

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**  
**EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**SÍNTESE ESTRUTURAL DE CADEIAS CINEMÁTICAS E  
MECANISMOS**

Dissertação submetida à  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em  
**ENGENHARIA MECÂNICA.**

**ROBERTO SIMONI**

Florianópolis, Fevereiro de 2008.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**

**ENGENHARIA MECÂNICA**

**SÍNTESE ESTRUTURAL DE CADEIAS CINEMÁTICAS E  
MECANISMOS**

**ROBERTO SIMONI**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

**MESTRE EM ENGENHARIA**

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA**

sendo aprovada em sua forma final.

---

Prof. Daniel Martins, Dr. Eng.  
Orientador

---

Prof. Fernando Cabral, PhD.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**BANCA EXAMINADORA:**

---

Prof. Altamir Dias, D.Sc.  
Presidente

---

Prof. Celso Melchtiades Doria, PhD.

---

Prof. Eduardo Camponogara, PhD.

# *Sumário*

<b>Lista de Figuras</b> .....	p. v
<b>Lista de Tabelas</b> .....	p. ix
<b>Lista de Símbolos</b> .....	p. xi
<b>Resumo</b> .....	p. xii
<b>Abstract</b> .....	p. xiv
<b>1 Introdução</b> .....	p. 1
1.1 Projeto de mecanismos .....	p. 2
1.1.1 Metodologia sistemática para projeto de mecanismos .....	p. 3
1.2 Cinemática dos mecanismos .....	p. 5
1.2.1 Análise cinemática .....	p. 5
1.2.2 Síntese cinemática .....	p. 5
1.3 Visão geral da dissertação .....	p. 6
<b>2 Teoria de Mecanismos</b> .....	p. 8
2.1 Elos e juntas .....	p. 8
2.2 Cadeias cinemáticas e mecanismos .....	p. 11
2.3 Inversões cinemáticas ou mecanismos .....	p. 12
2.4 Representações de cadeias cinemáticas e mecanismos .....	p. 13
2.4.1 Representação esquemática funcional .....	p. 13
2.4.2 Representação estrutural .....	p. 13

2.4.3	Representação por grafo .....	p. 14
2.5	Mobilidade ou graus de liberdade .....	p. 16
2.5.1	Tipos de mobilidade .....	p. 17
2.5.2	Teoria de helicóides .....	p. 17
2.6	Cadeias cinemáticas degeneradas .....	p. 20
2.7	Cadeias cinemáticas isomórficas .....	p. 21
<b>3</b>	<b>Síntese Estrutural de Cadeias Cinemáticas .....</b>	<b>p. 23</b>
3.1	Revisão dos métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas .....	p. 24
3.1.1	Distribuição dos elos .....	p. 24
3.1.2	Método baseado na notação de Franke .....	p. 25
3.1.3	Geração de cadeias cinemáticas por agregação .....	p. 26
3.1.4	Método de Heap .....	p. 27
3.1.5	Método de Farrell .....	p. 28
3.1.6	Método de Melbourne .....	p. 31
3.1.7	Método de Sunkari e Schmidt .....	p. 31
3.1.8	Outros métodos .....	p. 31
3.2	Cadeias cinemáticas fracionadas e mobilidade .....	p. 32
3.2.1	Fracionamento de elo .....	p. 32
3.2.2	Fracionamento de junta .....	p. 33
3.2.3	Fracionamento em cadeias híbridas .....	p. 34
3.3	Métodos propostos .....	p. 35
3.3.1	Geração de cadeias cinemáticas sem fracionamento .....	p. 35
3.3.2	Geração de cadeias cinemáticas com fracionamento .....	p. 39
3.3.3	Geração exclusiva de cadeias cinemáticas com fracionamento .....	p. 41
3.4	Resultados obtidos pelos métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas propostos .....	p. 51

3.5	Conclusões do capítulo .....	p. 54
<b>4</b>	<b>Síntese Estrutural de Mecanismos .....</b>	<b>p. 55</b>
4.1	Teoria de grupos .....	p. 55
4.1.1	Grupos e subgrupos .....	p. 56
4.1.2	Ações .....	p. 56
4.1.3	Órbitas .....	p. 58
4.2	Órbitas do grupo de automorfismos do grafo associado a uma cadeia cinemática e mecanismos .....	p. 60
4.3	Resultados obtidos pelo método de síntese estrutural de mecanismos proposto .....	p. 62
4.4	Conclusões do capítulo .....	p. 64
<b>5</b>	<b>Síntese Estrutural de Mãos Robóticas .....</b>	<b>p. 65</b>
5.1	Mãos robóticas .....	p. 65
5.2	Critério para classificação de cadeias cinemáticas .....	p. 66
5.2.1	Conectividade .....	p. 66
5.3	Mecanismos alternativos para mãos robóticas .....	p. 67
5.3.1	Transformação de requisitos funcionais em características estruturais .....	p. 67
5.4	Conclusões do capítulo .....	p. 71
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas .....</b>	<b>p. 72</b>
6.1	Conclusões .....	p. 72
6.2	Artigos publicados e submetidos .....	p. 74
6.3	Perspectivas de trabalhos futuros .....	p. 74
	<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>p. 76</b>
	<b>Apêndice A – Teoria de Grafos .....</b>	<b>p. 82</b>
A.1	Grafos .....	p. 82

A.2	Caminhos e circuitos.....	p. 83
A.3	Grafos e componentes conexos e biconexos .....	p. 83
A.4	Isomorfismos .....	p. 85
A.5	Planaridade e Equação de Euler.....	p. 86
A.6	Representação de grafos .....	p. 86
A.6.1	Representação matricial .....	p. 87
A.6.2	Formatos graph6 e sparse6 .....	p. 88
<b>Apêndice B – Interface Gráfica.....</b>		<b>p. 93</b>
B.1	Janela principal .....	p. 93
B.2	Janela da variação do método de Farrell .....	p. 94
B.3	Janela da variação do método de Sunkari and Schmidt I .....	p. 95
B.4	Janela da variação do método de Sunkari and Schmidt II .....	p. 96
B.5	Janela de inversões cinemáticas ou mecanismos .....	p. 97

# *Lista de Figuras*

Figura 1.1	Etapas da metodologia sistemática para projeto de mecanismos de Tsai (2001) e Back <i>et al.</i> (2006). . . . .	4
Figura 2.1	Pares cinemáticos inferiores. . . . .	9
Figura 2.2	Pares cinemáticos superiores. . . . .	10
Figura 2.3	Tipos de cadeias cinemáticas. . . . .	11
Figura 2.4	Mecanismo biela-manivela. . . . .	11
Figura 2.5	Cadeias cinemáticas. . . . .	12
Figura 2.6	Mecanismos de Watt. . . . .	12
Figura 2.7	Mecanismos de Stephenson. . . . .	13
Figura 2.8	Representações geométricas. . . . .	18
Figura 2.9	Cadeias degeneradas. . . . .	21
Figura 2.10	Substituição de uma subcadeia rígida ( $M=0$ ), transformando a cadeia original em uma cadeia mais simples. . . . .	21
Figura 2.11	Cadeias cinemáticas isomórficas. . . . .	22
Figura 3.1	Representação de cadeias cinemáticas por grafos. . . . .	24
Figura 3.2	Partição envolvida na enumeração de cadeias cinemáticas planas com 10 elos e $M = 3$ . . . . .	25
Figura 3.3	Representação de cadeias cinemáticas pela notação de Franke. . . . .	26

Figura 3.4	Grupos de Assur. ....	27
Figura 3.5	Agregação de grupos de Assur no mecanismo de quatro barras (elos). ....	27
Figura 3.6	Exemplo do método de Farrell: conexões do elo 1. ....	29
Figura 3.7	Exemplo do método de Farrell: exploração do ramo 2 que sai do elo 1. ....	30
Figura 3.8	Exemplo do método de Farrell: continuação da exploração do ramo 2. ....	30
Figura 3.9	Identificação do fracionamento de elo. ....	33
Figura 3.10	Identificação do fracionamento de junta. ....	34
Figura 3.11	Identificação do fracionamento em cadeias híbridas. ....	34
Figura 3.12	Identificação do fracionamento em cadeias híbridas. ....	35
Figura 3.13	Estrutura da variação do método de Farrell. ....	36
Figura 3.14	Grafo eliminado, evitando fracionamento de elo. ....	37
Figura 3.15	Grafo eliminado, evitando fracionamento de junta. ....	37
Figura 3.16	Agregação de cadeias cinemáticas. ....	42
Figura 3.17	Fracionamento em cadeias híbridas. ....	42
Figura 3.18	Cadeias cinemáticas com $\nu = 1$ e $M = 1, 2$ . ....	43
Figura 3.19	Cadeias cinemáticas com $\nu = 2$ e $M = 1$ . ....	43
Figura 3.20	Cadeias cinemáticas com $\nu = 2$ e $M = 2$ . ....	43
Figura 3.21	Cadeias com fracionamento mais complexo. ....	51
Figura 4.1	Cadeia cinemática de Stephenson e representação por grafo. ....	57



Figura 4.2	Imagem das ações de $\sigma_1$ e $\sigma_2$ . . . . .	57
Figura 4.3	Cadeia cinemática de Watt e representação por grafo. . . . .	59
Figura 4.4	Imagem da ação do grupo de automorfismos no grafo de Watt. . . . .	59
Figura 4.5	Imagem da ação do grupo de automorfismos no grafo de Stephenson. . . . .	60
Figura 5.1	Cadeia cinemática plana eliminada pelo critério da conectividade. . . . .	67
Figura 5.2	Subcadeia que deve ser incluída em todas as cadeias com potencial para aplicação como mãos robóticas que atendem os requisitos funcionais descritos acima. . . . .	68
Figura 5.3	Mecanismo da mão robótica Stanford/JPL ou Salisbury. . . . .	70
Figura 5.4	Mecanismo não simétrico com $M = 3$ . . . . .	71
Figura 5.5	Mecanismo simétrico com $M = 3$ . . . . .	71
Figura A.1	Grafo não direcionado. . . . .	82
Figura A.2	Grafo direcionado. . . . .	82
Figura A.3	Componentes do grafos. . . . .	84
Figura A.4	Componentes biconexos. . . . .	85
Figura A.5	Grafos isomórficos. . . . .	85
Figura A.6	Grafos não planares. . . . .	86
Figura A.7	Lista de adjacência do grafo da Fig. A.1. . . . .	88
Figura A.8	Grafo não direcionado. . . . .	89
Figura A.9	Grafo de Stephenson. . . . .	89

Figura A.10: $Fa @ x^{\wedge}$ . . . . .	91
Figura A.11: $EkGChG^{\sim}$ . . . . .	92
Figura B.1 Janela principal. . . . .	94
Figura B.2 Janela da variação do método de Farrell. . . . .	96
Figura B.3 Janela da variação do método de Sunkari and Schmidt I e II. . . . .	97
Figura B.4 Janela de inversões cinemáticas ou mecanismos. . . . .	98

# *Lista de Tabelas*

Tabela 2.1	Resumo dos pares cinemáticos freqüentemente usados em máquinas, mecanismos e robôs. Essa tabela é baseada em Tsai (2001). . . . .	10
Tabela 2.2	Representação dos elos. . . . .	14
Tabela 2.3	Representação de cadeias cinemáticas e mecanismos. . . . .	15
Tabela 2.4	Correspondência entre grafos e cadeias cinemáticas. . . . .	15
Tabela 2.5	Sistemas de helicóides usados em robótica e em mecanismos. . . . .	20
Tabela 3.1	Possíveis partições de cadeias cinemáticas planas ( $\lambda = 3$ ) com 10 elos e $M = 3$ . . . . .	25
Tabela 3.2	Maneiras de agrupar as cadeias do atlas. . . . .	44
Tabela 3.3	Cadeias cinemáticas com fracionamento de elo. . . . .	46
Tabela 3.4	Cadeias cinemáticas com fracionameto de junta. . . . .	49
Tabela 3.5	Enumeração de cadeias cinemáticas sem fracionamento. . . . .	52
Tabela 3.6	Enumeração exclusiva de cadeias cinemáticas com fracionamento. . . . .	53
Tabela 3.7	Enumeração de cadeias cinemáticas com fracionamento. . . . .	53
Tabela 4.1	Estrutura do grupo. . . . .	59
Tabela 4.2	Mecanismos sem fracionamento. . . . .	62
Tabela 4.3	Mecanismos somente com fracionamento. . . . .	63

Tabela 4.4	Mecanismos com fracionamento. ....	64
Tabela 5.1	Cadeias cinemáticas para mãos robóticas com $\lambda = 6$ , $\nu = 2$ . ....	70

## *Lista de Símbolos*

$\$$	Helicóide
$h$	Passo do helicóide
$\lambda$	Dimensão do sistema de helicóides
$G$	Grupo
$i$	Elemento identidade de um grupo
$G'$	Subgrupo
$H(V, E)$	Grafo
$V$	Conjunto de vértices do grafo.
$E$	Conjunto de arestas do grafo
$\nu$	número de circuitos independentes de um grafo
$A = (a_{i,j})$	Matriz de adjacência
$B = (b_{i,j})$	Matriz de incidência

# *Resumo*

O objetivo principal deste trabalho é apresentar novas abordagens para a síntese estrutural de cadeias cinemáticas, que é uma fase fundamental para o projeto de mecanismos, utilizando ferramentas da teoria de grafos e da teoria de grupos.

A síntese estrutural de cadeias cinemáticas consiste na geração de uma lista completa de cadeias cinemáticas sem cadeia isomórficas e degeneradas que satisfazem a equação da mobilidade. Nesta fase do projeto de mecanismos as dimensões dos elos não são consideradas e uma cadeia cinemática pode ser representada de forma unívoca por um grafo cujos vértices correspondem aos elos da cadeia e as arestas correspondem às juntas. Com isso, a síntese estrutural de cadeias cinemáticas consiste na geração de uma lista completa de grafos que satisfazem a equação da mobilidade.

Uma revisão dos principais métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas é apresentada e os principais problemas desses métodos são identificados. Existem duas espécies de problemas: geração de cadeias isomórficas e degeneradas as quais devem sempre ser evitadas por um método ideal de síntese estrutural; e a geração de cadeias com fracionamento as quais devem ser consideradas opcionais. Em vista disto, dois métodos de geração de cadeias sem fracionamento e um de cadeias com fracionamento são aprimorados e um novo método de geração exclusiva de cadeias com fracionamento é proposto. Novos resultados são obtidos para cadeias que operam em vários sistemas de helicóides. Os resultados serão apresentados em tabelas, e para o caso plano, as diferenças nos resultados encontrados na literatura serão analisados.

A síntese estrutural de mecanismos consiste na enumeração das possíveis inversões cinemáticas que uma cadeia cinemática pode originar. Para esta fase foi utilizada uma nova abordagem com ferramentas da teoria de grupos. Pela primeira vez na literatura de mecanismos foi introduzido o conceito de órbitas do grupo de automorfismos do grafo, o qual representa a cadeia cinemática, para representar as inversões cinemáticas. Novos resultados são obtidos para mecanismos que operam em vários sistemas de helicóides e apresentados em tabelas.

**Palavras chaves:** *Síntese estrutural, cadeias cinemáticas, mecanismos, teoria de grafos, teoria de grupos, isomorfismos, automorfismos, ações e órbitas.*



# *Abstract*

The main objective of this work is the presentation of a new approach for structural synthesis of kinematic chains, which is a fundamental phase for the mechanism design, using tools of the graph theory and the group theory.

The structural synthesis of kinematic chains consists of the generation of a complete list of kinematic chains without isomorphs and degenerated chains that satisfy the mobility equation. In this phase of the mechanism design the dimensions of links are not considered and a kinematic chain can be uniquely represented by a graph whose vertices correspond to the links of the chain and the edges correspond to the joints of the chain. Therefore, the structural synthesis of kinematic chains consists of the generation of a complete list of graphs satisfying the mobility equation.

A review of the main methods of structural synthesis of kinematic chains is presented and the main problems of these methods are identified. There are two kind of problems: generation of isomorphs and degenerated chains, which must always be prevented by an ideal method of structural synthesis; and generation of fractionated chains, which must be considered optional. In view of this, two methods of generation of kinematic chains without fractionation and one with fractionation are improved and a new method which generate only fractionated kinematic chains is proposed. New results are obtained for chains that operate in several screw systems. The results are presented in tables and for planar case differences in the results found in literature are analyzed.

The structural synthesis of mechanisms consists of the enumeration of the possible kinematic inversions that a kinematic chain can originate. For the first time in the mechanisms literature was introduced the concept of orbits of the group of automorphisms of the graph, which represents the kinematic chain, to represents of kinematic inversions. New results are obtained for mechanisms that operate in several screw systems and presented in original tables.

**Palavras chaves:** *Structural synthesis, kinematic chains, mechanisms, graph theory, group theory, isomorphisms, automorphisms, actions and orbit.*





# *1 Introdução*

O tema central desta dissertação é o projeto conceitual de mecanismos. Será apresentada uma metodologia sistemática para enumeração de estruturas cinemáticas que atendam determinados requisitos funcionais do mecanismo. O processo de enumeração de estruturas cinemáticas é conhecido, entre os cinemáticos, como síntese estrutural de cadeias cinemáticas [Tsai 2001, Mruthyunjaya 2003]. A síntese estrutural de cadeias cinemáticas é uma fase muito importante para o projeto de novos mecanismos [Tsai 2001, Mruthyunjaya 2003]. Essa fase do projeto consiste na enumeração de uma lista completa de cadeias cinemáticas sem cadeias isomórficas e degeneradas com a mobilidade desejada.

Primeiramente, são introduzidos alguns conceitos da teoria de mecanismos, os quais são fundamentais para o entendimento do texto. Em seguida, será apresentada uma revisão bibliográfica dos métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas encontrados na literatura. A síntese estrutural de cadeias cinemáticas é um problema ainda não resolvido em cinemática devido que, no processo de geração das cadeias cinemáticas, são geradas cadeias degeneradas e isomórficas, as quais devem ser eliminadas pois não são de interesse de estudo em cinemática, e essa eliminação requer um grande esforço computacional. Serão abordados os tipos de fracionamento que ocorrem em cadeias cinemáticas e com base na questão do fracionamento serão apresentados os métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas propostos neste trabalho. Finalmente, os resultados dos métodos são apresentados em tabelas.

Outro tema que é abordado nesta dissertação é a síntese estrutural de mecanismos, que corresponde a enumeração de todos os possíveis mecanismos que uma cadeia cinemática pode originar. Um novo método de síntese estrutural de mecanismos baseado em técnicas da teoria de grupos é proposto. Alguns conceitos da teoria de grupos são introduzidos pela primeira vez na literatura de mecanismos. Primeiramente, serão apresentadas as ferramentas da teoria de grupos. Em seguida, é feita a descrição do método e apresentação de exemplos e, finalmente, os resultados são apresentados em tabelas.

Novos resultados são obtidos, tanto na enumeração de cadeias cinemáticas quanto na enumeração de mecanismos.

Os métodos propostos são aplicados para enumeração sistemática de mecanismos alternativos para mãos robóticas.

## 1.1 Projeto de mecanismos

Projeto é o uso de princípios científicos, informações técnicas e imaginação na definição de estruturas, máquinas ou sistemas para desempenhar funções pré-especificadas com máxima economia e eficiência [Back et al. 2006].

O projeto de mecanismos é a criação de soluções inteligentes na forma de produtos ou sistemas que satisfaçam às exigências do cliente [Dieter 1991, Pahl e Beitz 1992, Suh 1990]. Quando surge um problema de projeto todo o ferramental disponível é utilizado para compreender o problema e gerar soluções factíveis. Segundo Tsai (2001) o projeto de um mecanismo é um mapeamento das exigências do cliente em uma realização física.

Back *et al.* (2006) propõem uma metodologia de projeto integrado de produtos que possui oito fases: planejamento do projeto, projeto informacional, projeto conceitual, projeto preliminar, projeto detalhado, preparação da produção, lançamento do produto e validação do produto. Tsai (2001) divide o processo de projeto de mecanismos em três fases interrelacionadas:

1. *Especificação e planejamento*: Nesta fase as exigências do cliente são identificadas e transformadas em especificações técnicas, em termos de requisitos funcionais, tempo e recursos disponíveis para o desenvolvimento do projeto. Essa fase corresponde à planejamento do projeto e projeto informacional da metodologia de Back *et al.* (2006).
2. *Projeto conceitual*: Durante esta fase são geradas todas as alternativas possíveis que atendam aos requisitos funcionais e a alternativa com melhor potencial, *i.e.* o melhor projeto conceitual será selecionado para um projeto detalhado. Essa fase corresponde à projeto conceitual e projeto preliminar da metodologia de Back *et al.* (2006).
3. *Projeto do produto*: Nesta última fase do projeto de mecanismos, a análise e otimização do conceito são desenvolvidos. Também são feitas simulações computacionais e é apresentado um protótipo. A função, a forma, os materiais e os métodos de produção são considerados. Se o projeto conceitual selecionado para esta fase mostrar-se impraticável, seleciona-se um conceito alternativo na fase anterior. Finalmente, o projeto do mecanismo entra em fase de produção. Essa fase corresponde à projeto detalhado, preparação

da produção, lançamento do produto e validação do produto da metodologia de Back *et al.* (2006).

Em outras palavras, projeto é um processo contínuo de refinamento dos requisitos do cliente em um produto final. O processo é iterativo e as soluções geralmente não são únicas, envolve talento, experiência e decisões do projetista.

O foco central desta dissertação é a fase de *projeto conceitual* de mecanismos. Esta fase do projeto depende geralmente da intuição, da experiência e da capacidade do projetista para selecionar o conceito mais promissor para desenvolver um mecanismo que realize uma tarefa especificada.

### 1.1.1 Metodologia sistemática para projeto de mecanismos

Tsai (2001) propõe uma metodologia sistemática para projeto de mecanismos. A estrutura cinemática de um mecanismo pode ser escolhida através de uma metodologia sistemática, considerando as restrições da tarefa desejada. A metodologia de Tsai (2001) é baseada na aplicação da teoria de grafos e análise combinatorial e pode ser resumida em sete etapas:

1. Identificar os requisitos funcionais, baseados nas exigências do cliente.
2. Determinar a natureza do movimento (plano, esférico, espacial), mobilidade, redundância e complexidade do mecanismo.
3. Identificar as características estruturais associadas com alguns requisitos funcionais.
4. Enumerar todas as possíveis estruturas cinemáticas usando algum método de síntese estrutural de cadeias cinemáticas.
5. Avaliar qualitativamente os mecanismos enumerados em termos do potencial de cada mecanismo satisfazer às exigências funcionais restantes. Um conjunto de mecanismos possíveis são listados.
6. Selecionar o mecanismo mais promissor para a fase da síntese dimensional, otimização, simulação, demonstração de um protótipo e documentação.
7. Entrar em fase de produção.

A Fig. 1.1 mostra um diagrama de blocos da metodologia sistemática para projeto de mecanismos de Tsai (2001) juntamente com algumas etapas da metodologia de projeto integrado de produtos de Back *et al.* (2006).

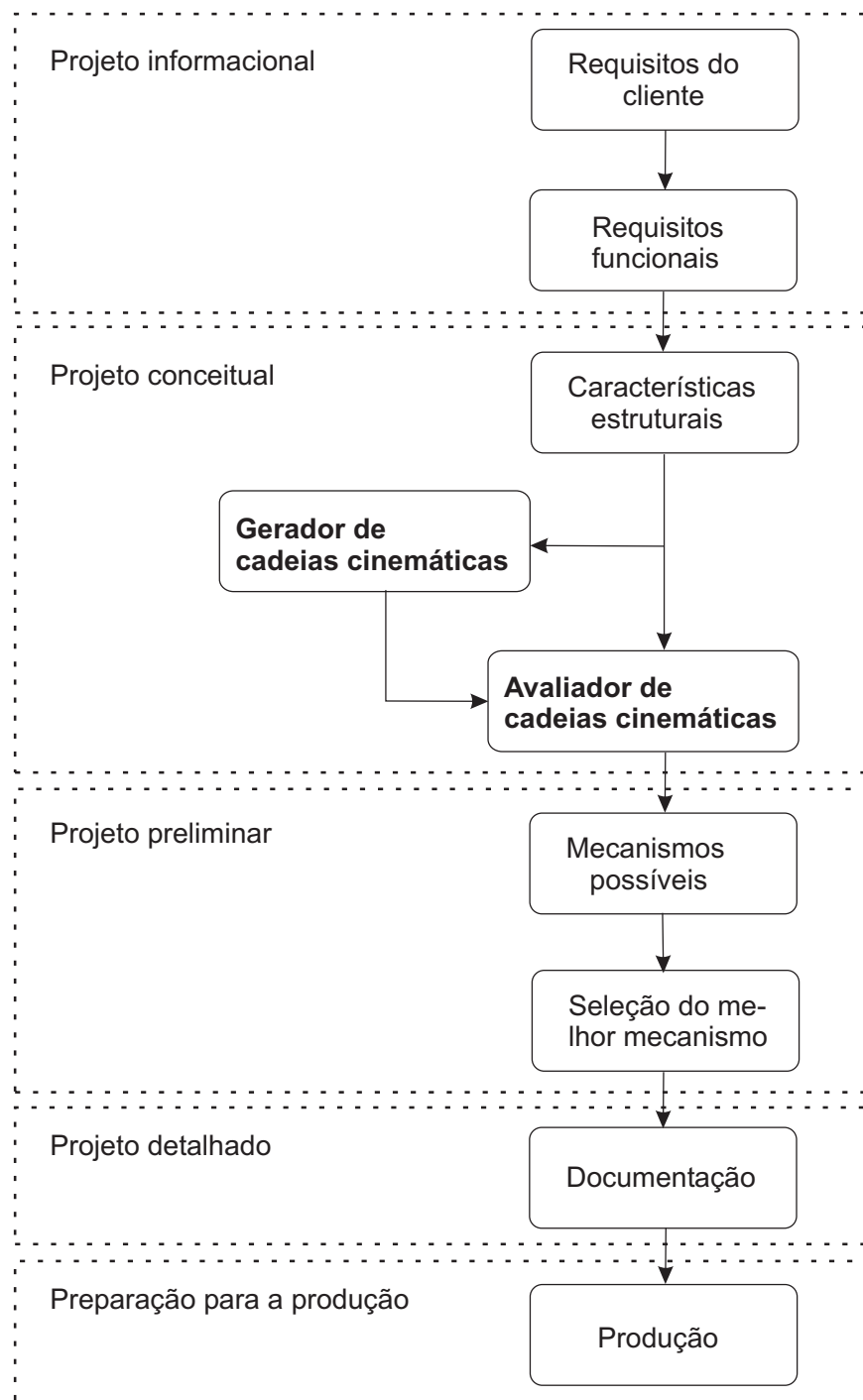


Figura 1.1: Etapas da metodologia sistemática para projeto de mecanismos de Tsai (2001) e Back *et al.* (2006).

Para a fase de projeto conceitual de mecanismos, a metodologia de Tsai (2001) consiste de dois ramos distintos: o *gerador* e o *avaliador* (ver Fig. 1.1). Alguns requisitos funcionais são transformados em características estruturais e incorporados ao gerador como regras de enumeração, tais como mobilidade, número de elos, número de juntas, número de circuitos, etc. Outros requisitos funcionais tais como conectividade, graus de controle, atuação, etc. são

incorporados no avaliador como regras de classificação. O gerador enumera todas as soluções possíveis usando a teoria de grafos e análise combinatorial. Esta etapa é também conhecida como síntese estrutural de cadeias cinemáticas, síntese do número, síntese de Grübler, etc. O avaliador avalia as estruturas cinemáticas geradas usando os requisitos funcionais do projeto que não foram utilizados pelo gerador.

## 1.2 Cinemática dos mecanismos

A cinemática dos mecanismos é o estudo do movimento relativo entre os diversos elos de um mecanismo ou máquina, desprezando os efeitos da inércia e as forças que causam o movimento.

A cinemática dos mecanismos é dividida em dois ramos distintos: análise cinemática e síntese cinemática [Tsai 2001].

### 1.2.1 Análise cinemática

A análise cinemática de mecanismos consiste na determinação das características cinemáticas de mecanismos já prontos ou em fase de dimensionamento (projeto). As características cinemáticas a serem determinadas são posição, velocidade e aceleração de pontos de interesse no mecanismo. Estas características podem ser encontradas considerando as restrições impostas pelas juntas.

### 1.2.2 Síntese cinemática

A síntese cinemática é o problema inverso da análise cinemática. Na síntese cinemática o desafio do projetista é desenvolver um mecanismo que atenda às características de movimento determinadas para o efetuador final. O problema da síntese cinemática pode ser dividido em três fases distintas mas que são relacionadas [Tsai 2001]:

1. *Síntese do tipo*: Analisa os requisitos da tarefa e define o tipo de mecanismo. Determina o número de graus de liberdade para desenvolver a tarefa, tipo de transmissão, etc.
2. *Síntese estrutural de cadeias cinemáticas*: Determina o número de elos, número de juntas e tipo de juntas necessárias para obter a mobilidade desejada. A síntese estrutural envolve a enumeração de todas as possíveis cadeias cinemáticas com determinada mobilidade.

Várias metodologias foram desenvolvidas para a enumeração sistemática de cadeias cinemáticas. Este é o foco central desta dissertação: estudar a enumeração sistemática de cadeias cinemáticas.

3. *Síntese dimensional*: A síntese dimensional determina as dimensões ou proporções dos elos de um mecanismo. O objetivo é encontrar o melhor dimensionamento dos elos do mecanismo para obter seu melhor desempenho e assim atender aos requisitos funcionais do projeto. A síntese dimensional aborda problemas de grande complexidade matemática onde é preciso alcançar um certo grau de equilíbrio entre os objetivos distintos, chegando a uma solução que satisfaça suficientemente as especificações do projeto [Cristobal 2003].

Esta dissertação aborda a questão da síntese estrutural de cadeias cinemáticas (item 2 acima), ou seja, a enumeração de uma lista completa de cadeias cinemáticas sem cadeias isomórficas e degeneradas e que possuem um determinado número de elos e juntas, com a mobilidade desejada. Vários métodos de geração de cadeias cinemáticas sem isomorfismos são revisados e uma nova metodologia será proposta incluindo a implementação de novos métodos que serão apresentados no capítulo 3. Esta dissertação aborda também a enumeração das possíveis inversões cinemáticas (ou mecanismos) que uma cadeia cinemática pode originar.

## 1.3 Visão geral da dissertação

A dissertação está organizada em 4 capítulos e dois apêndices, além desta introdução.

O capítulo 2 apresenta os conceitos fundamentais da teoria de mecanismos, formas de representação, equação da mobilidade e inversões cinemáticas.

O capítulo 3 apresenta uma revisão bibliográfica dos principais métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas e os métodos que foram propostos:

1. Geração de cadeias sem fracionamento:
  - Variação do método de Farrell [Tischler et al. 1995]: a variação consiste em evitar a geração de cadeias cinemáticas com fracionamento. O método foi implementado em C++ e utiliza as ferramentas da Boost Graph Library [Siek et al. 2002].
  - Variação do método de Sunkari e Schimidt (2006): a variação consite em adaptar o gerador de grafos do McKay (1990) para enumerar grafos biconectados e utilizar o teste para identificação de cadeias degeneradas de Martins e Carboni (2006).

## 2. Geração de cadeias com fracionamento:

- Variação do método de Sunkari e Schmidt (2006): a variação consiste em adaptar o gerador de grafos do McKay (1990) para enumerar grafos conectados com grau dos vértices maior ou igual a dois e utilizar o teste para identificação de cadeias degeneradas de Martins e Carboni (2006).

## 3. Geração exclusiva de cadeias com fracionamento:

- Este método é parecido com o método de enumeração de cadeias cinemáticas proposto por Assur [Tischler et al. 1995, Mruthyunjaya 2003]. Cadeias com complexidade maior (muitos elos) são geradas pela agregação de cadeias mais simples (poucos elos). Cadeias degeneradas não são enumeradas e o número de cadeias isomórficas é pequeno porque a agregação obedece certas regras.

O capítulo 4 apresenta um novo método de enumeração de todos os possíveis mecanismos que uma cadeia cinemática pode originar utilizando ferramentas da teoria de grupos. A teoria e vários exemplos serão apresentados.

O capítulo 5 apresenta uma aplicação da síntese estrutural de cadeias cinemáticas para enumeração de mecanismos alternativos para mãos robóticas. O ponto de partida é o trabalho de Tischler *et al.* (1995).

O apêndice A apresenta uma breve descrição dos conceitos fundamentais da teoria de grafos aplicados à teoria de mecanismos.

O apêndice B descreve o programa de síntese estrutural de cadeias cinemáticas e mecanismos.



## 2 *Teoria de Mecanismos*

Neste capítulo serão introduzidos alguns conceitos fundamentais da teoria de mecanismos tais como: cadeia cinemática, inversão cinemática e formas de representação de cadeias cinemáticas e mecanismos. Esses conceitos são apresentados com o objetivo de facilitar o entendimento dos capítulos seguintes.

Cadeias cinemáticas e mecanismos são constituídos de elos e juntas e assim podem ser representados de forma mais abstrata através de um grafo cujos vértices correspondem aos elos e as arestas correspondem as juntas. Essa forma de representação será apresentada neste capítulo e adotada no restante do texto. Caso o leitor tenha dificuldades com a teoria de grafos é recomendada a leitura do apêndice A que introduz os conceitos fundamentais da teoria de grafos, os quais são essenciais para o entendimento do restante do texto.

### 2.1 **Elos e juntas**

Um corpo material é rígido se a distância entre quaisquer dois pontos do corpo permanecer constante ao longo do tempo. Na realidade, corpos rígidos não existem pois os materiais sofrem deformação sob perturbação. Se essa deformação for pequena e puder ser desprezada, o corpo será considerado rígido.

Os corpos rígidos que fazem parte de um mecanismo ou de uma máquina são chamados de *elos*. A conexão entre dois elos é chamada de *junta*. Uma junta adiciona fisicamente algumas restrições ao movimento relativo entre os dois elos.

A superfície de contato de um elo em relação à outro é chamada de *elemento do par cinemático*. Dois elementos do par formam um *par cinemático*, os quais são de outra forma também chamados de juntas.

Os pares cinemáticos são classificados de acordo com o tipo de contato entre eles em:

1. *Pares cinemáticos inferiores*: O contato entre esses pares é superficial. Existem seis pares

cinemáticos inferiores que são frequentemente usados em mecanismos, máquinas e robôs, os quais são mostrados na Fig. 2.1. A junta universal, mostrada na Fig. 2.1(g), é tratada como um par cinemático inferior mas ela é formada por duas juntas rotativas.

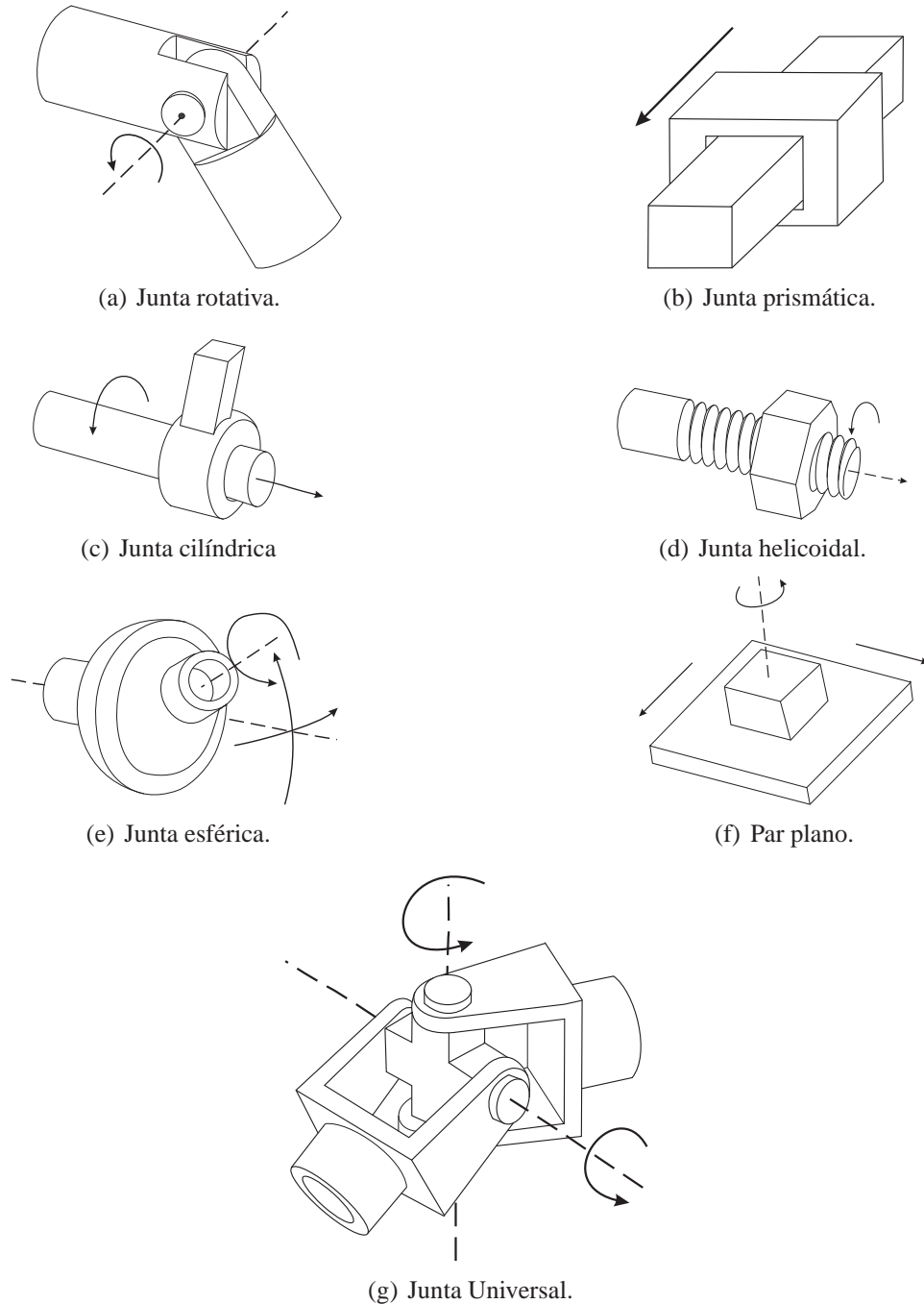


Figura 2.1: Pares cinemáticos inferiores.

2. *Pares cinemáticos superiores*: O contato entre esses pares é pontual ou linear. Existem dois pares cinemáticos superiores que são frequentemente usados em mecanismos, máquinas e robôs, os quais são mostrados na Fig. 2.2.



Figura 2.2: Pares cinemáticos superiores.

Um resumo dos graus de liberdade, tipo de movimento associado e tipo de contato de cada um dos pares cinemáticos das Fig. 2.1 e 2.2 é apresentado na Tab. 2.1. A coluna 1 descreve o nome do par; a coluna 2 referencia o par cinemático à Fig. 2.1 e 2.2; a coluna 3 mostra o símbolo freqüentemente usado na literatura de mecanismos; a coluna 4 mostra o número de graus de liberdade (DoF) que cada par cinemático permite; as colunas 5 e 6 indicam o tipo de movimento associado (rotação ou translação) e a coluna 7 indica o tipo de contato entre os pares cinemáticos.

Tabela 2.1: Resumo dos pares cinemáticos freqüentemente usados em máquinas, mecanismos e robôs. Essa tabela é baseada em Tsai (2001).

Par Cinemático	Figura	Símbolo	DoF	Rotacional	Translacional	Tipo de Contato
Rotacional	2.1(a)	R	1	1	0	superficial
Prismático	2.1(b)	P	1	0	1	superficial
Cilíndrico	2.1(c)	C	2	1	1	superficial
Helicoidal	2.1(d)	H	1	1	acoplado	superficial
Esférico	2.1(e)	S	3	3	0	superficial
Plano	2.1(f)	E	3	1	2	superficial
Universal	2.1(g)	U	2	2	0	superficial
Engrenagem	2.2(a)	G	2	1	1	linear
Came	2.2(b)	$C_p$	2	1	1	linear

Um elo será chamado de binário se ele é conectado somente a outros dois elos, será chamado de ternário se ele é conectado somente a outros três elos, e assim por diante. Uma junta é chamada junta binária se ela conecta somente dois elos e múltipla se ela conecta mais que dois elos. As juntas que permitem somente 1-DoF (rotacional e prismática) serão chamadas de *juntas simples*.

## 2.2 Cadeias cinemáticas e mecanismos

Uma cadeia cinemática é formada por um conjunto de elos conectados por juntas [Ionescu 2003, Tsai 2001]. Se cada elo em uma cadeia cinemática for conectado a outro elo por somente um caminho, a cadeia cinemática é chamada de cadeia serial. Por outro lado, se cada elo de uma cadeia cinemática for conectado a outro elo por no mínimo dois caminhos, a cadeia cinemática é denominada cadeia fechada. Se uma cadeia cinemática é formada por cadeias seriais e cadeias fechadas, ela é denominada cadeia híbrida. A Fig. 2.3 mostra os três tipos de cadeias: serial (Fig. 2.3(a)), fechada (Fig. 2.3(b)) e híbrida (Fig. 2.3(c)).

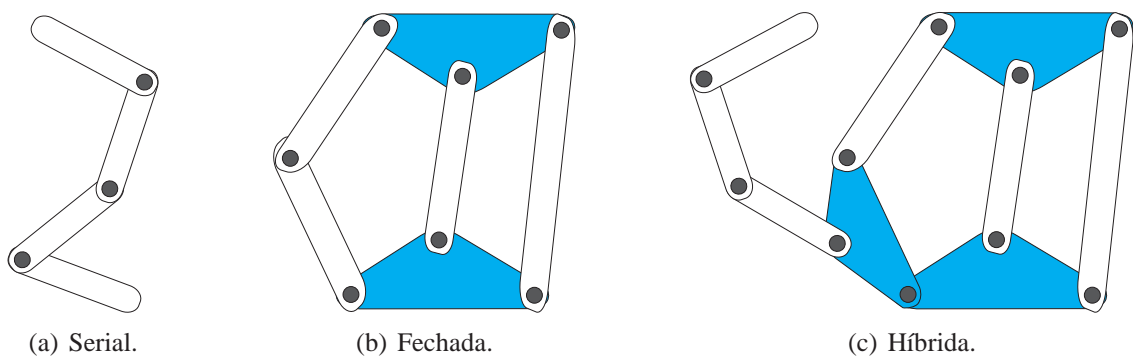


Figura 2.3: Tipos de cadeias cinemáticas.

Um mecanismo é uma cadeia cinemática com um de seus componentes (elos) fixados a uma base [Ionescu 2003, Tsai 2001]. O movimento do elo (ou elos) de entrada de um mecanismo impõe restrição de movimento aos outros elos. Assim, um mecanismo é um dispositivo que transforma movimento e/ou torque de um ou mais elos para os outros. A Fig. 2.4 mostra um mecanismo biela-manivela que transforma uma rotação contínua em um movimento recíproco de translação e vice-versa.

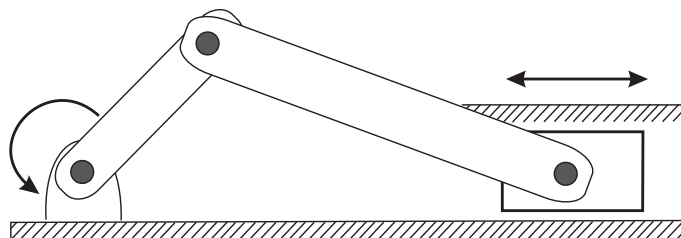


Figura 2.4: Mecanismo biela-manivela.

Uma máquina é uma montagem de vários componentes, um ou mais mecanismos em conjunto com outros componentes hidráulicos, pneumáticos ou elétricos, com a finalidade de transformar a energia externa em trabalho.

## 2.3 Inversões cinemáticas ou mecanismos

Como foi citado anteriormente, um mecanismo é definido apenas fixando um dos elos de uma cadeia cinemática numa base. A questão é determinar quantas escolhas para o elo fixo existem na cadeia cinemática e que causam características diferentes no movimento dos elos restantes da cadeia em relação ao elo fixo. Esse processo é conhecido como enumeração de inversões cinemáticas ou enumeração de mecanismos.

A Fig. 2.5 mostra duas cadeias cinemáticas bem conhecidas na literatura de mecanismos. A cadeia da Fig. 2.5(a) é conhecida como cadeia cinemática de Watt e possui duas inversões,

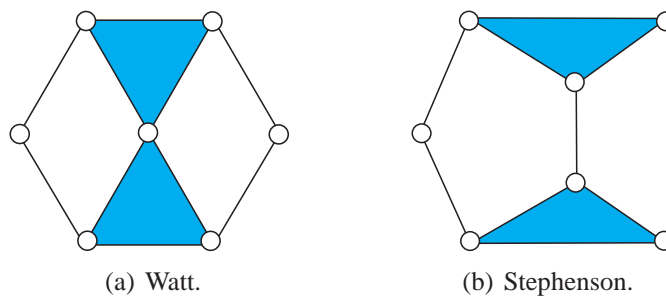


Figura 2.5: Cadeias cinemáticas.

*i.e.* origina dois mecanismos com características diferentes no movimento de todos os elos da cadeia em relação ao elo escolhido para ser o elo fixo. Esses mecanismos são mostrados na Fig. 2.6 e são conhecidos como mecanismo de Watt I e de Watt II.

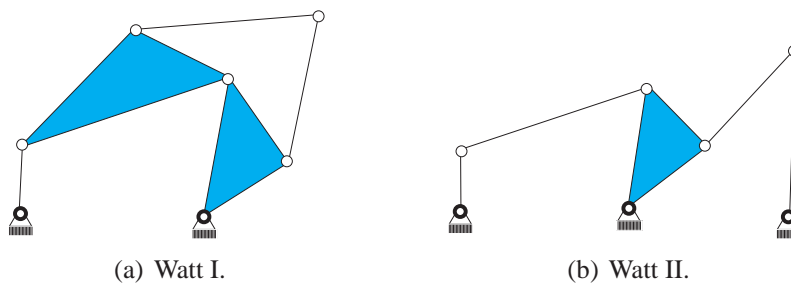


Figura 2.6: Mecanismos de Watt.

A cadeia da Fig. 2.5(b) é conhecida como cadeia cinemática de Stephenson e possui três inversões. Essas inversões são mostradas na Fig. 2.6 e são conhecidas como mecanismo de Stephenson I, de Stephenson II e de Stephenson III.

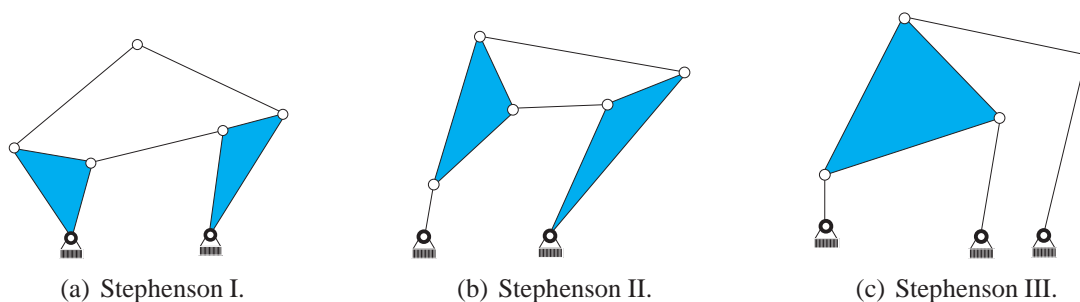


Figura 2.7: Mecanismos de Stephenson.

No capítulo 4 será apresentado um novo método para enumeração de todos os mecanismos que uma cadeia cinemática pode originar usando ferramentas da teoria de grupos.

## 2.4 Representações de cadeias cinemáticas e mecanismos

Existem três maneiras de representar cadeias cinemáticas e mecanismos. Por simplicidade, assume-se que todas as juntas são simples. Uma junta múltipla será substituída por um conjunto de juntas simples equivalentes. Por exemplo, a junta universal mostrada na Fig. 2.1(g) na página 9 é substituída por duas juntas rotativas (ver Fig. 2.1(a) na página 9) em série.

### 2.4.1 Representação esquemática funcional

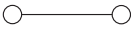

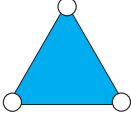
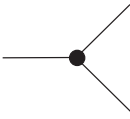
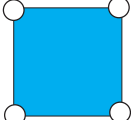
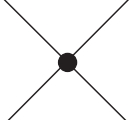
Consiste na representação mais familiar de um corte seccional de um mecanismo. Eixos, engrenagens e outros elementos do mecanismo são desenhados realmente como são. Para maior clareza e simplicidade, somente os elementos funcionais que são essenciais à estrutura do mecanismo são mostrados. Veja as figuras da coluna 1 da Tab. 2.3.

### 2.4.2 Representação estrutural

Na representação estrutural, cada elo do mecanismo é representado por um polígono cujos os vértices representam as juntas. Especificamente, um elo binário é representado por uma linha com os dois vértices nas pontas, um elo ternário é representado por um triângulo hachurado, um elo quaternário é representado por um quadrado hachurado e assim por diante, como mostra a coluna 2 na Tab. 2.2.

A representação estrutural de um mecanismo é definida similarmente, apenas destaca-se o polígono que representa o elo fixo. Veja as figuras da coluna 2 da Tab. 2.3.

Tabela 2.2: Representação dos elos.

Tipo de elo	Estrutura cinemática	Grafo
Elo binário		
Elo ternário		
Elo quaternário		

### 2.4.3 Representação por grafo

Como uma cadeia cinemática é uma coleção de elos e juntas, as cadeias podem ser representadas de uma forma mais abstrata usando grafos, veja a Tab. 2.3. Uma cadeia cinemática pode ser representada de forma unívoca por um grafo cujos vértices correspondem aos elos da cadeia cinemática e as arestas correspondem às juntas da cadeia cinemática. Veja a correspondência nas Tabs. 2.2 e 2.3.

O grafo de um mecanismo é definido similarmente, apenas destaca-se o vértice que representa o elo fixo usando círculos concêntricos, cor ou rótulo.

A representação de cadeias cinemáticas e mecanismos por grafos incluem várias vantagens:

- Muitas propriedades dos grafos são diretamente aplicáveis na teoria de mecanismos. Por exemplo, a equação de Euler pode ser aplicada para obter a mobilidade do mecanismo.
- A estrutura topológica de um mecanismo pode ser unicamente identificada.
- A utilização de bibliotecas de algoritmos de grafos para enumeração e análise de cadeias cinemáticas e mecanismos.
- As formas de representação de grafos podem ser utilizadas para armazenar grandes atlas de cadeias cinemáticas em pouco espaço. Por exemplo, a representação de grafos nos formatos graph6 e sparce6 (ver Apêndice A).

A Tab. 2.4 resume a correspondência entre grafos e cadeias cinemáticas (ou mecanismos).

Nesta dissertação, a distinção entre uma cadeia cinemática e seu grafo associado é ignorada. Neste sentido, no restante do texto, os termos vértices e elos, e arestas e juntas serão usados indistintamente.

Tabela 2.3: Representação de cadeias cinemáticas e mecanismos.

Representação funcional	Representação estrutural	Representação por grafo
<p>Motor de Watt</p>		
<p>Trem de engrenagens</p>		

Tabela 2.4: Correspondência entre grafos e cadeias cinemáticas.

Grafo	Símbolo	Cadeia Cinemática	Símbolo
Número de vértices	$V$	Número de elos	$n$
Número de arestas	$E$	Número de juntas	$j$
Número de vértices de grau $i$	$V_i$	Número de elos com $i$ juntas	$n_i$
Grau do vértice $i$	$D_i$	Número de juntas sobre o elo $i$	$d_i$
Número de circuitos	$L$	Número de circuitos	$v$



## 2.5 Mobilidade ou graus de liberdade

A mobilidade é um dos parâmetros mais importantes de uma cadeia cinemática.

**Definição 1.** A mobilidade ou número de graus de liberdade (DoF) de uma cadeia cinemática é o número de parâmetros independentes necessários para especificar completamente a configuração da cadeia cinemática no espaço, com respeito ao elo escolhido como referência.

Exceto para alguns casos, a mobilidade de uma cadeia cinemática, com  $n$  elos e  $j$  juntas pode ser calculada pelo critério geral da mobilidade

$$M = \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i. \quad (2.1)$$

onde  $\lambda$  é a ordem do sistema de helicóides (seção 2.5.2) e  $f_i$  representa os graus de movimento relativo permitidos pela junta  $i$ . A equação 2.1 é também conhecida como *critério de mobilidade de Grübler ou de Kutzbach* [Mruthyunjaya 2003, Tsai 2001].

Par simplificar o problema da síntese estrutural de cadeias cinemáticas pode-se considerar que todas as juntas são simples, assim a equação da mobilidade 2.1 se torna

$$M = \lambda(n - j - 1) + j. \quad (2.2)$$

Em termos de grafos, a equação 2.2 pode ser reescrita da seguinte forma

$$M = \lambda(V - E - 1) + E \quad (2.3)$$

onde a correspondência entre grafos e mecanismos foi discutida na Tab. 2.4.

Através de indução matemática é possível mostrar que, para uma cadeia cinemática que contém  $v$  circuitos, a diferença entre o número de juntas  $j$  e o número de elos  $n$  é  $v - 1$ , ou seja

$$v = j - n + 1. \quad (2.4)$$

A equação 2.4 é conhecida como *equação de Euler*. Combinando as equações 2.2 e 2.4, obtemos a equação

$$M = j - \lambda v \quad (2.5)$$

conhecida como *critério de mobilidade do circuito* [Mruthyunjaya 2003, Tsai 2001].

### 2.5.1 Tipos de mobilidade

Uma cadeia cinemática pode apresentar três tipos de mobilidade [Sunkari e Schmidt 2005, Lee e Yoon 1996, Agrawal e Rao 1987]:

1. *Mobilidade fracionada*: Uma cadeia cinemática tem mobilidade fracionada se a eliminação de um único elemento da cadeia (elo ou junta) divide a cadeia em duas cadeias cinemáticas desconectadas. As cadeias com mobilidade fracionada serão discutidas na seção 3.2 página 32.
2. *Mobilidade parcial*: Uma cadeia cinemática com  $M > 0$  tem mobilidade parcial se ela possui no mínimo uma subcadeia com  $M'$  tal que  $0 \leq M' < M$ .
3. *Mobilidade total*: Uma cadeia cinemática com  $M > 0$  tem mobilidade total se todas as suas subcadeias possuem  $M' \geq M$ .

### 2.5.2 Teoria de helicóides

A teoria de helicóides é fundamentada em dois teoremas: o teorema de Mozzi e o teorema de Poinot [Martins 2002, Erthal 2007].

Segundo o Teorema de Mozzi, é sempre possível determinar uma reta ao longo da qual as velocidades de rotação e translação de um corpo rígido podem ser direcionadas, a reta é conhecida por eixo de Mozzi. E segundo o Teorema de Poinot, é sempre possível determinar uma reta ao longo da qual a força e o momento resultantes sobre o corpo rígido podem ser direcionados, a reta é conhecida por eixo de Poinot [Martins 2002, Erthal 2007].

Um helicóide  $\$$  é uma entidade geométrica composta por uma reta e um número  $h$  denominado passo do helicóide. Assim, uma quantidade física que requer uma linha de ação e um passo pode ser representada por um helicóide, é o caso dos movimentos e forças embasados pelos Teoremas de Mozzi e Poinot. Helicóides que representam velocidades são chamados de heligiros e helicóides que representam forças são chamados de heliforças.

Os helicóides são representados nas coordenadas da reta de Plücker. A reta de Plücker é representada pelo vetor

$$\$ = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

onde  $u$  representa a direção da reta e  $v = r \times u$  o momento desta reta em relação a um ponto

qualquer P, veja a Fig. 2.8(a). Nesta representação, um helicóide possui a seguinte notação

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} s \\ s_0 \times s + hs \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

onde  $s$  é o vetor unitário na direção do helicóide,  $s_0$  é o vetor posição de um ponto sobre o eixo do helicóide e  $h$  é o passo do helicóide, ver Fig. 2.8(b).

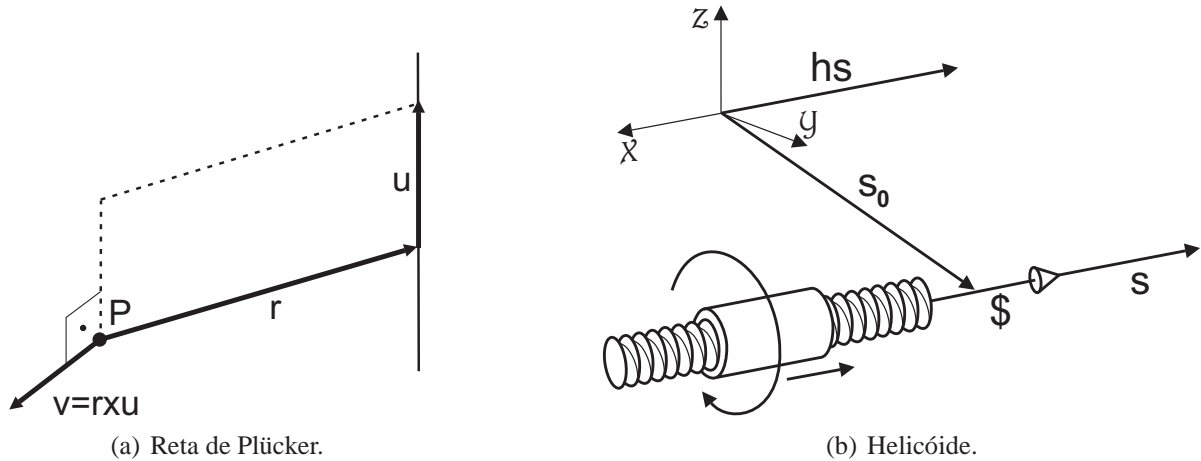


Figura 2.8: Representações geométricas.

O passo do helicóide está relacionado com as quantidades ao longo do eixo instantâneo. Para heligiros, o passo é dado por

$$h = v_t / \omega$$

onde  $v_t$  representa a velocidade de translação e  $\omega$  a velocidade de angular. Para heliforças, o passo é dado por

$$h = C / F$$

onde  $C$  representa o momento e  $F$  a força.

Em robótica, em geral, são utilizadas juntas rotativas e prismáticas. Juntas rotativas não possuem a velocidade de translação ( $v_t = 0$ ) e juntas prismáticas não possuem a velocidade angular ( $\omega = 0$ ). Assim, rotações são representadas por

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \omega \\ s_0 \times \omega \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

e translações são representadas por

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_t \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

De acordo com equação 2.6, no caso mais geral, os helicóides são formados por um vetor

com 6 coordenadas independentes ( $\lambda = 6$ ). Assim, os heligiros e heliforças são representados pelos helicóides

$$\begin{matrix} \$ = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} & e & \$ = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \end{matrix}$$

respectivamente.

A ordem  $\lambda$  define quais coordenadas são diferentes de zero, para o caso tridimensional ( $\lambda = 6$ ) o sistema é dito ser um sistema-6 ou sistema geral. Para o caso bidimensional ( $\lambda = 3$ ), os movimentos e as forças ocorrem no plano  $xy$ . Deste modo somente as coordenadas  $\omega_z$ ,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $M_z$ ,  $F_x$  e  $F_y$  são diferentes de zero e portanto os heligiros e heliforças são representados respectivamente por

$$\begin{matrix} \$ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \\ v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} & e & \$ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \\ F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} . \end{matrix}$$

Eliminando as coordenadas redundantes, tem-se um problema de ordem mínima  $\lambda = 3$  ou um sistema-3, em que os helicóides são representados por

$$\begin{matrix} \$ = \begin{bmatrix} \omega_z \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} & e & \$ = \begin{bmatrix} M_z \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} . \end{matrix}$$

Os sistemas de helicóides mais utilizados em robótica e em mecanismos são  $\lambda = 3$ , para movimentos planos e esféricos [Freudenstein e Maki 1984, Mayourian e Freudenstien 1984, Tsai 2001] e  $\lambda = 6$ , para movimentos espaciais [Tsai 2001, Tischler 1995]. O sistema de helicóides  $\lambda = 2$  é utilizado para trens de engrenagens por Tischler *et al.* (2001) e Tsai (2001). Tischler *et al.* (1995) enumera conjuntos mínimos de cadeias cinemáticas que operam no sistema de helicóides  $\lambda = 4$ .

Aplicações de diferentes sistemas de helicóides para projeto de robôs é descrita em Davidson e Hunt (2004). Para mais detalhes da teoria de helicóides consultar Hunt (1978) e Gibson a

Hunt (1988). A Tab. 2.5 mostra um resumo dos sistemas de helicóides.

Tabela 2.5: Sistemas de helicóides usados em robótica e em mecanismos.

$\lambda$	Nome	Aplicação
2	<i>sistema-2</i>	Trens de engrenagens
3	<i>sistema-3</i>	Movimentos planos gerais e movimentos esféricos
4	<i>sistema-4</i>	Schönflies motion <i>i.e.</i> movimentos do garçom
5	<i>sistema-5</i>	Movimento espacial restrito
6	<i>sistema-6</i>	Movimentos espaciais gerais

## 2.6 Cadeias cinemáticas degeneradas

A mobilidade associada com qualquer circuito da cadeia cinemática deve ser no mínimo igual a um para garantir que nenhuma parte da cadeia forme uma estrutura rígida, *i.e.*  $M \leq 0$ . Isso significa que deve haver um número suficiente de elos e juntas em cada circuito para que a cadeia não forme uma estrutura rígida. Substituindo  $M \geq 1$  e  $v = 1$  na equação de 2.5 temos:

$$j \geq \lambda + 1. \quad (2.10)$$

Logo, o número de juntas em cada circuito para que a cadeia não forme uma estrutura rígida é quatro para o caso plano ( $\lambda = 3$ ) e sete para o caso espacial ( $\lambda = 6$ ). Por exemplo, a Fig. 2.9(a) mostra uma cadeia plana com  $M = 0$  conhecida como treliça e a Fig. 2.9(b) mostra uma estrutura rígida de 5 elos e dois circuitos.

Uma cadeia cinemática degenerada é uma cadeia cinemática com  $M > 0$ , onde no mínimo uma subcadeia biconexa possui mobilidade  $M' \leq 0$ . Por exemplo, considere a cadeia da Fig. 2.9(c). A subcadeia formada pelos elos 1-2-3-4-5-6-7-8-9 possui  $M = 0$ , assim esses elos atuam como uma estrutura rígida.

As cadeias degeneradas não são de interesse de estudo em cinemática. Uma cadeia cinemática que contém uma subcadeia degenerada deve ser descartada de considerações futuras pois ela pode sempre ser substituída por uma cadeia cinemática equivalente com menos elos e juntas, *i.e.* por uma cadeia mais simples. Por exemplo, a cadeia cinemática da Fig. 2.9(c) pode ser substituída por uma cadeia mais simples como mostra a Fig. 2.10. Os elos 1-2-3-4-5-6-7-8-9

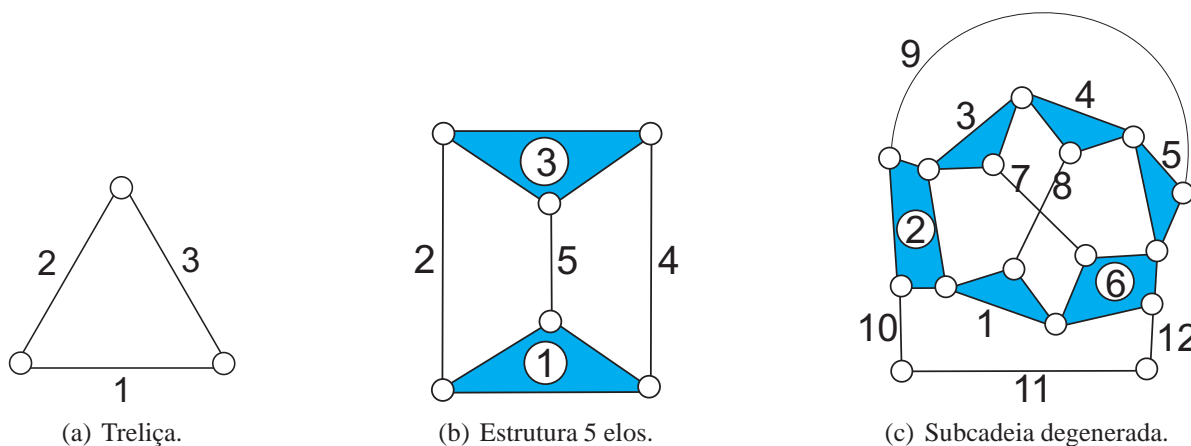


Figura 2.9: Cadeias degeneradas.

atuam como uma estrutura rígida e portanto podem ser substituídos por um único elo.

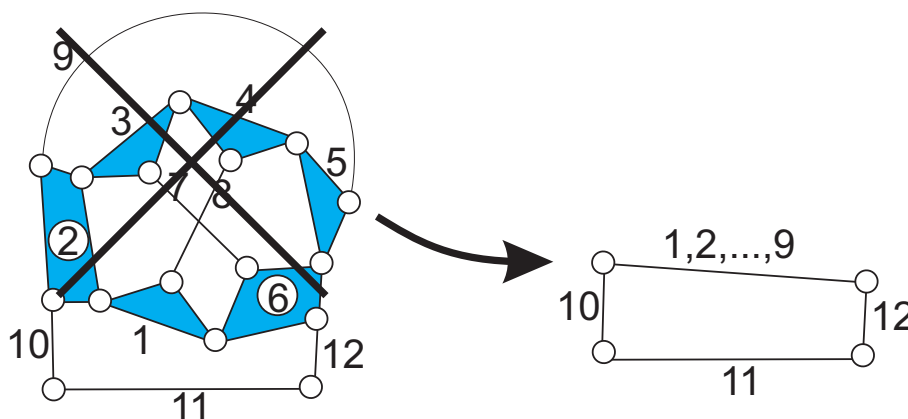


Figura 2.10: Substituição de uma subcadeia rígida ( $M=0$ ), transformando a cadeia original em uma cadeia mais simples.

Na síntese estrutural de cadeias cinemáticas existe o problema da geração de cadeias degeneradas as quais devem ser eliminadas em seguida.

## 2.7 Cadeias cinemáticas isomórficas

O maior problema que surge na síntese estrutural de cadeias cinemáticas é o de detectar possíveis isomorfismos (equivalência estrutural) entre as cadeias cinemáticas geradas. Duas cadeias cinemáticas (ou mecanismos) são isomórficas se elas possuem a mesma estrutura topológica. Em termos de grafos, existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices e arestas que preserva a incidência. Assim, é possível identificar um isomorfismo entre duas cadeias cinemáticas analisando os grafos associados.

A Fig. 2.11 mostra duas cadeias cinemática isomórficas. Perceba que é difícil identificar o isomorfismo estrutural por inspeção visual.

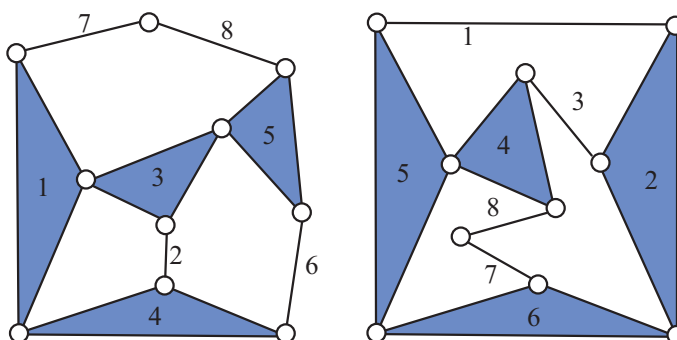


Figura 2.11: Cadeias cinemáticas isomórficas.

A identificação de isomorfismos em grafos, e consequentemente em cadeias cinemáticas, é um problema NP-Completo [Viana 1998, Tischler et al. 1995]. A geração de isomorfismos é um problema que ocorre em todos os métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas. Vários métodos para identificação de isomorfismos foram propostos mas nenhuma solução eficiente para este problema foi encontrada.

Uicker e Raicu (1975) sugeriram que o polinômio característico pode ser utilizado para um teste de isomorfismos. No entanto, se duas cadeias cinemáticas são isomórficas, é uma condição necessária mas não suficiente, que seus polinômios característicos sejam idênticos. Alguns contra-exemplos foram encontrados [Tischler et al. 1995, Mruthyunjaya 2003].

Ambekar e Agrawal (1987) sugeriram um método de identificação de isomorfismos chamado código ótimo (optimum code). O método envolve uma técnica para rotular os elos de uma cadeia cinemática para obter um texto de binários da parte superior da matriz de adjacência, excluindo os elementos da diagonal, de forma que transformado em decimal ele seja máximo (MAX code) ou mínimo (MIN code). Neste método o problema de testar isomorfismos é convertido em um problema de comparar códigos de duas cadeias cinemáticas. Se a cadeia cinemática possui  $n$  elos, o método requer  $n!$  permutações para obter o melhor código. Existe a necessidade de desenvolver uma heurística mais eficiente para a determinação do código ótimo [Tsai 2001, Mruthyunjaya 2003].

A Boost Graph Library [Boost C++ Libraries, Siek et al. 2002], que é uma biblioteca de algoritmos de grafos com acesso livre, fornece um teste de isomorfismos cujo complexidade de tempo no pior caso é  $O(|v|!)$ , onde  $v$  é o número de vértices do grafo.

### 3 *Síntese Estrutural de Cadeias Cinemáticas*

A síntese estrutural de cadeias cinemáticas é uma das divisões da síntese estrutural, ramo da cinemática dos mecanismos, e trata da enumeração de uma lista completa de cadeias cinemáticas que satisfazem as características de mobilidade. Vários métodos para enumeração de uma lista completa de cadeias cinemáticas foram propostos, no entanto, todos os métodos esbarram no problema de geração de cadeias cinemáticas isomórficas e degeneradas as quais devem ser identificadas e eliminadas o que requer um grande esforço computacional. A identificação de cadeias isomórficas e degeneradas são problemas complexos que estão entre a classe de problemas NP, problemas para os quais não existem algoritmos cujo tempo computacional é limitado por um polinômio. Devido aos problemas de isomorfismos e degeneracidades envolvidos na enumeração de uma lista completa de cadeias cinemáticas que atendem o critério de mobilidade, a síntese estrutural de cadeias cinemáticas é um problema ainda não resolvido em cinemática.

Neste capítulo, primeiramente, é feita uma revisão dos métodos clássicos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas encontrados na literatura. Em seguida, são identificados os tipos de fracionamento que ocorrem em cadeias cinemáticas e com base na questão do fracionamento, devido as diferenças nos resultados encontrados na literatura, são propostos três tipos de métodos para enumeração de cadeias cinemáticas; dois para enumeração de cadeias cinemáticas sem fracionamento, um para enumeração de cadeias cinemáticas com fracionamento e um novo método para enumeração exclusiva de cadeias cinemáticas fracionadas. Esses métodos são apresentados e, finalmente, os resultados são mostrados em tabelas e as diferenças são resolvidas. Novos resultados são obtidos.



## 3.1 Revisão dos métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas

A fase mais importante no projeto de mecanismos é a síntese estrutural de cadeias cinemáticas [Mruthyunjaya 2003].

Por volta de 1960, Crossley, Freudenstein, Dobrjanskyj e Woo introduziram a teoria dos grafos no estudo de cadeias cinemáticas [Crossley 1964, Dobrjanskyj e Freudenstein 1967, Freudenstein 1967, Woo 1967] *apud* [Mruthyunjaya 2003]. De acordo com o capítulo anterior, uma cadeia cinemática pode ser unicamente representada por um grafo cujos vértices correspondem aos elos e as arestas correspondem às juntas da cadeia cinemática. A Fig. 3.1(a) mostra a cadeia cinemática de Stephenson, a Fig. 3.1(b) mostra o grafo da cadeia de Stephenson e a Fig. 3.1(c) mostra a matriz de adjacência (ver definição no apêndice A) da cadeia de Stephenson. Com isso, o problema da síntese estrutural de cadeias cinemáticas foi reduzido a enumeração de grafos [Mruthyunjaya 2003] que, sem perda de generalidade, representam cadeias cinemáticas [Tischler et al. 1995].

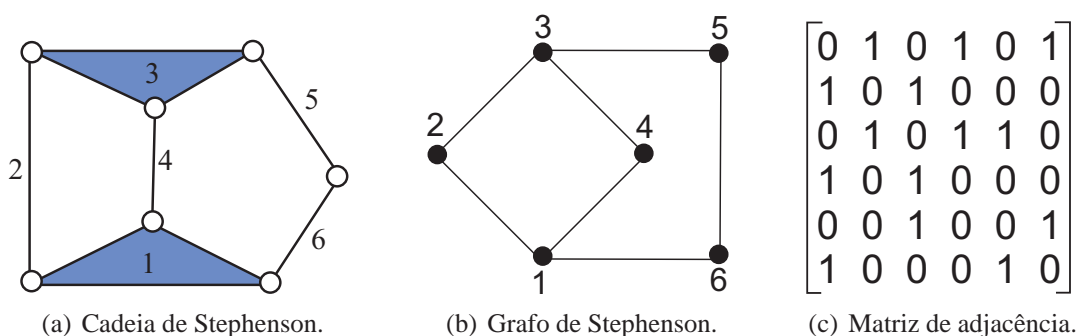


Figura 3.1: Representação de cadeias cinemáticas por grafos.

### 3.1.1 Distribuição dos elos

O primeiro passo comum para vários métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas é a determinação das possíveis distribuições de elos binários, ternários, quaternários, etc. que podem existir nas cadeias que satisfazem a equação da mobilidade. Cada distribuição de elos será denominada *partição*. As partições são soluções das seguintes equações:

$$n = n_2 + n_3 + n_4 + \dots \quad (3.1)$$

$$2j = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots \quad (3.2)$$

onde  $n_j$  é o número de elos com  $j$  juntas.

Outra maneira de determinar as partições é considerar a partição do inteiro  $e = 2j$ , que representa o número de pares cinemáticos, em  $n$  partes (elos). Por exemplo, a Tab. 3.1 mostra a partição de  $e = 2j = 24$  em 10 partes, que fornece todas as possíveis partições para formar cadeias cinemáticas planas, com dez elos e mobilidade três. Na Tab. 3.1 o número 2 representa elos binários, 3 elos ternários, e assim por diante.

Tabela 3.1: Possíveis partições de cadeias cinemáticas planas ( $\lambda = 3$ ) com 10 elos e  $M = 3$ .

Partição	Classificação dos elos									
1	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2
2	4	3	3	2	2	2	2	2	2	2
3	4	4	2	2	2	2	2	2	2	2
4	5	3	2	2	2	2	2	2	2	2
5	6	2	2	2	2	2	2	2	2	2

A Fig. 3.2 mostra os elos da partição 1 da Tab. 3.1, essa partição é formada por quatro elos ternários e seis elos binários.

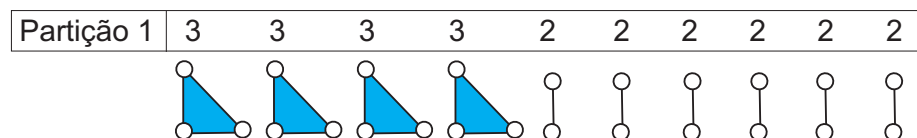


Figura 3.2: Partição envolvida na enumeração de de cadeias cinemáticas planas com 10 elos e  $M = 3$ .

Consideradas as partições, a etapa seguinte consiste em formar cadeias cinemáticas unindo os elos de cada partição com juntas de todas as maneiras possíveis, eliminar cadeias isomórficas e degeneradas e enumerar todas as cadeias geradas.

A seguir será feita uma revisão dos principais métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas encontrados na literatura.

### 3.1.2 Método baseado na notação de Franke

A notação de Franke é uma simplificação da representação de cadeias cinemáticas. Na notação de Franke cada elo poligonal é representado por um círculo com o um número dentro que corresponde aos lados do polígono, em seguida são introduzidas linhas entre os círculos representando a cadeia serial que conecta os dois elos poligonais. Cada linha recebe um número maior ou igual a zero, esse número é zero se não existir elo binário entre dois elos poligonais. A Fig. 3.3 ilustra a notação.

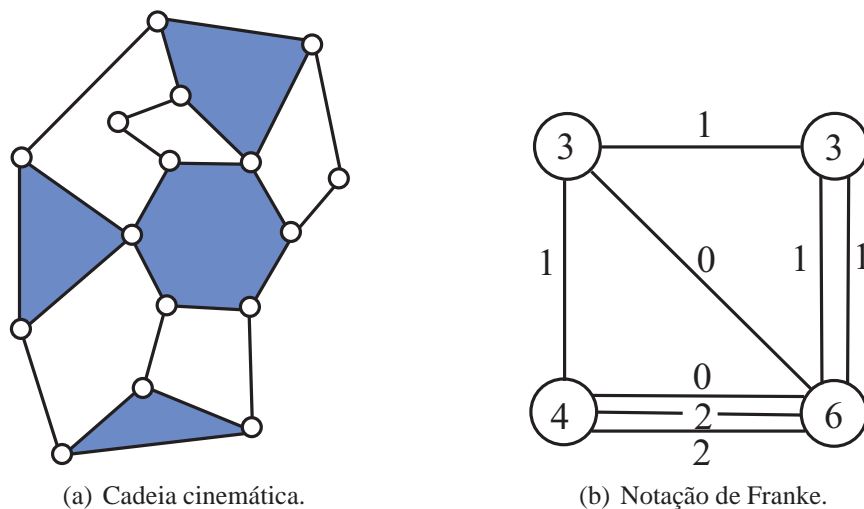


Figura 3.3: Representação de cadeias cinemáticas pela notação de Franke.

Davies e Crossley, Woo, e Soni, apresentaram um método de síntese estrutural de cadeias cinemáticas baseado na notação de Franke [Davies e Crossley 1966, Woo 1967, Soni 1971] *apud* [Tischler et al. 1995, Mruthyunjaya 2003]. Primeiramente, para cada partição, os elos poligonais são representados por círculos com o respectivo número associado. Em seguida, esses círculos são ligados por linhas de todas as maneiras possíveis obedecendo que o número de linhas incidentes em qualquer círculo seja igual ao número dentro do círculo. Identifica-se o número de elos binários ( $m$ ) na partição e todas as maneiras de distribuir  $m$  entre o número de linhas é considerado. As linhas representam os elos binários, que distribuídos de todas as maneiras possíveis complementam o método. Finalmente, cadeias isomórficas e degeneradas são eliminadas e as cadeias cinemáticas restantes, geradas pelo método, são armazenadas.

### 3.1.3 Geração de cadeias cinemáticas por agregação

Assur introduziu o conceito de grupos de Assur [Assur 1913] *apud* [Mruthyunjaya 2003]. Trata-se de uma cadeia cinemática que possui alguns elos livres e quando o grupo é conectado a uma base através de todos os seus elos livres tem-se a formação de uma estrutura rígida, *i.e.*  $M = 0$ . A Fig. 3.4 mostra alguns grupos de Assur.

Assur propôs que cadeias com complexidade maior (muitos elos) podem ser geradas adicionando cadeias simples (poucos elos). O fato é que a agregação de grupos de Assur aos elos de uma cadeia cinemática existente, não altera sua mobilidade. Por exemplo, o grupo de Assur da Fig. 3.4(b), quando adicionado ao mecanismo de quatro elos de diferentes maneiras, produz cadeias com oito elos mostradas na Fig. 3.5.

No entanto, o método produz um grande número de isomorfismos. Também é necessário

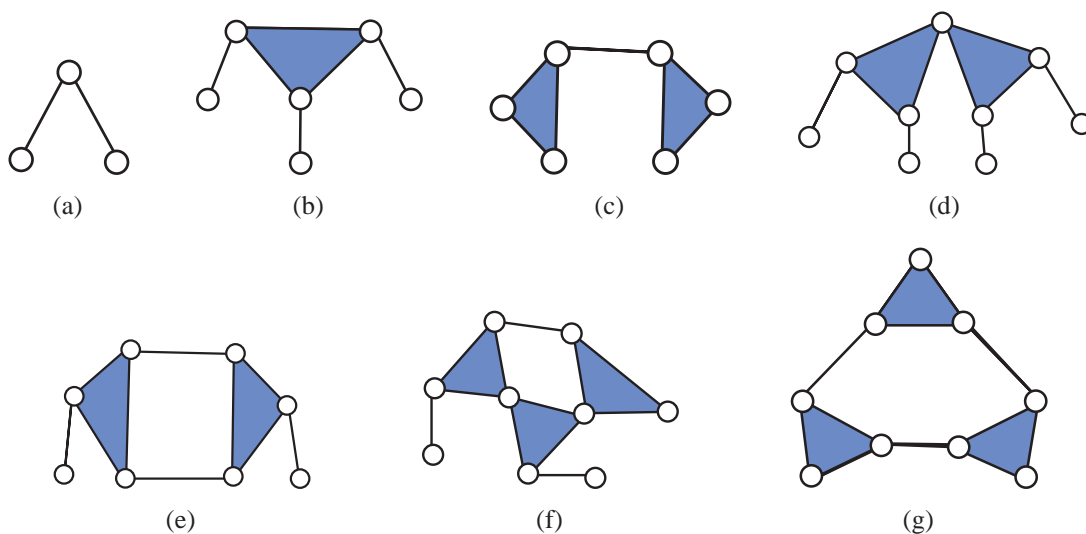


Figura 3.4: Grupos de Assur.

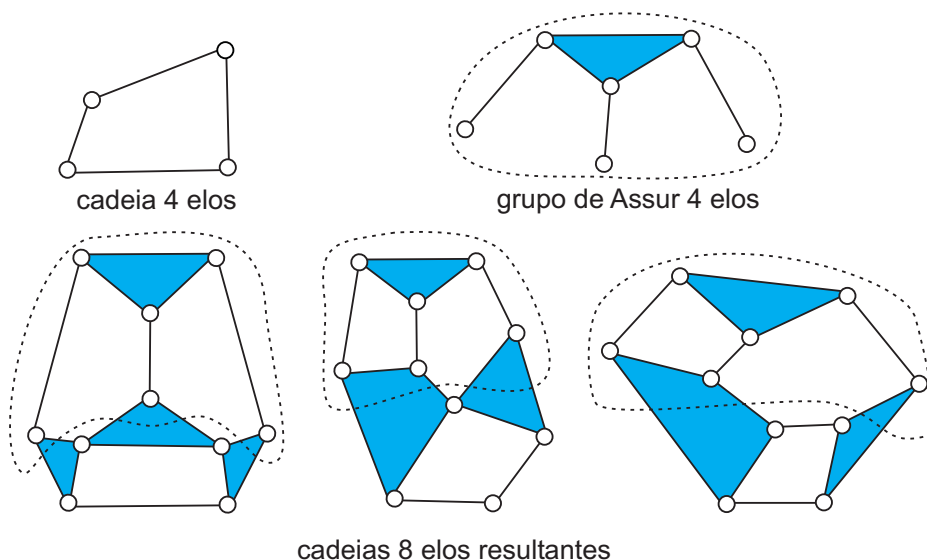


Figura 3.5: Agregação de grupos de Assur no mecanismo de quatro barras (elos).

ter disponível um atlas de cadeias com mobilidade  $M$  e número de elos menor que  $n$ , bem como um atlas completo dos grupos de Assur com  $(n - M - 1)$  elos.

### 3.1.4 Método de Heap

O método de Heap produz grafos com  $v$  vértices (elos) e  $e$  arestas (juntas) estendendo todos os grafos distintos com  $v - 1$  vértices e  $e - e_v$  arestas, onde  $e_v$  representa o grau do  $v$ -ésimo vértice. Com o propósito de gerar cadeias cinemáticas, todas as maneiras de unir o  $v$ -ésimo vértice usando  $e_v$  arestas são encontradas. O processo é repetido até que o número de vértices no grafo seja  $n$  e o número de arestas seja  $v$ .

Uma vantagem do método é que ele não necessita de um grafo inicial, os grafos mais complicados são construídos adicionando vértices. No entanto, o método gera uma grande quantidade de isomorfismos. O método de Heap foi modificado por Colbourn e Read (1979), tornando-se um algoritmo que produz poucos isomorfismos [Colbourn e Read 1979] *apud* [Tischler et al. 1995].

### 3.1.5 Método de Farrell

O método de Farrell impõe uma estrutura de árvore no processo de geração de cadeias cinemáticas. Na raiz da árvore está um conjunto de elos desconectados. As cadeias cinemáticas são gradualmente formadas conectando os elos de todas as maneiras possíveis. Enquanto houver possibilidades de conexão o número de ramos da árvore aumenta. Quando o processo acaba, as cadeias cinemáticas completas se encontram nas folhas da árvore. No entanto, cadeias isomórficas e degeneradas são geradas e devem ser eliminadas.

Durante o mestrado, foi implementado uma variação do método de Farrell para enumeração de cadeias cinemáticas evitando enumerar cadeias cinemáticas com fracionamento. Por isso ele será descrito com mais detalhes nesta seção e a variação desse método será apresentada na seção 3.3.1. O método de Farrell é resumido nos seguintes passos:

**Passo 1:** Cada elo na partição é rotulado com um número natural de acordo com seu grau (número de lados do polígono que o representa). O elo com maior grau recebe o número “1” e o elo com menor grau recebe o maior número, *i.e.* “n”. Dois elos não podem receber o mesmo número. Por exemplo, a partição 1 na Tab. 3.1 possui quatro elos ternários, os quais serão rotulados pelos naturais 1, 2, 3 e 4, e seis elos binários rotulados por 5, 6, 7, 8, 9, e 10. Neste estágio todos os elos estão desconectados, veja a Fig. 3.6.

**Passo 2:** O elo com o número mais baixo (1) é selecionado e os outros elos ( $\{2, 3, \dots, 10\}$ ) são agrupados de forma que, conectar qualquer membro do grupo ao elo 1, resulte numa forma idêntica parcialmente conectada. Para este exemplo existem dois grupos distintos; um grupo de elos ternários ( $\{2, 3, 4\}$ ) e um grupo de elos binários ( $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ). Conectando o elo 1 a qualquer membro do grupo  $\{2, 3, 4\}$  resultará em dois elos ternários conectados e conectando o elo 1 a qualquer membro do grupo  $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  resultará em um elo ternário conectado a um elo binário.

**Passo 3:** O número de conexões  $c$  necessárias para fazer com que o elo de maior grau seja todo conectado é determinado. Para este exemplo  $c = 3$ , pois o elo 1 é ternário e nenhuma conexão foi feita até este momento. Todas as diferentes maneiras de selecionar  $c = 3$  elos dos dois grupos do passo 2 ( $\{2, 3, 4\}$  e  $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ), para conectar ao elo 1 são encontradas. Existem

quatro maneiras: três elos ternários ( $\{2, 3, 4\}$ ), dois elos ternários e um elo binário ( $\{2, 3, 5\}$ ), um elo ternário e dois elos binários ( $\{2, 5, 6\}$ ), e três elos binários ( $\{5, 6, 7\}$ ). Observe que sempre foram escolhidos os elos de menor rótulo no grupo para formar as possíveis maneiras de conexão do elo 1 e conseqüentemente nos demais. As formas parciais que resultam de cada uma dessas conexões são mostradas na Fig. 3.6. Cada uma das quatro formas parciais representam um ramo na árvore.

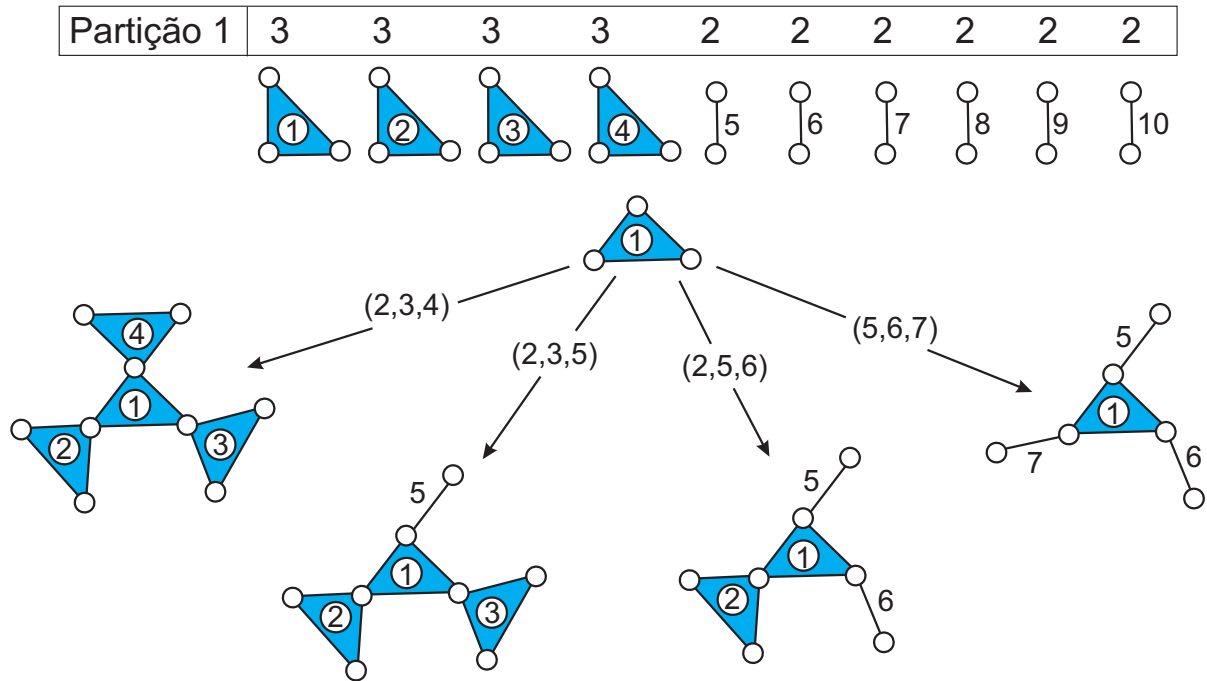


Figura 3.6: Exemplo do método de Farrell: conexões do elo 1.

**Passo 4:** Cada um dos ramos do passo 3, o elo de menor rótulo que não esteja todo conectado é selecionado para fazer as próximas conexões. A próxima forma parcial a ser processada (ramo da árvore) é a primeira da esquerda na Fig. 3.6 e o elo de menor rótulo é o elo 2. As Figs. 3.7 e 3.8 ilustram a exploração do segundo ramo que sai do elo 1.

**Passo 5:** Os passos 2, 3 e 4 são repetidos até que todos os elos em todos os ramos sejam conectados, *i.e.* todos os ramos da árvore são explorados.

**Passo 6:** A eliminação de cadeias degeneradas e isomórficas é feita e as cadeias restantes são armazenadas.

**Passo 7:** A próxima partição é selecionada e os passos anteriores são repetidos até que todas as partições sejam processadas.

Uma das desvantagens do método é que ele gera uma grande quantidade de cadeias isomórficas e degeneradas e a eliminação requer um grande esforço computacional.

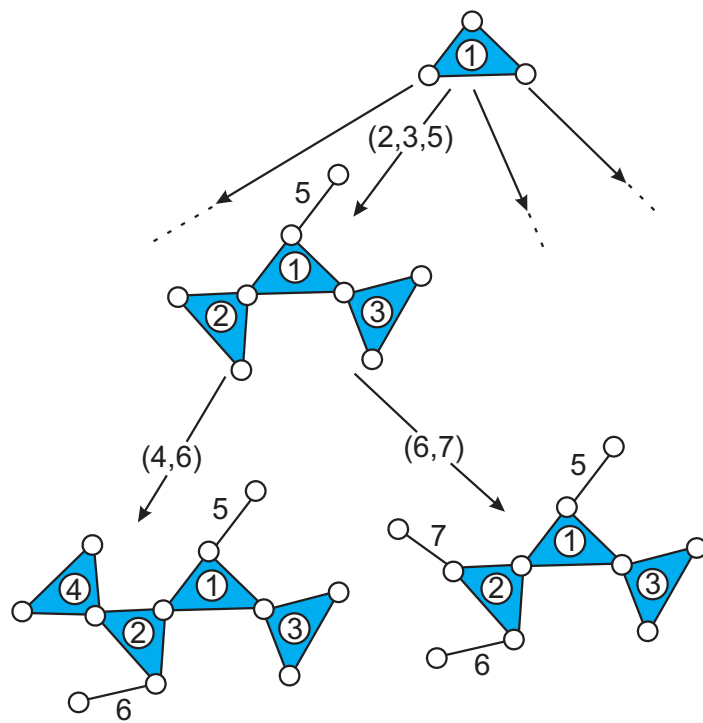


Figura 3.7: Exemplo do método de Farrel: exploração do ramo 2 que sai do elo 1.

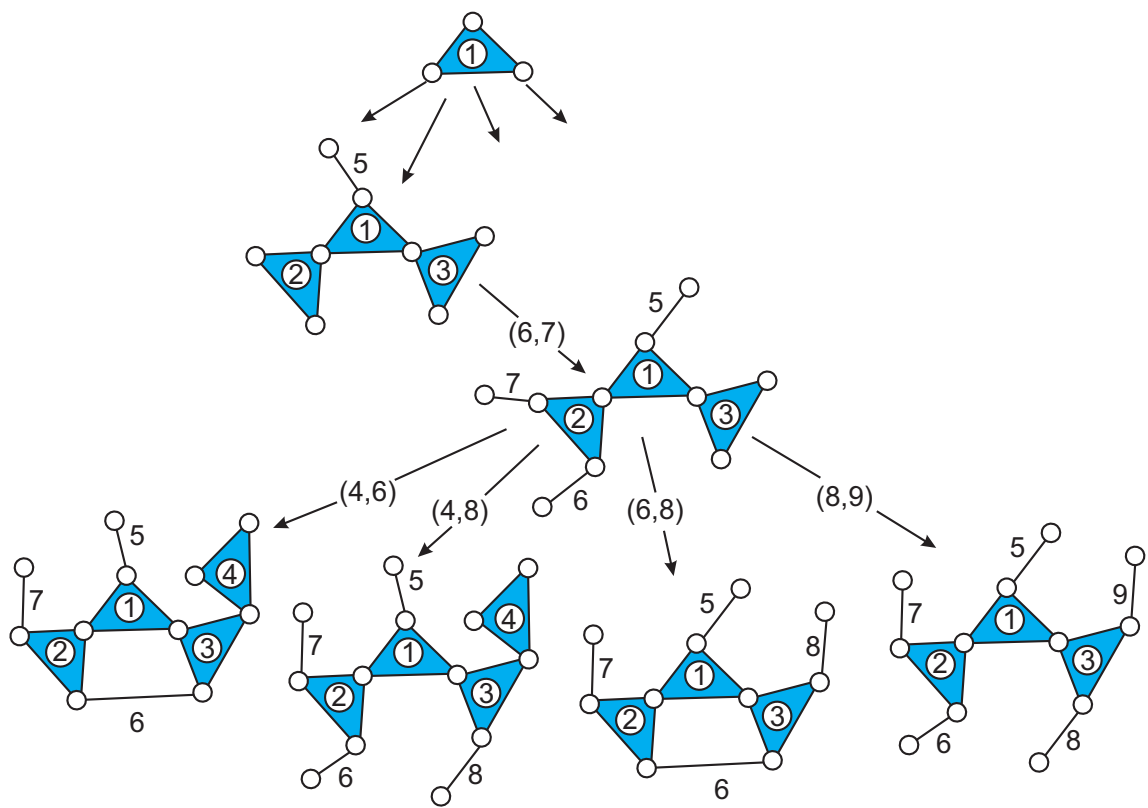


Figura 3.8: Exemplo do método de Farrel: continuação da exploração do ramo 2.

### 3.1.6 Método de Melbourne

Tischler *et al.* (1995), apresentaram um método de síntese estrutural de cadeias cinemáticas, chamado método de Melbourne. O método Melbourne é um melhoramento do método de Farrell. Tischler *et al.* (1995) introduziram um conjunto de quatro regras para reduzir o número de isomorfismos na lista de saída. Para aplicar essas regras eles introduziram os conceitos de corpos (elos) equivalentes, corpos simétricos, conexões próprias e conexões canônicas. O método foi aplicado para síntese estrutural de mecanismos alternativos para mãos robóticas [Tischler et al. 1995]. Um atlas com 98 cadeias cinemáticas planas com  $M = 3$  e  $v = 3$  foi apresentado no artigo Kinematic chains for robot hands I: Orderly number-synthesis [Tischler et al. 1995].

### 3.1.7 Método de Sunkari e Schmidt

Recentemente, Sunkari e Schmidt (2006) apresentaram um método de síntese estrutural de cadeias cinemáticas planas baseado em técnicas da teoria de grupos. Eles examinaram os algoritmos mais eficientes de geração exaustiva livre de isomorfismos e usaram o algoritmo de McKay (1990,1998) para geração de um representante de cada classe de isomorfismos em conjunto com algoritmos para testar cadeias degeneradas planas. Sunkari e Schmidt usaram o teste para identificar cadeias degeneradas de Lee e Yoon (1992) junto com um teste similar ao de Lee e Yoon que eles próprios desenvolveram [Sunkari e Schmidt 2005]. A base do método de Lee e Yoon é a eliminação de grupos de Assur para simplificar a estrutura da cadeia e depois calcular a mobilidade de todas as subcadeias. Esse método só identifica cadeias degeneradas planas.

Usando esta metodologia Sunkari e Schmidt (2006) obtiveram os resultados mais completos até o momento na enumeração de cadeias cinemáticas planas.

A eficiência computacional do método pode ser constatada em [Sunkari e Schmidt 2006], 318.162 cadeias cinemáticas planas ( $\lambda = 3$ ) com 14 elos e  $M = 1$  são geradas em 37.28s em um Pentium III 1.7GHz com 512MB RAM. A rapidez com que as cadeias são geradas é devido ao algoritmo de McKay, que gera um representante de cada classe de isomorfismos evitando o pós-processamento para eliminar isomorfismos.

### 3.1.8 Outros métodos

Mruthyunjaya (1979) apresentou um método baseado em transformação de cadeias binárias para síntese estrutural de cadeias cinemáticas com mobilidade negativa, zero e positiva. Mruthyun-



jaya (1979) apresentou o primeiro atlas de cadeias cinemáticas planas com  $M = 3$  e  $\nu = 3$ . Tuttle *et al.* [Tuttle et al. 1989, Tuttle 1996] enumeraram cadeias cinemáticas sistematicamente o que reduziu a necessidade de testar isomorfismos. A teoria de grupos simétricos foi usada para eliminar formas isomórficas na geração de bases de cadeias cinemáticas.

## 3.2 Cadeias cinemáticas fracionadas e mobilidade

Uma cadeia cinemática é classificada como fracionada se a eliminação de um único elemento da cadeia (elo ou junta) divide a cadeias em duas cadeias cinemáticas desconectadas, caso contrário a cadeia é não fracionada.

O fracionamento que ocorre em cadeias cinemáticas é classificado em três tipos: fracionamento de elo, fracionamento de junta e fracionamento em cadeias híbridas. Esses três tipos serão considerados separadamente nas seções 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3 respectivamente.

A principal contribuição desta seção é a aplicação sistemática da biconectividade da teoria de grafos, para identificar o tipo de fracionamento que ocorre em cadeias cinemáticas, que são representadas por grafos, de forma algorítmica. Componentes biconexos de um grafo são formados por seus subgrafos máximos biconexos (consultar apêndice A). Belfiore e Di Benedetto (2000) introduziram o conceito de biconectividade para analisar a conectividade em cadeias cinemáticas.

### 3.2.1 Fracionamento de elo

Uma cadeia cinemática com fracionamento de elo, contém um elo que divide a cadeia em duas cadeias fechadas e independentes. Um exemplo de cadeia com fracionamento de elo é mostrado na Fig. 3.9(a).

Para apresentar fracionamento de elo uma cadeia cinemática deve ter no mínimo dois circuitos independentes e mobilidade maior ou igual a dois, *i.e.*  $M \geq 2$  [Tischler et al. 1995].

Uma maneira de identificar o fracionamento de elo e o número de elos fracionados de uma cadeia cinemática de forma algorítmica é utilizar conceitos da teoria de grafos. Os conceitos utilizados são componentes biconexos e vértice de corte, ver definições no apêndice A.

**Definição 2.** O grau de fracionamento de elo ( $\phi$ ) é igual ao número de componentes biconexos ( $\beta$ ) menos um, ou seja,

$$\phi = \beta - 1. \quad (3.3)$$

**Definição 3.** O número de elos fracionados ( $\xi$ ) é igual ao número de vértices de corte.

**Exemplo 1.** A Fig. 3.9(a) mostra uma cadeia cinemática plana com três circuitos e  $M = 3$ . A cadeia cinemática apresenta um fracionamento de elo conforme destaque na figura. A Fig. 3.9(b) mostra os componentes biconexos do grafo associado a cadeia da Fig. 3.9(a). Pela Fig. 3.9(b) é possível ver que existem dois componentes biconexos e um vértice de corte. Assim, de acordo com a equação 3.3 o grau de fracionamento é igual a 1 ( $\phi = 1$ ) e o número de elos fracionados é igual a 1 ( $\xi = 1$ ). O elo que origina o fracionamento está associado com o vértice de corte do grafo, ver Fig. 3.9(b).

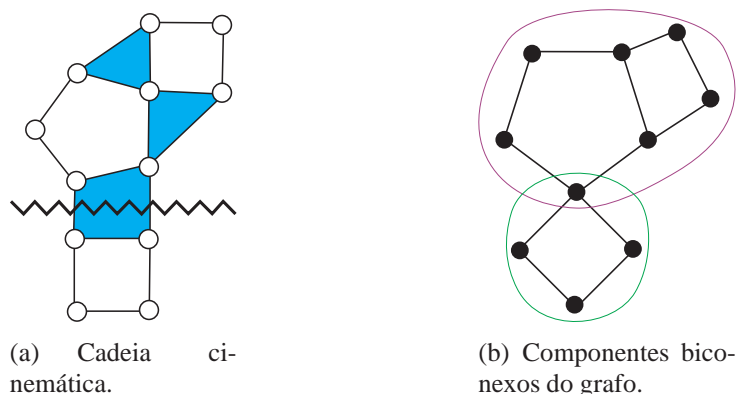


Figura 3.9: Identificação do fracionamento de elo.

### 3.2.2 Fracionamento de junta

Uma cadeia cinemática com fracionamento de junta contém uma junta cuja remoção (ou desconexão) divide a cadeia em duas subcadeias fechadas. Um exemplo de cadeia com fracionamento de junta é mostrado na Fig. 3.10(a).

Para apresentar fracionamento de junta uma cadeia cinemática deve ter no mínimo dois circuitos independentes e mobilidade maior ou igual a três, *i.e.*  $M \geq 3$  [Tischler et al. 1995]. Quando uma junta fracionante é removida a mobilidade combinada das duas cadeias resultantes é  $M - 1$  [Tischler et al. 1995].

Um fracionamento de junta pode ser entendido como dois fracionamentos de elo como mostra o destaque da Fig. 3.10(a). Em termos de grafos, o fracionamento de junta é identificado quando um componente biconexo do grafo associado possui uma “estrutura simples” da forma vértice-aresta-vértice, veja o detalhe da Fig. 3.10(b).

**Exemplo 2.** Para a cadeia cinemática da Fig. 3.10(a), pela equação 3.3 são identificados dois fracionamentos de elo ( $\phi = 2$ ) e pela estrutura dos componentes biconexos identifica-se uma estrutura da forma vértice-aresta-vértice, o que caracteriza um fracionamento de junta.

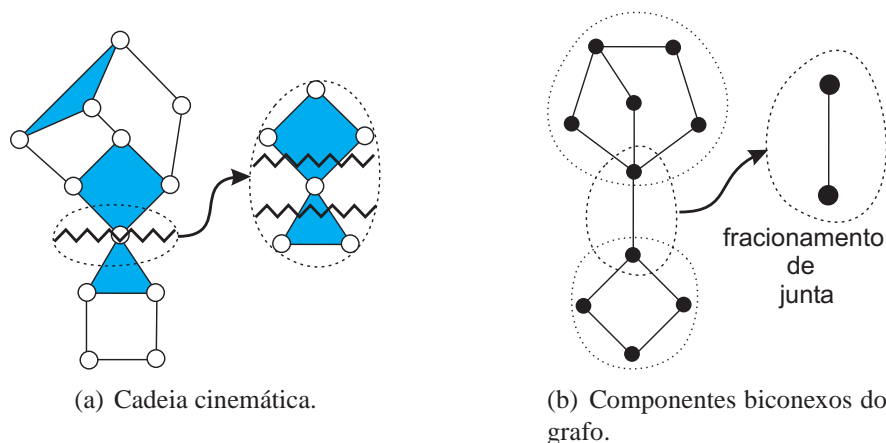


Figura 3.10: Identificação do fracionamento de junta.

### 3.2.3 Fracionamento em cadeias híbridas

Quando a mobilidade de uma cadeia cinemática é  $M \geq 4$ , formas mais complicadas de fracionamento podem ocorrer, incluindo não somente combinações de fracionamento de elo e de junta mas também fracionamento em cadeias híbridas.

A Fig. 3.11(a) mostra uma cadeia cinemática com  $M=4$  cuja eliminação da junta fracionante em destaque resulta em duas cadeias: uma fechada e uma híbrida. Em termos de grafos, o fracionamento em cadeias híbridas é identificado quando existem pelo menos dois componentes biconexos simples em cadeia com interseção, como mostra o detalhe na Fig. 3.11(b).

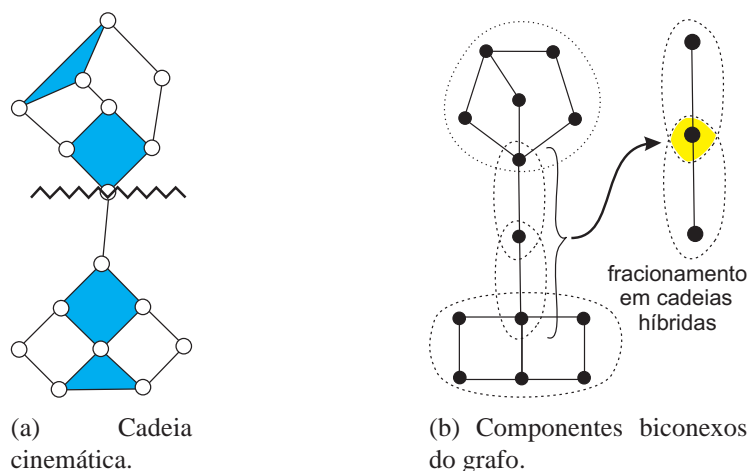


Figura 3.11: Identificação do fracionamento em cadeias híbridas.

A Fig. 3.12(a) mostra uma cadeia com  $M=5$  cuja eliminação da junta fracionante em destaque resulta em duas cadeias híbridas. A Fig. 3.12(b) mostra os componentes biconexos do grafo associado.

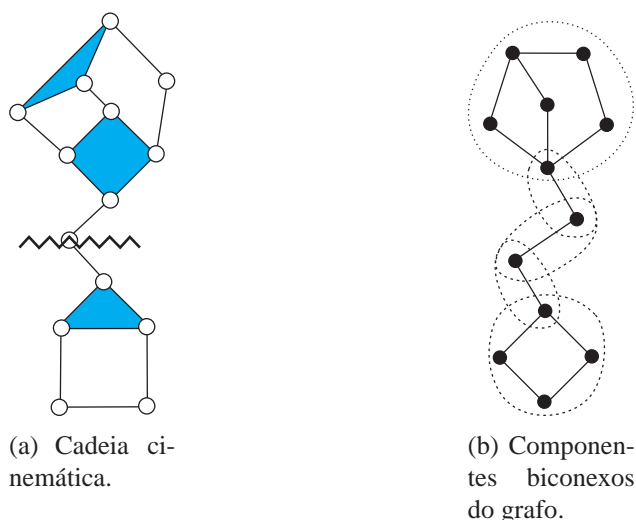


Figura 3.12: Identificação do fracionamento em cadeias híbridas.

### 3.3 Métodos propostos

Em vista das diferenças nos resultados de enumeração de cadeias cinemáticas encontrados na literatura, devido à questão do fracionamento [Sunkari e Schmidt 2006, Mruthyunjaya 2003, Tischler et al. 1995], foram desenvolvidos três tipos de métodos para enumeração de cadeias cinemáticas:

1. Geração de cadeias cinemáticas sem fracionamento.
2. Geração de cadeias cinemáticas com fracionamento.
3. Geração exclusiva de cadeias cinemáticas com fracionamento.

Os métodos serão apresentados a seguir. O método de Sunkari e Schmidt (ver seção 3.1.7 na página 31) foi aprimorado para gerar cadeias sem fracionamento e com fracionamento. Para a geração de cadeias cinemáticas sem fracionamento ele será chamado de *variação do método de Sunkari e Schmidt I* e para geração de cadeias cinemáticas com fracionamento ele será chamado de *variação do método de Sunkari e Schmidt II*.

#### 3.3.1 Geração de cadeias cinemáticas sem fracionamento

Para aplicações onde as cadeias cinemáticas fracionadas são degeneradas, *i.e.* não atendem aos requisitos do projeto devendo ser eliminadas posteriormente, foram implementados dois métodos: uma variação do método de Farrell e uma variação do método de Sunkari e Schmidt que serão descritos a seguir.

### Varição do método de Farrell

O objetivo desta variação é evitar a geração de cadeias cinemáticas fracionadas [Simoni e Martins 2007]. O método foi implementado em C++ usando grafos como estrutura de dados. O método impõe uma estrutura de árvore no processo de geração similar ao método de Farrell discutido na seção 3.1.5. A Fig. 3.13 ilustra a estrutura do método para a partição 1 da Tab. 3.1. A exploração dos ramos da árvore é feita em largura.

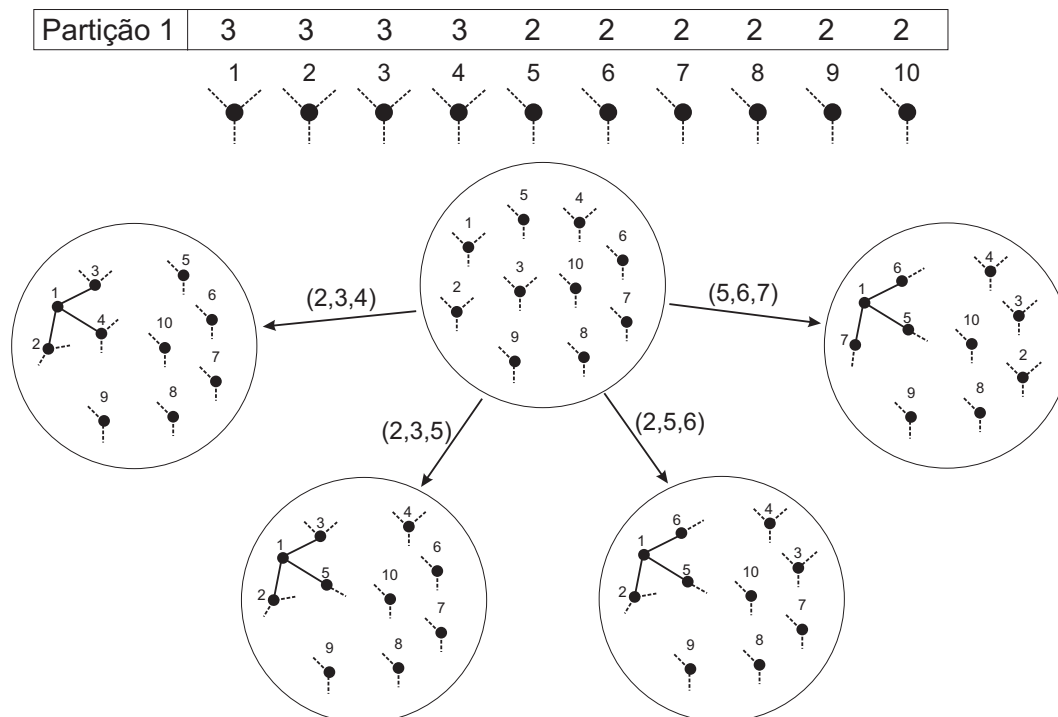


Figura 3.13: Estrutura da variação do método de Farrell.

A entrada do algoritmo é o número de vértices, os quais representam os elos da cadeia, e o grau de cada vértice os quais representam os elementos do par cinemático. Os vértices são ordenados de forma decrescente de grau e rotulados com naturais progressivos. O grafo na raiz da árvore é formado por um conjunto de vértices desconectados (ver Fig. 3.13). Combinações dos graus dos vértices são feitas e arestas são introduzidas de acordo com o rótulo de cada vértice, obedecendo a sequência discutida nos passos do método de Farrell na seção 3.1.5. O processo de adicionar arestas é repetido até completar o grau de todos os vértices.

No processo de geração, se um grafo possui um subgrafo com todos os graus dos vértices completos exceto um deles, esse grafo não gerará mais filhos porque neste caso os filhos originarão cadeias cinemáticas fracionadas:

- se o subgrafo possui apenas um vértice com grau 1 livre, seus filhos originarão cadeias

cinemáticas com fracionamento de elo como mostra a Fig. 3.14;

- se o subgrafo possui apenas um vértice com grau maior que 1 livre, seus filhos originarão cadeias cinemáticas com fracionamento de junta como mostra a Fig. 3.15.

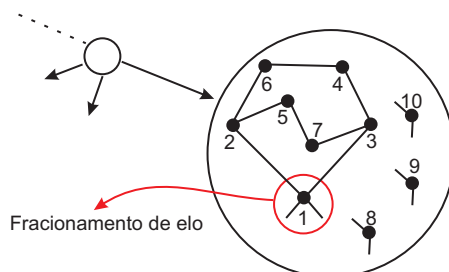


Figura 3.14: Grafo eliminado, evitando fracionamento de elo.

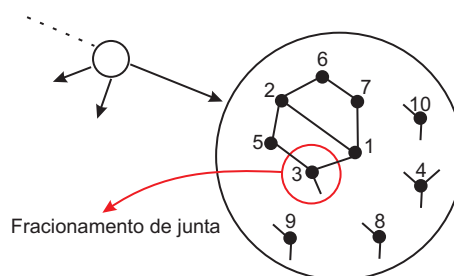


Figura 3.15: Grafo eliminado, evitando fracionamento de junta.

Em alguns casos excepcionais, grafos que originam cadeias fracionadas são gerados nas folhas da árvore. Neste caso foi utilizado o teste da biconectividade para eliminá-los. Assim, a geração de cadeias cinemáticas fracionadas é evitada. Nos grafos das folhas da árvore é necessário fazer um teste de isomorfismos. O teste de isomorfismos que o algoritmo utiliza é da Boost Graph Library [Boost C++ Libraries, Siek et al. 2002] cuja complexidade de tempo no pior caso é  $O(v!)$ . Os grafos degenerados são eliminados pelo teste de Martins e Carboni (2006). Em seguida os grafos são armazenados no formato de matriz de adjacência.

Uma das desvantagens do método proposto é que ele gera uma grande quantidade de grafos isomórficos e degenerados os quais devem ser eliminados o que requer um grande esforço computacional. Lembrando que o problema de geração de isomorfismos é intrínseco do processo.

O pseudocódigo da implementação da variação do método de Farrell é apresentado no algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1** Variação do método de Farrell.

---

**1 - Entrada:**

- Número de vértices rotulados e com a informação do grau;
- Nó raiz da árvore com um grafo com todos os vértices desconectados, rotulados e com informação do grau;

**2 - Geração de grafos:**

**enquanto** {Existir nó da árvore tal que o grafo do nó apresente algum vértice com grau livre}

**faça** (explore os nós da árvore em largura)

- Determine o grau livre do vértice de menor rótulo, seja 'c' o valor desse grau livre e 'A' o vértice sendo explorado;
- Faça grupos dos vértices restantes que ainda possuem grau livre e com as mesmas características, sejam 'r' grupos distintos;
- Faça combinações de 'c' vértices tomados dos 'r' grupos de maneira à evitar repetições de vértices com as mesmas características não importando o rótulo, seja 'k' o número de combinações;
- A partir do nó da árvore sendo explorado insira 'k' nós filhos com cópia do grafo do nó pai, cada nó recebe a informação de uma das 'k' combinações;
- Insira 'c' arestas entre o vértice 'A' e os 'c' vértices identificados nas combinações;

**se** {Algum nó apresentar um subgrafo com todos os graus completos exceto um deles }

**então**

- Marque esse nó para que ele não gere mais filhos pois a partir desse nó os grafos gerados representarão cadeias cinemáticas fracionadas.

**fim se**

**fim enquanto**

**3 - Pós-processamento:**

- Rode um teste de isomorfismos nos grafos dos nós folhas da árvore e elimine os grafos isomórficos (por exemplo o teste de isomorfismos da Boost Graph Library [Boost C++ Libraries]);
- Rode um teste de para identificar grafos degenerados e elimine esses grafos (por exemplo o teste de Martins e Carboni (2006));

**4 - Saída:**

- Armazene os grafos restantes.
-

### Variação do método de Sunkari e Schmidt I

A variação do método de Sunkari e Schmidt (2006) consiste em utilizar o teste para identificar cadeias degeneradas de Martins e Carboni (2006), as quais são geradas pelo gerador de grafos de McKay (1990).

O gerador de grafos de McKay (1990) (*geng*), que é distribuído livremente junto com o pacote *gtools*, foi adaptado para gerar grafos que representam cadeias cinemáticas sem fracionamento, *i.e.* grafos biconexos. A utilização do programa *geng* elimina a necessidade de um pós-processamento para eliminar isomorfismos pois ele gera um representante de cada classe de isomorfismos. Existe a necessidade de um pós-processamento para eliminar grafos que representam cadeias degeneradas e para isso foi utilizado o teste proposto por Martins e Carboni (2006). O teste de Martins e Carboni (2006) identifica cadeias cinemáticas degeneradas que operam em qualquer sistema de helicóides pois individualiza e calcula a mobilidade de todas as subcadeias.

Usando este método foram enumeradas cadeias cinemáticas sem fracionamento com mobilidade  $1 \leq M \leq 6$  para vários sistemas de helicóides. Os resultados, a maioria inéditos, serão mostrados na Tab. 3.5 na página 52. O pseudocódigo da implementação da variação do método de Sunkari e Schmidt I é apresentado no algoritmo 2.

Os grafos, os quais representam cadeias cinemáticas, gerados pelo gerador de grafos do McKay foram armazenados no formato *graph6* (ver formatos no apêndice A ou em [McKay 1990]). 17.083 grafos com 15 vértices foram armazenados em 333,7 KB no formato *graph6* (texto 19 com caracteres) enquanto que no formato de matrizes de adjacência os mesmos 17.083 grafos ocupam 7,7 MB.

#### 3.3.2 Geração de cadeias cinemáticas com fracionamento

Tratadas como cadeias degeneradas por alguns métodos, as cadeias fracionadas não são geradas. As discrepâncias apontadas nas Tabs. 1-4 em Sunkari and Schmidt (2006) são devido à geração de cadeias com fracionamento por alguns métodos e sem fracionamento por outros.

Os métodos propostos na seção 3.3.1 não enumeram cadeias cinemáticas com fracionamento, eliminando esforços para geração quando as cadeias fracionadas não satisfazem os requisitos do projeto. Para os casos onde as cadeias fracionadas são candidatas com potencial, por exemplo em robôs híbridos [Belfiore e Benedetto 2000], o método de Sunkari e Schmidt (2006) foi aprimorado para gerar cadeias cinemáticas com fracionamento.



---

**Algoritmo 2** Variação do método de Sunkari e Schmidt I.

---

**1 - Entrada:**

- Número de vértices ( $V$ );
- Número de arestas ( $E$ );
- Dimensão do sistema de helicóides ( $\lambda$ ).

**2 - Roda o programa geng<sup>1</sup>:**

- Adaptado para gerar grafos biconexos, os quais representam cadeias sem fracionamento;
- Livre de triângulos para  $\lambda = 3$ , quadrados para  $\lambda = 4$ , e assim por diante. Assim, evita-se a geração de cadeias com subcadeias simples (*i.e.* com apenas um circuito) rígidas.;
- **Saída do geng:** Um conjunto de grafos.

**3 - Pós-processamento:**

- Rode um teste de para identificar grafos degenerados e elimine esses grafos (por exemplo o teste de Martins e Carboni (2006));

**4 - Saída:**

- Armazene os grafos restantes.
- 

**Variação do método de Sunkari e Schmidt II**

A variação do método de Sunkari e Schmidt (2006) consiste em utilizar o teste para identificar cadeias degeneradas de Martins e Carboni (2006), as quais são geradas pelo gerador de grafos de Mckay (1990).

O gerador de grafos de Mckay (1990) (*geng*), que é distribuído livremente junto com o pacote *gtools*, foi adaptado para gerar grafos que representam cadeias cinemáticas com fracionamento, *i.e.* grafos conexos com grau de todos os vértices maior ou igual a dois. A utilização do programa *geng* elimina a necessidade de um pós-processamento para eliminar isomorfismos pois ele gera um representante de cada classe de isomorfismos. Existe a necessidade de um pós-processamento para eliminar grafos que representam cadeias degeneradas e para isso foi utilizado o teste proposto por Martins e Carboni (2006).

---

<sup>1</sup>**geng** é um gerador de grafos, implementado por Mckay (1990), distribuído livremente junto com o pacote *gtools* disponível em <http://cs.anu.edu.au/~bdm/nauty/> [McKay 1990, McKay 1998].

Usando este método foram enumeradas cadeias cinemáticas sem fracionamento com mobilidade  $1 \leq M \leq 6$  para vários sistemas de helicóides. Os resultados, a maioria inéditos, serão mostrados na Tab. 3.5 na página 52.

O pseudocódigo da implementação da variação do método de Sunkari e Schmidt II é apresentado no algoritmo 3.

---

**Algoritmo 3** Variação do método de Sunkari e Schmidt II.

---

**1 - Entrada:**

- Número de vértices ( $V$ );
- Número de arestas ( $E$ );
- Dimensão do sistema de helicóides ( $\lambda$ ).

**2 - Roda o programa geng:**

- Adaptado para gerar grafos conexos com grau de todos os vértices maior ou igual a dois, os quais representam cadeias com fracionamento;
- Livre de triângulos para  $\lambda = 3$ , quadrados para  $\lambda = 4$ , e assim por diante. Assim, evita-se a geração de cadeias com subcadeias simples (*i.e.* com apenas um circuito) rígidas.
- **Saída do geng:** Um conjunto de grafos.

**3 - Pós-processamento:**

- Rode um teste de para identificar grafos degenerados e elimine esses grafos (por exemplo o teste de Martins e Carboni (2006));

**4 - Saída:**

- Armazene os grafos restantes.
- 

### 3.3.3 Geração exclusiva de cadeias cinemáticas com fracionamento

Para os casos onde somente as cadeias com fracionamento são candidatas com potencial, foi desenvolvido um método de geração exclusiva de cadeias com fracionamento. O método é parecido com o método de geração de cadeias cinemáticas proposto por Assur (seção 3.1.3). Cadeias com complexidade maior (muitos elos) são geradas pela agregação de cadeias mais simples (poucos elos). A vantagem deste método é que cadeias degeneradas não são enumeradas e o número de cadeias isomórficas geradas é pequeno pois as agregações obedecem certas regras. A desvantagem é que é necessário ter um atlas de cadeias mais simples.

### Descrição do método de agregação

O método consiste na *agregação* de cadeias cinemáticas mais simples para formar cadeias cinemáticas fracionadas com complexidade maior. A agregação consiste na “soldagem” de dois elos de duas cadeias como mostra a Fig. 3.16(a) para formar cadeias com fracionamento de elo ou “na introdução de uma junta” entre dois elos para formar cadeias com fracionamento de junta, como mostra a Fig. 3.16(b).

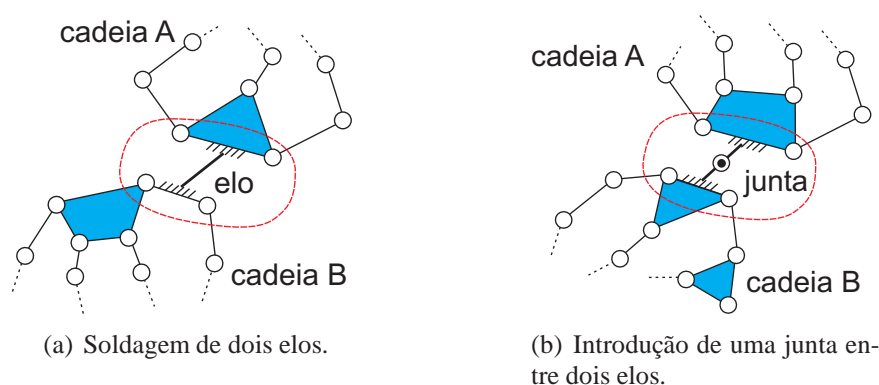


Figura 3.16: Agregação de cadeias cinemáticas.

Pode-se também introduzir uma cadeia serial entre os elos de duas cadeias mais simples formando fracionamento em cadeias híbridas, como mostra a Fig. 3.17.

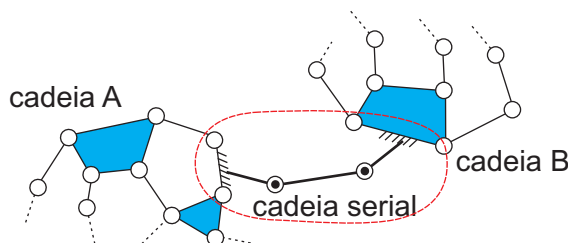


Figura 3.17: Fracionamento em cadeias híbridas.

Esse método permite que cadeias mais simples, com potencial ótimo e já conhecidas, sejam agregadas para formar cadeias com complexidade maior com o mesmo potencial para gerar mecanismos fracionados.

### Descrição do método através de um exemplo

Esta seção apresenta um exemplo do método. Serão enumeradas cadeias fracionadas planas, com mobilidade três ( $M = 3$ ) e dez elos ( $n = 10$ ). Para este caso, conforme seção 3.2, as cadeias poderão apresentar 1 ou 2 fracionamentos de elo ou 1 fracionamento de junta. Aplicando o critério da mobilidade para  $M = 3$  e  $n = 10$  obtem-se  $\nu = 3$ .

Para aplicar o método ao exemplo ( $M = 3$ ,  $\nu = 3$  e  $\lambda = 3$ ) é necessário ter um atlas de cadeias cinemáticas mais simples, ou seja, cadeias com  $M \leq 2$  e  $\nu \leq 2$ . A Fig. 3.18 mostra as únicas cadeias cinemáticas com  $\nu = 1$  e  $M \leq 2$ , a cadeia da Fig. 3.18(a) tem  $M = 1$  e a cadeia da Fig. 3.18(b) tem  $M = 2$ . As Figs. 3.19(a) e 3.19(b) mostram as cadeias cinemáticas de Watt e Stephenson respectivamente, as quais possuem  $\nu = 2$  e  $M = 1$ . As Figs. 3.20(a), 3.20(b), 3.20(c) e 3.20(d) mostram as quatro cadeias com  $\nu = 2$  e  $M = 2$ , completando o atlas de cadeias mais simples para esse exemplo.



Figura 3.18: Cadeias cinemáticas com  $\nu = 1$  e  $M = 1, 2$ .

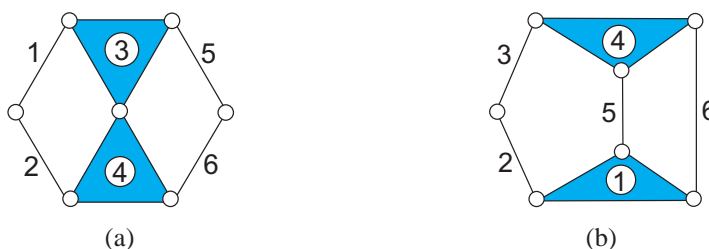


Figura 3.19: Cadeias cinemáticas com  $\nu = 2$  e  $M = 1$ .

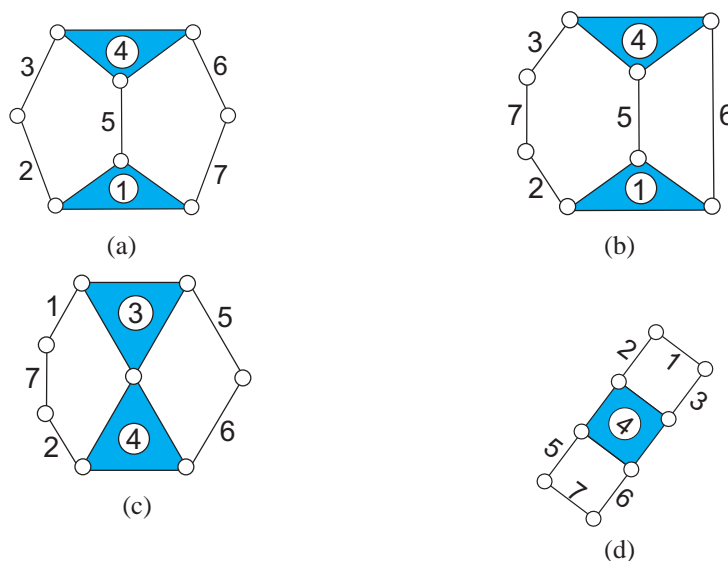


Figura 3.20: Cadeias cinemáticas com  $\nu = 2$  e  $M = 2$ .

Para simplificar a descrição do método as cadeias das Figs. 3.18(a), 3.18(b), 3.19(a), 3.19(b), 3.20(a), 3.20(b), 3.20(c) e 3.20(d) serão nomeadas respectivamente por: A, B, W,

S, C, D, E e F. A ordem alfabética foi alterada para manter as iniciais das cadeias de Watt e Stephenson que são bem conhecidas na literatura de mecanismos.

O próximo passo é agrupar essas cadeias de maneira a obter cadeias com  $\nu = 3$  e  $M = 3$ . Os três tipos de fracionamento serão considerados separadamente.

### Cadeias com fracionamento de elo

Para enumerar cadeias com fracionamento de elo é necessário soldar um elo de uma cadeia em um elo de outra cadeia como mostra a Fig. 3.16(a). O resultado é que 2 elos nas cadeias mais simples se tornam um único elo na cadeia mais complexa. Assim, para obter cadeias que apresentam um único fracionamento de elo, com  $n$  elos,  $\nu$  loops e mobilidade  $M$  é necessário soldar cadeias que satisfazem os seguintes itens:

- i) o somatório dos elos das duas cadeias deve ser igual a  $n + 1$ , *i.e.*  $\sum n_i = n + 1$ ;
- ii) o somatório dos loops das duas cadeias deve ser igual a  $\nu$ , *i.e.*  $\sum \nu_i = \nu$ ;
- iii) o somatório da mobilidade das duas cadeias deve ser igual a  $M$ , *i.e.*  $\sum M_i = M$ .

Note que, para cada fracionamento de elo, dois elos são fundidos em um só. Assim, o método pode ser estendido para enumerar cadeias com  $k$  fracionamentos de elo apenas agrupando cadeias que satisfazem os itens (ii) e (iii) acima e o item (i) é mudado para  $\sum n_i = n + k$ .

Para este exemplo ( $M = 3$ ,  $\nu = 3$  e  $n = 10$ ), é necessário agrupar cadeias cujo somatório dos elos seja  $\sum n_i = 11$ , o somatório dos loops seja  $\sum \nu_i = 3$  e o somatório da mobilidade seja  $\sum M_i = 3$ . Existem 6 maneiras de agrupar (soldar) as cadeias A, B, W, S, C, D, E e F, para formar cadeias com as características desejadas, *i.e.*  $M = 3$ ,  $\nu = 3$  e  $n = 10$  como mostra a Tab. 3.2.

Tabela 3.2: Maneiras de agrupar as cadeias do atlas.

1	2	3	4	5	6
A com C	A com D	A com F	A com E	B com W	B com S

A maneira de soldar os elos das cadeias cinemáticas da Tab. 3.2 é feita de acordo com as inversões de cada cadeia para evitar isomorfismos. Por exemplo, como a cadeia A possui uma inversão (elo 1) e a cadeia C possui três inversões (elos 1, 2 e 5), pode-se soldar essas duas cadeias das seguintes maneiras:

- i) elo 1 da cadeia A ( $A_1$ ) com elo 1 da cadeia C ( $C_1$ ) formando a “cadeia 1” mostrada na linha 1 coluna 1 da Tab. 3.3, onde “1” refere-se ao número no canto superior direito da célula da Tab. 3.3;

ii) elo 1 da cadeia A ( $A_1$ ) com elo 2 da cadeia C ( $C_2$ ) formando a cadeia 2 mostrada na linha 1 coluna 2 da Tab. 3.3;

iii) elo 1 da cadeia A ( $A_1$ ) com elo 5 da cadeia C ( $C_5$ ) formando a cadeia 3 mostrada na linha 2 coluna 1 da Tab. 3.3.

Para simplificar a notação, essas soldagens são representadas respectivamente por:

i)  $A_1 \otimes C_1$ ;

ii)  $A_1 \otimes C_2$ ;

iii)  $A_1 \otimes C_5$ .

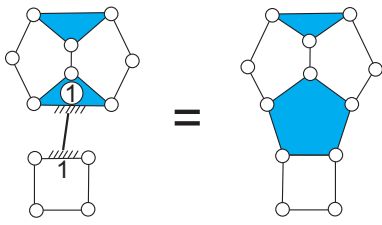
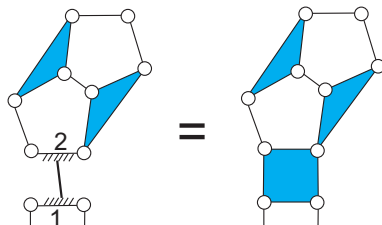
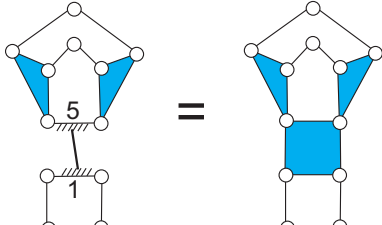
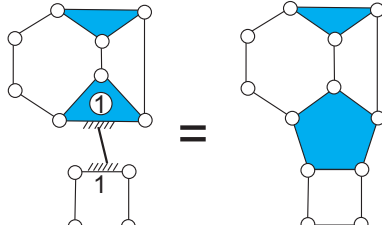
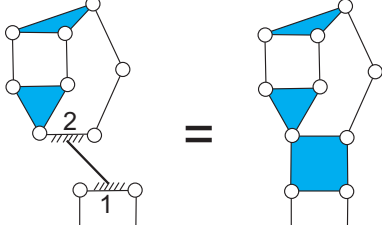
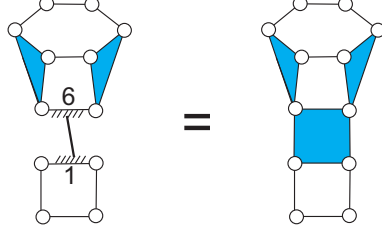
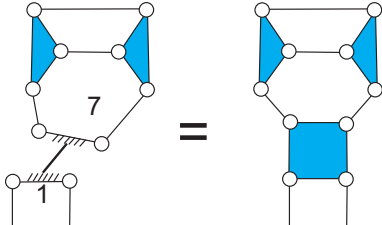
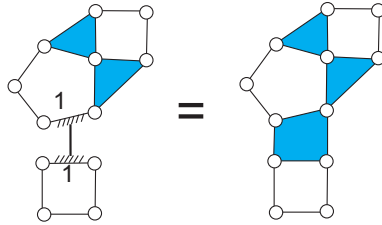
onde  $\otimes$  representa o operador de soldagem.

O procedimento para agrupar as outras cadeias da Tab. 3.2 é o mesmo, *i.e.* obedecendo as inversões. Dentro de cada célula da Tab. 3.3, no canto superior esquerdo, é representada a soldagem de seus respectivos elos usando a notação simplificada e no canto superior direito o número de cada cadeia.

Note que, para este exemplo foram enumeradas cadeias com dois fracionamentos de elo soldando a cadeia A com a cadeia F formando as cadeias 17, 18 e 19 na Tab. 3.3. Aplicando a equação 3.3 para a cadeia da célula 19 da Tab. 3.3 temos que: o número de fracionamentos de elo é igual a dois ( $\phi = 2$ ) e apenas um elo origina  $\phi = 2$ . Este elo é o poligonal com seis lados e que no grafo associado aparece na interseção dos três componentes biconexos.

Observe também que a cadeia F é uma cadeia fracionada mais simples que faz parte do atlas. Ela foi enumerada soldando duas cadeias  $A_1$  e conseqüentemente as cadeias das células 17, 18 e 19 na Tab. 3.3 consistem na agregação de três cadeias  $A_1$ . O fato é que a maneira com que as agregações são feitas pelo método proposto segue a *agregação binária*, *i.e.* a entrada é sempre duas cadeias mais simples com as respectivas inversões e a saída é uma cadeia fracionada mais complexa cuja agregação é feita respeitando as inversões de cada cadeia para evitar isomorfismos.

Tabela 3.3: Cadeias cinemáticas com fracionamento de elo.

Agregação de cadeias cinemáticas mais simples	
$A_1 \otimes C_1$ 	1
$A_1 \otimes C_2$ 	2
$A_1 \otimes C_5$ 	3
$A_1 \otimes D_1$ 	4
$A_1 \otimes D_2$ 	5
$A_1 \otimes D_6$ 	6
$A_1 \otimes D_7$ 	7
$A_1 \otimes E_1$ 	8

continua na próxima página ...

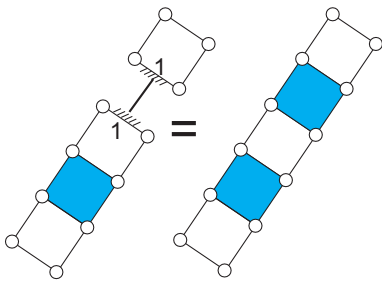
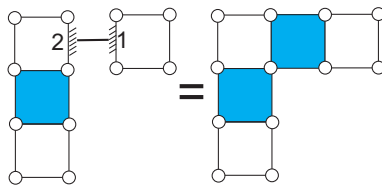
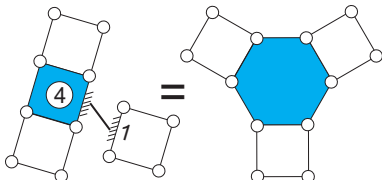
Tabela 3.3: Continuação

Agregação de cadeias cinemáticas mais simples	
$A_1 \otimes E_3$	9
$A_1 \otimes E_5$	10
$A_1 \otimes E_7$	11
$B_1 \otimes W_1$	12
$B_1 \otimes W_3$	13
$B_1 \otimes S_1$	14
$B_1 \otimes S_2$	15
$B_1 \otimes S_6$	16

continua na próxima página ...



Tabela 3.3: Continuação

Agregação de cadeias cinemáticas mais simples	
$A_1 \otimes F_1$ 	17
$A_1 \otimes F_2$ 	18
$A_1 \otimes F_4$ 	19

### Cadeias com fracionamento de junta

Para cada fracionamento de junta, conforme seção 3.2.2, associa-se um grau de liberdade. Assim, para enumerar cadeias que apresentam um fracionamento de junta com  $n$  elos,  $v$  loops e mobilidade  $M$  é necessário agrupar (unir dois elos, um de cada cadeia, introduzindo uma junta entre eles) cadeias que satisfazem os seguintes itens:

- i) o somatório dos elos das duas cadeias deve ser igual a  $n$ , *i.e.*  $\sum n_i = n$ ;
- ii) o somatório dos loops das duas cadeias deve ser igual a  $v$ , *i.e.*  $\sum v_i = v$ ;
- iii) o somatório da mobilidade das duas cadeias deve ser igual a  $M - 1$ , *i.e.*  $\sum M_i = M - 1$ .

Como para cada fracionamento de junta associa-se 1-DoF, o método pode ser estendido para enumerar cadeias com  $k$  fracionamentos de junta apenas agrupando cadeias que satisfazem os dois primeiros itens acima e o terceiro é mudado para  $\sum M_i = M - k$ .

Para enumerar cadeias cinemáticas planas que apresentam fracionamento de junta com  $M = 3$  e  $v = 3$  deve-se agrupar cadeias cujo  $\sum M_i = 2$ ,  $\sum v_i = 3$  e  $\sum n_i = 10$ . Existem apenas duas maneiras de agrupar as cadeias do atlas (A, B, W, S, C, D e E):

i) A com W;

ii) A com S.

As maneiras de introduzir uma junta entre os elos das duas cadeias obedecem as inversões de cada cadeia:

i) elo 1 da cadeia A ( $A_1$ ) com elo 1 da cadeia W ( $W_1$ ) formando a cadeia 1 mostrada na linha 1 coluna 1 da Tab. 3.4. Em notação simplificada  $A_1 \odot W_3$ ;

ii)  $A_1 \odot W_3$ , cadeia 2 na Tab. 3.4;

iii)  $A_1 \odot S_1$ , cadeia 3 na Tab. 3.4;

iv)  $A_1 \odot S_2$ , cadeia 4 na Tab. 3.4;

v)  $A_1 \odot S_6$ , cadeia 5 na Tab. 3.4.

onde  $\odot$  representa o operador “introdução de junta” entre os dois elos.

Tabela 3.4: Cadeias cinemáticas com fracionamento de junta.

Agregação de cadeias cinemáticas mais simples			
$A_1 \odot W_1$	1	$A_1 \odot W_3$	2
	=		=
$A_1 \odot S_1$	3	$A_1 \odot S_2$	4
	=		=

continua na próxima página ...

Tabela 3.4: Continuação

Agregação de cadeias cinemáticas mais simples	
$A_1 \odot S_6$	5

As cadeias apresentadas nas Tabs. 3.3 e 3.4 somam no total 24 e são o resultado da discrepância apontada nas Tabs. 1-4 em Sunkari e Schmidt (2006) entre os métodos de Tuttle (1996) e de Lee e Yoon (1994) com o método de Hwang e Hwang (1992). O atlas completo das 98 cadeias cinemáticas planas com fracionamento e sem fracionamento com  $M = 3$  e  $\nu = 3$  pode ser encontrado em Tischler *et al.* (1995) ou em Mruthyunjaya (1984).

### Cadeias com fracionamento mais complexo

Para o exemplo apresentado, não houve casos onde ocorreu fracionamento de elo e de junta simultaneamente e fracionamento em cadeias híbridas. A seguir, será apresentado um exemplo para ilustrar o método aplicado a esses casos.

Agregando (soldando dois elos) a cadeia 1 ( $A_1 \odot W_1$ ) da Tab. 3.4 com a cadeia S da Fig. 3.19(a) forma-se uma cadeia com  $M = 4$  e  $\nu = 5$ , a qual apresenta um fracionamento de elo e um fracionamento de junta. A cadeia originada é mostrada na Fig. 3.21(a). Para o caso de fracionamento em cadeias híbridas, uma cadeia serial com dois elos é introduzida entre as cadeias  $A_1$  e a cadeia  $S_1$  formando uma cadeia com  $\nu = 4$ ,  $n = 14$  e  $M = 5$  mostrada na Fig. 3.21(b).

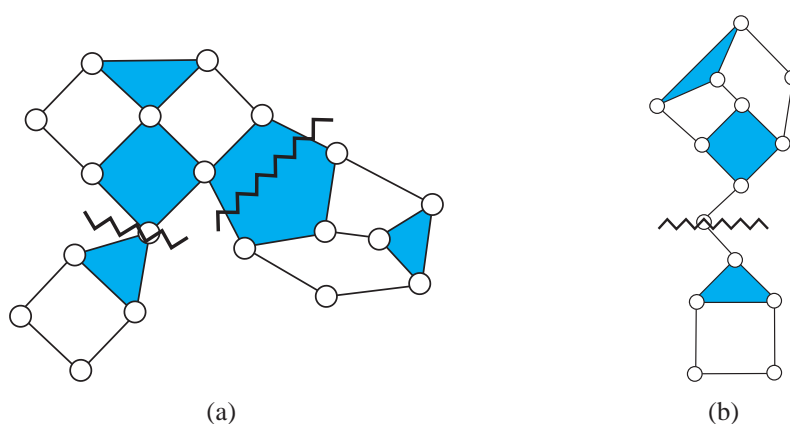


Figura 3.21: Cadeias com fracionamento mais complexo.

### 3.4 Resultados obtidos pelos métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas propostos

As Tabs. 3.5, 3.6 e 3.7 apresentam os resultados obtidos pelos métodos propostos. A Tab. 3.5 apresenta os resultados de enumeração de cadeias cinemáticas sem fracionamento, a Tab. 3.6 apresenta os resultados de enumeração exclusiva de cadeias cinemáticas com fracionamento e a Tab. 3.5 apresenta os resultados de enumeração de cadeias cinemáticas com fracionamento. Uma das vantagens em relação as tabelas apresentadas na literatura é que as Tabs. 3.5, 3.6 e 3.7 apresentam resultados de enumeração de cadeias cinemáticas para vários sistemas de helicóides. Na literatura só existem tabelas de enumeração de cadeias cinemáticas planas, *i.e.*  $\lambda = 3$ .

Para o caso  $\lambda = 3$ , os resultados da Tab. 3.5 estão de acordo com os obtidos por Sunkari e Schmidt (2006), Tuttle (1996) e Lee and Yoon (1994). Tischler *et al.* (2001) enumeram conjuntos mínimos para  $\lambda = 4$  e os resultados estão de acordo com os seus resultados. Os resultados em negrito na Tab. 3.5 estão sendo apresentados pela primeira vez.

A Tab. 3.6 apresenta o resultado da discrepância apontada por Sunkari e Schmidt (2006) nas Tabs. 1-4. Mruthyunaya (2003) aponta na Tab. 1 que existe o problema da geração de cadeias sem fracionamento por Tuttle *et al.* [Tuttle 1996, Tuttle et al. 1989, Tuttle et al. 1989]. Tischler *et al.* (1995) tratam da questão do fracionamento com mais detalhes mas não identificam explicitamente as cadeias fracionadas geradas pelo seu método, *i.e.* o método de Melbourne. A identificação explícita das cadeias cinemáticas fracionadas e a apresentação dos resultados na Tab.3.6 estão sendo feitos pela primeira vez.

A Tab. 3.7 mostra os resultados da enumeração de cadeias cinemáticas com fracionamento. Nesta tabela, o resultado em cada célula consiste na soma do número de cadeias das células

Tabela 3.5: Enumeração de cadeias cinemáticas sem fracionamento.

$\lambda$	$\nu$	<i>Mobilidade</i>					
		1	2	3	4	5	6
2	2	1	2	3	4	6	7
	3	3	9	20	40	70	121
	4	13	49	160	432	1033	2241
3	2	2	3	5	6	8	10
	3	16	35	74	126	212	325
	4	230	753	1982	4356	8846	16649
4	2	3	4	6	8	10	12
	3	42	93	172	289	451	678
5	2	4	6	8	10	13	15
	3	116	225	398	621	939	1339
6	2	5	7	10	12	15	18
	3	242	454	749	1146	1661	2327

das Tabs. 3.5 e 3.6 correspondentes. Para o caso  $\lambda = 3$ , os resultados da Tab. 3.7 estão de acordo com os obtidos por Vijayananda (1994) mostrados na Tab. 1 em Mruthyunaya (2003) e por Hwang e Hwang (1991) mostrados nas Tabs. 1-4 em Sunkari and Schmidt (2006) exceto para dois casos: Para o caso  $M = 3$  e  $\nu = 4$ , Hwang e Hwang enumeram 2442 e o método de Vijayananda e a Variação do método de Sunkari e Schmidt II enumeram 2422. Para o caso  $M = 4$  e  $\nu = 4$ , Hwang e Hwang enumeram 5951 e o método de Vijayananda e a Variação do método de Sunkari e Schmidt II enumeram 5915.

Tabela 3.6: Enumeração exclusiva de cadeias cinemáticas com fracionamento.

$\lambda$	$v$	<i>Mobilidade</i>					
		1	2	3	4	5	6
2	2	-	1	2	4	6	9
	3	-	2	11	31	74	153
	4	-	11	67	270	839	2239
3	2	-	1	2	4	6	9
	3	-	5	24	63	142	273
	4	-	86	440	1559	4222	9920
4	2	-	1	2	4	6	9
	3	-	10	41	104	222	416
5	2	-	1	2	4	6	9
	3	-	17	69	169	350	634
6	2	-	1	2	4	6	9
	3	-	27	102	246	495	882

Tabela 3.7: Enumeração de cadeias cinemáticas com fracionamento.

$\lambda$	$v$	<i>Mobilidade</i>					
		1	2	3	4	5	6
2	2	1	3	5	8	12	16
	3	3	11	31	71	144	274
	4	13	60	227	702	1872	4480
3	2	2	4	7	10	14	19
	3	16	40	98	189	354	598
	4	230	839	2422	5915	13068	26569
4	2	3	5	8	12	16	21
	3	42	103	213	393	673	1094
5	2	4	7	10	14	19	24
	3	116	242	467	790	1289	1973
6	2	5	8	12	16	21	27
	3	242	481	851	1392	2156	3209

## 3.5 Conclusões do capítulo

Este capítulo apresentou uma revisão dos principais métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas encontrados na literatura, os quais serviram de inspiração para os métodos propostos.

As deficiências dos métodos de geração de cadeias cinemáticas encontrados na literatura estão relacionadas à:

- geração de cadeias cinemáticas isomórficas e degeneradas as quais devem sempre ser evitadas por um método ideal de síntese estrutural;
- geração de cadeias cinemáticas fracionadas as quais devem ser consideradas opcionais.

Em vista disto, foram aprimorados métodos de geração de cadeias com fracionamento, sem fracionamento e também foi proposto um novo método de geração exclusiva de cadeias com fracionamento. O mais importante é que todos os métodos propostos neste capítulo enumeram cadeias que operam em todos os sistemas de helicóides e não só para  $\lambda = 3$ , que é o caso de vários métodos encontrados na literatura devido ao problema de geração de cadeias degeneradas envolvido.

Novos resultados foram obtidos e mostrados nas Tabs. 3.5, 3.6 e 3.7. Para o caso plano, os resultados dos métodos propostos estão de acordo com a literatura.

A identificação explícita do número de cadeias com fracionamento foi apresentado na Tab. 3.6.

A identificação do tipo de fracionamento foi feito usando a biconectividade.

## 4 *Síntese Estrutural de Mecanismos*

Uma prática comum no estudo da cinemática dos mecanismos é a inversão. A inversão consiste na mudança do elo fixo, de um elo para o outro, causando características diferentes no movimento relativo do mecanismo em relação à base. Para determinar as inversões é conveniente partir da cadeia cinemática do qual o mecanismo é formado [Waldron e Kinzel 1999]. O número de inversões de uma cadeia cinemática equivale ao número de mecanismos com todas as juntas simples que a cadeia pode originar.

Este capítulo apresenta um novo método de enumeração de inversões de cadeias cinemáticas baseado em técnicas da teoria de grupos. O objetivo é utilizar ferramentas da teoria de grupos para determinar quais são as possíveis escolhas para o elo fixo da cadeia cinemática que origina mecanismos distintos. Para isso, a cadeia cinemática é representada pelo grafo associado e as ferramentas da teoria de grupos são aplicadas no grafo para obter informações sobre suas simetrias. Elos simétricos em uma cadeia cinemática originam mecanismos idênticos.

Primeiramente, são apresentados os conceitos fundamentais da teoria de grupos. Em seguida, são apresentados exemplos da aplicação das ferramentas da teoria de grupos abordadas nos grafos que representam cadeias cinemáticas e os resultados são discutidos. Finalmente, os resultados obtidos pelo método proposto são apresentados em tabelas. Usando ferramentas da teoria de grupos foram obtidos novos resultados na enumeração de mecanismos que operam em vários sistemas de helicóides.

### 4.1 Teoria de grupos

Grupos são estruturas abstratas e são usados na Matemática e nas ciências em geral para capturar a simetria interna de uma estrutura na forma de automorfismos de grupo. Para determinar as inversões de cadeias cinemáticas, que são representadas por grafos, é fundamental saber quais são as simetrias dos vértices do grafo os quais representam os elos da cadeia cinemática. A seguir serão apresentadas as definições essenciais da teoria de grupos para o desenvolvimento



do método. Essas definições foram obtidas na literatura pesquisada [Alperin e Bell 1995, Burrow 1993, Rotman 1995, Rotman 2002, Scott 1964].

### 4.1.1 Grupos e subgrupos

**Definição 4.** Um grupo é um conjunto  $G$  com uma operação binária

$$\cdot : G \times G \rightarrow G$$

que satisfaz os três axiomas:

(i) *Associatividade:* Para todos  $a, b, c \in G$ ,  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .

(ii) *Identidade:* Existe um elemento  $i \in G$  tal que para todo  $a \in G$ ,  $i \cdot a = a \cdot i = a$ .

(iii) *Inverso:* Para todo  $a \in G$ , existe um elemento  $b \in G$  tal que,  $a \cdot b = b \cdot a = i$ .

**Definição 5.** Um conjunto  $G'$  é um subgrupo de um grupo  $G$  se ele é um subconjunto de  $G$  e é um grupo usando a operação definida em  $G$ .

### 4.1.2 Ações

**Definição 6.** Se  $X$  é um conjunto e  $G$  é um grupo, então  $G$  age sobre  $X$  se existe uma função

$$G \times X \rightarrow X$$

denotada por

$$(g, x) \mapsto g \cdot x$$

tal que:

(i)  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$  para todos os elementos  $g, h \in G$  e  $x \in X$ .

(ii)  $i \cdot x = x$  para todo elemento  $x \in X$  (onde  $i$  é a identidade do grupo  $G$ ). [Rotman 2002]

**Definição 7.** Seja  $X$  um conjunto (finito ou infinito) e considere

$$S_X := \{\sigma : X \rightarrow X \mid \sigma \text{ é bijetora}\}.$$

Esse conjunto munido de composição de funções é um grupo, chamado de grupo das permutações sobre  $X$ .

Se  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , o grupo de permutação é denotado por  $S_n$  e todo  $\sigma \in S_n$  é denotado por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

O conjunto de vértices de um grafo rotulados por naturais em ordem progressiva ( $V_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ), formam um grupo de permutação e aplicam-se as definições anteriores.

**Exemplo 3.** A Fig. 4.1(a) mostra a cadeia cinemática de Stephenson e a Fig. 4.1(b) seu grafo. As Figs. 4.2(a) e 4.2(b) mostram a imagem da ação de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  em  $V_6$  sobre os rótulos dos vértices do grafo da cadeia de Stephenson, onde

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (134)(256)$$

e

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (14)(23)(56).$$

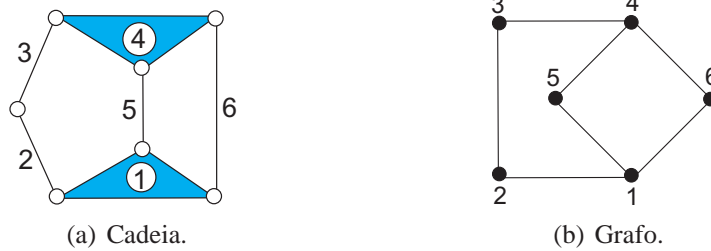


Figura 4.1: Cadeia cinemática de Stephenson e representação por grafo.

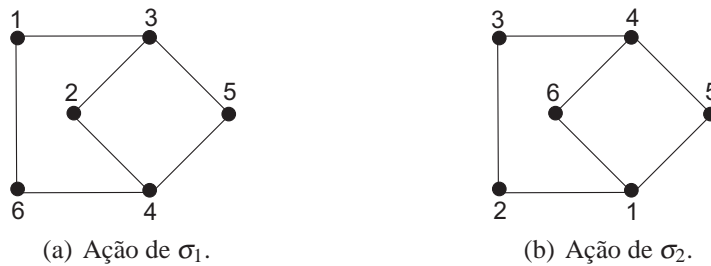


Figura 4.2: Imagem das ações de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

**Definição 8.** Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grupos. Um homomorfismo de  $G_1$  em  $G_2$  é uma aplicação

$$\phi : G_1 \rightarrow G_2$$

tal que, para todos  $x, y \in G_1$

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y).$$

Se  $\phi$  é bijetiva a aplicação é um **isomorfismo**. Um isomorfismo  $\phi$  é um **automorfismo** se  $G_1 = G_2$ .

Em termos da teoria de grafos, dois grafos  $H$  e  $H'$  com vértices  $V_n = \{1, 2, \dots, n\}$  são ditos isomórficos se existe uma permutação  $\sigma$  de  $V_n$  tal que  $\{x, y\}$  está no conjunto de arestas  $E(H)$  se, e somente se, a aresta  $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$  está no conjunto de arestas  $E(H')$ .

Um automorfismo de um grafo é um isomorfismo nele mesmo. O conjunto das permutações, que mapeiam um grafo nele mesmo, formam um grupo chamado de grupo de automorfismos do grafo e ele é dito um grupo induzido pelos vértices [Tsai 2001]. O grupo de automorfismos de um grafo é um subgrupo do grupo de permutação e contém todas as permutações possíveis de vértices que preservam a adjacência. O grupo de automorfismos de um grafo caracteriza a simetria interna do grafo e é útil para determinar algumas de suas propriedades.

### 4.1.3 Órbitas

**Definição 9.** Considere um grupo  $G$  agindo sobre um conjunto  $X$ . A órbita do ponto  $x \in X$  é denotada por

$$\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

A órbita de um elemento  $x$  de um conjunto  $X$  é o conjunto dos elementos de  $X$  para os quais  $x$  pode ser movido pela ação dos elementos do grupo  $G$ . O conjunto das órbitas formam uma partição do conjunto  $X$ . A relação de equivalência associada é definida por  $x \sim y$  se, e somente se, existe um elemento  $g$  no grupo  $G$  tal que  $g \cdot x = y$ . As órbitas são classes de equivalência sob esta relação, dois elementos  $x$  e  $y$  são equivalentes, se e somente se, suas órbitas são iguais, *i.e.*  $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$ .

A ação do grupo de automorfismos do grafo permuta os vértices do grafo. Se um vértice do grafo de rótulo  $x$  é movido pela ação de um elemento do grupo de automorfismos para um vértice de rótulo  $y$ , então,  $x$  e  $y$  estão na mesma órbita, *i.e.*  $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$ . Para grafos, a relação de equivalência está associada a simetria dos seus vértices, se os vértices de rótulos  $x$  e  $y$  estão na mesma órbita eles possuem as mesmas propriedades de simetria no grafo. A órbita de um vértice do grafo corresponde ao conjunto de vértices para os quais o vértice é movido pela ação do grupo de automorfismos do grafo.

**Exemplo 4.** A cadeia cinemática de Watt mostrada na Fig. 4.3(a) é representada pelo grafo rotulado mostrado na Fig. 4.3(b). O grupo de automorfismos do grafo da cadeia cinemática de Watt possui quatro elementos:  $\sigma_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$ ,  $\sigma_2 = (12)(34)(56)$ ,  $\sigma_3 = (15)(26)(3)(4)$  e  $\sigma_4 = (16)(25)(34)$  os quais são mostrados nas Figs 4.4(a), 4.4(b), 4.4(c) e 4.4(d) respectivamente .



Figura 4.3: Cadeia cinemática de Watt e representação por grafo.

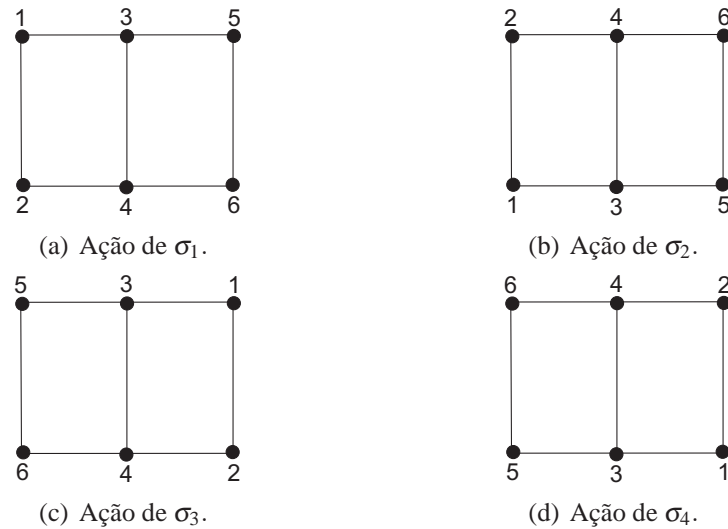


Figura 4.4: Imagem da ação do grupo de automorfismos no grafo de Watt.

A Tab. 4.1 mostra que os automorfismos da cadeia cinemática de Watt formam um grupo, onde  $\sigma_1$  é o elemento identidade e cada elemento é seu próprio inverso.

Tabela 4.1: Estrutura do grupo.

$\circ$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$
$\sigma_1$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$
$\sigma_2$	$\sigma_2$	$\sigma_1$	$\sigma_4$	$\sigma_3$
$\sigma_3$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
$\sigma_4$	$\sigma_4$	$\sigma_3$	$\sigma_2$	$\sigma_1$

A órbita do vértice 1 é igual a órbita dos vértices 2, 5 e 6, i.e.  $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_5 = \mathcal{O}_6 = \{1, 2, 5, 6\}$  e a órbita do vértice 3 é igual a órbita do vértice 4, i.e.  $\mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_4 = \{3, 4\}$ . Portanto, as órbitas do grupo de automorfismos são  $\{1, 2, 5, 6\}$  e  $\{3, 4\}$ .

**Exemplo 5.** O grafo da cadeia cinemática de Stephenson, mostrado na Fig. 4.2(a), possui quatro automorfismos:  $\sigma_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$ ,  $\sigma_2 = (1)(2)(3)(4)(56)$ ,  $\sigma_3 = (14)(23)(5)(6)$  e  $\sigma_4 = (14)(23)(56)$ . Esses automorfismos são mostrados nas Figs. 4.5(a), 4.5(b), 4.5(c) e 4.5(d) respectivamente.

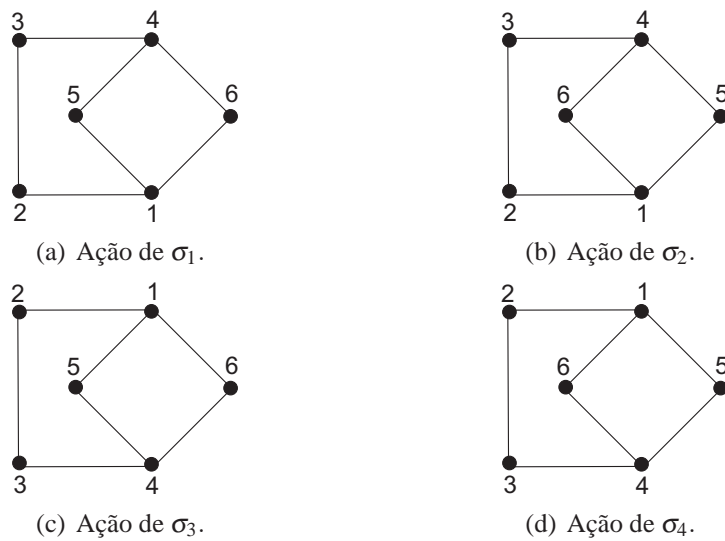


Figura 4.5: Imagem da ação do grupo de automorfismos no grafo de Stephenson.

A órbita do vértice 1 é igual a órbita do vértice 4, i.e.  $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_4 = \{1, 4\}$ , a órbita do vértice 2 é igual a órbita do vértice 3, i.e.  $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3 = \{2, 3\}$  e a órbita do vértice 5 é igual a órbita do vértice 6, i.e.  $\mathcal{O}_5 = \mathcal{O}_6 = \{5, 6\}$ . Portanto, as órbitas do grupo de automorfismos são  $\{1, 4\}$ ,  $\{2, 3\}$  e  $\{5, 6\}$ .

## 4.2 Órbitas do grupo de automorfismos do grafo associado a uma cadeia cinemática e mecanismos

Já existem alguns resultados na enumeração de mecanismos para cadeias cinemáticas planas sem fracionamento [James e Riha 1976, Tuttle et al. 1989] e com fracionamento [Vijayananda 1994] *apud* [Mruthyunjaya 2003]. O objetivo é aplicar a teoria de grupos para enumeração de mecanismos para cadeias cinemáticas que operam em todos os sistemas de helicóides e apresentar novos resultados.

Usando as ferramentas da teoria de grupos apresentadas anteriormente é possível enumerar todos os mecanismos que uma cadeia cinemática pode originar escolhendo um representante de cada órbita dos vértices do grafo associado. O número de órbitas do grupo de automorfismos induzido pelos vértices do grafo é igual ao número de mecanismos com juntas simples que o grafo (a cadeia) pode originar. Para saber quais são as possíveis escolhas para o elo fixo basta escolher um representante de cada órbita do grupo de automorfismos do grafo. Os resultados dos exemplos 2 e 3 mostram como é possível enumerar os mecanismos para as cadeias cinemáticas de Watt e Stephenson, respectivamente. Para a cadeia cinemática de Watt (exemplo 2) o grupo de automorfismos possui duas órbitas, portanto o número de mecanismos que a

cadeia de Watt pode originar é dois e os representantes podem ser, por exemplo 1 e 3. Já para a cadeia cinemática de Stephenson (exemplo 3) o grupo de automorfismos possui três órbitas originando três mecanismos distintos e os representantes podem ser 1, 2 e 5.

McKay (1990) implementou o Nauty (No AUTomorphisms, Yes?) que é um conjunto de procedimentos muito eficientes, implementados em C, para determinar o grupo de automorfismos de um grafo. Ele fornece a informação na forma de um conjunto de geradores, tamanho do grupo e órbitas do grupo.

A implementação do método de enumeração de mecanismos proposto consiste na adaptação do programa Nauty para calcular as órbitas do grupo de automorfismos dos grafos que representam as cadeias cinemáticas enumeradas no processo de síntese estrutural.

O pseudocódigo da implementação do método de síntese estrutural de mecanismos é apresentado no algoritmo 4.

---

**Algoritmo 4** Síntese estrutural de mecanismos.

---

**1 - Entrada:**

- Um grafo rotulado, o qual representa uma cadeia cinemática

**2 - Roda o programa Nauty:**

- Determina o grupo de automorfismos do grafo.
- **Saída do Nauty:** Elementos do grupo de automorfismos.

**3 - Pós-processamento:**

- Identificar as órbitas do grupo de automorfismos comparando os elementos do grupo, ver seção 4.1.3.

**4 - Saída:**

- Número de órbitas do grupo de automorfismos com os respectivos rótulos dos vértices.
  - Número de órbitas é igual ao número de mecanismos que a cadeia associada pode originar.
  - O elo fixo é um representante de cada órbita do grupo de automorfismos.
- 

A eficiência computacional do método de enumeração de mecanismos pode ser constatada do fato que 231.664 mecanismos planos com  $M = 6$  e  $v = 4$  foram enumerados em 3.883s num Intel Pentium 4, CPU 3.00GHz com 2GB RAM.

### 4.3 Resultados obtidos pelo método de síntese estrutural de mecanismos proposto

A Tab. 4.2 mostra o número de mecanismos das cadeias cinemáticas mostradas na Tab. 3.5 na página 52, *i.e.* cadeias cinemáticas sem fracionamento. Para o caso  $\lambda = 3$  a Tab. 4.2 está de acordo com Tuttle (1996). Os resultados em negrito na Tab. 4.2 estão sendo apresentados pela primeira vez.

Tabela 4.2: Mecanismos sem fracionamento.

$\lambda$	$v$	<i>Mobilidade</i>					
		1	2	3	4	5	6
2	2	2	5	9	15	23	33
	3	8	35	91	217	463	897
	4	45	255	1014	3248	8924	21911
3	2	5	11	18	28	39	55
	3	71	220	517	1056	1955	3387
	4	1834	7156	20737	51245	113387	231664
4	2	10	18	29	43	59	79
	3	324	832	1749	3245	5581	9042
5	2	17	31	45	65	86	113
	3	1196	2704	5136	8849	14256	21894
6	2	27	44	65	89	117	150
	3	3331	6813	12126	19792	30538	45118

A Tab. 4.3 mostra o número de mecanismos das cadeias cinemáticas mostradas na Tab. 3.6 na página 53, *i.e.* somente cadeias cinemáticas com fracionamento. Esses resultados estão sendo apresentados pela primeira vez.

A Tab. 4.4 mostra o número de mecanismos das cadeias cinemáticas mostradas na Tab. 3.7 na página 53, *i.e.* cadeias cinemáticas com fracionamento. Para o caso  $\lambda = 3$  a Tab. 4.4 está de acordo com Vijayananda (1994) exceto em três casos: caso  $M = 6$  e  $v = 2$  Vijayananda enumera 110 mecanismos; caso  $M = 3$  e  $v = 4$  Vijayananda enumera 25.124 mecanismos; caso  $M = 4$  e  $v = 4$  Vijayananda enumera 67.591 mecanismos.

Tabela 4.3: Mecanismos somente com fracionamento.

$\lambda$	$v$	<i>Mobilidade</i>					
		1	2	3	4	5	6
2	2	-	2	6	15	27	47
	3	-	4	49	171	471	1103
	4	-	49	380	1793	6430	19323
3	2	-	3	8	19	33	56
	3	-	34	167	508	1244	2645
	4	-	742	4388	16349	48166	122411
4	2	-	3	9	21	37	62
	3	-	82	367	1043	2414	4894
5	2	-	4	11	25	43	71
	3	-	193	799	2138	4684	9068
6	2	-	4	12	27	47	77
	3	-	353	1410	3649	7757	14608

Destaca-se que, o número de cadeias cinemáticas geradas pela variação do método de Sun-kari e Schmidt II (seção 3.3.1 na página 39) e pelo método de Vijayananda mostradas na Tab. 3.6 na página 53 é o mesmo. E também que para o caso de cadeias sem fracionamento, os resultados do método de enumeração de mecanismos proposto estão de acordo com Tuttle (1996), veja a Tab. 4.2. Isso indica que o método de Vijayananda (1994) apresenta alguma deficiência.

Os resultados em negrito na Tab. 4.4 estão de acordo com Vijayananda (1994) e os outros estão sendo apresentados pela primeira vez.



Tabela 4.4: Mecanismos com fracionamento.

$\lambda$	$v$	<i>Mobilidade</i>					
		1	2	3	4	5	6
2	2	2	7	15	30	50	80
	3	8	39	140	388	934	2000
	4	45	304	1394	5041	15354	41234
3	2	<b>5</b>	<b>14</b>	<b>26</b>	<b>47</b>	<b>72</b>	111
	3	<b>71</b>	<b>254</b>	<b>684</b>	<b>1564</b>	<b>3199</b>	6032
	4	<b>1834</b>	<b>7898</b>	25125	67594	161553	354075
4	2	10	21	38	64	96	141
	3	324	914	2116	4288	7995	13936
5	2	17	35	56	90	129	184
	3	1196	2897	5935	10987	18940	30962
6	2	27	48	77	116	164	227
	3	3331	7166	13536	23441	38295	59726

## 4.4 Conclusões do capítulo

A utilização da teoria de grupos permitiu obter novos resultados na enumeração de mecanismos originados de cadeias cinemáticas, os quais foram apresentados nas Tabs. 4.2, 4.4 e 4.3.

A representação de cadeias cinemáticas por grafos e a adaptação do programa Nauty [McKay, McKay 1990] foi uma solução inteligente para enumeração de mecanismos. Com essa técnica, foram enumerados todos os mecanismos para as cadeias cinemáticas geradas pelos métodos de síntese estrutural propostos no capítulo 3, apresentadas nas Tabs. 3.5, 3.6 e 3.7 nas páginas 52, 53 e 53, respectivamente.

A validação do método foi feita comparando os resultados encontrados na literatura de mecanismos.

## 5 *Síntese Estrutural de Mãos Robóticas*

Os resultados dos métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas e mecanismos propostos foram validados com os resultados encontrados na literatura. O objetivo principal deste capítulo é apresentar uma aplicação dos métodos propostos, a aplicação investigada é a enumeração de mecanismos alternativos para mãos robóticas.

O ponto de partida é o trabalho descrito por Tischler *et al.* (1995). Primeiramente, os requisitos funcionais da mão robótica são identificados e transformados em características estruturais. Em seguida, os métodos propostos são aplicados para gerar as cadeias cinemáticas que atendem as características estruturais e para identificar os mecanismos que cada cadeia pode originar. Também é introduzido o critério da conectividade que foi utilizado por Tischler para classificar os mecanismos enumerados. Finalmente, os resultados são apresentados em uma tabela e estão de acordo com a literatura. Alguns mecanismos possíveis para aplicação como mãos robóticas são apresentados, entre eles está o mecanismo da mão Stanford/JPL [Tischler et al. 1995, Mason e Salisbury 1985].

### 5.1 Mãos robóticas

As aplicações da robótica se multiplicam com grande rapidez nas áreas da indústria, saúde e entretenimento e com elas surge o problema da manipulação ágil que é um problema ainda não resolvido em robótica [Laschi et al. 2000]. A manipulação robótica geralmente envolve tarefas repetitivas de carga e descarga, manipulação de materiais radioativos e manipulação em ambientes insalubres com excesso de calor, umidade entre outros. O problema da manipulação é complexo e tipicamente envolve combinações de cadeias abertas e fechadas, graus de liberdade redundantes e singularidades [Cutkosky 1989]. Em geral, por possuírem muitos graus de liberdade de redundância, as mãos robóticas necessitam de um grande número de atuadores tornando o problema de controle difícil.

A operação de uma mão pode ser classificada em agarrar e manipular. Agarrar, é uma combinação de procedimentos necessários para segurar um objeto em uma posição estática em relação a mão. A manipular requer movimentos coordenados dos dedos para manipulação um objeto dentro da mão [Pons et al. 1999].

Quanto ao projeto as mãos robóticas podem ser classificadas em mãos antropomórficas e não antropomórficas. São exemplos de mãos robóticas antropomórficas: Stanford/JPL Hand [Mason e Salisbury 1985], Utah/MIT Hand [Jacobsen et al. 1986], DLR I e II Hand [Butterfass et al. 2001, Gao et al. 2003], TUAT/Karlsruhe Hand [Fukaya et al. 2000], BUAA Hand [Zhang et al. 2001], BARRET Hand [Townsend 2000], ROBONAUT Hand [Lovchik et al. 1999], Melbourne Hand [Hunt et al. 1995]; e de mãos robóticas não antropomórficas: SARAH Hand [SARAH Hand], MARS Hand [MARS Hand] e garras utilizadas na indústria.

## 5.2 Critério para classificação de cadeias cinemáticas

Para a aplicação que este capítulo apresenta (mecanismos alternativos para mãos robóticas) só serão consideradas cadeias cinemáticas fechadas. Como foi apresentado no capítulo 3, nas Tabs. 3.5, 3.6 e 3.7 nas páginas 52, 53 e 53, o número de cadeias cinemáticas geradas no processo de síntese estrutural é grande e é difícil analisar os méritos individuais de cada cadeia. Em vista disso, será introduzido o critério da conectividade que foi utilizada por Tischler *et al.* (1995) para classificar as cadeias cinemáticas geradas para aplicação como mecanismos alternativos para mãos robóticas.

### 5.2.1 Conectividade

Em uma cadeia cinemática representada por um grafo  $H$ , a conectividade entre dois elos  $i$  e  $j$  é definida em Martins e Carboni (2006) como

$$C_{ij} = \min : \{D_{\min}[i, j], M, M'_{\min}, \lambda\} \quad (5.1)$$

onde  $D_{\min}[i, j]$  é a distância mínima entre os vértices  $i$  e  $j$  de  $H$ ,  $M$  é a mobilidade da cadeia cinemática considerada,  $M'_{\min}$  é a mobilidade mínima de uma subcadeia fechada biconexa de  $H$  contendo os vértices  $i$  e  $j$  e  $\lambda$  é a ordem do sistema de helicóides.

A conectividade é um critério importante para classificação de cadeias cinemáticas. Por exemplo, a Fig. 5.1 mostra uma cadeia cinemática plana com mobilidade  $M = 3$ , mas a conectividade entre quaisquer dois elos  $i$  e  $j$  é menor ou igual a dois, *i.e.*  $C_{ij} \leq 2$ . Deste exemplo

simples, é evidente que a conectividade, e não mobilidade, determina a habilidade de uma cadeia executar determinada tarefa.

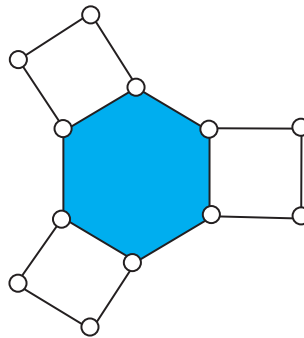


Figura 5.1: Cadeia cinemática plana eliminada pelo critério da conectividade.

## 5.3 Mecanismos alternativos para mãos robóticas

O ponto de partida é o trabalho descrito por Tischler *et al.* (1995). O objetivo é enumerar e classificar mecanismos alternativos para mãos robóticas. Os resultados serão comparados com os obtidos por Tischler *et al.*

### 5.3.1 Transformação de requisitos funcionais em características estruturais

A primeira etapa é identificar os requisitos funcionais da mão robótica e transformar esses requisitos em características estruturais (ver metodologia de projeto de mecanismos proposta por Tsai (2001) no capítulo 1 página 3).

Os requisitos funcionais da mão robótica descritos em Tischler *et al.* (1995) são listados a seguir:

- O tipo de contato entre a mão e o objeto a ser segurado é *pontual com atrito*;
- Para manter o equilíbrio estático são necessários três contatos pontuais com atrito;
- A conectividade desejada entre o objeto segurado e o elo fixo deve ser igual a mobilidade do mecanismo, *i.e.* mão robótica;
- O mecanismo deve ser espacial.

Esses requisitos funcionais serão transformados em características estruturais. Segue que:

- O contato pontual e com atrito é cinematicamente equivalente a um par esférico [Tischler et al. 1995];
- Para manter o equilíbrio estático, as cadeias cinemáticas sintetizadas devem ter pelo menos um elo ternário, pois as cadeias consideradas são fechadas. Como a cadeia deve ter um elo ternário, as cadeias sintetizadas devem ter no mínimo dois circuitos independentes, *i.e.*  $v = 2$ ;
- O mecanismo é espacial, *i.e.*  $\lambda = 6$  e a conectividade entre o objeto segurado e o elo fixo deve ser  $C = M$ ;
- Cadeias com fracionamento não atendem os requisitos funcionais da mão robótica: as cadeias com fracionamento de elo, com somente dois circuitos independentes, não contêm um elo ternário e as cadeias com fracionamento de junta também são impróprias porque não é possível escolher um elo fixo tal que se tenha conectividade  $C = M$  relativa ao elo da base;
- Conseqüentemente, se uma cadeia cinemática com juntas simples é apropriada para a aplicação como mão robótica, de acordo com as especificações acima, deve conter a subcadeia mostrada na Fig. 5.2. A subcadeia representa o objeto a ser segurado e os três contatos pontuais com atrito. Note que para simplificar a enumeração das cadeias cinemáticas, o par esférico que possui 3-DoF foi substituído por um conjunto de três juntas simples equivalentes (ver seção 2.4 na página 13).

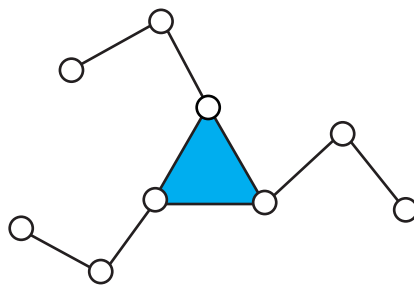


Figura 5.2: Subcadeia que deve ser incluída em todas as cadeias com potencial para aplicação como mãos robóticas que atendem os requisitos funcionais descritos acima.

Resumindo, as características estruturais dos mecanismos com potencial para aplicação como mãos robóticas são as seguintes:

- Dois circuitos, *i.e.*  $v = 2$ ;
- Espacial, *i.e.*  $\lambda = 6$ ;

- Cadeias fracionadas não são adequadas;
- $C_{base,objeto} = M$ ;
- Devem conter a subcadeia da Fig. 5.2;
- A mobilidade não foi especificada, vamos enumerar cadeias cinemáticas com  $2 \leq M \leq 6$ .

Algumas características estruturais são incorporadas no *gerador* e outras no *avaliador* (ver metodologia de projeto de mecanismos proposta por Tsai (2001) no capítulo 1 página 3).

As características estruturais incorporadas ao gerador são:

- Mobilidade, *i.e.*  $2 \leq M \leq 6$ ;
- Número de circuitos, *i.e.*  $v = 2$ ;
- Sistema de helicóides, *i.e.*  $\lambda = 6$ .

Como as cadeias com fracionamento não são adequadas, serão utilizados os métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas descritos na seção 3.3.1 na página 35.

As características estruturais incorporadas ao avaliador são:

- Conectividade;
- Inspeção da subcadeia da Fig. 5.2.

A Tab. 5.1 mostra os resultados da síntese e análise estrutural (gerador e avaliador da metodologia de Tsai) de cadeias cinemáticas com  $\lambda = 6$  e  $v = 2$ . A coluna 1 mostra mobilidade; a coluna 2 o número total de cadeias cinemáticas (k.c.) sem fracionamento; a coluna 3 o número de cadeias que possuem a subcadeia da Fig. 5.2; a coluna 4 o número de inversões úteis (mecanismos) para cada uma das cadeias cinemáticas representadas na coluna 3. Os únicos mecanismos da coluna 4 apropriados para a aplicação em mãos robóticas são aqueles que possuem a conectividade relativa entre o objeto e o elo fixo igual a mobilidade mostrada na coluna 1. A conectividade relativa entre o objeto e o elo fixo foi calculada com o algoritmo de Martins e Carboni (2006). Os mecanismos apropriados para aplicação como mãos robóticas que atendem os requisitos funcionais descritos acima são mostrados na coluna 5.

Tabela 5.1: Cadeias cinemáticas para mãos robóticas com  $\lambda = 6$ ,  $\nu = 2$ .

Mobilidade M	Número total de k.c. sem fracionamento	K.c. com a subcadeia da Fig. 5.2	Inversões úteis das k.c. conten- do a subcadeia	Mecanismos apropriados para mãos robóticas
2	7	4	21	19
3	10	6	34	26
4	12	7	50	22
5	15	9	71	16
6	18	11	97	9

A Fig. 5.3 mostra a cadeia cinemática e o mecanismo para uma mão robótica com  $M = 6$  e  $\nu = 2$ , esse mecanismo é conhecido como Stanford/JPL Hand ou Salisbury Hand [Tischler et al. 1995, Mason e Salisbury 1985]. Os outros oito mecanismos podem ser encontrados em Tischler *et al.* (1995).

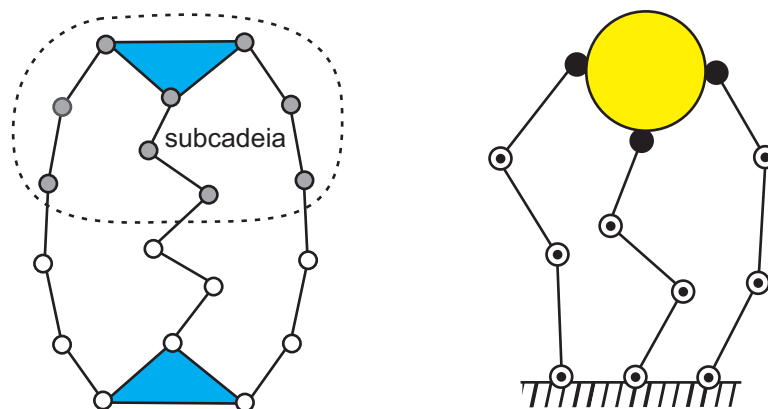


Figura 5.3: Mecanismo da mão robótica Stanford/JPL ou Salisbury.

A Fig. 5.4 mostra uma cadeia cinemática não simétrica e o mecanismo com potencial para aplicação como mão robótica e a Fig. 5.5 mostra uma cadeia cinemática simétrica e o mecanismo com potencial para aplicação como mão robótica. Ambas as cadeias possuem mobilidade  $M = 3$ . Os outros 24 mecanismos indicados na linha 2 da Tab. 5.1 podem ser facilmente esboçados.

Os resultados da Tab. 5.1 estão de acordo com os resultados obtidos em Tischler *et al.* (1995). A diferença da Tab. 5.1 com a Tab. 1 em [Tischler et al. 1995] é que Tischler *et al.* enumeraram cadeias cinemáticas com fracionamento usando seu método (o método de Melbourne apresentado na seção 3.1.6, página 31), as quais devem ser eliminadas porque não atendem os

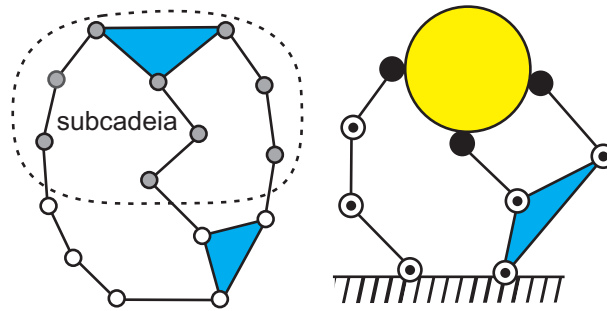


Figura 5.4: Mecanismo não simétrico com  $M = 3$ .

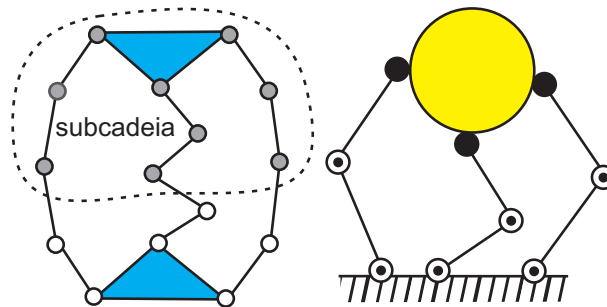


Figura 5.5: Mecanismo simétrico com  $M = 3$ .

requisitos funcionais da mão robótica e os métodos descritos na seção 3.3.1 na página 35 não enumeram, eliminando esforços computacionais para a geração e a identificação destas cadeias.

## 5.4 Conclusões do capítulo

Baseado nas restrições cinemáticas de mãos robóticas resumidas em Tischler *et al.* [Tischler 1995], foram enumeradas todas as cadeias cinemáticas sem fracionamento que satisfazem o critério da mobilidade e o número de circuitos para aplicação como mãos robóticas. Com o objetivo de identificar as cadeias apropriadas para a aplicação como mãos robóticas foi aplicado o critério da conectividade para classificar as cadeias cinemáticas geradas.

A Tab. 5.1 mostra a enumeração de mecanismos alternativos para mãos robóticas e entre esses mecanismos está a mão robótica antropomórfica conhecida como Stanford/JPL Hand ou Salisbury Hand.

Com esta aplicação, foram validados os métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas e mecanismos apresentados nos capítulos 3 e 4. Também foi validada a aplicação sistemática do critério da conectividade.



## 6 *Conclusões e Perspectivas*

Durante o período desta dissertação (Março/2006 - Fevereiro/2008) foram desenvolvidos assuntos de grande interesse para o grupo de robótica da UFSC. O conhecimento matemático possibilitou a aplicação de ferramentas da teoria de grafos e teoria de grupos para solução de problemas da engenharia.

### 6.1 **Conclusões**

Esta dissertação apresenta uma revisão dos métodos clássicos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas encontrados na literatura e identifica os principais problemas destes métodos. Existem duas espécies de problemas: geração de cadeias isomórficas e degeneradas, as quais devem sempre ser evitadas por um método ideal de síntese estrutural; e a geração de cadeias com fracionamento, que devem ser consideradas opcionais. Em vista disso, três métodos para a síntese estrutural de cadeias cinemáticas foram propostos:

#### 1. Para geração de cadeias sem fracionamento:

- Variação do método de Farrell [Tischler et al. 1995]: a variação consiste em evitar a geração de cadeias cinemáticas com fracionamento. O método foi implementado em C++ e utiliza as ferramentas da Boost Graph Library [Siek et al. 2002].
- Variação do método de Sunkari e Schimidt (2006): a variação consite em adaptar o gerador de grafos do McKay (1990) para enumerar grafos biconectados. Assim, as cadeias listadas não apresentam fracionamento e degeneracidade.

#### 2. Para geração de cadeias com fracionamento:

- Variação do método de Sunkari e Schmidt (2006): a variação consite em adaptar o gerador de grafos do McKay (1990) para enumerar grafos conectados com grau dos vértices maior ou igual a dois. Assim, as cadeias listadas podem apresentar fracionamento.

### 3. Para geração exclusiva de cadeias com fracionamento:

- Este método é parecido com o método de enumeração de cadeias cinemáticas proposto por Assur [Tischler et al. 1995, Mruthyunjaya 2003]. Cadeias com complexidade maior (muitos elos) são geradas pela agregação de cadeias mais simples (poucos elos). Cadeias degeneradas não são enumeradas e o número de cadeias isomórficas é pequeno porque a agregação obedece certas regras.

Os resultados são apresentados em tabelas e, para o caso plano ( $\lambda = 3$ ), estão de acordo com a literatura. As diferenças nos resultados encontrados na literatura são analisadas e referem-se a cadeias fracionadas. Pela primeira vez foi feita a identificação explícita do número de cadeias com fracionamento. A vantagem das tabelas de enumeração de cadeias cinemáticas apresentadas no texto em relação as encontradas na literatura é que foram enumeradas cadeias cinemáticas para outros sistemas de helicóides ( $\lambda \neq 3$ ) e não só para o caso plano ( $\lambda = 3$ ). Esses resultados obtidos validam os métodos propostos e compensam o esforço do trabalho.

Um novo método para enumeração de mecanismos foi desenvolvido usando uma nova abordagem com ferramentas da teoria de grupos. Pela primeira vez na literatura de mecanismos foi introduzido o conceito de órbitas do grupo de automorfismos do grafo associado a uma cadeia cinemática para representar as inversões cinemáticas ou mecanismos. Os resultados do método foram apresentados em tabelas no texto e, para o caso plano ( $\lambda = 3$ ), estão de acordo com a literatura. Novos resultados foram obtidos para mecanismos que operam em vários sistemas de helicóides.

Os métodos de síntese estrutural de cadeias cinemática e mecanismos foram validados com os resultados encontrados na literatura. Mesmo assim, foi apresentada uma aplicação para enumerar mecanismos alternativos para mãos robóticas com o objetivo de validar a aplicação dos métodos propostos para o projeto de mecanismos. Os resultados obtidos estão de acordo com a literatura.

## 6.2 Artigos publicados e submetidos

Durante o período desta dissertação foram publicados dois artigos em congressos e foram submetidos três artigos para revistas internacionais, os quais encontram-se em revisão.

Artigos publicados:

1. SIMONI, R. and MARTINS, D. Criteria for structural synthesis and classification of mechanism. In: Proceedings 19th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM. Brasília - DF, 2007.
2. SIMONI, R., MARTINS, D. and CARBONI, A. P. Mãos Robóticas: Critérios para Síntese Estrutural e Classificação. XV Jornadas de Jóvenes Investigadores da Asociación de Universidades do Grupo Montevideo (AUGM), Campus de la UNA - Paraguay, 2007.

Artigos submetidos:

1. SIMONI, R., MARTINS, D. and CARBONI, A. P. Enumeration of kinematic chains and mechanisms. Submitted to Mechanism and Machine Theory, November 2007.
2. SIMONI, R., MARTINS, D. and CARBONI, A. P. Enumeration of fractionated kinematic chains. Submitted to Journal of Mechanical Design, December 2007.
3. SIMONI, R., MARTINS, D. and CARBONI, A. P. Enumeration of parallel manipulator. Submitted to Journal of Robotica, December 2007.

## 6.3 Perspectivas de trabalhos futuros

Existe um campo de pesquisa amplo na área de síntese estrutural de cadeias cinemáticas e mecanismos.

Uma das limitações dos resultados da enumeração de cadeias cinemáticas apresentados nas tabelas no texto está relacionada a identificação de cadeias isomórficas e degeneradas. Essa identificação requer um grande esforço computacional e quando o número de elos aumenta o problema se torna impraticável. Existe a necessidade de propôr novos métodos para identificação de cadeias isomórficas e degeneradas ou elaborar heurísticas para melhorar os métodos encontrados na literatura.

O método de enumeração de mecanismos pode ser estendido para enumeração de manipuladores paralelos com um efetuador final. Uma das maneiras de fazer essa extensão é atribuir cores aos vértices do grafo e calcular órbitas do grupo de automorfismos de grafos coloridos.

Tendo em vista que o número de cadeias cinemáticas geradas é geralmente muito grande, existe a necessidade de elaborar e sistematizar a aplicação de critérios para a classificação das cadeias cinemáticas geradas. Uma possibilidade é aplicação sistemática dos critérios de variedade, conectividade, grau de controle e redundância.

Outra perspectiva é a aplicação da teoria de grupos para evitar configurações singulares em manipuladores paralelos.

## *Referências Bibliográficas*

- AGRAWAL, V. P.; RAO, J. S. The mobility properties of kinematic chains. *Mechanism and Machine Theory*, v. 22, n. 5, p. 497–504, 1987.
- ALPERIN, J.; BELL, R. *Groups and representations*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1995.
- AMBEKAR, A. G.; AGRAVAL, V. P. Canonical numbering of kinematic chains and isomorphism problem: min code. *Mechanism and machine theory*, Elsevier, v. 22, n. 5, p. 453–461, 1987.
- APPEL K., W. H.; KOCH, J. Every planar map is four-colorable. *Illinois Journal of Mathematics*, v. 21, p. 429–567, 1977.
- ASSUR, L. V. Investigation of plane hinged mechanisms with lower pairs from the point of view of their structure and classification (in Russian): Part I, II. *Bull. Petrograd Polytech. Inst.*, v. 20, p. 329–386, 1913.
- BACK, N. et al. *Metodologia de projeto integrado de produtos*. 1st ed.. ed. [S.l.]: Monole Editora Ltda, 2006.
- BELFIORE, N. P.; BENEDETTO, A. D. Connectivity and redundancy in spatial robots. *The International Journal of Robotics Research*, Sage Publications, Inc, v. 19, n. 12, p. 1245–1261, December 2000.
- BOOST C++ Libraries. Boost C++ Libraries. This is an electronic document. Available from: <http://www.boost.org>.
- BURROW, M. *Representation theory of finite groups*. [S.l.]: New York: Dover,, 1993.
- BUTTERFASS, J. et al. DLR-Hand II: next generation of a dextrous robot hand. *Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on*, v. 1, 2001.
- CARBONI, A. P. *Análise estrutural de cadeias cinemáticas planas e espaciais*. Dissertação (Dissertação de mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, Fevereiro 2008.
- COLBOURN, C. J.; READ, R. C. Orderly algorithms for graph generation. *International Journal of Computer Mathematics*, v. 7, p. 167–172, 1979.
- CRISTOBAL, J. A. G. *Método de Síntesis Dimensional Óptima de Sistemas Multicuerpo con Restricciones Dinamicas. Aplicacion al Diseño de Mecanismos Planos*. Tese - Universidad de La Rioja, Logroño, Novembro 2003.
- CROSSLEY, F. R. E. The permutations of kinematic chains of eight members or less from the graph theoretic viewpoint. In: SHAW, W. A. (Ed.). *Developments in Theoretical and Applied Mechanics Vol II*. Oxford: Pergamon Press, 1964. p. 467–486.

- CUTKOSKY, M. On grasp choice, grasp models, and the design of hands for manufacturing tasks. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, v. 5, n. 3, p. 269–279, 1989.
- DAVIDSON, J. K.; HUNT, K. H. *Robots and Screw Theory: Applications of Kinematics and Statics to Robotics*. New York: Oxford University Press Inc., 2004. ISBN 0-19-856245-4.
- DAVIES, T. H.; CROSSLEY, F. E. Structural analysis of plane linkages by Franke's Condensed Notation. *Journal of Mechanisms*, v. 1, p. 171–183, 1966.
- DIESTEL, R. *Graph Theory*. [S.l.]: Springer, 2005.
- DIETER, G. E. *Engineering Design: A Materials and Processing Approach*. New York: McGraw-Hill, 1991.
- DOBRJANSKYJ, L.; FREUDENSTEIN, F. Some applications of graph theory to the structural analysis of mechanisms. *Trans. ASME B, Journal of Engineering for Industry*, v. 89, p. 153–158, Feb 1967.
- ERTHAL, J. L. *Modelo Matemático de Suspensão Automotiva Baseado no Método de Davies*. Tese (Exame de Qualificação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Março 2007.
- FREUDENSTEIN, F. The basic concepts of Polya's Theory of enumeration, with application to the structural classification of mechanisms. *Journal of Mechanisms*, v. 3, p. 275–290, 1967.
- FREUDENSTEIN, F.; MAKI, E. Kinematic Structure of Mechanisms for Fixed and Variable-Stroke Axial-Piston Reciprocating Machines. *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, v. 106, p. 355–364, 1984.
- FUKAYA, N. et al. Design of the TUAT/Karlsruhe humanoid hand. *Intelligent Robots and Systems, 2000.(IROS 2000). Proceedings. 2000 IEEE/RSJ International Conference on*, v. 3, 2000.
- GAO, X. et al. The HIT/DLR dexterous hand: work in progress. *Robotics and Automation, 2003. Proceedings. ICRA'03. IEEE International Conference on*, v. 3, 2003.
- GIBSON, C. G.; HUNT, K. H. Geometry of screw systems: Part 1 - screws: Genesis and geometry. *Mechanism and Machine Theory*, v. 2, p. 307–327, 1988.
- HUNT, K. H. *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford: Clarendon Press, 1978.
- HUNT, K. H.; SAMUEL, A. E.; TISCHLER, C. R. A robotic hand mechanism. *Provisional Patent Specification, Australian Industrial Property Organisation*, PN1563/95, March 1995.
- HWANG, W.-M.; HWANG, Y. W. An algorithm for the detection of degenerate kinematic chains. *Math. Comput. Modelling*, v. 15, n. 11, p. 9–15, 1991. ISSN 0895-7177.
- IONESCU, T. Terminology for mechanisms and machine science. *Mechanism and Machine Theory*, v. 38, n. 7-10, p. 597–1111, 2003.
- JACOBSEN, S. et al. Design of the Utah/MIT Dextrous Hand. *Robotics and Automation. Proceedings. 1986 IEEE International Conference on*, v. 3, 1986.

- JAMES, K. R.; RIHA, W. Algorithm 28: Algorithm for generating graphs of a given partition. *Computing*, v. 16, p. 153–161, 1976.
- LASCHI, C. et al. Grasping and manipulation in humanoid robotics. *First IEEE-RAS Int. Conf. on Humanoid Robots, Cambridge, MA, September, 2000*.
- LEDA Graph. Available from: [http://www.algorithmic-solutions.info/leda\\_manual/manual.html](http://www.algorithmic-solutions.info/leda_manual/manual.html).
- LEE, H.; YOON, Y. Detection of rigid structure in enumerating basic kinematic chain by sequential removal of binary link string. *JSME*, v. 35, n. 4, p. 647–651, 1992.
- LEE, H.; YOON, Y. Algorithm to identify the types of degrees of freedom in kinematic chains. *JSME International Journal*, v. 39, n. 1, p. 144–148, 1996.
- LEE, H.-J.; YOON, Y.-S. Automatic method for enumeration of complete sets of kinematic chains. *JSME International Journal*, v. 37, n. 4, p. 812–818, 1994. Series C.
- LOVCHIK, C. et al. The Robonaut hand: a dexterous robot hand for space. *Robotics and Automation, 1999. Proceedings. 1999 IEEE International Conference on*, v. 2, 1999.
- MARS Hand. Available from: <http://robot.gmc.ulaval.ca/en/research/theme303.html>.
- MARTINS, D. *Hierarchical Kinematic Analysis of Robot Manipulators*. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina- UFSC, Florianópolis, SC, February 2002.
- MARTINS, D.; PIGA CARBONI, A. Variety and connectivity in kinematic chains. *Mechanism and Machine Theory*, December 2006. Accepted.
- MASON, M. T.; SALISBURY, J. K. Robot hands and the mechanics of manipulation. *The MIT Press, Cambridge, Massachusetts*, 1985.
- MAYOURIAN, M.; FREUDENSTIEN, F. The development of an atlas of kinematic structures of mechanisms. *Trans. ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, v. 106, p. 458–461, Dec 1984.
- MCKAY, B. The nauty page. Available from: <http://cs.anu.edu.au/bdm/nauty>. Australian National University.
- MCKAY, B. nauty User's Guide (version 1.5), Tech. Rep. [S.l.], 1990. TR-CS-90-02, Department Computer Science, Australian National University.
- MCKAY, B. Isomorph-free exhaustive generation. *Journal of Algorithms*, Elsevier, v. 26, n. 2, p. 306–324, 1998.
- MERLET, J.-P. Still a long way to go on the road for parallel mechanisms. *ASME 27th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, 2002.
- MRUTHYUNJAYA, T. S. Structural synthesis by transformation of binary chains. *Mechanism and Machine Theory*, v. 14, p. 221–231, 1979.
- MRUTHYUNJAYA, T. S. A computerized methodology for structural synthesis of kinematic chains: Part 1 - formulation. *Mechanism and Machine Theory*, v. 19, n. 6, p. 487–495, 1984a.



- MRUTHYUNJAYA, T. S. A computerized methodology for structural synthesis of kinematic chains: Part 2 - Application to several fully or partially known cases. *Mechanism and Machine Theory*, v. 19, n. 6, p. 497–505, 1984b.
- MRUTHYUNJAYA, T. S. A computerized methodology for structural synthesis of kinematic chains: Part 3 - Application to the new case of 10-link, three-freedom chains. *Mechanism and Machine Theory*, v. 19, n. 6, p. 507–530, 1984c.
- MRUTHYUNJAYA, T. S. Kinematic structure of mechanisms revisited. *Mechanism and Machine Theory*, v. 38, n. 6, p. 279–320, 2003.
- PAHL, G.; BEITZ, W. *Engineering Design: A Systematic Approach*. London: Springer-Verlag, 1992.
- PONS, J.; CERES, R.; PFEIFFER, F. Multifingered dextrous robotics hand design and control: a review. *Robotica*, Cambridge Univ Press, v. 17, n. 06, p. 661–674, 1999.
- RABUSKE, M. *Introdução à teoria dos grafos*. [S.l.]: Editora da UFSC, 1992.
- ROTMAN, J. *An Introduction to the Theory of Groups*. [S.l.]: Springer, 1995.
- ROTMAN, J. *Advanced modern algebra*. [S.l.]: Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- SARAH Hand. Available from: <http://robot.gmc.ulaval.ca/en/research/theme304.html>.
- SCOTT, W. *Group theory*. [S.l.]: Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1964.
- SIEK, J.; LEE, L.; LUMSDAINE, A. *The Boost Graph Library: User Guide and Reference Manual*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2002.
- SIMONI, R.; MARTINS, D. Criteria for structural synthesis and classification of mechanism. In: *Proceedings 19th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM*. Brasília - DF: [s.n.], 2007.
- SIMONI, R.; MARTINS, D.; CARBONI, A. P. Enumeration of fractionated kinematic chains. *Submitted to Journal of Mechanical Design*, December 2007a.
- SIMONI, R.; MARTINS, D.; CARBONI, A. P. Enumeration of kinematic chains and mechanisms. *Submitted to Mechanism and Machine Theory*, November 2007b.
- SIMONI, R.; MARTINS, D.; CARBONI, A. P. Enumeration of parallel manipulator. *Submitted to Journal of Robotica*, December 2007c.
- SIMONI, R.; MARTINS, D.; CARBONI, A. P. Mãos robóticas: Critérios para síntese estrutural e classificação. *XV Jornadas de Jóvenes Investigadores da Asociación de Universidades do Grupo Montevideo (AUGM), Campus de la UNA - Paraguay, 2007*, 2007d.
- SONI, A. H. Structural analysis of two general constraint kinematic chains and their practical application. *Trans. ASME B, Journal of Engineering for Industry*, v. 93, p. 231–238, February 1971.
- SUH, N. *The Principles of Design*. New York: Oxford University Press, 1990.



- SUNKARI, R.; SCHMIDT, L. Critical review of existing degeneracy testing and mobility type identification algorithms for kinematic chains. *29th Mechanisms and Robotics Conference, Long Beach, CA., ASME 2005*, 2005.
- SUNKARI, R. P.; SCHMIDT, L. C. Structural synthesis of planar kinematic chains by adapting a mckay-type algorithm. *Mechanism and Machine Theory*, v. 41, p. 1021–1030, 2006.
- TISCHLER, C.; SAMUEL, A. E.; HUNT, K. H. Selecting multi-freedom multi-foop cinematic chains to suit a givem tasks. *Mechanism and Machine Theory*, 36, p. 925–938, 2000.
- TISCHLER, C. R. *Alternative Structures for Robot Hands*. Ph.D. Dissertation - University of Melbourne, 1995.
- TISCHLER, C. R. et al. Screw geometry and Ball's inertia. In: LIPKIN, H.; DUFFY, J. (Ed.). *Proceedings of a Symposium Commemorating the Legacy, Works and Life of Sir Robert Stawell Ball Upon the 100th Anniversary of A Treatise on the Theory of the Screws*. Trinity College: University of Cambridge CDROM, 2000a. p. 1–14:Ball2000–28.pdf.
- TISCHLER, C. R. et al. Screw geometry and Ball's inertia. In: LIPKIN, H.; DUFFY, J. (Ed.). *Proceedings of a Symposium Commemorating the Legacy, Works and Life of Sir Robert Stawell Ball Upon the 100th Anniversary of A Treatise on the Theory of the Screws*. Trinity College: University of Cambridge CDROM, 2000b. p. 1–14:Ball2000–28.pdf.
- TISCHLER, C. R.; SAMUEL, A. E.; HUNT, K. H. Kinematic chains for robot hands: Part 1 orderly number-synthesis. *Mechanism and Machine Theory*, v. 30, n. 8, p. 1193–1215, 1995a.
- TISCHLER, C. R.; SAMUEL, A. E.; HUNT, K. H. Kinematic chains for robot hands: Part 2 kinematic constraints, classification, connectivity, and actuation. *Mechanism and Machine Theory*, v. 30, n. 8, p. 1217–1239, 1995b.
- TOWNSEND, W. The BarrettHand grasper programmably flexible part handling and assembly. *Industrial Robot: An International Journal*, MCB UP Ltd, v. 27, n. 3, p. 181–188, 2000.
- TSAI, L.-W. *Mechanism Design: Enumeration of Kinematic Structures According to Function*. Washington, D.C.: Mechanical Engineering series, CRC Press., 2001b.
- TUTTLE, E.; PETERSON, S.; TITUS, J. Enumeration of basic kinematic chains using the theory of finite groups. *ASME J. Mech., Transm., Autom. Des*, v. 111, p. 498–503, 1989a.
- TUTTLE, E.; PETERSON, S.; TITUS, J. Further applications of group theory to the enumeration and structural analysis of basic kinematic chains. *Trans ASME J of Mech Trans And Auto In Design*, v. 111, n. 4, p. 494–497, 1989b.
- TUTTLE, E. R. Generation of planar kinematic chains. *Mechanism and Machine Theory*, v. 31, p. 729–748, 1996.
- UICKER, J. J.; RAICU, A. A method for the identification and recognition of equivalence of kinematic chains. *Mechanism and Machine Theory*, v. 10, p. 375–383, 1975.
- VIANA, G. V. R. *Meta-heurísticas e programação paralela em otimização combinatória*. Fortaleza: UFC Editora, 1998. ISBN 85-7282-039-6.

VIJAYANANDA, K. *Computer aided structural synthesis of linkages and epicyclic gear transmissions*. Ph.D. Thesis - Indian Institute of Science, Bangalore, India, 1994.

WALDRON, K. J.; KINZEL, G. L. *Kinematics, Dynamics, and Design of Machinery*. New York: [s.n.], 1999. ISBN 0471583995.

WOO, L. S. Type synthesis of plane linkages. *Trans. ASME B, Journal of Engineering for Industry*, v. 89, p. 159–172, February 1967.

ZHANG, Y. et al. Design and control of the BUAA four-fingered hand. *Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on*, v. 3, 2001.

## APÊNDICE A – Teoria de Grafos

Este apêndice introduz alguns conceitos da teoria de grafos que podem facilitar o entendimento da abordagem sobre síntese estrutural de cadeias cinemáticas e mecanismos. As definições encontradas neste apêndice foram obtidas em [Tsai 2001, Diestel 2005, Siek et al. 2002, LEDA Graph, Rabuske 1992]

### A.1 Grafos

Um grafo é uma noção simples, abstrata e intuitiva, usada para representar a idéia de alguma espécie de relação entre objetos.

**Definição 10.** Um grafo consiste de um conjunto de vértices (pontos) e um conjunto de arestas (linhas).

O conjunto de vértices é conectado pelo conjunto de arestas. Um grafo será denotado por  $H(V, E)$ , onde  $V$  representa o conjunto de vértices e  $E$  representa o conjunto de arestas em que  $|V| = v$  e  $|E| = e$ .

Na Fig. A.1  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}$ .

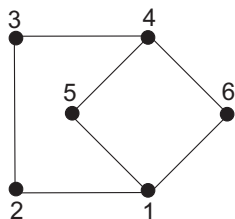


Figura A.1: Grafo não direcionado.

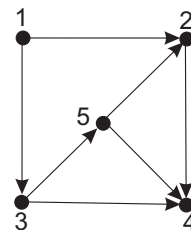


Figura A.2: Grafo direcionado.

Um grafo pode ser direcionado ou não direcionado. Em um grafo não direcionado, a ordem entre os vértices de uma aresta não é importante, *i.e.*  $\{v, w\} = \{w, v\}$ , e as arestas são representadas por linhas simples (ver Fig. A.1). Em um grafo direcionado, a ordem entre os vértices de

uma aresta  $\{v, w\}$  é importante. Esta aresta  $\{v, w\}$  é diferente da aresta  $\{w, v\}$  e é representada com uma flecha de  $v$  para  $w$ . A Fig. A.2 mostra um grafo direcionado onde  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{5, 2\}, \{5, 4\}\}$ .

Grafos direcionados não atendem os propósitos desta dissertação e não serão mais mencionados exceto menção contrária.

**Definição 11.** *Um subgrafo  $H(V_s, E_s)$ , de um grafo  $H(V, E)$ , é um grafo tal que  $V_s \subseteq V$  e  $A_s \subseteq A$ .*

**Definição 12.** *O grau de um vértice é igual ao número de arestas incidentes naquele vértice.*

Um vértice de grau zero é chamado de vértice isolado. No grafo da Fig. A.1 os vértices 1 e 4 possuem grau 3 e os vértices 2, 3, 5 e 6 possuem grau 2.

Um grafo é denso quando  $e \ll v^2$  e esparso quando  $e \approx v^2$ .

## A.2 Caminhos e circuitos

**Definição 13.** *Um caminho é uma seqüência de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  conectados por arestas  $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}$ .*

As arestas são também consideradas parte do caminho. Em um caminho, nenhuma aresta pode ser percorrida mais de uma vez. O comprimento do caminho é igual ao número de arestas entre os vértices inicial e final. No grafo da Fig. A.1 a seqüência (1,  $\{1, 2\}$ , 2,  $\{2, 3\}$ , 3,  $\{3, 4\}$ , 4) é um caminho.

**Definição 14.** *Um circuito é um caminho fechado, i.e.  $v_1 = v_n$ .*

No grafo da Fig. A.1 a seqüência (1,  $\{1, 2\}$ , 2,  $\{2, 3\}$ , 3,  $\{3, 4\}$ , 4,  $\{4, 5\}$ , 5,  $\{5, 1\}$ , 1) é um circuito. Um circuito será simples se nenhum vértice aparecer mais de uma vez, exceto o primeiro e o último. Um circuito simples é chamado de ciclo.

## A.3 Grafos e componentes conexos e biconexos

Dois vértices são conectados, se existir um caminho de um vértice ao outro. Note que dois vértices conectados não são necessariamente adjacentes.

**Definição 15.** *Um grafo é conexo se existe um caminho entre dois vértices quaisquer do grafo.*

O grau mínimo de todo o vértice em um grafo conexo é igual a um.

Um grafo  $H$  pode conter diversas partes, chamadas componentes, cada uma é um subgrafo conexo de  $H$ . Por definição, um grafo conexo tem somente um componente, caso contrário é desconexo. Por exemplo, o grafo mostrado na Fig. A.3 possui dois componentes: *i*)  $\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$  e *ii*)  $\{\{6,7\}, \{7,8\}, \{7,10\}, \{8,9\}\}$ .

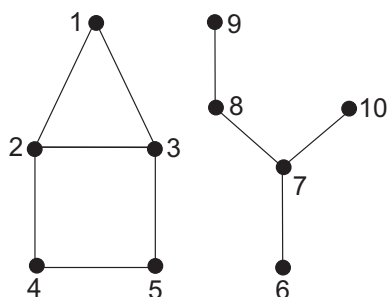


Figura A.3: Componentes do grafos.

**Definição 16.** Um grafo é biconexo se existe pelo menos dois caminhos disjuntos em vértices ligando dois vértices quaisquer do grafo.

Para desconectar um grafo biconexo é necessário remover no mínimo dois de seus vértices. Se os vértices são computadores e as arestas são ligações (rede) entre eles, um computador pode falhar e ainda assim os outros computadores serão capazes de conversar entre si. Como caminhos disjuntos em vértices implica em caminhos disjuntos em arestas, uma ligação pode ser interrompida e ainda assim todos os computadores serão capazes de se comunicar entre si.

**Definição 17.** Os componentes biconexos de um grafo são formados por seus subgrafos máximos biconexos.

Ao contrário dos componentes conexos, os vértices podem pertencer a múltiplos componentes biconexos, aqueles vértices que pertencem a mais de um componente biconexo são chamados pontos de articulação ou vértices de corte (cut vertices). Os pontos de articulação são os vértices cuja a remoção aumentaria o número de componentes conexos no grafo. Assim, um grafo sem pontos de articulação é biconexo. A Fig. A.4 ilustra os pontos de articulação e componentes biconexos de um grafo pequeno. Os vértices podem estar presentes em múltiplos componentes biconexos, mas cada aresta pode somente estar contida em um único componente biconexo.

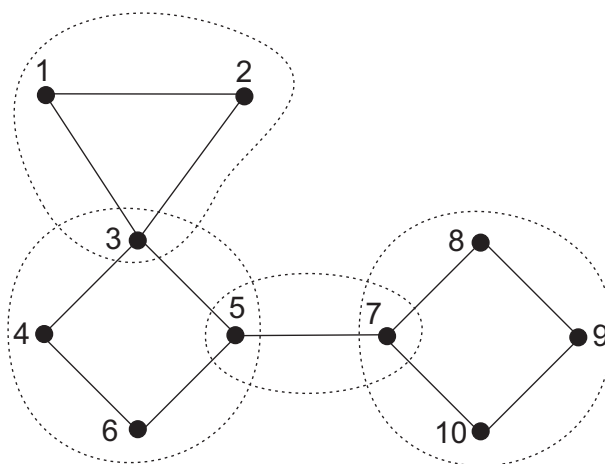


Figura A.4: Componentes biconexos.

## A.4 Isomorfismos

**Definição 18.** Dados dois grafos  $H_1 = (V_1, E_1)$  e  $H_2 = (V_2, E_2)$ ,  $H_1$  é isómrfo a  $H_2$  se, e somente se, existe uma função  $f: V_1 \rightarrow V_2$  tal que  $\{v, w\} \in E_1$  se  $\{f(v), f(w)\} \in E_2$ , para todo  $v, w \in V_1$ .

Segue que dois grafos isomórficos possuem o mesmo número de vértices e arestas, e o grau dos vértices correspondentes devem ser iguais. A Fig. A.5 mostra dois grafos isomórficos onde um isomorfismo entre o grafo da Fig. A.5(a) com o grafo da Fig. A.5(b) é caracterizado pela função  $f$  tal que;  $f(a) = 1$ ,  $f(b) = 6$ ,  $f(c) = 8$ ,  $f(d) = 3$ ,  $f(g) = 5$ ,  $f(h) = 2$ ,  $f(i) = 4$  e  $f(j) = 7$ .

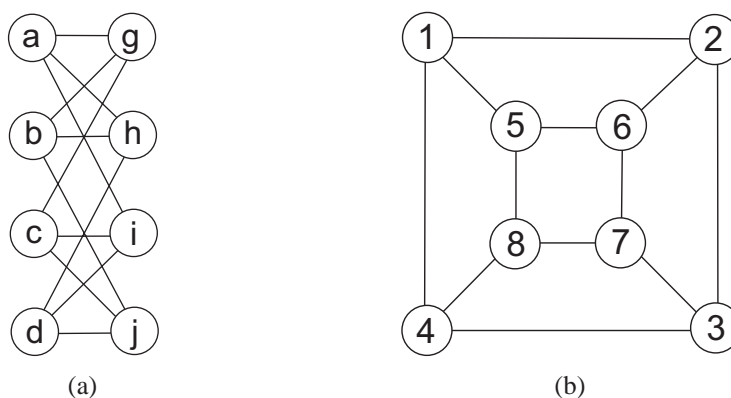


Figura A.5: Grafos isomórficos.

## A.5 Planaridade e Equação de Euler

Um grafo é planar se for possível dispor seus vértices num plano de forma que não haja cruzamento de arestas, caso contrário o grafo é não planar. A Fig. A.1 mostra um grafo planar enquanto que a Fig. A.6 mostra grafos não planares.

Segundo o teorema de Kuratowski um grafo planar não contém o grafo  $K_5$  nem o grafo bipartido  $K_{3,3}$  como subgrafos (ver Fig. A.6) e segundo o teorema da quatro cores, todo grafo planar pode ser colorido com até quatro cores [Appel K. e Koch 1977].

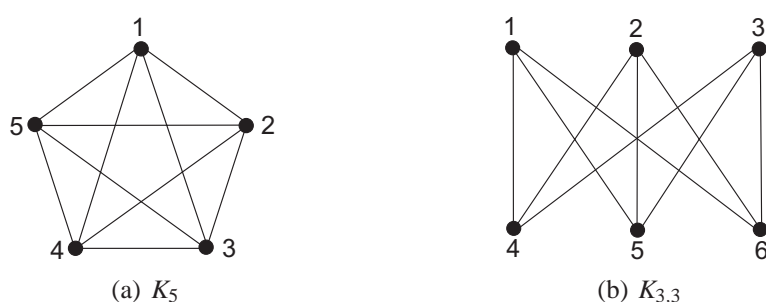


Figura A.6: Grafos não planares.

Seja  $\nu$  o número de circuitos independentes de um grafo conexo planar e  $\tilde{\nu}$  o número total de circuitos. Então é possível mostrar por indução matemática que

$$\tilde{\nu} = \nu + 1. \quad (\text{A.1})$$

Euler estabeleceu a seguinte relação entre o número de arestas, o número de vértices e o número de circuitos de grafos

$$\tilde{\nu} = e - \nu + 2 \quad (\text{A.2})$$

Em termos do número de circuitos independentes a equação A.2 é escrita como

$$\nu = e - \nu + 1. \quad (\text{A.3})$$

## A.6 Representação de grafos

A representação mais comum é a representação matricial, na forma de matrizes de adjacência e de incidência. No entanto, existe outra forma mais compacta e elegante de representar grafos é através dos formatos graph6 e sparse6 que foram introduzidos por McKay (1990).

### A.6.1 Representação matricial

A representação matricial torna a manipulação analítica de grafos de forma computacional praticável e conduz ao desenvolvimento de metodologias sistemáticas para a identificação e à enumeração dos grafos.

**Definição 19.** Sendo  $n$  o número de vértices de um grafo  $H$ , a matriz de adjacência para  $H$  é uma matriz  $A = (a_{i,j})_{n \times n}$  tal que

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se o vértice } i \text{ é adjacente ao vértice } j, \\ 0 & \text{caso contrário (incluindo } i=j). \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

onde  $a_{i,j}$  representa o elemento  $(i, j)$  da matriz  $A$ .

A matriz de adjacência é uma representação vértice versus vértice do grafo, segue que a matriz  $A$  é uma matriz simétrica com a diagonal principal nula. A soma dos elementos de cada linha (ou coluna) da matriz  $A$  corresponde ao grau do vértice correspondente. A equação A.5 mostra a matriz de adjacência do grafo mostrado na Fig. A.1 na página 82.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (\text{A.5})$$

A desvantagem desta representação é que ela ocupa muito espaço se o grafo é denso. Neste caso, a maior parte da matriz é inútil.

O uso de listas de adjacência elimina esta desvantagem pois para cada vértice existe uma lista contendo seus vértices adjacentes. Cada nó destas listas contém a identificação do vértice e um apontador para o próximo vértice cujo valor será zero no final da lista. A lista da Fig. A.7 representa o grafo da Fig. A.1 na página 82. O grau de cada vértice é igual ao número de nós existentes em cada lista encabeçada por ele e o número de vértices do grafo é igual ao número de listas existentes.



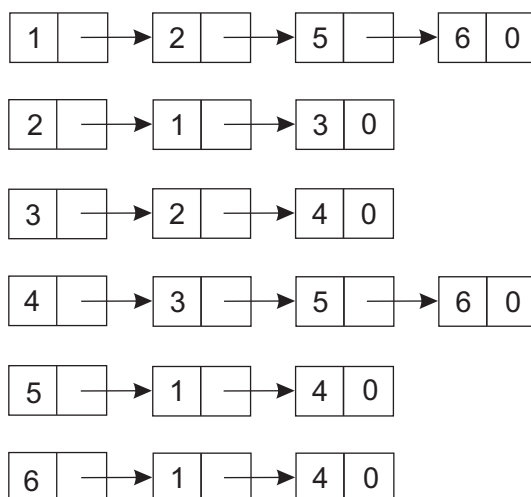


Figura A.7: Lista de adjacência do grafo da Fig. A.1.

**Definição 20.** Sendo  $n$  o número de vértices de um grafo  $H$ , a matriz de incidência para  $H$  é uma matriz  $B = (b_{i,j})_{n \times e}$  tal que

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } i \text{ incide no vértice } j, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

onde  $b_{i,j}$  representa o elemento  $(i, j)$  da matriz  $B$ .

A matriz de incidência é uma representação vértice versus aresta do grafo. A soma dos elementos de cada coluna é igual a dois enquanto que a soma dos elementos das linhas é igual ao grau do respectivo vértice. A equação A.7 mostra a matriz de adjacência do grafo da Fig. A.1 na página 82.

$$B = \begin{matrix} & \{1,2\} & \{2,3\} & \{3,4\} & \{4,5\} & \{5,1\} & \{4,6\} & \{6,1\} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (\text{A.7})$$

## A.6.2 Formatos graph6 e sparce6

Brendan McKay (1990) introduziu os formatos graph6 e sparce6 que são uma codificação da matriz de adjacência do grafo. Ambos os formatos servem para armazenar grafos não direcionados onde cada grafo é armazenado em uma linha de texto. O formato graph6 é adequado

para armazenar grafos densos ( $e \ll v^2$ ) e o formato sparse6 é adequado para grafos esparsos ( $e \approx v^2$ ). Ambos os formatos utilizam uma codificação no formato de texto usando o padrão ASCII (American Standard Code for Information Interchange) com 6 bits cada (0-63) mas só utilizam os caracteres (63-126) para representar o grafo no formato de texto. ASCII é um conjunto de códigos para o computador representar números, letras, pontuação e outros caracteres sob forma de código binário.

### Formato graph6

No formato graph6 a representação é da forma  $N(n)R(x)$  onde  $n$  representa o número de vértices do grafo, onde  $n \in [0, 262143]$  ( $262143 = 2^{18} - 1$ ), e  $x$  é um vetor de bits de comprimento  $n(n-1)/2$  e representa os elementos da parte superior da matriz de adjacência do grafo na seguinte ordem  $(0,1),(0,2),(1,2),(0,3),(1,3),(2,3),\dots,(n-1,n)$ .

**Exemplo 6.** A cadeia cinemática de Stephenson mostrada na Fig. 6 pode ser representada pelo grafo da Fig. A.9. Sua matriz de adjacência é mostrada na equação A.8.

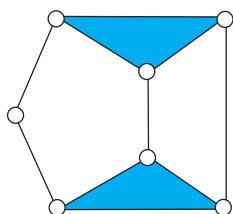


Figura A.8: Grafo não direcionado.

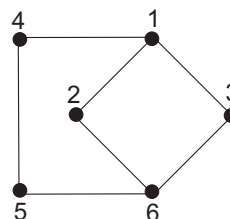


Figura A.9: Grafo de Stephenson.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Neste caso  $n = 6$  e  $x = [1 \ 10 \ 100 \ 0001 \ 01101]$ . O vetor de bits  $x$  será completado com zeros até conter um número de bits múltiplo de 6, assim  $x = [110100 \ 000101 \ 101000]$ . A

representação do grafo da cadeia de Stephenson no formato graph6 é

$$\begin{aligned} G &= N(n)R(x) \\ G &= N(6)R(110100\ 000101\ 101000) \\ G &= 69\ 115\ 68\ 103 \\ G &= EsDg. \end{aligned}$$

Esta é uma forma muito mais compacta para representar o grafo da Fig. A.9 do que a forma matricial da equação A.8.

**Exemplo 7.** Suponha  $n = 5$  e  $G$  possua as seguintes arestas  $E = \{\{0,2\}, \{0,4\}, \{1,3\}, \{3,4\}\}$ . Neste caso,  $x = 0100101001$ . Então  $N(n) = 68$  e  $R(x) = R(010010\ 100100) = 81\ 99$ . Assim, no formato graph6, o grafo é representado por

$$\begin{aligned} G &= 68\ 81\ 99 \\ G &= DQc. \end{aligned}$$

### Formato sparce6

No formato sparce6, o código consiste do caracter “:” para distinguir do formato graph6, do número de vértices e da lista de arestas em código binário. Para codificar a lista de arestas deixe  $k$  ser o número de bits necessários para representar  $n - 1$  na forma binária. Os bytes do código possuem a seguinte sequência:

$$b[0]\ x[0]\ b[1]\ x[1]\ b[2]\ x[2]\ \dots\ b[m]\ x[m]$$

onde cada  $b[i]$  ocupa 1 bit e cada  $x[i]$  ocupa  $k$  bits. Os vértices do grafo são rotulados com inteiros de 0 a  $n - 1$  e as arestas são codificadas da seguinte maneira.

---

#### Algoritmo 5 Codificação da lista de arestas (formato sparce6)

---

```

v = 0
para {i de 0 até m} faça
  se {b[i] = 1} então
    v = v + 1
  fim se
  se {x[i] > v} então
    v = x[i]
    Saída: {x[i], v}
  fim se
fim para

```

---

Na codificação da lista de arestas, um par  $(b, x)$  incompleto na extremidade é descartado.

**Exemplo 8.** Codificar as arestas do grafo  $:Fa@x^{\wedge}$ .

'.' indica o formato sparse6. É necessário subtrair 63 dos outros bytes e escrevê-los na forma binária com seis bits cada

000111 100010 000001 111001 011111

Os primeiros seis bits indicam o valor de  $n$ , i.e.  $n = 7$ .  $n - 1$  necessita de 3 bits para ser representado na forma binária, i.e.  $k = 3$ . É necessário escrever os bits em grupos de 1 e  $k$ :

1 000 1 000 0 001 1 110 0 101 1 111

assim, a sequência  $b/x$  é

1/0 1/0 0/1 1/6 0/5 1/7.

Aplicando o algoritmo 5 para a codificação das arestas ten-se:

$$E = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{5, 6\}\}.$$

A matriz abaixo é a matriz de adjacência do grafo representado na Fig. A.10, i.e.  $:Fa@x^{\wedge}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

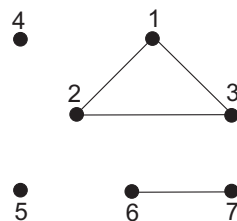


Figura A.10:  $:Fa@x^{\wedge}$ .

**Exemplo 9.** Codificar as arestas do grafo  $:EkGChG\tilde{}$ .

' $:$ ' indica o formato sparse6. É necessário subtrair 63 dos outros bytes e escrevê-los na forma binária com seis bits cada

000110 101100 001000 000100 101001 001000 111111

Os primeiros seis bits indicam o valor de  $n$ , i.e.  $n = 6$ .  $n - 1$  necessita de 3 bits para ser representado na forma binária, i.e.  $k = 3$ . É necessário escrever os bits em grupos de 1 e  $k$ :

1 011 0 000 1 000 0 001 0 010 1 001 0 010 0 011 1 111

assim, a sequência  $b/x$  é

1/3 0/0 1/0 0/1 0/2 1/1 0/2 0/3 1/7.

Aplicando o algoritmo de codificação das arestas tem-se:

$$E = \{\{0,3\}, \{0,4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{3,5\}\}.$$

A matriz de adjacência é mostrada na equação A.10 e o grafo na Fig. A.11.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

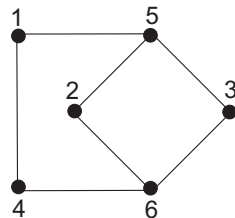


Figura A.11:  $:EkGChG\tilde{}$ .

A eficiência no armazenamento de grafos nos formatos graph6 e sparse6 pode ser constatada do fato que 17.083 grafos com 15 vértices foram armazenados em 333,7 KB no formato graph6 e em 317,0 KB no formato sparse6 enquanto que no formato de matrizes de adjacência os mesmos 17.083 grafos ocupam 7,7 MB.

## *APÊNDICE B – Interface Gráfica*

Este apêndice apresenta a interface gráfica dos métodos de síntese estrutural de cadeias cinemáticas e mecanismos descritos nos capítulos 3 e 4. A parte gráfica foi desenvolvida pelos bolsistas de iniciação científica Marcelo Hisashi Mtsui e Luiz Artur Cesar Portela e permite uma integração completa com o algoritmo de análise estrutural de cadeias cinemáticas implementado por Andrea Piga Carboni [Carboni 2008]. O resultado da integração é um sistema completo de geração e avaliação de cadeias cinemáticas.

As próximas seções apresentam a interface gráfica.

### **B.1 Janela principal**

A Fig. B.1 mostra a janela principal. Nesta janela existem três tópicos principais disponíveis:

1. Síntese estrutural de cadeias cinemáticas;
2. Análise estrutural de cadeias cinemáticas;
3. Síntese estrutural de mecanismos.

Este capítulo descreve os itens 1 e 3. A descrição do item 2, análise estrutural de cadeias cinemáticas, é encontrada em [Carboni 2008].

Na síntese estrutural de cadeias cinemáticas existem dois botões que abrem as janelas dos métodos de geração de cadeias cinemáticas implementados:

1. Variação do método de Farrell;
2. Variação do método de Sunkari and Schmidt.



Figura B.1: Janela principal.

Na síntese estrutural de mecanismos existe um botão que abre a janela do método de geração de mecanismos.

Os dados de entrada e de saída dos respectivos algoritmos são apresentados a seguir.

## B.2 Janela da variação do método de Farrell

A Fig. B.2 mostra a janela referente a variação do método de Farrell. O objetivo da variação do método de Farrell é evitar a geração de cadeias cinemáticas com fracionamento. Na implementação do algoritmo foram utilizadas ferramentas da Boost Graph Library [Siek et al. 2002] da Boost [Boost C++ Libraries] que são distribuídas livremente.

Os dados de entrada na interface são:

- $M$  - a mobilidade da cadeia cinemática;
- $\lambda$  - sistema de helicóides;
- um dos parâmetros seguintes (escolha):
  - $n$  - número de elos;
  - $j$  - número de juntas;
  - $c$  - número de circuitos.

Com esses dados de entrada, um algoritmo que usa ferramentas de análise combinatorial calcula as partições e escreve na janela central.

Cada uma dessas partições é passada para o algoritmo de geração. A descrição detalhada do método é feita na seção 3.3.1 na página 36. Os grafos isomórficos são eliminados usando o teste de isomorfismos da Boost Graph Library [Siek et al. 2002] cuja complexidade de tempo no pior caso é  $O(|V|!)$ . O algoritmo gera grafos degenerados, os quais representam cadeias cinemáticas degeneradas, e devem ser eliminados usando o algoritmo integrado do Andrea Piga Carboni [Carboni 2008]. Os grafos são armazenados no formato de matrizes de adjacência.

### **B.3 Janela da variação do método de Sunkari and Schmidt I**

A Fig. B.3 mostra a janela referente a variação do método de Sunkari and Schmidt I. O gerador de grafos do McKay (1990), que é distribuído livremente, foi adaptado para gerar grafos biconectados, os quais representam cadeias cinemáticas sem fracionamento.

Os dados de entrada da interface são:

- $M$  - a mobilidade da cadeia cinemática;
- $\lambda$  - ordem do sistema de helicóides;
- $c$  - número de circuitos.

Resolvendo a equação geral da mobilidade com os dados acima são encontrados o número de elos ( $n$ ) e o número de juntas ( $j$ ) da cadeia cinemática os quais correspondem respectivamente aos vértices e arestas do grafo associado. Com esses dados ( $n$  e  $j$ ) são gerados grafos



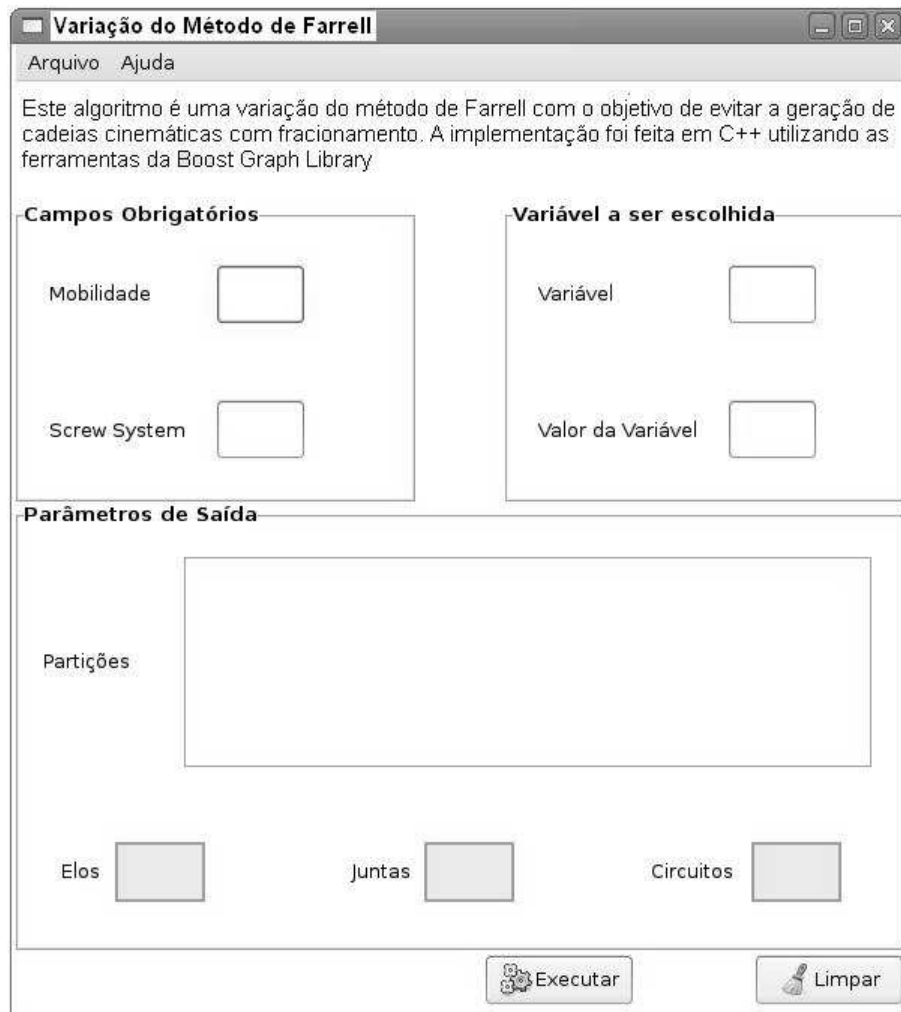


Figura B.2: Janela da variação do método de Farrell.

biconectados elivre de estruturas simples, *i.e.* triângulos para  $\lambda = 3$ , quatro barras para  $\lambda = 4$  e assim por diante. Os grafos são armazenado no formato graph6. Esse formato pode ser convertido para matriz de adjacência usando o botão *Converter* (ver Fig. B.3). Grafos degenerados (grafos que representam cadeias cinemáticas degeneradas) também são gerados e devem ser eliminados com o algoritmo integrado de Andrea Piga Carboni [Carboni 2008].

## B.4 Janela da variação do método de Sunkari and Schmidt II

A Fig. B.3 também mostra a janela referente a variação do método de Sunkari and Schmidt II, que é similar a janela variação do método de Sunkari and Schmidt I. O gerador de grafos do McKay (1990) foi adaptado para gerar grafos conexos e com grau dos vértices maior ou igual a dois. Com isso são gerados grafos que representam cadeias cinemáticas com e sem

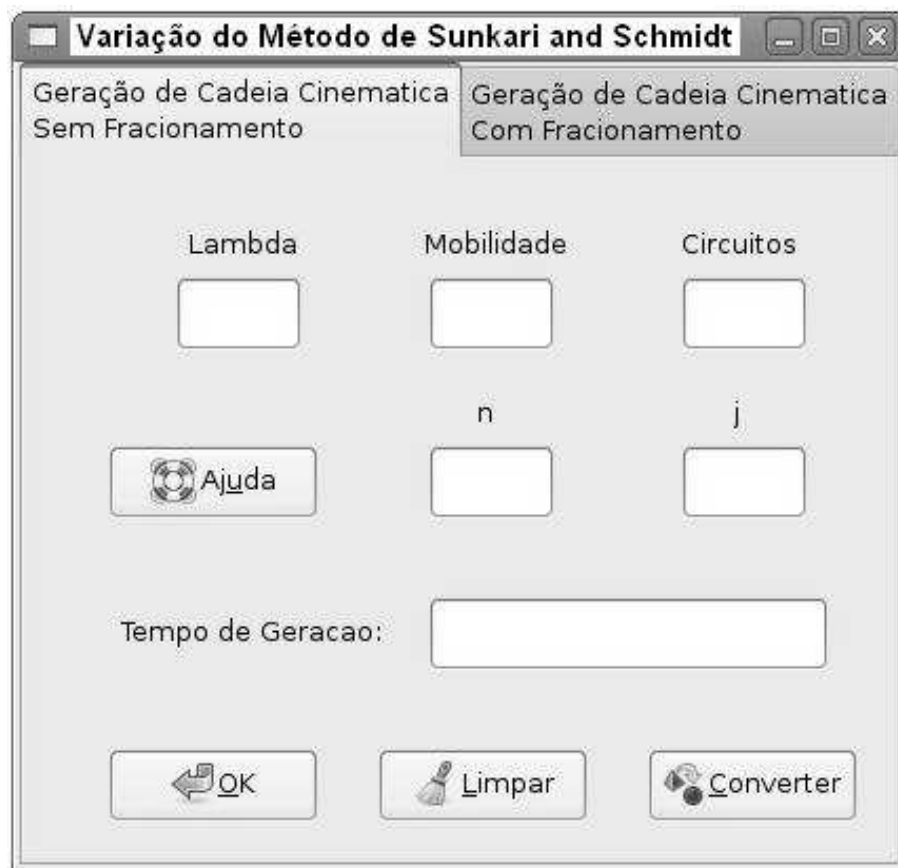


Figura B.3: Janela da variação do método de Sunkari and Schmidt I e II.

fracionamento, evitando a geração de cadeias cinemáticas híbridas.

Os dados de entrada da interface são:

- $M$  - a mobilidade da cadeia cinemática;
- $\lambda$  - ordem do sistema de helicóides;
- $c$  - número de circuitos.

O procedimento de geração, armazenamento e eliminação de grafos degenerados é o mesmo descrito na seção B.3.

## B.5 Janela de inversões cinemáticas ou mecanismos

A Fig. B.5 mostra a janela do método de enumeração de inversões cinemáticas ou mecanismos. Ferramentas da teoria de grupos foram adaptadas para enumeração das inversões cinemáticas. Um novo conceito foi introduzido na teoria de mecanismos: o conceito de órbitas

do grupo de automorfismos do grafo que representa a cadeia cinemática para representar as inversões.

O Nauty do McKay (1990) foi adaptado para calcular as órbitas do grupo de automorfismos dos grafos que representam as cadeias cinemáticas.

A entrada é um grafo (ou um arquivo de grafos) que deve ser selecionada e a saída são as órbitas do grupo de automorfismos do grafo. As inversões de uma cadeia cinemática (grafo) são obtidas escolhendo um representante de cada órbita do grupo de automorfismos do grafo associado. O número total de órbitas para cada cadeia (grafo) também é calculado.



Figura B.4: Janela de inversões cinemáticas ou mecanismos.