Felipe Vieira

Produtos Cruzados por Ações de Semigrupos Inversos e Ações Parciais de Grupos

Florianópolis

Janeiro de 2008

Felipe Vieira

Produtos Cruzados por Ações de Semigrupos Inversos e Ações Parciais de Grupos

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Orientador:
Prof. Dr. Ruy Exel Filho

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis

Janeiro de 2008

Dissertação de Mestrado sob o título *Produtos Cruzados por Ações de Semigrupos Inversos e Ações Parciais de Grupos*, defendida por Felipe Vieira e aprovada em 25 de Janeiro de 2008, em Florianópolis, Estado de Santa Catarina, pela comissão examinadora constituída pelos doutores:

Prof. Dr. Ruy Exel Filho
Orientador

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Danilo Royer
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Michael Dokuchaev
Universidade de São Paulo

Agradecimentos

Primeiramente devo agradecer à minha noiva Louise. Por tudo que aprendi convivendo com ela e por todo amor e carinho que ela me dá e paciência que ela tem, pelas vezes em que eu precisava estudar e não podia dar toda atenção que ela merece.

Devo agradecer também à minha família por todo apoio emocional que ganhava ao me desligar um pouco da vida acadêmica aqui de Florianópolis indo para casa da minha mãe. Além disso, tenho que agradecer todo o apoio financeiro que meu pai me forneceu enquanto precisava.

Agradeço imensamente o Professor Ruy Exel, por todo o auxílio acadêmico nas intermináveis horas em que eu tirava minhas dúvidas. Além disso, por ser uma ótima pessoa na qual posso me espelhar profissionalmente.

Também agradeço todos os outros professores que me auxiliaram e de alguma forma atravessaram meu caminho, como professores ou orientadores. Em especial tenho uma profunda gratidão pelo Professor José Luiz Rosas Pinho, pelos 3 anos de convívio no PET, assim como o Professor Oscar Ricardo Janesch, pela orientação no Trabalho de Conclusão de Curso da graduação.

Acho que um dos maiores motivos para não ficarmos loucos estudando matemática é o convívio entre os amigos, os cafezinhos, os lanches da tarde... Quero deixar meu agradecimento pelas ajudas matemáticas, e as ajudas para tirar a matemática um pouco da cabeça, a todo o pessoal do mestrado: Rodrigo, Grasielli, Márcio, Gilberto (os 2), Felipe, Alisson, Alda, Giuliano, Daiane, Saulo, Leonardo, Lucas, Graciele. E aos amigos que fiz durante a graduação: Léo, Paulo, Monique, Carla, Karla, Asteroide, Juliana Paz, Ana Beatriz, Edison, João, Mael, Cauê..., e como não poderia esquecer, meus colegas de apartamento: Bruno, Ferraro, Charles e Alex, e a todos os outros que eu possa ter cometido o absurdo de ter esquecido.

Agradeço o apoio financeiro do CAPES.

Resumo

Começaremos este trabalho mostrando que o Semigrupo Universal $S(G)$ associado a um grupo G é um Semigrupo Inverso. Assim, veremos que existe uma bijeção entre as Ações Parciais de G e as Ações de $S(G)$. Com isso, provaremos que o Produto Cruzado Parcial de uma ação parcial de G numa Álgebra (respect. C*-Álgebra) A é isomorfo ao Produto Cruzado Parcial de $S(G)$ na mesma álgebra (respect. C*-álgebra), relativo a ação que está em bijeção com aquela ação parcial.

Além disso apresentaremos uma definição alternativa para o produto cruzado parcial de uma ação de semigrupo inverso, que é mais simples e equivalente àquela introduzida por Sieben em [13].

Abstract

We begin this work showing that the Universal Semigroup $S(G)$ associated to a Group G is an Inverse Semigroup. So, we will see that exists a bijection between the Partial Actions of G and the Actions of $S(G)$. With this, we will prove that the Partial Crossed Product by a partial action of G in an Algebra (respect. C*-Algebra) A is isomorphic to the Partial Crossed Product of $S(G)$ in the same algebra (respect. C*-algebra), on to the action that is in bijection with that partial action.

Also we present an alternative definition to the partial crossed product by an action of inverse semigroup, simpler and equivalent to that introduced by Sieben in [13].

Sumário

Introdução

Em 1994, em sua dissertação de mestrado, Nándor Sieben introduziu o conceito de Produtos Cruzados por uma Ação de um Semigrupo Inverso utilizando Representações Covariantes. Aqui apresentaremos uma definição equivalente àquela sem usar estas representações, inspirada na definição de produto cruzado de uma ação parcial.

Além disso, dentre outros resultados não menos importantes, mostraremos que o Produto Cruzado por uma Ação Parcial de Grupo é isomorfo ao Produto Cruzado por uma Ação de um certo Semigrupo Inverso. Assim, obtemos mais uma maneira de estudar esses objetos, disponibilizando uma ferramenta a mais para o entendimento dessas estruturas.

Como sabemos, um grupo é um conjunto que possui uma operação (multiplicação) associativa com um elemento neutro e que, para cada elemento do conjunto, há um elemento inverso (para mais detalhes, veja [6]). Um Semigrupo Inverso é uma estrutura muito parecida. Este também possui uma operação associativa e, de um certo ponto de vista, também possui as propriedades de elemento neutro e elemento inverso.

O que fazemos no Capítulo 1, que é baseado em [8], é apresentar ao leitor a bela teoria de Semigrupos Inversos e mostrar que todo semigrupo inverso pode ser visto, a menos de isomorfismos, como um conjunto de bijeções (Teorema de Wagner-Preston). Também neste Capítulo, apresentamos o Semigrupo Universal $S(G)$ associado a um grupo G e mostraremos que este é um semigrupo inverso. Além disso, veremos que seus elementos têm uma forma padrão, uma forma canônica, que facilita muito qualquer demonstração.

Para construirmos os Produtos Cruzados Parciais Algébricos, precisamos de Ações Parciais de Grupo e de Ações de Semigrupos Inversos. No Capítulo 2, enunciamos as definições e algumas das mais importantes propriedades delas. Aqui, tudo é feito no ambiente algébrico, isto é, nossas ações parciais (respect. ações) são de um grupo (respect. semigrupo inverso) numa álgebra. Em [4], Exel mostrou que existe uma bijeção entre as ações parciais de um grupo em um conjunto e as ações do semigrupo universal associado ao grupo no mesmo conjunto. Neste Capítulo 2, apresentamos um resultado particular, onde tanto as ações parciais quanto as ações agem sobre uma álgebra.

No Capítulo 3, definimos e exploramos os conceitos dos Produtos Cruzados Parciais

Algébricos, envolvendo ações ou ações parciais, também no ambiente algébrico. Dokuchaev e Exel em [2] mostraram que sob certas condições sobre a álgebra, o produto cruzado parcial algébrico de uma ação parcial é associativo. Mostraremos aqui que se a álgebra satisfazer as mesmas condições, o produto cruzado algébrico por uma ação de um semigrupo inverso também será associativo.

Assim, dada uma ação parcial α do grupo G na álgebra A, obtemos, pelo Capítulo 2, uma ação β do semigrupo universal $S(G)$ na mesma álgebra A. No fim deste Capítulo 3, mostraremos então que o Produto Cruzado Parcial Algébrico da ação parcial α é isomorfo ao Produto Cruzado Parcial Algébrico da ação β. Em sua dissertação de mestrado, Sieben fez este resultado para um outro semigrupo inverso, que dependia da ação parcial de grupo escolhida.

Nos Capítulos 4 e 5 consideramos tanto ações quanto os Produtos Cruzados no ambiente C*-algébrico. Como C*-álgebras são álgebras, basta estendermos todos os resultados que fizemos nos Capítulos 2 e 3, o que poupa várias linhas. Assim daremos as novas definições e adaptaremos estes resultados. No Capítulo 4, veremos que também existe uma bijeção entre as ações parciais de um grupo numa C*-álgebra e as ações do semigrupo universal associado ao grupo na mesma C*-álgebra.

No Capítulo 5, como estaremos num ambiente C*-algébrico, os produtos cruzados são mencionados apenas como Produtos Cruzados Parciais (sem a palavra "algébrico"). Para defini-los, utilizamos o conceito de C*-álgebras envolventes. Não dedicamos um capítulo ou apêndice para falarmos sobre este método de construção de C*-álgebras, mas recomendamos fortemente [1]. Ainda neste Capítulo, analogamente ao que fizemos no Capítulo 3, construiremos o isomorfismo existente entre o Produto Cruzado Parcial de uma ação parcial de um grupo numa C*-álgebra e o Produto Cruzado Parcial da ação associada (pela bijeção do Cap. 4) do semigrupo universal do grupo na mesma C*-álgebra.

No Capítulo 6 apresentamos as Representações Covariantes, tanto de uma ação de semigrupo, quanto de uma ação parcial. Mostraremos que as representações covariantes de uma ação parcial de um grupo G estão em bijeção com as representações covariantes da ação de $S(G)$ associada pela bijeção do Capítulo 4. Utilizando estas representações, Sieben definiu Produtos Cruzados Parciais de uma ação de semigrupo inverso por uma C*-álgebra. Terminamos este trabalho mostrando que esta definição é equivalente à definição que apresentamos no Capítulo 5.

1 Semigrupos Inversos

Neste Capítulo faremos uma breve introdução à Teoria de Semigrupos e Semigrupos Inversos.
Provaremos o Teorema de Wagner-Preston, que afirma que, a menos de isomorfismos, todo semigrupo inverso é um subsemigrupo inverso de um conjunto de bijeções.
Para mais datalhes sobre Semigrupos Inversos, veja [8].

Também apresentaremos o Semigrupo Universal associado a um grupo e provaremos que aquele é um Semigrupo Inverso.

Definição 1.0.1 : *Um semigrupo é um conjunto S com uma operação*

$$\cdot : S \times S \to S$$
$$(a, b) \mapsto a.b$$

associativa.

Definição 1.0.2 : *Um semigrupo inverso é um semigrupo S tal que:*

(i) S é regular: $\forall a \in S, \exists b \in S$ tal que $a = aba$ e $b = bab$ (b é chamado inverso de a),

(ii) os idempotentes de S comutam.

Observação 1.0.3 : *Note que, se trocarmos a ordem das igualdades em (i) acima, concluímos também que a é inverso de b.*

Observação 1.0.4 : *Se f é idempotente num semigrupo inverso, então $fff = f$ e portanto f é inverso dele mesmo.*

Exemplo 1.0.5 : *Seja X um conjunto. O conjunto das bijeções parciais de X, isto é, bijeções entre subconjuntos de X, denotado $I(X)$, é um semigrupo inverso.*

Defina, para $f, g \in I(X)$, $f \circ g(x) = f(g(x))$ para aqueles $x \in g^{-1}(\mathrm{Im}g \cap \mathrm{Dom}f)$. Sabemos que a operação de composição é associativa e, portanto, $I(X)$ é semigrupo. Se $f : A \to B$, claramente vemos que $f^{-1} : B \to A$ é a inversa de f como em (i) da Def. 1.0.2 e, portanto, $I(X)$ é regular.
Vamos calcular os idempotentes de $I(X)$. Suponha $f : A \to B$ idempotente, ou seja, $f \circ f = f$. Como f é uma bijeção, podemos aplicar a função f^{-1} pela esquerda nos dois lados da igualdade acima e obter $f = Id_A$. Logo, os idempotentes de $I(X)$ são as identidades sobre os subconjuntos de X. Se A e B são subconjuntos de X, temos:

$$Id_A \circ Id_B = Id_{A \cap B} = Id_{B \cap A} = Id_B \circ Id_A.$$

Logo, os idempotentes de $I(X)$ comutam e este é um semigrupo inverso.

■

Exemplo 1.0.6 *: Seja X um espaço topológico. O conjunto dos Homeomorfismos entre subconjuntos abertos de X, com a operação definida como acima (composição), que denotaremos $PHomeo(X)$, é um semigrupo inverso.*

Imediatamente perceba que $PHomeo(X) \subseteq I(X)$. Assim, como o conjunto dos homeomorfismos é fechado por composição e por inversão, segue que $PHomeo(X)$ é um semigrupo inverso.

■

O próximo teorema mostra uma segunda forma de caracterizarmos um semigrupo inverso.

Teorema 1.0.7 *: Seja S um semigrupo regular. Os idempotentes de S comutam se, e somente se, cada elemento de S tem único inverso.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Sejam s e t inversos de r em S. Por definição $rsr = r$, $rtr = r$, $srs = s$ e $trt = t$. Temos que sr, rs, tr e rt são idempotentes, pois:

$$(sr)(sr) = s(rsr) = sr$$
$$(tr)(tr) = t(rtr) = tr$$
$$(rs)(rs) = r(srs) = rs$$
$$(rt)(rt) = r(trt) = rt.$$

Ainda, por hipótese, eles comutam entre si e temos:

$$s = srs = s(rtr)s = (sr)(tr)s = (tr)(sr)s = t(rsr)s = trs = t(rtr)s =$$
$$= t(rt)(rs) = t(rs)(rt) = t(rsr)t = trt = t.$$

Logo o inverso é único.

($\Leftarrow$) Sejam f e i idempotentes de S e x um inverso de fi (note que por Obs. 1.0.3, segue que fi é um inverso de x). Temos que ixf também é inverso de fi:

$$fi(ixf)fi = f(ii)x(ff)i = fi(x)fi = fi$$
$$(ixf)fi(ixf) = ix(ff)(ii)xf = i(xfix)f = ixf,$$

e é idempotente:

$$(ixf)(ixf) = i(xfix)f = ixf.$$

Como por hipótese o inverso é único, $x = ixf$ é idempotente e pela Obs. 1.0.4, x é o inverso dele mesmo. Logo, $fi = x$ e fi é idempotente. Trocando as letras f e i de lugar, concluímos também que if é idempotente. Agora:

$$if(fi)if = i(ff)(ii)f = (if)(if) = if$$
$$fi(if)fi = f(ii)(ff)i = (fi)(fi) = fi, \text{logo } if \text{ é inverso de } fi,$$

e como fi é idempotente, é inverso de si mesmo. Portanto, já que o inverso é único, $fi = if$.

$\blacksquare$

Assim, semigrupos inversos podem ser definidos como aqueles semigrupos S nos quais cada elemento $s \in S$ possui único inverso, que denotaremos $s^* \in S$, tal que $s = ss^*s$ e $s^* = s^*ss^*$.

Note que para todo $s \in S$, s^*s é um elemento neutro à direita e ss^* é um elemento neutro à esquerda de s.

Exemplo 1.0.8 : *Vamos mostrar que se X é um conjunto qualquer, o inverso em $I(X)$ é único.*

Sejam A e B subconjuntos de X e $f : A \to B$ uma bijeção. Sabemos que $f^{-1} : B \to A$ é uma inversa (no sentido de semigrupos inversos) para f. Suponha que $g : C \to D$ é outra inversa. Já que $f = fgf$, $\mathrm{Im}(gf) \subseteq \mathrm{Dom} f$. Então

$$f = fgf \Rightarrow f^{-1}(f) = f^{-1}(fgf) \Rightarrow Id_A = gf \Rightarrow g = f^{-1}.$$

Logo $B = C$ e $A = D$ e o inverso é único.

■

Vamos ver algumas propriedades de semigrupos inversos:

Proposição 1.0.9 *: Seja S um semigrupo inverso. Então valem:*

(1) Para todo $s \in S$, s^*s e ss^* são idempotentes.

(2) $(s^*)^* = s, \forall s \in S$.

(3) Para todo idempotente $f \in S$ e qualquer $s \in S$, s^*fs é idempotente.

(4) Se f é idempotente, $f^* = f$.

(5) $(s_1s_2 \dots s_n)^* = s_n^* \dots s_2^*s_1^*$, $\forall s_i \in S$, $n \geq 2$.

Demonstração: (1): $(s^*s)(s^*s) = (s^*ss^*)s = s^*s$ e $(ss^*)(ss^*) = (ss^*s)s^* = ss^*$.
(2): Segue da Obs. 1.0.3 que o inverso do inverso de um elemento é o próprio elemento, ou seja, $(s^*)^* = s$.
(3): Como os idempotentes comutam e (ss^*) e f são idempotentes, segue que:

$$(s^*fs)(s^*fs) = s^*f(ss^*)fs = s^*(ss^*)(ff)s = s^*fs.$$

(4): Segue da Obs. 1.0.4.
(5): $\underline{n = 2 :}$ Temos que $s_2^*s_1^*$ é inverso de s_1s_2, já que

$$s_1s_2(s_2^*s_1^*)s_1s_2 = s_1(s_2s_2^*)(s_1^*s_1)s_2 = s_1(s_1^*s_1)(s_2s_2^*)s_2 = s_1s_2,$$
$$(s_2^*s_1^*)s_1s_2(s_2^*s_1^*) = s_2^*(s_1^*s_1)(s_2s_2^*)s_1^* = s_2^*(s_2s_2^*)(s_1^*s_1)s_1^* = s_2^*s_1^*.$$

Como o inverso é único, $(s_1s_2)^* = s_2^*s_1^*$.
$\underline{n \text{ qualquer}}$: Suponha que o resultado vale para $k < n$. Assim, por indução:

$$(s_1s_2 \dots s_n)^* = s_n^*(s_1s_2 \dots s_{n-1})^* = s_n^* \dots s_2^*s_1^*.$$

■

Pela própria definição de semigrupo inverso, é natural acreditarmos que os idempotentes têm um papel importante na teoria destes semigrupos. Veremos adiante que usando os idempotentes, define-se uma ordem parcial em um semigrupo inverso.

O conjunto dos idempotentes de um semigrupo (não necessariamente inverso) S é denotado $E(S)$. Se A é um subconjunto de S, $E(A) = A \cap E(S)$. No caso de S ser um semigrupo inverso os idempotentes comutam, isto é, $E(S)$ é comutativo e, portanto, este é fechado sob produto, pois se f, $i \in E(S)$, $(fi)(fi) = fifi = ffii = fi$.
E pelo item (4) da Prop. 1.0.9, vemos que $E(S)$ é fechado sob inversão e, portanto, é um subsemigrupo inverso de S.

Proposição 1.0.10 : *Seja S um semigrupo inverso. Então:*

(1) Para todo idempotente $i \in S$ e qualquer $s \in S$, existe idempotente $f \in S$ tal que $is = sf$.

(2) Para todo idempotente $i \in S$ e qualquer $s \in S$, existe idempotente $f \in S$ tal que $si = fs$.

Demonstração: (1): Considere $f = s^*is$, idempotente pelo item (3) da Prop. 1.0.9. Então, como ss^* e i comutam, $sf = (ss^*)is = i(ss^*)s = is$.
(2): Tome $f = sis^*$, que também é idempotente pelo item (3) da Prop. 1.0.9. Assim $fs = si(s^*s) = s(s^*s)i = si$.

■

Proposição 1.0.11 : *Grupos são os semigrupos inversos que têm um único idempotente.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja 1 a unidade do grupo e para um elemento g qualquer, denote g^{-1} seu inverso, ou seja, $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$. Um grupo claramente é um semigrupo. Vamos usar a caracterização do Teorema 1.0.7 para mostrar que o grupo é um semigrupo inverso. Claramente g^{-1} é uma inversa para g também no sentido de semigrupos inversos. Mas, suponha que exista h tal que $g = ghg$ e $h = hgh$. Então:

$$g = ghg \Rightarrow g^{-1}gg^{-1} = g^{-1}ghgg^{-1} \Rightarrow g^{-1} = h.$$

Logo o inverso de um elemento do grupo, no sentido de semigrupos inversos, é único. Falta mostrar que o grupo só possui um idempotente. Claramente a unidade 1 do grupo é idempotente. Assim, seja f outro idempotente. Então

$$ff = f \Rightarrow f^{-1}ff = f^{-1}f \Rightarrow f = 1.$$

Assim, o único idempotente é a unidade do grupo.
($\Leftarrow$) Seja S um semigrupo inverso com único idempotente. Bem, para todo $s \in S$, ss^* e s^*s são idempotentes, logo são iguais. Então defina $1 := ss^* = s^*s$ e vamos mostrar que S é um grupo com unidade 1.
Elemento Neutro: Dado $r \in S$, $r1 = rr^*r = r = rr^*r = 1r$, portanto 1 é elemento neutro de S.
Elemento Inverso: Para $r \in S$, $rr^* = 1 = r^*r$, logo r^* é o inverso de r, no sentido de grupos.
Portanto S é um grupo.

■

Seja $r \in S$. Defina $rS = \{rs : s \in S\}$ e $Sr = \{sr : s \in S\}$. Dizemos que r é o gerador à esquerda de rS e o gerador à direira de Sr. Utilizaremos estes conjuntos na próxima Proposição e no Teorema de Wagner-Preston, que nos fornece uma representação para todos semigrupos inversos. Para isso, vamos apresentar algumas propriedades envolvendo estes conjuntos.

Proposição 1.0.12 *: Seja S um semigrupo inverso. Então:*

(1) $rS = rr^*S$ $\forall r \in S$ e rr^* é o único idempotente gerador à esquerda de rS.

(2) $Sr = Sr^*r$ $\forall r \in S$ e r^*r é o único idempotente gerador à direita de Sr.

(3) $fS \cap iS = fiS$, para f, $i \in E(S)$.

(4) $Sf \cap Si = Sfi$, para f, $i \in E(S)$.

Demonstração: (1): Para $r \in S$, $rS = rr^*rS \subseteq rr^*S \subseteq rS$. Logo $rS = rr^*S$.
Seja $f \in S$ um idempotente tal que $rS = rr^*S = fS$. Então

$$rr^* = (rr^*)(rr^*) \in rr^*S = fS \Rightarrow \exists s \in S \text{ tal que } rr^* = fs, \text{ e}$$
$$f = ff \in fS = rr^*S \Rightarrow \exists t \in S \text{ tal que } f = rr^*t.$$

Assim,
$$rr^* = fs = ffs = f(rr^*) = (rr^*)f = (rr^*)(rr^*t) = rr^*t = f.$$

(2): Análogo a (1).
(3): ($\subseteq$) Seja $r \in fS \cap iS$. Então $r = fs = it$, para s, $t \in S$.

Bem, $fr = f(fs) = fs = r$ e $ir = i(it) = it = r$, logo $r = ir = ifr \in ifS$.
($\supseteq$) Se $r \in ifS$, $r = ifs$ para algum $s \in S$. Mas $ifr = if(ifs) = iiffs = ifs = r$. Assim, $r = ifr = i(ifr) = ir \in iS$ e $r = ifr = iffr = f(ifr) = fr \in fS$.
(4): Análogo a (3).

$\blacksquare$

Seja S um semigrupo inverso. Define-se então em S a seguinte relação de ordem:

$$s \leq t \Leftrightarrow s = tf, \text{ para algum idempotente } f \in S.$$

Afirmação: $\leq$ *é uma ordem parcial.*

Reflexividade: $s = ss^*s$ e s^*s é idempotente. Logo, $s \leq s$.
Simetria: Suponha $r \leq s$ e $s \leq r$. Então $r = sf$ e $s = ri$ para $f,\ i \in E(S)$. Note que $r = sf = ss^*sf = sf(s^*s) = rs^*s$ e $s = ri = rr^*ri = ri(r^*r) = s(r^*r)$. Logo, $s = sr^*r = s(s^*sfs^*)(sfs^*s) = ss^*sf(s^*s)fs^*s = sff(s^*s)s^*s = sfs^*s = r$.
Transitividade: Se $r \leq s$ e $s \leq t$, $r = sf$ e $s = ti$ para $f,\ i \in E(S)$ e então $r = sf = tif$. Como if é idempotente, $r \leq t$.

$\blacksquare$

Vamos ver alguns resultados a respeito dessa ordem parcial.

Proposição 1.0.13 : *Seja S um semigrupo inverso e sejam $s, t \in S$. Então são equivalentes:*

(1) $s \leq t$,

(2) $s = it$ *para algum idempotente* $i \in S$,

(3) $s^* \leq t^*$,

(4) $s = ss^*t$,

(5) $s = ts^*s$.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2): Suponha $s = tf$, f idempotente. Considere $i = tft^*$. Então $it = tft^*t = t(t^*t)f = tf = s$.

$(2) \Rightarrow (3)$: $s = it \Rightarrow s^* = t^*i \Rightarrow s^* \le t^*$.
$(3) \Rightarrow (4)$: Suponha $s^* = t^*f$. Então $s = ft$ e portanto $ss^*t = ftt^*ft = ff(tt^*)t = ft = s$.
$(4) \Rightarrow (5)$: Como (ss^*) é idempotente, (1) da Prop. 1.0.10 garante que $s = ss^*t = tf$ para algum idempotente $f \in S$. Mas $sf = tff = tf = s$ e portanto $ts^*s = ts^*sf = tf(s^*s) = ss^*s = s$.
$(5) \Rightarrow (1)$: s^*s é idempotente, logo $s \le t$.

■

Mais algumas afirmações envolvendo essa ordem parcial:

Proposição 1.0.14 : *Seja S um semigrupo inverso. Então valem:*

(1) Para $f,\, i \in E(S)$, $f \le i \Leftrightarrow f = fi = if$.

(2) Para $r,\, s,\, t,\, u \in S$, $r \le s$ e $t \le u \Rightarrow rt \le su$.

(3) Para $s,\, t \in S$, $s \le t \Rightarrow s^*s \le t^*t$ e $ss^* \le tt^*$.

(4) Se $i \in E(S)$ e $r \le i$, então $r \in E(S)$ (por isso, diz-se que $E(S)$ é um ideal de ordem).

Demonstração: (1): Por $(1) \Leftrightarrow (5)$ da Prop. anterior, $f \le i \Leftrightarrow f = if^*f = if = fi$ (idempotentes comutam).
(2): Por definição, $r = sf$ e $t = ui$. Assim, $rt = sfui$. Por (1) da Prop. 1.0.10, existe j idempotente tal que $fu = uj$. Logo, $rt = sfui = suji$. Como ji é idempotente, $rt \le su$.
(3): Por $(1) \Leftrightarrow (3)$ da Prop. anterior, $s \le t \Leftrightarrow s^* \le t^*$. Aplicando (2) acima, $s^*s \le t^*t$ e $ss^* \le tt^*$.
(4): Bem, $r \le i \Rightarrow r = if$, $f \in E(S)$. Como produto de idempotentes é idempotente, $r \in E(S)$.

■

Exemplo 1.0.15 : *Para um conjunto qualquer X, define-se em $I(X)$ a seguinte relação de ordem:*

$$f \tilde{\le} g \Leftrightarrow Dom f \subseteq Dom g \text{ e } g = f \text{ em } Dom f.$$

Vamos provar que esta definição é equivalente àquela para semigrupos inversos.

Pela relação de ordem definida para semigrupos inversos, se f, $g \in I(X)$, $f \leq g \Leftrightarrow f = gi$, para i idempotente de $I(X)$. Mas como vimos no Ex. 1.0.5, $i = Id_A$, para algum $A \subseteq X$. Logo, $f = g \circ Id_A = g|_A$, ou seja, Dom$f$=Dom$g \cap A$, que implica Dom$f \subseteq$ Dom$g$ e $f = g$ em Dom$f$.

Por outro lado, se $f \widetilde{\leq} g$ então Dom$f \subseteq$ Dom$g$ e $g = f$ em Dom$f$. Assim é óbvio que $f = g \circ I_{\text{Dom}f}$.

■

Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, que chamaremos *poset* (do inglês *partially ordered set*) e tome a, b e c em P. Se $a \leq b$ e $a \leq c$, a é dito limite inferior de b e c e se a é o maior limite inferior, este é chamado *maior limite inferior de b e c*, denotado $b \wedge c$. Um *meet semilattice* é um *poset* onde todo par de elementos possui maior limite inferior. Vamos mostrar que o conjunto dos idempotentes de um semigrupo inverso é um *meet semilattice.*

Observação 1.0.16 *: Esta "operação" $\wedge$ é conhecida como meet e esse é o motivo do nome meet semilattice. Da mesma maneira, pode-se definir a operação $\vee$ (conhecida como join), que seria o menor limite superior. Se num poset todo par de elementos possui um menor limite superior, este poset é chamado join semilattice. Naturalmente, se um conjunto é um meet semilattice e também um join semilattice, ele é chamado simplesmente de semilattice (semi-reticulado).*

Proposição 1.0.17 *: Seja S um semigrupo (não necessariamente inverso). Defina em $E(S)$*

$$f \leq i \Leftrightarrow f = fi = if.$$

Então $\leq$ é ordem parcial em $E(S)$. Se S é um semigrupo inverso, $(E(S), \leq)$ é um meet semilattice.

Demonstração: Primeiro vamos provar que $\leq$ é, de fato, uma ordem parcial:

<u>Reflexividade:</u> Se $f \in E(S)$, $f = ff$, logo $f \leq f$.

<u>Simetria:</u> Suponha $f \leq i$ e $i \leq f$. Então $f = fi = if$ e $i = if = fi$. Logo $f = i$.

<u>Transitividade:</u> Se $f \leq i$ e $i \leq j$, $f = fi = if$ e $i = ij = ji$, logo $f = fi = fij = fj$ e $f = if = jif = jf$. Portanto $f \leq j$.

Agora, se S é um semigrupo inverso e f, $i \in E(S)$:

$$fi = (fi)i = i(fi) \Rightarrow fi \leq i,$$
$$fi = f(fi) = (fi)f \Rightarrow fi \leq f.$$

Logo $fi \leq f$, i. Vamos provar que fi é o maior limite inferior de f e i. Suponha $j \leq f$, i, ou seja, $j = jf = fj$ e $j = ji = ij$. Então

$$j(fi) = (jf)i = ji = j,$$
$$(fi)j = f(ij) = fj = j.$$

Ou seja, $j \leq fi$. Portanto, $f \wedge i = fi$.

■

Por este motivo, o conjunto dos idempotentes de um semigrupo inverso é chamado "semireticulado de idempotentes".

Note que num semigrupo inverso S, (1) da Prop. 1.0.14 implica que a ordem parcial definida acima para $E(S)$ é equivalente àquela definida anteriormente.

Proposição 1.0.18 *: Meet semilattices são os semigrupos inversos onde todo elemento é idempotente.*

Demonstração: Se em um semigrupo inverso S todo elemento é idempotente, então $S = E(S)$ e pela Proposição anterior $(S, \leq) = (E(S), \leq)$ é um *meet semilattice*.
Agora, seja S um *meet semilattice*. Vamos provar que com a operação $\wedge$, S é um semigrupo inverso com todos elementos idempotentes.
<u>Associatividade de $\wedge$:</u> Sejam r, s e t em S e defina $a := r \wedge (s \wedge t)$ e $b := (r \wedge s) \wedge t$. Vamos mostrar que $a = b$.

<u>$a \leq b$:</u> Por hipótese $a \leq r$ e $a \leq s \wedge t$, que implica $a \leq r$, $a \leq s$ e $a \leq t$. Como $r \wedge s$ é o maior elemento menor que r e s, $a \leq r \wedge s$. Portanto, $a \leq t$ e $a \leq r \wedge s$, que implicam $a \leq (r \wedge s) \wedge t = b$.

<u>$b \leq a$:</u> Analogamente ao item acima,

$$b \leq r \wedge s \text{ e } b \leq t \Rightarrow b \leq r, b \leq s \text{ e } b \leq t \Rightarrow b \leq r \text{ e } b \leq s \wedge t \Rightarrow b \leq r \wedge (s \wedge t) = a.$$

Logo $a = b$ e $\wedge$ é associativo.
<u>Para todo $s \in S$, $s \wedge s = s$:</u> Bem, $s \leq s$ e pela definição de $\wedge$, $s \leq s \wedge s \leq s$. Logo, s é

idempotente em relação a operação $\wedge$.

Assim, já concluímos também que todos elementos de S são inversos de si próprios. Falta mostrar que este inverso é único.

Em S, o inverso de um elemento é único: Seja $r \in S$ um inverso de $s \in S$. Então $r = r \wedge s \wedge r$ e $s = s \wedge r \wedge s$. Da primeira igualdade temos $r \leq s$ e da segunda, $s \leq r$. Logo $r = s$.

Portanto, vale a Proposição.

■

Já vimos que para um conjunto X qualquer, $I(X)$, o conjunto das bijeções parciais de X, é um semigrupo inverso. O Teorema de Wagner-Preston, que enunciaremos a seguir, afirma que todo semigrupo inverso é, a menos de isomorfismos, um subsemigrupo inverso de $I(X)$, para algum conjunto X.

Teorema 1.0.19 (Wagner-Preston) *: Seja S um semigrupo inverso. Então existe um conjunto X e um homomorfismo injetor $\theta : S \to I(X)$ tal que $r \leq s \Leftrightarrow \theta(r) \leq \theta(s)$.*

Demonstração: Para $r \in S$, defina $\theta_r : r^*rS \to rr^*S$, $\theta_r(x) = rx$.

Esta função está bem definida já que por (1) da Prop. 1.0.12:

$$\theta_r(r^*rS) = rr^*rS = rS = rr^*S.$$

Note também que $\theta_{r^*} : rr^*S \to r^*rS$ é inversa de θ_r:

$$\theta_{r^*}\theta_r(r^*rS) = \theta_{r^*}(rr^*rS) = r^*rr^*rS = r^*rS$$
$$\theta_r\theta_{r^*}(rr^*S) = \theta_r(r^*rr^*S) = rr^*rr^*S = rr^*S.$$

Assim θ_r é bijeção. Portanto, defina, para $r \in S$,

$$\theta : S \to I(S)$$
$$r \mapsto \theta_r.$$

θ é homomorfismo: Sejam r, $s \in S$. Vamos mostrar que $\theta_r\theta_s = \theta_{rs}$. Primeiramente, note que $s^*r^*rS = s^*r^*rsS$:

$$s^*r^*rS = s^*ss^*r^*rS = s^*r^*r(ss^*)S \subseteq s^*r^*rsS \subseteq s^*r^*rS.$$

Então, usando (3) da Prop. 1.0.12 vamos mostrar que Dom$(\theta_r\theta_s)$ =Dom(θ_{rs}):

$$\begin{aligned}\text{Dom}(\theta_r\theta_s) = \theta_s^{-1}(\text{Dom}\theta_r \cap \text{Im}\theta_s) = \theta_{s^*}(r^*rS \cap ss^*S) = \theta_{s^*}(r^*rss^*S) = s^*r^*rss^*S = \\ = s^*ss^*r^*rS = s^*r^*rS = s^*r^*rsS = \text{Dom}(\theta_{rs}).\end{aligned}$$

Como $\theta_{rs}(x) = \theta_r\theta_s(x)$ é imediato para aqueles x do domínio, segue que θ é um homomorfismo.

Vamos provar a segunda parte do Teorema.
$(\Rightarrow)$ $r \leq s \Rightarrow r^*r \leq s^*s \Rightarrow r^*r = s^*sf$, $f \in E(S) \Rightarrow r^*rS \subseteq s^*sS$. Logo Dom$(\theta_r) \subseteq$ Dom(θ_s).
Para mostrar que $\theta_r = \theta_s$ em Dom(θ_r), seja $x \in r^*rS$, ou seja, $x = r^*rt$ para $t \in S$. Como $r^*rx = r^*rr^*rt = r^*rt = x$ e $r \leq s$, segue de (5) da Prop. 1.0.13 que $\theta_s(x) = sx = sr^*rx = rx = \theta_r(x)$. Logo $\theta_r \leq \theta_s$.
$(\Leftarrow)$ $\theta_r \leq \theta_s \Rightarrow r^*rS \subseteq s^*sS$. Como $r^* = r^*rr^* \in r^*rS$ e r^*r é idempotente:

$$\theta_r(r^*) = \theta_s(r^*) \Rightarrow rr^* = sr^* \Rightarrow rr^*r = sr^*r \Rightarrow r = sr^*r \Rightarrow r \leq s.$$

<u>θ é injetiva:</u> Se $\theta_r = \theta_s$, temos $r \leq s$ e $s \leq r$, portanto $r = s$.

■

1.1 O Semigrupo Universal

Nesta seção, estamos interessados em construir um semigrupo universal mediante geradores e relações. Na categoria dos semigrupos, é possível construir objetos universais, bastaria construir o semigrupo livre a partir dos geradores e quocientá-lo pelas relações.

Nesta seção, G será um grupo com unidade e. Para mais detalhes sobre este semigrupo universal, veja [4].

Definição 1.1.1 : *Denotamos $S(G)$ o semigrupo universal gerado pelo conjunto $\{[g] : g \in G\}$ e pelas seguintes relações:*

(i) $[g^{-1}][g][h] = [g^{-1}][gh]$,

(ii) $[g][h][h^{-1}] = [gh][h^{-1}]$,

(iii) $[g][e] = [g]$.

É imediato da definição que $[e]$ é uma unidade de $S(G)$:

$$[e][g] = [gg^{-1}][g] = [g][g^{-1}][g] = [g][g^{-1}g] = [g][e] = [g].$$

Assim $S(G)$ é um semigrupo unital.

Nosso objetivo nesta seção, além de apresentar o semigrupo universal, é provar que este é um semigrupo inverso. E sua propriedade universal é extremamente importante para este fato. Assim, traduziremos esta propriedade na próxima proposição.

Proposição 1.1.2 *: Seja S um semigrupo e $f : G \to S$ uma aplicação tal que*

(i) $f(g^{-1})f(g)f(h) = f(g^{-1})f(gh)$,

(ii) $f(g)f(h)f(h^{-1}) = f(gh)f(h^{-1})$,

(iii) $f(g)f(e) = f(g)$.

Então existe único homomorfismo $\widehat{f} : S(G) \to S$ tal que o diagrama abaixo comuta (isto é, $\widehat{f}([g]) = f(g)$, $\forall g \in G$).

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\cdot]}"'] & S \\
S(G) \arrow[ur, "\widehat{f}"] &
\end{tikzcd}$$

■

Para provarmos que $S(G)$ é um semigrupo inverso, precisamos de um candidato a s^* para $s \in S(G)$. Considere $S(G)^{op}$ o conjunto com os mesmos elementos de $S(G)$, mas com produto definido

$$r \bullet s = sr,$$

onde o produto do lado direito é interpretado como àquele em $S(G)$. Facilmente conclui-se que $\bullet$ é uma operação associativa e, portanto, $S(G)^{op}$ é um semigrupo.

Proposição 1.1.3 *: A aplicação $f : G \to S(G)^{op}$, $f(g) = [g^{-1}]$ satisfaz $(i) - (iii)$ da Prop. 1.1.2.*

Demonstração: Sejam g, $h \in G$ e vamos provar que valem aqueles 3 ítens:
(i)

$$f(g^{-1}) \bullet f(g) \bullet f(h) = [g] \bullet ([g^{-1}] \bullet [h^{-1}]) = [g] \bullet ([h^{-1}][g^{-1}]) = [h^{-1}][g^{-1}][g]$$
$$= [h^{-1}g^{-1}][g] = [g] \bullet [h^{-1}g^{-1}] = f(g^{-1}) \bullet f(gh),$$

(ii)

$$f(g) \bullet f(h) \bullet f(h^{-1}) = ([g^{-1}] \bullet [h^{-1}]) \bullet [h] = ([h^{-1}][g^{-1}]) \bullet [h] = [h][h^{-1}][g^{-1}]$$
$$= [h][h^{-1}g^{-1}] = [h^{-1}g^{-1}] \bullet [h] = f(gh) \bullet f(h^{-1}),$$

(iii)

$$f(g) \bullet f(e) = [g^{-1}] \bullet [e] = [e][g^{-1}] = [g^{-1}] = f(g).$$

■

Assim, pela Prop. 1.1.2 existe único homomorfismo $* : S(G) \to S(G)^{op}$ tal que $*([g]) = [g^{-1}]$.
Para $s \in S(G)$, convenientemente defina $s^* = *(s)$. Note que $(rs)^* = *(rs) = *(r) \bullet *(s) = *(s) * (r) = s^* r^*$ e se considerarmos $* : S(G) \to S(G)$, este se comporta como um anti-homomorfismo. Mais adiante, veremos que s^* é o inverso de s.

Para $g \in G$, defina

$$\varepsilon_g = [g][g^{-1}].$$

Algumas propriedades envolvendo ε_g:

Proposição 1.1.4 *: Para todo g, $h \in G$:*

(1) $\varepsilon_g^* = \varepsilon_g = \varepsilon_g^2$,

(2) $[g]\varepsilon_h = \varepsilon_{gh}[g]$,

(3) $\varepsilon_g \varepsilon_h = \varepsilon_h \varepsilon_g$,

(4) $[g]^2 = \varepsilon_g [g^2]$.

Demonstração: Sejam g, $h \in G$:
(1):

$$\varepsilon_g^* = ([g][g^{-1}])^* = [g^{-1}]^*[g]^* = [g][g^{-1}] = \varepsilon_g = [g][g^{-1}][e] = [g][g^{-1}][gg^{-1}] =$$
$$= [g][g^{-1}][g][g^{-1}] = \varepsilon_g^2,$$

(2):

$$[g]\varepsilon_h = [g][h][h^{-1}] = [gh][h^{-1}] = [gh][e][h^{-1}] = [gh][h^{-1}g^{-1}gh][h^{-1}] =$$
$$= [gh][h^{-1}g^{-1}][gh][h^{-1}] = [gh][h^{-1}g^{-1}][ghh^{-1}] = \varepsilon_{gh}[g],$$

(3): $\varepsilon_g\varepsilon_h = [g][g^{-1}]\varepsilon_h = [g]\varepsilon_{g^{-1}h}[g^{-1}] = \varepsilon_{gg^{-1}h}[g][g^{-1}] = \varepsilon_h\varepsilon_g$,

(4): $[g][g] = [g][g^{-1}][g][g] = [g][g^{-1}][gg] = \varepsilon_g[g^2]$.

■

Sempre que os elementos de um certo conjunto podem ser escritos de uma forma canônica, todas as contas envolvendo-os ficam muito mais simples, pois basta considerá-los escritos dessa forma.

Para provar que $S(G)$ é um semigrupo inverso, vamos mostrar que seus elementos podem ser escritos de uma forma única, utilizando os ε_g que definimos anteriormente. Nos próximos capítulos veremos que esta forma única de escrever os elementos de $S(G)$ faz um papel importantíssimo para estabelecermos as relações entre ações parciais de G e ações de $S(G)$.

Proposição 1.1.5 *: Cada elemento $r \in S(G)$ admite uma decomposição*

$$r = \varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}[g],$$

onde $n \geq 0$ e $r_1, \dots r_n, g$ são elementos de G. Além disso podemos assumir que

(i) $r_i \neq r_j$, $\forall i \neq j \in \{1, \dots n\}$,

(ii) $r_i \neq g$, $\forall i \in \{1, \dots n\}$,

(iii) $r_i \neq e$, $\forall i \in \{1, \dots n\}$.

Demonstração: Tome P o subconjunto de $S(G)$ dos elementos que podem ser escritos da forma acima. Como n pode ser zero, $[g] \in P$, $\forall g \in G$. Note que, para g, $h \in G$,

$$[g][h] = [gg^{-1}][g][h] = [g][g^{-1}][g][h] = [g][g^{-1}][gh] = \varepsilon_g[gh].$$

Se tomarmos um elemento $[a_1] \dots [a_m]$ qualquer de $S(G)$ teremos:

$$[a_1][a_2] \dots [a_m] = (\varepsilon_{a_1}[a_1a_2])[a_3] \dots [a_m] = \varepsilon_{a_1}(\varepsilon_{a_1a_2}[a_1a_2a_3])[a_4] \dots [a_m] =$$
$$= \dots = \varepsilon_{a_1}\varepsilon_{a_1a_2} \dots \varepsilon_{a_1 \dots a_{m-1}}[a_m].$$

Logo, $P = S(G)$.

A respeito dos 3 ítens finais:

(i): Se $r_i = r_j$, como os ε_r's comutam entre si, basta juntar ε_{r_i} com ε_{r_j}, pois $\varepsilon_{r_i}\varepsilon_{r_j} = {\varepsilon_{r_i}}^2 = \varepsilon_{r_i}$.

(ii): Se $r_i = g$, como os ε_r's comutam entre si, basta juntar ε_{r_i} com $[g]$, pois $\varepsilon_{r_i}[g] = [g][g^{-1}][g] = [g]$.

(iii): Se $r_i = e$, $\varepsilon_{r_i} = [e][e] = [e]$, que é a identidade de $S(G)$.

■

Para mostrar que esta decomposição é única, construiremos certas funções de G em semigrupos adequados, para que, usando a propriedade universal de $S(G)$, possamos estendê-las para homomorfismos de $S(G)$ nesses semigrupos e concluir a unicidade daquela decomposição.

Tome $\iota : G \to G$, a função identidade em G. Claramente esta satisfaz $(i) - (iii)$ da Prop. 1.1.2. Assim, $\exists!$ homomorfismo $\gamma : S(G) \to G$ tal que $\gamma([g]) = \iota(g) = g$, $\forall g \in G$. Se $r = \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g]$ onde $r_1, \ldots r_n, g \in G$,

$$\gamma(r) = \gamma(\varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g]) = \gamma([r_1])\gamma([r_1^{-1}]) \ldots \gamma([g]) = (r_1)(r_1^{-1}) \ldots (g) = g.$$

Para segunda aplicação, defina $P_e(G)$ o conjunto dos subconjuntos finitos de G que contém o elemento e. Considere $\mathcal{F}(P_e(G))$ o conjunto das funções entre subconjuntos de $P_e(G)$. Para $f, g \in \mathcal{F}(P_e(G))$, $f : A \to B$, $g : C \to D$, considere a operação produto $(fg)(x) := f \circ g(x) = f(g(x))$, para $x \in g^{-1}(A \cap D)$. Como a operação de composição é associativa, $\mathcal{F}(P_e(G))$ é semigrupo.
Assim defina, para $h \in G$, $\phi_h : P_e(G) \to P_e(G)$, $\phi_h(E) = hE \cup \{e\}$ e tome

$$\phi : G \to \mathcal{F}(P_e(G))$$
$$g \mapsto \phi_g.$$

Afirmação: *ϕ satisfaz $(i) - (iii)$ da Prop. 1.1.2.*
Seja $E \in P_e(G)$ e g, $h \in G$:

(i):

$$\phi_{g^{-1}}\phi_g\phi_h(E) = \phi_{g^{-1}}\phi_g(hE \cup \{e\}) = \phi_{g^{-1}}(ghE \cup \{g, e\}) = hE \cup \{e, g^{-1}\},$$
$$\phi_{g^{-1}}\phi_{gh}(E) = \phi_{g^{-1}}(ghE \cup \{e\}) = hE \cup \{g^{-1}, e\}.$$

(ii):

$$\phi_g\phi_h\phi_{h^{-1}}(E) = \phi_g\phi_h(h^{-1}E \cup \{e\}) = \phi_g(E \cup \{h, e\}) = gE \cup \{gh, g, e\},$$
$$\phi_{gh}\phi_{h^{-1}}(E) = \phi_{gh}(h^{-1}E \cup \{e\}) = gE \cup \{gh, e\} = gE \cup \{gh, g, e\}.$$

(iii):

$$\phi_g\phi_e(E) = \phi_g(E \cup \{e\}) = \phi_g(E).$$

■

Assim, existe único homomorfismo $\delta : S(G) \to \mathcal{F}(P_e(G))$ tal que $\delta([g]) = \phi_g$. Para $h \in G$, note que

$$\delta(\varepsilon_h)(E) = \delta([h])\delta[h^{-1}](E) = \phi_h\phi_{h^{-1}}(E) = \phi_h(h^{-1}E \cup \{e\}) = E \cup \{h, e\} =$$
$$= E \cup \{h\},$$

e portanto para $r = \varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}[g]$,

$$\delta(r)(\{e\}) = \delta(\varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}[g])(\{e\}) = \delta(\varepsilon_{r_1}) \dots \delta(\varepsilon_{r_n})\delta([g])(\{e\}) =$$
$$= \delta(\varepsilon_{r_1}) \dots \delta(\varepsilon_{r_n})(\{g, e\}) = \delta(\varepsilon_{r_1}) \dots \delta(\varepsilon_{r_{n-1}})(\{e, g, r_n\}) =$$
$$= \dots = \{e, g, r_1, \dots, r_n\}.$$

Com isso, podemos enunciar e demonstrar:

Proposição 1.1.6 : *Cada $r \in S(G)$ admite única decomposição canônica*

$$r = \varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}[g], r_i \in G,$$

a menos da ordem dos ε_r's.

Demonstração: Suponha $r = \varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}[g] = \varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_m}[h]$. Então $g = \gamma(r) = h$ e $\{e, g, r_1, \dots, r_n\} = \delta(r)(\{e\}) = \{e, h = g, t_1, \dots, t_m\}$. Assim, $\{r_1, \dots, r_n\} = \{t_1, \dots, t_m\}$ e a decomposição é única.

■

Exemplo 1.1.7 : *Quem são os idempotentes de $S(G)$?*

Suponha $r = \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g]$ idempotente. Então, por (2) e (4) da Prop. 1.1.4:

$$\varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g] = r = r^2 = \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g]\varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g] = \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}\varepsilon_{gr_1} \ldots \varepsilon_{gr_n}[g][g] =$$
$$= \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}\varepsilon_{gr_1} \ldots \varepsilon_{gr_n}\varepsilon_g[g^2].$$

Como a decomposição é única, $[g] = [g^2]$, ou seja, $g = g^2$ que implica $g = e$. Logo, $r = \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}$.

■

Se o grupo G é finito, podemos afirmar qual o número de idempotentes e de elementos de $S(G)$:

Proposição 1.1.8 : *Se $|G| = n$ então $|E(S(G))| = 2^{n-1}$ e $|S(G)| = 2^{n-2}(n+1)$.*

Demonstração: Se $r = \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[e]$, os r_i's podem ser tomados de $|\mathcal{P}(G\backslash\{e\})| = 2^{n-1}$ maneiras diferentes, que é o número de idempotentes de $S(G)$. Além disso, teremos $(n-1)2^{n-2}$ possíveis elementos da forma $r = \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g]$ ($n-1 =$ quantidade de termos em G diferentes de e, $2^{n-2} = |\mathcal{P}(G\backslash\{e,g\})|$). Logo o número de elementos de $S(G)$ é

$$2^{n-1} + (n-1)2^{n-2} = 2^{n-2}(2+n-1) = 2^{n-2}(n+1).$$

■

Agora, vamos mostrar que cada $r \in S(G)$ possui único inverso.

Proposição 1.1.9 : *Para $r = \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g] \in S(G)$, $rr^*r = r$ e $r^*rr^* = r^*$, onde * é a operação definida por meio da Prop. 1.1.3.*

Demonstração: Bem, $r^* = [g]^*{\varepsilon_{r_n}}^* \ldots {\varepsilon_{r_1}}^* = [g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \ldots \varepsilon_{r_1}$. Assim, como os ε_r's comutam e são idempotentes,

$$rr^*r = \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g][g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \ldots \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g] = \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}\varepsilon_g\varepsilon_{r_n} \ldots \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g] =$$
$$= \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}\varepsilon_g[g] = \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g] = r,$$

$$r^*rr^* = [g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \ldots \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g][g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \ldots \varepsilon_{r_1} = [g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \ldots \varepsilon_{r_1}\varepsilon_g\varepsilon_{r_n} \ldots \varepsilon_{r_1} =$$
$$= [g^{-1}]\varepsilon_g\varepsilon_{r_n} \ldots \varepsilon_{r_1} = [g^{-1}]\varepsilon_{r_n} \ldots \varepsilon_{r_1} = r^*.$$

■

Teorema 1.1.10 : *Para cada grupo G, o semigrupo universal $S(G)$ é um semigrupo inverso.*

Demonstração: Seja $r \in S(G)$ e r^* e s dois inversos de r. Escreva

$$r = \varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}[g] \qquad\qquad s^* = \varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_m}[h].$$

Assim, $s = (s^*)^* = [h^{-1}]\varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_m}$ e portanto $g = \gamma(r) = \gamma(rsr) = \gamma(r)\gamma(s)\gamma(r) = gh^{-1}g$. Multiplicando por $g^{-1}h$ pela direita nos dois lados da igualdade, segue que $h = g$.
Além disso,

$$\varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}[g] = r = rsr = \varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}[g][g^{-1}]\varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_m}\varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}[g] =$$
$$= \varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}\varepsilon_g\varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_m}\varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}[g] = \varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}\varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_m}[g]$$

Pela unicidade da decomposição em $S(G)$,

$$\{t_1, \dots, t_m\} \subseteq \{r_1, \dots, r_n\}.$$

Aplicando o mesmo raciocínio para $s = srs$, obtemos

$$\{r_1, \dots, r_n\} \subseteq \{t_1, \dots, t_m\}.$$

Logo

$$\{r_1, \dots, r_n\} = \{t_1, \dots, t_m\},$$

e portanto $s = r^*$.

■

Exemplo 1.1.11 : *A relação de ordem em $S(G)$.*

Sejam $r = \varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}[g]$, $s = \varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_m}[h] \in S(G)$ e suponha $r \leq s$. Então existe idempotente $\varepsilon_{f_1} \dots \varepsilon_{f_k} \in S(G)$ tal que

$$\varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}[g] = \varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_m}[h]\varepsilon_{f_1} \dots \varepsilon_{f_k} = \varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_m}\varepsilon_{hf_1} \dots \varepsilon_{hf_k}[h].$$

Pela unicidade da decomposição, $g = h$ e $\{r_1 \dots r_n\} = \{t_1 \dots t_m, hf_1 \dots hf_k\}$. Logo $\{t_1 \dots t_m\} \subseteq \{r_1 \dots r_n\}$, ou seja, se $r = \varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}[g]$ devemos ter $s = \varepsilon_{r_{i_1}} \dots \varepsilon_{r_{i_m}}[g]$, com $m \leq n$ e $i_j \in \{1, \dots, n\}$.

■

2 Ações de Semigrupos Inversos em uma Álgebra

Nosso objetivo neste capítulo, além de apresentar a definição de uma Ação de um semigrupo inverso, é relacioná-las com Ações Parciais de grupos. Veremos que dado um grupo G, as ações parciais de G estão em bijeção com as ações de $S(G)$. Antes vamos relembrar a definição e algumas propriedades de uma ação parcial.

Neste capítulo, G será um grupo com unidade e, e S um semigrupo inverso com unidade e. Por enquanto A será apenas uma álgebra unital.

Definição 2.0.1 *: Uma ação parcial de um grupo G num conjunto X é um par ordenado $(\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, onde para todo $g \in G$, D_g é um subconjunto de X e $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ é uma bijeção, satisfazendo, para todo $g, h \in G$:*

(i) $D_e = X$,

(ii) $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$,

(iii) $\forall x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$, $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$.

Se $D_g = X$ $\forall g \in G$, dizemos que α é uma *ação global* de G sobre X. Note que esta é a definição de ação. Aqui, chamaremo-la de ação global para diferenciá-la de uma ação parcial. Também perceba que o conceito de ação parcial generaliza o conceito clássico de ação global.

Podemos estender o conceito de ação parcial para várias categorias. Aqui apresentaremos os que serão relevantes para este trabalho.

Definição 2.0.2 *: Uma ação parcial de um grupo G num espaço topológico X é uma ação parcial onde, para todo $g \in G$, D_g é um aberto de X e $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ é um homeomorfismo.*

Definição 2.0.3 *: Uma ação parcial de um grupo G numa álgebra A é uma ação parcial onde, para todo $g \in G$, D_g é um ideal de A e $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ é um isomorfismo.*

Algumas propriedades importantes de ações parciais:

Proposição 2.0.4 *: Seja α uma ação parcial do grupo G no conjunto X e $g, h \in G$. Então:*

(1) $\alpha_e = Id_X$,

(2) $\alpha_{h^{-1}} = \alpha_h^{-1}$,

(3) $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.

Demonstração: (1): Tome $h = g = e$ em (iii) da Definição 2.0.1. Para todo $x \in \alpha_e^{-1}(D_e \cap D_{e^{-1}}) = \alpha_e^{-1}(X) = X$ temos, já que α_g é bijeção para todo $g \in G$:

$$\alpha_e \circ \alpha_e(x) = \alpha_e(x) \Rightarrow \alpha_e^{-1} \circ \alpha_e \circ \alpha_e(x) = \alpha_e^{-1} \circ \alpha_e(x) \Rightarrow \alpha_e(x) = Id_X(x) = x.$$

(2): Considere $g = h^{-1}$ no item (iii) da Definição 2.0.1. Então para qualquer $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_h) = D_{h^{-1}}$, segue que:

$$\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_h(x) = \alpha_{h^{-1}h}(x) = \alpha_e(x) = Id_{D_{h^{-1}}}(x) = x.$$

E para $g = h$ e $h = h^{-1}$ no mesmo item (iii) e $x \in \alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}}) = D_h$:

$$\alpha_h \circ \alpha_{h^{-1}}(x) = \alpha_{hh^{-1}}(x) = \alpha_e(x) = Id_{D_h}(x) = x.$$

Logo $\alpha_h^{-1} = \alpha_{h^{-1}}$.
(3): Observe que $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$. Tomando $h = h^{-1}$ e $g = gh$:

$$\alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}) \subseteq D_h \cap D_{g^{-1}}.$$

Aplicando $\alpha_{h^{-1}}$ pelo lado esquerdo dos dois lados da igualdade:

$$D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}} \subseteq \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}).$$

Logo $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.

■

Assim, podemos reescrever a Def. 2.0.3 (que é a que mais nos interessa) como:

Definição 2.0.5 *: Uma ação parcial de um grupo G numa álgebra A é um par ordenado $(\{D_g\}_{g\in G}\{\alpha_g\}_{g\in G})$, onde para todo $g \in G$, D_g é um ideal de A e $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ é um isomorfismo, satisfazendo, para todo $g, h \in G$:*

(i) $D_e = A$,

(ii) $\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$,

(iii) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, $\forall x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.

De agora em diante, quando tivermos uma aplicação $\pi : X \to Y$, X e Y conjuntos quaisquer, usaremos a seguinte notação:

$$\pi(Z) := \pi(Z \cap X),$$

onde Z é outro conjunto qualquer. Ainda, para um espaço topológico X, denotamos $C_0(X)$ o conjunto das funções $f \in C(X)$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $K \subseteq X$ compacto tal que $\|f(x)\| < \varepsilon$ quando $x \notin K$. Este conjunto é uma C*-álgebra e é chamado de conjunto das funções contínuas de X em $\mathbb{C}$ que zeram no infinito.

O exemplo que veremos adiante é uma ferramenta muito importante para teoria de ações parciais. Nele, veremos que para cada ação parcial de um grupo num espaço topológico X, conseguimos construir uma ação parcial do mesmo grupo na (C*-)álgebra $C_0(X)$.

Um resultado que vale é que todo ideal fechado I de $C_0(X)$ é um conjunto de funções contínuas de X que zeram no infinito de X e se anulam no complementar de um aberto $U \subseteq X$ (Exercício 3.2.3 [14]).
Note que este conjunto é isomorfo a $C_0(U)$ (Proposição 2.1.9 [10]).

Exemplo 2.0.6 *: Método para construir ações parciais de grupo em uma álgebra partindo de ações globais de grupo em um espaço topológico.*

Seja X um espaço topológico e considere $(\{X\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação global de G no espaço topológico X.
Considere $U \subseteq X$ aberto e defina $J_g = U \cap \beta_g(U)$, $\gamma_g = \beta_g|_{J_{g^{-1}}} : J_{g^{-1}} \to J_g$.
Afirmação: *Considerando U como um espaço topológico com a topologia relativa, $(\{J_g\}_{g\in G}, \{\gamma_g\}_{g\in G})$ é ação parcial de G sobre U.*

Seja $g \in G$. Já que β_g tem inversa contínua e U é aberto em X, $\beta_g(U)$ é aberto em X. Pela definição da topologia em U, $J_g = U \cap \beta_g(U)$ é aberto em U.
Como $\gamma_g(J_{g^{-1}}) = \beta_g(U \cap \beta_{g^{-1}}(U)) = \beta_g(U) \cap U = J_g$, γ_g está bem definida e é claramente um homeomorfismo.
Assim, falta provar que valem os 3 ítens da Def. 2.0.1:
(i): $J_e = U \cap \beta_e(U) = U \cap Id_X(U) = U$.
(ii): Para $g, h \in G$:

$$\begin{aligned}\gamma_{h^{-1}}(J_h \cap J_{g^{-1}}) &= \beta_{h^{-1}}(U \cap \beta_h(U) \cap U \cap \beta_{g^{-1}}(U)) = \\ &= \beta_{h^{-1}}(U) \cap U \cap \beta_{h^{-1}g^{-1}}(U) \subseteq J_{h^{-1}g^{-1}}.\end{aligned}$$

(iii): Segue facilmente, já que para quaisquer $g, h \in G$, $\beta_g \circ \beta_h = \beta_{gh}$.

$\blacksquare$

Agora tome a álgebra $A = C_0(U)$. Para cada $g \in G$, defina:

$$D_g = C_0(J_g) = \{f \in C_0(U) : f|_{U \setminus J_g} \equiv 0\}.$$

Pelos comentários antes do Exemplo, note que D_g pode ser visto como o espaço das funções contínuas de U que zeram no infinito de U e que se anulam no complementar de J_g. Considere:

$$\begin{aligned}\alpha_g : D_{g^{-1}} &\to D_g \\ f &\to f \circ \gamma_{g^{-1}}.\end{aligned}$$

Afirmação: $(\{J_g\}_{g \in G}, \{\gamma_g\}_{g \in G})$ *é ação parcial de* G *sobre a álgebra* A.

Tome $g \in G$. É fácil ver que D_g é ideal de A.
Também é fácil ver que α_g é homomorfismo. Como $\gamma_{g^{-1}}$ é inversível, α_g é injetora. Para $f \in D_g$, segue que $f \circ \gamma_g \in D_{g^{-1}}$ e $\alpha_g(f \circ \gamma_g) = f$, portanto α_g é sobrejetora. Logo é um isomorfismo.
Vamos provar que valem os 3 ítens da Def. 2.0.5:
(i): $D_e = C_0(J_e) = C_0(U) = A$.
(ii): Para $g, h \in G$:

$$\begin{aligned}\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) &= \alpha_{h^{-1}}(C_0(J_h) \cap C_0(J_{g^{-1}})) = \alpha_{h^{-1}}(C_0(J_h \cap J_{g^{-1}})) = \\ &= \alpha_{h^{-1}}(C_0(\gamma_h(J_{h^{-1}g^{-1}} \cap J_{h^{-1}}))) = C_0(J_{h^{-1}g^{-1}} \cap J_{h^{-1}}) = \\ &= C_0(J_{h^{-1}g^{-1}}) \cap C_0(J_{h^{-1}}) = D_{h^{-1}g^{-1}} \cap D_{h^{-1}}.\end{aligned}$$

(iii): Tome $g, h \in G$ e $f \in \alpha_{h^{-1}}(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$:

$$\alpha_g \circ \alpha_h(f) = f \circ \gamma_{h^{-1}} \circ \gamma_{g^{-1}} \in \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_{gh} \cap D_g = C_0(J_{gh}) \cap C_0(J_g) = \\ = C_0(J_{gh} \cap J_g).$$

Assim, tomando $a \in J_{gh} \cap J_g$:

$$f \circ \gamma_{h^{-1}} \circ \gamma_{g^{-1}}(a) = f \circ \gamma_{h^{-1}g^{-1}}(a) = \alpha_{gh}(f)(a).$$

Para $a \notin J_{gh} \cap J_g$:

$$\alpha_g \circ \alpha_h(f)(a) = 0 = \alpha_{gh}(f)(a).$$

Portanto, $(\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é ação parcial do grupo G na álgebra $C_0(U)$.

■

Exemplo 2.0.7 : *Exemplo de ação parcial.*

Tome $\mathbb{F}_2$ o grupo livre gerado por a e b, isto é, o grupo formado por todas "palavras" reduzidas formadas utilizando as "letras"a, b, a^{-1} e b^{-1}. Por palavra reduzida, queremos dizer que se uma palavra tem uma letra ao lado de sua inversa, as duas são canceladas. Exemplo:

$$abaa^{-1}bab = abbab,$$

assim, por exemplo, não consideraremos a palavra $abaa^{-1}bab$ em $\mathbb{F}_2$ e sim a palavra reduzida $abbab$.

Considere o produto de duas palavras como sendo a concatenação das mesmas. Denote e sua unidade.

Também considere o conjunto $\{0, 1\}$ com a topologia discreta e defina $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_0, x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \{0, 1\}, i \in \mathbb{N}\}$ com a topologia produto. Note que X é homeomorfo ao Conjunto de Cantor (Capítulo 5, Seção 5 [9]). Tome

$$U_0 = \{x \in X : x_0 = 0\} \text{ e } U_1 = \{x \in X : x_0 = 1\},$$

e considere

$$\begin{aligned} h_0 : X &\to U_0 & \qquad h_1 : X &\to U_1 \\ (x_0, x_1, \ldots) &\to (0, x_0, x_1, \ldots), & (x_0, x_1, \ldots) &\to (1, x_0, x_1, \ldots). \end{aligned}$$

Denotando p_0 a projeção de $x \in X$ na primeira coordenada, segue que p_0 é contínua. Como $U_0 = p_0^{-1}(0)$ e $U_1 = p_0^{-1}(1)$ e $\{0\}$ e $\{1\}$ são abertos em $\{0, 1\}$, U_0 e U_1 são abertos em X.

Assim, X é desconexo, já que é a união disjunta de U_0 e U_1, que são abertos e fechados.

Vamos definir uma ação parcial de $\mathbb{F}_2$ no espaço topológico X. Para isso, para cada $g \in \mathbb{F}_2$ precisamos definir abertos U_g e funções contínuas $\gamma_g : U_{g^{-1}} \rightarrow U_g$. Começamos definindo:

$$\gamma_e = Id_X, U_e = X;$$
$$\gamma_a = h_0, U_{a^{-1}} = X, U_a = U_0;$$
$$\gamma_b = h_1, U_{b^{-1}} = X, U_b = U_1.$$

Para $g_1, g_2 \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, se $g_1 = g_2^{-1}$, $\gamma_{g_1 g_2} = \gamma_e$, $U_{g_1 g_2} = U_{(g_1 g_2)^{-1}} = U_e$.

Caso contrário,

$$\begin{aligned}
\gamma_{g_1 g_2} &= \gamma_{g_1} \circ \gamma_{g_2}, \\
U_{(g_1 g_2)^{-1}} &= U_{g_2^{-1}} \cap \gamma_{g_2^{-1}}(U_{g_1^{-1}}), \\
U_{g_1 g_2} &= U_{g_1} \cap \gamma_{g_1}(U_{g_2}).
\end{aligned}$$

Para $g_1, g_2, g_3 \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, caso a palavra $g_1 g_2 g_3$ não esteja em sua forma reduzida, a definição será trivial (já que $g_1 g_2 g_3 = g_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$).

Caso $g_1 g_2 g_3$ já esteja em sua forma reduzida, defina:

$$\begin{aligned}
\gamma_{g_1 g_2 g_3} &= \gamma_{g_1} \circ \gamma_{g_2} \circ \gamma_{g_3}, \\
U_{(g_1 g_2 g_3)^{-1}} &= U_{g_3^{-1}} \cap \gamma_{g_3^{-1}}(U_{(g_1 g_2)^{-1}}) = U_{g_3^{-1}} \cap \gamma_{g_3^{-1}}(U_{g_2^{-1}} \cap \gamma_{g_2^{-1}}(U_{g_1^{-1}})), \\
U_{g_1 g_2 g_3} &= U_{g_1} \cap \gamma_{g_1}(U_{g_2 g_3}) = U_{g_1} \cap \gamma_{g_1}(U_{g_2} \cap \gamma_{g_2}(U_{g_3})).
\end{aligned}$$

Para $g_1, \ldots, g_n \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ o processo deve ser o mesmo. Primeiramente reduza a palavra $g_1 g_2 \ldots g_n$ para a palavra $g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_m}$, $m \leq n$, $i_j \in \{1, \ldots n\}$. Depois defina:

$$\begin{aligned}
\gamma_{g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_m}} &= \gamma_{g_{i_1}} \circ \gamma_{g_{i_2}} \circ \ldots \circ \gamma_{g_{i_m}}, \\
U_{(g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_m})^{-1}} &= U_{g_{i_m}^{-1}} \cap \gamma_{g_{i_m}^{-1}}(U_{g_{(i_{m-1})}^{-1}} \cap \gamma_{g_{(i_{m-1})}^{-1}}(\ldots(U_{g_{i_2}^{-1}} \cap \gamma_{g_{i_2}^{-1}}(U_{g_{i_1}^{-1}}))\ldots), \\
U_{g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_m}} &= U_{g_{i_1}} \cap \gamma_{g_{i_1}}(U_{g_{i_2}} \cap \gamma_{g_{i_2}}(\ldots(U_{g_{i_{m-1}}} \cap \gamma_{g_{i_{m-1}}}(U_{g_{i_m}}))\ldots)).
\end{aligned}$$

Para $g, h \in \mathbb{F}_2$, γ_g é composição de funções contínuas com inversas contínuas, logo aquela satisfaz estas condições. Daí também temos que $\gamma_g(U_h)$ é aberto. Por conseqüência, todos os U_g são abertos.

Assim falta verificar que valem os 3 ítens da Def. 2.0.1. O primeiro e o terceiro seguem pela nossa definição das funções γ_g. Para o segundo, considere $g = g_1 \ldots g_m$ e $h = h_1 \ldots h_n$ duas palavras em sua forma reduzida. Caso a palavra $h^{-1} g^{-1}$ esteja em sua forma reduzida, temos:

$$\begin{aligned}\gamma_{h^{-1}}(U_h \cap U_{g^{-1}}) &= \gamma_{(h_2\ldots h_n)^{-1}}\gamma_{h_1^{-1}}(U_{h_1} \cap \gamma_{h_1}(U_{h_2\ldots h_n}) \cap U_{g_m^{-1}} \cap \gamma_{g_m^{-1}}(U_{g_{m-1}^{-1}\ldots g_1^{-1}})) = \\ &= \gamma_{(h_2\ldots h_n)^{-1}}(U_{h_1^{-1}} \cap U_{h_2\ldots h_n} \cap \gamma_{h_1^{-1}}(U_{g_m^{-1}} \cap \gamma_{g_m^{-1}}(U_{g_{m-1}^{-1}\ldots g_1^{-1}}))) = \\ &= U_{(h_2\ldots h_n)^{-1}} \cap \gamma_{(h_2\ldots h_n)^{-1}}(U_{h_1^{-1}} \cap \gamma_{h_1^{-1}}(U_{g_m^{-1}} \cap \gamma_{g_m^{-1}}(U_{g_{m-1}^{-1}\ldots g_1^{-1}}))) = \\ &= U_{h_n^{-1}\ldots h_2^{-1}h_1^{-1}g_m^{-1}\ldots g_2^{-1}g_1^{-1}} = U_{h^{-1}g^{-1}}.\end{aligned}$$

O problema acontece quando a palavra $h^{-1}g^{-1}$ não está em sua forma reduzida. Este caso, deixaremos em aberto, mas sugerimos [11] (Exemplo 2.3).

Assim $(\{U_g\}_{g\in\mathbb{F}_2}, \{\gamma_g\}_{g\in\mathbb{F}_2})$ é uma ação parcial de $\mathbb{F}_2$ no espaço topológico X.

Como X é compacto, $C_0(X) = C(X)$. Portanto, vamos definir uma ação parcial de $\mathbb{F}_2$ na álgebra $C(X)$. Tome, para cada $g \in \mathbb{F}_2$:

$$D_g = C_0(U_g).$$

As funções α_g são definidas assim:

$$\begin{aligned}\alpha_g : D_{g^{-1}} &\to D_g \\ f &\mapsto f \circ \gamma_{g^{-1}}.\end{aligned}$$

Pelo Exemplo anterior, concluímos que $(\{D_g\}_{g\in\mathbb{F}_2}, \{\alpha_g\}_{g\in\mathbb{F}_2})$ é uma ação parcial do grupo $\mathbb{F}_2$ na álgebra $C(X)$, a álgebra das funções contínuas do Conjunto de Cantor.

■

Observação 2.0.8 *: Ainda no contexto do Exemplo anterior, seja $g_1, g_2 \in \mathbb{F}_2$ tal que g_1g_2 esteja em sua forma reduzida. Denote 1_{g_i} a identidade de $D_{g_i} = C_0(U_{g_i})$ isto é, a função:*

$$\begin{aligned}1_{g_i} : X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto 1, \forall x \in U_{g_i}, \\ y &\mapsto 0, \forall y \in X\backslash U_{g_i}.\end{aligned}$$

Note que

$$\alpha_{g_1}(\alpha_{g_1^{-1}}(1_{g_1})1_{g_2}) = (1_{g_1})(1_{g_2} \circ \gamma_{g_1^{-1}})$$

é a unidade de $D_{g_1g_2}$. De fato, $D_{g_1g_2} = C_0(U_{g_1g_2}) = C_0(U_{g_1} \cap \gamma_{g_1}(U_{g_2}))$. Assim, se

$x \in U_{g_1} \cap \gamma_{g_1}(U_{g_2})$ e $y \notin U_{g_1} \cap \gamma_{g_1}(U_{g_2})$:

$$(1_{g_1})(1_{g_2} \circ \gamma_{g_1^{-1}})(x) = (1_{g_1}(x))(1_{g_2} \circ \gamma_{g_1^{-1}}(x)) = 1,$$
$$(1_{g_1})(1_{g_2} \circ \gamma_{g_1^{-1}})(y) = (1_{g_1}(y))(1_{g_2} \circ \gamma_{g_1^{-1}}(y)) = 0.$$

Observe que se tomarmos $g_1 = a$, $g_2 = a^{-1}$, g_1g_2 não está em sua forma reduzida. É fácil ver que $\alpha_a(\alpha_{a^{-1}}(1_a)1_{a^{-1}}) = 1_a$, que não é a unidade de $D_{aa^{-1}} = D_e = C(X)$.

Sempre que quisermos nos referir a uma ação parcial de grupo sobre uma álgebra, usaremos o termo *sistema dinâmico parcial*:

Definição 2.0.9 *: Um sistema dinâmico parcial é uma tripla ordenada (A, G, α), onde α é uma ação parcial do grupo G na álgebra A.*

Para mais detalhes a respeito das ações parciais de grupo, veja [10].

Vamos definir ações de semigrupos inversos.

Definição 2.0.10 *: Considere uma álgebra A e um semigrupo inverso S com unidade e. Diz-se que β é uma ação de S em A quando para cada $s \in S$ existe um ideal E_s de A e um isomorfismo $\beta_s : E_{s^*} \to E_s$, tal que $E_e = A$ e, para cada $s, t \in S$, $\beta_s \circ \beta_t = \beta_{st}$.*

Vamos ver algumas propriedades de ações de semigrupos inversos.

Proposição 2.0.11 *: Seja β uma ação de S em A e tome s, $t \in S$. Então:*

(1) $\beta_e = Id_A$,

(2) $\beta_{s^*} = \beta_s^{-1}$,

(3) $\beta_s(E_t) = \beta_s(E_t \cap E_{s^*}) = E_{st}$,

(4) Se $f \in E(S)$, então $\beta_f = Id_{E_f}$,

(5) $E_{st} \subseteq E_s$.

Demonstração: (1): Bem, como β_e é um isomorfismo, $\beta_e \circ \beta_e = \beta_e$ implica $\beta_e = Id_{\mathrm{Dom}\beta_e}$. Já que $E_e = A$, segue que $\beta_e = Id_A$.
(2): Seja $a \in E_s$. Como β_s é isomorfismo, $\exists b \in E_{s^*}$ tal que $a = \beta_s(b)$. Assim

$$\beta_s\beta_{s^*}(a) = \beta_s\beta_{s^*}\beta_s(b) = \beta_{ss^*s}(b) = \beta_s(b) = a,$$

e para $\widetilde{a} \in E_{s^*}$, $\exists \widetilde{b} \in E_s$ tal que $\widetilde{a} = \beta_{s^*}(\widetilde{b})$ e portanto

$$\beta_{s^*}\beta_s(\widetilde{a}) = \beta_{s^*}\beta_s\beta_{s^*}(\widetilde{b}) = \beta_{s^*ss^*}(\widetilde{b}) = \beta_{s^*}(\widetilde{b}) = \widetilde{a}.$$

Logo $\beta_{s^*} = \beta_s^{-1}$.

(3): $\beta_s(E_t) = \beta_s(E_t \cap E_{s^*}) = \beta_{s^*}^{-1}(E_t \cap E_{s^*})$ =Dom$(\beta_{t^*}\beta_{s^*})$ =Dom$(\beta_{t^*s^*}) = E_{st}$.

(4): Bem, $f^* = f$ implica $E_f = E_{f^*}$ e de $\beta_f \circ \beta_f = \beta_{f^2} = \beta_f$, temos que $\beta_f = Id_{E_f}$.

(5): Como $\beta_{(st)^*} = \beta_{t^*}\beta_{s^*}$, Dom$\beta_{(st)^*} \subseteq$ Domβ_{s^*}, ou seja, $E_{st} \subseteq E_s$.

■

No caso em que o semigrupo inverso em questão é $S(G)$, temos ainda que vale:

Proposição 2.0.12 *: Sejam $r_1, \ldots, r_n, g \in G$ e β uma ação de $S(G)$ em A:*

(1) $E_{[g][h]} = E_{[g]} \cap E_{[gh]}$,

(2) $E_{\varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g]} \subseteq E_{[g]}$.

Demonstração:

(1): $E_{[g][h]} = E_{[g][g^{-1}][g][h]} = E_{[g][g^{-1}][gh]} = \beta_{[g]}(E_{[g^{-1}][gh]}) = \beta_{[g]}(\beta_{[g^{-1}]}(E_{[gh]})) = E_{[g]} \cap E_{[gh]}$.

(2):

$$\begin{aligned}
E_{\varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[g]} &= \beta_{[r_1]}(E_{[r_1^{-1}]\varepsilon_{r_2} \ldots \varepsilon_{r_n}[g]}) = \beta_{[r_1]}(\beta_{[r_1^{-1}]}(E_{\varepsilon_{r_2} \ldots \varepsilon_{r_n}[g]})) = \\
&= \ldots = \beta_{[r_1]}(\beta_{[r_1^{-1}]}(\ldots(\beta_{[r_n]}(E_{[r_n^{-1}][g]})))\ldots)) \subseteq \\
&\subseteq \beta_{[r_1]}(\beta_{[r_1^{-1}]}(\ldots(\beta_{[r_n]}(E_{[r_n^{-1}g]}))\ldots)) = \\
&= \beta_{[r_1]}(\beta_{[r_1^{-1}]}(\ldots(\beta_{[r_{n-1}]}(\beta_{[r_{n-1}^{-1}]}(E_{[r_n][r_n^{-1}g]})))\ldots)) \subseteq \\
&\subseteq \beta_{[r_1]}(\beta_{[r_1^{-1}]}(\ldots(\beta_{[r_{n-1}]}(\beta_{[r_{n-1}^{-1}]}(E_{[r_n r_n^{-1}g]})))\ldots)) = \\
&= \beta_{[r_1]}(\beta_{[r_1^{-1}]}(\ldots(\beta_{[r_{n-1}]}(\beta_{[r_{n-1}^{-1}]}(E_{[g]})))\ldots)) = \ldots = \\
&= \beta_{[r_1]}(\beta_{[r_1^{-1}]}(E_{[g]}) = \beta_{[r_1]}(E_{[r_1^{-1}][g]}) \subseteq \beta_{[r_1]}(E_{[r_1^{-1}g]}) = \\
&= E_{[r_1][r_1^{-1}g]} \subseteq E_{[r_1 r_1^{-1}g]} = E_{[g]}.
\end{aligned}$$

■

Vamos então ver um exemplo de ação de semigrupo inverso.

Exemplo 2.0.13 : *Seja X um conjunto. Como vimos no Ex. 1.0.6, o conjunto dos Homeomorfismos entre subconjuntos abertos de X, que denotamos $PHomeo(X)$, é um semigrupo inverso. Vamos construir uma ação β de $PHomeo([0,1])$ em $C([0,1])$.*

Seja $f \in PHomeo([0,1])$, $f : A \to B$. Defina $E_{f^*} = C_0(A)$ e $E_f = C_0(B)$. Com isso, tome:

$$\begin{aligned} \beta_f : E_{f^*} &\to E_f \\ g &\mapsto g \circ f^{-1}. \end{aligned}$$

É fácil ver que $C_0(A)$ é ideal de $C([0,1])$ para qualquer aberto $A \subseteq [0,1]$.
Considere $e = Id_{[0,1]}$ a unidade de $PHomeo([0,1])$. Assim, $E_e = C_0([0,1]) = C([0,1])$.
<u>β_f é isomorfismo:</u> Dados $g, h, l \in C_0(B)$:

$$\beta_f(gh + l) = (gh + l) \circ f^{-1} = (g \circ f^{-1})(h \circ f^{-1}) + (l \circ f^{-1}) = \beta_f(g)\beta_f(h) + \beta_f(l).$$

Assim β_f é homomorfismo.
Tomando $h \in C_0(B)$, vemos que $\beta_f(h \circ f) = h$ e já que $h \circ f \in C_0(A)$, segue a sobrejetividade.
A injetividade de β_f é óbvia, já que f é homeomorfismo.
<u>$\beta_f \circ \beta_g = \beta_{f \circ g}$:</u> Considere $f : A_f \to B_f$ e $g : A_g \to B_g$ duas funções de $PHomeo([0,1])$. Assim temos que $f \circ g : g^{-1}(A_f \cap B_g) \to f(A_f \cap B_g)$. Primeiramente, precisamos mostrar que os respectivos domínios são iguais. Um resultado auxiliar que precisaremos é o seguinte:
<u>$\beta_{g^{-1}}(C_0(A_f \cap B_g)) = C_0(g^{-1}(A_f \cap B_g))$:</u>
$\subseteq$: Se $h \in C_0(A_f \cap B_g)$, $\beta_{g^{-1}}(h) = h \circ g$ obviamente está em $C_0(g^{-1}(A_f \cap B_g))$.
$\supseteq$: Tomando $h \in C_0(g^{-1}(A_f \cap B_g))$, segue que $h \circ g^{-1} \in C_0(A_f \cap B_g)$. Como $h = \beta_{g^{-1}}(h \circ g^{-1})$, segue o resultado.
Assim podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(\beta_f \circ \beta_g) &= \beta_g^{-1}(C_0(A_f) \cap C_0(B_g)) = \beta_g^{-1}(C_0(A_f \cap B_g)) = C_0(g^{-1}(A_f \cap B_g)) = \\ &= \mathrm{Dom}(\beta_{f \circ g}). \end{aligned}$$

É fácil ver que $\beta_f \circ \beta_g(x) = \beta_{f \circ g}(x)$, para $x \in \mathrm{Dom}(\beta_{f \circ g})$.
Assim β é uma ação do semigrupo inverso $PHomeo([0,1])$ na álgebra $C([0,1])$.

■

Vamos ver o primeiro resultado que relaciona as ações de $S(G)$ e as ações parciais de G.

Proposição 2.0.14 *: Dada β ação de $S(G)$ na álgebra A, defina $D_g = E_{[g]}$ e $\alpha_g = \beta_{[g]}$. Então $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é ação parcial de G em A.*

Demonstração: Sejam $g, h \in G$. Segue da definição que para todo $g \in G$, D_g é ideal de A é α_g é isomorfismo. Vamos provar que valem os 3 ítens da Def. 2.0.5.
(i) $D_e = E_{[e]} = A$.
(ii) $\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = \beta_{[h^{-1}]}(E_{[h]} \cap E_{[g^{-1}]}) = E_{[h^{-1}][g^{-1}]} \subseteq E_{[h^{-1}g^{-1}]} = D_{(gh)^{-1}}$.
Assim, pelo item (3) da Prop. 2.0.4, $\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.
(iii) Seja $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}} = E_{[h^{-1}]} \cap E_{[(gh)^{-1}]}$:

$$\begin{aligned}\alpha_g \circ \alpha_h(x) &= \beta_{[g]} \circ \beta_{[h]}(x) = \beta_{[g][h]}(x) = \beta_{[g][g^{-1}][g][h]}(x) = \beta_{[g][g^{-1}][gh]}(x) = \\ &= \beta_{[g]}\beta_{[g^{-1}]}\beta_{[gh]}(x) = \beta_{[gh]}(x) = \alpha_{gh}(x).\end{aligned}$$

■

Para fazer o resultado contrário, usaremos a propriedade universal de $S(G)$ por meio da seguinte Proposição:

Proposição 2.0.15 *: Seja $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de G em A. Assim a função*

$$f : G \to I(A)$$
$$g \mapsto \alpha_g$$

satisfaz $(i) - (iii)$ da Prop. 1.1.2.

Demonstração: Sejam $g, h \in G$. Primeiramente, vamos provar que $\alpha_{g^{-1}}\alpha_g\alpha_h = \alpha_{g^{-1}}\alpha_{gh}$. Note que seus domínios são iguais:

$$\text{Dom}(\alpha_{g^{-1}}\alpha_g\alpha_h) = \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap \text{ Dom}(\alpha_{g^{-1}}\alpha_g)) = \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}},$$
$$\text{Dom}(\alpha_{g^{-1}}\alpha_{gh}) = \alpha_{h^{-1}g^{-1}}(D_{gh} \cap D_g) = D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}.$$

E para $x \in \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$, $\alpha_g\alpha_h = \alpha_{gh}$. Logo vale o item (i) da Prop. 1.1.2.

No item (ii) precisamos mostrar que $\alpha_g\alpha_h\alpha_{h^{-1}} = \alpha_{gh}\alpha_{h^{-1}}$. E o processo é o mesmo. Começamos mostrando que os respectivos domínios são iguais:

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(\alpha_g\alpha_h\alpha_{h^{-1}}) &= \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap \ \mathrm{Dom}(\alpha_g\alpha_h)) = \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}})) = \\ &= \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}) = D_h \cap D_{g^{-1}}, \\ \mathrm{Dom}(\alpha_{gh}\alpha_{h^{-1}}) &= \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}) = D_h \cap D_{g^{-1}}.\end{aligned}$$

Note que $\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$, e para elementos deste conjunto, $\alpha_g\alpha_h = \alpha_{gh}$, e vale o item (ii).
O terceiro item é óbvio.

$\blacksquare$

Assim obtemos um (único) homomorfismo

$$\begin{aligned}\beta : S(G) &\to I(A) \\ s &\mapsto \beta_s,\end{aligned}$$

tal que $\beta([g]) = \alpha(g)$, para todo $g \in G$.

Agora, para $s = \varepsilon_{s_1}\dots\varepsilon_{s_n}[g] = [g]\varepsilon_{g^{-1}s_1}\dots\varepsilon_{g^{-1}s_n}$ temos:

$$\begin{aligned}\beta_s &= \beta_{[g]\varepsilon_{g^{-1}s_1}\dots\varepsilon_{g^{-1}s_n}} = \beta_{[g]}\beta_{[g^{-1}s_1]}\beta_{[(g^{-1}s_1)^{-1}]}\dots\beta_{[(g^{-1}s_n)^{-1}]} = \\ &= \alpha_g\alpha_{g^{-1}s_1}\alpha_{(g^{-1}s_1)^{-1}}\dots\alpha_{(g^{-1}s_n)^{-1}} = \alpha_g Id_{D_{g^{-1}s_1}}\dots Id_{D_{g^{-1}s_1}} = \\ &= \alpha_g|_{D_{g^{-1}s_1}\cap\dots\cap D_{g^{-1}s_1}}.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $E_{s^*} := \mathrm{Dom}\beta_s = D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}s_1} \cap \dots \cap D_{g^{-1}s_n}$.
Como $s^* = [g^{-1}]\varepsilon_{s_1}\dots\varepsilon_{s_n}$, basta fazer as mesmas contas que fizemos acima para obter $E_s := \mathrm{Dom}\beta_{s^*} = D_g \cap D_{s_1} \cap \dots \cap D_{s_n}$.

Vamos descobrir quem é o contra-domínio de β_s. Para isso, considere:

Afirmação: *Seja* $s = \varepsilon_{s_1}\dots\varepsilon_{s_n}[g] = [g]\varepsilon_{g^{-1}s_1}\dots\varepsilon_{g^{-1}s_n}$, $g, s_1, \dots, s_n \in G$. *Assim:*

$$\beta_s(E_{s^*}) = \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}s_1} \cap \dots \cap D_{g^{-1}s_n}) = D_g \cap D_{s_1} \cap \dots \cap D_{s_n}.$$

Bem, $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}s_1} \cap \dots \cap D_{g^{-1}s_n}) \subseteq \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}s_i}) = D_g \cap D_{s_i}$, $\forall i$. Portanto

$$\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}s_1} \cap \dots \cap D_{g^{-1}s_n}) \subseteq D_g \cap D_{s_1} \cap \dots \cap D_{s_n}.$$

Substituindo g por g^{-1} e s_i por $g^{-1}s_i$ nas contas acima obtemos:

$$\alpha_g(D_g \cap D_{s_1} \cap \ldots \cap D_{s_n}) \subseteq D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}s_1} \cap \ldots \cap D_{g^{-1}s_n}.$$

Aplicando α_g nos dois lados da equação concluímos que:

$$D_g \cap D_{s_1} \cap \ldots \cap D_{s_n} \subseteq \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}s_1} \cap \ldots \cap D_{g^{-1}s_n}).$$

Logo $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}s_1} \cap \ldots \cap D_{g^{-1}s_n}) = D_g \cap D_{s_1} \cap \ldots \cap D_{s_n}$.

$\blacksquare$

Portanto $\beta_s : E_{s^*} \to E_s$ é um isomorfismo e já que intersecção de ideais é um ideal e $E_{[e]} = D_e = A$, segue:

Proposição 2.0.16 : *Se α é uma ação parcial do grupo G na álgebra A, a função β obtida acima é uma ação de $S(G)$ em A.*

$\blacksquare$

Observação 2.0.17 : *Sejam $r_1, \ldots r_n \in G$ e considere $r = [r_1] \ldots [r_n]$ um elemento qualquer de $S(G)$ (note que este não está em sua forma canônica da Prop. 1.1.6). Não é difícil notar que $\beta_r = \alpha_{r_1} \ldots \alpha_{r_n}$, cujo domínio E_{r^*} é $D_{r_n^{-1}} \cap D_{r_n^{-1}r_{n-1}^{-1}} \cap \ldots \cap D_{r_n^{-1}r_{n-1}^{-1}\ldots r_1^{-1}}$ e o contra-domínio E_r é $D_{r_1} \cap D_{r_1r_2} \cap \ldots \cap D_{r_1r_2\ldots r_n}$.*

Então, se β é ação de $S(G)$ em A, geramos uma ação parcial α de G em A tal que $\alpha_g = \beta_{[g]}$ e $D_g = E_{[g]}$. Aplicando o processo que acabamos de fazer em α, geramos um único homomorfismo $\widetilde{\beta}$ de $S(G)$ em $I(A)$ tal que $\widetilde{\beta}_{[g]} = \alpha_g$ e para o qual também vale $\widetilde{E}_{[g]} = D_g$. Mas β satisfaz estas propriedades. Logo $\beta = \widetilde{\beta}$.

Para uma ação parcial α de G em A, geramos uma ação β de $S(G)$ em A. A partir desta, construímos uma ação parcial $\widetilde{\alpha}$ de G em A e $\widetilde{\alpha_g} = \beta_{[g]} = \alpha_g$. Logo $\alpha = \widetilde{\alpha}$.

Assim enunciamos:

Teorema 2.0.18 : *Seja G um grupo, $S(G)$ o semigrupo universal associado e A uma álgebra. Então existe uma correspondência bijetiva entre as ações parciais de G em A e as ações de $S(G)$ em A.*

$\blacksquare$

Exemplo 2.0.19 : *Vimos no Ex. 2.0.7 uma ação parcial* $(\{D_g\}_{g\in\mathbb{F}_2}, \{\alpha_g\}_{g\in\mathbb{F}_2})$ *do grupo* $\mathbb{F}_2$ *na álgebra* $C(X)$*, a álgebra das funções contínuas do Conjunto de Cantor. Utilizando o Teorema anterior, podemos construir uma ação de* $S(\mathbb{F}_2)$ *em* $C(X)$*.*

■

3 Produto Cruzado Parcial Algébrico

Neste capítulo, queremos relacionar o Produto Cruzado Parcial Algébrico por uma ação parcial de um grupo em uma álgebra, com o Produto Cruzado Parcial Algébrico por uma ação do semigrupo universal desse grupo, pela mesma álgebra. Para isso, utilizaremos a bijeção que fizemos no Capítulo 2, entre as ações parciais do grupo G e as ações de $S(G)$.

Até o final deste capítulo, A será uma álgebra, G um grupo e S um semigrupo. Além disso, β será uma ação de S em A. Assim, fica subentendido que β é um homomorfismo que está "acompanhado", para todo $s \in S$, de ideais E_s de A e isomorfismos $\beta_s : E_{s^*} \to E_s$.

Primeiramente vamos ver a definição do produto cruzado parcial algébrico por uma ação parcial.

Sejam (A, G, α) um sistema dinâmico parcial. Dados $g \in G$ e $a_g \in D_g$, considere $a_g\delta_g$ a função de G em A tal que $a_g\delta_g(g) = a_g$ e $a_g\delta_g(h) = 0$, para $h \neq g$.

Definição 3.0.1 : *Seja α uma ação parcial do grupo G na álgebra A. Definimos o produto cruzado parcial algébrico de A por G relativo a α como:*

$$A \rtimes_{\alpha}^{a} G = \left\{ \sum_{g \in G}^{\textit{finito}} a_g\delta_g : a_g \in D_g \right\},$$

com a operação soma sendo termo a termo e o produto de dois "monômios" sendo definidos como

$$(a_g\delta_g)(a_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h)\delta_{gh},$$

estendido linearmente para todo $A \rtimes_{\alpha}^{a} G$.

Bem, $\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h \in D_{g^{-1}} \cap D_h$ implica $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h) \in D_g \cap D_{gh}$. Logo o produto está bem definido.

Exemplo 3.0.2 : *No Ex. 2.0.7, obtemos um sistema dinâmico parcial $(C(X), \mathbb{F}_2, \alpha)$.*

Assim podemos definir $C(X) \rtimes_\alpha^a \mathbb{F}_2$.

Lembre que $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, que é isomorfo ao Conjunto de Cantor e $\mathbb{F}_2$ é o grupo livre gerado por a e b.
Pela definição de produto cruzado, segue que:

$$C(X) \rtimes_\alpha^a \mathbb{F}_2 = \left\{ \sum_{g \in \mathbb{F}_2}^{\text{finito}} f_g \delta_g : f_g \in C(U_g) \right\}.$$

■

Não há uma definição única para o produto cruzado parcial algébrico por uma ação de semigrupo inverso. Na literatura, uma definição que se encontra é análoga a definição dada acima no caso de ações parciais. Para nosso objetivo, que é apresentar um isomorfismo entre $A \rtimes_\alpha^a G$ e $A \rtimes_\beta^a S(G)$, será mais conveniente usar uma outra definição. Assim, começamos definindo um conjunto que, mais tarde, usaremos para definir o produto cruzado parcial algébrico por uma ação.

Seja β uma ação do semigrupo inverso S na álgebra A. Dados $s \in S$ e $a_s \in E_s$, considere $a_s\delta_s$ a função de S em A tal que $a_s\delta_s(s) = a_s$ e $a_s\delta_s(r) = 0$, para $r \neq s$.

Definição 3.0.3 *: Seja β uma ação do semigrupo inverso S na álgebra A. Definimos*

$$L = \left\{ \sum_{s \in S}^{\textit{finito}} a_s \delta_s : a_s \in E_s \right\},$$

onde o produto de dois monômios é definido

$$(a_r\delta_r)(a_s\delta_s) = \beta_r(\beta_{r^{-1}}(a_r)a_s)\delta_{rs},$$

estendido linearmente e a soma é definida de maneira natural.

Como $\beta_{r^{-1}}(a_r)a_s \in E_{r^{-1}} \cap E_s$ implica $\beta_r(\beta_{r^{-1}}(a_r)a_s) \in E_{rs}$, o produto está bem definido.

Para definirmos nosso produto cruzado parcial algébrico por uma ação, vamos quocientar este conjunto L por um certo ideal. A questão que surge é que não é muito comum falar de ideais em anéis não associativos. E o conjunto L definido acima nem sempre é associativo.

No caso do produto cruzado parcial algébrico por uma ação parcial, Exel e Dokuchaev em [2] mostraram que sob certas condições sobre A, $A \rtimes_{\alpha}^{a} G$ é associativo. Neste mesmo artigo, eles apresentam um exemplo de produto cruzado por ação parcial que não é associativo (Proposition 3.6). Se transformarmos a ação parcial desta proposição em uma ação de semigrupo inverso (via a bijeção do Capítulo 2), é fácil concluir que o conjunto L do produto cruzado parcial algébrico não é associativo.

Aqui faremos um resultado análogo, ou seja, ver sob quais condições este conjunto L que acabamos de definir é associativo. Para isso, introduzimos o conceito de multiplicadores em uma álgebra A sobre um corpo K.

Definição 3.0.4 *: A álgebra de multiplicadores de uma K-álgebra A é a álgebra $M(A)$ dos pares ordenados (L, R), onde L e R são transformações lineares de A tal que, para a, $b \in A$:*

(i) $L(ab) = L(a)b$,

(ii) $R(ab) = aR(b)$,

(iii) $R(a)b = aL(b)$,

e para (L, R), $(L', R') \in M(A)$, $\alpha \in K$, as operações são definidas como:

$$\alpha(L, R) = (\alpha L, \alpha R),$$
$$(L, R) + (L', R') = (L + L', R + R'),$$
$$(L, R)(L', R') = (L \circ L', R' \circ R).$$

Diz-se que L é um multiplicador à esquerda e R um multiplicador à direita.

Exemplo 3.0.5 *: Seja A uma álgebra qualquer e fixe $x \in A$. Defina*

$$\begin{aligned} L : A &\to A & \qquad R : A &\to A \\ a &\mapsto xa, & a &\mapsto ax. \end{aligned}$$

Então, $(L, R) \in M(A)$.

Vamos provar que valem $(i) - (iii)$ da Def. 3.0.4. Sejam a, $b \in A$:

(i) $L(ab) = x(ab) = (xa)b = L(a)b$,

(ii) $R(ab) = (ab)x = a(bx) = aR(b)$,

(iii) $R(a)b = (ax)b = a(xb) = aL(b)$.

$\blacksquare$

Nosso objetivo é mostrar sob quais condições L é associativo. Veremos que a veracidade deste fato está intimamente ligada com o conceito de (L, R)-associatividade, que é o seguinte:

Uma álgebra A é (L, R)-associativa quando $L \circ R' = R' \circ L$ para quaisquer (L, R), $(L', R') \in M(A)$.

Assim, estamos interessados em saber quando uma álgebra tem esta propriedade.

Uma álgebra A é dita *idempotente* quando qualquer elemento $a \in A$ pode ser escrito como $a = \sum_{i}^{\text{finita}} b_i c_i$, $b_i, c_i \in A$.

O próximo Lema nos garante que se a álgebra é idempotente, ela é (L, R)-associativa.

Lema 3.0.6 : *Seja A uma álgebra idempotente e (L, R), $(L', R') \in M(A)$. Então*

$$L \circ R' = R' \circ L.$$

Demonstração: Seja $a \in A$. Então $a = \sum_{i}^{\text{finita}} b_i c_i$, $b_i, c_i \in A$. Como os multiplicadores são lineares, suponha $a = bc$, $b, c \in A$ e note que:

$$L(R'(a)) = L(R'(bc)) = L(bR'(c)) = L(b)R'(c) = R'(L(b)c) = R'(L(bc)) = R'(L(a)).$$

$\blacksquare$

Observação 3.0.7 : *Note que se a álgebra possui unidade ela é idempotente, logo é (L, R)-associativa.*

Antes do Teorema a respeito da associatividade de L, mais um Lema:

Lema 3.0.8 : *Se A e B são duas álgebras, $(L, R) \in M(A)$ e $\pi : A \to B$ é isomorfismo, então $(\pi \circ L \circ \pi^{-1}, \pi \circ R \circ \pi^{-1}) \in M(B)$.*

Demonstração: Sejam b_1 e $b_2 \in B$. Então $b_1 = \pi(a_1)$ e $b_2 = \pi(a_2)$, para a_1 e $a_2 \in A$. Assim, vamos provar os 3 ítens da Def. 3.0.4:

(i) $\pi \circ L \circ \pi^{-1}(b_1 b_2) = \pi \circ L(a_1 a_2) = \pi(L(a_1)a_2) = \pi(L(a_1))b_2 = (\pi \circ L \circ \pi^{-1}(b_1))b_2$,

(ii) $\pi \circ R \circ \pi^{-1}(b_1 b_2) = \pi \circ R(a_1 a_2) = \pi(a_1 R(a_2)) = b_1(\pi \circ R \circ \pi^{-1}(b_2))$,

(iii)

$$\begin{aligned}(\pi \circ R \circ \pi^{-1}(b_1))b_2 = (\pi \circ R(a_1))\pi(a_2) = \pi(R(a_1)a_2) = \pi(a_1 L(a_2)) = \\ = \pi(\pi^{-1}(b_1)L(a_2)) = b_1(\pi \circ L \circ \pi^{-1}(b_2)).\end{aligned}$$

■

Teorema 3.0.9 *: Seja β uma ação do semigrupo inverso S na álgebra A. Se os ideais E_s são idempotentes, a operação de multiplicação do conjunto L definido na Def. 3.0.3 é associativa.*

Demonstração: Bem, primeiramente note que ideais de uma álgebra são, em particular, álgebras. Assim, poderemos aplicar o Lema 3.0.6 nos E_s.
Sejam r, s e $t \in S$ e $a_r \in E_r$, $a_s \in E_s$ e $a_t \in E_t$. Nosso objetivo é mostrar que:

$$a_r\delta_r(a_s\delta_s a_t\delta_t) = (a_r\delta_r a_s\delta_s)a_t\delta_t,$$

ou seja, fazendo as multiplicações;

$$\beta_r(\beta_{r^*}(a_r)\beta_s(\beta_{s^*}(a_s)a_t))\delta_{rst} = \beta_{rs}(\beta_{s^*r^*}(\beta_r(\beta_{r^*}(a_r)a_s))a_t)\delta_{rst}.$$

Vamos analisar o lado direito da igualdade:

$$\begin{aligned}\beta_{rs}(\beta_{s^*r^*}(\beta_r(\beta_{r^*}(a_r)a_s))a_t)\delta_{rst} &= \beta_{rs}(\beta_{s^*}(\beta_{r^*}(\beta_r(\beta_{r^*}(a_r)a_s)))a_t)\delta_{rst} = \\ &= \beta_{rs}(\beta_{s^*}(\beta_{r^*}(a_r)a_s)a_t)\delta_{rst} = \\ &= \beta_r(\beta_s(\beta_{s^*}(\beta_{r^*}(a_r)a_s)a_t))\delta_{rst}.\end{aligned}$$

Assim, "esquecendo" os δ_{rst}, precisamos mostrar que

$$\beta_r(\beta_{r^*}(a_r)\beta_s(\beta_{s^*}(a_s)a_t)) = \beta_r(\beta_s(\beta_{s^*}(\beta_{r^*}(a_r)a_s)a_t)).$$

Aplicando β_{r^*} nos dois lados da igualdade, pela esquerda, obtemos:

$$\beta_{r^*}(\beta_r(\beta_{r^*}(a_r)\beta_s(\beta_{s^*}(a_s)a_t))) = \beta_{r^*}(\beta_r(\beta_s(\beta_{s^*}(\beta_{r^*}(a_r)a_s)a_t))),$$

que é equivalente a

$$\beta_{r^*}(a_r)\beta_s(\beta_{s^*}(a_s)a_t) = \beta_s(\beta_{s^*}(\beta_{r^*}(a_r)a_s)a_t).$$

Como $\beta_{r^*} : E_r \to E_{r^*}$ é isomorfismo, se variarmos a_r, $\beta_{r^*}(a_r)$ percorre todo E_{r^*}. Assim, nosso teorema vale se provarmos que

$$a\beta_s(\beta_{s^*}(a_s)a_t) = \beta_s(\beta_{s^*}(aa_s)a_t), \ \forall a \in E_{r^*}, \ a_s \in E_s, \ a_t \in E_t.$$

Denotando $R_{a_t} : E_{s^*} \to E_{s^*}$ o operador linear multiplicador a direita por a_t e $L_a : E_s \to E_s$ o operador linear multiplicador a esquerda por a, a última equação pode ser reescrita como

$$L_a \circ \beta_s \circ R_{a_t} \circ \beta_{s^*}(a_s) = \beta_s \circ R_{a_t} \circ \beta_{s^*} \circ L_a(a_s), \ \forall a \in E_{r^*}, \ a_s \in E_s, \ a_t \in E_t.$$

Pelo Ex. 3.0.5, L_a é um multiplicador à esquerda de E_s e R_{a_t} é um multiplicador à direita de E_{s^*}.

Como os β_s são isomorfismos, Lema 3.0.8 garante que $\beta_s \circ R_{a_t} \circ \beta_{s^*}$ é multiplicador à direita de E_s e como este é idempotente, Lema 3.0.6 implica na validade da última igualdade. Logo, L é associativo.

$\blacksquare$

Assim, a partir de agora, vamos supôr que os ideais E_s de A, relacionados com a nossa ação β de S em A são idempotentes. Então, definimos o produto cruzado parcial algébrico por uma ação como segue.

Definição 3.0.10 *: Seja β uma ação do semigrupo inverso S na álgebra A, de tal maneira que os E_s sejam idempotentes. Considere $N = \langle a\delta_r - a\delta_t : a \in E_r, r \leq t \rangle$, ou seja, o ideal de L gerado pelos elementos da forma $a\delta_r - a\delta_t$ com $a \in E_r$ e $r \leq t$. Definimos o produto cruzado parcial algébrico de A por S relativo a β como*

$$A \rtimes_\beta^a S = \frac{L}{N}.$$

Note que se $r \leq t$, $r = ti$, i idempotente. Por (5) Prop. 2.0.11 $E_r \subseteq E_t$ e podemos falar em $a\delta_t$.

Como $A \rtimes_\beta^a S$ é um quociente de L, denotaremos seus elementos como classes de elementos de L, por exemplo, $\overline{a_s\delta_s}$.

Exemplo 3.0.11 *: No Ex. 2.0.19 obtemos uma ação β. Conseqüentemente podemos construir o Produto Cruzado Parcial Algébrico associado.*

$\blacksquare$

Um resultado imprescindível que usaremos para definir o isomorfismo entre o produto cruzado parcial algébrico por uma ação de semigrupo inverso e o por uma ação parcial é o seguinte:

Lema 3.0.12 *: Seja β ação de S em A. Para $r_1, \ldots, r_n, g, h \in G$, valem as seguintes igualdades em $A \rtimes_\beta^a S$:*

(1) $\overline{a\delta_{[g][h]}} = \overline{a\delta_{[gh]}}$, para $a \in E_{[g][h]}$,

(2) $\overline{a\delta_{\varepsilon_{r_1}\ldots\varepsilon_{r_n}[g]}} = \overline{a\delta_{[g]}}$, para $a \in E_{\varepsilon_{r_1}\ldots\varepsilon_{r_n}[g]}$.

Demonstração: (1): Pela Prop. 2.0.12, (1), $E_{[g][h]} \subseteq E_{[gh]}$, assim faz sentido falarmos em $a\delta_{[gh]}$. Agora, $[g][h] = [g][h][h^{-1}][h] = [gh][h^{-1}][h]$. Como $[h^{-1}][h]$ é idempotente, $[g][h] \leq [gh]$. Portanto $a\delta_{[g][h]} - a\delta_{[gh]} \in N$.
(2): Também pela Prop. 2.0.12, (2), $E_{\varepsilon_{r_1}\ldots\varepsilon_{r_n}[g]} \subseteq E_{[g]}$ e podemos falar em $a\delta_{[g]}$. Já que $\varepsilon_{r_1}\ldots\varepsilon_{r_n}[g] = [g]\varepsilon_{g^{-1}r_1}\ldots\varepsilon_{g^{-1}r_n}$ e $\varepsilon_{g^{-1}r_1}\ldots\varepsilon_{g^{-1}r_n}$ é idempotente, $\varepsilon_{r_1}\ldots\varepsilon_{r_n}[g] \leq [g]$. Então $a\delta_{\varepsilon_{r_1}\ldots\varepsilon_{r_n}[g]} - a\delta_{[g]} \in N$.

■

Note que este resultado vale pois tomamos o quociente do conjunto L pelo ideal N. Essa é a principal justificativa para definirmos o produto cruzado dessa maneira.

Agora podemos enunciar:

Teorema 3.0.13 *: Seja (A, G, α) um sistema dinâmico parcial. Considere $S(G)$ e β a ação de $S(G)$ em A relacionada com α pelo Teo. 2.0.18. Então $A \rtimes_\alpha^a G \cong A \rtimes_\beta^a S(G)$.*

Demonstração: Defina

$$\begin{aligned} \varphi : A \rtimes_\alpha^a G &\to A \rtimes_\beta^a S(G) \\ a\delta_g &\mapsto \overline{a\delta_{[g]}}, \text{ estendida linearmente na soma.} \end{aligned}$$

Vamos provar que φ é um isomorfismo:
<u>Bem definida:</u> $a \in D_g = E_{[g]}$.
<u>Homomorfismo:</u> Por definição, φ separa soma. Usando o Lema anterior, vamos ver que φ também separa o produto:

$$\varphi(a\delta_g)\varphi(b\delta_h) = (\overline{a\delta_{[g]}})(\overline{b\delta_{[h]}}) = \overline{\beta_{[g]}(\beta_{[g^{-1}]}(a)b)\delta_{[g][h]}} = \overline{\beta_{[g]}(\beta_{[g^{-1}]}(a)b)\delta_{[gh]}},$$
$$\varphi((a\delta_g)(b\delta_h)) = \varphi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{gh}) = \overline{\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{[gh]}} = \overline{\beta_{[g]}(\beta_{[g^{-1}]}(a)b)\delta_{[gh]}}.$$

Bijetora: Vamos apresentar uma inversa para φ. Defina

$$\begin{aligned} \psi : L &\to A \rtimes_{\alpha}^{a} G \\ a\delta_s &\mapsto a\delta_{\gamma(s)}, \text{ estendida linearmente na soma,} \end{aligned}$$

onde γ é o homomorfismo definido nos parágrafos seguintes a Prop. 1.1.5.
Note que para $t = \varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_n}[g] \in S(G)$, como $t^* = [g^{-1}]\varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_n}$:

$$\gamma(t^*) = g^{-1} = \gamma(t)^{-1}.$$

Logo:

$$\alpha_{\gamma(t)^{-1}} = \alpha_{g^{-1}} = \alpha_{\gamma(t^*)}.$$

ψ é homomorfismo: Por definição separa soma. Também separa produto:

$$\psi(a\delta_r)\psi(b\delta_s) = (a\delta_{\gamma(r)})(b\delta_{\gamma(s)}) = \alpha_{\gamma(r)}(\alpha_{\gamma(r)^{-1}}(a)b)\delta_{\gamma(r)\gamma(s)} = \alpha_{\gamma(r)}(\alpha_{\gamma(r)^{-1}}(a)b)\delta_{\gamma(rs)},$$
$$\psi((a\delta_r)(b\delta_s)) = \psi(\beta_r(\beta_{r^*}(a)b)\delta_{rs}) = \beta_r(\beta_{r^*}(a)b)\delta_{\gamma(rs)} = \alpha_{\gamma(r)}(\alpha_{\gamma(r^*)}(a)b)\delta_{\gamma(rs)}.$$

ψ se anula em N: Como ψ é homomorfismo, basta provarmos que ψ zera nos geradores de N. Seja $a\delta_f - a\delta_i \in N$ com $f \leq i$ em $S(G)$. Assim, pelo Ex. 1.1.11, $\gamma(f) = \gamma(i)$. Portanto:

$$\psi(a\delta_f - a\delta_i) = \psi(a\delta_f) - \psi(a\delta_i) = a\delta_{\gamma(f)} - a\delta_{\gamma(i)} = 0$$

Assim podemos estendê-la para

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi} : A \rtimes_{\beta}^{a} S(G) &\to A \rtimes_{\alpha}^{a} G \\ \overline{a\delta_s} &\mapsto a\delta_{\gamma(s)}, \text{ estendida linearmente.} \end{aligned}$$

Para $t = \varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_n}[g] \in S(G)$, $[\gamma(t)] = [g]$ e, portanto, pelo Lema 3.0.12, (2), $\overline{a\delta_{[\gamma(t)]}} = \overline{a\delta_{[g]}} = \overline{a\delta_t}$.

$\varphi \circ \widetilde{\psi} = Id_{A \rtimes_{\beta}^{a} S(G)}$: $\varphi \circ \widetilde{\psi}(\overline{a\delta_s}) = \varphi(a\delta_{\gamma(s)}) = \overline{a\delta_{[\gamma(s)]}} = \overline{a\delta_s}$.

$\widetilde{\psi} \circ \varphi = Id_{A \rtimes_{\alpha}^{a} G}$: $\widetilde{\psi} \circ \varphi(a\delta_g) = \widetilde{\psi}(\overline{a\delta_{[g]}}) = a\delta_{\gamma([g])} = a\delta_g$.

Portanto $\widetilde{\psi}$ é inversa de φ e φ é bijeção.

∎

Como este Teorema é válido, os Produtos Cruzados Parciais Algébricos que definimos nos Exemplos 3.0.2 e 3.0.11 são isomorfos.

4 Ações de Semigrupos Inversos em uma C*-Álgebra

Nos próximos 2 capítulos, tentaremos transportar os resultados obtidos nos Capítulos 2 e 3 para o caso C*-algébrico. Assim, a partir de agora, A será uma C*-álgebra unital, G um grupo com unidade e e S um semigrupo inverso com unidade e.

Uma ação parcial de um grupo G numa C*-álgebra é uma ação parcial tal que D_g é um ideal fechado e α_g é um $*$-isomorfismo. Ou seja:

Definição 4.0.1 : *Uma ação parcial de um grupo G numa C*-álgebra A é um par ordenado $(\{D_g\}_{g\in G}\{\alpha_g\}_{g\in G})$, onde para todo $g \in G$, D_g é um ideal fechado de A e $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ é um $*$-isomorfismo, satisfazendo, para todo $g, h \in G$:*

(i) $D_e = A$,

(ii) $\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$,

(iii) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, $\forall x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.

Exemplo 4.0.2 : *Vamos estender o Exemplo 2.0.7.*

Então o que queremos é construir uma ação parcial de $\mathbb{F}_2$ na C*-álgebra $C(X)$, a álgebra das funções contínuas do Conjunto de Cantor.
Em $C(X)$ a norma usual é a norma do sup, isto é, para $f \in C(X)$

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\},$$

e assim $C(X)$ está equipado com a topologia da convergência uniforme.
Definimos, para cada $g \in \mathbb{F}_2$, $D_g = C_0(U_g)$, onde U_g era um aberto de X. Sabemos que se uma seqüência de funções de $C_0(U_g)$ converge uniformemente para uma certa função f, esta f pertence a $C_0(U_g)$. Logo os D_g são fechados.

Tome $g \in \mathbb{F}_2$ e $f \in D_g$. Denote $\overline{f}$ a função que leva o elemento x no complexo $\overline{f(x)}$. Vamos mostrar que α_g preserva $*$:

$$\alpha_g(f^*) = \alpha_g(\overline{f}) = \overline{f} \circ \gamma_{g^{-1}} = \overline{f \circ \gamma_{g^{-1}}} = \alpha_g(f)^*.$$

Assim, concluímos que $(\{D_g\}_{g\in\mathbb{F}_2}, \{\alpha_g\}_{g\in\mathbb{F}_2})$ é uma ação parcial do grupo $\mathbb{F}_2$ na C*-álgebra $C(X)$.

■

Definição 4.0.3 : *Um C*-sistema dinâmico parcial é uma tripla ordenada (A, G, α), onde α é uma ação parcial do grupo G na C*-álgebra A.*

Vamos definir uma ação de semigrupo inverso sobre uma C*-álgebra.

Definição 4.0.4 : *Dada uma C*-álgebra A e um semigrupo inverso S com unidade e, diz-se que β é uma ação de S em A quando para cada $s \in S$ existe um ideal fechado E_s de A e um $*$-isomorfismo $\beta_s : E_{s^*} \to E_s$ tal que $E_e = A$ e, para cada $s, t \in S$, $\beta_s \circ \beta_t = \beta_{st}$.*

Se β é ação de $S(G)$ na C*-álgebra A, esta também será uma ação de $S(G)$ em A no contexto puramente algébrico, ou seja, considerando A apenas como uma álgebra. Por isso teremos vários resultados a seguir que são válidos. Comecemos com resultados análogos às Prop. 2.0.11.
Seja β uma ação do semigrupo inverso S na C*-álgebra A e tome s, $t \in S$. Então:

(1) $\beta_e = Id_A$,

(2) $\beta_{s^*} = \beta_s^{-1}$,

(3) $\beta_s(E_t) = \beta_s(E_t \cap E_{s^*}) = E_{st}$,

(4) Se $f \in E(S)$, então $\beta_f = Id_{E_f}$,

(5) $E_{st} \subseteq E_s$.

Exemplo 4.0.5 : *Continuando o Exemplo 2.0.13.*

Seja $f : A \to B$. Construímos uma ação β de $PHomeo([0,1])$ em $C([0,1])$ tal que $E_{f^*} = C_0(A)$, $E_f = C_0(B)$ e $\beta_f(g) = g \circ f^{-1}$, para $g \in E_{f^*}$. Analogamente ao que fizemos no Ex. 4.0.2, para A subconjunto aberto de $[0,1]$, $C_0(A)$ é fechado. Também é fácil ver que para $f \in PHomeo([0,1])$, β_f preserva *. Logo β é uma ação do semigrupo inverso $PHomeo([0,1])$ na C*-álgebra $C([0,1])$.

$\blacksquare$

Seja β uma ação de $S(G)$ na C*-álgebra A. Definindo $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, Prop. 2.0.14 nos garante que esta será uma ação parcial de G na álgebra A. Para α ser uma ação parcial de G na C*-álgebra A, falta D_g ser fechado em A e α_g ser invariante por *. Mas $D_g = E_{[g]}$ que é um ideal fechado de A e $\alpha_g = \beta_{[g]}$ que é invariante por *. Logo, podemos enunciar:

Proposição 4.0.6 *: Dada β ação de $S(G)$ na C*-álgebra A, defina $D_g = E_{[g]}$ e $\alpha_g = \beta_{[g]}$. Então $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é ação parcial de G em A.*

$\blacksquare$

Por outro lado, dada uma ação parcial de G em A, conseguimos obter uma ação de $S(G)$ em A. Para isso, precisamos fazer um trabalho parecido ao que fizemos no Cap. 2. Utilizando a Prop. 2.0.15, construímos uma ação de $S(G)$ na álgebra A. Mas os ideais E_s eram intersecções dos ideais D_g. Como estes são ideais fechados, E_s também o é. Também vimos que β_s era uma restrição de um α_g. Como este preserva *, β_s é um $*$-isomorfismo.

Proposição 4.0.7 *: Dada uma ação parcial α do grupo G na C*-álgebra A, podemos construir uma ação β entre $S(G)$ e A.*

$\blacksquare$

Portanto, como no Teorema 2.0.18, segue que:

Teorema 4.0.8 *: Existe uma correspondência bijetiva entre as ações parciais do grupo G na C*-álgebra A e as ações de $S(G)$ em A.*

$\blacksquare$

5 Produto Cruzado Parcial

Seja A uma C*-álgebra unital. Vamos definir o Produto Cruzado Parcial do grupo G (com unidade e) por A com respeito a ação parcial α.
Para $g \in G$ e $a_g \in D_g$, defina em $A \rtimes_\alpha^a G$ a seguinte operação *:

$$(a_g\delta_g)^* = \alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}}, \text{ estendida linearmente:}$$
$$\left(\sum_{g\in G}^{\text{finito}} a_g\delta_g\right)^* = \sum_{g\in G}^{\text{finito}} (a_g\delta_g)^*.$$

Proposição 5.0.1 *: $(A \rtimes_\alpha^a G, ^*)$ é $*$-álgebra.*

Demonstração: É fácil ver que $(A \rtimes_\alpha^a G, ^*)$ é uma álgebra. Assim vamos mostrar que * satisfaz as seguintes propriedades para g, $h \in G$:

$$(a_g\delta_g + a_h\delta_h)^* = (a_g\delta_g)^* + (a_h\delta_h)^*,$$
$$((a_g\delta_g)(a_h\delta_h))^* = (a_h\delta_h)^*(a_g\delta_g)^*,$$
$$((a_g\delta_g)^*)^* = a_g\delta_g.$$

Por definição $(a_g\delta_g + a_h\delta_h)^* = (a_g\delta_g)^* + (a_h\delta_h)^*$.

$$\begin{aligned}
((a_g\delta_g)(a_h\delta_h))^* &= (\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h)\delta_{gh})^* = \alpha_{h^{-1}g^{-1}}(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h)^*)\delta_{h^{-1}g^{-1}} = \\
&= \alpha_{h^{-1}}(a_h^*\alpha_{g^{-1}}(a_g^*))\delta_{h^{-1}g^{-1}}, \\
(a_h\delta_h)^*(a_g\delta_g)^* &= (\alpha_{h^{-1}}(a_h^*)\delta_{h^{-1}})(\alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}}) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a_h^*))\alpha_{g^{-1}}(a_g^*))\delta_{h^{-1}g^{-1}} = \\
&= \alpha_{h^{-1}}(a_h^*\alpha_{g^{-1}}(a_g^*))\delta_{h^{-1}g^{-1}},
\end{aligned}$$

e vale a segunda igualdade. Por último,

$$((a_g\delta_g)^*)^* = (\alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}})^* = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g^*)^*)\delta_g = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g))\delta_g = a_g\delta_g.$$

Assim, $(A \rtimes_\alpha^a G, ^*)$ é $*$-álgebra.

$\blacksquare$

Para definirmos os produtos cruzados parciais, usaremos um processo de construção de C*-álgebras chamado C*-álgebra envolvente.

Definição 5.0.2 *: Seja B uma $*$-álgebra de Banach. Uma C*-álgebra envolvente de B é um par (A, π), onde A é uma C*-álgebra e $\pi : B \to A$ é um $*$-homomorfismo com a seguinte propriedade:*

Para qualquer C-álgebra A_1 e qualquer $*$-homomorfismo $\phi : B \to A_1$ existe um único $*$-homomorfismo $\widetilde{\phi} : A \to A_1$ tal que o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & A_1 \\ A \arrow[ur, "\widetilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

Mesmo que a C*-álgebra envolvente seja um par consistindo de uma C*-álgebra e um $*$-homomorfismo, estaremos interessados apenas na C*-álgebra. Dada qualquer $*$-álgebra de Banach B, existe e é única (a menos de isomorfismo) a C*-álgebra envolvente de B. Esta é construída tomando o completamento de $B/\ker\rho_s$ com relação a $\rho_s(x) = \sup\{\|\rho(x)\| : \rho$ é representação de $B\}$ (para mais detalhes a respeito de C*-álgebras envolventes, veja [1], em particular Teo. 6.1.10).

Denotaremos a C*-álgebra envolvente como $C^*_e(B)$, onde B é uma $*$-álgebra de Banach (ou qualquer outro conjunto que permita esta construção).

Definição 5.0.3 *: Uma representação de uma $*$-álgebra, é um $*$-homomorfismo $\pi : A \to B(H)$, onde H é um espaço de Hilbert.*

Em uma $*$-álgebra de Banach, as representações são contrativas e a construção da C*-álgebra envolvente está bem definida.

No nosso caso, temos que $A \rtimes_\alpha^a G$ é apenas uma $*$-álgebra. Considerando $\|.\|$ uma norma em A, defina a seguinte função real $\|.\|_1$ em $A \rtimes_\alpha^a G$:

$$\left\| \sum_{g \in G}^{\text{finito}} a_g \delta_g \right\|_1 = \sum_{g \in G}^{\text{finito}} \|a_g\|.$$

Como a soma do lado direito da igualdade acima é finita, a definição faz sentido. Não é difícil provar que $\|.\|_1$ é uma norma.

Assim, temos uma $*$-álgebra normada, $A \rtimes_\alpha^a G$. Precisamos garantir que as representações de $A \rtimes_\alpha^a G$ são contrativas, já que queremos tomar a C*-álgebra envolvente daquela $*$-álgebra. Para isso, considere π uma representação de $A \rtimes_\alpha^a G$. Note que para $a_g \in D_g$:

$$\|\pi(a_g\delta_g)\|^2 = \|\pi(a_g\delta_g)^*\pi(a_g\delta_g)\| = \|\pi((a_g\delta_g)^*(a_g\delta_g))\| = \|\pi(\alpha_{g^{-1}}(a_g^*a_g)\delta_e)\|.$$

Mas $\alpha_{g^{-1}}(a_g^*a_g)\delta_e \in A\delta_e$, que é uma C*-álgebra (isomorfa a A). Assim, π é contrativa em $A\delta_e$. Com isso:

$$\|\pi(a_g\delta_g)\|^2 = \|\pi(\alpha_{g^{-1}}(a_g^*a_g)\delta_e)\| \leq \|\alpha_{g^{-1}}(a_g^*a_g)\delta_e\| = \|\alpha_{g^{-1}}(a_g^*a_g)\| = \|a_g^*a_g\| = \|a_g\|^2.$$

Portanto segue que π é contrativa:

$$\left\|\pi\left(\sum_{g\in G}^{\text{finito}} a_g\delta_g\right)\right\| \leq \sum_{g\in G}^{\text{finito}} \|\pi(a_g\delta_g)\| \leq \sum_{g\in G}^{\text{finito}} \|a_g\| = \left\|\sum_{g\in G}^{\text{finito}} a_g\delta_g\right\|_1.$$

Então, podemos definir:

Definição 5.0.4 *: O Produto Cruzado Parcial do grupo G pela C*-algebra A relativo a ação parcial α, denotado $A \rtimes_\alpha G$, é a C*-álgebra envolvente da $*$-álgebra $A \rtimes_\alpha^a G$, ou seja, $A \rtimes_\alpha G = C_e^*(A \rtimes_\alpha^a G)$.*

Já que o processo de tomar a C*-álgebra envolvente de uma $*$-álgebra envolve um certo quociente, denotaremos os elementos do produto cruzado parcial como classes dos elementos do produto cruzado parcial algébrico, por exemplo, $\overline{a_g\delta_g}$.

Exemplo 5.0.5 *: Vamos calcular o Produto Cruzado Parcial da ação do Exemplo 4.0.2.*

Bem, lembrando que $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, que é isomorfo ao Conjunto de Cantor e $\mathbb{F}_2$ é o grupo livre gerado por a, b, no Exemplo 3.0.2 calculamos o Produto Cruzado Parcial Algébrico

$$C(X) \rtimes_\alpha^a \mathbb{F}_2 = \left\{\sum_{g\in\mathbb{F}_2}^{\text{finito}} f_g\delta_g : f_g \in C(U_g)\right\}.$$

Assim, basta apenas tomar a C*-álgebra envolvente da $*$-álgebra acima, ou seja:

$$C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}_2 = C_e^*\left(\left\{\sum_{g\in\mathbb{F}_2}^{\text{finito}} f_g\delta_g : f_g \in C(U_g)\right\}\right).$$

Para não ficarmos apenas com essa descrição abstrata, vamos fazer uma espécie de guia para concluirmos que esta C*-álgebra é a Álgebra de Cuntz de ordem 2.

A Álgebra de Cuntz de ordem 2, denotada $\mathcal{O}_2$, é a álgebra universal gerada por duas isometrias S_0, S_1 num Espaço de Hilbert H de dimensão infinita (na verdade esse espaço é único, assim poderíamos ter colocado "...isometrias S_0, S_1 **no** Espaço...") que satisfazem:

$$S_0S_0^* + S_1S_1^* = I_H,$$

onde I_H é a identidade em H.

Temos que X é a união disjunta dos conjuntos $U_0 = \{(0, x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \{0, 1\}\}$ e $U_1 = \{(1, x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \{0, 1\}\}$. Assim, as funções característica 1_{U_0} e 1_{U_1} são tais que $1_{U_0} + 1_{U_1} = 1_X$, 1_X a função que leva todo elemento de X em $1 \in \mathbb{C}$. Logo fica evidente que se queremos construir um isomorfismo entre $C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}_2$ e $\mathcal{O}_2$, este deve satisfazer:

$$\begin{aligned} 1_{U_0} &\mapsto S_0S_0^*, \\ 1_{U_1} &\mapsto S_1S_1^*, \end{aligned}$$

já que assim,

$$1_X = 1_{U_0} + 1_{U_1} \mapsto S_0S_0^* + S_1S_1^* = I_H.$$

Agora note que 1_{U_0} e 1_{U_1} são duas projeções ortogonais. Assim é fácil ver que $C^*(1_{U_0}, 1_{U_1})$ =span$\{1_{U_0}, 1_{U_1}\}$. Além disso, já que um elemento $a1_{U_0} + b1_{U_1}$ dessa C*-álgebra é definido pelo par de complexos (a, b), span$\{1_{U_0}, 1_{U_1}\} = \mathbb{C}^2$.

Com isso, defina o $*$-homomorfismo unital:

$$\begin{aligned} \phi_1 : \text{span}\{1_{U_0}, 1_{U_1}\} &\to \mathcal{O}_2 \\ 1_{U_0} &\mapsto S_0S_0^* \\ 1_{U_1} &\mapsto S_1S_1^*, \text{ estendido linearmente.} \end{aligned}$$

Analogamente, temos que X é a união disjunta dos 4 subconjuntos abaixo:

$$\begin{aligned} U_{00} &= \{(0, 0, x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \{0, 1\}\}, \\ U_{01} &= \{(0, 1, x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \{0, 1\}\}, \\ U_{10} &= \{(1, 0, x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \{0, 1\}\}, \\ U_{11} &= \{(1, 1, x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \{0, 1\}\}. \end{aligned}$$

Note que $1_{U_{00}} + 1_{U_{01}} = 1_{U_0}$ e, assim, devemos encontrar duas projeções p_0 e p_1 em $\mathcal{O}_2$ cuja soma resulte em $S_0S_0^*$, para que assim:

$$1_{U_0} = 1_{U_{00}} + 1_{U_{01}} \mapsto p_0 + p_1 = S_0S_0^*.$$

Já que $S_0S_0^* + S_1S_1^*$, segue que

$$S_0S_0S_0^*S_0^* + S_0S_1S_1^*S_0^* = S_0S_0^*,$$

e analogamente

$$S_1S_0S_0^*S_1^* + S_1S_1S_1^*S_1^* = S_1S_1^*.$$

Como $S_0^*S_0 = S_1^*S_1 = I_H$, facilmente mostra-se que $S_0S_0S_0^*S_0^*, S_0S_1S_1^*S_0^*, S_1S_0S_0^*S_1^*$ e $S_1S_1S_1^*S_1^*$ são projeções. Assim devemos ter:

$$\begin{aligned} 1_{U_{00}} &\mapsto S_0S_0S_0^*S_0^*, \\ 1_{U_{01}} &\mapsto S_0S_1S_1^*S_0^*, \\ 1_{U_{10}} &\mapsto S_1S_0S_0^*S_1^*, \\ 1_{U_{11}} &\mapsto S_1S_1S_1^*S_1^*. \end{aligned}$$

Logo defina o $*$-homomorfismo unital:

$$\begin{aligned} \phi_2 : \operatorname{span}\{1_{U_{00}}, 1_{U_{01}}, 1_{U_{10}}, 1_{U_{11}}\} &\to \mathcal{O}_2 \\ 1_{U_{00}} &\mapsto S_0S_0S_0^*S_0^*, \\ 1_{U_{01}} &\mapsto S_0S_1S_1^*S_0^*, \\ 1_{U_{10}} &\mapsto S_1S_0S_0^*S_1^*, \\ 1_{U_{11}} &\mapsto S_1S_1S_1^*S_1^*, \text{ estendido linearmente.} \end{aligned}$$

Prosseguindo assim, vemos que existe um $*$-homomorfismo unital ϕ_1 de $C^*(1_{U_0}, 1_{U_1})$ em $\mathcal{O}_2$, $*$-homomorfismo unital ϕ_2 de $C^*(1_{U_{00}}, 1_{U_{01}}, 1_{U_{10}}, 1_{U_{11}})$ em $\mathcal{O}_2$, $*$-homomorfismo unital ϕ_3 de $C^*(1_{U_{000}}, 1_{U_{001}}, 1_{U_{010}}, 1_{U_{100}}, 1_{U_{011}}, 1_{U_{101}}, 1_{U_{110}}, 1_{U_{111}})$ em $\mathcal{O}_2$ e assim por diante.
Note que da maneira com que construímos esses homomorfismos, é fácil ver que $\phi_n|_{\mathrm{Dom}\phi_{n-1}} = \phi_{n-1}$.
Considere a álgebra

$$A = C^*(1_{U_0}, 1_{U_1}) \cup C^*(1_{U_{00}}, 1_{U_{01}}, 1_{U_{10}}, 1_{U_{11}}) \cup \dots$$

Afirmação: $\overline{A} = C(X)$.

Bem, X é compacto e Hausdorff e A é uma C*-álgebra unital. Agora sejam $x = (x_1, x_2, \dots)$ e $y = (y_1, y_2, \dots)$ pontos distintos de X (note que $x_j, y_k \in \{0, 1\}$). Assim, existe algum $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \neq y_i$. Considerando $1_{U_{x_1 \dots x_i}}$ (a função característica de $U_{x_1 \dots x_i}$), temos que:

$$1_{U_{x_1 \dots x_i}}(x) = 1,$$
$$1_{U_{x_1 \dots x_i}}(y) = 0.$$

Como $1_{U_{x_1 \dots x_i}} \in A$, segue que A separa pontos de X. Logo, aplicando o Teorema de Stone-Weierstrass (Teorema A.6.9 (b) [14]), segue que $\overline{A} = C(X)$.

■

Mais um resultado que precisaremos é o seguinte:

Afirmação: *Sejam A e B C^*-álgebras e considere a seqüência de C^*-álgebras*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots A,$$

tal que $\overline{\cup A_n} = A$. Suponha que para cada n exista $*$-homomorfismo unital $\varphi_n : A_n \to B$ tal que $\varphi_n|_{A_{n-1}} = \varphi_{n-1}$. Então existe $*$-homomorfismo $\varphi : A \to B$.

Defina $\widetilde{\varphi} : \cup A_n \to B$, de tal maneira que dado $a \in \cup A_n$, como $a \in A_i$ para algum i, $\widetilde{\varphi}(a) = \varphi_i(a)$ (daí segue que $\widetilde{\varphi}$ é $*$-homomorfismo).
φ está bem definida: Suponha $a \in A_i$ e $a \in A_j$, $i \leq j$. Como $\varphi_n|_{A_{n-1}} = \varphi_{n-1}$, $\varphi_j(a) = \varphi_i(a)$.
φ é contínua: Para $a \in \cup A_n$, como $a \in A_i$, para algum i, temos:

$$\|\varphi(a)\| = \|\varphi_i(a)\| \leq \|a\|,$$

a desigualdade segue do fato que φ_i é $*$-homomorfismo unital entre C*-álgebras, logo contrativo (Lema 3.4.2 (b) [14]).
Assim, podemos estender $\widetilde{\varphi}$ para o $*$-homomorfismo $\varphi : \overline{A} \to B$.

■

Portanto, com essas duas afirmações, concluímos que há um $*$-homomorfismo unital entre $C(X)$ e $\mathcal{O}_2$. Mas note que $C(X)$ é isomorfo à cópia de $C(X)\delta_e$ em $C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}_2$ (veja Obs. B.2.20 em [10]). Assim, segue que existe $*$-homomorfismo unital ϕ_e entre a cópia de $C(X)\delta_e$ em $C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}_2$ e $\mathcal{O}_2$.
Agora seja $f = f_1 f_2 \dots f_n$ um elemento, em sua forma reduzida, de $\mathbb{F}_2$. Tome $\mathbf{f}\delta_f$, onde

$\mathbf{f} \in D_f$. Defina:

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi} : C(X) \rtimes_\alpha^a \mathbb{F}_2 &\to \mathcal{O}_2 \\ \mathbf{f}\delta_f &\mapsto \phi_e(\overline{\mathbf{f}\delta_e})S_{\widetilde{f_1}} \dots S_{\widetilde{f_n}},\ \text{estendida linearmente na soma,}\end{aligned}$$

onde $\widetilde{f_i} = 0$ se $f_i = a$ e $\widetilde{f_i} = 1$ se $f_i = b$. No caso de $f_i = a^{-1}$, $S_{\widetilde{f_i}} = S_0^*$ e se $f_i = b^{-1}$ temos $S_{\widetilde{f_i}} = S_1^*$.
Não mostraremos aqui e é bem trabalhoso mostrar que a função $\widetilde{\phi}$ é um $*$-homomorfismo. A idéia seria tomar $\mathbf{f}\delta_e$ como uma combinação de elementos do tipo $1_{\widetilde{f}}\delta_{\widetilde{f}}$ (que vale pelas Afirmações que fizemos), onde $1_{\widetilde{f}} \in D_{\widetilde{f}} = C_0(U_{\widetilde{f}})$ é a função característica de $U_{\widetilde{f}}$, com $U_{\widetilde{f}} \subseteq U_f$. Assim a palavra $\widetilde{f}$ tem que começar com a palavra f, ou seja, $\widetilde{f} = f\widetilde{f}_1\widetilde{f}_2 \dots \widetilde{f}_k$. Usando o fato de que ϕ_e é um $*$-homomorfismo, o resultado segue. Para a demonstração deste e dos demais fatos que envolvem este exemplo, veja [5] (seção 7).

Pela Propriedade Universal das C*-álgebras envolventes, segue que existe um $*$-homomorfismo $\phi : C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}_2 \to \mathcal{O}_2$ tal que:

$$\phi(\overline{\mathbf{f}\delta_f}) = \widetilde{\phi}(\mathbf{f}\delta_f).$$

Por outro lado, temos que $D_a = C_0(U_0)$ e $D_b = C_0(U_1)$. Assim denote 1_a a unidade de D_a, que é a função característica de U_0 e 1_b a unidade de D_b. Considere a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi} : \{S_0, S_1\} &\to C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}_2 \\ S_0 &\mapsto \overline{1_a\delta_a} \\ S_1 &\mapsto \overline{1_b\delta_b}.\end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(S_0)\widetilde{\psi}(S_0)^* + \widetilde{\psi}(S_1)\widetilde{\psi}(S_1)^* &= (\overline{1_a\delta_a})(\overline{1_a\delta_a})^* + (\overline{1_b\delta_b})(\overline{1_b\delta_b})^* = \\ &= (\overline{1_a\delta_a})(\overline{\alpha_{a^{-1}}(1_a)\delta_{a^{-1}}}) + (\overline{1_b\delta_b})(\overline{\alpha_{b^{-1}}(1_b)\delta_{b^{-1}}}) = \\ &= (\overline{\alpha_a(\alpha_{a^{-1}}(1_a)\alpha_{a^{-1}}(1_a))\delta_e}) + (\overline{\alpha_b(\alpha_{b^{-1}}(1_b)\alpha_{b^{-1}}(1_b))\delta_e}) = \\ &= \overline{1_a\delta_e} + \overline{1_b\delta_e},\end{aligned}$$

e como X é a união disjunta de U_0 e U_1, segue que

$$\overline{1_a\delta_e} + \overline{1_b\delta_e} = \overline{1_X\delta_e},$$

que é a unidade de $C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}_2$. Pela Propriedade Universal de $\mathcal{O}_2$ (para mais detalhes, veja [10]), existirá $*$-homomorfismo $\psi : \mathcal{O}_2 \to C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}_2$ tal que:

$$\psi(S_0) = \widetilde{\psi}(S_0) = \overline{1_a\delta_a},$$
$$\psi(S_1) = \widetilde{\psi}(S_1) = \overline{1_b\delta_b}.$$

Portanto basta mostrarmos que ϕ e ψ são inversas uma da outra.

$\underline{\phi \circ \psi = Id_{\mathcal{O}_2}}$: Como estas funções são $*$-homomorfismos, é suficiente provarmos o resultado nos geradores de $\mathcal{O}_2$:

$$\phi \circ \psi(S_0) = \phi(\overline{1_a\delta_a}) = \widetilde{\phi}(1_a\delta_a) = \phi_e(1_{U_0})S_0 = S_0S_0^*S_0 = S_0,$$
$$\phi \circ \psi(S_1) = \phi(\overline{1_b\delta_b}) = \widetilde{\phi}(1_b\delta_b) = \phi_e(1_{U_1})S_1 = S_1S_1^*S_1 = S_1.$$

$\underline{\psi \circ \phi = Id_{C(X)\rtimes_\alpha \mathbb{F}_2}}$: Seja $f = f_1 \dots f_n$ um elemento de $\mathbb{F}_2$ em sua forma reduzida e $\mathbf{f} \in D_f$. Vimos na Obs. 2.0.8, que $\alpha_{f_1}(\alpha_{f_1^{-1}}(1_{f_1})1_{f_2})$ é a unidade de $D_{f_1f_2}$. Assim:

$$\begin{aligned}
(\overline{1_{f_1}\delta_{f_1}})(\overline{1_{f_2}\delta_{f_2}})\dots(\overline{1_{f_n}\delta_{f_n}}) &= (\overline{\alpha_{f_1}(\alpha_{f_1^{-1}}(1_{f_1})1_{f_2})\delta_{f_1f_2}})(\overline{1_{f_3}\delta_{f_3}})\dots(\overline{1_{f_n}\delta_{f_n}}) = \\
&= (\overline{1_{f_1f_2}\delta_{f_1f_2}})(\overline{1_{f_3}\delta_{f_3}})\dots(\overline{1_{f_n}\delta_{f_n}}) = \\
&= (\overline{\alpha_{f_1f_2}(\alpha_{f_2^{-1}f_1^{-1}}(1_{f_1f_2})1_{f_3})\delta_{f_1f_2f_3}})(\overline{1_{f_4}\delta_{f_4}})\dots(\overline{1_{f_n}\delta_{f_n}}) = \\
&= (\overline{1_{f_1f_2f_3}\delta_{f_1f_2f_3}})(\overline{1_{f_4}\delta_{f_4}})\dots(\overline{1_{f_n}\delta_{f_n}}) = \dots = \\
&= (\overline{1_{f_1f_2\dots f_n}\delta_{f_1f_2\dots f_n}}) = (\overline{1_f\delta_f}).
\end{aligned}$$

Agora tome $g \in \mathbb{F}_2$ e considere o elemento $1_g\delta_e \in C(X)\delta_e$, onde 1_g é a unidade de $D_g \subseteq C(X)$. Como $\phi_e(\overline{1_g\delta_e}) = S_{\widetilde{g}_1}\dots S_{\widetilde{g}_n}S_{\widetilde{g}_n}^*\dots S_{\widetilde{g}_1}^*$ [1], note que:

$$\begin{aligned}
\psi \circ \phi_e(\overline{1_g\delta_e}) &= \psi(S_{\widetilde{g}_1}\dots S_{\widetilde{g}_n}S_{\widetilde{g}_n}^*\dots S_{\widetilde{g}_1}^*) = \psi(S_{\widetilde{g}_1})\dots\psi(S_{\widetilde{g}_n})\psi(S_{\widetilde{g}_n})^*\dots\psi(S_{\widetilde{g}_1})^* = \\
&= (\overline{1_{g_1}\delta_{g_1}})\dots(\overline{1_{g_n}\delta_{g_n}})(\overline{1_{g_n}\delta_{g_n}})^*(\overline{1_{g_1}\delta_{g_1}})^* = \\
&= (\overline{1_{g_1}\delta_{g_1}})\dots(\overline{1_{g_n}\delta_{g_n}})(\overline{1_{g_n^{-1}}\delta_{g_n^{-1}}})\dots(\overline{1_{g_1^{-1}}\delta_{g_1^{-1}}}) = (\overline{1_g\delta_g})(\overline{1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}}) = \\
&= (\overline{1_g\delta_e}).
\end{aligned}$$

Tome o elemento $\overline{\mathbf{f}\delta_f} \in C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}_2$. Pelas Afirmações que fizemos no começo deste Exemplo, segue que $\overline{\mathbf{f}\delta_e} = \overline{\sum_{g\in\mathbb{F}_2} 1_g\delta_e}$. Com isso,

$$\psi \circ \phi_e(\overline{\mathbf{f}\delta_e}) = \psi \circ \phi_e\left(\overline{\sum_{g\in\mathbb{F}_2} 1_g\delta_e}\right) = \sum_{g\in\mathbb{F}_2} \psi \circ \phi_e(\overline{1_g\delta_e}) = \sum_{g\in\mathbb{F}_2} \overline{1_g\delta_e} = \overline{\mathbf{f}\delta_e}.$$

[1] $\widetilde{g}_i = 0$ se $g_i = a$ e $\widetilde{g}_i = 1$ se $g_i = b$. No caso de $g_i = a^{-1}$, $S_{\widetilde{g}_i} = S_0^*$ e se $g_i = b^{-1}$ temos $S_{\widetilde{g}_i} = S_1^*$.

Assim, considerando $\widetilde{\phi}(\mathbf{f}\delta_f) = \phi_e(\overline{\mathbf{f}\delta_e})S_{\widetilde{f_1}} \dots S_{\widetilde{f_n}}$:

$$\begin{aligned}\psi \circ \phi(\overline{\mathbf{f}\delta_f}) &= \psi \circ \widetilde{\phi}(\mathbf{f}\delta_f) = \psi(\phi_e(\overline{\mathbf{f}\delta_e})S_{\widetilde{f_1}} \dots S_{\widetilde{f_n}}) = \psi(\phi_e(\overline{\mathbf{f}\delta_e}))\psi(S_{\widetilde{f_1}}) \dots \psi(S_{\widetilde{f_n}}) = \\ &= \overline{\mathbf{f}\delta_e}(\overline{1_{f_1}\delta_{f_1}}) \dots (\overline{1_{f_n}\delta_{f_n}}) = (\overline{\mathbf{f}\delta_e})(\overline{1_{f_1 f_2 \dots f_n}\delta_{f_1 f_2 \dots f_n}}) = (\overline{\mathbf{f}\delta_e})(\overline{1_f \delta_f}) = \\ &= \overline{\mathbf{f}\delta_f}.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}_2$ é isomorfo a $\mathcal{O}_2$.

■

Para definirmos o Produto Cruzado Parcial do semigrupo inverso S pela C*-álgebra A relativo a ação β, o procedimento é análogo. Para $r \in S$ e $a_r \in E_r$ defina em $A \rtimes_\beta^a S$ a seguinte operação:

$$\left(\overline{a_r\delta_r}\right)^* = \overline{\beta_{r^*}(a_r^*)\delta_{r^*}}, \text{ estendida linearmente na soma.}$$

Facilmente verifica-se que $(A \rtimes_\beta^a S, *)$ é $*$-álgebra.

Como fizemos para definir o produto cruzado parcial por uma ação parcial de grupo, precisamos garantir que podemos tomar a C*-álgebra envolvente de $A \rtimes_\beta^a S$, ou seja, precisamos mostrar que as representações de $A \rtimes_\beta^a S$ são contrativas. Para isso, defina uma norma $\|.\|_1$ em L:

$$\left\|\sum_{s\in S}^{\text{finito}} a_s\delta_s\right\|_1 = \sum_{s\in S}^{\text{finito}} \|a_s\|,$$

(note que de fato esta é uma norma).

Lema 5.0.6 : *Toda representação $\rho : A \rtimes_\beta^a S \to B(H)$ é contrativa.*

Demonstração: Uma representação ρ de $A \rtimes_\beta^a S$ é uma representação de L tal que $\rho|_N \equiv 0$.

Seja $s \in S$ e $a_s \in E_s$. Como $s^*s \leq e$ (e a unidade de S), segue que:

$$\begin{aligned}\|\rho(a_s\delta_s)\|^2 &= \|\rho(a_s\delta_s)^*\rho(a_s\delta_s)\| = \|\rho((a_s\delta_s)^*(a_s\delta_s))\| = \|\rho(\beta_{s^*}(a_s^*a_s)\delta_{s^*s})\| = \\ &= \|\rho(\beta_{s^*}(a_s^*a_s)\delta_e)\| \leq \|a_s^*a_s\| = \|a_s\|^2.\end{aligned}$$

Para um elemento qualquer $\sum_{s\in S}^{\text{finito}} a_s\delta_s \in L$:

$$\left\|\rho\left(\sum_{s\in S}^{\text{finito}} a_s\delta_s\right)\right\| \leq \sum_{s\in S}^{\text{finito}} \|\rho(a_s\delta_s)\| \leq \sum_{s\in S}^{\text{finito}} \|a_s\| = \left\|\sum_{s\in S}^{\text{finito}} a_s\delta_s\right\|_1.$$

Logo ρ é contrativa.

■

Assim, definimos:

Definição 5.0.7 *: O Produto Cruzado Parcial do semigrupo inverso S pela C^*-algebra A relativo a ação β, denotado $A \rtimes_\beta S$, é a C^*-álgebra envolvente da $*$-álgebra $A \rtimes_\beta^a S$, ou seja, $A \rtimes_\beta S = C_e^*(A \rtimes_\beta^a S)$.*

Note que em $A \rtimes_\beta S$, os elementos são "classes de classes" e serão denotados como tal, por exemplo, $\overline{\overline{a_r\delta_r}}$, onde $a_r\delta_r \in L$.

Seja G um grupo e A uma C*-álgebra. Sabe-se que em uma C*-álgebra, ideais fechados são idempotentes (Teorema V.9.2 [3]). Assim, neste Capítulo, não precisamos nos preocupar em tentar garantir que os ideais E_s sejam idempotentes.

Tome α uma ação parcial de G em A e considere β a ação de $S(G)$ em A relacionada. Sabemos, pelo Teorema 3.0.13, que $A \rtimes_\alpha^a G$ é isomorfo a $A \rtimes_\beta^a S(G)$. Queremos provar que $A \rtimes_\alpha G$ é isomorfo a $A \rtimes_\beta S(G)$. Faremos isto utilizando a propriedade envolvente dos produtos cruzados parciais.

Para $g \in G$ e $a_g \in D_g$, defina

$$\begin{aligned} \phi : A \rtimes_\alpha^a G &\to A \rtimes_\beta S(G) \\ a_g\delta_g &\to \overline{\overline{a_g\delta_{[g]}}}, \text{ estendido linearmente na soma.} \end{aligned}$$

<u>ϕ está bem definida:</u> Já que $E_{[g]} = D_g$, temos $a_g \in E_{[g]}$.

<u>ϕ é homomorfismo:</u> Em relação a soma é óbvio. Tomando $g, h \in G$ e $a_g \in D_g$, $a_h \in D_h$, temos que ϕ separa produto:

$$\phi((a_g\delta_g)(a_h\delta_h)) = \phi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h)\delta_{gh}) = \overline{\overline{\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)a_h)\delta_{[gh]}}},$$
$$\phi(a_g\delta_g)\phi(a_h\delta_h) = \overline{\overline{a_g\delta_{[g]}a_h\delta_{[h]}}} = \overline{\overline{\beta_{[g]}(\beta_{[g^{-1}]}(a_g)b_h)\delta_{[g][h]}}} = \overline{\overline{\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{[g][h]}}},$$

que por (1) do Lema 3.0.12 são iguais.

<u>ϕ preserva *:</u> Tome $g \in G$ e $a_g \in D_g$. Assim:

$$\phi((a_g\delta_g)^*) = \phi(\alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}}) = \overline{\overline{\alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{[g^{-1}]}}},$$
$$\phi(a_g\delta_g)^* = (\overline{\overline{a_g\delta_{[g]}}})^* = \overline{\overline{\beta_{[g^{-1}]}(a_g^*)\delta_{[g^{-1}]}}} = \overline{\overline{\alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{[g^{-1}]}}}.$$

Assim, pela propriedade envolvente de $A \rtimes_\alpha G$, existe único $*$-homomorfismo $\varphi : A \rtimes_\alpha G \to A \rtimes_\beta S(G)$ tal que:

$$\varphi(\overline{a_g\delta_g}) = \overline{\overline{a_g\delta_{[g]}}}.$$

Agora seja $K = \left\{ \sum_{s\in S(G)}^{\text{finito}} a_s\delta_s : a_s \in E_s \right\}$. Utilizando a aplicação $\gamma : S(G) \to G$ definida nos parágrafos seguintes à Prop. 1.1.5, considere

$$\begin{aligned} \omega : K &\to A \rtimes_\alpha G \\ a_s\delta_s &\mapsto \overline{a_s\delta_{\gamma(s)}}, \text{ estendido linearmente na soma.} \end{aligned}$$

Facilmente verifica-se que ω é homomorfismo.
Considere M o ideal de K gerado pelos elementos $a\delta_r - a\delta_t$, onde $a \in E_r$ e $r \le t$. Vamos mostrar que ω se anula em M. Tome $r \le t$ em $S(G)$. Então, por Ex. 1.1.11, t difere com r por alguns ε_t's e, assim, $\gamma(r) = \gamma(t)$. Portanto

$$\omega(a\delta_r - a\delta_t) = \omega(a\delta_r) - \omega(a\delta_t) = \overline{a\delta_{\gamma(r)}} - \overline{a\delta_{\gamma(t)}} = 0.$$

Assim, podemos definir

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi} : A \rtimes_\beta^a S(G) &\to A \rtimes_\alpha G \\ \overline{a_s\delta_s} &\mapsto \overline{a_s\delta_{\gamma(s)}}, \text{ estendido linearmente na soma.} \end{aligned}$$

<u>$\widetilde{\phi}$ é homomorfismo:</u> Em relação a soma é óbvio. Para o produto, por (2) do Lema 3.0.12 basta considerarmos os elementos da forma $\overline{a_{[g]}\delta_{[g]}}$ (não precisamos tomar $\delta_{r_1\dots r_n[g]}$). Assim, considere $[g],[h] \in S(G)$ e $a_{[g]} \in E_{[g]}$, $a_{[h]} \in E_{[h]}$. Por (1) do Lema 3.0.12, vemos que $\widetilde{\phi}$ separa produto:

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}((\overline{a_{[g]}\delta_{[g]}})(\overline{a_{[h]}\delta_{[h]}})) &= \widetilde{\phi}(\overline{\beta_{[g]}(\beta_{[g^{-1}]}(a_{[g]})a_{[h]})\delta_{[g][h]}}) = \widetilde{\phi}(\overline{\beta_{[g]}(\beta_{[g^{-1}]}(a_{[g]})a_{[h]})\delta_{[gh]}}) = \\ &= \overline{\beta_{[g]}(\beta_{[g^{-1}]}(a_{[g]})a_{[h]})\delta_{gh}}, \\ \widetilde{\phi}(\overline{a_{[g]}\delta_{[g]}})\widetilde{\phi}(\overline{a_{[h]}\delta_{[h]}}) &= (\overline{a_{[g]}\delta_g})(\overline{a_{[h]}\delta_h}) = \overline{\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_{[g]})a_{[h]})\delta_{gh}}, \end{aligned}$$

que são iguais.

<u>$\widetilde{\phi}$ preserva $*$:</u> Tome $[g] \in S(G)$ e $a_{[g]} \in E_{[g]}$. Então:

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}((\overline{a_{[g]}\delta_{[g]}})^*) &= \widetilde{\phi}(\overline{\beta_{[g^{-1}]}(a_{[g]}^*)\delta_{[g^{-1}]}}) = \overline{\beta_{[g^{-1}]}(a_{[g]}^*)\delta_{g^{-1}}}, \\ \widetilde{\phi}(\overline{a_{[g]}\delta_{[g]}})^* &= (\overline{a_{[g]}\delta_g})^* = \overline{\beta_{[g^{-1}]}(a_{[g]}^*)\delta_{g^{-1}}}. \end{aligned}$$

Novamente, pela propriedade envolvente de $A \rtimes_\beta S(G)$, existe único $*$-homomorfismo

$$\widetilde{\varphi} : A \rtimes_\beta S(G) \to A \rtimes_\alpha G$$
$$\overline{\overline{a_s\delta_s}} \mapsto \overline{a_s\delta_{\gamma(s)}},$$

estendida linearmente.

Como é evidente que valem $\varphi \circ \widetilde{\varphi} = Id_{A \rtimes_\beta S(G)}$ e $\widetilde{\varphi} \circ \varphi = Id_{A \rtimes_\alpha G}$, podemos enunciar:

Teorema 5.0.8 *: Seja α uma ação parcial do grupo G na C*-álgebra A e considere β de $S(G)$ em A a ação relacionada. Então $A \rtimes_\alpha G$ é isomorfo a $A \rtimes_\beta S(G)$.*

■

Note que este teorema, assim como o Teorema 3.0.13 (no ambiente algébrico), indicam que os produtos cruzados parciais de uma ação parcial de grupo são um caso particular dos produtos cruzados parciais de uma ação de semigrupo inverso.

Exemplo 5.0.9 *: Considere a ação que construímos no Exemplo 2.0.19, de $S(\mathbb{F}_2)$ na álgebra $C(X)$.*

É fácil ver que podemos estender β para uma ação de $S(\mathbb{F}_2)$ na C*-álgebra $C(X)$ e é muito parecido com o que fizemos para a ação parcial do Exemplo 4.0.2. Assim, considere o Produto Cruzado Parcial Algébrico que definimos no Exemplo 3.0.11. Definindo uma operação de involução nesse conjunto, como fizemos no início deste Capítulo, temos que:

$$C(X) \rtimes_\beta S(\mathbb{F}_2) = C_e^*(C(X) \rtimes_\beta^a S(\mathbb{F}_2)).$$

Utilizando o Teorema que acabamos de enunciar, concluímos que esta C*-álgebra é a Álgebra de Cuntz.

■

6 Representações Covariantes

No Capítulo 4 conseguimos uma bijeção entre as ações parciais de um grupo G e as ações do semigrupo universal associado, $S(G)$. Neste Capítulo apresentaremos as Representações Covariantes e mostraremos que existe uma bijeção entre as representações covariantes de uma ação parcial α e as da ação associada β.

Outro ponto importante que devemos retratar aqui é que em [13], Sieben usou uma outra definição para o produto cruzado parcial de uma C*-álgebra por um semigrupo inverso relativo a uma ação. Assim precisamos mostrar que aquela definição é equivalente a que apresentamos no Capítulo 5.

Neste Capítulo, G será um grupo com unidade e, A uma C*-álgebra unital e S um semigrupo inverso com unidade e.

Para definir representações covariantes, precisamos de algumas informações a respeito de isometrias parciais.

Proposição 6.0.1 *: Sejam H, K espaços de Hilbert. Para um operador $U \in B(H, K)$ são equivalentes:*

(1) $U = UU^*U$,

(2) $P = U^*U$ *é uma projeção,*

(3) $U|_{ker^{\perp}U}$ *é uma isometria.*

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2): Claro que $P = P^*$ e $P^2 = U^*UU^*U = U^*U = P$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Para $k \in H$, $\|P(k)\|^2 = \langle P(k), k\rangle = \langle U^*U(k), k\rangle = \langle U(k), U(k)\rangle = \|U(k)\|^2$. Assim, ker$U$ =ker$P$ =Im$^{\perp}P$. Tomando $h \in$ ker$^{\perp}U$ =ImP, concluímos que $\|U(h)\| = \|P(h)\| = \|h\|$. Assim U é isométrico em ker$^{\perp}U$.
(3) $\Rightarrow$ (2): Para $i = 1, 2$ tome $h_i \in H$, $k_i \in$ ker$^{\perp}U$ e $l_i \in$ ker$U$, tais que $h_i = k_i + l_i$.

Então, já que $U|_{\ker^{\perp}U}$ é isometria:

$$\langle U^*U(h_1), h_2\rangle = \langle U(h_1), U(h_2)\rangle = \langle U(k_1), U(k_2)\rangle = \langle k_1, k_2\rangle = \langle k_1, h_2\rangle.$$

Logo $P = U^*U$ é projeção sobrejetiva sobre $\ker^{\perp}U$.
(2) $\Rightarrow$ (1): Não é difícil ver que $\mathrm{Im}^{\perp}U^*U$=$\ker U^*U$=$\ker U$. Assim, para $k \in \mathrm{Im}U^*U$, $l \in \mathrm{Im}^{\perp}U^*U$ e $h = k + l$, temos que

$$U(h) = U(k) + U(l) = U(k) = U(U^*U(h)).$$

■

Definição 6.0.2 : *Um operador $U \in B(H, K)$ que satisfaz as 3 condições equivalentes acima é dito isometria parcial.*

O conjunto de isometrias parciais entre os espaços de Hilbert H e K será denotado $PIso(H, K)$. Se $H = K$, denotaremo-lo $PIso(H)$.

Tome $U \in PIso(H, K)$. Definindo M =$\ker^{\perp}U$ e N =$\mathrm{Im}U$, concluímos que $U \equiv 0$ em $M^{\perp}$ e que além de sobrejetor, U é uma isometria unitária entre M e N (daí o nome isometria parcial). De fato:

$$UU^*(N) = UU^*U(M) = U(M) = N.$$

Logo $UU^* = Id_N$.
Nos referiremos a M como o *espaço inicial* e N como o *espaço final* de U.

Para maiores detalhes, veja [14].

Neste Capítulo, trabalharemos com C*-álgebras unitais. Abaixo segue a definição de uma representação:

Definição 6.0.3 : *Uma representação de uma C*-álgebra com unidade e, é um $*$-homomorfismo $\pi : A \to B(H)$, onde H é um espaço de Hilbert, tal que $\pi(e) = Id_H$.*

Note que $\pi(e)(H) = H$. Assim, $H = \pi(A)H$.

Definição 6.0.4 : *Seja G um grupo com unidade e e H um espaço de Hilbert. Uma representação parcial de G em H é uma aplicação $\rho : G \to B(H)$ tal que, para $g, h \in G$:*

(i) $\rho(g)\rho(h)\rho(h^{-1}) = \rho(gh)\rho(h^{-1})$,

(ii) $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^*$,

(iii) $\rho(e) = Id_H$.

Note que da definição, segue que $\rho(g^{-1})\rho(g)\rho(h) = \rho(g^{-1})\rho(gh)$:

$$\begin{aligned}\rho(g^{-1})\rho(g)\rho(h) &= (\rho(h^{-1})\rho(g^{-1})\rho(g))^* = (\rho(h^{-1}g^{-1})\rho(g))^* = \\ &= \rho(g^{-1})\rho(gh).\end{aligned}$$

Vamos então definir Representações Covariantes de ações parciais.

Definição 6.0.5 *: Seja α uma ação parcial do grupo G na C*-álgebra A. Uma representação covariante de α é uma tripla (π, μ, H) onde $\pi : A \to B(H)$ é uma representação de A no espaço de Hilbert H e $\mu : G \to B(H)$ é uma representação parcial tal que, para cada $g \in G$, μ_g é isometria parcial com espaço inicial $\overline{span\{\pi(D_{g^{-1}})H\}}$ e espaço final $\overline{span\{\pi(D_g)H\}}$. Além disso, para $g \in G$, temos a condição de covariância:*

$$\mu_g \pi(a) \mu_{g^{-1}} = \pi(\alpha_g(a)),$$

para todo $a \in D_{g^{-1}}$.

Na próxima proposição, usaremos *unidades aproximadas* de uma C*-álgebra. Sabe-se que numa C*-álgebra (não unital) A sempre existe uma unidade aproximada, que é um net crescente de elementos limitados e positivos $\{u_\lambda\}$ tal que, para $a \in A$, $\lim\limits_{\lambda} au_\lambda = \lim\limits_{\lambda} u_\lambda a = a$. Para mais detalhes a respeito de unidades aproximadas, veja [12].

Proposição 6.0.6 *: Seja (A, G, α) um C*-sistema dinâmico parcial e $g_1, \ldots, g_n \in G$. Tome (π, μ, H) uma representação covariante de α. Então $\mu_{g_1} \ldots \mu_{g_n}$ é isometria parcial com espaço inicial $\overline{span\{\pi(D_{g_n^{-1}} \cap D_{g_n^{-1}g_{n-1}^{-1}} \cap \ldots \cap D_{g_n^{-1}\ldots g_1^{-1}})H\}}$ e espaço final $\overline{span\{\pi(D_{g_1} \cap D_{g_1g_2} \cap \ldots \cap D_{g_1\ldots g_n})H\}}$.*

Demonstração: Comecemos a demonstração para o caso $n = 2$:

$$\begin{aligned}\mu_{g_1}\mu_{g_2}(\mu_{g_1}\mu_{g_2})^*\mu_{g_1}\mu_{g_2} &= \mu_{g_1}\mu_{g_2}\mu_{g_2}^*\mu_{g_1}^*\mu_{g_1}\mu_{g_2} = \mu_{g_1g_2}\mu_{g_2^{-1}}\mu_{g_1^{-1}}\mu_{g_1}\mu_{g_2} = \\ &= \mu_{g_1g_2}\mu_{g_2^{-1}g_1^{-1}}\mu_{g_1}\mu_{g_2} = \mu_{g_1g_2}\mu_{g_2^{-1}g_1^{-1}g_1}\mu_{g_2} = \\ &= \mu_{g_1g_2}\mu_{g_2^{-1}}\mu_{g_2} = \mu_{g_1g_2g_2^{-1}}\mu_{g_2} = \\ &= \mu_{g_1}\mu_{g_2}.\end{aligned}$$

Logo $\mu_{g_1}\mu_{g_2}$ é isometria parcial.

Note que as projeções $\mu^*_{g_1}\mu_{g_1}$ e $\mu^*_{g_2}\mu_{g_2}$ comutam:

$$\begin{aligned}\mu^*_{g_1}\mu_{g_1}\mu^*_{g_2}\mu_{g_2} &= \mu_{g_1^{-1}}(\mu_{g_1}\mu^*_{g_2}(\mu_{g_1}\mu^*_{g_2})^*\mu_{g_1}\mu^*_{g_2})\mu_{g_2} = \mu_{g_1^{-1}}\mu_{g_1}\mu_{g_2^{-1}}\mu_{g_2}\mu_{g_1^{-1}}\mu_{g_1}\mu_{g_2^{-1}}\mu_{g_2} = \\ &= \mu_{g_1^{-1}}\mu_{g_1g_2^{-1}}\mu_{g_2g_1^{-1}}\mu_{g_1g_2^{-1}}\mu_{g_2} = \mu_{g_1^{-1}g_1g_2^{-1}}\mu_{g_2g_1^{-1}}\mu_{g_1g_2^{-1}g_2} = \\ &= \mu_{g_2^{-1}}\mu_{g_2g_1^{-1}}\mu_{g_1} = \mu_{g_2^{-1}}\mu_{g_2}\mu_{g_1^{-1}}\mu_{g_1} = \mu^*_{g_2}\mu_{g_2}\mu^*_{g_1}\mu_{g_1}.\end{aligned}$$

Também note que:

$$\begin{aligned}(\mu_{g_1}\mu_{g_2})^*(\mu_{g_1}\mu_{g_2}) &= \mu_{g_2^{-1}}\mu_{g_1^{-1}}\mu_{g_1}\mu_{g_2} = \mu_{g_2^{-1}}\mu_{g_1^{-1}}\mu_{g_1g_2} = \mu_{g_2^{-1}}\mu_{g_1^{-1}}\mu_{g_1g_2}\mu^*_{g_1g_2}\mu_{g_1g_2} = \\ &= \mu_{g_2^{-1}}\mu_{g_1^{-1}g_1g_2}\mu^*_{g_1g_2}\mu_{g_1g_2} = \mu^*_{g_2}\mu_{g_2}\mu^*_{g_1g_2}\mu_{g_1g_2}.\end{aligned}$$

Por essas duas afirmações, podemos concluir que o espaço inicial de $\mu_{g_1}\mu_{g_2}$ é $\overline{\text{span}\{\pi(D_{g_2^{-1}})H\}} \cap \overline{\text{span}\{\pi(D_{g_2^{-1}g_1^{-1}})H\}}$.

Vamos mostrar que

$$\overline{\text{span}\{\pi(D_{g_2^{-1}})H\}} \cap \overline{\text{span}\{\pi(D_{g_2^{-1}g_1^{-1}})H\}} = \overline{\text{span}\{\pi(D_{g_2^{-1}} \cap D_{g_2^{-1}g_1^{-1}})H\}}.$$

A inclusão ($\supseteq$) é óbvia.

Para fazer a outra inclusão, precisamos da seguinte afirmação:

Afirmação: *Seja $g \in G$ e denote p_g a projeção sobre o conjunto $\overline{span\{\pi(D_g)H\}}$. Considere $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma unidade aproximada de D_g. Então*

$$\lim_\lambda \pi(e_\lambda)(h) = p_g(h), \forall h \in H.$$

Vamos dividir a demonstração em dois casos.

$h \in (\overline{\text{span}\{\pi(D_g)H\}})^\perp$: Seja $k \in H$. Assim $p_g(h) = 0$ e já que:

$$0 = \langle h, \pi(e_\lambda)k\rangle = \langle \pi^*(e_\lambda)h, k\rangle = \langle \pi(e_\lambda)h, k\rangle,$$

segue que $\pi(e_\lambda)h = 0$ e vale o resultado.

$h \in \overline{\text{span}\{\pi(D_g)H\}}$: Se $\widetilde{h} \in \text{span}\{\pi(D_g)H\}$, $\widetilde{h} = \sum_{i=1}^n \pi(a_i)h_i$, $a_i \in D_g$. Então:

$$\lim_\lambda \pi(e_\lambda)(\widetilde{h}) = \lim_\lambda \pi(e_\lambda)\left(\sum_{i=1}^n \pi(a_i)h_i\right) = \sum_{i=1}^n \lim_\lambda \pi(e_\lambda a_i)(h_i) = \sum_{i=1}^n \pi(a_i)(h_i) = \widetilde{h}.$$

Bem, $h = \lim_n h_n$, $h_n \in \text{span}\{\pi(D_g)H\}$. Assim:

$$\begin{aligned} &\lim_\lambda \pi(e_\lambda)h_n = h_n, \forall n \text{ e} \\ &\lim_n \pi(e_\lambda)h_n = \pi(e_\lambda)h, \forall \lambda \in \Lambda. \end{aligned}$$

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|h - h_n\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\forall n \geq N$ e tome $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\|\pi(e_\lambda)h_N - h_N\| < \dfrac{\varepsilon}{3}, \forall \lambda \geq \lambda_0$. Assim, para $\lambda \geq \lambda_0$ e $n \geq N$:

$$\|\pi(e_\lambda)h - h\| \leq \|\pi(e_\lambda)h - \pi(e_\lambda)h_n\| + \|\pi(e_\lambda)h_n - h_n\| + \|h_n - h\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Logo $\lim_\lambda \pi(e_\lambda)h = h = p_g(h)$.
Para $k \in H$, escreva $k = k_1 + k_2$ com $k_1 \in \overline{\text{span}\{\pi(D_g)H\}}$ e $k_2 \in (\overline{\text{span}\{\pi(D_g)H\}})^\perp$.

■

Note que pela demonstração, a igualdade independe da unidade aproximada escolhida.
Agora, seja $h \in \overline{\text{span}\{\pi(D_{g_2^{-1}})H\}} \cap \overline{\text{span}\{\pi(D_{g_2^{-1}g_1^{-1}})H\}}$, $h = p_{g_2^{-1}}p_{g_2^{-1}g_1^{-1}}(k)$, $k \in H$. Considere as unidades aproximadas $\{u_\lambda\} \in D_{g_2^{-1}}$ e $\{v_\beta\} \in D_{g_2^{-1}g_1^{-1}}$. Portanto:

$$h = p_{g_2^{-1}}p_{g_2^{-1}g_1^{-1}}(k) = \lim_\beta p_{g_2^{-1}}\pi(v_\beta)(k) = \lim_\beta \lim_\lambda \pi(u_\lambda)\pi(v_\beta)(k) = \lim_\beta \lim_\lambda \pi(u_\lambda v_\beta)(k),$$

que pertence a $\overline{\text{span}\{\pi(D_{g_2^{-1}} \cap D_{g_2^{-1}g_1^{-1}})H\}}$.
Logo, o espaço inicial de $\mu_{g_1}\mu_{g_2}$ é $\overline{\text{span}\{\pi(D_{g_2^{-1}} \cap D_{g_2^{-1}g_1^{-1}})H\}}$.
O espaço final da isometria parcial $\mu_{g_1}\mu_{g_2}$ é o espaço inicial de $\mu_{g_2^{-1}}\mu_{g_1^{-1}}$ e usando o que acabamos de provar, segue que este é $\overline{\text{span}\{\pi(D_{g_1} \cap D_{g_1g_2})H\}}$.
Assim, o caso $n = 2$ está demonstrado.

Supondo que o resultado vale para $n < k$, temos que $\mu_1 \ldots \mu_n$ é isometria parcial com espaço inicial $\overline{\text{span}\{\pi(D_{g_n^{-1}} \cap D_{g_n^{-1}g_{n-1}^{-1}} \cap \ldots \cap D_{g_n^{-1}\ldots g_1^{-1}})H\}}$ e espaço final $\overline{\text{span}\{\pi(D_{g_1} \cap D_{g_1g_2} \cap \ldots \cap D_{g_1\ldots g_n})H\}}$. Vamos provar que o resultado vale para $n = k$:

$$\begin{aligned} \mu_{g_1}\ldots\mu_{g_k}(\mu_{g_1}\ldots\mu_{g_k})^*\mu_{g_1}\ldots\mu_{g_k} &= \mu_{g_1}\ldots\mu_{g_k}(\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k})^*\mu_{g_1}^*\mu_{g_1}\ldots\mu_{g_k} = \\ &= \mu_{g_1}\mu_{g_1}^*\mu_{g_1}(\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k})(\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k})^*\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k} = \\ &= \mu_{g_1}\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k}, \end{aligned}$$

e segue que $\mu_{g_1}\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k}$ é isometria parcial.

Note que:

$$
\begin{aligned}
(\mu_{g_1}\ldots\mu_{g_k})^*\mu_{g_1}\ldots\mu_{g_k} &= (\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k})^*\mu_{g_1}^*\mu_{g_1}\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k} = \\
&= (\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k})^*\mu_{g_1}^*\mu_{g_1g_2}\mu_{g_3}\ldots\mu_{g_k} = \\
&= (\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k})^*\mu_{g_1^{-1}}\mu_{g_1g_2}\mu_{g_1g_2}^*\mu_{g_1g_2}\mu_{g_3}\ldots\mu_{g_k} = \\
&= (\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k})^*\mu_{g_2}\mu_{g_2^{-1}g_1^{-1}}\mu_{g_1g_2g_3}\ldots\mu_{g_k} = \\
&= (\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k})^*\mu_{g_2}\mu_{g_2^{-1}g_1^{-1}}\mu_{g_1g_2g_3}\mu_{g_1g_2g_3}^*\mu_{g_1g_2g_3}\mu_{g_4}\ldots\mu_{g_k} = \\
&= (\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k})^*\mu_{g_2}\mu_{g_3}\mu_{g_3^{-1}g_2^{-1}g_1^{-1}}\mu_{g_1g_2g_3}\mu_{g_4}\ldots\mu_{g_k} = \\
&= \ldots = (\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k})^*\mu_{g_2}\mu_{g_3}\ldots\mu_{g_{k-1}}\mu_{g_1\ldots g_{k-1}}^*\mu_{g_1\ldots g_k} = \\
&= (\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k})^*\mu_{g_2}\mu_{g_3}\ldots\mu_{g_{k-1}}\mu_{g_{k-1}^{-1}\ldots g_1^{-1}}\mu_{g_1\ldots g_k}\mu_{g_1\ldots g_k}^*\mu_{g_1\ldots g_k} = \\
&= (\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k})^*(\mu_{g_2}\mu_{g_3}\ldots\mu_{g_{k-1}}\mu_{g_k})\mu_{g_1\ldots g_k}^*\mu_{g_1\ldots g_k}.
\end{aligned}
$$

Assim, segue que o espaço inicial de $\mu_{g_1}\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k}$ é

$$\overline{\text{span}\{\pi(D_{g_k^{-1}} \cap D_{g_k^{-1}g_{k-1}^{-1}} \cap \ldots \cap D_{g_k^{-1}\ldots g_2^{-1}})H\}} \cap \overline{\text{span}\{\pi(D_{g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}})H\}}.$$

Como fizemos no caso $n = 2$, podemos concluir que o espaço inicial de $\mu_{g_1}\mu_{g_2}\ldots\mu_{g_k}$ é

$$\overline{\text{span}\{\pi(D_{g_k^{-1}} \cap D_{g_k^{-1}g_{k-1}^{-1}} \cap \ldots \cap D_{g_k^{-1}\ldots g_2^{-1}} \cap D_{g_k^{-1}\ldots g_1^{-1}})H\}},$$

e o espaço final é

$$\overline{\text{span}\{\pi(D_{g_1} \cap D_{g_1g_2} \cap \ldots \cap D_{g_1\ldots g_k})H\}}.$$

■

Proposição 6.0.7 *: Seja (A, G, α) um C^*-sistema dinâmico parcial e $g_1, \ldots, g_n \in G$. Tome (π, μ, H) uma representação covariante de α. Então:*

$$
\begin{aligned}
\mu_{g_1\ldots g_n}(k) &= \mu_{g_1}\ldots\mu_{g_n}(k), \ \ \textit{para } k \in \overline{\textit{span}\{\pi(D_{g_n^{-1}} \cap D_{g_n^{-1}g_{n-1}^{-1}} \cap \ldots \cap D_{g_n^{-1}\ldots g_1^{-1}})H\}}, \\
\pi(a)\mu_{g_1\ldots g_n} &= \pi(a)\mu_{g_1}\ldots\mu_{g_n}, \ \ \textit{para todo } a \in D_{g_1} \cap D_{g_1g_2} \cap \ldots \cap D_{g_1\ldots g_n}.
\end{aligned}
$$

Demonstração: Note que:

$$\mu_{g_1\ldots g_n}(k) \in \overline{\text{span}\{\pi(D_{g_1} \cap D_{g_1g_2} \cap \ldots \cap D_{g_1\ldots g_n})H\}} \subseteq \overline{\text{span}\{\pi(D_{g_1})\}},$$

que é o espaço inicial de $\mu_{g_1}^*$. Assim:

$$\mu_{g_1\ldots g_n}(k) = \mu_{g_1}\mu_{g_1}^*\mu_{g_1\ldots g_n}(k) = \mu_{g_1}\mu_{g_1}^*\mu_{g_1}\mu_{g_2\ldots g_n}(k) = \mu_{g_1}\mu_{g_2\ldots g_n}(k).$$

Repetindo o processo, temos que:

$$\mu_{g_2\ldots g_n}(k) \in \overline{\text{span}\{\pi(D_{g_2} \cap D_{g_2g_3} \cap \ldots \cap D_{g_2\ldots g_n})H\}} \subseteq \overline{\text{span}\{\pi(D_{g_2})\}},$$

que é o espaço inicial de $\mu_{g_2}^*$. Portanto:

$$\mu_{g_2\ldots g_n}(k) = \mu_{g_2}\mu_{g_2}^*\mu_{g_2\ldots g_n}(k) = \mu_{g_2}\mu_{g_2}^*\mu_{g_2}\mu_{g_3\ldots g_n}(k) = \mu_{g_2}\mu_{g_3\ldots g_n}(k).$$

Logo, podemos concluir que

$$\mu_{g_1\ldots g_n}(k) = \mu_{g_1}\ldots\mu_{g_n}(k), \text{ para } k \in \overline{\text{span}\{\pi(D_{g_n^{-1}} \cap D_{g_n^{-1}g_{n-1}^{-1}} \cap \ldots \cap D_{g_n^{-1}\ldots g_1^{-1}})H\}}.$$

Em particular, segue que

$$\mu_{g_n^{-1}\ldots g_1^{-1}}\pi(a^*)(h) = \mu_{g_n^{-1}}\ldots\mu_{g_1^{-1}}\pi(a^*)(h),$$

para $a^* \in D_{g_1} \cap D_{g_1g_2} \cap \ldots \cap D_{g_1\ldots g_n}$, $h \in H$. Tomando adjuntas, obtemos

$$\pi(a)\mu_{g_1\ldots g_n}(h) = \pi(a)\mu_{g_1}\ldots\mu_{g_n}(h),$$

e a segunda afirmação também vale.

■

A definição de representações covariantes para ações de semigrupos inversos segue:

Definição 6.0.8 : *Seja β uma ação do semigrupo inverso S na C*-álgebra A. Uma representação covariante de β é uma tripla (π, ν, H) onde $\pi : A \to B(H)$ é uma representação de A no espaço de Hilbert H e $\nu : S \to PIso(H)$ preserva produto onde, para $s \in S$:*

(i) $\nu_s\pi(a)\nu_{s^*} = \pi(\beta_s(a))$ para todo $a \in E_{s^*}$ (condição de covariância),

(ii) ν_s tem espaço inicial $\overline{span\{\pi(E_{s^*})H\}}$ e espaço final $\overline{span\{\pi(E_s)H\}}$.

O conjunto das representações covariantes de (A, S, β) é denotado CovRep(A, S, β).

Vamos ver algumas propriedades destas representações covariantes.

Proposição 6.0.9 : *Seja β uma ação do semigrupo inverso S na C*-álgebra A. Tome $(\pi, \nu, H) \in CovRep(A, S, \beta)$ e, para $s \in S$, denote K_s o espaço inicial de ν_s. Então $\nu_{s^*}\nu_s|_{K_s} = Id_{K_s}$, $\nu_e = Id_H$ e $\nu_{s^*} = \nu_s^*$, onde e é a unidade de S.*

Demonstração: Bem:

$$\nu_{s^*}\nu_s(K_s) = \nu_{s^*}\nu_s(\nu_{s^*}(K_{s^*})) = \nu_{s^*ss^*}(K_{s^*}) = \nu_{s^*}(K_{s^*}) = K_s.$$

Logo $\nu_{s^*}\nu_s|_{K_s} = Id_{K_s}$.

Sabemos que $K_e = \overline{\text{span}\{\pi(E_e)H\}} = \overline{\text{span}\{\pi(A)H\}} = H$. Tomando $s = e$ nas contas acima, segue que:

$$Id_H(H) = \nu_{e^*}\nu_e(H) = \nu_{ee}(H) = \nu_e(H).$$

Logo $\nu_e = Id_H$.

Por último, como $\nu_{s^*}\nu_s|_{K_s} = Id_{K_s}$:

$$\nu_s\nu_s^* = Id_{K_{s^*}} \Rightarrow \nu_{s^*}\nu_s\nu_s^* = \nu_{s^*} \Rightarrow \nu_s^* = \nu_{s^*}.$$

■

Corolário 6.0.10 *: Seja β uma ação do semigrupo inverso S na C^*-álgebra A e $(\pi, \nu, H) \in CovRep(A, S, \beta)$. Para i idempotente de S, denotando K_i o espaço inicial de ν_i, $\nu_i = Id_{K_i}$.*

Demonstração: Utilizando a Proposição anterior:

$$Id_{K_i} = \nu_i\nu_i|_{K_i} = \nu_{i^2} = \nu_i.$$

Assim, no seu espaço inicial K_i, ν_i é a identidade e em $(K_i)^\perp$ é zero.

■

Tome (A, G, α) um C*-sistema dinâmico. Considere β a ação de $S(G)$ em A relacionada com α pela bijeção do Teorema 4.0.8. Vamos mostrar que existe uma bijeção entre as representações covariantes de α e as de β.

Proposição 6.0.11 *: Seja β uma ação de $S(G)$ em A e $(\pi, \nu, H) \in CovRep(A, S(G), \beta)$. Tome α a ação de G em A relacionada com β e defina*

$$\mu : G \to B(H)$$
$$g \mapsto \mu_g := \nu_{[g]}.$$

Então (π, μ, H) é representação covariante de α.

Demonstração: Por definição $\mu_g = \nu_{[g]}$ é isometria parcial de H com espaço inicial $\overline{\text{span}\{\pi(E_{[g]^*})H\}} = \overline{\text{span}\{\pi(D_{g^{-1}})H\}}$ e final $\overline{\text{span}\{\pi(E_{[g]})H\}} = \overline{\text{span}\{\pi(D_g)H\}}$. Como ν separa produto, é óbvio que $\mu_g\mu_h\mu_{h^{-1}} = \mu_{gh}\mu_{h^{-1}}$ e a Proposição anterior garante que $\mu_e = Id_H$ e $\mu_{g^{-1}} = \mu_g^*$.

Assim falta mostrar a condição de covariância da Def. 6.0.5. Para isso, seja $a \in D_{g^{-1}} = E_{[g]^*}$. Utilizando o item (i) da Def. 6.0.8:

$$\mu_g\pi(a)\mu_{g^{-1}} = \nu_{[g]}\pi(a)\nu_{[g^{-1}]} = \nu_{[g]}\pi(a)\nu_{[g]^*} = \pi(\beta_{[g]}(a)) = \pi(\alpha_g(a)).$$

Assim, (π, μ, H) é representação covariante de α.

■

Para mostrarmos a "volta" da proposição acima, usaremos o fato de que $B(H)$ é um semigrupo sob composição e a Prop. 1.1.2, que trata da propriedade universal de $S(G)$.

Proposição 6.0.12 *: Seja (A, G, α) um C*-sistema dinâmico parcial e (π, μ, H) uma representação covariante de α. Então $\mu : G \to B(H)$ satisfaz $(i) - (iii)$ da Prop. 1.1.2.*

Demonstração: Como μ é uma representação parcial, o resultado segue.

■

Assim, utilizando Prop. 1.1.2, podemos definir um homomorfismo de semigrupos $\nu : S(G) \to B(H)$ tal que para $g \in G$,

$$\nu_{[g]} := \nu([g]) = \mu(g) = \mu_g.$$

Com isso, podemos provar:

Proposição 6.0.13 *: Seja (A, G, α) um C*-sistema dinâmico parcial, (π, μ, H) uma representação covariante de α e β a ação de $S(G)$ em A relacionada. Então $(\pi, \nu, H) \in CovRep(A, S(G), \beta)$.*

Demonstração: Sabemos que π é representação e ν é homomorfismo de semigrupos. Vamos provar os 2 ítens da Def. 6.0.8.

(ii) Seja $s = \varepsilon_{s_1} \dots \varepsilon_{s_n}[g] = [g]\varepsilon_{g^{-1}r_1} \dots \varepsilon_{g^{-1}r_n}$ em $S(G)$. Assim:

$$\nu_s = \nu_{[g]\varepsilon_{g^{-1}r_1}\cdots\varepsilon_{g^{-1}r_n}} = \nu_{[g]}\nu_{[g^{-1}r_1]}\ldots\nu_{[(g^{-1}r_n)^{-1}]} = \mu_g\mu_{g^{-1}r_1}\ldots\mu_{(g^{-1}r_n)^{-1}},$$

e pela Prop. 6.0.6, ν_s é isometria parcial com espaço inicial

$$\overline{\text{span}\{\pi(D_{g^{-1}r_n}\cap\cdots\cap D_{g^{-1}r_1}\cap D_{g^{-1}})H\}} = \overline{\text{span}\{\pi(E_{s^*})H\}},$$

e espaço final

$$\overline{\text{span}\{\pi(D_g\cap\cdots\cap D_{r_1}\cap D_{r_n})H\}} = \overline{\text{span}\{\pi(E_s)H\}}.$$

(i) Seja $s\in S(G)$ como acima e $a\in E_{s^*} = D_{g^{-1}r_n}\cap\cdots\cap D_{g^{-1}r_1}\cap D_{g^{-1}}$:

$$\begin{aligned}\nu_s\pi(a)\nu_{s^*} &= \nu_{[r_1]}\ldots\nu_{[r_n^{-1}]}\nu[g]\pi(a)\nu_{[g^{-1}]}\nu_{[r_n]}\ldots\nu_{[r_1^{-1}]} = \\ &= \mu_{r_1}\ldots\mu_{r_n^{-1}}\mu_g\pi(a)\mu_{g^{-1}}\mu_{r_n}\ldots\mu_{r_1^{-1}} = \pi(\alpha_{r_1}\ldots\alpha_{r_n^{-1}}\alpha_g(a)) = \\ &= \pi(\beta_{[r_1]}\ldots\beta_{[r_n^{-1}]}\beta_{[g]}(a)) = \pi(\beta_{\varepsilon_{r_1}\ldots\varepsilon_{r_n}[g]}(a)) = \\ &= \pi(\beta_s(a)).\end{aligned}$$

Logo $(\pi,\nu,H)\in \text{CovRep}(A,S(G),\beta)$.

■

Portanto, se $(\pi,\nu,H)\in\text{CovRep}(A,S(G),\beta)$, definimos (π,μ,H) representação covariante de α tal que $\mu_g=\nu_{[g]}$. Aplicando a Prop. 6.0.13, concluímos que existe único homomorfismo $\widetilde{\nu}: S(G)\to B(H)$ com $\widetilde{\nu_{[g]}}=\mu_g$, tal que $(\pi,\widetilde{\nu},H)\in\text{CovRep}(A,S(G),\beta)$. Logo, $\widetilde{\nu}=\nu$.

Analogamente, se (π,μ,H) é representação covariante de α, geramos $(\pi,\nu,H)\in \text{CovRep}(A,S(G),\beta)$. Ao definirmos uma nova representação covariante $(\widetilde{\pi},\widetilde{\mu},H)$ de α, é fácil ver que $(\pi,\mu,H)=(\widetilde{\pi},\widetilde{\mu},H)$.

Assim, podemos enunciar:

Teorema 6.0.14 *: Seja A uma C^*-álgebra, G um grupo, α uma ação parcial de G em A e $\beta: S(G)\to A$ a ação relacionada pelo Teo. 4.0.8. Então existe uma bijeção entre as representações covariantes de α e as representações covariantes de β.*

■

A partir de agora, vamos seguir os passos de Nandor Sieben, que em [13] definiu, utilizando representações covariantes, o produto cruzado parcial por uma ação.

Tome β uma ação do semigrupo inverso unital S na C*-álgebra A. Defina

$$\widetilde{L} = \{x \in l^1(S, A) : x(s) \in E_s\},$$

com norma, multiplicação por escalar e adição herdadas de $l^1(S, A)$.
Para $x, y \in \widetilde{L}$, a multiplicação $x * y$ é definida:

$$(x * y)(s) = \sum_{rt=s} \beta_r(\beta_{r^*}(x(r))y(t)).$$

Além disso, defina x^* o elemento de $l^1(S, A)$ tal que:

$$x^*(s) = \beta_s(x(s^*)^*).$$

São fáceis, mas omitirei aqui as demonstrações de que as operações estão bem definidas e que $\widetilde{L}$, com estas operações, é uma $*$-álgebra de Banach (veja Prop. 5.1, [13]).

Definição 6.0.15 *: Se $(\pi, \nu, H) \in CovRep(A, S, \beta)$, definimos $\pi \times \nu : \widetilde{L} \to B(H)$ como*

$$(\pi \times \nu)(x) = \sum_{s \in S} \pi(x(s))\nu_s.$$

Vale que $\pi \times \nu$ é um $*$-homomorfismo (Prop. 5.3, [13]).

Nandor Sieben define o produto cruzado parcial de uma ação como segue.

Definição 6.0.16 *: Seja β uma ação do semigrupo inverso unital S na C*-álgebra A. Defina uma seminorma $\|.\|_c$ em $\widetilde{L}$ como*

$$\|x\|_c = \sup\{\|(\pi \times \nu)(x)\| : (\pi, \nu, H) \in CovRep(A, S, \beta)\}.$$

Considere $I = \{x \in \widetilde{L} : \|x\|_c = 0\}$. O produto cruzado de A por S relativo a ação β é a C-álgebra obtida pelo completamento do quociente $\widetilde{L}/I$ mediante a $\|.\|_c$.*

Queremos mostrar que a Definição acima é equivalente a Def. 5.0.7. Nesta definição que apresentamos no Capítulo 5, toma-se a C*-álgebra envolvente de $L/N = A \times_\beta^a S$, onde $L = \left\{ \sum_{s \in S}^{\text{finito}} a_s\delta_s : a_s \in E_s \right\}$ e $N = \langle a\delta_r - a\delta_t : a \in E_r, r \leq t \rangle$. Como mencionamos no

Capítulo 5, este processo nada mais é do que tomar o completamento de $(A \times_\beta^a S)/\ker\rho_s$ com relação a $\rho_s(x) = \sup\{\|\rho(x)\| : \rho$ é representação de $A \times_\beta^a S\}$.

O primeiro passo nesse caminho é mostrar que em sua definição, Sieben poderia tomar o conjunto L em vez do $\widetilde{L}$.

Lema 6.0.17 : *Sejam $E \subseteq F$ espaços vetoriais e $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ duas normas definidas em F tais que exista k(constante) tal que para todo $x \in F$, $\|x\|_2 \leq k\|x\|_1$. Suponha que E é denso em F com relação a $\|.\|_1$. Assim, os completamentos de E e F com relação a $\|.\|_2$ são iguais.*

Demonstração: Para $i = 1, 2$ denote $\overline{E}^i$ o completamento de E com relação a $\|.\|_i$ e o mesmo para F. É fácil ver que a função $T : (E, \|.\|_2) \to \overline{F}^2$, que inclui um elemento de E em F e depois o insere em $\overline{F}^2$, é uma isometria (é praticamente uma identidade). Como é linear, é uniformemente contínua. Assim, podemos estendê-la para a isometria $\widetilde{T} : \overline{E}^2 \to \overline{F}^2$.

Afirmação: $F \subseteq Im(\widetilde{T})$.

Seja $f \in F$. Assim, existe $\{x_n\} \subseteq E$ tal que $\|x_n - f\|_1 \to 0$. Portanto $\|x_n - f\|_2 \to 0$ e $f \in \overline{E}^2$. Já que $\widetilde{T}(f) = f$, segue o resultado.

■

Como $\widetilde{T}$ é isometria e $\overline{E}^2$ é completo, $\mathrm{Im}(\widetilde{T})$ é completo em relação a $\|.\|_2$. Portanto, $\mathrm{Im}(\widetilde{T}) = \overline{F}^2$ e $\widetilde{T}$ é isomorfismo entre $\overline{E}^2$ e $\overline{F}^2$.

■

Assim, considere os espaços vetoriais $L \subseteq \widetilde{L}$. Em $\widetilde{L}$ temos definida uma norma:

$$\|x\|_a = \sum_{s \in S} \|x(s)\|,$$

e uma seminorma:

$$\|x\|_c = \sup\{\|(\pi \times \nu)(x)\| : (\pi, \nu, H) \in \mathrm{CovRep}(A, S, \beta)\}.$$

Note que podemos tomar o completamento de $\widetilde{L}$ em relação a seminorma $\|.\|_c$ e este é igual ao completamento de $\widetilde{L}/I$ em relação a norma $\|.\|_c$. De fato, no processo de tomar o completamento, um elemento qualquer é levado na classe da seqüência de Cauchy que é constante igual ao elemento. Se tomarmos $x \neq 0 \in \widetilde{L}$ tal que $\|x\|_c = 0$ e o levarmos na classe da seqüência de Cauchy $\widehat{x} = (x, x, x, \ldots)$, esta é igual a classe da seqüência de Cauchy onde todo elemento é o zero (já que $\|x - 0\|_c = 0$). E é isso que acontece ao tomarmos o completamento de $\widetilde{L}/I$ em relação a norma $\|.\|_c$, pois $x \in \widetilde{L}$ tal que $\|x\|_c = 0$ é levado na classe do zero em $\widetilde{L}/I$, que posteriormente no completamento, também é levado na classe da seqüência de Cauchy que possui todo elemento igual a zero.

Assim, no Lema 6.0.17, podemos considerar $\|.\|_2$ apenas como uma seminorma, que é o que acontece no nosso caso.

Além disso, para $x \in \widetilde{L}$ e $(\pi, \nu, H) \in \mathrm{CovRep}(A, S, \beta)$:

$$\begin{aligned}\|(\pi \times \nu)(x)\| = \left\| \sum_{s \in S} \pi(x(s))\nu_s \right\| \leq \sum_{s \in S} \|\pi(x(s))\nu_s\| \leq \sum_{s \in S} \|\pi(x(s))\| \|\nu_s\| \leq \\ \leq \sum_{s \in S} \|\pi(x(s))\| \leq \sum_{s \in S} \|x(s)\| = \|x\|_a,\end{aligned}$$

logo $\|x\|_c = \sup \|(\pi \times \nu)(x)\| \leq \|x\|_a$. Como $\widetilde{L}$ é o completamento de L em relação a $\|.\|_a$ segue, pelo Lema anterior, que na definição de [13] podemos considerar o conjunto L em vez do $\widetilde{L}$.

Assim, se mostrarmos que para $x \in L$:

$$\|x\|_c = \rho_s(x),$$

o resultado seguirá, pois o processo de tomar o quociente e completar o conjunto L será o mesmo nas duas definições.

Observe que utilizando o Teorema da Fatoração de Cohen-Hewitt (Teorema 32.22, [7]), é fácil ver que $\overline{\mathrm{span}\{\pi(I)H\}} = \pi(I)H$, para qualquer I ideal fechado da C*-álgebra A.

Assim, chegamos ao Teorema que vai nos permitir mostrar que a definição que Nándor Sieben usou em sua dissertação de mestrado, para introduzir os Produtos Cruzados Parciais Algébricos é equivalente à definição que apresentamos aqui no Capítulo 5 (Def. 5.0.7).

Teorema 6.0.18 : *Seja ρ uma representação de L no espaço de Hilbert H. Então, $\rho|_N \equiv 0 \Leftrightarrow \rho = \pi \times \nu$, para algum $(\pi, \nu, H) \in$ CovRep(A, S, β).*

Demonstração: ($\Leftarrow$): Seja $\rho = \pi \times \nu$ e tome $a\delta_r - a\delta_t$ um dos geradores de N. Como

$r \leq t$, $r = tf = it$ para f, i idempotentes de S. Para $a \in E_r = E_{it} \subseteq E_i$ e $h \in H$:

$$\rho(a\delta_r - a\delta_t)(h) = (\pi \times \nu)(a\delta_r - a\delta_t)(h) = \pi(a)\nu_r(h) - \pi(a)\nu_t(h) =$$
$$= \pi(a)\nu_{it}(h) - \pi(a)\nu_t(h) = \pi(a)\nu_i\nu_t(h) - \pi(a)\nu_t(h).$$

Denote $K_i = \pi(E_i)H$. Já que $H = K_i \oplus (K_i)^\perp$, vamos separar a demonstração em casos:

Caso $\nu_t(h) \in K_i$: Pelo Corolário 6.0.10, $\nu_i(\nu_t(h)) = \nu_t(h)$ e, assim:

$$\pi(a)\nu_i\nu_t(h) - \pi(a)\nu_t(h) = \pi(a)\nu_t(h) - \pi(a)\nu_t(h) = 0.$$

Caso $\nu_t(h) \in (K_i)^\perp$: Note que $\pi(E_i) \equiv 0$ em $(K_i)^\perp$, já que para $q \in (K_i)^\perp$ temos:

$$0 = \langle q, \pi(E_i)H\rangle = \langle \pi(E_i)(q), H\rangle.$$

Logo:

$$\pi(a)\nu_i\nu_t(h) - \pi(a)\nu_t(h) = 0.$$

Portanto ρ zera em N.

($\Rightarrow$): Suponha $\rho|_N \equiv 0$. Assim, para $r \leq t$ e $a \in E_r$, $\rho(a\delta_r) = \rho(a\delta_t)$.

Nosso objetivo é encontrar π e ν de tal maneira que $\rho = \pi \times \nu$. Defina

$$\begin{aligned} \pi : A &\to B(H) & \qquad \nu : S &\to B(H) \\ a &\mapsto \rho(a\delta_e), & s &\mapsto \lim_\lambda \rho(u_\lambda\delta_s), \{u_\lambda\} \text{ unidade aprox. de } E_s, \end{aligned}$$

e o limite acima é o limite pontual.

Vamos mostrar que $(\pi, \nu, H) \in \mathrm{CovRep}(A, S, \beta)$.

π é representação: Este resultado é óbvio, pelas definições.

ν está bem definida: Seja $s \in S$ e considere $\{u_\lambda\}$ unidade aproximada para E_s. Como $\beta_{s^*} : E_s \to E_{s^*}$ é isomorfismo, segue que $\{\beta_{s^*}(u_\lambda)\}$ é unidade aproximada de E_{s^*}. Já que $H = \pi(E_{s^*})H \oplus (\pi(E_{s^*})H)^\perp$ (lembre que $\pi(E_{s^*})H = \overline{\mathrm{span}\{\pi(E_{s^*})H\}}$ por Cohen-Hewitt), vamos dividir a demonstração em dois casos:

$h \in \pi(E_{s^*})H$: Assim $h = \pi(a)k = \rho(a\delta_e)k$, para $a \in E_{s^*}, k \in H$. Então:

$$\nu_s(h) = \lim_\lambda \rho(u_\lambda\delta_s)(h) = \lim_\lambda \rho(u_\lambda\delta_s)\rho(a\delta_e)(k) = \lim_\lambda \rho(\beta_s(\beta_{s^*}(u_\lambda)a)\delta_s)(k) =$$
$$= \rho(\beta_s(a)\delta_s)(k).$$

$h \in (\pi(E_{s^*})H)^\perp$: Temos que $\langle h, \rho(E_{s^*}\delta_e)H\rangle = \langle h, \pi(E_{s^*})H\rangle = 0.$

Logo $\langle \rho(\beta_{s^*}(\sqrt{u_\lambda})\delta_e)(h), H\rangle = \langle h, \rho(\beta_{s^*}(\sqrt{u_\lambda})\delta_e)H\rangle = 0$, que implica $\rho(\beta_{s^*}(\sqrt{u_\lambda})\delta_e)(h) = 0$. Portanto:

$$\begin{aligned}\lim_\lambda \rho(u_\lambda\delta_s)(h) &= \lim_\lambda \rho[\beta_s(\beta_{s^*}(\sqrt{u_\lambda})\beta_{s^*}(\sqrt{u_\lambda}))\delta_s](h) = \\ &= \lim_\lambda \rho[(\sqrt{u_\lambda}\delta_s)(\beta_{s^*}(\sqrt{u_\lambda})\delta_e)](h) = \\ &= \lim_\lambda \rho(\sqrt{u_\lambda}\delta_s)\rho(\beta_{s^*}(\sqrt{u_\lambda})\delta_e)(h) = 0.\end{aligned}$$

Além disso, já que ρ é contrativa (Lema 5.0.6):

$$\|\nu_s\| = \|\lim_\lambda \rho(u_\lambda\delta_s)\| = \lim_\lambda \|\rho(u_\lambda\delta_s)\| \leq \lim_\lambda \|u_\lambda\delta_s\| \leq \lim_\lambda \|u_\lambda\| \leq 1.$$

Assim $\nu_s \in B(H)$ e independe da unidade aproximada tomada. Logo está bem definida.
<u>ν_s é isometria parcial com espaço inicial $\pi(E_{s^*})H$ e final $\pi(E_s)H$:</u> Primeiro mostraremos que $\nu_s^* = \nu_{s^*}$. Seja $\{u_\lambda\}$ unidade aproximada de E_{s^*}. Como β_s é isomorfismo, $\{\beta_s(u_\lambda)\}$ é unidade aproximada de E_s e assim, para $k_1, k_2 \in H$:

$$\begin{aligned}\langle k_1, \nu_{s^*}(k_2)\rangle = \langle k_1, \lim_\lambda \rho(u_\lambda\delta_{s^*})(k_2)\rangle = \lim_\lambda\langle k_1, \rho(u_\lambda\delta_{s^*})(k_2)\rangle = \lim_\lambda\langle \rho(u_\lambda\delta_{s^*})^*(k_1), k_2\rangle = \\ = \langle \lim_\lambda \rho(\beta_s(u_\lambda)\delta_s)(k_1), k_2\rangle = \langle \nu_s(k_1), k_2\rangle.\end{aligned}$$

Logo $\nu_s^* = \nu_{s^*}$.
Vamos mostrar que $\nu_s^*\nu_s$ é uma projeção sobre $\pi(E_{s^*})H$ já que vimos que ν_s zera em $(\pi(E_{s^*})H)^\perp$. Assim, seja $h = \pi(a)k \in \pi(E_{s^*})H$ e $\{u_\gamma\}$ unidade aproximada de E_{s^*}:

$$\begin{aligned}\nu_s^*\nu_s(h) = \nu_{s^*}(\rho(\beta_s(a)\delta_s)(k)) &= \lim_\gamma \rho(u_\gamma\delta_{s^*})\rho(\beta_s(a)\delta_s)(k) = \\ &= \lim_\gamma \rho(\beta_{s^*}(\beta_s(u_\gamma)\beta_s(a))\delta_{s^*s})(k) = \rho(a\delta_{s^*s})(k) = \\ &= \rho(a\delta_e)(k) = h,\end{aligned}$$

a penúltima igualdade vale pois $\rho|_N = 0$. Assim ν_s é isometria parcial com espaço inicial $\pi(E_{s^*})H$. Fazendo as mesmas contas para $\nu_s\nu_s^*$, conclui-se que $\pi(E_s)H$ é o espaço final de ν_s.
<u>ν é homomorfismo:</u> Também vamos fazer esta demonstração em duas partes:

<u>$h \in \pi(E_{t^*s^*})H$:</u> Então $h = \rho(a\delta_e)(k)$, $a \in E_{t^*s^*}$ e $k \in H$. Seja $\{u_\lambda\}$ uma unidade aproximada de E_s. Utilizando a primeira parte da demonstração de que ν está bem

definida, temos:

$$\nu_s\nu_t(h) = \nu_s\nu_t(\rho(a\delta_e)(k)) = \nu_s\rho(\beta_t(a)\delta_t)(k) = \lim_\lambda \rho(u_\lambda\delta_s)\rho(\beta_t(a)\delta_t)(k) =$$
$$= \lim_\lambda \rho(\beta_s(\beta_{s^*}(u_\lambda)\beta_t(a))\delta_{st})(k) = \lim_\lambda \rho(u_\lambda\beta_s(\beta_t(a))\delta_{st})(k) =$$
$$= \rho(\beta_{st}(a)\delta_{st})(k) = \nu_{st}(h).$$

$\underline{h \in (\pi(E_{t^*s^*})H)^\perp}$: Pela demonstração de ν estar bem definida, temos que $\nu_{st}(h) = 0$. Vamos mostrar que $\nu_s\nu_t(h) = 0$. Seja $\{u_\lambda\}$ unidade aproximada de E_s e $\{u_\gamma\}$ unidade aproximada de E_t. Bem, $\beta_s(\beta_{s^*}(u_\lambda)u_\gamma) \in \beta_s(E_{s^*} \cap E_t) = E_{st}$ e pelo Teorema de Cohen - Hewitt ([7]), $\beta_s(\beta_{s^*}(u_\lambda)u_\gamma) = xy, x, y \in E_{st}$. Por hipótese:

$$\langle \rho(\beta_{t^*s^*}(y)\delta_e)(h), H\rangle = \langle h, \rho(\beta_{t^*s^*}(y)\delta_e)H\rangle = \langle h, \pi(\beta_{t^*s^*}(y))H\rangle = 0,$$

que implica $\rho(\beta_{t^*s^*}(y)\delta_e)(h) = 0$. Como

$$\rho(\beta_s(\beta_{s^*}(u_\lambda)u_\gamma)\delta_{st})(h) = \rho(xy\delta_{st})(h) = \rho(x\delta_{st})\rho(\beta_{t^*s^*}(y)\delta_e)(h) = 0,$$

tomando $\{u_\lambda\} \subset E_s$ e $\{u_\omega\} \subset E_{s^*}$ unidades aproximadas nas respectivas C*-álgebras, segue que:

$$\nu_s\nu_t(h) = \lim_\lambda \rho(u_\lambda\delta_s) \lim_\omega \rho(u_\omega\delta_t)(h) = \lim_{\lambda,\omega} \rho(\beta_s(\beta_{s^*}(u_\lambda)u_\omega)\delta_{st})(h) = 0.$$

Assim $\nu_{st} = \nu_s\nu_t$ e ν é homomorfismo.
$\underline{\nu_s\pi(a)\nu_{s^*} = \pi(\beta_s(a))}$: Seja $a \in E_{s^*}$ e $\{u_\lambda\}, \{u_\gamma\}$ unidades aproximadas de E_s. Assim:

$$\nu_s\pi(a)\nu_{s^*} = \lim_\lambda \rho(u_\lambda\delta_s)\rho(a\delta_e) \lim_\gamma \rho(\beta_{s^*}(u_\gamma)\delta_{s^*}) = \lim_{\lambda,\gamma} \rho(u_\lambda\delta_s)\rho(a\beta_{s^*}(u_\gamma)\delta_{s^*}) =$$
$$= \lim_{\lambda,\gamma} \rho(\beta_s(\beta_{s^*}(u_\lambda)a\beta_{s^*}(u_\gamma))\delta_{ss^*}) = \lim_{\lambda,\gamma} \rho(u_\lambda\beta_s(a)u_\gamma\delta_{ss^*}) =$$
$$= \rho(\beta_s(a)\delta_{ss^*}) = \rho(\beta_s(a)\delta_e) = \pi(\beta_s(a)),$$

onde a penúltima igualdade segue do fato que $\rho|_N \equiv 0$.

■

Pelo Teorema acima temos, para $x \in L$:

$$\|x\|_c = \sup\{\|(\pi \times \nu)(x)\| : (\pi, \nu, H) \in \text{CovRep}(A, S, \beta)\} =$$
$$= \sup\{\|\rho(x)\| : \rho \text{ é representação de } L \text{ que zera em } N\} =$$
$$= \sup\{\|\rho(x)\| : \rho \text{ é representação de } A \times_\beta^a S\} = \rho_s(x).$$

Assim o processo de quocientar e completar o conjunto L é o mesmo nas duas definições.

Lembrando que:

$$L = \left\{ \sum_{s \in S}^{\text{finito}} a_s \delta_s : a_s \in E_s \right\},$$

definimos

$$A \rtimes_{\beta}^{a} S = \frac{L}{N},$$

onde $N = \langle a\delta_r - a\delta_t : a \in E_r, r \leq t \rangle$.

Com isso, apresentamos (Def. 5.0.7):

Definição 6.0.19 *: O Produto Cruzado Parcial do semigrupo inverso S pela C^*-algebra A relativo a ação β, denotado $A \rtimes_{\beta} S$, é a C^*-álgebra envolvente da $*$-álgebra $A \rtimes_{\beta}^{a} S$, ou seja, $A \rtimes_{\beta} S = C_e^*(A \rtimes_{\beta}^{a} S)$.*

Logo, podemos terminar o trabalho enunciando:

Teorema 6.0.20 *: A definição de Produto Cruzado Parcial por uma Ação de Semigrupo Inverso em uma C^*-Álgebra dada em [13], é equivalente à definição acima.*

$\blacksquare$

Referências

[1] BUSS, A. *A C*-álgebra de um Grupo*. 126 p. Dissertação (Mestrado em Matemática e Computação Científica) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2003.

[2] DOKUCHAEV, M.; EXEL, R. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Trans. American Math. Soc.*, v. 357, p. 1931–1952, 2005.

[3] DORAN, P. S.; FELL, J. M. G. *Representations of *-Algebras, Locally Compact Groups and Banach *-Algebraic Bundles I*. Hardbound: Academic Press, 1988. ISBN 0-12-252722-4.

[4] EXEL, R. Partial actions of groups and actions of inverse semigroups. *Proc. American Math. Soc.*, v. 126, p. 3481–3494, 1998.

[5] EXEL, R.; LACA, M.; QUIGG, J. Partial dynamical systems and c∗-algebras generated by partial isometries. *J. Operator Theory*, v. 47, p. 169–186, 2002.

[6] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. *Álgebra: um Curso de Introdução*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1988. ISBN 85-244-0037-4.

[7] HEWITT, E.; ROSS, K. A. *Abstract Harmonic Analysis II*. Berlin: Springer-Verlag, 1970.

[8] LAWSON, M. V. *Inverse Semigroups - The Theory of Partial Symmetries*. Singapura: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998. ISBN 981-02-3316-7.

[9] LIMA, E. L. *Análise Real*. Rio de Janeiro: 3° Edição. IMPA, 1997. ISBN 85.244.0048-X.

[10] MATTOS, A. D. *C*-álgebras geradas por Isometrias*. 169 p. Dissertação (Mestrado em Matemática e Computação Científica) — Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2007.

[11] MCCLANAHAN, K. K-theory for partial crossed products by discrete groups. *Journal of Functional Analysis*, v. 130, p. 77–117, 1995.

[12] PEDERSEN, G. K. *C*-Algebras and their Automorphism Groups*. Londres: Academic Press Limited, 1989. ISBN 0-12-549450-5.

[13] SIEBEN, N. C*-crossed products by partial actions and actions of inverse semigroups. 1996. Disponível em: <arXiv:funct-an/9602006v1>.

[14] SUNDER, V. S. *Functional Analysis - Spectral Theory*. Berlin: Birkhäuser Verlag, 1998. (Birkhäuser Advanced Texts). ISBN 3-7643-5892-0.