UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

A Organização Praxeológica do objeto triângulo nos livros didáticos da 7ª série do Ensino Fundamental

Dissertação de Mestrado

Cristini Kuerten Maia

Florianópolis
2008

Cristini Kuerten Maia

A Organização Praxeológica do objeto triângulo nos livros didáticos da 7ª série do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Científica e Tecnológica.

Orientadora: Profa. Dra. Neri Terezinha Both Carvalho.

Florianópolis
2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

"A ORGANIZAÇÃO PRAXIOLÓGICA DO OBJETO TRIÂNGULO NOS LIVROS DE 7ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL"

Dissertação submetida ao Colegiado do Curso de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica em cumprimento parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Científica e Tecnológica

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 19/09/2008

Drª. Neri Terezinha Both Carvalho (Orientadora) NBCarvalho

Drª. Mirian Buss Gonçalves (Examinadora) Mirian B Gonçalves

Drª. Cláudia Regina Flores (Examinadora) Cláudia Flores

Drª. Sônia Maria da Silva Corrêa de Souza Cruz (Suplente)

Dr. José de Pinho Alves Filho
Coordenador do PPGECT

Cristini Kuerten Maia

Florianópolis, Santa Catarina, setembro de 2008.

Agradecimentos

Muitas pessoas contribuíram de certo modo para que fosse possível a realização dessa etapa da minha vida. Ao citar de modo especial algumas delas, não significa falta de reconhecimento da colaboração das demais. Registro aqui meus agradecimentos àquelas pessoas ou instituição que, no meu entender, participaram mais diretamente dessa minha formação. Muito obrigado...

- À Universidade Federal de Santa Catarina, em especial aos professores e funcionários do Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica pelos ensinamentos, pelo convívio, apoio, atenção e compreensão.

- À Professora Doutora Neri Teresinha Both Carvalho, pela acolhida como orientadora, feita com muita participação e empenho. E, sobretudo pela paciência, incentivo e compreensão nos momentos mais difíceis. Sua atuação foi fundamental para a minha formação. Obrigado, minha grande amiga, por tornar meu sonho realidade.

- As Professoras Doutoras Claudia Regina Flores e Mirian Buss Gonçalves, integrantes da banca examinadora, pela aceitação, sugestões e comentários que contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

- À minha família, em especial aos meus pais, Luiz Kuerten e Marlene O. Kuerten, pelo amor expresso de várias formas: pela paciência, compreensão, cooperação e apoio irrestrito. Principalmente por me oferecerem a oportunidade de estudar.

- Ao meu esposo, Dirlei Marcelino Maia, por estar sempre ao meu lado pronto para me apoiar, incentivar e auxiliar. Meu companheiro de todas as horas, com quem compartilho vitórias e derrotas, sofrimentos e alegrias, perdas e conquistas, em suma, a vida.

- As minhas amigas do mestrado e da vida, pelo convívio e amizade, em especial, a Karina, a Josiane, a Myllene, a Amanda e a Káthia pelas palavras de incentivo e de afeto de cada dia.

A todos aqueles que, de certa forma, incentivaram e desejaram esta conclusão.

Resumo

O objetivo deste estudo foi conhecer a Teoria Antropológica do Didático, mais especificamente, a Organização Praxeológica e identificar essa organização do objeto triângulo nos livros didáticos da 7ª série do Ensino Fundamental. Estudamos a Teoria Antropológica do Didático e tomamos como referencial teórico de nosso trabalho a Organização Didática e a Organização Matemática. Neste contexto, estudamos as condições de existência do objeto triângulo em dois livros didáticos do Ensino Fundamental. Nosso trabalho exemplifica e mostra a importância do uso da Teoria Antropológica na análise de livros didáticos. Conseqüentemente é um indicativo da relevância desta teoria na formação de professores.

Palavras Chaves: Teoria Antropológica do Didático, triângulo, organização didática, organização matemática e livro didático.

Abstract

The objective of this study was to know the Anthropological Theory of the Didactic, specifically, the Praxeological Organization and identify this organization of the triangle object in the class books of the Junior High School. We studied the Anthropological Theory of the Didactic and took as theoretical referential of our work the Didactic Organization and the Mathematical Organization. In this context, we studied the existence conditions of the triangle object in two class books of the Fundamental Teaching. Our work exemplifies and exhibits the importance of the use of the Anthropological Theory in the class books analysis. Consequently, it is an indicative of the relevance of this theory in the teachers' formation.

Key-words: Anthropological Theory of the Didactic, triangle, didactic organization, mathematical organization and class book

Índice

Introdução

Um breve estudo nos livros didáticos do Ensino Fundamental, mais precisamente, nos capítulos que abordam conteúdos da Geometria, nos permitiu perceber que de 5ª à 8ª série são dois os principais teoremas estudados em Geometria: o Teorema de Thales e o Teorema de Pitágoras.

É interessante notar que o Teorema de Pitágoras trata de uma condição característica de um triângulo retângulo e está inserido em diferentes situações problemas, tanto na geometria plana como na geometria espacial. Enquanto que, o Teorema de Thales também contempla em determinadas situações a configuração do triângulo além de dar a sustentação teórica aos casos de semelhança de triângulo, conteúdo muito importante na geometria.

Entendendo que o triângulo, na geometria, dá lugar a uma gama de resultados teóricos e de problemas muito interessantes, ficamos motivados a conhecer o quê sobre o triângulo é estudado no Ensino Fundamental. Se entendermos que a geometria é uma área da Matemática importante na formação do estudante do Ensino Fundamental, conhecer o quê e como são abordados os conceitos que envolvem a configuração do triângulo, nós consideramos importante para a formação do professor. O professor ter clareza destes elementos, leva-o a assegurar um trabalho de qualidade que busca uma aprendizagem significativa. Um breve estudo de Planos de Ensino e dos Parâmetros Curriculares Nacionais, indicou que os Teoremas citados são em geral estudados na 7ª série, fato que nos levou a restringir nosso estudo ao livro didático desta série.

Propomo-nos, então, tendo como referência a Teoria Antropológica do Didático, mais precisamente, a Organização Praxeológica, estudar a Organização Didática e a Organização Matemática referente ao triângulo, enquanto objeto matemático oficial de ensino nos livros didáticos da 7ª série do Ensino Fundamental.

Esta Teoria oferece um instrumental muito rico e relevante para análise de situações de ensino, seja de aulas planejadas por um professor, seja para análises de proposições de abordagem dos livros didáticos. As conclusões apresentadas em nosso estudo, para o qual usamos esta teoria como referencial teórico, nos permitiu a identificação do real apresentado no material analisado.

Apresentamos nosso estudo em três capítulos.

No capítulo 1 fizemos um estudo dos trabalhos publicados em Educação Matemática que envolvem direta ou indiretamente o triângulo, como também, um estudo do que indica os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN sobre o ensino da Matemática, em especial, sobre o ensino da geometria no Ensino Fundamental. Finalizamos o capítulo apresentando nossa questão de pesquisa e os objetivos de nosso estudo.

No capítulo 2 apresentamos elementos da Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard e destacamos os elementos que usamos como referencial teórico de nosso estudo.

No capítulo 3 apresentamos as análises dos livros didáticos da 7ª série do Ensino Fundamental. Nas análises dos livros buscamos identificar os elementos da Organização Praxeológica, ou seja, a Organização Didática e a Organização Matemática referente ao objeto triângulo.

Por fim, apresentamos as considerações finais deste trabalho.

Capítulo 1 - Análise Preliminar e Problemática

Neste capítulo apresentamos uma síntese de trabalhos publicados em Educação Matemática que envolvem direta ou indiretamente o triângulo. Como também, um estudo do que indica os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN sobre o ensino da Matemática, mais especificamente sobre a geometria, e considerações sobre o ensino do triângulo no Ensino Fundamental. Finalizamos o capítulo apresentando a problemática de nosso trabalho.

1.1 Artigos da Revista do Professor de Matemática

Um breve estudo de revistas da coleção "Revista do Professor de Matemática - RPM" da Sociedade Brasileira de Matemática, enquanto produção noosferiana[1], nos permitiu identificar artigos que versam sobre o triângulo. Vejamos os problemas que estudam alguns destes artigos:

No artigo "*Mania de Pitágoras*" Rosa (1983) apresenta as duas demonstrações mais usuais do Teorema de Pitágoras como também as quatro primeiras demonstrações desse mesmo teorema que constam na lista do professor Loomis[2].

No artigo "*Números Pitagóricos: uma fórmula de fácil dedução e algumas aplicações geométricas*" Rothbart (1985) usando apenas álgebra elementar obteve uma fórmula que gera todos os ternos de números pitagóricos[3].

Silva (1987) em seu artigo *"Uma verificação do Teorema de Pitágoras"* apresenta uma prova do Teorema de Pitágoras baseada na justaposição de dois modos diferentes. Esta

---

[1] Segundo Chevallard nooesfera é o lugar onde os saberes são manipulados com fins de ensino.

[2] "Elisha Scott Loomis era professor de matemática em Cleveland, Ohio. Era realmente apaixonado pelo Teorema de Pitágoras. Durante 20 anos, de 1907 a 1927, colecionou demonstrações desse teorema, agrupou-as e as organizou em um livro: "The Pythagorean Proposition" (A Proposição de Pitágoras). O professor Loomis Classificava as demonstrações de Pitágoras em dois tipos: provas algébricas (baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos) e provas e geométricas (baseadas em comparações de áreas)." (Rosa. 1983, RPM 2,p.14-17.)

[3] "Um dos teoremas mais antigos e mais famosos da Matemática é o teorema de Pitágoras que data aproximadamente 500 a.C. e afirma que $a^2 + b^2 = c^2$, onde a, b, e c são, respectivamente, os comprimentos de dois catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo. Segundo uma lenda, quando Pitágoras descobriu o teorema, ficou tão exultante que ordenou que bois fossem sacrificados aos deuses. Porém a descoberta posterior da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e sua conseqüência: o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles com catetos de comprimento dado por um inteiro, não pode ser representado por uma razão de inteiros – perturbou imensamente Pitágoras e seus seguidores pois eles estavam profundamente convictos de que dois comprimentos quaisquer fossem sempre múltiplos inteiros de algum comprimento unitário."(Rothbart e Paulsell.1985, RPM 7, p.49-51)

prova é diferente das seis provas apresentadas no artigo "Mania de Pitágoras" de Euclides Rosa (RPM 2, p.14) .

No artigo *"O centro de uma figura. Qual?"* Imenes (1988) nos mostra como achar o centro geográfico do mapa do Brasil por meio de alguns elementos do triângulo. Ressaltando que se estamos interessados em encontrar o ponto do mapa em que ele fique equilibrado na ponta do lápis, então definimos o baricentro. Se, como os geógrafos e cartógrafos, pretendemos encontrar um ponto que na medida do possível fique eqüidistante dos quatro extremos do Brasil, então devemos raciocinar com as mediatrizes. Imenes também afirma que de um modo geral não é possível falar em centro de um triângulo sem ambigüidade. Um triângulo qualquer tem quatro centros, em geral distintos. São eles: incentro (encontro das bissetrizes internas), circuncentro (encontro das mediatrizes), ortocentro (encontro das alturas) e o baricentro (encontro das medianas). (Imenes, 1988. RPM 12 p.15-17)

Matsufuji (1989) no artigo *"O teorema de Napoleão"* faz uma demonstração deste teorema utilizando apenas conceitos básicos de trigonometria.

> Enunciado do teorema: "Tome um triângulo arbitrário. Com base em cada um de seus lados, construa (externamente) um triângulo eqüilátero.Os centros desses três triângulos eqüiláteros são ainda vértices de um triângulo eqüilátero."(Matsufuji,1989. RPM 14 p.47-48)

Murari e Barbosa (1990) no artigo *"Divagações sobre um problema curioso"* apresentam o seguinte problema: Dois triângulos congruentes têm 3 lados e 3 ângulos respectivamente congruentes. Sabe-se que bastam 3 elementos de um dos triângulos serem congruentes a 3 elementos do outro para podermos concluir que os triângulos são congruentes[4]. Apresentam ainda, um fato muito curioso: a existência de pares de triângulos que têm cinco elementos respectivamente congruentes sem que os triângulos sejam congruentes. Além disso, eles nos mostram como construir esses tipos de triângulos.(Murari e Barbosa, 1990. RPM 16 p. 13-18)

Costa e Sebastiani (1990) no artigo "*Onde Morar*? – O Problema de Minimizar Redes de Comunicação" apresentam o seguinte problema*: Um professor sobrevive lecionando em três colégios. Qual é o melhor lugar para ele morar? Procura-se um ponto P que minimize a soma das distâncias a três pontos A_1, A_2 e A_3.* Este problema é conhecido como problema de Steiner ou de Fermat e pode ser estendido para n pontos (O professor que necessita trabalhar em n colégios para sobreviver!). Este trabalho apresenta uma resolução do problema para três

[4] "elemento" neste caso significa lado ou ângulo

pontos não colineares, sendo o mesmo subdividido em dois casos: no primeiro, o triângulo formado têm todos os ângulos menores que 120º. No segundo, o triângulo formado tem um ângulo maior ou igual a 120º. (Costa e Sebastiani, 1990. RPM 16 p. 41- 46)

No artigo "*Triângulos Especiais*" Sant'Ana (1990) faz uma simples demonstração do teorema: "Só existem cinco triângulos que tenham perímetro numericamente igual à área, quando fixamos a unidade e exigimos que os lados do triângulo tenham medidas inteiras." (Sant'Ana, 1990. RPM 17 p. 41- 44)

No artigo - *De São Paulo ao Rio de Janeiro com uma corda"ideal"* - Duarte (1992) nos apresenta um problema interessante que é resolvido de maneira simples com o auxílio de conhecimentos básicos de triângulos.

> Problema: "Tome uma corda esticada, unindo um ponto A de São Paulo a um ponto B do Rio de Janeiro. Suponha que a distância entre estes pontos A e B seja exatamente 400 Km. Tome uma outra corda com um metro a mais que a anterior, ou seja, com 400.001 metros, e fixe também suas extremidades nos pontos A e B. Ela ficará bamba. Levante esta corda pelo seu ponto médio formando um triângulo. Pergunta-se:
> i) A altura h deste triângulo formado será maior ou menor que um metro?
> ii) O que ocorreria com a altura se o triângulo fosse retângulo?"
> (Junior,Duarte 1992. RPM 22 p. 1– 3)

Dalcin (1998) em seu artigo *"A Demonstração feita por Heron"* faz uma demonstração de como calcular a área de um triângulo usando apenas os seus lados, e não a altura, como aquela fórmula que geralmente é usada na escola. Esta demonstração tem algumas alterações em relação a que foi feita por Heron de Alexandria no século II. (Dalcin, 1998. RPM 36 p. 3 - 5)

Morgado (2000) em seu artigo *"Coordenadas para os centros do triângulo"* nos mostra que assim como a fórmula do baricentro e do incentro tem algo comum, ou seja, o centro é uma média ponderada dos vértices. As fórmulas do ortocentro e do circuncentro também têm expressões análogas. (Morgado 2000. RPM 43 p. 27 – 30).

Destacamos a diversidade de problemas interessantes apresentados na Revista da Sociedade Brasileira de Matemática que envolvem o triângulo. Podemos dizer que nestes artigos há situações onde o triângulo é ferramenta[5] para a resolução de problemas, como nos

[5] Conforme Douady (1984) um objeto matemático torna-se uma ferramenta quando o mesmo é utilizado para resolver problemas ou interpretar novas questões. Um teorema, por exemplo, pode ter um estatuto de ferramenta para a resolução de uma atividade quando ele não for o objeto de ensino dessa atividade.

artigos de Costa e Sebastiani (1990), Duarte (1992) e Imenes (1988). Como também, em outros artigos, há situações onde triangulo é objeto de estudo como exemplo, podemos citar os artigos de Rosa (1983), Silva (1987), Matsufuji (1989), Sant`Ana (1990), Murari e Barbosa (1990), Dalcin (1998) e Morgado (2000).

1.2 Estudo de Pesquisas

Vários trabalhos na área da Educação Matemática em Geometria versam sobre o triângulo. Nos ateremos neste estudo a apresentar pesquisas que tratam do ensino-aprendizagem de conceitos ou de teoremas que envolvam as configurações do triângulo, direcionadas para as séries finais do Ensino Fundamental ou para a primeira série do Ensino Médio. Escolhemos para nosso estudo dissertações do banco de teses da Capes. A saber, Pirola (1995), Silva (1997), Arnaldi (1997), Silva (1999), Lindegger (2000), Biral (2000), Bastian (2000), Haruna (2000), Mira (2001), Santos (2003), Fraga (2004) e Silva (2005). Apresentamos aqui alguns elementos destas pesquisas:

A pesquisa de Pirola (1995) teve como objetivo estudar a formação dos conceitos de triângulo e paralelogramo com alunos de 5ª à 8ª séries do Ensino Fundamental. Baseando-se no modelo de formação de conceitos de Klausmeier (1977) e no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele (in matos, 1992), Pirola concluiu que os alunos das 7ª e 8ª séries conseguem identificar o conceito de triângulo e paralelogramo em termos dos seus atributos definidores, exemplos e não exemplos, de maneira mais completa que os alunos da 5ª e 6ª séries.

Silva (1997) tomando como referência as conclusões do Sistema de Avaliação de Educação Básica do ano de 1996 e os estudos de Pavanello (1993) e de Lorenzato (1995) que sinalizavam a necessidade de metodologias apropriadas para o ensino-aprendizagem da Geometria, desenvolveu uma pesquisa que tinha por objetivo permitir o professor estudar o Teorema de Thales dando significado a esta propriedade e identificar as dificuldades decorrentes da aplicação deste teorema. Usou como metodologia a elaboração e aplicação de uma seqüência didática baseada na dialética ferramenta-objeto e no Jogo de Quadros de Douady (1986). A Seqüência Didática fez uso do software Cabri-Geometre como suporte material e possibilitou aos professores compreender os erros e as dificuldades mais freqüentes dos alunos, bem como, a importância de dar significado aos conceitos geométricos, integrando o Teorema de Thales à outros campos da Matemática. Destacamos este trabalho por entender que é no estudo de situações problemas envolvendo a configuração do triângulo onde rotineiramente aplicamos o Teorema de Thales.

Arnaldi (1997) teve por objetivo principal estudar as dificuldades inerentes ao processo de ensino e aprendizagem do conceito geométrico de semelhança de triângulos com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. Desenvolveu um trabalho experimental visando uma melhor compreensão do processo de ensino-aprendizagem do conceito de semelhança de triângulos. Neste trabalho Arnaldi optou por realizar uma pesquisa qualitativa, cujos dados foram coletados durante a aplicação de uma seqüência didática. Nesta seqüência foram trabalhadas desde noções básicas de Geometria e utilização de instrumentos de desenho, até se chegar à semelhança de triângulos. A análise se baseou em observar os alunos e suas produções durante o transcorrer das sessões. Também foram levadas em conta as interferências que afetaram o ambiente escolar durante o desenvolvimento das atividades. Como resultado da pesquisa, três níveis de dificuldades foram identificados: o institucional, o de sala de aula e o individual. Verificou-se que, embora tais níveis sejam interligados, as dificuldades se manifestaram mais claramente no plano individual. Neste, os alunos apresentaram dificuldades para atribuir significados matemáticos adequados, apropriar-se da linguagem matemática, extrapolar o nível de manipulação de materiais concretos e instrumentos de desenho e ainda reinvestir conceitos e propriedades geométricas.

Silva (1999), conhecendo a dificuldade que os alunos da 7ª série do Ensino Fundamental têm para entender o Teorema de Pitágoras, em seu trabalho, buscou subsídios para a construção de uma proposta de ensino que resgatasse o prazer de se estudar matemática. Utilizando-se da história da matemática sob uma perspectiva construtivista, Silva em um ambiente computacional, produziu, testou e avaliou um software o qual denominou de: O Software Pitágoras. Os resultados do trabalho mostraram que a utilização do computador em sala de aula nos dias atuais propicia aos alunos um aprendizado estimulante, dinâmico, reflexivo e criativo do Teorema de Pitágoras.

Lindegger (2000) partindo do entendimento que o estudo da trigonometria, de maneira geral, apóia-se nos conceitos básicos das razões trigonométricas do triângulo retângulo, fez o seguinte questionamento: como abordar o conteúdo relativo à trigonometria do triângulo retângulo (seno, co-seno e tangente) de forma a possibilitar que o aluno compreenda esses conceitos? Baseando-se nessa questão, o objetivo desta pesquisa foi investigar uma abordagem para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, onde se pretendeu introduzir os conceitos das razões trigonométricas seno, co-seno, e tangente a partir da manipulação de modelos. Para fazer uma seqüência didática através de modelos, Lindegger se apropriou das idéias de Vygotsky, no que diz respeito a aprendizagem, a zona de desenvolvimento proximal e sobre a relação conceito espontâneo e conceito científico, bem como, dos pensamentos de Vergnaud sobre a teoria dos campos conceituais e das idéias de Brousseau, no que se refere a teoria das situações didáticas. Partindo da hipótese de que a seqüência didática deve ser criada tendo como base situações problemas, a partir de questões simples, contextualizadas, concretas, e com isto facilitar a construção e a apropriação dos conceitos da trigonometria, a pesquisa foi realizada com duas turmas, ambas da oitava série do Ensino Fundamental. Uma das turmas foi considerada como grupo de referência (GR) e a outra foi considerada como grupo experimental (GE). A análise dos resultados envolveu duas etapas: a análise quantitativa e a qualitativa dos instrumentos diagnósticos. O estudo ofereceu pistas significativas referentes ao processo ensino-aprendizagem. Lindegger concluiu que o processo de construção dos conceitos básicos de trigonometria ganha força, quando se inicia por meio da resolução de problemas concretos, vindos da realidade do aluno, dirigindo para os problemas formais onde os conceitos ganham significados mais abstratos e abrangentes.

Biral (2000), num primeiro momento, fez uma abordagem histórica da Trigonometria desde seu surgimento até o século XVII. A partir das fontes históricas, fez uma organização da evolução da Trigonometria, enfatizando as produções nessa área e seus respectivos autores, abrangendo todos os países onde ela se desenvolvia. No segundo momento de seu estudo, fez uma análise de livros didáticos dos séculos XVIII, XIX e XX, levando em consideração quatro aspectos: a biografia dos autores, a estruturação de cada obra, as definições de Trigonometria e os problemas práticos envolvendo os triângulos. Esse tratamento permitiu estabelecer uma evolução da apresentação da trigonometria escolar.

Bastian (2000) em seu trabalho "O Teorema de Pitágoras" focalizou o ensino desse teorema por meio de uma abordagem que visava enfatizar, inicialmente, o caráter necessário e suficiente do Teorema de Pitágoras, para chegar, posteriormente, à forma da igualdade pitagórica. Para que isso ocorresse, inicialmente fez um estudo histórico e epistemológico do Teorema de Pitágoras, visando buscar sua gênese histórica e também identificar os obstáculos epistemológicos. Em seguida, apresentou dezoito demonstrações do Teorema de Pitágoras, visando ilustrar o emprego de diferentes métodos. Em cada demonstração fez uma análise do ponto de vista matemático e uma análise do ponto de vista didático. Destacou ainda as aplicações do teorema de Pitágoras na 7ª e 8ª série do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. A pesquisadora buscou verificar também como o Teorema de Pitágoras foi abordado nos livros didáticos no decorrer das mudanças curriculares. Para isso fez uma análise de doze livros didáticos e das Propostas Curriculares da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Após estes estudos, redefiniu o objetivo de trabalho e elaborou uma seqüência didática, tendo como público-alvo alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. A seqüência foi organizada em duas fases: primeiramente, a realização de atividades que permitissem ao aluno conjecturar a existência da relação pitagórica, ou seja, seu caráter necessário e suficiente (se um triângulo é retângulo, então vale a igualdade pitagórica: “O quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos”), e sua recíproca. Na segunda fase da seqüência, com o intuito de desenvolver no aluno condições para o emprego adequado do teorema como ferramenta, surgiu a realização de atividades mais complexas. Assim, em vez de tomar conhecimento da igualdade pitagórica por meio de uma fórmula, como foi observado nos livros didáticos analisados, o estudante tem a possibilidade de trabalhar previamente com a condição de existência do triângulo auxiliando-o a perceber sua utilidade e importância. Tudo levou a crer que o tipo de abordagem apresentado na seqüência didática imprime ao Teorema de Pitágoras um maior significado. Além disso, as atividades constitutivas da seqüência, segundo os resultados, parecem ter contribuído para desenvolver nos alunos algumas capacidades relativamente à aplicação do teorema como ferramenta para a resolução de problemas.

Haruna (2000) diante da vontade em desenvolver um trabalho na área de Geometria e, se possível, utilizando o software Cabri-Géomètre, e, diante dos resultados dos exames do SAEB[6] e SARESPE[7] quanto ao baixo rendimento dos alunos na área de Geometria, bem como, da análise dos resultados de pesquisas relacionadas à formação de professores que mostram as dificuldades destes em trabalhar esses conteúdos, Haruna resolveu então, investir seus estudos na área da Geometria, mais precisamente, no Teorema de Thales. Justifica sua escolha pela vasta aplicabilidade do Teorema de Thales, desde o Ensino Fundamental até a Universidade e por ser uma ferramenta de grande utilidade em construções geométricas. O objetivo de seu estudo foi analisar como se processa a apreensão do conceito do Teorema de Thales por alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. Levantou os obstáculos didáticos e epistemológicos, as variáveis de situação, observando os aspectos da percepção, das significações e do contexto. Ainda verificou até que ponto o uso do computador favorece a superação dos obstáculos ou proporciona o surgimento de outros. Para realizar este estudo Haruna primeiramente analisou o Teorema de Thales sob dois prismas: o lado da ciência matemática, estudando na história da matemática, sua origem, evolução, demonstrações mais

[6] SAEB – Sistema de Avaliação de Educação
[7] SARESPE - Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.

significantes e algumas aplicações; e o lado da didática e da psicologia cognitiva, explorando as variáveis de situação propostas por Brousseau, observando todos os conceitos implícitos e explícitos, suas formas de representação, procurando fazer uma análise deste objeto matemático em relação aos registros de representação semiótica definidos por Raymond Duval, das noções que estão relacionadas com ele e de suas aplicações. Sempre visando observar os aspectos da percepção, da significação e do contexto. Em seguida, com a finalidade de estudar os fenômenos relacionados com o ensino-aprendizagem do Teorema de Thales, viu-se necessário estudar como se processa a transformação do objeto da ciência da matemática ao objeto de ensino. Assim, foram analisadas as propostas curriculares do Estado de São Paulo, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, as experiências matemáticas, os livros didáticos e as questões propostas em avaliações de sistemas de ensino brasileiro. Tendo como base estes estudos preliminares, o problema central da pesquisa versou sobre a questão: "Como produzir uma seqüência de ensino que proporcione ao aluno a apreensão do teorema de Thales, observando os aspectos da percepção visual, das significações e do contexto?" Desta forma, então partiu para a segunda fase da pesquisa: a elaboração, aplicação e avaliação da seqüência didática. Na elaboração da seqüência didática abordou os conceitos de semelhança e o Teorema de Thales, seguindo alguns princípios da Engenharia Didática, utilizando como material de apoio pedagógico o software Cabri-Géomètre I, além dos instrumentos de desenho tradicional como régua, compasso, transferidor e da sobreposição de figuras. Elaborou também uma ficha de observação cifrada para facilitar e direcionar o trabalho de observação do desempenho e atuação dos alunos durante a aplicação da seqüência. Trabalhou com duas turmas da 8ª série: na turma A, com 30 alunos, aplicou a seqüência de ensino e, na turma B, com 31 alunos, utilizou o livro didático de forma tradicional. Ao todo, nessa experimentação, foram utilizadas, na 8ª série A, 25 aulas e, na 8ª série B 16 aulas. Após dois meses do término da seqüência aplicou um pós-teste nas duas turmas e o analisou de forma quantitativa e qualitativa. Ao observar as análises do pós-teste Haruna percebeu que a turma da 8ª série A, de forma geral, procurou resolver todas as questões, visto que a porcentagem de questões sem fazer foi baixa em relação a 8ª série B. A turma A em todas as questões observou-se uma porcentagem de acertos alta ou baixa, satisfatória ou não, porém demonstrou ter noção e saber aplicar o Teorema de Thales em várias situações e contextos, o que não correu com a turma da 8ªsérie B. Esta praticamente só resolveu as questões quando foram fornecidas a configuração e onde a aplicação do Teorema de Thales era direta e similar às atividades propostas nos livros didáticos.

Mira (2001) desenvolveu um estudo de caso com quatro alunos de uma turma de 8ª série do Ensino Fundamental sobre os conceitos de triângulos e de quadriláteros. Esta investigação tinha como objetivo encontrar respostas para duas questões: como alunos com deficiências de aprendizagem em conteúdos geométricos podem melhorar o desempenho e a compreensão em geometria após uma seqüência de atividades em classes e no Laboratório de Informática? E, qual é o papel da visualização na tela do computador para a construção dos conceitos de triângulos e quadriláteros por parte dos alunos e para o seu desempenho matemático? Para investigar tais questões, a pesquisadora atuou como professora investigadora. Utilizou uma metodologia qualitativa e fundamentou seu trabalho nas concepções de Ensino-Aprendizagem com várias médias, nas várias perspectivas da visualização, na geometria dinâmica, e nas novas teorias de inteligências entre outras. Elaborou uma seqüência didática com atividades no computador fazendo uso do software "Geomter's Sketchpad" e atividades com papel e lápis. Observou que os conceitos básicos de triângulos e quadriláteros não eram de domínio dos alunos. Além disso, os alunos mostraram ter dificuldades para argumentar sobre o que haviam feito. Não conseguiam visualizar as condições necessárias e suficientes para construir no computador essas figuras.

Santos (2003) considerando que nos últimos anos os professores têm priorizado o ensino da Aritmética e da Álgebra, em detrimento da Geometria, e considerando a importância do conceito de Semelhança de Triângulos no campo da Geometria, pois o mesmo constitui-se em um ponto basilar (aliado a outras propriedades de um triângulo e outros conceitos matemáticos), realizou um estudo sobre as formas de abordagens de Semelhança nos atuais Livros Didáticos de Matemática recomendados pelos MEC para o Ensino Fundamental. Verificou quais as contribuições, do ponto de vista cognitivo, que os livros permitem possibilitar à aprendizagem significativa do tópico Semelhança de Triângulos. Trabalhou a partir da montagem e estudo de mapas conceituais. Constatou que, apesar de não seguirem todas as orientações didáticas propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, os livros analisados abordam o conteúdo de forma que é possível conduzir a aprendizagem do tópico em questão a uma aprendizagem significativa do mesmo.

Fraga (2004) desenvolveu um estudo de cunho qualitativo, tendo como foco principal a análise histórica da abordagem do tema triângulo nos livros didáticos a partir do Movimento da Matemática Moderna até os dias atuais. Para a análise, foram selecionadas nove coleções de livros. Escolheu livros que foram ou que ainda são utilizados nas escolas do estado do Espírito Santo. Para definir as categorias de análise dos livros a pesquisadora fez uso da metodologia de Análise de Conteúdo e, separou o período histórico de análise em três períodos com características específicas: período I com forte influência do Movimento da Matemática Moderna; período II onde percebeu-se o declínio desse movimento e período III que trata dos livros atuais. A pesquisa buscava também verificar a relevância dada à geometria no Ensino Fundamental neste contexto histórico e seus desdobramentos nos dias atuais. Assim, Fraga desenvolveu ainda um questionário e fez várias entrevistas com os professores da rede de Ensino Municipal de Vitória. Verificou-se nos livros didáticos analisados, diferentes ênfases para o ensino do triângulo de acordo com o período histórico do livro, o que nos revela as diferentes importâncias dada a Geometria nos períodos históricos. Observou-se nas falas dos professores da rede municipal de Vitória e nos livros didáticos que estamos vivendo uma época de valorização da geometria, porém estes professores revelaram que possuem algumas dificuldades de ensinar o triângulo como objeto de estudo da Geometria.

Silva (2005) preocupado com a abordagem nos livros didáticos de determinados assuntos, especialmente da trigonometria do triângulo retângulo, devido às relações trigonométricas aparecerem geralmente prontas e desprovidas de significado. Constatou ainda, por meio de seus estudos, que várias pesquisas em educação matemática onde todas eram unânimes em apontar a falta de sentido que as abordagens tradicionais traziam para o processo de ensino-aprendizagem na trigonometria. Notou que poderia com seu estudo, contribuir com a produção de significado de maneira diferente das pesquisas anteriores, visto que, sua pesquisa buscava trazer a articulação entre as construções geométricas e as transformações no plano para o tratamento figural. Num primeiro momento, fez um estudo epistemológico da trigonometria no triângulo retângulo para saber como ocorreu a evolução conceitual deste tema. Seguiu com o estudo da transformação do objeto matemático ao objeto de ensino, onde analisou os Parâmetros Curriculares Nacionais e os livros didáticos. Por fim, tendo como base os estudos anteriores, elaborou uma seqüência didática que procurou produzir uma aprendizagem significativa das relações trigonométricas do triângulo retângulo, por meio de situações que levassem o aluno a manipulação figural provocada pelas construções geométricas e das transformações no plano. Aplicou uma seqüência didática e nos relatos da pesquisa tivemos acesso a análise a priori e a análise a posteriori, baseando-se na dialética ferramenta-objeto (Douady,1991), na noção de registros de representação (Duval,1995) e nos fenômenos didáticos observados na análise do livro didático.

Conclusão

Podemos perceber, pelo número de pesquisas na área de Educação Matemática, apresentadas aqui, que muitos pesquisadores estão preocupados com o ensino-aprendizagem da Geometria. Das doze pesquisas analisadas temos:

- uma sobre a formação dos conceitos de triângulos e quadriláteros;
- uma sobre a formação de conceitos de triângulo e paralelogramo;
- duas sobre o Teorema de Thales;
- duas sobre semelhança de triângulos;
- duas sobre o Teorema de Pitágoras;
- duas sobre as razões trigonométricas do triângulo retângulo;
- uma sobre a abordagem histórica da trigonometria;
- uma sobre a abordagem histórica do triângulo.

Este estudo nos permitiu ilustrar que pesquisas relevantes têm sido desenvolvidas colocando em suas experimentações, mesmo que de forma implícita, a configuração do triângulo. Destas, algumas tratam da elaboração de seqüências de ensino com o propósito de obter uma maior aprendizagem, outras, ou parte delas, tratam da análise de livros didáticos. Com base nestas pesquisas estudadas podemos afirmar que o triângulo é uma figura geométrica muito presente no ensino e nas pesquisas em Geometria e se apresenta de duas formas:

a) o triângulo como figura geométrica geradora de outro saber, como ocorre na Trigonometria, no Teorema de Pitágoras e no Teorema de Thales;

b) o triângulo onde ele é o próprio objeto de estudo, como ocorre no conteúdo referente à semelhança de triângulos.

A riqueza de conteúdos da Geometria envolvendo a figura geométrica do triângulo nas pesquisas, coloca o triângulo como uma das mais importantes figuras, no contexto do Ensino Fundamental e Médio. Os dois principais Teoremas da Geometria, estudados no Ensino Fundamental, são o Teorema de Thales e Teorema de Pitágoras. O Teorema de Pitágoras é formulado a partir da configuração do triângulo e, em muitos problemas a configuração do triângulo surge e dá lugar ao Teorema de Thales.

As pesquisas de Biral (2000), Bastian (2000), Santos (2003), Fraga (2004), tratam da análise de livros didáticos. No entanto, estes estudos não explicitam o que realmente consta nos livros didáticos do Ensino Fundamental sobre o triângulo. Esta constatação nos motiva a realização de um estudo que busca identificar quais conteúdos sobre o triângulo são abordados nos livros didáticos.

1.3 Estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais referente ao Ensino da Matemática

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais encontramos referências sobre "como" e "o quê ensinar". Por isso, apresentamos aqui um breve estudo, onde buscamos identificar se estes documentos oficiais fazem referência ao objeto "triângulo".

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN foram lançados em 1998 pelo Ministério da Educação e do Desporto com o intuito de servir de apoio às discussões e ao desenvolvimento do projeto educativo das escolas brasileiras, visando uma reflexão sobre a prática pedagógica, o planejamento das aulas, como também, a seleção dos materiais didáticos e recursos tecnológicos.

Aspectos Gerais

Segundo os PCN a Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. Esta visão se opõe àquela presente na maioria da sociedade, a qual considera a Matemática como uma ciência verdadeira e imutável. Sendo a matemática fruto da construção humana, a mesma não evoluiu de forma linear e logicamente organizada, mas sim seguindo caminhos diferentes nas diversas culturas. Os PCN destacam que as inter-relações entre as várias teorias matemáticas, sempre tiveram efeitos altamente positivos para o crescimento do conhecimento nesse campo do saber.

Os PCN também abordam o papel da escola perante a construção da cidadania, visto que, a sobrevivência na sociedade atual depende cada vez mais de conhecimento, pois diante da complexidade da organização social, a falta de recursos para obter e interpretar informações, impedem a participação efetiva e a tomada de decisões em relação aos problemas sociais. Além do mais, sabemos que atualmente há uma exigência no mercado de trabalho, de profissionais mais criativos e versáteis. Desse modo, é papel da escola desenvolver uma educação que não dissocie escola de sociedade, conhecimento e trabalho e que coloque o aluno ante desafios que lhe permitam desenvolver atitudes de responsabilidade, compromisso, crítica, satisfação e reconhecimento de seus deveres e direitos. Nesse contexto, qual é o papel da Matemática? Segundo, os PCN, a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e a justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios.

O Objetivo principal dos PCN na área do conhecimento matemático é o de adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela presença crescente dessa área em diversos campos da atividade humana.

Quanto a Geometria os PCN ressaltam que é um campo fértil para trabalhar com situações-problema, sendo um tema pelo qual os alunos tendem a se interessar naturalmente. Destaca, também a importância de explorar os estudos relativos a Geometria sobre a rubrica "Espaço e Forma" a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento.

O trabalho com Espaço e Forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, com visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. Nesse trabalho é relevante que se privilegie também a observação e a compreensão de relações e a utilização das noções geométricas para resolver problemas, em detrimento da simples memorização de fatos e de um vocabulário específico.

Em Ciclos Específicos – Ensino da Geometria

Conforme os PCN o ensino de Matemática para o terceiro ciclo do Ensino Fundamental, ou seja, para as 5ª e 6ª séries deve visar ao desenvolvimento do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno, entre outros, a:

- estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações;
- resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução.

Para a 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental são elencados como essenciais, entre outros, os seguintes conceitos e procedimentos:

- Distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclaturas própria.
- Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não-regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados.
- Composição e decomposição de figuras planas.
- Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros.
- Transformação de uma figura no plano por meios de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Verificação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Os PCN destacam que para o quarto ciclo do Ensino Fundamental, ou seja, para as 7ª e 8ª séries deve visar ao desenvolvimento do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno, entre outros, a:

- produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;
- ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo, e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.

Para a 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental são abordados como essenciais, entre outros, os seguintes conceitos e procedimentos[8]:

- Identificação de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais.
- Determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.

---

[8] Destacamos aqui aqueles que envolvem o triângulo.

- Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor;
- Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições desta), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.
- Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso;
- Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).
- Verificações experimentais a aplicações do Teorema de Tales.
- Verificações experimentais, aplicações e demonstração do Teoremas de Pitágoras.

Como constatamos os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN demonstram a importância do ensino de Geometria no Ensino Fundamental. Elencam inúmeros conceitos que devem ser estudados neste nível do ensino. Ressalta ainda, que as questões relacionadas com as formas e relações entre elas, com as possibilidades de ocupação do espaço, com a localização e o deslocamento de objetos no espaço, vistos sob diferentes ângulos são tão necessárias hoje, quanto foi no passado.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN explicitamente dão lugar ao objeto triângulo e há muitos objetos matemáticos que nascem a partir, ou que, tem como meio o triângulo, como exemplo citamos, o Teorema de Thales e o Teorema de Pitágoras.

Assim, considerando as pesquisas que estudamos, os artigos e os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN definimos as questões de nossa pesquisa, bem como, os objetivos de nosso trabalho.

1.4 Problemática

O estudo de pesquisas, artigos da SBM e dos PCN apresentados anteriormente nos mostram a importância do triângulo nos resultados fundamentais da Geometria. Os dois teoremas mais importantes da geometria estudados no Ensino Fundamental são formulados tendo como configuração de base o triângulo. Entendendo que o triângulo enquanto objeto matemático tem uma relevância indiscutível no ensino, questionamos sobre o quê e como é estudado o objeto triângulo no Ensino Fundamental. Considerando que é na 7ª série do Ensino Fundamental, que em geral, se realiza pela primeira vez a abordagem sistemática do Teorema de Thales e do Teorema de Pitágoras que envolvem a configuração do triângulo, restringimos nosso estudo na análise de livros didáticos desta série.

Por que estudo de livros didáticos?

Segundo Menssouri (1994), se quisermos conhecer como se apresenta um determinado saber em uma instituição particular é necessário efetuar a análise dos livros didáticos, pois: *"... os livros didáticos constituem uma realização efetiva e objetiva do ensino realizado em classe. Realização que é submetida ao olhar e ao julgamento público, e representativo da realidade da classe."* (Menssouri, 1994, p.46 – tradução nossa).

Na busca de um referencial teórico, optamos pela Teoria Antropológica do Didático, que nos pareceu fornecer os instrumentos para subsidiar este estudo. Entretanto, antes de usar a Teoria Antropológica do Didático como referencial teórico, fizemos um estudo da teoria para a posteriori fazermos a escolha de seus elementos como referencial para nossa análise dos livros didáticos. No estudo dos livros didáticos buscamos elementos de resposta da seguinte questão: Qual a Organização Matemática e Didática do saber triângulo nos livros didáticos de 7ª série do Ensino Fundamental?

Assim este trabalho tem por objetivo estudar a Teoria Antropológica do Didático, mais especificamente, a Organização Praxeológica e identificar essa organização do saber triângulo nos Livros Didáticos de 7ª série do Ensino Fundamental. Ou seja, buscamos em nosso estudo identificar como "vive", qual o "lugar", quais os saberes sobre o triângulo estão nos livros didáticos da 7ª série do Ensino Fundamental.

No próximo capítulo, apresentamos um estudo de elementos da Teoria Antropológica do Didático e, em seguida, no capítulo 3, o estudo dos livros didáticos.

Capítulo 2 - Elementos da Teoria Antropológica do Didático

Neste capítulo apresentamos alguns elementos da Teoria Antropológica do Didático.

Nosso relato da Teoria Antropológica do Didático tem como base os seguintes documentos:

- L'Analyse de Des pratiques Enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique.[9] (Chevallard, 1999)
- La Problématique Écologique, un Style D'Approche du Didactique.[10] (Chevallard, 1997)
- Concepts Fondamentaux de la Didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique.[11] (Chevallard, 1992)

Buscamos ser fiel aos textos, por isso muitas vezes nosso texto se restringe a uma tradução. Destes documentos, destacamos alguns tópicos em especial, como referência teórica para a análise dos livros didáticos que apresentamos no capítulo seguinte.

2.1 Teoria Antropológica do Didático

Com base no texto de Chevallard (1992), na Teoria Antropológica do Didático, três são os termos primitivos: objetos, instituições e pessoas. Os objetos são representados pela letra maiúscula O e ocupam uma posição privilegiada nesta teoria. Os objetos são os elementos de base da construção teórica elaborada por Chevallard. Como objetos matemáticos podemos citar, por exemplo: o triângulo, a equação do 2º grau, etc. As instituições no formalismo da Teoria Antropológica são representadas pela letra I e, as pessoas pela letra X. A palavra Instituição, nesta teoria, tem um significado mais amplo que o uso corrente. Ela pode ser: uma escola, uma sala de aula, como também existe a instituição "trabalho orientado", a instituição "curso" e a instituição "família". Segundo esta teoria um objeto existe em uma determinada instituição a partir do momento que uma pessoa X da instituição o reconhece como existente, ou seja, se X de I tiver uma certa relação com esse objeto. Mais precisamente, podemos dizer que o objeto O existe para X (ou para I), se existir o que Chevallard denota por R(X,O), uma relação pessoal de X com O, ou respectivamente, uma relação institucional de I com O, neste caso, representado por R(I,O). Assim para Chevallard

[9] A Análise das práticas dos professores na Teoria Antropológica do Didático.
[10] A Problemática Ecológica, um estilo da abordagem do Didático.
[11] Conceitos Fundamentais da Didática: perspectivas de abrangência de uma abordagem antropológica.

(1992), conhecer um objeto O é tanto para uma pessoa, como para uma instituição, ter uma relação com O. A pessoa X (ou a instituição I) conhece O se existir a relação de X com O, ou seja, se existir R(X,O). Podemos então dizer que um objeto existe se for conhecido por pelo menos uma pessoa ou uma instituição. Isto leva a uma concepção da *noção de conhecimento*. Segundo Chevallard, um objeto só existe porque é objeto de conhecimento. Vejamos como se articulam os objetos e as instituições.

A cada instituição I, está associado um conjunto de objetos O_I, chamados objetos institucionais (para I), que é o conjunto dos objetos O que I conhece, ou seja, para os quais existe uma relação institucional $R_I(O)$. Um objeto O é institucional para I ou, dito de outro modo, existe para I, quando I define uma relação (institucional) com O. Essa relação institucional $R_I(O)$ em termos gerais, indica o que é feito com o objeto O na instituição I, qual tipo de abordagem ou como é tratado o objeto O na instituição I.

Dada uma instituição I, dizemos que as pessoas X são os *sujeitos* dessa instituição quando elas fazem parte dessa instituição. Suponhamos então que a pessoa X entra na instituição I. Seja O um objeto institucional para I. O objeto O começará a “viver” para X sob as restrições da relação institucional $R_I(O)$. Em outras palavras, $R_I(O)$ vai construir, ou alterar a relação pessoal R(X,O).

O objeto O poderia ou não existir para X antes da sua entrada em I, mas mesmo assim a R(X,O) altera-se. Chevallard (1992) afirma que há aprendizagem para a pessoa X, relativamente ao objeto O quando R(X,O) se altera. Porém, é possível que a R(X,O) não se altere, diremos então que X nada aprendeu.

Cabe destacar que a instituição I não é um espaço homogêneo quando olhamos os objetos contemplados nesta instituição em relação aos sujeitos X de I. Na realidade, entre os objetos de I, podemos identificar aqueles que tem uma relação com I dependendo da posição que X ocupa no seio de I. Dado então um objeto institucional O, não existe uma relação única $R_I(O)$, mas para cada posição de *p* de *X* no seio de I, existe uma relação institucional com O para os sujeitos de I em posição *p*, ou seja, existe uma relação $R_I(p,O)$. Temos por exemplo que a relação de X na posição de professor com um determinado objeto O é diferente da relação de X na posição de aluno com o mesmo objeto desta instituição. Estes aspectos dão lugar às *instituições didáticas*.

Instituição didática

Seja I uma instituição e, seja $p = e$ uma posição de X no seio de I. Designaremos por "e" a *posição do aluno* (no seio de I). Diremos que I *é didática relativamente à posição e,* se existir um conjunto não vazio $E_I(e)$ incluindo O_I, cujos elementos são chamados *investimentos didáticos para os sujeitos em posição e*, onde I manifesta a intenção de tornar R(X,O) conforme $R_I(e,O)$ para qualquer X em posição *e* para qualquer O em $E_I(e)$.

Convém acrescentar que o conjunto $E_I(e)$ sempre contém estritamente O_I e que, se *p* é diferente de *e* e se O não pertence a $E_I(e)$, podemos ter $R_I(p,O)$ vazia, neste caso os sujeitos de I em posição *p* "não conhecem" O.

Dada uma instituição I, didática ou não, chamamos de *educação institucional* (ocasionada por I) ao conjunto de alterações operadas nas relações pessoais R(X,O), em que O é um objeto institucional, quando X se torna um sujeito de I.

A intenção didática em uma Instituição I dada, se manifesta por meio da formação do que chamamos de *sistemas didáticos* (SD). Um sistema didático comporta um ou vários sujeitos de I, que nele ocupam a *posição de professor* que designamos por "P", os sujeitos X de I na *posição de aluno* "e", e finalmente um objeto O. O conjunto $P_I(e)$ representa os investimentos didáticos de I na busca de alterar a relação R(Xe,O) na presença de X na posição P.

Problemática ecológica

A partir dos termos primitivos: os objetos, as pessoas e as instituições, Chevallard desenvolve a Teoria Antropológica do Didático sob um perspectiva ecológica, como um meio de questionar o real, movido por questões do tipo: "O que *existe* e p*or quê*? O que *não existe* e *por quê*? O que *poderia* existir? Sob quais *condições*? Quais *objetos* são possíveis de viver ou, ao contrário, quais são impedidos de viver nestas condições?"[12] (Chevallard in Artaud, 1997, p.1 – tradução nossa).

A formulação destas questões, as quais contemplam uma problemática do tipo ecológica, levou Chevallard a inspirar-se na ecologia biológica, principalmente no conceito de

[12] "Qu'est-ce qui *existe*, et *pourquoi*? Qu'est-ce qui *n'existe pás*, et *pourquoi*? Et qu'est-ce qui *pourrait* exister? Sous quelles *conditions*? Quels *objets* sont poussés à vivre, ou au contraire sont empêchés de vivre, sous tel ensemble de conditios?" (tradução nossa)

ecossistema[13]. Fazendo então uma analogia a esse conceito, olhando agora para um saber matemático, Chevallard identifica que nenhum saber pode viver isolado, e para conhecer este saber é preciso conhecer o meio em que ele vive e como é a relação deste saber com outros saberes.

Chevallard também faz uso das noções de habitat e nicho como metáforas. Para os ecologistas há uma distinção entre habitat e nicho. O habitat é qualquer tipo de endereço, o lugar de residência do organismo. Os nichos são as funções que o organismo aí exerce. Nos termos da Teoria Antropológica do Didático, habitats de um objeto matemático são os diversos tipos de instituições nas quais se encontra esse saber. Ao considerarmos esses habitat, percebe-se que o saber em questão ocupa regularmente funções bem distintas. Ou seja, a função do saber pode variar dependendo da instituição.

Noção de ecossistema

Segundo Artaud (1997), esse modo de pensar ecossistêmico levou certos pesquisadores da didática da matemática a identificar quatro tipos de ecossistemas, conforme o tipo de regime epistemológico ao qual se submete o saber matemático:

- ecossistema sábio, no qual se produz a matemática;
- ecossistema didático escolar, no qual as matemáticas são estudadas;
- ecossistema profissional, é aquele que se utiliza da matemática para realizar certas tarefas;
- ecossistema noosferiano[14], é aquele em que as matemáticas são manipuladas para fim de transposição.

Os objetos matemáticos e os objetos didáticos na concepção de Chevallard vivem em associações, visto que, existem as organizações matemáticas devido as relações de estudo entre as pessoas, os objetos e as instituições. Podemos dizer que as organizações matemáticas adquirem muito rapidamente autonomia com relação as suas condições de produção, e, aliás, esta autonomia se torna instrumentável na realização de tarefas diferentes daquelas que deram origem ao seu nascimento. Isto justifica a disjunção do estudo desses dois tipos de objetos,

[13] O conceito de ecossistema surgiu em 1930 nos trabalhos dos botânicos, onde os mesmos buscavam compreender a organização das plantas em sociedade. O ecologista americano Paul Colinvaux em sua obra Invitation à la science de l'écologie descreve o nascimento desse conceito: " o ecossistema descreve uma idéia, uma criação do homem: definimos uma parcela de terra de tamanho que nos convém e estudamos o funcionamento da vida, considerando o conjunto inerte e o vivo, para ver como eles interagem. O conceito de ecossistema constitui uma forma de olhar a natureza" . Trata-se então de considerar, no estudo de um ser vivo, não somente outros seres vivos, mas também o meio físico, químico no qual ele vive.

[14] Noosfera é o lugar onde os saberes matemáticos são manipulados para fins de ensino, onde os saberes são modificados para passar de um nível de ensino à outro.

aqueles que tratam da ecologia dos objetos matemáticos e os que tratam da ecologia dos objetos didáticos.

Um postulado

Conforme Chevallard (1999) a Teoria Antropológica tem como postulado de base que toda atividade humana regularmente realizada pode ser descrita por um modelo que Chevallard designa como uma praxeologia. Como conseqüência deste postulado, temos que fazer, estudar ou ensinar matemática enquanto ações humanas, que podem ser descritas segundo um modelo praxeológico. Tomando por princípio que toda atividade humana consiste em realizar uma tarefa t de um certo tipo T, por meio de uma certa técnica τ, justificada por uma tecnologia θ, que permite ao mesmo tempo refletir sobre a técnica, por vezes a produzir, e por sua vez é justificável por uma teoria Θ. Pode-se dizer que toda atividade humana, coloca em ação uma organização $[T/\tau/\theta/\Theta]$, a qual Chevallard nomeia Praxeologia, ou Organização Praxeológica.

A Noção de Praxeologia

Em uma Organização Praxeológica identificamos: tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Vejamos cada uma delas:

Tarefa

Na essência da noção de praxeologia se encontra as noções de tarefas, *t*, e de tipos de tarefas denotadas por *T*. Quando uma tarefa *t* que faz parte de um tipo de tarefa *T*, dizemos que $t \in T$. Uma *tarefa* ou um tipo de tarefa se exprime por um verbo, evocando sempre uma ação. Por exemplo: desenvolver a expressão literal dada; dividir um inteiro por outro; cumprimentar um vizinho; subir uma escada; integrar a função x ln x entre x =1 e x = 2, etc.

A noção de tarefa, ou mais precisamente do tipo de tarefa, supõe um objetivo relativamente preciso, por exemplo, subir uma escada é uma tipo de tarefa, mais subir não, pois não explicita o que é para subir. Da mesma forma, calcular o valor de uma função em um ponto é um tipo de tarefa, mas somente “calcular”, assim como “subir”, são *gêneros de tarefas*.

Concretamente um *gênero de tarefa* somente existe sobre a forma de diferentes tipos de tarefas. Ao longo dos anos do colégio, o gênero calcular vai se enriquecendo de novos tipos de tarefas e será no ensino médio onde os alunos vão aprender a primeira vez a calcular com matrizes, e mais tarde, calcular uma integral ou determinar uma derivada. Outros exemplos de *gêneros de tarefa* : demonstrar... , construir... , exprimir...

Enfim, tarefas, tipos de tarefas, gêneros de tarefas, não são dados pela natureza: elas são "artefatos", "obras", que são reconstruídas em cada instituição específica, segundo os padrões aceitos nesta instituição. Esta reconstrução é objeto de estudo da Didática da Matemática.

Técnica

Seja então T um tipo de tarefa dada. Uma praxeologia relativa a T compõe (em princípio), uma maneira de realizar as tarefas $t \in T$. A uma certa maneira de realizar a tarefa damos o nome de *técnica* (du grec tekhnê, saber-fazer). Uma praxeologia relativa a um tipo de tarefa T contém então em princípio uma técnica τ relativa a T. Ela compõe assim um bloco denotado por $[T/\tau]$, esse é o bloco chamado de prático-técnico e esse bloco é identificado de maneira genérica ao que nomeamos em geral em saber-fazer. Assim, um certo tipo de tarefa T, corresponde a uma certa maneira τ de resolver as tarefas desse tipo. Nesse contexto três destaques devem ser feitos:

- Primeiramente um tipo de técnica τ - uma maneira de fazer- ela pode somente concluir uma parte $P(\tau)$ do tipo de tarefa T da qual ela é relativa. Parte que constitui o "*portée*" da técnica, pois a técnica τ pode não ser suficiente para realizar T, por isso tende a fracassar sobre T. Dizemos que "não sabemos resolver, em geral, concluir as tarefas do tipo T". Temos assim, técnicas cujo "*portée*" é suficiente para realizar T e outras não. Com esse olhar uma técnica pode ser superior a uma outra, se não for com relação ao tipo de tarefa como um todo, ao menos sobre uma certa parte de T.
- Uma técnica não é necessariamente algorítmica ou quase algorítmica. Ela é algorítmica em alguns casos. Por exemplo: pintar uma paisagem, fundar uma família, são tipos de tarefas para as quais não existe necessariamente uma técnica algorítmica. Mas é verdade que parece existir uma tendência geral de algoritimização – mesmo que o processo da evolução da técnica parece às vezes estanque em certa instituição, quando se trata de certo tipo de tarefa ou de certos complexos de um tipo de tarefa.

Enfim, em uma instituição *I* dada, a respeito de um tipo de tarefa *T*, dada, existe em geral uma única técnica, ou pelo menos um pequeno número de técnicas institucionalmente reconhecidas, excluindo técnicas alternativas possíveis que podem existir efetivamente, mais em outras instituições. Uma tal exclusão leva os atores de *I* a uma ilusão de naturalidade, torna-se natural resolver as tarefas usando as técnicas previstas para a sua instituição. Assim os sujeitos de *I* ignoram outras técnicas, ou, se eles são confrontados com técnicas alternativas eles as olharão como artificiais e então contextaveis, inaceitáveis, etc. Assim observamos frequentemente em sujeitos da instituição *I* verdadeiras paixões institucionais pelas técnicas naturalizadas pela instituição.

Algumas considerações sobre as técnicas:

- As técnicas permitem agrupar as questões, ou problemas, em *tipos de problemas.*
- Uma técnica tem sempre uma "competência" limitada. Ela somente é bem sucedida em algumas tarefas de determinado tipo.
- Pode acontecer que, a partir de uma primeira técnica de competência reduzida (no âmbito de aplicabilidade /validade), elabora-se uma técnica mais abrangente.
- Uma tarefa pode ser problemática ou não. Ela é problemática quando o aluno não tem o domínio de uma técnica para resolvê-la. O objetivo no ensino é transformar as tarefas problemáticas em tarefas rotineiras.

Tecnologia

A existência de uma técnica supõe a existência subjacente de um *discurso interpretativo e justificativo* da técnica e de seu âmbito de aplicabilidade e validade. A *tecnologia* (*tékhne*, técnica, e *logos*, discurso). O discurso (tecnologia) torna compreensível e justifica a técnica, assegurando que ela permite concluir/realizar as tarefas do tipo *T*. Isto é, realizar o que é pretendido. Esse estilo de racionalidade aplicado varia no espaço institucional, e, em uma instituição dada, conforme a história dessa instituição. Uma exige justificativas teóricas sistematizadas outras aceitam exemplos particulares e ou empíricos. De forma que certos elementos de tecnologia parece ser racional serem estudados em uma instituição dada, mas poderá parecer pouco racional ser estudado em outra instituição. A tecnologia também tem a importante função de trazer elementos para modificar a técnica e ampliar seu alcance, superando, assim, suas limitações e permitindo, em alguns casos, a produção de uma nova técnica. Cabe aqui três destaques:

- Admitiremos primeiro como efeito de observação, que em uma instituição *I* qualquer que seja o tipo de tarefa *T*, a técnica τ relativa a *T* é sempre acompanhada ao menos de um embrião ou mais frequentemente ainda de vestígios de tecnologia θ. Em inúmeros casos certos elementos tecnológicos são integrados na técnica.
- Em outra, o fato que existe em *I* uma técnica canônica, em princípio a única reconhecida e a única empregada, confere a esta técnica uma característica de auto tecnologia, ou seja, fazer desta forma não precisa justificar, pois esta é a boa maneira de fazer nesta instituição.

Notamos em seguida que uma segunda função da tecnologia é de explicar, de tornar a técnica entendível, de esclarecer a técnica. A função de justificar a técnica, consiste em assegurar que a técnica forneça o resultado esperado.
- Uma terceira função da tecnologia corresponde ao emprego mais atual do termo tecnologia: a função de produção de técnica. Notamos assim, que existe tecnologias potenciais a espera de técnica, que não são ainda tecnologia de alguma técnica ou são de poucas técnicas. A este olhar, destaca-se o fenômeno da sub – exploração de tecnologia disponível, tanto do ponto de vista da justificativa ou de explicação da produção.

Teoria

Por sua vez, o discurso, ou seja, a tecnologia são afirmações mais ou menos explicitas. São proposições, definições, teoremas, etc. Muitas vezes podemos pedir explicação da tecnologia. Passamos assim, a um nível superior de justificação – explicação – produção, estamos no nível da *teoria* Θ. Esta retoma o papel da tecnologia com relação a técnica. Assim, a *teoria* é o discurso suficientemente amplo que serve para interpretar e justificar a tecnologia. Podemos dizer que a teoria é a tecnologia de sua tecnologia. De alguma maneira, é o fundamento último da atividade que vai além do que parece óbvio e natural, sem necessidade de nenhuma justificativa. Pode-se supor que exista a teoria da teoria, mas Chevallard considera suficiente a descrição de três níveis apresentados (τ ,θ , Θ) para analisar uma tarefa. A palavra teoria, do grego *theôria*, na sua origem estava relacionada com a idéia de “contemplação de um espetáculo”, onde o teórico assistia sem participação nenhuma. Podemos associar a isto o fato dos enunciados teóricos aparecerem como “abstratos”, despreocupados com os técnicos e tecnólogos, permitindo porém inúmeras explicações e justificativas devido a sua capacidade de generalização.

Para se atuar matematicamente com eficiência é necessário entender o que se está fazendo. E para se entender o que se está fazendo se faz necessário uma prática matemática eficaz, pois Chevallard, Bosch e Gascón (2001) afirmam:

> "Não há práxis sem logos, mas também não há logos sem práxis. Ao unir as duas faces da atividade matemática, obtemos a noção de praxeologia: para responder a um determinado tipo de questão matemática é necessário elaborar uma praxeologia matemática constituída por um tipo de problema determinado, uma ou várias técnicas, sua tecnologia e a teoria correspondente". (tradução nossa)

Uma praxeologia é uma resposta a uma questão, que pode ser de dois tipos, por exemplo:

Q_1) **Como ensinar** congruência de triângulos na 7ª série do Ensino Fundamental?

Q_2) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa tem comprimento 20 e a razão entre dois catetos é 3:4. **Ache cada cateto**. (Barnett, 2003 pg.209).

A primeira questão diz respeito à Organização Didática ou a Praxeologia Didática, pois o tipo de tarefa é de **estudo**, ou seja, para dar resposta a esse tipo de questão se faz necessário a formulação de uma Organização Didática ou uma Praxeologia Didática.

Diferentemente, se nos atermos a questão Q_2 - "Em um triângulo retângulo, a hipotenusa tem comprimento 20 e a razão entre dois catetos é 3:4. **Ache cada cateto**.", esta é uma questão matemática, ou seja, a tarefa se origina na matemática. Neste caso, a tarefa e a técnica que compõe o saber-fazer é representado pelo bloco prático-técnico $[T/\tau]$, bem como o bloco tecnológico-teorico $[\theta/\Theta]$ são restritos ao conhecimento matemático. Quando estamos estudando tarefas que são problemas matemáticos, as resoluções são justificadas por resultados matemáticos, como: teoremas, definições, propriedades etc. Os quais no contexto da Teoria Antropológica, Chevallard designa tecnologia. Um conjunto de tarefas que mobilizam um certo conjunto de técnicas e a mesma tecnologia, segundo a Teoria Antropológica do Didático, dá lugar a uma Praxeologia Matemática ou Organização Matemática. Também pode-se pensar na Organização Matemática que emerge no contexto de uma Organização Didática.

Praxeologias Didáticas ou O*rganizações* ***Didáticas***

De maneira geral, Chevallard diz que as *Praxeologias Didáticas* ou O*rganizações Didáticas* são respostas às questões do tipo: "Como estudar um objeto O?" Que resposta dar a questão, como organizar o ensino de um objeto matemático? Na busca de respostas a esta questão outra questão se coloca: quais os tipos de tarefas aparecem nesta Praxeologia Didática, ou de outro modo, quais "gestos" podem ser olhados como didáticos. Como toda Organização Praxeológica, uma organização didática se articula em tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Mas como descrever tal organização? Quais são por exemplo os principais tipos de tarefas? Não poderíamos esperar que a (re)construção ao longo do processo de estudo de uma organização matemática dada, fosse organizada de uma maneira única. Sabemos que qualquer que seja o caminho do estudo, certos tipos de situações são necessariamente presentes, mesmo se elas são variáveis, tanto no plano qualitativo quanto no plano quantitativo. Tais tipos de situações serão chamados aqui de *momentos de estudo* ou *momentos didáticos* porque podemos dizer que qualquer que seja o caminho seguido o objetivo de ensinar deve ser concretizado.

A noção de "momento" no processo de estudo reenvia a caracterizar, a identificar uma dimensão no espaço multidimensional onde ocorre a aprendizagem. Chevallard, ressalta que uma boa "gestão" de estudo exige que cada um dos "momentos didáticos" se realize num bom momento. Um momento de estudo se realiza, geralmente, várias vezes sob a forma de uma multiplicidade de episódios manifestada no tempo. Sob este ponto de vista, notaremos que a ordem colocada abaixo, sob os diferentes momentos didáticos são primeiramente uma realidade funcional de estudo, antes de ser uma realidade cronológica que ocorre em situação real de sala de aula.

O **Primeiro momento** de estudo é aquele do primeiro encontro com a organização do objeto em estudo. Este encontro pode acontecer de várias maneiras, mas o encontro ou reencontro é inevitável, salvo se o aluno se mantém na superficialidade. O primeiro encontro com o objeto *O* pode acontecer por meio do tipo de tarefa T_i, relativa ao objeto O. Este "primeiro encontro" com um tipo de tarefa pode ainda acontecer várias vezes, em função do ambiente matemático e didático em que a tarefa se produz, pois o conteúdo matemático pode aparecer em diferentes etapas do ensino, na mesma série ou em séries diferentes. Podemos redescobrir a tarefa como, por exemplo, quando reencontramos uma pessoa que acreditamos já conhecer.

O que encontramos no primeiro encontro com uma organização matemática de um objeto O?

A identidade de *O* encontrada pela primeira vez merece ser examinada. Por exemplo, qual a identidade do objeto *O* quando o primeiro encontro acontece por meio de um aviso do professor: o professor anuncia o objeto de estudo do dia seguinte. Tem outro extremo, um verdadeiro encontro com o objeto *O* podem passar desapercebidos porque na instituição onde estes encontros se produzem o objeto encontrado não é o objeto de estudo segundo o objetivo definido pelo professor naquela tarefa. O objeto com o qual se produz um real primeiro encontro está em segundo ou em terceiro lugar na intenção do professor. Este objeto é encontrado porque ele tem uma ligação estreita, está associado de maneira muito forte com o objeto previsto pelo professor para aquela aula.

Esta observação leva a fazer a distinção na organização do estudo do ponto de vista do aluno, do professor, do engenheiro didatician[15] e ou do observador. Para o aluno, somente certos objetos são considerados novos, enquanto que outros são introduzidos implicitamente, silenciosamente, na organização matemática que se constrói. Para o professor, é sobre cada um dos objetos que são introduzidos na organização matemática em construção que pode ser colocado a questão do primeiro encontro, e isto o professor faz em uma perspectiva de reorganização curricular, tendo como objetivo dar o melhor destaque a um objeto culturalmente e didaticamente segundo o desejado.

Assim, as formas possíveis do primeiro encontro, quando foi expressamente organizado, pode acontecer de duas formas, com múltiplas combinações e diferentes variações de desenvolvimento, ou ao contrário degeneradas. O primeiro encontro pode se inscrever numa problemática camuflada, neste caso o objeto não está explícito. Por exemplo na apresentação de um resumo de uma pesquisa, neste caso o objeto encontrado aparece primeiramente como existindo em certas práticas sociais, como uma imagem. Este sub-momento "cultural" é seguido de um sub-momento onde o sujeito manipula de forma efetiva o objeto é levado a estar imitando o matemático ou o geógrafo por exemplo.

Em uma versão mais exigente, o encontro cultural conduz em princípio a pesquisar e a explicar – sob um modo discursivo – o objeto assim encontrado, ou seja, os motivos pelo qual este objeto foi construído, ou pelos quais, ao menos, ele persiste na cultura (Porque é ensinado). Mais as "razões das escolhas" não afloram sempre nitidamente na cultura. Isto leva o encontro cultural a se deteriorar em uma paródia da prática que oculta as razões da prática.

[15] Conforme Chevallard o engenheiro didatician é aquele que elabora a engenharia didática, aquele que organiza e dá resposta a questão: " Como ensinar?".

Por reação, a esta posição, podemos querer distanciar toda referencia a um real pré existente e trataríamos de reproduzir com limitações um sistema de situações dita fundamentais (que podemos nomear também por umbilical), onde os alunos, sozinho ou em equipes, são os atores principais, se não únicos, e que, diante dos seus olhos, vissem nascer o objeto que permite fabricar uma resposta à uma ou a questões formuladas.

O encontro com objeto *em situação de estudo* conduz a propor, de fato, até mesmo uma prova, uma “definição” do objeto encontrado. Esta não é uma simples cópia de definições colocadas na cultura, mas, em muitos casos, aparece como um verdadeiro acréscimo à cultura – acréscimo que convém então contabilizar com as definições conhecidas, ao menos que esta “definição em situação” já tenha sido integrada ao patrimônio cultural.

Como acontece no encontro cultural camuflado, o encontro em situação também tem um sub-momento cultural – onde o *efeito jordan*[16] é uma das formas mais espetaculares. Em muitos casos, a definição de um objeto por um “sistema de situações fundamentais” é descartado, dando lugar a apresentação do objeto por “atividades” que, não considerando traços culturais existentes, somente tem uma relação superficial com as razões de ser do objeto as mais essenciais.

Cabe destacar que de uma maneira mais geral, existe nas práticas didáticas correntes uma enorme gama de formas hibridas de 1º encontro, ou uma referência cultural assumida de forma incompleta que se alia a um grau variável com uma introdução “em situação” ou mais ou menos adequado aos planos epistemológicos e cognitivos.

O **segundo momento** é aquele da exploração do tipo de tarefa T, e da elaboração de uma técnica τ relativa a um tipo de tarefa.

Na realidade, o estudo e a resolução do problema de um tipo determinado vão sempre junto com a constituição de ao menos uma técnica mais desenvolvida a qual poderá eventualmente emergir: o estudo de um problema particular, “specimen” do tipo estudado, aparece também, não como um fim em si mesmo, mas como um meio para uma tal técnica de resolução se constituir. Assim, tem lugar uma dialética fundamental: estudar problemas é um meio que permite criar e aperfeiçoar uma técnica, tornando-a de seu domínio. Técnica que ela mesma será em seguida um meio de resolver de maneira quase rotineira os problemas do mesmo tipo.

---

[16] O efeito jordan, segundo Brousseau (1996), em sala de aula, está associado a uma valorização indevida, por parte do professor, do conhecimento do aluno. Após algumas explicações, um pronunciamento do aluno é reconhecido como a manifestação autêntica de um efetivo saber.

O **terceiro momento** de estudo é aquele da construção do bloco tecnológico-teórico [θ/Θ] relativo à técnica. De uma maneira geral esse momento é uma inter-relação estreita com cada um dos outros momentos. Assim, desde o 1º momento com o tipo de tarefa, já fazemos uma relação como o bloco [θ/Θ] anteriormente elaborado ou com fragmentos de um bloco a criar que se precisará numa relação dialética com a emergência da técnica. Por vezes as estratégias de estudo tradicional fazem, em geral, desse 3º momento a primeira etapa de estudo. Etapa que é então conhecida no estudo de vários tipos de problemas – todos aqueles, entre os tipos de problemas estudados, que se enquadram no mesmo bloco tecnológico-teórico [θ/Θ]. O estudo desses tipos de problemas aparecem então classicamente como uma seqüência de aplicações do bloco [θ/Θ].

O **quarto momento** é aquele da institucionalização, que ter por objetivo precisar elementos teóricos da Organização Matemática elaborada, distinguindo notadamente, os elementos que concorreram a sua constituição, e de outra parte, os elementos que farão de maneira definitiva parte da Organização Matemática desejada. Podemos dizer de outra maneira que o momento da institucionalização é aquele onde a construção bruta que, pouco a pouco, deu condições de emergir o objeto, vão ser separadas, por um movimento que leva em conta o que de matemática é necessária, esta será conservada e a matemática não necessária faz parte do contingente que brevemente será esquecida. De certa forma neste momento tem-se uma oficialização de uma praxeologia matemática desconectada da história.

O **quinto momento** é aquele do trabalho da técnica, em particular, de aplicação das técnicas criadas. É o momento de testar as técnicas e de verificar a confiabilidade das mesmas qualitativamente como também quantitativamente.

O **sexto momento** é o momento da avaliação que se articula ao momento da institucionalização. Na prática, esse é o momento onde devemos parar para refletir onde independente dos critérios de julgamento, examinamos o que queríamos ensinar e o que foi aprendido. Podemos dizer que o momento da avaliação permite avaliar o que quer a organização matemática em estudo e também as competências desenvolvidas.

Enfim, analisar uma organização didática é analisar a maneira de como estes momentos de estudo são realizados.

Praxeologia Matemática ou Organização Matemática

A Praxeologia Matemática ou Organização Matemática, diz respeito aos objetos matemáticos em termos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria.

Em torno de um tipo de tarefa *T*, em princípio, encontramos um tripé formado de pelo menos uma técnica τ, de uma tecnologia θ e de uma teoria Θ. O todo anotado por [$T/\tau/\theta/\Theta$], constitui uma praxeologia pontual, onde pontual significa que se trata de uma praxeologia à um único tipo de tarefa *T*. Uma tal praxeologia – ou organização praxeológica – é então constituída como já foi dito de um bloco prático-técnico [T/τ], e de um bloco tecnológico-teórico [θ/Θ].

O bloco [θ/Θ] é ordinariamente identificado como um saber, enquanto que o bloco [T/τ] constitui um saber-fazer. Um tal tratamento do saber não é por acaso. Reencontramos raramente praxeologias pontuais. Geralmente em uma instituição I dada, uma teoria Θ responde as várias θ_j, onde cada uma por sua vez justifica e torna inteligível várias técnicas $t_{i,j,}$ correspondentes a quantidade de tipos de $T_{ij.}$ As organizações pontuais vão assim se agregar, primeiramente em organizações locais, [$T_i/\tau_{ij}/\theta/\Theta$], centradas sobre uma tecnologia θ determinada, em seguida em organizações regionais, [$T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta$], formadas em torno de uma teoria Θ. É chamado de organização global o complexo praxeológico [$T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k$], obtida em uma instituição dada pela agregação de diversas organizações regionais correspondendo a diversa teorias Θ_k. Ora, a passagem de uma praxeologia pontual [$T/\tau/\theta/\Theta$], a uma praxeologia local [$T_i/\tau_{ij}/\theta/\Theta$] destaca a tecnologia θ, da mesma maneira que a passagem da praxeologia local para a regional [$T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta$], dá lugar no primeiro plano para a teoria Θ. Nos dois casos a visibilidade do bloco saber se destaca, em detrimento do saber-fazer. Um tal desequilíbrio, sem dúvida, não é justificado, pois em ambos os casos o tipo de tarefa T precede geneticamente do bloco [θ/Θ] (o qual se constitui assim como meio de justificar uma técnica τ apropriada a T) restando somente estruturalmente o saber [θ/Θ] que permite de implantar τ (para T dada). Por esta razão o saber-fazer [T/τ], poderá ser classicamente apresentado no texto do saber como uma simples aplicação do saber [θ/Θ].

Uma organização praxeológica, mesmo pontual, não é em geral inteiramente conforme aos padrões evocados acima. O tipo de tarefa em torno da qual ela se constrói pode também ser mal identificada, a ponto que a técnica associada poderá se revelar quase que impraticável. A tecnologia poderá por vezes se reduzir a uma pura petição. A noção de praxeologia aparece assim como uma noção genérica, segundo Chevallard, que convém aprofundar o estudo notadamente por uma interrogação empírica e análise de dados observados e recolhidos.

Algumas considerações:

1) No capítulo seguinte deste trabalho apresentamos um estudo de livros didáticos da 7ª série onde buscamos conhecer a realidade matemática construída relativa ao objeto triângulo nesta série.
2) Para este estudo os elementos da Teoria Antropológica do Didático, mais especificamente a Organização Praxeológica, fornecem a fundamentação teórica.
3) Nosso objetivo é identificar a organização nos livros didáticos.

2.2 Referencial teórico de nosso trabalho

No contexto desse estudo, vamos estudar as condições de existência do objeto triângulo nos livros didáticos no que se refere à ecologia didática e a ecologia matemática. Estamos interessados em saber o que o livro didático propõe sobre o ensino do triângulo e como ele tem lugar nos livros didáticos. Como vimos, Chevallard considera que um saber não vive isolado e para conhecer esse saber vamos identificar a Organização Didática do objeto triângulo, analisando como o livro didático propõe o ensino desse objeto. Onde identificamos resposta para a pergunta: "Como ensinar conceitos relativos ao objeto triângulo?" Vamos identificar os momentos didáticos relativo a cada tipo de conceito no que se refere o objeto triângulo. Conhecer a organização didática sobre o triângulo proposta nos livros didáticos de 7ª série, nos permite identificar quais os saberes sobre o triângulo são objetos de estudo nesta série. Já a Organização Matemática nos revela quais os conhecimentos sobre o triângulo devem ser mobilizados pelos alunos, segundo os livros didáticos do Ensino Fundamental. Por isso, para o estudo dos livros didáticos que apresentamos no capítulo seguinte usamos como referência a noção de Organização Praxeológica, em particular a "Organização Didática" e "Organização Matemática Pontual" descrita por Chevallard.

Capítulo 3 - Estudo da Organização Praxeológica referente ao objeto matemático triângulo nos livros didáticos

Nosso objetivo, ao analisar livros didáticos da 7ª série do Ensino Fundamental é identificar como "vive" e qual o "lugar" do objeto triângulo nessa instituição. Para isto buscamos identificar os elementos da Organização Praxeológica, ou seja, elementos da Organização Didática e da Organização Matemática referente ao objeto triângulo nos livros didáticos da 7ª série do Ensino Fundamental. Apresentamos aqui elementos de resposta à questão: Qual Organização Matemática e Didática referente ao triângulo é proposta nos livros didáticos da 7ª série do Ensino Fundamental?

Para conhecer a Organização Praxeológica de um saber, em uma determinada instituição de ensino, como afirmado por Menssouri (1994) os livros didáticos são fontes de informações da realidade da classe muito importantes.

Analisamos nos livros didáticos da 7ª série os capítulos onde as sessões tratam do triângulo enquanto objeto de ensino. A partir da organização didática explicitaremos a organização matemática que emerge a partir das tarefas propostas pelo autor para mobilizar as técnicas e o teórico do objeto de estudo naquela organização.

Neste estudo analisamos os seguintes Livros Didáticos:

a) "Tudo é matemática" - 7ª série, Dante (2004).

b) "Matemática para todos" - 7ª série, Imenes & Lellis (2007).

Escolhemos estes livros pelo fato de terem sido aprovados pelo MEC[17] (PNLD 2005 e 2008) e por serem muito utilizados nas escolas em todo Brasil. Destas coleções, como já dissemos, escolhemos os da 7ª série, pois nesta série, que em geral, se concentra os resultados relativos ao triângulo mais importantes da área da Geometria.

No estudo da Organização Didática onde buscamos identificar na abordagem do livro didático os momentos[18] de cada uma das tarefas $T_{\pi i}$, tarefas que subsidiam a uma forma de

---

[17] Ministério da Educação - MEC

[18] 1. Momento do ***primeiro encontro*** com a tarefa T: momento que deve produzir pelo menos um embrião da técnica e estudo deste(s) tipo(s) de tarefa(s).

2. Momento de ***exploração*** de tarefa *T* e ***da emergência da técnica*** τ relativa ao tipo de tarefa T.

3. Momento da construção do bloco ***tecnológico-teórico*** [θ/Q] que vão justificar a técnica τ.

4. Momento ***da institucionalização,*** consiste no momento da explicitação formulada da *organização matemática* elaborada

5. Momento do ***trabalho da organização matemática*** e em particular de ***aplicação das técnicas*** criadas e de verificar a confiabilidade das mesmas.

6. Momento ***da avaliação*** : permite avaliar o que quer a organização matemática em estudo como também as competências desenvolvidas.

ensinar. No contexto dos momentos da "aplicação da técnica" e "avaliação", isto é, nas situações problemas[19] identificamos a Organização Matemática.

3.1 Estudo do livro didático: "Tudo é Matemática"- 7ª série, Dante 2004.

Este livro é organizado em doze capítulos, além das seções: glossário, verificando respostas, leituras complementares e bibliografia.

Destes doze capítulos, quatro capítulos desenvolvem conteúdos da área de Geometria. A saber:

Capítulo 6 - Propriedades de figuras geométricas;

Capítulo 8 - Proporcionalidade em Geometria;

Capítulo 10 - Perímetros, áreas e volumes;

Capítulo 12 - Construções geométricas.

Especificamente sobre o objeto triângulo:

O Capítulo 6 - Propriedades de figuras geométricas, trata da:

- Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo;
- Congruência de triângulos: caso LAL,caso LLL, caso ALA e caso LAA_o;
- Elementos do triângulo: mediana, bissetriz, altura, ortocentro, incentro e baricentro de um triângulo.

O Capítulo 8 – Proporcionalidade em Geometria, trata de:

- Tales e a altura de uma pirâmide;
- Proporcionalidade em triângulos retângulos com ângulo de 30º;
- Triângulos semelhantes

O Capítulo 10 - Perímetros, áreas e volumes, trata de:

- Principais fórmulas para o calculo de áreas: - Área de uma região triangular;
- A relação de Pitágoras: uma grande descoberta envolvendo áreas.
- Uma outra fórmula para calcular a área de uma região triangular.

O Capítulo 12 - Construções geométricas, trata das:

- Primeiras construções com régua e compasso: - transporte de triângulos;
- Desigualdade triangular;
- Circuncentro de um triângulo

[19] Entendemos por situação problema qualquer exercício proposto no livro didático.

Apresentamos o estudo da Organização Praxeológica relativa a cada um dos objetos de estudo envolvendo o triângulo anunciado nas rubricas descritas em cada um dos capítulos anteriormente citados.

3.1.1 Organização Didática - Elementos Gerais

De maneira geral, identificamos que o tópico do capítulo "Propriedades de figuras geométricas" (pág. 130), tem início com uma breve apresentação do objeto seguido da proposição de atividades dirigidas aos alunos. Esta forma de apresentação do livro didático nos levou a supor que, para o autor, a produção do conhecimento se realiza pela ação do aluno, por meio da resolução de exercícios. Supomos nós, que o autor considera como Vergnaud (1991), que para o aluno, um conceito está fortemente associado à atividade de resolução de problemas e que, é através da resolução dos exercícios que se percebe se os significados dos conceitos são entendidos. Este princípio embasa a organização didática concebida neste livro. No "Manual Pedagógico do Professor – Parte Geral" confirmamos esta visão do autor, em três momentos:

"Esta coleção traz um número bem reduzido de explicações, **pois prioriza a atividade do aluno, estimulando a reflexão, a experimentação e a resolução de problemas, com o objetivo de auxiliar a produção de significados**"[20] (pág. 18, grifo nosso).

"Ao ter como prioridade a construção do conhecimento pelo fazer pensar, **o papel da resolução de problemas é fundamental para auxiliar o aluno na apreensão dos significados**"[21] (pág. 41, grifo nosso)

"A tônica desta coleção **é ajudar o aluno a construir, desenvolver e aplicar idéias e conceitos matemáticos**, **sempre compreendendo e atribuindo significado ao que está fazendo"**[22](pág. 7, grifo nosso)

O estudo do "Manual Pedagógico do Professor – Parte Específica" nos permitiu identificar outros elementos da organização didática:

- Uma intenção de proporcionar ao aluno uma aprendizagem significativa, através das justificativas e demonstrações:

[20] Sob a rubrica "Algumas idéias para a utilização desta coleção"
[21] Sob a rubrica "Resolução de problemas"
[22] Sob a rubrica "Ensinando por compreensão, contextualizando e aplicando"

> "Em toda coleção, procuramos apresentar os porquês e as justificativas, para que a aprendizagem realizada pelo aluno seja significativa e não mecânica. [...] Não se trata de apresentar a Geometria axiomaticamente com uma série de teoremas encadeados, como era feito no passado, a partir de Euclides. Já se constatou que alunos de 7ª e 8ª séries não têm maturidade cognitiva para compreender esse enfoque. O que fazemos neste capítulo são deduções ou demonstrações locais: a partir de alguns fatos considerados já conhecidos, obtemos outros, por meio de raciocínio (ou dedução) lógico [...] Não se preocupe; estimule-os a justificar e a argumentar logicamente mesmo com imperfeições, pois estamos iniciando esse processo"[23] (Pág. 99 e 100, grifo nosso)

- Uma intenção de realizar uma abordagem dos conteúdos em espiral:

> "**Até a 6ª série** priorizamos a Geometria Experimental ou Manipulativa, na qual o aluno aprende fazendo, manipulando, comparando, descobrindo semelhanças e diferenças, regularidades e propriedades de certas figuras geométricas, [...]. **Neste capítulo**, **iniciamos o aluno no raciocínio dedutivo**, apresentando a ele e estimulando-o a fazer pequenas e simples deduções ou demonstrações lógicas. [...] O raciocínio dedutivo **será retomado e aperfeiçoado na série seguinte**" (pág. 99 e 100, grifo nosso)

Percebemos que a intenção é de desenvolver um ensino em espiral, aprofundando o estudo de um volume a outro. Por esta razão os conceitos são retomados várias vezes e pouco a pouco ampliados, aprofundados e sistematizados.

- A intenção de trabalhar os conteúdos em situações práticas

> **"Estimule os alunos a fazer concretamente ladrilhamento** com várias formas planas, inicialmente com uma forma plana e, em seguida, com duas. **Eles próprios descobrirão** quais formas planas é possível fazer o ladrilhamento e quais não é possível" (pág. 100, grifo nosso)

Temos assim, segundo os princípios gerais da Organização Didática do livro, um ensino que contempla uma abordagem em espiral, dedução e justificativa dos resultados teóricos e a proposição de um trabalho usando os resultados teóricos na resolução de problemas.

Faremos a seguir, um estudo mais detalhado identificando elementos da Organização Didática de cada tipo de tarefa "ensinar um objeto matemático" que envolva uma intenção de ensinar conceitos relativos ao triângulo.

[23] Sob a rubrica "Capítulo 6; Propriedades de figuras geométricas"

3.1.2 Organização Didática e Organização Matemática relativa a uma tarefa "Como ensinar..."

a) Capítulo 6 - Propriedades de figuras geométricas

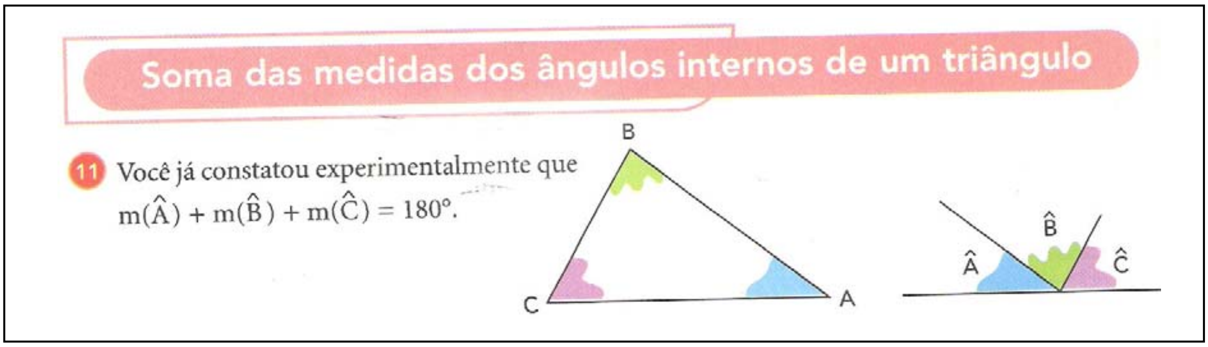
O estudo do capítulo 6 - "Propriedades de figuras geométricas" nos permitiu identificar dez tarefas da Organização Didática sobre "Como ensinar propriedades do triângulo" que trataremos como regional. Cada tarefa é denotada por "$T_{6\pi i}$" onde: 6 indica o capítulo do livro e, i $\in N^*$ e varia de acordo com o tipo de propriedade a ser ensinada. Vejamos:

- $T_{6\pi1}$: Ensinar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.
- $T_{6\pi2}$: Ensinar a classificação dos triângulos quanto aos ângulos.
- $T_{6\pi3}$: Ensinar que em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
- $T_{6\pi4}$: Ensinar a congruência de triângulos.
- $T_{6\pi5}$: Ensinar os casos de congruência de triângulos.
- $T_{6\pi6}$: Ensinar que em todo triângulo isósceles, os ângulos opostos aos lados congruentes são também congruentes.
- $T_{6\pi7}$: Ensinar os elementos de um triângulo: a mediana, a bissetriz e a altura.
- $T_{6\pi8}$: Ensinar o ortocentro de um triângulo.
- $T_{6\pi9}$: Ensinar o incentro de um triângulo.
- $T_{6\pi10}$: Ensinar o baricentro de um triângulo.

Apresentamos a seguir a Organização Didática pontual relativa a cada uma das tarefas acima citadas, usando para isto os "momentos didáticos".

Tarefa $T_{6\pi 1}$: Ensinar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.

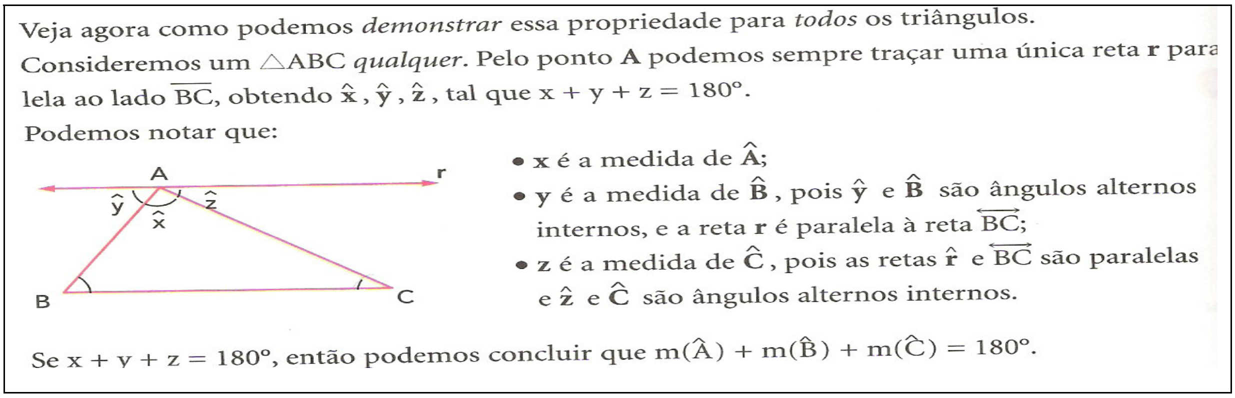
A figura abaixo nos mostra que o momento do *primeiro encontro* com a tarefa $T_{6\pi 1}$, da Organização Didática, ocorre quando o autor apresenta no livro didático o subtítulo: “Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo”, seguido do enunciado do exercício.



Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

11 Você já constatou experimentalmente que $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$.

O autor sugere que o aluno já teve o seu primeiro encontro via manipulação de uma figura concreta, ou seja, realizando uma apreensão operatória[24] da figura, procedimento no qual o aluno realizou uma prova empírica. O momento do reencontro se dá pela visualização da tarefa apresentada resolvida, como descrita acima, e enriquecido pela demonstração matemática formal dada em detalhe. Vejamos:



Veja agora como podemos *demonstrar* essa propriedade para *todos* os triângulos.
Consideremos um $\triangle ABC$ *qualquer*. Pelo ponto **A** podemos sempre traçar uma única reta **r** paralela ao lado $\overline{BC}$, obtendo $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, tal que $x + y + z = 180°$.
Podemos notar que:

- **x** é a medida de $\hat{A}$;
- **y** é a medida de $\hat{B}$, pois $\hat{y}$ e $\hat{B}$ são ângulos alternos internos, e a reta **r** é paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$;
- **z** é a medida de $\hat{C}$, pois as retas $\hat{r}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas e $\hat{z}$ e $\hat{C}$ são ângulos alternos internos.

Se $x + y + z = 180°$, então podemos concluir que $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da demonstração, como por exemplo: o conceito de ângulos alternos e internos que tem mesma medida, o conceito de retas paralelas e medida do ângulo raso. Estes são saberes que se mostram associados ao *objeto de estudo*.

A demonstração *constrói o bloco tecnológico-teórico.*

[24] Segundo Duval (1995), apreensão operatória é uma apreensão centrada sobre as modificações possíveis de uma figura de partida e sua reorganização perceptiva que essas modificações sugerem.

A *institucionalização* de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o se dá, isto é, fica instituído o *bloco tecnológico-teórico* $[\theta/\Theta]$, quando a propriedade é formulada e colocada em destaque:

> Em *todo* triângulo, a soma das medidas dos três ângulos internos é 180°.

O momento do trabalho da *aplicação da técnica* τ_1 e o *momento da avaliação* dão lugar a Organização Matemática associada à tarefa **$T_{6\pi1}$: Ensinar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo,** a qual é composta por dois tipos de Tarefas:

T_1 – Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo;
T_2 – Determinar a existência de um triângulo.

A tarefa T_1[25], divide-se em duas sub-tarefas segundo as condições dadas no problema:
$t_{1,1}$ - Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo conhecendo a medida de dois ângulos desse triângulo.
$t_{1,2}$ - Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo sabendo que os três ângulos internos de um triângulo são congruentes.

Da tarefa $t_{1,1}$ identificamos no capítulo quatro exercícios e da tarefa $t_{1,2}$ um exercício. A *tecnologia* mobilizada na resolução destas tarefas consiste na propriedade "Soma dos ângulos internos de um triângulo é 180", e a *técnica* identificada para resolver esses exercícios é a aplicação dessa propriedade.

Notamos também que nos exercícios propostos uma figura de estudo completa o enunciado ou pode ser produzida pelo sujeito. O estudo desta figura leva a identificação de um triângulo onde a propriedade da soma dos ângulos internos se apresenta como condição para resolver o problema. Assim, a *tecnologia* é uma ferramenta para a resolução das tarefas.

Convém destacar que a tecnologia "Soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º", também é mobilizada no estudo de: classificação de triângulos quanto aos ângulos, propriedades decorrentes dos tipos de triângulos, bissetriz, altura, ângulos alternos internos e congruência de triângulos.

Enquanto o tipo de tarefa T_1 trabalha uma propriedade do triângulo, o tipo de tarefa T_2[26] trabalha uma condição de existência do triângulo. A propriedade estudada em T_1 é

[25] Tarefa $T_1 \Rightarrow$ ANEXO – 1
[26] Tarefa $T_2 \Rightarrow$ ANEXO – 2

também ferramenta para a resolução de T_2, como podemos verificar no único exercício proposto:

> **13** Existe um triângulo com dois ângulos internos obtusos e um agudo? Justifique sua resposta

Condições: dois ângulos internos obtusos e um ângulo agudo.

Resolução: sabendo que um ângulo obtuso é maior que 90º, dois destes ângulos já passam de 180º. Mas como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então é impossível existir um triângulo com dois ângulos obtusos.

A tarefa T_2 mobiliza saberes que não foram institucionalizadas neste livro, que são a definição de ângulo agudo e a definição de ângulo obtuso. Ressaltamos que o autor do livro didático parte do pressuposto que o leitor já conhece essas definições.

Tarefa $T_{6\pi 2}$: Ensinar a classificação dos triângulos quanto aos ângulos.

O *primeiro momento* da Organização Didática é provocado pelo problema[27]:

> **14** Quais os possíveis tipos de triângulo quanto aos ângulos? Escreva o nome de cada um, como são seus ângulos e dê um exemplo.

A busca do aluno para resolver esta questão poderá conduzir o aluno à pesquisa, a mobilização de um saber disponível ou ainda, poderá levar o professor a ministrar a uma aula expositiva. Isso vai depender da maneira com que cada professor vai trabalhar esse exercício.

Via investigação o aluno poderá formular as condições sobre como devem ser os ângulos para garantir a existência de um triângulo, pois o aluno já conhece a propriedade: "Em todo triângulo, a soma dos ângulos internos é 180º". Este é o *momento da emergência da tecnologia*. Já a *institucionalização* fica a cargo do professor e ou por meio de uma consulta formal.

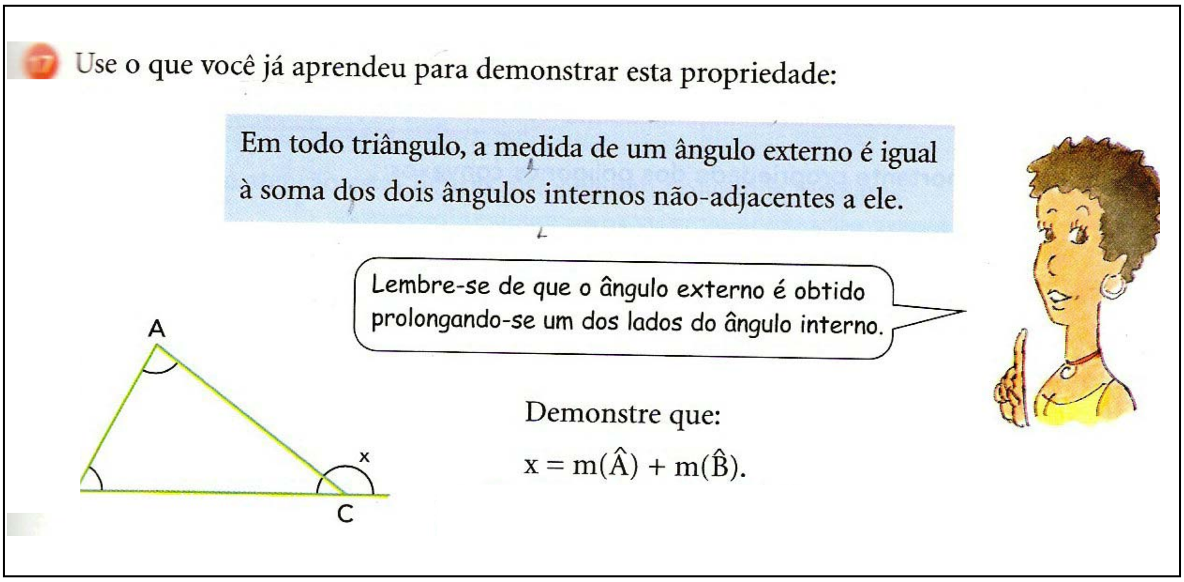
Somente um exercício[28], o exercício 54 item b da p.150, exige que esta *tecnologia* seja mobilizada no contexto do estudo do ortocentro de um triângulo.

---

[27] Tarefa $T_{6\pi 2} \Rightarrow$ ANEXO – 3

Tarefa $T_{6\pi3}$: Ensinar que em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Nesta tarefa os momentos: *primeiro encontro* e *institucionalização* ocorrem simultaneamente, pois a propriedade: "Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não–adjacentes a ele" é apresentada no livro didático em destaque, seguida da fala da personagem que lembra ao leitor como se obtém um ângulo externo, como também com as informações representadas na figura. Podemos então, afirmar que o autor utiliza a linguagem natural e figural nesse exercício. Vejamos:



O autor fornece elementos de estratégia da demonstração alertando o leitor para utilizar a propriedade aprendida anteriormente para demonstrar esta propriedade. Assim, nesta atividade a propriedade "Em todo triângulo, a soma dos ângulos internos é 180º" é uma ferramenta que possibilita a demonstração de outra propriedade. O *bloco tecnológico-teórico* tem lugar via a demonstração da propriedade, ou seja, quando o autor solicita: Demonstre que $x = m(\hat{A}) + m(\hat{B})$.

---

28 Exercício

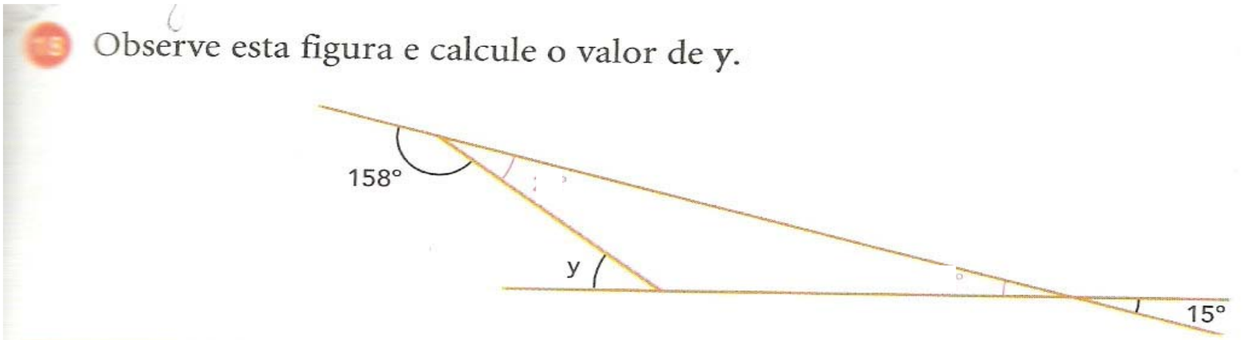
54

b) Construa em seu caderno um triângulo acutângulo, um triângulo retângulo e um triângulo obtusângulo. Em cada um deles, localize o ortocentro usando régua e transferidor ou régua e esquadro.

A *Organização Matemática* associada à tarefa $\mathbf{T}_{6\pi 3}$ é composta pela tarefa:

T_1 – Calcular a medida do ângulo externo y do triângulo.

Desta tarefa identificamos um exercício[29], veja:



Para resolver esse exercício usamos três resultados teóricos:

-“A soma de dois ângulos adjacentes e suplementares é 180º”;

- “Ângulos opostos pelo vértice são iguais”;

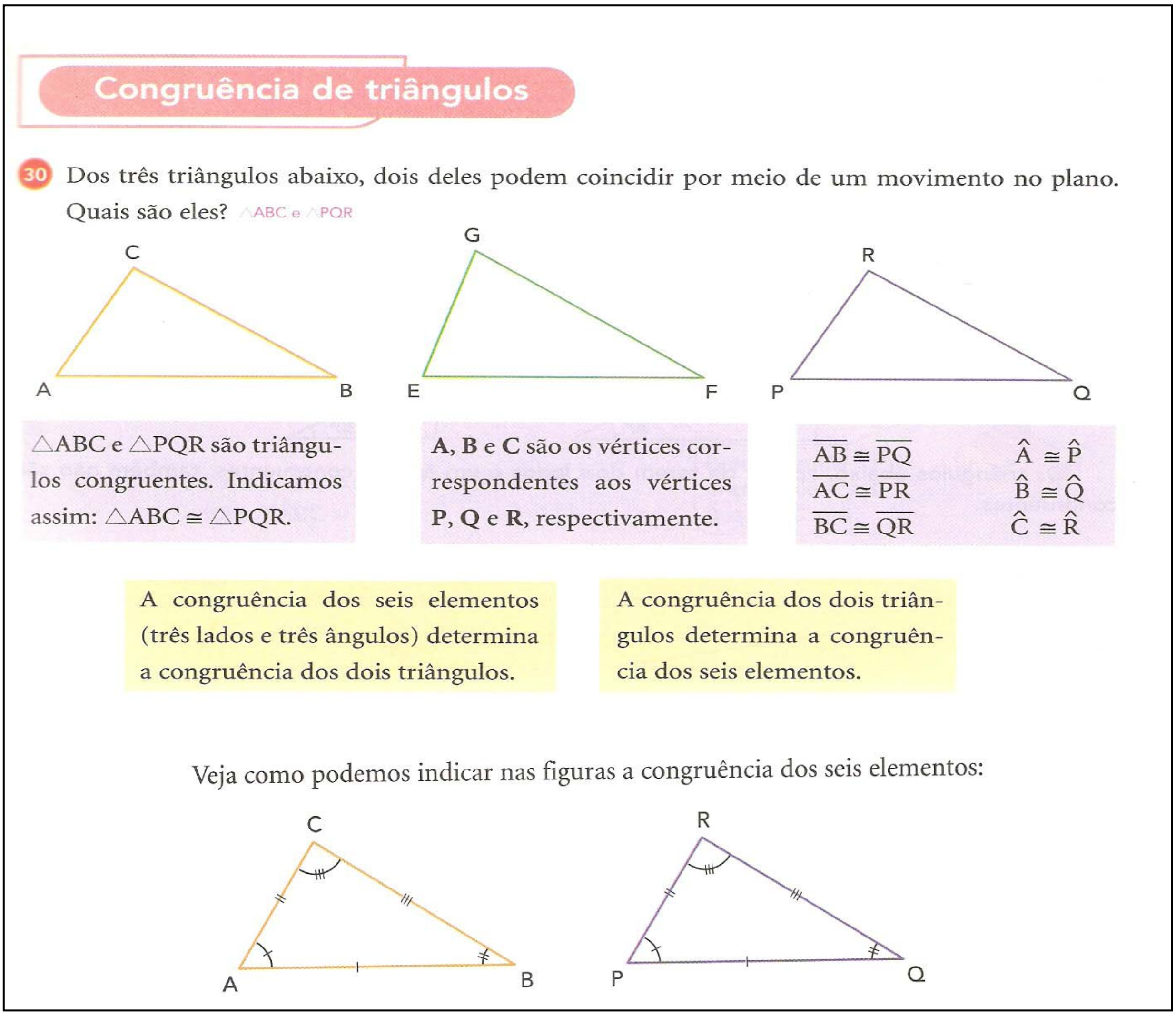
- “Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não–adjacentes a ele”.

Observação: na sessão “Revisão cumulativa” outro exercício mobiliza a tarefa T_1 articulada com outras três propriedades: “Ângulos opostos pelo vértice são iguais”, “Ângulos alternos e internos em lados diferentes em relação à reta transversal e na parte interna em relação as retas paralelas têm a mesma medida” e “Em todo triângulo, a soma dos ângulos internos é 180º”. Lembramos que essas tecnologias na perspectiva da Organização Matemática são ferramentas para a resolução da atividade proposta.

Tarefa $\mathbf{T}_{6\pi 4}$: Ensinar a congruência de triângulos.

A congruência de triângulos é introduzida no livro como apresentamos a seguir:

[29] Tarefa $T_2 \Rightarrow$ ANEXO – 4



Congruência de triângulos

30 Dos três triângulos abaixo, dois deles podem coincidir por meio de um movimento no plano. Quais são eles? $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$

$\triangle ABC$ e $\triangle PQR$ são triângulos congruentes. Indicamos assim: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

A, **B** e **C** são os vértices correspondentes aos vértices **P**, **Q** e **R**, respectivamente.

$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ $\quad \hat{A} \cong \hat{P}$

$\overline{AC} \cong \overline{PR}$ $\quad \hat{B} \cong \hat{Q}$

$\overline{BC} \cong \overline{QR}$ $\quad \hat{C} \cong \hat{R}$

A congruência dos seis elementos (três lados e três ângulos) determina a congruência dos dois triângulos.

A congruência dos dois triângulos determina a congruência dos seis elementos.

Veja como podemos indicar nas figuras a congruência dos seis elementos:

Como podemos observar os três momentos: *primeiro encontro* com o conceito de congruência de triângulos, *exploração da técnica* τ que designamos análise e comparação e a *construção do bloco tecnológico-teórico* são contemplados na exploração do enunciado do exposto. Os triângulos: ABC, EFG e PQR, completam o enunciado. As ações realizadas com a finalidade de elucidar a resposta quanto à questão colocada, permitem conjecturar e formular elementos da *tecnologia* e da *técnica*.

A resposta do exercício é apresentada nos retângulos em lilás, por meio da correspondência entre os vértices, os lados e os ângulos com o uso da linguagem natural e da linguagem simbólica. O momento da *institucionalização* é realizado no livro didático com as respectivas frases: “A congruência dos seis elementos (três lados e três ângulos) determina a congruência dos dois triângulos” e “A congruência dos dois triângulos determina a congruência dos seis elementos”.

O momento da *avaliação* se realiza por meio de um exercício, sob a tarefa T_1, citada abaixo:

T_1 – Encontrar as medidas dos lados e os ângulos correspondentes de dois triângulos congruentes dados.

Essa tarefa[30] mobiliza quatro propriedades, são elas:

-"Dois segmentos de reta são congruentes quando suas medidas são iguais. Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos de reta congruentes, indicamos: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$".

-"Dois ângulos são congruentes quando suas medidas são iguais. Se $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ são ângulos congruentes, indicamos: $\hat{P} \cong \hat{Q}$".

-"A congruência dos dois triângulos determina a congruência dos seis elementos. E, a congruência de seis elementos (três lados e três ângulos) determina a congruência dos dois triângulos".

-"Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$".

Dentre as propriedades mobilizadas, convém ressaltar que as duas primeiras propriedades o autor do livro considera neste momento como conhecimento disponível. O livro propõe o ensino das mesmas na sessão "Figuras Congruentes" que antecede a sessão "Congruência de Triângulos".

O autor do livro propôs apenas um exercício para aplicar o novo conhecimento, pois o objetivo ao ensinar congruência de triângulos é ensinar principalmente os casos de congruência de triângulos, como veremos em seguida na tarefa $T_{6\pi5}$.

Tarefa $T_{6\pi5}$: Ensinar os casos de congruência de triângulos.

Uma *Organização Didática* que inicia com a observação do leitor e com a leitura do texto:

---

[30]Tarefa $T_1 \Rightarrow$ ANEXO – 5

Casos de congruência de triângulos

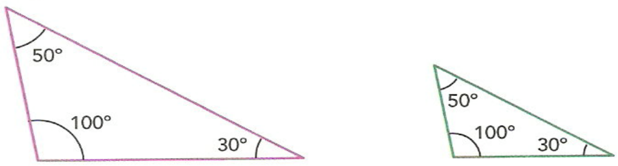
Luís estava acompanhando a aula da professora Eliane, mas estava começai aquilo muito trabalhoso.

Para saber se dois triângulos são congruentes, vou ter de verificar toda vez a congruência dos seis elementos (três lados e três ângulos)?

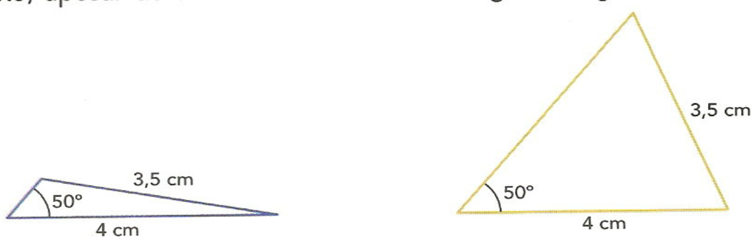
Se você escolher convenientemente, basta verificar a congruência de três deles. Se ela acontecer, os outros três elementos também são congruentes e, conseqüentemente, os triângulos são congruentes.

Agora ficou mais simples, não é?

Mas atenção: as figuras abaixo mostram que a congruência dos três ângulos não garante a congruência dos triângulos. Veja:

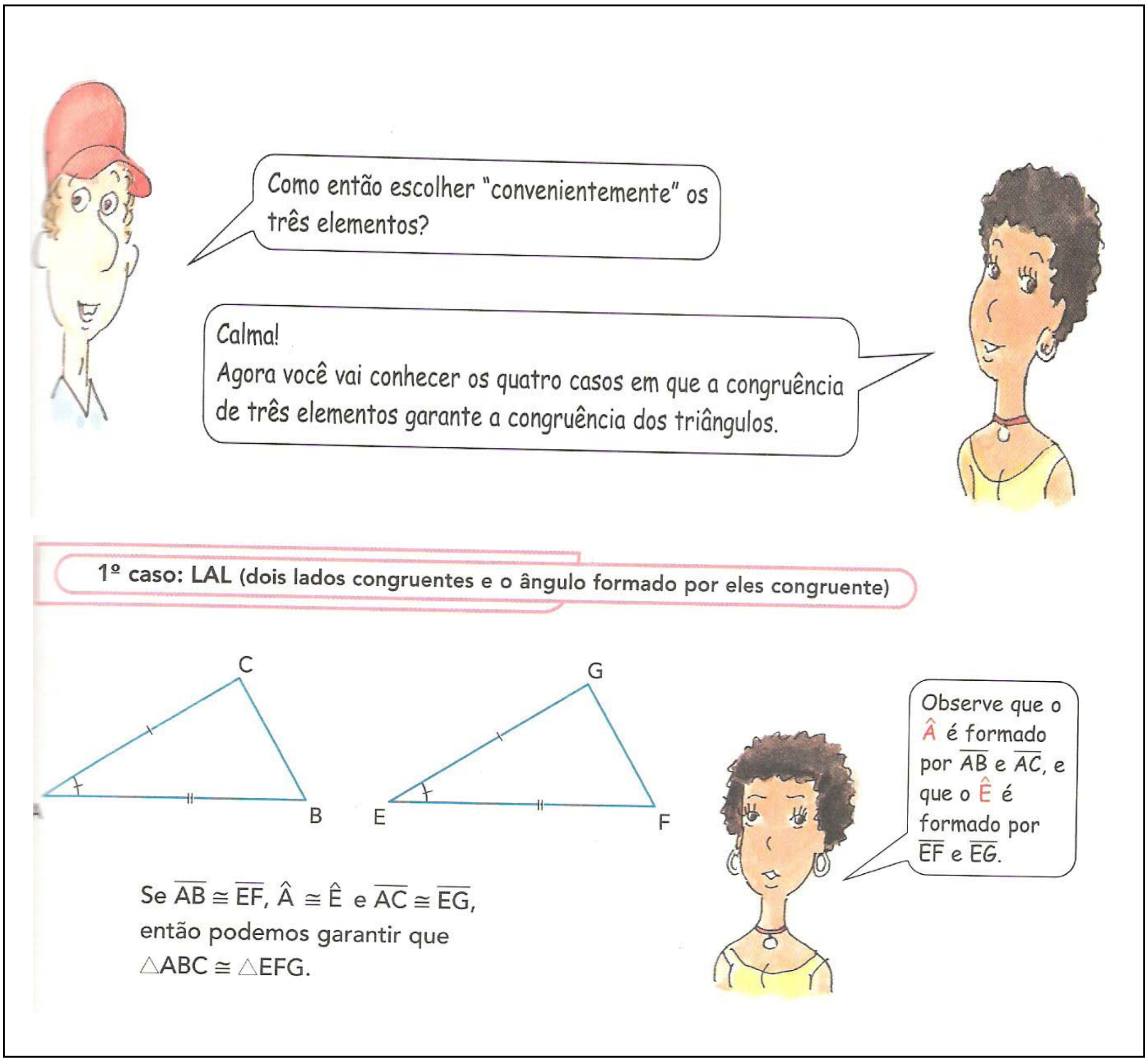


Os triângulos abaixo, apesar de terem dois lados e um ângulo congruentes, também não são congruentes.



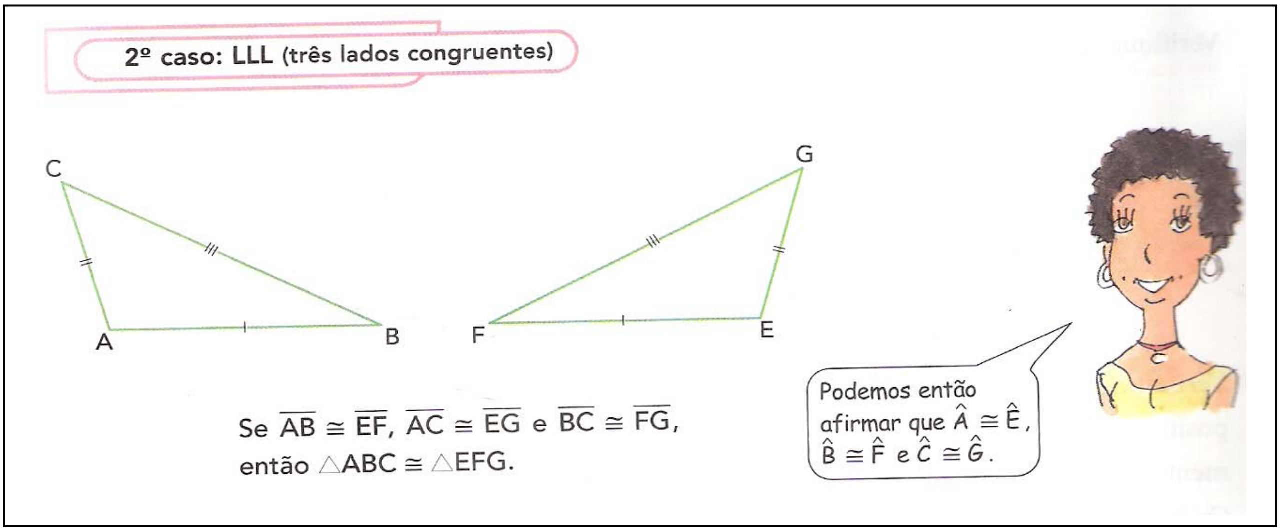
Como podemos ver, o momento do *primeiro encontro* é feito por meio do texto que aborda um diálogo entre o aluno e a professora. Onde o aluno a questiona se para verificar se dois triângulos são congruentes, sempre será necessário verificar a congruência dos seis elementos. A professora responde que se escolher convenientemente, basta verificar a congruência de três deles (dos elementos). Se ela acontecer, os outros três elementos também serão congruentes e, conseqüentemente, os triângulos são congruentes. Assim, temos um momento de leitura, observação e análise para a emergência da tecnologia.

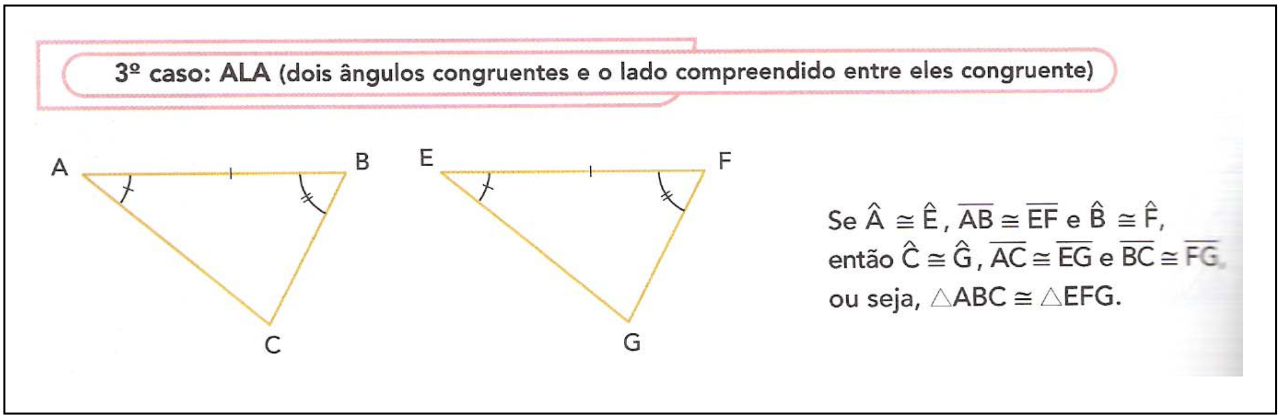
Já os momentos da *exploração da tarefa* como fazer para saber se dois triângulos são congruentes e da *construção do bloco tecnológico-teórico*, iniciam-se quando o autor do livro didático chama a atenção do leitor, ressaltando que a escolha não pode ser feita de qualquer modo. Para isso mostra dois exemplos em que os triângulos não são congruentes: 1) a congruência entre os três ângulos em dois triângulos diferentes não garante que eles sejam congruentes. 2) tendo dois lados congruentes também não garante que os triângulos são congruentes. Seguido do questionamento: como deve ser realizada a escolha dos três elementos de modo conveniente? A professora responde que ele vai conhecer quatro casos em que a congruência de três elementos garante a congruência dos triângulos. Assim ocorre a emergência da *técnica*, a construção do *bloco tecnológico-teórico* e a *institucionalização* para o 1º caso de congruência de triângulos:

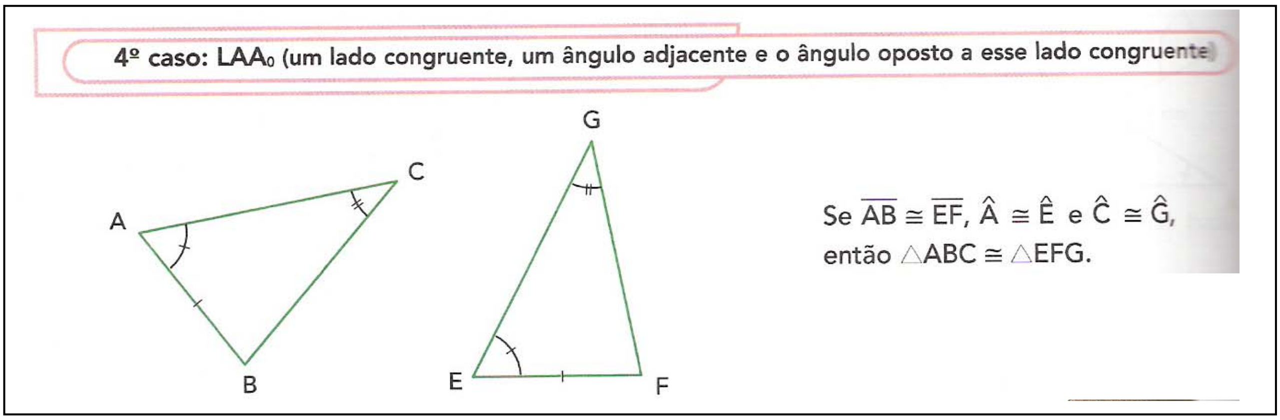


Ressaltamos que nos outros três casos de congruência, a *emergência da técnica*, a construção do *bloco tecnológico-teórico e a institucionalização* ocorrem da mesma maneira.

Veja:







A *Organização Matemática*, é composta de quatro tarefas:

T_1 – Construir um triângulo e depois comparar com os triângulos que os colegas construíram para verificar a congruência.

T_2 – Discutir afirmações a respeito de congruência de triângulos.

T_3 – Verificar se é possível afirmar que os triângulos são congruentes destacando o tipo de congruência e quais os elementos congruentes.

T_4 – Identificar a congruência dos triângulos e calcular uma medida desconhecida.

A tarefa T_1[31] é composta por 04 exercícios e divide-se em sub-tarefas. Vejamos cada sub-tarefa separadamente:

$t_{1,1}$ – Construir um triângulo usando régua e transferidor conhecendo dois lados do triângulo e um ângulo formado por esses lados e comparar com os triângulos construídos pelos colegas.

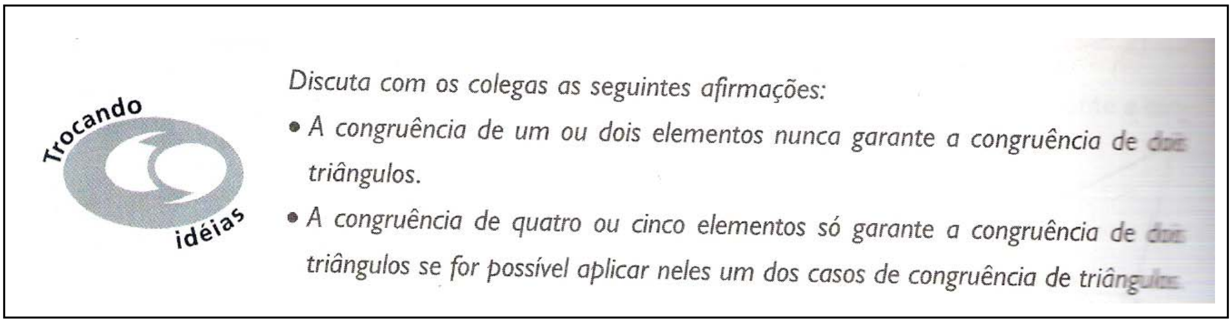
$t_{1,2}$ – Construir um triângulo usando régua e compasso conhecendo os três lados desse triângulo e comparar com os triângulos construídos pelos colegas.

$t_{1,3}$ – Construir um triângulo usando régua e transferidor conhecendo um lado compreendido entre dois ângulos e comparar com os triângulos construídos pelos colegas.

$t_{1,4}$ – Construir um triângulo usando régua, transferidor e compasso conhecendo um lado e dois ângulos e comparar com os triângulos construídos pelos colegas.

Ressaltamos que estas tarefas são apresentadas separadamente no livro didático, ou seja, para cada caso de congruência de triângulos é proposto um exercício para os alunos verificarem a confiabilidade das técnicas criadas. Destacamos que a construção de triângulos é uma tarefa importante em Geometria e nesse contexto é considerado como conhecimento disponível para o aluno.

A tarefa T_2 é apresentada na sessão "trocando idéias" e propõe discutir duas afirmações a respeito de congruência de triângulos, como podemos observar abaixo:


Trocando idéias

Discuta com os colegas as seguintes afirmações:

- A congruência de um ou dois elementos nunca garante a congruência de dois triângulos.
- A congruência de quatro ou cinco elementos só garante a congruência de dois triângulos se for possível aplicar neles um dos casos de congruência de triângulos.

O objetivo de promover a discussão entre os alunos é verificar se eles compreenderam a tecnologia trabalhada em $T_{6\pi5}$. Dependendo da resposta dos alunos o professor vai perceber

[31] Tarefa $T_1 \Rightarrow$ ANEXO – 6

se eles aprenderam os quatro casos de congruência de triângulo. A tarefa T_2 é um caso específico do momento de avaliação.

A tarefa T_3[32] divide-se em oito sub-tarefas sendo composta por nove exercícios. Vejamos cada sub-tarefa separadamente:

$t_{3,1}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando for dado dois triângulos com dois lados congruentes compreendidos entre dois ângulos também congruentes.

$t_{3,2}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando for dado dois triângulos com um lado congruente e dois ângulos também congruentes.

$t_{3,3}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando for dado três ângulos.

$t_{3,4}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando for dado três lados.

$t_{3,5}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando for dado a figura de dois triângulos

$t_{3,6}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando for dado dois lados e um ângulo.

$t_{3,7}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando os triângulos forem isósceles.

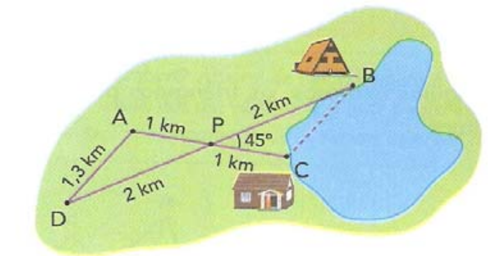
$t_{3,8}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando os triângulos forem eqüiláteros.

Dos nove exercícios cinco são casos de congruência e quatro de não congruência.

---
[32] Tarefa $T_3 \Rightarrow$ ANEXO – 7

Enquanto nas tarefas T_1 e T_3 o autor trabalha nos exercícios a aplicação direta das propriedades (*tecnologias*) dos tipos de congruência de triângulos, na tarefa T_4 ele procura mostrar um exemplo envolvendo uma situação cotidiana. Esse exercício pode ser resolvido conhecendo os casos de congruência de triângulos, ou seja, é o momento de *aplicação da técnica* e de *avaliação*.

43



Observe a figura ao lado e as medidas indicadas. É possível descobrir a distância BC entre as duas casas? Responda em seu caderno e justifique.

Como podemos observar para responder a tarefa T_4 o aluno deve conhecer as propriedades:

1) Ângulos opostos pelo vértice são iguais;
2) O 2º caso de congruência de triângulos (caso LLL).

Esta Organização Matemática têm 4 tarefas e um total de 12 sub-tarefas.

Tarefa $T_{6\pi 6}$: Ensinar que em todo triângulo isósceles, os ângulos opostos aos lados congruentes são também congruentes.

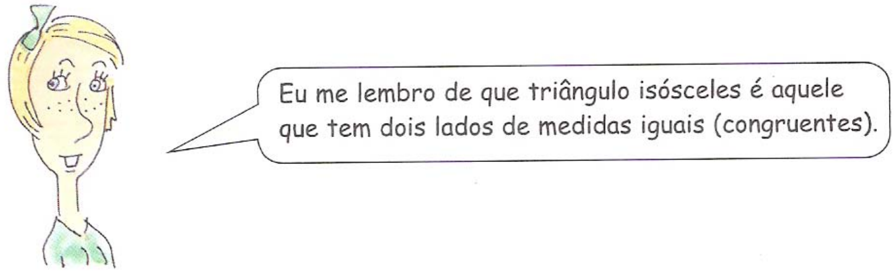
O *primeiro encontro* é feito por meio do enunciado "Aplicações dos casos de congruência de triângulos", seguido do enunciado do exercício resolvido como mostramos abaixo:

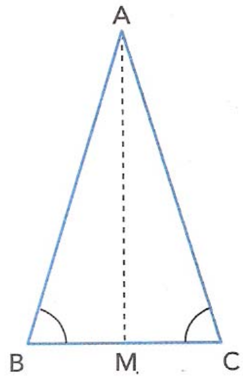
Aplicações dos casos de congruência de triângulos

37 Você já deve ter percebido que podemos chegar às propriedades geométricas sem a necessida de usar medições.
Chamamos a esse método de raciocínio de demonstração.
Para demonstrarmos uma propriedade geométrica, devemos seguir alguns passos.
Vamos, por exemplo, demonstrar que:

Em todo triângulo isósceles, os ângulos opostos aos lados congruentes são também congruentes.

A *exploração da tarefa* e da *emergência da técnica*, bem como, a *construção do bloco tecnológico-teórico*, ou seja, o 2º e o 3º momento da Organização Didática, ocorrem quando o autor do livro didático afirma que se pode chegar às propriedades geométricas sem a necessidade de usar medições por meio do raciocínio da demonstração. Estes momentos são todos realizados pelo autor, ao estudante cabe ler e interpretar, ou seja, compreender.





Sabemos que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e queremos provar que $\hat{B} \cong \hat{C}$.
Para isso vamos usar o segmento $\overline{AM}$, que liga o vértice **A** ao ponto médio de $\overline{BC}$ (ponto **M**) e verificar que $\triangle ABM \cong \triangle ACM$.

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (dado inicial)
$\overline{BM} \cong \overline{CM}$ (**M** é ponto médio de $\overline{BC}$)
$\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (segmento comum aos $\triangle ABM$ e $\triangle ACM$)

Pelo caso LLL, podemos afirmar que $\triangle ABM \cong \triangle ACM$ e, a partir disso, concluir que $\hat{B} \cong \hat{C}$.
Se nessa figura $\hat{\mathbf{A}}$ mede 38º, calcule em seu caderno as medidas de $\hat{\mathbf{B}}$ e $\hat{\mathbf{C}}$.
Observação: Às vezes, essa propriedade dos triângulos isósceles é enunciada assim:

Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

A *institucionalização* da propriedade ocorre quando o livro didático anuncia a propriedade: "Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes."

A *aplicação da técnica* se realiza por meio de uma tarefa, que nos dá a Organização Matemática:

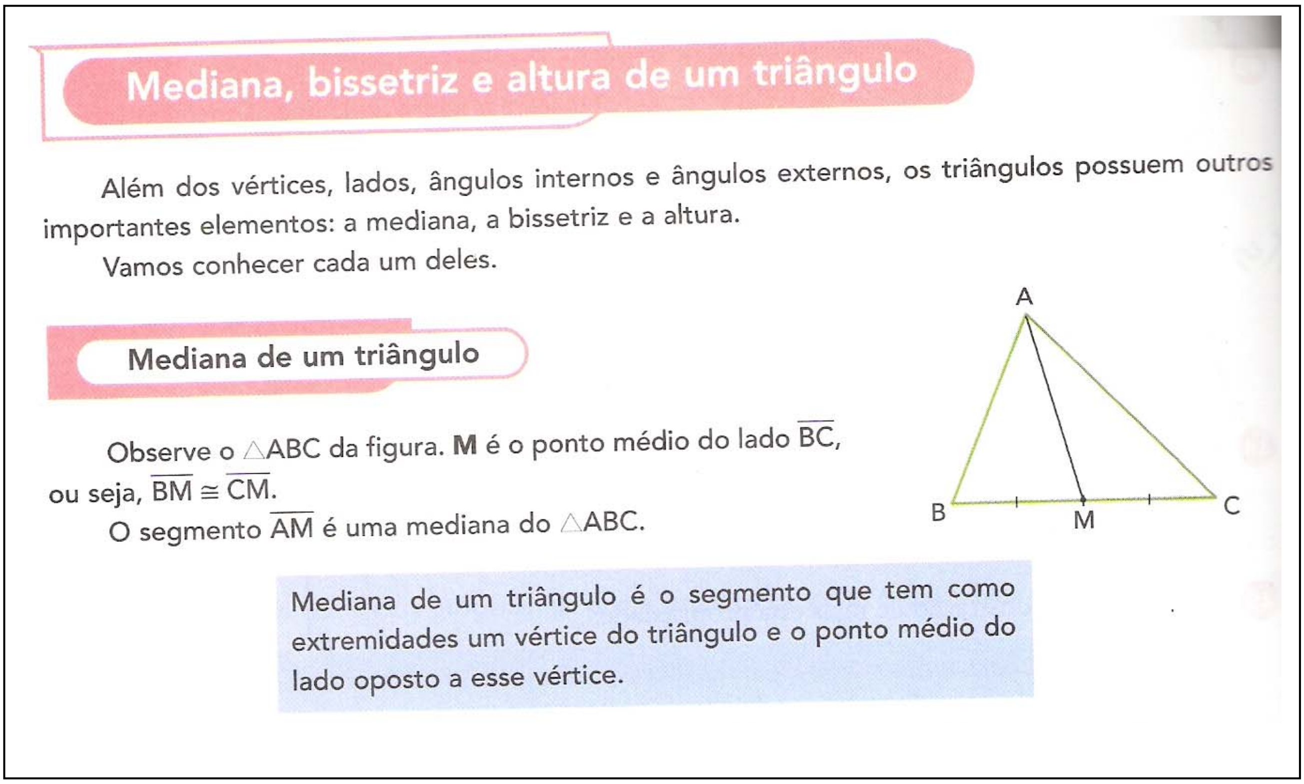
T_1 – Determinar a medida dos outros dois ângulos do triângulo quando for dado a medida de um ângulo do triângulo isósceles[33].

[33] Tarefa $T_1 \Rightarrow$ ANEXO – 8

Ressaltamos que apenas um dos exercícios encontra-se logo após a Organização Didática de $T_{6\pi6}$. Os outros dois exercícios estão no livro didático duas páginas depois, quando o objeto de estudo são retas importantes relativas ao triângulo, ou seja, quando o objeto de estudo é a mediana, a bissetriz e a altura do triângulo. Outro aspecto relevante é que para encontrar a solução dos exercícios propostos, somente a mobilização da *tecnologia* ensinada em $T_{6\pi6}$ não é suficiente, faz-se necessário articular outros resultados teóricos. Isso mostra que na medida em que o autor do livro didático propõe o ensino de novas propriedades há necessidade de o aluno ter as propriedades anteriores como conhecimento disponível para poder seguir compreendendo o conteúdo.

Tarefa $T_{6\pi7}$: Ensinar alguns elementos importantes: como a mediana, bissetriz e a altura de um triângulo.

O momento do *primeiro encontro*, como mostramos abaixo, é realizado por meio da frase: “Além dos vértices, lados, ângulos internos e ângulos externos, os triângulos possuem outros importantes elementos: a mediana, a bissetriz e a altura”.



Mediana, bissetriz e altura de um triângulo

Além dos vértices, lados, ângulos internos e ângulos externos, os triângulos possuem outros importantes elementos: a mediana, a bissetriz e a altura.

Vamos conhecer cada um deles.

Mediana de um triângulo

Observe o $\triangle ABC$ da figura. **M** é o ponto médio do lado $\overline{BC}$, ou seja, $\overline{BM} \cong \overline{CM}$.

O segmento $\overline{AM}$ é uma mediana do $\triangle ABC$.

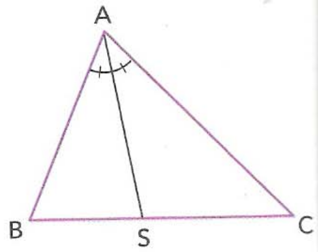
Mediana de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

No ensino de cada “elemento” do triângulo: mediana, bissetriz e altura, a *exploração da tarefa e da elaboração da técnica* e a *construção do bloco tecnológico-teórico*, ocorrem simultaneamente.

O momento da *institucionalização* da mediana de um triângulo e da bissetriz de um triângulo é contemplado pelo destaque das propriedades.

Bissetriz de um triângulo

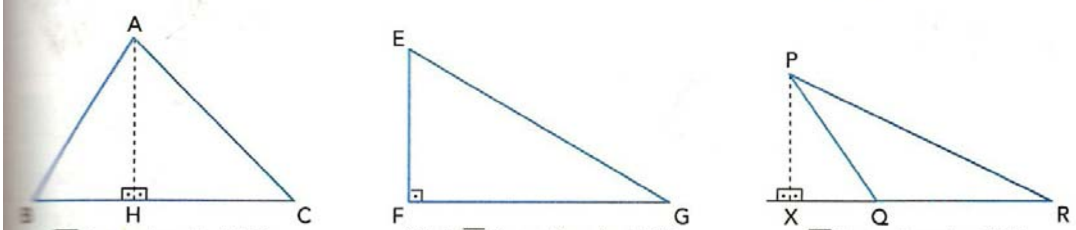
Observe o $\triangle ABC$ da figura. O segmento $\overline{AS}$ divide o $\hat{A}$ em dois ângulos congruentes, ou seja, $B\hat{A}S \cong C\hat{A}S$ e o ponto **S** pertence ao lado $\overline{BC}$.
O segmento $\overline{AS}$ é uma bissetriz do $\triangle ABC$.



Bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice.

No caso da altura do triângulo, a *institucionalização* é realizada como um segundo encontro, ou seja, a maneira de falar da professora dá a entender que o aluno já conhecia essa propriedade. Veja:

Altura de um triângulo



$\overline{AH}$ é uma altura do $\triangle ABC$. O lado $\overline{EF}$ é uma altura do $\triangle EFG$. $\overline{PX}$ é uma altura do $\triangle PQR$.

O momento da *aplicação das técnicas* ensinadas e o momento da *avaliação* acontecem simultaneamente. Estes são realizados nas tarefas identificadas na sessão “trocando idéias” e nos onze exercícios seguintes do livro didático. Assim, a Organização Matemática de $T_{6\pi 7}$ é composta por nove tarefas, a saber:

T_1 – Construir um triângulo, conhecendo a medida dos três lados, e traçar uma mediana desse triângulo.

T_2 – Responder quantas medianas possui um triângulo.

T_3 - Construir um triângulo, conhecendo a medida de um lado entre dois ângulos também dados, e traçar a bissetriz desse triângulo.

T_4 – Responder quantas bissetrizes há em um triângulo.

T_5 – Observar as figuras e conversar com os colegas sobre a posição das três alturas em cada triângulo. Descobrir em que situações acontece cada caso.

T_6 – Calcular o valor dos ângulos x e y de um triângulo, conhecendo uma bissetriz e/ou uma altura desse triângulo e conhecendo a medida de outros ângulos desse triângulo. (três exercícios)

T_7 – Determinar as medidas dos segmentos que cada mediana faz com cada lado. Conhecendo a medida dos três lados do triângulo e as medianas de cada lado.

T_8 **-** Determinar a medida do ângulo EOG. Dado um triângulo EFG. O ângulo E mede 100º, o ângulo F mede 20º e sabendo que o ponto O é o encontro da altura $\overline{EH}$ com a bissetriz $\overline{GS}$ do triângulo.

T_9 - Demonstrar que em todo triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.

Nas tarefas propostas[34] foram mobilizadas oito propriedades diferentes, ou seja, para a resolução das tarefas era necessário conhecer oito propriedades, quais sejam:

- "Mediana de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice".

-"A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice".

-"A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos".

-"A soma de dois ângulos adjacentes e suplementares é 180º".

-"Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$".

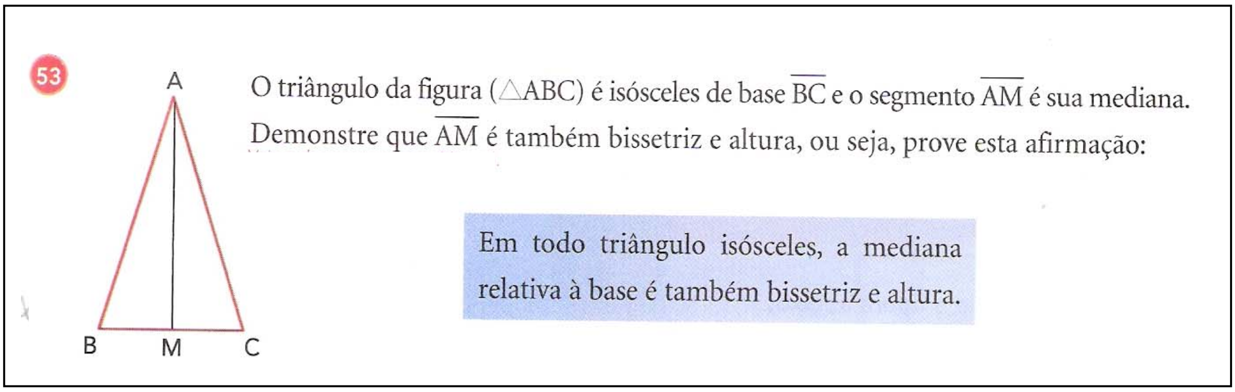
-"Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não–adjacentes a ele."

[34] Tarefas T_1 à $T_9 \Rightarrow$ ANEXO – 9

-“A congruência dos dois triângulos determina a congruência dos seis elementos. E, a congruência de seis elementos (três lados e três ângulos) determina a congruência dos dois triângulos”.

-“Se três lados dos triângulos são congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LLL”

Dentre as nove tarefas propostas destacamos a última tarefa como sendo a tarefa que coloca em prática as cinco propriedades estudadas.


53

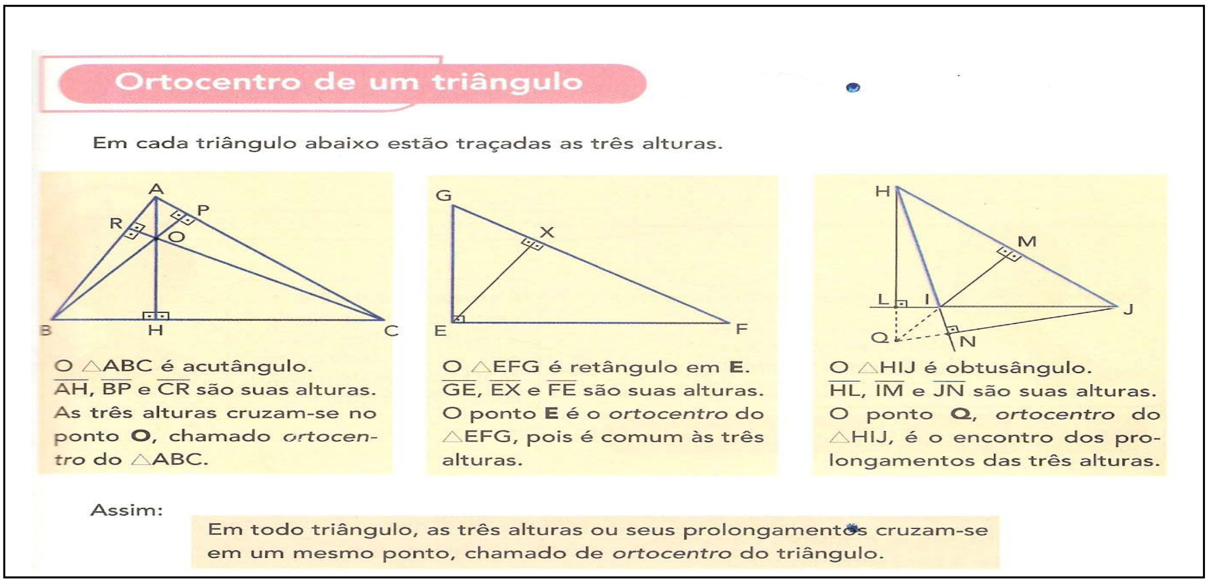
O triângulo da figura ($\triangle ABC$) é isósceles de base $\overline{BC}$ e o segmento $\overline{AM}$ é sua mediana. Demonstre que $\overline{AM}$ é também bissetriz e altura, ou seja, prove esta afirmação:

Em todo triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.

Como podemos observar essa tarefa é uma tarefa de demonstração, ou seja, é uma tarefa onde o aluno deve usar as propriedades já conhecidas como ferramenta para demonstrar um novo resultado.

Tarefa $T_{6\pi8}$: Ensinar o ortocentro de um triângulo

Uma *Organização Didática* que inicia com a observação do leitor, leitura do texto e sua compreensão:


Ortocentro de um triângulo

Em cada triângulo abaixo estão traçadas as três alturas.

O $\triangle ABC$ é acutângulo. $\overline{AH}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CR}$ são suas alturas. As três alturas cruzam-se no ponto **O**, chamado *ortocentro* do $\triangle ABC$.

O $\triangle EFG$ é retângulo em **E**. $\overline{GE}$, $\overline{EX}$ e $\overline{FE}$ são suas alturas. O ponto **E** é o *ortocentro* do $\triangle EFG$, pois é comum às três alturas.

O $\triangle HIJ$ é obtusângulo. $\overline{HL}$, $\overline{IM}$ e $\overline{JN}$ são suas alturas. O ponto **Q**, *ortocentro* do $\triangle HIJ$, é o encontro dos prolongamentos das três alturas.

Assim:

Em todo triângulo, as três alturas ou seus prolongamentos cruzam-se em um mesmo ponto, chamado de *ortocentro* do triângulo.

Ao observar a figura, podemos verificar que o momento do *primeiro encontro*, o momento da *exploração da tarefa* e o momento da *construção do bloco tecnológico-teórico*, ocorrem simultaneamente, e fazem uso da linguagem natural, da linguagem figural e da linguagem simbólica.

O momento da *institucionalização* se dá pelo registro escrito da propriedade em destaque.

O momento da *avaliação* é composto de duas tarefas[35] que dão lugar a *Organização Matemática*:

T_1 - Encontrar um dos ângulos formado pelo ortocentro do triângulo dado, conhecendo apenas dois ângulos desse triângulo.

T_2 - Construir um triângulo acutângulo, um retângulo e um obtusângulo e depois localizar o ortocentro.

De cada uma dessas tarefas o autor propõe somente um exercício. Na resolução destes são mobilizadas três propriedades, são elas:

-"Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$ ".

-"Em todo triângulo, as três alturas ou seus prolongamentos cruzam-se em um mesmo ponto, chamado de ortocentro do triângulo".

-"A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos".

Tarefa $T_{6\pi 9}$: Ensinar o incentro de um triângulo

Observando a figura que segue, verificamos que o momento do *primeiro encontro*, o momento da *exploração da tarefa* e o momento *da construção do bloco tecnológico-teórico*, ocorrem simultaneamente.

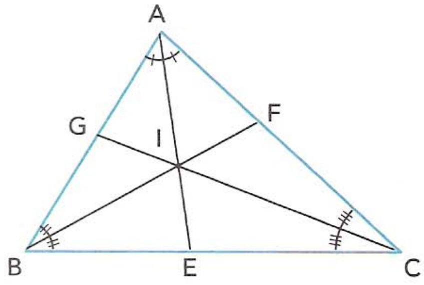
[35] Tarefas $T_1 e T_2 \Rightarrow$ ANEXO – 10

Incentro de um triângulo

Agora examine a figura abaixo.

Veja o que acontece com as três bissetrizes do $\triangle ABC$: elas se cruzam no mesmo ponto, chamado *incentro*.

$\overline{AE}$ é bissetriz do $\triangle ABC$.
$\overline{BF}$ é bissetriz do $\triangle ABC$.
$\overline{CG}$ é bissetriz do $\triangle ABC$.
I é o incentro do $\triangle ABC$.
Assim:



Em todo triângulo, as três bissetrizes cruzam-se em um mesmo ponto, chamado *incentro* do triângulo.

O momento da *institucionalização* ocorre pelo destaque da propriedade: “Em todo triângulo, as três bissetrizes cruzam-se em um mesmo ponto, chamado incentro do triângulo”.

O momento da *aplicação das técnicas* ocorre por meio das tarefas:

T_1 – Encontrar um dos ângulos formado pelo incentro do triângulo dado, conhecendo apenas dois ângulos desse triângulo.

T_2 – Localizar o incentro de um triângulo.

Relativo a estas tarefas[36] identificamos somente um exercício de cada tipo. As *tecnologias* mobilizadas para a resolução do exercício foram três. São elas:

- “Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$”.

-“A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice”.

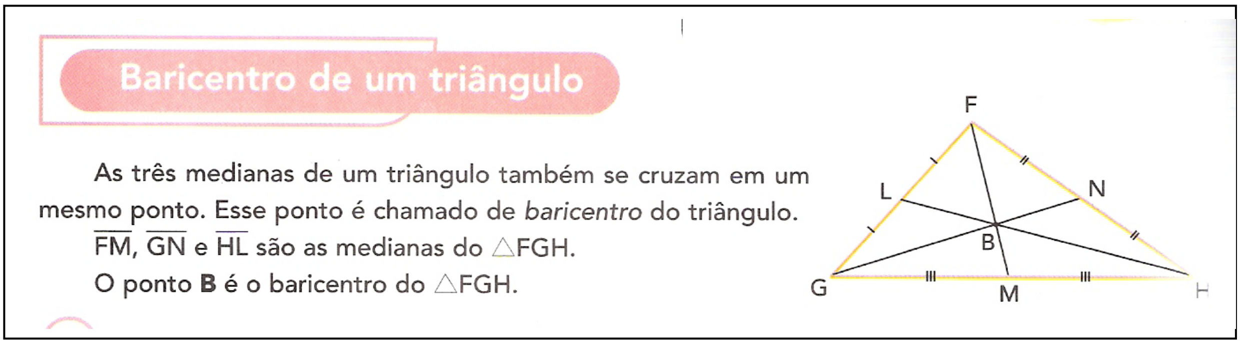
- “Em todo triângulo, as três bissetrizes cruzam-se em um mesmo ponto, chamado incentro do triângulo”.

Tarefa $T_{6\pi10}$: Ensinar o baricentro de um triângulo

O momento do *primeiro encontro*, o momento da *exploração da tarefa,* o momento da *construção do bloco tecnológico-teórico* e o momento da *institucionalização* ocorrem

[36] Tarefas T_1e$T_2 \Rightarrow$ ANEXO – 11

simultaneamente. Porém, convém ressaltar que a *institucionalização* não está em destaque como nas tarefas $T_{6\pi 8}$ e $T_{6\pi 9}$.


Baricentro de um triângulo

As três medianas de um triângulo também se cruzam em um mesmo ponto. Esse ponto é chamado de *baricentro* do triângulo.

$\overline{FM}$, $\overline{GN}$ e $\overline{HL}$ são as medianas do $\triangle$FGH.

O ponto **B** é o baricentro do $\triangle$FGH.

No exercício 56 do livro, a fala da professora *institucionaliza* algumas particularidades do baricentro do triângulo, como: "O baricentro de um triângulo divide a mediana na razão de 1 para 2 [...] e, o baricentro é conhecido como ponto de equilíbrio do triângulo".

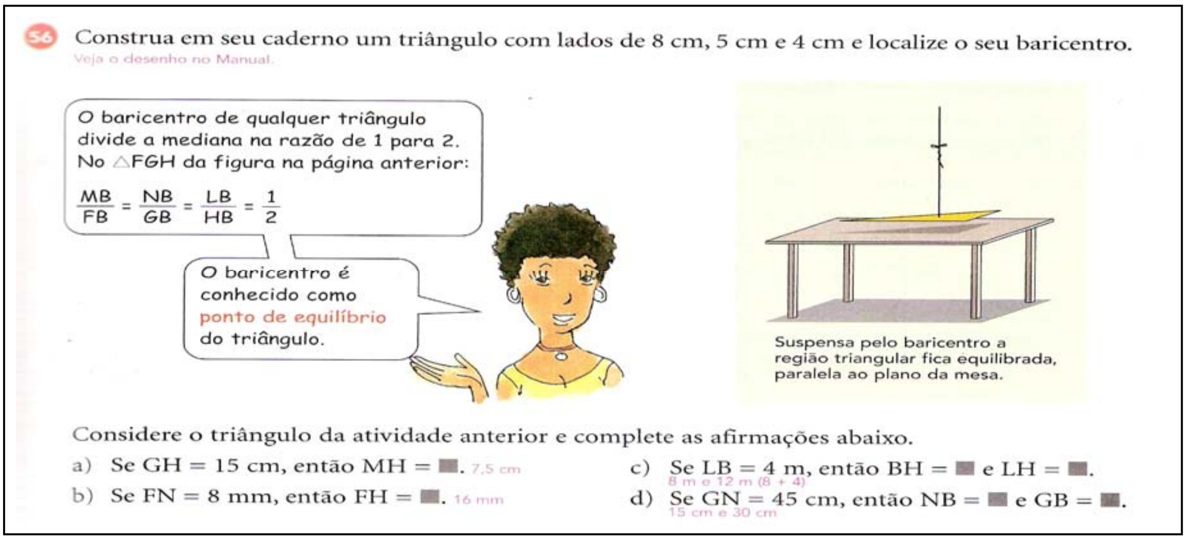
O momento da *aplicação das técnicas* e *o* momento da *avaliação* constituem a *Organização Matemática*. As tarefas[37] nós identificamos em um exercício e na sessão "Oficina de Matemática - Fazendo a gente aprende". Vejamos:

T_1 – Construir um triângulo e localizar o seu baricentro.

T_2 – Completar as afirmações, sabendo que o baricentro de qualquer triângulo divide a mediana na razão de 1 para 2.

T_3 – Construir um triângulo eqüilátero e localizar nele o ortocentro, o incentro e o baricentro. E, responder a pergunta: O que podemos observar em relação a esses três pontos no triângulo eqüilátero?

As tarefas T_1 e T_2 emergiram do exercício 56, da página 151, do livro didático. Como podemos observar abaixo, é um exercício de construção geométrica:


56 Construa em seu caderno um triângulo com lados de 8 cm, 5 cm e 4 cm e localize o seu baricentro.
Veja o desenho no Manual.

Considere o triângulo da atividade anterior e complete as afirmações abaixo.

a) Se GH = 15 cm, então MH = ■. 7,5 cm

b) Se FN = 8 mm, então FH = ■. 16 mm

c) Se LB = 4 m, então BH = ■ e LH = ■. 8 m e 12 m (8 + 4)

d) Se GN = 45 cm, então NB = ■ e GB = ■. 15 cm e 30 cm

[37] Tarefas T_1 à $T_3 \Rightarrow$ ANEXO – 12

Na tarefa T_2 o autor do livro mostra ao aluno outra propriedade decorrente da propriedade que foi ensinada em $T_{6\pi10}$. Como podemos observar a nova propriedade é apresentada no livro na fala da professora. Onde a mesma afirma que "o baricentro de qualquer triângulo divide a mediana na razão de 1 para 2..." E, junto a nova propriedade mais um resultado é apresentado: "O baricentro é conhecido como ponto de equilíbrio do triângulo".

A tarefa T_3 é proposta ao aluno na sessão "Oficina de Matemática - Fazendo a gente aprende". O autor do livro propõe um exercício, no qual após resolvê-lo o aluno deve perceber que a resposta da questão: "O que podemos observar em relação a esses três pontos no triângulo eqüilátero?" é uma nova propriedade, que é válida para todo triângulo eqüilátero. Para resolver o exercício proposto, é necessário conhecer sete propriedades, são elas:

- "Um triângulo é eqüilátero quando têm todos os lados iguais e todos os ângulos iguais".
- "A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos".
- "Em todo triângulo, as três alturas ou seus prolongamentos cruzam-se em um mesmo ponto, chamado de ortocentro do triângulo".
- "A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice".
- "Em todo triângulo, as três bissetrizes cruzam-se em um mesmo ponto, chamado incentro do triângulo".
- "Mediana de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice".
- "As três medianas de um triângulo também se cruzam em um mesmo ponto. Esse ponto é chamado de baricentro do triângulo".

O importante nessa tarefa é a necessidade de articular vários resultados teóricos para sua resolução.

Observações:

Em relação ao Capítulo 6 – "Propriedades de figuras geométricas" do livro didático, podemos também afirmar que há outros momentos de avaliação e de mobilização dos elementos da tecnologia e das técnicas. Estes momentos ocorrem nas sessões:

- Revendo o que aprendemos;
- Projeto em equipe;

- Redação – escrevendo sobre o capítulo;
- Revisão cumulativa;
- Para ler, pensar e divertir-se.

Em conclusão:

Neste capítulo 6 do livro didático, identificamos uma Organização Didática composta de 10 tarefas que visam ensinar propriedades do triângulo, são elas:

- Ensinar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.
- Ensinar a classificação dos triângulos quanto aos ângulos.
- Ensinar que em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
- Ensinar a congruência de triângulos.
- Ensinar os casos de congruência de triângulos.
- Ensinar que em todo triângulo isósceles, os ângulos opostos aos lados congruentes são também congruentes.
- Ensinar os elementos de um triângulo: a mediana, a bissetriz e a altura.
- Ensinar o ortocentro de um triângulo.
- Ensinar o incentro de um triângulo.
- Ensinar o baricentro de um triângulo.

Estas tarefas da Organização Didática dão lugar a Organização Matemática que é composta por 25 tarefas:

– Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo.
– Determinar a existência de um triângulo.
– Calcular a medida do ângulo externo y do triângulo.
– Encontrar as medidas dos lados e os ângulos correspondentes de dois triângulos congruentes dados.
– Construir um triângulo e depois comparar com os triângulos que os colegas construíram para verificar a congruência.
– Discutir afirmações a respeito de congruência de triângulos.
– Verificar se é possível afirmar que os triângulos são congruentes destacando o tipo de congruência e quais os elementos congruentes.
– Identificar a congruência dos triângulos e calcular uma medida desconhecida.
– Determinar a medida dos outros dois ângulos desse triângulo. Dado a medida de um ângulo do triângulo isósceles.

– Construir um triângulo, conhecendo a medida dos três lados, e traçar uma mediana desse triângulo.
– Responder quantas medianas possui um triângulo.
- Construir um triângulo, conhecendo a medida de um lado entre dois ângulos também dados, e traçar a bissetriz desse triângulo.
– Responder quantas bissetrizes há em um triângulo.
– Observar as figuras e conversar com os colegas sobre a posição das três alturas em cada triângulo. Descobrir em que situações acontece cada caso.
– Calcular o valor dos ângulos x e y de um triângulo, conhecendo uma bissetriz e/ou uma altura desse triângulo e conhecendo a medida de outros ângulos desse triângulo.
– Determinar as medidas dos segmentos que cada mediana faz com cada lado. Conhecendo a medida dos três lados do triângulo e as medianas de cada lado.
- Determinar a medida do ângulo EOG. Dado um triângulo EFG. O ângulo E mede 100º, o ângulo F mede 20º e sabendo que o ponto O é o encontro da altura $\overline{EH}$ com a bissetriz $\overline{GS}$ do triângulo.
- Demonstrar que em todo triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.
- Encontrar um dos ângulos formado pelo ortocentro do triângulo dado, conhecendo apenas dois ângulos desse triângulo.
- Construir um triângulo acutângulo, um retângulo e um obtusângulo e depois localizar o ortocentro.
– Encontrar um dos ângulos formado pelo incentro do triângulo dado, conhecendo apenas dois ângulos desse triângulo.
– Localizar o incentro de um triângulo.
– Construir um triângulo e localizar o seu baricentro.
– Completar as afirmações, sabendo que o baricentro de qualquer triângulo divide a mediana na razão de 1 para 2.
– Construir um triângulo eqüilátero e localizar nele o ortocentro, o incentro e o baricentro. E, responder a pergunta: O que podemos observar em relação a esses três pontos no triângulo eqüilátero?

Algumas destas tarefas da Organização Matemática se desdobram em sub-tarefas de acordo com a situação problema proposta. Dessa forma, temos: 14 sub-tarefas. As tarefas e as sub-tarefas compõem um total de 44 exercícios propostos.

b) Capítulo 8 - Proporcionalidade em geometria

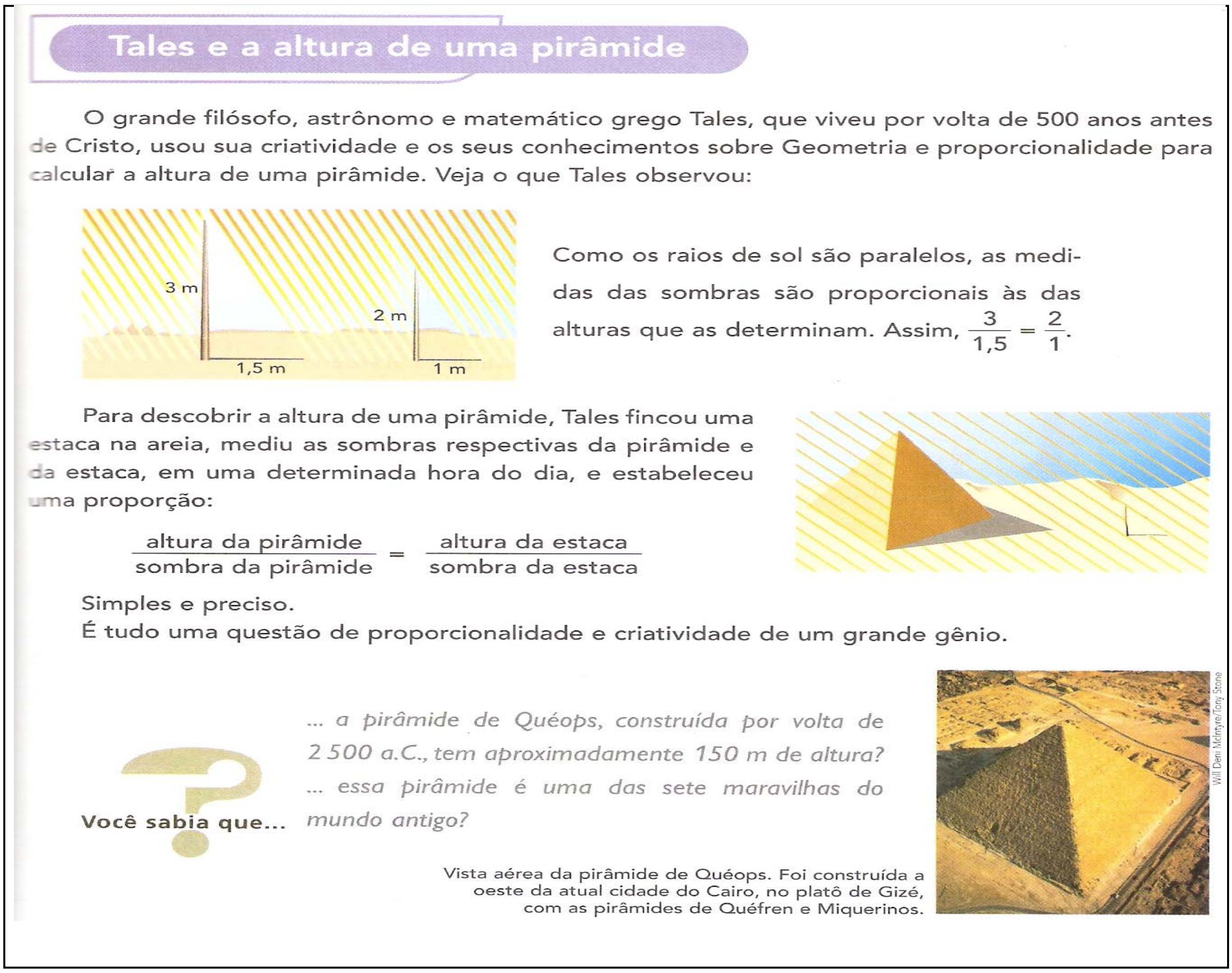
O estudo do capítulo 8 nos permitiu identificar quatro tarefas da Organização Didática. Cada tarefa é denotada por "$T_{8\pi i}$" onde $i \in S = \{11, 12, 13, 14\}$ e varia de acordo com o tipo de propriedade a ser ensinada. Vejamos:

-$T_{8\pi 11}$: Ensinar a proporcionalidade para calcular a altura.
-$T_{8\pi 12}$: Ensinar a proporcionalidade em triângulos retângulos com ângulo de 30^o.
-$T_{8\pi 13}$: Ensinar o triângulo de ouro ou também chamado de triângulo sublime.
-$T_{8\pi 14}$: Ensinar semelhança de triângulos.

Apresentamos a seguir a Organização Didática pontual relativa a cada uma das tarefas acima citadas, usando como referência os "momentos didáticos".

Tarefa $T_{8\pi 11}$: Ensinar a proporcionalidade para calcular a altura

Vejamos a proposição do autor:



Tales e a altura de uma pirâmide

O grande filósofo, astrônomo e matemático grego Tales, que viveu por volta de 500 anos antes de Cristo, usou sua criatividade e os seus conhecimentos sobre Geometria e proporcionalidade para calcular a altura de uma pirâmide. Veja o que Tales observou:

Como os raios de sol são paralelos, as medidas das sombras são proporcionais às das alturas que as determinam. Assim, $\frac{3}{1,5} = \frac{2}{1}$.

Para descobrir a altura de uma pirâmide, Tales fincou uma estaca na areia, mediu as sombras respectivas da pirâmide e da estaca, em uma determinada hora do dia, e estabeleceu uma proporção:

$$\frac{\text{altura da pirâmide}}{\text{sombra da pirâmide}} = \frac{\text{altura da estaca}}{\text{sombra da estaca}}$$

Simples e preciso.
É tudo uma questão de proporcionalidade e criatividade de um grande gênio.

Você sabia que...

... a pirâmide de Quéops, construída por volta de 2 500 a.C., tem aproximadamente 150 m de altura?
... essa pirâmide é uma das sete maravilhas do mundo antigo?

Vista aérea da pirâmide de Quéops. Foi construída a oeste da atual cidade do Cairo, no platô de Gizé, com as pirâmides de Quéfren e Miquerinos.

Observando verificamos que o momento do *primeiro encontro*, o momento da *exploração da tarefa* e o momento da construção *do bloco tecnológico-teórico*, ocorrem simultaneamente fazendo uso da linguagem natural e figural. Destacamos que o autor retoma elementos da história da matemática, ilustrando que a matemática não é uma ciência pronta, mas sim construída passo a passo no decorrer dos séculos, por muitas pessoas, como por exemplo: Tales de Mileto.

A *institucionalização*, ou seja, o momento da explicitação formulada de como calcular a altura da pirâmide é contemplado na fórmula[38]:

$$\frac{\text{altura da pirâmide}}{\text{sombra da pirâmide}} = \frac{\text{altura da estaca}}{\text{sombra da estaca}}$$

O autor do livro coloca na sessão "Você sabia que..." uma informação referente a pirâmide de Quéops. Seu objetivo em falar da pirâmide e de sua altura é tornar o conteúdo de proporcionalidade mais significativo, levando o aluno a sentir que é importante saber esse conteúdo em sua vida, ou que o conteúdo trabalhado será útil para entender o mundo em que vive e também, para mostrar que a proporcionalidade que Tales de Mileto descobriu serve para descobrir medidas de alturas inacessíveis.

A *Organização Matemática* identificamos nos exercícios de aplicação e o momento da *avaliação* que são articulados e têm como objetivo avaliar as competências desenvolvidas. Estes momentos são realizados no livro didático em quatro exercícios, sendo que dois deles são problemas propostos, o terceiro é um problema proposto como um desafio e o quarto é um problema que deve ser resolvido em equipe, pois é proposto na sessão "Oficina de Matemática – Fazendo a gente aprende". As tarefas identificadas nos exercícios são*:*

T_1 - Encontrar a medida de alturas inacessíveis;

T_2 - Encontrar a medida da sombra de uma pessoa quando a sombra do objeto diminuir x cm.

Para resolver essas tarefas[39] é necessário conhecer algumas propriedades, são elas:

- (1) - Para transformar de metro para centímetros devemos multiplicar o número que indica a medida por 10^2, ou seja, devemos multiplicar por 100.

[38] Ressaltamos que no Manual Pedagógico do Professor – Parte Específica, o autor do livro afirma que o conteúdo de proporção já foi trabalhado na 6ª série do Ensino Fundamental. O objetivo de retomar este conteúdo na 7ª série do Ensino Fundamental é aplicar a proporcionalidade na Geometria.

[39] Tarefas T_1 e $T_2 \Rightarrow$ ANEXO – 13

- (2) - Para transformar de centímetros para metro devemos multiplicar o número que indica a medida por $\left(\frac{1}{10}\right)^2$, ou seja, devemos dividir por 100.

- (3) - Quatro números racionais, *a, b, c* e *d*, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando a razão do primeiro para o segundo é igual a razão do terceiro para o quarto.

- (4) - Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lemos: a está para *b* assim como *c* está para d, os números *a*, *b*, *c* e *d* são chamados de **termos da proporção**. O primeiro e o quarto termos de uma proporção são chamados de **extremos**, enquanto o segundo e o terceiro termos são chamados de **meios**.

- (5) - Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

- (6) - Para descobrir a altura de uma pirâmide, Tales fincou uma estaca na areia, mediu as sombras respectivas da pirâmide e da estaca, em uma determinada hora do dia, e estabeleceu uma proporção: $\frac{\text{altura da pirâmide}}{\text{sombra da pirâmide}} = \frac{\text{altura da estaca}}{\text{sombra da estaca}}$, é tudo uma questão de proporcionalidade e criatividade de um grande gênio.

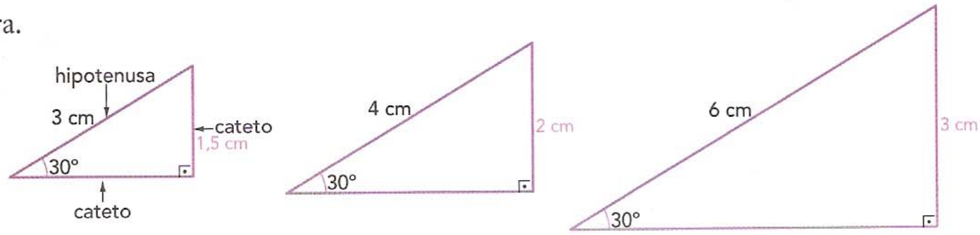
As cinco primeiras propriedades não foram objetos de estudo da tarefa da Organização Didática de $T_{8\pi11}$. Estas propriedades já foram ensinadas nos livros didáticos da 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Porém, para resolver as tarefas propostas na Organização Matemática somente à última propriedade era insuficiente e, para entender essa propriedade os alunos tinham que ter como conhecimento disponível as propriedades 3, 4 e 5. Já as propriedades 1 e 2 eram necessárias para resolver três dos exercícios propostos, pois havia a necessidade de transformar as unidades de medida de comprimento em uma mesma unidade para solucionar corretamente os exercícios. Destacamos a importância do papel do professor como mediador no processo de ensino-aprendizagem resgatando as propriedades estudadas em outros momentos de ensino.

Tarefa $T_{8\pi12}$: Ensinar a proporcionalidade em triângulos retângulos com ângulo de 30º.

A *Organização Didática* contempla uma atividade de construção proposta para os alunos como podemos observar na sessão "Proporcionalidade em triângulos retângulos com ângulo de 30º", seguida de um exercício proposto.

Proporcionalidade em triângulos retângulos com ângulo de 30°

9 Com régua e transferidor, construa em seu caderno os três triângulos retângulos indicados na figura.



Institucionalizando verbalmente os elementos do triângulo retângulo: cateto e hipotenusa.

Em um triângulo retângulo, os lados que formam o ângulo reto se chamam catetos e o lado oposto ao ângulo reto chama-se hipotenusa.

O momento da *emergência da técnica* e da *construção do bloco tecnológico* se dá via a resolução do exercício proposto:

Temos aqui mais um caso de proporcionalidade na Geometria.
Responda em seu caderno.

a) Quais são as medidas dos três ângulos em cada triângulo? 30°

b) Meça o lado menor de cada triângulo. 1,5

c) Calcule em cada triângulo a razão entre o lado menor (oposto ao ângulo de 30°) e o lado maior (oposto ao ângulo de 90°). Ap

A *institucionalização* ocorre com um questionamento como mostra a figura que segue:

Você sabia que...

... a razão $\dfrac{\text{cateto oposto ao ângulo de } 30^\circ}{\text{hipotenusa}}$ é sempre igual a $\dfrac{1}{2}$?

... essa razão constante é denominada seno de 30°?

O momento do trabalho da *aplicação da técnica* e o *momento da avaliação* dão lugar a *Organização Matemática* associada à tarefa $T_{8\pi12}$: Ensinar a proporcionalidade em triângulos retângulos com ângulo de 30º. As tarefas que constituem a *Organização Matemática* são:

T_1 – Determinar a medida da escada, sabendo que ela está a três metros da parede e forma um ângulo de 60º com o chão.

T_2 – Determinar a altura do avião em relação ao chão, conhecendo a distância de inclinação do avião desde a partida até o local que ele se encontra e conhecendo o ângulo de inclinação da hora da partida com o chão.

T_3 – Determinar o perímetro e a área de uma região retangular, conhecendo dois ângulos do triângulo e três lados da figura dada em função de x.

Ao observamos as tarefas[40] dessa Organização Matemática, verificamos a aplicação da tecnologia ensinada na tarefa $T_{8\pi12}$ articulada com outras tecnologias. Cada tarefa representa um exercício do livro didático. Vejamos as propriedades utilizadas na resolução das tarefas propostas:

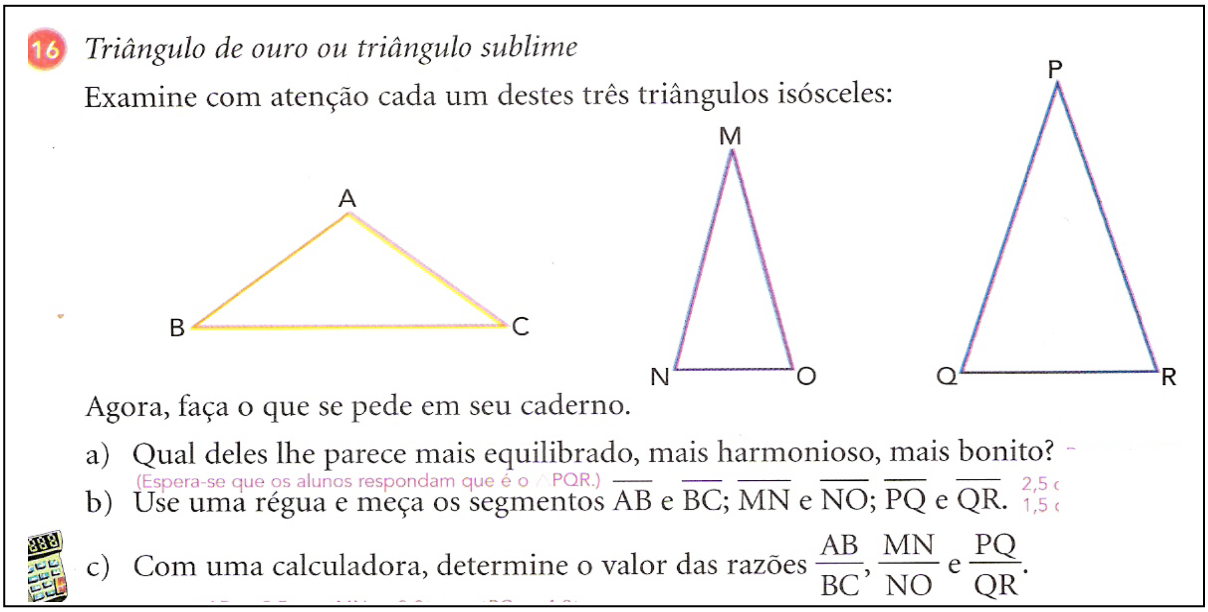
- "Em um triângulo retângulo, a razão: $\frac{\text{cateto oposto ao ângulo de } 30^\circ}{\text{hipotenusa}}$ é sempre igual a $\frac{1}{2}$ e, é denominada seno de 30º".
- "Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$".
- "Em todo retângulo, os lados opostos são congruentes".
- "Um triângulo é retângulo quando tem um ângulo reto/ângulo de 90° e os outros dois ângulos agudos".
- "O perímetro de uma figura qualquer é a soma de todos os lados dessa figura".
- "A área de um retângulo é igual a medida da base multiplicada com a medida da altura desse retângulo".

Destacamos que a propriedade: "Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$", foi ensinada no Capítulo 6 do livro didático, na Organização Didática de $T_{6\pi1}$. As demais propriedades foram ensinadas nas séries anteriores, as quais devem ser relembradas pelos alunos para resolverem corretamente as tarefas propostas.

[40] Tarefas T_1 à $T_3 \Rightarrow$ ANEXO – 14

Tarefa $T_{8\pi 13}$: Ensinar o triângulo de ouro ou também chamado de triângulo sublime

Assim como em outras tarefas, a *Organização Didática* inicia com um exercício proposto ao aluno, como podemos observar na figura que segue:



16 *Triângulo de ouro ou triângulo sublime*

Examine com atenção cada um destes três triângulos isósceles:

Agora, faça o que se pede em seu caderno.

a) Qual deles lhe parece mais equilibrado, mais harmonioso, mais bonito?

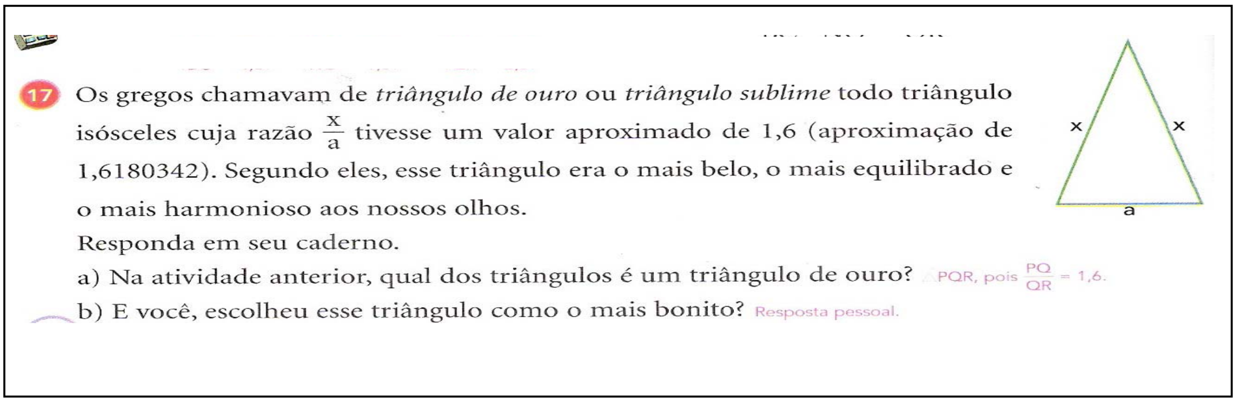
(Espera-se que os alunos respondam que é o △PQR.)

b) Use uma régua e meça os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$; $\overline{MN}$ e $\overline{NO}$; $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$. 2,5 c 1,5 c

c) Com uma calculadora, determine o valor das razões $\frac{AB}{BC}$, $\frac{MN}{NO}$ e $\frac{PQ}{QR}$.

O momento da *exploração da tarefa* e da *construção do bloco tecnológico-teórico* inicia com a frase: “Examine com atenção cada um destes três triângulos isósceles:” seguido das figuras dos triângulos e da frase: “Agora, faça o que se pede em seu caderno.” Propondo a resolução dos itens a), b) e c) do exercício 16 do livro didático da página 188.

A *institucionalização* ocorre no enunciado do próximo exercício, como mostra a figura que segue.



17 Os gregos chamavam de *triângulo de ouro* ou *triângulo sublime* todo triângulo isósceles cuja razão $\frac{x}{a}$ tivesse um valor aproximado de 1,6 (aproximação de 1,6180342). Segundo eles, esse triângulo era o mais belo, o mais equilibrado e o mais harmonioso aos nossos olhos.

Responda em seu caderno.

a) Na atividade anterior, qual dos triângulos é um triângulo de ouro? PQR, pois $\frac{PQ}{QR} = 1,6$.

b) E você, escolheu esse triângulo como o mais bonito? Resposta pessoal.

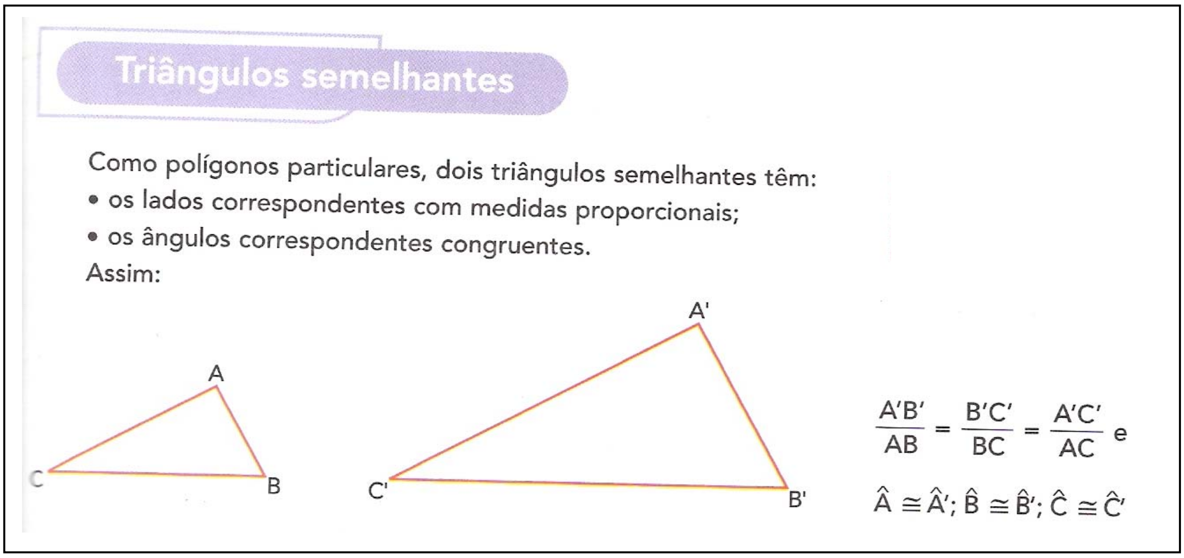
A *Organização Matemática*, em particular, a *aplicação da técnica*, ocorre no próprio exercício 17 da pág. 188, mais precisamente, no item c). Este item questiona qual dos triângulos é o triângulo de ouro na atividade anterior[41]. Assim a *Organização Matemática* tem por tarefa:

T_1 - Determinar qual triângulo é um triângulo de ouro.

Essa tarefa foi identificada em apenas um exercício proposto.

Tarefa $T_{8\pi14}$: Ensinar semelhança de triângulos

A semelhança de triângulos é introduzida no livro como mostra a figura abaixo.

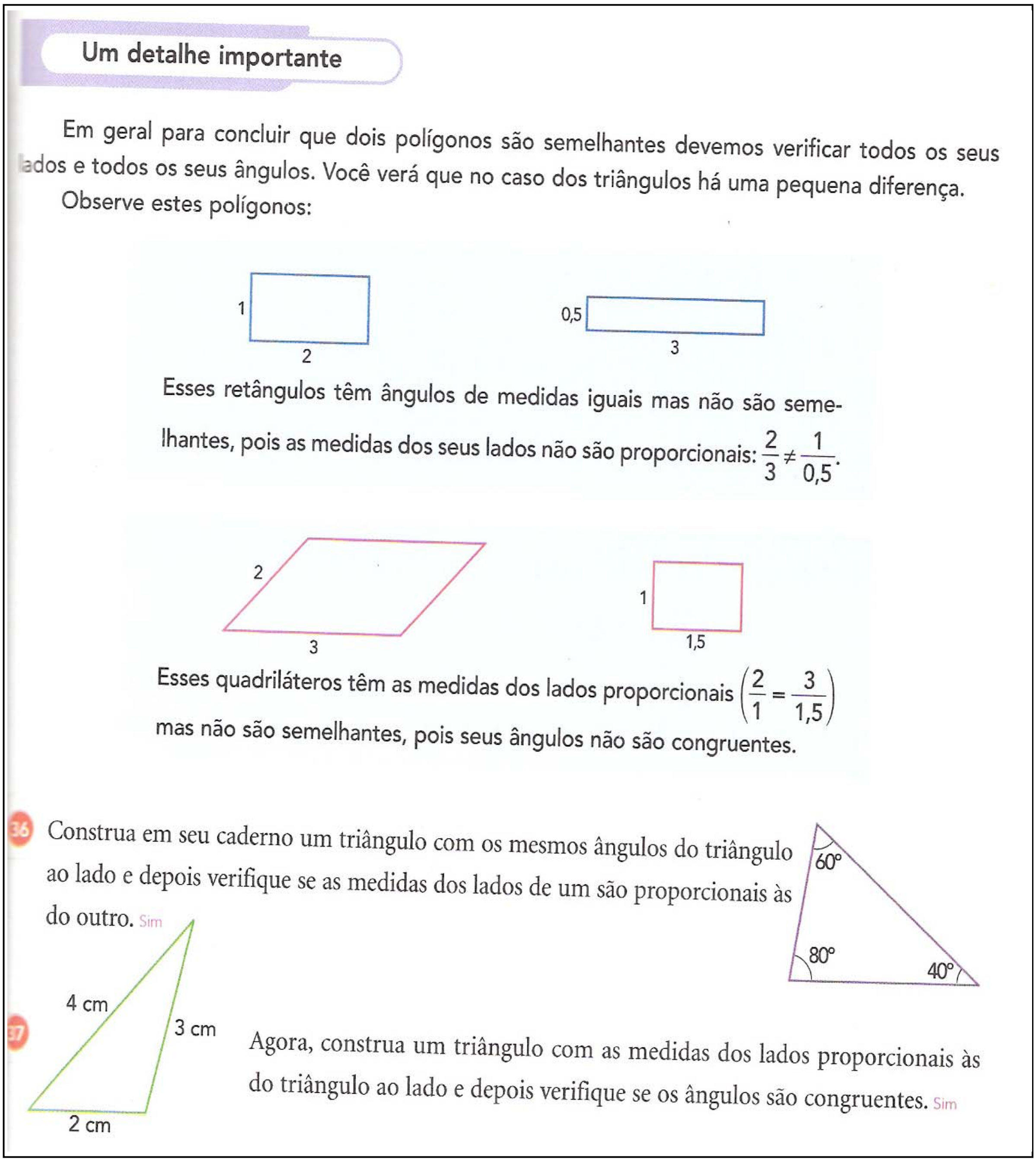


Como podemos observar nesta tarefa os momentos: *primeiro encontro* e a *exploração da técnica* ocorrem simultaneamente, fazendo uso da linguagem natural, figural e simbólica.

Para provar que dois triângulos são semelhantes à *exploração da técnica* inicia com a frase: “Como polígonos particulares, dois triângulos semelhantes têm: os lados correspondentes como medidas proporcionais e os ângulos correspondentes congruentes.” Em seguida mostra a figura de dois triângulos semelhantes, mostrando em linguagem simbólica a proporcionalidade dos lados e a congruência dos ângulos dos triângulos dados.

No prosseguimento, ressalta na sessão: “Um detalhe importante”, que em outros polígonos para concluir que os mesmos são semelhantes é necessário verificar a proporcionalidade de todos os seus lados e a congruência de todos os seus ângulos, porém no caso dos triângulos há uma pequena diferença. Vejamos como o livro aborda esse aspecto:

[41] A atividade anterior corresponde ao exercício 16 da página 188 do livro.



Um detalhe importante

Em geral para concluir que dois polígonos são semelhantes devemos verificar todos os seus lados e todos os seus ângulos. Você verá que no caso dos triângulos há uma pequena diferença.

Observe estes polígonos:

Esses retângulos têm ângulos de medidas iguais mas não são semelhantes, pois as medidas dos seus lados não são proporcionais: $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{0,5}$.

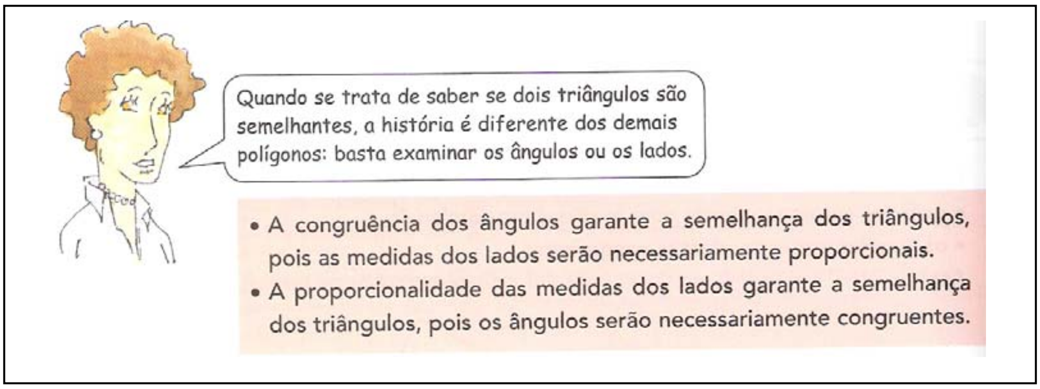
Esses quadriláteros têm as medidas dos lados proporcionais $\left(\frac{2}{1} = \frac{3}{1,5}\right)$ mas não são semelhantes, pois seus ângulos não são congruentes.

36 Construa em seu caderno um triângulo com os mesmos ângulos do triângulo ao lado e depois verifique se as medidas dos lados de um são proporcionais às do outro. Sim

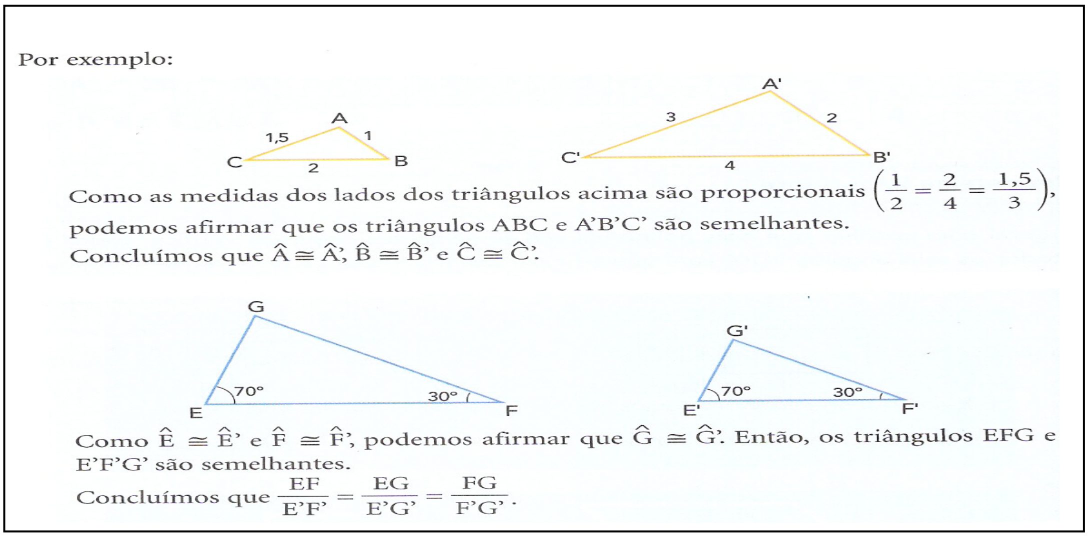
37 Agora, construa um triângulo com as medidas dos lados proporcionais às do triângulo ao lado e depois verifique se os ângulos são congruentes. Sim

Como podemos observar a *construção do bloco tecnológico-teórico* ocorre simultaneamente após a *exploração da técnica* na sessão: “Um detalhe importante” seguida de dois exercícios propostos para o aluno. Podemos observar que a resposta dos exercícios, fará com que o aluno tenha um indício de que para verificar se dois triângulos são semelhantes basta verificar se os ângulos são congruentes e automaticamente os lados serão proporcionais ou, vice-versa, para verificar a semelhança entre dois triângulos basta verificar se seus lados são proporcionais e automaticamente os ângulos serão congruentes.

A *institucionalização* ocorre na próxima página do livro didático com a fala da professora afirmando que quando se trata de semelhança entre dois triângulos à história é diferente dos demais polígonos, basta examinar os lados ou os ângulos e constatar a semelhança de dois triângulos, seguida de duas frases colocadas em destaque:



A *Organização Matemática* de $T_{8\pi 14}$ inicia com a apresentação no livro de dois exemplos resolvidos, como mostra as figuras abaixo, nos retângulos em azul.



Após os exemplos, o livro didático apresenta cinco exercícios propostos ao aluno e as sessões "Você sabia que..." e "Desafio". Dos cinco exercícios propostos identificamos seis tipos de tarefas da Organização Matemática. Assim, a *Organização Matemática* associada à tarefa $T_{8\pi 14}$ é composta pelas seguintes tarefas:

T_1 – Determinar a semelhança entre os triângulos.

T_2 – Construir os triângulos semelhantes dados.

T_3 – Determinar a medida dos lados do triângulo.

T_4 – Calcular a razão de proporcionalidade entre dois triângulos.

T_5 – Achar a razão entre os perímetros de dois triângulos.

T_6 – Responder se triângulos retângulos isósceles são sempre semelhantes.

Nas tarefas[42] dessa *Organização Matemática*, identificamos a aplicação da tecnologia ensinada na tarefa $T_{8\pi 14}$ articulada com outras tecnologias. Vejamos os seis resultados teóricos utilizados na resolução das tarefas propostas:

- Quatro números racionais, *a*, *b*, *c* e *d*, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando a razão do primeiro para o segundo é igual a razão do terceiro para o quarto.

- Dois triângulos são semelhantes quando as medidas de seus lados forem proporcionais ou quando seus ângulos forem congruentes, ou seja, basta examinar os lados ou os ângulos e constatar a semelhança de dois triângulos, pois:

1) A congruência dos ângulos garante a semelhança dos triângulos, pois as medidas dos lados serão necessariamente proporcionais.

2) A proporcionalidade das medidas dos lados garante a semelhança dos triângulos, pois os ângulos serão necessariamente congruentes.

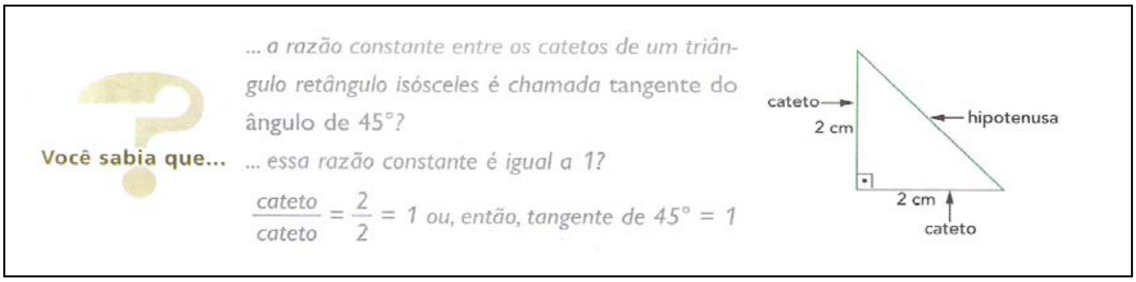
- Na proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (lemos: *a* está para *b* assim como *c* está para *d*), os números *a, b, c* e *d* são chamados de **termos da proporção**. O primeiro e o quarto termos de uma proporção são chamados de **extremos**, enquanto o segundo e o terceiro termos são chamados de **meios**.

- Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

- O perímetro de uma figura qualquer é a soma de todos os lados dessa figura.

- Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Logo depois das tarefas da *Organização Matemática* o livro didático apresenta a sessão “Você sabia que...” trazendo uma nova informação que nesta instituição é apenas uma informação e que será utilizada pelo aluno em outro momento da aprendizagem.



Ressaltamos que neste momento, se necessário, o professor deve intervir e justificar a validade da resposta.

[42] Tarefas T_1 à $T_6 \Rightarrow$ ANEXO – 15

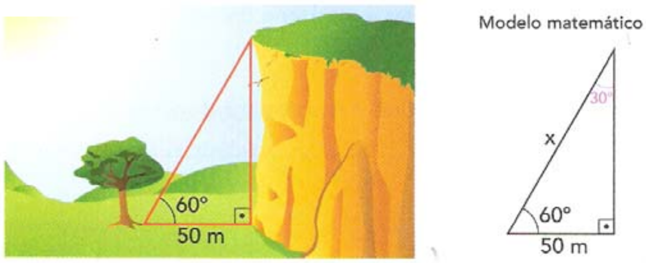
Na sessão “Revendo o que aprendemos” identificamos duas tarefas, são elas:

T_1 – Determinar a medida do cabo que deve ligar o pé dá árvore ao topo da encosta, sabendo que ela está a cinqüenta metros da encosta e o ângulo de elevação do pé da árvore é de 60º.

T_2 - Calcular quantos metros uma pessoa ainda falta caminhar para chegar ao topo da rampa do Palácio do Planalto, sabendo que este tem 4 metros na sua altura mais alta e que quando a pessoa já havia caminhado 12,30 metros sobre a rampa ela se encontrava à 1,5 metros em relação ao solo.

Essas tarefas foram identificadas nos exercícios 48 e 49:

48 O ângulo de elevação do pé de uma árvore, a 50 m da base de uma encosta, ao topo da encosta é de 60°. Que medida deve ter um cabo para ligar o pé da árvore ao topo da encosta?



49 (Unicamp-SP) Uma rampa de inclinação, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto, em Brasília, tem 4 m de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que, após caminhar 12,3 m sobre a rampa, está a 1,50 m de altura em relação ao solo. Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa. 20,5 m


Homens transportando piano sobre a rampa do Palácio do Planalto, em Brasília (DF).

Para resolver o exercício 48 é necessário que a propriedade ensinada na tarefa $T_{8\pi12}$ seja um conhecimento disponível, isto é, o aluno deve saber que em triângulos retângulos com ângulo de 30º a razão cateto oposto sobre hipotenusa é igual a ½.

Já para resolver o exercício 49 é necessário reconhecer que os triângulos formados ao fazer uma figura de estudo, são triângulos semelhantes. Utilizando a propriedade: “Dois triângulos são semelhantes quando as medidas de seus lados forem proporcionais ou quando seus ângulos forem congruentes, ou seja, basta examinar os lados ou os ângulos e constatar a semelhança de dois triângulos”. Dessa forma, constatando que os ângulos dos triângulos são congruentes identificamos que os triângulos da situação problema são semelhantes. Assim, sabemos que as medidas dos lados dos triângulos são proporcionais e então podemos utilizar a propriedade: “Em toda proporção[43], o produto dos extremos é igual ao produto dos meios” para então calcular quantos metros uma pessoa ainda falta caminhar para chegar ao topo da rampa do Palácio do Planalto.

Na sessão “Revisão cumulativa” dos dez exercícios propostos, quatro exercícios tratam do triângulo como objeto de estudo. Nos exercícios propostos destacamos a necessidade de conhecer as seguintes propriedades:

- Dois triângulos são semelhantes quando as medidas de seus lados forem proporcionais ou quando seus ângulos forem congruentes, ou seja, basta examinar os lados ou os ângulos e constatar a semelhança de dois triângulos, pois:
1) A congruência dos ângulos garante a semelhança dos triângulos, pois as medidas dos lados serão necessariamente proporcionais.
2) A proporcionalidade das medidas dos lados garante a semelhança dos triângulos, pois os ângulos serão necessariamente congruentes.
- Em triângulos retângulos com ângulo de 30º a razão cateto oposto sobre hipotenusa é igual a ½.
- “Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios”.

Ressaltamos a importância da presença dessa sessão no livro, tendo em vista, que a mesma trata de exercícios que necessitam conhecer propriedades que foram ensinadas neste capítulo e propriedades que foram ensinadas na Organização Didática de outros livros, de séries anteriores, desta mesma coleção.

Em relação ao Capítulo 8 – “Proporcionalidade em Geometria” do livro didático, podemos também afirmar que as sessões:
- Revendo o que aprendemos;
- Revisão cumulativa;

São também momentos de avaliação e de mobilização dos elementos da tecnologia e das técnicas.

[43] Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lemos: *a* está para *b* assim como *c* está para *d*), os números *a, b, c* e *d* são chamados de **termos da proporção**. O primeiro e o quarto termos de uma proporção são chamados de **extremos**, enquanto o segundo e o terceiro termos são chamados de **meios**.

Em conclusão:

Neste capítulo identificamos uma Organização Didática composta de 4 tarefas, que visam ensinar os elementos da teoria:

- Ensinar a proporcionalidade para calcular a altura.
- Ensinar a proporcionalidade em triângulos retângulos com ângulo de 30º.
- Ensinar o triângulo de ouro ou também chamado de triângulo sublime.
- Ensinar semelhança de triângulos.

Estas tarefas da Organização Didática dão lugar a Organização Matemática que é composta por 14 tarefas:

- Encontrar a medida de alturas inacessíveis;
- Encontrar a medida da sombra de uma pessoa quando a sombra do objeto diminuir x cm.
- Determinar a medida da escada, sabendo que ela está a três metros da parede e forma um ângulo de 60º com o chão.
- Determinar a altura do avião em relação ao chão, conhecendo a distância de inclinação do avião desde a partida até o local que ele se encontra e conhecendo o ângulo de inclinação da hora da partida com o chão.
- Determinar o perímetro e a área de uma região retangular, conhecendo dois ângulos do triângulo e três lados da figura dada em função de x.
- Determinar qual triângulo é um triângulo de ouro.
- Determinar a semelhança entre os triângulos.
- Construir os triângulos semelhantes dados.
- Determinar a medida dos lados do triângulo.
- Calcular a razão de proporcionalidade entre dois triângulos.
- Achar a razão entre os perímetros de dois triângulos.
- Responder se triângulos retângulos isósceles são sempre semelhantes.
- Determinar a medida do cabo que deve ligar o pé dá árvore ao topo da encosta, sabendo que ela está a cinqüenta metros da encosta e o ângulo de elevação do pé da árvore é de 60º.
- Calcular quantos metros uma pessoa ainda falta caminhar para chegar ao topo da rampa do Palácio do Planalto, sabendo que este tem 4 metros na sua altura mais alta e que quando a pessoa já havia caminhado 12,30 metros sobre a rampa ela se encontrava à 1,5 metros em relação ao solo.

Estas 14 tarefas da Organização Matemática estão presentes em 13 exercícios.

c) Capítulo 10 - Perímetros, áreas e volumes

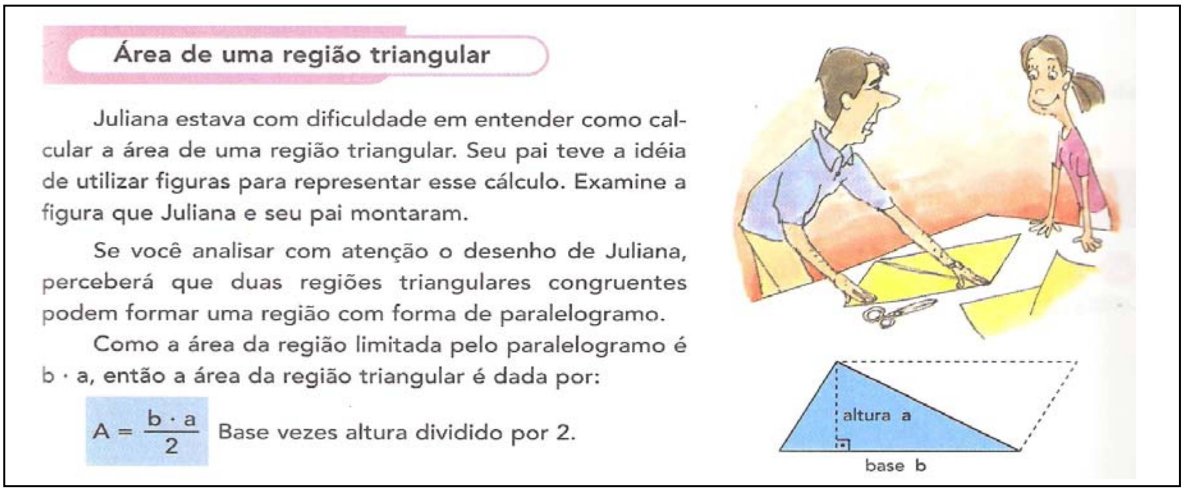
O estudo do Capítulo 10 nos permitiu identificar três tarefas da Organização Didática. Cada tarefa é denotada por "$T_{10\pi i}$" onde $i \in P = \{15,16,17\}$ e varia de acordo com o tipo de propriedade a ser ensinada. Vejamos:

-$T_{10\pi 15}$: Ensinar a fórmula para o cálculo da área de uma região triangular
-$T_{10\pi 16}$: Ensinar o Teorema de Pitágoras
- $T_{10\pi 17}$: Ensinar a fórmula de Heron para o cálculo de área das regiões triangulares.

Apresentamos a seguir a Organização Didática pontual relativa a cada uma dessas tarefas, usando como referencia os "momentos didáticos".

Tarefa $T_{10\pi 15}$: Ensinar a fórmula para o cálculo da área de uma região triangular.

O *primeiro momento* ocorre no enunciado da sessão: "Área de uma região triangular" no contexto do relato de um experimento realizado pelo pai na presença da filha O *bloco tecnológico-teórico* é apresentado no relato e faz uso da fórmula do cálculo de área do paralelogramo como ferramenta para chegar á formula para o cálculo da região triangular. Observe que a posição da filha é de observadora e não de quem executa a ação, ou seja, o aluno é invocado apenas para observar:


Área de uma região triangular

Juliana estava com dificuldade em entender como calcular a área de uma região triangular. Seu pai teve a idéia de utilizar figuras para representar esse cálculo. Examine a figura que Juliana e seu pai montaram.

Se você analisar com atenção o desenho de Juliana, perceberá que duas regiões triangulares congruentes podem formar uma região com forma de paralelogramo.

Como a área da região limitada pelo paralelogramo é $b \cdot a$, então a área da região triangular é dada por:

$A = \frac{b \cdot a}{2}$ Base vezes altura dividido por 2.

A *institucionalização* da tarefa $T_{10\pi 15}$ ocorre no terceiro parágrafo do diálogo onde a fórmula para o cálculo da área de uma região triangular é colocada em destaque.

O momento da *aplicação das técnicas* e o momento da *avaliação* ocorrem via três tarefas, a saber:

T_1 - Determinar a área dos triângulos.

T_2 - Calcular a área da região dada.

T_3 - Responder quantos metros quadrados de material é necessário para construir uma casinha.

As três tarefas foram identificadas em quatro exercícios do livro. Um exercício tinha três itens para resolver. Assim, as tarefas T_1 T_2 e T_3 foram propostas em seis atividades e para resolvê-las era necessário saber que:

- "A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos".

- "A área de uma região triangular é igual a base vezes a altura dividido por dois".

$A = \frac{b \cdot a}{2}$, sendo *b* a base do triângulo e *a* altura desse triângulo.

- "A área de um retângulo é igual a medida da base multiplicada com a medida da altura desse retângulo".

- "A área do paralelogramo é igual a base vezes a altura".

Após as tarefas T_1 T_2 e T_3 o autor do livro aborda a área de uma região poligonal regular, a área de uma região limitada por um trapézio e a área de uma região determinada por um losango. È proposto na sessão "situações-problema" novamente três exercícios do tipo de tarefa T_1 e um exercício do tipo de T_3, além de uma nova tarefa usando a área de um triângulo para calcular a altura desse triângulo, quando dado sua base.

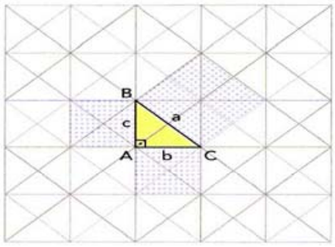
Tarefa $T_{10\pi16}$: Ensinar o Teorema de Pitágoras.

Uma *Organização Didática* que inicia como mostra a figura abaixo, com a leitura da sessão: "A relação de Pitágoras: uma grande descoberta envolvendo áreas". Esta sessão apresenta um exercício que solicita do aluno observação, análise e uma conclusão.

A relação de Pitágoras: uma grande descoberta envolvendo áreas

57 Há cerca de 2 500 anos, um famoso matemático grego chamado Pitágoras descobriu uma interessante regularidade envolvendo as medidas dos lados nos triângulos retângulos.

Examine o quadriculado ao lado. O triângulo ABC tem um ângulo reto em **A** e lados de medidas **a**, **b** e **c**.



Observe que:

- a região quadrada em que cada lado mede **b** contém quatro regiões triangulares;
- a região quadrada em que cada lado mede **c** contém quatro regiões triangulares.

Agora, responda em seu caderno:

a) Quantas regiões triangulares formam a região quadrada de lado **a**? 8 regiões

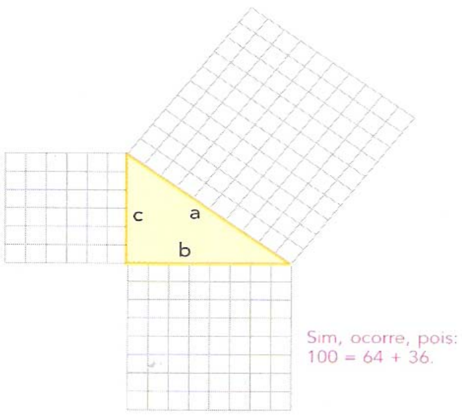
b) Compare a área da região quadrada de lado **a** com a soma das áreas das regiões quadradas de lados **b** e **c**. Como elas são? Iguais (8 = 4 + 4).

c) Podemos afirmar que $a^2 = b^2 + c^2$? Sim

O momento da *exploração da tarefa* tem início no segundo parágrafo onde o autor do livro solicita que seja examinado no quadriculado o triângulo ABC com lados **a**, **b** e **c**, observando que a região quadrada em cada lado mede b e contém quatro regiões triangulares e a região quadrada em cada lado mede c que e contem quatro regiões triangulares. Ao fazer essa observação o leitor já está construindo o *bloco tecnológico-teórico.* Essa construção continua quando autor do livro solicita que seja respondido os itens a), b) e c) do exercício, como também, os exercícios 58 e 59 e a sessão "Oficina de Matemática".

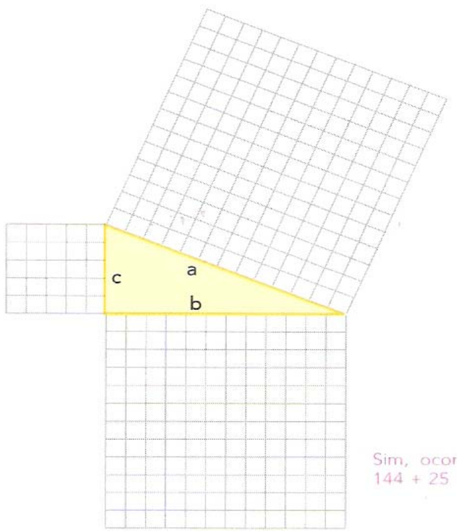
58 Verifique se essa propriedade ocorre nestes outros dois triângulos retângulos.

a)



É verdade que $a^2 = b^2 + c^2$? Sim

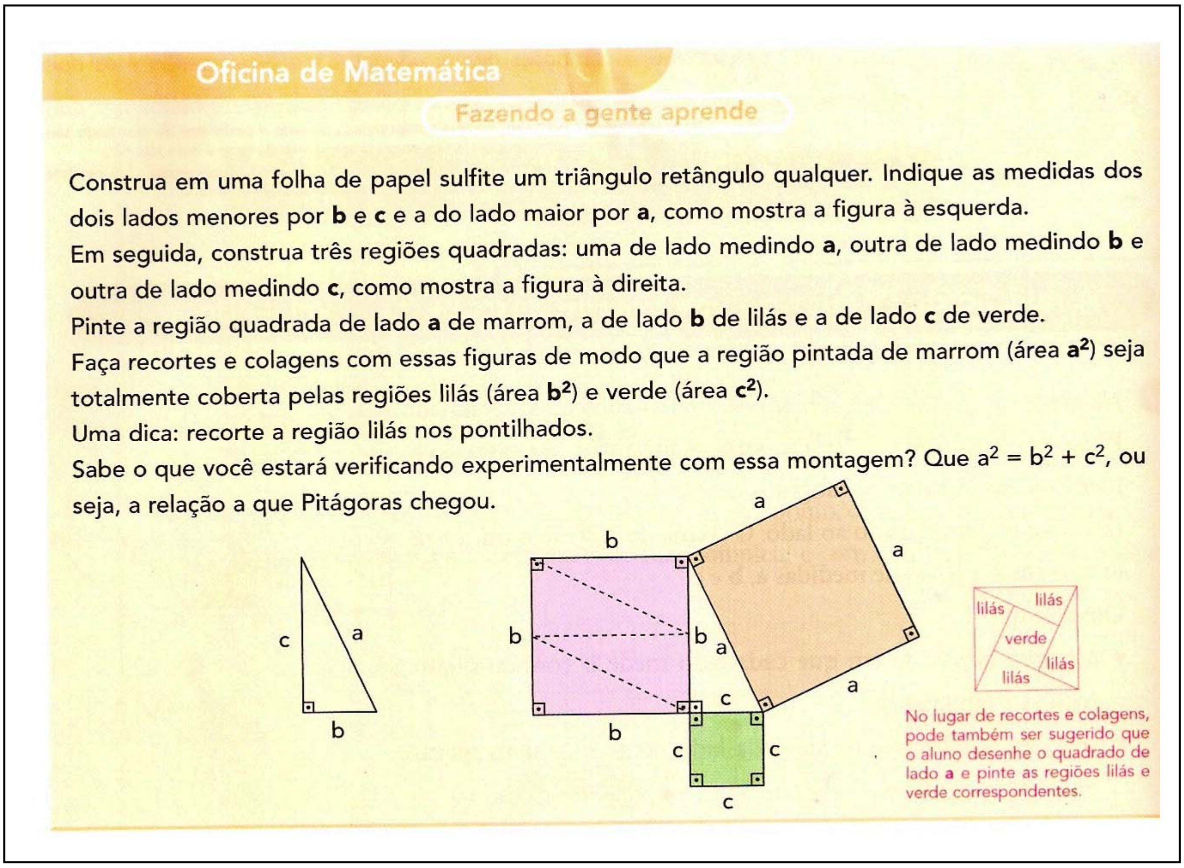
b)



É verdade que $b^2 + c^2 = a^2$? Sim

Ao responder o exercício 57 o aluno vai constatar que no triângulo dado ABC $a^2 = b^2 + c^2$. Porém o aluno ainda não tem certeza se essa propriedade vale para outros triângulos. Portanto, o autor do livro segue na construção do *bloco tecnológico-teórico* propondo o exercício 58 como podemos verificar acima, onde a atividade solicita que seja verificado a propriedade definida no exercício anterior para outros triângulos com medidas diferentes do triângulo dado naquele exercício.

Após resolver as atividades propostas os alunos irão perceber que para esses triângulos também vale a propriedade $a^2 = b^2 + c^2$. A próxima atividade do livro acontece na sessão "Oficina de Matemática", como podemos verificar:



Oficina de Matemática

Fazendo a gente aprende

Construa em uma folha de papel sulfite um triângulo retângulo qualquer. Indique as medidas dos dois lados menores por **b** e **c** e a do lado maior por **a**, como mostra a figura à esquerda.

Em seguida, construa três regiões quadradas: uma de lado medindo **a**, outra de lado medindo **b** e outra de lado medindo **c**, como mostra a figura à direita.

Pinte a região quadrada de lado **a** de marrom, a de lado **b** de lilás e a de lado **c** de verde.

Faça recortes e colagens com essas figuras de modo que a região pintada de marrom (área **a²**) seja totalmente coberta pelas regiões lilás (área **b²**) e verde (área **c²**).

Uma dica: recorte a região lilás nos pontilhados.

Sabe o que você estará verificando experimentalmente com essa montagem? Que $a^2 = b^2 + c^2$, ou seja, a relação a que Pitágoras chegou.

No lugar de recortes e colagens, pode também ser sugerido que o aluno desenhe o quadrado de lado **a** e pinte as regiões lilás e verde correspondentes.

A "Oficina de Matemática" solicita que os alunos construam um triângulo retângulo qualquer numa folha de papel e realizem o que se pede, objetivando verificar experimentalmente que: dado um triângulo retângulo de lados *a, b* e *c* a propriedade $a^2 = b^2 + c^2$ também é válida. Em seguida, afirma que essa propriedade é a relação que Pitágoras chegou.

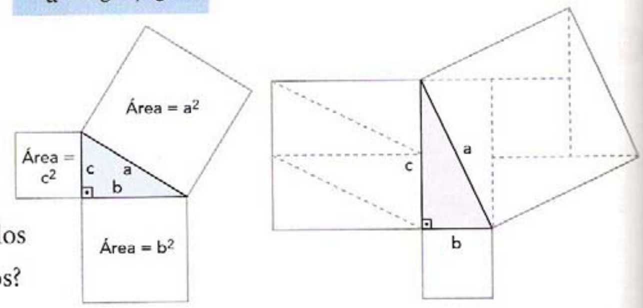
A *institucionalização* da propriedade verificada na sessão "Oficina de Matemática", ou seja, da relação de Pitágoras ocorre no exercício 59, como podemos observar na figura que segue:

59 Na "Oficina de Matemática" você constatou experimentalmente que naquele triângulo retângulo a área da região quadrada de lado **a** (a^2) é igual à área da região quadrada de lado **b** (b^2) mais a área da região quadrada de lado **c** (c^2). Ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

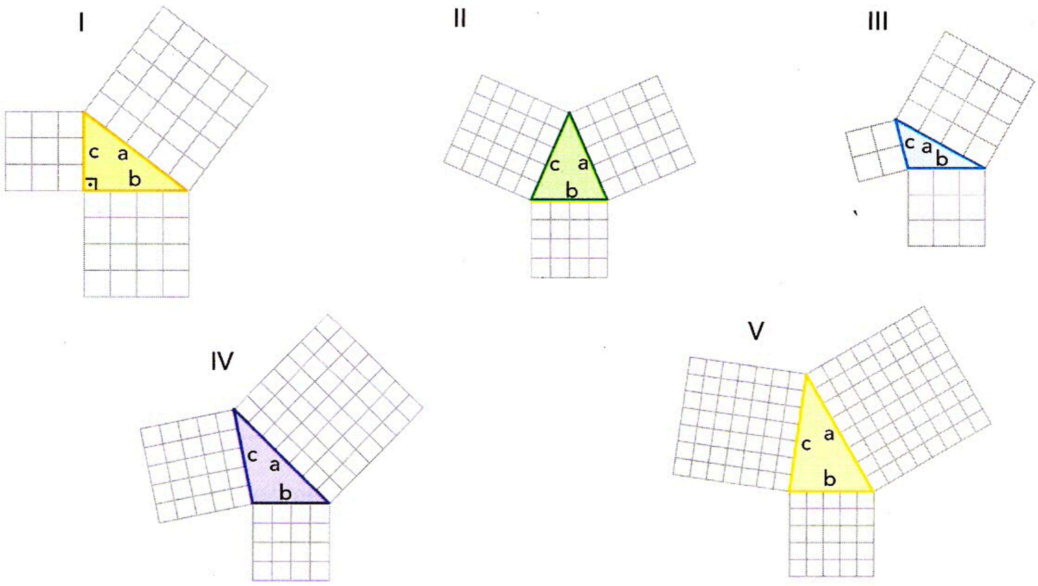
O quadrado da medida do lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. Essa relação é chamada de *relação de Pitágoras*.

Será que ela vale para todos os triângulos retângulos? E para os outros triângulos?



Devemos ressaltar que o autor do livro apenas *institucionalizou* nesse exercício a propriedade válida para um triângulo em particular e não para qualquer triângulo retângulo, e questiona: "Será que ela vale para todos os triângulos retângulos? E para os outros triângulos?". Para responder essas questões o autor solicita que o aluno copie a tabela abaixo em seu caderno e complete-a usando os triângulos das figuras que seguem, determinando o tipo de triângulo quanto aos ângulos e em seguida verificar a relação de Pitágoras.

Triângulo	Tipo de triângulo	$b^2 + c^2$	a^2	a^2 é igual a $b^2 + c^2$?
I	retângulo	16 + 9	25	sim
II	acutângulo	16 + 25	25	não
III	obtusângulo	9 + 4	16	não
IV	obtusângulo	16 + 25	49	não
V	acutângulo	25 + 49	64	não



Após responder a tabela de acordo com os triângulos acima o autor faz um novo questionamento na próxima atividade, como podemos verificar:

> O que você pôde conjecturar da atividade anterior?

Como essa é uma atividade proposta aos alunos, são eles que devem respondê-la. A resposta correta é afirmar que a relação de Pitágoras vale somente para triângulos retângulos, ou seja, dado um triângulo retângulo ABC de lados *a, b* e *c*, o quadrado da medida do lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. Na linguagem algébrica temos: $a^2 = b^2 + c^2$.[44] Assim ocorre à *institucionalização* da tarefa $T_{10\pi16}$.

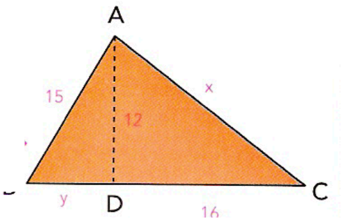
O momento da *aplicação das técnicas* ocorre por meio da seguinte tarefa:

T_1 – Usar a relação de Pitágoras para encontrar um dos lados do triângulo nas situações cotidianas dadas.

O livro didático apresenta dois exercícios que têm por tarefa T_1. Para resolvê-los corretamente é necessário mobilizar somente a relação de Pitágoras como *tecnologia*.

Na sessão "Revendo o que aprendemos" identificamos outro exercício que tem por tarefa T_1, vejamos:

> **72** Na figura ao lado temos: $m(\overline{AB}) = 15$ m; $m(\overline{AD}) = 12$ m; $m(\overline{CD}) = 16$ m. Calcule $m(\overline{AC})$, $m(\overline{BD})$, o perímetro e a área da região triangular determinada pelo $\triangle ABC$.



Para resolver esse exercício, além da relação de Pitágoras é necessário mobilizar outras tecnologias, são elas:

- "O perímetro de uma figura qualquer é a soma de todos os lados dessa figura".

- "A área de uma região triangular é igual a base vezes a altura dividido por dois".

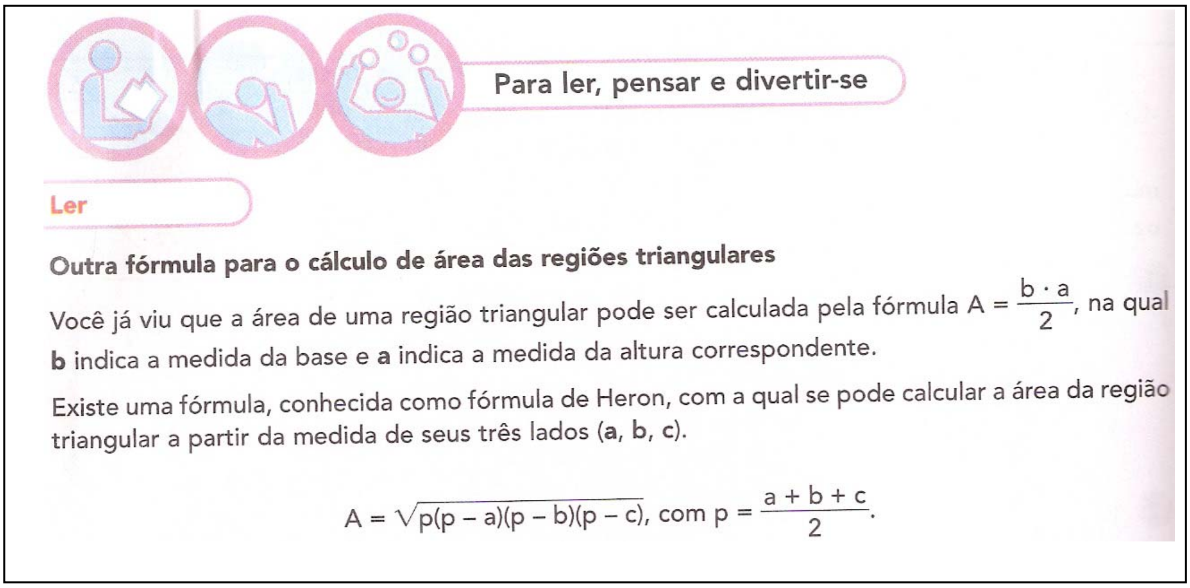
$A = \dfrac{b \cdot a}{2}$, sendo *b* a base do triângulo e *a* altura desse triângulo.

[44] Conforme orientação do autor do livro o professor deve comentar com os alunos que a demonstração dessa propriedade vai ser vista na 8ª série do Ensino Fundamental.

Convém ressaltar que estas propriedades o autor do livro considera como conhecimento disponível, pois já foi objeto de ensino em outras tarefas da Organização Didática.

Tarefa $T_{10\pi 17}$: Ensinar a fórmula de Heron para o cálculo de área das regiões triangulares.

Assim como em outras tarefas, a *Organização Didática inicia* em uma sessão, neste caso, na sessão: “Para Ler, pensar e divertir-se”, como podemos observar no texto dado:



Para ler, pensar e divertir-se

Ler

Outra fórmula para o cálculo de área das regiões triangulares

Você já viu que a área de uma região triangular pode ser calculada pela fórmula $A = \frac{b \cdot a}{2}$, na qual **b** indica a medida da base e **a** indica a medida da altura correspondente.

Existe uma fórmula, conhecida como fórmula de Heron, com a qual se pode calcular a área da região triangular a partir da medida de seus três lados (**a**, **b**, **c**).

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ com } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

A fórmula: $A = \frac{b \cdot a}{2}$, sendo *b* a base do triângulo e *a* altura desse triângulo, para o cálculo da área do triângulo é considerada pelo autor como conhecimento disponível. Outro elemento do *bloco tecnológico-teórico* é abordado no livro como receita: “Existe uma fórmula, conhecida como a fórmula de Heron, com a qual se pode calcular a área da região triangular a partir da medida de seus três lados *a, b* e *c*”. A *institucionalização* é realizada em linguagem algébrica com a apresentação da seguinte fórmula:

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ sendo } p = \frac{a+b+c}{2}$$

No momento da *aplicação das técnicas* e no momento da *avaliação* identificamos a tarefa T_1:

T_1 - Calcular a área de um terreno utilizando as duas fórmulas que foram ensinas para o cálculo de uma região triangular.

Essa tarefa matemática é proposta em um exercício na sessão “Para ler pensar e divertir-se”.

Na sessão “Revisão cumulativa” dos dez exercícios propostos, dois deles tratam do triângulo como objeto de estudo. Destacamos a necessidade de conhecer quatro propriedades para resolver os exercícios propostos, são elas:

- Dois triângulos são semelhantes quando as medidas de seus lados forem proporcionais ou quando seus ângulos forem congruentes, ou seja, basta examinar os lados ou os ângulos e constatar a semelhança de dois triângulos, pois:

● A congruência dos ângulos garante a semelhança dos triângulos, pois as medidas dos lados serão necessariamente proporcionais.

● A proporcionalidade das medidas dos lados garante a semelhança dos triângulos, pois os ângulos serão necessariamente congruentes.

- Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lemos: *a* está para *b* assim como *c* está para *d*), os números *a*, *b*, *c* e *d* são chamados de **termos da proporção**. O primeiro e o quarto termos de uma proporção são chamados de **extremos**, enquanto o segundo e o terceiro termos são chamados de **meios**.

- “Em toda proporção[45], o produto dos extremos é igual ao produto dos meios”.

- “Dado um triângulo retângulo ABC de lados *a, b* e *c,* o quadrado da medida do lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. Na linguagem algébrica: $a^2 = b^2 + c^2$”.

Cabe destacar que nesta sessão a Organização Matemática mobiliza tecnologias que são objetos de estudo ao longo do livro.

[45] Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lemos: *a* está para *b* assim como *c* está para *d*), os números *a*, *b*, *c* e *d* são chamados de **termos da proporção**. O primeiro e o quarto termos de uma proporção são chamados de **extremos**, enquanto o segundo e o terceiro termos são chamados de **meios**.

Em conclusão:

Neste capítulo identificamos uma Organização Didática composta de 3 tarefas, que visam ensinar os elementos da teoria:

- Ensinar a área de uma região triangular.
- Ensinar o Teorema de Pitágoras.
- Ensinar a fórmula de Heron para o cálculo de área das regiões triangulares.

A organização matemática é composta de 5 tarefas:

- Determinar a área dos triângulos.
- Calcular a área da região dada.
- Responder quantos metros quadrados de material é necessário para construir uma casinha.
- Usando a relação de Pitágoras encontrar um dos lados do triângulo nas situações cotidianas dadas.
- Calcular a área de um terreno utilizando as duas fórmulas que foram ensinas para o cálculo de uma região triangular.

Estas tarefas estão presentes em 7 exercícios.

d) Capítulo 12 - Construções geométricas

O estudo do Capítulo 12 nos permitiu identificar três tarefas da Organização Didática. Cada tarefa é denotada por “$T_{12\pi i}$” onde $i \in P = \{18, 19, 20\}$ e varia de acordo com o tipo de propriedade a ser ensinada. Vejamos:

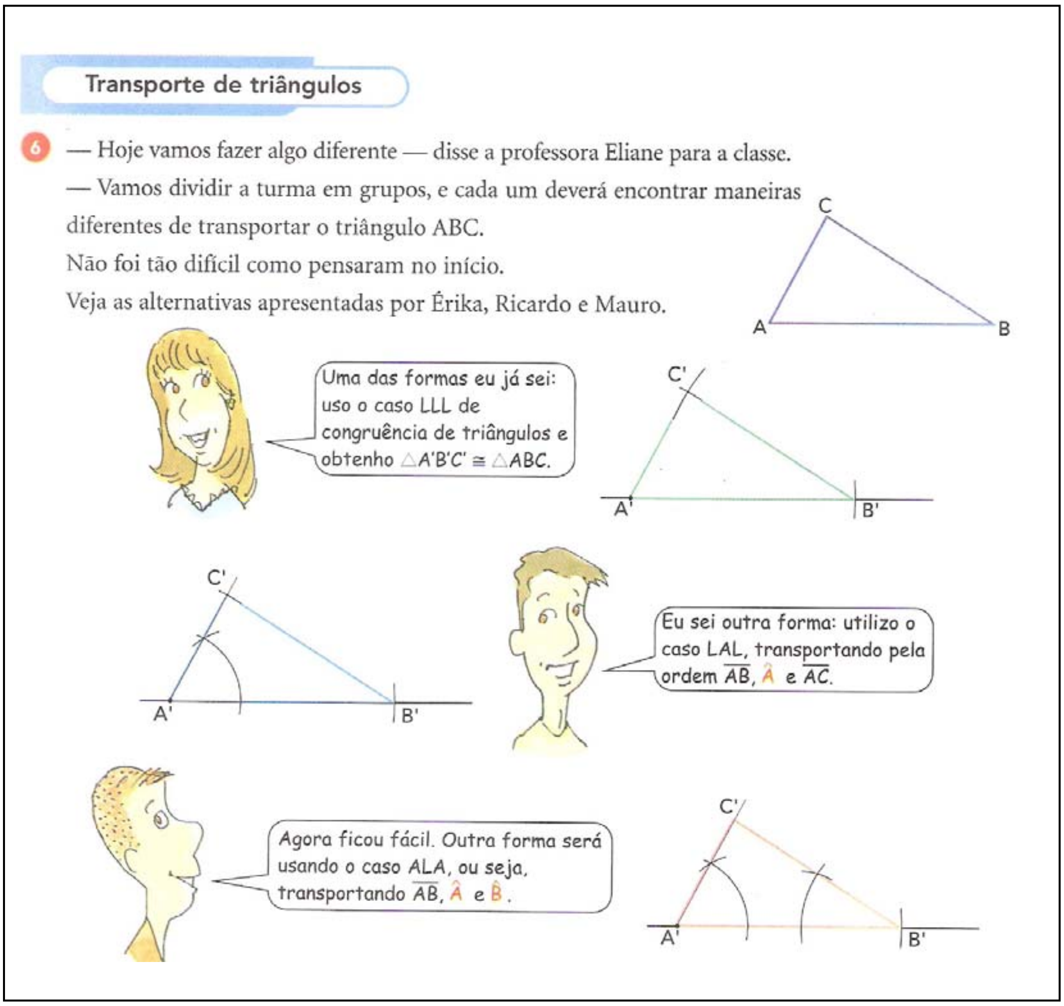
- $T_{12\pi 18}$: Ensinar o transporte de triângulos.
- $T_{12\pi 19}$: Ensinar a desigualdade triangular.
- $T_{12\pi 20}$: Ensinar o Circuncentro de um triângulo.

Apresentamos a seguir a Organização Didática relativa a cada uma dessas tarefas, usando como referência os “momentos didáticos”.

Tarefa $T_{12\pi 18}$: Ensinar o transporte de triângulos.

Por “transporte de triângulos” entende-se, a construção de um triângulo a partir de um triângulo dado. O *primeiro momento* o autor aborda via a descrição de uma atividade realizada em um classe. As diferentes técnicas de construção (régua, transferidoe e compasso) para realizar o transporte são apresentadas prontas: LLL, LAL e ALA e *institucionalizadas.*

Assim, os momentos *exploração e emergência da técnica* e *construção do bloco tecnológico-teórico* resulta da leitura do texto:



Destacamos que o transporte de segmentos e o transporte de ângulos neste momento não é objeto de ensino, pois foi ensinado nas sessões anteriores a esta.

O momento da *aplicação das técnicas* ocorre por meio da tarefa:

T_1 – Transportar o triângulo dado

A tarefa T_1 é composta por 03 exercícios e divide-se em tarefas t_i que emergiram das variações da tarefa T_1. Vejamos cada sub-tarefa separadamente:

$t_{1,1}$ – Transportar um triângulo usando o caso LLL de congruência de triângulos.

$t_{1,2}$ – Transportar um triângulo usando o caso ALA de congruência de triângulos.

$t_{1,3}$ – Transportar um triângulo usando o caso LAL de congruência de triângulos.

Nas sub-tarefas de T_1 identificamos o uso de seis tecnologias, são elas:

- Se três lados dos triângulos são congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LLL”

- “Se dois ângulos são congruentes e o lado compreendido entre eles também é congruente, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - ALA”

- “Se dois lados dos triângulos forem congruentes e o ângulo formado por eles também for congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LAL”

- Transporte de triângulos utilizando o caso LLL com o uso da régua e do compasso.

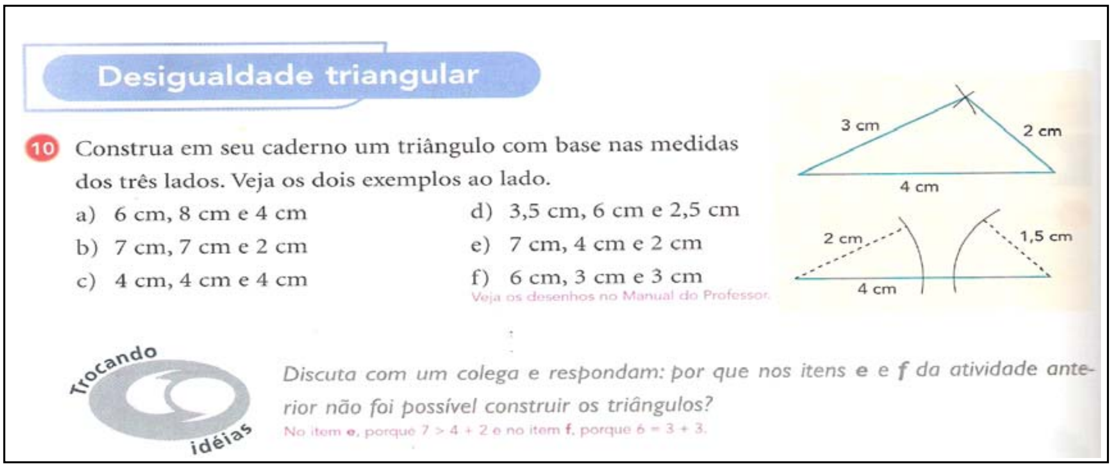
- Transporte de triângulos utilizando o caso ALA com o uso da régua, do transferidor e do compasso.

- Transporte de triângulos utilizando o caso ALA com o uso da régua, do compasso e do transferidor.

Notemos que nas sub-tarefas a técnica está explicada na tarefa, ou seja, ela não é da escolha do aluno.

Tarefa $T_{12\pi19}$: Ensinar a desigualdade triangular.

A desigualdade triangular é introduzida no livro via um exercício proposto. Os momentos da *exploração da técnica* e da *construção do bloco tecnológico-teórico* são contemplados na exploração dos itens de a) até f) do exercício e na sessão “Trocando idéias” como podemos observar no seguinte exercício:



Desigualdade triangular

10 Construa em seu caderno um triângulo com base nas medidas dos três lados. Veja os dois exemplos ao lado.

a) 6 cm, 8 cm e 4 cm
b) 7 cm, 7 cm e 2 cm
c) 4 cm, 4 cm e 4 cm
d) 3,5 cm, 6 cm e 2,5 cm
e) 7 cm, 4 cm e 2 cm
f) 6 cm, 3 cm e 3 cm

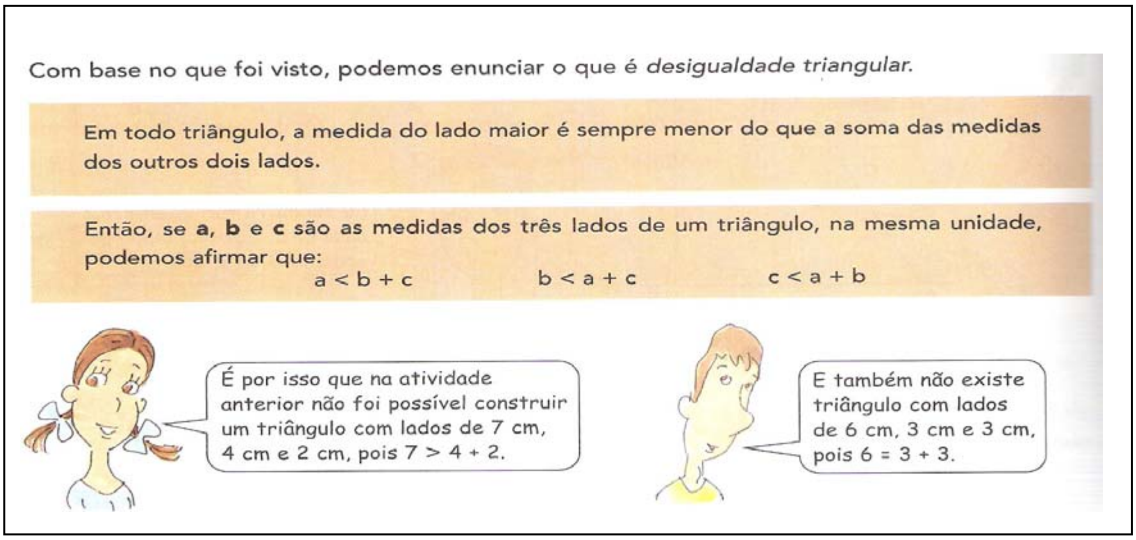
Veja os desenhos no Manual do Professor.

Trocando idéias

Discuta com um colega e respondam: por que nos itens e e f da atividade anterior não foi possível construir os triângulos?

No item e, porque 7 > 4 + 2 e no item f, porque 6 = 3 + 3.

A *institucionalização* conforme mostramos em seguida, ocorre após a sessão "Trocando idéias" em destaque nos retângulos laranjas e com a fala dos alunos.


Com base no que foi visto, podemos enunciar o que é *desigualdade triangular.*

Em todo triângulo, a medida do lado maior é sempre menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.

Então, se **a**, **b** e **c** são as medidas dos três lados de um triângulo, na mesma unidade, podemos afirmar que:

$a < b + c \qquad b < a + c \qquad c < a + b$

O momento da *avaliação* se realiza por meio de dois exercícios, que identificamos pelas tarefas T_1 e T_2, citadas abaixo, as quais constituem a *Organização Matemática*:

T_1 – Verificar a existência ou não do triângulo. Nos casos positivos responder se o triângulo é escaleno, isósceles ou eqüilátero.

T_2 – Determinar quais os possíveis valores de x, sabendo que x é a medida do lado maior de um triângulo escaleno e conhecendo os outros dois lados desse triângulo.

Do tipo de tarefa T_1 identificamos seis exercícios propostos. Já do tipo de tarefa T_2 somente um exercício, oo exercício 12 do livro didático na página 289.

12 Se **x** é a medida do lado maior em um triângulo escaleno e 7 cm e 4 cm são as medidas dos outros dois lados, quais os possíveis valores de **x** em centímetros?

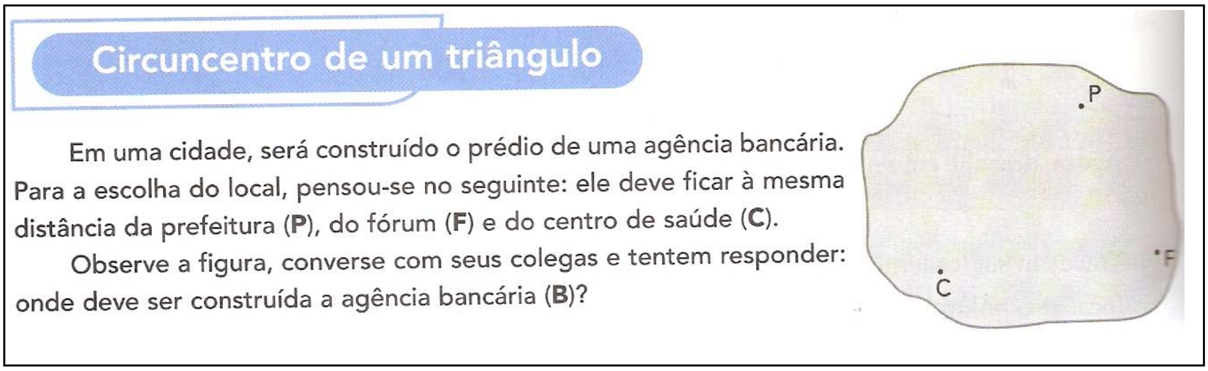
Para resolver essa tarefa mobilizamos duas propriedades, são elas:

- Em todo triângulo, a medida do lado maior é sempre menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.
- Um triângulo é escaleno quando têm todos os três lados com medidas diferentes.

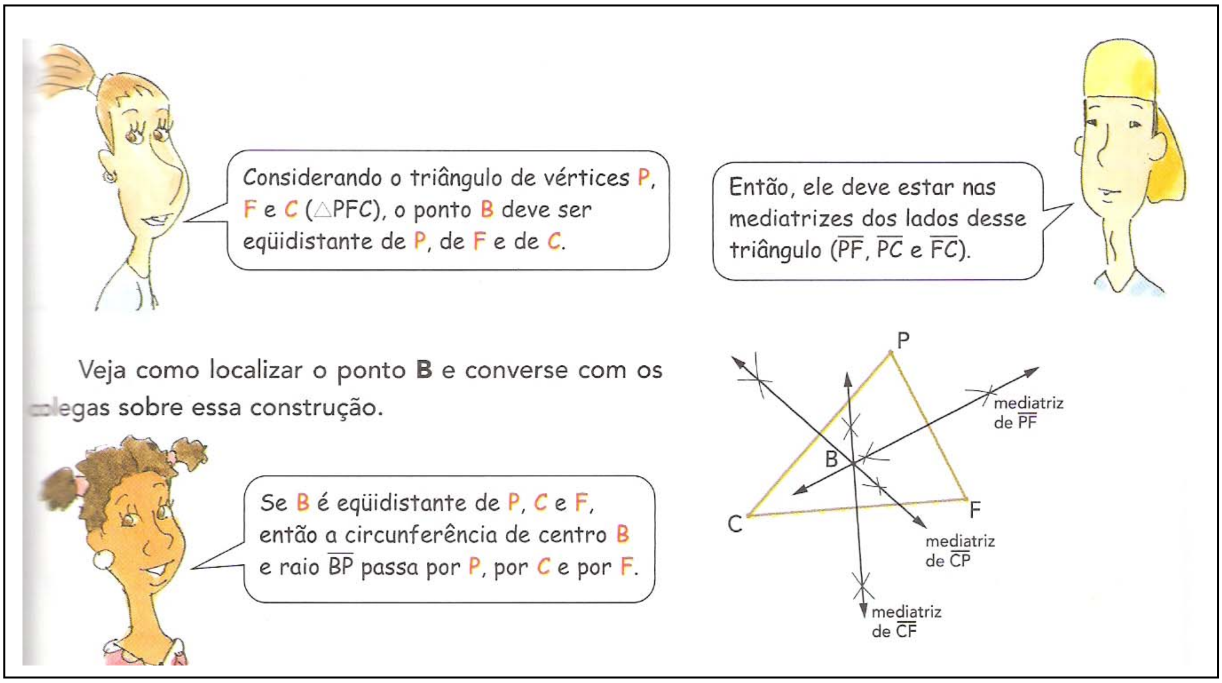
Destacamos que o autor do livro considera a definição de triângulo escaleno como conhecimento disponível, pois esse conceito foi estudado em no livro da 5ª série do Ensino Fundamental.

Tarefa $T_{12\pi20}$: Ensinar o Circuncentro de um triângulo.

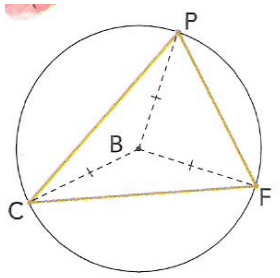
Observando a figura que segue, verificamos que o momento do *primeiro encontro* ocorre via o enunciado da sessão “Circuncentro de um triângulo” seguido de uma situação problema.



O momento da *exploração da tarefa* $T_{12\pi20}$ e o momento *da construção do bloco tecnológico-teórico* ocorrem simultaneamente, como podemos verificar na figura abaixo.



A *institucionalização* ocorre após o diálogo entre os personagens, como podemos observar em seguida:



O ponto **B**, encontro das mediatrizes dos lados do △PFC, é conhecido como *circuncentro do △PFC*.

O circuncentro do △PFC é então o centro da circunferência circunscrita ao △PFC, ou seja, da circunferência que passa pelos três vértices.

No momento da *aplicação das técnicas* e no momento da *avaliação* identificamos as tarefas da *Organização Matemática*:

T_1 – Construir um triângulo, localizar seu circuncentro e traçar a circunferência circunscrita à esse triângulo.

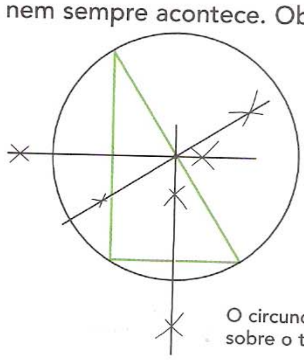
T_2 – Relacionar a posição do circuncentro com o tipo de triângulo quanto aos ângulos.

As tarefas T_1 e T_2 estão presentes em dois exercícios. A tarefa T_1 exige que o aluno saiba construir triângulos com régua e compasso.

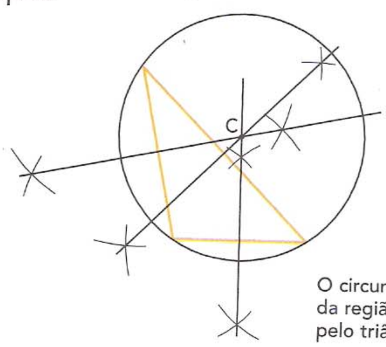
Entre a tarefa T_1 e a tarefa T_2 o autor do livro apresenta uma nova informação:

Nos dois exemplos vistos, o circuncentro está localizado no interior da região determinada pelo triângulo.

Isso nem sempre acontece. Observe estes exemplos:



O circuncentro fica sobre o triângulo.



O circuncentro fica fora da região determinada pelo triângulo.

Na execução das tarefas que visam a aprendizagem o aluno é chamado a observar.

Para resolver os exercícios relativos as tarefas T_1 e T_2 mobilizamos quatro *tecnologias*:

- O circuncentro de um triângulo é o pondo de encontro das mediatrizes dos lados desse triângulo e, é o centro da circunferência circunscrita à esse triângulo.

- Um triângulo é chamado do acutângulo quando tem os três ângulos agudos.

- Um triângulo é chamado do obtusângulo quando tem um ângulo obtuso e os outro dois ângulos agudos.

- Um triângulo é retângulo quando tem um ângulo reto/ângulo de 90° e os outros dois ângulos agudos.

Destacamos que as últimas três propriedades foram objetos de ensino na tarefa $T_{6\pi 2}$ do Capítulo 6 – Propriedades de figuras geométricas.

Em relação ao Capítulo 12 – "Construções Geométricas" do livro didático, podemos também afirmar que as sessões: "Revendo o que aprendemos" e "Revisão cumulativa" são também momentos de avaliação e de mobilização dos elementos da tecnologia e das técnicas.

Em conclusão:

Neste capítulo identificamos uma Organização Didática composta de 3 tarefas, que visam ensinar os elementos da teoria:
- Ensinar o transporte de triângulos.
- Ensinar a desigualdade triangular.
- Ensinar o Circuncentro de um triângulo.

A organização matemática é composta de 5 tarefas, sendo que a primeira tarefa divide-se em 3 sub-tarefas[46] de acordo com a condição problema.
- Transportar o triângulo dado.
- Verificar a existência ou não do triângulo. Nos casos positivos responder se o triângulo é escaleno, isósceles ou eqüilátero.
- Determinar quais os possíveis valores de x, sabendo que x é a medida do lado maior de um triângulo escaleno e conhecendo os outros dois lados desse triângulo.
- Construir um triângulo, localizar seu circuncentro e traçar a circunferência circunscrita à esse triângulo.
- Relacionar a posição do circuncentro com o tipo de triângulo quanto aos ângulos.

Estas tarefas estão presentes em sete exercícios no livro didático.

[46] $t_{1,1}$ – Transportar um triângulo usando o caso LLL de congruência de triângulos.
$t_{1,2}$ – Transportar um triângulo usando o caso ALA de congruência de triângulos.
$t_{1,3}$ – Transportar um triângulo usando o caso LAL de congruência de triângulos.

3.2 Estudo do livro didático: “Matemática para todos”- 7ª série, Imenes & Lellis 2007.

Este livro é organizado em quatorze capítulos, além das seções: sugestões de leitura para o aluno, referências bibliográficas, dicionário e conferindo respostas.

Destes quatorze capítulos, seis capítulos desenvolvem conteúdos da área de Geometria. A saber:

Capítulo 3 – Construções geométricas;

Capítulo 6 – Ângulos, paralelas e polígonos;

Capítulo 8 - Simetrias;

Capítulo 10 – Desenhando figuras espaciais;

Capítulo 12 – Áreas e volumes;

Capítulo 14 – Geometria experimental.

Especificamente sobre o objeto triângulo:

Capítulo 3 – Construções geométricas, trata da:

- Construção de triângulos com régua e compasso.

Capítulo 6 – Ângulos, paralelas e polígonos, trata da:

- Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

O Capítulo 12 - Áreas e volumes, trata da:

- Fórmulas para o cálculo de áreas;
- O Teorema de Pitágoras.

Faremos o estudo da Organização Praxeológica de cada um dos objetos de estudo envolvendo o triângulo anunciado nas rubricas descritas em cada um dos capítulos anteriormente citados.

3.2.1 Organização Didática – Elementos Gerais

O estudo da sessão para o professor: “Assessoria Pedagógica” nos permitiu identificar alguns elementos previstos para a organização didática, são eles:

- Uma intenção de realizar uma abordagem dos conteúdos em espiral.

> Os conteúdos, tradicionalmente esgotados numa série, são distribuídos entre os quatro volumes, com diferentes enfoques. Assim, os autores mantiveram a organização dos conteúdos nas séries de acordo com escolhas orientadas pelo currículo em espiral, ou seja, todas as idéias centrais são retomadas várias vezes, no mesmo volume ou nos seguintes, mas de forma mais aprofundada ou relacionadas a novos conteúdos. (Assessoria Pedagógica - Apresentação, pag. 3)

- Uma ação pedagógica baseada na resolução de problemas e na história da matemática.

> Ênfase na resolução de problemas. Valorização do entendimento dos significados das operações; as habilidades de cálculo têm papel coadjuvante. (Assessoria Pedagógica – O novo ensino da matemática, pag. 6)
> Elementos históricos podem motivar o aprendizado de matemática ou contribuir para que ele se desenvolva. (Assessoria Pedagógica – Conexões e interdisciplinaridade, pag. 68)

- Uma intenção de proporcionar ao aluno uma aprendizagem significativa, através das justificativas e demonstrações:

> As justificativas em matemática resultam em grande parte de raciocínios dedutivos. Isto é, de obter novas conclusões a partir de fatos já conhecidos por meio de interferências lógicas. [...] Nesta obra optamos, desde as série iniciais, pela ênfase nos porquês. De certa forma, temos demonstrado teoremas (ou propiciado que o aluno os demonstre), embora isso tenha sido feito de maneira natural, com linguagem do dia-a-dia, sem maiores formalidades. (Assessoria Pedagógica – Desenvolvimento dos conteúdos, pag. 32)

Temos assim, segundo os princípios gerais da Organização Didática do livro, um ensino que contempla uma abordagem em espiral, a ênfase em trabalhar os conteúdos via a resolução de problemas, a dedução e justificativa dos resultados teóricos e a proposição de um trabalho usando os resultados teóricos na resolução de problemas.

Faremos a seguir, um estudo mais detalhado identificando elementos da Organização Didática de cada tipo de tarefa “ensinar um objeto matemático” que envolva uma intenção de ensinar conceitos relativos ao triângulo, bem como, sua respectiva Organização Matemática.

3.2.2 Organização Didática e Organização Matemática relativa a uma tarefa "Como ensinar..."

a) Capítulo 3 - Construções Geométricas

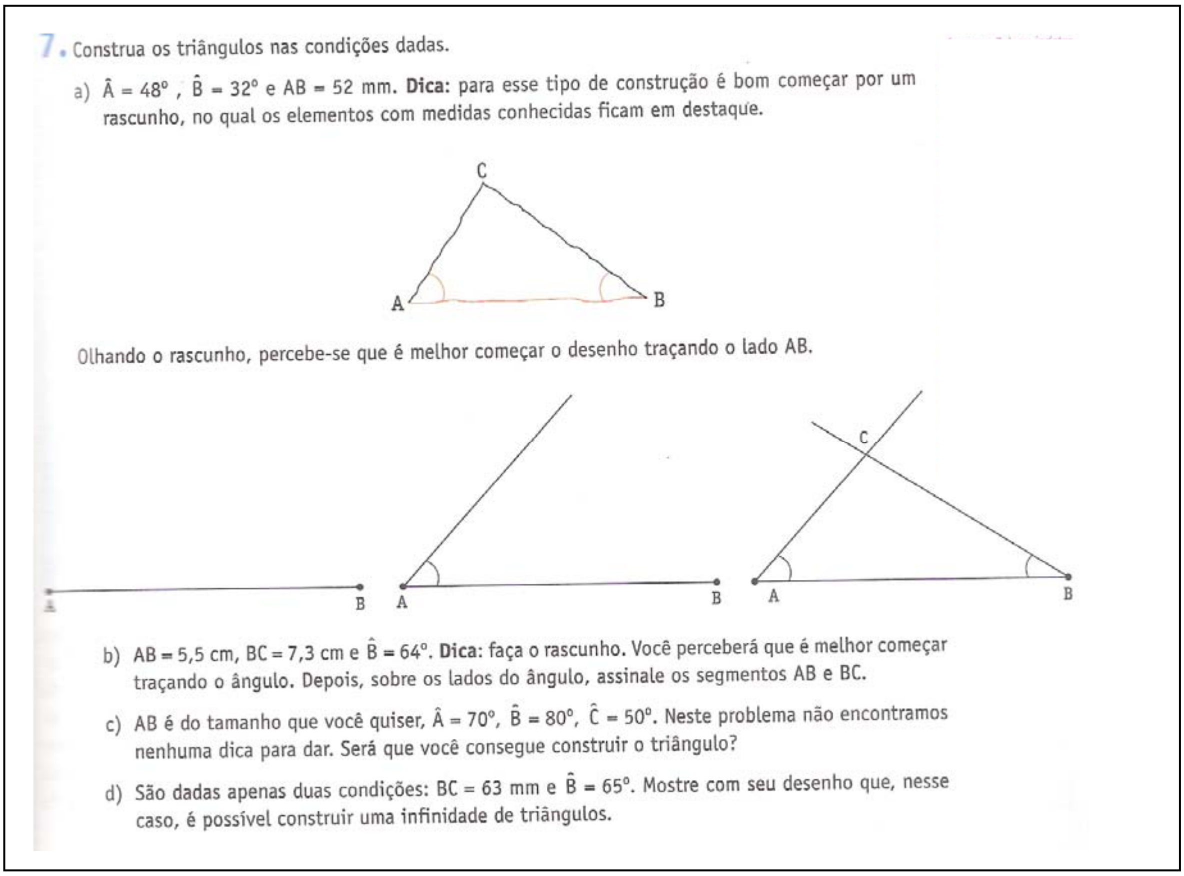
O estudo do capítulo 3 - "Construções geométricas", nos permitiu identificar uma tarefa da Organização Didática, a saber:

$T'_{3\pi1}$ – Ensinar a construir de triângulos.

Apresentamos a seguir a Organização Didática pontual relativa a essa tarefa, usando como referência os "momentos didáticos".

Tarefa $T'_{3\pi1}$ – Ensinar a construir de triângulos.

O *primeiro momento* relativo a esta tarefa é provocado pelo enunciado do exercício 7, mas o procedimento é dado na seqüência. Já nos exemplos seguintes o procedimento, ou seja, a *emergência da técnica* e o uso da *tecnologia* é deixado ao aluno explicitar e reconhecer.:



7. Construa os triângulos nas condições dadas.

a) $\hat{A} = 48°$, $\hat{B} = 32°$ e AB = 52 mm. **Dica:** para esse tipo de construção é bom começar por um rascunho, no qual os elementos com medidas conhecidas ficam em destaque.

Olhando o rascunho, percebe-se que é melhor começar o desenho traçando o lado AB.

b) AB = 5,5 cm, BC = 7,3 cm e $\hat{B} = 64°$. **Dica:** faça o rascunho. Você perceberá que é melhor começar traçando o ângulo. Depois, sobre os lados do ângulo, assinale os segmentos AB e BC.

c) AB é do tamanho que você quiser, $\hat{A} = 70°$, $\hat{B} = 80°$, $\hat{C} = 50°$. Neste problema não encontramos nenhuma dica para dar. Será que você consegue construir o triângulo?

d) São dadas apenas duas condições: BC = 63 mm e $\hat{B} = 65°$. Mostre com seu desenho que, nesse caso, é possível construir uma infinidade de triângulos.

Como observamos no texto anterior, o item a) do exercício está resolvido. Este item faz parte do momento da construção *do bloco tecnológico-teórico*, pois o autor do livro mostra ao leitor como deve ser feito à construção do triângulo ABC. Porém, o autor não *institucionaliza* como deve ser feito a construção de triângulos, apenas mostra como se faz o item a) do exercício. Podemos dizer que o autor do livro propõe o ensino da construções de triângulos via uma situação problema do tipo "siga as instruções" as quais fornecem um procedimento, quase um algorítmico para a construção.

Nos exercícios propostos identificamos um tipo de tarefa matemática no exercício 4, vejamos:

T_1 – Construir os triângulos nas condições dadas.

Esta tarefa, divide-se em sub-tarefas segundo as condições dadas no problema:

$t_{1,1}$ – Construir um triângulo conhecendo dois lados e o ângulo formado entre esses dois lados. (duas atividades)

$t_{1,2}$ - Construir um triângulo conhecendo seus três ângulos. (uma atividade)

$t_{1,3}$ - Construir um triângulo conhecendo um lado e um ângulo e mostrar que nesse caso é possível construir uma infinidade de triângulos. (uma atividade)

$t_{1,4}$ - Construir um triângulo, conhecendo seus três lados. (uma atividade)

Destacamos que as tarefas propostas exigem do aluno o conhecimento de como utilizar a régua, o compasso e o transferidor para construir os triângulos.

b) Capítulo 6 - Ângulos, paralelas e polígonos

O estudo do capítulo 6 - "Ângulos, paralelas e polígonos", nos permitiu identificar duas tarefas da Organização Didática, a saber:

$T'_{6\pi2}$ – Ensinar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.

$T'_{6\pi3}$ – Ensinar que em todo triângulo, a medida do ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Apresentamos a seguir a Organização Didática pontual relativa a essas tarefas.

Tarefa $T'_{6\pi2}$ – Ensinar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.

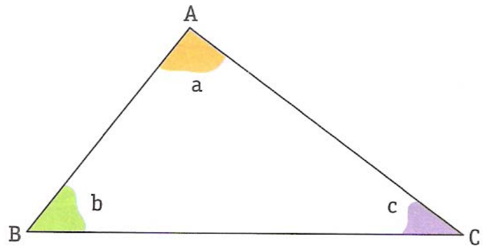
O texto que segue nos mostra que o momento do *primeiro encontro* com a tarefa $T'_{6\pi2}$, ocorre quando o autor apresenta no livro didático o subtítulo: "Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo”, seguido do texto que solicita que seja somado as medidas do ângulos internos no exercício anterior[47].

Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Some as medidas dos ângulos do triângulo do problema 17: você obtém 180º, certo? Você já ouviu alguém dizer que somando as medidas dos três ângulos internos de *qualquer* triângulo se obtêm 180º? Será que isso é verdade? Você não acha curioso o fato de haver infinitos formatos de triângulos e, em todos eles, a soma das medidas dos ângulos dar sempre o mesmo resultado?

Para discutir esse fato, vamos raciocinar como no problema 17. Nele, calculamos a medida de um dos ângulos de um triângulo, conhecendo as medidas dos outros dois. Para isso, foi traçada uma reta paralela a um dos lados. Agora, vamos rever esse raciocínio.

- Considere este triângulo ABC, no qual estão assinalados os ângulos internos e suas medidas.

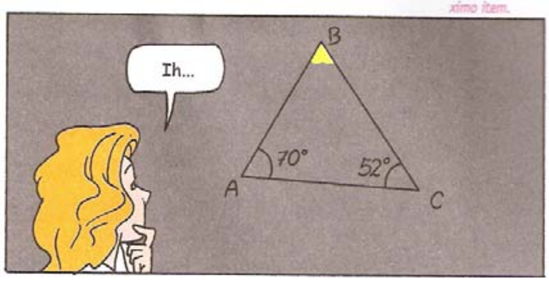


As frases: “Você já ouviu alguém dizer que somando as medidas dos três ângulos internos de qualquer triângulo se obtêm 180º? Será que isso é verdade? Você não acha curioso o fato de haver infinitos formatos de triângulos e, em todos eles, a soma das medidas dos ângulos dar sempre o mesmo resultado?” já constituem o momento da *exploração da tarefa*.

O momento da *construção do bloco tecnológico-teórico* inicia no segundo parágrafo do texto anterior, onde o autor afirma que vai raciocinar como no exercício 17 para mostrar que “a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º” é válida para qualquer triângulo. Esse raciocínio continua na próxima página do livro como podemos observar:

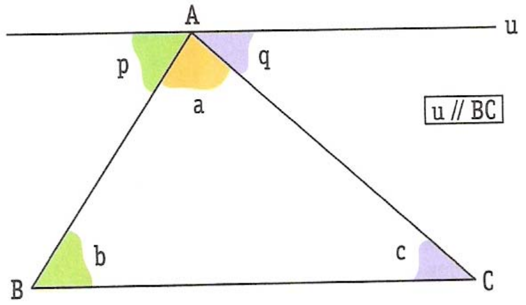
---

47 **17.** Quanto mede o ângulo $\hat{B}$?



Calcule primeiro as medidas de $\hat{m}$ e $\hat{n}$ e depois a de $\hat{B}$.

- Agora, traçamos a reta u, paralela ao lado BC, passando pelo vértice A.



Sabemos que p = b e q = c (medidas de ângulos alternos internos).

- Como p + a + q = 180°, concluímos que b + a + c = 180° ou a + b + c = 180°.

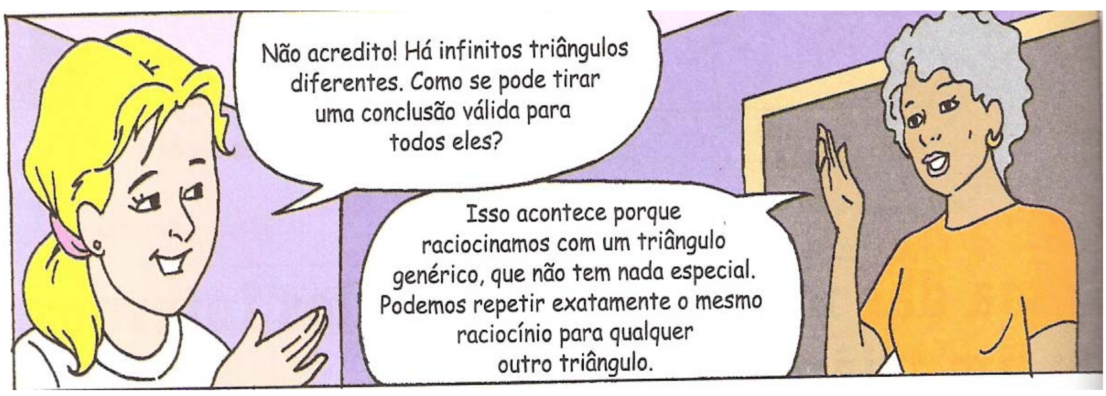
Vamos expressar de outra maneira essa fórmula: *a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°*.

Não há mais como duvidar: o fato é válido para todos os triângulos imagináveis!

È importante destacar que diferentes propriedades foram utilizadas na demonstração, como por exemplo: o conceito de ângulos alternos e internos que tem mesma medida, o conceito de retas paralelas e medida do ângulo raso. Estes são saberes que se mostram associados ao *objeto de estudo*.

A *institucionalização* de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° se dá, isto é, foi instituído o *bloco tecnológico-teórico* [θ/Θ].

Após a institucionalização o livro didático ainda apresenta um diálogo entre uma aluna e a professora, como podemos observar:



O momento do trabalho da *aplicação da técnica* e o *momento da avaliação* dão lugar a Organização Matemática associada à tarefa $T'_{6\pi2}$: Ensinar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

A Organização Matemática associada à tarefa $T'_{6\pi2}$ é composta por três tipos de Tarefas:

T_1 - Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo;

T_2 - Determinar a medida do ângulo externo x, conhecendo a medida de dois ângulos do triângulo.

T_3 - Classificar as frases como verdadeiras ou falsas.

A tarefa T_1 divide-se em cinco sub-tarefas segundo as condições dadas no problema:

$t_{1,1}$ - Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo conhecendo a medida de dois ângulos desse triângulo.

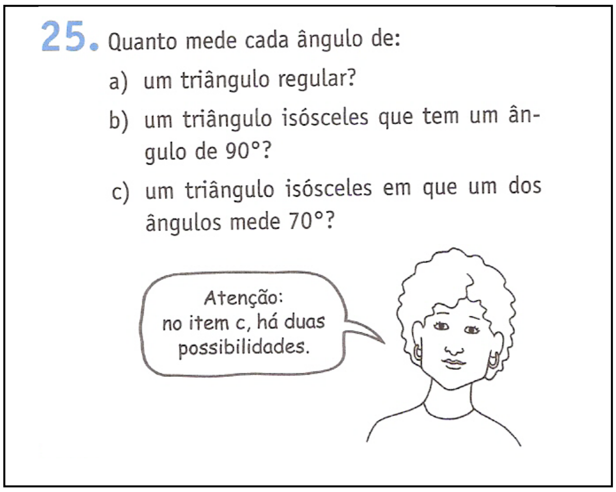
$t_{1,2}$ - Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo usando uma equação em função da variável x.

$t_{1,3}$ - Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo regular.

$t_{1,4}$ - Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo isósceles que têm um ângulo de 90º.

$t_{1,5}$ - Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo isósceles em que um dos ângulos mede 70º.

Da sub-tarefa $t_{1,1}$ identificamos no capítulo um exercício. Da sub-tarefa $t_{1,2}$ identificamos dois exercícios com seis atividades propostas, que para resolvê-las é necessário saber resolver equações do 1º grau. As sub-tarefas $t_{1,3}$, $t_{1,4}$ e $t_{1,5}$ foram identificadas no exercício 25 do livro, como mostra o texto abaixo:


25. Quanto mede cada ângulo de:

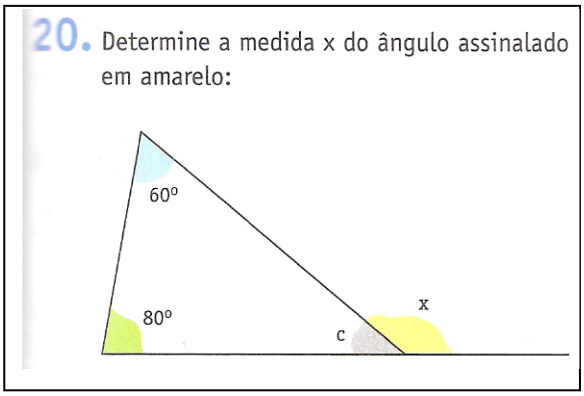
a) um triângulo regular?

b) um triângulo isósceles que tem um ângulo de 90°?

c) um triângulo isósceles em que um dos ângulos mede 70°?

Notamos também que nos exercícios propostos uma figura de estudo completa o enunciado ou pode ser produzida pelo sujeito. O estudo desta figura leva a identificação de um triângulo onde a propriedade da soma dos ângulos internos se apresenta como condição para resolver o problema. Assim, a *tecnologia* é uma ferramenta para a resolução das tarefas.

A tarefa T_2 foi identificada no exercício 20 do livro didático:


20. Determine a medida x do ângulo assinalado em amarelo:

Como podemos observar para resolver essa tarefa corretamente é necessário o aluno conhecer dois resultados teóricos, são eles:

- Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^{\circ}$, ou seja, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180º.

- A soma de dois ângulos adjacentes e suplementares é 180º.

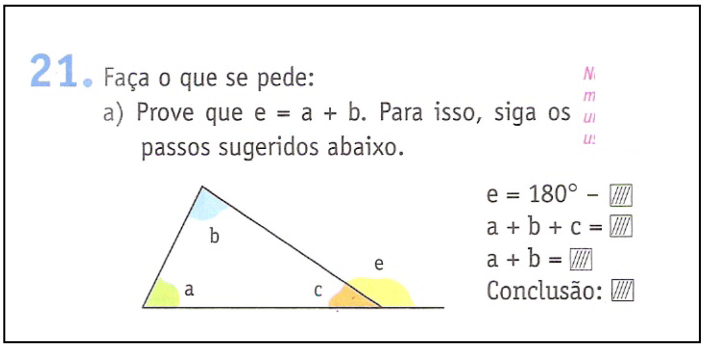
Para resolver corretamente as tarefas T_1 e T_3 é necessário conhecer três propriedades:

- Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$, ou seja, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180º.
- Um triângulo é regular quando tem todos os lados e os ângulos iguais.
- Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Dentre as propriedades mobilizadas, convém ressaltar que as duas últimas propriedades o autor do livro considera como conhecimento disponível.

Tarefa T’$_{6\pi 3}$ – Ensinar que em todo triângulo, a medida do ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Uma Organização Didática que inicia com um exercício proposto, solicitando para provar uma igualdade:



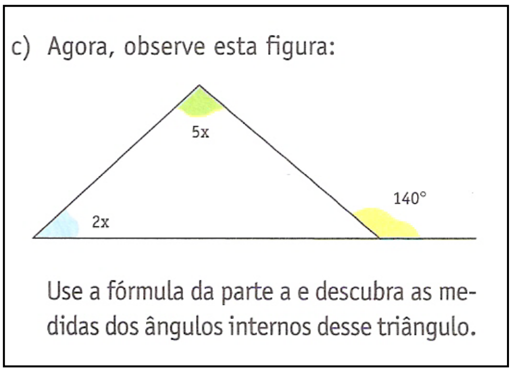
O momento da *emergência da técnica* ocorre quando o autor do livro afirma que para provar a propriedade deve-se seguir os passos sugeridos, isto é, se dá por um roteiro pronto. Nesta atividade a propriedade “Em todo triângulo, a soma dos ângulos internos é 180º” é uma ferramenta que possibilita a demonstração de outra propriedade. A construção do *bloco tecnológico-teórico* tem lugar via a prova da propriedade.

Após provar a propriedade no item a) do exercício, o autor solicita no item b) que o aluno escreva com suas palavras o significado da igualdade anterior. Podemos dizer que esse é o momento “camuflado” da *institucionalização*. Na correção do exercício, o professor deve intervir e institucionalizar a propriedade falando que esta, é mais uma propriedade da geometria e destacar que é válida para todo tipo de triângulo. Desta maneira o professor *institucionaliza* que em todo triângulo, a medida do ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

A *Organização Matemática* associada à tarefa **$T'_{6\pi3}$** é composta pela tarefa:

T_1 – Descobrir as medidas dos ângulos do triângulo.

Essa tarefa foi identificada no exercício 21-c) do livro didático, veja:



Para resolver esse exercício usamos os três resultados teóricos: “A soma de dois ângulos adjacentes e suplementares é 180º”, “Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$, ou seja, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180º” e “Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não–adjacentes a ele”.

Em conclusão:

Neste capítulo identificamos uma Organização Didática composta de duas tarefas, que visam ensinar os elementos da teoria:

- Ensinar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.
- Ensinar que em todo triângulo, a medida do ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

A Organização Matemática é composta de quatro tarefas, sendo que a primeira tarefa divide-se em 5 sub-tarefas[48] de acordo com a condição problema. Vejamos os tipos de tarefas:

[48] $t_{1,1}$ - Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo conhecendo a medida de dois ângulos desse triângulo.
$t_{1,2}$ - Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo usando uma equação em função da variável x.
$t_{1,3}$ - Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo regular.
$t_{1,4}$ - Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo isósceles que têm um ângulo de 90º.
$t_{1,5}$ - Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo isósceles em que um dos ângulos mede 70º.

- Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo;
- Determinar a medida do ângulo externo x, conhecendo a medida de dois ângulos do triângulo.
- Classificar as frases como verdadeiras ou falsas.
- Descobrir as medidas dos ângulos do triângulo.

Estas tarefas estão presentes em nove exercícios do livro didático.

c) Capítulo 12 - Áreas e volumes

O estudo do capítulo 12 - “Áreas e volumes”, nos permitiu identificar duas tarefas da Organização Didática, a saber:

$T'_{12\pi4}$ – Ensinar fórmulas para o cálculo da área de uma região triangular.
$T'_{12\pi5}$ – Ensinar o Teorema de Pitágoras.

Apresentamos a seguir a Organização Didática pontual relativa a essas tarefas, usando como referência os “momentos didáticos”.

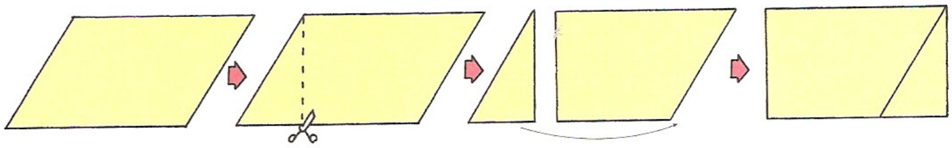
Tarefa $T'_{12\pi4}$ – Ensinar fórmulas para o cálculo da área de uma região triangular.

O texto abaixo nos mostra que o momento do *primeiro encontro* com a tarefa $T'_{12\pi4}$ ocorre no subtítulo: “Fórmulas para o cálculo de áreas”, seguido do texto afirmando que o leitor já conhece várias fórmulas e sabe que elas resumem raciocínios e resultados. Destaca também a importância de saber usar as fórmulas, entender o seu porquê e compreender como foram deduzidas.

> **Fórmulas para o cálculo de áreas**
>
> Você conhece várias fórmulas e sabe que elas resumem raciocínios e resultados. Aplicando-as, é possível resolver problemas mais rapidamente.
>
> É importante saber usar fórmulas, entender o seu porquê, compreender como foram deduzidas. Isso também ajuda na resolução dos problemas.
>
> Neste item vamos tratar de fórmulas que facilitam o cálculo de áreas. Para começar, vamos obter uma fórmula para a área dos paralelogramos.

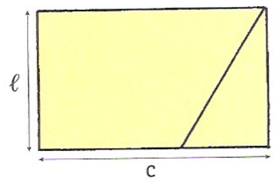
O momento da *emergência da técnica* ocorre com a retomada do cálculo de área do paralelogramo por meio de uma apresentação passo a passo do procedimento.

Já vimos como se calcula a área de um paralelogramo transformando-o num retângulo de mesma área:

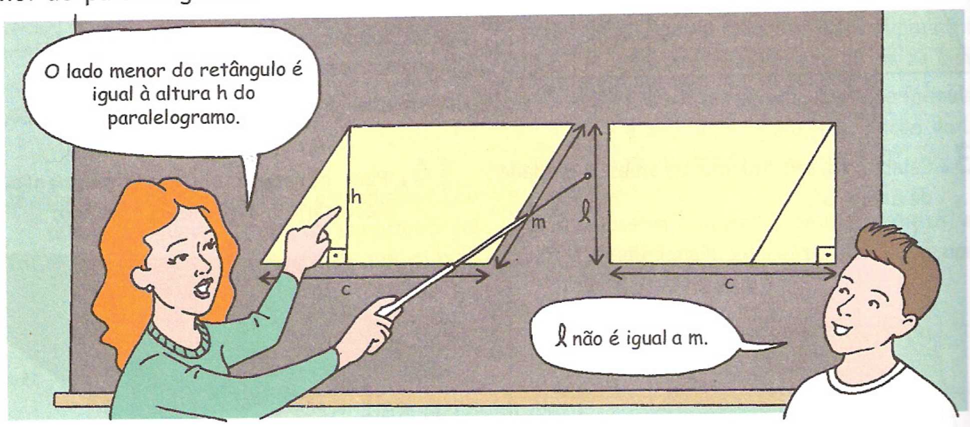


Podemos usar essa estratégia porque já sabemos calcular a área do retângulo:

$A = c \cdot \ell$

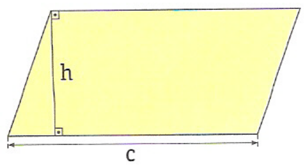


Agora observe: o comprimento c da base do retângulo é igual ao comprimento de um lado do paralelogramo. Mas atenção! O lado menor do retângulo não é igual ao lado menor do paralelogramo.



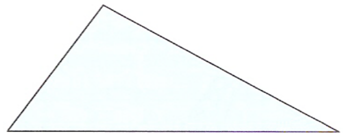
Conclusão: obtemos a área de um paralelogramo multiplicando a medida de sua base por sua altura:

$A = c \cdot h$

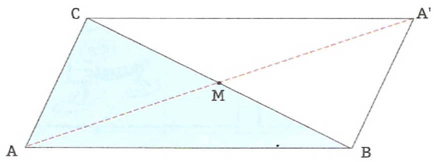


Continuando o trabalho para conduzir a *emergência da técnica* e a *construção do bloco tecnológico-teórico,* o procedimento de como à partir de um triângulo obtem-se um paralelogramos é detalhado e assim fica demonstrado a fórmula do cálculo da área do triângulo.

Considere um triângulo qualquer:



Esse triângulo e seu simétrico pelo ponto médio de um lado formam um paralelogramo.

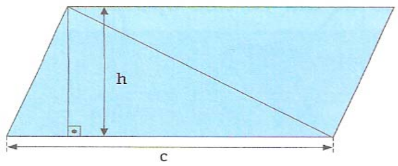


Em relação ao centro M:
A' é simétrico de A;
B é simétrico de C;
C é simétrico de B.

Por isso, o triângulo A'CB é simétrico do triângulo ABC.

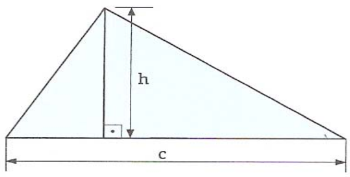
A área do paralelogramo é o produto das medidas da base e da altura:

$$\mathbf{A = c \cdot h}$$



Portanto, a área do triângulo é:

$$\mathbf{A = \frac{c \cdot h}{2}}$$



Deduzimos uma nova fórmula. Ela resume este resultado: a área de qualquer triângulo é obtida multiplicando as medidas da base e da altura e dividindo o resultado por 2.

Como podemos observar a *institucionalização* ocorre com o destaque da fórmula da área do triângulo na linguagem algébrica e com a frase: "A área de qualquer triângulo é obtida multiplicando as medidas da base e da altura e dividindo o resultado por dois".

A *aplicação da técnica* ocorre por meio das tarefas T_1 e T_2:

T_1 - Calcular a área das figuras.

T_2 - Encontrar outra fórmula para o cálculo da área de um triângulo.

Enquanto a tarefa T_1 está presente em quatro exercícios do livro a tarefa T_2 está em um exercício.

Tarefa T'$_{12\pi5}$ – Ensinar o Teorema de Pitágoras.

O *primeiro encontro* com a tarefa T'$_{12\pi5}$ ocorre no subtítulo: "O teorema de Pitágoras" seguido do texto que contextualiza uma situação problema colocando aos alunos que nas casas ou apartamentos os cômodos têm forma retangular, ou seja, as paredes devem formar um ângulo reto.

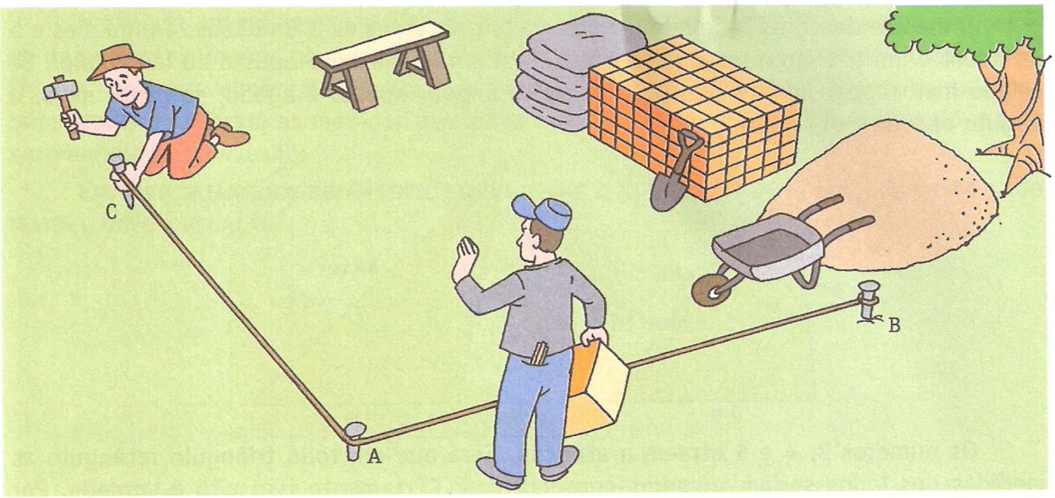
O teorema de Pitágoras

Em nossas casas ou apartamentos quase todos os cômodos têm forma retangular. Isso significa que as paredes devem formar ângulo reto. Esta posição estava prevista na planta, antes de as paredes serem levantadas. Podemos ler no livro *Descobrindo o teorema de Pitágoras* como os pedreiros obtêm paredes formando ângulos retos:

O desenho de um ângulo reto no papel pode ser feito com esquadro e, às vezes, "a olho". No chão de terra, porém, é mais difícil marcar com precisão cantos retos cujos lados devem ter vários metros de comprimento. O que fazem então os construtores?

Inicialmente, eles esticam um fio entre duas estacas A e B, cravadas no chão. Depois, esticam um fio da estaca A até a estaca C, que não é cravada no chão. Um ajudante fica segurando-a até o mestre-de-obras dizer onde deve ser cravada. O mestre escolhe esse local "a olho", baseado em sua sensibilidade e experiência.

Notamos uma tentativa de levar o aluno a perceber a importância da matemática, mais especificamente, do Teorema de Pitágoras na prática. Para isto, o autor ilustra a situação:

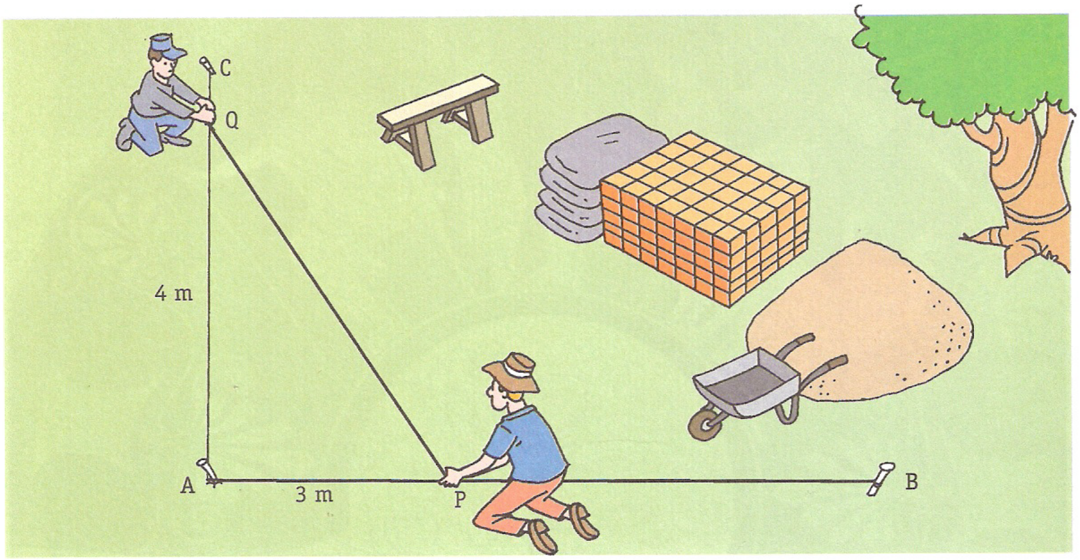


A posição do fio AC precisa ser conferida, pois o mestre não pode confiar apenas em seu "olhômetro". Ele não pode correr o risco de levantar paredes "fora do esquadro", quer dizer, formando ângulos agudos ou obtusos. (...)

Para ter certeza de que os fios AB e AC formam um ângulo reto, o mestre e o ajudante fazem, por exemplo, o seguinte:

- *sobre o fio AB, marcam P a 3 m de A;*
- *sobre o fio AC marcam Q a 4 m de A;*
- *finalmente, medem a distância PQ.*

Para o ângulo ser reto a distância PQ deve medir exatamente 5 m.

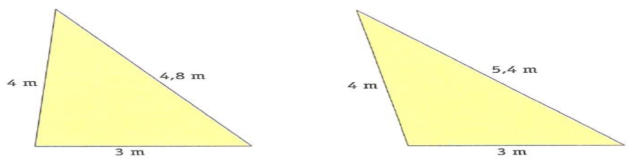


(*IMENES, L. M., LELLIS, M.* Descobrindo o teorema de Pitágoras. *São Paulo: Scipione, 2000. p. 22-3. (Vivendo a Matemática).*)

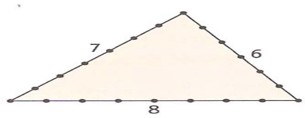
Ao ler o texto o aluno saberá na vida real como marcar cantos com ângulo reto. Após este procedimento, utilizando triângulos com lados de 3 unidades, 4 unidades e 5 unidades o autor do livro mostra que nem todo triângulo retângulo possui as medidas dos lados com números consecutivos. Mostra também o contrário, ou seja, nem todo triângulo com as medidas dos lados com números consecutivos é retângulo.

A *exploração da tarefa* e *construção do bloco tecnológico-teórico* ocorrem via a exploração de elementos para explicar a pergunta: "Nos triângulos retângulos, existe alguma relação entre as medidas e os lados?". Na verdade o autor provoca o aluno e dá a resposta em seguida, pois o autor fazendo uso da história da matemática, *institucionaliza* a relação de Pitágoras com a frase colocada em destaque: "Em todo triângulo retângulo, sendo *a*, *b*, e *c* as medidas dos lados (*a* é o lado maior), vale a relação: $a^2 = b^2 + c^2$.

O mestre-de-obras sabe que um triângulo com lados de 3 unidades, 4 unidades e 5 unidades é um triângulo retângulo, isto é, tem um ângulo reto oposto ao lado maior. Se o lado maior medir menos que 5 unidades, o ângulo oposto é agudo; se medir mais, o ângulo oposto é obtuso.



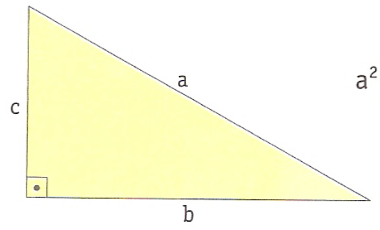
Os números 3, 4 e 5 atraem a atenção. Será que em todo triângulo retângulo as medidas dos lados seriam números consecutivos? Certamente isso não é verdade. Por exemplo, o triângulo de lados 6, 7 e 8 unidades não é retângulo! Confira: ele não tem ângulo reto.



Fica então a pergunta: nos triângulos retângulos, existe alguma relação entre as medidas dos lados?

Na Grécia antiga havia um grupo de pensadores, liderado por Pitágoras, que gostava de procurar números em tudo. Eles descobriram a relação entre as notas musicais e as frações e, provavelmente, descobriram também os números primos. Pois bem, esses pensadores estudaram as medidas dos lados nos triângulos retângulos, chegando a esta surpreendente conclusão:

EM TODO TRIÂNGULO RETÂNGULO, SENDO a, b E c AS MEDIDAS DOS LADOS (a É A DO LADO MAIOR), VALE A RELAÇÃO:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Esta descoberta é considerada uma das mais importantes da história da matemática e a propriedade acima é conhecida como relação de Pitágoras.

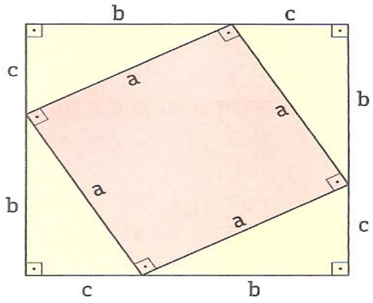
Na seqüência afirma que esta é uma relação importante, e que deve ser provada. Assim, propõe demonstrar a relação de Pitágoras utilizando os conhecimentos sobre álgebra e cálculo de áreas.

Veja que, no caso do triângulo de lados 3, 4 e 5, a relação $a^2 = b^2 + c^2$ se verifica, porque $3^2 + 4^2 = 5^2$ (ou seja, $9 + 16 = 25$).

Realmente, uma relação como essa, que nada tem de óbvio, precisa ser provada para que possamos aceitá-la. Vamos usar nossos conhecimentos sobre álgebra e cálculo de áreas e provar que ela é sempre verdadeira.

Na próxima pagina do livro faz a demonstração da relação de Pitágoras e afirma que essa relação é um teorema, ou seja, afirma que a propriedade que acabou de demonstrar é o Teorema de Pitágoras. Com a fala de uma suposta aluna o autor afirma que há outras maneiras de deduzir, ou seja, de demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Com um quadrado e quatro triângulos retângulos iguais entre si (mas sem nenhuma outra característica especial), podemos compor um quadrado maior, como mostra a figura:

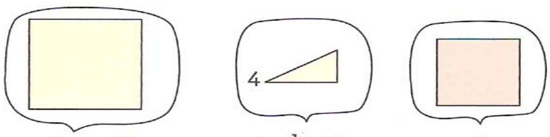


O quadrado maior tem lado b + c. Dentro dele, o quadrado menor tem lado a e os quatro triângulos retângulos iguais têm os lados perpendiculares b e c.

As áreas dessas figuras são:

- área de cada triângulo: $\frac{b \cdot c}{2}$
- área do quadrado menor: a^2
- área do quadrado maior (ou da figura toda): $(b + c)^2$

A área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quatro triângulos com a área do quadrado menor. Ou seja:



$$(b + c)^2 = 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + a^2$$

Pois, bem, simplificando essa igualdade, obtemos a relação pitagórica:

$$(b + c)\,(b + c) = 2bc + a^2$$
$$b^2 + bc + cb + c^2 = 2bc + a^2$$
$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$$
$$-2bc \qquad \boxed{b^2 + c^2 = a^2} \qquad -2bc$$

Uma propriedade obtida por meio de uma dedução é um teorema. Esse que vimos é o teorema de Pitágoras.

No momento da *aplicação da técnica* e no momento da *avaliação* identificamos as tarefas:

T_1 – Responder qual é a área de cada triângulo na figura dada.

T_2 – Calcular o lado desconhecido do triângulo.

A tarefa T_1 está presente em apenas um exercício. Já a tarefa T_2 aparece em doze exercícios propostos.

Em conclusão:

Neste capítulo identificamos uma Organização Didática composta de duas tarefas, que visam ensinar os elementos da teoria:

– Ensinar fórmulas para o cálculo da área de uma região triangular.

– Ensinar o Teorema de Pitágoras.

A Organização Matemática é composta de quatro tarefas. Vejamos os tipos de tarefas:

- Calcular a área das figuras.
- Encontrar outra fórmula para o cálculo da área de um triângulo.
- Responder qual é a área de cada triângulo na figura dada.
- Calcular o lado desconhecido do triângulo.

Estas tarefas estão presentes em18 exercícios do livro didático.

Conclusão do Capítulo 3

a) Livro: "Tudo é Matemática – 7ª série, Dante (2004)".

Analisamos do livro "Tudo é Matemática" quatro capítulos:

Capítulo 6 – Propriedades de figuras geométricas;

Capítulo 8 – Proporcionalidade em Geometria;

Capítulo 10 – Perímetros, áreas e volumes;

Capítulo 12 – Construções geométricas.

Nos capítulos analisados identificamos 20 tarefas da Organização Didática[49], as quais visavam ensinar as seguintes propriedades relativas ao objeto triângulo:

- Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$.
- Um triângulo é chamado do acutângulo quando tem os três ângulos agudos.
- Um triângulo é chamado do obtusângulo quando tem um ângulo obtuso e os outro dois ângulos agudos.
- Um triângulo é retângulo quando tem um ângulo reto/ângulo de 90° e os outros dois ângulos agudos.
- Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não–adjacentes a ele.
- A congruência dos dois triângulos determina a congruência dos seis elementos. E, a congruência de seis elementos (três lados e três ângulos) determina a congruência dos dois triângulos.
- Se dois lados dos triângulos forem congruentes e o ângulo formado por eles também for congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência – LAL.
- Se três lados dos triângulos são congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência – LLL.
- Se dois ângulos são congruentes e o lado compreendido entre eles também é congruente, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência – ALA.

[49] Das 20 tarefas didáticas, 10 tarefas estão citadas na página 64, 4 tarefas na página78, 3 tarefas na página 87 e 2 tarefas na página 93 da dissertação.

- Se dois triângulos têm dois lados congruentes e um ângulo adjacente e o ângulo a esse lado também congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência – LAA_0.

- Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

- Mediana de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

- A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice.

- A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos.

- Em todo triângulo, as três alturas ou seus prolongamentos cruzam-se em um mesmo ponto, chamado de ortocentro do triângulo.

- Em todo triângulo, as três bissetrizes cruzam-se em um mesmo ponto, chamado incentro do triângulo.

- Em todo triângulo, as três alturas ou seus prolongamentos cruzam-se em um mesmo ponto, chamado de ortocentro do triângulo.

- Para descobrir a altura de uma pirâmide, Tales fincou uma estaca na areia, mediu as sombras respectivas da pirâmide e da estaca, em uma determinada hora do dia, e estabeleceu uma proporção: $\frac{\text{altura da pirâmide}}{\text{sombra da pirâmide}} = \frac{\text{altura da estaca}}{\text{sombra da estaca}}$, é tudo uma questão de proporcionalidade e criatividade de um grande gênio.

- Em um triângulo retângulo, a razão : $\frac{\text{cateto oposto ao ângulo de } 30^\circ}{\text{hipotenusa}}$ é sempre igual a $\frac{1}{2}$ e é denominada seno de 30º.

- Os gregos chamavam de triângulo de ouro ou triângulo sublime todo triângulo isósceles cuja razão $\frac{x}{a}$ tivesse um valor aproximado de 1,6 (aproximação de 1,6180342). Sendo que ***x*** representa os lados congruentes do triângulo isósceles e ***a*** a base desse triângulo.

- Dois triângulos são semelhantes quando as medidas de seus lados forem proporcionais ou quando seus ângulos forem congruentes, ou seja, basta examinar os lados ou os ângulos e constatar a semelhança de dois triângulos, pois:

● A congruência dos ângulos garante a semelhança dos triângulos, pois as medidas dos lados serão necessariamente proporcionais.

● A proporcionalidade das medidas dos lados garante a semelhança dos triângulos, pois os ângulos serão necessariamente congruentes.

- Em triângulos retângulos com ângulo de 30º a razão cateto oposto sobre hipotenusa é igual a ½.
- A área de uma região triangular é igual a base vezes a altura dividido por dois.

$A = \frac{b \cdot a}{2}$, sendo *b* a base do triângulo e *a* altura desse triângulo.

- Dado um triângulo retângulo ABC de lados *a, b e c,* o quadrado da medida do lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. Na linguagem algébrica: $a^2 = b^2 + c^2$.
- A área da região triangular pode ser calculada a partir da medida de seus três lados a, b e c com a seguinte fórmula: $A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$, sendo $p = \frac{a+b+c}{2}$.
- Em todo triângulo, a medida do lado maior é sempre menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.
- O circuncentro de um triângulo é o pondo de encontro das mediatrizes dos lados desse triângulo e, é o centro da circunferência circunscrita à esse triângulo.

Estas tarefas da Organização Didática dão lugar a Organização Matemática que é composta por 49 tarefas[50]. Nas tarefas matemáticas identificamos seus gêneros de tarefas, que são do tipo: calcular, determinar, encontrar, construir, discutir, verificar, identificar, responder, observar, demonstrar, localizar, completar, transportar e relacionar. Sendo que, os gêneros de tarefas que o autor deu mais ênfase foram do tipo calcular, determinar, encontrar e construir. Isto pois, estes tipos de gêneros de tarefas apareceram entre 7 à 14 vezes nos exercícios e os demais gêneros apareceram somente uma ou duas vezes nos exercícios propostos.

Ressaltamos a importância da presença do gênero de tarefa do tipo demonstrar nos livros didáticos. No entanto, neste livro este gênero de tarefa apareceu apenas em um exercício que tinha por tarefa: Demonstrar que em todo triângulo isósceles, a mediana relativa a base é também bissetriz e altura[51].

Na visão do aluno e também de vários professores, essa não é uma tarefa fácil de resolver. Para o aluno ter êxito na sua resolução é necessário sempre trabalhar esse tipo de tarefa no decorrer da sua aprendizagem para o mesmo saber articular as

[50] Das 49 tarefas matemáticas, 25 delas estão citadas nas páginas 64 e 65, 14 tarefas estão na página 78, 8 tarefas estão na página 87 e 5 tarefas estão na página 93 da dissertação.
[51] Essa tarefa é a tarefa T_9 e, está resolvida no anexo 9.

propriedades/tecnologias já conhecidas e provar a nova propriedade, até mesmo porque durante a resolução dessa tarefa, a cada momento, entra em cena não só os conhecimentos anteriores, como também a capacidade de coordenar e adaptar essas informações em face de uma nova situação.

Segundo Pais (2001) quando a aprendizagem acontece com sucesso:

> "... os conhecimentos anteriores são adicionados uns aos outros e incorporados à nova situação. Assim, ocorre uma parte do processo cognitivo que consiste no conjunto de procedimentos de raciocínio desenvolvidos pelo sujeito para coordenar as adaptações necessárias para que informações precedentes sejam incorporadas em uma situação de aprendizagem, sintetizando o novo conhecimento".

Pais (2001) vai além desse resultado, afirmando que: "esses procedimentos de aprendizagem, quando praticados de forma dinâmica e com certa continuidade, se traduzem pelo chamado estado de "apreendência"." O estado de "apreendência" é um termo utilizado por Assmann (1998) e caracteriza um estado de disponibilidade para que o sujeito coloque em funcionamento novos procedimentos de raciocínio, ao contrário de simplesmente repetir modelos, fórmulas, algoritmos e ações automatizadas. Por esse motivo ressaltamos a importância de se trabalhar com os gêneros de tarefas do tipo "demonstração" para o aluno realmente deixar simplesmente de resolver as tarefas de forma algorítmica, sem pensar no que está acontecendo, sem mobilizar os conceitos das propriedades durante a resolução de determinada tarefa. Isso não significa que todas as tarefas propostas na Organização Matemática tenham que ser do tipo "demonstração". Também, devemos priorizar outros tipo de tarefas, como por exemplo, tarefas onde se encaixe a resolução de problemas. Porém nessas tarefas não podemos, nem devemos, propor problemas que exijam simplesmente o exercício da repetição e do automatismo, mas de problemas que proporcionem condições ideais para que ocorra uma aprendizagem significativa.

Observamos que, em geral, para resolver as tarefas matemáticas propostas ao longo dos capítulos analisados era necessário mobilizar outros resultados teóricos que não foram objetos de ensino nas tarefas da Organização Didática[52]. Os resultados teóricos que foram

[52] Ver anexo 17 - Propriedades e definições estudadas no contexto da Organização Matemática relativo a cada tarefa $t_{\pi i}$ da Organização Didática.

mobilizados na resolução das tarefas matemáticas e não foram estudados nas tarefas da Organização Didática foram:

- A área de um retângulo é igual a medida da base multiplicada com a medida da altura desse retângulo.
- A área do paralelogramo é igual a base vezes a altura.
- Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lemos: a está para b assim como c está para d), os números a, b, c e d são chamados de **termos da proporção**. O primeiro e o quarto termos de uma proporção são chamados de **extremos**, enquanto o segundo e o terceiro termos são chamados de **meios**.

- O perímetro de uma figura qualquer é a soma de todos os lados dessa figura.

- Quatro números racionais, *a*, *b*, *c* e *d*, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando a razão do primeiro para o segundo é igual a razão do terceiro para o quarto.
- Em todo retângulo, os lados opostos são congruentes.
- O centímetro (cm) está duas posições à direita do metro (m) em relação ao quadro das unidades. Logo, para transformar de metro para centímetros devemos multiplicar o número que indica a medida por 10^2, ou seja, devemos multiplicar por 100.
- O centímetro (cm) está duas posições à direita do metro (m) em relação ao quadro das unidades. Como, da direita para a esquerda, cada unidade representa $\frac{1}{10}$ da unidade anterior. Portanto, para transformar de centímetros para metro devemos multiplicar o número que indica a medida por $\left(\frac{1}{10}\right)^2$, ou seja, devemos dividir por 100".
- Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

- Um triângulo é eqüilátero quando têm todos os lados iguais e todos os ângulos iguais.
- Dado um triângulo qualquer, o baricentro divide a mediana na razão de 1 para 2.
- A soma de dois ângulos adjacentes e suplementares é 180º.

- Dois segmentos de reta são congruentes quando suas medidas são iguais. Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos de reta congruentes, indicamos: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
- Dois ângulos são congruentes quando suas medidas são iguais. Se $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ são ângulos congruentes, indicamos: $\hat{P} \cong \hat{Q}$.
- Ângulos alternos e internos em lados diferentes em relação à reta transversal e na parte interna em relação as restas paralelas tem a mesma medida.
- A soma de dois ângulos adjacentes e suplementares é 180º.
- Um ângulo é agudo quando sua medida é menor do que 90º.
- Um ângulo é obtuso quando sua medida é maior do que 90º.

Na análise do livro identificamos que para resolver as tarefas da Organização Matemática, as propriedades aprendidas nas tarefas da Organização Didática deixam de ser objetos de ensino e passam a ser ferramentas para a resolução dos exercícios propostos.

Observamos também, que na medida em que o autor do livro vai ensinando novas propriedades relativas ao triângulo. O mesmo propõe exercícios que procuram articular as propriedades e definições já ensinadas com a nova propriedade. Essa é uma abordagem de ensino de forma espiral dentro do próprio livro didático, o que torna a aprendizagem bem mais significativa deixando de ser apenas mecânica, com aplicação de exercícios repetitivos.

b) Livro: "Matemática para todos - 7ª série, Imenes & Lellis (2007)".

Analisamos do livro "Matemática para todos" três capítulos:

Capítulo 3 – Construções geométricas;

Capítulo 6 – Ângulos, paralelas e polígonos;

Capítulo 12 – Áreas e volumes.

Nos capítulos analisados identificamos 5 tarefas da Organização Didática, as quais visavam ensinar os seguintes resultados teóricos relativos ao objeto triângulo:

- Construção de triângulos com o uso de régua, compasso e transferidor.
- Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$.
- Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não–adjacentes a ele.
- A área de uma região triangular é igual a base vezes a altura dividido por dois.

$A = \frac{b \cdot a}{2}$, sendo *b* a base do triângulo e *a* altura desse triângulo.

- Dado um triângulo retângulo ABC de lados *a, b e c,* o quadrado da medida do lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. Na linguagem algébrica: $a^2 = b^2 + c^2$.

O fato de este livro conter apenas cinco tarefas da Organização Didática não significa que as propriedades relativas ao triângulo que não estão presente neste livro da 7ª série não serão abordadas no ensino. Isto apenas mostra que os autores do livro devem dar ênfase no ensino dessas propriedades relativas ao triângulos em outras séries do Ensino Fundamental.

As cinco tarefas da Organização Didática dão lugar a Organização Matemática que é composta por nove tarefas. Estas tarefas estão presentes em 32 exercícios propostos, nos quais identificamos os gêneros de tarefas do tipo: construir, calcular, determinar, classificar, descobrir e responder. Destes gêneros de tarefas, identificamos uma ênfase no gênero de tarefa do tipo calcular, pois somente na tarefa “Calcular o lado desconhecido do triângulo” o autor do livro propõe 12 exercícios.

Em geral, para resolver os exercícios, é necessário ter como conhecimento disponível propriedades e definições que não foram objetos de ensino da Organização Didática .

Observamos também, que o autor prioriza o ensino em espiral. Visto que, uma breve análise do livro como um todo e dos outros volumes nos mostrou que os conteúdos estão distribuídos nos livros da 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e são retomados e aprofundados ou estão relacionados aos novos conteúdos.

Considerações Finais

Ao realizar o estudo das pesquisas na área de Educação Matemática relacionadas ao ensino de Geometria, constatamos que o triângulo aparece ora como objeto de estudo, ora como ferramenta utilizada na apreensão de diferentes conceitos. Das doze pesquisas que estudamos, vimos que nove delas tratam o triângulo como objeto de estudo, a exemplo de Pirola (1995), que trata da formação do conceito de triângulo. As outras três pesquisas utilizaram o triângulo como ferramenta, a exemplo de Biral (2000) que abordou a história da trigonometria.

Dentre as pesquisas citadas em nosso trabalho, quatro delas realizaram a análise do livro didático. Tais análises foram realizadas de modo a enfatizar aspectos como: a biografia dos autores, a estruturação da obra, as definições de trigonometria, os problemas práticos que envolvem o triângulo, a influência da matemática moderna nos livros didáticos em relação à geometria, as formas de abordagem de semelhança de triângulos e do teorema de Pitágoras.

Ao estudar os PCN verificamos a grande importância dada ao ensino de geometria, que permite que o aluno estabeleça conexões entre a Matemática e outras áreas de conhecimento. Entende-se que a geometria pode possibilitar ao professor explorar situações-problema, realizando um ensino significativo e não somente baseado em memorizações e repetições. Em alguns pontos, os PCN destacam na 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental conceitos essenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico, tais como: aplicações e demonstrações do Teorema de Pitágoras, semelhança de figuras planas, construção de medianas, bissetrizes e alturas de um triângulo, utilizando régua e compasso, etc. Com isto observamos importantes resultados da geometria que envolvem o triângulo propostos como objeto de estudo.

Nosso trabalho, tendo como referência a Teoria Antropológica do Didático, permitiu realizar um estudo pontual do objeto triângulo nos livros didáticos de 7ª série do Ensino Fundamental. Identificamos a Organização Praxeológica nos livros didáticos, ou seja, as Organizações Didáticas e Matemáticas na abordagem do objeto triângulo.

Na Organização Didática do livro "Tudo é matemática - 7ª série"[53], identificamos tarefas do tipo:

1. Ensinar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º.
2. Ensinar a classificação dos triângulos quanto aos ângulos.

[53] O livro "Tudo é matemática" designamos por: livro A.

3. Ensinar que em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
4. Ensinar a congruência de triângulos.
5. Ensinar os casos de congruência de triângulos.
6. Ensinar que em todo triângulo isósceles, os ângulos opostos aos lados congruentes são também congruentes.
7. Ensinar os elementos de um triângulo: a mediana, a bissetriz e a altura.
8. Ensinar o ortocentro de um triângulo.
9. Ensinar o incentro de um triângulo.
10. Ensinar o baricentro de um triângulo.
11. Ensinar a proporcionalidade para calcular a altura.
12. Ensinar a proporcionalidade em triângulos retângulos com ângulo de 30º.
13. Ensinar o triângulo de ouro ou também chamado de triângulo sublime.
14. Ensinar semelhança de triângulos.
15. Ensinar a fórmula para o cálculo da área de uma região triangular.
16. Ensinar a fórmula Heron para o cálculo de área das regiões triangulares.
17. Ensinar o transporte de triângulos.
18. Ensinar a desigualdade triangular.
19. Ensinar o Circuncentro de um triângulo.
20. Ensinar o Teorema de Pitágoras.

Assim, neste livro foram identificadas vinte tarefas que compõem a Organização Didática. No livro "Matemática para todos – 7ª série[54]", foram identificadas cinco tarefas didáticas:

1. Ensinar a construir triângulos.
2. Ensinar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º.
3. Ensinar que em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
4. Ensinar a fórmula para o cálculo da área de uma região triangular.
5. Ensinar o Teorema de Pitágoras.

Destacamos que das cinco tarefas didáticas presentes no livro "Matemática para todos", apenas uma é diferente daquelas encontradas no livro "Tudo é matemática".

Uma breve análise dos livros da coleção "Matemática para todos" que são propostos para as 5ª, 6ª e 8ª séries do Ensino Fundamental nos permitiu identificar que vários resultados

[54] O livro "Matemática para todos" designamos por: livro B.

teóricos relativos ao objeto triângulo que não estavam presentes no livro da 7ª série são abordados nestes livros. Isto justifica a diferença entre a Organização Didática desta coleção e a Organização Didática da coleção “Tudo é matemática” proposta para ser trabalhada no Ensino Fundamental de 5ª à 8ª série.

Analisando como se desenvolve a Organização Didática nos livros, segundo os momentos didáticos descritos na Teoria Antropológica do Didático, percebemos que em relação ao primeiro momento, há uma predominância em abordar os conceitos relativos ao objeto triângulo colocando o aluno como leitor e observador. Isso acontece via leitura dos títulos das sessões dos capítulos e do enunciado dos exercícios propostos ou resolvidos.

O segundo momento, ou seja, o momento da exploração da tarefa e da emergência da técnica, em geral, se apresenta no contexto de uma situação problema sob um texto explicativo. Dessa forma, o aluno tem um papel de expectador, a ele cabe apenas ler, interpretar e compreender os textos que apresentam o resultado teórico.

De maneira geral os livros apresentam a construção do bloco tecnológico-teoríco articulado ao momento da emergência da técnica. Do total de 21 tarefas, apenas seis o autor do livro propõe que a construção do bloco tecnológico-teórico seja feita com a participação do aluno. Identificamos essa abordagem nas seguintes tarefas:

- Ensinar a classificação dos triângulos quanto aos ângulos. (livro A)
- Ensinar que em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. (livro A e B)
- Ensinar a proporcionalidade em triângulos retângulos com ângulo de 30º. (livro A)
- Ensinar o triângulo de ouro ou também chamado de triângulo sublime. (livro A)
- Ensinar o Teorema de Pitágoras. (livro A)
- Ensinar a desigualdade triangular. (livro A)

Ressaltamos que a participação do aluno na construção do bloco tecnológico-teórico nestas tarefas consiste na resolução de questões propostas. Deste modo, o aluno deixa de ser um mero expectador e passa a ser ator no processo de ensino-aprendizagem. Interessante destacar que das seis tarefas, duas permitem que o aluno investigue e faça conjecturas:

- Ensinar a classificação dos triângulos quanto aos ângulos. (livro A)
- Ensinar o Teorema de Pitágoras. (livro A)

Assim, o 3º momento, em geral, nos livros didáticos, é apresentado aos alunos e não construído com a participação destes e, novamente o aluno é um expectador no processo de ensino.

O quarto momento é o momento da institucionalização que tem por objetivo precisar os elementos teóricos, ou seja, é o momento de oficializar o novo conhecimento. Nos livros analisados a institucionalização do resultado teórico foi formulada em destaque e sempre que necessário além da linguagem natural os autores complementavam com a linguagem figural e simbólica.

O quinto momento é aquele do trabalho da técnica, ou seja, é o momento de testar as técnicas criadas. Já o sexto momento, na prática, é o momento que se deve refletir se o que foi proposto como objeto de ensino foi aprendido.

Na análise dos livros nós consideramos que o quinto e o sexto momento estavam sempre articulados, pois como nosso trabalho se propôs somente analisar os livros didáticos, não tínhamos como avaliar se a maneira como foram abordados os conteúdos permitia a aprendizagem dos mesmos.

Assim, em nosso estudo, o quinto e o sexto momento dão origem à Organização Matemática e, tem por objetivo verificar a confiabilidade da tecnologia, ou seja, objetiva ver se o bloco teórico dá conta de realizar as tarefas da Organização Matemática.

A Organização Matemática identificada no livro “Tudo é matemática” é composta por 49 tarefas as quais se desdobram em subtarefas, totalizando 72 exercícios. Já a Organização Matemática identificada no livro “Matemática para todos” é composta por 9 tarefas, as quais se desdobram em subtarefas totalizando 32 exercícios. Pela quantidade de exercícios propostos relativo a cada tarefa, identificamos que o autor do livro A distribui igualmente a quantidade de exercícios por tipo de tarefa. Porém, não podemos afirmar o mesmo para o livro B. Isto indica que o livro A têm uma boa distribuição dos conteúdos trabalhados, enquanto que o livro B dá uma ênfase maior a um determinado tipo de tarefa.

Para realizar as tarefas da Organização Matemática, ou seja, para situações problemas propostas, faz-se necessário utilizar resultados teóricos que tiveram lugar como objeto de estudo em situações anteriores. Assim, para dar conta de responder as tarefas matemáticas propostas pelos livros analisados é necessário mobilizar os resultados teóricos que foram estudados anteriormente, seja no mesmo livro didático ou em outros livros da coleção.

Em conclusão:

Este estudo nos permitiu visualizar a Organização Didática e a Organização Matemática relativa ao objeto triângulo na 7ª série do Ensino Fundamental. Levou-nos a evidenciar as inúmeras propriedades sobre o triângulo que tem lugar neste nível de ensino.

Porém sabemos que nosso estudo é parcial e são muitas as questões que nos inquietam e incitam novos estudos. Entre elas, destacamos:

- as tarefas da Organização Didática que estão no livro A, mas não estão no livro B, se fazem presentes em outras volumes da coleção?
- em classe, como o professor realiza seu trabalho tomando como referencia a organização didática proposta pelo autor do livro?
- como acontece a aprendizagem dos alunos de acordo com a organização didática e matemática presente nos livros didáticos analisados?

Referências

ABBOTT, P. *Geometria.- Aprende Tú Solo.* Ediciones Pirámide, S. A. Madrid, 1991.

ARAUJO, V. Paulo. *Curso de Geometria*. Lisboa: Gradiva, 2ª ed., 1999.

BARBOSA, M. L. João. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do professor de Matemática – SBM, 1995.

BIGODE, A. J. L.: Matemática Hoje é Feita Assim. 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries. FTD, São Paulo, 2002.

BOSCH, M. GASCÓN,J. *Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.* Porto Alegre: Artmed, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria do Ensino Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais – matemática.* Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação E do Desporto/Secretaria do Ensino Médio. *Parâmetros curriculares nacionais – matemática.* Brasília: MEC/ SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. *Guia de Livros Didáticos 2005: v.3: Matemática*. Secretaria de Educação Infantil e Fundamental, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. *Guia de Livros Didáticos 2008: v.3: Matemática*. Secretaria de Educação Infantil e Fundamental, 2007.

CHEVALLARD, Y. *La Transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* France: La pensée sauvage, 1991.

_____. *De l'ecologie et de l'economie d'un système didactique.* Cours de Michèle Artaud, Creshsto, Orléans, 1997.

_____. *Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique.* Recherches in Didactique des Mathématiques, vol 12, nº 1, pp.73-112, 1992.

_____. *L'Analyse de Des pratiques Enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique, 1999.*

_____. *La Problématique Écologique, un Style D'Approche du Didactique, 1997.*

_____. *Concepts Fondamentaux de la Didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, 1992.*

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática.* São Paulo: Summus, 1986.

_____. *Etnomatemática: raízes sócio-culturais da arte ou técnica de explicar e conhecer*. Campinas: UNICAMP, 1987.

DANTE, L. R.*: tudo é matemática 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries.*São Paulo: Editora Ática,2002.

DOUADY, R. *"A Universidade e a Didática da Matemática: Os IREM na França"*. In: Caderno da RPM .Sociedade Brasileira de Matemática. vol.1, nº.1, p.01-22, SP 1990.

GERDES, P.,CHERINDA, M. *Teoremas famosos da Geometria*. Instituto Superior Pedagógico, 1991.

GIOVANNI, J. R. & Giovanni Jr.: matemática pensar e descobrir: o + novo. 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries. FTD. São Paulo, 2002.

IMENES,L. M. *Matemática para todos: 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries*. São Paulo: Scipione,2002.

LIMA, L. E. et al . *Temas e Problemas*. Coleção do Professor de Matemática. SBM. Rio de Janeiro, 1991.

LIMA, L. Elon. et al . *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Coleção do Professor de Matemática. SBM. Rio de Janeiro, 2001.

LOPES, Luís. *Manuel de Trigonométrie*. QED Texte. Boucherville, Québec, 1992.

LOPES, Luís. *Manuel de Construction de Triangles*. QED Texte. Boucherville, Québec, 1996.

MENSSOURI D. *Essai de délimitation em termes de problématiques dês effets de contrat et de transposition: lês cãs de relations entre droites et équations dans lês classes de second et Première*. Thèse. Grenoble: Université Joseph Fourier. (1994)

MINAYO, Maria Cecília de Souza. Pesquisa social. *Teoria método e criatividade.* Petrópolis: Vozes,1998.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.* Belo horizonte: 2 ed. Autêntica, 2002

PAVANELLO, Regina Mª. Artigo1. Revista Zetetiké. Ano 1, nº1, março 1993.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo.Sociedade Brasileira de Matemática, volumes: 02 (1983), 11 (1987), 12 (1988), 14 (1989), 16 (1990), 17 (1990), 22 (1992), 36 (1998) e 43 (2000).

REVISTA DA OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA. UFSC. Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. nº 1 .Florianópolis, 2004.

SANTA CATARINA, Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. *Proposta Curricular de Santa Catarina: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio: Disciplinas curriculares*. – Florianópolis: COGEN,1998

SERRÃO, N. Alberto. *Exercícios e Problemas de Geometria no Plano*. Rio de Janeiro: Livro técnico S. A., 1967.

Anexos

ANEXO – 1

Tarefa T_1: Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo.

$t_{1,1}$ – Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo conhecendo a medida de dois ângulos desse triângulo.			***Quantidade de Exercícios***
			04
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Se o triângulo ABC tem $\hat{A}$ de 47º e $\hat{B}$ de 103º, qual é a medida do $\hat{C}$? (exercício 11 - a), pág. 134)	$47+103+x=180$ $x=180-150$ $x=30$ Logo a medida do ângulo $\hat{C}$ é 30^o.	Aplicação da propriedade 1. Substituição dos valores dados no exercício na propriedade 1.	Propriedade 1 $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$
$t_{1,2}$ – Calcular a medida dos ângulos internos de um triângulo sabendo que os três ângulos internos de um triângulo são congruentes (de medidas iguais).			***Quantidade de Exercícios***
			01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Se os três ângulos internos de um triângulo são congruentes (de medidas iguais), qual é a medida de cada um? (exercício 11 – b), pág. 134)	$x+x+x=180$ $3x=180$ $x=60$ Logo a medida de cada ângulo é 60^o.	Aplicação da propriedade 1. Substituição da letra *x* na propriedade 1.	Propriedade 1 $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$

ANEXO – 2

Tarefa T_2: Determinar a existência de um triângulo.

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">t$t_{2,1}$– Determinar se existe um triângulo com dois ângulos internos obtusos e um ângulo agudo.</td><td>Quantidade de Exercícios</td></tr>
<tr><td>01</td></tr>
<tr><td>Exemplo</td><td>Resolução</td><td>Técnica</td><td>Tecnologia</td></tr>
<tr><td>Existe um triângulo com dois angulos internos obtusos e um agudo? Justifique sua resposta.

(exercício 13, pág. 134)</td><td>Não, pois só a soma dos dois ângulos obtusos é maior do que 180º.</td><td>Aplicação da definição 2.
Aplicação da propriedade 1.</td><td>Definição 1

“Um ângulo é agudo quando sua medida é menor do que 90º.”

Definição 2

“Um ângulo é obtuso quando sua medida é maior do que 90º.”

Propriedade 1

$m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$</td></tr>
</table>

ANEXO – 3

Tarefa $T_{6\pi 2}$: Ensinar quais os possíveis tipos de triângulo quanto aos ângulos.

Ensinar quais os possíveis tipos de triângulo quanto aos ângulos			***Quantidade de Exercícios***
			01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Quais os possíveis tipos de triângulo quanto aos ângulos? Escreva o nome de cada um, como são seus ângulos e dê um exemplo. (exercício 14, pág. 134)	Triângulo acutângulo: quando têm os três ângulos agudos. Exemplo: um triângulo com os ângulos iguais a 60º, 70º e 50º. Triângulo obtusângulo: quando tem um ângulo obtuso e os outro dois ângulos agudos. Exemplo: um triângulo com os ângulos iguais a 100º, 30º e 50º. Triângulo retângulo: quando tem um ângulo reto/ângulo de 90° e os outros dois ângulos agudos Exemplo: um triângulo com os ângulos iguais a 90º, 30º e 60º.	Aplicação da definição 3 e da propriedade 1. Aplicação da definição 4 e da propriedade 1. Aplicação da definição 5 e da propriedade 1.	DEFINIÇÃO 3 “Um triângulo é chamado do acutângulo quando tem os três ângulos agudos”. DEFINIÇÃO 4 “Um triângulo é chamado do obtusângulo quando tem um ângulo obtuso e os outro dois ângulos agudos”. DEFINIÇÃO 5 “Um triângulo é retângulo quando tem um ângulo reto/ângulo de 90° e os outros dois ângulos agudos”. PROPRIEDADE 1 $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$

ANEXO – 4

Tarefa T_1: Calcular a medida do ângulo externo y do triângulo.

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">t$t_{1,1}$ – Observar a figura e calcular o valor do ângulo externo y.</td><td>Quantidade de Exercícios</td></tr>
<tr><td>01</td></tr>
<tr><td>Exemplo</td><td>Resolução</td><td>Técnica</td><td>Tecnologia</td></tr>
<tr><td>Observe esta figura e calcule o valor de y.


(exercício 18, pág. 135)</td><td>$158^\circ + x = 180^\circ$
$x = 22^\circ$

$y = x + 15^\circ$
$y = 37^\circ$

A medida do ângulo y é 37º.</td><td>Aplicação da propriedade 2.

Aplicação da propriedade 3.

Aplicação da propriedade 4.</td><td>PROPRIEDADE 2

“A soma de dois ângulos adjacentes e suplementares é 180º”.

PROPRIEDADE 3

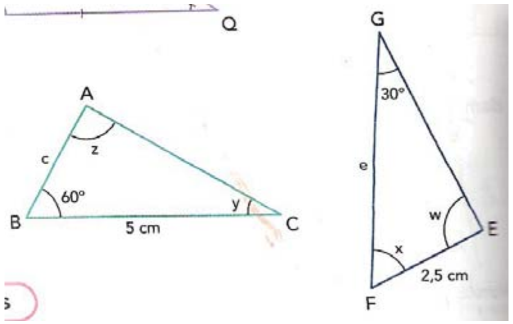
“Ângulos opostos pelo vértice são iguais”

PROPRIEDADE 4

“Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não–adjacentes a ele.”</td></tr>
</table>

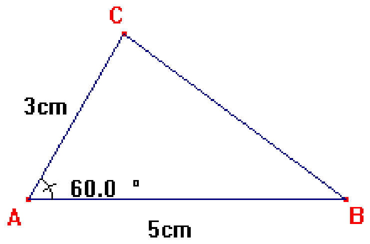
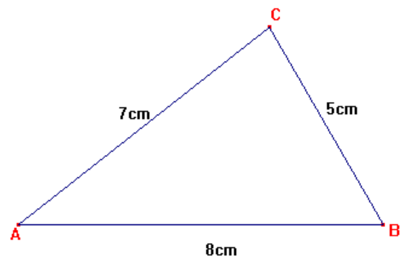
ANEXO – 5

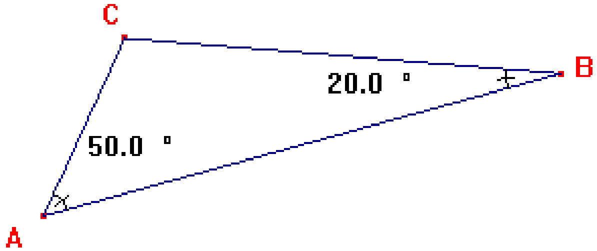
TAREFA T_1 – Encontrar as medidas dos lados e os ângulos correspondentes de dois triângulos congruentes dados.

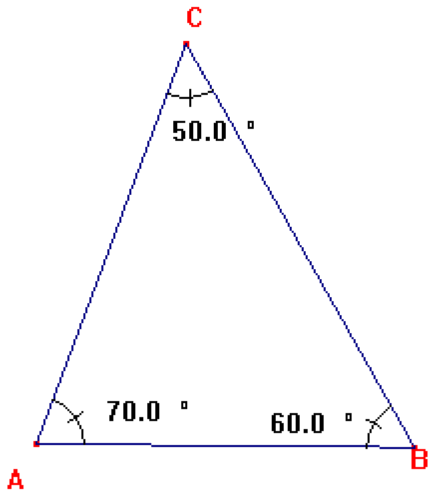
$t_{1,1}$ – Encontrar as medidas dos lados e os ângulos correspondentes de dois triângulos congruentes dados.			***Quantidade de Exercícios*** 01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Os triângulos ABC e EFG representados ao lado são congruentes $(\triangle ABC \cong \triangle EFG)$. Determine em seu caderno as medidas assinaladas por letras.  (exercício 31, pág. 140)	$c = 2{,}5cm$; $e = 5{,}0cm$; $x = 60^\circ$; $y = 30^\circ$; $z = w$; $60^\circ + 30^\circ + z = 180^\circ$ $z = 90^\circ$ $Logo \Rightarrow w = 90^\circ$.	Aplicação da propriedade 8, 6 e 7 simultaneamente. Aplicação da propriedade 1.	PROPRIEDADE 8 "A congruência dos dois triângulos determina a congruência dos seis elementos. E, a congruência de seis elementos (três lados e três ângulos) determina a congruência dos dois triângulos". PROPRIEDADE 6 "Dois segmentos de reta são congruentes quando suas medidas são iguais. Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos de reta congruentes, indicamos: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$". PROPRIEDADE 7 "Dois ângulos são congruentes quando suas medidas são iguais. Se $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ são ângulos congruentes, indicamos: $\hat{P} \cong \hat{Q}$". PROPRIEDADE 1 "Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$".

ANEXO – 6

TAREFA T_1 – Construir um triângulo e depois comparar com os triângulos que os colegas construíram para verificar a congruência.

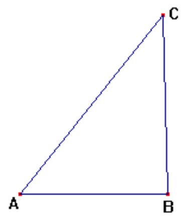
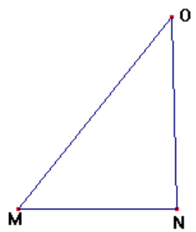
$t_{1,1}$ – Construir um triângulo usando régua e transferidor conhecendo dois lados do triângulo e um ângulo formado por esses lados.			***Quantidade de Exercícios*** 01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Use a régua e transferidor para construir um triângulo no qual um dos ângulos meça 60º e esse ângulo seja formado por lados de 5cm e 3cm. Depois, compare-o com os triângulos que seus colegas construíram e verifique se são congruentes. (exercício 32, pág. 141)		Desenhar o triângulo proposto com o uso da régua e do transferidor. Comparação dos triângulos entre os colegas. Aplicação da propriedade 9	Construção de triângulos com o uso de régua e transferidor. PROPRIEDADE 9 "Se dois lados dos triângulos forem congruentes e o ângulo formado por eles também for congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LAL"
$t_{1,2}$ – Construir um triângulo usando régua e compasso conhecendo os três lados desse triângulo.			***Quantidade de Exercícios*** 01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Use régua e compasso para construir em seu caderno um triângulo com lados de 8 cm, 5 cm e 7 cm. Compare-o com os triângulos que seus colegas construíram e verifique se todos são congruentes. (exercício 33, pág. 141)		Desenhar o triângulo proposto com o uso da régua e do compasso. Comparação dos triângulos entre os colegas. Aplicação da propriedade 10	Construção de triângulos com o uso de régua e compasso. PROPRIEDADE 10 "Se três lados dos triângulos são congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LLL"

$t_{1,3}$ – **Construir um triângulo usando régua e transferidor conhecendo um lado compreendido entre dois ângulos.**			*Quantidade de Exercícios* 01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Construa um triângulo com um lado de 7cm compreendido entre ângulos de 50º e 20º. Depois, compare-o com os triângulos que seus colegas construíram. (exercício 34, pág. 142)		Desenhar o triângulo proposto com o uso da régua e do transferidor. Comparação dos triângulos entre os colegas. Aplicação da propriedade 11	Construção de triângulos com o uso de régua e transferidor. PROPRIEDADE 11 “Se dois ângulos são congruentes e o lado compreendido entre eles também é congruente, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - ALA”

$t_{1,4}$ – **Construir um triângulo usando régua, transferidor e compasso conhecendo um lado e dois ângulos.**			***Quantidade de Exercícios*** 01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Construa um triângulo ABC no qual $m(\overline{AB}) = 5\,cm$, $m(\hat{A}) = 70^\circ$ e $m(\hat{C}) = 50^\circ$. (exercício 35, pág. 142)		Desenhar o triângulo proposto com o uso da régua e do compasso. Comparação dos triângulos entre os colegas. Aplicação da propriedade 12	Construção de triângulos com o uso de régua transferidor e compasso. PROPRIEDADE 12 “Se dois triângulos têm dois lados congruentes e um ângulo adjacente e o ângulo a esse lado também congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência – LAA_0”

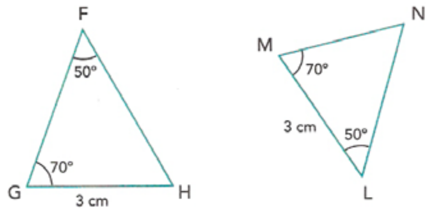
ANEXO – 7

TAREFA T_3 – Verificar se é possível afirmar que os triângulos são congruentes destacando o tipo de congruência e quais os congruentes.

$t_{3,1}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando for dado dois triângulos com dois lados congruentes compreendidos entre dois ângulos também congruentes.			***Quantidade de Exercícios*** 01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
O triângulo *ABC* e o triângulo *MNO* têm $\overline{AC} \cong \overline{MO}, \hat{A} \cong \hat{M}$ e $\hat{C} \cong \hat{O}$. Verifique se os triângulos são congruentes justificando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes.[55] (exercício 36-a, pág. 142)	  Podemos afirmar que o $\triangle$ABC$\cong$ $\triangle$MNO (caso ALA). Assim, os demais elementos são congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{MN}$, $\overline{BC} \cong \overline{NO}$ e $\hat{B} \cong \hat{N}$.	Desenhar o triângulo proposto com o uso da régua e do transferidor. Identificar os elementos congruentes dados no enunciado. Verificar qual tipo de congruência se encaixa nesse exercício Aplicação da propriedade 11 Identificar os demais elementos congruentes	Construção de triângulos com o uso de régua e transferidor. PROPRIEDADE 11 "Se dois ângulos são congruentes e o lado compreendido entre eles também é congruente, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - ALA"

[55] Esse exercício é apresentado no livro didático resolvido. O autor do livro sugere ao leitor que estude este exercício e resolva os demais. Convém ressaltar que no enunciado do exercício o autor orienta o professor para que o mesmo solicite aos alunos para na hora da resolução dos exercícios sempre fazerem um esboço com figuras para maior visualização.

TAREFA T_3 - Verificar se é possível afirmar que os triângulos são congruentes destacando o tipo de congruência e quais os congruentes.

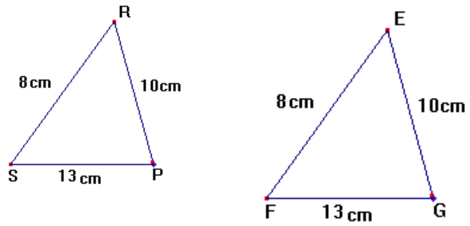
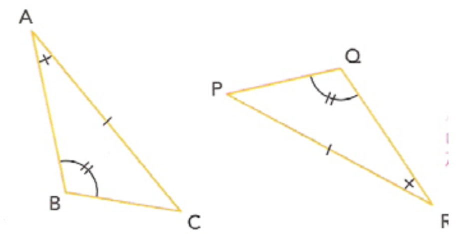
$t_{3,2}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando for dado dois triângulos com um lado congruente e dois ângulos também congruentes.			***Quantidade de Exercícios***
			01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
 Verifique se os triângulos são congruentes justificando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes.[56] (exercício 36-b, pág. 143)	Não podemos garantir a congruência desses dois triângulos. Sabemos que são congruentes um lado e dois ângulos, mas isso não corresponde ao caso ALA nem ao caso LAA_0. Analise essa afirmação com seus colegas.	Identificar os elementos congruentes dados no enunciado. Verificar qual tipo de congruência se encaixa ou não no exercício.	PROPRIEDADE 11 “Se dois ângulos são congruentes e o lado compreendido entre eles também é congruente, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - ALA” PROPRIEDADE 12 “Se dois triângulos têm dois lados congruentes e um ângulo adjacente e o ângulo a esse lado também congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência – LAA_0”

[56] Esse exercício é apresentado no livro didático resolvido.

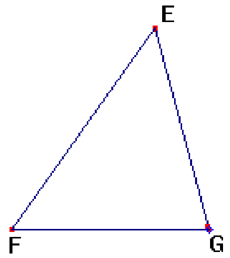
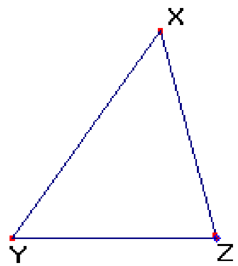
TAREFA T_3 - Verificar se é possível afirmar que os triângulos são congruentes destacando o tipo de congruência e quais os congruentes.

<table>
<tr><td colspan="3">$t_{3,3}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando for dado três ângulos.</td><td>Quantidade de Exercícios
01</td></tr>
<tr><td>Exemplo</td><td>Resolução</td><td>Técnica</td><td>Tecnologia</td></tr>
<tr><td>O triângulo PQR tem ângulos 75º, 90º e 15º. O triângulo XYZ tem ângulos 75º, 90º e 15º. Verifique se os triângulos são congruentes justificando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes.
(exercício 36-c, pág. 143)</td><td>Neste caso não podemos garantir a congruência dos triângulos, pois eles podem ter os mesmos ângulos, mas os lados podem não ser congruentes.</td><td>Desenhar os triângulos propostos com o uso da régua e do transferidor, se achar necessário.
Identificar os elementos congruentes dados no enunciado.
Visualização e comparação dos triângulos.
Verificar qual tipo de congruência se encaixa nesse exercício
Aplicação das propriedades de congruência verificando se alguma delas se encaixam nesse caso.</td><td>Construção de triângulos com o uso de régua e do transferidor.
PROPRIEDADE 9
“Se dois lados dos triângulos forem congruentes e o ângulo formado por eles também for congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LAL”
PROPRIEDADE 10
“Se três lados dos triângulos são congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LLL”
PROPRIEDADE 11
“Se dois ângulos são congruentes e o lado compreendido entre eles também é congruente, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - ALA”
PROPRIEDADE 12
“Se dois triângulos têm dois lados congruentes e um ângulo adjacente e o ângulo a esse lado também congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência – LAA_0”</td></tr>
</table>

TAREFA T_3 - Verificar se é possível afirmar que os triângulos são congruentes destacando o tipo de congruência e quais os congruentes.

$t_{3,4}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando for dado três lados.			***Quantidade de Exercícios*** 01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Os lados do $\triangle$ RSP medem $\overline{RS}: 8cm$, $\overline{RP}: 10cm$ e $\overline{SP}: 13cm$. Os lados do triângulo EFG medem $\overline{EG}: 10cm$, $\overline{FG}: 13cm$ e $\overline{EF}: 8cm$. (exercício 36-d, pág. 143)	 Podemos afirmar que os triângulos dados são congruentes (caso LLL). Os demais elementos congruentes são: $\hat{R} \cong \hat{E}$, $\hat{S} \cong \hat{F}$ e $\hat{P} \cong \hat{G}$.	Desenhar os triângulos propostos com o uso da régua e do compasso. (se achar necessário) Identificar os elementos congruentes dados no enunciado. Visualização e comparação dos triângulos. Verificar qual tipo de congruência se encaixa nesse exercício Aplicação da propriedade 10.	Construção de triângulos com o uso de régua e do compasso. PROPRIEDADE 10 “Se três lados dos triângulos são congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LLL”
$t_{3,5}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando for dado a figura de dois triângulos.			***Quantidade de Exercícios*** 02
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	**Tecnologia**
 (exercício 36-e, pág. 143)	Podemos afirmar que os triângulos dados são congruentes (caso LLL). Os demais elementos congruentes são:	Identificar os elementos congruentes dados no enunciado. Visualização e comparação dos triângulos. Verificar qual tipo de congruência se encaixa nesse caso Aplicação da propriedade 12.	PROPRIEDADE 12 “Se dois triângulos têm dois lados congruentes e um ângulo adjacente e o ângulo a esse lado também congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência – LAA_0”

TAREFA T_3 - Verificar se é possível afirmar que os triângulos são congruentes destacando o tipo de congruência e quais os congruentes.

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">$t_{3,6}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando for dado dois lados e um ângulo.</td><td>Quantidade de Exercícios</td></tr>
<tr><td>02</td></tr>
<tr><td>Exemplo</td><td>Resolução</td><td>Técnica</td><td>Tecnologia</td></tr>
<tr><td>O $\triangle$ EFG e $\triangle$ XYZ são tal que $\overline{EF} \cong \overline{XY}$, $\overline{EG} \cong \overline{XZ}$ e $\hat{F} \cong \hat{Y}$.
(exercício 36-f, pág. 143)</td><td>

Neste caso, não podemos garantir a congruência dos triângulos, pois não se encaixa em nenhum tipo dos casos de congruência aprendidos.</td><td>Desenhar os triângulos propostos com o uso da régua e do transferidor.

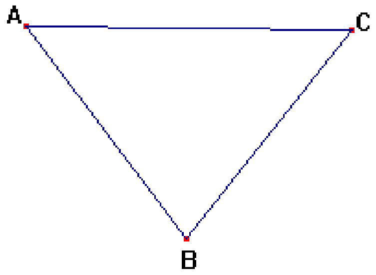
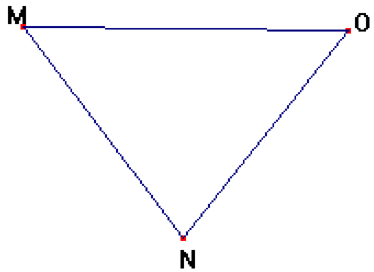
Identificar os elementos congruentes dados no enunciado.

Visualização e comparação dos triângulos.

Verificar se algum caso de congruência se encaixa nesse exercício.</td><td>Construção de triângulos com o uso de régua e do transferidor.

PROPRIEDADE 9
“Se dois lados dos triângulos forem congruentes e o ângulo formado por eles também for congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LAL”
PROPRIEDADE 10
“Se três lados dos triângulos são congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LLL”
PROPRIEDADE 11
“Se dois ângulos são congruentes e o lado compreendido entre eles também é congruente, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - ALA”
PROPRIEDADE 12
“Se dois triângulos têm dois lados congruentes e um ângulo adjacente e o ângulo a esse lado também congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência – LAA_0”</td></tr>
</table>

TAREFA T_3 - Verificar se é possível afirmar que os triângulos são congruentes destacando o tipo de congruência e quais os congruentes.

$t_{3,7}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando os triângulos forem isósceles.			***Quantidade de Exercícios*** 01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
O $\triangle$ABC é isósceles de 20 cm de perímetro e $\triangle$ MNO é isósceles de 20 cm de perímetro (exercício 36-i, pág. 143)	  Não podemos afirmar que os triângulos dados são congruentes, pois um pode ter lados de 9cm, 9cm e 2cm e o outro lados de 6cm, 6cm e 8 cm.	Desenhar os triângulos propostos com o uso da régua e do compasso. Identificar os elementos congruentes dados no enunciado. Visualização e comparação dos triângulos. Verificar se algum caso de congruência se encaixa nesse exercício.	Construção de triângulos com o uso de régua e do compasso. PROPRIEDADE 9 “Se dois lados dos triângulos forem congruentes e o ângulo formado por eles também for congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LAL” PROPRIEDADE 10 “Se três lados dos triângulos são congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LLL” PROPRIEDADE 11 “Se dois ângulos são congruentes e o lado compreendido entre eles também é congruente, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - ALA” PROPRIEDADE 12 “Se dois triângulos têm dois lados congruentes e um ângulo adjacente e o ângulo a esse lado também congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência – LAA_0”

TAREFA T_3 - Verificar se é possível afirmar que os triângulos são congruentes destacando o tipo de congruência e quais os congruentes.

$t_{3,8}$ – Verificar se os triângulos são congruentes, destacando o tipo de congruência e quais os demais elementos congruentes quando os triângulos forem eqüiláteros.			***Quantidade de Exercícios***
			02
Exemplo	***Resolução***	***Exemplo***	***Tecnologia***
O $\triangle$EFG é equilátero com 12 cm de perímetro e $\triangle$ PQR é equilátero com 12 cm de perímetro (exercício 36-j, pág. 143)	Podemos afirmar que os triângulos dados são congruentes (caso LLL). Ambos têm lados de 4cm, 4cm e 4cm.	Identificar os elementos congruentes dados no enunciado. Visualização e comparação dos triângulos, caso tenha feito a construção. Verificar qual tipo de congruência se encaixa nesse caso Aplicação da propriedade 10.	Construção de triângulos com o uso de régua e do compasso, se achar necessário. PROPRIEDADE 10 "Se três lados dos triângulos são congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LLL"

ANEXO – 8

TAREFA T_1 - Determinar a medida dos outros dois ângulos do triângulo, quando for dado a medida de um ângulo do triângulo isósceles.

$t_{1,1}$ – **Determinar a medida dos outros dois ângulos do triângulo, quando for dado a medida de um ângulo do triângulo isósceles.**[57]			***Quantidade de Exercícios*** 03
Exemplo 1	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Em um triângulo ABC isósceles, temos $m(\hat{A})=110°$. Determine $m(\hat{B})$ e $m(\hat{C})$ e responda em seu caderno: quais são os lados congruentes desse triângulo? (exercício 42, pág. 145)	$110+x+x=180$ $2x=180-110$ $x=35$ Como o triângulo ABC é isósceles, a $m(\hat{B})=m(\hat{C})=35°$. Os lados congruentes do triângulo ABC são: $\overline{AB}\cong\overline{AC}$.	Figura de estudo (se achar necessário) Aplicação da propriedade 1 Substituição dos valores na propriedade 1. Aplicação da propriedade 13	PROPRIEDADE 1 “Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180°$”. PROPRIEDADE 13 “Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes”.
Exemplo 2	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Se um dos ângulos internos de um triângulo isósceles mede 120º, quanto medem os três ângulos internos desse triângulo? (exercício 52-e, pág. 149)	$120+x+x=180$ $2x=180-120$ $x=60$ Como o triângulo é isósceles, a medida dos ângulos da base é congruente, ou seja, a medida dos outros dois ângulos é 30º. Assim a medida dos ângulos são: 120º, 30º e 30º.	Aplicação da propriedade 1 Substituição dos valores na propriedade 1. Aplicação da propriedade 13	PROPRIEDADE 1 “Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180°$”. PROPRIEDADE 13 “Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes”.

[57] Observa-se que para resolver essa tarefa necessita-se de outros conhecimentos, ou seja, saber apenas aplicar $T_{6\pi6}$ não é suficiente para resolver essa tarefa. Necessitamos conhecer a tarefa $T_{6\pi1}$ e articular com $T_{6\pi6}$ para responder corretamente. Podemos afirmar que o mesmo exercício pode ser elencado em diferentes tarefas matemáticas quando para sua resolução necessita conhecer mais de um tipo de tecnologia.

TAREFA T_1 - Determinar a medida dos outros dois ângulos do triângulo, quando for dado a medida de um ângulo do triângulo isósceles.

Exemplo 3	*Resolução*	*Técnica*	*Tecnologia*
Em um triângulo isósceles, um dos ângulos internos mede 80º. Quais são as medidas dos três ângulos internos? (exercício 52-d, pág. 148)	$80+x+x=180$ $2x=180-80$ $x=100$ Como o triângulo é isósceles, a medida dos ângulos da base é congruente, ou seja, a medida dos outros dois ângulos é 50º. Assim a medida dos ângulos são: 80º, 50º e 50º. Mas poderia ser assim: $80+80+x=180$ $x=180-160$ $x=20$ Como o triângulo é isósceles, a medida dos ângulos da base é congruente e igual a 80º. Assim a medida do outro ângulo é 20º. Logo a medida dos ângulos são: 80º, 80º e 20º.	Aplicação da propriedade 1 Substituição dos valores na propriedade 1 Aplicação da propriedade 13	PROPRIEDADE 1 "Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$ ". PROPRIEDADE 13 "Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes".

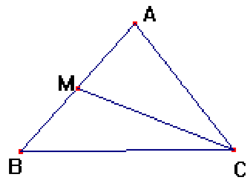
Nos exemplos 2 e 3 da tarefa T_1 é dado um ângulo do triângulo isósceles e solicita-se a medida dos outros ângulos desse triângulo. Porém, é importante notar que no exemplo 2 o ângulo dado é obtuso, logo os outros dois outros ângulos devem ser agudos e são os ângulos da base. Mas no exemplo 3 o ângulo dado é agudo e portanto é necessário fazer duas considerações, quando este ângulo for o ângulo da base do triângulo isósceles e quando ele não for o ângulo da base do triângulo isósceles. Geralmente nesse exercício os alunos esquecem de uma das duas possibilidades.

ANEXO – 9

TAREFA T_1 - Construir um triângulo, conhecendo a medida dos três lados, e traçar uma mediana desse triângulo.

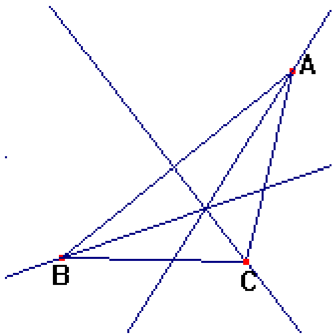
TAREFA T_2 – Responder quantas medianas possui um triângulo.

TAREFA T_3 – Construir um triângulo, conhecendo a medida de um lado entre dois ângulos também dados, e traçar a bissetriz desse triângulo.

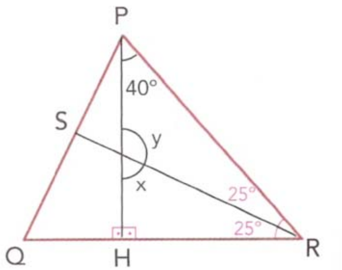
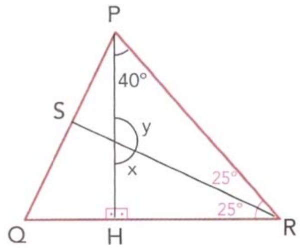
T_1 – Construir um triângulo, conhecendo a medida dos três lados, e traçar uma mediana desse triângulo.			***Quantidade de Exercícios***
			01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Construa em seu caderno um triângulo ABC no qual $m(\overline{AB}) = 6$ cm, $m(\overline{AC}) = 4$ cm e $m(\overline{BC}) = 3$ cm. Em seguida, trace a mediana $\overline{CM}$ desse triângulo. (exercício 47, pág. 146)		Construção do triângulo com régua e compasso. Aplicação da propriedade 14	PROPRIEDADE 14 “Mediana de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice”.
T_2 – Responder quantas medianas possui um triângulo.			***Quantidade de Exercícios***
			01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Quantas medianas possui um triângulo? Converse com um colega e tentem descobrir. (exercício trocando idéias, pág. 146)	Como o triângulo tem três vértices e a mediana é o segmento que sai do vértice até o ponto médio do lado oposto a este vértice. Então cada triângulo possui três medianas.	Diálogo Aplicação da propriedade 14	PROPRIEDADE 14 “Mediana de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice”.
T_3 - Construir um triângulo, conhecendo a medida de um lado entre dois ângulos também dados, e traçar a bissetriz desse triângulo.			***Quantidade de Exercícios***
			01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	**Tecnologia**
Construa em seu caderno com régua e transferidor um triângulo ABC no qual $m(\overline{AB}) = 6$ cm, $m(\hat{A}) = 50^\circ$ e $m(\hat{B}) = 70^\circ$. Em seguida, trace a bissetriz $\overline{BS}$ desse triângulo. (exercício 48, pág. 147)		Construção do triângulo com régua e transferidor. Aplicação da propriedade 15	PROPRIEDADE 15 “A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice”.

TAREFA T_4 - Responder quantas bissetrizes há em um triângulo.

TAREFA T_5 - Observar as figuras e conversar com os colegas sobre a posição das três alturas em cada triângulo. Descobrir em que situações acontece cada caso.

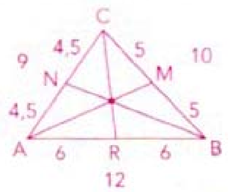
T_4 – Responder quantas bissetrizes há em um triângulo.			***Quantidade de Exercícios***
			01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Converse com um colega e respondam: quantas bissetrizes há em um triângulo? (exercício trocando idéias, pág. 147)		Diálogo Aplicação da propriedade 15	PROPRIEDADE 15 “A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice”.
T_5 – Observar as figuras e conversar com os colegas sobre a posição das três alturas em cada triângulo. Descobrir em que situações acontece cada caso.			***Quantidade de Exercícios***
			01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Todo triângulo possui três alturas. Observe as figuras abaixo e converse com os colegas sobre a posição das três alturas em cada triângulo. Descubram em que situações acontece cada caso. Considerem os triângulos em rosa e as alturas h_1, h_2, e h_3. (exercício trocando idéias, pág. 147)	DESENHO Nos triângulos acutângulos: as três alturas ficam no interior da região triangular. Nos triângulos retângulos: duas alturas são lados do triângulo e a outra fica no interior da região triangular. Nos triângulos obtusângulos: duas alturas ficam fora da região triangular e uma dentro. Em todos os triângulos: as três alturas ou seus prolongamentos cruzam-se em um único ponto.	Diálogo Aplicação da propriedade 14	PROPRIEDADE 16 “A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos”.

TAREFA T_6 - Calcular o valor dos ângulos x e y de um triângulo, conhecendo uma bissetriz e/ou uma altura desse triângulo e conhecendo a medida de outros ângulos desse triângulo.

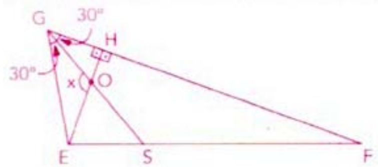
T_6 – Calcular o valor dos ângulos x e y de um triângulo, conhecendo uma bissetriz e/ou uma altura desse triângulo e conhecendo a medida de outros ângulos desse triângulo.			***Quantidade de Exercícios***
			03
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Calcule o valor de x e y com base nas figuras e nas informações dadas. c) $\overline{PH}$ é uma altura do $\triangle PQR$. $\overline{RS}$ é uma bissetriz do $\triangle PQR$.  (exercício 49- c), pág. 148)	 Como $\overline{PH}$ é uma altura do triângulo PQR, logo forma um ângulo de 90º com o lado $\overline{QR}$. $40^\circ + 90^\circ = 130^\circ$ $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ \to \hat{R}$ $40^\circ + y + 25^\circ = 180^\circ$ $y = 115^\circ$ $y + x = 180^\circ$ $x = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$ Logo $y = 115^\circ$ e $x = 65^\circ$.	Aplicação da propriedade 16 no segmento $\overline{PH}$. Aplicação da propriedade 1 no triângulo PHR. Aplicação da propriedade 15 no ângulo R. Aplicação da propriedade 1 para encontrar o valor de y. Aplicação da propriedade 2 para encontrar o valor de x.	PROPRIEDADE 16 "A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos". PROPRIEDADE 1 "Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$". PROPRIEDADE 15 "A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice". PROPRIEDADE 2 "A soma de dois ângulos adjacentes e suplementares é 180º".

TAREFA T_7 - Determinar as medidas dos segmentos que cada mediana faz com cada lado. Conhecendo a medida dos três lados do triângulo e as medianas de cada lado.

TAREFA T_8 - Dado um triângulo EFG. O ângulo E mede 100º, o ângulo F mede 20º e sabendo que o ponto O é o encontro da altura $\overline{EH}$ com a bissetriz $\overline{GS}$ do triângulo. Determinar a medida do ângulo EOG.

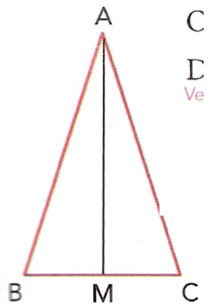
<table>
<tr><td colspan="3">T_7 – Determinar as medidas dos segmentos que cada mediana faz com cada lado. Conhecendo a medida dos três lados do triângulo e as medianas de cada lado.</td><td>Quantidade de Exercícios
01</td></tr>
<tr><td>Exemplo</td><td>Resolução</td><td>Técnica</td><td>Tecnologia</td></tr>
<tr><td>Em um triângulo ABC, temos $m(\overline{AB})=12$ cm, $m(\overline{AC})=9$ cm e $m(\overline{BC})=10$ cm. As medianas do triângulo ABC são: $\overline{AM}, \overline{BN}$ e $\overline{CR}$. Determine $m(\overline{BM}), m(\overline{RA})$ e $m(\overline{CN})$ e $m(\overline{MC})$.
(exercício 50, pág. 148)</td><td>

Logo temos:
$m(\overline{BM})=5$ cm; $m(\overline{RA})=6$ cm;
$m(\overline{CN})=4{,}5$ cm; $m(\overline{MC})=5$ cm.</td><td>Construção do triângulo com régua e compasso.
Aplicação da propriedade 14</td><td>PROPRIEDADE 14

“Mediana de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice”.</td></tr>
<tr><td colspan="3">T_8 – Dado um triângulo EFG. O ângulo E mede 100º, o ângulo F mede 20º e sabendo que o ponto O é o encontro da altura $\overline{EH}$ com a bissetriz $\overline{GS}$ do triângulo. Determinar a medida do ângulo EOG.</td><td>Quantidade de Exercícios
01</td></tr>
<tr><td>Exemplo</td><td>Resolução</td><td>Técnica</td><td>Tecnologia</td></tr>
<tr><td>Em um triângulo EFG, o $\hat{E}$ mede 100º e o $\hat{F}$ mede 20º. O Ponto O é o encontro da altura $\overline{EH}$ com a bissetriz $\overline{GS}$ do triângulo EFG. Determine a medida do ângulo $E\hat{O}G$.
(exercício 51, pág. 148)</td><td>

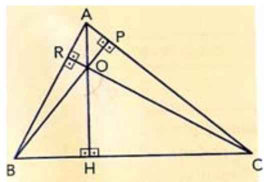
Seja x o ângulo $E\hat{O}G$.
A altura $\overline{EH}$ forma ângulos retos com o segmento $\overline{GF}$. A bissetriz $\overline{GS}$ divide o $\hat{G}$ ao meio e $\hat{G}=30^\circ$. Sabemos que $x=90^\circ+30^\circ=120^\circ$.</td><td>Construção do triângulo com régua e transferidor.
Aplicação da propriedade 16
Aplicação da propriedade 15
Aplicação da propriedade 4</td><td>PROPRIEDADE 16
“A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos”.
PROPRIEDADE 15
“A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice”.</td></tr>
</table>

TAREFA T_9 - Demonstrar que em todo triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.

T_9 – **Demonstrar que em todo triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.**			***Quantidade de Exercícios*** 01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
O triângulo da figura (triângulo ABC) é isósceles de base $\overline{BC}$ e o segmento $\overline{AM}$ é sua mediana. Demonstre que $\overline{AM}$ é também bissetriz e altura, ou seja, prove esta afirmação: Em todo triângulo isósceles, a med relativa à base é também bissetriz e alt  (exercício 53, pág. 149)	O triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$ e $\overline{AM}$ é a mediana. Considerando os triângulos AMB e AMC, temos: $\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (lado comum) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$) $\overline{BM} \cong \overline{CM}$ (M é ponto médio de $\overline{BC}$) Pelo caso LLL podemos afirmar que os triângulos ABM e ACM são congruentes. Dessa congruência, tiramos: - $B\hat{A}M \cong C\hat{A}M$, ou seja, $\overline{AM}$ é bissetriz do trianguIo ABC. - $B\hat{M}A \cong C\hat{M}A$, ou seja, $B\hat{M}A$ e $C\hat{M}A$ são retos, ou, ainda, $\overline{AM}$ é altura do triângulo ABC.	Tirar os dados do problema. Aplicação da propriedade 14 Aplicação da propriedade 8 Aplicação da propriedade 10 Aplicação da propriedade 15 Aplicação da propriedade 16	PROPRIEDADE 14 “Mediana de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice”. PROPRIEDADE 8 “A congruência dos dois triângulos determina a congruência dos seis elementos. E, a congruência de seis elementos (três lados e três ângulos) determina a congruência dos dois triângulos”. PROPRIEDADE 10 “Se três lados dos triângulos são congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LLL” PROPRIEDADE 15 “A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice”. PROPRIEDADE 16 “A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos”.

ANEXO – 10

TAREFA T_1 – Encontrar um dos ângulos formado pelo ortocentro do triângulo dado, conhecendo apenas dois ângulos desse triângulo.

T_1 – Encontrar um dos ângulos formado pelo ortocentro do triângulo dado, conhecendo apenas dois ângulos desse triângulo.			***Quantidade de Exercícios***
			01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
No triângulo ABC anterior, se $m(\hat{A}) = 77^\circ$ e $m(\hat{B}) = 56^\circ$, calcule $m(H\hat{O}C)$. (exercício 54, item a), pág. 150)	 No triângulo RBC conhecemos dois ângulos, logo podemos encontrar o outro ângulo: $90^\circ + 56^\circ + x = 180^\circ$ $x = 180^\circ - 146^\circ \Rightarrow x = 34^\circ$ No triângulo HOC, temos: $90^\circ + 34^\circ + y = 180^\circ$ $y = 180^\circ - 124^\circ \Rightarrow y = 56^\circ$ Logo, $y = m(H\hat{O}C) = 56^\circ$.	Construção do triângulo com régua e transferidor. Substituição dos valores dados no enunciado do exercício. Aplicação da propriedade 16 Aplicação da propriedade 17 Aplicação da propriedade 1	PROPRIEDADE 16 “A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos”. PROPRIEDADE 17 “Em todo triângulo, as três alturas ou seus prolongamentos cruzam-se em um mesmo ponto, chamado de ortocentro do triângulo” PROPRIEDADE 1 “Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$”.

T_2 – Construir um triângulo acutângulo, um retângulo e um obtusângulo e depois localizar o ortocentro.	***Quantidade de Exercícios***

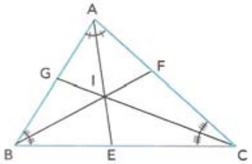
			01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Construa em seu caderno um triângulo acutângulo, um triângulo retângulo e um triângulo obtusângulo. Em cada um deles, localize o ortocentro usando régua e transferidor ou régua e esquadro. (exercício 54, item b), pág. 150)	DESENHO	Construção do triângulo com régua e transferidor ou régua e esquadro. Aplicação da propriedade 16 Aplicação da propriedade 17	PROPRIEDADE 16 "A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos". PROPRIEDADE 17 "Em todo triângulo, as três alturas ou seus prolongamentos cruzam-se em um mesmo ponto, chamado de ortocentro do triângulo"

TAREFA T_2 – Construir um triângulo acutângulo, um retângulo e um obtusângulo e depois localizar o ortocentro.

ANEXO – 11

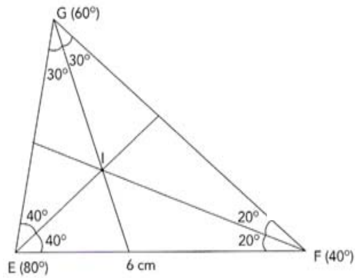
TAREFA T_1 – Encontrar um dos ângulos formado pelo incentro do triângulo dado, conhecendo apenas dois ângulos desse triângulo.

TAREFA T_2 – Localizar o incentro de um triângulo.

<table>
<tr><td colspan="3">T_1 – Encontrar um dos ângulos formado pelo ortocentro do triângulo dado, conhecendo apenas dois ângulos desse triângulo.</td><td>Quantidade de Exercícios
01</td></tr>
<tr><td>Exemplo</td><td>Resolução</td><td>Técnica</td><td>Tecnologia</td></tr>
<tr><td>No triângulo ABC anterior, se $m(\hat{A}) = 82^\circ$ e $m(\hat{B}) = 62^\circ$, calcule $m(B\hat{I}E)$.
(exercício 55, item a), pág. 150)</td><td>

No triângulo BAE, temos:
$62^\circ + 41^\circ + y = 180^\circ$
$y = 180^\circ - 103^\circ \Rightarrow y = 77^\circ$
Assim no triângulo BIE, temos:
$31^\circ + z + 77^\circ = 180^\circ$
$z = 180^\circ - 108^\circ \Rightarrow z = 72^\circ$
Logo, $z = m(B\hat{I}E) = 72^\circ$.</td><td>Construção do triângulo com régua e transferidor, se achar necessário.
Substituição dos valores dados no enunciado do exercício.
Aplicação da propriedade 1
Aplicação da propriedade 15
Aplicação da propriedade 18</td><td>PROPRIEDADE 1
“Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$”.

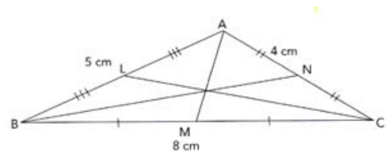
PROPRIEDADE 15
“A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice”.

PROPRIEDADE 18
“Em todo triângulo, as três bissetrizes cruzam-se em um mesmo ponto, chamado incentro do triângulo”.</td></tr>
<tr><td colspan="3">T_2 – Localizar o incentro de um triângulo, quando for dado um lado e dois ângulos desse triângulo.</td><td>Quantidade de Exercícios
01</td></tr>
<tr><td>Exemplo</td><td>Resolução</td><td>Técnica</td><td>Tecnologia</td></tr>
<tr><td>Use régua e transferidor para localizar o incentro I do triângulo EFG com estas medidas:
$m(\overline{EF}) = 6$ cm,
$m(\hat{E}) = 80^\circ$ e $m(\hat{F}) = 40^\circ$.
(exercício 55, item a), pág. 150)</td><td>
</td><td>Construção do triângulo com régua e transferidor.
Substituição dos valores dados no enunciado do exercício.
Aplicação da propriedade 1
Aplicação da propriedade 15
Aplicação da propriedade 18</td><td>PROPRIEDADE 1
“Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$”.
PROPRIEDADE 15
“A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice”.
PROPRIEDADE 18
“Em todo triângulo, as três bissetrizes cruzam-se em um mesmo ponto, chamado incentro do triângulo”.</td></tr>
</table>

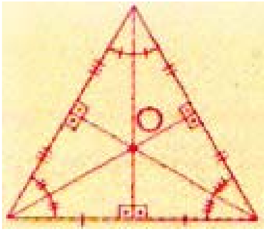
ANEXO – 12

TAREFA T_1 – Construir um triângulo e localizar o seu baricentro.

TAREFA T_2 – Completar as afirmações, sabendo que o baricentro de qualquer triângulo divide a mediana na razão de 1 para 2.

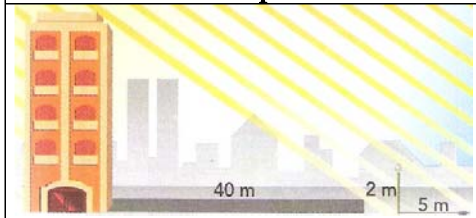
T_1 – **Construir um triângulo e localizar o seu baricentro.**			***Quantidade de Exercícios*** 01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Construa em seu caderno um triângulo com lados de 8 cm, 5 cm e 4cm e localize o seu baricentro. (exercício 56, PARTE 1, pág. 151)		Construção do triângulo com régua e compasso de acordo com os valores dados no enunciado do exercício. Aplicação da propriedade 14 Aplicação da propriedade 19	PROPRIEDADE 14 “Mediana de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice”. PROPRIEDADE 19 “As três medianas de um triângulo também se cruzam em um mesmo ponto. Esse ponto é chamado de baricentro do triângulo”.
T_2 – **Completar as afirmações, sabendo que o baricentro de qualquer triângulo divide a mediana na razão de 1 para 2.**			Quantidade de Exercícios 01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Considere o triângulo da atividade anterior e complete as afirmações abaixo. a) Se GH = 15 cm, então MH = b) Se FN = 8 mm, então FH = c) Se LB = 4 m, então BH = e LH = . d) Se GN = 45 cm, então NB = e GB = . (exercício 56, PARTE 2, pág. 151)	a) Se GH = 15 cm, então MH = 7,5 cm b) Se FN = 8 mm, então FH = 16 mm c) Se LB = 4 m, então BH = 8 m e LH = 12 m d) Se GN = 45 cm, então NB = 15 cm e GB = 30 cm	Observar o desenho Aplicação da propriedade 14 Aplicação da propriedade 19 Aplicação da propriedade 25	PROPRIEDADE 14 “Mediana de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice”. PROPRIEDADE 19 “As três medianas de um triângulo também se cruzam em um mesmo ponto. Esse ponto é chamado de baricentro do triângulo”. PROPRIEDADE 25 “Dado um triângulo qualquer, o baricentro divide a mediana na razão de 1 para 2”.

TAREFA T_3 – Construir um triângulo eqüilátero e localizar nele o ortocentro, o incentro e o baricentro. E, responder a pergunta: O que podemos observar em relação a esses três pontos no triângulo eqüilátero?

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">T_3 – Construir um triângulo eqüilátero e localizar nele o ortocentro, o incentro e o baricentro. E, responder a pergunta: O que podemos observar em relação a esses três pontos no triângulo eqüilátero?</td><td>Quantidade de Exercícios</td></tr>
<tr><td>01</td></tr>
<tr><td>Exemplo</td><td>Resolução</td><td>Técnica</td><td>Tecnologia</td></tr>
<tr><td>Com um colega, construa em uma folha sem pauta um triângulo eqüilátero. Nele localizem o ortocentro, o incentro e o baricentro, usando régua e transferidor. O que vocês podem observar em relação a esses três pontos em um triângulo equilátero?
(exercício - Oficina de Matemática, Fazendo a gente aprende, pág. 151)</td><td>
Observa-se que o ortocentro, o incentro e o baricentro se cruzam em um único ponto, o ponto O.</td><td>Construção do triângulo com régua, transferidor e compasso.
Aplicação da definição 6
Aplicação da propriedade 14
Aplicação da propriedade 19
Aplicação da propriedade 15
Aplicação da propriedade 18
Aplicação da propriedade 16
Aplicação da propriedade 17</td><td>DEFINIÇÃO 6
“Um triângulo é eqüilátero quando têm todos os lados iguais e todos os ângulos iguais”.
PROPRIEDADE 14
“Mediana de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice”.
PROPRIEDADE 19
“As três medianas de um triângulo também se cruzam em um mesmo ponto. Esse ponto é chamado de baricentro do triângulo”.
PROPRIEDADE 15
“A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice”.
PROPRIEDADE 18
“Em todo triângulo, as três bissetrizes cruzam-se em um mesmo ponto, chamado incentro do triângulo”.
PROPRIEDADE 17
“Em todo triângulo, as três alturas ou seus prolongamentos cruzam-se em um mesmo ponto, chamado de ortocentro do triângulo”
PROPRIEDADE 16
“A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos”.</td></tr>
</table>

ANEXO – 13

TAREFA T_1 – Encontrar a medida de alturas inacessíveis;

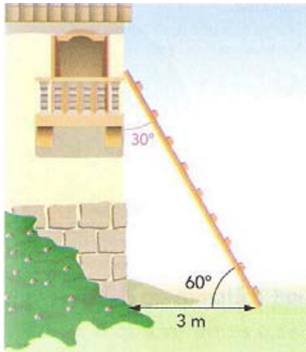
T_1 – **Encontrar a medida de alturas inacessíveis;**			***Quantidade de Exercícios***
			02
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
 Este prédio projeta uma sombra de 40 m, enquanto o poste de 2 m de altura projeta uma sombra de 5 m. Qual é a altura do prédio? (exercício 7, pág. 183)	Seja x a altura do prédio, $\frac{x}{40}=\frac{2}{5}$ $5x=80$ $x=16$ Logo a altura do prédio é de 16 metros.	Substituição dos valores dados no exercício Aplicação da propriedade 20 Aplicação da propriedade 22 Aplicação da propriedade 21 Aplicação da definição 7	PROPRIEDADE 20 “Quatro números racionais, *a*, *b*, *c* e *d*, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando a razão do primeiro para o segundo é igual a razão do terceiro para o quarto”. DEFINIÇÃO 7 “Na proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (lemos: a está para b assim como c está para d), os números a, b, c e d são chamados de **termos da proporção**. O primeiro e o quarto termos de uma proporção são chamados de **extremos**, enquanto o segundo e o terceiro termos são chamados de **meios**”. PROPRIEDADE 21 “Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios”. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$ PROPRIEDADE 22 “Para descobrir a altura de uma pirâmide, Tales fincou uma estaca na areia, mediu as sombras respectivas da pirâmide e da estaca, em uma determinada hora do dia, e estabeleceu uma proporção: $\frac{\text{altura da pirâmide}}{\text{sombra da pirâmide}}=\frac{\text{altura da estaca}}{\text{sombra da estaca}}$, é tudo uma questão de proporcionalidade e criatividade de um grande gênio”.

TAREFA T_2 - Encontrar a medida da sombra de uma pessoa quando a sombra do objeto diminuir x cm.

T_2 – **Encontrar a medida da sombra de uma pessoa quando a sombra do objeto diminuir x cm.**			***Quantidade de Exercícios*** 01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Leia esta questão do Exame Nacional do ensino Médio (Enem) e responda-a em seu caderno. A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do posto diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir: a) 30cm. b)45cm . c) 50cm. d) 80cm. e) 90cm. (exercício sessão desafio, pág. 184)	Seja x a altura do poste, $\frac{180}{60}=\frac{x}{200}$ $60x = 36000$ $x=\frac{36000}{60}$ $x = 600$ Assim, a altura do poste é 600 cm, ou seja, 6 metros. Sabendo a altura do poste e sabendo que sua sombra diminuiu 50 cm, podemos calcular quanto diminuiu a sombra da pessoa. Seja y a nova sombra da pessoa. $\frac{180}{y}=\frac{600}{150}$ $600y = 27000$ $y=\frac{27000}{600}$ $y = 45$ Logo a sombra da pessoa passou a medir 45 cm.	Construção do desenho, se achar necessário. Transformação das unidades de medida de comprimento na mesma unidade, aplicação da propriedade 23. Aplicação da propriedade 20 Aplicação da propriedade 22 Aplicação da propriedade 21 Aplicação da propriedade 24 Aplicação da propriedade 20 Aplicação da propriedade 22 Aplicação da propriedade 21	PROPRIEDADE 23 “O centímetro (cm) está duas posições à direita do metro (m) em relação ao quadro das unidades. Logo, para transformar de metro para centímetros devemos multiplicar o número que indica a medida por 10^2, ou seja, devemos multiplicar por 100”. PROPRIEDADE 24 “O centímetro (cm) está duas posições à direita do metro (m) em relação ao quadro das unidades. Como, da direita para a esquerda, cada unidade representa $\frac{1}{10}$ da unidade anterior. Portanto, para transformar de centímetros para metro devemos multiplicar o número que indica a medida por $\left(\frac{1}{10}\right)^2$, ou seja, devemos dividir por 100”. PROPRIEDADE 20 “Quatro números racionais, *a*, *b*, *c* e *d*, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando a razão do primeiro para o segundo é igual a razão do terceiro para o quarto”. PROPRIEDADE 21 “Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios”. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ PROPRIEDADE 22 “Para descobrir a altura de uma pirâmide, Tales fincou uma estaca na areia, mediu as sombras respectivas da pirâmide e da estaca, em uma determinada hora do dia, e estabeleceu uma proporção: $\frac{\text{altura da pirâmide}}{\text{sombra da pirâmide}} = \frac{\text{altura da estaca}}{\text{sombra da estaca}}$, é tudo uma questão de proporcionalidade e criatividade de um grande gênio”.

ANEXO – 14

TAREFA T_1 – Determinar a medida da escada, sabendo que ela está a três metros da parede e forma um ângulo de 60º com o chão.

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">T_1 – Determinar a medida da escada, sabendo que ela está a três metros da parede e forma um ângulo de 60º com o chão.</td><td>Quantidade de Exercícios</td></tr>
<tr><td>01</td></tr>
<tr><td>Exemplo</td><td>Resolução</td><td>Técnica</td><td>Tecnologia</td></tr>
<tr><td>Para chegar à sacada de sua amada Julieta, Romeu encostou um escada, distante 3 metros da parede, como mostra o desenho. Qual o tamanho da escada?


(exercício 10, pág. 185)</td><td>Seja x a medida da escada,
$$\frac{3}{x} = \frac{1}{2}$$
$$x = 6$$
Logo a medida da escada é 6 metros.</td><td>Reconhecer na figura o triângulo retângulo com ângulo de 30º
Substituição dos valores dados no exercício
Aplicação da propriedade 1
Aplicação da propriedade 25</td><td>DEFINIÇÃO 5

“Um triângulo é retângulo quando tem um ângulo reto/ângulo de 90° e os outros dois ângulos agudos”.

PROPRIEDADE 25

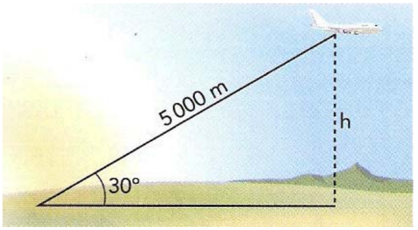
“ Em um triângulo retângulo, a razão: $\frac{\text{cateto oposto ao ângulo de } 30^\circ}{\text{hipotenusa}}$
é sempre igual a $\frac{1}{2}$ e, é denominada seno de 30º”.

PROPRIEDADE 1

“Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$ ”.</td></tr>
</table>

TAREFA T_2 - Determinar a altura do avião em relação ao chão, conhecendo a distancia de inclinação do avião desde a partida até o local que ele se encontra e conhecendo o ângulo de inclinação da hora da partida com o chão.

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">T_2 – Determinar a altura do avião em relação ao chão, conhecendo a distancia de inclinação do avião desde a partida até o local que ele se encontra e conhecendo o ângulo de inclinação da hora da partida com o chão.</td><td>Quantidade de Exercícios</td></tr>
<tr><td>01</td></tr>
<tr><td>Exemplo</td><td>Resolução</td><td>Técnica</td><td>Tecnologia</td></tr>
<tr>
<td>Na figura abaixo, qual é a altura do avião em relação ao chão?



(exercício 11, pág. 185)</td>
<td>A Altura h forma um ângulo de 90º com o chão.

$$\frac{h}{5000}=\frac{1}{2}$$

$$2h=5000$$

$$h=2500$$

Assim, a altura do avião em relação ao chão é de 2500 metros.</td>
<td>Reconhecer na figura o triângulo retângulo com ângulo de 30º
Substituição dos valores dados no exercício
Aplicação da propriedade 1
Aplicação da propriedade 25</td>
<td>DEFINIÇÃO 5

"Um triângulo é retângulo quando tem um ângulo reto/ângulo de 90° e os outros dois ângulos agudos".

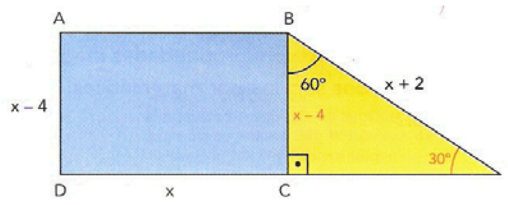
PROPRIEDADE 25

" Em um triângulo retângulo, a razão: $\frac{\text{cateto oposto ao ângulo de } 30^\circ}{\text{hipotenusa}}$ é sempre igual a $\frac{1}{2}$ e, é denominada seno de 30º".

PROPRIEDADE 1

"Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$".</td>
</tr>
</table>

TAREFA T_3 - Determinar o perímetro e a área de uma região retangular, conhecendo dois ângulos do triângulo e três lados da figura dada em função de x.

<table>
<tr><td colspan="3">T_3 – Determinar o perímetro e a área de uma região retangular, conhecendo dois ângulos do triângulo e três lados da figura dada em função de x.</td><td>Quantidade de Exercícios
01</td></tr>
<tr><td>Exemplo</td><td>Resolução</td><td>Técnica</td><td>Tecnologia</td></tr>
<tr><td>Na figura abaixo as medidas de comprimento são dadas em metro. Determine o perímetro e a área da região retangular ABCD.


(exercício 12, pág. 185)</td><td>O triângulo amarelo é um triângulo retângulo com ângulo de 30º.
Como $\overline{AB} = x - 4$ e ABCD é um retângulo, Então $\overline{BC} = x - 4$.
$\frac{x-4}{x+2} = \frac{1}{2}$
$2x - 8 = x + 2$
$x = 10$
O perímetro da região retangular ABCD é 32 metros, pois:
P = 10 + 10 + 6 + 6
P = 32 m.
A área é igual a 60 metros ao quadrados, pois:
A = 10 . 6 = 60m.</td><td>Reconhecer na figura o triângulo retângulo com ângulo de 30º
Substituição dos valores dados no exercício
Aplicação da definição 5
Aplicação da propriedade 1
Aplicação da propriedade 26
Aplicação da propriedade 25
Aplicação da propriedade 27
Aplicação da propriedade 28</td><td>DEFINIÇÃO 5
“Um triângulo é retângulo quando tem um ângulo reto/ângulo de 90° e os outros dois ângulos agudos”.

PROPRIEDADE 1
“Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$”.

PROPRIEDADE 26
“Em todo retângulo, os lados opostos são congruentes”.

PROPRIEDADE 25
“ Em um triângulo retângulo, a razão: $\frac{\text{cateto oposto ao ângulo de } 30^\circ}{\text{hipotenusa}}$ é sempre igual a $\frac{1}{2}$ e, é denominada seno de 30º”.
PROPRIEDADE 27
“O perímetro de uma figura qualquer é a soma de todos os lados dessa figura”.

PROPRIEDADE 28
“A área de um retângulo é igual a medida da base multiplicada com a medida da altura desse retângulo”.</td></tr>
</table>

ANEXO – 15

TAREFA T_1 – Determinar a semelhança entre os triângulos.

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">T_1 – Determinar a semelhança entre os triângulos.</td><td>Quantidade de Exercícios</td></tr>
<tr><td>03</td></tr>
<tr><td>Exemplo</td><td>Resolução</td><td>Técnica</td><td>Tecnologia</td></tr>
<tr><td>Considere os triângulos seguintes:
Triângulo ABC com lados de 6 cm, 9 cm e 12 cm.
Triângulo PQR com lados de 4 cm, 6 cm e 8 cm.
Triângulo EFG com lados de 4 cm, 7 cm e 10 cm.
Agora responda em seu caderno.
a) Quais são os dois triângulos semelhantes?
(exercício 38 – item a), pág. 196)</td><td>Os triângulos ABC e EFG não são semelhantes, pois as medidas dos lados não são proporcionais. Visto que:
$\frac{6}{4} \neq \frac{9}{7} \neq \frac{12}{10}$.

Os triângulos PQR e EFG não são semelhantes, pois as medidas dos lados não são proporcionais.

Já os triângulos ABC e PQR são semelhantes, pois as medidas dos lados são proporcionais. Visto que:
$\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{12}{8}$.</td><td>Aplicação da propriedade 20

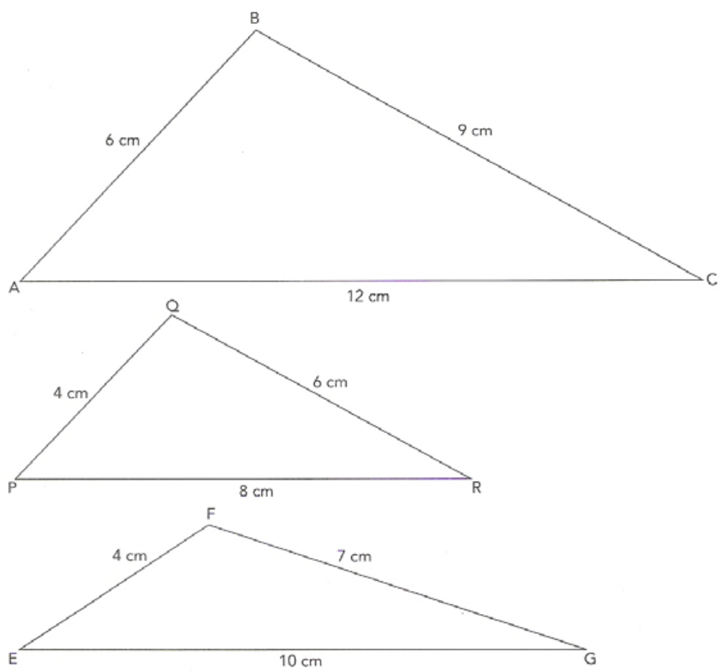
Aplicação da propriedade 29</td><td>PROPRIEDADE 20

“Quatro números racionais, a, b, c e d, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando a razão do primeiro para o segundo é igual a razão do terceiro para o quarto”.

PROPRIEDADE 29

Dois triângulos são semelhantes quando as medidas de seus lados forem proporcionais ou quando seus ângulos forem congruentes, ou seja, basta examinar os lados ou os ângulos e constatar a semelhança de dois triângulos, pois:
● A congruência dos ângulos garante a semelhança dos triângulos, pois as medidas dos lados serão necessariamente proporcionais.
● A proporcionalidade das medidas dos lados garante a semelhança dos triângulos, pois os ângulos serão necessariamente congruentes.</td></tr>
</table>

TAREFA T_2 - Construir os triângulos semelhantes dados.

T_2 – Construir os triângulos semelhantes dados.			***Quantidade de Exercícios***
			02
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Após resolver o item a) do exercício 38 o mesmo solicita o item b): b) Construa esses triângulos com régua e compasso. Meça os ângulos para comprovar que suas medidas permanecem as mesmas nos triângulos semelhantes. (exercício 38 – item b), pág. 196)		Uso da régua e do compasso para construir os três triângulos de acordo com os valores dados no exercício.	Construção de triângulos com régua e compasso.

TAREFA T_3 - Determinar a medida dos lados do triângulo.

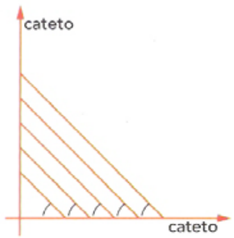
T_3 – Determinar a medida dos lados do triângulo.			***Quantidade de Exercícios*** 01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Dois triângulos são semelhantes. O primeiro tem lados de 20 cm, 25 cm e 30 cm. O lado maior do segundo mede 18 cm. Em seu caderno: a) Determine as medidas dos outros dois lados do segundo triângulo. (exercício 41- item a), pág. 197)	Como os triângulos são semelhantes os seus lados são proporcionais, assim: $\frac{30}{18} = \frac{25}{x}$ $\quad$ $\frac{30}{18} = \frac{20}{y}$ $30x = 450$ $\quad$ $30y = 360$ $x = \frac{450}{30}$ $\quad$ $x = \frac{360}{30}$ $x = 15$ $\quad$ $x = 12$ Logo os outros lados do segundo triângulo medem 15 cm e 12 cm.	Aplicação da propriedade 29. Aplicação da propriedade 20. Aplicação da definição 7 e da propriedade 28.	PROPRIEDADE 20 "Quatro números racionais, *a*, *b*, *c* e *d*, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando a razão do primeiro para o segundo é igual a razão do terceiro para o quarto". PROPRIEDADE 29 Dois triângulos são semelhantes quando as medidas de seus lados forem proporcionais ou quando seus ângulos forem congruentes, ou seja, basta examinar os lados ou os ângulos e constatar a semelhança de dois triângulos, pois: ● A congruência dos ângulos garante a semelhança dos triângulos, pois as medidas dos lados serão necessariamente proporcionais. ● A proporcionalidade das medidas dos lados garante a semelhança dos triângulos, pois os ângulos serão necessariamente congruentes. DEFINIÇÃO 7 "Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lemos: a está para b assim como c está para d), os números a, b, c e d são chamados de **termos da proporção**. O primeiro e o quarto termos de uma proporção são chamados de **extremos**, enquanto o segundo e o terceiro termos são chamados de **meios**". PROPRIEDADE 21 "Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios". $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

TAREFA T_4 - Calcular a razão de proporcionalidade entre dois triângulos.

TAREFA T_5 - Achar a razão entre os perímetros de dois triângulos.

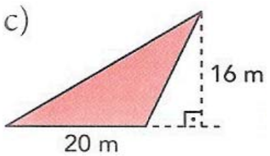
T_4 – Calcular a razão de proporcionalidade entre dois triângulos.			***Quantidade de Exercícios***
			01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Após resolver o item a) do exercício 41 o mesmo solicita o item b): b) Calcule a razão de proporcionalidade entre o primeiro e o segundo triângulo usando as medidas dos lados correspondentes. (exercício 41- item b), pág. 197)	Os lados dos triângulos são proporcionais: $\frac{30}{18}=\frac{25}{15}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$ Logo a razão de proporcionalidade entre os triângulos é $\frac{5}{3}$.	Aplicação da propriedade 20.	PROPRIEDADE 20 "Quatro números racionais, *a*, *b*, *c* e *d*, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando a razão do primeiro para o segundo é igual a razão do terceiro para o quarto".
T_5 - Achar a razão entre os perímetros de dois triângulos.			***Quantidade de Exercícios***
			01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Após resolver os itens a) e b) do exercício 41 o mesmo solicita o item c): c) Ache a razão entre os perímetros do primeiro e do segundo triângulo e depois compare-a com a razão do item b. (exercício 41- item c), pág. 197)	O perímetro do 1º triângulo é 75cm, pois: $30+25+20=75$ O perímetro do 2º triângulo é 45cm, pois: $18+15+12=45$ A razão entre os perímetros do primeiro e do segundo triângulo é $\frac{5}{3}$, pois: $\frac{75}{45}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$. Portanto, a razão de proporcionalidade entre o primeiro e do segundo triângulo é igual a razão dos perímetros do primeiro e do segundo triângulo.	Aplicação da propriedade 27. Aplicação da propriedade 20. Comparar a resposta do item b) com a razão obtida entre os perímetros do primeiro e do segundo triângulo.	PROPRIEDADE 27 "O perímetro de uma figura qualquer é a soma de todos os lados dessa figura". PROPRIEDADE 20 "Quatro números racionais, *a*, *b*, *c* e *d*, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando a razão do primeiro para o segundo é igual a razão do terceiro para o quarto".

TAREFA T_6 - Responder se triângulos retângulos isósceles são sempre semelhantes.

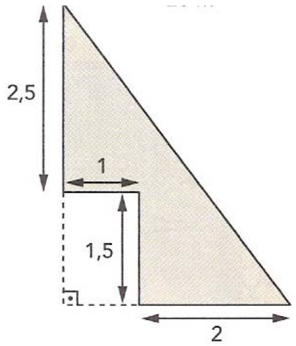
T_6 – Responder se triângulos retângulos isósceles são sempre semelhantes.			***Quantidade de Exercícios***
			01
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Desenhe em um sistema de eixos cartesianos vários triângulos retângulos isósceles conforme a figura. Depois, responda em seu caderno: os triângulos retângulos isósceles são sempre semelhantes? Por quê?  (exercício 42, pág. 197)	DESENHO Como podemos observar no desenho os triângulos retângulos isósceles são sempre semelhantes, pois os ângulos da base são sempre congruentes e o outro ângulo é reto.	Aplicação da propriedade 13. Aplicação da propriedade 29.	PROPRIEDADE 13 "Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes". PROPRIEDADE 29 Dois triângulos são semelhantes quando as medidas de seus lados forem proporcionais ou quando seus ângulos forem congruentes, ou seja, basta examinar os lados ou os ângulos e constatar a semelhança de dois triângulos, pois: ● A congruência dos ângulos garante a semelhança dos triângulos, pois as medidas dos lados serão necessariamente proporcionais. ● A proporcionalidade das medidas dos lados garante a semelhança dos triângulos, pois os ângulos serão necessariamente congruentes.

ANEXO – 16

TAREFA T_1 - Determinar a área dos triângulos.

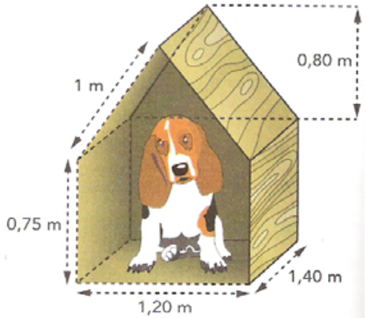
T_1 - Determinar a área dos triângulos.			***Quantidade de Atividades*** 03
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Use a fórmula da área da região triangular e determine a área de cada uma destas figuras.  (exercício 36 – item c), pág. 239)	$\mathcal{A} = \frac{20 \cdot 16}{2}$ $\mathcal{A} = \frac{320}{2}$ $\mathcal{A} = 160$ Portando a área do triângulo dado é 160 m^2.	Aplicação da propriedade 16 Aplicação da propriedade 30	PROPRIEDADE 16 “A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos”. PROPRIEDADE 30 “A área de uma região triangular é igual a base vezes a altura dividido por dois”. $\mathcal{A} = \frac{b \cdot a}{2}$, sendo b a base do triângulo e a altura desse triângulo.

TAREFA T_2 - Calcular a área da região dada.

T_2 – Calcular a área da região dada.			***Quantidade de Exercícios***
			02
Exemplo	***Resolução***	***Técnica***	***Tecnologia***
Calcule em seu caderno a área da região ao lado[58]. As unidades são dadas em centímetros.  (exercício 37, pág. 239)	A área da região triangular é: 6 cm^2, pois: $A_t = \frac{3 \cdot 4}{2}$ $A_t = \frac{12}{2}$ $A = 6\,cm^2$ A área do quadrado é 1,5 cm^2, pois: $A_Q = 1{,}5 \cdot 1 = 1{,}5\,cm^2$ Assim, a área da região hachurada é igual a 4,5 cm^2, pois: $A_t - A_Q = 6 - 1{,}5 = 4{,}5\,m^2$	Conhecer a propriedade 16. Aplicar da propriedade 30. Aplicar da propriedade 31.	PROPRIEDADE 16 "A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos". PROPRIEDADE 30 "A área de uma região triangular é igual a base vezes a altura dividido por dois". $A = \frac{b \cdot a}{2}$, sendo b a base do triângulo e a altura desse triângulo. PROPRIEDADE 28 "A área de um retângulo é igual a medida da base multiplicada com a medida da altura desse retângulo".

[58] No livro didático a figura estava ao lado do exercício, mas aqui colocamos em baixo do exercício.

TAREFA T_3 - Responder quantos metros quadrados de material é necessário para construir uma casinha.

<table>
<tr><td colspan="3">T_3 – Responder quantos metros quadrados de material é necessário para construir uma casinha.</td><td>Quantidade de Exercício
01</td></tr>
<tr><td>Exemplo</td><td>Resolução</td><td>Técnica</td><td>Tecnologia</td></tr>
<tr><td>Doce Lar!
Aproximadamente, de quantos metros quadrados de madeira Filipe precisará para construir uma casinha com a porta para seu cão Fight?
(Considere as medidas ao lado[59] e use calculadora.)


(exercício 38, pág. 240)</td><td>Para saber quantos metros de madeira é necessário comprar para fazer a casinha do cão precisamos calcular a área total da casa, ou seja:
$A_T = 2 \cdot A_t + 2 \cdot A_p + 2 \cdot A_{r1} + 2 \cdot A_{r2} + A_{r3}$.
Vamos calcular cada área separadamente e depois calcular a área total.
$A_t = \frac{1,2 \cdot 0,8}{2} = 0,48\ m^2$
$A_p = 1,4 \cdot 1,0 = 1,4 m^2$
$A_{r1} = 1,2 \cdot 0,75 = 0,9\ m^2$
$A_{r2} = 1,4 \cdot 0,75 = 1,05 m^2$
$A_{r3} = 1,2 \cdot 1,4 = 1,68 m^2$
Assim:
$A_T = 2 \cdot A_t + 2 \cdot A_p + 2 \cdot A_{r1} + 2 \cdot A_{r2} + A_{r3}$
$A_T = 2 \cdot 0,48 + 2 \cdot 1,4 + 2 \cdot 0,9 + 2 \cdot 1,05$
$A_T = 2 \cdot (0,48 + 1,4 + 0,9 + 1,05) + 1,68$
$A_T = 2 \cdot 3,83 + 1,68$
$A_T = 9,34\ m^2$
Portanto para construir a casinha de Fight Filipe necessita comprar aproximadamente 9,5 m^2 de madeira.</td><td>Perceber que a área da casinha é a soma das áreas do: paralelogramos, triângulos e retângulos.
Aplicação da propriedade 28.
Aplicação da propriedade 30.
Aplicação da propriedade 31.</td><td>PROPRIEDADE 28

“A área de um retângulo é igual a medida da base multiplicada com a medida da altura desse retângulo”.

PROPRIEDADE 30

“A área de uma região triangular é igual a base vezes a altura dividido por dois”.

$A = \frac{b \cdot a}{2}$, sendo b a base do triângulo e a altura desse triângulo.

PROPRIEDADE 31

“A área do paralelogramo é igual a base vezes a altura”.</td></tr>
</table>

[59] No livro didático a figura estava ao lado do exercício, mas aqui colocamos em baixo do exercício.

ANEXO – 17

PROPRIEDADES E DEFINIÇÕES ESTUDADAS NO CONTEXTO DA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA RELATIVO A CADA TAREFA $T_{\pi i}$ DA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA

$T_{6\pi 1}$

PROPRIEDADE 1

"Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$".

DEFINIÇÃO 1[60]

"Um ângulo é agudo quando sua medida é menor do que 90º."

DEFINIÇÃO 2

"Um ângulo é obtuso quando sua medida é maior do que 90º."

$T_{6\pi 2}$

DEFINIÇÃO 3

"Um triângulo é chamado do acutângulo quando tem os três ângulos agudos".

DEFINIÇÃO 4

"Um triângulo é chamado do obtusângulo quando tem um ângulo obtuso e os outro dois ângulos agudos".

DEFINIÇÃO 5

"Um triângulo é retângulo quando tem um ângulo reto/ângulo de 90° e os outros dois ângulos agudos".

[60] As definições e propriedades destacadas com a cor azul são conceitos que não foram objetos de ensino nas tarefas da Organização Didática. Porém era necessário conhecer estes resultados teóricos para resolver as tarefas da Organização Matemática.

PROPRIEDADE 1

“Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^{\circ}$”.

$T_{6\pi 3}$

PROPRIEDADE 2

“A soma de dois ângulos adjacentes e suplementares é 180º”.

PROPRIEDADE 3

“Ângulos opostos pelo vértice são iguais”

PROPRIEDADE 4

“Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não–adjacentes a ele.”

PROPRIEDADE 1

“Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^{\circ}$”.

PROPRIEDADE 5

“Ângulos alternos e internos em lados diferentes em relação à reta transversal e na parte interna em relação as restas paralelas tem a mesma medida”

$T_{6\pi 4}$

PROPRIEDADE 6

“Dois segmentos de reta são congruentes quando suas medidas são iguais. Se $\overline{\mathcal{AB}}$ e $\overline{\mathcal{CD}}$ são segmentos de reta congruentes, indicamos: $\overline{\mathcal{AB}} \cong \overline{\mathcal{CD}}$”.

PROPRIEDADE 7

“Dois ângulos são congruentes quando suas medidas são iguais. Se $\hat{\mathcal{P}}$ e $\hat{\mathcal{Q}}$ são ângulos congruentes, indicamos: $\hat{\mathcal{P}} \cong \hat{\mathcal{Q}}$”.

PROPRIEDADE 8

"A congruência dos dois triângulos determina a congruência dos seis elementos. E, a congruência de seis elementos (três lados e três ângulos) determina a congruência dos dois triângulos".

PROPRIEDADE 1

"Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^{\circ}$".

$\mathbf{T_{6\pi5}}$

PROPRIEDADE 9

"Se dois lados dos triângulos forem congruentes e o ângulo formado por eles também for congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LAL"

PROPRIEDADE 10

"Se três lados dos triângulos são congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LLL"

PROPRIEDADE 11

"Se dois ângulos são congruentes e o lado compreendido entre eles também é congruente, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - ALA"

PROPRIEDADE 12

"Se dois triângulos têm dois lados congruentes e um ângulo adjacente e o ângulo a esse lado também congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência – LAA_0"

$T_{6\pi 6}$

PROPRIEDADE 1

"Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$".

PROPRIEDADE 13

"Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes".

$T_{6\pi 7}$

PROPRIEDADE 14

"Mediana de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice".

PROPRIEDADE 15

"A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice".

PROPRIEDADE 16

"A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos".

PROPRIEDADE 2

"A soma de dois ângulos adjacentes e suplementares é 180º".

PROPRIEDADE 1

"Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$".

PROPRIEDADE 4

"Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não–adjacentes a ele."

PROPRIEDADE 8

"A congruência dos dois triângulos determina a congruência dos seis elementos. E, a congruência de seis elementos (três lados e três ângulos) determina a congruência dos dois triângulos".

PROPRIEDADE 10

"Se três lados dos triângulos são congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LLL"

$\mathbf{T_{6\pi 8}}$

PROPRIEDADE 17

"Em todo triângulo, as três alturas ou seus prolongamentos cruzam-se em um mesmo ponto, chamado de ortocentro do triângulo"

PROPRIEDADE 16

"A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos".

PROPRIEDADE 1

"Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$".

$\mathbf{T_{6\pi 9}}$

PROPRIEDADE 1

"Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$".

PROPRIEDADE 15

"A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice".

PROPRIEDADE 18

"Em todo triângulo, as três bissetrizes cruzam-se em um mesmo ponto, chamado incentro do triângulo".

$T_{6\pi 10}$

PROPRIEDADE 14

"Mediana de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice".

PROPRIEDADE 19

"As três medianas de um triângulo também se cruzam em um mesmo ponto. Esse ponto é chamado de baricentro do triângulo".

PROPRIEDADE 15

"A bissetriz de um triângulo é o segmento que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo ao meio e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice".

PROPRIEDADE 18

"Em todo triângulo, as três bissetrizes cruzam-se em um mesmo ponto, chamado incentro do triângulo".

PROPRIEDADE 17

"Em todo triângulo, as três alturas ou seus prolongamentos cruzam-se em um mesmo ponto, chamado de ortocentro do triângulo"

PROPRIEDADE 16

"A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos".

DEFINIÇÃO 6

"Um triângulo é eqüilátero quando têm todos os lados iguais e todos os ângulos iguais".

PROPRIEDADE 25

"Dado um triângulo qualquer, o baricentro divide a mediana na razão de 1 para 2".

$T_{8\pi 11}$

PROPRIEDADE 20

"Quatro números racionais, *a*, *b*, *c* e *d*, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando a razão do primeiro para o segundo é igual a razão do terceiro para o quarto".

DEFINIÇÃO 7

"Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lemos: a está para b assim como c está para d), os números a, b, c e d são chamados de **termos da proporção**. O primeiro e o quarto termos de uma proporção são chamados de **extremos**, enquanto o segundo e o terceiro termos são chamados de **meios**".

PROPRIEDADE 21

"Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios".

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

PROPRIEDADE 22

"Para descobrir a altura de uma pirâmide, Tales fincou uma estaca na areia, mediu as sombras respectivas da pirâmide e da estaca, em uma determinada hora do dia, e estabeleceu uma proporção: $\frac{\text{altura da pirâmide}}{\text{sombra da pirâmide}} = \frac{\text{altura da estaca}}{\text{sombra da estaca}}$, é tudo uma questão de proporcionalidade e criatividade de um grande gênio".

PROPRIEDADE 23

"O centímetro (cm) está duas posições à direita do metro (m) em relação ao quadro das unidades. Logo, para transformar de metro para centímetros devemos multiplicar o número que indica a medida por 10^2, ou seja, devemos multiplicar por 100".

PROPRIEDADE 24

"O centímetro (cm) está duas posições à direita do metro (m) em relação ao quadro das unidades. Como, da direita para a esquerda, cada unidade representa $\frac{1}{10}$ da unidade anterior. Portanto, para transformar de centímetros para metro devemos multiplicar o número que indica a medida por $\left(\frac{1}{10}\right)^2$, ou seja, devemos dividir por 100".

$T_{8\pi 12}$

PROPRIEDADE 1

"Dado um triângulo ABC, temos $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180^\circ$".

PROPRIEDADE 25

" Em um triângulo retângulo, a razão : $\dfrac{\text{cateto oposto ao ângulo de } 30^\circ}{\text{hipotenusa}}$ é sempre igual a $\frac{1}{2}$ e é denominada seno de 30º".

DEFINIÇÃO 5

"Um triângulo é retângulo quando tem um ângulo reto/ângulo de 90° e os outros dois ângulos agudos".

PROPRIEDADE 26

"Em todo retângulo, os lados opostos são congruentes".

PROPRIEDADE 27

"O perímetro de uma figura qualquer é a soma de todos os lados dessa figura".

PROPRIEDADE 28

"A área de um retângulo é igual a medida da base multiplicada com a medida da altura desse retângulo".

$T_{8\pi13}$

PROPRIEDADE

“Os gregos chamavam de triângulo de ouro ou triângulo sublime todo triângulo isósceles cuja razão $\frac{x}{a}$ tivesse um valor aproximado de 1,6 (aproximação de 1,6180342). Sendo que x representa os lados congruentes do triângulo isósceles e a a base desse triângulo”.

$T_{8\pi14}$

PROPRIEDADE 20

“Quatro números racionais, a, b, c e d, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando a razão do primeiro para o segundo é igual a razão do terceiro para o quarto”.

PROPRIEDADE 29

Dois triângulos são semelhantes quando as medidas de seus lados forem proporcionais ou quando seus ângulos forem congruentes, ou seja, basta examinar os lados ou os ângulos e constatar a semelhança de dois triângulos, pois:

● A congruência dos ângulos garante a semelhança dos triângulos, pois as medidas dos lados serão necessariamente proporcionais.

● A proporcionalidade das medidas dos lados garante a semelhança dos triângulos, pois os ângulos serão necessariamente congruentes.

- Em triângulos retângulos com ângulo de 30º a razão cateto oposto sobre hipotenusa é igual a ½.

DEFINIÇÃO 7

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lemos: a está para b assim como c está para d), os números a, b, c e d são chamados de **termos da proporção**. O primeiro e o quarto termos de uma proporção são chamados de **extremos**, enquanto o segundo e o terceiro termos são chamados de **meios**.

PROPRIEDADE 21

"Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios".

PROPRIEDADE 27

"O perímetro de uma figura qualquer é a soma de todos os lados dessa figura".

PROPRIEDADE 13

"Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes".

$T_{10\pi15}$

PROPRIEDADE 30

"A área de uma região triangular é igual a base vezes a altura dividido por dois".

$A = \frac{b \cdot a}{2}$, sendo *b* a base do triângulo e *a* altura desse triângulo.

PROPRIEDADE 16

"A altura de um triângulo é o segmento com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no lado oposto ou no seu prolongamento, formando com ele ângulos retos".

PROPRIEDADE 28

"A área de um retângulo é igual a medida da base multiplicada com a medida da altura desse retângulo".

PROPRIEDADE 31

"A área do paralelogramo é igual a base vezes a altura".

$T_{10\pi16}$

PROPRIEDADE 32

"Dado um triângulo retângulo ABC de lados *a, b e c,* o quadrado da medida do lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. Na linguagem algébrica: $a^2 = b^2 + c^2$".

PROPRIEDADE 30

"A área de uma região triangular é igual a base vezes a altura dividido por dois".

$A = \frac{b \cdot a}{2}$, sendo b a base do triângulo e a altura desse triângulo.

PROPRIEDADE 27

"O perímetro de uma figura qualquer é a soma de todos os lados dessa figura".

$T_{10\pi17}$

PROPRIEDADE 30

"A área de uma região triangular é igual a base vezes a altura dividido por dois".

$A = \frac{b \cdot a}{2}$, sendo b a base do triângulo e a altura desse triângulo.

PROPRIEDADE 33

"A área da região triangular pode ser calculada a partir da medida de seus três lados a, b e c com a seguinte fórmula: $A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$, sendo $p = \frac{a+b+c}{2}$".

$T_{12\pi18}$

PROPRIEDADE 10

"Se três lados dos triângulos são congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LLL"

PROPRIEDADE 11

"Se dois ângulos são congruentes e o lado compreendido entre eles também é congruente, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - ALA"

PROPRIEDADE 9

"Se dois lados dos triângulos forem congruentes e o ângulo formado por eles também for congruentes, então podemos afirmar que esses dois triângulos são congruentes. Caso de congruência - LAL"

TRANSPORTE DE TRIÂNGULOS

- Transporte de triângulos utilizando o caso LLL com o uso da régua e do compasso.
- Transporte de triângulos utilizando o caso ALA com o uso da régua, do transferidor e do compasso.
- Transporte de triângulos utilizando o caso ALA com o uso da régua, do compasso e do transferidor.

$T_{12\pi19}$

PROPRIEDADE 34

"Em todo triângulo, a medida do lado maior é sempre menor do que a soma das medidas dos outros dois lados".

DEFINIÇÃO 8

"Um triângulo é escaleno quando têm todos os três lados com medidas diferentes".

$T_{12\pi20}$

PROPRIEDADE 35

“O circuncentro de um triângulo é o pondo de encontro das mediatrizes dos lados desse triângulo e, é o centro da circunferência circunscrita à esse triângulo”.

DEFINIÇÃO 3

“Um triângulo é chamado do acutângulo quando tem os três ângulos agudos”.

DEFINIÇÃO 4

“Um triângulo é chamado do obtusângulo quando tem um ângulo obtuso e os outro dois ângulos agudos”.

DEFINIÇÃO 5

“Um triângulo é retângulo quando tem um ângulo reto/ângulo de 90° e os outros dois ângulos agudos”.