teorema de Wold-Von Neumann (ver teorema 3.5.17 em [14]) temos que

(i) ou U é um operador unitário;

(ii) ou $U = S_\alpha$, onde S_α denota um shift de alguma multiplicidade α ;

(iii) ou $U = W \oplus S_\alpha$, onde W é um operador unitário.

Portanto, na seção 1.1 iremos estudar a C^*-álgebra gerada por um shift, na seção 1.2 iremos estudar a C^*-álgebra gerada por um operador que é a soma direta de um unitário com um shift, e finalmente na seção 1.3, estudaremos o caso geral: a C^*-álgebra gerada por uma isometria. Na última seção deste capítulo, veremos que a C^*-álgebra gerada por uma isometria é isomorfa a C^*-álgebra universal gerada por uma isometria. Além disso, mostraremos que a C^*-álgebra gerada por uma isometria é isomorfa a C^*-álgebra gerada por um shift.

Este capítulo teve como base o artigo [2].

1.1 A C^*-álgebra gerada por um shift

Nosso primeiro objetivo será estudar os ideais de $C^*\{S\}$.

Dados $y, z \in \mathcal{H}$ arbitrários, defina o operador $\Omega_{y,z} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que, para todo $x \in \mathcal{H}$, é dado por

$$\Omega_{y,z}(x) = \langle x, y \rangle z.$$

Sabemos que $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ é o espaço vetorial gerado pelas projeções de posto um (ver teorema 2.4.6 em [14]), e que toda projeção $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de posto um é da forma $\Omega_{x,x}$, para algum $x \in \mathcal{H}$ unitário; e, como $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ é denso em $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ (ver teorema 2.4.5 em [14]), segue que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ é o menor subespaço fechado de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que contém todos os operadores $\Omega_{y,z}$, já que todo operador de posto um é desta forma.

Teorema 1.1.1. *A C^*-álgebra $C^*\{S\}$ contém o ideal dos operadores compactos $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ e, para qualquer ideal I não trivial de $C^*\{S\}$, $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq I$.*

Demonstração. Para demonstrar que dado qualquer ideal I não nulo da C^*-álgebra $C^*\{S\}$, $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq I$, mostraremos que para todo $y, z \in \mathcal{H}$, $\Omega_{y,z} \in I$, donde seguirá o resultado, pela observação feita acima, já que I é fechado.

Seja $x = (x_0, x_1, x_2, \cdots) \in \mathcal{H}$ arbitrário; note que

$$\begin{aligned}
(1 - SS^*)(x) = 1(x) - SS^*(x) &= (x_0, x_1, x_2, \cdots) - SS^*(x_0, x_1, x_2, \cdots) \\
&= (x_0, x_1, x_2, \cdots) - S(x_1, x_2, \cdots) \\
&= (x_0, x_1, x_2, \cdots) - (0, x_1, x_2, \cdots) \\
&= (x_0, 0, 0, \cdots) = P_0(x),
\end{aligned}$$

donde segue que $P_0 = (1 - SS^*) \in C^*\{S\}$. Mas, temos também que $P_0 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, pois P_0 tem posto um. Logo, $C^*\{S\} \cap \mathcal{K}(\mathcal{H})$ é um ideal não nulo de $C^*\{S\}$.

Seja I um ideal não trivial arbitrário de $C^*\{S\}$; então, existe $T \in I$ operador não nulo, logo $T^*T \in I$. Como T é não nulo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T(e_N)\| \neq 0$.

Agora note que, para $m \in \mathbb{N}$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}
S^m P_0 (S^m)^*(x) &= S^m P_0 (S^*)^m (x_0, \cdots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \cdots) \\
&= S^m P_0 (x_m, x_{m+1}, \cdots) = S^m (x_m, 0, \cdots) \\
&= (0, \cdots, 0, x_m, 0, \cdots) = P_m(x),
\end{aligned}$$

donde segue que $P_m = S^m P_0 (S^m)^* \in C^*\{S\}$. Logo, $P_N T^* T P_N \in I$.

Mas, também temos que

$$\begin{aligned}
P_N T^* T P_N(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \langle P_N T^* T P_N(x), e_i \rangle e_i = \sum_{i=0}^{\infty} \langle T^* T P_N(x), P_N(e_i) \rangle e_i \\
&= \langle T^* T P_N(x), P_N(e_N) \rangle e_N = \langle T^* T P_N(x), e_N \rangle e_N \\
&= \langle x, P_N T^* T(e_N) \rangle e_N = \left\langle \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i, P_N T^* T(e_N) \right\rangle e_N \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle P_N(e_i), T^* T(e_N) \rangle e_N \\
&= \langle x, e_N \rangle \langle P_N(e_N), T^* T(e_N) \rangle e_N = \langle x, e_N \rangle \langle e_N, T^* T(e_N) \rangle e_N \\
&= \langle x, e_N \rangle \langle T(e_N), T(e_N) \rangle e_N = \langle T(e_N), T(e_N) \rangle \langle x, e_N \rangle e_N \\
&= \|T(e_N)\|^2 P_N(x),
\end{aligned}$$

donde segue que $P_N \in I$, já que $\|T(e_N)\| \neq 0$.

E, como

$$\begin{aligned}
\left(S^N\right)^* P_N S^N(x) &= (S^*)^N P_N S^N (x_0, \cdots, x_{N-1}, x_N, x_{N+1}, \cdots) \\
&= (S^*)^N P_N (0, \cdots, 0, x_0, x_1, \cdots) = (S^*)^N (0, \cdots, 0, x_0, 0, \cdots) \\
&= (x_0, 0, \cdots) = P_0(x),
\end{aligned}$$

temos que $P_0 = \left(S^N\right)^* P_N S^N \in I$.

Agora observe que, dado $y \in \mathcal{H}$ arbitrário, $y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i e_i$, então

$$\|y\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |\langle y, e_i \rangle|^{\,2} = \sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^{\,2} < +\infty;$$

logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $l \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{i=l}^{\infty} |y_i|^{\ 2} < \varepsilon^2. \tag{1.1}$$

Também, temos que $\displaystyle\sum_{i=0}^{l} y_i e_i = \sum_{i=0}^{l} y_i S^i(e_0)$; portanto, podemos definir um polinômio em S, dado por

$$p(S) = \sum_{i=0}^{l} y_i S^i \in C^*\{S\}.$$

Logo, dados $\varepsilon > 0$ e $y \in \mathcal{H}$ arbitrários, existe um polinômio $p(S) \in C^*\{S\}$, tal que $\|p(S)(e_0) - y\| < \varepsilon$, pois

$$\begin{aligned}
\|p(S)(e_0) - y\|^2 &= \left\| \sum_{i=0}^{l} y_i S^i(e_0) - \sum_{i=0}^{\infty} y_i e_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^{l} y_i e_i - \sum_{i=0}^{\infty} y_i e_i \right\|^2 \\
&= \left\| - \sum_{i=l+1}^{\infty} y_i e_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=l+1}^{\infty} y_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=l+1}^{\infty} |\langle y, e_i \rangle|^{\ 2} \\
&= \sum_{i=l+1}^{\infty} |y_i|^{\ 2} < \varepsilon^2,
\end{aligned}$$

pela equação 1.1.

Portanto,

$$\|p(S)(e_0) - y\| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Observe ainda que $\displaystyle (p(S))^* = \sum_{i=0}^{l} \overline{y_i} \big(S^i\big)^* = \sum_{i=0}^{l} \overline{y_i} (S^*)^i$, e também que

$$\begin{aligned}
(p(S))^*(x) &= \left(\sum_{i=0}^{l} \overline{y_i} (S^*)^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j e_j \right) \\
&= \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=0}^{\infty} \overline{y_i} (S^*)^i (x_j e_j);
\end{aligned}$$

logo,

$$
\begin{aligned}
P_0 \circ (p(S))^*(x) &= P_0\left(\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{\infty} \overline{y_i}(S^*)^i(x_j e_j)\right)\\
&= P_0((\overline{y_0}\, x_0, \overline{y_0}\, x_1, \cdots) + (\overline{y_1}\, x_1, \overline{y_1}\, x_2, \cdots) + \cdots + (\overline{y_l}\, x_l, \overline{y_l}\, x_{l+1}, \cdots))\\
&= \sum_{i=0}^{l} \overline{y_i}\, x_i\, e_0.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\Omega_{p(S)(e_0)-y,e_0}(x) &= \langle x, p(S)(e_0) - y\rangle e_0 = \left\langle x, \sum_{i=0}^{l} y_i\, S^i(e_0) - \sum_{i=0}^{\infty} y_i e_i \right\rangle e_0\\
&= \left\langle x, -\sum_{l+1}^{\infty} y_i e_i \right\rangle e_0 = \overline{\left\langle -\sum_{i=l+1}^{\infty} y_i e_i, x \right\rangle} e_0\\
&= \sum_{i=l+1}^{\infty} \overline{y_i}\, \langle x, e_i\rangle\, e_0 = \sum_{i=l+1}^{\infty} \overline{y_i}\, x_i\, e_0,
\end{aligned}
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
\|(P_0 \circ (p(S))^* - \Omega_{y,e_0})(x)\| = \|P_0 \circ (p(S))^*(x) - \Omega_{y,e_0}(x)\| &= \left\|\sum_{i=0}^{l} \overline{y_i}\, x_i\, e_0 - \langle x, y\rangle e_0\right\|\\
&= \left\|\sum_{i=0}^{l} \overline{y_i}\, x_i\, e_0 - \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\langle y, e_i\rangle}\langle x, e_i\rangle e_0\right\|\\
&= \left\|\sum_{i=0}^{l} \overline{y_i}\, x_i\, e_0 - \sum_{i=0}^{\infty} \overline{y_i}\, x_i\, e_0\right\| = \left\|-\sum_{i=l+1}^{\infty} \overline{y_i}\, x_i\, e_0\right\|\\
&= \left\|\sum_{i=l+1}^{\infty} \overline{y_i}\, x_i\, e_0\right\| = \left\|\Omega_{p(S)(e_0)-y,e_0}(x)\right\|\\
&\leq \left\|\Omega_{p(S)(e_0)-y,e_0}\right\| \|x\|,
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\|P_0 \circ (p(S))^* - \Omega_{y,e_0}\| \leq \left\|\Omega_{p(S)(e_0)-y,e_0}\right\| \leq \|p(S)(e_0) - y\| \|e_0\| < \varepsilon,
$$

pela equação 1.2, donde segue que $\Omega_{y,e_0} \in I$.

Agora, de forma análoga a construção do polinômio $p(S)$, dado $z \in \mathcal{H}$ qualquer, podemos construir um polinômio, $q(S) = \sum_{i=0}^{k} z_i\, S^i \in C^*\{S\}$, tal que dado $\varepsilon > 0$,

$\|q(S)(e_0) - z\| < \dfrac{\varepsilon}{\|y\|}$.

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}\|(q(S) \circ \Omega_{y,e_0} - \Omega_{y,z})(x)\| &= \|q(S) \circ \Omega_{y,e_0}(x) - \Omega_{y,z}(x)\| = \|q(S)(\langle x, y\rangle e_0) - \langle x, y\rangle z\| \\ &= \|\langle x, y\rangle (q(S)(e_0) - z)\| = |\langle x, y\rangle| \; \|q(S)(e_0) - z\| \\ &\leq \|x\|\|y\|\varepsilon,\end{aligned}$$

donde segue que

$$\|q(S) \circ \Omega_{y,e_0} - \Omega_{y,z}\| < \varepsilon.$$

Logo, como I é fechado, $\Omega_{y,z} \in I$, mas como $y, z \in \mathcal{H}$ foram tomados arbitrariamente, segue que, I contém todos os operadores de posto um, donde segue que $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq I$.

Por fim, tomando $I = C^*\{S\}$, segue que a C^*-álgebra $C^*\{S\}$ contém o ideal dos operadores compactos.

∎

Corolário 1.1.2. *A C^*-álgebra $C^*\{S\}$é densa em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, na topologia forte, ou seja, a topologia da convergência pontual na norma de operadores.*

Demonstração. Como $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ é fortemente denso em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ver exemplo 2.4.9 em [1]), e pelo teorema anterior $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq C^*\{S\}$, o resultado segue.

∎

Corolário 1.1.3. *Um shift não tem subespaços reduzidos, exceto os triviais $\{0\}$ e $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Relembrando, um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dito *redutível*, se existe $V \subseteq \mathcal{H}$, que é denominado reduzido, tal que $T(V) \subseteq V$ e $T\big(V^{\perp}\big) \subseteq V^{\perp}$. Sabemos que

$$T\big(V^{\perp}\big) \subseteq V^{\perp} \Leftrightarrow T^*(V) \subseteq V.$$

Então, se existe $V \subseteq \mathcal{H}$ tal que $S(V) \subseteq V$ e $S^*(V) \subseteq V$, como $C^*\{S\}$ é fortemente densa em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, temos que para todo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T(V) \subseteq V$ e $T^*(V) \subseteq V$. Portanto, $V = \{0\}$ ou $V = \mathcal{H}$.

∎

Definição 1.1.4. $C^*\{S\}$ é denominada a *álgebra de Toeplitz.*

Teorema 1.1.5. *A C^*-álgebra $C^*\{S\}/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ é isomorfa a $C\big(\mathbb{S}^1\big)$, onde $\mathbb{S}^1$ denota o círculo unitário complexo.*

Demonstração. Primeiramente, vamos verificar que $C^*\{S\}/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ é comutativa. Seja $\pi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ a projeção canônica, e note que $C^*\{S\}/\mathcal{K}(\mathcal{H}) = C^*\{\pi(S)\}$. Logo, para mostrarmos que $C^*\{S\}/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ é comutativa, basta mostrarmos que $\pi(S^*S) = \pi(SS^*)$, pois deste fato, segue que $\pi(S)$ é normal, já que

$$\pi(S^*S) = \pi(SS^*) \;\Rightarrow\; \pi(S)^*\pi(S) = \pi(S)\pi(S)^*,$$

e sabemos que a C^*-álgebra gerada por um elemento normal é comutativa (ver exercício 3.3.9 em [15]).

Agora, para mostrar que $\pi(S^*S) = \pi(SS^*)$, mostraremos que $S^*S - SS^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Tome $x \in \mathcal{H}$ arbitrário e observe que

$$\begin{aligned}
(S^*S - SS^*)(x) &= S^*S(x_0, x_1, x_2, \cdots) - SS^*(x_0, x_1, x_2, \cdots) \\
&= S^*(0, x_1, x_2, \cdots) - S(x_1, x_2, \cdots) \\
&= (x_0, x_1, x_2, \cdots) - (0, x_1, x_2, \cdots) \\
&= (x_0, 0, 0, \cdots) = P_0(x),
\end{aligned}$$

donde segue que $S^*S - SS^* = P_0 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Portanto $C^*\{S\}/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ é comutativa. Logo,

$$C^*\{S\}/\mathcal{K}(\mathcal{H}) \cong C(\sigma(\pi(S))),$$

onde $\sigma(\pi(S))$ denota o espectro de $\pi(S)$ (ver proposição 3.3.10 em [15]).

Vamos portanto determinar o espectro de $\pi(S)$. Como $\pi(S)$ é também um elemento unitário, segue que $\sigma(\pi(S)) \subseteq \mathbb{S}^1$ (ver proposição 3.3.11 em [15]). Agora, dado $\lambda \in \mathbb{S}^1$ arbitrário, o operador $U_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dado por $U_\lambda = \operatorname{diag}_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda^n)$ é um operador unitário tal que $\lambda DU_\lambda = U_\lambda S$, ou seja, $\lambda S = U_\lambda S U_\lambda^{-1}$. Assim, temos que

$$\lambda\sigma(\pi(S)) = \sigma(\lambda\pi(S)) = \sigma\big(\pi(U_\lambda)\pi(S)\pi\big(U_\lambda^{-1}\big)\big) = \sigma(\pi(S));$$

segue-se daí que $\sigma(\pi(S))$ é um subconjunto de $\mathbb{S}^1$ que é invariante por rotações arbitrárias, donde temos que $\sigma(\pi(S)) = \mathbb{S}^1$. Portanto,

$$C^*\{S\}/\mathcal{K}(\mathcal{H}) \;\cong\; C\big(\mathbb{S}^1\big).$$

$\blacksquare$

1.2 A C^*-álgebra gerada pela soma direta de um operador unitário com um shift

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}$, tais que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, W um operador unitário sobre $\mathcal{H}_1$, e S um shift sobre $\mathcal{H}_2$.

Veremos nesta seção que os resultados obtidos na seção anterior, para a $C^*\{S\}$, podem ser traduzidos para o contexto da $C^*\{W \oplus S\}$, de uma forma muito natural.

Começaremos com um lema técnico, que será de grande utilidade nas próximas demonstrações.

Lema 1.2.1. *Se $T_1 \oplus T_2 \in C^*\{W \oplus S\}$, então*

$$\|T_1\| \leq \|\pi_2(T_2)\|,$$

onde $\pi_2 : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)/\mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$ é a projeção canônica.

Demonstração. Existe uma seqüência de polinômios, em duas variáveis não comutativas,

$$p_n(x, y) = \sum a^{(n)}_{i_1 \cdots i_k}\, x^{i_1}\, y^{i_2}\, x^{i_3} \cdots y^{i_k},$$

tais que $p_n(W, W^*) \to T_1$ e $p_n(S, S^*) \to T_2$ na topologia da norma. Esta é apenas uma maneira de expressar que $T_1 \oplus T_2$ é um limite de elementos da $C^*\{W \oplus S\}$.

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$, temos que

$$\|p_n(\pi_2(S), \pi_2(S^*)) - \pi_2(T_2)\| = \|\pi_2(p_n(S, S^*) - T_2)\| \leq \|p_n(S, S^*) - T_2\| < \varepsilon,$$

e portanto,

$$p_n(\pi_2(S), \pi_2(S^*)) \to \pi_2(T_2).$$

Já que $\pi_2(S)$ é normal e $\sigma(\pi_2(S)) = \mathbb{S}^1$,

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{S}^1} |p_n(\lambda, \overline{\lambda})| \;= \|p_n(\lambda, \overline{\lambda})\| = \|p_n(\pi_2(S), \pi_2(S^*))\| \to \|\pi_2(T_2)\|.$$

Analogamente, considerando $C^*\{W\}$, obtemos que

$$\sup_{\lambda \in \sigma(W)} |p_n(\lambda, \overline{\lambda})| \;= \|p_n(W, W^*)\| \to \|T_1\|.$$

Logo, como $\sigma(W) \subseteq \mathbb{S}^1$, já que W é unitário, temos que $\|T_1\| \leq \|\pi_2(T_2)\|$.

∎

Teorema 1.2.2. *$C^*\{W \oplus S\}$ é isomorfa a $C^*\{S\}$.*

Demonstração. Seja $P = \{p(W \oplus S, W^* \oplus S^*) \,|\, p \text{ é um polinômio}\}$. Claramente $P \subseteq C^*\{W \oplus S\}$ e é denso. Defina a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : P & \longrightarrow & C^*\{S\} \\ p(W \oplus S, W^* \oplus S^*) & \longmapsto & p(S, S^*). \end{array}$$

Note que esta aplicação é claramente um homomorfismo. Além disso, tomando $p \in P$ arbitrário, temos que

$$\|p(W, W^*) \oplus p(S \oplus S^*)\| = \max(\|p(W, W^*)\|, \|p(S, S^*)\|);$$

mas, pelo lema anterior, $\|p(W, W^*)\| \leq \|p(S, S^*)\|$, logo

$$\|p(W, W^*) \oplus p(S \oplus S^*)\| = \|p(S, S^*)\|.$$

Portanto, φ estende-se para uma isometria de $C^*\{W \oplus S\}$, sobrejetivamente sobre $C^*\{S\}$, pois a imagem de φ é densa em $C^*\{S\}$. Logo, φ é um isomorfismo.

■

Corolário 1.2.3. *$C^*\{W \oplus S\}$ tem um único ideal não trivial minimal $I(W \oplus S)$, tal que*

$$C^*\{W \oplus S\}/I(W \oplus S) \cong C\big(\mathbb{S}^1\big).$$

Demonstração. Pelo teorema 1.1.5, temos que $C^*\{S\}/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ é isomorfa a $C\big(\mathbb{S}^1\big)$ e como pelo teorema anterior, temos que $C^*\{W \oplus S\}$ é isomorfa a $C^*\{S\}$ o resultado segue.

■

Teorema 1.2.4. *$I(W \oplus S) = 0 \oplus \mathcal{K}(\mathcal{H}_2) = \mathcal{K}(\mathcal{H}) \cap C^*\{W \oplus S\}$, onde $I(W \oplus S) \in C^*\{W \oplus S\}$ é o ideal minimal não trivial, mencionado no corolário acima.*

Demonstração. Visto que

$$(W^* \oplus S^*)(W \oplus S) - (W \oplus S)(W^* \oplus S^*) = (W^*W \oplus S^*S) - (WW^* \oplus SS^*) = (0 \oplus P_0),$$

vemos que $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \cap C^*\{W \oplus S\} \trianglelefteq C^*\{W \oplus S\}$ é não trivial. Agora, suponha que J é qualquer ideal não trivial de $C^*\{W \oplus S\}$. Pelo lema 1.2.1, se $T \oplus V$ é um elemento não nulo de J, então $V \neq 0$. Por isso, para algum $N \in \mathbb{N}$, temos que $\|V(f_N)\| \neq 0$, onde

$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a base de $\mathcal{H}_2$. A demonstração que $0 \oplus \mathcal{K}(\mathcal{H}_2) \subseteq J$ é análoga a demonstração do teorema 1.1.1. Como pelo teorema anterior $\varphi(\mathcal{K}(\mathcal{H}_2)) \subseteq 0 \oplus \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$, segue que

$$I(W \oplus S) = \varphi(\mathcal{K}(\mathcal{H}_2)) = 0 \oplus \mathcal{K}(\mathcal{H}_2).$$

Além disso, se $T \oplus V \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \cap C^*\{W \oplus S\}$, então $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$ e $V \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$, e novamente segue do lema 1.2.1 que $\|T\| = 0$, sendo assim $0 \oplus \mathcal{K}(\mathcal{H}_2) = \mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus C^*\{W \oplus S\}$.

■

1.3 O caso geral

No caso em que $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma isometria arbitrária, podemos usar o teorema de Wold-Von Neumann (ver teorema 3.5.17 em [14]) que nos diz que:

(i) ou U é um operador unitário;

(ii) ou $U = S_\alpha$, onde S_α denota um shift de alguma multiplicidade α ;

(iii) ou $U = W \oplus S_\alpha$, onde W é um operador unitário.

No primeiro caso, $C^*\{U\}$ é isomorfa a $C(\sigma(U))$. No segundo caso, a aplicação $S \leftrightarrow S_\alpha$, induz um isomorfismo sobre $C^*\{U\}$ e $C^*\{S\}$, assim a teoria da seção 1.1 estende-se para $C^*\{U\}$. No último caso, a aplicação $W \oplus S \leftrightarrow W \oplus S_\alpha$ induz um isomorfismo entre $C^*\{U\}$ e $C^*\{W \oplus S\}$; assim, a teoria da seção 1.2 estende-se para $C^*\{U\}$. Nos casos (ii) e (iii), veremos na próxima seção que $C^*\{U\} \cong C^*\{S\}$ e, portanto, existe um único ideal não trivial minimal $I(U)$ tal que $C^*\{U\}/I(U) \cong C(\mathbb{S}^1)$. Deste modo, a estrutura algébrica é independente de W e α.

1.4 A C^*-álgebra universal gerada por uma isometria

Seja $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $U^*U = 1$ e $UU^* \neq 1$, ou seja, U é uma isometria que não é unitária. Sejam também $\mathcal{G} = \{T\}$ e $\mathcal{R} = \{T^*T = 1\}$. Claramente o par $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ é admissível, logo existe $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$.

Teorema 1.4.1. $C^*\{S\} \cong C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$.

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{G} &\longrightarrow C^*\{S\} \\ T &\longmapsto S \end{aligned}$$

Note que ρ é uma representação de $\mathcal{G}$ que satisfaz $\mathcal{R}$, já que a sua extensão algébrica $\widetilde{\rho}$ é tal que

$$\|\widetilde{\rho}(T^*T - 1)\| = \|\rho(T)^*\rho(T) - \rho(1)\| = \|S^*S - 1\| = 0.$$

Portanto, pela propriedade universal de $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$, existe um único homomorfismo φ, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\iota"'] & & C^*\{S\} \\ & C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R}) \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Logo, $\varphi(\iota(T)) = \rho(T) = S$.

Agora construiremos um homomorfismo que será o inverso de φ.

Sabemos que existe $\pi : C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{B}\left(\widetilde{H}\right)$, uma representação isométrica, para algum espaço de Hilbert $\widetilde{H}$ (ver teorema 3.4.15 em [15]). Portanto, $\pi\left(\overline{T}\right)$ é uma isometria em $\mathcal{B}\left(\widetilde{H}\right)$, onde $\overline{T}$ denota a classe de T em $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$. Logo $\pi\left(\overline{T}\right) = W \oplus S_\alpha$, onde W é um operador unitário e S_α é um shift de alguma multiplicidade α. Como W é unitário, temos que

$$C^*\{W\} \cong C(\sigma(W)) = C(X),$$

onde X é um subconjunto fechado de $\mathbb{S}^1$.

Vamos definir um homomorfismo $\gamma_1 : C^*\{S\} \longrightarrow C^*\{W\}$, da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd} C^*\{S\} \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "q"'] & C^*\{W\} \\ C\left(\mathbb{S}^1\right) \arrow[r, "\eta"'] & C(X) \arrow[u, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

onde $q : C^*\{S\} \longrightarrow C\left(\mathbb{S}^1\right)$ é a projeção canônica sobre o ideal dos compactos, composta com o isomorfismo entre $C^*\{S\}/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ e $C\big(\mathbb{S}^1\big)$,

$$\begin{aligned} \eta : C\big(\mathbb{S}^1\big) &\longrightarrow C(X) \\ f &\longmapsto f|_X, \end{aligned}$$

ou seja, η é simplesmente a aplicação de restrição sobre X e θ é o isomorfismo dado pelo teorema do cálculo funcional contínuo (ver proposição 3.3.10 em [15]). Logo, $\gamma_1 = \theta \circ \eta \circ q$. Note que,

$$\gamma_1(S) = \theta \circ \eta \circ q(S) = \theta \circ \eta(f_1) = \theta(f_1|_X) = W,$$

onde $f_1 : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é a aplicação identidade restrita a X.

Agora, iremos construir um homomorfismo $\gamma_2 : C^*\{S\} \longrightarrow C^*\{S_\alpha\}$. Sabemos que para qualquer espaço de Hilbert $\widehat{H}$ e qualquer $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{B}\Big(\widehat{H}\Big) &\longrightarrow \mathcal{B}\Big(\oplus_{i=1}^k \widehat{H}\Big) \\ V &\longmapsto \oplus_{i=1}^k V \end{aligned}$$

é um isomorfismo; logo, a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : C^*\{V\} &\longrightarrow C^*\big\{V^k\big\} \\ V &\longmapsto \oplus_{i=1}^k V \end{aligned}$$

também é um isomorfismo.

Portanto, a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_2 : C^*\{S\} &\longrightarrow C^*\{\oplus_{i=1}^\alpha S\} \\ V &\longmapsto \oplus_{i=1}^\alpha V \end{aligned}$$

está claramente bem definida, e ainda, $\gamma_2(S) = S_\alpha$. Logo,

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 : C^*\{S\} \longrightarrow \mathcal{B}\Big(\widehat{H}_1\Big) \oplus \mathcal{B}\Big(\widehat{H}_2\Big) \subseteq \mathcal{B}\Big(\widehat{H}_1 \oplus \widehat{H}_2\Big) = \mathcal{B}\Big(\widehat{H}\Big),$$

onde $\widehat{H}_1, \widehat{H}_2$ são espaços de Hilbert tais que $\pi\big(\overline{T}\big)|_{\widehat{H}_1} = W$ e $\pi\big(\overline{T}\big)|_{\widehat{H}_2} = S_\alpha$.

Agora, note que

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2(S) = \gamma_1(S) \oplus \gamma_2(S) = W \oplus S_\alpha = \pi\big(\overline{T}\big),$$

e ainda, claramente $\gamma_1 \oplus \gamma_2(C^*\{S\}) \subseteq C^*\big\{\pi\big(\overline{T}\big)\big\}$. Como $C^*\big\{\pi\big(\overline{T}\big)\big\} \cong C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$, fica bem definida a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \phi : C^*\{S\} & \longrightarrow & C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \\ S & \longmapsto & \overline{T}, \end{array}$$

onde $\phi = \pi^{-1} \circ (\gamma_1 \oplus \gamma_2)$.

Portanto, como claramente φ e ϕ são uma o inverso da outra, segue que, $C^*\{S\} \cong C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$.

■

Observação 1.4.2. Sempre que definirmos uma aplicação f, no intuito de mostrar que ela é uma representação de um par $(\mathcal{G},\mathcal{R})$, denotaremos por $\widetilde{f}$ a sua extensão algébrica.

Corolário 1.4.3. *Sejam $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que U é uma isometria que não é unitária e $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ a C^*-álgebra universal gerada por uma isometria. Então $C^*\{U\} \cong C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$.*

Demonstração. Como U é uma isometria, podemos escrever $U = S \oplus Z$; então $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ e S é um shift sobre $\mathcal{H}_1$. Agora, note que

$$\begin{array}{rcl} \varphi : C^*\{U\} & \longrightarrow & C^*\{S\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \\ V & \longmapsto & P_1 \circ (V|_{\mathcal{H}_1}), \end{array}$$

onde P_1 denota a projeção ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}_1(\mathbb{N})$, está claramente bem definida e, ainda, $\varphi(U) = S$. Observe também que φ é claramente um homomorfismo, já que leva gerador em gerador e um operador em $C^*\{U\}$ está associado a uma matriz de operadores que é diagonal por blocos.

Pelo teorema 1.4.1 temos que

$$\begin{array}{rcl} \phi : C^*\{S\} & \longrightarrow & C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \\ S & \longmapsto & \overline{T}, \end{array}$$

é um isomorfismo. Desta forma, temos o seguinte homomorfismo: $\phi \circ \varphi : C^*\{U\} \longrightarrow C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$, onde $\phi \circ \varphi(U) = \overline{T}$. Como da propriedade universal de $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ temos um homomorfismo de $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ em $C^*\{U\}$ que é claramente a inversa de $\phi \circ \varphi$, segue que $C^*\{U\} \cong C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$.

■

Capítulo 2

Conceitos Básicos e Resultados Preliminares

Neste capítulo 2 trabalharemos, a menos de algumas definições e exemplos, na categoria das álgebras, para depois, no capítulo 3, nos restringirmos a categoria das C^*-álgebras, na qual o restante do trabalho será desenvolvido.

Antes de definirmos o que é um produto cruzado parcial algébrico, precisaremos estudar algumas definições e resultados de ações parciais e representações parciais. Uma vez feito isto, definiremos o produto cruzado parcial algébrico; uma das primeiras perguntas, que surge naturalmente após a construção de uma estrutura algébrica, com uma aplicação produto definida nela, é quais propriedades esta aplicação satisfaz, sendo talvez a associatividade a mais básica delas. Veremos então sob quais condições o produto parcial algébrico será associativo e, para isto, precisaremos desenvolver algumas ferramentas da teoria de álgebra de multiplicadores. Por fim, demonstraremos que a álgebra parcial de grupo será isomorfa a um produto cruzado parcial algébrico, servindo como uma motivação para buscarmos uma versão aprimorada deste resultado, na categoria das C^*-álgebras, o que será feito na seqüência, no capítulo 3.

Este capítulo teve como base o artigo [3].

2.1 Ações parciais

Definição 2.1.1. Sejam G um grupo e X um conjunto. Uma *ação parcial* α de G sobre X, é um par ordenado $\Big(\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}\Big)$, onde para todo $g \in G$, D_g é um subconjunto de X, $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ é uma bijeção e satisfazem os seguintes axiomas:

(i) $D_e = X$;

(ii) $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$;

(iii) $\forall x \in \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}),\ \alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$.

Se para todo $g \in G$, $D_g = X$, dizemos que α é uma *ação global* de G sobre X.

Portanto, a definição de uma ação parcial, é uma generalização do conceito de ação global, que usualmente, é denominada apenas por ação.

Note que as condições (ii) e (iii) acima, nos dizem que a função α_{gh} é uma extensão da função $\alpha_g \circ \alpha_h$, pois $\mathrm{Dom}(\alpha_g \circ \alpha_h) = \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}} = \mathrm{Dom}(\alpha_{gh})$, e para qualquer $x \in \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = \mathrm{Dom}(\alpha_g \circ \alpha_h),\ \alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$.

Observe ainda que, tomando $g = h^{-1}$ no item (iii), para qualquer $x \in \alpha_h^{-1}(D_h) = D_{h^{-1}}$, temos que

$$\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_h(x) = \alpha_{h^{-1}h}(x) \Rightarrow \alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_h(x) = x;$$

analogamente, tomando $g = h$ e $h = h^{-1}$ no item (iii), para qualquer $x \in \alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}}) = D_h$ obtemos,

$$\alpha_h \circ \alpha_{h^{-1}}(x) = \alpha_{hh^{-1}}(x) \Rightarrow \alpha_h \circ \alpha_{h^{-1}}(x) = x.$$

Portanto, $\alpha_{h^{-1}} = \alpha_h^{-1}$.

Seguindo a seqüência de observações, temos que a condição (ii), na definição acima, é equivalente a seguinte: para quaisquer $g, h \in G$,

$$\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}. \tag{2.1}$$

A equação 2.1 claramente implica (ii), portanto vamos verificar que (ii) implica na equação 2.1. De (ii) temos que $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$, mas $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}}$, logo

$$\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}.$$

Substituindo na equação acima, h por h^{-1} e g por gh, nós obtemos

$$\alpha_{h^{-1}}^{-1}\big(D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}\big) \subseteq D_h \cap D_{(ghh^{-1})^{-1}} = D_h \cap D_{g^{-1}}.$$

Portanto,

$$\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_h\big(D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}\big) \subseteq \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \Rightarrow D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}} \subseteq \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}).$$

Logo, $\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.

Por fim, as condições (i) e (iii) nos dizem que α_e é a aplicação identidade de X, pois temos que para todo $x \in \alpha_e^{-1}(D_e \cap D_e) = D_e = X$,

$$\alpha_e \circ \alpha_e(x) = \alpha_e(x) \Rightarrow \alpha_e(x) = x.$$

Exemplo 2.1.2. *Sejam X, Y conjuntos tais que $X \subseteq Y$, G um grupo, $\mathscr{B}(Y) = \{f : Y \longrightarrow Y \mid f$ é bijeção$\}$ e $\beta : G \longrightarrow \mathscr{B}(Y)$ uma ação de grupo.*

A partir de β vamos definir uma ação parcial de G sobre X. Defina para todo $g \in G$, $D_{g^{-1}} = \{x \in X \mid \beta_g(x) \in X\} = X \cap \beta_{g^{-1}}(X)$ e

$$\begin{aligned} \alpha_g : D_{g^{-1}} &\longrightarrow D_g \\ x &\longmapsto \beta_g(x). \end{aligned}$$

Claramente para todo $g \in G$, $D_g \subseteq X$ e α_g é uma bijeção por construção. Os axiomas (i) e (iii) de ação parcial são diretamente satisfeitos por α, pois β é uma ação. Vamos portanto verificar o axioma (ii), isto é, que $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$. Note que

$$\begin{aligned} {\alpha_h}^{-1} : D_h &\longrightarrow D_{h^{-1}} \\ x &\longmapsto \beta_{h^{-1}}(x) = \beta_h^{-1}(x). \end{aligned}$$

Agora tome $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$ arbitrário; então, existe $y \in D_h \cap D_{g^{-1}}$ tal que $x = {\alpha_h}^{-1}(y) = \beta_{h^{-1}}(y)$. Como $y \in D_h \cap D_{g^{-1}}$, temos que $y = \beta_h(z)$ e $y = \beta_{g^{-1}}(w)$ para algum $z, w \in X$. Então, temos que

$$x = {\alpha_h}^{-1}(y) = \beta_{h^{-1}}(y) = \beta_{h^{-1}}(\beta_{g^{-1}}(w)) = \beta_{h^{-1}g^{-1}}(w) = \beta_{(gh)^{-1}}(w),$$

donde segue que $x \in D_{(gh)^{-1}}$.

Portanto α é uma ação parcial de G sobre X.

A definição de uma ação parcial é um conceito que pode ser estendido para várias categorias, como veremos no que segue.

Definição 2.1.3. Seja G um grupo e X um espaço topológico. Uma *ação parcial* α de G sobre X, é uma ação parcial α de G sobre o conjunto X, onde para todo $g \in G$, D_g é um aberto de X e α_g é um homeomorfismo.

Definição 2.1.4. Seja G um grupo e $\mathcal{A}$ uma álgebra. Uma *ação parcial* α de G sobre $\mathcal{A}$, é uma ação parcial α de G sobre o conjunto $\mathcal{A}$, onde para todo $g \in G$, D_g é um ideal de $\mathcal{A}$ e α_g é um isomorfismo.

Definição 2.1.5. Um sistema dinâmico parcial, é uma tripla ordenada $(\mathcal{A}, G, \alpha)$, onde $\mathcal{A}$ é uma álgebra, G é um grupo e α é uma ação parcial de G sobre $\mathcal{A}$.

Esta é uma definição que nos será muito útil, visto que, ao nos referirmos a um sistema dinâmico parcial, estaremos nos referindo à álgebra, ao grupo e à ação parcial desta álgebra neste grupo.

Exemplo 2.1.6. *Sejam X um conjunto, G um grupo, α uma ação parcial de G sobre X e $\mathbb{K}$ um corpo. Defina $\mathcal{A} = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ é função}\}$. Note que $\mathcal{A}$ é uma álgebra com as operações ponto a ponto.*

Queremos a partir de α construir uma ação parcial de G sobre $\mathcal{A}$. Como α é uma ação parcial, existem para todo $g \in G$, os subconjuntos D_g, e a partir deles vamos definir ideais I_g de $\mathcal{A}$, da seguinte forma:

$$I_g = \{f \in \mathcal{A} \mid \forall x \notin D_g, f(x) = 0\}.$$

Note que para todo $g \in G$, I_g claramente é um ideal de $\mathcal{A}$. Agora para $g \in G$ arbitrário, defina $\theta_g : I_{g^{-1}} \longrightarrow I_g$, tal que para qualquer $f \in I_g$

$$(\theta_g(f))(x) = \begin{cases} f \circ \alpha_{g^{-1}}(x), & se\ x \in D_g; \\ 0, & se\ x \notin D_g. \end{cases}$$

Vamos verificar primeiramente que, para todo $g \in G$, θ_g é um isomorfismo.

Tome $g \in G$ arbitrário.

• *Homomorfismo: Note que para quaisquer $f, h \in I_{g^{-1}}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in D_g$ temos que*

1.
$$\begin{aligned}(\theta_g(\alpha f + h))(x) &= (\alpha f + h) \circ \alpha_{g^{-1}}(x) = \alpha f \circ \alpha_{g^{-1}}(x) + h \circ \alpha_{g^{-1}}(x) \\ &= (\alpha\theta_g(f))(x) + (\theta_g(h))(x),\end{aligned}$$

e portanto, $\theta_g(\alpha f + h) = \alpha\theta_g(f) + \theta_g(h)$;

2.
$$\begin{aligned}(\theta_g(fh))(x) &= (fh) \circ \alpha_{g^{-1}}(x) = (fh)(\alpha_{g^{-1}}(x)) = f(\alpha_{g^{-1}}(x))h(\alpha_{g^{-1}}(x)) \\ &= (f \circ \alpha_{g^{-1}}(x))(h \circ \alpha_{g^{-1}}(x)) = (\theta_g(f))(x)(\theta_g(h))(x),\end{aligned}$$

e portanto, $\theta_g(fh) = \theta_g(f)\theta_g(h)$.

• *Injetividade: Tome $f \in I_{g^{-1}}$ tal que $\theta_g(f) = 0$. Então, para todo $x \in D_g$, $(\theta_g(f))(x) = 0$, isto é, $f \circ \alpha_{g^{-1}}(x) = 0$, e como $\alpha_{g^{-1}}$ é inversível, segue que para todo $x \in D_g$, $f = 0$, e portanto, $f \equiv 0$, já que por definição, para todo $x \in X \backslash D_g$, $f = 0$.*

• *Sobrejetividade: Tome $h \in I_g$ arbitrária. Defina*

$$h \circ \alpha_g(x) = \begin{cases} h \circ \alpha_g(x), & se\ x \in D_{g^{-1}}; \\ 0, & se\ x \notin D_{g^{-1}}. \end{cases}$$

Note que $h \circ \alpha_g \in I_{g^{-1}}$ e, além disso,

1. *se $x \in D_{g^{-1}}$, $\theta_g(h \circ \alpha_g) = h \circ \alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}} = h$;*

2. *se $x \notin D_{g^{-1}}$, $0 = \theta_g(h \circ \alpha_g) = h$.*

Portanto, θ_gé um isomorfismo.

Agora vamos verificar que θ satisfaz os axiomas de ação parcial. Tome $g, h \in G$ arbitrários. Então, temos que

(i) $I_e = \mathcal{A}$ por vacuidade.

(ii) Queremos mostrar que $\theta_{h^{-1}}(I_h \cap I_{g^{-1}}) \subseteq I_{(gh)^{-1}}$. Para isto, tome $f \in \theta_{h^{-1}}(I_h \cap I_{g^{-1}})$ arbitrária; então, para alguma $\xi \in I_h \cap I_{g^{-1}}$, $f = \theta_{h^{-1}}(\xi)$. Temos que provar que $f \in I_{(gh)^{-1}}$, logo basta mostrarmos que para todo $x \notin D_{(gh)^{-1}}$, $f(x) = 0$. Note que por $\xi \in I_h \cap I_{g^{-1}}$, temos que

$$\forall x \notin D_h,\ \xi(x) = 0, e\ \forall x \notin D_{g^{-1}},\ \xi(x) = 0,$$

logo para todo $x \notin D_h \cap D_{g^{-1}}$, $\xi(x) = 0$.

Note também que

$$f(x) = (\theta_{h^{-1}}(\xi))(x) = \begin{cases} \xi \circ \alpha_h(x), & se\ x \in D_{h^{-1}}; \\ 0, & se\ x \notin D_{h^{-1}}. \end{cases}$$

Tome $x \notin D_{(gh)^{-1}}$; relembrando, queremos mostrar que $f(x) = 0$.

- *Caso 1: Se $x \notin D_{h^{-1}}$, então $f(x) = 0$.*
- *Caso 2: Se $x \in D_{h^{-1}}$, então temos que*

$$f(x) = \xi \circ \alpha_h(x) = \xi(\alpha_h(x)).$$

Sabemos que se $z \in X \backslash (D_h \cap D_{g^{-1}}) = (X \backslash D_h) \cup (X \backslash D_{g^{-1}})$, então $\xi(z) = 0$. Como $\alpha_h(x) \in D_h$, vamos mostrar que $\alpha_h(x) \notin D_{g^{-1}}$, donde seguirá que $f(x) = \xi(\alpha_h(x)) = 0$, como queríamos.

Suponha que $\alpha_h(x) \in D_{g^{-1}}$; então, $\alpha_h(x) \in D_{g^{-1}} \cap D_h$, mas como α é ação parcial, temos que

$$x = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_h(x)) \in D_{(gh)^{-1}},$$

o que é uma contradição, já que tomamos $x \notin D_{(gh)^{-1}}$.

Portanto, $f \in I_{(gh)^{-1}}$, *donde segue que* $\theta_{h^{-1}}(I_h \cap I_{g^{-1}}) \subseteq I_{(gh)^{-1}}$.

(iii) Queremos mostrar que para toda $f \in \theta_{h^{-1}}(I_h \cap I_{g^{-1}})$, $\theta_g \circ \theta_h(f) = \theta_{gh}(f)$. *Tome* $f \in \theta_{h^{-1}}(I_h \cap I_{g^{-1}})$ *arbitrária, então temos que*

$$(\theta_g \circ \theta_h(f))(x) = \begin{cases} \theta_h(f) \circ \alpha_{g^{-1}}(x), & \text{se } x \in D_g; \\ 0, & \text{se } x \notin D_g. \end{cases}$$

Mas temos ainda que se $x \in D_g$

$$\theta_h(f) \circ \alpha_{g^{-1}}(x) = \begin{cases} f \circ \alpha_{h^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}(x)) = f \circ (\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_{g^{-1}})(x), & \text{se } \alpha_{g^{-1}}(x) \in D_h; \\ 0, & \text{se } \alpha_{g^{-1}}(x) \notin D_h. \end{cases}$$

Agora note que $x \in D_g$ *e* $\alpha_{g^{-1}}(x) \in D_h$ *se, e somente se,* $x \in \alpha_g(D_h \cap D_{g^{-1}})$, *logo*

$$(\theta_g \circ \theta_h(f))(x) =$$

$$= \begin{cases} f \circ \big(\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_{g^{-1}}(x)\big) = f \circ \alpha_{(gh)^{-1}}(x), & \text{se } x \in \alpha_g(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{gh} \cap D_g; \\ 0, & \text{se } x \notin \alpha_g(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{gh} \cap D_g, \end{cases}$$

já que α *é ação parcial.*

Como

$$(\theta_{gh}(f))(x) = \begin{cases} f \circ \alpha_{(gh)^{-1}}(x), & x \in D_{gh}; \\ 0, & x \notin D_{gh}, \end{cases}$$

temos que

(a) se $x \in D_{gh} \cap D_g$, *então* $\theta_g \circ \theta_h(f) = \theta_{gh}(f)$.

(b) se $x \notin D_{gh} \cap D_g$, *então*

$$\begin{aligned} \alpha_{(gh)^{-1}}(x) \notin \alpha_{(gh)^{-1}}(D_{gh} \cap D_g) &\Rightarrow \alpha_{(gh)^{-1}}(x) \notin D_{(gh)^{-1}} \cap D_{h^{-1}} \\ &\Rightarrow f \circ \alpha_{(gh)^{-1}}(x) = 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $\theta_g \circ \theta_h(f) = \theta_{gh}(f)$.

Logo, segue que para toda $f \in \theta_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}})$, $\theta_g \circ \theta_h(f) = \theta_{gh}(f)$.

Portanto θ *é uma ação parcial de* G *sobre* $\mathcal{A}$.

Definição 2.1.7. Seja G um grupo e $\mathcal{A}$ uma $*$-álgebra normada. Uma *ação parcial* α de G sobre $\mathcal{A}$, é uma ação parcial α de G sobre a álgebra $\mathcal{A}$, onde para todo $g \in G$, α_g é um isomorfismo isométrico.

Definição 2.1.8. Seja G um grupo e $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra. Uma *ação parcial* α de G sobre $\mathcal{A}$, é uma ação parcial α de G sobre o conjunto $\mathcal{A}$, onde para todo $g \in G$, D_g é um ideal fechado de $\mathcal{A}$ e α_g é um isomorfismo de C^*-álgebras.

No que segue, veremos um exemplo que será de grande importância no capítulo 3; nele, a partir de uma ação parcial de um espaço topológico localmente compacto Hausdorff X, construiremos uma ação parcial de C^*-álgebras sobre $C_0(X)$, que é a C^*-álgebra das funções contínuas de X em $\mathbb{C}$ que se anulam no infinito, isto é, $f \in C_0(X)$ precisamente quando $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua tal que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto compacto $K \subseteq X$ tal que, para todo $x \notin K$, $|f(x)| < \varepsilon$. Será de grande importância caracterizarmos os ideais desta C^*-álgebra. Sabemos que se $I \trianglelefteq C_0(X)$ é fechado, então existe $U \subseteq X$ aberto tal que I é a C^*-álgebra das funções contínuas de X em $\mathbb{C}$ que se anulam no infinito de X e se anulam no complementar de U, ou seja, se $f \in I$, então para todo $x \in X \backslash U$, $f(x) = 0$ (ver exercício 3.2.3 em [15]). Denotaremos esta C^*-álgebra por $\widetilde{C}_0(U)$.

Na próxima proposição veremos uma identificação da C^*-álgebra $\widetilde{C}_0(U)$ com a C^*-álgebra $C_0(U)$, ou seja, a C^*-álgebra das funções contínuas de U em $\mathbb{C}$ que se anulam no infinito de U.

Proposição 2.1.9. *$C_0(U)$ e $\widetilde{C}_0(U)$ são C^*-álgebras isomorfas.*

Demonstração. Tome $f \in C_0(U)$ arbitrária. Queremos definir a partir de f uma função de $\widetilde{C}_0(U)$; é natural pensarmos em estender f para X como simplesmente sendo a função nula em $X \backslash U$. A primeira dificuldade está em mostrar que esta extensão é contínua. Defina a função g como sendo

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in U; \\ 0, & \text{se } x \in X \backslash U. \end{cases}$$

Vamos verificar que g é contínua. Dado $x \in U$ arbitrário, como U é aberto e $g|_U = f$, temos que g é contínua em x; além disso, para todo $x \in X \backslash \overline{U}$, onde $\overline{U}$ denota o fecho de U relativo a X, e como $g|_{X \backslash \overline{U}} = 0$, de modo análogo temos que g contínua em x. Logo, só nos resta verificar a continuidade de g em $\overline{U} \backslash U$. Tome $x_0 \in \overline{U} \backslash U$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Considere a bola centrada em $g(x_0)$ de raio ε, que denotaremos por $B(g(x_0), \varepsilon)$; então, existe $K \subseteq U$ compacto tal que, para todo $x \in U \backslash K$,

$$|g(x)| = |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(tal compacto existe, pois $f \in C_0(U)$). Estamos em busca de uma vizinhança V de x_0 tal que $g(V) \subseteq B(g(x_0), \varepsilon)$. Como K também é um compacto relativo a X (a noção de compacidade independe do espaço ambiente), podemos tomar $V = X \backslash K$ (K é um subconjunto fechado de X (ver teorema 17.5 em [17]). Claramente $x_0 \in V$ e, além disso, para todo $x \in V$ temos que

$$|g(x) - g(x_0)| \leq |g(x)| + |g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donde segue que $g(V) \subseteq B(g(x_0), \varepsilon)$ e portanto g é contínua em $\overline{U} \backslash U$.

Vamos agora verificar que g se anula no infinito de X. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, como $f \in C_0(U)$, existe $K \subseteq U$ compacto tal que, para todo $x \in U \backslash K$, $|f(x)| < \varepsilon$, mas como a noção de compacto independe do espaço ambiente, podemos tomar este como sendo o compacto de X, e como a função g se anula para todo $x \in X \backslash U$, temos o desejado. Sendo assim, fica bem definida a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : C_0(U) &\longrightarrow \widetilde{C}_0(U) \\ f &\longmapsto g, \end{aligned}$$

onde g é como definida acima. φ claramente é $\mathbb{C}$-linear, separa produto e preserva a involução. Logo, só nos resta verificar que φ é uma bijeção.

- Injetividade: se $f \in C_0(U)$ é tal que $\varphi(f) = 0$, então em particular f se anula em U, e portanto $f \equiv 0$.

- Sobrejetividade: dada $g \in \widetilde{C}_0(U)$ arbitrária, considere a função $g|_U$, que é claramente contínua. Vamos verificar que $g|_U$ se anula no infinito de U. Dado $\varepsilon > 0$ defina o seguinte conjunto:

  $$F = \{x \in U \mid |g|_U(x)| \geq \varepsilon\}.$$

  F é claramente fechado em U. Além disso, como $g \in \widetilde{C}_0(U)$, existe $K \subseteq X$ compacto tal que, para todo $x \in X \backslash K$, $|g(x)| < \varepsilon$. Então, tome $\widetilde{K} = K \cap F$ que é um subconjunto compacto de U e note que

  $$x \in U \backslash \widetilde{K} \Leftrightarrow x \in U \backslash (K \cap F) \Leftrightarrow x \in (U \backslash K) \cup (U \backslash F).$$

  Logo,

  - se $x \in U \backslash K$, então $x \in X \backslash K$, e daí segue que $|g(x)| < \varepsilon$.

– se $x \in U \backslash F$, então por definição de F, segue que $|g(x)| < \varepsilon$.

Sendo assim, $g|_U$ se anula no infinito de U, donde segue que $\varphi(g|_U) = g$.

Portanto φ é um isomorfismo.

■

Exemplo 2.1.10. *Sejam G um grupo, X um espaço topológico localmente compacto Hausdorff e $\left(\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G}\right)$ uma ação parcial de G sobre X. A partir desta ação parcial de espaço topológico, iremos construir uma ação parcial de C^*-álgebras sobre $C_0(X)$.*

Defina, para todo $g \in G$,

$$D_g = \{f \in C_0(X) \mid \forall x \notin X_g,\ f(x) = 0\};$$

então, sabemos que $D_g \trianglelefteq C_0(X)$ (ver exercício 3.2.3 em [15]); defina também

$$\begin{array}{rcl} \alpha_g : D_{g^{-1}} & \longrightarrow & D_g \\ f & \longmapsto & \alpha_g(f), \end{array}$$

onde

$$\alpha_g(f)(x) = \begin{cases} f \circ \theta_{g^{-1}}(x), & se\ x \in X_g; \\ 0, & se\ x \notin X_g. \end{cases}$$

Note que α_g está claramente bem definida, já que para toda $f \in D_{g^{-1}}$, $\alpha_g(f)$ se anula fora de X_g e $\alpha_g(f) \in C_0(X)$, pela proposição acima. A demonstração de que $\left(\{D_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G}\right)$ é uma ação parcial de G sobre $C_0(X)$, é similar ao exemplo anterior. Usando o fato de que para todo $g \in G$, as funções θ_g são homeomorfismos e que cada D_g pode ser identificado com $C_0(X_g)$, novamente pela proposição acima, segue que as funções definidas nas demonstrações são contínuas e se anulam no infinito.

Definição 2.1.11. Um C^*-sistema dinâmico parcial, é uma tripla ordenada $(\mathcal{A}, G, \alpha)$, onde $\mathcal{A}$ é uma C^*-álgebra, G é um grupo e α é uma ação parcial de G sobre $\mathcal{A}$.

Dados um C^*-sistema dinâmico parcial $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ e I um ideal de $\mathcal{A}$, veremos sob quais hipóteses podemos criar um novo C^*-sistema dinâmico parcial $(\mathcal{A}/I, G, \overline{\alpha})$.

Definição 2.1.12. Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um C^*-sistema dinâmico parcial. Um ideal I de $\mathcal{A}$, é dito ser α-invariante, se para todo $g \in G$, temos que

$$\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap I) \subseteq D_g \cap I.$$

Proposição 2.1.13. *Seja I um ideal α-invariante de $\mathcal{A}$; então, para todo $g \in G$, temos que*

$$\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap I) = D_g \cap I.$$

Demonstração. Tome $g \in G$ arbitrário; então,

$$\begin{aligned} \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap I) \subseteq D_g \cap I \ &\Rightarrow \ \alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap I) \subseteq \alpha_{g^{-1}}(D_g \cap I) \\ &\Rightarrow D_{g^{-1}} \cap I \subseteq \alpha_{g^{-1}}(D_g \cap I). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Como $g \in G$ foi tomado arbitrariamente, podemos tomar g^{-1} no lugar de g em B.3, logo

$$\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap I) \supseteq D_g \cap I,$$

donde o resultado segue.

■

Agora vamos definir uma ação parcial em $\mathcal{A}/I$, onde $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ é α-invariante; inicialmente, poderíamos pensar em definir para todo $g \in G$

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_g} : D_{g^{-1}}/(D_{g^{-1}} \cap I) \ &\longrightarrow \ D_g/(D_g \cap I) \\ \overline{x} \ &\longmapsto \ \overline{\alpha_g(x)}, \end{aligned}$$

mas note que estamos tomando o quociente por dois ideais diferentes, um no domínio e outro no contradomínio, por isso iremos fazer uso do seguinte resultado: para todo $g \in G$,

$$D_g/D_g \cap I \ \cong \ (D_g + I)/I.$$

Proposição 2.1.14. *Seja I um ideal α-invariante de $\mathcal{A}$. Defina para todo $g \in G$*

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_g} : (D_{g^{-1}} + I)/I \ &\longrightarrow \ (D_g + I)/I \\ \overline{a_{g^{-1}} + i} \ &\longmapsto \ \overline{\alpha_g(a_{g^{-1}})}. \end{aligned}$$

Então, $\left(\{(D_g + I)/I\}_{g \in G}, \{\overline{\alpha_g}\}_{g \in G}\right)$ é uma ação parcial de G sobre $\mathcal{A}/I$.

Demonstração. Sejam $g, h \in G$ arbitrários. Então, temos que mostrar que

- $(D_g + I)/I \trianglelefteq \mathcal{A}/I$: isto segue do fato que $(D_g + I) \trianglelefteq \mathcal{A}$.
- $\overline{\alpha_g}$ está bem definida: tome $\overline{a_{g^{-1}} + i}, \overline{b_{g^{-1}} + j} \in (D_g + I)/I$ classes arbitrárias, tais que $\overline{a_{g^{-1}} + i} = \overline{b_{g^{-1}} + j}$, onde $a_{g^{-1}}, b_{g^{-1}} \in D_g$ e $i, j \in I$. Logo, temos que

mostrar que $\overline{\alpha_g}\big(\overline{a_{g^{-1}}+i}\big)=\overline{\alpha_g}\big(\overline{b_{g^{-1}}+j}\big)$, mas note que

$$\overline{\alpha_g(a_{g^{-1}})}=\overline{\alpha_g}\big(\overline{a_{g^{-1}}+i}\big)=\overline{\alpha_g}\big(\overline{b_{g^{-1}}+j}\big)=\overline{\alpha_g(b_{g^{-1}})}.$$

Também, observe que

$$\overline{a_{g^{-1}}+i}=\overline{a_{g^{-1}}+0+0+i}=\overline{a_{g^{-1}}+0}+\overline{0+i}=\overline{a_{g^{-1}}},$$

pois $0\in D_g\cap I$. Analogamente temos que $\overline{b_{g^{-1}}+j}=\overline{b_{g^{-1}}}$, e como

$$\overline{a_{g^{-1}}}=\overline{a_{g^{-1}}+i}=\overline{b_{g^{-1}}+j}=\overline{b_{g^{-1}}},$$

segue que $a_{g^{-1}}-b_{g^{-1}}\in I$, pois eles pertencem a mesma classe. Além disso, $a_{g^{-1}}-b_{g^{-1}}\in D_{g^{-1}}$, donde segue que $a_{g^{-1}}-b_{g^{-1}}\in D_{g^{-1}}\cap I$; mas I é α-invariante, logo temos que $\alpha_g(a_{g^{-1}}-b_{g^{-1}})\in D_g\cap I$, e portanto,

$$\overline{\alpha_g(a_{g^{-1}})}-\overline{\alpha_g(b_{g^{-1}})}=\overline{\alpha_g(a_{g^{-1}}-b_{g^{-1}})}=\overline{0}\ \Rightarrow\ \overline{\alpha_g(a_{g^{-1}})}=\overline{\alpha_g(b_{g^{-1}})},$$

como queríamos mostrar.

- $\overline{\alpha_g}$ é um isomorfismo: para isto, primeiramente observe que $\overline{\alpha_g}$ é claramente um homomorfismo e além disso, para qualquer $\overline{a_{g^{-1}}+i}\in(D_{g^{-1}}+I)/I$, temos que

$$\overline{\alpha_{g^{-1}}}\circ\overline{\alpha_g}\big(\overline{a_{g^{-1}}+i}\big)=\overline{\alpha_{g^{-1}}}\Big(\overline{\alpha_g(a_{g^{-1}})}\Big)=\overline{\alpha_{g^{-1}}\circ\alpha_g(a_{g^{-1}})}=\overline{a_{g^{-1}}}=\overline{a_{g^{-1}}+i},$$

e por outro lado, temos que para qualquer $\overline{a_g+i}\in(D_g+I)/I$,

$$\overline{\alpha_g}\circ\overline{\alpha_{g^{-1}}}\big(\overline{a_g+i}\big)=\overline{\alpha_g}\Big(\overline{\alpha_{g^{-1}}(a_g)}\Big)=\overline{\alpha_g\circ\alpha_{g^{-1}}(a_g)}=\overline{a_g}=\overline{a_g+i}.$$

Portanto, $\overline{\alpha_{g^{-1}}}=(\overline{\alpha_g})^{-1}$, donde segue que $\overline{\alpha_g}$ é um isomorfismo.

- $\overline{\alpha}$ satisfaz os axiomas de ação parcial.

  (i) $(D_e+I)/I=(\mathcal{A}+I)/I=\mathcal{A}/I$.

  (ii) Tome $\overline{x}\in((D_{g^{-1}}+I)/I)\cap((D_h+I)/I)=((D_{g^{-1}}+I)/I)((D_h+I)/I)$ (ver p. 82 em [14]) arbitrária, então existem $a_{g^{-1}}\in D_{g^{-1}}$, $a_h\in D_h$ e $i,j\in I$, tais que

  $$\overline{x}=\big(\overline{a_{g^{-1}}+i}\big)\big(\overline{a_h+j}\big)=(\overline{a_{g^{-1}}})(\overline{a_h})=\overline{a_{g^{-1}}a_h};$$

logo,

$$\overline{\alpha_g}(\overline{x}) = \overline{\alpha_g}(\overline{a_{g^{-1}}a_h}) = \overline{\alpha_g(a_{g^{-1}}a_h)} \in (D_{gh}+I)/I,$$

pois $\alpha_g(a_{g^{-1}}a_h) \in D_{gh}$.

Portanto, $\overline{\alpha_g}(\overline{x}) \in ((D_g+I)/I) \cap ((D_{gh}+I)/I)$, donde segue que

$$\overline{\alpha_g}(((D_{g^{-1}}+I)/I) \cap ((D_h+I)/I)) \subseteq ((D_g+I)/I) \cap ((D_{gh}+I)/I).$$

(iii) Tome $\overline{x} \in ((D_{h^{-1}}+I)/I) \cap \Big(\Big(D_{(gh)^{-1}}+I\Big)/I\Big) = ((D_{h^{-1}}+I)/I)\ \Big(\Big(D_{(gh)^{-1}}+I\Big)/I\Big)$ arbitrária, então existem $a_{h^{-1}} \in D_{h^{-1}}$, $a_{(gh)^{-1}} \in D_{(gh)^{-1}}$ e $i, j \in I$, tais que

$$\overline{x} = (\overline{a_{h^{-1}}+i})\Big(\overline{a_{(gh)^{-1}}+j}\Big) = (\overline{a_{h^{-1}}})\Big(\overline{a_{(gh)^{-1}}}\Big) = \overline{a_{h^{-1}}a_{(gh)^{-1}}};$$

logo, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha_g} \circ \overline{\alpha_h}(\overline{x}) &= \overline{\alpha_g} \circ \overline{\alpha_h}\Big(\overline{a_{h^{-1}}a_{(gh)^{-1}}}\Big) = \overline{\alpha_g}\Big(\overline{\alpha_h\Big(a_{h^{-1}}a_{(gh)^{-1}}\Big)}\Big)\\
&= \overline{\alpha_g \circ \alpha_h\Big(a_{h^{-1}}a_{(gh)^{-1}}\Big)} = \overline{\alpha_{gh}\Big(a_{h^{-1}}a_{(gh)^{-1}}\Big)}\\
&= \overline{\alpha_{gh}}\Big(\overline{a_{h^{-1}}a_{(gh)^{-1}}}\Big) = \overline{\alpha_{gh}}(\overline{x}).
\end{aligned}$$

Portanto, $\Big(\{(D_g+I)/I\}_{g\in G}, \{\overline{\alpha_g}\}_{g\in G}\Big)$ é uma ação parcial de G sobre $\mathcal{A}/I$.

■

A proposição acima será importante para a construção de um produto cruzado parcial que será feita na seção 3.3.

Definição 2.1.15. Sejam $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ e $\Big(\widetilde{\mathcal{A}}, G, \widetilde{\alpha}\Big)$ dois sistemas dinâmicos parciais. Nós dizemos que α e $\widetilde{\alpha}$ são ações parciais equivalentes, se existe um isomorfismo $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}$, tal que para todo $g \in G$ temos que

(i) $\phi(D_g) = \widetilde{D}_g$;

(ii) $\forall x \in D_{g^{-1}}$, $\widetilde{\alpha}_g \circ \phi(x) = \phi \circ \alpha_g(x)$.

A importância da definição acima ficará mais evidente quando tivermos a definição de representações parciais equivalentes, que será dada na seção 2.3, e verificarmos que, dadas duas ações parciais equivalentes, as representações parciais associadas a elas são também equivalentes e, reciprocamente, dadas duas representações parciais equivalentes, as ações parciais associadas a elas são também equivalentes.

2.2 Produto cruzado parcial algébrico

Sejam $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico parcial e F o espaço vetorial das funções de G em $\mathcal{A}$. Dados $g \in G$ e $a_g \in D_g$ arbitrários denote por $a_g\delta_g$ a função $a_g\delta_g : G \longrightarrow \mathcal{A}$, definida da seguinte maneira:

$$a_g\delta_g(h) = \begin{cases} a_g, & \text{se } h = g; \\ 0, & \text{se } h \neq g. \end{cases}$$

Considere o subespaço vetorial de F gerado pelo conjunto $\{a_g\delta_g \mid g \in G, a_g \in D_g\}$, denote-o por B. Observe que B é um subespaço das funções quase nulas, ou seja, das funções que se anulam a menos de uma quantidade finita de elementos de G, tais que para todo $g \in G$ e para toda $f \in B$, $f(g) \in D_g$. Agora vamos definir uma operação produto em B: para quaisquer $g, h \in G$ defina

$$(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}.$$

Portanto a operação produto em B, que denotaremos por $*$, será a extensão linear da operação definida acima, que para $a = \displaystyle\sum_{g\in G} a_g\delta_g$, $b = \displaystyle\sum_{h\in G} b_h\delta_h \in B$ arbitrários é dada por:

$$\begin{aligned} a * b &= \left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right) * \left(\sum_{h\in G} b_h\delta_h\right) = \sum_{g,h\in G} a_g\delta_g b_h\delta_h \\ &= \sum_{k\in G}\left(\sum_{gh=k} \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\right)\delta_k \\ &= \sum_{k\in G}\left(\sum_{g\in G} \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_{g^{-1}k})\right)\delta_k \\ &= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a_h)b_{h^{-1}g})\right)\delta_g. \end{aligned}$$

Definição 2.2.1. Dado um sistema dinâmico parcial $(\mathcal{A}, G, \alpha)$, o *produto cruzado parcial algébrico* de $\mathcal{A}$ por G, correspondente a α, denotado por $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, é o subespaço vetorial B definido acima, munido com a operação produto também definida acima.

Observe que a multiplicação está bem definida, pois $\alpha_{g^{-1}}(a_g) \in D_{g^{-1}}$ e $\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h \in D_{g^{-1}} \cap D_h$, já que $D_{g^{-1}}$ e D_h são ideais bilaterais.

Note também que a aplicação $\mathcal{A} \ni a \longmapsto a\delta_e \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é uma "inclusão" que nos permite identificar $\mathcal{A}$ com $\mathcal{A}\delta_e$.

Como mencionado na introdução do capítulo, uma das primeiras perguntas que surge, após definir esta estrutura, é se este produto é associativo ou não. A associatividade desta construção foi provada em [4] no contexto de C^*-álgebras, visto que a prova C^*-algébrica usa propriedades especiais de C^*-álgebras, como a existência de unidade aproximada, por exemplo; sendo assim, a questão da associatividade permaneceu em aberto, para ações parciais sobre álgebras gerais, até a publicação de [3]. Antes de enunciarmos sob quais hipóteses o produto cruzado parcial algébrico é associativo, precisaremos ver alguns resultados que envolvem a álgebra de multiplicadores.

2.2.1 A álgebra de multiplicadores

Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e I um ideal de $\mathcal{A}$. Tome $x \in \mathcal{A}$ arbitrário e defina as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} L_x : I &\longrightarrow I \\ a &\longmapsto xa, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R_x : I &\longrightarrow I \\ a &\longmapsto ax. \end{aligned}$$

Então $L = L_x$ e $R = R_x$ são transformações lineares de I, tais que as seguintes propriedades são satisfeitas para quaisquer $a, b \in I$:

(i) $L(ab) = L(a)b$, pois

$$L(ab) = L_x(ab) = x(ab) = (xa)b = L_x(a)b = L(a)b;$$

(ii) $R(ab) = aR(b)$, pois

$$R(ab) = R_x(ab) = (ab)x = a(bx) = aR_x(b) = aR(b);$$

(iii) $R(a)b = aL(b)$, pois

$$R(a)b = R_x(a)b = (ax)b = a(xb) = \ L_x(b) = aL(b).$$

Note que estas propriedades são conseqüências imediatas da associatividade de $\mathcal{A}$.

Definição 2.2.2. A *álgebra de multiplicadores* de uma álgebra $\mathcal{A}$, é o conjunto $M(\mathcal{A})$ de todos os pares ordenados (L, R), onde L e R são transformações lineares de $\mathcal{A}$ que satisfazem as propriedades (i)-(iii) acima. Para (L, R), $(L', R') \in M(\mathcal{A})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ arbitrários, as operações são dadas por:

1. Multiplicação por escalar: $\alpha(L, R) = (\alpha L, \alpha R)$;

2. Adição: $(L, R) + (L', R') = (L + L', R + R')$;

3. Multiplicação: $(L, R)(L', R') = (L \circ L', R' \circ R)$.

Nós dizemos que L é um *multiplicador à esquerda* e R é um *multiplicador à direita* de $\mathcal{A}$.

É imediatamente verificável que $M(\mathcal{A})$ é uma álgebra associativa com unidade (L_e, R_e), onde L_e e R_e são as aplicações identidades; no caso de considerarmos $M(I)$ para um ideal I em uma álgebra unital $\mathcal{A}$, L_e e R_e podem ser considerados as aplicações de multiplicação à esquerda e à direita pela unidade de $\mathcal{A}$, respectivamente.

Note que a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{A} &\longrightarrow M(\mathcal{A}) \\ x &\longmapsto (L_x, R_x) \end{aligned}$$

é um homomorfismo de álgebras, pois para quaisquer $x, y \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ arbitrários temos que

$$\begin{aligned} \phi(\alpha x + y) &= (L_{\alpha x+y}, R_{\alpha x+y}) = (\alpha L_x + L_y, \alpha R_x + R_y) = (\alpha L_x, \alpha R_x) + (L_y, R_y) \\ &= \alpha(L_x, R_y) + (L_y, R_y) = \phi(x) + \phi(y), \end{aligned}$$

e

$$\phi(xy) = (L_{xy}, R_{xy}) = (L_x \circ L_y, R_y \circ R_x) = (L_x, R_x)(L_y, R_y) = \phi(x)\phi(y).$$

Definição 2.2.3. Nós diremos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é *não degenerada*, se a aplicação ϕ mencionada acima for injetiva.

Na verdade, a definição padrão, encontrada na literatura, para uma álgebra não degenerada $\mathcal{A}$, não é a dada acima. Usualmente, diz-se que uma álgebra $\mathcal{A}$ é não degenerada, se para todo elemento não nulo $a \in \mathcal{A}$, existe $b \in \mathcal{A}$, tal que $ab \neq 0$ ou $ba \neq 0$. Veremos na próxima proposição que, na verdade, estas definições são equivalentes.

Denote por $\mathrm{Anq}^e(\mathcal{A})$ e $\mathrm{Anq}^d(\mathcal{A})$ o aniquilador à esquerda e à direita de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$, respectivamente, ou seja, $\mathrm{Anq}^e(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \,|\, \forall a \in \mathcal{A},\, xa = 0\}$ e $\mathrm{Anq}^d(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \,|\, \forall a \in \mathcal{A},\, ax = 0\}$. Observe que $\ker(\phi)$ é a intersecção de $\mathrm{Anq}^e(\mathcal{A})$ com $\mathrm{Anq}^d(\mathcal{A})$, pois

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Anq}^e(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Anq}^d(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{A},\ xa = 0 = ax \Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{A},\ L_x(a) = 0 = R_x(a) \\ \Leftrightarrow (L_x, R_x) = (0,0) \Leftrightarrow \phi(x) = (0,0) \Leftrightarrow x \in \ker(\phi). \end{aligned}$$

Proposição 2.2.4. *$\mathcal{A}$ é não degenerada se, e somente se, para todo elemento não nulo $a \in \mathcal{A}$, existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $ab \neq 0$ ou $ba \neq 0$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) $\mathcal{A}$ é não degenerada, então ϕ é injetora. Suponha que existe $a \in \mathcal{A}$ não nulo, tal que para todo $b \in \mathcal{A}$ temos que $ab = 0$ e $ba = 0$. Logo, $(L_a, R_a) = (0,0)$, donde $a \in \ker(\phi)$, o que é uma contradição. Portanto, para todo elemento não nulo $a \in \mathcal{A}$, existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $ab \neq 0$ ou $ba \neq 0$.

($\Leftarrow$) Tome $a \in \mathcal{A}$ tal que $\phi(a) = (0,0)$, então temos que $(L_a, R_a) = (0,0)$, logo qualquer que seja $b \in \mathcal{A}$ temos que $0 = L_a(b) = ab$ e $0 = R_a(b) = ba$, portanto $a = 0$, donde segue que ϕ é injetora.

■

Definição 2.2.5. Nós diremos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é *não degenerada à direita* , se para cada elemento não nulo $a \in \mathcal{A}$, temos que $a\mathcal{A} \neq 0$. Analogamente, uma álgebra $\mathcal{A}$ é *não degenerada à esquerda*, se para cada elemento não nulo $a \in \mathcal{A}$, temos que $\mathcal{A}a \neq 0$.

Note que o homomorfismo $\phi : I \longrightarrow M(I)$ pode ser estendido naturalmente para um homomorfismo da álgebra $\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi} : \mathcal{A} &\longrightarrow M(I) \\ a &\longmapsto (L_a, R_a), \end{aligned}$$

cujo núcleo é a intersecção do aniquilador à esquerda de I em $\mathcal{A}$ com o aniquilador à direita de I em $\mathcal{A}$, ou seja, $\ker(\widetilde{\phi}) = \{x \in \mathcal{A} \,|\, \forall i \in I, xi = 0\} \cap \{x \in \mathcal{A} \,|\, \forall i \in I, ix = 0\}$.

Proposição 2.2.6. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $\phi(\mathcal{A})$ é um ideal de $M(\mathcal{A})$;

(ii) ϕ é um isomorfismo se, e somente se, $\mathcal{A}$ é uma álgebra unital.

Demonstração.

(i) Sejam $x, y \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ arbitrários; então, temos que

$$\alpha\phi(x) + \phi(y) = \phi(\alpha x + y) \in \phi(\mathcal{A}),$$

já que ϕ é um homomorfismo. Agora tome $(L, R) \in M(\mathcal{A})$ e $a \in \mathcal{A}$ arbitrários; então, temos que

$$(L_x, R_x)(L, R) = (L_x \circ L, R \circ R_x).$$

Note que

$$L_x \circ L(a) = L_x(L(a)) = xL(a) = R(x)a = L_{R(x)}(a),$$

e também que

$$R \circ R_x(a) = R(ax) = aR(x) = R_{R(x)}(a).$$

Portanto,

$$(L_x, R_x)(L, R) = (L_x \circ L, R \circ R_x) = \big(L_{R(x)}, R_{R(x)}\big) \in \phi(\mathcal{A}),$$

pois $R(x) \in \mathcal{A}$.

Por outro lado,

$$(L, R)(L_x, R_x) = (L \circ L_x, R_x \circ R).$$

Agora observe que

$$L \circ L_x(a) = L(xa) = L(x)a = L_{L(x)}(a),$$

e também que

$$R_x \circ R(a) = R(a)x = aL(x) = R_{L(x)}(a).$$

Portanto,

$$(L, R)(L_x, R_x) = (L \circ L_x, R_x \circ R) = \big(L_{L(x)}, R_{L(x)}\big) \in \phi(\mathcal{A}),$$

pois $L(x) \in \mathcal{A}$. Logo, $\phi(\mathcal{A})$ é um ideal de $M(\mathcal{A})$.

(ii) $(\Rightarrow)$ $M(\mathcal{A})$ é unital e ϕ é isomorfismo, logo $\mathcal{A}$ também é unital.

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{A}$ é unital, logo $\mathcal{A}$ é não degenerado, pois para todo $a \in \mathcal{A}$ não nulo, existe $1 \in \mathcal{A}$, a unidade de $\mathcal{A}$, tal que $a1 \neq 0$ e $1a \neq 0$, donde segue que ϕ é injetora.

Para verificar que ϕ é sobrejetiva, basta tomar $(L, R) \in M(\mathcal{A})$ arbitrário e notar que para $a \in \mathcal{A}$ arbitrário, temos que

$$L(a) = L(1a) = L(1)a = L_{L(1)}(a),$$

e também que

$$R(a) = R(a)1 = aL(1) = R_{L(1)}(a),$$

donde segue que $(L, R) = \big(L_{L(1)}, R_{L(1)}\big) = \phi(L(1))$.

Portanto, como ϕ é homomorfismo, segue que ϕ é isomorfismo.

■

Agora dados $(L, R), (L', R') \in M(\mathcal{A})$ arbitrários, estamos interessados na validade da equação

$$R' \circ L = L \circ R'.$$

Note que se $x, x' \in \mathcal{A}$, $(L, R) = (L_x, R_x)$ e $(L', R') = (L_{x'}, R_{x'})$ a equação acima é conseqüência direta da associatividade da álgebra, pois para $a \in \mathcal{A}$ qualquer temos que

$$\begin{aligned} R' \circ L(a) &= R_{x'} \circ L_x(a) = R_{x'}(xa) = (xa)x' = x(ax') \\ &= xR_{x'}(a) = L_x(R_{x'}(a)) \\ &= L_x \circ R_{x'}(a) = L \circ R'(a), \end{aligned}$$

e portanto, $R' \circ L = L \circ R'$.

Porém, este não é sempre o caso: tome $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ com a multiplicação trivial, isto é, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^3$, $xy = 0$. Então, qualquer par (L, R) de operadores lineares sobre $\mathbb{R}^3$ constituirá um multiplicador de $\mathbb{R}^3$, pois para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^3$, temos que

(i) $L(xy) = 0 = L(x)y$;

(ii) $R(xy) = 0 = xR(y)$;

(iii) $R(x)y = 0 = xL(y)$.

Agora tome $L, R' \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^3\big)$ tais que $L(e_1) = e_2$, $L(e_2) = e_1$, $L(e_3) = e_3$, $R'(e_1) = e_1$, $R'(e_2) = e_3$ e $R'(e_3) = e_2$. Observe que

$$R' \circ L(e_1) = R'(e_2) = e_3 \neq e_2 = L(e_1) = L \circ R'(e_1).$$

Definição 2.2.7. Uma álgebra $\mathcal{A}$ é dita ser (L, R)-*associativa* se, dados quaisquer dois multiplicadores $(L, R), (L', R') \in M(\mathcal{A})$, temos que $R' \circ L = L \circ R'$.

O seguinte resultado nos dá duas condições suficientes para que uma álgebra seja (L, R)-associativa.

Proposição 2.2.8. *Uma álgebra $\mathcal{A}$ é $(L, R) -$ associativa quando qualquer uma das seguintes condições é válida:*

(i) $\mathcal{A}$ é não degenerada, ou

(ii) $\mathcal{A}$ é idempotente.

Demonstração. Sejam $(L, R), (L', R') \in M(\mathcal{A})$ arbitrários.

(i) Dados $a, b \in \mathcal{A}$ arbitrários, temos que

$$R(L'(a))b = L'(a)L(b) = L'(aL(b)) = L'(R(a)b) = L'(R(a))b,$$

logo

$$\begin{aligned} R(L'(a))b - L'(R(a))b = 0 &\Rightarrow [R(L'(a)) - L'(R(a))]b = 0 \\ &\Rightarrow R(L'(a)) - L'(R(a)) \in \mathrm{Anq}^e(\mathcal{A}), \end{aligned}$$

já que $b \in \mathcal{A}$ foi tomado arbitrariamente.

Por outro lado, temos que

$$bL'(R(a)) = R'(b)R(a) = R(R'(b)a) = R(bL'(a)) = bR(L'(a)),$$

e portanto,

$$\begin{aligned} bR(L'(a)) - bL'(R(a)) = 0 &\Rightarrow b[R(L'(a)) - L'(R(a))] \\ &\Rightarrow R(L'(a)) - L'(R(a)) \in \mathrm{Anq}^d(\mathcal{A}), \end{aligned}$$

já que $b \in \mathcal{A}$ foi tomado arbitrariamente.

Portanto, $R(L'(a)) - L'(R(a)) \in \mathrm{Anq}(\mathcal{A})$. Mas $\mathcal{A}$ é não degenerado, logo $\mathrm{Anq}(\mathcal{A}) = \{0\}$, donde segue que

$$R(L'(a)) - L'(R(a)) = 0 \Rightarrow R(L'(a)) = L'(R(a)),$$

e como $a \in \mathcal{A}$ foi tomado arbitrariamente, temos que $R \circ L' = L' \circ R$, e portanto $\mathcal{A}$ é (L, R)-associativa.

(ii) Sejam $a, b \in \mathcal{A}$ arbitrários e tome $c = ab$; note que

$$\begin{aligned} R \circ L'(c) &= R(L'(c)) = R(L'(ab)) = R(L'(a)b) = L'(a)R(b) \\ &= L'(aR(b)) = L'(R(ab)) = L'(R(c)) = L' \circ R(c), \end{aligned}$$

e como $\mathcal{A}$ é idempotente, temos que qualquer elemento $x \in \mathcal{A}$ pode ser escrito como uma combinação linear de produtos de elementos de $\mathcal{A}$, donde segue o resultado, já que L e R são lineares.

■

No que segue, será importante considerarmos ações parciais tais que todos os ideais D_g, são assumidos ser (L, R)-associativos. Portanto, é útil termos uma maneira de decidir quando todos os ideais de uma certa álgebra possuem esta propriedade; o próximo resultado vai nesta direção.

Proposição 2.2.9. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) Todo ideal não nulo de $\mathcal{A}$ é não degenerado;

(ii) Todo ideal não nulo de $\mathcal{A}$ é idempotente ou não degenerado;

(iii) Todo ideal não nulo de $\mathcal{A}$ é não degenerado à direita ;

(iv) Todo ideal não nulo de $\mathcal{A}$ é não degenerado à esquerda;

(v) $\mathcal{A}$ é semiprima, isto é, $\mathcal{A}$ não tem ideais nilpotentes não nulos.

Demonstração. Vamos demonstrar a seguinte seqüência de implicações:

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(v)} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}.$$

Note que podemos substituir (iii) por (iv) pela simetria.

(i) obviamente implica (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (v) Seja $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ não nulo, então por (ii) I é idempotente ou I é não degenerado. Queremos mostrar que não existe $n \in \mathbb{N}^*$, tal que $I^n = \{0\}$.

- Caso 1: I é idempotente.

  Seja $n \in \mathbb{N}^*$ qualquer. Claramente $I^n = I$, e como $I \neq 0$, segue que para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, $I^n = I \neq \{0\}$.

- Caso 2: I é não degenerado.

  Suponha por contradição que I seja nilpontente. Então tome o menor $n \in \mathbb{N}$, tal que $I^n = \{0\}$. Observe que $I^{n-1}I = II^{n-1} = 0$. Logo, dado $a \in I^{n-1} \subseteq I$ não nulo arbitrário, não existe $b \in I$, tal que $ab \neq 0$ ou $ba \neq 0$, o que contradiz a hipótese de I ser não degenerado.

Portanto $\mathcal{A}$ é semiprima.

(v) $\Rightarrow$ (iii) Suponha, por contradição, que existe $I \trianglelefteq \mathcal{A}$, não nulo, e $a \in I$, também não nulo, tais que $aI = \{0\}$. Seja J é o ideal gerado por a, ou seja, $J = \mathcal{A}a\mathcal{A} + a\mathcal{A} + \mathcal{A}a + a\mathbb{K}$. Note que $J \neq \{0\}$, pois $a \in J$ e $a \neq 0$. Então temos que

$$\begin{aligned}
J^2 &= (\mathcal{A}a\mathcal{A} + a\mathcal{A} + \mathcal{A}a + a\mathbb{K})(\mathcal{A}a\mathcal{A} + a\mathcal{A} + \mathcal{A}a + a\mathbb{K}) \\
&= \mathcal{A}a\mathcal{A}\mathcal{A}a\mathcal{A} + \mathcal{A}a\mathcal{A}a\mathcal{A} + \mathcal{A}a\mathcal{A}\mathcal{A}a + \mathcal{A}a\mathcal{A}a\mathbb{K} \\
&+ a\mathcal{A}\mathcal{A}a\mathcal{A} + a\mathcal{A}a\mathcal{A} + a\mathcal{A}\mathcal{A}a + a\mathcal{A}a\mathbb{K} \\
&+ \mathcal{A}a\mathcal{A}a\mathcal{A} + \mathcal{A}aa\mathcal{A} + \mathcal{A}a\mathcal{A}a + \mathcal{A}aa\mathbb{K} \\
&+ a\mathbb{K}\mathcal{A}a\mathcal{A} + a\mathbb{K}a\mathcal{A} + a\mathbb{K}\mathcal{A}a + a\mathbb{K}a\mathbb{K} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

já que $a\mathcal{A} \subseteq I$, bem como, $\mathcal{A}a \subseteq I$ e $aI = \{0\}$. Logo, $J^2 = \{0\}$, o que é uma contradição, pois $\mathcal{A}$ é semiprima.

(iii) obviamente implica (i).

■

Note que, se alguma das condições da proposição anterior for satisfeita, segue da proposição 2.2.8, que todo ideal de $\mathcal{A}$ é (L, R)-associativo.

Seja $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um isomorfismo de álgebras. Note que para qualquer $(L, R) \in M(\mathcal{A})$, temos que $(\pi \circ L \circ \pi^{-1}, \pi \circ R \circ \pi^{-1}) \in M(\mathcal{B})$, pois $\pi \circ L \circ \pi^{-1}$ e $\pi \circ R \circ \pi^{-1}$ são claramente lineares, já que π, π^{-1}, L e R o são, e satisfazem para quaisquer $a, b \in \mathcal{B}$ as condições:

(i)
$$\begin{aligned}
\pi \circ L \circ \pi^{-1}(ab) &= \pi \circ L\big(\pi^{-1}(a)\pi^{-1}(b)\big) = \pi\big(L\big(\pi^{-1}(a)\big)\pi^{-1}(b)\big) \\
&= \pi\big(L\big(\pi^{-1}(a)\big)\big)\pi\big(\pi^{-1}(b)\big) = \big(\pi \circ L \circ \pi^{-1}(a)\big)b.
\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}
\pi \circ R \circ \pi^{-1}(ab) &= \pi\big(R\big(\pi^{-1}(a)\pi^{-1}(b)\big)\big) = \pi\big(\pi^{-1}(a)R\big(\pi^{-1}(b)\big)\big) \\
&= \pi\big(\pi^{-1}(a)\big)\pi\big(R\big(\pi^{-1}(b)\big)\big) = a\big(\pi \circ R \circ \pi^{-1}(b)\big).
\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}\big(\pi\circ R\circ\pi^{-1}(a)\big)b&=\pi\big(R\big(\pi^{-1}(a)\big)\big)b=\pi\big(R\big(\pi^{-1}(a)\big)\big)\pi\big(\pi^{-1}(b)\big)\\&=\pi\big(R\big(\pi^{-1}(a)\big)\pi^{-1}(b)\big)=\pi\big(\pi^{-1}(a)L\big(\pi^{-1}(b)\big)\big)\\&=a\big(\pi\circ L\circ\pi^{-1}(b)\big).\end{aligned}$$

Proposição 2.2.10. *A aplicação*

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}:M(\mathcal{A})&\longrightarrow M(\mathcal{B})\\(L,R)&\longmapsto\big(\pi\circ L\circ\pi^{-1},\pi\circ R\circ\pi^{-1}\big)\end{aligned}$$

é um isomorfismo de álgebras.

Demonstração. Vamos verificar primeiramente que $\widetilde{\pi}$ é um homomorfismo de álgebras. Sejam $(L,R),(L',R')\in M(\mathcal{A})$ e $\alpha\in\mathbb{K}$ arbitrários; então, temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}(\alpha(L,R)+(L',R'))&=\widetilde{\pi}(\alpha L+L',\alpha R+R')=\big(\pi\circ(\alpha L+L')\circ\pi^{-1},\pi\circ(\alpha R+R')\circ\pi^{-1}\big)\\&=\big(\pi\circ\alpha L\circ\pi^{-1}+\pi\circ L'\circ\pi^{-1},\pi\circ\alpha R\circ\pi^{-1}+\pi\circ R'\circ\pi^{-1}\big)\\&=\big(\alpha\big(\pi\circ L\circ\pi^{-1}\big),\alpha\big(\pi\circ R\circ\pi^{-1}\big)\big)+\big(\pi\circ L'\circ\pi^{-1},\pi\circ R'\circ\pi^{-1}\big)\\&=\alpha\big(\pi\circ L\circ\pi^{-1},\pi\circ R\circ\pi^{-1}\big)+\big(\pi\circ L'\circ\pi^{-1},\pi\circ R'\circ\pi^{-1}\big)\\&=\alpha\widetilde{\pi}(L,R)+\widetilde{\pi}(L',R'),\end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}(L,R)\widetilde{\pi}(L',R')&=\big(\pi\circ L\circ\pi^{-1},\pi\circ R\circ\pi^{-1}\big)\big(\pi\circ L'\circ\pi^{-1},\pi\circ R'\circ\pi^{-1}\big)\\&=\big(\pi\circ L\circ\pi^{-1}\pi\circ L'\circ\pi^{-1},\pi\circ R'\circ\pi^{-1}\pi\circ R\circ\pi^{-1}\big)\\&=\big(\pi\circ L\circ L'\circ\pi^{-1},\pi\circ R'\circ R\circ\pi^{-1}\big)=\widetilde{\pi}(L\circ L',R'\circ R)\\&=\widetilde{\pi}((L,R)(L',R')).\end{aligned}$$

Agora tome $(L,R)\in M(\mathcal{A})$ tal que $\widetilde{\pi}(L,R)=(0,0)$. Então, $(\pi\circ L\circ\pi^{-1},\pi\circ R\circ\pi^{-1})=(0,0)$, e portanto, $\pi\circ L\circ\pi^{-1}=0$ e $\pi\circ R\circ\pi^{-1}=0$. Como π é um isomorfismo, segue que $L=0$ e $R=0$. Logo, $\widetilde{\pi}$ é injetor.

Por fim, tome $(L,R)\in M(\mathcal{B})$ arbitrário. Note que $(\pi^{-1}\circ L\circ\pi,\pi^{-1}\circ R\circ\pi)\in M(\mathcal{B})$, e também que

$$\widetilde{\pi}\big(\pi^{-1}\circ L\circ\pi,\pi^{-1}\circ R\circ\pi\big)=\big(\pi\circ\big(\pi^{-1}\circ L\circ\pi\big)\pi^{-1},\pi\circ\big(\pi^{-1}\circ R\circ\pi\big)\pi^{-1}\big)=(L,R),$$

donde segue que $\widetilde{\pi}$ é sobrejetor.

Portanto $\widetilde{\pi}$ é um isomorfismo de álgebras.

$\blacksquare$

2.2.2 A associatividade do produto cruzado parcial algébrico

Teorema 2.2.11. *Seja* $(\mathcal{A}\,, G, \alpha)$ *um sistema dinâmico parcial, tal que para todo* $g \in G$, D_g *é* (L, R)*-associativo. Então o produto cruzado parcial* $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ *é associativo.*

Demonstração. Obviamente, $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é associativo se, e somente se, para $g, h, k \in G$, $a \in D_h$, $b \in D_g$ e $c \in D_k$ arbitrários,

$$(a\delta_h b\delta_g)c\delta_k = a\delta_h(b\delta_g c\delta_k). \tag{2.3}$$

Primeiramente, calcularemos o lado esquerdo da igualdade acima. Nós temos então que

$$(a\delta_h b\delta_g)c\delta_k = (\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b)\delta_{hg})c\delta_k = \alpha_{hg}\Big(\alpha_{(hg)^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b))c\Big)\delta_{hgk}.$$

Note que

$$\alpha_{h^{-1}}(a)b \in D_{h^{-1}} \cap D_g \Rightarrow \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b) \in \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_g) = D_h \cap D_{hg},$$

então temos que

$$\begin{aligned}\alpha_{(hg)^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b)) &= \alpha_{g^{-1}h^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b)) = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b))) \\ &= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b).\end{aligned}$$

Observe também que

$$\alpha_{h^{-1}}(a)b \in D_{h^{-1}} \cap D_g \Rightarrow \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b) \in \alpha_{g^{-1}}(D_{h^{-1}} \cap D_g) = D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h^{-1}},$$

logo

$$\alpha_{hg}\Big(\alpha_{(hg)^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b))c\Big) = \alpha_{hg}(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c) = \alpha_h(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c)).$$

Portanto, $(a\delta_h b\delta_g)c\delta_k = \alpha_h(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c))\delta_{hgk}$.

Agora computando o lado direito da equação 2.3, obtemos

$$a\delta_h(b\delta_g c\delta_k) = a\delta_h(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c)\delta_{gk}) = \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c))\delta_{hgk}.$$

Logo, comparando os dois lados da equação 2.3, temos que

$$\alpha_h(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c))\delta_{hgk} = \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c))\delta_{hgk},$$

e portanto a equação 2.3 é válida se, e somente se,

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c) = \alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c). \tag{2.4}$$

Agora note que como $a \in D_h$ foi tomado arbitrariamente, $\alpha_{h^{-1}}(a)$ percorre todo $D_{h^{-1}}$, já que $\alpha_{h^{-1}}$ é um isomorfismo, conseqüentemente a equação 2.4 é equivalente a

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(ab)c) = a\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c). \tag{2.5}$$

Na equação acima os elementos $a \in D_{h^{-1}}$, $b \in D_g$, $c \in D_k$ e $h, k \in G$ são arbitrários. Agora, observe que se tomarmos $h = k = e$, então $D_h = D_k = \mathcal{A}$, e então $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é associativo se, e somente se, a equação 2.5 é válida, para quaisquer $g \in G$, $a, c \in \mathcal{A}$ e $b \in D_g$; isto é equivalente a dizer que, para quaisquer $g \in G$, $a, c \in \mathcal{A}$, temos

$$(\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}) \circ L_a = L_a \circ (\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}), \tag{2.6}$$

pois dado $b \in D_g$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}(\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}) \circ L_a(b) &= (\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}})(ab) = \alpha_g \circ R_c(\alpha_{g^{-1}}(ab))\\ &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(ab)c) = a\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c)\\ &= L_a \circ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) = L_a \circ (\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}})(b).\end{aligned}$$

Portanto, considere R_c como um multiplicador à direita de $D_{g^{-1}}$ e L_a como um multiplicador à esquerda de D_g. Pela proposição 2.2.10, nós temos que $\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}$ é um multiplicador de D_g, e como por hipótese D_g é (L, R)-associativo, a equação 2.6 é válida, donde segue que $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é associativo.

■

Segue diretamente da proposição 2.2.8 e do teorema 2.2.11, o seguinte resultado:

Corolário 2.2.12. *Se $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ é um sistema dinâmico parcial, tal que para todo $g \in G$, D_g é idempotente ou não degenerado, então o produto cruzado parcial algébrico $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é associativo.*

Definição 2.2.13. Nós dizemos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é *fortemente associativa* se, para qualquer grupo G e para qualquer ação parcial α de G sobre $\mathcal{A}$, o produto cruzado parcial algébrico $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é associativo.

Como uma conseqüência imediata, da proposição 2.2.9 e do corolário 2.2.12, nós temos:

Corolário 2.2.14. *Uma álgebra semiprima é fortemente associativa.*

No que segue, veremos um exemplo simples de um produto cruzado parcial algébrico que não é associativo.

Exemplo 2.2.15. *Seja $\mathcal{A}$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial quadridimensional, ou seja,* $\dim(\mathcal{A}) = 4$*, com base $\{1, t, u, v\}$. Defina a multiplicação sobre $\mathcal{A}$, da seguinte maneira: $u^2 = v^2 = uv = vu = tu = ut = t^2 = 0$, $tv = vt = u$ e para todo $a \in \mathcal{A}$, $1a = a1 = a$. Prova-se que $\mathcal{A}$ com a operação de multiplicação definida acima, é uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade.*

Seja $G = \langle g \; : \; g^2 = 1 \rangle$, isto é, o grupo cíclico, gerado por g, com a relação $g^2 = 1$; e I o ideal de $\mathcal{A}$ gerado por v. Note que, I é o subespaço de $\mathcal{A}$, gerado por v e u. Considere a ação parcial de G sobre $\mathcal{A}$, dada por $D_g = I$ e

$$\begin{aligned} \alpha_g : D_{g^{-1}} = D_g &\longrightarrow D_g \\ u &\longmapsto v \\ v &\longmapsto u. \end{aligned}$$

Note que por definição, $D_1 = \mathcal{A}$ e α_1 é a aplicação identidade de $\mathcal{A}$. Tome $x = t\delta_1 + u\delta_g \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$; então, temos que

$$\begin{aligned} (xx)x &= [(t\delta_1 + u\delta_g)(t\delta_1 + u\delta_g)]x = (t\delta_1 t\delta_1 + t\delta_1 u\delta_g + u\delta_g t\delta_1 + u\delta_g u\delta_g)x \\ &= (\alpha_1(\alpha_{1^{-1}}(t)t)\delta_{11} + \alpha_1(\alpha_{1^{-1}}(t)u)\delta_{1g} + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u)t)\delta_{g1} + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u)u)\delta_{gg})x \\ &= \big(t^2\delta_1 + tu\delta_g + \alpha_g(vt)\delta_g + \alpha_g(vu)\delta_1\big)x \\ &= (0\delta_1 + 0\delta_g + \alpha_g(u)\delta_g + \alpha_g(0)\delta_1)x = v\delta_g x = v\delta_g(t\delta_1 + u\delta_g) \\ &= v\delta_g t\delta_1 + v\delta_g u\delta_g = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(v)t)\delta_{g1} + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(v)u)\delta_{gg} \\ &= \alpha_g(ut)\delta_g + \alpha_g\big(u^2\big)\delta_1 = \alpha_g(0)\delta_g + \alpha_g(0)\delta_1 = 0. \end{aligned}$$

Mas, por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} x(xx) &= (t\delta_1 + u\delta_g)(v\delta_g) = t\delta_1 v\delta_g + u\delta_g v\delta_g \\ &= \alpha_1(\alpha_{1^{-1}}(t)v)\delta_{1g} + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u)v)\delta_{gg} \\ &= \alpha_1(tv)\delta_g + \alpha_g\big(v^2\big)\delta_1 = \alpha_1(u)\delta_g + \alpha_g(0)\delta_1 = u\delta_g. \end{aligned}$$

Portanto, $(xx)x \neq x(xx)$, donde segue que $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ não é associativo.

2.3 Representações parciais

Nesta seção, serão usados produtos cruzados parciais algébricos para relacionar ações parciais com representações parciais de grupo.

Definição 2.3.1. Uma *representação parcial* de um grupo G sobre uma álgebra unital $\mathcal{A}$, é uma aplicação $\pi : G \longrightarrow \mathcal{A}$, que satisfaz para quaisquer $g, h \in G$, as seguintes propriedades:

(i) $\pi(e) = 1$;

(ii) $\pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1}) = \pi(gh)\pi(h^{-1})$;

(iii) $\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h) = \pi(g^{-1})\pi(gh)$.

Observação 2.3.2. Quando uma representação parcial π de um grupo G sobre uma álgebra unital $\mathcal{A}$ é tal que, para todo $g, h \in G$ satisfaz que

$$\pi(g)\pi(h) = \pi(gh),$$

dizemos que π é uma *representação* de G sobre $\mathcal{A}$.

Definição 2.3.3. Uma $*$-*representação parcial* de um grupo G sobre uma $*$-álgebra unital $\mathcal{A}$, é uma representação parcial, de G sobre a álgebra $\mathcal{A}$ que satisfaz, para todo $g \in G$,

$$\pi\big(g^{-1}\big) = \pi(g)^*. \tag{2.7}$$

Note que, em uma $*$-representação parcial, o axioma (iii) decorre do axioma (ii) e da equação 2.7, pois para todo $g, h \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
\pi(g)\pi(h)\pi\big(h^{-1}\big) = \pi(gh)\pi\big(h^{-1}\big) &\Rightarrow \big(\pi(g)\pi(h)\pi\big(h^{-1}\big)\big)^* = \big(\pi(gh)\pi\big(h^{-1}\big)\big)^* \\
&\Rightarrow \pi\big(h^{-1}\big)^*\pi(h)^*\pi(g)^* = \pi\big(h^{-1}\big)^*\pi(gh)^* \\
&\Rightarrow \pi(h)\pi\big(h^{-1}\big)\pi\big(g^{-1}\big) = \pi(h)\pi\big(h^{-1}g^{-1}\big),
\end{aligned}$$

agora basta tomarmos $g^{-1} = h$ e $h^{-1} = g$, na equação acima, para obtermos

$$\pi\big(g^{-1}\big)\pi(g)\pi(h) = \pi\big(g^{-1}\big)\pi(gh).$$

Vamos agora definir um objeto que será de grande relevância no trabalho.

Definição 2.3.4. Sejam $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ espaços de Hilbert. Um operador $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ que satisfaz a equação $U = UU^*U$ é denominado uma *isometria parcial*.

Observe que se π é uma $*$-representação parcial, então para todo $g \in G$, $\pi(g)$ é uma isometria parcial. De fato, dado $g \in G$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}\pi(g) &= 1\pi(g) = \pi(e)\pi(g) = \pi\big(gg^{-1}\big)\pi(g) \\ &= \pi(g)\pi\big(g^{-1}\big)\pi(g) = \pi(g)\pi(g)^*\pi(g).\end{aligned}$$

Exemplo 2.3.5. *Seja S o shift à direita sobre $\ell_2(\mathbb{N}^*)$, isto é, para todo $i \in \mathbb{N}^*$, $S(e_i) = e_{i+1}$, onde $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ é a base canônica de $\ell_2(\mathbb{N}^*)$.*

Considere o grupo aditivo $\mathbb{Z}$ e a função $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}^*))$, que para todo $n \in \mathbb{Z}$, é dada por:

$$\pi(n) = \begin{cases} S^n, & \text{se } n \geq 0; \\ (S^*)^{|n|}, & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Note que S^* é o shift à esquerda sobre $\ell_2(\mathbb{N}^*)$, e que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ temos que $(S^*)^{m+n} = (S^*)^n(S^*)^m$, $S^{m+n} = S^mS^n$, e também $(S^*)^nS^n = I$.

Vamos verificar que π é uma $*$-representação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}^*))$.

(i) $\pi(0) = S^0 = 1$, *onde* 1 *denota a unidade de* $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}^*))$.

(ii) Tome $m, n \in \mathbb{Z}$ arbitrários, queremos verificar que

$$\pi(n)\pi(m)\pi(-m) = \pi(n+m)\pi(-m).$$

- *Caso 1: Se $m, n \geq 0$, temos que*

  $$\pi(n+m) = S^{n+m} = S^nS^m = \pi(n)\pi(m).$$

  Logo, $\pi(n)\pi(m)\pi(-m) = \pi(n+m)\pi(-m)$.

- *Caso 2: Se $m, n < 0$, temos que*

  $$\pi(n+m) = (S^*)^{-n-m} = (S^*)^{-n}(S^*)^{-m} = \pi(n)\pi(m).$$

  Logo, $\pi(n)\pi(m)\pi(-m) = \pi(n+m)\pi(-m)$.

- *Caso 3: Se $n < 0 < m$.*

– *Caso 3.1: Se $m+n \geq 0$, ou seja, que $m \geq |n|$, temos que*

$$\begin{aligned}
\pi(n)\pi(m)\pi(-m) &= (S^*)^{|n|}\, S^m (S^*)^{|-m|} \\
&= (S^*)^{|n|}\, S^{(|n| \, + (m \, - \, |n| \,))} (S^*)^m \\
&= (S^*)^{|n|}\, S^{|n|}\, S^{(m \, - \, |n| \,)} (S^*)^m \\
&= S^{(m \, - \, |n| \,)} (S^*)^m = S^{(n\,+\,m)} (S^m)^* \\
&= \pi(m+n)\pi(m)^* = \pi(m+n)\pi(-m).
\end{aligned}$$

– *Caso 3.2: Se $m+n < 0$, ou seja, $m < |n|$, temos que*

$$\begin{aligned}
\pi(n)\pi(m)\pi(-m) &= (S^*)^{|n|}\, S^m (S^*)^{|-m|} \\
&= (S^*)^{|n|}\, S^m (S^*)^m \\
&= (S^*)^{((|n| \, - \, m) \, + \, m)} S^m (S^*)^m \\
&= (S^*)^{(|n| \, - \, m)} (S^*)^m S^m (S^*)^m \\
&= (S^*)^{(|n| \, - \, m)} (S^*)^m = (S^*)^{(-n \, - \, m)} (S^*)^m \\
&= (S^*)^{|n\,+\,m|}\, (S^m)^* = \pi(m+n)\pi(m)^* \\
&= \pi(m+n)\pi(-m).
\end{aligned}$$

- *Caso 4: Falta apenas analisarmos se $m < 0 < n$, mas neste caso, a demonstração é completamente análoga ao caso 3.*

(iii) Aqui também precisaremos dividir a demonstração em casos. Tome $n \in \mathbb{Z}$ arbitrário.

- *Caso 1: Se $n \geq 0$, temos que*

$$\pi(-n) = (S^*)^{|-n|} \; = (S^*)^n = (S^n)^* = \pi(n)^*.$$

- *Caso 2: Se $n < 0$, temos que*

$$\pi(-n) = S^{-n} = \left((S^{-n})^*\right)^* = \left((S^*)^{|n|}\right)^* = \pi(n)^*.$$

Portanto, π é uma $*$-representação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}^*))$.

Exemplo 2.3.6. *Considere a seguinte aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}^*)) \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \pi(n), & se\ 7|n; \\ 0, & se\ 7 \nmid n; \end{cases} \end{array}$$

onde π é a $*$-representação parcial definida no exemplo anterior. Vamos verificar que ρ é uma $*$-representação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}^*))$.

(i) $7|0 \Rightarrow \rho(0) = \pi(0) = 1$.

(ii) Tome $m, n \in \mathbb{Z}$ arbitrários, queremos verificar que

$$\rho(n)\rho(m)\rho(-m) = \rho(n+m)\rho(-m).$$

- *Caso 1: Se $7|n$ e $7|m$, então $7|(n+m)$. Logo,*

  $$\rho(n)\rho(m)\rho(-m) = \pi(n)\pi(m)\pi(-m) = \pi(n+m)\pi(-m) = \rho(n+m)\rho(-m).$$

- *Caso 2: Se $7 \nmid n$ e $7 \nmid m$, segue que*

  $$\rho(n)\rho(m)\rho(-m) = 0 = \rho(n+m)\rho(-m).$$

- *Caso 3: Se $7|n$ e $7 \nmid m$, segue que*

  $$\rho(n)\rho(m)\rho(-m) = 0 = \rho(n+m)\rho(-m).$$

- *Caso 4: Se $7 \nmid n$ e $7|m$, segue que $\rho(n)\rho(m)\rho(-m) = 0$. Agora, note que, se $7 \nmid n$ e $7|m$, então $7 \nmid (n+m)$. Logo, $\rho(n+m)\rho(-m) = 0$, e portanto,*

  $$\rho(n)\rho(m)\rho(-m) = 0 = \rho(n+m)\rho(-m).$$

(iii) Aqui também precisaremos dividir a demonstração em casos. Tome $n \in \mathbb{Z}$ arbitrário.

- *Se $7|n$, então temos que $\rho(-n) = \pi(-n) = \pi(n)^* = \rho(n)^*$.*
- *Se $7 \nmid n$, então temos que $\rho(-n) = 0 = \rho(n) = \rho(n)^*$.*

Portanto, ρ é uma $*$-representação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{N}^*))$.

No que segue, veremos um resultado que terá como hipótese um sistema dinâmico parcial $(\mathcal{A}, G, \alpha)$, onde para todo $g \in G$, D_g é um ideal unital, com unidade 1_g. Por isso, primeiramente, faremos algumas observações a respeito de unidades de ideais, que serão úteis na demonstração deste próximo resultado e de outras demonstrações futuras também.

Seja $\mathcal{A}$ um álgebra e $I \trianglelefteq \mathcal{A}$, tal que I é um ideal unital com unidade 1_I. Note que $1_I^2 = 1_I$, e para todo $a \in \mathcal{A}$ temos que

$$1_I a = (1_I a)1_I = 1_I(a1_I) = a1_I,$$

e portanto, a unidade de um ideal é um idempotente central.

Agora seja $J \trianglelefteq \mathcal{A}$, tal que J é um ideal unital com unidade 1_J. Observe que $1_I 1_J$ será unidade do ideal $I \cap J$, pois para $x \in I \cap J$ arbitrário, temos que

$$1_I 1_J x = 1_I x = x = x1_I = x1_I 1_J.$$

Por fim, se considerarmos um sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$, onde para todo $g, \in G$, D_g é um ideal unital com unidade 1_g, como para todo $h \in G$ temos que $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$, segue que

$$\alpha_g(1_{g^{-1}} 1_h) = 1_g 1_{gh}. \tag{2.8}$$

A equação acima será usada por diversas vezes ao longo do trabalho, principalmente no capítulo 3.

Lema 2.3.7. *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico parcial tal que, para todo $g \in G$, D_g é um álgebra unital, com unidade 1_g. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : G &\longrightarrow \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \\ g &\longmapsto 1_g \delta_g \end{aligned}$$

é uma representação parcial de G sobre $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$.

Demonstração. Tome $g, h \in G$ arbitrários.

(i) $\pi_\alpha(e) = 1_e \delta_e$, pois $1_e \delta_e$ é unidade do $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, já que dado $a_g \delta_g \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ arbitrário, temos que

$$(a_g \delta_g)(1_e \delta_e) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)1_e)\delta_{ge} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g))\delta_g = a_g \delta_g,$$

e também

$$(1_e\delta_e)(a_g\delta_g) = \alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(1_e)a_g)\delta_{eg} = \alpha_e(1_e a_g)\delta_g = a_g\delta_g.$$

(ii) $$\begin{aligned}\pi_\alpha(g)\pi_\alpha(h)\pi_\alpha\big(h^{-1}\big) &= (1_g\delta_g 1_h\delta_h)1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}} = (\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(1_g)1_h)\delta_{gh})1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}}\\ &= (\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)\delta_{gh})1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}} = 1_g 1_{gh}\delta_{gh}1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}}\\ &= \alpha_{gh}\Big(\alpha_{(gh)^{-1}}(1_g 1_{gh})1_{h^{-1}}\Big)\delta_{ghh^{-1}} = \alpha_{gh}\Big(1_{(gh)^{-1}}1_{h^{-1}}1_{h^{-1}}\Big)\delta_g\\ &= \alpha_{gh}\Big(1_{(gh)^{-1}}1_{h^{-1}}\Big)\delta_g = \alpha_{gh}\Big(\alpha_{(gh)^{-1}}(1_{gh})1_{h^{-1}}\Big)\delta_{ghh^{-1}}\\ &= 1_{gh}\delta_{gh}1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}} = \pi_\alpha(gh)\pi_\alpha\big(h^{-1}\big).\end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned}\pi_\alpha\big(g^{-1}\big)\pi_\alpha(g)\pi_\alpha(h) &= (1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}1_g\delta_g)1_h\delta_h = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(1_{g^{-1}})1_g)\delta_{g^{-1}g}1_h\delta_h\\ &= \alpha_{g^{-1}}(1_g 1_g)\delta_e 1_h\delta_h = \alpha_{g^{-1}}(1_g)\delta_e 1_h\delta_h\\ &= 1_{g^{-1}}\delta_e 1_h\delta_h = \alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(1_{g^{-1}})1_h)\delta_h\\ &= \alpha_e(1_{g^{-1}}1_h)\delta_h = 1_{g^{-1}}1_h\delta_h.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\pi_\alpha\big(g^{-1}\big)\pi_\alpha(gh) &= 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}1_{gh}\delta_{gh} = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(1_{g^{-1}})1_{gh})\delta_{g^{-1}gh}\\ &= \alpha_{g^{-1}}(1_g 1_{gh})\delta_h = 1_{g^{-1}}1_h\delta_h.\end{aligned}$$

Logo, $\pi_\alpha(g^{-1})\pi_\alpha(g)\pi_\alpha(h) = \pi_\alpha(g^{-1})\pi_\alpha(gh)$.

Portanto π_α é uma representação parcial de G sobre $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$.

■

Definição 2.3.8. Sejam G um grupo, $\mathcal{B}$ e $\widetilde{\mathcal{B}}$ álgebras unitais. Duas representações parciais $\pi : G \longrightarrow \mathcal{B}$ e $\widetilde{\pi} : G \longrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}$ são ditas *equivalentes*, se existe um isomorfismo $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}$, tal que para todo $g \in G$

$$\varphi(\pi(g)) = \widetilde{\pi}(g).$$

Sejam $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ e $\Big(\widetilde{\mathcal{A}}, G, \widetilde{\alpha}\Big)$ dois sistemas dinâmicos parciais, tais que as ações parciais α e $\widetilde{\alpha}$ são equivalentes (ver definição 2.1.15). Sendo assim, note que, π_α e $\pi_{\widetilde{\alpha}}$ serão representações parciais equivalentes, pois como α e $\widetilde{\alpha}$ são equivalentes, existe um isomorfismo $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}$, tal que para todo $g \in G$

(i) $\phi(D_g) = \widetilde{D}_g$;

(ii) $\forall x \in D_{g^{-1}},\ \widetilde{\alpha}_g \circ \phi(x) = \phi \circ \alpha_g(x)$;

e podemos definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G &\longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}} \rtimes_{\widetilde{\alpha}} G \\ \sum_{g \in G} a_g \delta_g &\longmapsto \sum_{g \in G} \phi(a_g) \widetilde{\delta}_g, \end{aligned}$$

que claramente é um isomorfismo, já que ϕ o é. Logo, para todo $g \in G$, temos que

$$\varphi(1_g \delta_g) = \phi(1_g)\widetilde{\delta}_g = \widetilde{1}_g \widetilde{\delta}_g,$$

donde segue que

$$\varphi(\pi_\alpha(g)) = \varphi(1_g \delta_g) = \widetilde{1}_g \widetilde{\delta}_g = \pi_{\widetilde{\alpha}}(g),$$

e portanto π_α e $\pi_{\widetilde{\alpha}}$ são representações parciais equivalentes.

Sejam G um grupo, $\mathcal{B}$ uma álgebra e $\pi : G \longrightarrow \mathcal{B}$ uma representação parcial. Defina para todo $g \in G$

$$\varepsilon_g = \pi(g)\pi\big(g^{-1}\big).$$

Os elementos definidos acima serão de grande importância no trabalho. Por isso, na seqüência, demonstraremos uma série de propriedades que eles satisfazem.

Lema 2.3.9. *Sejam $g, h \in G$ arbitrários. Então temos que*

(i) $\varepsilon_g^2 = \varepsilon_g$;

(ii) $\pi(g)\varepsilon_h = \varepsilon_{gh}\pi(g)$;

(iii) $\varepsilon_h \pi(g) = \pi(g)\varepsilon_{g^{-1}h}$;

(iv) $\varepsilon_g \varepsilon_h = \varepsilon_h \varepsilon_g$.

Demonstração.

(i)
$$\begin{aligned} \varepsilon_g^2 &= \pi(g)\pi\big(g^{-1}\big)\pi(g)\pi\big(g^{-1}\big) = \pi(g)\pi\big(g^{-1}g\big)\pi\big(g^{-1}\big) \\ &= \pi(g)\pi(e)\pi\big(g^{-1}\big) = \pi(g)\pi\big(g^{-1}\big) = \varepsilon_g. \end{aligned}$$

(ii) Por um lado, temos que

$$\pi(g)\varepsilon_h = \pi(g)\pi(h)\pi\big(h^{-1}\big) = \pi(gh)\pi\big(h^{-1}\big),$$

e por outro lado, temos que

$$\varepsilon_{gh}\pi(g) = \pi(gh)\pi\big((gh)^{-1}\big)\pi(g) = \pi(gh)\pi\big(h^{-1}g^{-1}g\big) = \pi(gh)\pi\big(h^{-1}\big).$$

Portanto, $\pi(g)\varepsilon_h = \varepsilon_{gh}\pi(g)$.

(iii) Por um lado, temos que

$$\varepsilon_h\pi(g) = \pi(h)\pi\big(h^{-1}\big)\pi(g) = \pi(h)\pi\big(h^{-1}g\big),$$

e por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\pi(g)\varepsilon_{g^{-1}h} &= \pi(g)\pi\big(g^{-1}h\big)\pi\Big(\big(g^{-1}h\big)^{-1}\Big) = \pi(g)\pi\big(g^{-1}h\big)\pi\big(h^{-1}g\big)\\ &= \pi\big(gg^{-1}h\big)\pi\big(h^{-1}g\big) = \pi(h)\pi\big(h^{-1}g\big).\end{aligned}$$

Portanto, $\varepsilon_h\pi(g) = \pi(g)\varepsilon_{g^{-1}h}$.

(iv) $\varepsilon_g\varepsilon_h = \pi(g)\pi(g^{-1})\varepsilon_h = \pi(g)\varepsilon_{g^{-1}h}\pi(g^{-1}) = \varepsilon_{gg^{-1}h}\pi(g)\pi(g^{-1}) = \varepsilon_h\varepsilon_g$.

■

Seja $\mathcal{A}$ a subálgebra de $\mathcal{B}$ gerada por todos ε_g's. Note que, $\mathcal{A}$ é uma álgebra abeliana pelo item (iv) do lema acima. Agora tome $g \in G$ arbitrário e defina D_g, o ideal de $\mathcal{A}$ gerado por ε_g, que denotaremos por $\langle\varepsilon_g\rangle$. Observe que $\langle\varepsilon_g\rangle = \varepsilon_g\mathcal{A} = \mathcal{A}\varepsilon_g$, pois claramente $\varepsilon_g\mathcal{A}$ é o menor ideal de $\mathcal{A}$ que contém ε_g, bem como $\langle\varepsilon_g\rangle$; a segunda igualdade decorre do fato de $\mathcal{A}$ ser comutativa. Portanto, $D_g = \varepsilon_g\mathcal{A}$. Observe ainda que ε_g é a unidade de D_g, pois para $a \in D_g$ arbitrário, temos que $a = \varepsilon_g\widetilde{a}$, para algum $\widetilde{a} \in \mathcal{A}$. Logo,

$$\varepsilon_g a = a\varepsilon_g = \varepsilon_g\widetilde{a}\varepsilon_g = \varepsilon_g\varepsilon_g\widetilde{a} = \varepsilon_g\widetilde{a} = a.$$

Lema 2.3.10. *Seja $g \in G$ arbitrário. Defina*

$$\begin{array}{rcl}\alpha_g^\pi : D_{g^{-1}} & \longrightarrow & D_g\\ a & \longmapsto & \pi(g)a\pi\big(g^{-1}\big),\end{array}$$

onde D_g é como definido acima. Então, α^π é uma ação parcial de G sobre $\mathcal{A}$.

Demonstração. Primeiramente vamos verificar que $\pi(g)\mathcal{A}\pi(g^{-1}) \subseteq \mathcal{A}$. Tome em particular $a = \varepsilon_{h_1}\cdots\varepsilon_{h_{n_a}} \in \mathcal{A}$ e note que

$$\begin{aligned}\pi(g)a\pi\big(g^{-1}\big) &= \pi(g)\varepsilon_{h_1}\cdots\varepsilon_{h_{n_a}}\pi\big(g^{-1}\big) = \varepsilon_{gh_1}\cdots\varepsilon_{gh_{n_a}}\pi(g)\pi\big(g^{-1}\big)\\ &= \varepsilon_{gh_1}\cdots\varepsilon_{gh_{n_a}}\varepsilon_g \in D_g \subseteq \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Logo, α_g^π está bem definida.

Agora, vamos verificar que α_g^π é um isomorfismo de álgebras. Como a linearidade é imediata, vamos verificar primeiramente que α_g^π separa o produto. Sejam $a, b \in D_{g^{-1}}$ arbitrários; então, temos que

$$\begin{aligned}\alpha_g^\pi(a)\alpha_g^\pi(b) &= \pi(g)\, a\, \pi\big(g^{-1}\big)\pi(g)\, b\, \pi\big(g^{-1}\big) = \pi(g)\, a\, \varepsilon_{g^{-1}}\, b\, \pi\big(g^{-1}\big) \\ &= \pi(g)\, ab\, \pi\big(g^{-1}\big) = \alpha_g^\pi(ab).\end{aligned}$$

Além disso, para $x \in D_{g^{-1}}$ arbitrário,

$$\alpha_{g^{-1}}^\pi \circ \alpha_g^\pi(x) = \pi\big(g^{-1}\big)\big(\pi(g)\, x\, \pi\big(g^{-1}\big)\big)\pi(g) = \varepsilon_{g^{-1}}\, x\, \varepsilon_{g^{-1}} = x.$$

Logo, só nos falta verificar que α^π satisfaz os axiomas de ação parcial.

(i) Como $\varepsilon_e = \pi(e)\pi(e^{-1})$, $D_e = \mathcal{A}$.

(ii) Seja $h \in G$ arbitrário. Queremos mostrar que

$$\alpha_{h^{-1}}^\pi(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}.$$

Tome $a \in D_h \cap D_{g^{-1}}$ arbitrário; então, existem $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, tais que $a = \varepsilon_h a_1 = \varepsilon_{g^{-1}} a_2$. Note que

$$\varepsilon_h \varepsilon_h a_1 = \varepsilon_h a = \varepsilon_h \varepsilon_{g^{-1}} a_2 \Rightarrow \varepsilon_h a_1 = a = \varepsilon_h \varepsilon_{g^{-1}} a_2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\alpha_{h^{-1}}^\pi(a) &= \pi\big(h^{-1}\big)\, \varepsilon_{g^{-1}}\, a_2\, \pi(h) = \pi\big(h^{-1}\big)\, \varepsilon_h\, \varepsilon_{g^{-1}}\, a_2\, \pi(h) \\ &= \pi\big(h^{-1}\big)\, \varepsilon_{g^{-1}}\, \varepsilon_h\, a_2\, \pi(h) = \varepsilon_{h^{-1}g^{-1}} \pi\big(h^{-1}\big)\, \varepsilon_h\, a_2\, \pi\big(h^{-1}\big) \\ &= \varepsilon_{(gh)^{-1}}\, \alpha_{h^{-1}}^\pi(\varepsilon_h a_2) \in D_{(gh)^{-1}},\end{aligned}$$

donde segue que $\alpha_{h^{-1}}^\pi(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$.

(iii) Tome $a \in \alpha_{h^{-1}}^\pi(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$ e $h \in G$ arbitrários. Então temos que

$$
\begin{aligned}
\alpha_g^\pi \circ \alpha_h^\pi(a) &= \alpha_g^\pi\big(\pi(h)\, a\, \pi\big(h^{-1}\big)\big) = \pi(g)\pi(h)\, a\, \pi\big(h^{-1}\big)\pi\big(g^{-1}\big) \\
&= \pi(g)\pi(h)\, \varepsilon_{h^{-1}}\, a\, \varepsilon_{h^{-1}}\, \pi\big(h^{-1}\big)\pi\big(g^{-1}\big) \\
&= \pi(g)\pi(h)\pi\big(h^{-1}\big)\pi(h)\, a\, \pi\big(h^{-1}\big)\pi(h)\pi\big(h^{-1}\big)\pi\big(g^{-1}\big) \\
&= \pi(gh)\pi\big(h^{-1}\big)\pi(h)\, a\, \pi\big(h^{-1}\big)\pi(h)\pi\big(h^{-1}g^{-1}\big) \\
&= \pi(gh)\, \varepsilon_{h^{-1}}\, a\, \varepsilon_{h^{-1}}\, \pi\big((gh)^{-1}\big) \\
&= \pi(gh)\, a\, \pi\big((gh)^{-1}\big) = \alpha_{gh}^\pi(a).
\end{aligned}
$$

Portanto α^π é uma ação parcial de G sobre $\mathcal{A}$.

■

Dadas duas representações parciais equivalentes (ver definição 2.3.8), $\pi : G \longrightarrow \mathcal{B}$ e $\widetilde{\pi} : G \longrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}$, observe que as ações parciais α^π e $\alpha^{\widetilde{\pi}}$ (como definidas no lema anterior) serão equivalentes. De fato, como π e $\widetilde{\pi}$ são equivalentes, existe um isomorfismo $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}$, tal que para todo $g \in G$, temos que $\widetilde{\pi}(g) = \varphi(\pi(g))$. Agora, sejam $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \widetilde{\mathcal{B}}$, como definidas no contexto do lema anterior; então, temos que para $g \in G$ arbitrário

$$
\begin{aligned}
\varphi(D_g) &= \varphi(\varepsilon_g \mathcal{A}) = \varphi(\varepsilon_g)\varphi(\mathcal{A}) = \varphi\big(\pi(g)\pi\big(g^{-1}\big)\big)\widetilde{\mathcal{A}} \\
&= \varphi(\pi(g))\varphi\big(\pi\big(g^{-1}\big)\big)\widetilde{\mathcal{A}} = \widetilde{\pi}(g)\widetilde{\pi}\big(g^{-1}\big)\widetilde{\mathcal{A}} = \widetilde{\varepsilon}_g\widetilde{\mathcal{A}} = \widetilde{D}_g,
\end{aligned}
$$

e para $x \in D_{g^{-1}}$ arbitrário

$$
\begin{aligned}
\varphi \circ \alpha_g^\pi(x) &= \varphi\big(\alpha_g^\pi(x)\big) = \varphi\big(\pi(g)\, x\, \pi\big(g^{-1}\big)\big) = \varphi(\pi(g))\varphi(x)\varphi\big(\pi\big(g^{-1}\big)\big) \\
&= \widetilde{\pi}(g)\varphi(x)\widetilde{\pi}\big(g^{-1}\big) = \alpha_g^{\widetilde{\pi}}(\varphi(x)) = \alpha_g^{\widetilde{\pi}} \circ \varphi(x),
\end{aligned}
$$

donde segue portanto que as ações parciais α^π e $\alpha^{\widetilde{\pi}}$ são equivalentes.

Proposição 2.3.11. *Seja $(\mathcal{A}\,, G, \alpha)$ um sistema dinâmico parcial, tal que para todo $g \in G$, D_g é um álgebra unital, com unidade 1_g. Seja também, $\widetilde{\mathcal{A}}$ a subálgebra de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ gerada por todos os $1_g\delta_e$. Então, existe um monomorfismo, $\varphi_\alpha : \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}$, tal que para todo $g \in G$ temos que*

(i) $\varphi_\alpha(1_g\delta_e) = 1_g$*;*

(ii) $\varphi_\alpha \circ \alpha_g^{\pi_\alpha} = \alpha_g \circ \varphi_\alpha$*, onde π_α é como definida no lema 2.3.7 e $\alpha_g^{\pi_\alpha}$ é como definida no lema 2.3.10.*

Em particular, se $\mathcal{A}$ é gerada pelos elementos 1_g, então as ações parciais α^{π_α} e α são equivalentes.

Demonstração. Sabemos que existe um monomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \\ a &\longmapsto a\delta_e. \end{aligned}$$

Logo, se restringirmos o contradomínio de ψ para $\mathcal{A}\delta_e$, ψ será um isomorfismo. Como $\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}\delta_e$, basta definir $\varphi_\alpha = \psi^{-1}|_{\widetilde{\mathcal{A}}}$, que claramente é um monomorfismo de $\widetilde{\mathcal{A}}$ em $\mathcal{A}$, tal que para todo $g \in G$, $\varphi_\alpha(1_g\delta_e) = 1_g$.

Agora, de acordo com o lema 2.3.7, nós temos uma representação parcial

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : G &\longrightarrow \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \\ g &\longmapsto 1_g\delta_g, \end{aligned}$$

que pelo lema 2.3.10 induz uma ação parcial sobre uma subálgebra de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, gerada pelos elementos $\pi_\alpha(g)\pi_\alpha(g^{-1})$ (para todo $g \in G$). Note que

$$\begin{aligned} \pi_\alpha(g)\pi_\alpha(g^{-1}) &= 1_g\delta_g 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(1_g)1_{g^{-1}})\delta_{gg^{-1}} \\ &= \alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}})\delta_e = \alpha_g(1_{g^{-1}})\delta_e = 1_g\delta_e, \end{aligned}$$

logo esta subálgebra é exatamente $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Relembrando, para todo $g \in G$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha_g^{\pi_\alpha} : \widetilde{D}_{g^{-1}} &\longrightarrow \widetilde{D}_g \\ a\delta_e &\longmapsto \pi_\alpha(g)\, a\delta_e\, \pi_\alpha(g^{-1}), \end{aligned}$$

onde $\widetilde{D}_g = \widetilde{\varepsilon}_g\widetilde{\mathcal{A}} = 1_g\delta_e\widetilde{\mathcal{A}}$. Então, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \circ \alpha_g^{\pi_\alpha}(a\delta_e) &= \varphi_\alpha\big(\pi_\alpha(g)\, a\delta_e\, \pi_\alpha(g^{-1})\big) = \varphi_\alpha(1_g\delta_g\, a\delta_e\, 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}) \\ &= \varphi_\alpha(1_g\delta_g\, a\, 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}) = \varphi_\alpha(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(1_g)a1_{g^{-1}})\delta_{gg^{-1}}) \\ &= \varphi_\alpha(\alpha_g(1_{g^{-1}}\, a\, 1_{g^{-1}})\delta_e) = \varphi_\alpha(\alpha_g(a)\delta_e) = \alpha_g(a) = \alpha_g(\varphi_\alpha(a\delta_e)) \\ &= \alpha_g \circ \varphi_\alpha(a\delta_e). \end{aligned}$$

E, por fim, se $\mathcal{A}$ é gerada pelos elementos 1_g, então claramente $\varphi_\alpha : \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}$ é um isomorfismo que dá a equivalência das ações parciais α^{π_α} e α.

■

No que segue, vamos em direção da demonstração que a álgebra parcial de grupo, que será definida na próxima seção, será isomorfa a um produto cruzado parcial algébrico. O próximo resultado nos auxiliará nesta demonstração.

Proposição 2.3.12. *Seja $\pi : G \longrightarrow \mathcal{B}$ uma representação parcial do grupo G sobre a álgebra $\mathcal{B}$. Suponha que a subálgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, bem como a ação parcial α^π, de G sobre $\mathcal{A}$, sejam como definidas no contexto do lema 2.3.10. Então, a aplicação*

$$\begin{aligned} \phi_\pi : \mathcal{A} \rtimes_{\alpha^\pi} G &\longrightarrow \mathcal{B} \\ \sum_{g \in G} a_g \delta_g &\longmapsto \sum_{g \in G} a_g \pi(g) \end{aligned}$$

é um homomorfismo de álgebras, tal que $\phi_\pi \circ \pi_{\alpha^\pi} = \pi$. Em particular, se ϕ_π é um isomorfismo, as representações parciais π e π_{α^π} são equivalentes.

Demonstração. Primeiramente, observe que para quaisquer $g, h \in G$, temos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_g \pi(gh) &= \pi(g)\pi\big(g^{-1}\big)\pi(gh) = \pi(g)\pi\big(g^{-1}gh\big) = \pi(g)\pi(h) \\ &= \pi(g)\pi\big(g^{-1}g\big)\pi(h) = \pi(g)\pi\big(g^{-1}\big)\pi(g)\pi(h) = \varepsilon_g \pi(g)\pi(h). \end{aligned}$$

Portanto, para $a_g \in D_g$ e $b_h \in D_h$ arbitrários, temos que

$$\begin{aligned} \phi_\pi(a_g\delta_g b_h\delta_h) &= \phi_\pi\big(\alpha^\pi_g\big(\alpha^\pi_{g^{-1}}(a_g)b_h\big)\delta_{gh}\big) = \alpha^\pi_g\big(\alpha^\pi_{g^{-1}}(a_g)b_h\big)\pi(gh) \\ &= \alpha^\pi_g\big(\alpha^\pi_{g^{-1}}(a_g)b_h\big)\, \varepsilon_g\, \pi(gh) = \alpha^\pi_g\big(\alpha^\pi_{g^{-1}}(a_g)b_h\big)\, \varepsilon_g\, \pi(g)\pi(h) \\ &= \alpha^\pi_g\big(\alpha^\pi_{g^{-1}}(a_g)b_h\big)\pi(g)\pi(h) = \pi(g)\alpha^\pi_{g^{-1}}(a_g)b_h\, \pi\big(g^{-1}\big)\pi(g)\pi(h) \\ &= \pi(g)\alpha^\pi_{g^{-1}}(a_g)b_h\varepsilon_{g^{-1}}\pi(h) = \pi(g)\alpha^\pi_{g^{-1}}(a_g)b_h\, \pi(h) \\ &= \pi(g)\pi\big(g^{-1}\big)\, a_g\, \pi(g)\, b_h\, \pi(h) = \varepsilon_g\, a_g\, \pi(g)\, b_h\, \pi(h) \\ &= a_g\, \pi(g)\, b_h\, \pi(h) = \phi_\pi(a_g\delta_g)\phi_\pi(b_h\delta_h), \end{aligned}$$

donde segue que ϕ_π é um homomorfismo de álgebras.

Note ainda, que para $g \in G$ qualquer, temos

$$\phi_\pi \circ \pi_{\alpha^\pi}(g) = \phi_\pi(\varepsilon_g\delta_g) = \varepsilon_g\pi(g) = \pi(g)\pi\big(g^{-1}\big)\pi(g) = \pi(g).$$

Então, $\phi_\pi \circ \pi_{\alpha^\pi} = \pi$.

Por fim, se ϕ_π é um isomorfismo, claramente, segue que as representações parciais π_{α^π} e π são equivalentes.

■

2.4 A álgebra parcial de grupo

Agora nós veremos que a álgebra parcial de grupo pode ser naturalmente dotada com uma estrutura de produto cruzado parcial. Primeiramente, iremos relembrar alguns conceitos.

Definição 2.4.1. Sejam G um grupo e $\mathbb{K}$ um corpo. A *álgebra de grupo* é o conjunto

$$\mathbb{K}G = \{ \sum_{\substack{g \in G \\ \text{finita}}} a_g \delta_g \mid g \in G, a_g \in \mathbb{K} \},$$

onde o produto é definido para quaisquer $\sum_{g \in G} a_g \delta_g, \sum_{h \in G} b_h \delta_h \in \mathbb{K}G$ por

$$\left(\sum_{g \in G} a_g \delta_g \right) \left(\sum_{h \in G} b_h \delta_h \right) = \sum_{g,h \in G} a_g b_h \delta_{gh} = \sum_{k \in G} \left(\sum_{l \in G} a_l b_{l^{-1}k} \right) \delta_k.$$

Definição 2.4.2. Sejam S um conjunto não vazio e $\cdot : S \times S \longrightarrow S$ uma operação produto. Dizemos que o par ordenado $(S, \cdot)$ é um *semigrupo* (ou também denominado *monóide*) se, para quaisquer $s_1, s_2, s_3 \in S$, temos que

(i) $s_1(s_2 s_3) = (s_1 s_2) s_3$;

(ii) existe $e \in S$, tal que para todo $s \in S$, $es = se = s$.

Seja $\mathcal{G}$ um conjunto. Defina S como sendo o conjunto das palavras formais, finitas, escritas com elementos de $\mathcal{G}$. Note que S é um semigrupo com a operação de concatenação de palavras cujo elemento neutro é a palavra vazia. Seja $\mathcal{R}$ um conjunto de relações, isto é, $\mathcal{R}$ é um conjunto cujos elementos são pares de palavras de S. A motivação para definir $\mathcal{R}$ desta forma é o desejo de que uma relação expresse quando duas palavras de S são iguais.

Definição 2.4.3. Uma relação de equivalência no conjunto S é dita *invariante á esquerda* se, para todo $u, v \in S$ tais que u é equivalente a v, então para todo $w \in S$, wu é equivalente a wv.

De forma similar, define-se uma relação de equivalência no conjunto S ser *invariante á direita*.

Agora tome a menor relação de equivalência no conjunto S que contém o conjunto $\mathcal{R}$ e é invariante à esquerda e à direita, ou seja, a intersecção de todas as relações de equivalência do conjunto S que contém $\mathcal{R}$ e são invariantes à esquerda e à direita.

Denotaremos esta relação de equivalência por $\sim$. Observe que, dadas duas palavras $s, t \in S$ arbitrárias, teremos que $s \sim t$ se, através de uma quantidade finita de trocas das relações, chegamos de uma palavra na outra. Dado $s \in S$ arbitrário, denotaremos por $\overline{s}$ a classe de equivalência do elemento S referente à relação de equivalência $\sim$.

Queremos dar ao conjunto $S/\sim$ uma estrutura de semigrupo. Portanto, dados $s, t \in S$ defina a seguinte aplicação: $\overline{s} \cdot \overline{t} = \overline{s \cdot t}$. É fácil ver que esta aplicação independe do representante tomado na classe, logo ela está bem definida. O fato de que $S/\sim$ munido com a operação definida acima é um semigrupo decorre diretamente do fato que S é um semigrupo.

Definição 2.4.4. $S/\sim$ é denominado o *semigrupo universal* do par $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$.

A universalidade de $S/\sim$ é no sentido que se existe um semigrupo G, tal que existe uma aplicação $f : \mathcal{G} \longrightarrow G$, tal que as palavras formadas pela imagem dos geradores obedece as mesmas relações $\mathcal{R}$, só que agora em G, então existe um único homomorfismo de semigrupo $\varphi : S/\sim \longrightarrow G$, tal que o diagrama abaixo comuta, onde π denota a projeção canônica:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G \\ & S/\sim \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Definição 2.4.5. Seja S um semigrupo e $\mathbb{K}$ um corpo. A *álgebra de semigrupo* é o conjunto

$$\mathbb{K}S = \{ \sum_{\substack{s \in S \\ \text{finita}}} a_s \delta_s \mid s \in S, a_s \in \mathbb{K} \},$$

onde o produto é definido para quaisquer $\sum\limits_{s \in S} a_s \delta_s, \sum\limits_{r \in S} b_r \delta_r \in \mathbb{K}S$ por

$$\left(\sum_{s \in S} a_s \delta_s \right) \left(\sum_{r \in S} b_r \delta_r \right) = \sum_{s, r \in S} a_s b_r \delta_{sr} = \sum_{k \in S} \left(\sum_{s, r \in S} \delta_{sr,k} \, a_s b_r \right) \delta_k,$$

e para todo $s, r \in S$, $\delta_{s,r}$ denota o delta de Krönecker.

Definição 2.4.6. Sejam G um grupo, com unidade denotada por e, e $\mathbb{K}$ um corpo. A *álgebra parcial de grupo*, do grupo G sobre o corpo $\mathbb{K}$, que será denotada por $\mathbb{K}\text{par}(G)$, é a álgebra de semigrupo $\mathbb{K}S(G)$, onde $S(G)$ é o semigrupo universal, gerado pelo conjunto $[G] = \{[g] \mid g \in G\}$, sujeitos as seguintes relações, para quaisquer $g, h \in G$:

(i) $[g^{-1}][g][h] = [g^{-1}][gh]$;

(ii) $[g][h][h^{-1}] = [gh][h^{-1}]$;

(iii) $[g][e] = [e][g] = [g]$.

Claramente,

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi} : G &\longrightarrow \mathbb{K}\text{par}(G) \\ g &\longmapsto [g] \end{aligned}$$

é uma representação parcial, do grupo G na álgebra $\mathbb{K}\text{par}(G)$. Note que, $\mathbb{K}\text{par}(G)$ possui a seguinte propriedade universal: para toda representação parcial π de G em uma álgebra unital $\mathcal{B}$ qualquer, existe um único homomorfismo de álgebras, $\psi : \mathbb{K}\text{par}(G) \longrightarrow \mathcal{B}$, tal que $\pi = \psi \circ \widetilde{\pi}$. De fato, seja π uma representação parcial de G sobre uma álgebra unital $\mathcal{B}$. Suponha que exista $\widetilde{\psi} : \mathbb{K}\text{par}(G) \longrightarrow \mathcal{B}$, tal que $\pi = \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\pi}$. Então, para $g \in G$ arbitrário, nós temos que

$$\psi([g]) = \psi \circ \widetilde{\pi}(g) = \pi(g) = \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\pi}(g) = \widetilde{\psi}([g]) \Rightarrow \psi = \widetilde{\psi}.$$

Observe ainda, que para todo homomorfismo de álgebras $\psi : \mathbb{K}\text{par}(G) \longrightarrow \mathcal{B}$, a aplicação $\psi \circ \widetilde{\pi}$ é uma representação parcial de G sobre $\mathcal{B}$. De fato, para quaisquer $g, h \in G$ temos, por exemplo, que

$$\begin{aligned} (\psi \circ \widetilde{\pi})\big(g^{-1}\big)(\psi \circ \widetilde{\pi})(g)(\psi \circ \widetilde{\pi})(h) &= \psi\big(\big[g^{-1}\big]\big)\psi([g])\psi([h]) = \psi\big(\big[g^{-1}\big][g][h]\big) \\ &= \psi\big(\big[g^{-1}\big][gh]\big) = \psi\big(\big[g^{-1}\big]\big)\psi([gh]) \\ &= (\psi \circ \widetilde{\pi})\big(g^{-1}\big)(\psi \circ \widetilde{\pi})(gh). \end{aligned}$$

Os outros dois axiomas de representação parcial são demonstrados de maneira similar.

Teorema 2.4.7. *Seja G um grupo e*

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi} : G &\longrightarrow \mathbb{K}par(G) \\ g &\longmapsto [g], \end{aligned}$$

que como visto anteriormente, é uma representação parcial de G sobre $\mathbb{K}par(G)$. Seja também $\mathcal{A}$ a subálgebra de $\mathbb{K}par(G)$gerada por todos os elementos $\widetilde{\varepsilon}_g = \widetilde{\pi}(g)\widetilde{\pi}(g^{-1}) =$

$[g][g^{-1}]$. *Então, o homomorfismo*

$$\begin{aligned} \phi_{\widetilde{\pi}} : \mathcal{A} \rtimes_{\alpha^{\widetilde{\pi}}} G &\longrightarrow \mathbb{K}par(G) \\ \sum_{g \in G} a_g \delta_g &\longmapsto \sum_{g \in G} a_g \widetilde{\pi}(g) \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Como visto anteriormente na proposição 2.3.12, $\phi_{\widetilde{\pi}}$ é de fato um homomorfismo. Nós mostraremos que ele possui inversa, donde seguirá que ele é um isomorfismo.

Pela propriedade universal da álgebra parcial de grupo $\mathbb{K}\mathrm{par}(G)$, temos que dada a representação parcial

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha^{\widetilde{\pi}}} : G &\longrightarrow \mathcal{A} \rtimes_{\alpha^{\widetilde{\pi}}} G \\ g &\longmapsto \widetilde{\varepsilon}_g \delta_g \end{aligned}$$

existe um único homomorfismo $\psi : \mathbb{K}\mathrm{par}(G) \longrightarrow \mathcal{A} \rtimes_{\alpha^{\widetilde{\pi}}} G$, tal que $\pi_{\alpha^{\widetilde{\pi}}} = \psi \circ \widetilde{\pi}$; logo, para todo $g \in G$, temos que

$$\pi_{\alpha^{\widetilde{\pi}}}(g) = \psi \circ \widetilde{\pi}(g) = \psi([g]) \Rightarrow \psi([g]) = \widetilde{\varepsilon}_g \delta_g.$$

Primeiramente, verificaremos que $\phi_{\widetilde{\pi}} \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{K}\mathrm{par}(G)}$. Tome $g \in G$ arbitrário. Então, temos que

$$\phi_{\widetilde{\pi}} \circ \psi([g]) = \phi_{\widetilde{\pi}}(\widetilde{\varepsilon}_g \delta_g) = \widetilde{\varepsilon}_g \widetilde{\pi}(g) = [g]\left[g^{-1}\right][g] = [g].$$

Como a álgebra $\mathbb{K}\mathrm{par}(G)$ é gerada pelos elementos $[g]$, e $\phi_{\widetilde{\pi}}$, bem como ψ, são homomorfismos, segue que $\phi_{\widetilde{\pi}} \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{K}\mathrm{par}(G)}$.

Agora, vamos verificar que $\psi \circ \phi_{\widetilde{\pi}} = \mathrm{id}_{\mathcal{A} \rtimes_{\alpha^{\widetilde{\pi}}} G}$.

Note que, para $g \in G$ arbitrário,

$$\begin{aligned} \widetilde{\varepsilon}_g \delta_g \widetilde{\varepsilon}_{g^{-1}} \delta_{g^{-1}} &= \alpha_g^{\widetilde{\pi}}\big(\alpha_{g^{-1}}^{\widetilde{\pi}}(\widetilde{\varepsilon}_g)\widetilde{\varepsilon}_{g^{-1}}\big)\delta_{gg^{-1}} = \alpha_g^{\widetilde{\pi}}(\widetilde{\varepsilon}_{g^{-1}}\widetilde{\varepsilon}_{g^{-1}})\delta_e \\ &= \alpha_g^{\widetilde{\pi}}(\widetilde{\varepsilon}_{g^{-1}})\delta_e = \widetilde{\varepsilon}_g \delta_e. \end{aligned}$$

Relembrando, para todo $g \in G$, $D_g = \widetilde{\varepsilon}_g \mathcal{A}$. Então, dado $a_g \in D_g$ arbitrário,

$a_g = \widetilde{\varepsilon}_g \widetilde{\varepsilon}_{h_1} \cdots \widetilde{\varepsilon}_{h_s}$. Então, note que

$$\begin{aligned}
\psi \circ \phi_{\widetilde{\pi}}(a_g\delta_g) &= \psi(\phi_{\widetilde{\pi}}(a_g\delta_g)) = \psi(a_g\widetilde{\pi}(g)) = \psi(\widetilde{\varepsilon}_g\widetilde{\varepsilon}_{h_1}\cdots\widetilde{\varepsilon}_{h_s}\widetilde{\pi}(g)) \\
&= \psi\big([g]\big[g^{-1}\big][h_1]\big[(h_1)^{-1}\big]\cdots[h_s]\big[(h_s)^{-1}\big][g]\big) \\
&= \psi([g])\psi\big(\big[g^{-1}\big]\big)\psi([h_1])\psi\big(\big[h_1^{-1}\big]\big)\cdots\psi([h_s])\psi\big(\big[h_s^{-1}\big]\big)\psi([g]) \\
&= \widetilde{\varepsilon}_g\delta_g\widetilde{\varepsilon}_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\widetilde{\varepsilon}_{h_1}\delta_{h_1}\widetilde{\varepsilon}_{h_1^{-1}}\delta_{h_1^{-1}}\cdots\widetilde{\varepsilon}_{h_s}\delta_{h_s}\widetilde{\varepsilon}_{h_1^{-1}}\delta_{h_s^{-1}}\widetilde{\varepsilon}_g\delta_g \\
&= \widetilde{\varepsilon}_g\delta_e\widetilde{\varepsilon}_{h_1}\delta_e\cdots\widetilde{\varepsilon}_{h_s}\delta_e\widetilde{\varepsilon}_g\delta_g = (\widetilde{\varepsilon}_g\widetilde{\varepsilon}_{h_1}\cdots\widetilde{\varepsilon}_{h_s})\delta_e\widetilde{\varepsilon}_g\delta_g \\
&= \widetilde{\varepsilon}_g\widetilde{\varepsilon}_{h_1}\cdots\widetilde{\varepsilon}_{h_s}\widetilde{\varepsilon}_g\delta_g = \widetilde{\varepsilon}_g\widetilde{\varepsilon}_g\widetilde{\varepsilon}_{h_1}\cdots\widetilde{\varepsilon}_{h_s}\delta_g \\
&= \widetilde{\varepsilon}_g\widetilde{\varepsilon}_{h_1}\cdots\widetilde{\varepsilon}_{h_s}\delta_g = a_g\delta_g.
\end{aligned}$$

Logo, como ψ e $\phi_{\widetilde{\pi}}$ são homomorfismos, segue que para $\sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g \in \mathcal{A} \rtimes_{\alpha^{\widetilde{\pi}}} G$ arbitrário, temos que

$$\psi \circ \phi_{\widetilde{\pi}}\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right) = \sum_{g\in G} \psi \circ \phi_{\widetilde{\pi}}(a_g\delta_g) = \sum_{g\in G} a_g\delta_g,$$

e portanto, $\psi \circ \phi_{\widetilde{\pi}} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}\rtimes_{\alpha^{\widetilde{\pi}}}G}$.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Produto cruzado parcial e C^*-álgebras com geradores e relações

Na primeira seção deste capítulo, definiremos o produto cruzado parcial e desenvolveremos um pouco de sua teoria básica. Na seção 3.2, definiremos a C^*-álgebra parcial de grupo e demonstraremos que ela é isomorfa a um produto cruzado parcial. Por fim, na seção 3.3, veremos que a C^*-álgebra parcial de grupo, com mais um conjunto específico de relações, também é isomorfa a um produto cruzado parcial. Este último resultado será o resultado que utilizaremos para identificar a C^*-álgebra universal gerada por duas isometrias compatíveis, com um produto cruzado parcial no próximo capítulo, que é um dos resultados principais desta dissertação.

Este capítulo teve como base o artigo [5].

3.1 Produto cruzado parcial

Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um C^*-sistema dinâmico parcial. Então, pela teoria desenvolvida no capítulo anterior, temos um produto cruzado parcial algébrico associado a este C^*-sistema dinâmico parcial, já que ele é em particular um sistema dinâmico parcial. Mas como $\mathcal{A}$ possui estruturas adicionais, faz sentido querermos transportar estas estruturas para o $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$. Portanto, defina para todo $g \in G$ e $a_g \in D_g$ a seguinte operação:

$$(a_g\delta_g)^* = \alpha_{g^{-1}}\big(a_g^*\big)\delta_{g^{-1}}.$$

Observe que para $g, h \in G$, $a_g \in D_g$ e $a_h D_h$ arbitrários, temos que

$$\begin{aligned}((a_g\delta_g)^*)^* &= \big(\alpha_{g^{-1}}\big(a_g^*\big)\delta_{g^{-1}}\big)^* = \alpha_g\big(\big(\alpha_{g^{-1}}\big(a_g^*\big)\big)^*\big)\delta_g \\ &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g))\delta_g = a_g\delta_g,\end{aligned}$$

e também que,

$$\begin{aligned}((a_g\delta_g)(a_h\delta_h))^* &= (\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h)\delta_{gh})^* = \alpha_{(gh)^{-1}}((\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h))^*)\delta_{(gh)^{-1}} \\ &= \alpha_{(gh)^{-1}}(\alpha_g(a_h^*(\alpha_{g^{-1}}(a_g))^*))\delta_{(gh)^{-1}} = \alpha_{h^{-1}g^{-1}}\big(\alpha_g\big(a_h^*\alpha_{g^{-1}}\big(a_g^*\big)\big)\big)\delta_{(gh)^{-1}} \\ &= \alpha_{h^{-1}}\big(a_h^*\alpha_{g^{-1}}\big(a_g^*\big)\big)\delta_{(gh)^{-1}} = \alpha_{h^{-1}}\big(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a_h^*))\alpha_{g^{-1}}\big(a_g^*\big)\big)\delta_{h^{-1}g^{-1}} \\ &= \alpha_{h^{-1}}(a_h^*)\delta_{h^{-1}}\alpha_{g^{-1}}\big(a_g^*\big)\delta_{g^{-1}} = (a_h\delta_h)^*(a_g\delta_g)^*.\end{aligned}$$

Portanto, a aplicação

$$\begin{aligned} * : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G &\longrightarrow \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \\ \sum_{g\in G} a_g\delta_g &\longmapsto \sum_{g\in G}(a_g\delta_g)^* \end{aligned}$$

é uma involução sobre $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, donde segue que agora $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é uma $*$-álgebra.

Vamos agora definir uma norma sobre $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$.

Proposição 3.1.1. *A aplicação definida por*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \sum_{g\in G} a_g\delta_g &\longmapsto \sum_{g\in G} \|a_g\|_{\mathcal{A}}, \end{aligned}$$

é uma norma sobre $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, e além disso, satisfaz a seguinte propriedade para todo $a \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$:

$$\|a^*\|_1 = \|a\|_1.$$

Demonstração. Sejam $\sum_{g\in G} a_g\delta_g, \sum_{g\in G} b_g\delta_g \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrários. Então, temos que

(i) $\left\|\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{g\in G} \|a_g\|_{\mathcal{A}} = 0 \Leftrightarrow \forall g \in G, \|a_g\|_{\mathcal{A}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{g\in G} a_g\delta_g = 0.$

(ii) Para verificarmos que $\left\|\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right)\left(\sum_{g\in G} b_g\delta_g\right)\right\|_1 \leq \left\|\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right\|_1 \left\|\sum_{g\in G} b_g\delta_g\right\|_1$, basta verificarmos que para quaisquer $g, h \in G$ temos que

$$\|(a_g\delta_g)(b_h\delta_h)\|_1 \leq \|a_g\delta_g\|_1 \|b_h\delta_h\|_1.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\|(a_g\delta_g)(b_h\delta_h)\|_1 &= \|\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}\|_1 = \|\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\|_{\mathcal{A}} \\
&= \|\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h\|_{\mathcal{A}} \leq \|\alpha_{g^{-1}}(a_g)\|_{\mathcal{A}} \|b_h\|_{\mathcal{A}} = \|a_g\|_{\mathcal{A}} \|b_h\|_{\mathcal{A}} \\
&= \|a_g\delta_g\|_1 \|b_h\delta_h\|_1.
\end{aligned}$$

Como a aplicação $\|\cdot\|_1$ é claramente sub-linear, segue que ela é uma norma sobre $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, e além disso,

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right)^*\right\|_1 &= \left\|\sum_{g\in G} \alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}}\right\|_1 = \sum_{g\in G} \|\alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\|_{\mathcal{A}} = \sum_{g\in G} \|a_g^*\|_{\mathcal{A}} \\
&= \sum_{g\in G} \|a_g\|_{\mathcal{A}} = \left\|\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right\|_1.
\end{aligned}$$

■

Seja

$$B = (\mathcal{A} \rtimes_\alpha G, *, \|\cdot\|_1). \tag{3.1}$$

Logo, B é uma $*$-álgebra normada.

Definição 3.1.2. Dado um C^*-sistema dinâmico parcial $(\mathcal{A}, G, \alpha)$, o *produto cruzado parcial* de $\mathcal{A}$ por G, correspondente a α, é a C^*-álgebra envolvente (ver definição A.2.1) de B, onde B é como definida acima.

Observação 3.1.3. Denotaremos o produto cruzado parcial de $\mathcal{A}$ por G, correspondente a α, também por $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, adotando a convenção de que sempre que tivermos um C^*-sistema dinâmico parcial, $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ denota $C_e^*(B)$ e quando tivermos simplesmente um sistema dinâmico parcial, $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ denota o produto cruzado parcial algébrico.

Note que o produto cruzado parcial é associativo, já que todo ideal de uma C^*-álgebra é idempotente (ver p. 82 em [14]).

A construção da C^*-álgebra envolvente de uma $*$-álgebra normada envolve um quociente por um ideal (ver a construção feita no apêndice A), mas na construção do produto cruzado parcial este ideal é o ideal trivial nulo, pelo teorema B.2.13.

No capítulo anterior, demonstramos que, dado $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico parcial tal que para todo $g \in G$, D_g é um álgebra unital, com unidade 1_g, então a aplicação

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : G &\longrightarrow \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \\ g &\longmapsto 1_g \delta_g \end{aligned}$$

é uma representação parcial de G sobre $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ (lema 2.3.7). Note que se tivéssemos como hipótese um C^*-sistema dinâmico parcial, então teríamos que π é uma $*$- representação de G sobre $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, já que

$$(\pi(g))^* = (1_g\delta_g)^* = \alpha_{g^{-1}}({1_g}^*)\delta_{g^{-1}} = \alpha_{g^{-1}}(1_g)\delta_{g^{-1}} = 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} = \pi\big(g^{-1}\big).$$

Definição 3.1.4. Dados um C^*-sistema dinâmico parcial $(\mathcal{A}, G, \alpha)$, $\mathcal{C}$ uma C^*-álgebra, $\pi : G \longrightarrow \mathcal{C}$ uma representação parcial e $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ um homomorfismo, dizemos que o par (φ, π) é *α-covariante*, se satisfaz as seguintes condições, para quaisquer $g \in G$, $a_{g^{-1}} \in D_{g^{-1}}$ e $a \in \mathcal{A}$:

(i) $\varphi(\alpha_g(a_{g^{-1}})) = \pi(g)\varphi(a_{g^{-1}})\pi(g)^*$;

(ii) $\varphi(a)\varepsilon_g = \varepsilon_g\varphi(a)$.

A importância da definição acima fica evidente ao enunciarmos o próximo teorema.

Teorema 3.1.5. *Seja (φ, π) um par α-covariante, onde $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ e $\pi : G \longrightarrow \mathcal{C}$. Então existe uma única representação $(\varphi \times \pi) : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{C}$, tal que para todo $g \in G$ e $a_g \in D_g$*

$$(\varphi \times \pi)(a_g\delta_g) = \varphi(a_g)\pi(g).$$

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} \rho : B &\longrightarrow \mathcal{C} \\ \sum_{g \in G} a_g\delta_g &\longmapsto \sum_{g \in G} \varphi(a_g)\pi(g), \end{aligned}$$

onde B é como definida em 3.1. Vamos mostrar que ρ é uma representação contrativa de B.

1. ρ é um homomorfismo: como ρ é claramente linear, basta verificarmos que ela separa o produto e preserva a involução.

- Sejam $g, h \in G$, $a_g \in D_g$ e $b_h \in D_h$ arbitrários. Então, temos que

$$\begin{aligned}
\rho((a_g\delta_g)(b_h\delta_h)) &= \rho(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}) = \varphi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))\pi(gh) \\
&= \pi(g)\varphi(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\pi(g)^*\pi(gh) \\
&= \pi(g)\varphi(\alpha_{g^{-1}}(a_g))\varphi(b_h)\pi(g)^*\pi(gh) \\
&= \pi(g)\pi\big(g^{-1}\big)\varphi(a_g)\pi(g)\varphi(b_h)\pi(g)^*\pi(gh) \\
&= \varphi(a_g)\pi(g)\pi\big(g^{-1}\big)\pi(g)\varphi(b_h)\pi(g)^*\pi(g)\pi(h) \\
&= \varphi(a_g)\pi(g)\pi(g)^*\pi(g)\varphi(b_h)\pi(h) \\
&= \varphi(a_g)\pi(g)\varphi(b_h)\pi(h) = \rho(a_g\delta_g)\rho(b_h\delta_h).
\end{aligned}$$

  Portanto, como ρ é linear, segue que para $\sum_{g\in G} a_g\delta_g, \sum_{g\in G} b_g\delta_g \in B$ arbitrários, temos que

$$\rho\left(\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right)\left(\sum_{g\in G} b_g\delta_g\right)\right) = \rho\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right)\rho\left(\sum_{g\in G} b_g\delta_g\right).$$

- Sejam $g \in G$ e $a_g \in D_g$ arbitrários. Então, temos que

$$\begin{aligned}
\rho((a_g\delta_g)^*) &= \rho\big(\alpha_{g^{-1}}\big(a_g^*\big)\delta_{g^{-1}}\big) = \varphi\big(\alpha_{g^{-1}}\big(a_g^*\big)\big)\pi\big(g^{-1}\big) \\
&= \pi(g)^*\varphi\big(a_g^*\big)\pi(g)\pi(g)^* = \pi(g)^*\pi(g)\pi(g)^*\varphi(a_g)^* \\
&= \pi(g)^*\varphi(a_g)^* = (\varphi(a_g)\pi(g))^* \\
&= \rho(a_g\delta_g)^*.
\end{aligned}$$

  E novamente, como ρ é linear, segue que para $\sum_{g\in G} a_g\delta_g \in B$ arbitrário, temos que

$$\rho\left(\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right)^*\right) = \rho\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right)^*.$$

2. ρ é contrativa: Seja $\sum_{g\in G} a_g\delta_g \in B$ arbitrário. Então, temos que

$$
\begin{aligned}
\left\| \rho\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g \right) \right\| &= \left\| \sum_{g\in G} \varphi(a_g)\pi(g) \right\| \leq \sum_{g\in G} \|\varphi(a_g)\pi(g)\| \\
&\leq \sum_{g\in G} \|\varphi(a_g)\|\|\pi(g)\| \leq \sum_{g\in G} \|\varphi(a_g)\| \\
&\leq \sum_{g\in G} \|a_g\| = \left\| \sum_{g\in G} a_g\delta_g \right\|_1 .
\end{aligned}
$$

Portanto, ρ é uma representação contrativa de B, logo pela propriedade universal de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, existe um único homomorfismo, que denotaremos por $\varphi \times \pi$, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \mathcal{C} \\
& \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \arrow[ur, "\varphi\times\pi"'] &
\end{tikzcd}
$$

Portanto, para $g \in G$ e $a_g \in D_g$ arbitrários, temos que

$$(\varphi \times \pi)(a_g\delta_g) = (\varphi \times \pi) \circ \iota(a_g\delta_g) = \rho(a_g\delta_g) = \varphi(a_g)\pi(g),$$

como queríamos demonstrar.

■

Observação 3.1.6. No teorema acima, quando $\mathcal{C} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, para algum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, a recíproca é verdadeira, ou seja, existe uma correspondência bijetora entre representações covariantes de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ sobre $\mathcal{H}$ e representações não-degeneradas de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ sobre $\mathcal{H}$ (ver teorema 1.4 em [5]).

3.2 C^*-álgebra parcial de grupo

Seja G um grupo com unidade e, $\mathcal{G} = G \times \{1\}$, isto é, um conjunto que possui a mesma cardinalidade de G e é disjunto de G. Dado um elemento arbitrário $(g, 1) \in \mathcal{G}$, o denotaremos simplesmente por $[g]$. Tome

$$\mathcal{R} = \left\{ [e] = 1, \left[g^{-1}\right] = [g]^*, [g][h]\left[h^{-1}\right] = [gh]\left[h^{-1}\right] \mid g, h \in G \right\}.$$

Note que o par $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ definido acima é admissível (ver definição A.1.4), já que, para qualquer ρ representação de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ e para qualquer $g \in G$, temos que

$$\rho([g])\rho([g])^*\rho([g]) = \widetilde{\rho}\big([g]\,[g^{-1}]\,[g]\big) = \rho([g]),$$

o que implica que $\rho([g])^*\rho([g])$ é uma projeção (ver proposição 4.2.2 em [15]), e portanto,

$$\|\rho([g])\|^2 = \|\rho([g])^*\rho([g])\| \leq 1 \;\Rightarrow\; \|\rho([g])\| \leq 1.$$

Logo, existe $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$.

Definição 3.2.1. A $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ definida acima, é denominada a *C^*-álgebra parcial de grupo* e será denotada por $C_p^*(G)$.

Note que $C_p^*(G)$ é a versão C^*-álgébrica de $\mathbb{K}_{\text{par}}(G)$.

Como mencionado anteriormente, um dos objetivos deste capítulo é demonstrar que a C^*-álgebra parcial de grupo é isomorfa a um produto cruzado parcial. Para demonstrar este fato, precisamos primeiro construir um produto cruzado parcial. Vamos tentar motivar esta construção, relembrando que, na versão algébrica, mostramos que a álgebra $\mathbb{K}\text{par}(G)$ é isomorfa a um produto cruzado parcial algébrico $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, onde a álgebra $\mathcal{A}$ é a álgebra gerada pelos elementos ε_g's, provenientes de uma dada representação parcial. Como em $C_p^*(G)$ temos as relações de representação parcial, vamos considerar para todo $g \in G$, $\varepsilon_g = \overline{[g][g]^*}$, onde $\overline{[g][g]^*}$ denota a classe de equivalência do elemento $[g][g]^*$, referente ao quociente pelo núcleo da norma definida na construção de C^*-álgebra universal (ver construção no apêndice 1). Então é de se esperar que exista alguma relação entre a sub-C^*-álgebra da C^*-álgebra parcial de grupo, que é gerada por todos estes ε_g's, que denotaremos por $C^*\{\varepsilon_g \mid g \in G\}$ e a C^*-álgebra do C^*-sistema dinâmico que estamos buscando.

Note que como $C^*\{\varepsilon_g \mid g \in G\}$ é comutativa, temos que

$$C^*\{\varepsilon_g \mid g \in G\} \cong C(\mathcal{E}),$$

onde $\mathcal{E}$ denota o espectro da C^*-álgebra $C^*\{\varepsilon_g \mid g \in G\}$ (ver teorema 3.3.6 em [15]). Além disso, $\mathcal{E}$ é compacto e Hausdorff, já que $C^*\{\varepsilon_g \mid g \in G\}$ possui unidade (ver teorema 3.2.10 em [15]).

Continuando a motivação, na tentativa de obter mais informações a respeito do espectro desta álgebra, note que como em $C_p^*(G)$ temos a relação de que para todo $g \in G$, $\overline{\varepsilon_g}^2 = \overline{\varepsilon_g}$, para qualquer homomorfismo complexo não nulo $\varphi \in \mathcal{E}$, temos que

$$\varphi(\overline{\varepsilon_g})^2 = \varphi(\overline{\varepsilon_g})\varphi(\overline{\varepsilon_g}) = \varphi\big(\overline{\varepsilon_g}^2\big) = \varphi(\overline{\varepsilon_g}),$$

o que implica $\varphi(\overline{\varepsilon_g}) \in \{0,1\}$. Então, podemos concluir que o homomorfismo φ está associado a um elemento de $\{0,1\}^G$. Sendo assim, temos uma C^*-álgebra candidata, a saber, $C(\mathcal{E})$, onde concluímos que $\mathcal{E}$ tem que ser um espaço compacto Hausdorff e ele está "associado" a um subconjunto de $\{0,1\}^G$. Esta foi uma tentativa de motivar o que segue.

Considere o conjunto $\{0,1\}$ com a topologia discreta; logo, $\{0,1\}$ é compacto e, portanto, $\{0,1\}^G$ também é compacto pelo teorema de Tychonoff (ver teorema 17.8 em [17]); obviamente, estamos considerando $\{0,1\}^G$ equipado com a topologia produto. Ainda, como $\{0,1\}$ é Hausdorff, segue que $\{0,1\}^G$ também é Hausdorff (ver teorema 13.8 em [17]).

Defina agora os dois seguintes conjuntos:

$$X_G' = \left\{w \in \{0,1\}^G \mid w_e = 1\right\} \text{ e } X_G = \{\xi \subseteq G \mid e \in \xi\}.$$

Voltando a motivação, a escolha desta característica particular de que um elemento $w \in X_G$ se $w_e = 1$, se deve ao fato, de que para a φ da motivação, temos que $\varphi(\overline{\varepsilon_e}) = 1$, já que φ é um homomorfismo não nulo e $\overline{\varepsilon_e}$ é a unidade de $C_p^*(G)$.

Observe que $X_G' \subseteq \{0,1\}^G$ e $X_G \subseteq \mathcal{P}(G)$. Portanto, estaremos considerando a topologia induzida de $\{0,1\}^G$ sobre X_G', ou seja, um net $\left\{w^\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X_G'$ converge para um elemento $w \in X_G'$ se, e somente se, para todo $g \in G$, $w_g^\lambda \to w_g$, isto é, para todo $g \in G$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$, tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $w_g^\lambda = w_g$. E em X_G, estaremos considerando a topologia induzida de $\mathcal{P}(G)$, ou seja, um net $\{\xi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X_G$ converge para um elemento $\xi \in X_G$ se, e somente se, para todo $g \in G$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}[g \in \xi_\lambda] = [g \in \xi]$, isto é, para todo $g \in G$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$, tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $[g \in \xi_\lambda] = [g \in \xi]$, onde $[\cdot]$ denota a função boleana (isto é, $[g \in \xi] = 0$ se $g \notin \xi$ e $[g \in \xi] = 1$ se $g \in \xi$).

Existe uma identificação natural entre os elementos de X_G' e X_G. Dado um elemento $w \in X_G'$, podemos construir um elemento $\xi \in X_G$, da seguinte maneira:

$$g \in \xi \Leftrightarrow w_g = 1.$$

Reciprocamente, dado um elemento $\xi \in X_G$, podemos construir um elemento $w \in X_G'$, da mesma forma. Como esta identificação é um homeomorfismo, nos permitiremos "confundir" estes dois conjuntos, optando pela definição que for mais conveniente no contexto.

Nosso primeiro objetivo será construir uma ação parcial sobre X_G. Defina portanto, para todo $g \in G$ o seguinte conjunto:

$$X_g = \{\xi \in X_G \mid g \in \xi\} \subseteq X_G.$$

Note que a versão deste conjunto em $X_G^{'}$ é a seguinte:

$$X_g^{'} = \Big\{ w \in X_G^{'} \mid w_g = 1 \Big\}.$$

E novamente como X_g e $X_g^{'}$ são homeomorfos, nos permitiremos "confundir" estes dois conjuntos, optando pela definição que for mais conveniente no contexto.

Lema 3.2.2. *Dado $g \in G$ arbitrário, então $X_g^{'}$ é um subconjunto aberto e fechado de $X_G^{'}$.*

Demonstração. Observe que $X_g^{'} = \pi_g^{-1}(\{1\})$, onde $\pi_g : X_G^{'} \longrightarrow \{0,1\}$ é a projeção canônica na g-ésima entrada, que é contínua, já que a topologia de $X_G^{'}$ é a topologia induzida da topologia produto de $\{0,1\}^G$. Logo, $X_g^{'}$ é aberto e fechado em $X_G^{'}$, pois é a imagem inversa de $\{1\} \subseteq \{0,1\}$ que é aberto e fechado (pois a topologia que estamos considerando em $\{0,1\}$ é a topologia discreta) por uma função contínua.

∎

Lema 3.2.3. *Dado $g \in G$ arbitrário, então*

$$\begin{aligned} \theta_g : X_{g^{-1}} &\longrightarrow X_g \\ \xi &\longmapsto g\xi \end{aligned}$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. Primeiramente observe que a aplicação θ_g está bem definida, pois dado qualquer $\xi \in X_{g^{-1}}$, como $e \in \xi$, segue que $g \in g\xi$. Além disso, como $g^{-1} \in \xi$, segue que $e \in g\xi$.

Agora note que

$$\begin{aligned} \theta_{g^{-1}} : X_g &\longrightarrow X_{g^{-1}} \\ \xi &\longmapsto g^{-1}\xi \end{aligned}$$

é tal que para todo $\xi \in X_{g^{-1}}$, temos que

$$\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g(\xi) = \theta_{g^{-1}}(g\xi) = g^{-1}g\xi = \xi,$$

e para todo $\xi \in X_g$, também temos que

$$\theta_g\theta_{g^{-1}}(\xi) = \theta_g\big(g^{-1}\xi\big) = gg^{-1}\xi = \xi,$$

portanto, θ_g é inversível, e ainda, $\theta_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}$.

Agora vamos verificar que θ_g é contínua. Sejam $\{\xi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X_{g^{-1}}$ um net e $\xi \in X_{g^{-1}}$, tais que $\xi_\lambda \to \xi$. Queremos mostrar que $\theta_g(\xi_\lambda) \to \theta_g(\xi)$, ou seja, que para todo $h \in G$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$, tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $[h \in g\xi_\lambda] = [h \in g\xi]$.

Então, fixe $h \in G$ arbitrário e note que como $g^{-1}h \in G$ e $\xi_\lambda \to \xi$, temos que existe $\lambda_0 \in \Lambda$, tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $[g^{-1}h \in \xi_\lambda] = [g^{-1}h \in \xi]$, ou seja, existe $\lambda_0 \in \Lambda$, tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $[h \in g\xi_\lambda] = [h \in g\xi]$, donde segue que θ_g é contínua.

De maneira análoga mostra-se que $\theta_{g^{-1}}$ também é contínua, e portanto, θ_g é um homeomorfismo.

■

Proposição 3.2.4. *O par ordenado* $\left(\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G}\right)$ *é uma ação parcial de* G *sobre* X_G.

Demonstração. Sejam $g, h \in G$ arbitrários. Então, pelo lema 3.2.2, X_g é aberto e pelo lema 3.2.3, θ_g é um homeomorfismo. Logo, nos resta apenas verificar que o par $\left(\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G}\right)$ satisfaz os axiomas de ação parcial.

(i) $X_e = \{\xi \in X_G \mid e \in \xi\}$ é por definição o conjunto X_G.

(ii) Queremos mostrar que $\theta_g(X_{g^{-1}} \cap X_h) \subseteq X_{gh}$. Então tome $\xi \in X_{g^{-1}} \cap X_h$ arbitrário e note que $g^{-1} \in \xi$ e $h \in \xi$. Logo, $\theta_g(\xi) = g\xi \in X_{gh}$, já que $h \in \xi$, implica $gh \in g\xi$. Portanto, $\theta_g(X_{g^{-1}} \cap X_h) \subseteq X_{gh}$.

(iii) Queremos mostrar que para todo $\xi \in X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$, $\theta_{gh}(\xi) = \theta_g \circ \theta_h(\xi)$. Então, tome $\xi \in X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$ arbitrário, logo

$$\theta_g \circ \theta_h(\xi) = \theta_g(h\xi) = gh\xi = \theta_{gh}(\xi),$$

já que $h\xi \in X_{g^{-1}}$, pois $\xi \in X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$ e $\theta_h\left(X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}\right) = X_h \cap X_{hh^{-1}g^{-1}} = X_h \cap X_{g^{-1}}$.

Portanto, $\left(\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G}\right)$ é uma ação parcial de G sobre X_G.

■

Agora, observe que $X'_G \subseteq \{0,1\}^G$ é compacto Hausdorff, já que subconjuntos de um espaço Hausdorff são Hausdorff e subconjuntos fechados de um espaço compacto são compactos. Pelas mesmas razões, temos que para todo $g \in G$, $X'_g \subseteq X'_G$ também é compacto e Hausdorff. Portanto, defina para todo $g \in G$

$$D_g = \{f \in C(X_G) \mid \forall x \notin X_g, f(x) = 0\},$$

e também

$$\begin{aligned} \alpha_g : D_{g^{-1}} &\longrightarrow D_g \\ f &\longmapsto \alpha_g(f), \end{aligned}$$

onde

$$\alpha_g(f)(x) = \begin{cases} f \circ \theta_{g^{-1}}(x), & \text{se } x \in X_g; \\ 0, & \text{se } x \notin X_g. \end{cases}$$

Então, pelo exemplo 2.1.10, temos que o par ordenado $\left(\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}\right)$ é uma ação parcial de G sobre $C_0(X_G) = C(X_G)$, já que X_G é compacto.

Logo, o produto cruzado parcial, proveniente deste C^*-sistema dinâmico, será o nosso candidato a ser isomorfo a $C_p^*(G)$. Iremos portanto, construir um homomorfismo de $C_p^*(G)$ em $C(X_G) \rtimes_\alpha G$ e outro, de $C(X_G) \rtimes_\alpha G$ em $C_p^*(G)$ e mostrar que um é o inverso do outro. O primeiro homomorfismo será fácil de construir, pois $C_p^*(G)$ é uma C^*-álgebra universal, já o segundo dará mais trabalho. Para construí-lo recorreremos a construção de um par α-covariante e pelo teorema 3.1.5 teremos o homomorfismo desejado. Mas antes, vamos fazer um estudo um pouco mais aprofundado destes ideais D_g's.

Fixe $g \in G$ arbitrário e denote por 1_g a função característica de X_g, que é contínua, já que X_g é aberto e fechado em X_G. Note que $1_g \in D_g$ e ainda, que 1_g é a unidade deste ideal. Denote por $\mathcal{D}$ o conjunto $\text{span}\{1_g 1_{h_1} \cdots 1_{h_n} \mid n \in \mathbb{N}^*, h_1, \cdots, h_n \in G\}$. Claramente $\mathcal{D}$ é uma subálgebra de D_g e observe que ela satisfaz as seguintes condições:

1. $\mathcal{D}$ é uma subálgebra unital de D_g, já que $1_g \in \mathcal{D}$;

2. $\mathcal{D}$ é auto-adjunta;

3. $\mathcal{D}$ separa pontos de X_g, pois dados $\xi \neq \eta \in X_g$, sem perda de generalidade, existe $h \in \xi$, tal que $h \notin \eta$. Logo, $1_g 1_h(\xi) = 1_g(\xi) 1_h(\xi) = 1 \cdot 1 = 1$ e $1_g 1_h(\eta) = 1_g(\eta) 1_h(\eta) = 1 \cdot 0 = 0$.

Portanto, pelo teorema de Stone-Weierstrass (ver teorema A.6.9 em [15]) $\overline{\mathcal{D}} = D_g$.

Algumas contas básicas envolvendo os elementos 1_g, como definidos acima, serão freqüentes ao longo das próximas demonstrações, por isso faremos uma pequena coletânea destas contas no próximo lema.

Lema 3.2.5. *Dado $g \in G$ arbitrário, seja 1_g como definido acima. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $(1_e\delta_e)(1_g\delta_g) = 1_g\delta_g$;

(ii) $(1_g\delta_g)(1_e\delta_e) = 1_g\delta_g$;

(iii) $(1_g\delta_g)^* = 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}$;

(iv) $(1_g\delta_g)(1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}) = 1_g\delta_e$.

Demonstração.

(i) $(1_e\delta_e)(1_g\delta_g) = \alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(1_e)1_g)\delta_{eg} = \alpha_e(1_e1_g)\delta_g = \alpha_e(1_g)\delta_g = 1_g\delta_g$, já que 1_e é a unidade de X_G.

(ii) $(1_g\delta_g)(1_e\delta_e) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(1_g)1_e)\delta_{ge} = \alpha_g(1_{g^{-1}}1_e)\delta_g = \alpha_g(1_{g^{-1}})\delta_g = 1_g\delta_g$.

(iii) $(1_g\delta_g)^* = \alpha_{g^{-1}}(1_g{}^*)\delta_{g^{-1}} = \alpha_{g^{-1}}(1_g)\delta_{g^{-1}} = 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}$.

(iv) $(1_g\delta_g)(1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(1_g)1_{g^{-1}})\delta_{gg^{-1}} = \alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}})\delta_e = \alpha_g(1_{g^{-1}})\delta_e = 1_g\delta_e$.

■

Note que segue dos itens (i) e (ii) do lema acima, que $1_e\delta_e$ é a unidade de $C(X_G) \rtimes_\alpha G$.

Lema 3.2.6. *Existe um homomorfismo $\psi : C^*_p(G) \longrightarrow C(X_G) \rtimes_\alpha G$, tal que para todo $g \in G$, $\psi\Big(\overline{[g]}\Big) = 1_g\delta_g$.*

Demonstração. Defina

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathcal{G} & \longrightarrow & C(X_G) \rtimes_\alpha G \\ {[g]} & \longmapsto & 1_g\delta_g, \end{array}$$

vamos verificar que ρ satisfaz $\mathcal{R}$. Sejam $g, h \in G$ arbitrários, então temos que

(i)
$$\begin{aligned} \big\|\widetilde{\rho}\big(\big[g^{-1}\big] - [g]^*\big)\big\| &= \big\|\rho\big(\big[g^{-1}\big]\big) - \rho([g])^*\big\| = \|1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} - (1_g\delta_g)^*\| \\ &= \|1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} - 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\| = 0. \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} \big\|\widetilde{\rho}\big([g][h]\big[h^{-1}\big] - [gh]\big[h^{-1}\big]\big)\big\| &= \big\|\rho([g])\rho([h])\rho\big(\big[h^{-1}\big]\big) - \rho([gh])\rho\big(\big[h^{-1}\big]\big)\big\| \\ &= \|(1_g\delta_g1_h\delta_h)1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}} - 1_{gh}\delta_{gh}1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}}\| \end{aligned} \tag{3.2}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} (1_g\delta_g1_h\delta_h)1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}} &= (\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(1_g)1_h)\delta_{gh})1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}} = (\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)\delta_{gh})1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}} \\ &= (1_g1_{gh}\delta_{gh})1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}} = \alpha_{gh}\Big(\alpha_{(gh)^{-1}}(1_g1_{gh})1_{h^{-1}}\Big)\delta_{ghh^{-1}} \\ &= \alpha_{gh}\Big(1_{(gh)^{-1}}1_{h^{-1}g^{-1}g}1_{h^{-1}}\Big)\delta_g = \alpha_{gh}\Big(1_{(gh)^{-1}}1_{h^{-1}}\Big)\delta_g \\ &= 1_{gh}1_g\delta_g. \end{aligned} \tag{3.3}$$

E também que

$$\begin{aligned}1_{gh}\delta_{gh}1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}} &= \alpha_{gh}\Big(\alpha_{(gh)^{-1}}(1_{gh})1_{h^{-1}}\Big)\delta_{ghh^{-1}} = \alpha_{gh}\Big(1_{(gh)^{-1}}1_{h^{-1}}\Big)\delta_g \\ &= 1_{gh}1_g\delta_g. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Logo, substituindo as equações 3.3 e 3.4 em 3.2, obtemos

$$\left\|\widetilde{\rho}\big([g][h]\left[h^{-1}\right] - [gh]\left[h^{-1}\right]\big)\right\| = 0.$$

Portanto, ρ é uma representação de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ e pela propriedade universal de $C_p^*(G)$, temos que existe um único homomorfismo ψ, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\iota"'] & & C(X_G) \rtimes_\alpha G \\ & C_p^*(G) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Então, para todo $g \in G$, temos que

$$\psi\Big(\overline{[g]}\Big) = \psi \circ \iota([g]) = \rho([g]) = 1_g\delta_g,$$

donde segue o resultado.

■

Agora, vamos na direção da construção do par α-covariante. Para isso, precisaremos primeiramente ver $C(X_G)$ como uma C^*-álgebra universal, que pela motivação que fizemos anteriormente, vemos que ela terá que ser a C^*-álgebra universal "gerada pelos ε_g's". Uma vez feita esta identificação, construiremos um homomorfismo desta C^*-álgebra universal para $C_p^*(G)$, para então obter o homomorfismo do par α-covariante.

Seja $\mathcal{G}_G = \{e_g \mid g \in G\}$ e

$$\mathcal{R}_G = \big\{e_e = 1, e_g = e_g^*, e_ge_g = e_g, e_he_g = e_ge_h \mid g, h \in G\big\}.$$

Note que se ρ é uma representação de $(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$, então para todo $g \in G$ temos que

$$\|\rho(e_g)\|^2 = \|\rho(e_g)\rho(e_g)^*\| = \|\rho(e_g)\| \;\Rightarrow\; \|\rho(e_g)\| \leq 1,$$

e portanto, o par $(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$ é admissível, donde segue que existe $C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$. Observe que $C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$ é uma C^*-álgebra comutativa, logo

$$C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G) \cong C(\mathcal{E}_G),$$

onde $\mathcal{E}_G$ denota o espectro da C^*-álgebra $C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$.

Lema 3.2.7. *$C(X_G)$ e $C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$ são isomorfas.*

Demonstração. Para demonstrar que $C(X_G)$ e $C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$ são isomorfas, mostraremos que X_G e $\mathcal{E}_G$ são homeomorfos, pois

$$X_G \simeq \mathcal{E}_G \Rightarrow C(X_G) \cong C(\mathcal{E}_G) \cong C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G) .$$

Portanto, defina para $\xi \in X_G$ arbitrário, a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} T_\xi : \mathcal{G}_G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ e_g &\longmapsto [g \in \xi]. \end{aligned}$$

Vamos verificar que T_ξ é uma representação de $(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$. Tome $g, h \in G$ arbitrários; então, temos que

1. $\left\|\widetilde{T}_\xi\big(e_g - e_g^*\big)\right\| = \left\|T_\xi(e_g) - \overline{T_\xi(e_g)}\right\| = \left\|[g \in \xi] - \overline{[g \in \xi]}\right\| = 0$, pois $[g \in \xi] \in \{0, 1\}$.
2. $\left\|\widetilde{T}_\xi(e_g e_g - e_g)\right\| = \|T_\xi(e_g)T_\xi(e_g) - T_\xi(e_g)\| = \|[g \in \xi][g \in \xi] - [g \in \xi]\| = 0$, novamente por $[g \in \xi] \in \{0, 1\}$.
3. $$\begin{aligned} \left\|\widetilde{T}_\xi(e_g e_h - e_h e_g)\right\| &= \|T_\xi(e_g)T_\xi(e_h) - T_\xi(e_h)T_\xi(e_g)\| \\ &= \|[g \in \xi][h \in \xi] - [h \in \xi][g \in \xi]\| = 0. \end{aligned}$$

Portanto T_ξ é uma representação de $(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$ e, pela propriedade universal de $C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$, temos que existe um único homomorfismo $\widehat{T}_\xi$, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_G \arrow[rr, "T_\xi"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \mathbb{C} \\ & C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G) \arrow[ur, "\widehat{T}_\xi"'] & \end{tikzcd}$$

Observe que como $\widehat{T}_\xi$ é um homomorfismo entre C^*-álgebras, $\left\|\widehat{T}_\xi\right\| \leq 1$ (ver teorema 2.1.7 em [14]).

Note ainda que $\widehat{T}_\xi$ é não nulo, já que

$$\widehat{T}_\xi(\overline{e_e}) = \widehat{T}_\xi \circ \iota(e_e) = T_\xi(e_e) = 1$$

e, sendo assim, fica bem definida a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \widehat{T}: X_G &\longrightarrow \mathcal{E}_G \\ \xi &\longmapsto \widehat{T}_\xi. \end{aligned}$$

Agora, resta-nos verificar que $\widehat{T}$ é um homeomorfismo.

- Injetividade de $\widehat{T}$: Tome $\xi, \eta \in X_G$ tais que $\xi \neq \eta$; então, sem perda de generalidade, existe $g \in \xi$, tal que $g \notin \eta$. Logo, temos que $\widehat{T}_\xi(\overline{e_g}) = T_\xi(e_g) = 1$ e $\widehat{T}_\eta(\overline{e_g}) = T_\eta(e_g) = 0$, donde segue que $\widehat{T}_\xi \neq \widehat{T}_\eta$.

- Sobrejetividade de $\widehat{T}$: Dado $\varphi \in \mathcal{E}_G$ arbitrário, defina

  $$\xi = \{g \in G \mid \varphi(\overline{e_g}) = 1\}.$$

  Observe que $\xi \in X_G$, pois $\varphi(\overline{e_e}) = 1$, já que $\overline{e_e}$ é a unidade de $C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$ e φ é um homomorfismo não nulo.

- Continuidade de $\widehat{T}$: Tome $\{\xi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X_G$ um net e $\xi \in X_G$, tais que $\xi_\lambda \to \xi$. Mostraremos que $\widehat{T}_{\xi_\lambda} \to \widehat{T}_\xi$.

  Como $\xi_\lambda \to \xi$, temos que para $g \in G$ arbitrário, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que, para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $[g \in \xi_\lambda] = [g \in \xi]$. Então, para todo $\lambda \geq \lambda_0$, temos que

  $$\widehat{T}_{\xi_\lambda}(\overline{e_g}) = T_{\xi_\lambda}(e_g) = [g \in \xi_\lambda] = [g \in \xi] = T_\xi(e_g) = \widehat{T}_\xi(\overline{e_g})$$

  e, portanto, como para todo $\xi \in X_G$, $\widehat{T}_\xi$ é um homomorfismo, temos que para todo $x \in B/N$, onde B/N é como definido na construção de C^*-álgebra universal (ver construção no apêndice A), $\widehat{T}_{\xi_\lambda}(x) \to \widehat{T}_\xi(x)$.

  Agora, vamos mostrar que para todo $y \in C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$, $\widehat{T}_{\xi_\lambda}(y) \to \widehat{T}_\xi(y)$.

  Tome $\varepsilon > 0$ e $y \in C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$ arbitrários; então, existe $x \in B/N$ tal que $\|y - x\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Sabemos também que existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que, para todo $\lambda \geq \lambda_0$,

$\left\|\widehat{T}_{\xi_\lambda}(x) - \widehat{T}_\xi(x)\right\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Portanto, para $\lambda > \lambda_0$ qualquer, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{T}_{\xi_\lambda}(y) - \widehat{T}_\xi(y)\right\| &= \left\|\widehat{T}_{\xi_\lambda}(y) - \widehat{T}_{\xi_\lambda}(x) + \widehat{T}_{\xi_\lambda}(x) - \widehat{T}_\xi(x) + \widehat{T}_\xi(x) - \widehat{T}_\xi(y)\right\| \\
&\leq \left\|\widehat{T}_{\xi_\lambda}(y) - \widehat{T}_{\xi_\lambda}(x)\right\| + \left\|\widehat{T}_{\xi_\lambda}(x) - \widehat{T}_\xi(x)\right\| + \left\|\widehat{T}_\xi(x) - \widehat{T}_\xi(y)\right\| \\
&= \left\|\widehat{T}_{\xi_\lambda}(y - x)\right\| + \left\|\widehat{T}_{\xi_\lambda}(x) - \widehat{T}_\xi(x)\right\| + \left\|\widehat{T}_\xi(x - y)\right\| \\
&\leq \left\|\widehat{T}_{\xi_\lambda}\right\| \|y - x\| + \left\|\widehat{T}_{\xi_\lambda}(x) - \widehat{T}_\xi(x)\right\| + \left\|\widehat{T}_\xi\right\| \|y - x\| \\
&\leq \|y - x\| + \left\|\widehat{T}_{\xi_\lambda}(x) - \widehat{T}_\xi(x)\right\| + \|y - x\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon;
\end{aligned}$$

portanto, $\widehat{T}_{\xi_\lambda}(y) \to \widehat{T}_\xi(y)$, e como $y \in C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$ foi tomado arbitrariamente, segue que $\widehat{T}_{\xi_\lambda} \to \widehat{T}_\xi$, já que a topologia do espectro $\mathcal{E}_G$ é a induzida do dual de $C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$, que é a topologia fraca $*$.

Por fim, como $\widehat{T} : X_G \longrightarrow \mathcal{E}_G$ é uma aplicação bijetora, contínua, de um espaço compacto (X_G como observado anteriormente é compacto) em um espaço Hausdorff (como $C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$ é uma álgebra de Banach comutativa, $\mathcal{E}_G$ é localmente compacto Hausdorff - ver teorema 3.2.10 em [15]), temos que $\widehat{T}$ é um homeomorfismo (ver teorema 17.14 em [17]).

Portanto, defina as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned}
\gamma : C(\mathcal{E}_G) &\longrightarrow C(X_G) \\
f &\longmapsto f \circ \widehat{T},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tau : C(X_G) &\longrightarrow C(\mathcal{E}_G) \\
f &\longmapsto f \circ \widehat{T}^{-1}
\end{aligned}$$

que são claramente homomorfismos e um o inverso do outro. Logo, γ é um isomorfismo.

Agora, seja $\zeta : C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G) \longrightarrow \mathcal{E}_G$ a transformada de Gelfand, logo para todo $g \in G$, $\zeta(\overline{e_g}) = \widehat{\overline{e_g}}$, onde para toda $f \in \mathcal{E}_G$, $\widehat{\overline{e_g}}(f) = f(\overline{e_g})$.

Como a transformada de Gelfand e γ são isomorfismos, $\phi : C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G) \longrightarrow C(X_G)$, definida por $\phi = \gamma \circ \zeta$ também é um isomorfismo, donde segue o resultado.

■

Note que do isomorfismo construído no lema anterior, temos que para qualquer

$g \in G$

$$\phi(\overline{e_g}) = \gamma \circ \zeta(\overline{e_g}) = \gamma\Big(\widehat{\overline{e_g}}\Big) = \widehat{\overline{e_g}} \circ \widehat{T},$$

e portanto, para qualquer $\xi \in X_G$

$$\phi(\overline{e_g})(\xi) = \widehat{\overline{e_g}} \circ \widehat{T}(\xi) = \widehat{\overline{e_g}}\Big(\widehat{T}_\xi\Big) = \widehat{T}_\xi(\overline{e_g}) = T_\xi(e_g) = [g \in \xi] = 1_g(\xi),$$

donde segue que para todo $g \in G$

$$\phi(\overline{e_g}) = 1_g.$$

Lema 3.2.8. *Existe um homomorfismo $\vartheta : C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G) \longrightarrow C^*_p(G)$ tal que, para todo $g \in G$, $\vartheta(\overline{e_g}) = \overline{[g][g]^*}$.*

Demonstração. Defina

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathcal{G}_G & \longrightarrow & C^*_p(G) \\ e_g & \longmapsto & \overline{[g][g]^*}, \end{array}$$

vamos verificar que ρ satisfaz $\mathcal{R}_G$. Sejam $g, h \in G$ arbitrários; então, temos que

(i)
$$\begin{aligned} \left\|\widetilde{\rho}\big(e_g - e_g^*\big)\right\| &= \|\rho(e_g) - \rho(e_g)^*\| = \left\|\overline{[g][g]^*} - \Big(\overline{[g][g]^*}\Big)^*\right\| \\ &= \left\|\overline{[g][g]^*} - \overline{[g][g]^*}\right\| = 0. \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} \|\widetilde{\rho}(e_g e_g - e_g)\| &= \|\rho(e_g)\rho(e_g) - \rho(e_g)\| = \left\|\overline{[g][g]^*[g][g]^*} - \overline{[g][g]^*}\right\| \\ &= \left\|\overline{[g][g]^*} - \overline{[g][g]^*}\right\| = 0. \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} \|\widetilde{\rho}(e_g e_h - e_h e_g)\| &= \|\rho(e_g)\rho(e_h) - \rho(e_h)\rho(e_g)\| = \left\|\overline{[g][g]^*[h][h]^*} - \overline{[h][h]^*[g][g]^*}\right\| \\ &= \left\|\overline{[g][g]^*[h][h]^*} - \overline{[g][g]^*[h][h]^*}\right\| = 0. \end{aligned}$$

Portanto, ρ é uma representação de $(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$, e pela propriedade universal de $C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G)$, temos que existe um único homomorfismo ϑ, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_G \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\iota"'] & & C^*_p(G) \\ & C^*(\mathcal{G}_G, \mathcal{R}_G) \arrow[ur, "\vartheta"'] & \end{tikzcd}$$

Então, para todo $g \in G$, temos que

$$\vartheta(\overline{e_g}) = \psi \circ \iota(e_g) = \rho(e_g) = \overline{[g][g]^*},$$

donde segue o resultado.

$\blacksquare$

Portanto, segue dos lemas 3.2.7 e 3.2.8 que existe um homomorfismo $\varphi : C(X_G) \longrightarrow C_p^*(G)$, a saber, $\varphi = \vartheta \circ \phi^{-1}$, tal que para todo $g \in G$, temos que

$$\varphi(1_g) = \vartheta \circ \phi^{-1}(1_g) = \vartheta(\overline{e_g}) = \overline{[g][g]^*}.$$

Agora, defina

$$\begin{array}{rcl} \pi : G & \longrightarrow & C_p^*(G) \\ g & \longmapsto & \overline{[g]} \end{array}$$

que é claramente uma representação parcial de G sobre $C_p^*(G)$, já que as relações de $C_p^*(G)$ são justamente as relações de representação parcial.

Proposição 3.2.9. *O par (φ, π) é α-covariante.*

Demonstração. Seja $g \in G$ e $f \in D_{g^{-1}}$ arbitrários; como

$$D_{g^{-1}} = \overline{\text{span}}\{1_{g^{-1}}1_{h_1} \cdots 1_{h_n} \mid n \in \mathbb{N}^*, h_1, \cdots, h_n \in G\},$$

sem perda de generalidade, considere $f = 1_{g^{-1}}1_h$, para algum $h \in G$. Então temos que

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_g(f)) &= \varphi(\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h)) = \varphi(1_g 1_{gh}) = \varphi(1_g)\varphi(1_{gh}) = \overline{[g][g]^*[gh][gh]^*} \\ &= \overline{[g]\left[g^{-1}\right][gh]\left[(gh)^{-1}\right]} = \overline{[g][h]\left[h^{-1}g^{-1}\right]} = \overline{[g][h][h]^*[h]\left[h^{-1}g^{-1}\right]} \\ &= \overline{[g][h][h]^*\left[g^{-1}\right]} = \overline{[g][h][h]^*[g]^*} = \overline{[g][g]^*[g][h][h]^*[g]^*} \\ &= \overline{[g]\left[g^{-1}\right]\left[g^{-1}\right]^*[h][h]^*[g]^*} = \pi(g)\varphi(1_{g^{-1}})\varphi(1_h)\pi(g)^* \\ &= \pi(g)\varphi(1_{g^{-1}}1_h)\pi(g)^* = \pi(g)\varphi(f)\pi(g)^*. \end{aligned}$$

Além disso, para $f \in C(X_G)$ arbitrária que, sem perda de generalidade, podemos considerar $f = 1_e 1_h = 1_h$, para algum $h \in G$, pois $D_e = C(X_G)$, temos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_g\varphi(f) &= \varepsilon_g\varphi(1_h) = \varepsilon_g\overline{[h][h]^*} = \varepsilon_g\pi(h)\pi(h)^* = \varepsilon_g\varepsilon_h \\ &= \varepsilon_h\varepsilon_g = \pi(h)\pi(h)^*\varepsilon_g = \overline{[h][h]^*}\varepsilon_g = \varphi(1_h)\varepsilon_g = \varphi(f)\varepsilon_g. \end{aligned}$$

Logo, o par (φ, π) é α-covariante.

$\blacksquare$

Portanto, segue do teorema 3.1.5 que existe uma representação

$$(\varphi \times \pi) : C(X_G) \rtimes_\alpha G \longrightarrow C_p^*(G),$$

tal que para todo $g \in G$ e $a \in D_G$

$$(\varphi \times \pi)(a\delta_g) = \varphi(a)\pi(g).$$

Teorema 3.2.10. *$C_p^*(G)$ e $C(X_G) \rtimes_\alpha G$ são isomorfas.*

Demonstração. Mostraremos que $(\varphi \times \pi)$ e ψ são um o inverso do outro, onde $(\varphi \times \pi)$ é como definido acima e ψ é como definido no lema 3.2.6.

Tome $g \in G$ arbitrário; então,

$$(\varphi \times \pi) \circ \psi\Big(\overline{[g]}\Big) = (\varphi \times \pi)(1_g\delta_g) = \varphi(1_g)\pi(g) = \overline{[g][g]^*[g]} = \overline{[g]},$$

e portanto, $(\varphi \times \pi) \circ \psi = id_{C_p^*(G)}$.

Agora, tome $a_g \in D_g$ arbitrário que, sem perda de generalidade, podemos considerar $a_g = 1_g 1_h$, para algum $h \in G$. Então, temos que

$$\begin{aligned}
\psi \circ (\varphi \times \pi)(a_g\delta_g) &= \psi \circ (\varphi \times \pi)(1_g 1_h \delta_g) = \psi(\varphi(1_g 1_h)\pi(g)) = \psi(\varphi(1_g)\varphi(1_h)\pi(g)) \\
&= \psi\Big(\overline{[g][g]^*[h][h]^*[g]}\Big) = \psi\Big(\overline{[h][h]^*[g][g]^*[g]}\Big) = \psi\Big(\overline{[h][h]^*[g]}\Big) \\
&= \psi\Big(\overline{[h]}\Big)\psi\Big(\overline{[h^{-1}]}\Big)\psi\Big(\overline{[g]}\Big) = 1_h\delta_h 1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}} 1_g\delta_g = 1_h\delta_e 1_g\delta_g \\
&= 1_h 1_g \delta_g = 1_g 1_h \delta_g = a_g\delta_g,
\end{aligned}$$

e portanto, $\psi \circ (\varphi \times \pi) = id_{C(X_G) \rtimes_\alpha G}$.

Logo, $C_p^*(G)$ e $C(X_G) \rtimes_\alpha G$ são isomorfas.

$\blacksquare$

A motivação para a construção do produto cruzado parcial que é isomorfo a $C_p^*(G)$, começou justamente observando que a C^*-álgebra do produto cruzado parcial deveria estar relacionada de alguma forma com a sub-C^*-álgebra $C^*\{\varepsilon_g \mid g \in G\}$ de $C_p^*(G)$. O próximo resultado confirma que esta motivação estava correta.

Corolário 3.2.11. *$C(X_G)$ é isomorfa a $C^*\{\varepsilon_g \mid g \in G\}$.*

Demonstração. Observe que para $f \in C(X_G)$ arbitrária, temos que

$$(\varphi \times \pi)(f\delta_e) = \varphi(f)\pi(e) = \varphi(f).$$

Logo, a imagem de φ é densa em $C^*\{\varepsilon_g \mid g \in G\}$, portanto basta provarmos que φ é injetora, para provarmos que $C(X_G) \cong C^*\{\varepsilon_g \mid g \in G\}$, já que a imagem de um homomorfismo entre C^*-álgebras é sempre fechada.

Sejam $f, g \in C(X_G)$, tais que $\varphi(f) = \varphi(g)$, o que implica que $(\varphi \times \pi)(f\delta_e) = (\varphi \times \pi)(g\delta_e)$. Mas como $(\varphi \times \pi)$ é um isomorfismo,

$$f\delta_e = g\delta_e \Rightarrow f = g,$$

pois $C(X_G)$ é uma C^*-álgebra e pelo teorema B.2.13, o núcleo da construção do produto cruzado parcial é nulo.

Portanto, φ é injetora, donde segue o resultado.

$\blacksquare$

3.3 C^*-álgebra parcial de grupo com mais relações

Vamos considerar agora, algumas relações a mais em $C_p^*(G)$, um conjunto que definiremos mais adiante, mas que para fins de uma motivação, denotaremos por $\widehat{R}$ e por $C_p^*\left(G, \widehat{R}\right)$ a C^*-álgebra parcial de grupo munida com estas relações adicionais. Então é de se esperar que o seguinte ocorra:

$$C_p^*\left(G, \widehat{R}\right) \cong C_p^*(G)/ < \widehat{R} > \cong (C(X_G) \rtimes_\alpha G)/\psi < \widehat{R} >,$$

onde $\langle\cdot\rangle$ denota o ideal gerado pelo conjunto $\widehat{R}$ e ψ é o isomorfismo construído na seção anterior entre $C_p^*(G)$ e $C(X_G) \rtimes_\alpha G$. Mas será que conseguimos construir uma ação parcial $\overline{\alpha}$ e um ideal I de $C(X_G)$, tal que

$$(C(X_G) \rtimes_\alpha G)/\psi < \widehat{R} > \cong (C(X_G)/I) \rtimes_{\overline{\alpha}} G\ ?$$

Esta seção será dedicada a mostrar que a C^*-álgebra universal de um conjunto de geradores provenientes de um grupo, com as relações de representação parcial e com algumas relações adicionais, também será isomorfa a um produto cruzado parcial, que está diretamente relacionado com $C(X_G) \rtimes_\alpha G$.

Proposição 3.3.1. *Seja $R \subseteq C(X_G)$ um subconjunto qualquer. O menor ideal α-*

invariante (ver definição 2.1.12) de $C(X_G)$, que contém R, é o ideal

$$I = \langle \alpha_g(1_{g^{-1}}f) \mid g \in G, f \in R \rangle .$$

Demonstração. Por definição, $I \trianglelefteq C(X_G)$, logo temos que provar apenas que I é o menor ideal α-invariante de $C(X_G)$ que contém R.

Primeiramente, vamos verificar que $R \subseteq I$. Tome $f \in R$ arbitrária e note que

$$f = \alpha_e(f) = \alpha_e(1_e f) \in I,$$

logo $R \subseteq I$.

Agora, vamos verificar que I é α-invariante. Tome $h \in G$ e $x \in D_{h^{-1}} \cap I$ arbitrários; sem perda de generalidade, podemos considerar $x = 1_{h^{-1}}1_k\alpha_g(1_{g^{-1}}f)\widetilde{f} = 1_{h^{-1}}\alpha_g(1_{g^{-1}}f)1_k\widetilde{f}$, para alguns $k, g \in G$, $f \in R$ e $\widetilde{f} \in C(X_G)$. Então, definindo $\widehat{f} = 1_k\widetilde{f}$ e observando que $\widehat{f}\,1_g \in D_g$, o que implica que existe $w \in D_{g^{-1}}$, tal que $\alpha_g(w) = \widehat{f}\,1_g$, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha_h(x) &= \alpha_h\Big(1_{h^{-1}}\alpha_g(1_{g^{-1}}f)\widehat{f}\Big) = \alpha_h\Big(1_{h^{-1}}1_g\alpha_g(1_{g^{-1}}f)\widehat{f}\,1_g\Big) \\
&= \alpha_h\Big(1_g1_{h^{-1}}\alpha_g(1_{g^{-1}}f)\widehat{f}\,1_g\Big) = \alpha_h\Big(\alpha_g\Big(1_{g^{-1}}1_{(hg)^{-1}}\Big)\alpha_g(1_{g^{-1}}f)\alpha_g(w)\Big) \\
&= \alpha_h\Big(\alpha_g\Big(1_{g^{-1}}1_{(hg)^{-1}}1_{g^{-1}}fw\Big)\Big) = \alpha_h\Big(\alpha_g\Big(1_{(hg)^{-1}}1_{g^{-1}}1_{g^{-1}}fw\Big)\Big) \\
&= \alpha_h\Big(\alpha_g\Big(1_{(hg)^{-1}}1_{g^{-1}}fw\Big)\Big) = \alpha_{hg}\Big(1_{(hg)^{-1}}1_{g^{-1}}fw\Big) \\
&= \alpha_{hg}\Big(1_{(hg)^{-1}}f\,1_{g^{-1}}w\Big) = \alpha_{hg}\Big(1_{(hg)^{-1}}f\,1_{(hg)^{-1}}1_{g^{-1}}w\Big) \\
&= \underbrace{\alpha_{hg}\Big(1_{(hg)^{-1}}f\Big)}_{\in I}\underbrace{\alpha_{hg}\Big(1_{(hg)^{-1}}1_{g^{-1}}w\Big)}_{\in C(X_G)} \in I,
\end{aligned}$$

donde segue que I é α-invariante.

Por fim, só nos resta verificar que I é o menor ideal α-invariante de $C(X_G)$ que contém R. Então, tome $J \trianglelefteq C(X_G)$, tal que J é α-invariante e contém R. Logo, para $f \in R$ e $g \in G$ arbitrários, temos que

$$f \in J \Rightarrow 1_{g^{-1}}f \in J \Rightarrow \alpha_g(1_{g^{-1}}f) \in J \Rightarrow I \subseteq J,$$

donde o resultado segue.

∎

I daqui em diante, denotará $\langle \alpha_g(1_{g^{-1}}f) \mid g \in G, f \in R \rangle$.

Observe que como $I \trianglelefteq C(X_G)$, temos que $I = C_0(V)$, para algum $V \subseteq X_G$ aberto (ver exercício 3.2.3 em [15]). Então,

$$C(X_G)/I = C(X_G)/C_0(V) \cong C_0(X_G \backslash V) = C(X_G \backslash V),$$

já que $X_G \backslash V$ é compacto, pois é um subconjunto fechado de um compacto. Na próxima proposição iremos identificar $X_G \backslash V$.

Proposição 3.3.2. *Seja* $\Omega_R = \{\xi \in X_G \mid \forall\, f \in R, \forall\, g \in \xi, f(g^{-1}\xi) = 0\}$. *Então,*

$$X_G \backslash V = \Omega_R.$$

Demonstração. ($\subseteq$) Tome $\xi \in X_G \backslash V$, $f \in R$ e $g \in G$ arbitrários; então, $\alpha_g(1_{g^{-1}} f)(\xi) = 0$, pois $\alpha_g(1_{g^{-1}} f) \in I = C_0(V) = \{f \in C(X_G) \mid \forall x \notin V, f(x) = 0\}$. Portanto, em particular, para $g \in \xi$ arbitrário, temos que

$$0 = \alpha_g(1_{g^{-1}} f)(\xi) = (1_{g^{-1}}\, f) \circ \theta_{g^{-1}}(\xi) = 1_{g^{-1}}\big(g^{-1}\xi\big) f\big(g^{-1}\xi\big) = f\big(g^{-1}\xi\big),$$

donde segue que $\xi \in \Omega_R$.

($\supseteq$) Tome $\xi \in \Omega_R$, $f \in R$ e $g \in G$ arbitrários; então, temos que:

- Caso 1: $g \in \xi$. Neste caso

$$\alpha_g(1_{g^{-1}} f)(\xi) = (1_{g^{-1}}\, f) \circ \theta_{g^{-1}}(\xi) = 1_{g^{-1}}\big(g^{-1}\xi\big) f\big(g^{-1}\xi\big) = f\big(g^{-1}\xi\big) = 0.$$

- Caso 2: $g \notin \xi$. Neste caso, pela definição de α_g, temos que $\alpha_g(1_{g^{-1}} f)(\xi) = 0$.

Portanto, para $\widetilde{f} \in I$, $\widetilde{f}(\xi) = 0$, donde segue que $\xi \in X_G \backslash V$.

■

Definição 3.3.3. Ω_R é denominado o *espectro* de R.

Proposição 3.3.4. Ω_R *é θ-invariante, isto é, para todo $g \in G$, temos que*

$$\theta_g(X_{g^{-1}} \cap \Omega_R) \subseteq X_g \cap \Omega_R,$$

onde θ é como definida no lema 3.2.3.

Demonstração. Tome $\xi \in X_{g^{-1}} \cap \Omega_R$ arbitrário; então, $\theta_g(\xi) = g\xi \in X_g$. Logo, para $f \in R$ e $k \in g\xi$ arbitrários, temos que $f(k^{-1}g\xi) = 0$, já que $g^{-1}k \in \xi$ e $\xi \in \Omega_R$.

Portanto, $\theta_g(\xi) \in \Omega_R$, donde segue que $\theta_g(X_{g^{-1}} \cap \Omega_R) \subseteq X_g \cap \Omega_R$.

$\blacksquare$

Agora tome $R \subseteq C(X_G)$, tal que

$$R \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j}^{m_i} 1_{g_{ij}} \mid n, m_i \in \mathbb{N}^*, \lambda_i \in \mathbb{C}, g_{ij} \in G \right\}.$$

Considere novamente $\mathcal{G} = \{[g] \mid g \in G\}$,

$$\mathcal{R} = \left\{ [e] = 1, \left[g^{-1}\right] = [g]^*, [g][h]\left[h^{-1}\right] = [gh]\left[h^{-1}\right] \mid g, h \in G \right\}$$

e defina $\widetilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j}^{m_i} [g_{ij}][g_{ij}]^* = 0 \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j}^{m_i} 1_{g_{ij}} \in R \right\}$.

Como o par $\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right)$ é claramente admissível, existe a C^*-álgebra universal gerada pelo conjunto $\mathcal{G} = \{[g] \mid g \in G\}$ com as relações $\widetilde{\mathcal{R}}$, que denotaremos por $C_p^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right)$. No que segue, iremos mostrar que $C_p^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right)$ é isomorfa ao produto cruzado parcial $C(\Omega_R) \rtimes_{\overline{\alpha}} G$, onde $\overline{\alpha}$ é como definida na proposição 2.1.14.

Lema 3.3.5. *Existe um homomorfismo $\Upsilon : C_p^*(G) \longrightarrow C_p^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{R}\right)$ tal que, para todo $g \in G$, $\Upsilon\left(\overline{[g]}\right) = \dot{\overline{[g]}}$, onde $\dot{\overline{[g]}}$ denota a classe de equivalência do elemento $[g]$, referente ao quociente pelo núcleo da norma definida na construção de C^*-álgebra universal (ver construção no apêndice 1).*

Demonstração. Defina a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{G} &\longrightarrow C_p^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{R}\right) \\ [g] &\longmapsto \dot{\overline{[g]}}. \end{aligned}$$

Claramente, ρ é uma representação de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$; logo, pela propriedade universal de $C_p^*(G)$, temos que existe um único homomorfismo Υ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\iota"'] & & C_p^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right) \\ & C_p^*(G) \arrow[ur, "\Upsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Portanto, para todo $g \in G$, temos que

$$\Upsilon\left(\overline{[g]}\right) = \Upsilon \circ \iota([g]) = \rho(g) = \dot{\overline{[g]}}.$$

$\blacksquare$

Proposição 3.3.6. *Existe um homomorfismo* $\Theta : C(\Omega_R) \rtimes_{\overline{\alpha}} G \longrightarrow C_p^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{R}\right)$ *tal que, para todo* $g \in G$, $\Theta\left(\ddot{\overline{1_g\delta_g}}\right) = \dot{\overline{[g]}}$, *onde* $\ddot{\overline{1_g\delta_g}}$ *denota a classe de equivalência do elemento* $1_g\delta_g$*, referente ao quociente pelo núcleo da norma definida na construção de* C^**-álgebra envolvente (ver construção no apêndice 1).*

Demonstração. Para mostrar a existência deste homomorfismo, iremos recorrer à construção de um par α-covariante.

Defina

$$\begin{array}{rcl} \pi : G & \longrightarrow & C_p^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{R}\right) \\ g & \longmapsto & \dot{\overline{[g]}} \end{array}$$

que é claramente uma representação de G sobre $C_p^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{R}\right)$, já que, em $\widetilde{\mathcal{R}}$ temos as relações de representação parcial.

Seja $\widetilde{\Phi} = \Psi \circ \varphi$, onde Ψ é como definida no lema 3.3.5 e φ é como definida após a demonstração do lema 3.2.8. Portanto, $\widetilde{\Phi} : C(X_G) \longrightarrow C_p^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{R}\right)$ e para $g \in G$ qualquer,

$$\widetilde{\Phi}(1_g) = \Psi \circ \varphi(1_g) = \Psi\left(\overline{[g][g]^*}\right) = \dot{\overline{[g][g]^*}}.$$

Agora, observe que para $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j=1}^{m_i} 1_{g_{ij}} \in R$ e $h \in G$ arbitrários, temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}(\alpha_h(1_{h^{-1}}f)) &= \widetilde{\Phi}\left(\alpha_h\left(1_{h^{-1}}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{j=1}^{m_i}1_{g_{ij}}\right)\right)\right) = \widetilde{\Phi}\left(\alpha_h\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{j=1}^{m_i}1_{h^{-1}}1_{g_{ij}}\right)\right) \\ &= \widetilde{\Phi}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{j=1}^{m_i}\alpha_h\left(1_{h^{-1}}1_{g_{ij}}\right)\right) = \widetilde{\Phi}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{j=1}^{m_i}1_h 1_{hg_{ij}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{j=1}^{m_i}\widetilde{\Phi}(1_h)\widetilde{\Phi}\left(1_{g_{ij}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{j=1}^{m_i}\dot{\overline{[h][h]^*}}\dot{\overline{[hg_{ij}][hg_{ij}]^*}} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i[h]\left(\prod_{j=1}^{m_i}\dot{\overline{[g_{ij}][g_{ij}]^*}}\right)\dot{\overline{[h]^*}} = \dot{\overline{[h]}}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{j=1}^{m_i}\dot{\overline{[g_{ij}][g_{ij}]^*}}\right)\dot{\overline{[h]^*}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, existe um homomorfismo $\Phi : C(\Omega_R) = C(X_G)/I \longrightarrow C_p^*\Big(\mathcal{G}, \widetilde{R}\Big)$ tal que, para todo $g \in G$, $\Phi\Big(\ddot{\overline{1_g}}\Big) = \dot{\overline{[g][g]^*}}$.

Agora, vamos verificar portanto que o par (Φ, π) é α-covariante.

(i) Sejam $g \in G$, $\ddot{\overline{a_{g^{-1}} + i}} \in (D_{g^{-1}} + I)/I$ arbitrários. Sem perda de generalidade, podemos considerar $\ddot{\overline{a_{g^{-1}}}} = \ddot{\overline{1_{g^{-1}}1_h}}$, para algum $h \in G$. Então, temos que

$$\begin{aligned}
\Phi\Big(\overline{\alpha_g}\Big(\ddot{\overline{a_{g^{-1}} + i}}\Big)\Big) &= \Phi\big(\overline{\alpha_g}\big(\ddot{\overline{a_{g^{-1}}}}\big)\big) = \Phi\Big(\overline{\alpha_g}\Big(\ddot{\overline{1_{g^{-1}}1_h}}\Big)\Big) = \Phi\Big(\ddot{\overline{1_g 1_{gh}}}\Big) \\
&= \Phi\Big(\ddot{\overline{1_g}}\Big)\Phi\Big(\ddot{\overline{1_{gh}}}\Big) = \dot{\overline{[g][g]^*[gh][gh]^*}} = \dot{\overline{[g][h]\left[h^{-1}g^{-1}\right]}} \\
&= \dot{\overline{[g][h][h]^*[g]^*}} = \dot{\overline{[g][h][h]^*[g]^*[g][g]^*}} \\
&= \pi(g)\Phi\Big(\ddot{\overline{1_h}}\Big)\Phi\Big(\ddot{\overline{1_{g^{-1}}}}\Big)\pi(g)^* = \pi(g)\Phi\Big(\ddot{\overline{1_h 1_{g^{-1}}}}\Big)\pi(g)^* \\
&= \pi(g)\Phi\Big(\ddot{\overline{1_{g^{-1}}1_h}}\Big)\pi(g)^* = \pi(g)\Phi\big(\ddot{\overline{a_{g^{-1}}}}\big)\pi(g)^* \\
&= \pi(g)\Phi\Big(\ddot{\overline{a_{g^{-1}} + i}}\Big)\pi(g)^*.
\end{aligned}$$

(ii) Sejam $g \in G$ e $f \in C(\Omega_R)$ arbitrários. Sem perda de generalidade, podemos considerar $f = \ddot{\overline{1_e 1_k}} = \ddot{\overline{1_k}}$, para algum $k \in G$. Então, temos que

$$\begin{aligned}
\Phi(f)\pi(g)\pi(g)^* &= \Phi\Big(\ddot{\overline{1_k}}\Big)\pi(g)\pi(g)^* = \dot{\overline{[k][k]^*[g][g]^*}} \\
&= \dot{\overline{[g][g]^*[k][k]^*}} = \pi(g)\pi(g)^*\Phi\Big(\ddot{\overline{1_k}}\Big) \\
&= \pi(g)\pi(g)^*\Phi(f).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema 3.1.5, existe uma única representação $(\Phi \times \pi) : C(\Omega_R) \rtimes_{\overline{\alpha}} G \longrightarrow C_p^*\Big(\mathcal{G}, \widetilde{R}\Big)$, tal que para todo $g \in G$ e $\ddot{\overline{a_{g^{-1}} + i}} \in (D_{g^{-1}} + I)/I$, temos que

$$(\Phi \times \pi)\Big(\ddot{\overline{a_{g^{-1}} + i}}\,\delta_g\Big) = \Phi\Big(\ddot{\overline{a_{g^{-1}} + i}}\Big)\pi(g).$$

Então, para todo $g \in G$,

$$(\Phi \times \pi)\Big(\ddot{\overline{1_g}}\delta_g\Big) = \Phi\Big(\ddot{\overline{1_g}}\Big)\pi(g) = \dot{\overline{[g][g]^*[g]}} = \dot{\overline{[g]}}.$$

Logo, basta tomarmos $\Theta = \Phi \times \pi$ e o resultado segue.

$\blacksquare$

Proposição 3.3.7. *Existe um homomorfismo* $\Gamma : C_p^*\Big(\mathcal{G}, \widetilde{R}\Big) \longrightarrow C(\Omega_R) \rtimes_{\overline{\alpha}} G$ *tal que, para todo* $g \in G$, $\Gamma\Big(\dot{\overline{[g]}}\Big) = \ddot{\overline{1_g}}\,\delta_g$.

Demonstração. Defina

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathcal{G} & \longrightarrow & C(\Omega_R) \rtimes_{\overline{\alpha}} G \\ [g] & \longmapsto & \ddot{\overline{1_g}}\, \delta_g, \end{array}$$

vamos verificar que ρ satisfaz $\widetilde{\mathcal{R}}$. As demonstrações que para $g, h \in G$ arbitrários, $\|\widetilde{\rho}([g^{-1}] - [g]^*)\| = 0$ e $\|\widetilde{\rho}([g][h][h^{-1}] - [gh][h^{-1}])\| = 0$, são completamente análogas as demonstrações dos itens (i) e (ii) no lema 3.2.6. Por isso, faremos apenas a demonstração de que para $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j=1}^{m_i} 1_{g_{ij}} \in R$ arbitrária, $\left\| \widetilde{\rho}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j=1}^{m_i} [g_{ij}][g_{ij}]^* \right) \right\| = 0$. Observe que

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j=1}^{m_i} [g_{ij}][g_{ij}]^* \right) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j=1}^{m_i} \rho([g_{ij}])\rho(g_{ij})^* \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j=1}^{m_i} \ddot{\overline{1_{g_{ij}}}}\, \delta_{g_{ij}}\, \ddot{\overline{1_{(g_{ij})^{-1}}}}\, \delta_{(g_{ij})^{-1}} \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j=1}^{m_i} \ddot{\overline{1_{g_{ij}}}}\, \delta_e \right\| = \left\| \ddot{\overline{f}}\, \delta_e \right\| \end{aligned}$$

e como $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j=1}^{m_i} 1_{g_{ij}} \in R$, temos que $f \equiv 0$.

Portanto, ρ é uma representação de $\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right)$ e pela propriedade universal de $C_p^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right)$, temos que existe um único homomorfismo Γ, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\iota"'] & & C(\Omega_R) \rtimes_{\overline{\alpha}} G \\ & C_p^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right) \arrow[ur, "\Gamma"'] & \end{tikzcd}$$

Então, para todo $g \in G$, temos que

$$\Gamma\left(\dot{\overline{[g]}}\right) = \Gamma \circ \iota([g]) = \rho([g]) = \ddot{\overline{1_g}}\, \delta_g,$$

donde segue o resultado.

$\blacksquare$

Teorema 3.3.8. *$C_p^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right)$ e $C(\Omega_R) \rtimes_{\overline{\alpha}} G$ são isomorfas.*

Demonstração. Tome $x \in C(\Omega_R) \rtimes_{\overline{\alpha}} G$ arbitrário; então,

$$x = \lim \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod \ddot{\overline{a_g}}\, \delta_g,$$

onde obviamente, para todo $g \in G$, $\ddot{\overline{a_g}} \in (D_g + I)/I$.

Além disso, para $g, h \in G$ arbitrários, temos que

$$(1_h\delta_h 1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}})1_g\delta_g = 1_h\delta_e 1_g\delta_g = 1_h 1_g\delta_g = 1_g 1_h\delta_g.$$

Logo, o conjunto dos 1_g's gera o conjunto dos 1_g1_h's e, como $D_g = \langle 1_g 1_h \mid h \in G\rangle$, fica evidente que os homomorfismos $\Phi \times \pi$ e Γ, como definidos nas proposições 3.3.6 e 3.3.7, respectivamente, são um o inverso do outro, donde segue que

$$C_p^*\Big(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\Big) \cong C(\Omega_R) \rtimes_{\overline{\alpha}} G.$$

■

Capítulo 4

Exemplos de C*-álgebras universais geradas por isometrias

Como citado na introdução do trabalho, nosso grande objetivo é estudar a C^*-álgebra universal gerada por duas isometrias que comutam, utilizando as ferramentas desenvolvidas nos capítulos anteriores. Para isto, precisaremos relacionar de alguma forma esta C^*-álgebra com uma C^*-álgebra gerada por um conjunto de geradores e relações, tais como no capítulo anterior, pois desta forma poderemos caracterizá-la como um produto cruzado parcial. Sabendo que o estudo da C^*-álgebra universal gerada por duas isometrias que comutam é muito complexo, estamos na busca de quais hipóteses adicionar às isometrias, para que possamos utilizar a nossa teoria.

Vamos então estudar a C^*-álgebra universal gerada por um grupo G (com unidade e) com as relações de representação parcial e com a relação adicional que dois elementos em particular são isometrias. Então, se $\mathcal{G} = \{S_g \mid g \in G\}$ e para um determinado $g \in G$ queremos que S_g seja uma isometria, temos o seguinte:

$$S_g^* S_g = 1 \Leftrightarrow \varepsilon_{g^{-1}} = \varepsilon_e,$$

e desta forma pela teoria desenvolvida no capítulo anterior temos que adicionar a relação $1_{g^{-1}} - 1_e$. Agora note que a C^*-álgebra universal que tem como conjunto gerador o grupo $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, com as relações de representação parcial e com as relações adicionais de que dois elementos em particular são isometrias é um produto cruzado parcial, já que dados $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathcal{G} = \{S_g \mid g \in G\}$, $R = \big\{1_{(-1,0)} - 1_{(0,0)}, 1_{(0,-1)} - 1_{(0,0)}\big\} \subseteq C(X_G)$, $\mathcal{R} = \big\{S_e = 1, S_g^* = S_{g^{-1}}, S_g S_h S_h^* = S_{gh} S_h^* \mid g, h \in G\big\}$ e $\widetilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{S_{(1,0)}^* S_{(1,0)} = 1, S_{(0,1)}^* S_{(0,1)} = 1\}$, o par $\Big(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\Big)$ é admissível, logo existe $C^*\Big(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\Big)$ e, pelo teorema 3.3.8, temos que

$$C^*\Big(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\Big) \cong C(\Omega_R) \rtimes_{\overline{\alpha}} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}).$$

Sendo assim, tentaremos relacionar $C^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right)$ com a C^*-álgebra gerada por duas isometrias que comutam e, na direção de encontrar as relações que devermos adicionar a estas duas isometrias que comutam, para obter o isomorfismo desejado, iremos primeiramente na seção 4.1, que teve como base o artigo [8], definir o que são duas isometrias compatíveis, bem como o que são duas isometrias duplamente comutantes e desenvolver alguns resultados básicos, para então, na seção seguinte, encontrar as relações desejadas. A razão pela escolha do grupo $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e das relações de representação parcial ficará mais evidente pelo teorema 4.2.2. Por fim, na última seção, iremos caracterizar a C^*-álgebra universal gerada por duas isometrias duplamente comutantes.

4.1 Isometrias compatíveis e isometrias duplamente comutantes

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável. No que segue, o símbolo $\diamond$ denotará comutatividade, ou seja, $x \diamond y$ denota $xy = yx$.

Definição 4.1.1. Sejam $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ isometrias. Dizemos que S_1 e S_2 são *compatíveis* se $S_1 \diamond S_2$ e para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $S_1^m(S_1^*)^m \diamond S_2^n(S_2^*)^n$, isto é, as projeções finais de S_1^m e S_2^n (ou seja, as projeções ortogonais sobre as imagens de S_1^m e S_2^n) comutam.

Definição 4.1.2. Sejam $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ isometrias. Dizemos que S_1 e S_2 são *duplamente comutantes* se $S_1 \diamond S_2$ e $S_1 \diamond S_2^*$.

Note que, se duas isometrias $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ são duplamente comutantes, então elas são compatíveis. De fato, sejam $m, n \in \mathbb{N}$ arbitrários; então, temos que

$$\begin{aligned} S_1^m(S_1^*)^m S_2^n(S_2^n)^* &= S_1^m S_2^n (S_1^*)^m (S_2^*)^n = S_2^n S_1^m (S_1^*)^m (S_2^*)^n \\ &= S_2^n S_1^m (S_2^*)^n (S_1^*)^m = S_2^n (S_2^*)^n S_1^m (S_1^*)^m, \end{aligned}$$

já que se $T, W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ são tais que $T \diamond W$, prova-se por indução que, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, $T^m \diamond W^n$.

Sejam S um semigrupo comutativo (aditivo), com unidade 0 e

$$\begin{aligned} T : S &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ s &\longmapsto T_s \end{aligned}$$

uma representação de S em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, ou seja, uma aplicação que preserva identidade e separa produto, tal que para todo $s \in S$, $T_s^*T_s = 1$. Sendo assim, o conjunto $\{T_s\}_{s\in S}$ também possui uma estrutura de semigrupo multiplicativo, com unidade 1.

Definição 4.1.3. Nós dizemos que o semigrupo $\{T_s\}_{s\in S}$ de isometrias é *compatível*, se $\{T_sT_s^*\}_{s\in S}$ forma uma família de projeções finais que comutam.

O seguinte teorema, mostra que para um par de isometrias, as duas noções de compatibilidade coincidem.

Teorema 4.1.4. *Sejam $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ isometrias que comutam. Então, S_1 e S_2 são compatíveis se, e somente se, o conjunto $\{S_1^m S_2^n\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ é um semigrupo de isometrias compatível.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Tome para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $T_{(m,n)} = S_1^m S_2^n$. Sejam $s = (s_1, s_2), t = (t_1, t_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ arbitrários. Note que o semigrupo $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é parcialmente ordenado pela relação:

$$(s_1, s_2) \le (t_1, t_2) \Leftrightarrow s_1 \le t_1, s_2 \le t_2.$$

Então,

- se $s \le t$, segue que

$$\begin{aligned} T_sT_s^*T_tT_t^* &= T_sT_s^*T_{s+t-s}T_t^* = T_sT_s^*T_sT_{t-s}T_t^* = T_sT_{t-s}T_t^* \\ &= T_tT_t^* = T_tT_{s+t-s}^* = T_t(T_sT_{t-s})^* = T_tT_{t-s}^*T_s^* \\ &= T_tT_{t-s}^*T_s^*T_sT_s^* = T_tT_t^*T_sT_s^*. \end{aligned}$$

- se $t \le s$, a demonstração é análoga ao item anterior.

- se s e t não são comparáveis, defina $r = (\min(s_1, t_1), \min(s_2, t_2))$; então, $s - r$, $t - r$ são da forma $(m, 0)$ ou $(n, 0)$. Note que

$$T_{(m,0)}T_{(m,0)}^* = S_1^m(S_1^*)^m \diamond S_2^n(S_2^n)^* = T_{(0,n)}T_{(0,n)}^*.$$

  Sem perda de generalidade, considere $s - r = (m, 0)$ e $t - r = (0, n)$. Portanto, temos que

$$T_sT_s^* = T_{r+s-r}T_{r+s-r}^* = T_rT_{s-r}(T_rT_{s-r})^* = T_rT_{s-r}T_{s-r}^*T_r^*$$

  e através de uma conta análoga, obtemos também que

$$T_tT_t^* = T_rT_{t-r}T_{t-r}^*T_r^*.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
T_sT_s^*T_tT_t^* &= T_rT_{s-r}T_{s-r}^*T_r^*T_rT_{t-r}T_{t-r}^*T_r^* = T_r \underbrace{T_{s-r}T_{s-r}^*}_{T_{(m,\,0)}T_{(m,\,0)}^*} \underbrace{T_{t-r}T_{t-r}^*}_{T_{(0,\,n)}T_{(0,\,n)}^*} T_r^* \\
&= T_rT_{t-r}T_{t-r}^*T_{s-r}T_{s-r}^*T_r^* = T_rT_{t-r}T_{t-r}^*T_r^*T_rT_{s-r}T_{s-r}^*T_r^* \\
&= T_tT_t^*T_sT_s^*.
\end{aligned}$$

Portanto, $\{T_s\}_{s\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = \{S_1^mS_2^n\}_{(m,\,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ é compatível.

($\Leftarrow$) Tomando T como definido anteriormente, temos que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$,

$$S_1^m(S_1^*)^m = T_{(m,0)}T_{(m,0)}^* \diamond T_{(0,n)}T_{(0,n)}^* = S_2^n(S_2^*)^n,$$

donde segue que S_1 e S_2 são compatíveis.

$\blacksquare$

Exemplo 4.1.5 (duas isometrias que comutam e não são compatíveis)**.** *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert com uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$. Defina os operadores $V, W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pelas seguintes relações, para todo $i, j \in \mathbb{N}$:*

- $V(e_i) = e_{i+1}$;
- $V(f_i) = f_{i+1}$;
- $W(e_i) = \dfrac{1}{2}(e_i + e_{i+1} + f_i - f_{i+1})$;
- $W(f_i) = \dfrac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i+2} + e_{i+1} - e_{i+2})$.

Primeiramente, vamos verificar que $V \diamond W$. Para isto, é suficiente verificarmos a igualdade nos vetores da base. Tome $i, j \in \mathbb{N}$ arbitrários; então, temos que

$$\begin{aligned}
VW(e_i) = V\left(\frac{1}{2}(e_i + e_{i+1} + f_i - f_{i+1})\right) &= \frac{1}{2}(V(e_i) + V(e_{i+1}) + V(f_i) - V(f_{i+1})) \\
= \frac{1}{2}(e_{i+1} + e_{i+2} + f_{i+1} - f_{i+2}) &= W(e_{i+1}) = WV(e_i),
\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
VW(f_j) &= V\left(\frac{1}{2}(f_{j+1} + f_{j+2} + e_{j+1} - e_{j+2})\right) \\
&= \frac{1}{2}(V(f_{j+1}) + V(f_{j+2}) + V(e_{j+1}) - V(e_{j+2})) \\
&= \frac{1}{2}(f_{j+2} + f_{j+3} + e_{j+2} - e_{j+3}) = W(f_{j+1}) = WV(f_j).
\end{aligned}$$

Portanto, $V \diamond W$.

Agora, note que como V *é um "shift", é sabido que para todo* $i \in \mathbb{N}$, $V^*(e_i) = e_{i-1}$, *bem como* $V^*(f_i) = f_{i-1}$. *Vamos portanto calcular* W^*. *Tome* $i \in \mathbb{N}$ *arbitrários; então, temos que*

$$\begin{aligned}
W^*(e_i) &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle W^*(e_i), e_j\rangle e_j + \sum_{k=1}^{\infty} \langle W^*(e_i), f_k\rangle f_k = \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_i, W(e_j)\rangle e_j + \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_i, W(f_k)\rangle f_k \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle e_i, \frac{1}{2}(e_j + e_{j+1} + f_j - f_{j+1})\right\rangle e_j + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle e_i, \frac{1}{2}(f_{k+1} + f_{k+2} + e_{k+1} - e_{k+2})\right\rangle f_k \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\langle e_i, e_j\rangle + \langle e_i, e_{j+1}\rangle + \langle e_i, f_j\rangle - \langle e_i, f_{j+1}\rangle) e_j \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\langle e_i, f_{k+1}\rangle + \langle e_i, f_{k+2}\rangle + \langle e_i, e_{k+1}\rangle - \langle e_i, e_{k+2}\rangle) f_k \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\delta_{i,j} + \delta_{i,j+1}) e_j + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\delta_{i,k+1} + \delta_{i,k+2}) f_k \\
&= \frac{1}{2}(e_i + e_{i-1} + f_{i-1} - f_{i-2}),
\end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned}
W^*(f_i) &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle W^*(f_i), e_j\rangle e_j + \sum_{k=1}^{\infty} \langle W^*(f_i), f_k\rangle f_k = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f_i, W(e_j)\rangle e_j + \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_i, W(f_k)\rangle f_k \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle f_i, \frac{1}{2}(e_j + e_{j+1} + f_j - f_{j+1})\right\rangle e_j + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle f_i, \frac{1}{2}(f_{k+1} + f_{k+2} + e_{k+1} - e_{k+2})\right\rangle f_k \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\langle f_i, e_j\rangle + \langle f_i, e_{j+1}\rangle + \langle f_i, f_j\rangle - \langle f_i, f_{j+1}\rangle) e_j \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\langle f_i, f_{k+1}\rangle + \langle f_i, f_{k+2}\rangle + \langle f_i, e_{k+1}\rangle - \langle f_i, e_{k+2}\rangle) f_k \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1}) e_j + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\delta_{i,k+1} + \delta_{i,k+2}) f_k \\
&= \frac{1}{2}(e_i - e_{i-1} + f_{i-1} + f_{i-2}).
\end{aligned}$$

Agora, vamos verificar que de fato, V *e* W *são isometrias. Tome* $i \in \mathbb{N}$ *arbitrário; logo,* $V^*V(e_i) = V^*(e_{i+1}) = e_i$, *e também,* $V^*V(f_i) = V^*(f_{i+1}) = f_i$, *donde segue que* $V^*V = 1$.

Além disso, temos que

$$
\begin{aligned}
W^*W(e_i) &= W^*\left(\frac{1}{2}(e_i + e_{i+1} + f_i - f_{i+1})\right) \\
&= \frac{1}{2}(W^*(e_i) + W^*(e_{i+1}) + W^*(f_i) - W^*(f_{i+1})) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(e_i + e_{i-1} + f_{i-1} - f_{i-2}) + \frac{1}{2}(e_{i+1} + e_i + f_i - f_{i-1}) \\
&+ \frac{1}{2}(e_i - e_{i-1} + f_{i-1} + f_{i-2}) - \frac{1}{2}(e_{i+1} - e_i + f_i + f_{i-1})) \\
&= \frac{1}{4}(e_i + e_{i-1} + f_{i-1} - f_{i-2} + e_{i+1} + e_i + f_i - f_{i-1} + e_i - e_{i-1} + f_{i-1} + f_{i-2} \\
&- e_{i+1} + e_i - f_i - f_{i-1}) = \frac{1}{4}(4e_i) = e_i,
\end{aligned}
$$

e também,

$$
\begin{aligned}
W^*W(f_i) &= W^*\left(\frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i+2} + e_{i+1} - e_{i+2})\right) \\
&= \frac{1}{2}(W^*(f_{i+1}) + W^*(f_{i+2}) + W^*(e_{i+1}) - W^*(e_{i+2})) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(e_{i+1} - e_i + f_i + f_{i-1}) + \frac{1}{2}(e_{i+2} - e_{i+1} + f_{i+1} + f_i) \\
&+ \frac{1}{2}(e_{i+1} + e_i + f_i - f_{i-1}) - \frac{1}{2}(e_{i+2} + e_{i+1} + f_{i+1} - f_i)) \\
&= \frac{1}{4}(e_{i+1} - e_i + f_i + f_{i-1} + e_{i+2} - e_{i+1} + f_{i+1} + f_i + e_{i+1} + e_i + f_i - f_{i-1} \\
&- e_{i+2} - e_{i+1} - f_{i+1} + f_i) = \frac{1}{4}(4f_i) = f_i,
\end{aligned}
$$

donde segue que $W^*W = 1$.

Por fim, vamos verificar que $VV^*WW^* \neq WW^*VV^*$. *Note que*

$$
\begin{aligned}
VV^*WW^*(e_1) &= VV^*W\left(\frac{1}{2}\, e_1\right) = VV^*\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + f_1 - f_2)\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\, VV^*(e_1 + e_2 + f_1 - f_2) = \frac{1}{4}\, V^*(V^*(e_1) + V^*(e_2) + V^*(f_1) - V^*(f_2)) \\
&= \frac{1}{4}\, V(e_1 - f_1) = \frac{1}{4}(V(e_1) - V(f_1)) = \frac{1}{4}(e_2 - f_2) \\
&\neq 0 = WW^*V(0) = WW^*VV^*(e_1).
\end{aligned}
$$

Portanto, V *e* W *são isometrias que comutam e que não são compatíveis.*

4.2 A C^*-álgebra universal gerada por duas isometrias compatíveis

Como mencionado anteriormente, nosso objetivo é descobrir quais relações devemos impor sobre duas isometrias que comutam, para que a C^*-álgebra universal gerada por estas isometrias com estas relações, seja isomorfa a $C^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right)$, onde $C^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right)$ é como definida na introdução do capítulo.

Vamos primeiramente observar que $\overline{\dot{S}_{(1,0)}} \diamond \overline{\dot{S}_{(0,1)}}$, onde $\overline{\dot{S}_{(1,0)}}$ e $\overline{\dot{S}_{(0,1)}}$ denotam as classes de equivalência dos elementos $S_{(0,1)}$ e $S_{(1,0)}$, respectivamente, referente ao quociente pelo núcleo da norma definida na construção de C^*-álgebra universal (ver construção no apêndice 1). Para demonstrar este fato, precisaremos fazer uso do seguinte resultado:

Proposição 4.2.1. *Sejam G um grupo, $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra, $\pi : G \longrightarrow \mathcal{A}$ uma representação parcial de G sobre $\mathcal{A}$ e $g \in G$, tal que $\pi(g)$ é uma isometria. Então, para todo $h \in G$,*

$$\pi(h)\pi(g) = \pi(hg).$$

Demonstração. Seja $h \in G$ arbitrário; então, temos que

$$\pi(h)\pi(g) = \pi(h)\pi(g)\pi(g)^*\pi(g) = \pi(hg)\pi(g)^*\pi(g) = \pi(hg).$$

■

Então, podemos considerar a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow C^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right) \\ g &\longmapsto \overline{\dot{S}_g} \end{aligned} \tag{4.1}$$

que é claramente uma representação parcial de G sobre $C^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right)$. Além disso, $\overline{\dot{S}_{(1,0)}}$ e $\overline{\dot{S}_{(0,1)}}$ são isometrias. Logo, pela proposição acima, temos que

$$\begin{aligned} \overline{S_{(1,0)}\dot{S}_{(0,1)}} &= \pi(1,0)\pi(0,1) = \pi((1,0)+(0,1)) = \pi(1,1) \\ &= \pi((0,1)+(1,0)) = \pi(0,1)\pi(1,0) = \overline{S_{(0,1)}\dot{S}_{(1,0)}}, \end{aligned}$$

donde segue que $\overline{\dot{S}_{(1,0)}} \diamond \overline{\dot{S}_{(0,1)}}$.

Vamos formalizar uma notação para a C^*-álgebra gerada pelas duas isometrias que comutam. Sejam $\mathscr{G} = \{S_1, S_2\}$ e $\mathscr{R}$ o conjunto de relações desejadas; sabemos que pelo menos temos as três seguintes relações em $\mathscr{R}$: $S_1^*S_1 = 1$, $S_2^*S_2 = 1$ e $S_1S_2 = S_2S_1$.

Note que apesar de não termos especificado todas as relações de $\mathscr{R}$, o par $(\mathscr{G}, \mathscr{R})$ é admissível, logo existe $C^*(\mathscr{G}, \mathscr{R})$.

Continuando a motivação, seria também natural pensar que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, $\overline{\dot{S}_{(m,n)}}$ deveria estar relacionada com $\overline{S_1^m S_2^n}$, onde $\overline{S_1^m S_2^n}$ denota a classe de equivalência do elemento $S_1^m S_2^n$, referente ao quociente pelo núcleo da norma definida na construção de C^*-álgebra universal (ver construção no apêndice 1). Note que desta forma temos uma função definida em um sub-semigrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, a saber $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e, além disso, esta aplicação é uma representação de sub-semigrupo. De fato, defina

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow C^*(\mathscr{G}, \mathscr{R}) \\ (m, n) &\longmapsto \overline{S_1^n S_2^m} \end{aligned} \tag{4.2}$$

e note que para $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ arbitrários, temos que

(i) $\sigma(0,0) = \overline{S_1^0 S_2^0} = \overline{1}$;

(ii) $$\begin{aligned} \sigma((m,n) + (p,q)) &= \sigma(m+p, n+q) = \overline{S_1^{m+p} S_2^{n+q}} = \overline{S_1^m S_1^p S_2^n S_2^q} \\ &= \overline{S_1^m S_2^n S_1^p S_2^q} = \sigma(m,n)\sigma(p,q). \end{aligned}$$

Logo, no desejo de definir uma representação $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow C^*(\mathscr{G}, \mathscr{R})$ que satisfaça o par $\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right)$, para podermos fazer uso da propriedade universal de $C^*\left(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\right)$, nos deparamos com a seguinte questão: sob quais condições conseguimos estender uma representação de um sub-semigrupo para uma representação parcial do grupo. O teorema seguinte nos dará condições suficientes.

Teorema 4.2.2. *Sejam G um grupo abeliano, $P \subseteq G$ um sub-semigrupo tal que $G = P - P$, $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra unital, com unidade 1 e σ uma representação do sub-semigrupo P sobre $\mathcal{A}$ tal que, para todo $n \in P$, $\sigma(n)^*\sigma(n) = 1$. Se para todo $m, n \in P$, $\sigma(m)\sigma(m)^* \diamond \sigma(n)\sigma(n)^*$, então existe uma representação parcial $\widetilde{\sigma}$ de G sobre $\mathcal{A}$, tal que para todo $n \in P$, $\widetilde{\sigma}(n) = \sigma(n)$.*

Demonstração. Tome $g \in G$ arbitrário; então, sabemos que existe $m, n \in P$ tais que $g = n - m$. Isto nos motiva a querer definir $\widetilde{\sigma}$ da seguinte maneira:

$$\widetilde{\sigma}(g) = \widetilde{\sigma}(n - m) = \sigma(m)^*\sigma(n),$$

mas como a representação de g não é única, temos que mostrar que a aplicação está bem definida. Para isto, temos que mostrar que para $n, n', m, m' \in P$ arbitrários, tais que $n - m = n' - m'$,

$$\sigma(m)^*\sigma(n) = \sigma(m')^*\sigma(n').$$

Sabemos que dados quaisquer $m, n, k \in P$, $n - m = (n+k) - (m+k)$, logo note que

$$\begin{aligned} \sigma(m+k)^*\sigma(n+k) &= \sigma(k+m)^*\sigma(k+n) = (\sigma(k)\sigma(m))^*\sigma(k)\sigma(n) \\ &= \sigma(m)^*\sigma(k)^*\sigma(k)\sigma(n) = \sigma(m)^*\sigma(n), \end{aligned}$$

pois $\sigma(k)$ é uma isometria por hipótese.

Agora tome $n, n', m, m' \in P$ arbitrários, tais que $n - m = n' - m'$. Defina $k = n' + m'$, $n'' = n + k$ e $m'' = m + k$; claramente, $k, n'', m'' \in P$. Como $n - m = n' - m'$, segue que $n + m' = n' + m$. Portanto, definindo $q = n + m' = n' + m$, temos que

$$n'' - n' = n + k - n' = n + n' + m' - n' = n + m' = q \Rightarrow n' + q = n'',$$

e também que

$$m'' - m' = m + k - m' = m + n' + m' - m' = m + n' = q \Rightarrow m'' = q + m'.$$

Note que $n - m = (n+k) - (m+k) = n'' - m''$, então temos que

$$\sigma(m)^*\sigma(n) = \sigma(m+k)^*\sigma(n+k) = \sigma(m'')^*\sigma(n'').$$

Por outro lado, como $n' - m' = (n'+q) - (m'+q) = n'' - m''$, segue que

$$\sigma(m')^*\sigma(n') = \sigma(m'+q)^*\sigma(n'+q) = \sigma(m'')^*\sigma(n'').$$

Portanto, $\sigma(m)^*\sigma(n) = \sigma(m')^*\sigma(n')$, donde segue que a aplicação $\widetilde{\sigma} : G \longrightarrow \mathcal{A}$, definida para todo $g \in G$, por $\widetilde{\sigma}(g) = \sigma(m)^*\sigma(n)$, onde $g = n - m$, está bem definida, já que mostramos que ela independe da representação escolhida. Note que para qualquer $n \in P$, $n = n - 0$, logo

$$\widetilde{\sigma}(n) = \sigma(0)^*\sigma(n) = \sigma(n).$$

Vamos verificar, portanto, que $\widetilde{\sigma}$ satisfaz os axiomas de representação parcial. Sejam $g, h \in G$ arbitrários; então; existem $m, n, p, q \in P$, tais que $g = n - m$ e $h = p - q$. Logo, temos que

(i) $\widetilde{\sigma}(0) = \sigma(0) = 1$.

(ii) $\widetilde{\sigma}(-g) = \widetilde{\sigma}(-n+m) = \sigma(n)^*\sigma(m) = (\sigma(m)^*\sigma(n))^* = \widetilde{\sigma}(n-m)^* = \widetilde{\sigma}(g)^*$.

(iii) Como $\widetilde{\sigma}$ independe do representante, podemos escolher aquele que nos for mais conveniente, por isso, note que $g = (n+q) - (m+q)$ e $h = (p+n) - (q+n)$.

Portanto, tomando $a = n + q$, $b = m + q$ e $c = p + n$ obtemos que $g = a - b$ e $h = c - a$, logo

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma}(g)\widetilde{\sigma}(h)\widetilde{\sigma}(h)^* &= \widetilde{\sigma}(a-b)\widetilde{\sigma}(c-a)\widetilde{\sigma}(-c+a) = \sigma(b)^*\sigma(a)\sigma(a)^*\sigma(c)\sigma(c)^*\sigma(a)\\ &= \sigma(b)^*\sigma(c)\sigma(c)^*\sigma(a)\sigma(a)^*\sigma(a) = \sigma(b)^*\sigma(c)\sigma(c)^*\sigma(a)\\ &= \widetilde{\sigma}(-b+c)\widetilde{\sigma}(-c+a) = \widetilde{\sigma}((a-b)+(c-a))\widetilde{\sigma}(-c+a)\\ &= \widetilde{\sigma}(g+h)\widetilde{\sigma}(h)^*.\end{aligned}$$

Portanto, $\widetilde{\sigma}$ é uma representação parcial de G, sobre $\mathcal{A}$, que estende σ.

■

Agora note $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é um sub-semigrupo de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, tal que $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})-(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e ainda que σ, como definida em 4.2, é uma representação do sub-semigrupo $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sobre $C^*(\mathscr{G},\mathscr{R})$, que satisfaz para quaisquer $(n,m),(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$,

$$\sigma(n,m)^*\sigma(n,m) = \overline{(S_1^n S_2^m)^* S_1^n S_2^m} = \overline{(S_2^*)^m (S_1^*)^n S_1^n S_2^m} = \overline{1}.$$

Logo, só nos resta verificar a última hipótese do teorema acima, que para quaisquer $(n,m),(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\sigma(n,m)\sigma(n,m)^* \diamond \sigma(p,q)\sigma(p,q)^*$, ou seja, que

$$S_1^n S_2^m (S_1^n S_2^m)^* \diamond S_1^p S_2^q (S_1^p S_2^q)^*.$$

Portanto, este fato nos motiva a impor esta relação em $\mathscr{R}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}\mathscr{R} = \{&S_1^*S_1 = 1, S_2^*S_2 = 1, S_1S_2 = S_2S_1, S_1^n S_2^m (S_1^n S_2^m)^* S_1^p S_2^q (S_1^p S_2^q)^* =\\ &S_1^p S_2^q (S_1^p S_2^q)^* S_1^n S_2^m (S_1^n S_2^m)^* \mid m,n,p,q \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Agora note que, em virtude do teorema 4.1.4, temos que a última relação imposta é equivalente à seguinte:

$$S_1^m (S_1^*)^m S_2^n (S_2^*)^n = S_2^n (S_2^*)^n S_1^m (S_1^*)^m,$$

ou seja, as relações que estávamos em busca, eram simplesmente a relação das duas isometrias serem compatíveis.

Portanto, σ é uma representação do sub-semigrupo $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ que satisfaz todas as hipóteses do teorema acima, já que a última hipótese do teorema é satisfeita, uma vez que foi a última relação imposta em $\mathscr{R}$. Logo, existe $\widetilde{\sigma} : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow C^*(\mathscr{G},\mathscr{R})$ representação parcial, tal que para todo $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\widetilde{\sigma}(n,m) = \sigma(n,m)$ e para

$(z_1, z_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ arbitrário, onde $(z_1, z_2) = (m, n) - (r, s)$, para algum $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ é dada por:

$$\widetilde{\sigma}(z_1, z_2) = \widetilde{\sigma}((n, m) - (r, s)) = \widetilde{\sigma}(r, s)^* \widetilde{\sigma}(n, m) = (S_1^r S_2^s)^* (S_1^n S_2^m) = (S_2^*)^s (S_1^*)^r S_1^n S_2^m.$$

Vamos agora, analisar melhor a imagem de $\widetilde{\sigma}(z_1, z_2)$:

- Caso 1: se $n \geq r$ e $m \geq s$, então temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}(z_1, z_2) &= (S_2^*)^s (S_1^*)^r S_1^n S_2^m = (S_2^*)^s S_1^{n-r} S_2^m \\ &= (S_2^*)^s S_2^m S_1^{n-r} = S_2^{m-s} S_1^{n-r} \\ &= S_2^{z_2} S_1^{z_1}. \end{aligned}$$

- Caso 2: se $n \geq r$ e $m < s$, então temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}(z_1, z_2) &= (S_2^*)^s (S_1^*)^r S_1^n S_2^m = (S_2^*)^s S_1^{n-r} S_2^m \\ &= (S_2^*)^s S_2^m S_1^{n-r} = (S_2^*)^{s-m} S_1^{n-r} \\ &= (S_2^*)^{-z_2} S_1^{z_1}. \end{aligned}$$

- Caso 3: se $n < r$ e $m \geq s$, então temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}(z_1, z_2) &= (S_2^*)^s (S_1^*)^r S_1^n S_2^m = (S_2^*)^s (S_1^*)^{r-n} S_2^m \\ &= (S_1^*)^{r-n} (S_2^*)^s S_2^m = (S_1^*)^{-z_1} S_2^{z_2}. \end{aligned}$$

- Caso 4: se $n < r$ e $m < s$, então temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}(z_1, z_2) &= (S_2^*)^s (S_1^*)^r S_1^n S_2^m = (S_2^*)^s (S_1^*)^{r-n} S_2^m \\ &= (S_1^*)^{r-n} (S_2^*)^s S_2^m = (S_1^*)^{r-n} (S_2^*)^{s-m} \\ &= (S_1^*)^{-z_1} (S_2^*)^{-z_2} = (S_2^*)^{-z_2} (S_1^*)^{-z_1}. \end{aligned}$$

Defina a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ S_{(z_1, z_2)} &\longmapsto (z_1, z_2). \end{aligned}$$

Portanto fica definida uma representação de $\mathcal{G}$ que claramente satisfaz $\widetilde{\mathcal{R}}$, a saber, $\rho = \widetilde{\sigma} \circ f$.

Logo, pela propriedade universal de $C^*\left(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{R}}\right)$, existe um único homomorfismo

$$\varphi : C^*\left(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{R}}\right) \longrightarrow C^*(\mathscr{G},\mathscr{R}), \tag{4.3}$$

tal que para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi\left(\overline{\dot{S}_{(z_1,\,z_2)}}\right) = \varphi \circ \iota\big(S_{(z_1,\,z_2)}\big) = \rho\big(S_{(z_1,\,z_2)}\big).$$

Lema 4.2.3. *Existe um homomorfismo* $\psi : C^*(\mathscr{G},\mathscr{R}) \longrightarrow C^*\left(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{R}}\right)$ *tal que* $\psi\big(\overline{S_1}\big) = \overline{\dot{S}_{(1,0)}}$ *e* $\psi\big(\overline{S_2}\big) = \overline{\dot{S}_{(0,1)}}$.

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} \rho : \mathscr{G} &\longrightarrow C^*\left(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{R}}\right) \\ S_1 &\longmapsto \overline{\dot{S}_{(1,0)}} \\ S_2 &\longmapsto \overline{\dot{S}_{(0,1)}}. \end{aligned}$$

Vamos verificar que ρ é uma representação do par $(\mathscr{G},\mathscr{R})$.

(i) $\|\widetilde{\rho}(S_1^*S_1 - 1)\| = \|\rho(S_1)^*\rho(S_1) - \rho(1)\| = \left\|\overline{\dot{S}^*_{(1,0)}S_{(1,0)}} - \overline{\dot{1}}\right\| = 0$, analogamente $\|\widetilde{\rho}(S_2^*S_2 - 1)\| = 0$.

(ii) Segue da observação feita após a proposição 4.2.1 que

$$\|\widetilde{\rho}(S_1S_2 - S_2S_1)\| = \|\rho(S_1)\rho(S_2) - \rho(S_2)\rho(S_1)\| = \left\|\overline{\dot{S}_{(1,0)}S_{(0,1)}} - \overline{\dot{S}_{(0,1)}S_{(1,0)}}\right\| = 0.$$

(iii) Para facilitar nossas contas, vamos optar por provar a relação que é equivalente a última relação imposta em $\mathscr{R}$. Tome $n, m \in \mathbb{N}$ arbitrários. Note que como π (definida na equação 4.1) é uma representação parcial, temos que $\pi(m,0)\pi(m,0)^* \diamond \pi(0,n)\pi(0,n)^*$, ou seja, $\overline{\dot{S}_{(m,0)}S^*_{(m,0)}} \diamond \overline{\dot{S}_{(0,n)}S^*_{(0,n)}}$. Então temos que

$$\begin{aligned} &\|\widetilde{\rho}(S_1^m(S_1^*)^m S_2^n(S_2^*)^n - S_2^n(S_2^*)^n S_1^m(S_1^*)^m)\| \\ &= \left\|\rho(S_1)^m(\rho(S_1)^*)^m\rho(S_2)^n(\rho(S_2)^*)^n - \rho(S_2)^n(\rho(S_2)^*)^n\rho(S_1)^m(\rho(S_1)^*)^m\right\| \\ &= \left\|\overline{\dot{S}^m_{(1,0)}\big(S^*_{(1,0)}\big)^m S^n_{(0,1)}\big(S^*_{(0,1)}\big)^n} - \overline{\dot{S}^n_{(0,1)}\big(S^*_{(0,1)}\big)^n S^m_{(1,0)}\big(S^*_{(1,0)}\big)^m}\right\| \\ &= \left\|\overline{\dot{S}_{(m,0)}S^*_{(m,0)}S_{(0,n)}S^*_{(0,n)}} - \overline{\dot{S}_{(0,n)}S^*_{(0,n)}S_{(m,0)}S^*_{(m,0)}}\right\| = 0 \end{aligned}$$

Portanto, ρ é uma representação do par $(\mathscr{G},\mathscr{R})$, logo pela propriedade universal de $C^*(\mathscr{G},\mathscr{R})$, existe um único homomorfismo ψ, tal que $\psi\big(\overline{S_1}\big) = \psi\circ\iota(S_1) = \rho(S_1) = \dot{\overline{(S_{1,0})}}$ e $\psi\big(\overline{S_2}\big) = \psi \circ \iota(S_2) = \rho(S_2) = \dot{\overline{S_{(0,1)}}}$.

$\blacksquare$

Teorema 4.2.4. $C^*\Big(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{R}}\Big)$ *é isomorfa a* $C^*(\mathscr{G},\mathscr{R})$.

Demonstração. Para demonstrar este fato, basta mostrarmos que os homomorfismos φ e ψ, como definidos em 4.3 e 4.2.3, respectivamente, são um o inverso do outro e é suficiente verificarmos nos geradores. Logo, temos que

$$\varphi \circ \psi\big(\overline{S_1}\big) = \varphi\Big(\dot{\overline{S_{(1,\,0)}}}\Big) = \overline{S_1^1 S_2^0} = \overline{S_1}$$

e também,

$$\varphi \circ \psi\big(\overline{S_2}\big) = \varphi\Big(\dot{\overline{S_{(0,\,1)}}}\Big) = \overline{S_1^0 S_2^1} = \overline{S_2}.$$

Portanto, $\varphi \circ \psi = id_{C^*(\mathscr{G},\mathscr{R})}$.

Por outro lado, para qualquer $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, onde $(z_1, z_2) = (m, n) - (r, s)$, para algum $m, n, r, s \in \mathbb{N}$, temos que

- Caso 1: se $n \geq r$ e $m \geq s$,

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi\Big(\dot{\overline{S_{(z_1,\,z_2)}}}\Big) &= \psi\Big(\overline{S_2^{z_2} S_1^{z_1}}\Big) = \psi\big(\overline{S_2}\big)^{z_2}\psi\big(\overline{S_1}\big)^{z_1}\\ &= \dot{\overline{S_{(0,\,1)}^{z_2} S_{(1,\,0)}^{z_1}}} = \dot{\overline{S_{(z_1,\,z_2)}}}.\end{aligned}$$

- Caso 2: se $n \geq r$ e $m < s$,

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi\Big(\dot{\overline{S_{(z_1,\,z_2)}}}\Big) &= \psi\Big(\overline{(S_2^*)^{-z_2} S_1^{z_1}}\Big) = \Big(\psi\big(\overline{S_2}\big)^{-z_2}\Big)^*\psi\big(\overline{S_1}\big)^{z_1}\\ &= \dot{\overline{\Big(S_{(0,\,1)}^{-z_2}\Big)^* S_{(1,\,0)}^{z_1}}} = \dot{\overline{S_{(0,\,-z_2)}^* S_{(z_1,\,0)}}}\\ &= \dot{\overline{S_{(0,\,z_2)} S_{(z_1,\,0)}}} = \dot{\overline{S_{(z_1,\,z_2)}}}.\end{aligned}$$

- Caso 3: se $n < r$ e $m \geq s$,

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi\Big(\dot{\overline{S_{(z_1,\,z_2)}}}\Big) &= \psi\Big(\overline{(S_1^*)^{-z_1} S_2^{z_2}}\Big) = \Big(\psi\big(\overline{S_1}\big)^{-z_1}\Big)^*\psi\big(\overline{S_2}\big)^{z_2}\\ &= \dot{\overline{\Big(S_{(1,\,0)}^{-z_1}\Big)^* S_{(0,\,1)}^{z_2}}} = \dot{\overline{S_{(-z_1,\,0)}^* S_{(0,\,z_2)}}}\\ &= \dot{\overline{S_{(z_1,\,0)} S_{(0,\,z_2)}}} = \dot{\overline{S_{(z_1,\,z_2)}}}.\end{aligned}$$

- Caso 4: se $n < r$ e $m < s$,

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi\Big(\overline{\dot{S}_{(z_1,\,z_2)}}\Big) &= \psi\Big(\overline{(S_2^*)^{-z_2}(S_1^*)^{-z_1}}\Big) = \Big(\psi\big(\overline{S_2}\big)^{-z_2}\Big)^*\Big(\psi\big(\overline{S_1}\big)^{-z_1}\Big)^* \\
&= \overline{\Big(S_{(0,\,1)}^{-z_2}\Big)^*\Big(S_{(1,\,0)}^{-z_1}\Big)^*}^{\,\cdot} = \overline{S^*_{(0,\,-z_2)}S^*_{(-z_1,\,0)}}^{\,\cdot} \\
&= \overline{S_{(0,\,z_2)}S_{(z_1,\,0)}}^{\,\cdot} = \overline{\dot{S}_{(z_1,\,z_2)}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\psi \circ \varphi = id_{C^*\left(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{R}}\right)}$.

$\blacksquare$

Logo, a C^*-álgebra universal gerada por duas isometrias compatíveis é isomorfa a um produto cruzado parcial, pois

$$C^*(\mathscr{G},\mathscr{R}) \;\cong\; C^*\Big(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{R}}\Big) \;\cong\; C(\Omega_R) \rtimes_{\overline{\alpha}} (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}).$$

Vamos portanto determinar o espectro Ω_R. Relembrando,

$$\Omega_R = \{\xi \in X_G \mid \forall\, f \in R, \forall\, g \in G, f(-g+\xi) = 0\}.$$

Então, tome $\xi \in \Omega_R$ e $g = (m,n) \in \xi$ arbitrários. Note que $(0,0) \in (-g+\xi)$, pois $g \in \xi$. Logo, temos que

$$\begin{aligned}
\big(1_{(-1,\,0)} - 1_{(0,\,0)}\big)(-g+\xi) = 0 \;&\Rightarrow\; 1_{(-1,\,0)}(-g+\xi) - 1_{(0,\,0)}(-g+\xi) = 0 \\
&\Rightarrow\; 1_{(-1,\,0)}(-g+\xi) = 1 \\
&\Rightarrow\; (-1,0) \in (-g+\xi) \;\Rightarrow\; g + (-1,0) \in \xi \\
&\Rightarrow (m-1,n) \in \xi.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\big(1_{(0,\,-1)} - 1_{(0,\,0)}\big)(-g+\xi) = 0 \;&\Rightarrow\; 1_{(0,\,-1)}(-g+\xi) - 1_{(0,\,0)}(-g+\xi) = 0 \\
&\Rightarrow\; 1_{(0,\,-1)}(-g+\xi) = 1 \\
&\Rightarrow\; (0,-1) \in (-g+\xi) \;\Rightarrow\; g + (0,-1) \in \xi \\
&\Rightarrow\; (m,n-1) \in \xi.
\end{aligned}$$

Portanto, se $(m,n) \in \xi$, então qualquer $(\widetilde{m},\widetilde{n}) \in G$, tal que $\widetilde{m} \leq m$ e $\widetilde{n} \leq n$, $(\widetilde{m},\widetilde{n}) \in \xi$.

Por outro lado, dado um conjunto $\xi \subseteq G$, tal que $(0,0) \in \xi$ e se $(m,n) \in \xi$, então qualquer $(\widetilde{m},\widetilde{n}) \in G$, tal que $\widetilde{m} \leq m$ e $\widetilde{n} \leq n$, $(\widetilde{m},\widetilde{n}) \in \xi$, temos que $\xi \in \Omega_R$, pois tomando $g = (m, n) \in \xi$ arbitrário e observando que $(0, 0) \in (-g + \xi)$, pois $g \in \xi$; $(-1, 0) \in (-g + \xi)$, pois $(m - 1, n) \in \xi$ e $(0, -1) \in (-g + \xi)$, pois $(m, n - 1) \in \xi$, temos que

$$\big(1_{(-1,\,0)} - 1_{(0,\,0)}\big)(-g + \xi) = 1_{(-1,\,0)}(-g + \xi) - 1_{(0,\,0)}(-g + \xi) = 1 - 1 = 0,$$

e também que

$$\big(1_{(0,\,-1)} - 1_{(0,\,0)}\big)(-g + \xi) = 1_{(0,\,-1)}(-g + \xi) - 1_{(0,\,0)}(-g + \xi) = 1 - 1 = 0.$$

Portanto, $\xi \in \Omega_R$ se, e somente se, $(0, 0) \in \xi$ e para qualquer $(m, n) \in \xi$, se $(\widetilde{m}, \widetilde{n}) \in G$ é tal que, $\widetilde{m} \leq m$ e $\widetilde{n} \leq n$, então $(\widetilde{m}, \widetilde{n}) \in \xi$.

4.3 A C^*-álgebra universal gerada por duas isometrias duplamente comutantes

Podemos nos perguntar se em $C^*(\mathscr{G}, \mathscr{R})$ temos a seguinte relação: $\overline{S_1^* S_2} = \overline{S_2 S_1^*}$. Se esta relação fosse satisfeita, pelo isomorfismo que construímos na seção anterior, teríamos que

$$\psi\big(\overline{S_1^* S_2}\big) = \psi\big(\overline{S_2 S_1^*}\big) \;\Rightarrow\; \dot{\overline{S^*_{(1,\,0)} S_{(0,\,1)}}} = \dot{\overline{S_{(0,\,1)} S^*_{(1,\,0)}}} \;\Rightarrow\; \dot{\overline{S_{(-1,\,0)} S_{(0,\,1)}}} = \dot{\overline{S_{(0,\,1)} S_{(-1,\,0)}}}.$$

Além disso, pelo isomorfismo construído na seção 3.3 entre $C^*\Big(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{R}}\Big)$ e $C(\Omega_R) \rtimes_{\overline{\alpha}} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, teríamos que

$$\ddot{\overline{1_{(-1,\,0)}}}\delta_{(-1,\,0)} \ddot{\overline{1_{(0,\,1)}}}\delta_{(0,\,1)} = \ddot{\overline{1_{(0,\,1)}}}\delta_{(0,\,1)} \ddot{\overline{1_{(-1,\,0)}}}\delta_{(-1,\,0)}.$$

Desenvolvendo os dois lados da equação acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
\ddot{\overline{1_{(-1,\,0)}}}\delta_{(-1,\,0)} \ddot{\overline{1_{(0,\,1)}}}\delta_{(0,\,1)} &= \overline{\alpha}_{(-1,\,0)}\Big(\overline{\alpha}_{(1,\,0)}\Big(\ddot{\overline{1_{(-1,\,0)}}}\Big)\ddot{\overline{1_{(0,\,1)}}}\Big)\delta_{(-1,\,1)} \\
&= \overline{\alpha}_{(-1,\,0)}\Big(\ddot{\overline{1_{(1,\,0)}}}\ddot{\overline{1_{(0,\,1)}}}\Big)\delta_{(-1,\,1)} \\
&= \ddot{\overline{1_{(-1,\,0)}}}\ddot{\overline{1_{(-1,\,1)}}}\delta_{(-1,\,1)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\overline{\ddot{1}_{(0,1)}}\delta_{(0,1)}\overline{\ddot{1}_{(-1,0)}}\delta_{(-1,0)} &= \overline{\alpha}_{(0,1)}\Big(\overline{\alpha}_{(0,-1)}\Big(\overline{\ddot{1}_{(0,1)}}\Big)\overline{\ddot{1}_{(-1,0)}}\Big)\delta_{(-1,1)}\\ &= \overline{\alpha}_{(0,1)}\Big(\overline{\ddot{1}_{(1,0)}1_{0,1}}\Big)\delta_{(-1,1)}\\ &= \overline{\ddot{1}_{(-1,0)}1_{(-1,1)}}\delta_{(-1,1)}.\end{aligned}$$

Logo, para $\xi \in \Omega_R$, tal que $\xi = \{(-n,1),(-p,-q) \mid n,p,q \in \mathbb{N}\}$ temos que

$$\overline{\ddot{1}_{(0,1)}\ddot{1}_{(-1,1)}}(\xi) = \overline{\ddot{1}_{(0,1)}}(\xi)\overline{\ddot{1}_{(-1,1)}}(\xi) = 0 \cdot 1 = 0,$$

mas

$$\overline{\ddot{1}_{(-1,0)}\ddot{1}_{(-1,1)}}(\xi) = \overline{\ddot{1}_{(-1,0)}}(\xi)\overline{\ddot{1}_{(-1,1)}}(\xi) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Portanto, como $\overline{\ddot{1}_{(-1,0)}\ddot{1}_{(-1,1)}}\delta_{(-1,1)}\delta_{(-1,1)} \neq \overline{\ddot{1}_{(0,1)}\ddot{1}_{(-1,1)}}\delta_{(-1,1)}\delta_{(-1,1)}$, temos que $\overline{S_1^*S_2} \neq \overline{S_2S_1^*}$.

Sendo assim, podemos nos perguntar, se é possível escrever esta relação na linguagem dos $\varepsilon_g{}'s$, onde para todo $g \in G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\varepsilon_g = \pi(g)\pi(g)^*$ e π é como definida em 4.1, para que possamos acrescentá-la em $\widetilde{\mathcal{R}}$. Note que

$$\overline{S_1^*S_2} = \overline{S_2S_1^*} \Leftrightarrow \overline{S_1^*S_2 - S_2S_1^*} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{(S_1^*S_2 - S_2S_1^*)(S_1^*S_2 - S_2S_1^*)^*} = \overline{0}.$$

Logo, estas relações se traduzem de maneira geral em $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ da seguinte forma, onde $g,h \in G$ são arbitrários, tais que S_g e S_h são isometrias:

$$\begin{aligned}\overline{\dot{\big(S_g^*S_h - S_hS_g^*\big)\big(S_g^*S_h - S_hS_g^*\big)^*}} &= \overline{\dot{\big(S_g^*S_h - S_hS_g^*\big)\big(S_h^*S_g - S_gS_h^*\big)}}\\ &= \overline{\dot{S_g^*S_hS_h^*S_g - S_g^*S_hS_gS_h^* - S_hS_g^*S_h^*S_g + S_hS_g^*S_gS_h^*}}\end{aligned} \tag{4.4}$$

Mas, pela proposição 4.2.1 temos que S_g comuta com S_h; além disso, como $\overline{\dot{S_g}} = \pi(g)$, onde π é a representação parcial definida em 4.1, temos que

$$\overline{\dot{S_g^*}}\varepsilon_h\overline{\dot{S_g}} = \pi(g)^*\varepsilon_h\pi(g) = \varepsilon_{g^{-1}h}\pi(g)^*\pi(g) = \varepsilon_{g^{-1}h},$$

pois $\pi(g)$ por hipótese é isometria. Logo, fazendo uso destes dois fatos, temos que a equação 4.4 é igual a seguinte:

$$\overline{\dot{S_g^*}}\varepsilon_h\overline{\dot{S_g}} - \overline{\dot{S_g^*S_gS_hS_h^* - S_hS_h^*S_g^*S_g + S_hS_h^*}} = \varepsilon_{g^{-1}h} - \varepsilon_h - \varepsilon_h + \varepsilon_h = \varepsilon_{g^{-1}h} - \varepsilon_h.$$

Portanto,

$$\overline{\left(S_g^* S_h - S_h S_g^*\right)\left(S_g^* S_h - S_h S_g^*\right)^*}^{\,\cdot} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_{g^{-1}h} = \varepsilon_h.$$

Agora, note que $\overline{S_1^* S_2} = \overline{S_2 S_1^*} \Leftrightarrow \overline{S_2^* S_1} = \overline{S_1 S_2^*}$. Como não é evidente que $\varepsilon_{g^{-1}h} = \varepsilon_h \Leftrightarrow \varepsilon_{h^{-1}g} = \varepsilon_g$, demonstraremos este fato na próxima proposição.

Proposição 4.3.1. *Se para todo $g \in G$, ε_g é como definido acima, então para $g, h \in G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ arbitrários, tais que $\dot{\overline{S_g}}$ e $\dot{\overline{S_h}}$ são isometrias temos que*

$$\varepsilon_{g^{-1}h} = \varepsilon_h \Leftrightarrow \varepsilon_{h^{-1}g} = \varepsilon_g.$$

Demonstração. Relembrando, para todo $g \in G$, $\dot{\overline{S_g}} = \pi(g)$, onde π é a representação parcial definida em 4.1. Logo, pela proposição 4.2.1 temos que

$$\dot{\overline{S_{h^{-1}g}}} = \pi\big(h^{-1}g\big) = \pi\big(h^{-1}\big)\pi(g) = \dot{\overline{S_{h^{-1}} S_g}},$$

pois por hipótese $\pi(g)$ é isometria. Sendo assim, temos que

$$\varepsilon_{h^{-1}g} = \dot{\overline{S_{h^{-1}g} S_{h^{-1}g}^*}} = \dot{\overline{S_{h^{-1}g} S_{g^{-1}h}}} = \dot{\overline{S_{h^{-1}} S_g S_{g^{-1}} S_h}} = \dot{\overline{S_h^* S_g S_g^* S_h}}.$$

Logo, $\varepsilon_{h^{-1}g} = \varepsilon_g$ se, e somente se, $\dot{\overline{S_h^* S_g S_g^* S_h}} = \dot{\overline{S_g S_g^*}}$.

Analogamente, $\varepsilon_{g^{-1}h} = \varepsilon_h$ se, e somente se,

$$\dot{\overline{S_g^* S_h S_h^* S_g}} = \dot{\overline{S_h S_h^*}}. \tag{4.5}$$

($\Rightarrow$) Basta verificarmos que

$$\dot{\overline{\left(S_h^* S_g S_g^* S_h - S_g S_g^*\right)\left(S_h^* S_g S_g^* S_h - S_g S_g^*\right)^*}} = \dot{\overline{0}}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}\dot{\overline{\left(S_h^* S_g S_g^* S_h - S_g S_g^*\right)\left(S_h^* S_g S_g^* S_h - S_g S_g^*\right)^*}} &= \dot{\overline{\left(S_h^* S_g S_g^* S_h - S_g S_g^*\right)\left(S_h^* S_g S_g^* S_h - S_g S_g^*\right)}} \\ &= \dot{\overline{S_h^* S_g S_g^* S_h S_h^* S_g S_g^* S_h - S_h^* S_g S_g^* S_h S_g S_g^* - S_g S_g^* S_h^* S_g S_g^* S_h + S_g S_g^* S_g S_g^*}} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Agora, fazendo uso da equação 4.5 e do fato que $\dot{\overline{S_g}}$ comuta com $\dot{\overline{S_h}}$, temos que a equação 4.6 é igual a seguinte:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\overline{S_h^*S_gS_hS_h^*S_g^*S_h - S_h^*S_gS_g^*S_gS_hS_g^* - S_gS_h^*S_g^*S_gS_g^*S_h + S_gS_g^*}}\\
&= \dot{\overline{S_h^*S_hS_gS_h^*S_g^*S_h - S_h^*S_gS_hS_g^* - S_gS_h^*S_g^*S_h + S_gS_g^*}}\\
&= \dot{\overline{S_gS_h^*S_g^*S_h - S_h^*S_hS_gS_g^* - S_gS_g^*S_h^*S_h + S_gS_g^*}}\\
&= \dot{\overline{S_gS_g^*S_h^*S_h - S_gS_g^* - S_gS_g^* + S_gS_g^*}} = \dot{\overline{S_gS_g^* - S_gS_g^*}} = \dot{\overline{0}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\varepsilon_h = \varepsilon_{g^{-1}h} \;\Rightarrow\; \varepsilon_g = \varepsilon_{h^{-1}g}$.

Analogamente, prova-se que $\varepsilon_g = \varepsilon_{h^{-1}g} \;\Rightarrow\; \varepsilon_h = \varepsilon_{g^{-1}h}$.

$\blacksquare$

Então tomando $g = (1,0)$ e $h = (0,1)$ em $\varepsilon_g = \varepsilon_{h^{-1}g}$, obtemos

$$\varepsilon_{(1,0)} = \varepsilon_{(0,-1)+(1,0)} \;\Rightarrow\; \varepsilon_{(1,0)} = \varepsilon_{(1,-1)},$$

e portanto, a relação que precisamos acrescentar em

$$R = \left\{1_{(-1,0)} - 1_{(0,0)}, 1_{(0,-1)} - 1_{(0,0)}\right\} \subseteq C(X_G),$$

para que tenhamos a relação $S_1^*S_2 = S_2S_1^*$ em $\mathscr{R}$ é a seguinte:

$$1_{(1,0)} - 1_{(1,-1)}.$$

Portanto, acrescentando a relação desejada, temos que

$$\widehat{R} = \left\{1_{(-1,0)} - 1_{(0,0)}, 1_{(0,-1)} - 1_{(0,0)}, 1_{(1,0)} - 1_{(1,-1)}\right\} \subseteq C(X_G),$$

$$\widehat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \left\{S_{(1,0)}^*S_{(1,0)} = 1, S_{(0,1)}^*S_{(0,1)} = 1, S_{(1,0)}^*S_{(0,1)} = S_{(0,1)}S_{(1,0)}^*\right\},$$

e

$$\widehat{\mathscr{R}} = \{S_1^*S_1 = 1, S_2^*S_2 = 1, S_1S_2 = S_2S_1, S_1^*S_2 = S_2S_1^*\}.$$

Note que tiramos de $\widehat{\mathscr{R}}$ a relação de que S_1 e S_2 são compatíveis, pois vimos na primeira seção deste capítulo, que se duas isometrias são duplamente comutantes, então elas são compatíveis.

Como os pares $\left(\mathcal{G}, \widehat{\mathcal{R}}\right)$ e $\left(\mathscr{G}, \widehat{\mathscr{R}}\right)$ são claramente admissíveis, existem $C^*\left(\mathcal{G}, \widehat{\mathcal{R}}\right)$ e $C^*\left(\mathscr{G}, \widehat{\mathscr{R}}\right)$. Então, pelo teorema 3.3.8, temos que

$$C^*\left(\mathcal{G}, \widehat{\mathcal{R}}\right) \cong C\left(\Omega_{\widehat{R}}\right) \rtimes_{\overline{\alpha}} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}),$$

e pelo isomorfismo construído na seção anterior, temos que

$$C^*\Big(\mathcal{G}, \widehat{\mathcal{R}}\Big) \;\cong\; C^*\Big(\mathscr{G}, \widehat{\mathscr{R}}\Big),$$

logo

$$C^*\Big(\mathscr{G}, \widehat{\mathscr{R}}\Big) \;\cong C\big(\Omega_{\widehat{R}}\big) \rtimes_{\overline{\alpha}} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}).$$

Vamos, agora portanto, determinar o espectro $\Omega_{\widehat{R}}$. Claramente, $\Omega_{\widehat{R}} \subseteq \Omega_R$. Logo, precisamos analisar somente a última relação acrescentada em R. Relembrando, mais uma vez,

$$\Omega_{\widehat{R}} = \Big\{\xi \in X_G \mid \forall f \in \widehat{R}, \forall g \in G, f(-g+\xi) = 0\Big\}.$$

Então, tomando $\xi \in \Omega_{\widehat{R}}$ e $g = (m, n) \in \xi$ arbitrários, temos que

$$\begin{aligned}
\Big(\overline{\ddot{1}_{(1,0)}} - \overline{\ddot{1}_{(1,-1)}}\Big)(-g+\xi) = 0 &\Leftrightarrow \overline{\ddot{1}_{(1,0)}}(-g+\xi) = \overline{\ddot{1}_{(1,-1)}}(-g+\xi) \\
&\Leftrightarrow [(1,0) \in (-g+\xi)] = [(1,-1) \in (-g+\xi)] \\
&\Leftrightarrow [g + (1,0) \in \xi] = [g + (1,-1) \in \xi] \\
&\Leftrightarrow [(m+1, n) \in \xi] = [(m+1, n-1) \in \xi].
\end{aligned}$$

Agora, dado $\xi \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ arbitrário, defina

$$x_M = \sup_{(m,n)\in\xi} \{\pi_1(m,n)\} \;\text{ e }\; y_M = \sup_{(m,n)\in\xi} \{\pi_2(m,n)\},$$

onde $\pi_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ e $\pi_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, denotam as projeções canônicas na primeira e segunda coordenada, respectivamente. Note que $x_M, y_M \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Logo, para $\xi \in \Omega_{\widehat{R}}$ arbitrário, temos que

- Caso 1: se $x_M, y_M < +\infty$, então $(0,0) \in \xi$ e para qualquer $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, tal que $x \leq x_M$ e $y \leq y_M$, $(x, y) \in \xi$.

- Caso 2: se $x_M = +\infty$ e $y_M < +\infty$, então $(0,0) \in \xi$ e para qualquer $(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, tal que $y \leq y_M$, $(x, y) \in \xi$.

- Caso 3: se $x_M < +\infty$ e $y_M = +\infty$, então $(0,0) \in \xi$ e para qualquer $(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, tal que $x \leq x_M$, $(x, y) \in \xi$.

- Caso 4: se $x_M = y_M = +\infty$, então $\xi = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Agora, tome $\xi \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, tal que ξ satisfaz um dos quatro casos citados acima. Então é imediato verificar que para qualquer $g = (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $[(m+1, n) \in \xi] = [(m+1, n-1) \in \xi]$, donde segue que $\Big(\overline{\ddot{1}_{(1,0)}} - \overline{\ddot{1}_{(1,-1)}}\Big)(-g+\xi) = 0$.

Portanto, $\xi \in \Omega_{\widehat{R}}$ se, e somente se, ξ satisfaz um dos quatro casos citados acima. Sendo assim, podemos caracterizar $\Omega_{\widehat{R}}$ de uma forma ainda melhor.

Teorema 4.3.2. *$\Omega_{\widehat{R}}$ e $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) \times (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})$ são homeomorfos, onde estamos considerando em $\mathbb{N}$ a topologia discreta, em $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\})$ a topologia do compactificado de Alexandroff (ver definição 19.2 em [17]) e em $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) \times (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})$ a topologia produto.*

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) \times (\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) &\longrightarrow \Omega_{\widehat{R}} \\ (x, y) &\longmapsto \xi_{(x,y)}, \end{aligned}$$

onde $\xi_{(x,y)} = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \leq x, n \leq y\}$. Pela caracterização feita anteriormente do espectro, temos que para todo $(x, y) \in (\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) \times (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})$, $\xi_{(x,y)} \in \Omega_{\widehat{R}}$. Logo, a aplicação f está bem definida. Vamos mostrar que f é um homeomorfismo.

f é injetora, pois dados $(x, y), (z, w) \in (\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) \times (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})$ arbitrários, tais que $f(x, y) = f(z, w)$, temos que $\xi_{(x,y)} = \xi_{(z,w)}$, logo $(x, y) \in \xi_{(z,w)}$, o que implica $x \leq z$ e $y \leq w$, e também, temos que $(z, w) \in \xi_{(x,y)}$, o que implica $z \leq x$ e $w \leq y$, donde segue que $(x, y) = (z, w)$.

f é sobrejetora, pois pela caracterização feita do espectro anteriormente, temos que dado $\xi \in \Omega_{\widehat{R}}$ arbitrário, existem $x_M, y_M \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, tais que

$$\xi = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \leq x_M, n \leq y_M\},$$

e portanto, $f(x_M, y_M) = \xi$.

Vamos verificar agora, que f é contínua. Tome $\{(x_\lambda, y_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq (\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) \times (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})$ um net e $(x_0, y_0) \in (\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) \times (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})$, tais que $(x_\lambda, y_\lambda) \to (x_0, y_0)$.

- Caso 1: $(x_0, y_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

  Tome $U = \{(x_0, y_0)\}$. Claramente U é uma vizinhança aberta de (x_0, y_0) e como $(x_\lambda, y_\lambda) \to (x_0, y_0)$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$, tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $(x_\lambda, y_\lambda) \in U$, ou seja, para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $(x_\lambda, y_\lambda) = (x_0, y_0)$.

  Portanto, temos que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $\xi_{(x_\lambda, y_\lambda)} = \xi_{(x_0, y_0)}$, logo para todo $g \in G$, $\left[g \in \xi_{(x_\lambda, y_\lambda)}\right] = \left[g \in \xi_{(x_0, y_0)}\right]$.

- Caso 2: $(x_0, y_0) = (+\infty, y_0) \in (\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) \times \mathbb{N}$.

Note que devido a topologia produto, sabemos que $(x_\lambda, y_\lambda) \to (x_0, y_0)$ se, e somente se, $x_\lambda \to x_0$ e $y_\lambda \to y_0$. Portanto, tomando $U = \{y_0\}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$, tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $y_\lambda \in U$, ou seja, para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $y_\lambda = y_0$.

Agora, temos que provar que para todo $g \in G$, existe $\widetilde{\lambda_0} \in \Lambda$, tal que para todo $\lambda \geq \widetilde{\lambda_0}$, $\left[g \in \xi_{(x_\lambda, y_\lambda)}\right] = \left[g \in \xi_{(x_0, y_0)}\right]$.

- Caso 2.1: Tome $g = (x, y) \in G$, tal que $y > y_0$. Portanto, para todo $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\left[(x, y) \in \xi_{(x_\lambda, y_\lambda)}\right] = \left[(x, y) \in \xi_{(x_\lambda, y_0)}\right] = 0 = \left[(x, y) \in \xi_{(x_0, y_0)}\right],$$

  já que $y > y_0$.

- Caso 2.2: Tome $g = (x, y) \in G$, tal que $y \leq y_0$. Como $x_\lambda \to +\infty$, existe $\lambda_1 \in \Lambda$, tal que para todo $\lambda \geq \lambda_1$, $x_\lambda > x$. Agora tomando $\widetilde{\lambda_0} = \max\{\lambda_0, \lambda_1\}$, temos que para todo $\lambda > \widetilde{\lambda_0}$, $\left[(x, y) \in \xi_{(x_i, y_i)}\right] = 1 = \left[(x, y) \in \xi_{(x_0, y_0)}\right]$, já que $y \leq y_0 = y_\lambda$ e $x \leq x_\lambda$.

- Caso 3: $(x_0, y_0) = (x_0, +\infty) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{+\infty\})$.

  Demonstração análoga ao caso anterior.

- Caso 4: $(x_0, y_0) = (+\infty, +\infty)$.

  Tome $(x, y) \in G$ arbitrário. Como $x_\lambda \to +\infty$ e $y_\lambda \to +\infty$, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, tais que para todo $\lambda \geq \lambda_1$, $x_\lambda \geq x$ e para todo $\lambda \geq \lambda_2$, $y_\lambda \geq y$. Então, escolhendo $\lambda_0 = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, temos que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $\left[(x, y) \in \xi_{(x_\lambda, y_\lambda)}\right] = 1 = [(x, y) \in \xi_{x_0, y_0}]$.

Portanto, para todo $g \in G$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$, tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $\left[g \in \xi_{(x_\lambda, y_\lambda)}\right] = \left[g \in \xi_{(x_0, y0)}\right]$, ou seja, $f(x_\lambda, y_\lambda) = \xi_{(x_\lambda, y_\lambda)} \to \xi_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$, donde segue que f é contínua.

Por fim, como $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) \times (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})$ é compacto e $\Omega_{\widehat{R}}$ é Hausdorff, segue que f é um homeomorfismo.

■

Portanto, como $\Omega_{\widehat{R}} \simeq (\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) \times (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})$, temos que

$$C\big(\Omega_{\widehat{R}}\big) \cong C((\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) \times (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})).$$

Logo,

$$C^*\Big(\mathscr{G}, \widehat{\mathscr{R}}\Big) \cong C((\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) \times (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})) \rtimes_{\overline{\alpha}} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}).$$

No próximo teorema, veremos que a C^*-álgebra universal, gerada por duas isometrias duplamente comutantes, é isomorfa a $C^*\{S\} \otimes C^*\{S\}$, onde $C^*\{S\}$ denota a C^*-álgebra universal gerada por uma isometria. Por isso, antes faremos algumas observações a respeito do produto tensorial de duas C^*-álgebras unitais.

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas C^*-álgebras unitais. Considere o conjunto $\overline{\mathcal{G}} = (\mathcal{A} \times \{1\}) \cup (\mathcal{B} \times \{2\})$, ou seja, um conjunto que possui a mesma cardinalidade de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ e é disjunto de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Para todo $a \in \mathcal{A}$, denotaremos um elemento da forma $(a, 1)$ por $a \otimes 1_{\mathcal{B}}$ e, analogamente, para todo $b \in \mathcal{B}$, denotaremos um elemento da forma $(b, 2)$ por $1_{\mathcal{A}} \otimes b$. Considere também o seguinte conjunto de relações:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{R}} =\{&(a \otimes 1_{\mathcal{B}})^* = a^* \otimes 1_{\mathcal{B}},\\
&(a_1 \otimes 1_{\mathcal{B}})(a_2 \otimes 1_{\mathcal{B}}) = a_1a_2 \otimes 1_{\mathcal{B}},\\
&\lambda(a_1 \otimes 1_{\mathcal{B}}) + (a_2 \otimes 1_{\mathcal{B}}) = (\lambda a_1 + a_2) \otimes 1_{\mathcal{B}},\\
&\|a \otimes 1_{\mathcal{B}}\| \leq \|a\|_{\mathcal{A}},\\
&(1_{\mathcal{A}} \otimes b)^* = 1_{\mathcal{A}} \otimes b^*,\\
&(1_{\mathcal{A}} \otimes b_1)(1_{\mathcal{A}} \otimes b_2) = 1_{\mathcal{A}} \otimes b_1b_2,\\
&\lambda(1_{\mathcal{A}} \otimes b_1) + (1_{\mathcal{A}} \otimes b_2) = 1_{\mathcal{A}} \otimes (\lambda b_1 + b_2),\\
&\|1_{\mathcal{A}} \otimes b\| \leq \|b\|_{\mathcal{B}},\\
&(a \otimes 1_{\mathcal{B}})(1_{\mathcal{A}} \otimes b) = (1_{\mathcal{A}} \otimes b)(a \otimes 1_{\mathcal{B}}),\ |\\
&\lambda \in \mathbb{C},\ a, a_1, a_2 \in \mathcal{A},\ b, b_1, b_2 \in \mathcal{B}\}.
\end{aligned}$$

Note que o par $\left(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{R}}\right)$ é admissível, logo existe $C^*\left(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{R}}\right)$.

Definição 4.3.3. $C^*\left(\overline{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{R}}\right)$ é denominada o produto tensorial de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}$, que denotaremos por $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Observação 4.3.4. Na verdade a definição padrão encontrada na literatura para o produto tensorial de duas C^*-álgebras unitais não é a dada acima, mas é equivalente a ela. Mais sobre a teoria de produto tensorial de C^*-álgebras pode ser encontrada no apêndice T em [16].

Dados $a \in \mathcal{A}$ e $b \in \mathcal{B}$ arbitrários, denotaremos por $\overline{a \tilde{\otimes} b}$ a classe de equivalência do elemento $(a \otimes 1_{\mathcal{B}})(1_{\mathcal{A}} \otimes b)$, referente ao quociente pelo núcleo da norma definida na construção de C^*-álgebra universal (ver construção no apêndice 1).

Teorema 4.3.5. *$C^*\left(\mathscr{G}, \widehat{\mathscr{R}}\right)$ é isomorfa a $C^*\{S\} \otimes C^*\{S\}$.*

Demonstração. Primeiramente, iremos usar a propriedade universal de $C^*\left(\mathscr{G}, \widehat{\mathscr{R}}\right)$. Defina

$$
\begin{aligned}
\rho : \mathscr{G} &\longrightarrow C^*\{S\} \otimes C^*\{S\} \\
S_1 &\longmapsto \overline{S \tilde{\otimes} 1} \\
S_2 &\longmapsto \overline{1 \tilde{\otimes} S}.
\end{aligned}
$$

Note que a rigor, um elemento de $C^*\{S\} \otimes C^*\{S\}$ é da forma $\overline{x \tilde{\otimes} y}$, onde $x \in C^*\{S\}$ e $y \in C^*\{S\}$, que a rigor também são classes, já que $C^*\{S\}$ também é uma C^*-álgebra universal. Para não sobrecarregarmos a notação, identificaremos os elementos $\overline{w} \in C^*\{S\}$ simplesmente por w, salientando portanto apenas a notação de classe no produto tensorial.

Vamos verificar que ρ satisfaz $\widehat{\mathscr{R}}$.

(i)
$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{\rho}(S_1^* S_1 - 1)\| = \|\rho(S_1)^* \rho(S_1) - \rho(1)\| &= \left\| \left(\overline{S \tilde{\otimes} 1}\right)^* \left(\overline{S \tilde{\otimes} 1}\right) - \overline{1 \tilde{\otimes} 1} \right\| \\
&= \left\| \overline{(S^* \otimes 1)\tilde{}(S \otimes 1)} - \overline{1 \tilde{\otimes} 1} \right\| = \left\| \overline{S^* S \otimes \tilde{1} - 1 \otimes 1} \right\| \\
&= \left\| \overline{1 \otimes 1 \tilde{-} 1 \otimes 1} \right\| = 0.
\end{aligned}
$$

(ii) A demonstração de que para todo $W \in \mathscr{G}$, $\|\widetilde{\rho}(S_2^* S_2 - 1)\| = 0$, é análoga ao item anterior.

(iii)
$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{\rho}(S_1 S_2 - S_2 S_1)\| &= \|\rho(S_1)\rho(S_2) - \rho(S_2)\rho(S_1)\| \\
&= \left\| \overline{(S \otimes 1)\tilde{}(1 \otimes S)} - \overline{(1 \otimes S)\tilde{}(S \otimes 1)} \right\| \\
&= \left\| \overline{S \otimes S \tilde{-} S \otimes S} \right\| = 0.
\end{aligned}
$$

(iv)
$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{\rho}(S_1^* S_2 - S_2 S_1^*)\| &= \|\rho(S_1)^* \rho(S_2) - \rho(S_2)\rho(S_1)^*\| \\
&= \left\| \overline{(S \otimes 1)^* \tilde{}(1 \otimes S)} - \overline{(1 \otimes S)\tilde{}(S \otimes 1)^*} \right\| \\
&= \left\| \overline{(S^* \otimes 1)\tilde{}(1 \otimes S)} - \overline{(1 \otimes S)\tilde{}(S^* \otimes 1)} \right\| \\
&= \left\| \overline{S^* \otimes S \tilde{-} S^* \otimes S} \right\| = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, ρ satisfaz $\widehat{\mathscr{R}}$; logo, pela propriedade universal de $C^*\left(\mathscr{G}, \widehat{\mathscr{R}}\right)$, existe um único homomorfismo φ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\iota"'] & & C^*\{S\} \otimes C^*\{S\} \\
& C^*\left(\mathscr{G}, \widehat{\mathscr{R}}\right) \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Então, temos que $\varphi\left(\overline{S_1}\right) = \varphi \circ \iota(S_1) = \rho(S_1) = \overline{S \mathbin{\tilde{\otimes}} 1}$ e $\varphi\left(\overline{S_2}\right) = \varphi \circ \iota(S_2) = \rho(S_2) = \overline{1 \mathbin{\tilde{\otimes}} S}$.

Agora, vamos usar a propriedade universal de $C^*\{S\}$. Defina a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \eta : \{S, 1\} &\longrightarrow C^*\left(\mathscr{G}, \widehat{\mathscr{R}}\right) \\ S &\longmapsto \overline{S_1}, \end{aligned}$$

e note que η satisfaz a relação de $C^*\{S\}$, pois

$$\|\widetilde{\eta}(S^*S - 1)\| = \|\eta(S)^*\eta(S) - \eta(1)\| = \left\|\overline{S_1^* S_1} - \overline{1}\right\| = \left\|\overline{1 - 1}\right\| = 0.$$

Portanto, pela propriedade universal de $C^*\{S\}$, existe um único homomorfismo ψ_1, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
\{S, 1\} \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\iota"'] & & C^*\left(\mathscr{G}, \widehat{\mathscr{R}}\right) \\
& C^*\{S\} \arrow[ur, "\psi_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Logo, $\psi_1(S) = \psi_1 \circ \iota(S) = \eta(S) = \overline{S_1}$.

De forma completamente análoga, podemos construir um homomorfismo $\psi_2 : C^*\{S\} \longrightarrow C^*\left(\mathscr{G}, \widehat{\mathscr{R}}\right)$, tal que $\psi_2(S) = \overline{S_2}$.

Agora, vamos mostrar que a imagem de ψ_1 comuta com a imagem de ψ_2, pois desta forma, existirá um homomorfismo $\psi : C^*\{S\} \otimes C^*\{S\} \longrightarrow C^*\left(\mathscr{G}, \widehat{\mathscr{R}}\right)$, tal que para todo $\overline{x \mathbin{\tilde{\otimes}} y} \in C^*\{S\} \otimes C^*\{S\}$,

$$\psi\left(\overline{x \mathbin{\tilde{\otimes}} y}\right) = \psi_1(x)\psi_2(y).$$

Portanto, tome w um elemento arbitrário da imagem de ψ_1; então ,$w = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i^n S_1^{r_n} (S_1^*)^{s_n}}$. Da mesma forma, tome z um elemento arbitrário da imagem de ψ_2; então, $z =$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{\beta_i^n S_2^{u_n}(S_2^*)^{v_n}}$. Como $\overline{S_1}\diamond\overline{S_2}$ e $\overline{S_1^*}\diamond\overline{S_2}$, temos que

$$\begin{aligned}
wz &= \left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda_i^n S_1^{r_n}(S_1^*)^{s_n}}\right)\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\overline{\beta_i^n S_2^{u_n}(S_2^*)^{v_n}}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda_i^n S_1^{r_n}(S_1^*)^{s_n}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{\beta_i^n S_2^{u_n}(S_2^*)^{v_n}}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{\beta_i^n S_2^{u_n}(S_2^*)^{v_n}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda_i^n S_1^{r_n}(S_1^*)^{s_n}}\right)\right)\\
&= \left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\overline{\beta_i^n S_2^{u_n}(S_2^*)^{v_n}}\right)\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda_i^n S_1^{r_n}(S_1^*)^{s_n}}\right)\\
&= zw,
\end{aligned}$$

donde segue que a imagem de ψ_1 comuta com a imagem de ψ_2 e desta forma existe o homomorfismo ψ mencionada acima.

Finalmente, vamos verificar que φ e ψ são um o inverso do outro, donde seguirá que $C^*\left(\mathscr{G},\widehat{\mathscr{R}}\right)$ e $C^*\{S\}\otimes C^*\{S\}$ são isomorfas.

Como $C^*\left(\mathscr{G},\widehat{\mathscr{R}}\right)$ é gerada por S_1, S_2 e 1, basta verificarmos a composição dos homomorfismos φ e ψ nos geradores. Então, temos que

1. $\psi\circ\varphi\big(\overline{S_1}\big) = \psi\left(\overline{S\mathbin{\tilde{\otimes}}1}\right) = \psi_1(S)\psi_2(1) = \overline{S_1 1} = \overline{S_1}$;

2. $\psi\circ\varphi\big(\overline{S_2}\big) = \psi\left(\overline{1\mathbin{\tilde{\otimes}}S}\right) = \psi_1(1)\psi_2(S) = \overline{1S_2} = \overline{S_2}$;

Portanto, $\psi\circ\varphi = id_{C^*\left(\mathscr{G},\widehat{\mathscr{R}}\right)}$.

Por fim, vamos fazer uso da propriedade universal de $C^*\{S\}\otimes C^*\{S\}$, para provar que $\varphi\circ\psi = id_{C^*\{S\}\otimes C^*\{S\}}$. Seja $\overline{\mathcal{G}}$ o conjunto gerador de $C^*\{S\}\otimes C^*\{S\}$ (como definido na discussão que precede este teorema). Como as C^*-álgebras que compõem este produto tensorial são a mesma, faremos a seguinte definição: $\mathcal{G}_1 = \{x\otimes 1 \mid x\in C^*\{S\}\}$ e $\mathcal{G}_2 = \{1\otimes x \mid x\in C^*\{S\}\}$. Logo, $\mathcal{G}_1\dot{\cup}\mathcal{G}_2 = \overline{\mathcal{G}}$. Então, claramente a aplicação

$$\begin{aligned}
\iota:\mathcal{G}_1\dot{\cup}\mathcal{G}_2 &\longrightarrow C^*\{S\}\otimes C^*\{S\}\\
\mathcal{G}_1\ni x &\longmapsto \overline{x\mathbin{\tilde{\otimes}}1}\\
\mathcal{G}_2\ni y &\longmapsto \overline{1\mathbin{\tilde{\otimes}}y}
\end{aligned}$$

é uma representação de $\mathcal{G}_1\dot{\cup}\mathcal{G}_2$, que satisfaz o conjunto de relações (também como definido na discussão que precede este teorema). Logo, pela propriedade universal de

$C^*\{S\} \otimes C^*\{S\}$, existe um único homomorfismo ϕ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_1 \dot{\cup} \mathcal{G}_2 \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & & C^*\{S\} \otimes C^*\{S\} \\
& C^*\{S\} \otimes C^*\{S\} \arrow[ur, "\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Agora, note que $\iota = id_{C^*\{S\} \otimes C^*\{S\}} \circ \iota$; portanto, pela unicidade da propriedade universal, segue que $\phi = id_{C^*\{S\} \otimes C^*\{S\}}$. Como $C^*\{S\} \otimes C^*\{S\}$ é uma C^*-álgebra universal, basta verificarmos que $\varphi \circ \psi$ faz o diagrama acima comutar nos seus geradores; mas $C^*\{S\}$ também é uma C^*-álgebra universal, portanto basta verificarmos que $\varphi \circ \psi = \iota$ no conjunto $\{S, 1\}$, lembrando que devemos analisar dois casos: o conjunto $\{S, 1\}$ como conjunto gerador, referente a primeira entrada do produto tensorial e o conjunto $\{S, 1\}$ como conjunto gerador, referente a segunda entrada do produto tensorial. Logo, temos que

1. $\varphi \circ \iota(S) = \varphi \circ \psi\Big(\overline{S \tilde{\otimes} 1}\Big) = \varphi(\psi_1(S)\psi_2(1)) = \varphi\big(\overline{S_1 1}\big) = \varphi\big(\overline{S_1}\big) = \overline{S \tilde{\otimes} 1} = \iota(S)$;
2. $\varphi \circ \iota(S) = \varphi \circ \psi\Big(\overline{1 \tilde{\otimes} S}\Big) = \varphi(\psi_1(1)\psi_2(S)) = \varphi\big(\overline{1 S_2}\big) = \varphi\big(\overline{S_2}\big) = \overline{1 \tilde{\otimes} S} = \iota(S)$;

Portanto, pela unicidade de $\phi = id_{C^*\{S\} \otimes C^*\{S\}}$ no diagrama acima, segue que $\varphi \circ \psi = id_{C^*\{S\} \otimes C^*\{S\}}$.

■

Portanto,

$$C^*\{S\} \otimes C^*\{S\} \;\cong\; C^*\Big(\mathscr{G}, \widehat{\mathscr{R}}\Big) \;\cong\; C((\mathbb{N} \cup \{+\infty\}) \times (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})) \rtimes_{\overline{\alpha}} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}).$$

Capítulo 5

Representações Induzidas

Neste último capítulo, nosso objetivo será construir uma representação da C^*-álgebra universal, gerada por duas isometrias compatíveis. Iremos primeiramente desenvolver um pouco da teoria de representações induzidas, para então concluir que dado um produto cruzado parcial $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ e uma representação de $\mathcal{A}$, podemos induzir uma representação sobre $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$. Desta forma, teremos a representação desejada, uma vez que no capítulo anterior mostramos que a C^*-álgebra em questão é isomorfa a um produto cruzado parcial. Mais sobre a teoria de representações induzidas, pode ser encontrada em [12].

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ C^*-álgebras unitais, $\mathcal{M}_\mathcal{B}$ um Hilbert $\mathcal{B}$-módulo à direita (ver definição B.1.8) e $\mathcal{L}(\mathcal{M}_\mathcal{B}) = \{T : \mathcal{M}_\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{M}_\mathcal{B} \mid T \text{ é adjuntável}\}$ (ver definição de um operador adjuntável em B.1.11).

Definição 5.0.6. Uma $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-correspondência é um par ordenado $(\mathcal{M}_\mathcal{B}, \kappa)$, onde

$$\begin{aligned} \kappa : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_\mathcal{B}) \\ a &\longmapsto \kappa_a \end{aligned}$$

é um homomorfismo.

Queremos definir uma estrutura de $\mathcal{A}$ -módulo à esquerda sobre $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$, portanto defina para todo $m \in \mathcal{M}_\mathcal{B}$, $am = \kappa_a(m)$.

Proposição 5.0.7. *Se $(\mathcal{M}_\mathcal{B}, \kappa)$ é uma $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-correspondência, então ${}_\mathcal{A}\mathcal{M}_\mathcal{B}$ é um $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-bimódulo.*

Demonstração. Sejam $a, a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ e $m, m_1, m_2 \in \mathcal{M}_\mathcal{B}$ quaisquer; então, temos que

(i) $a_1(a_2m) = \kappa_{a_1}(\kappa_{a_2}(m)) = \kappa_{a_1} \circ \kappa_{a_2}(m) = \kappa_{a_1a_2}(m) = (a_1a_2)m.$

(ii) $a(m_1 + m_2) = \kappa_a(m_1 + m_2) = \kappa_a(m_1) + \kappa_a(m_2) = am_1 + am_2$.

(iii) $(a_1 + a_2)m = \kappa_{a_1+a_2}(m) = \kappa_{a_1}(m) + \kappa_{a_2}(m) = a_1m + a_2m$.

Logo, $\mathcal{M}_\mathcal{B}$ é um $\mathcal{A}$-módulo à esquerda. Além disso, para $b \in \mathcal{B}$ arbitrário, temos que

$$a(mb) = \kappa_a(mb) = (\kappa_a(m))b = (am)b,$$

e portanto, ${}_\mathcal{A}\mathcal{M}_\mathcal{B}$ é um $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-bimódulo.

■

Agora, sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma representação qualquer; para todo $b \in \mathcal{B}$ e para todo $\xi \in \mathcal{H}$ defina

$$b\xi := \pi(b)(\xi).$$

Note que π induz uma estrutura de $\mathcal{B}$-módulo à esquerda sobre $\mathcal{H}$. No que segue, seja $(\mathcal{M}_\mathcal{B}, \kappa)$ uma $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-correspondência. O nosso objetivo é induzir uma representação de $\mathcal{A}$ a partir da π, mas para isto, primeiramente precisamos construir um espaço de Hilbert.

Considere o produto tensorial de módulos entre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{H}$, que denotaremos por $\mathcal{M} \otimes_\mathcal{B} \mathcal{H}$. Observe que este produto tensorial está bem definido, já que $\mathcal{M}$ é um $\mathcal{B}$-módulo à direita e $\mathcal{H}$ é um $\mathcal{B}$-módulo à esquerda. Queremos definir um produto interno em $\mathcal{M} \otimes_\mathcal{B} \mathcal{H}$. Dados $m \otimes \xi, n \otimes \omega \in \mathcal{M} \otimes_\mathcal{B} \mathcal{H}$, poderíamos pensar em definir o produto interno da maneira canônica, ou seja, $\langle m \otimes \xi, n \otimes \omega\rangle = (m\xi)^*(n\omega)$, mas note que esta equação não tem sentido, já que estamos usando operações que não estão definidas. Para fins de uma motivação, continuaremos esta equação no intuito de dar a ela um sentido. Então, note que podemos pensar em m^*n como sendo $\langle m, n\rangle_\mathcal{B}$, que está definido, mas mesmo assim, não podemos multiplicar um elemento de $\mathcal{H}$ por um elemento de $\mathcal{B}$, mas podemos fazer isto através da representação π. Logo, teríamos algo do tipo

$$(m\xi)^*(n\omega) = \xi^* m^* n\omega = \xi^*\langle m, n\rangle_\mathcal{B}\omega = \xi^*\pi(\langle m, n\rangle_\mathcal{B})\omega,$$

mas ainda assim esta equação não faz sentido, já que em $\mathcal{H}$ não temos uma operação de involução definida. No entanto, poderíamos pensar que

$$\xi^*\pi(\langle m, n\rangle_\mathcal{B})\omega = \langle \xi, \pi(\langle m, n\rangle_\mathcal{B})\omega\rangle.$$

Esta foi uma tentativa de motivar a construção que segue.

Fixe $n_0 \in \mathcal{M}_\mathcal{B}$ e $\omega_0 \in {}_\mathcal{B}\mathcal{H}$ arbitrários e defina a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi_{(n_0,\omega_0)} : \mathcal{M}_\mathcal{B} \times {}_\mathcal{B}\mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (m,\xi) &\longmapsto \langle \xi, \langle m, n_0\rangle_\mathcal{B}\omega_0\rangle. \end{aligned}$$

Note que $\varphi_{(n_0,\omega_0)}$ é $\mathcal{B}$-balanceada, pois para quaisquer $b \in \mathcal{B}$, $m \in \mathcal{M}_\mathcal{B}$ e $\xi \in {}_\mathcal{B}\mathcal{H}$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{(n_0,\omega_0)}(m, b\xi) &= \langle b\xi, \langle m, n_0\rangle_\mathcal{B}\omega_0\rangle = \langle \xi, b^*\langle m, n_0\rangle_\mathcal{B}\omega_0\rangle \\ &= \langle \xi, \langle mb, n_0\rangle_\mathcal{B}\omega_0\rangle = \varphi_{(n_0,\omega_0)}(mb,\xi). \end{aligned}$$

Além disso $\varphi_{(n_0,\omega_0)}$ é claramente anti-linear sobre $\mathbb{C}$, logo existe uma única aplicação $\widehat{\varphi}_{(n_0,\omega_0)} : \mathcal{M}_\mathcal{B} \otimes_\mathcal{B} \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ anti-linear sobre $\mathbb{C}$, tal que para todo $m \in \mathcal{M}_\mathcal{B}$ e para todo $\xi \in {}_\mathcal{B}\mathcal{H}$, temos que

$$\widehat{\varphi}_{(n_0,\omega_0)}(m \otimes \xi) = \varphi_{(n_0,\eta_0)}(m,\xi) = \langle \xi, \langle m, n_0\rangle_\mathcal{B}\omega_0\rangle.$$

Agora, defina $\mathcal{F} = \{f : \mathcal{M}_\mathcal{B} \otimes_\mathcal{B} \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é } \mathbb{C} - \text{anti-linear}\}$ e

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{M}_\mathcal{B} \times {}_\mathcal{B}\mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ (n,\omega) &\longmapsto \widehat{\varphi}_{(n,\omega)}. \end{aligned}$$

Observe que ψ é $\mathcal{B}$-balanceada, pois para quaisquer $b \in \mathcal{B}$, $m \in \mathcal{M}_\mathcal{B}$ e $\xi \in {}_\mathcal{B}\mathcal{H}$ temos que

$$\widehat{\varphi}_{(nb,\omega)}(m \otimes \xi) = \langle \xi, \langle m, nb\rangle_\mathcal{B}\omega\rangle = \langle \xi, \langle m, n\rangle_\mathcal{B} b\omega\rangle = \widehat{\varphi}_{(n,b\omega)}(m \otimes \xi).$$

Logo, $\psi(nb,\omega) = \widehat{\varphi}_{(nb,\omega)} = \widehat{\varphi}_{(n,b\omega)} = \psi(n,b\omega)$.

Além disso, ψ é claramente $\mathbb{C}$-linear, logo existe uma única aplicação $\widehat{\psi} : \mathcal{M} \otimes_\mathcal{B} \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$, tal que para todo $m, n \in \mathcal{M}_\mathcal{B}$ e para todo $\xi, \omega \in {}_\mathcal{B}\mathcal{H}$, temos que

$$\widehat{\psi}(n,\omega)(m \otimes \xi) = \psi(n,\omega)(m,\xi) = \langle \xi, \langle m, n\rangle_\mathcal{B}\omega\rangle.$$

Nosso próximo passo, será mostrar que a aplicação $\widehat{\psi}$ é um semi-produto interno. Para provar a sua positividade, precisaremos do seguinte lema:

Lema 5.0.8. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $T = (T_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathcal{B})$ arbitrários, onde $M_n(\mathcal{B})$ denota a C^*-álgebra das matrizes quadradas de ordem n, com entradas em $\mathcal{B}$. Então, $T \geq 0$*

se, e somente se, para todo $b_1, \cdots, b_n \in \mathcal{B}$, $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} b_i^* T_{ij} b_j \geq 0$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como T é um elemento positivo de $M_n(\mathcal{B})$, existe $C = (C_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathcal{B})$, tal que $T = C^*C$. Agora, tome $b_1, \cdots, b_n \in \mathcal{B}$ arbitrários e note que

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_i^* T_{ij} b_j = \sum_{i,j,k=1}^{n} b_i^* (C_{ki})^* C_{kj} b_j = \sum_{i,j,k=1}^{n} (C_{ki} b_i)^* (C_{kj} b_j) = (Cb)^* (Cb) \geq 0,$$

onde $(Cb)^*$ denota o vetor linha Cb.

($\Leftarrow$) Primeiramente vamos provar que sob a hipótese de que para todo $b_1, \cdots, b_n \in \mathcal{B}$, $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} b_i^* T_{ij} b_j \geq 0$, o operador T é auto-adjunto, isto é, para todo $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $T_{ji} = T_{ij}^*$. Defina a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (b, c) &\longmapsto \sum_{i,j=1}^{n} b_i^* T_{ij} c_j. \end{aligned}$$

Note que a aplicação φ é claramente uma forma sesquilinear, logo satisfaz a identidade de polarização (ver observação 2.1.5 em [15]). Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \varphi(b, c)^* &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{4} i^{-n} \varphi(b + i^n c, b + i^n c) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{4} i^{-n} \varphi\big(i^n \big(i^{-n} b + c\big), i^n \big(i^{-n} b + c\big)\big) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{4} i^{-n} i^{-n} i^n \varphi\big(i^{-n} b + c, i^{-n} b + c\big) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{4} i^m \varphi(c + i^m b, c + i^m b) \\ &= \varphi(c, b). \end{aligned}$$

Logo, como

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} b_i^* T_{ij} c_j \right)^* = \sum_{i,j=1}^{n} c_j^* T_{ij}^* b_i,$$

temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_j^* T_{ij}^* b_i = \sum_{i,j=1}^{n} c_i^* T_{ij} b_j = \sum_{i,j=1}^{n} c_j^* T_{ji} b_i \Rightarrow \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}, T_{ij}^* = T_{ji}.$$

Então como T é auto-adjunto, existem $R, S \in M_n(\mathcal{B})_+$, tais que $T = R - S$ e $RS = 0$. Tome $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{B}^n$ arbitrário e defina para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, $y_i = \sum_{i,j=1}^{n} S_{ij}x_j$. Logo, como todo elemento positivo é auto-adjunto e

$$T = R - S \Rightarrow TS = RS - S^2 \Rightarrow TS = -S^2,$$

temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} y_i^* T_{ij} y_j &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} x_k^* (S_{ik})^* T_{ij} S_{jl} x_l \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} x_k^* \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^{n} S_{ki}^* T_{ij} S_{jl} \right)}_{(S^*TS)_{kl}} x_l \\ &= - \sum_{k,l=1}^{n} x_k^* \big(S^3\big)_{kl} x_l = -\big\langle S^3 x, x \big\rangle \leq 0, \end{aligned}$$

pois S é positivo, o que implica $\langle S^3 x, x\rangle \geq 0$.

Portanto, $\langle S^3 x, x\rangle = 0$ e pela identidade de polarização (ver exercício 2.1.3 em [15]), temos que para qualquer $y \in \mathcal{B}^n$, $\langle S^3 x, y\rangle = 0$. Logo, tomando $i, j \in \{1, \dots, n\}$ arbitrários, $x = e_j$ (o vetor que é nulo em todas as entradas, exceto na j-ésima, que é igual a 1) e $y = e_i$, temos que $S^3_{ij} = 0$, donde segue que $S^3 = 0$. Mas, se $S^3 = 0$, temos que

$$\left\|S^2\right\|^2 = \|(SS)^*(SS)\| = \left\|S^3 S\right\| \leq \left\|S^3\right\| \|S\| = 0 \Rightarrow \left\|S^2\right\| = 0.$$

Da mesma forma, se $S^2 = 0$, temos que

$$\|S\|^2 = \|S^* S\| = \|SS\| = 0 \Rightarrow \|S\| = 0 \Rightarrow S = 0.$$

Portanto, $T = R \geq 0$.

$\blacksquare$

Proposição 5.0.9. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}) \times (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \widehat{\psi}(y)(x) \end{aligned}$$

é um semi-produto interno.

Demonstração. Note que a $\mathbb{C}$-linearidade segue diretamente da construção de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Logo, vamos demonstrar os demais axiomas de um semi-produto interno.

- Anti-simetria: Sejam $x, y \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}$ arbitrários; então, existem $m_i, n_j \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ e $\xi_i, \omega_j \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{H}$, onde $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, tais que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes \xi_i$ e $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} n_j \otimes \omega_j$. Logo, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\langle x, y\rangle} &= \overline{\left\langle \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes \xi_i, \sum_{j=1}^{n} n_j \otimes \omega_j \right\rangle} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\langle m_i \otimes \xi_i, n_j \otimes \omega_j\rangle} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\langle \xi_i, \langle m_i, n_j\rangle_{\mathcal{B}} \omega_j\rangle} = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \langle m_i, n_j\rangle_{\mathcal{B}} \omega_j, \xi_i\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \omega_j, \langle m_i, n_j\rangle_{\mathcal{B}}{}^* \xi_i\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \omega_j, \langle n_j, m_i\rangle_{\mathcal{B}} \xi_i\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle n_j \otimes \omega_j, m_i \otimes \xi_i\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} n_j \otimes \omega_j, \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes \xi_i \right\rangle \\
&= \langle y, x\rangle.
\end{aligned}$$

- Positividade: Queremos mostrar que para todo $x \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}$, $\langle x, x\rangle \geq 0$. Observe que para $m \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ e $\xi \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{H}$ arbitrários, temos que $\langle m \otimes \xi, m \otimes \xi\rangle = \langle \xi, \langle m, m\rangle_{\mathcal{B}} \xi\rangle$, mas sabemos que $\langle m, m\rangle_{\mathcal{B}} \geq 0$, logo existe $b \in \mathcal{B}$, tal que $\langle m, m\rangle_{\mathcal{B}} = b^* b$, portanto

$$\langle m \otimes \xi, m \otimes \xi\rangle = \langle \xi, \langle m, m\rangle_{\mathcal{B}} \xi\rangle = \langle \xi, b^* b \xi\rangle = \langle b\xi, b\xi\rangle \geq 0.$$

No entanto, não basta mostrarmos a positividade de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nos geradores de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}$. Logo, tome $x \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}$ arbitrário; como mencionado anteriormente, existem $m_i \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ e $\xi_i \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{H}$, onde $i \in \{1, \cdots, n\}$, tais que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes \xi_i$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes \xi_i, \sum_{j=1}^{n} m_j \otimes \xi_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle m_i \otimes \xi_i, m_j \otimes \xi_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \xi_i, \langle m_i, m_j\rangle_{\mathcal{B}} \xi_j\rangle. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Agora note que, para $b_1, \cdots, b_n \in \mathcal{B}$ arbitrários, temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_i^* \langle m_i, m_j \rangle b_j = \left\langle \sum_{i=1}^{n} b_i m_i, \sum_{j=1}^{n} b_j m_j \right\rangle \geq 0,$$

logo pelo lema 5.0.8 temos que $\left(\langle m_i, m_j \rangle_{\mathcal{B}}\right)_{ij} \in M_n(B)_+$ e desta forma, existe $C = (C_{ij})_{ij} \in M_n(\mathcal{B})$, tal que $\left(\langle m_i, m_j \rangle_{\mathcal{B}}\right)_{ij} = C^*C$. Portanto, substituindo $\left(\langle m_i, m_j \rangle_{\mathcal{B}}\right)_{ij}$ por $(C^*C)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (C^*)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (C_{ki})^* C_{kj}$ na equação 5.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle x, x \rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \xi_i, \langle m_i, m_j \rangle_{\mathcal{B}} \xi_j \right\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{n} \langle \xi_i, (C_{ki})^* (C_{kj}) \xi_j \rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} \langle C_{ki} \xi_i, C_{kj} \xi_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \left\langle \sum_{i=1}^{n} C_{ki} \xi_i, \sum_{j=1}^{n} C_{kj} \xi_j \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} C_{ki} \xi_i \right\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é semi-produto interno.

■

Note que nada nos garante a não degenerecência da aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle$; por isso, defina $N = \{z \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H} \mid \langle z, z \rangle = 0\}$. Vamos provar que N é um subespaço de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}$, mas para isto, precisaremos do seguinte lema:

Lema 5.0.10. *Seja $z \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}$ arbitrário. Então, $\langle z, z \rangle = 0$ se, e somente se, para todo $x \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}$, $\langle z, x \rangle = 0$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Note que para $x \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}$ arbitrário, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\|\langle z, x \rangle\| \leq \|z\| \|x\| = \|\langle z, z \rangle\|^{1/2} \|\langle x, x \rangle\|^{1/2} = 0.$$

Portanto, $\langle z, x \rangle = 0$.

($\Leftarrow$) Basta tomar $x = z$.

■

Proposição 5.0.11. *N é um subespaço de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}$.*

Demonstração. Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $z, w \in N$ arbitrários; então, temos que

(i) $\langle \lambda z, \lambda z\rangle = |\lambda|^{\,2}\langle z, z\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \lambda z \in N$;

(ii) $\langle z+w, z+w\rangle = \langle z, z\rangle + \langle w, z\rangle + \langle z, w\rangle + \langle w, w\rangle = 0$, já que pelo lema anterior $\langle w, z\rangle = 0 = \langle z, w\rangle$.

Logo, N é um subespaço de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}$.

$\blacksquare$

Portanto, $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H})/N$ é um subespaço vetorial e

$$\begin{aligned} \langle \cdot,\cdot\rangle : (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H})/N \times (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H})/N &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\overline{x}, \overline{y}) &\longmapsto \langle x, y\rangle \end{aligned}$$

é um produto interno. Seja $\widetilde{\mathcal{H}}$ o completamento de $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H})/N$, na norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot,\cdot\rangle$; logo, $\widetilde{\mathcal{H}}$ é um espaço de Hilbert.

Relembrando, o nosso objetivo é a partir da representação $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ induzir uma representação de $\mathcal{A}$. Uma vez já construído o espaço de Hilbert, sobre o qual esta representação irá agir, vamos definir a representação.

Tome $a \in \mathcal{A}$ arbitrário e defina a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \zeta_a : \mathcal{M}_{\mathcal{B}} \times {}_{\mathcal{B}}\mathcal{H} &\longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}} \\ (m, \xi) &\longmapsto \kappa_a(m) \otimes \xi, \end{aligned}$$

onde κ é o homomorfismo dado pela $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-correspondência. Observe que a rigor um elemento de $\widetilde{\mathcal{H}}$ é uma classe de equivalência. Por abuso de notação, denotaremos um elemento da imagem de ζ_a pelo representante da sua classe.

Note que ζ_a é $\mathcal{B}$-balanceada, pois para $m \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$, $b \in \mathcal{B}$ e $\xi \in {}_{\mathcal{B}}\mathcal{H}$ arbitrários, temos que

$$\begin{aligned} \zeta_a(mb, \xi) &= \kappa_a(mb) \otimes \xi = a(mb) \otimes \xi = (am)b \otimes \xi \\ &= am \otimes b\xi = \kappa_a(m) \otimes b\xi = \zeta_a(m, b\xi). \end{aligned}$$

Além disso, como ζ_a é claramente $\mathbb{C}$-linear, existe uma única $\widetilde{\zeta_a}$, extensão $\mathbb{C}$-linear de ζ_a, para o produto tensorial algébrico $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}$. Logo, para $x = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes \xi_i \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}$ arbitrário, temos que

$$\widetilde{\zeta_a}(x) = \widetilde{\zeta_a}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} am_i \otimes \xi_i.$$

Agora, vamos querer estender $\widetilde{\zeta}_a$ para o completamento de $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H})/N$. Para isto, temos que provar que $\widetilde{\zeta}_a$ é contínua e se anula sobre N, já que ela por construção é linear. Para demonstrar a continuidade, precisaremos da seguinte proposição:

Proposição 5.0.12. *Seja* $x = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes \xi_i \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}$ *arbitrário. Então,*

$$\|a\|^2 \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \xi_i, \langle m_i, m_j \rangle_{\mathcal{B}} \xi_j \right\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \xi_i, \langle am_i, am_j \rangle_{\mathcal{B}} \xi_j \right\rangle \geq 0.$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} &\|a\|^2 \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \xi_i, \langle m_i, m_j \rangle_{\mathcal{B}} \xi_j \right\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \xi_i, \langle am_i, am_j \rangle_{\mathcal{B}} \xi_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \xi_i, \left(\|a\|^2 \langle m_i, m_j \rangle_{\mathcal{B}} - \langle am_i, am_j \rangle_{\mathcal{B}} \right) \xi_j \right\rangle. \end{aligned}$$

Agora tomando $T = \left(\|a\|^2 \langle m_i, m_j \rangle - \langle am_i, am_j \rangle \right)_{ij} \in M_n(B)$ e $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathcal{H}^n$, temos que

$$\langle \xi, T(\xi) \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \xi_i, \left(\|a\|^2 \langle m_i, m_j \rangle_{\mathcal{B}} - \langle am_i, am_j \rangle_{\mathcal{B}} \right) \xi_j \right\rangle.$$

Logo, para provarmos o desejado, basta provarmos que $T \in M_n(B)_+$, pois desta forma teremos que $\langle \xi, T(\xi) \rangle \geq 0$. Para provarmos que $T \in M_n(B)_+$ usaremos o lema 5.0.8. Sejam $b_1, \cdots, b_n \in \mathcal{B}$ arbitrários, então

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} b_i^* T_{ij} b_j &= \sum_{i,j=1}^{n} b_i^* \left(\|a\|^2 \langle m_i, m_j \rangle - \langle am_i, am_j \rangle \right) b_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \|a\|^2 \langle m_i b_i, m_j b_j \rangle - \langle am_i b_i, am_j b_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \|a\|^2 m_i b_i, m_j b_j \right\rangle - \langle am_i b_i, am_j b_j \rangle. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Mas, note que

$$\begin{aligned} \langle am_i b_i, am_j b_j \rangle &= \langle \kappa_a(m_i b_i), \kappa_a(m_j b_j) \rangle = \langle \kappa_a^* \circ \kappa_a(m_i b_i), m_j b_j \rangle \\ &= \langle \kappa_{a^*}(am_i b_i), m_j b_j \rangle = \langle a^* am_i b_i, m_j b_j \rangle. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Portanto, substituindo a equação 5.3 na equação 5.2 e observando que como $\|a\|^2 -$

$a^*a \geq 0$, existe $c \in \mathcal{A}$, tal que $\|a\|^2 - a^*a = c^*c$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} b_i^* T_{ij} b_j &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \|a\|^2 m_i b_i, m_j b_j \right\rangle - \langle a m_i b_i, a m_j b_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \|a\|^2 m_i b_i, m_j b_j \right\rangle - \langle a^* a m_i b_i, m_j b_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \left(\|a\|^2 - a^*a\right) m_i b_i, m_j b_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle c^* c m_i b_i, m_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle c m_i b_i, c m_j b_j \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} c m_i b_i, \sum_{j=1}^{n} c m_j b_j \right\rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo lema 5.0.8 temos que $T \in M_n(\mathcal{B})_+$, donde o resultado segue.

■

Proposição 5.0.13. *$\widetilde{\zeta}_a$ é contínua.*

Demonstração. Seja $x = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes \xi_i \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H}$ arbitrário. Então, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{\zeta}_a(x)\right\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{n} a m_i \otimes \xi_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a m_i \otimes \xi_i, \sum_{i=j}^{n} a m_j \otimes \xi_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle a m_i \otimes \xi_i, a m_j \otimes \xi_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \xi_i, \langle a m_i, a m_j \rangle_{\mathcal{B}} \xi_j \right\rangle
\end{aligned}$$

Como pela proposição acima, sabemos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \xi_i, \langle a m_i, a m_j \rangle_{\mathcal{B}} \xi_j \right\rangle \leq \|a\|^2 \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \xi_i, \langle m_i, m_j \rangle_{\mathcal{B}} \xi_j \right\rangle,$$

segue que

$$
\begin{aligned}
\left\|\widetilde{\zeta}_a(x)\right\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \xi_i, \langle am_i, am_j\rangle_{\mathcal{B}}\xi_j \right\rangle \leq \|a\|^2 \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \xi_i, \langle m_i, m_j\rangle_{\mathcal{B}}\xi_j \right\rangle \\
&= \|a\|^2 \sum_{i,j=1}^{n} \langle m_i \otimes \xi_i, m_j \otimes \xi_j\rangle = \|a\|^2 \left\langle \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes \xi_i, \sum_{j=1}^{n} m_j \otimes \xi_j \right\rangle \\
&= \|a\|^2 \left\| \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes \xi_i \right\|^2 = \|a\|^2 \|x\|^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\left\|\widetilde{\zeta}_a(x)\right\| \leq \|a\|\|x\|$, donde segue que $\widetilde{\zeta}_a$ é contínua.

■

Agora note que para $z \in N$ arbitrário, temos que

$$\left\|\widetilde{\zeta}_a(z)\right\| \leq \|a\|\|z\| = \|a\|\|\langle z, z\rangle\|^{1/2} = 0 \Rightarrow \widetilde{\zeta}_a(z) = 0.$$

Portanto, $\widetilde{\zeta}_a : (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H})/N \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$ está bem definida, além de ser linear e contínua. Logo, existe uma extensão linear de $\widetilde{\zeta}_a$ para o completamento de $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H})/N$. Denote por $\widehat{\zeta}_a$ esta extensão. Portanto, fica bem definida a seguinte aplicação

$$
\begin{aligned}
\zeta : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right) \\
a &\longmapsto \widehat{\zeta}_a.
\end{aligned}
$$

Só nos resta verificar que ζ é uma representação de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right)$.

Proposição 5.0.14. *A aplicação*

$$
\begin{aligned}
\zeta : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right) \\
a &\longmapsto \widehat{\zeta}_a
\end{aligned}
$$

é uma representação de $\mathcal{A}$ *em* $\mathcal{B}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right)$.

Demonstração. Primeiramente, observe que a aplicação ζ é claramente $\mathbb{C}$-linear. Além disso, para $a \in \mathcal{A}$ e $\overline{m \otimes \xi}, \overline{n \otimes \omega} \in (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H})/N$ arbitrários, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\zeta}_a\left(\overline{m \otimes \xi}\right), \overline{n \otimes \omega} \right\rangle &= \left\langle \overline{am \otimes \xi}, \overline{n \otimes \omega} \right\rangle = \left\langle \overline{\kappa_a(m) \otimes \xi}, \overline{n \otimes \omega} \right\rangle \\
&= \langle \xi, \langle \kappa_a(m), n \rangle_{\mathcal{B}} \omega \rangle = \langle \xi, \langle m, \kappa_a^*(n) \rangle_{\mathcal{B}} \omega \rangle \\
&= \langle \xi, \langle m, \kappa_{a^*}(n) \rangle_{\mathcal{B}} \omega \rangle = \langle \xi, \langle m, a^* n \rangle_{\mathcal{B}} \omega \rangle \\
&= \left\langle \overline{m \otimes \xi}, \overline{a^* n \otimes \omega} \right\rangle = \left\langle \overline{m \otimes \xi}, \widehat{\zeta}_{a^*}\left(\overline{n \otimes \omega}\right) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, como o produto interno e $\widehat{\zeta}_a$ são $\mathbb{C}$-lineares e contínuos segue que $\zeta(a)^* = \zeta(a^*)$.

Por fim, tomando $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ e $\overline{m \otimes \xi} \in (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{H})/N$ arbitrários, temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{\zeta}(a_1 a_2)\left(\overline{m \otimes \xi}\right) &= \overline{(a_1 a_2) m \otimes \xi} = \overline{\kappa_{a_1 a_2}(m) \otimes \xi} \\
&= \overline{\kappa_{a_1} \circ \kappa_{a_2}(m) \otimes \xi} = \zeta(a_1)\left(\overline{\kappa_{a_2}(m) \otimes \xi}\right) \\
&= \widehat{\zeta}(a_1) \circ \widehat{\zeta}(a_2)\left(\overline{m \otimes \xi}\right).
\end{aligned}$$

Logo, como $\widehat{\zeta}_{a_1 a_2}$ e $\widehat{\zeta}_{a_1} \circ \widehat{\zeta}_{a_2}$ são $\mathbb{C}$-lineares e contínuas, segue que $\zeta(a_1 a_2) = \zeta(a_1) \circ \zeta(a_2)$.

Portanto, ζ é uma representação de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right)$.

∎

Teorema 5.0.15. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ C^*-álgebras, $(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}, \kappa)$ uma $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-correspondência e $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma representação. Então existe uma representação $\zeta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right)$, onde $\widetilde{\mathcal{H}}$ é como construído acima tal que, para todo $a \in \mathcal{A}$ e para todo $\overline{m \otimes \xi} \in (\mathcal{M} \otimes \mathcal{H})/N$,*

$$\zeta(a)\left(\overline{m \otimes \xi}\right) = \overline{am \otimes \xi}.$$

Demonstração. Basta tomar a representação definida na proposição acima.

∎

Portanto, a partir de uma representação $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, nós induzimos uma representação de $\mathcal{A}$.

Agora, veremos que a partir de uma esperança condicional (ver definição B.2.17), podemos construir uma $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-correspondência. Sejam $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra, $\mathcal{B}$ uma sub-C^*-álgebra de $\mathcal{A}$, ambas unitais e $E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ uma esperança condicional.

Proposição 5.0.16. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ (m, n) &\longmapsto E(m^* n) \end{aligned}$$

é um semi-produto interno.

Demonstração. Sejam $m, n, a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrários. Então, temos que

(i) $\langle m, nb \rangle = E(m^* nb) = E(m^* n)b = \langle m, n \rangle b$;

(ii) $\langle m, n \rangle^* = E(m^* n)^* = E(n^* m) = \langle n, m \rangle$;

(iii) $\langle m, m \rangle = E(m^* m) \geq 0$, pois $m^* m \in \mathcal{A}_+$;

(iv) $\langle m, \lambda n \rangle = E(m^* \lambda n) = \lambda E(m^* n) = \lambda \langle m, m \rangle$;

(v) $\langle a, m + n \rangle = E(a^*(m + n)) = E(a^* m + a^* n) = E(a^* m) + E(a^* n) = \langle a, m \rangle + \langle a, n \rangle$.

Logo, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um semi-produto interno tomando valores em $\mathcal{B}$.

■

Note que nada nos garante a não degenerecência da aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle$, por isso defina $N = \{a \in \mathcal{A} \mid E(a^* a) = 0\}$. Na próxima proposição, mostraremos que N é um subespaço de $\mathcal{A}$.

Proposição 5.0.17. *N é um subespaço de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Sejam $a, n \in N$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrários. Então, temos que

(i) $E((\lambda a)^*(\lambda a)) = E\big(a^* \overline{\lambda} \lambda a\big) = E\big(|\lambda|^{\,2} a^* a\big) = |\lambda|^{\,2} E(a^* a) = 0 \Rightarrow \lambda a \in N$;

(ii) $E((a + n)^*(a + n)) = \langle a + n, a + n \rangle = \langle a, a \rangle + \langle a, n \rangle + \langle n, a \rangle + \langle n, n \rangle = 0$, pois por um resultado similar ao lema 5.0.10, temos que $\langle a, n \rangle = 0 = \langle n, a \rangle$.

Logo, N é um subespaço de $\mathcal{A}$.

■

Agora queremos dar uma estrutura de $\mathcal{B}$-módulo a $\mathcal{A}/N$, é natural pensarmos em definir a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathcal{A}/N \times \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{A}/N \\ (\overline{a}, b) & \longmapsto & \overline{a}b, \end{array}$$

onde $\overline{a}b := \overline{ab}$, mas para isto, precisamos verificar primeiramente que esta aplicação está bem definida. Note que para $b \in B$ e $\overline{a}, \overline{n} \in \mathcal{A}/N$ arbitrários, tais que $\overline{a} = \overline{n}$, temos que

$$E(((a-n)b)^*((a-n)b)) = E(b^*(a-n)^*(a-n)b) = b^*E((a-n)^*(a-n))b = 0.$$

Então,

$$\overline{(a-n)b} = \overline{0} \Rightarrow \overline{ab} - \overline{nb} = \overline{0} \Rightarrow \overline{ab} = \overline{nb}.$$

Sendo assim, $\mathcal{A}/N$ é um pré-Hilbert $\mathcal{B}$-módulo. Portanto, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : \mathcal{A}/N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overline{m} & \longmapsto & \|E(m^*m)\|^{1/2} \end{array}$$

define uma norma sobre $\mathcal{A}/N$. Seja $\mathcal{M}$ o completamento de $\mathcal{A}/N$ na norma definida acima. Note que, $\mathcal{M}$ é um $\mathcal{B}$-módulo à direita.

Defina a seguinte aplicação para todo $a \in \mathcal{A}$

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\kappa}_a : \mathcal{A}/N & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \overline{m} & \longmapsto & a\overline{m}, \end{array}$$

onde $a\overline{m} := \overline{am}$. Temos que mostrar que esta aplicação está bem definida, logo tome $\overline{m}, \overline{n} \in \mathcal{A}/N$ arbitrários, tais que $\overline{m} = \overline{n}$. Como $m^*\big(\|a\|^2 - a^*a\big)m \geq 0$,

$$\begin{aligned} E\big(m^*\big(\|a\|^2 - a^*a\big)m\big) \geq 0 &\Rightarrow E\big(m^*\|a\|^2 m - m^*a^*am\big) \geq 0 \\ &\Rightarrow \|a\|^2 E(m^*m) \geq E(m^*a^*am), \end{aligned}$$

logo $a\overline{m} = a\overline{n}$, pois

$$\overline{am} = \overline{an} \Leftrightarrow \overline{a(m-n)} = \overline{0} \Leftrightarrow E((a(m-n))^*(a(m-n))) = 0,$$

de fato, temos

$$E((a(m-n))^*(a(m-n))) = E((m-n)^*a^*a(m-n)) \leq \|a\|^2 E((m-n)^*(m-n)) = 0.$$

Portanto, a aplicação $\widetilde{\kappa}_a$ está bem definida. Agora, vamos mostrar que $\widetilde{\kappa}_a$ é contínua. Tome $\overline{m} \in \mathcal{A}/N$ arbitrário. Então, temos que

$$\|a\overline{m}\|^2 = \|\overline{am}\|^2 = \|E(m^*a^*am)\| \leq \|E(m^*m)\|\|a\|^2 = \|m\|^2\|a\|^2.$$

Então, $\|a\overline{m}\| \leq \|\overline{m}\|\|a\|$ o que implica que $\widetilde{\kappa}_a$ é limitada e como esta aplicação é claramente linear, ela pode ser estendida para $\mathcal{M}$. Seja κ_a a extensão de $\widetilde{\kappa}_a$. Agora só falta provarmos que κ_a é adjuntável para termos uma $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-correspondência.

Sejam $\overline{m}, \overline{n} \in \mathcal{A}/N$ e $a \in \mathcal{A}$ arbitrários; então,

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\kappa}_a(\overline{m}), \overline{n} \rangle = \langle \overline{am}, \overline{n} \rangle = \langle am, n \rangle = E(m^*a^*n) = \langle m, a^*n \rangle \\ = \langle \overline{m}, \overline{a^*n} \rangle = \langle \overline{m}, \widetilde{\kappa}_{a^*}(\overline{n}) \rangle.\end{aligned}$$

Logo, para $x, y \in \mathcal{M}$ arbitrários, sabemos que existem $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}/N$ seqüências, tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Portanto,

$$\begin{aligned}\langle \kappa_a(x), y \rangle &= \left\langle \kappa_a\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right), \lim_{m\to+\infty} y_n \right\rangle = \lim_{n,m\to+\infty} \langle \kappa_a(x_n), y_m \rangle \\ &= \lim_{n,m\to+\infty} \langle \widetilde{\kappa}_a(x_n), y_m \rangle = \lim_{n,m\to+\infty} \langle (x_n), \widetilde{\kappa}_{a^*}(y_m) \rangle \\ &= \left\langle \lim_{n\to+\infty} x_n, \lim_{m\to+\infty} \widetilde{\kappa}_{a^*}(y_m) \right\rangle = \langle x, \kappa_{a^*}(y) \rangle.\end{aligned}$$

Logo, $\kappa_a^* = \kappa_{a^*}$, donde segue que $\kappa_a \in \mathcal{L}(M)$, e portanto, $(\mathcal{M}, \kappa)$ é uma $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-correspondência.

Teorema 5.0.18. *Dada uma esperança condicional $E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ e uma representação $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, então podemos induzir uma representação de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Pela construção feita acima, dada uma esperança condicional construímos uma $\mathcal{A}$- $\mathcal{B}$-correspondência. Logo, a partir da representação $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e desta $\mathcal{A}$- $\mathcal{B}$-correspondência, pelo teorema 5.0.15 podemos induzir uma representação de $\mathcal{A}$, donde o resultado segue.

■

Segue do teorema B.2.21 que dado um produto cruzado parcial $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, existe uma esperança condicional $E : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{A}\delta_e$; logo, pela teoria desenvolvida neste capítulo, se tivermos uma representação de $\mathcal{A}\delta_e$, podemos induzi-la para o produto cruzado parcial. Para finalizar, iremos construir uma representação da C^*-álgebra universal gerada por duas isometrias compatíveis.

Relembrando, no capítulo anterior definimos $C^*(\mathscr{G},\mathscr{R})$ como sendo a C^*-álgebra universal gerada por duas isometrais compatíveis e vimos que

$$C^*(\mathscr{G},\mathscr{R}) \;\cong\; C(\Omega_R) \rtimes_{\overline{\alpha}} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}),$$

onde $\xi \in \Omega_R$ se, e somente se, $(0,0) \in \xi$ e para qualquer $(m,n) \in \xi$, se $(\widetilde{m},\widetilde{n}) \in G$ é tal que, $\widetilde{m} \leq m$ e $\widetilde{n} \leq n$, então $(\widetilde{m},\widetilde{n}) \in \xi$.

Seja μ uma medida positiva sobre Ω_R; então, temos uma representação canônica $\pi : C(\Omega_R) \longrightarrow \mathcal{B}(L_2(\Omega_R,\mu))$, onde para toda $f \in C(\Omega_R)$ e para toda $\varphi \in L_2(\Omega_R,\mu)$, $\pi(f)(\varphi) = f \cdot \varphi$, onde $\cdot$ denota o produto pontual.

Portanto, como $C(\Omega_R) \;\cong\; C(\Omega_R)\delta_e$ (ver observação B.2.20), temos pela teoria desenvolvida, que podemos induzir uma representação de $C(\Omega_R) \rtimes_{\overline{\alpha}} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$.

Apêndice A

C*-álgebra universal e envolvente

Dada uma C^*-álgebra $\mathcal{A}$ e $x \in \mathcal{A}$, faz todo o sentido pensarmos na sub-C^*-álgebra de $\mathcal{A}$, gerada pelo elemento x, por exemplo. Mas se tivermos apenas símbolos e quisermos atribuir a estes símbolos algumas relações em uma linguagem algébrica formal, será que existirá uma C^*-álgebra, onde estes símbolos passam a ser elementos e estas relações passam a ser de fato relações algébricas? Para responder a esta pergunta, precisaremos formalizar a noção de conjunto gerador e de relações, uma vez feito isso veremos que somente para alguns casos a resposta para esta pergunta será afirmativa. Quando a construção for possível iremos querer um pouco mais desta C^*-álgebra, iremos querer que ela satisfaça uma dada propriedade universal, que decididamente será muito útil na hora de construirmos homomorfismos.

A.1 C*-álgebra universal

Seja $\mathcal{G}$ um conjunto qualquer e $\mathcal{G}^* = \mathcal{G} \times \{1\}$, isto é, $\mathcal{G}^*$ é um conjunto que possui a mesma cardinalidade de G e é disjunto de $\mathcal{G}$. Dado um elemento arbitrário $(g, 1) \in \mathcal{G}^*$, o denotaremos simplesmente por g^*. Tome $\mathrm{F}_\mathcal{G}$ como sendo o conjunto formado por todas as seqüências finitas com entradas em $\mathcal{G} \cup \mathcal{G}^*$. Então, um elemento $x \in \mathrm{F}_\mathcal{G}$ arbitrário é uma seqüência de n elementos de $\mathcal{G} \cup \mathcal{G}^*$, para algum $n \in \mathbb{N}$; denotaremos este elemento por $r_1 \cdots r_n$, onde para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, $r_i \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^*$, e é a i-ésima entrada da seqüência x. Podemos interpretar $\mathrm{F}_\mathcal{G}$ como sendo o conjunto das "palavras" finitas escritas com as letras do "alfabeto" $\mathcal{G} \cup \mathcal{G}^*$; por isso, às vezes nos referiremos ao conjunto $\mathcal{G}$ como sendo o conjunto de geradores. Agora, em $\mathrm{F}_\mathcal{G}$ considere o produto dado pela concatenação de seqüências, isto é, para quaisquer $r_1 \cdots r_n,\ s_1 \cdots s_m \in \mathrm{F}_\mathcal{G}$,

$$r_1 \cdots r_n \cdot s_1 \cdots s_m := r_1 \cdots r_n s_1 \cdots s_m$$

e considere também a seqüência vazia, isto é, a seqüência que não possui nenhuma entrada, que denotaremos por e. Podemos também definir uma operação de involução de uma forma natural em $\mathrm{F}_{\mathcal{G}}$, para todo $r_1 \cdots r_n \in \mathrm{F}_{\mathcal{G}}$,

$$(r_1 \cdots r_n)^* := {r_n}^* \cdots {r_1}^*, \text{ onde } \forall i \in \{1, \cdots, n\}, {r_i}^* = \begin{cases} g, & \text{se } r_i = g^* \\ g^*, & \text{se } r_i = g \end{cases},$$

com $g \in \mathcal{G}$.

Defina agora o conjunto B, como sendo o conjunto das combinações lineares formais finitas com escalares complexos de elementos de $\mathrm{F}_{\mathcal{G}}$. Iremos considerar duas operações sobre este conjunto: a operação produto e a operação de involução, que serão as extensões lineares das funções produto e involução definidas acima em $\mathrm{F}_{\mathcal{G}}$. Claramente B, munido com estas duas operações, além das duas operações que naturalmente estão definidas pela sua construção, a soma e produto por escalar, possui uma estrutura de $*$-álgebra.

E o que seria uma relação? Futuramente, iremos considerar certas representações de $\mathcal{G}$ em uma $*$-álgebra normada e iremos querer que a imagem dos elementos de $\mathcal{G}$ satisfaçam relações como por exemplo, para um determinado $g \in \mathcal{G}$, queremos que a imagem dele por uma representação ρ seja auto-adjunta. Então, temos a seguinte equação:

$$\|\rho(g) - \rho(g)^*\| = 0.$$

Poderíamos então pensar em abreviar esta equação, traduzindo ela para um par $(g - g^*, 0)$. Esta foi uma tentativa de motivar a seguinte definição:

Definição A.1.1. Uma *relação* é um par $(x, \eta) \in B \times \mathbb{R}^+$.

Quando (x, η) é tal que $\eta \neq 0$, a relação quer nos dizer que a norma da imagem de x por uma determinada representação deverá ser menor ou igual ao número η. Por isso, toda vez que uma relação for algo do tipo $(x - y, 0)$, a denotaremos por $x = y$ e, quando for algo do tipo (x, η), a denotaremos por $\|x\| \leq \eta$.

Proposição A.1.2. *Sejam $\mathcal{G}$ um conjunto e $\mathcal{D}$ uma $*$-álgebra normada. Dada uma função $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{D}$ existe uma função $\widetilde{\rho} : B \longrightarrow \mathcal{D}$ que é a extensão linear de ρ para B.*

Demonstração. Defina a função $\widetilde{\rho} : B \longrightarrow \mathcal{D}$ da seguinte maneira:

1. para todo $g \in G$, $\widetilde{\rho}(g) = \rho(g)$;

2. para todo $g^* \in G^*$, $\widetilde{\rho}(g^*) = \rho(g)^*$;

3. para todo $r_1 \cdots r_n \in \mathrm{F}_{\mathcal{G}}$, $\widetilde{\rho}(r_1 \cdots r_n) = \widetilde{\rho}(r_1) \cdots \widetilde{\rho}(r_n)$;

4. para todo $x \in B$, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_x} \lambda_i x_i$, onde para todo $i \in \{1, \cdots, n_x\}$, $x_i \in F_{\mathcal{G}}$, $\widetilde{\rho}(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_x} \lambda_i \widetilde{\rho}(x_i)$.

Portanto, $\widetilde{\rho}$ é uma extensão linear de ρ para B.

$\blacksquare$

Definição A.1.3. Sejam $\mathcal{G}$ um conjunto de geradores, $\mathcal{R}$ um conjunto de relações, $\mathcal{D}$ uma $*$-álgebra normada e $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{D}$ uma função. Dizemos que ρ *é uma representação de* $\mathcal{G}$ *que satisfaz* $\mathcal{R}$ se, para quaisquer $(x, \eta) \in \mathcal{R}$,

$$\|\widetilde{\rho}(x)\| \leq \eta,$$

onde $\widetilde{\rho}$ é a extensão linear definida na proposição acima.

Sempre que nos referirmos a uma representação ρ de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ estamos querendo dizer que ρ é uma representação de $\mathcal{G}$ que satisfaz $\mathcal{R}$.

Uma vez bem definidos o conjunto de geradores e relações, dados $\mathcal{G}$ e $\mathcal{R}$ queremos construir uma C^*-álgebra $\mathcal{C}$ a partir deste conjunto de geradores e relações que tenha a seguinte propriedade universal: dada qualquer representação ρ de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, existe um único homomorfismo unital ψ de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que o diagrama abaixo comuta, onde ι é a representação canônica de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{C}$, isto é, a "inclusão natural" de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\
& \mathcal{C} \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Esta propriedade universal, de uma certa maneira, nos diz que esta C^*-álgebra que iremos construir, será a "maior" C^*-álgebra que contém o conjunto de geradores como elementos, satisfazendo as relações $\mathcal{R}$.

Definição A.1.4. Um par $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ é dito ser *admissível* se, para todo $x \in \mathcal{G}$, existe $c_x \in \mathbb{R}$ tal que, para toda representação ρ de $\mathcal{G}$ que satisfaz $\mathcal{R}$,

$$\|\widetilde{\rho}(x)\| \leq c_x.$$

O que determinará se podemos, ou não, construir uma C^*-álgebra a partir de um conjunto de geradores $\mathcal{G}$ com relações $\mathcal{R}$ será o fato do par $(\mathcal{G},\mathcal{R})$ ser admissível ou não.

Agora note que se $(\mathcal{G},\mathcal{R})$ é admissível, então para qualquer $x \in B$

$$\sup_{\rho \text{ rep. de } (\mathcal{G},\mathcal{R})} \|\widetilde{\rho}(x)\| < +\infty.$$

De fato, tome $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_x} \lambda_i x_i \in B$ arbitrário; então, temos que para todo $i \in \{1,\cdots,n_x\}$, $x_i = r_1^i \cdots r_{n_i}^i$, onde para todo $j \in \{1,\cdots,n_i\}$, $r_j^i \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^*$; além disso, tome ρ uma representação de $(\mathcal{G},\mathcal{R})$. Logo,

$$\|\widetilde{\rho}(x_i)\| = \big\|\widetilde{\rho}\big(r_1^i \cdots r_{n_i}^i\big)\big\| = \big\|\widetilde{\rho}\big(r_1^i\big) \cdots \widetilde{\rho}\big(r_{n_i}^i\big)\big\| \le \big\|\widetilde{\rho}\big(r_1^i\big)\big\| \cdots \big\|\widetilde{\rho}\big(r_{n_i}^i\big)\big\| \le c_{r_1^i} \cdots c_{r_{n_i}^i} =: c_{x_i}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\rho}(x)\| = \|\widetilde{\rho}(\sum_{i=1}^{n_x} \lambda_i x_i)\| = \|\sum_{i=1}^{n_x} \lambda_i \widetilde{\rho}(x_i)\| \le \sum_{i=1}^{n_x} \|\lambda_i \widetilde{\rho}(x_i)\| = \sum_{i=1}^{n_x} |\lambda_i| \|\widetilde{\rho}(x_i)\| \\ \le \sum_{i=1}^{n_x} |\lambda_i| c_{x_i} < +\infty,\end{aligned}$$

donde claramente segue que

$$\sup_{\rho \text{ rep. de } (\mathcal{G},\mathcal{R})} \|\widetilde{\rho}(x)\| < +\infty.$$

Exemplo A.1.5 (de um par $(\mathcal{G},\mathcal{R})$ que não é admissível)**.** *Considere* $\mathcal{G} = \{x\}$ *e* $\mathcal{R} = \{(x - x^*, 0)\}$.

Defina

$$\begin{aligned}\rho : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \lambda\end{aligned}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ *é tal que* $|\lambda| > 1$*. Note que estamos tomando* $\mathcal{H}$ *tal que* $\dim(\mathcal{H}) = 1$*, logo* $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathbb{C}$.

Como

$$\|\widetilde{\rho}(x - x^*)\| = \|\rho(x) - \rho(x)^*\| = |\lambda - \overline{\lambda}| = |\lambda - \lambda| = 0,$$

já que $\lambda \in \mathbb{R}$*,* ρ *é uma representação de* $(\mathcal{G},\mathcal{R})$ *. Agora, note que para cada* $n \in \mathbb{N}$

podemos construir

$$\begin{aligned} \rho_n : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \lambda^n \end{aligned}$$

que claramente também será uma representação de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ *. Vimos que se* $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ *é admissível então para qualquer* $x \in B$

$$\sup_{\rho \text{ rep. de } (\mathcal{G},\mathcal{R})} \|\widetilde{\rho}(x)\| < +\infty,$$

mas no nosso exemplo temos que

$$+\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda^n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\rho_n(x)\| \leq \sup_{\rho \text{ rep. de } (\mathcal{G},\mathcal{R})} \|\widetilde{\rho}(x)\|.$$

Portanto, $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ *não é admissível. Logo não é possível construir uma* C^**-álgebra universal (que será definido mais adiante) a partir simplesmente de um "elemento" auto-adjunto.*

No que segue sempre que nos referirmos a um par $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ ele será admissível, a menos que se mencione o contrário.

Temos por enquanto apenas uma $*$-álgebra, a saber B. Iremos agora caminhar na direção de "transformar" B em uma C^*-álgebra, mas para isso precisaremos primeiramente definir uma norma em B.

Defina o conjunto Δ como sendo o conjunto das representações de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (para todo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$) e a função $||| \cdot ||| : B \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que para todo $x \in B$ é dada por

$$||| \, x \, ||| = \sup_{\rho\in\Delta} \|\widetilde{\rho}(x)\|.$$

É imediata, usando apenas algumas propriedades de supremo, a verificação que esta função é uma C^*-semi-norma. Note que nada nos garante que

$$||| \, x \, ||| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Logo, como queremos construir uma C^*-norma, é natural pensarmos em tomar o quociente em B pelo núcleo da função $||| \cdot |||$. Para isto, basta definirmos $N = \{x \in B \mid ||| \, x \, ||| = 0\}$ e verificar que N é um ideal de B. De fato, se $n \in N$ segue que

$$\sup_{\rho\in\Delta} \|\widetilde{\rho}(n)\| = 0 \Rightarrow \forall \rho \text{ representação de } \mathcal{G} \text{ que satisfaz } \mathcal{R} \ \|\rho(n)\| = 0,$$

logo, para $x \in B$ e $n, m \in N$ arbitrários temos que

$$\begin{aligned} ||| \, xn \, ||| &= \sup_{\rho \in \Delta} \|\widetilde{\rho}(xn)\| = \sup_{\rho \in \Delta} \|\widetilde{\rho}(x)\widetilde{\rho}(n)\| \\ &\leq \sup_{\rho \in \Delta} \|\widetilde{\rho}(x)\|\|\widetilde{\rho}(n)\| = 0; \end{aligned}$$

de maneira análoga prova-se que $||| \, nx \, ||| = 0$ e, além disso,

$$\begin{aligned} ||| \, n + m \, ||| &= \sup_{\rho \in \Delta} \|\widetilde{\rho}(n+m)\| = \sup_{\rho \in \Delta} \|\widetilde{\rho}(n) + \widetilde{\rho}(m)\| \\ &\leq \sup_{\rho \in \Delta} \|\widetilde{\rho}(n)\| + \|\widetilde{\rho}(m)\| = 0. \end{aligned}$$

Portanto, N é um ideal bilateral de B.

Então, claramente temos que

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : B/N &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \overline{x} &\longmapsto ||| \, x \, ||| \end{aligned}$$

é uma norma em B/N.

Denotaremos por $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ o completamento de B/N na norma $\|\cdot\|$. Sendo assim, claramente $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ é uma C^*-álgebra e

$$\begin{aligned} \iota : \mathcal{G} &\longrightarrow C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R}) \\ g &\longmapsto \overline{g}, \end{aligned}$$

onde $\overline{g}$ denota a classe de equivalência do elemento g referente ao quociente pelo núcleo da tripla norma definida acima, é uma representação de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$. Agora basta verificarmos que $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ satisfaz a propriedade universal que esperávamos.

Teorema A.1.6. *Se ρ é uma representação de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$, então existe um único homomorfismo $\psi : C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ & C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R}) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Primeiramente vamos verificar que $\widetilde{\rho} : B \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se anula em N.

De fato, tome $x \in N$; então, por definição de N, temos que

$$0 = ||| \ x \ ||| = \sup_{\rho \in \Delta} \|\widetilde{\rho}(x)\| \geq \|\widetilde{\rho}(x)\|.$$

Logo, $\|\widetilde{\rho}(x)\| = 0$, donde segue que $\widetilde{\rho}(x) = 0$ e, desta forma, a seguinte aplicação fica bem definida:

$$\begin{aligned} \psi : B/N &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ \overline{x} &\longmapsto \widetilde{\rho}(x). \end{aligned}$$

Segue diretamente das propriedades de $\widetilde{\rho}$ que ψ é um homomorfismo. Além disso, para $\overline{x} \in B/N$ arbitrário, temos que

$$\|\psi(\overline{x})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|\widetilde{\rho}(x)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq ||| \ x \ |||_B = \|\overline{x}\|_{C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})}$$

e, portanto, ψ se estende para $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$, já que ψ é homomorfismo contrativo em B/N. Por fim, note que para $g \in \mathcal{G}$ arbitrário temos que

$$\psi(\iota(g)) = \psi(\overline{g}) = \rho(g).$$

Logo, o diagrama comuta.

• **Unicidade:** Suponha que exista $\varphi : C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $*$-homomorfismo tal que para todo $g \in \mathcal{G}$ $\varphi(\iota(g)) = \rho(g)$. Então temos que para $g \in \mathcal{G}$ arbitrário,

$$\varphi(\iota(g)) = \rho(g) = \psi(\iota(g)) \Rightarrow \varphi = \psi,$$

já que $\mathcal{G}$ gera $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$, donde o resultado segue.

■

Observação A.1.7. Quando nos referimos a representação canônica, no sentido de inclusão natural de $\mathcal{G}$ em $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$, a rigor estamos falando da projeção canônica de $\mathcal{G}$ em $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$, que pode não ser injetora mas, por uma questão de motivação, manteremos a notação de inclusão, apenas neste caso, para a projeção canônica.

Definição A.1.8. A C^*-*álgebra universal* gerada por $\mathcal{G}$ com as relações $\mathcal{R}$, é o completamento de B/N da norma $\|\cdot\|$, que denotaremos por $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$.

Note que, tivemos que tomar o completamento em B/N por segurança, pois nada nos indica que esse quociente será completo ou não.

No decorrer deste trabalho o leitor perceberá que a propriedade universal de C^*-álgebras universais nos será muito útil, mas em muitos casos estaremos usando uma versão um pouco modificada desta propriedade, em vez de termos uma representação de um conjunto de geradores em uma álgebra de operadores lineares limitados, teremos representações do conjunto de geradores em uma C^*-álgebra. É comum "confundirmos" C^*-álgebras com álgebra de operadores lineares e limitados, mas a rigor se faz necessária uma demonstração de que a propriedade universal ainda é válida neste caso, ou seja, queremos mostrar que dada uma C^*-álgebra $\mathcal{A}$ e qualquer $\Psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{A}$ representação de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ existe um único homomorfismo $\Phi : C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \mathcal{A} \\
& C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R}) \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que dada qualquer C^*-álgebra $\mathcal{A}$, existe um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, tal que existe $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ representação isométrica. Note que $\pi \circ \Psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma representação de $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$, pois para qualquer $(x, \eta) \in \mathcal{R}$

$$\left\| \pi \circ \widetilde{\Psi}(x) \right\| = \left\| \pi(\widetilde{\Psi}(x)) \right\| = \left\| \widetilde{\Psi}(x) \right\| \leq \eta,$$

e os axiomas que $\pi \circ \widetilde{\Psi}$ é uma extensão linear de $\pi \circ \Psi$ seguem diretamente do fato que π é um homomorfismo.

Então podemos aplicar a propriedade universal de $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ para a representação $\pi \circ \Psi$, logo existe um único $\varphi : C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ homomorfismo tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\iota"'] & \mathcal{A} \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\
& C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R}) \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

O homomorfismo $\Phi : C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{A}$ que procurávamos será $\pi^{-1} \circ \varphi$, já que $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \pi(\mathcal{A})$ e π restrito a sua imagem é um isomorfismo. Logo, basta verificarmos que $\pi^{-1} \circ \varphi$ faz o diagrama comutar e é único.

- **Comutatividade do diagrama:** Segue diretamente do fato que

$$\pi \circ \Psi = \varphi \circ \iota \Rightarrow \Psi = (\pi^{-1} \circ \varphi) \circ \iota.$$

• **Unicidade:** Suponha que exista $\zeta : C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{A}$ homomorfismo tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \mathcal{A} \\
& C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \arrow[ur, "\zeta"'] &
\end{tikzcd}$$

Então teremos que

$$\begin{aligned}
\pi \circ \Psi = \varphi \circ \iota &\Rightarrow \pi \circ (\zeta \circ \iota) = \pi \circ \Psi = \varphi \circ \iota \\
&\Rightarrow (\pi \circ \zeta) \circ \iota = \pi \circ \Psi = \varphi \circ \iota \\
&\Rightarrow \pi \circ \zeta = \varphi \text{ (pela unicidade de } \varphi) \\
&\Rightarrow \zeta = \pi^{-1} \circ \varphi = \Phi.
\end{aligned}$$

Portanto Φ é único.

Uma vez construída a C^*-álgebra universal, dado um par $(\mathcal{G},\mathcal{R})$, podemos nos perguntar, se existe um outro par $(\mathcal{U},\zeta)$, onde U é uma C^*-álgebra e $\zeta : \mathcal{G} \longrightarrow U$ é uma representação de $(\mathcal{G},\mathcal{R})$, tal que esse par satisfaz a propriedade universal de C^*-álgebra universal, no sentido que, dada uma outra representação de $(\mathcal{G},\mathcal{R})$, $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{A}$ onde $\mathcal{A}$ é uma C^*-álgebra, existe um único homomorfimo φ, tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\zeta"'] & & \mathcal{A} \\
& \mathcal{U} \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Veremos que se $(\mathcal{U},\zeta)$ satisfaz a propriedade universal de C^*-álgebra universal, então $\mathcal{U}$ e $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ são isomorfas.

Teorema A.1.9. *Dado o par* $(\mathcal{G},\mathcal{R})$ *, se* $(\mathcal{U},\zeta)$ *é como definido acima, então* $\mathcal{U} \cong C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ *.*

Demonstração. Note que, pela propriedade universal de $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$, existe um único homomorfismo ψ, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[rr, "\zeta"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \mathcal{U} \\
& C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta e pela propriedade que o par $(\mathcal{U},\zeta)$ satisfaz, temos que existe um único homomorfimo φ, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\zeta"'] & & C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \\ & \mathcal{U} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, já que, ι é uma representação de $(\mathcal{G},\mathcal{R})$, como mencionado anteriormente.

Agora, observe que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "\zeta"] \arrow[dr, "\zeta"'] & & \mathcal{U} \\ & \mathcal{U} \arrow[ur, "\psi\circ\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

também comuta, pois $\psi \circ \varphi \circ \zeta = \psi \circ \iota = \zeta$, mas como a aplicação id_U também faz o diagrama acima comutar, segue da propriedade que o par $(\mathcal{U},\zeta)$ satisfaz, que $\psi \circ \varphi = id_U$.

Por outro lado, temos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & & C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \\ & C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \arrow[ur, "\varphi\circ\psi"'] & \end{tikzcd}$$

também comuta, mas como a aplicação $id_{C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})}$ também faz o diagrama acima comutar, segue da propriedade universal que $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ satisfaz, que $\varphi \circ \psi = id_{C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})}$, e portanto, $\mathcal{U}$ e $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ são isomorfas.

∎

Exemplo A.1.10. *Sejam* $\mathcal{G} = \{u\}$ *e* $\mathcal{R} = \{u^*u = uu^*, uu^* = 1\}$.

Será que existe $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ *? Em outras palavras, será que existe a* C^**-álgebra universal gerada por um unitário e pela identidade? Para respondermos a esta pergunta precisamos verificar se o conjunto de relações é admissível.*

Seja $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *uma representação não nula de* $(\mathcal{G},\mathcal{R})$ *arbitrária. Note que,*

$$\|\rho(u)\|^2 = \|\rho(u)\rho(u)^*\| = \|\rho(1)\| = 1,$$

já que $\rho(1)$ *é uma projeção não nula, em virtude das relações. Portanto,* $\|\rho(u)\| = 1$*. Logo para qualquer* $g \in \mathcal{G}$ *, existe* $c_g \in \mathbb{R}^+$*, a saber* $c_g = 1$*, tal que para toda representação* ρ *de* $(\mathcal{G},\mathcal{R})$ *temos* $\|\rho(g)\| \leq 1$*, donde segue que o conjunto de relações é admissível e, portanto, existe* $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ *.*

Agora vamos tentar caracterizar de uma maneira um pouco mais concreta esta C^*-álgebra. Como $\overline{u} \in C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$, faz sentido nos perguntarmos quem seria o espectro deste elemento, que denotaremos por $\sigma(\overline{u})$. Como $\overline{u}$ é um elemento unitário da $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ sabemos que $\sigma(\overline{u}) \subseteq \mathbb{S}^1$ (ver proposição 3.3.11 em [15]). Mostraremos que $\sigma(\overline{u}) = \mathbb{S}^1$.

Tome $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert tal que $\dim \mathcal{H} = 1$, logo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$=$\mathbb{C}$. Defina para um $\lambda \in \mathbb{S}^1$ arbitrário a seguinte função:

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

Claramente ρ é uma representação de $(\mathcal{G},\mathcal{R})$. Logo, pela propriedade universal de $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ existe único homomorfismo $\psi_\lambda : C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \mathbb{C} \\ & C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \arrow[ur, "\psi_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

Portanto, $\psi_\lambda(\overline{u}) = \lambda$. Note que

$$\psi_\lambda(\overline{u}) = \lambda \Rightarrow \psi(\overline{u - \lambda 1}) = 0.$$

Para mostrar que $\sigma(\overline{u}) = \mathbb{S}^1$, mostraremos que $\overline{u - \lambda 1}$ não é inversível, e como $\lambda \in \mathbb{S}^1$ foi tomado arbitrariamente, teremos que $\mathbb{S}^1 \subseteq \sigma(\overline{u})$.

Tome $\overline{x} \in C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ qualquer, então

$$\psi_\lambda(\overline{x(u - \lambda 1)}) = \psi_\lambda(\overline{x})\psi_\lambda(\overline{u - \lambda 1}) = 0,$$

logo não existe $x \in C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ tal que $\psi_\lambda(\overline{x})\psi_\lambda(\overline{u - \lambda 1}) = 1$; sendo assim, $\overline{u - \lambda 1}$ não é inversível e, portanto, $\sigma(\overline{u}) = \mathbb{S}^1$.

Pelo teorema 3.4.15 em [15] sabemos que existe uma representação isométrica π de $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$ em algum $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, então temos que

$$C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \cong \pi(C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})) = C^*(\pi(\overline{u})),$$

e como $C^*(\pi(\overline{u}))$ é uma C^*-álgebra comutativa temos que $C^*(\pi(\overline{u})) \cong C(\sigma(\pi(\overline{u})))$ (ver proposição 3.3.10 em [15]), mas π é uma representação isométrica, logo preserva *espectro, então* $C(\sigma(\pi(\overline{u}))) = C(\sigma(\overline{u})) = C(\mathbb{S}^1)$*, donde segue que*

$$C^*(\mathcal{G},\mathcal{R}) \cong C(\mathbb{S}^1),$$

ou seja, a C^**-álgebra universal gerada por um elemento unitário é a* C^**-álgebra das funções contínuas do círculo unitário em* $\mathbb{C}$*.*

A.2 C*-álgebra envolvente

Agora vamos estudar um caso particular de C^*-álgebra universal, que também será de grande relevância ao longo do nosso trabalho. Ao invés de começarmos com um simples conjunto de símbolos como conjunto de geradores, começaremos com uma $*$-álgebra normada, sendo assim o conjunto de geradores seria o conjunto de todos os elementos da álgebra e, as relações seriam as relações algébricas da própria álgebra, devidamente traduzidas para a nossa definição de relação. Será que é possível fazermos a C^*-álgebra universal deste conjunto de geradores com estas relações? Nada nos garante que este par será admissível, na verdade para ser, precisaremos impor mais uma relação.

Seja $\mathcal{A}$ uma $*$-álgebra normada qualquer. Considere $\mathcal{G} = \mathcal{A} \times \{1\}$, isto é, $\mathcal{G}$ é um conjunto que possui a mesma cardinalidade de $\mathcal{A}$ e é disjunto de $\mathcal{A}$. Dado um elemento arbitrário $(a,1) \in \mathcal{G}$, o denotaremos simplesmente por $[a]$. Considere também o seguinte conjunto de relações:

$$\mathcal{R} = \{[a]^* = [a^*], [a][b] = [ab], \alpha[a] + [b] = [\alpha a + b], \|[a]\| \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \mid a, b \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Vamos verificar que $(\mathcal{G},\mathcal{R})$ é admissível. De fato, seja $[a] \in \mathcal{G}$ arbitrário, pela última relação temos que para qualquer ρ representação de $(\mathcal{G},\mathcal{R})$

$$\|\widetilde{\rho}([a])\| \leq \|a\|_{\mathcal{A}}.$$

Logo, $c_{[a]} = \|a\|_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^+$, donde segue que $(\mathcal{G},\mathcal{R})$ é admissível e, sendo assim existe $C^*(\mathcal{G},\mathcal{R})$.

Agora note que dada qualquer ρ representação de $(\mathcal{G},\mathcal{R})$, ρ será uma representação contrativa de $\mathcal{A}$, com as devidas identificações. Portanto temos que para qualquer

$x \in B$

$$\begin{aligned} |||\, x \,||| &= \sup_{\rho \text{ rep. de } (\mathcal{G},\mathcal{R})} \|\widetilde{\rho}(x)\| \\ &= \sup_{\substack{\pi:\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ \text{rep. contrativa}}} \|\pi(x)\|. \end{aligned}$$

Definição A.2.1. A *C^*-álgebra envolvente de* $\mathcal{A}$ é o completamento de B/N na norma $\|\cdot\|$, que denotaremos por $C^*_e(\mathcal{A})$.

Logo este objeto satisfaz a seguinte propriedade universal: para qualquer $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ representação contrativa (para qualquer espaço de Hilbert $\mathcal{H}$) existe único $\xi : C^*_e(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ homomorfismo tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ & C^*_e(\mathcal{A}) \arrow[ur, "\xi"'] & \end{tikzcd}$$

Apêndice B

C*-módulos de Hilbert e Fibrados de Fell

No capítulo 3 definimos o produto cruzado parcial de uma C^*-álgebra $\mathcal{A}$ por um grupo G, como sendo a C^*-álgebra envolvente de $B = \left\{\sum_{finita} a_g\delta_g \mid g \in G,\ a_g \in D_g\right\}$, isto é, o completamento de B/N, onde

$$N = \{x \in B \mid |||\, x \,||| = \sup_{\substack{\pi:B\longrightarrow\mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ \text{rep. contrativa}}} \|\pi(x)\| = 0\},$$

na norma $\|\cdot\|$ que é definida para todo $x \in B$ da seguinte maneira:

$$\|\overline{x}\| = \sup_{\substack{\pi:B\longrightarrow\mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ \text{rep. contrativa}}} \|\pi(x)\|.$$

Porém, neste caso, N será nulo. Para demonstrar este fato bastaria, por exemplo, exibir uma representação contrativa de B que fosse injetiva. No entanto, este resultado é válido em uma categoria mais geral, na categoria dos fibrados de Fell. O resultado que iremos demonstrar, será que toda álgebra seccional de um fibrado de Fell admite um homomorfismo injetor e, como veremos, o produto cruzado parcial é uma C^*-álgebra seccional de um fibrado de Fell, de onde seguirá portanto que $N = 0$. Para demonstrar este fato, será preciso usar conceitos e resultados básicos da teoria de C^*-módulos de Hilbert, por isso começaremos este apêndice com estes conceitos e resultados básicos, para depois introduzir também alguns conceitos e resultados básicos da teoria de fibrados de Fell e, finalmente, com as ferramentas necessárias desenvolvidas, iremos demonstrar o teorema. Mais sobre a teoria de C^*-módulos de Hilbert pode ser encontrada em [9] e sobre a teoria de Fibrados de Fell em [6] e [7].

B.1 C*-módulos de Hilbert

Em álgebra temos o conceito de um $\mathcal{A}$-módulo à direita, isto é, um grupo abeliano que possui uma lei de composição externa sobre o anel $\mathcal{A}$, que satisfaz alguns axiomas (para mais detalhes ver definição II.1.1 em [13]). Em análise temos a definição de um espaço de Hilbert, isto é, um espaço vetorial, com um produto interno definido, que é completo na norma induzida por este produto interno (para mais detalhes ver definição 2.1.1 em [15]). A definição de um C^*-módulo de Hilbert será uma definição que englobará, de uma certa forma, estes dois conceitos, como veremos a seguir.

Definição B.1.1. Um *pré-Hilbert $\mathcal{A}$-módulo* é um espaço vetorial complexo $\mathcal{M}$, que também é um $\mathcal{A}$-módulo à direita, equipado com uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}$, que é $\mathbb{C}$-linear na segunda variável e que satisfaz as seguintes relações para quaisquer $m, n \in \mathcal{M}$ e $a \in \mathcal{A}$:

(i) $\langle m, na \rangle = \langle m, n \rangle a$;

(ii) $\langle m, n \rangle^* = \langle n, m \rangle$;

(iii) $\langle m, m \rangle \geq 0$;

(iv) $\langle m, m \rangle = 0 \Rightarrow m = 0$

Note que se $m = 0_{\mathcal{M}}$, então $\langle m, m \rangle = 0_{\mathcal{A}}$, pois

$$\langle m, m \rangle = \langle 0_{\mathcal{M}}, 0_{\mathcal{M}} \rangle = \langle 0_{\mathcal{M}}, 0_{\mathcal{M}} \cdot 0_{\mathcal{A}} \rangle = \langle 0_{\mathcal{M}}, 0_{\mathcal{M}} \rangle 0_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{A}}.$$

Portanto, $\langle m, m \rangle = 0$ se, e somente se, $m = 0$.

Observação B.1.2. Em geral ficará subentendido pelo contexto qual zero estamos nos referindo, se o da álgebra, ou o do espaço vetorial; somente em alguns casos iremos salientar explicitamente fazendo o uso de índices.

É implicitamente assumido na definição acima que a estrutura de grupo abeliano $(+)$ de $\mathcal{M}$, vinda da estrutura de $\mathcal{A}$-módulo, é a mesma que a estrutura aditiva de espaço vetorial.

Como temos muita estrutura em $\mathcal{M}$, é preciso mostrar algumas compatibilidades mas, antes, vamos demonstrar um pequeno lema que será usado em diversas demonstrações deste apêndice.

Lema B.1.3. *Seja $\mathcal{M}$ um pré-Hilbert $\mathcal{A}$-módulo. Se $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ são tais que para todo $n \in \mathcal{M}$,*

$$\langle n, m_1 \rangle = \langle n, m_2 \rangle,$$

então $m_1 = m_2$.

Demonstração. Basta tomar $n = m_1 - m_2$ e desta forma obtemos

$$\langle m_1 - m_2, m_1\rangle = \langle m_1 - m_2, m_2\rangle \Rightarrow \langle m_1 - m_2, m_1 - m_2\rangle = 0 \Rightarrow m_1 = m_2.$$

■

Proposição B.1.4. *A multiplicação por escalar e a estrutura de $\mathcal{A}$ -módulo à direita de um pré-Hilbert $\mathcal{A}$ -módulo $\mathcal{M}$ são compatíveis, no sentido que para quaisquer $\lambda \in \mathbb{C}, a \in \mathcal{A}$ e $m \in \mathcal{M}$*

$$(\lambda m)a = \lambda(ma) = m(\lambda a).$$

Demonstração. Sejam $\lambda \in \mathbb{C}, a \in \mathcal{A}$ e $m \in \mathcal{M}$ arbitrários. Tome $n \in \mathcal{M}$ arbitrário. Note que

$$\begin{aligned}\langle n, (\lambda m)a\rangle = \langle n, \lambda m\rangle a = (\lambda\langle n, m\rangle)a = \lambda(\langle n, m\rangle a)\\ = \lambda\langle n, ma\rangle = \langle n, \lambda(ma)\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, pelo lema 5.0.10 segue que $(\lambda m)a = \lambda(ma)$.

Além disso, note que

$$\langle n, \lambda(ma)\rangle = \lambda\langle n, ma\rangle = \lambda(\langle n, m\rangle a) = \langle n, m\rangle\lambda a = \langle n, m(\lambda a)\rangle$$

e, portanto, novamente pelo lema 5.0.10 segue que $(\lambda m)a = \lambda(ma) = m(\lambda a)$.

■

Exemplo B.1.5. *Seja $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra com unidade, $k \in \mathbb{N}^*$ e $\mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{A}$. Defina*

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{A}\\ (a,b) &\longmapsto \sum_{i=1}^k a_i^* b_i.\end{aligned}$$

Claramente, $\mathcal{M}$ é um pré-Hilbert $\mathcal{A}$ -módulo.

Já que temos um "produto interno" definido em $\mathcal{M}$, é natural pensar em definir uma norma induzida por este "produto interno" da forma canônica; no entanto, uma pequena modificação é necessária, já que a aplicação $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tem como contradomínio uma C^*-álgebra e não um corpo.

Lema B.1.6. *Seja $\mathcal{M}$ um pré-Hilbert $\mathcal{A}$ -módulo. Defina*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ m &\longmapsto \|\langle m, m\rangle\|_{\mathcal{A}}^{1/2}. \end{aligned}$$

Então, $\mathcal{M}$ é um espaço vetorial normado, e as seguintes desigualdades são válidas para quaisquer $a \in \mathcal{A}$ e $m, n \in \mathcal{M}$:

$$\|ma\| \leq \|m\|\|a\|_{\mathcal{A}}\,; \tag{B.1}$$

$$\|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}} \leq \|m\|\|n\|. \tag{B.2}$$

Demonstração. Nós provaremos a última inequação primeiro. Sejam $m, n \in \mathcal{M}$ arbitrários. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}} \neq 0$, pois caso contrário as desigualdades acima são obviamente satisfeitas.

Observe que $\langle m, n\rangle\langle m, n\rangle^*$ é um elemento normal não nulo, logo (pelo teorema 3.3.6 em [14]) existe ϕ um estado de $\mathcal{A}$ tal que

$$|\phi(\langle m, n\rangle\langle m, n\rangle^*)| = \|\langle m, n\rangle\langle m, n\rangle^*\|_{\mathcal{A}} = \|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}^2\,,$$

e como $\langle m, n\rangle\langle m, n\rangle^*$ é um elemento positivo,

$$|\phi(\langle m, n\rangle\langle m, n\rangle^*)| = \phi(\langle m, n\rangle\langle m, n\rangle^*).$$

Portanto,

$$\phi(\langle m, n\rangle\langle m, n\rangle^*) = \|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}^2\,.$$

Agora tome $a = \dfrac{\langle m, n\rangle^*}{\|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}} \in \mathcal{A}$, e note que

$$\begin{aligned} \phi(\langle m, n\rangle a) &= \phi\left(\langle m, n\rangle \frac{\langle m, n\rangle^*}{\|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}}\right) = \frac{1}{\|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}}\phi(\langle m, n\rangle\langle m, n\rangle^*) \\ &= \frac{1}{\|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}}\|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}^2 = \|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\phi(\langle m, n\rangle\langle m, n\rangle^*) = \|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}^2 = (\phi(\langle m, n\rangle a))^2. \tag{B.3}$$

Note que $\phi \circ \langle\cdot,\cdot\rangle$ é uma claramente uma forma sesquilinear positiva semidefinida, portanto podemos fazer uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver observação 2.1.5

(1) em [15]); logo,

$$|\phi(\langle m, na\rangle)|^{2} \leq \phi(\langle m, m\rangle)\phi(\langle na, na\rangle).$$

Mas como $\langle m, na\rangle$ é um elemento positivo, pois

$$\langle m, na\rangle = \langle m, n\rangle a = \langle m, n\rangle \frac{\langle m, n\rangle^*}{\|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}},$$

e ϕ é um estado, temos que $|\phi(\langle m, na\rangle)| = \phi(\langle m, na\rangle)$. Logo,

$$(\phi(\langle m, na\rangle))^2 = |\phi(\langle m, na\rangle)|^{2} \leq \phi(\langle m, m\rangle)\phi(\langle na, na\rangle).$$

Portanto, voltando na equação B.3 obtemos

$$\begin{aligned} \|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}^2 &= (\phi(\langle m, na\rangle))^2 \\ &\leq \phi(\langle m, m\rangle)\phi(\langle na, na\rangle) \\ &= \phi(\langle m, m\rangle)\phi(a^*\langle n, n\rangle a). \end{aligned} \tag{B.4}$$

Agora, como $a^*\langle n, n\rangle a$ é um elemento positivo e ϕ é um estado, segue-se que

$$\begin{aligned} \phi(a^*\langle n, n\rangle a) = |\phi(a^*\langle n, n\rangle a)| &\leq \|\phi\| \|a^*\langle n, n\rangle a\|_{\mathcal{A}} \\ &= \|a^*\langle n, n\rangle a\|_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Por argumentação análoga, temos que $\phi(\langle m, m\rangle) \leq \|\langle m, m\rangle\|_{\mathcal{A}}$. Voltando na equação B.4 temos que

$$\begin{aligned} \|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}^2 &= \phi(\langle m, m\rangle)\phi(a^*\langle n, n\rangle a) \leq \|\langle m, m\rangle\|_{\mathcal{A}} \|a^*\langle n, n\rangle a\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \|\langle m, m\rangle\|_{\mathcal{A}} \|a^*\|_{\mathcal{A}} \|\langle n, n\rangle\|_{\mathcal{A}} \|a\|_{\mathcal{A}} \\ &= \|\langle m, m\rangle\|_{\mathcal{A}} \|a\|_{\mathcal{A}}^2 \|\langle n, n\rangle\|_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Mas, note que

$$\begin{aligned} \|a\|_{\mathcal{A}}^2 &= \left\| \frac{\langle m, n\rangle^*}{\|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}} \right\|_{\mathcal{A}}^2 = \frac{1}{\|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}^2} \|\langle m, n\rangle^*\|_{\mathcal{A}}^2 \\ &= \frac{1}{\|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}^2} \|\langle m, n\rangle\|_{\mathcal{A}}^2 = 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|\langle m,n\rangle\|_{\mathcal{A}}^2 &\leq \|\langle m,m\rangle\|_{\mathcal{A}}\,\|a\|_{\mathcal{A}}^2\,\|\langle n,n\rangle\|_{\mathcal{A}} \\ &= \|\langle m,m\rangle\|_{\mathcal{A}}\,\|\langle n,n\rangle\|_{\mathcal{A}} \\ &= \|m\|^2\|n\|^2,\end{aligned}$$

donde segue-se que $\|\langle m,n\rangle\|_{\mathcal{A}} \leq \|m\|\|n\|$.

Para provar B.1 simplesmente note que

$$\begin{aligned}\|ma\|^2 &= \|\langle ma,ma\rangle\|_{\mathcal{A}} = \|a^*\langle m,m\rangle a\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \|a^*\|_{\mathcal{A}}\,\|\langle m,m\rangle\|_{\mathcal{A}}\,\|a\|_{\mathcal{A}} = \|a\|_{\mathcal{A}}^2\,\|\langle m,m\rangle\|_{\mathcal{A}} \\ &= \|a\|_{\mathcal{A}}^2\,\|m\|^2,\end{aligned}$$

e portanto $\|ma\| \leq \|m\|\|a\|_{\mathcal{A}}$.

Agora, só falta verificarmos que $\|\cdot\|$ satisfaz os axiomas de norma. Sejam $m,n \in \mathcal{M}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrários; então,

(i) $\|m\| = 0 \Leftrightarrow \|\langle m,m\rangle\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = 0 \Leftrightarrow \|\langle m,m\rangle\|_{\mathcal{A}} = 0 \Leftrightarrow \langle m,m\rangle = 0 \Leftrightarrow m = 0$;

(ii)
$$\begin{aligned}\|\lambda m\| &= \|\langle \lambda m,\lambda m\rangle\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = \left\|\overline{\lambda}\lambda\langle m,m\rangle\right\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = \left\||\lambda|^{\,2}\langle m,m\rangle\right\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \\ &= \left(|\lambda|^{\,2}\|\langle m,m\rangle\|_{\mathcal{A}}\right)^{1/2} = |\lambda|\;\|\langle m,m\rangle\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = |\lambda|\;\|m\|;\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}\|m+n\|^2 &= \|\langle m+n,m+n\rangle\|_{\mathcal{A}} \\ &= \|\langle m,m\rangle + \langle n,m\rangle + \langle m,n\rangle + \langle n,n\rangle\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \|\langle m,m\rangle\|_{\mathcal{A}} + \|\langle n,m\rangle\|_{\mathcal{A}} + \|\langle m,n\rangle\|_{\mathcal{A}} + \|\langle n,n\rangle\|_{\mathcal{A}} \\ &= \|m\|^2 + \|\langle n,m\rangle^*\|_{\mathcal{A}} + \|\langle m,n\rangle\|_{\mathcal{A}} + \|n\|^2 \\ &= \|m\|^2 + 2\|\langle m,n\rangle\|_{\mathcal{A}} + \|n\|^2 \\ &\leq \|m\|^2 + 2\|m\|\|n\| + \|n\|^2 \\ &= (\|m\| + \|n\|)^2\end{aligned}$$

Logo, $\|m+n\| \leq \|m\| + \|n\|$.

Portanto $\mathcal{M}$ é um espaço vetorial normado.

■

Observação B.1.7. As desigualdades B.1 e B.2 no lema acima ainda são válidas se retirarmos o axioma (iv) da definição B.1.1, já que nas suas demonstrações este axioma não foi necessário. No decorrer do trabalho, surgirá a necessidade de usar estas duas desigualdades sem termos o axioma (iv).

Definição B.1.8. Um *Hilbert $\mathcal{A}$-módulo* é um pré-Hilbert $\mathcal{A}$-módulo que é completo na norma definida acima.

Observe que as inequações obtidas no lema B.1.6 nos asseguram que o "produto interno" do pré-Hilbert $\mathcal{A}$-módulo $\mathcal{M}$, bem como a estrutura de $\mathcal{A}$-módulo à direita, podem ser estendidas por continuidade para o completamento de $\mathcal{M}$, fazendo com que o completamento tenha uma estrutura de Hilbert $\mathcal{A}$-módulo. Deste modo, o completamento de um pré-Hilbert $\mathcal{A}$-módulo é um Hilbert $\mathcal{A}$-módulo.

Exemplo B.1.9. *$\mathcal{A}$ é um Hilbert $\mathcal{A}$-módulo sobre ela mesma. O "produto interno" é definido da seguinte maneira: para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$ $\langle a, b\rangle = a^*b$. Observe que as duas normas definidas em $\mathcal{A}$ são equivalentes, já que para qualquer $a \in \mathcal{A}$ temos que*

$$\|a\| = \|\langle a, a\rangle\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = \|a^*a\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = \|a\|_{\mathcal{A}}.$$

Claramente todo ideal à direita fechado de $\mathcal{A}$ é também um Hilbert $\mathcal{A}$-módulo com este "produto interno".

Exemplo B.1.10. *Seja $\mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathcal{A}$, ou seja, $\mathcal{M}$ é o conjunto das seqüências que são nulas exceto para uma quantidade finita de índices, cujas entradas estão em $\mathcal{A}$. Defina para quaisquer $(a_1, a_2, \cdots), (b_1, b_2, \cdots) \in \mathcal{M}$*

$$\langle (a_1, a_2, \cdots), (b_1, b_2, \cdots)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n.$$

Então, $\mathcal{M}$ é um pré-Hilbert $\mathcal{A}$-módulo, e o Hilbert $\mathcal{A}$-módulo que nós obtemos, através do completamento, nós denotaremos por $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Note que se $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, então $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \ell_2(\mathbb{N})$.

Daqui em diante, sejam $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ Hilbert $\mathcal{A}$-módulos.

Definição B.1.11. Seja $T : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ uma função. Dizemos que T é *adjuntável* se existe $V : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_1$ tal que, para quaisquer $x \in \mathcal{M}_1$ e $y \in \mathcal{M}_2$,

$$\langle T(x), y\rangle_{\mathcal{M}_2} = \langle x, V(y)\rangle_{\mathcal{M}_1}.$$

As próximas três proposições serão sobre as propriedades que um operador adjuntável satisfaz. Veremos que se T é um operador adjuntável então V será único, e ambos serão $\mathbb{C}$-$\mathcal{A}$-lineares e contínuos.

Proposição B.1.12. *Se $T : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ é adjuntável, então V é único.*

Demonstração. Suponha que existe $W : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_1$ tal que, para quaisquer $x \in \mathcal{M}_1$ e $y \in \mathcal{M}_2$,

$$\langle T(x), y \rangle_{\mathcal{M}_2} = \langle x, W(y) \rangle_{\mathcal{M}_1}.$$

Logo, para $x \in \mathcal{M}_1$ e $y \in \mathcal{M}_2$ arbitrários, obtemos que

$$\langle x, V(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle = \langle x, W(y) \rangle.$$

Portanto, pelo lema 5.0.10 segue que $V(y) = W(y)$ e, como y foi tomado arbitrariamente, segue que $W = V$.

Logo, se T é adjuntável, então V é único.

■

Se $T : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ é adjuntável, então denotaremos por T^* o operador que, para quaisquer $x \in \mathcal{M}_1$ e $y \in \mathcal{M}_2$, satisfaz

$$\langle T(x), y \rangle_{\mathcal{M}_2} = \langle x, T^*(y) \rangle_{\mathcal{M}_1}.$$

Além disso, T^* é denominado o *adjunto* de T.

Proposição B.1.13. *Se $T : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ é adjuntável, então T e T^* são $\mathbb{C}$-$\mathcal{A}$-lineares.*

Demonstração. Sejam $x, x_1, x_2 \in \mathcal{M}_1$, $y \in \mathcal{M}_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathcal{A}$ arbitrários. Então temos que

$$\begin{aligned}\langle T(\lambda x_1 + x_2), y \rangle &= \langle \lambda x_1 + x_2, T^*(y) \rangle = \langle \lambda x_1, T^*(y) \rangle + \langle x_2, T^*(y) \rangle \\ &= \overline{\lambda} \langle x_1, T^*(y) \rangle + \langle x_2, T^*(y) \rangle = \overline{\lambda} \langle T(x_1), y \rangle + \langle T(x_2), y \rangle \\ &= \langle \lambda T(x_1), y \rangle + \langle T(x_2), y \rangle = \langle \lambda T(x_1) + T(x_2), y \rangle.\end{aligned}$$

Logo, pelo lema 5.0.10 temos que

$$T(\lambda x_1 + x_2) = \lambda T(x_1) + T(x_2).$$

Também temos que

$$\begin{aligned}\langle T(xa), y \rangle &= \langle xa, T^*(y) \rangle = a^* \langle x, T^*(y) \rangle \\ &= a^* \langle T(x), y \rangle = \langle T(x)a, y \rangle,\end{aligned}$$

e, portanto, novamente segue do lema 5.0.10 que

$$T(xa) = T(x)a.$$

Sendo assim, fica demonstrado que T é $\mathbb{C}$-$\mathcal{A}$-linear. A demonstração de que T^* também é $\mathbb{C}$-$\mathcal{A}$-linear é completamente análoga.

■

Proposição B.1.14. *Se $T : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ é adjuntável, então T e T^* são contínuos.*

Demonstração. Sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{M}_1$ e $x \in \mathcal{M}_1$ tais que $x_n \to x$. Suponha que $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{M}_2$ é tal que $T(x_n) \to y$; então, para qualquer $w \in \mathcal{M}_2$ temos

$$\langle y, w\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle T(x_n), w\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, T^*(w)\rangle = \langle x, T^*(w)\rangle = \langle T(x), w\rangle.$$

Portanto, como $w \in \mathcal{M}_2$ foi tomado arbitrariamente, temos pelo lema 5.0.10 que $y = T(x)$, donde segue pelo teorema do gráfico fechado (ver teorema 4.13-2 em [10]) que T é contínuo.

Analogamente, prova-se que T^* também é contínuo.

■

Definição B.1.15. $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \{T : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2 \mid T \text{é adjuntável}\}$.

Note que segue das duas proposições anteriores que $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, mas veremos no exemplo a seguir que, na verdade, esta inclusão pode ser estrita.

Exemplo B.1.16 (de um operador contínuo $\mathbb{C}$-$\mathcal{A}$-linear que não é adjuntável)**.** *Seja B uma C^*-álgebra com unidade e $I \trianglelefteq B$ tal que I não tem unidade. Note que I e B são B-módulos de Hilbert (ver exemplo B.1.9). Defina*

$$\begin{aligned} T : I &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Claramente, T é $\mathbb{C}$-$\mathcal{A}$-linear contínua. Agora, suponha que existe $T^* : B \longrightarrow I$; então, para $x \in I$ arbitrário, segue que

$$x^*T^*(1) = \langle x, T^*(1)\rangle = \langle T(x), 1\rangle = \langle x, 1\rangle = x^*1 = x^*.$$

Portanto, $T^*(1)$ é uma unidade à direita para I, mas é fácil ver que em uma C^*-álgebra ter unidade à direita implica ter unidade, logo temos que $T^*(1)$ é uma unidade para I, o que é uma contradição.

Logo, T não é adjuntável, donde segue que $\mathcal{L}(I,B) \subsetneq \mathcal{B}(I,B)$.

Teorema B.1.17. *$\mathcal{L}(\mathcal{M})$ é uma C^*-álgebra, com a operação de involução definida acima.*

Demonstração. Primeiramente verificaremos que $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ satisfaz os axiomas de $*$-álgebra. Sejam $T,V \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x,y \in \mathcal{M}$ arbitrários; então, temos que:

(i) combinação $\mathbb{C}$-linear de adjuntáveis é adjuntável:

$$\begin{aligned}\langle(\lambda T+V)(x),y\rangle &= \langle \lambda T(x)+V(x),y\rangle = \overline{\lambda}\langle T(x),y\rangle + \langle V(x),y\rangle \\ &= \overline{\lambda}\langle y,T^*(x)\rangle + \langle x,V^*(y)\rangle = \big\langle y,\big(\overline{\lambda}T^*+V^*\big)(y)\big\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, $(\lambda T+V) \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ e $(\lambda T+V)^* = \overline{\lambda}T^*+V^*$.

(ii) composição de adjuntáveis é adjuntável:

$$\langle TV(x),y\rangle = \langle V(x),T^*(y)\rangle = \langle x,V^*T^*(y)\rangle.$$

Portanto, $TV \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ e $(TV)^* = V^*T^*$.

(iii) $(T^*)^* = T$:

$$\langle T^*(x),y\rangle = \langle y,T^*(x)\rangle^* = \langle T(y),x\rangle^* = \langle x,T(y)\rangle,$$

e portanto, $(T^*)^* = T$.

Como $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{M})$, segue que $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ é um espaço normado, com a norma de operador induzida de $\mathcal{B}(\mathcal{M})$. A demonstração de que para quaisquer $T,V \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$

$$\|TV\| \leq \|T\|\|V\|,$$

é análoga a demonstração em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert. Agora demonstraremos que, para $T \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$, $\|T\| = \|T^*\|$. Tome $x \in \mathcal{M}$ arbitrário tal que $\|x\| \leq 1$. Note que

$$\|T(x)\|^2 = \|\langle T(x),T(x)\rangle\|_{\mathcal{A}} = \|\langle x,T^*T(x)\rangle\|_{\mathcal{A}},$$

e usando a desigualdade B.2 na equação acima obtemos

$$\|T(x)\|^2 = \|\langle x,T^*T(x)\rangle\|_{\mathcal{A}} \leq \|x\|\|T^*T(x)\| \leq \|T^*T(x)\|,$$

e por conseguinte,

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\|\leq 1}\left\{\|T(x)\|^2\right\} \leq \|T^*T\|. \tag{B.5}$$

Mas note que

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \Rightarrow \|T\| \leq \|T^*\| \text{ e}$$

$$\|T^*\|^2 \leq \|TT^*\| \Rightarrow \|T^*\| \leq \|T\|,$$

donde segue que $\|T\| = \|T^*\|$.

Verificaremos agora que $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ é fechado em $\mathcal{B}(\mathcal{M})$, e portanto, completo.

Seja $\{T_n\}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{M})$ uma seqüência convergente em $\mathcal{B}(\mathcal{M})$, logo $\{T_n\}_{\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Note que

$$\{T_n\}_{\mathbb{N}} \text{ de Cauchy} \Rightarrow \{T_n^*\}_{\mathbb{N}} \text{ de Cauchy.}$$

Portanto, $\{T_n^*\}_{\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathcal{B}(\mathcal{M})$. Seja $S \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ tal que $T_n^* \to S$.

Vamos verificar que se $T_n \to T$, então $T^* = S$. Sejam $x, y \in \mathcal{M}$ quaisquer, então temos que

$$\langle T(x), y\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} T_n(x), y \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n(x), y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, T_n^*(y)\rangle = \langle x, S(y)\rangle,$$

e portanto, $T^* = S$.

Agora só nos resta verificar que a norma em $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ satisfaz a identidade C^*. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ qualquer; note que da equação B.5 temos que

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2,$$

donde segue que $\|T\|^2 = \|T^*T\|$, e portanto, $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ é uma C^*-álgebra.

■

B.2 Fibrados de Fell

Definição B.2.1. Um *fibrado de Fell* é uma tripla $\mathscr{B} = \Big(\{B_g\}_{g\in G}, *, \cdot\Big)$, onde G é um grupo, $\{B_g\}_{g\in G}$ é uma família de espaços de Banach, e para todo $g, h, k \in G$

$$* : B_g \longrightarrow B_{g^{-1}}$$

é tal que:

(i) é $\mathbb{C}$-conjugada linear, isto é, para quaisquer $a, b \in B_g$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(\lambda a + b)^* = \overline{\lambda} a^* + b^*;$$

(ii) para todo $b \in B_g$, $(b^*)^* = b$;

(iii) para todo $b \in B_g$, $\|b\|_{B_g} = \|b^*\|_{B_{g^{-1}}}$;

e

$$\cdot : B_g \times B_h \longrightarrow B_{gh}$$

é tal que:

(i) é bi-linear, isto é, para quaisquer $b_g, a_g \in B_g$, $b_h, a_h \in B_h$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(\lambda b_g + a_g)b_h = \lambda b_g b_h + a_g b_h \text{ e}$$
$$b_g(\lambda b_h + a_h) = \lambda b_g b_h + b_g a_h;$$

(ii) é associativo, isto é, para quaisquer $b_g \in B_g$, $b_h \in B_h$ e $b_k \in B_k$,

$$(b_g b_h)b_k = b_g(b_h b_k);$$

(iii) para quaisquer $b_g \in B_g$ e $b_h \in B_h$, $(b_g b_h)^* = b_h^* b_g^*$.

Além disso, as seguintes condições também devem ser satisfeitas para todo $g, h \in G$, $b_g \in B_g$ e $b_h \in B_h$:

(i) $\left\|b_g^* b_g\right\|_{B_e} = \|b_g\|_{B_g}^2$;

(ii) $\|b_g b_h\|_{B_{gh}} \leq \|b_g\|_{B_g} \|b_h\|_{B_h}$;

(iii) existe $a \in B_e$ tal que $b_g^* b_g = a^* a$, isto é, $b_g^* b_g \in B_e^+$.

Note que decorre dos axiomas acima que B_e é uma C^*-álgebra.

Exemplo B.2.2 (Produto cruzado parcial)**.** *Dado um C^*-sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ temos um fibrado de Fell canônico associado a ele, basta para cada $g \in G$ tomar $B_g = D_g \delta_g$. As operações $*$ e $\cdot$ são as definidas no produto cruzado parcial (ver definição 3.1.2).*

Pelo exemplo acima, vemos que dado um produto cruzado parcial, temos um fibrado de Fell associado a ele, mas dado um fibrado de Fell arbitrário, será que ele provém de um produto cruzado parcial?

Seja $\mathscr{B}$ um fibrado de Fell arbitrário. Suponha que para alguma ação parcial α e para todo $g \in G$, $B_g = D_g$. Note que,

$$B_g^* B_g = \overline{\operatorname{span}}\{(a_g\delta_g)^*(b_g\delta_g) \mid a_g, b_g \in D_g\} = \overline{\operatorname{span}}\left\{\alpha_g^{-1}\left(a_g^* b_g\right)\delta_e \mid a_g, b_g \in D_g\right\} = D_{g^{-1}}.$$

Analogamente, $B_g B_g^* = D_g$; como D_g é isomorfo a $D_{g^{-1}}$, se $B_g^* B_g$ não for isomorfo a $B_g B_g^*$, o fibrado de Fell não provém de um produto cruzado parcial.

Exemplo B.2.3 (de um fibrado de Fell que não provém de um produto cruzado parcial)**.** *Considere o grupo* $\mathbb{Z}$ *e a* C^**-álgebra das matrizes quadradas de ordem 3, com entradas complexas, que denotaremos por* $M_3(\mathbb{C})$*. Tome* $B_0 = \mathbb{C} \bigoplus M_2(\mathbb{C})$*,* B_1 *como sendo o subespaço de* $M_3(\mathbb{C})$ *formado pelas matrizes que são nulas a menos das entradas* a_{12} *e* a_{13}*,* B_{-1} *como sendo o subespaço de* $M_3(\mathbb{C})$ *formado pelas matrizes que são nulas a menos das entradas* a_{21} *e* a_{31} *e, para todo* $g \in \mathbb{Z}\backslash\{-1,0,1\}$*, defina* B_g *como sendo o subespaço nulo de* $M_3(\mathbb{C})$*. Considerando as operações usualmente definidas em* $M_3(\mathbb{C})$ *é fácil verificar que* $\{B_g\}_{g\in\mathbb{Z}}$ *é um fibrado de Fell. Agora note que* $B_1B_1^*$ *será o subespaço de* $M_3(\mathbb{C})$ *formado pelas matrizes que são nulas a menos da entrada* a_{11}*, e* $B_1^*B_1$ *será o subespaço de* $M_3(\mathbb{C})$ *formado pelas matrizes que são nulas a menos das entradas* a_{22}, a_{23}, a_{32} *e* a_{33}*. Logo,* $B_1B_1^*$ *e* $B_1^*B_1$ *não são isomorfos, donde segue que este fibrado de Fell não provém de um produto cruzado parcial.*

Proposição B.2.4. *Seja* $\mathscr{B}$ *um fibrado de Fell arbitrário e* $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *uma unidade aproximada de* B_e*. Então para* $g \in G$ *e* $b_g \in B_g$ *arbitrários, temos que*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} b_g\mu_\lambda = \lim_{\lambda\to+\infty} \mu_\lambda b_g = b_g.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}\|b_g\mu_\lambda - b_g\|_{B_g}^2 &= \|(b_g\mu_\lambda - b_g)^*(b_g\mu_\lambda - b_g)\|_{B_e}\\ &= \left\|\left(\mu_\lambda^* b_g^* - b_g^*\right)(b_g\mu_\lambda - b_g)\right\|_{B_e}\\ &= \left\|\mu_\lambda^* b_g^* b_g \mu_\lambda - \mu_\lambda^* b_g^* b_g - b_g^* b_g \mu_\lambda + b_g^* b_g\right\|.\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|b_g\mu_\lambda - b_g\|_{B_g}^2 = \lim_{\lambda\to\infty} \left\|\mu_\lambda^* b_g^* b_g \mu_\lambda - \mu_\lambda^* b_g^* b_g - b_g^* b_g \mu_\lambda + b_g^* b_g\right\| = 0,$$

já que $b_g^* b_g \in B_e$. Portanto, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} b_g\mu_\lambda = b_g$.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\|\mu_\lambda b_g - b_g\|_{B_g}^2 &= \|(\mu_\lambda b_g - b_g)(\mu_\lambda b_g - b_g)^*\|_{B_e}\\ &= \left\|(\mu_\lambda b_g - b_g)\left(b_g^* \mu_\lambda^* - b_g^*\right)\right\|_{B_e}\\ &= \left\|\mu_\lambda b_g b_g^* \mu_\lambda^* - \mu_\lambda b_g b_g^* - b_g b_g^* \mu_\lambda^* + b_g b_g^*\right\|.\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\mu_\lambda b_g - b_g\|_{B_g}^2 = \lim_{\lambda\to\infty} \left\|\mu_\lambda b_g b_g^* \mu_\lambda^* - \mu_\lambda b_g b_g^* - b_g b_g^* \mu_\lambda^* + b_g b_g^*\right\| = 0,$$

já que $b_g b_g^* \in B_e$. Portanto, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mu_\lambda b_g = b_g$.

$\blacksquare$

Corolário B.2.5. *Seja $\mathscr{B}$ um fibrado de Fell arbitrário. Se B_e é uma C^*-álgebra unital, com unidade 1_e, então para $g \in G$ e $b_g \in B_g$ arbitrários, temos que*

$$1_e b_g = b_g 1_e = b_g.$$

Iremos agora definir o que é a álgebra seccional de um fibrado de Fell.

Seja $\mathscr{B}$ um fibrado de Fell. Defina

$$C_0 = \bigoplus_{g \in G} B_g,$$

com as seguintes aplicações:

- Soma: $+ : C_0 \times C_0 \longrightarrow C_0$, definida coordenada a coordenada;
- Produto por escalar: $\cdot : \mathbb{C} \times C_0 \longrightarrow C_0$, também definida coordenada a coordenada;
- Produto: $\cdot : C_0 \times C_0 \longrightarrow C_0$, onde para todo $(b_g)_{g\in G}, (c_g)_{g \in G} \in C_0$ é dado por

$$(b_g)_{g\in G} (c_g)_{g\in G} = (d_k)_{k \in G}, \quad \text{onde } d_k = \sum_{g \in G} b_g c_{g^{-1}k}.$$

Note que C_0, com as aplicações citadas acima, é claramente uma álgebra.

Proposição B.2.6. *A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} * : C_0 & \longrightarrow & C_0 \\ (b_g)_{g\in G} & \longmapsto & \left(b_{g^{-1}}^*\right)_{g \in G}, \end{array}$$

é uma involução sobre C_0.

Demonstração. Sejam $(b_g)_{g\in G}, (c_g)_{g\in G} \in C_0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrários, então temos que

(i) $\left(\left((b_g)_{g\in G}\right)^*\right)^* = \left(\left(b_{g^{-1}}^*\right)_{g\in G}\right)^* = \left(b_{(g^{-1})^{-1}}\right)_{g \in G} = (b_g)_{g\in G}.$

(ii)
$$\begin{aligned} \left(\lambda (b_g)_{g\in G} + (c_g)_{g\in G}\right)^* &= \left((\lambda b_g + c_g)_{g \in G}\right)^* = \left((\lambda b_{g^{-1}} + c_{g^{-1}})^*\right)_{g\in G} \\ &= \left(\overline{\lambda} b_{g^{-1}}^* + c_{g^{-1}}^*\right)_{g\in G} = \overline{\lambda}\left(b_{g^{-1}}^*\right)_{g\in G} + \left(c_{g^{-1}}^*\right)_{g\in G} \\ &= \overline{\lambda}\left((b_g)_{g\in G}\right)^* + \left((c_g)_{g\in G}\right)^*. \end{aligned}$$

(iii) $$\left(\left((b_g)_{g\in G}\right)\left((c_g)_{g\in G}\right)\right)^* = \left(\left(\sum_{g\in G} b_g c_{g^{-1}k}\right)_{k\in G}\right)^* = \left(\left(\sum_{g\in G} b_g c_{g^{-1}k^{-1}}\right)^*\right)_{k\in G}$$
$$= \left(\sum_{g\in G} \left(b_g c_{g^{-1}k^{-1}}\right)^*\right)_{k\in G} = \left(\sum_{g\in G} c^*_{g^{-1}k^{-1}} b^*_g\right)_{k\in G}$$
$$= \left(\sum_{g\in G} c^*_{g^{-1}} b^*_{k^{-1}g}\right)_{k\in G} = \left(\left(c^*_{g^{-1}}\right)_{g\in G}\right)\left(\left(b^*_{g^{-1}}\right)_{g\in G}\right)$$
$$= \left((c_g)_{g\in G}\right)^*\left((b_g)_{g\in G}\right)^*.$$

Portanto, $*$ é uma aplicação de involução sobre C_0.

■

Proposição B.2.7. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : C_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (b_g)_{g\in G} &\longmapsto \sum_{g\in G} \|b_g\| \end{aligned}$$

é uma norma sobre C_0.

Demonstração. Note que a aplicação $\|\cdot\|_1$ é claramente não degenerada e $\mathbb{C}$-linear. Logo, vamos verificar os demais axiomas de norma. Sejam $(b_g)_{g\in G}, (c_g)_{g\in G} \in C_0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrários; então, temos que

(i) $$\left\|\left((b_g)_{g\in G}\right)\left((c_g)_{g\in G}\right)\right\|_1 = \left\|\left(\sum_{g\in G} b_g c_{g^{-1}k}\right)_{k\in G}\right\|_1 = \sum_{k\in G}\left\|\sum_{g\in G} b_g c_{g^{-1}k}\right\|$$
$$\leq \sum_{k\in G}\left(\sum_{g\in G}\|b_g c_{g^{-1}k}\|\right) \leq \sum_{k\in G}\sum_{g\in G}\|b_g\|\|c_{g^{-1}k}\|$$
$$= \sum_{h\in G}\sum_{g\in G}\|b_g\|\|c_h\| = \left(\sum_{g\in G}\|b_g\|\right)\left(\sum_{h\in G}\|c_h\|\right)$$
$$= \left\|(b_g)_{g\in G}\right\|_1 \left\|(c_h)_{h\in G}\right\|_1 = \left\|(b_g)_{g\in G}\right\|_1\left\|(c_g)_{g\in G}\right\|_1.$$

(ii) $$\left\|\left((b_g)_{g\in G}\right)^*\right\|_1 = \left\|\left(b^*_{g^{-1}}\right)_{g\in G}\right\|_1 = \sum_{g\in G}\|b^*_{g^{-1}}\| = \sum_{g\in G}\|b_{g^{-1}}\|$$
$$= \sum_{g\in G}\|b_g\| = \left\|(b_g)_{g\in G}\right\|_1.$$

Portanto, $\|\cdot\|_1$ é uma norma sobre C_0.

$\blacksquare$

Logo, $(C_0, +, \cdot, *, \|\cdot\|_1)$ é claramente uma $*$-álgebra normada.

Definição B.2.8. A *álgebra seccional de um fibrado de Fell* é a $*$-álgebra C_0, como definida acima.

Definição B.2.9. A *C^*-álgebra seccional de um fibrado de Fell* é a C^*-álgebra envolvente da álgebra seccional do fibrado de Fell, que denotaremos por $C^*(\mathscr{B})$.

Note que, dado um C^*-sistema dinâmico $(\mathcal{A}\ , G, \alpha)$, se para todo $g \in G$, $B_g = D_g\delta_g$, então a C^*-álgebra seccional deste fibrado de Fell é $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$.

Assim como todo homomorfismo de uma álgebra de Banach em uma C^*-álgebra é contrativo (ver teorema 2.1.7 em [14]), veremos na próxima proposição que todo homomorfismo da C^*-álgebra seccional de um fibrado de Fell também é contrativo.

Proposição B.2.10. *Seja $\mathscr{B}$ um fibrado de Fell, D uma C^*-álgebra e $\varphi : C_0 \longrightarrow D$ um homomorfismo de C_0 em D. Então φ é contrativo com relação a $\|\cdot\|_1$.*

Demonstração. Defina

$$E = \bigoplus_{g\in G} E_g; \forall g \in G\ \ E_g = \begin{cases} 0, & \text{se } g \neq e; \\ B_g, & \text{se } g = e. \end{cases}$$

Note que $E \subseteq C_0$, e é uma subálgebra; além disso, E é uma C^*-álgebra, já que E é isomorfo a B_e. Então,

$$\varphi|_E : E \longrightarrow D$$

é um homomorfismo de C^*-álgebra e, portanto, contrativo.

Tome $g \in G$ arbitrário e $b = (b_h)_{h\in G} \in C_0$ tal que a única entrada não nula de b seja a g-ésima; então, $b^* = (c_h)_{h\in G}$ é tal que a única entrada não nula é a g^{-1}-ésima, e esta é igual a b_g^*. Logo,

$$b^*b = (d_k)_{k\in G};\ \forall k \in G,\ d_k = \sum_{l\in G} c_l b_{l^{-1}k} = c_{g^{-1}} b_{gk} = b_g^* b_{gk},$$

e se $gk \neq g$, temos que $d_k = 0$; portanto, a única entrada não nula de b^*b é a e-ésima, e esta é igual a $b_g^* b_g$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\varphi(b)\|_D &= \|\varphi(b)^*\varphi(b)\|_D^{1/2} = \|\varphi(b^*)\varphi(b)\|_D^{1/2} = \|\varphi(b^*b)\|_D^{1/2} \\ &= \|\varphi|_E(b^*b)\|_D^{1/2} \leq \|b^*b\|_E^{1/2} = \left\|b_g^*b_g\right\|_{B_e}^{1/2} = \|b_g\|_{B_g} = \|b\|_1. \end{aligned}$$

Agora tomando $b = (b_g)_{g \in G} \in C_0$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned} \|\varphi(b)\|_D = \left\| \varphi\left(\sum_{g \in G} (b_g \delta_{gh})_{h \in G} \right) \right\|_D &= \left\| \sum_{g \in G} \varphi\big((b_g \delta_{gh})_{h \in G} \big) \right\|_D \\ \leq \sum_{g \in G} \left\| \varphi\big((b_g \delta_{gh})_{h \in G} \big) \right\|_D &\leq \sum_{g \in G} \|b_g\|_{B_g} = \|b\|_1. \end{aligned}$$

Portanto, φ é um homomorfismo contrativo com relação a $\|\cdot\|_1$.

$\blacksquare$

Antes de demonstrarmos o teorema principal deste apêndice, vamos demonstrar alguns resultados que nos auxiliarão nesta demonstração.

Proposição B.2.11. *Se $p \in B_e^+$ e $b_g \in B_g$, então $(b_g^* \, p \, b_g) \in B_e^+$.*

Demonstração. Como $p \in B_e^+$, existe $z \in B_e$ tal que $p = z^* z$ (ver proposição 3.3.16 em [15]). Logo,

$$b_g^* \, p \, b_g = b_g^* z^* z b_g = (z b_g)^* (z b_g),$$

e como $(z b_g) \in B_g$, existe $w \in B_e$ tal que $(z b_g)^*(z b_g) = w^* w$, donde segue que

$$b_g^* \, p \, b_g = (z b_g)^* (z b_g) = w^* w \in B_e^+.$$

$\blacksquare$

Lema B.2.12. *Se $p \in B_e^+$ e $b_g \in B_g$, então*

$$b_g^* \, p \, b_g \leq \|p\| b_g^* b_g.$$

Demonstração. Dividiremos esta demonstração em dois casos.

- Caso 1: Se B_e possui unidade, então sabemos que $p \leq \|p\|$, logo pela proposição B.2.11, temos que

  $$\|p\| - p \geq 0 \Rightarrow b_g^*(\|p\| - p) b_g \geq 0 \Rightarrow b_g^* \|p\| b_g - b_g^* p b_g \geq 0 \Rightarrow b_g^* \, p \, b_g \leq \|p\| b_g^* b_g.$$

- Caso 2: Se B_e não possui unidade, seja $\widehat{B}_e$ a unitização de B_e (ver exercício 3.1.3 em [15]). Portanto, $(p, 0) \leq (0, \|p\|)$.

  Seja $\{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq B_e$ uma unidade aproximada. Note que para todo $\lambda \in \Lambda$ pela proposição B.2.11 temos que

  $$(\mu_\lambda, 0)^* (p, 0)(\mu_\lambda, 0) \leq (\mu_\lambda, 0)^* (0, \|p\|)(\mu_\lambda, 0) \Rightarrow (\mu_\lambda^* p \mu_\lambda, 0) \leq (\|p\| \mu_\lambda^* \mu_\lambda, 0),$$

e portanto,

$$\mu_\lambda^* p \mu_\lambda \leq \|p\| \mu_\lambda^* \mu_\lambda.$$

Novamente, pela proposição B.2.11 temos que

$$b_g^* \mu_\lambda^* p \mu_\lambda b_g \leq b_g^* \|p\| \mu_\lambda^* \mu_\lambda b_g,$$

e portanto, pela proposição B.2.4 segue que

$$b_g^* \, p \, b_g \leq \|p\| b_g^* b_g.$$

■

Finalmente, vamos ao teorema principal deste apêndice:

Teorema B.2.13. *Seja $\mathscr{B}$ um fibrado de Fell arbitrário. Então existe um homomorfismo injetivo da álgebra seccional de $\mathscr{B}$.*

Demonstração. Esta demonstração será dividida em duas grandes partes; na primeira, iremos construir a C^*-álgebra D que será o contradomínio do homomorfismo, e na segunda iremos construir o homomorfismo. É na primeira parte que usaremos a teoria de C^*-módulos de Hilbert, já que a C^*-álgebra D será um $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, onde $\mathcal{M}$ será um módulo de Hilbert que iremos construir.

Para construir um módulo de Hilbert, precisamos inicialmente de um espaço vetorial e de uma C^*-álgebra. Dado o fibrado de Fell $\mathscr{B}$, temos $\bigoplus_{g\in G} B_g$ que é claramente um espaço vetorial complexo e B_e que é uma C^*-álgebra, logo nosso candidato natural a Hilbert B_e-módulo será $\bigoplus_{g\in G} B_g$; sendo assim, temos que definir duas aplicações: a multiplicação pelo escalar da C^*-álgebra e o "produto interno".

Seja $\mathcal{M}_0 = \bigoplus_{g\in G} B_g$. Defina as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathcal{M}_0 \times B_e & \longrightarrow & \mathcal{M}_0 \\ ((b_g)_{g\in G}, b_e) & \longmapsto & (b_g b_e)_{g\in G} \quad \text{e} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_0 & \longrightarrow & B_e \\ ((b_g)_{g\in G}, (c_g)_{g\in G}) & \longmapsto & \sum_{g\in G} b_g^* c_g. \end{array}$$

Note que $\mathcal{M}_0$, com a multiplicação por escalar definida acima, é claramente um B_e-módulo à direita. Agora vamos verificar que $\mathcal{M}_0$ satisfaz os axiomas de pré-Hilbert

B_e-módulo. Observe que a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é claramente $\mathbb{C}$-linear na segunda entrada e, além disso, para $(b_g)_{g\in G}, (c_g)_{g\in G} \in \mathcal{M}_0$, $b_e \in B_e$ arbitrários $\left\langle (b_g)_{g\in G}, (c_g)_{g\in G} b_e \right\rangle = \left\langle (b_g)_{g\in G}, (c_g)_{g\in G} \right\rangle b_e$ e $\left\langle (b_g)_{g\in G}, (c_g)_{g\in G} \right\rangle^* = \left\langle (c_g)_{g\in G}, (b_g)_{g\in G} \right\rangle$. Logo, nos resta verificar a positividade e a não-degenerecência desta aplicação. Tome $(b_g)_{g\in G} \in \mathcal{M}_0$ arbitrário; então, temos que

(i) $\left\langle (b_g)_{g\in G}, (b_g)_{g\in G} \right\rangle \geq 0$, pois para todo $g \in G$, existe $a_g \in B_e$ tal que $b_g^* b_g = a_g^* a_g \geq 0$, e como a soma de elementos positivos de uma C^*-álgebra é um elemento positivo (ver proposição 3.3.13 em [15]), segue que

$$\left\langle (b_g)_{g\in G}, (b_g)_{g\in G} \right\rangle = \sum_{g\in G} b_g^* b_g = \sum_{g\in G} a_g^* a_g \geq 0;$$

(ii) $\left\langle (b_g)_{g\in G}, (b_g)_{g\in G} \right\rangle = 0$ implica $(b_g)_{g\in G} = 0$, pois

$$\left\langle (b_g)_{g\in G}, (b_g)_{g\in G} \right\rangle = 0 \Rightarrow \sum_{g\in G} b_g^* b_g = 0,$$

e para todo $g \in G$, existe $a_g \in B_e$ tal que $b_g^* b_g = a_g^* a_g \geq 0$; como em uma C^*-álgebra a soma de elementos positivos ser nula implica que todas as parcelas desta soma são nulas, segue que $(b_g)_{g\in G} = 0$.

Portanto, $\mathcal{M}_0$ é um pré-Hilbert B_e-módulo. Seja $\mathcal{M}$ o completamento de $\mathcal{M}_0$ na norma induzida pelo "produto interno", logo $\mathcal{M}$ é um Hilbert B_e-módulo.

Uma vez construído o contradomínio do nosso homomorfismo, a saber $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, vamos construir o homomorfismo. Para isto, iremos construir operadores sobre $\mathcal{M}_0$, que mostraremos posteriormente que são $\mathbb{C}$-lineares e contínuos, e portanto, poderão ser estendidos para $\mathcal{M}$. Ainda teremos que mostrar que eles são B_e-lineares e adjuntáveis, para a aplicação estar bem definida.

Sejam $h \in G$ e $a_h \in B_h$ arbitrários. Defina

$$\begin{array}{rcl} T^0_{a_h} : \mathcal{M}_0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_0 \\ (b_g)_{g\in G} & \longmapsto & (a_h b_{h^{-1}g})_{g\in G}. \end{array}$$

Claramente, esta aplicação é $\mathbb{C}$-$\mathcal{A}$-linear. Veremos que, além disso, ela é contínua.

Tome $(b_g)_{g\in G} \in \mathcal{M}_0$ arbitrário. Note que

$$\begin{aligned}\left\|T^0_{a_h}\left((b_g)_{g\in G}\right)\right\|^2 &= \left\|\left\langle (a_h b_{h^{-1}g})_{g\in G}, (a_h b_{h^{-1}g})_{g\in G}\right\rangle\right\|_{B_e} \\ &= \left\|\sum_{g\in G} (a_h b_{h^{-1}g})^*(a_h b_{h^{-1}g})\right\|_{B_e} = \left\|\sum_{g\in G} b^*_{h^{-1}g} a^*_h a_h b_{h^{-1}g}\right\|_{B_e},\end{aligned}$$

e usando o lema B.2.12 nesta equação, obtemos

$$\begin{aligned}\left\|T^0_{a_h}\left((b_g)_{g\in G}\right)\right\|^2 &= \left\|\sum_{g\in G} b^*_{h^{-1}g} a^*_h a_h b_{h^{-1}g}\right\|_{B_e} \leq \left\|\sum_{g\in G} \|a_h\|^2_{B_h} b^*_{h^{-1}g} b_{h^{-1}g}\right\|_{B_e} \\ &= \|a_h\|^2_{B_h}\left\|\sum_{g\in G} b^*_{h^{-1}g} b_{h^{-1}g}\right\|_{B_e} = \|a_h\|^2_{B_h}\left\|\sum_{g'\in G} b^*_{g'} b_{g'}\right\|_{B_e} \\ &= \|a_h\|^2_{B_h}\left\|(b_{g'})_{g'\in G}\right\|^2,\end{aligned}$$

donde segue que $T^0_{a_h}$ é contínua.

Como $T^0_{a_h}$ é $\mathbb{C}$-linear e contínua, $T^0_{a_h}$ é uniformemente contínua, logo pode ser estendida para $\mathcal{M}$. Seja T_{a_h} a extensão de $T^0_{a_h}$ para $\mathcal{M}$. Temos que provar ainda, que $T_{a_h} \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$, para isto, basta verificarmos que T_{a_h} é adjuntável. Sejam $(b_g)_{g\in G}, (c_g)_{g\in G} \in \mathcal{M}_0$ arbitrários, então, temos que

$$\begin{aligned}\left\langle T^0_{a_h}\left((b_g)_{g\in G}\right), (c_g)_{g\in G}\right\rangle &= \left\langle (a_h b_{h^{-1}g})_{g\in G}, (c_g)_{g\in G}\right\rangle \\ &= \sum_{g\in G}(a_h b_{h^{-1}g})^* c_g = \sum_{g\in G} b^*_{h^{-1}g} a^*_h c_g.\end{aligned}$$

Tomando $g' = h^{-1}g$ na equação acima, obtemos que

$$\begin{aligned}\left\langle T^0_{a_h}\left((b_g)_{g\in G}\right), (c_g)_{g\in G}\right\rangle &= \sum_{g\in G} b^*_{h^{-1}g} a^*_h c_g = \sum_{g'\in G} b^*_{g'} a^*_h c_{hg'} \\ &= \left\langle (b_{g'})_{g'\in G}, (a^*_h c_{hg'})_{g'\in G}\right\rangle \\ &= \left\langle (b_{g'})_{g'\in G}, T^0_{a^*_h}\left((c_{g'})_{g'\in G}\right)\right\rangle.\end{aligned}$$

Logo, dados $x, y \in \mathcal{M}$ arbitrários, como existem $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_0$, tais que

$x_n \to x$ e $y_m \to y$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle T_{a_h}(x), y\rangle &= \left\langle T_{a_h}\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right), \lim_{n\to+\infty} y_n\right\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle T_{a_h}(x_n), y_n\rangle \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left\langle T^0_{a_h}(x_n), y_n\right\rangle = \lim_{n\to+\infty} \left\langle x_n, T^0_{a_h^*}(y_n)\right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{n\to+\infty} x_n, \lim_{n\to+\infty} T^0_{a_h^*}(y_n)\right\rangle = \left\langle x, T_{a_h^*}(y)\right\rangle,
\end{aligned}$$

e portanto, $T^*_{a_h} = T_{{a_h}^*}$, donde segue que $T_{a_h} \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$.

Será útil em contas futuras, sabermos como se comporta a composição destes operadores. Sejam $h, k \in G$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $a_h, d_h \in B_h$, $a_k \in B_k$ e $(b_g)_{g\in G} \in \mathcal{M}_0$ quaisquer. Então, temos que

$$\begin{aligned}
T^0_{a_h} \circ T^0_{a_k}\left((b_g)_{g\in G}\right) &= T^0_{a_h}\left((a_k b_{k^{-1}g})_{g\in G}\right) = (a_h(a_k b_{h^{-1}k^{-1}g}))_{g\in G} \\
&= \left((a_h a_k) b_{(kh)^{-1}g}\right)_{g\in G} = T^0_{a_h a_k}\left((b_g)_{g\in G}\right),
\end{aligned}$$

e também que,

$$\begin{aligned}
T^0_{\lambda a_h + d_h}\left((b_g)_{g\in G}\right) &= ((\lambda a_h + d_h) b_{h^{-1}g})_{g\in G} \\
&= \lambda(a_h b_{h^{-1}g})_{g\in G} + (d_h b_{h^{-1}g})_{g\in G} \\
&= \lambda T^0_{a_h}\left((b_g)_{g\in G}\right) + T^0_{d_h}\left((b_g)_{g\in G}\right).
\end{aligned}$$

Logo, dado $x \in \mathcal{M}$ arbitrário, como existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_0$, tal que $x_n \to x$, temos que

$$\begin{aligned}
T_{a_h} \circ T_{a_k}(x) &= T_{a_h} \circ T_{a_k}\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} T_{a_h} \circ T_{a_k}(x_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} T^0_{a_h} \circ T^0_{a_k}(x_n) = \lim_{n\to+\infty} T^0_{a_h a_k}(x_n) \\
&= T_{a_h a_k}(x),
\end{aligned}$$

e também que,

$$\begin{aligned}
T_{\lambda a_h + d_h}(x) &= T_{\lambda a_h + d_h}\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} T_{\lambda a_h + d_h}(x_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} T^0_{\lambda a_h + d_h}(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\lambda T^0_{a_h}(x_n) + T^0_{d_h}(x_n)\right) \\
&= \lambda T_{a_h}(x) + T_{d_h}(x).
\end{aligned}$$

Finalmente, defina

$$\begin{aligned}\varphi : C_0 &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M})\\ (b_g)_{g\in G} &\longmapsto \sum_{g\in G} T_{b_g}.\end{aligned}$$

Vamos primeiramente verificar que φ é um homomorfismo. Claramente, φ é $\mathbb{C}$-linear e separa produto. Vamos, portanto, verificar os demais axiomas. Sejam $(b_g)_{g\in G}, (c_g)_{g\in G} \in C_0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrários; então, temos que

(i)
$$\begin{aligned}\varphi\Big((b_g)_{g\in G}(c_g)_{g\in G}\Big) &= \varphi\left(\left(\sum_{g\in G} b_g c_{g^{-1}k}\right)_{k\in G}\right) = \sum_{k\in G} T_{\sum_{g\in G} b_g c_{g^{-1}k}}\\ &= \sum_{k\in G}\sum_{g\in G} T_{b_g c_{g^{-1}k}} = \sum_{k\in G}\sum_{g\in G} T_{b_g}\circ T_{c_{g^{-1}k}}\\ &= \sum_{g\in G} T_{b_g}\left(\sum_{k\in G} T_{c_{g^{-1}k}}\right) = \sum_{g\in G} T_{b_g}\sum_{k'\in G} T_{c_{k'}}\\ &= \varphi\Big((b_g)_{g\in G}\Big)\varphi\big((c_{k'})_{k'\in G}\big);\end{aligned}$$

(ii) Note que $(b_g)_{g\in G} = \sum_{g\in G}(b_g\delta_{gh})_{h\in G}$, logo

$$\begin{aligned}\varphi\Big({(b_g)_{g\in G}}^*\Big) &= \varphi\left(\left(\sum_{g\in G}(b_g\delta_{gh})_{h\in G}\right)^*\right) = \varphi\left(\sum_{g\in G}\big(b_g^*\delta_{g^{-1}h}\big)_{h\in G}\right)\\ &= \sum_{g\in G}\varphi\Big(\big(b_g^*\delta_{g^{-1}h}\big)_{h\in G}\Big) = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} T_{b_g^*\delta_{g^{-1}h}}\\ &= \sum_{g\in G} T_{b_g^*} = \sum_{g\in G} T_{b_g}^*\\ &= \left(\sum_{g\in G} T_{b_g}\right)^* = \varphi\Big((b_g)_{g\in G}\Big)^*.\end{aligned}$$

Agora, só falta provarmos que φ é injetor. Tome $(b_g)_{g\in G} \in \ker\,\varphi$, logo

$$0 = \varphi\Big((b_g)_{g\in G}\Big) = \sum_{g\in G} T_{b_g}.$$

Portanto, para qualquer $(c_h)_{h\in G} \in \mathcal{M}_0$ temos que

$$\sum_{g\in G} T_{b_g}\big((c_h)_{h\in G}\big) = \sum_{g\in G} T^0_{b_g}\big((c_h)_{h\in G}\big) = \sum_{g\in G}\big(b_g c_{g^{-1}h}\big)_{h\in G} = 0.$$

Tomando $k \in G$ arbitrário e $(c_h)_{h\in G} \in \mathcal{M}_0$ tal que, para todo $h \in G$,

$$c_h = \begin{cases} b_k^*, & \text{se h=k;} \\ 0, & \text{se } h \neq k, \end{cases}$$

e substituindo na equação acima, obtemos

$$0 = \sum_{g\in G} T_{b_g}\big((c_h)_{h\in G}\big) = \sum_{g\in G} (b_g c_{g^{-1}h})_{h\in G} = (b_{hk} c_{k^{-1}})_{h\in G} = (b_{hk} b_k^*)_{h\in G},$$

donde temos que $b_k b_k^* = 0$, e logo $b_k = 0$; mas como $k \in G$ foi tomado arbitrariamente, segue que $(b_g)_{g\in G}$=0.

■

Definição B.2.14. O homomorfismo φ definido no teorema acima é denominado *representação regular* da álgebra seccional do fibrado de Fell $\mathscr{B}$.

Como uma conseqüência direta do teorema acima, temos que o núcleo da aplicação $|||\cdot|||$ definida na construção do produto cruzado parcial é nulo.

Apenas por uma questão de completude, iremos dar as duas definições seguintes.

Definição B.2.15. A *C^*-álgebra reduzida* de um fibrado de Fell $\mathscr{B}$, denotada por $C_r^*(\mathscr{B})$, é o fecho de $\varphi(C_0)$ na norma de $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, onde φ e $\mathcal{M}$ são os construídos no teorema anterior.

Definição B.2.16. Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um C^*-sistema dinâmico. O *produto cruzado parcial reduzido* de $\mathcal{A}$ por G, denotado por $\mathcal{A} \rtimes_{\alpha,r} G$, é por definição a C^*-álgebra reduzida do fibrado de Fell associado ao C^*-sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$.

Por fim iremos provar que, dado um fibrado de Fell, existe uma esperança condicional canônica associada a ele. Este resultado será usado no capítulo 5.

Definição B.2.17. Sejam $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ uma sub-C^*-álgebra. Uma aplicação $E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é dita ser uma *esperança condicional*, se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) E é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear sobrejetora;

(ii) $E^2 = E$;

(iii) $E(\mathcal{A}_+) \subseteq \mathcal{B}_+$;

(iv) $\forall a \in \mathcal{A}$, $\forall b \in \mathcal{B}$, $E(ba) = bE(a)$.

Note que se $E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é uma esperança condicional, então para quaisquer $a \in \mathcal{A}$ e $b \in \mathcal{B}$, temos que $E(a)b = E(ab)$. De fato, como E é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear positiva, E preserva involução, e então temos que

$$E(a)b = (b^*E(a)^*)^* = (b^*E(a^*))^* = (E(b^*a^*))^* = E(ab).$$

Seja $\mathscr{B}$ um fibrado de Fell. Nosso objetivo é construir uma esperança condicional $E : C^*(\mathscr{B}) \longrightarrow \widetilde{B}_e$, onde $\widetilde{B}_e = \bigoplus_{g \in G} \widetilde{B}_g$ e

$$\widetilde{B}_g = \begin{cases} B_e, & \text{se } g = e; \\ 0, & \text{se } g \neq e. \end{cases}$$

Mas antes, precisamos verificar que $\widetilde{B}_e$ é de fato, uma sub-C^*-álgebra de $C^*(\mathscr{B})$. Para provar este fato, precisaremos de uma equação que provaremos na demonstração do seguinte lema:

Lema B.2.18. *Seja $(a_h)_{h \in G} \in C_0$ arbitrária. Então temos que*

$$\|T_{a_e}\| \leq \left\| \sum_{h \in G} T_{a_h} \right\|,$$

onde T_{a_e} e $\sum\limits_{h \in G} T_{a_h}$ são como definidos na demonstração do teorema B.2.13.

Demonstração. Tome $(b_g)_{g \in G} \in C_0$ e $k \in G$ arbitrários. Relembrando,

$$T_{a_k}\Big((b_g)_{g \in G}\Big) = (a_k b_{k^{-1}g})_{g \in G}.$$

Defina a seguinte função:

$$\begin{array}{rcl} \pi_e^0 : \mathcal{M}_0 & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ (c_g)_{g \in G} & \longmapsto & (c_e \delta_{eg})_{g \in G}. \end{array}$$

Observe que ela é claramente $\mathbb{C}$-linear e, além disso, para qualquer $(c_g)_{g \in G} \in \mathcal{M}_0$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\pi_e^0\Big((c_g)_{g\in G}\Big)\right\| &= \left\|(c_e\delta_{eg})_{g\in G}\right\| = \left\|\Big\langle (c_e\delta_{eg})_{g\in G}, (c_e\delta_{eg})_{g\in G}\Big\rangle\right\|_{B_e}^{1/2} \\
&= \|c_e^* c_e\|_{B_e}^{1/2} \leq \left\|\sum_{g\in G} c_g^* c_g\right\|_{B_e}^{1/2} = \left\|\Big\langle (c_g)_{g\in G}, (c_g)_{g\in G}\Big\rangle\right\|_{B_e}^{1/2} \\
&= \left\|(c_g)_{g\in G}\right\|.
\end{aligned}$$

Portanto π_e^0 é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear e contínua, logo podemos estendê-la para $\mathcal{M}$. Seja π_e a extensão de π_e^0.

Agora observe que

$$T_{a_e} \circ \pi_e = \pi_e \circ \left(\sum_{h\in G} T_{a_h} \circ \pi_e\right),$$

pois

$$\left(\sum_{h\in G} T_{a_h} \circ \pi_e\right)\Big((b_g)_{g\in G}\Big) = (a_h b_e)_{h\in G},$$

donde segue que

$$\pi_e \circ \left(\sum_{h\in G} T_{a_h} \circ \pi_e\right)\Big((b_g)_{g\in G}\Big) = \pi_e\big((a_h b_e)_{h\in G}\big) = (a_e b_e \delta_{eg})_{g\in G} = T_{a_e} \circ \pi_e\Big((b_g)_{g\in G}\Big).$$

Então temos que

$$\|T_{a_e} \circ \pi_e\| = \left\|\pi_e \circ \left(\sum_{h\in G} T_{a_h} \circ \pi_e\right)\right\| \leq \left\|\sum_{h\in G} T_{a_h}\right\|. \tag{B.6}$$

Para finalizar a demonstração, iremos verificar que as normas de $T_{a_e} \circ \pi_e$ e de T_{a_e} são iguais.

Claramente,

$$\|T_{a_e} \circ \pi_e\| \leq \|T_{a_e}\|. \tag{B.7}$$

Agora tome $\left(\dfrac{a_e^*}{\|a_e\|_{B_e}}\delta_{eg}\right)_{g\in G} \in \mathcal{M}_0$, e note que,

$$T_{a_e} \circ \pi_e\left(\left(\frac{a_e^*}{\|a_e\|_{B_e}}\delta_{eg}\right)_{g\in G}\right) = \left(\frac{a_e a_e^*}{\|a_e\|_{B_e}}\delta_{eg}\right)_{g\in G}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|T_{a_e}\circ\pi_e\| &= \sup_{\left\|(c_g)_{g\in G}\right\|\leq 1}\left\|(T_{a_e}\circ\pi_e)\Big((c_g)_{g\in G}\Big)\right\| \geq \left\|(T_{a_e}\circ\pi_e)\left(\left(\frac{a_e^*}{\|a_e\|_{B_e}}\delta_{eg}\right)_{g\in G}\right)\right\| \\
&= \left\|\left(\frac{a_e a_e^*}{\|a_e\|_{B_e}}\delta_{eg}\right)_{g\in G}\right\| = \left\|\frac{a_e a_e^* a_e a_e^*}{\|a_e\|_{B_e}^2}\right\|_{B_e}^{1/2} = \frac{1}{\|a_e\|_{B_e}}\|(a_e a_e^*)(a_e a_e^*)^*\|_{B_e}^{1/2} \\
&= \frac{\|a_e\|_{B_e}^2}{\|a_e\|_{B_e}} = \|a_e\|_{B_e}. \qquad \text{(B.8)}
\end{aligned}$$

Mas, por outro lado, para qualquer $(c_g)_{g\in G}\in\mathcal{M}_0$ temos que

$$\begin{aligned}
\left\|(a_e c_g)_{g\in G}\right\|_{\mathcal{M}}^2 &= \left\|\Big\langle (a_e c_g)_{g\in G}, (a_e c_g)_{g\in G}\Big\rangle\right\|_{B_e} = \left\|\sum_{g\in G} c_g^* a_e^* a_e c_g\right\|_{B_e} \\
&\leq \left\|\sum_{g\in G}\|a_e\|_{B_e}^2 c_g^* c_g\right\|_{B_e} = \|a_e\|^2\left\|\sum_{g\in G} c_g^* c_g\right\|_{B_e} \\
&= \|a_e\|^2\left\|\Big\langle (c_g)_{g\in G}, (c_g)_{g\in G}\Big\rangle\right\|_{B_e} = \|a_e\|^2\left\|(c_g)_{g\in G}\right\|_{\mathcal{M}}^2,
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned}
\|T_{a_e}\| &= \sup_{\left\|(c_g)_{g\in G}\right\|\leq 1}\left\|T_{a_e}\Big((c_g)_{g\in G}\Big)\right\| = \sup_{\left\|(c_g)_{g\in G}\right\|\leq 1}\left\|(a_e c_g)_{g\in G}\right\| \\
&\leq \|a_e\|_{B_e}.
\end{aligned}$$

Agora novamente tomando $\left(\frac{a_e^*}{\|a_e\|_{B_e}}\delta_{eg}\right)_{g\in G}\in\mathcal{M}_0$, temos que $T_{a_e}\left(\left(\frac{a_e^*}{\|a_e\|_{B_e}}\delta_{eg}\right)_{g\in G}\right) = \left(\frac{a_e a_e^*}{\|a_e\|_{B_e}}\delta_{eg}\right)_{g\in G}$, donde

$$\left\|T_{a_e}\left(\left(\frac{a_e^*}{\|a_e\|_{B_e}}\delta_{eg}\right)_{g\in G}\right)\right\| = \left\|\left(\frac{a_e a_e^*\delta_{eg}}{\|a_e\|_{B_e}}\right)_{g\in G}\right\| = \|a_e\|_{B_e}.$$

Então,

$$\|T_{a_e}\| = \|a_e\|_{B_e}. \qquad \text{(B.9)}$$

Portanto, das equações B.7,B.8 e B.9 obtemos que

$$\|T_{a_e}\circ\pi_e\| = \|T_{a_e}\|.$$

Logo, voltando na equação B.6 segue que

$$\|T_{a_e}\| \leq \left\| \sum_{h \in G} T_{a_h} \right\|,$$

como queríamos demonstrar.

■

Proposição B.2.19. *$\widetilde{B}_e$, como definido acima, é uma sub-C^*-álgebra de $C^*(\mathscr{B})$*

Demonstração. Note que $\widetilde{B}_e \subseteq C^*(\mathscr{B})$, já que, pelo teorema B.2.13, o núcleo da tripla norma (norma da envolvente) é nulo. Além disso, $\widetilde{B}_e$ é claramente uma sub-$*$-álgebra de $C^*(\mathscr{B})$; logo, basta verificarmos que ela é fechada e, como a aplicação $B_e \ni b_e \leftrightarrow \left(b_e \delta_{e,g}\right)_{g \in G} \in \widetilde{B}_e$ é claramente um isomorfismo, basta verificarmos que ele é isométrico.

Temos que

$$||| \left(b_e \delta_{e,g}\right)_{g \in G} ||| \leq \left\| \left(b_e \delta_{e,g}\right)_{g \in G} \right\|_1 = \|b_e\|_{B_e},$$

e por outro lado, segue da equação B.9 que

$$\left\| \varphi\Big(\left(b_e \delta_{e,g}\right)_{g \in G} \Big) \right\| = \|T_{b_e}\| = \|b_e\|_{B_e},$$

onde φ e T_{b_e} são como definidos na demonstração do teorema B.2.13. Portanto,

$$||| \left(b_e \delta_{e,g}\right)_{g \in G} ||| = \|b_e\|_{B_e},$$

donde segue o que queríamos demonstrar.

■

Observação B.2.20. Note que no decorrer da demonstração acima, provamos que $\widetilde{B}_e$ e B_e são C^*-álgebras isomorfas. Logo, como uma conseqüência deste fato, temos que dado um produto cruzado parcial $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, $\mathcal{A}\delta_e \cong \mathcal{A}$.

Agora, defina a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} E_0 : C_0 &\longrightarrow \widetilde{B}_e \\ (a_h)_{h \in G} &\longmapsto (a_e \delta_{eh})_{h \in G}. \end{aligned}$$

Note que ela é claramente $\mathbb{C}$-linear. No que segue, provaremos que E_0 é uma aplicação contínua, e portanto pode ser estendida para $C^*(\mathscr{B})$. Por fim, verificaremos que a sua extensão será uma esperança condicional. Para provar a continuidade de E_0 faremos uso do lema B.2.18.

Observe que para $(b_h)_{h\in G} \in \mathcal{M}_0$ arbitrário,

$$\begin{aligned}\big\|E_0\big((b_h)_{h\in G}\big)\big\| = \big\|(b_e\delta_{eh})_{h\in G}\big\| = \|b_e\| = \|T_{b_e}\| \leq \left\|\sum_{h\in G} T_{b_h}\right\| \\ = \big\|\varphi(b_h)_{h\in G}\big\| \leq |||\ (b_h)_{h\in G}\ |||.\end{aligned}$$

Portanto, E_0 é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear e contínua. Logo, pode ser estendida para $C^*(\mathscr{B})$. Seja E a extensão de E_0.

Teorema B.2.21. *A aplicação $E : C^*(\mathscr{B}) \longrightarrow \widetilde{B}_e$, definida acima, é uma esperança condicional.*

Demonstração. Primeiramente observe que E, por construção, é $\mathbb{C}$-linear. Vamos verificar portanto que E satisfaz os demais axiomas de esperança condicional. Sejam $(a_h)_{h\in G}, (c_h)_{h\in G} \in C_0$, $(b_e\delta_{eh})_{h\in G} \in \widetilde{B}_e$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrários; então, temos que

(i) $E\big((b_e\delta_{eh})_{h\in G}\big) = (b_e\delta_{eh})_{h\in G}$. Logo, E é sobrejetora.

(ii) $E^2\big((a_h)_{h\in G}\big) = E\circ E\big((a_h)_{h\in G}\big) = E\big((a_e\delta_{eh})_{h\in G}\big) = (a_e\delta_{eh})_{h\in G}$, donde segue que $E^2 = E$.

(iii)
$$\begin{aligned}E\big((b_e\delta_{eh})_{h\in G}(a_h)_{h\in G}\big) &= E\big((b_e a_h)_{h\in G}\big) = (b_e a_e\delta_{eh})_{h\in G} \\ &= (b_e\delta_{eh})_{h\in G}(a_e\delta_{eh})_{h\in G} = (b_e\delta_{eh})_{h\in G}E\big((a_h)_{h\in G}\big).\end{aligned}$$

(iv) Note que, $E\Big(\big((a_h)_{h\in G}\big)^*\big((a_h)_{h\in G}\big)\Big) = \sum_{h\in G} a_h^* a_h \geq 0$. Agora, tome $x \in C^*(\mathscr{B})$ arbitrário; então, existe $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq C_0$ tal que $y_\lambda \to x$, logo $y_\lambda^* y_\lambda \to x^*x$. Como E é contínua, temos que

$$E(x^*x) = E\Big(\lim_{\lambda\to\infty} y_\lambda^* y_\lambda\Big) = \lim_{\lambda\to\infty} E(y_\lambda^* y_\lambda) \geq 0,$$

e então $E\big(C^*(\mathscr{B})_+\big) \subseteq \Big(\widetilde{B}_e\Big)_+$.

Portanto, E é uma esperança condicional.

■

Referências Bibliográficas

[1] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics, 1.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, second edition, 2002.

[2] L. A. Coburn. The C^*-algebra generated by an isometry. *Bull. Amer. Math. Soc.*, (73):722–726, 1967.

[3] M. Dokuchaev and R. Exel. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(5):1931–1952, 2005.

[4] R. Exel. Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms and generalized pimsner-voiculescu exact sequences. *J. Funct. Anal.*, (122):361–401, 1994.

[5] R. Exel, M. Laca, and J. Quigg. Partial dynamical systems and C^*-algebras generated by partial isometries. *J. Operator Theory*, (47):169–186, 2002.

[6] J. M. G. Fell and R. S. Doran. *Representations of $*$-Algebras, Locally Compact Groups, and Banach $*$-Algebraic Bundles*, volume 1 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press, Inc., 1988.

[7] J. M. G. Fell and R. S. Doran. *Representations of $*$-Algebras, Locally Compact Groups, and Banach $*$-Algebraic Bundles*, volume 2 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press, Inc., 1988.

[8] K. Horák and V. Müller. Functional model for commuting isometries. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 39 (114)(2):370–379, 1989.

[9] K. K. Jensen and K. Thomsen. *Elements of KK-Theory.* Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser, Boston, Massachusetts, 1991.

[10] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., 1989.

[11] E. L. Lima. *Espaços métricos.* Projeto Euclides. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, third edition, 1993.

[12] G. W. Mackey. *Unitary Group Representations in Physics, Probability, and Number Theory.* Mathematics Lecture Note Series. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1978.

[13] F. C. P. Milies. *Anéis e Módulos.* Publicações do Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo, São Paulo, 1972.

[14] G. J. Murphy. *C*-algebras and operator theory.* Academic Press Inc., San Diego, 1990.

[15] V. S. Sunder. *Functional analysis: spectral theory.* Birkhäuser Verlag, 1998.

[16] N. E. Wegge-Olsen. *K-Theory and C^*-Algebras: A Friendly Approach.* Oxford University Press, Oxford, England, 1993.

[17] S. Willard. *General topology.* Addison-Wesley Series in Mathematics. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1970.