UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC

Programa de Pós- Graduação em Educação Científica e Tecnológica

ESTUDO DE FORMAS DE NEGAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA:

Ponto de encontro com os Registros de Representação Semiótica

PATRÍCIA LANZINI FRANCO

Florianópolis - SC

2008

PATRICIA LANZINI FRANCO

ESTUDO DE FORMAS DE NEGAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA:

Ponto de encontro com os Registros de Representação Semiótica.

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal de Santa Catarina, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica.

Orientador: Professor Doutor Méricles Thadeu Moretti

Florianópolis – SC

2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

"ESTUDO DE FORMAS DE NEGAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA: PONTO DE ENCONTRO COM OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA"

Dissertação submetida ao Colegiado do Curso de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica em cumprimento parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Científica e Tecnológica

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 19/08/2008

Dr. Méricles Thadeu Moretti (Orientador)

Drª. Célia Finck Brandt (Examinadora)

Drª. Cláudia Regina Flores (Examinador)

Drª. Neri Terezinha Both Carvalho (Suplente)

Dr. José de Pinho Alves Filho
Coordenador do PPGECT

Patrícia Lanzini Franco
Florianópolis, Santa Catarina, agosto de 2008.

Dedico este trabalho

aos meus pais, Valdir e Jacira,

às minhas filhas, Luiza e Fernanda,

e ao meu marido e companheiro sempre

Sérgio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me conceder a vida e principalmente o alimento espiritual para que eu pudesse chegar ao final deste trabalho. Deus é fiel e cumpre suas promessas. Glórias a ti Senhor.

Aos meus pais pelas sementes plantadas no meu coração desde a infância, que me fizeram sempre acreditar em mim e no meu potencial. Amo vocês.

Ao meu marido Sérgio, companheiro indispensável, por sempre estar ao meu lado em todos os momentos, pela “companhia nas madrugadas”, pelo cuidado comigo... Obrigada meu amor.

Ao professor Méricles, um verdadeiro mestre. Orientador competente, enorme em conhecimento e transbordante em sabedoria. Obrigada por acreditar em mim e me incentivar a cada passo. Que Deus o abençoe sempre.

Às professoras Célia e Cláudia, pela participação na Banca Examinadora, enriquecendo este trabalho com suas contribuições e incentivos.

Aos queridos professores do Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica: Pinho, Angotti, Sônia, Suzani e Irlan. Que compartilharam seus conhecimentos sem restrições, com muito carinho e competência.

Às amigas fiéis que me fortaleceram com momentos de descontração, renovando minhas forças para continuar a caminhada, especialmente para minha colega de jornada Madeline Odete, presença importantíssima nesta trajetória.

A todos aqueles que torceram por mim, e desejaram verdadeiramente o término deste trabalho.

Muito obrigada.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo do uso da negação, da contrapositiva, do contra-exemplo e da complementariedade no Ensino da Matemática. Usou-se como base teórica os Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e como base empírica a análise de aulas gravadas em CD-ROM de professores de Ensino Médio. Observou-se que o professor utiliza com muita freqüência estes elementos em suas aulas, – denominados na pesquisa por *Formas de Negação* – como uma técnica de ensino que facilita a compreensão do aluno, proporcionando o uso de diferentes representações semióticas, aparentemente sem perceber as ligações lógicas existentes.

Palavras-chave: Formas de Negação, Registro de Representação Semiótica, Aprendizagem Matemática.

ABSTRACT

This work presents a study of the negation use, the contrapositive, the against-example and the complementariedade in the Mathematics teaching. It was used as theoretical base the Registers of Representation Semiotics by Raymond Duval and as empirical base the analysis of recorded lessons in CD-ROM of professors of High School. It was observed that the professor quite frequently uses these elements in its lessons - called in the research for Forms of Negation - as one technique of education that helps the understanding of the pupil, providing the use of different semiotics representations, without perceiving the existing logical linkings.

Key-words: Forms of Negation, Register of Representation Semiotics, Mathematical Learning.

SUMÁRIO

DICIONÁRIO DE SÍMBOLOS

$\sim$, $\neg$	Negação
$\rightarrow$, $\Rightarrow$	Condicional, Implicação
$\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$	Bicondicional, Dupla implicação
$\exists$	Existe
$\forall$	Para todo
$\vee$	Disjunção
$\wedge$	Conjunção
/	Tal que
$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
$[V]$	Verdadeiro
$[F]$	Falso
R	Relação
$\Re$	Conjunto dos Números Reais
N	Conjunto dos Números Naturais
Z	Conjunto dos Números Inteiros
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$<$	Menor
$\leq$	Menor ou igual
$>$	Maior
$\geq$	Maior ou igual
$\cup$	União

$\cap$	Intersecção
$\subset$	Está contido
$\not\subset$	Não está contido
$\supset$	Contém
$\not\supset$	Não Contém
r	Resto
$\varnothing$	Vazio
f	Função

CONVITE À LEITURA

A compreensão por parte dos professores de como o aluno aprende Matemática e a incessante busca de métodos e técnicas que facilitem o processo de ensino-aprendizagem continuam sendo alvo de diversas discussões e pesquisas em Educação Matemática.

Em minha prática como professora de Matemática, - já são dezessete anos em sala de aula – vivo uma constante busca da melhor maneira de ensinar cada conteúdo ministrado. É constante em minhas aulas a atitude de “cercar” o objeto de ensino de todos os lados, ensinando para o aluno diferentes caminhos para atingir o objeto, na tentativa de minimizar as dificuldades já conhecidas da Matemática .

Nesta busca, tive a oportunidade de conhecer a teoria de Raymond Duval[(1)] sobre a importância dos diferentes Registros de Representação Semiótica para a compreensão de um objeto matemático. Foi então, a partir deste conhecimento, da minha prática pessoal e da observação de aulas de colegas, que pude perceber que muitas das *“técnicas”* utilizadas com sucesso na aula articulam com as representações dos objetos, compactuando com a teoria de Raymond Duval.

Na verdade, o que me chamou a atenção foi o uso que os professores fazem de algumas *Formas de Negação* [(2)] da lógica no ensino de definições matemáticas e em procedimentos de cálculo e dedução. Percebi que, logo após a definição corriqueira de um objeto, o professor apresenta para o aluno os casos que não se aplicam à definição como o objetivo de sedimentar a definição proferida. Ele fala, por exemplo *“Um cilindro reto é denominado eqüilátero quando a medida do diâmetro de sua base é igual a sua altura (...)”* e logo após apresenta alguns exemplos de cilindros não-eqüiláteros: *“(...) portanto, um canudinho de refrigerante não descreve um cilindro eqüilátero, nem um cabo de vassoura, e muito menos um disco de pizza!*“. O uso destes “não-exemplos” ocorre em diversas definições

[(1)] (1988a, 1988b, 1993, 1995,1996, 2003)
[(2)] Usaremos neste trabalho o termo “Formas de Negação” para o conjunto de operações lógicas que contém a Negação, a Contrapositiva, o Contra-exemplo e a Complementariedade. Abordaremos detalhadamente no Capítulo 2.

matemáticas – se não em todas – e são encontrados tanto na fala do professor quanto nos materiais didáticos.

Um método que muitos professores utilizam quando ensinam função também foi decisivo na elaboração deste trabalho. Para definir uma função, o professor seleciona no conjunto de todas as relações possíveis, aquelas que não são funções. Dizendo: *"(...) quando sair duas flechas de um mesmo elemento de A ou quando algum elemento de A não tiver flecha não é função. O resto todo é função. Basta vocês gravarem esses dois "contra exemplos" para identificar quando é função ou não."* [(3)]. Ele quer dizer que, excluindo todos os exemplos de não-função, o que resta é o conjunto das relações que são funções. Neste caso, são usados exemplos do que não nos interessa, que são os exemplos que não são funções para determinar uma função. Contudo, surge a pergunta: serão estes "*contra-exemplos"* de fato? O que leva esta técnica obter sucesso?

Pude perceber, até mesmo por experiência própria, que estas situações do uso da negação – do que não é – são bastante comuns nas aulas de Matemática. No caso da função, foi possível atingir o objeto de uma outra forma, partindo do que não é função. Observei que objetivo do professor é levar o aluno à compreensão de uma definição, mostrando as opções que não se aplicam a esta definição, ou seja, os exemplos que "ferem" a definição tentando atingi-la pela exclusão. A idéia é pensar que se *"isto não é!",* posso concluir que do restante, *"tudo é".* Percebi aqui a presença da complementariedade. Vejo ser possível chegar ao objeto pelo que não é, seu complementar. Mas o complementar referencia o objeto pretendido? Pode ser considerado representação do objeto? É um registro de representação?

Também nos livros didáticos e apostilas de ensino, percebi que o uso das *Formas de Negação* ocorre constantemente. Em Giovanni & Parente (2002, p. 88), tem-se na noção de divisibilidade um exemplo que verifica a divisibilidade e outro que não verifica: *"...como o resto é zero, e a divisão é exata, dizemos que 40 é divisível por 5".* E logo após : *"como o resto é 1 e a divisão não é exata, dizemos*

[(3)] Aula 11, MTM – A, professor 2

que 41 não é divisível por 5" . Os autores utilizam a negação, fundamentados por regras que provém da Lógica Formal [(4)].

Buscando essa definição na fala do professor, encontrei claramente um elemento de lógica baseado na negação que é essencial para o ensino da Matemática: A contrapositiva. O professor na sala diz: *"(...) o número **a** é divisível por **b** se o resto da divisão for zero, se o resto da divisão não for zero, então **a** não é divisível por **b**"* [(5)].

A partir dessas observações, percebi que essas *Formas de Negação* estão vivas na sala de aula e além de fornecer instrumentos importantes para o ensino da Matemática, possibilitam a criação de novas formas de representação para um objeto matemático.

Portanto, pretendo neste trabalho analisar como ocorre o uso destas formas de negação na prática dos professores, caracterizar novas formas de representação e levantar possíveis pontos de encontro com a teoria de aprendizagem de Duval e suas implicações na compreensão da matemática.

Para organizar o trabalho, estruturei a dissertação em 3 capítulos como segue:

No CAPÍTULO 1, apresento a justificativa para a escolha do tema, a definição do problema, dos objetivos e os caminhos que nos levaram à resposta de nossas questões.

No CAPÍTULO 2, explicitarei os fundamentos teóricos. Apresento a teoria de aprendizagem de Duval, as Formas de Negação e farei uma análise das diferenças discursivas, representativas e referenciais que ocorre entre a Linguagem Formal e a Linguagem Natural, pontuando alguns aspectos importantes existentes no entrelaçamento dessas linguagens.

No CAPÍTULO 3, trarei a análise das aulas gravadas de professores de Ensino Médio. Na observação das aulas, selecionamos algumas situações em que

---

[(4)] "A Lógica Formal é uma ciência que determina as formas corretas (ou válidas) de raciocínio." (DOOP, 1970, p.5).
[(5)] Aula 3, MTM – C, professor 3

ocorrem o uso das *Formas de Negação* pelo professor, e paralelamente ao material didático, verificamos como o professor utiliza e concebe os elementos de lógica envolvidos, relacionando com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

Por fim, apresento resultados obtidos, procurando responder às questões de pesquisa, estabelecendo pontos de encontro entre os Registros de Representação Semiótica de Duval e as Formas de Negação na aprendizagem e compreensão da Matemática.

CAPÍTULO I

MOTIVAÇÕES E QUESTIONAMENTOS

Neste capítulo serão apresentadas as razões primeiras que motivaram esta pesquisa. Inicialmente, será justificada a decisão por uma pesquisa que explora as formas de representação no ensino da Matemática e a escolha do estudo e da análise do uso da negação. No seguimento, a definição do problema e as questões de pesquisa. E, finalmente, a metodologia descrevendo os caminhos seguidos para atingir os objetivos e responder as questões levantadas.

1.1. Justificativa de Escolha do Tema de Pesquisa

Sabemos por Duval (1998a, 1993, 1996) que não é possível atingir o conhecimento matemático sem recorrer à noção de representação. São as representações que possibilitam a exteriorização das atividades mentais que são intrínsecas da Matemática.

Duval (1995) afirma que a aprendizagem Matemática é um campo de estudo privilegiado no que diz respeito ao funcionamento cognitivo do pensamento (atividades de compreensão conceitual, de raciocínio e compreensão de textos) porque o campo da Matemática requer obrigatoriamente uma diversidade de representações: sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e língua natural. Ele coloca que:

> O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação. Se chamarmos **"semiosis"** a apreensão, ou produção, de uma representação semiótica, e **"noésis"** a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a *noésis* é inseparável da *semiosis.* (DUVAL, 1993, p.39)

Assim, um estudo que evidencie esta ligação entre *semiósis* e *noésis*, analisando uso e a produção de diferentes representações semióticas para o ensino da Matemática, torna-se fundamental. Primeiramente, pela própria sujeição da Matemática às representações e em segundo pela possibilidade de descobrir e determinar formas representativas que requeiram tipos de raciocínio diferentes, que possam facilitar a compreensão pelo aluno.

Segundo Duval (2003, p.13), o que caracteriza a atividade matemática do ponto de vista cognitivo, em relação à compreensão e aos bloqueios dos alunos não são os conceitos em si, mas a importância primordial destas representações semióticas, e que o acesso aos números está ligado ao uso de um sistema de representação pelo fato dos objetos matemáticos não serem diretamente perceptíveis ou observáveis.

Assim, mostra em suas pesquisas que a troca de registro é essencial para a compreensão da Matemática e que é a partir do conhecimento de várias representações semióticas que o aluno tem a possibilidade de não confundir o objeto com a sua representação atingindo a compreensão do objeto independente da forma que ele se apresenta.

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de, ao menos, dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar, a todo o momento de registro de representação, (DUVAL, 2003, p.14)

Podemos ver os registros: 2, $\sqrt{4}$, 3^0+1, 32/16. Eles são registros que se referem ao mesmo número, ao mesmo objeto matemático e no entanto estas representações, apesar de terem a mesma referência, não possuem o mesmo significado operatório. Duval (2004, p.14) coloca então que “um mesmo objeto matemático pode ser representado através de registros de representações muito diferentes sem perder a referência”. Apesar de estarem no mesmo sistema semiótico de representação, para um aluno pode ser fácil reconhecer o número 2 em 32/16, e ser difícil em 3^0+1.

A existência destas diferentes representações semióticas para um mesmo objeto matemático permite que, tanto o aluno, quanto o professor, escolha a melhor para trabalhar. Certas vezes, um objeto se apresenta em uma forma de representação que possui um custo cognitivo muito alto para realização de raciocínios e procedimentos de cálculo necessários. Então, a possibilidade de usar outra representação que proporcione tratamentos menos custosos é fundamental.

Essa atividade de substutuição que pode ocorrer entre duas expressões referencialmente equivalentes permite exibir propriedades diferentes de um objeto mantendo a mesma referência. “(...) duas expressões que possuem a mesma referência podem ser trocadas uma pela outra em uma frase ou fórmula, sem que o valor de verdade mude”. (DUVAL, 1988a, p. 07). E, segundo Duval (1988a) geralmente constitue um “salto” entre duas redes semânticas, a tal ponto que mesmo quando indicada pareça arbitrária.

Basta abrirmos qualquer material didático em matemática para nos depararmos com passagens de uma frase a uma fórmula aritmética ou algébrica, de um enunciado a uma figura geométrica ou de uma escrita algébrica a um gráfico, verificando que a troca de um registro a outro é essencial na atividade matemática. Porém, essa troca não ocorre sempre de forma natural e espontânea. O sucesso desta atividade depende de um fenômeno que Duval (idem p.8) chama de congruência e não-congruência semântica de expressões a substituir.

> Entre duas expressões, entre duas apresentações de informação há duas relações independentes à considerar: a relação de equivalência referencial e a relação de congruência semântica. Duas expressões diferentes podem ser referencialmente equivalentes sem que sejam semanticamente congruentes. Inversamente, duas expressões podem ser semanticamente congruentes sem que sejam referencialmente equivalentes. (DUVAL, 1988a, p.08)

A questão da congruência ou da não-congruência semântica de duas apresentações de um mesmo objeto é, portanto, a distância cognitiva entre estas duas representações, sejam elas pertencentes ou não ao mesmo sistema semiótico de representação. Quanto mais a distância cognitiva é grande, mais o custo de passagem de uma apresentação a outra corre o risco de ser elevada e também não ser efetuada ou entendida, por outro lado, essas representações não-congruentes solicitam atividades intelectuais igualmente diferentes. Duval (1988a) explica que “a equivalência referencial não é uma razão suficiente para reunir em uma mesma rede semântica e, a *fortiori*, para assegurar a evidência imediata da substituição de uma expressão à outra não congruente.” (p.11, 12)

A substituição entre dois registros que são congruentes é admitida de forma evidente e imediata, semelhante a um caso de codificação. No caso dos registros não serem congruentes, esta substituição necessita de uma atitude intelectual mais elevada, a substitutividade choca-se com as dificuldades de diferença semântica. É o caso da passagem de frase para fórmula, extraído de Duval (1988a, p.18) no problema seguinte:

Um homem tem 23 anos a mais do que seu filho, 31 anos a menos do que seu pai. A soma das idades das três pessoas é 119 anos. Calcule a s idades.

Designado por **x** a idade do homem e **y** a idade do filho e em relação apenas a primeira frase (Um homem tem 23 anos a mais do que seu filho) podemos escrever uma equação de forma referencialmente congruente com esta frase de dois modos:

x – 23 = y (A idade do pai menos 23 é a idade do filho)

y = x + 23 (A idade do pai é igual a idade do filho mais 23)

Duval (1988a, p.18) afirma que a paráfrase das duas equações não é congruente a frase do enunciado: “um pai tem 23 anos a mais do que seu filho”. Em compensação diz que há uma frase que é semanticamente congruente a esta, mas que não é referencialmente congruente:

um homem : x

tem 23 anos a mais: + 23

que seu filho: y

ou seja, **x + 23 = y**

Afirma ainda, que em razão desta congruência entre frase e fórmula, essa equação que é referencialmente diferente do enunciado, corre o risco de se impor como descrição algébrica da frase.

A natureza das dificuldades impostas às conversões e aos tratamentos pela não congruência entre duas representações tanto em sistemas semióticos distintos como dentro do mesmo sistema semiótico de representação, deve-se em grande parte à manipulação de redes semânticas diferentes, que solicitam outros tipos de procedimentos e raciocínio.

Na matemática esta substituição de representações está presente em todos os momentos sendo a operação de troca uma das mais importantes nas situações de aprendizagem. Porém, dependendo da relação de congruência existente, esta operação pode determinar um custo cognitivo muito alto.

Duas formas de representação podem ter significados diferentes, mesmo se referindo ao mesmo objeto. Segundo Duval (1988a, p.09) “a conduta em matemática implica a substituividade tanto inter-registro como intra-registro, com base numa invariabilidade de referência”. Ao mudar de registro é necessário respeitar certos procedimentos de codificação e enfrentar as dificuldades inerentes entre as redes semânticas.

É o que percebemos em alguns casos do uso da dupla negação da lógica. Por exemplo, dizemos na língua natural que um número *“é impar”,* podemos aplicar a dupla negação negando uma vez, apresentando *“não é ímpar”* e após, negando novamente (pela troca de *é ímpar* por *é par*), obtendo *“não é par”*. Assim, essa lei lógica possibilita a substituição da expressão *“é impar”* por *“não é par”* proporcionando a mesma referência em duas representações, logicamente equivalentes, em um mesmo sistema semiótico de representação, contudo cognitivamente diferentes.

Neste caso, a diferença semântica de uma representação a outra altera consideravelmente a forma de raciocínio. Estas duas representações apesar de serem referencialmente equivalentes, e estarem dentro do mesmo sistema semiótico de representação, são altamente não congruentes semanticamente, e solicitam outras formas de pensamento, um verdadeiro salto cognitivo.

Em sua teoria de aprendizagem, Duval (1993) coloca que toda a análise cognitiva das conversões e dos tratamentos dos registros de representações semióticas contribui para um tipo de aprendizagem que está inserido em uma regra caracterizada por ele como fundamental:

> É levando em conta simultaneamente dois registros de representação e não cada um deles separadamente que se pode analisar o funcionamento cognitivo de diferentes atividades matemáticas. (DUVAL, 1993 p. 47)

Assim, a escolha da análise do uso das Formas de Negação no ensino da matemática se justifica pela possibilidade de produção ou categorização de registros de representação semiótica. A partir dos fundamentos da lógica e do uso da negação é possível "catalogar" outras formas de representação diferentes das tradicionalmente utilizadas, promovendo um aumento na multiplicidade de registros, proporcionando o uso de diferentes formas de raciocínio. A negação e suas vertentes - contrapositiva, complementariedade e contra-exemplo - intituladas neste trabalho por *Formas de Negação* são atividades fundamentadas pela lógica formal, com todo rigor que lhe é próprio e poder para mudar uma afirmação na substituição de representações, sem alterar a referência da afirmação. Como vimos no exemplo da dupla negação, amplamente utilizada no ensino da Matemática.

Em relação a esta atividade de negação, Duval (1995) afirma que a negação é uma transformação fundamental e uma característica de todo o sistema semiótico de representação denominado língua. Ele diz: "***Não há língua sem a possibilidade de negação"*** (idem, p. 164). Em seus trabalhos, o autor coloca a importância do uso de diferentes registros e prioriza a atividade de conversão. Contudo, apesar do uso da negação ocorrer principalmente dentro do mesmo sistema semiótico de representação, ela pode ser útil na atividade matemática pela alta diferença semântica que se estabelece frente ao conseqüente nível de não-congruência que elas podem atingir, sugerindo novos caminhos de raciocínio a seguir.

Duval (1988a, p. 22) coloca que apesar de privilegiar em seus estudos de congruência o exame para os casos inter-registros, existem também sérios casos de não congruência semântica intra-registros, como no registro da escrita simbólica, que permite por excelência o jogo da substituição de expressões ou de símbolos de um para outro.

1.2. Definição do Problema e Objetivos

O uso da negação na sua variedade de formas de apresentação é constante na atividade da matemática. Na análise das práticas docentes, em que o emprego da negação se mostrou um fato, percebemos certa confusão na concepção e no uso de algumas das Formas de Negação, o contra-exemplo a contrapositiva e a complementariedade. Esta confusão foi observada tanto nos livros didáticos como na prática do professor e ocorre principalmente no uso do contra-exemplo em que os professores utilizam contra-exemplo e contrapositiva de forma equivocada, misturando esses elementos nas aulas.

Em relação à definição de função o professor ensina quando uma relação é função, mostrando para o aluno dois grupos simples de relações que não são funções, com o objetivo que o aluno identifique uma função pela exclusão do que não é função. Estes exemplos de não-função foram apresentados por um professor como *“contra-exemplos”* de função. No entanto, apesar de surtir o efeito desejado pelo professor pois os alunos reconhecem corretamente função e não função, o contra-exemplo é um elemento de lógica que não se encaixa neste caso.

O uso da contrapositiva foi notado em diversos momentos da análise das aulas. Reparamos com algumas observações, ser esta uma prática extremamente benéfica para o ensino. Este elemento de lógica que parte da negação, que tem o poder de alterar o quadro cognitivo mudando o registro, sem alterar a referência do objeto em questão. Por exemplo, no ensino da definição de Arranjos da Análise Combinatória, o professor fala[(6)] ao aluno: *“Se é arranjo a ordem dos elementos altera o grupo”* e rapidamente mostra a contrapositiva: *“Se a ordem dos elementos não altera o grupo, não é arranjo”;* e utilizando a negação: *“se a ordem dos elementos conserva o grupo, é combinação”*.

Neste contexto – conteúdo de análise combinatória – distinguimos ainda o uso da negação quando o professor afirma que se não é arranjo, é combinação. Quer dizer, ele muda o quadro cognitivo quando afirma na língua natural que a negação do arranjo é a combinação.

Sabemos que os professores recorrem a materiais didáticos – livros e apostilas - em um momento ou outro para preparar suas atividades sobre o que e como ensinar. Assim, analisando previamente esses materiais de apoio do professor notamos em alguns casos a constante presença das formas de negação, principalmente da contrapositiva e dos *“não-exemplos”* – que são aqueles exemplos que ferem as definições almejadas. Assim, uma análise paralela desses materiais será considerada neste estudo.

[(6)] Aula 9 , MTM – E, professor 3

Um exemplo do uso da lógica e da negação que é recorrente, retirado de um livro de 5ª. Série do Ensino Fundamental, pode ser descrito: O autor define de forma tradicional o que são múltiplos: "Um número natural ***a*** é múltiplo de um número natural ***b***, (diferente de zero) quando ***a*** for divisível por ***b*** ou ***b*** for divisor de ***a***" (Giovanni & Parente, 2002, p. 100) e logo em seguida são apresentadas duas situações intituladas como "exemplos" onde fazem o uso de formas de negação: "132 é múltiplo de 11 pois é divisível por 11 e 163 não é múltiplo de 11 pois 163 não são divisíveis por 11". (Idem)

Tomando por base os exemplos expostos e a constatação de que com as Formas de Negação estamos articulando e produzindo diferentes representações, também que este trânsito auxilia de forma benéfica a aprendizagem da matemática ajudando o aluno aprender, surgiram duas questões:

1. Como os professores utilizam as *Formas de Negação* em suas aulas?

2. Que elementos As *Formas de Negação* agregam ou mobilizam da teoria de Duval?

Assim, partindo de noções de lógica em relação às Formas de Negação – a negação, a contrapositiva, o contra-exemplo e a complementariedade – e da teoria de Duval sobre a compreensão da Matemática através dos registros de representação, temos como objetivo:

Desenvolver um estudo sobre o uso das formas de negação no ensino da Matemática, determinando possíveis pontos de encontro com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Mais especificamente, temos por finalidade:

1- buscar na prática do professor de Matemática, situações de ensino em que são utilizadas as *Formas de Negação;*

2- analisar em cada situação encontrada, como o professor utiliza as formas de negação, a partir das regras da lógica formal e da teoria de Duval;

1.3. Caminhos a Seguir

Para alcançar os objetivos descritos, na primeira etapa do trabalho buscamos nossos fundamentos teóricos. Apresentamos uma revisão da Teoria de Aprendizagem de Duval sobre os Registros de Representação Semiótica, e os tratamentos por negação na Língua Natural e Formal. Definimos as Formas de Negação, dissertando sobre cada uma delas: a negação; a contrapositiva; a complementariedade e o contra-exemplo.

Igualmente nesta primeira etapa, visto que a Matemática manifesta-se a partir de uma linguagem que é um meio de linguagem formal e linguagem natural, e que esta mistura de linguagens produz dificuldades consideráveis na aprendizagem matemática, pontuamos algumas situações que refletem implicações das Formas de Negação na Linguagem Formal e na Linguagem Natural, da mesma forma analisamos o custo cognitivo inerente a toda negação.

A segunda etapa do trabalho consiste na análise das aulas dos professores. Esta análise foi realizada a partir da observação de aulas do terceiro ano do Ensino Médio. Selecionamos nas aulas gravadas, situações que possibilitem responder à questão: *“Como os professores utilizam as Formas de Negação em suas aulas?* Em algumas situações, usamos como suporte nas análises, os textos encontrados no Material Didático utilizado pelo professor .

O material utilizado para seleção das situações já era existente – aulas gravadas em CDROM – que foram autorizadas e disponibilizadas pelas unidades de Itajaí e Brusque de uma Escola Particular de Ensino Médio. Esta escola, faz parte de uma rede de ensino que opera em todo o estado de Santa Catarina. Ela grava rotineiramente todas as aulas dos professores do 3º ano do Ensino Médio e as disponibiliza na biblioteca para consulta dos alunos.

As aulas gravadas são cadastradas conforme o material didático (apostila) utilizado pela escola. Como essas aulas são do curso do terceiro ano do Ensino Médio, intitulada pela escola de “Terceirão” o conteúdo ministrado envolve todos os três anos do Ensino Médio, dividido em 5 frentes que são ministrados de forma simultânea por professores diferentes. Assim:

Frente A (MTM A) – Equações, Inequações, Conjuntos e Funções.

Frente B (MTM B) – Trigonometria e Geometria Analítica

Frente C (MTM C) – Matemática Básica e Álgebra

Frente D (MTM D) – Geometria Plana e Espacial

Frente E (MTM E) – Contagem, Probabilidade e Equações Algébricas

Cada frente, possui ao longo do ano de 30 a 32 aulas. Foram assistidas ao total 92 aulas gravadas na unidade do colégio de Itajaí ministradas de fevereiro a novembro de 2007, de quatro professores diferentes [(7)], e 12 aulas gravadas na unidade Brusque ministradas no ano letivo de 2006 de um professor. Assim:

Professor 1 – 32 aulas – MTM A – Unidade de Itajaí

Professor 2 – 12 aulas – MTM A – Unidade de Brusque

Professor 3 – 22 aulas – MTM E – Unidade de Itajaí

Professor 4 – 18 aulas – MTM C – Unidade de Itajaí

Professor 5 – 20 aulas – MTM D – Unidade de Itajaí

A partir da observação das aulas, selecionamos os casos de interesse do trabalho, em que percebemos o uso das formas de negação pelos professores. Organizamos as situações selecionadas por tema e por professor.

As aulas foram examinadas frente aos elementos da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e às regras de lógica em relação a cada uma das formas de negação.

A partir das aulas dos professores e seus registros no quadro, analisamos os registros de representação utilizados, as conversões e os tratamentos por negação na língua natural e formal baseados na invariabilidade da referência, as implicações em relação à formação de um novo registro, buscando argumentos para responder

[(7)] Para fins de organização, chamaremos os professores assistidos ordenadamente de *Professor 1* a *Professor 5*.

as questões: *“Quais os elementos que as Formas de Negação agregam ou mobilizam da teoria de Raymond Duval?”*

Duval (1993) afirma que “Um sistema simbólico, para tomar o *status* de registro de representação, deve ser compartilhado no meio social e dar condições de tratamento interno ao registro e mobilidade entre outros registros”.

O fundamento para análise das situações encontradas estará impregnada por estas orientações de Duval. Assim, toda a análise feita das situações é baseada na lógica formal e na teoria de Duval sobre a produção, conversão e tratamento por negação de um registro de representação.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A utilização das *Formas de Negação* – negação, contrapositiva, contra-exemplo e complementariedade – no ensino da Matemática podem fornecer instrumentos para a construção e o emprego de diferentes registros de representação. Pelas nossas observações, esta prática manifesta-se principalmente na aula do professor e mais sutilmente nos Materiais Didáticos. Nosso objetivo com este estudo é conhecer como ocorre este uso nesses dois segmentos, em relação à linguagem da lógica, buscando uma aproximação com a teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Duval.

Deste modo, nossa referência é a teoria de Duval, tanto para a análise da prática do professor, como para o estudo do material didático. Isso porque, a teoria de Duval propõe a aprendizagem da matemática através de diversos registros de representação.

Sendo assim, apresentamos a seguir alguns elementos fundamentais desta teoria, e na seqüência, a definição das formas de negação a partir da lógica formal e de alguns pesquisadores no assunto.

2.1. A Teoria de Aprendizagem de Duval: Os Registros de Representação Semiótica

Quando falamos em Educação Matemática e em aprendizagem Matemática, invariavelmente nos deparamos com os fracassos e as decepções que esta disciplina promove.

As dificuldades existentes no Ensino da Matemática ocasionam uma busca contínua de métodos e técnicas que facilitem o processo de compreensão da Matemática pelo aluno.

Uma possibilidade é apontada por Duval (1988a, 1988b, 1988c, 1993, 1995, 1996, 2003, 2005) por meio dos seus trabalhos e de resultados de várias teses orientadas por ele (Gusman (1990), Lemonidis (1984), Mesquita (1989), Pavlopoulou (1993), Rommevaux (1997)) sobre a aprendizagem matemática a partir dos registros de representação semiótica. Este autor apresenta como um caminho para aprendizagem o uso de diversos registros de representação para o mesmo objeto matemático, expõe que a compreensão da Matemática pode ocorrer quando o aluno é capaz de identificar e converter um mesmo objeto matemático em pelo menos dois registros de representação. Duval (1993, p. 57) afirma:

> A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e essa coordenação se manifesta pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão.

Quando o aluno se depara com um objeto matemático, ele inevitavelmente terá necessidade de trabalhar com as representações deste objeto. Duval (1995) coloca que as diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias à conceitualização, pois os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção:

> Na Matemática a especificidade das representações consiste em que elas são relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escrita algébrica ou aos gráficos cartesianos e elas podem ser convertidas em representações equivalentes num outro sistema semiótico, podendo tomar significações diferentes pelo sujeito que as utiliza. (DUVAL, 1995 p. 17)

A apreensão de definições, postulados ou teoremas matemáticos requerem o uso destas representações que para Duval está intimamente ligada à atividade de conversão desses objetos, ou seja, a passagem de uma representação a outra – discursiva para não discursiva – em sistemas semióticos distintos. “A conversão é uma operação importante entre registros e não pode ser obtida por meio da aplicação de regras de codificação”. (DUVAL, 1993, p.43).

O termo *registro* de representação é usado por Duval (2003, p.14) para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizados na matemática: Como vimos, uma função pode ser representada discursivamente por uma equação algébrica, por uma argumentação na língua natural, ou de forma não discursiva a partir de um gráfico cartesiano. Duval (idem, p.14), classificou estes registros em quatro tipos diferentes:

Tabela 1- Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua Natural Associações Verbais (conceituais) -argumentação a partir de observações, de crenças... - dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3) - apreensão operatória e não somente perceptiva; -construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFINCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: -numéricas (binária, decimal, fracionária...) -algébricas; - simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos -mudança de sistemas de coordenadas; -interpolação, extrapolação

Fonte: DUVAL, R. *Aprendizagem em Matemática:* Registros de Representação Semiótica. Campinas, 2003, p.14

O termo conversão é utilizado por ele para denotar as transformações de registros de representação semiótica que ocorrem quando há mudança de sistema semiótico de representação em referência ao mesmo objeto matemático. Por exemplo: a escrita algébrica e sua representação gráfica, um enunciado de um problema na língua natural e a sua conversão em uma equação.

Os tratamentos são operações que também envolvem transformações de registro e que ocorrem sobre o mesmo sistema semiótico de representação. Deste modo, para resolver uma equação por meio de manipulações algébricas é requisitado um conjunto de operações de tratamento.

Podemos ver um exemplo:

Representando uma circunferência pela sua *Equação geral,* temos:

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0}$$

Ao passar desta representação (equação geral) para a *Equação reduzida:*

$$\mathbf{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

Mudamos o registro, usando a operação de tratamento, pois estamos ainda dentro do mesmo sistema semiótico de representação (algébrico). Porém, quando passamos à representação da circunferência na equação reduzida para o gráfico cartesiano – a seguir – mudamos o registro e o sistema semiótico de representação utilizando a operação de conversão.

Gráfico

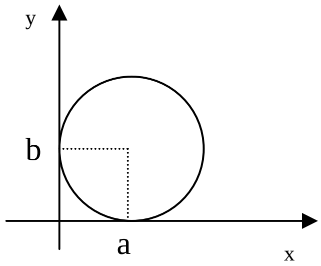


Figura 1 – Representação gráfica da equação da circunferência $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$

A troca de um registro a outro, muda o quadro cognitivo de apreensão do objeto. Vemos que a representação da circunferência pela equação reduzida fornece de forma imediata mais informações sobre a circunferência do que na forma geral. O centro C(a,b) e o raio r. E quando a representamos no plano cartesiano, temos uma mudança de quadro semântico e conseqüentemente cognitivo.

Segundo Duval (1993), é essa operação de conversão que ocorre “entre” registros é fundamental para a compreensão do conteúdo conceitual do objeto matemático. Duval (1993) afirma ainda que:

> O estudante aprende a Matemática quando é capaz de:
>
> 1) não confundir o objeto matemático com sua representação: A distinção entre um objeto e sua representação é um ponto estratégico para a compreensão da matemática; (p.37);
>
> 2) identificar e converter o objeto nas suas diferentes representações efetuando os tratamentos inerentes a cada registro. (p.47)

A teoria de Duval (1993) se estabelece frente a um paradoxo: a compreensão da Matemática implica a capacidade de mudar de registro. O acesso aos objetos matemáticos passa obrigatoriamente por representações semióticas. Então, como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a este objeto a não ser se por meio de sua representação? Um ponto decisivo neste paradoxo que é pouco observado é que

> O conteúdo de uma representação depende muito mais do registro de representação do que do objeto a ser representado. (...) porque passar de um registro de representação a outro, não é somente mudar de modo de

> tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. (DUVAL 2003, p.22)

Duas respostas são geralmente propostas para explicar esta necessidade do fato de uma diversidade de registros no funcionamento do pensamento humano. Elas estão centradas sobre os custos de tratamento e sobre as limitações representativas específicas a cada registro. Duval apresenta também uma terceira, centrada sobre a condição necessária de uma diferenciação entre representante e representado.

Duval coloca que compreensão da Matemática está intimamente ligada o fato de dispor de no mínimo dois registros de representação diferentes para um objeto e articulá-los naturalmente. Segundo Duval, essa é a única possibilidade que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação do objeto denotado, e para isso, quanto maior o número de registros existentes, maior são as possibilidades de trocas.

Em relação à formação de um registro, Duval (1993) considera que para um sistema semiótico possa ser um registro de representação, ele deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiosis [(8)]. São elas:

a) A formação de uma representação identificável:

Esta representação identificável pode ser estabelecida através de um enunciado compreensível numa determinada língua natural. Esta formação deve respeitar regras internas do sistema semiótico de representação usado. Ex.: Gramaticais para a composição de um texto, posicionais para o algoritmo da multiplicação.

A função dessa regras é assegurar as condições de identificação e possibilidade de tratamento.

> São regras de conformidade, não são regras de produção do sujeito. Isto quer dizer que o conhecimento de regras de conformidade não implica a competência para formar representações, mas somente aquela para reconhecê-las. (DUVAL, 1993, p. 44)

[(8)] Duval (1993) chama semiósis, a apreensão ou produção de uma representação semiótica, e a noésis a apreensão conceitual de um objeto.

A escrita da numeração decimal possui duas regras de conformidade básicas que são o sistema posicional e a base dez. Estas regras são fundamentais para a construção das operações fundamentais.

> No registro da língua natural há, paradoxalmente, um número elevado de regras de conformidade e poucas regras de tratamento para expansão discursiva de um enunciado completo (DUVAL, 1993, idem)

b) O tratamento.

Como vimos, é a transformação dessa representação no próprio registro em que ela foi formada. É uma *transformação interna* a um registro. Existem regras de tratamento próprias a cada registro, sua natureza e número variam consideravelmente de um registro a outro. O cálculo é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas, A paráfrase e a inferência são formas de tratamento da língua natural.

É importante observar que os tratamentos são ligados à forma e não ao conteúdo do objeto matemático. Observe:

0,25 + 0,25 = 0,5 (representação decimal, tratamento decimal)

¼ + ¼ = ½ (representação fracionária, tratamento fracionário)

c) A conversão.

É a transformação desta representação em uma representação de um outro registro, conservando a totalidade ou parte do objeto em questão. Ela não deve ser confundida com o tratamento. O tratamento se estabelece "dentro" do registro e a conversão se dá "entre" os registros diferentes. (Ex. A ilustração, a tradução a descrição.)

A conversão exige do sujeito o estabelecimento da diferença entre significado e significante. "Para a expressão de um número é preciso distinguir a significação operatória ligada ao significante em virtude das regras do sistema de expressão escrita." (Frege apud Duval, 1993 p. 67)[9]

---

[9] Frege, G. *Écrits logiques el philosophiques*. Tradução de C. Imbert. Paris: Seuil, 1971.

Por exemplo, nas adições

$$0,25 + 0,25 = 0,5$$

$$1/4 + 1/4 = 1/2$$

$$25.10^{-2} + 25.10^{-2} = 50.10^{-2}$$

Não são os mesmos tratamentos que devem ser utilizados. As adições possuem significações operatórias diferentes. Têm-se como significantes: 0,25, ¼ , 25.10^{-2}

A operação de conversão não é tão simples como a de tratamento. Para que se realize é necessário seguir certos procedimentos metodológicos bem definidos e estabelecer relações entre elementos das unidades significantes em cada registro.

Ao diferenciar abcissa da ordenada, identificar no gráfico as variáveis da função relacionando-a com seus valores correspondentes, identificar que a função não são os valores das abscissas nem os da ordenada, mas sim a relação entre a variação dos dois; identificar o que representa o ponto dentro do gráfico observado; determinar a quantidade de pontos necessários à obtenção da expressão algébrica que a representa a curva que lhe é apresentada, relacionar dimensões da expressão e o tipo de curva que originará, etc. São exemplos de atividades que exigem estabelecimento de relações entre elementos dos significantes, para que a conceitualização se realize.

Neste contexto, é importante observar a diferença entre conversão com codificação. A codificação é a transcrição por meio de substituições diretamente no significante que compõe a representação, para outro sistema semiótico de representação. Ela não considera a organização da representação nem o que ela representa.

A semelhança entre a conversão e a codificação é irredutível pois ela não se funda sobre uma analogia (interpretação) e não pode ser obtida através de regras de codificação. “Não existe e não podem existir regras de conversão como existem regras de conformidade e de tratamento”. (DUVAL, 1993, p. 67)

2.2. A Linguagem Natural e a Linguagem Formal

Duval (1995, p.137) coloca que para uma escrita simbólica seja considerada como língua, a tal ponto que possa expressar, desenvolver e controlar conhecimentos, deve permitir cumprir pelo menos três funções discursivas: a função apofântica, a função de expansão discursiva e também a função referencial.

Estas funções discursivas juntamente com a função de reflexividade, são as funções cognitivas que um sistema semiótico deve cumprir para que seja possível um discurso. Duval (1995, p.91) coloca que para que uma expressão faça referência ao mundo de tal maneira que possa ser compartilhada com interlocutores, ela necessita:

1) designar objetos – *função referencial*;

2) dizer alguma coisa sobre os objetos que se designam de forma a constituir um enunciado completo – *função apofântica*;

3) permitir vincular a proposição [(10)] enunciada com outras de forma coerente – *função de expansão discursiva*;

4)determinar um valor, o modo e o status acordado para uma expressão por parte de quem anuncia – *função reflexiva*.

Contudo, ele afirma que “ainda que a língua formal possa cumprir as mesmas funções discursivas que uma língua natural, sua estrutura não apresenta nenhuma semelhança com ela.” (idem)

[(10)] A lógica Matemática chama proposição, toda oração declarativa que exprime um pensamento de sentido completo a qual pode ser atribuído os valores lógicos (valor-verdade): de **verdade** se a proposição é verdadeira, e **falsidade** se a proposição é falsa. Ela adota como regra fundamental do pensamento os dois seguintes princípios:

(I) **Princípio da não- contradição**: Uma proposição não pode ser verdadeira ou falsa ao mesmo tempo;

(II) **Princípio do terceiro-excluído**: Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um desses casos e nunca um terceiro.

A matemática é um domínio do conhecimento muito diferente da linguagem natural e para empregar sua linguagem própria (formal) necessita de um simbolismo característico e próprio e uma tradução sistemática.

Na passagem de um registro a outro surgem obstáculos que são inerentes a cada uma das três funções discursivas. O obstáculo mais sério é relativo às funções referenciais e apofânticas, pois não é possível estabelecer uma correspondência termo a termo, pela ausência de léxico na língua formal. Duval (1988a) fala da incompletude, que cada registro é incompleto em relação ao objeto que se quer representar. Isso se verifica neste caso. Em relação á lógica, ele afirma que :

> A atividade de converter uma expressão ou enunciado na língua natural a uma expressão "equivalente" na língua formal pode parecer tranqüila quando pensamos na autonomia dos tratamentos próprios de cada um dos registros, porém no contexto de ensino de lógica, não ocorre da mesma maneira.
>
> Neste contexto não podemos escapar da necessidade de uma articulação de dois registros, seja para superar o obstáculo de confusões que dificultam a aproximação da língua formal, tanto para dar "sentido" como para controlar o alcance dos tratamentos efetuados em um dos dois registros. A importância da superação desses obstáculos deve-se ao fato que eles perfazem a função referencial. (DUVAL 1995, p.139)

O autor apresenta esta "saída" e a chama de representação intermediária. Segundo ele, a representação intermediária (o uso de tabelas, listas, esquemas sagitais) não possui regras de formação e tratamento. Ela é uma representação que faz papel de ponte entre dois registros de representação. É muito usada, porém ocorrem muitos impasses didáticos, pois mesclam as características de dois registros, e as expressões que devem cumprir a função referencial estão enredadas.

> Mesmo que se tenha o mínimo de familiaridade com as regras próprias de formação de um registro na língua formal, pode-se chegar a uma proposição bem formada que significa outra coisa distinta do enunciado de partida, sem dar-se conta! Tal procedimento ocorre pois não existe nenhum meio para evitar as armadilhas de rupturas semióticas ou semânticas entre os dois registros. (idem, p.141)

Para efetuar-se uma passagem (conversão) deve recorrer a uma paráfrase do enunciado na língua natural que possam aproximar-se da expressão buscada, introduzindo por exemplo as expressões que codificam os quantificadores [11].

---

[11] Os termos quantificadores, são três:

Por exemplo, para converter a afirmação dita na linguagem comum:

As esposas amam os seus maridos,

para a linguagem formal, é necessário recorrer a uma paráfrase em que o predicado é transformado em uma expressão substantiva, ou seja, passar para a linguagem da lógica:

Todas as esposas amam seus maridos,

para que após possamos montar o esquema sagital a seguir:

Esposa 1 → Marido 1

Esposa 2 → Marido 2

Esposa 3 → Marido 3

E então converter para a linguagem formal:

$$\forall x \exists y (Axy)$$

Mas, um esquema sagital se constrói para representar uma situação descrita por um enunciado em português, e este esquema se descreve com a ajuda de expressões da língua formal. A passagem de um registro a outro através de uma representação intermediária equivale então, desde o ponto de vista das tarefas que se deve efetuar, ao encadeamento das descrições independentes entre si em seus dados de referência e seus meios semióticos.

Podemos usar como exemplo os esquemas sagitais, que são os registros classicamente usados para representar relações. Estas representações não discursivas podem servir de ponte para passagem da língua natural para a língua formal. Na função, os diagramas são esquemas sagitais que ilustram a situação. Um exame respectivo dos pontos de partida com os pontos de chegada é o que vai dirigir a escolha dos quantificadores.

todos- Este quantificador, quando é expresso, se estende a todos sem exceção. Isto é, 100%. Por ser extensivo este quantificador é tido como universal.
Nenhum – Significa 0(zero), ninguém. Por ser extensivo, também é universal, porém negativo.
Alguns – Este quantificador está entre 0 e 100. Este termo é tido como particular afirmativo ou negativo.

> As primeiras passagens entre a expressão da língua natural e a designação simbólica da relação de implicação, requerem um giro por uma representação intermediária não discursiva. (idem, p.146)

No ponto de vista didático, toda introdução da lógica que se apóie em leituras mistas, em codificações locais com a ajuda de expressões formadas na língua natural (existe ao menos um..., se...então..., se e somente se...) conduz a um impasse.

Assim, Duval (1995) coloca que do ponto de vista das tarefas cognitivas que devem efetuar-se, a única introdução pertinente é que esteja centrada na coordenação de registros. Esta coordenação pode se realizar através da prática sistemática das variações possíveis de expressão que as regras de formação permitem em um registro, e das variações concomitantes em outro registro. Evidentemente, tal prática requer que cada um dos registros sejam tomados alternativamente como registro de partida.

2.3. Os Tratamentos por Negação na Linguagem Natural e Linguagem Formal

Uma importante discussão para o nosso estudo refere-se ao tratamento da negação na linguagem natural e linguagem formal.

Sabemos que toda a ciência pressupõe um conhecimento da língua materna para estabelecer-se, nem que seja apenas na linguagem oral e isso é essencial para a compreensão do significado dos objetos envolvidos e dos tratamentos sobre eles.

A linguagem Matemática manifesta-se a partir da combinação de representantes da língua natural com a língua formal. Seiji (2006) fala que o discurso matemático é tecido por meio desta combinação que é de certa forma antagônica: por um lado a linguagem ordinária (língua natural) com toda sua sobrecarga de conotações e riquezas de detalhes, por outro, a linguagem simbólica (língua formal) com todo o seu poder de articulação e síntese.

Duval (1995) coloca que a escrita simbólica utilizada na lógica por Frege (Frege[12] apud Duval 1995, p.137) comporta quatro tipos de unidades elementares: As letras com função proposicional; os símbolos com função de quantificadores e as letras com função de variáveis, e os símbolos com função de operadores e conectivos proposicionais. Ele afirma que cada registro apresenta possibilidades de tratamentos que lhes são próprios, sendo mais econômico uns do que outros. Por isso é interessante a troca de registros.

> (...) não há tratamentos que tenham a mesma natureza em dois registros diferentes. Contudo, há uma exceção para os registros da língua. A negação é uma transformação fundamental que caracteriza a todo o sistema de representação que mereça o nome de língua. Não há língua sem possibilidade de negação. Uma comparação dos tratamentos por negação, tal como podem efetuar-se em cada um destes dois registros, é então essencial na perspectiva da coordenação de registros. (DUVAL, 1995 p.164)

Então, uma análise comparativa dos tratamentos por negação requer a distinção de dois níveis. O primeiro está constituído por operações elementares que permitem opor os enunciados entre si, oposição. O segundo por uma combinação destas operações elementares.

É somente pela combinação destes elementos de oposição que verdadeiramente podemos definir as regras de transformação de um enunciado em outro que conserve o valor-verdade [13]. "É só neste segundo nível que se pode falar de tratamento discursivo ou lógico por negação." (DUVAL 1995, p. 164)

A distinção entre estes dois níveis é essencial, porque dois tipos de oposição não têm a mesma significação em razão do valor-verdade das proposições. Os tratamentos por oposição transformam uma proposição com valor-verdade verdadeiro em outra com valor-verdade falso. Apresentando uma contradição. E, na oposição por combinação, as duas proposições podem ser falsas ou verdadeiras conjuntamente. O que designa uma contrariedade.

Filho (1986, p.46) define contradição [14], toda proposição composta, ou seja, aquela proposição formada por duas ou mais proposições, cuja última coluna da

---

(12) Frege, G. *Écrits logiques el philosophiques*. Tradução de C. Imbert.Paris: Seuil, (1971)

(13) Chama-se valor-verdade (também valor de verdade ou valor lógico) de uma proposição, a **verdade** se a proposição for verdadeira e a **falsidade** se a proposição for falsa.

(14) Também é usado o termo falácia.

tabela verdade apresenta somente a falsidade. Em outras palavras, contradição é toda proposição composta cujo valor-verdade é sempre falsidade.

Têm-se: p : x é um número racional

q: x é um número irracional

$p \wedge q$: x é um numero racional e x é um número irracional

Podemos conferir a tabela verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	F	**F**
F	V	**F**

Neste caso, as proposições p e q são complementares, quer dizer, um número ou é racional ou é irracional, e isso nos permite dizer que se um número não é racional, ele é irracional.

Assim:

$$\sim p = q$$

Então como podemos ver na tabela verdade a seguir, qualquer que seja o valor de p, a proposição:

$$p \wedge \sim p$$

É uma contradição. Como podemos ver:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	**F**
F	V	**F**

Portanto, dizer que uma proposição pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre falso. A proposição p $\Leftrightarrow$ ~p[15] também é uma contradição:

p $\Leftrightarrow$ *~p* : x é um numero racional se e somente se x é um número irracional

p	*~p*	*p* $\Leftrightarrow$ *~p*
V	F	**F**
F	V	**F**

Copi (1917, p.146) coloca que “Duas proposições são **contraditórias**, se uma for a negação da outra, isto é, se não puderem ser ambas verdadeiras e não puderem ser ambas falsas juntas.”

Contudo, se observamos o exemplo das afirmações abaixo:

(a) <u>Todo</u> homem é branco

(b) <u>Nenhum</u> homem não é branco

Verificamos que as proposições mostram a particularidade que na primeira o quantificador universal está sob uma forma positiva, e na segunda ele está sob uma forma negativa.

Aristóteles afirma que a oposição que existe entre a proposição (a) e a proposição (b) é uma oposição de **contrariedade** que ele define assim: “A oposição de contrariedade é aquela da afirmação de uma proposição universal na negação de uma proposição universal posta dentro da afirmativa e da negativa” (ARISTÓTELES[16] apud KILANI, 2002 p.01)

[15] Colocando o condicional $\Leftrightarrow$ entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição p $\Leftrightarrow$ q. Lê-se *“p se e somente se q*” ou *“p é condição necessária e suficiente para q”*, *“q é condição necessária e suficiente para p”*, “*se p então q e reciprocamente”*. O condicional $\Leftrightarrow$ é verdadeiro somente quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas. Se isso não ocorrer o condicional é falso.
[16] Aristote, Organon*: I. Catégories- II De I’interprétation*, Traducion nouvelle el notes par Jean Tricot, Librairie philisophique J. Vrin, 1989.

A particularidade deste tipo de oposição consiste dentro do fato que as duas proposições opostas poderiam ser falsas ou verdadeiras simultaneamente. De fato se nós pegarmos como referencia a população brasileira é falso dizer que

Todo homem é branco,

como é falso dizer também que

Nenhum homem não é branco.

Contudo, no exemplo de Kilani (2002 p.01) podemos analisar as afirmações do tipo:

(c) <u>Todo</u> homem é branco

(d) <u>Qualquer</u> homem não é branco

E diz que a primeira proposição é quantificada universalmente pelo quantificador (todo) e a segunda proposição é quantificada essencialmente pelo quantificador (qualquer). E continua

> Esta forma de oposição permite separar sobre o valor de verdade das duas proposições **opostas** (c) e (d). Neste caso de contradição, uma é necessariamente verdadeira e que outra é falsa e este qual que seja a população de referência sob reserva que ela contém ao menos um elemento. A proposição por "contradição" não é outra que a negação lógica no sentido da lógica clássica. (idem, p.02)

Em relação a estes tratamentos discursivos por negação, Duval (1995, p.165) apresenta cinco operações elementares de oposição que podem ser aplicadas. Duas são operações comutativas de um dos termos do enunciado e as outras três, aplicações do operador unitário de oposição (não ou um símbolo de negação), nos quantificadores, nos termos predicativos e nos verbos. E apresenta a seguinte tabela:

Tabela 2 : Tratamentos por oposição que podem efetuar-se sobre os elementos constitutivos de um enunciado completo:

Operações	Língua Natural	Língua Formal [17]
I. Comutação extensional	todos →alguns, ou→um Alguns ou um → todos	$\forall \rightarrow \exists$ $\exists \rightarrow \forall$
II. Comutação antonímica	grande → pequeno Negro→branco	
II. Aplicação do operador unitário aos termos extensionais	todos→ não todos (alguns) um → não um (nenhum, nada)	$\forall \rightarrow \sim \forall$ $\exists \rightarrow \sim \exists$
IV. Aplicação do operador unitário aos termos de propriedade. (em posição de atributo)	recursos para os prefixos a-, in-	$P \rightarrow \sim P$
V. Aplicação do operador unitário ao verbo	É → não é	

Fonte: DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et aprenttissages intellecetuels*. Bern, Peter Lang, 1995, p. 165

Duval considera a aplicação do operador unitário ao verbo como uma relação de oposição elementar, da mesma maneira que a comutação antonímica. Sem basear-se apenas no ponto de vista lingüístico, coloca que esta operação provém de uma *negação de frase*, enquanto as outras provém da *negação do elemento constitutivo*. E afirma que esta distinção entre *negação de frase* e *negação do elemento constitutivo* não é suficiente para dar conta da diversidade e da complexidade dos tratamentos por negação que intervém no cumprimento da função discursiva. Ou seja, da produção de um novo enunciado a partir de um enunciado dado.

Assim, coloca que a negação do elemento constitutivo recobre quatro tratamentos elementares de oposição. O que se chama um tratamento por negação corresponde a uma combinação destes tratamentos elementares de oposição.

Podemos ver que cada uma destas operações elementares de oposição podem ser aplicadas independente umas das outras. Por exemplo, na língua natural podemos explorar uma afirmação, assim como mostra Duval (1995, p.166). Partindo de:

---

(17) Duval usa para representar negação, o símbolo ¬. Por uma questão de uniformidade, usaremos neste trabalho o símbolo ~.

Todos os hotéis são limpos

Podemos aplicar as oposições:

A. Alguns hotéis são limpos. (oposição do tipo I)

B. Todos os hotéis são sujos. (oposição do tipo II)

C. Todos os hotéis não são limpos. (oposição do tipo V)

E, se considerarmos a frase

Todos os homens são mortais

Podemos aplicar a oposição do tipo IV:

D. Todos os homens são imortais. (oposição do tipo IV)

A distinção entre estas operações de oposição ocorre evidentemente pela ausência ou presença da marca de negação. Esta diferença semiótica, segundo Duval (1995), não é desprezível desde um ponto de vista da análise cognitiva dos enunciados dos quais se aplicam tais operações.

> Os **tratamentos por negação**, que modificam necessariamente o valor lógico de verdade de um enunciado e que dão lugar a esquemas válidos de inferência, **no geral são uma aplicação combinada de duas das quatro primeiras operações de oposição**. (DUVAL, 1995, p. 166, grifo do autor)

Duval enfatiza que os tratamentos por negação são formados por operações elementares combinadas, e coloca que a quinta operação, a aplicação do operador unitário ao verbo, corresponde ao uso mais espontâneo da negação na língua natural mas não constitui um tratamento discursivo por negação porque essa operação pode tanto cumprir a função discursiva como a função meta-discursiva, tornando seu domínio de aplicação indeterminado.

2.3.1. Os Tratamentos por Negação no Registro da Língua Natural

Duval coloca que o quadro de oposições lógicas de Aristóteles (384-322 a.C.) é o primeiro modelo [18] de oposições lógicas proposto para os tratamentos por negação na língua natural. Estas formas de oposições lógicas apresentadas por Aristóteles, explica a diferença entre oposições contrárias e contraditórias. Contudo, afirma que os tratamentos por negação são aplicações combinadas de duas operações de oposição e que eles deixam de lado a aplicação do operador unitário ao verbo.

Segundo estes critérios Aristotélicos, Duval (1995) apresenta dois enunciados negativos, logicamente diferentes:

Podemos exemplificar, partindo da afirmação anteriormente explorada,

Todos os hotéis são limpos

E. Nenhum hotel é limpo.

Duval (1995, p.166) fala que esta oposição é um enunciado contrário ao de partida, por comutação extensional e por aplicação do operador unitário ao término extensional obtendo por comutação: (todos→alguns→nenhum), e apresenta a oposição:

F. Alguns hotéis são sujos.

É um enunciado contraditório, por comutação extensional e por comutação antonímica. Este enunciado provém de um enunciado subalterno visto anteriormente,

A. Alguns hotéis são limpos.

Nestes exemplos, é possível observar a contradição de um enunciado em língua natural e dizer que sua negação no sentido lógico se obtém sem recorrer ao

[18] Aristóteles apresenta quatro formas de oposições lógicas na língua natural:
- **Afirmação universal:** Todos os atletas são saudáveis;
- **Negação universal:** Nenhum atleta é saudável
- **Afirmação particular:** Alguns atletas são saudáveis ou Existem atletas saudáveis;
- **Negação particular:** Alguns atletas não são saudáveis ou Existem atletas não saudáveis

operador unitário de oposição, e sem que haja no enunciado a menor marca de negação, o que aparece nos enunciados contrários. Isso se baseia na possibilidade e polaridade dos antônimos.

Duval (1995, p. 167, 168) continua, apresentando que passar da afirmação: “todos hotéis são limpos” para “todos os hotéis não são limpos” não temos um tratamento por negação. A aplicação de um operador unitário de oposição ***não*** ao verbo constitui-se um caso à parte pois é específico da língua natural. Apesar de ser esta a negação mais imediata da afirmação.

Duval (idem) fala que este tipo de tratamento por aplicação do operador unitário ao verbo é polêmico e não descritivo (Barbault & Ducrot[(19)] apud Duval, 1973, nota p.102). Em contrapartida, a produção de um enunciado contraditório por dupla comutação equivale a produção de um contra exemplo:

G. Existe hotel sujo.

Percebe-se que a regra de obversão [(20)] consiste em transformar uma proposição negativa em uma positiva e vice-versa. Através da negação do predicado e reciprocamente.

Por exemplo, comutar “*não são imortais”* por *“são mortais”* em uma afirmação é fácil reconhecer aplicação do operador unitário simultaneamente ao verbo e ao término da propriedade. Essa regra, leva a considerar como equivalentes as duas operações fundamentais IV e V – Aplicação do operador unitário aos termos de propriedade e aplicação do operador unitário ao verbo. Duval (1995, p. 168) fala que geralmente isso é o que acontece quando se fala em **dupla-negação**.

Em efeito, admitir a regra de obversão, conduziria a considerar a oposição antonímica:

É mortal versus é imortal

[(19)] Barbault, M. C. & Ducrot, O. *Analyses de langue, dans Enseignementdu français et enseignement des mathématiques*. Recherches Pédagogiques, 1973, p.85-76.
[(20)] SegundoHegenberg (1975, p.146) na operação de obversão, dado um enunciado, altera-se a qualidade e em seguida substitui-se o termo do seu predicado pelo seu complementar. Se o enunciado é afirmativo ele passa a ser negativo; se negativo passa a ser afirmativo. E o termo do seu predicado se ele é *p* passa a ser *~p*, se é *~p*, passa a ser *p*. Por exemplo: *Todos os tapetes são verdes*, passa para *nenhum tapete é verde* e depois para *Nenhum tapete é não-verde*.

Como semelhante a:

É mortal versus não é mortal.

A oposição antonímica produz proposições contrárias e não contraditórias. As suas negações são compatíveis entre si. A aplicação do operador unitário ao verbo pode produzir proposições contraditórias. Suas negações não são compatíveis entre si em razão do princípio do *terceiro excluído*.

2.3.2. Os Tratamentos por Negação no Registro da Língua Formal

A ausência do verbo faz os tratamentos por negação muito mais simples na língua formal que na língua natural. Para negar um enunciado, não existe competência entre contradição e contrariedade. Para a contradição na língua natural a negação de um enunciado se obtém através da combinação de duas operações elementares: a comutação extensional e a aplicação do operador unitário ao predicado. Em razão da ausência de um léxico nas línguas formais, não há distinção entre comutação antonímica e aplicação do operador ao predicado. O simples recurso ao operador da negação não é por si só suficiente.

A negação de

$$\forall x \exists y\ (Axy)$$

(para todo x, existe y tal que x ama y)

é

$$\exists x \forall y\ (\sim Axy)$$

(existe um x para qualquer y tal que x não ama y)

Por exemplo:

A negação de *todo mundo ama alguém* é um enunciado contraditório de *existe alguém que não ama ninguém*. Aqui os tratamentos nos dois registros são congruentes, isto vale também para a negação das formas de base I e IV. A negação das formas de base do tipo V,VI VII, requer que se tenha compreendido as regras semióticas do tratamento por negação em relação aos conectivos. Quando, por exemplo, o predicado é uma implicação basta tomar o caso excluído no paradigma do símbolo de implicação para negar o predicado.

Considerando duas propriedades quaisquer *Fx* e *Tx*, a negação de

$$\forall x(Fx \Rightarrow Tx)$$

é

$$\exists x(Fx \Rightarrow \sim Tx)$$

Recorre-se a outro tipo de tratamento por negação para definir as regras de passagem que permite mover os quantificadores através de um símbolo de negação:

$$\forall x \sim Fx \Leftrightarrow \exists xFx$$

(qualquer x, não é Fx $\Leftrightarrow$ *existe um x que é Fx)*

$$\exists x \sim Fx \Leftrightarrow \sim \forall xFx$$

(existe x que não é Fx $\Leftrightarrow$ *e nem todo x é Fx)*

Duval (1995) fala que essa passagem de uma proposição a outra, se faz por aplicação de três operações elementares de oposição: comutação do término extensional, aplicação do operador unitário ao término extensional e ao término do predicado, (operações I, II IV da tabela 2, p.42)

> Evidentemente é possível conceber outros tratamentos por negação que não produzem uma proposição contraditória nem uma proposição equivalente como no caso destas regras de passagem, porém esses tratamentos não são de interesse ao cálculo de predicados. (...) Pode-se dizer que para o modo de expansão discursiva por substituição que este é o único possível na língua formal. Por outro lado, é possível constatar que o tratamento de uma proposição através de cada uma destas duas combinações equivale aqui a aplicação de uma só operação de oposição. (DUVAL, 1995, p.170)

Então, a necessidade de se separar dois níveis nos tratamentos por negação é evidente: o das operações elementares, e o dos tratamentos por negação propriamente ditos, àqueles que permitem uma expansão discursiva deste tipo de raciocínio.

2.4. As Formas de Negação

Para apresentar a que nos referimos neste estudo como *Formas de Negação* é indispensável explicar como este estudo foi delineado. A idéia teve início na observação do ensino da definição de função. Como já dissemos anteriormente, na prática, quando o professor ensina função, ele utiliza o que chama de "contra-exemplos" de funções, ou seja apresenta "o que não é" função para chegar ao que é função.

Em vistas a esta constatação, iniciamos uma busca nas regras de Lógica Formal sobre a legitimidade do uso dessa noção de contra-exemplo pelo professor em sua prática. Esta busca, resultou na hipótese de que existe certo entrelaçamento entre os elementos: contrapositiva, contra-exemplo e complementariedade. E isso justifica muito a conseqüente confusão por parte dos professores.

Assim, decidimos usar o termo "*Formas de Negação*" para o conjunto de operações lógicas, contendo: a negação, a contrapositiva, o contra-exemplo e a complementariedade.

A seguir, apresentaremos cada um desses elementos de forma detalhada.

2.4.1. A Negação Lógica

A importância da lógica em relação à Matemática é evidente. A lógica matemática é a lógica tratada por métodos matemáticos e tem a importante função de dizer o que se conclui do que. A Matemática, qualquer desenvolvimento seu, qualquer ordem de seu conteúdo, exibe conexões lógicas, ela utiliza a lógica em suas definições, postulados e teoremas. As sentenças matemáticas são geralmente construídas desta forma:

Se isto é verdade, então aquilo também é.

Por exemplo:

Se $x+3=9$, então $x=6$

Se um triângulo é eqüilátero, então a soma dos seus ângulos internos é 180º.

A lógica não se preocupa com a verdade ou falsidade de uma proposição isolada, tal como “Luiza é inteligente” ou “Luiza não é inteligente”. Ela se preocupa com as formas de se apresentar uma proposição como conseqüências de outras. A lógica se preocupa com as formas básicas de argumentação.

Se alguém afirma:

Luiza é inteligente

Pela lógica, podemos dizer que não é uma função da lógica analisar esta frase se ela estiver isolada, porque não há como saber seu valor-verdade. Contudo teremos uma questão de lógica se esta afirmação decorre de fatos e razões apresentadas:

Premissas: *Luiza é estudiosa*

Todos os estudiosos são inteligentes

Conclusão: *Luiza é inteligente*

Neste caso, independente de saber se realmente todos os estudiosos são inteligentes e de que Luiza é estudiosa, o argumento esta logicamente bem construído, pois a lógica e preocupa em concluir a partir de razões apresentadas.

Este tipo de argumento com duas proposições iniciais e uma conclusão Aristóteles (Aristóteles[21] apud Machado, 2000) chamou de silogismo. As proposições iniciais são chamadas premissas. Elas servem como base para se chegar a terceira proposição, que é a conclusão do argumento.

Um argumento assim formulado é um exemplo de silogismo.

Premissas: *Todo A é B*
e
Todo B é C

Conclusão: *Todo A é C*

---

(21) Sem referência do autor.

Doop (1970, p. 05) afirma que “A lógica é denominada ciência do raciocínio que estuda e sistematiza a validade ou invalidade de argumentações”. Ela se interessa pela correção do processo de inferência como um todo,

> a lógica formal só se interessa pela validade dos raciocínios... a validade de um raciocínio é determinada tomando em consideração o que se chama de *forma* desse raciocínio. Não é fácil dizer o que consiste em forma do raciocínio. Digamos que a forma de um raciocínio deve, pelo menos, ser independente dos *objetos* em causa e das *propriedades* que estes objetos permitem entrever. (Idem, p. 06, grifo do autor).

A negação é uma operação lógica que transforma o valor-verdade de uma proposição. Uma proposição que possui valor-verdade [V] verdadeiro transforma-se em uma proposição com valor-verdade [F] falso, e uma proposição com valor-verdade [F] falso, em uma proposição com valor-verdade [V] verdadeiro. Segundo Kilani (2002), a negação lógica onera principalmente no aspecto semântico da proposição. Quando nós a designamos em uma proposição qualquer, é seguidamente representada por *p* e por *~p.*

Quer dizer, a partir de uma proposição p qualquer, sempre podemos construir outra, denominada negação de *p*, indicada pelo símbolo *~p*. Assim:

(a) p: $9 \neq 5$

$\sim p$: $9 = 5$

(b) p: $x < 3$

$\sim p$: $x > 3$ ou $x = 3$

(c) *p*: A Lua é redonda.

~p: A Lua não é redonda

Neste caso teremos conforme vimos acima, a tabela verdade seguinte:

p	$\sim p$
V	**F**
F	**V**

Nesta tabela, V e F designam respectivamente os valores-verdade “verdadeiro” e “falso”. Uma leitura sobre este quadro nos permite constatar que a negação de uma proposição que possui valor-verdade verdadeiro é uma proposição cujo valor-verdade é falso e vice-versa. Em outros termos nós resumimos isto como segue: ***p é verdadeiro se e somente se, apenas ~p é falso.*** Podemos exemplificar. Sejam as proposições na língua natural:

p: x tem menos de 18 anos

sua negação será

~p: ***Não é verdade que*** *x tem menos de 18 anos*

ou

~p: x tem 18 anos ou x tem mais de 18 anos

ou

~p: x **não** *tem menos de 18 anos*

Na língua formal, temos a negação a afirmação *p*:

$$\boldsymbol{\sim (x < 18) \Leftrightarrow x \geq 18}$$

ou seja

$$\boldsymbol{\sim (x < 18) \Leftrightarrow x = 18 \text{ ou } x > 18}$$

O uso da negação dentro da lógica da Matemática se caracteriza principalmente pela lei da “dupla negação”. Porque **não (não p) retorna a p.**

$$\boldsymbol{\sim(\sim p) = p}$$

Negar a negação retorna à afirmação e temos duas proposições escritas de forma diferente mas com o mesmo significado. É o caso do exemplo a seguir que a mudança de registro partido da negação e da lógica onera claramente a questão semântica. Quando no universo Z (Conjunto dos Números Inteiros), dizemos:

Não é verdade que o número x é par.

Ou apenas digo:

O número x é ímpar.

Usando uma representação intermediária:

~(x é par) $\Leftrightarrow$ ***x é ímpar***

Do ponto de vista da lógica e dos registros de representação semiótica, as duas proposições consistem em diferentes palavras, dispostas de modo diferentes porém dizem a mesma coisa (tem o mesmo significado) mesmo que possa haver um “abismo” para a compreensão entre uma e outra.

É visto que as regras da lógica, possibilitam o tratamento sobre determinadas representações, mudando a forma de uma sentença, sem com isso alterar seu valor-verdade, ou seja a referência do objeto ou a mensagem. Copi (1978, p. 22) coloca:

> Duas sentenças que constituem claramente orações distintas, porque consistem de diferentes palavras, dispostas de modo diferentes podem ter o mesmo significado, no mesmo contexto, e expressar a mesma proposição.

Duval (1995) coloca que cada registro apresenta possibilidades de tratamento que lhes são próprias e podem ser mais econômicas pois os tratamentos não têm a mesma natureza em registros diferentes. Contudo, existe uma exceção para os registros da língua.

> A negação é a transformação fundamental que caracteriza a todo o sistema de representação que mereça o nome de língua. Não há língua sem possibilidade de negação. Uma comparação dos tratamentos por negação, tal como pode efetuar-se em cada um destes dois registros é então essencial na perspectiva de uma coordenação de registros. (DUVAL, 1995 p.164).

Para analisar os tratamentos por negação Duval (1995) coloca que é necessário distinguir dois níveis de negação. O primeiro está constituído de operações elementares que permitem opor os enunciados entre si. Quer dizer, oposição. O segundo constitui-se de uma combinação das operações elementares como já vimos, de tal forma que verdadeiramente se podem definir as regras de transformação de um enunciado a outro de forma que conserve o valor-verdade. “É só neste segundo nível que pode falar em tratamento discursivo ou lógico por negação” (idem, p.147)

Em relação aos tratamentos por negação é relevante considerar o que ocorre na negação de uma proposição composta que utiliza a conjunção e a disjunção.

Filho (1986) apresenta duas regras para os tratamentos por negação de uma proposição composta que utiliza a conjunção e a disjunção, ou seja, os conectivos $\vee$ e $\wedge$. São as chamadas Leis de Morgan. Essa lei, resume-se em duas regras básicas, são elas:

(I) Negar que duas das proposições são ao mesmo tempo verdadeiras equivale a afirmar que uma pelo menos é falsa.

(II) Negar que pelo menos uma das duas proposições é verdadeira equivale a afirmar que ambas são falsas.

Resumidamente, essas regras podem exprimir-se ainda dizendo que a negação transforma a conjunção em disjunção e a disjunção em conjunção.

Por exemplo, utilizando a regra (I), a negação da proposição:

É inteligente e estuda.

É a proposição

Não é inteligente ou não estuda

Já, no uso da regra (II), a negação da proposição:

É médico ou professor

É a proposição

Não é médico e não é professor

Convertendo para a linguagem formal, temos:

(I) $p \vee q \Leftrightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$

(II) $p \wedge q \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q)$

As regras de Morgan mostram como é possível definir a disjunção a partir da conjunção e da negação, ou a conjunção a partir da disjunção e da negação.

2.4.2. A Contrapositiva

A partir das regras de lógica, é possível construir novas proposições mediante o emprego dos símbolos lógicos chamados condicionais: o condicional de implicação se...então.. (símbolo $\rightarrow$ ou $\Rightarrow$) e o condicional ...se e somente se... (símbolo $\leftrightarrow$ ou $\Leftrightarrow$). Colocando o Condicional $\Rightarrow$ entre duas proposições *p* e *q*, obtemos uma nova proposição chamada proposição condicional, $p \Rightarrow q$, que se lê

"se *p*, então *q*" ou

"*p* é condição necessária para *q*" ou

"*q* é condição suficiente para *p*" ou ainda

"*p* implica *q*".

No condicional $p \Rightarrow q$, *p* é chamado antecedente ou hipótese e *q* é chamado conseqüente ou conclusão.

Este tipo de sentença – proposição condicional – é usada tanto na língua natural quanto em raciocínios matemáticos, para dizer que a verdade da proposição *q* (conclusão) está condicionada a verdade da proposição *p* (hipótese).

No entanto, uma proposição condicional do ponto de vista matemático é independente de uma relação causa-efeito entre hipótese e conclusão. O conteúdo lógico da condicional é somente que a verdade de *p* está condicionada a de *q*.

Podemos observar quatro situações:

(a) *p:* 12 é divisível por 6. [V] (22)

q: 12 é divisível por 3. [V]

$p \Rightarrow q$: Se 12 é divisível por 6, então 12 é divisível por 3. [**V**]

(b) *p:* $2 \times 5 = 10$. [V]

q: 3 é divisor de 10. [F]

$p \Rightarrow q$: $2 \times 5 = 10 \Rightarrow$ 3 é divisor de 10. [**F**]

(c) *p:* $5 < 2$. [F]

q: 2 é um número inteiro.[V]

$p \Rightarrow q$: Se $5 < 2$, então dois é um número inteiro. [**V**]

(d) *p*: $3 < 2$. [F]

q: $3 = 5$. [F]

$p \Rightarrow q$: $3 < 2 \Rightarrow 3 = 5$. [**V**]

Ducrot (1972) chama a atenção para esta relação de dependência entre a hipótese e conclusão e o uso ingênuo que os matemáticos fazem da proposição *se*.

> Um matemático não teria nenhuma repugnância especial em dizer “se 2+ 2 = 4, então 2 + 3 = 5”, pois pode-se conceber que a segunda proposição se demonstre da primeira. Mas ele hesitaria em dizer “Se 2+ 2 = 4, então 2 não tem raiz quadrada racional”, pois, a demonstração da segunda proposição, neste caso, não utiliza habitualmente à primeira. Eis como se sabe, uma das razões a impedir que a implicação material dos lógicos traduza adequadamente tanto o *se* dos matemáticos como o da linguagem comum. Essa implicação pode ser afirmada de qualquer par de proposições, por mais distante que uma esteja da outra, conquanto a primeira não seja verdadeira e a segunda seja falsa. (DUCROT, 1972, p.180)

(22) Usaremos para facilitar a leitura: [V] para representar o valor-verdade verdadeiro e [F] o valor-verdade falso.

Assim, independente da relação causa-efeito entre as proposições, estas quatro situações permitem definir a seguinte tabela verdade para a proposição $p \Rightarrow q$:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Podemos perceber que a única combinação em que a sentença condicional é falsa, (por definição) é quando a hipótese é verdadeira e a conclusão é falsa. Temos dois exemplos explorados por Loureiro (2002) na linguagem natural:

Se Ana se apresentar para trabalhar na segunda feira pela manhã, ***[p]****,então Ana terá o emprego.****[q]***

Analisando a sentença que descreve a promessa, dizemos que a única situação em que o empregador estaria mentindo, ou seja que a sentença é logicamente falsa, é no caso de p[V] $\wedge$ q[F], quer dizer, Ana, se apresenta para trabalhar na segunda de manhã e não é empregada. Qualquer outra situação, o empregador não mente (verdadeiro) e principalmente quando *p* não for satisfeita (Ana não se apresenta segunda pela manhã), pois não é justo dizer que a promessa é falsa.

Se hoje fizer sol, ***[p]*** *então iremos à praia* ***[q]***

Essa é uma implicação "típica" de uma conversação, já que há uma relação entre hipótese e conclusão. Podemos analisar que a implicação somente é considerada inválida (falsa) se fizer sol e nós não formos à praia. Qualquer outra combinação entre hipótese e conclusão torna a implicação verdadeira, porque a afirmação define que "*com sol, iremos!*", e nada diz em relação à não fazer sol, quer dizer podemos ir ou não ir à praia.

> Na linguagem corrente, a implicação “se...então” é quase que sistematicamente interpretada como uma equivalência; por exemplo: quando eu digo “Se fizer tempo bom, eu irei passear”. Se eu fui passear, “logicamente” a maioria das pessoas conclui que “fez bom tempo”. De fato, nada se pode concluir com certeza, mas é preciso reconhecer que há contradição aparente em “sair quando o tempo não é bom” após ter deixado claro que em caso de bom tempo,a gente sairia. (LEGRAND, 1983, p.59)

Ainda em relação à implicação, afirmações do tipo:

(1) *Se hoje é segunda-feira,* ***[p]*** *então 2+3 = 5.****[q]***

É sempre verdadeira pela definição (tabela verdade) da proposição condicional. Por outro lado, a afirmação

(2) *Se hoje é segunda-feira,* ***[p]*** *então 2+3 = 6.****[q]***

Será verdadeira todos os dias da semana, exceto na segunda-feira, apesar da conclusão ser sempre falsa, ou seja $2+3 \neq 6$.

Este tipo de implicação não é usado em linguagem natural, já que não existe uma relação entre hipótese e conclusão. Porém, o conceito de implicação condicionada esta baseado na **tabela verdade,** ou seja, nos valores lógicos que a hipótese e a conclusão podem assumir.

A contrapositiva, é uma proposição condicional que utiliza a negação de uma afirmação. Na aplicação da contrapositiva, mudamos a forma de representação de uma afirmação (implicação) e chegamos a uma outra proposição logicamente equivalente à inicial (mesma tabela verdade). Por esse motivo, o uso da contrapositiva no ensino da Matemática pode ser amplamente usado e dependendo do caso, diminuir consideravelmente o custo cognitivo de uma definição matemática.

A proposição contrapositiva é na lógica uma proposição condicional na qual foi aplicada sucessivamente sua recíproca e sua inversa. Negamos o conseqüente (conclusão) rumo à negação do antecedente (hipótese).

Barnett (2003) define a recíproca, inversa e contrapositiva de uma afirmação a partir de quatro definições:

> **Definição 1**: A recíproca de uma afirmação é a afirmação formada, permutando-se a hipótese e a conclusão. Assim, a recíproca da afirmação "leões são animais selvagens" é "animais selvagens são leões". (...)
>
> **Definição 2**: A negativa de uma afirmação é a negação da afirmação. Assim, a negativa da afirmação "um assaltante é um criminoso" é "um assaltante não é um criminoso".(...)
>
> **Definição 3**: A inversa de uma afirmação é formada negando-se tanto a hipótese quanto a conclusão. Assim, a inversa da afirmação "um assaltante é um criminoso" é "uma pessoa que não é assaltante não é um criminoso". (...)
>
> **Definição 4**: A contrapositiva de uma afirmação é formada permutando-se a negação da hipótese e a negação da conclusão. Assim, a contrapositiva é a recíproca da inversa e a inversa da recíproca. Assim, a contrapositiva da afirmação "Se você vive na cidade de Nova York, você vive no Estado de Nova York" é "Se você não vive no estado de Nova York, então você não vive na cidade de Nova York". (BARNETT, 2003, p.279)

Na língua formal podemos escrever para $p \Rightarrow q$

Recíproca: $q \Rightarrow p$

Inversa: $\sim p \Rightarrow \sim q$.

Contrapositiva: $\sim q \Rightarrow \sim p$.

Contudo, nem sempre podemos dizer que a recíproca de uma afirmação é verdadeira, ou seja, que $p \Rightarrow q$ é equivalente a $q \Rightarrow p$. O mesmo ocorre com a inversa da proposição condicional $p \Rightarrow q$ descrita por $\sim p \Rightarrow \sim q$. Contudo, ao aplicarmos a contrapositiva desta afirmação $\sim q \Rightarrow \sim p$ teremos uma nova proposição logicamente equivalente à dada.

Segundo Barnett (2003), afirmações logicamente equivalentes são pares de afirmações relacionadas, sendo ambas verdadeiras ou ambas falsas. "Uma afirmação e sua contrapositiva são ambas logicamente equivalentes. Também a recíproca e a inversa de uma afirmação são logicamente equivalentes pois cada uma é a contrapositiva da outra." (BARNETT, 2003, p.279, 280). E apresenta estas relações no *retângulo de equivalência lógica* a seguir

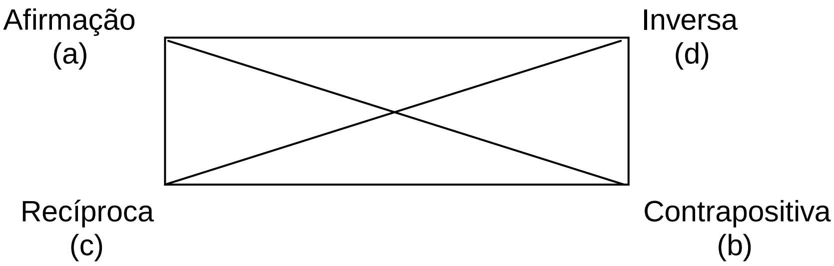


Figura 2 – Retângulo de Equivalência Lógica

O retângulo de equivalência lógica apresenta as afirmações logicamente equivalentes sendo aquelas que estão em vértices diagonalmente opostos. Assim, os pares logicamente equivalentes são (a) e (b), (c) e (d). Em contrapartida as afirmações que não são logicamente equivalentes, estão em vértices adjacentes. Assim, os pares de afirmações que não são logicamente equivalentes são (a) e (c), (a) e (d), (b) e (c), (b) e (d).

Vejamos um exemplo na **língua natural** que permite sedimentar a definição e a *equivalência lógica* (23) na contrapositiva:

p: Hoje é Páscoa. (hipótese)

q: Amanhã é segunda-feira. (conclusão)

$p \Rightarrow q$ *: Se hoje é Páscoa, então amanhã é segunda feira.*

Aplicando apenas a inversa, temos:

$\sim p \Rightarrow \sim q$ *: Se hoje não é Páscoa, então amanhã não é segunda-feira.*

Essa sentença é falsa pois pode hoje ser um domingo e não ser Páscoa teria então, na tabela verdade hipótese [V] e conclusão [F], o que demonstra Falsidade.

Aplicando apenas a recíproca, temos:

(23) Como vimos por Barenett (2003), duas proposições são equivalentes logicamente se e somente se os valores verdade (tabela verdade) obtidos forem idênticos para cada combinação possível das variáveis que formam a proposição. No caso, as proposições:
$p \rightarrow q$ e $\sim q \rightarrow \sim p$, são equivalentes logicamente.

$q \Rightarrow p$: Se amanhã é segunda-feira, então hoje é Páscoa.

Igualmente ocorre uma sentença falsa, pois indica que se amanhã é segunda então hoje é Páscoa. Teríamos várias páscoas durante o ano. Observa-se que tanto a recíproca quanto a inversa da proposição $p \Rightarrow q$ nem sempre são verdadeiras, portanto não podem ser chamadas de logicamente equivalentes.

Aplicando a contrapositiva (recíproca e inversa simultaneamente), temos:

$\sim q \Rightarrow \sim p$: Se amanhã não é segunda feira, então hoje não é Páscoa.

Na aplicação da contrapositiva, chegamos a uma proposição logicamente equivalente com a proposição inicial. Ou seja, a proposição contrapositiva $\sim q \Rightarrow \sim p$ tem sempre o mesmo valor que a proposição condicional $p \Rightarrow q$. O uso da contrapositiva nas definições matemáticas é baseado no princípio de equivalência lógica.

As proposições $p \Rightarrow q$ e $\sim q \Rightarrow \sim p$ possuem a mesma tabela verdade e portanto são logicamente equivalentes. Escrevemos então a tabela verdade:

p	q	p⇒q
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

~q	~p	~q⇒~p
F	F	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
V	V	**V**

Podemos explorar quatro situações que nos permitem exemplificar a tabela verdade da implicação $p \Rightarrow q$, e aplicando sobre elas a contrapositiva, podemos verificar os valores verdade para a contrapositiva.

1ª.) *$p \Rightarrow q$*: Se 12 é divisível por 6, então 12 é divisível por 3. [V,V,**V**]

$\sim q \Rightarrow \sim p$: Se 12 não é divisível por 3, então 12 não é divisível por 6. [F, F,**V**]

2ª.) $p \Rightarrow q$: Se $2 \times 5 = 10$, então 3 é divisor de 10. [V, F, **F**]

~q⇒~p: Se 3 não é divisor de 10, então $2 \times 5 \neq 10$.[V, F, **F**]

3ª.) $p \Rightarrow q$: Se 5 é múltiplo de 2 , então 5 é ímpar.[F, V, **V**]

~q⇒~p: Se 5 é par, então 5 não é múltiplo de 2.[F, V, **V**]

4ª.) $p \Rightarrow q$: Se $3 < 2$, então $3 = 5$.[F, F, **V**]

~q⇒~p: Se $3 \neq 5$*, então* $3 \geq 2$.[V, V, **V**]

Do ponto de vista dos registros de representação semiótica, a proposição $p \Rightarrow q$ diz a mesma coisa do que $\sim q \Rightarrow \sim p$, elas têm a mesma referência, mesmo que possa haver um fosso muito grande entre uma e outra. É exemplo deste caso, a proposição

n^2 é par $\Rightarrow$ n é par (1)

e a sua contrapositiva

n é ímpar $\Rightarrow n^2$ é impar (2)

A afirmação (2) é a contrapositiva da afirmação (1). Matematicamente elas possuem a mesma referência, mas evidentemente não dizem a mesma coisa, a passagem de uma representação para outra não determina efetivamente uma conversão, porém solicita ao aluno um caminho diferente de compreensão, pela negação. A contrapositiva da lógica é uma possibilidade existente que pode ser amplamente usada nas definições e teoremas de matemática possibilitando um novo caminho para a compreensão e aprendizagem do aluno. Veremos seu uso mais adiante.

2.4.3. A Complementariedade

Complementar é aquilo que completa, ou seja, buscando a Teoria de Conjuntos, dizemos que em relação ao nosso alfabeto, o conjunto complementar do conjunto de vogais é o conjunto de consoantes. Assim como no universo $\mathbb{Z}$. - Conjunto dos Números Inteiros - ou um número é par ou é ímpar. O conjunto dos números pares e o conjunto dos números ímpares são complementares em relação ao universo $\mathbb{Z}$. Dois conjuntos são complementares quando um complementa o outro em relação a um universo dado.

Dante (2003) define conjunto complementar assim: “Dado o universo ***U***={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} e o conjunto ***A***={1,3,5,7}, dizemos que o complementar de ***A*** em relação a ***U*** é {0,2,4,6,8,9}, ou seja, é o conjunto formado pelos elementos de ***U*** que não pertencem a ***A***” (p.13)

Essa definição pode ser escrita de uma forma geral como:

Dado um Conjunto ***A*** de certo universo ***U***, chama-se complementar de ***A*** em relação a ***U***, o conjunto formado pelos elementos de ***U*** que não pertencem a ***A***. Este complementar é indicado por C_U^A ou A^C.

O que significa, na linguagem formal:

$$A^C = \{x \,/\, x \in U \text{ e } x \notin A\}$$

E podemos representar:

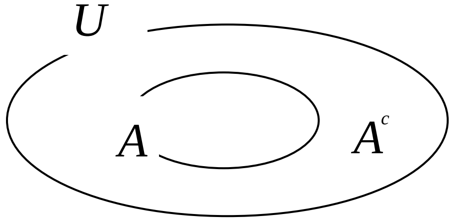


Figura 3 – Representação do complementar de A em relação ao universo U

O complementar de um conjunto só tem sentido quando fixamos um conjunto universo ***U***. Dante (2003), apresenta a relação lógica existente neste princípio:

> Uma vez considerado o conjunto *A*, para cada elemento x$\in$ *U*, vale uma, e somente uma das possibilidades: $x \in A$ ou $x \notin A$ (na lógica este fato é conhecido como o princípio do terceiro excluído). As alternativas $x \in A$ e $x \notin A$ não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo (princípio da não-contradição). (p.14)

Frente a estes princípios, podemos ainda escrever duas propriedades que mostram o quanto estão imbricados os elementos da negação junto à noção de complementar:

1º.) $\left(A^C\right)^C = A$ para todo $A \subset U$

Esta propriedade diz que o complementar do complementar do conjunto ***A*** é o próprio conjunto ***A***. Abe (1991) mostra esta propriedade como a "versão conjuntista da lei da dupla negação". (p.40)

De fato, se a definição diz:

(...) o complementar de *A* em relação a *U* **é o conjunto formado pelos elementos de *U* que não pertencem a *A*.**

Se buscarmos o que complementa o conjunto complementar, estamos buscando o próprio conjunto *A*.

2ª.) Se $A \subset B$, então $B^C \subset A^C$

Neste caso, se um conjunto está contido em outro, seu complementar em relação ao universo U contém o complementar desse outro.

Podemos explorar a complementariedade existente entre o conjunto dos números pares e ímpares e analisar frente à linguagem da negação:

Considere: $\mathbb{Z}$= Conjunto dos Números Inteiros

{conjunto dos números pares}$\subset \mathbb{Z}$

{conjunto dos números ímpares}$\subset \mathbb{Z}$

Podemos escrever:

p: são os números pares e

~p: são os não-pares

ou seja

~p: *ímpares*

E representar:

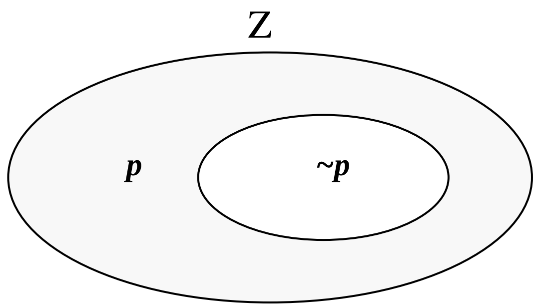


Figura 4 – Representação por diagrama do conjunto dos números pares e conjunto dos números ímpares no universo $\mathbb{Z}$.

Temos que: $p \subset \mathbb{Z}$ e $\sim p \subset \mathbb{Z}$, ou seja, os dois conjuntos estão contidos nos Inteiros: são subconjuntos de $\mathbb{Z}$. E que ,

$p \cup \sim p = \mathbb{Z}$ *(Unindo os pares e os ímpares teremos todo o Conjunto dos Inteiros)*

$p \cap \sim p = \varnothing$ *(A interseção entre números pares e ímpares resulta em vazio)*

O complementar de ***p*** em relação à $\mathbb{Z}$ é ***~p*** e o complementar de ~***p*** em relação à $\mathbb{Z}$ é ***p.*** A noção que buscamos da complementariedade é a mesma que responde a questão: Conhecendo o universo dado (no caso: $\mathbb{Z}$, Conjunto dos Números Inteiros) se eu conheço ***p***, por conseqüência eu conheço ***~p***.

No dia a dia, é muito comum ouvir as pessoas dizerem: *"eu não sei o que quero, mas sei certamente o que não quero"*. Assim, estamos excluindo todas as possibilidades que já sabemos que não queremos. *Podemos concluir logicamente que dentro de um universo bem estabelecido se eu sei tudo o que não quero, o restante é o que quero!*

2.4.4. O Contra-exemplo

Mas o que é um contra-exemplo? Sabe-se que um exemplo existe para confirmar uma regra, apoiar uma afirmação ou definição. Por exemplo, como acontece na definição do quadrilátero: *"O quadrilátero é um polígono de quatro lados"*, neste caso, temos como exemplo de quadrilátero: o quadrado, o retângulo, o losango. Ou por analogia, o campo de futebol ou o tabuleiro de xadrez. Já o contra-exemplo, é um "exemplo" que contradiz uma teoria geral, uma definição ou uma regra apresentada, ele é usado para mostrar que uma afirmação é falsa.

Uma boa forma de compreender o contra-exemplo é tentar provar uma afirmação.

Seja a afirmação:

(1) *"Todo o número primo é ímpar"*

Na tentativa de provar que a afirmação é falsa, encontramos um contra-exemplo para ela. No caso da afirmação (1), se apresentarmos o número 2, encontramos um número primo que não é ímpar. Ou seja, um contra-exemplo para a afirmação. Pela lógica, **para mostrar que uma afirmação é falsa, basta provar que sua negação é verdadeira.**

Assim:

A negação de (1) será:

(2) *"Existe um número primo que não é impar"*

Que é verdadeira pois, como vimos, temos o número 2, que é primo e não é ímpar.

Hellmeister (2001) apresenta um caso do uso do contra-exemplo a partir do conhecido trinômio de Euler:

$$x^2 + x + 41$$

A dúvida gira em torno do valor-verdade da afirmação:

x^2+x+41 *é um número primo*

Na tentativa de verificar, notamos que o trinômio de Euler resulta um número primo para muitos valores de *x*:

$x=-39,-38,...,0,1,2,...,39$

Por exemplo, para $x=1,2,3,$ temos os valores 43, 47, 53.

Mas não para todos, pois para $x=40$, temos

$40^2+40+41=40(40+1)+41=41\times 41$ que não é um número primo.

Neste caso, $x=40$ é um contra-exemplo da afirmação "x^2+x+41 *é um número primo"*, o que a torna falsa.

Filho (1983) define o contra-exemplo na linguagem formal a partir de uma proposição. Ele afirma que o contra exemplo surge quando precisamos mostrar que uma proposição, por exemplo,

p: $(\forall x\in A)(p(x))$ (24)

é **falsa**. Assim, basta mostrar que a negação desta proposição

~p: $(\exists x\in A)(\sim p(x))$ (25)

é **verdadeira**.

Isto é, que existe pelo menos um elemento $x\in A$ que não verifica $p(x)$ e torna *p* uma proposição falsa. Pois bem, esse elemento x diz-se um **contra-exemplo** da proposição *p.* Ele é um exemplo que verifica *~p* e falseia *p*.

Mekki (1991) reforça, afirmando que o contra-exemplo surge nas demonstrações de teoremas ou mesmo na compreensão de definições em que o *quantificador universal* (26) se faz presente.

---

(24) "qualquer elemento x pertencente ao conjunto A possui uma propriedade p(x)"
(25) "existe um elemento x pertencente a A que não possui a propriedade x"

No caso da proposição

$$p: (\forall x \in A)\ p(x)$$

E sua negação

$$\sim p: \exists x \in A\ (\sim p(x)).$$

Podemos examinar a existência do quantificador universal claramente transformada pela operação de negação no quantificador existencial.

*p: **todo** elemento x pertencente a um conjunto A possui a propriedade p(x)*.

E sua negação

*~p: **existe** um elemento x pertencente ao conjunto A que não possui a propriedade p(x).*

Esse elemento que "**existe**" e que não possui a propriedade *p(x)* é o contra exemplo da proposição *p*. O contra exemplo serve somente para demonstrar a falsidade de uma afirmação, ou seja, que uma propriedade não é verdadeira, e é suficiente exibir que existe pelo menos um caso em que ela é falsa. Esse exemplo encontrado diz-se então o contra-exemplo da afirmação.

Para exemplificar podemos questionar o valor-verdade da afirmação

$$\forall n \in \mathrm{N} \Rightarrow \ 2^n > n^2,$$

Então, no conjunto dos Naturais é verdadeira a afirmação? A resposta é não! Ela é falsa, e eis um contra-exemplo:

para $n = 3$, temos

$$2^3 \leq 3^2$$

$$8 \leq 9$$

(26) É um quantificador lógico, representando pelo símbolo $\forall$, que se lê: "qualquer que seja" ou ainda, "para todo". Um exemplo: ($\forall$ x, x $\in$ N), (qualquer que seja x, x pertence ao conjunto N) ou ainda (para todo x, x pertence ao conjunto N).

Como em $\Re$ a negação de $a > b$ é $a \leq b$, podemos dizer que encontramos um valor ($n = 3$) que torna a negação verdadeira. Um contra-exemplo!

O contra-exemplo é também muito usado para falsear concepções errôneas dos alunos em relação a alguma definição ou resultado obtido. Neste formato de uso comum, os contra-exemplos excluem de imediato algumas dúvidas direcionando à compreensão do objeto. Eles economizam principalmente o trabalho de demonstração.

Podemos exemplificar com a situação [27] de sala, o quanto é comum observar um aluno expressar como verdadeira a seguinte igualdade:

x. x = 2x

Imediatamente o professor apresenta um contra-exemplo: Considerando **x=3,** tem-se:

3. 3 = 2. 3

O que resulta a sentença falsa: **9 = 6**

Logo, não é verdade que ***x. x = 2x*****,** pois existe um valor de *x* para o qual a proposição não se verifica, ou seja que sua negação ***x.x ≠ 2x*** é verdadeira!

Na linguagem formal, podemos escrever:

Seja a propriedade $p(x): x.x = 2x$

e a afirmação

q: $(\forall x \in \Re)(x.x = 2x)$

"qualquer elemento x pertencente ao conjunto dos Reais, tem-se $x.x = 2x$*".*

Sua negação será:

[27] Sistema de Ensino Energia, MTM C, aula 5, 2007b.

~q: $(\exists x \in \Re)(x.x \neq 2x)$

"existe um elemento x pertencente a $\Re$ *em que* $x.x \neq 2x$"

A ambigüidade existente entre a língua formal e a língua natural gera equívocos e muita confusão no uso desta noção. Observa-se o uso do "contra-exemplo" em situações de ensino que são diferentes da que apresentamos acima.

Por exemplo:

Quando o professor ensina para uma criança na fase inicial da escolaridade (4 a 6 anos), o que é um quadrilátero, ele apresenta a definição: *"quadrilátero é um polígono que possui quatro lados"* e imediatamente apresenta os "contra-exemplos" de quadriláteros:

- O triângulo não é quadrilátero, porque não tem quatro lados, tem apenas três;

- O círculo (circunferência) não é um quadrilátero, porque não possui lados;

- Um pentágono, um hexágono,... Não são quadriláteros, pois possuem mais do que quatro lados.

Neste caso, percebe-se que é possível aproximar-se do que é um quadrilátero, partindo do que não é quadrilátero. Contudo, se observarmos a afirmação: *"O quadrilátero é um polígono de quatro lados"*, e questionar: Há realmente um "contra-exemplo" para esta afirmação? Observe pela lógica:

Na linguagem formal, temos:

U = Conjunto de figuras planas convexas

Q = é quadrilátero

E a afirmação:

q: ($\forall$ Q $\in$ U) (Q tem 4 lados)

E a sua negação

~q: ($\exists$ Q $\in$ U) (Q não tem 4 lados)

É fato que não conseguimos encontrar um quadrilátero que não tenha 4 lados, assim a proposição *~q* é falsa, o que torna logicamente a proposição *q* verdadeira. Para achar um contra exemplo de *q* temos que encontrar um exemplo que verifique *~q*. Ou seja, achar um **quadrilátero** no universo das figuras planas convexas que não tenha 4 lados. O que é impossível.

Neste caso, observa-se que a operação lógica que fundamenta este raciocínio utilizado pelos professores é a contrapositiva. Observe:

Seja o universo U = Conjunto de figuras planas convexas

e as proposições:

p: Q é um quadrilátero

q: Q tem quatro lados

$$p \Rightarrow q$$

Se Q é um quadrilátero $\Rightarrow$ *Q tem quatro lados*

Aplicando a contrapositiva

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

Se Q não tem quatro lados $\Rightarrow$ *Q não é um quadrilátero*

A contrapositiva facilita a compreensão, contudo, fica a pergunta: E os exemplos de não-quadriláteros que foram utilizados como “contra-exemplos”?

Eles são usados freqüentemente na prática e fundamentam-se na noção de complementariedade! Considerando o Conjunto U, temos os quadriláteros e os não-quadriláteros. Se excluirmos o maior número possível de não-quadriláteros do universo U (ou todos), a tendência é atingirmos o conjunto dos quadriláteros. O uso destes exemplos na atividade matemática é comum e auxilia na compreensão dos objetos.

Moretti (2002) coloca que a escola se preocupa em elaborar e criar novas formas de representação com a intenção de encontrar para cada conceito matemático uma “boa representação” que leve o aluno de forma suficiente a compreensão, mas adverte que não existe uma “boa representação”, pois cada registro evidencia algumas características e oculta outras. Duval (1993) coloca que “*qualquer registro é sempre incompleto em relação ao objeto denotado” (p.47).* É a articulação entre registros que constitui uma condição de acesso à compreensão da Matemática, e não o enclausuramanento [(28)].

O uso dos “contra-exemplos”, da contrapositiva e da negação frente à noção de conjunto complementar pode fornecer instrumentos importantes para o Ensino da Matemática, pois concorre com a idéia simples que diz ***“que se pode saber o que algo é, a partir do que ele não é”.*** O que ocorre aqui é a questão da complementariedade. Ter uma propriedade e não tê-la, são questões complementares.

2.5. Ambigüidades e Equívocos nos Tratamentos de Operações Lógicas

As linguagens formal e natural, articuladas nas regras da lógica, estão ligadas na comunicação matemática, não se separam. No entanto, tanto a língua natural quanto a formal possui regras de tratamento e conformidade diferentes, pois são registros de representação em sistemas semióticos diferentes que referenciam objetos matemáticos. Este é um ponto onde ocorrem problemas à aprendizagem, pois uma mesma afirmação na língua natural e na língua formal nem sempre produzem os mesmos sentidos para o aluno.

Na linguagem formal da Matemática, por exemplo, sabemos que uma proposição e sua contrapositiva são equivalentes, mas na linguagem natural, isso pode não ocorrer. Loureiro (2001), afirma que uma proposição condicional do ponto de vista matemático é independente de uma relação causa-efeito entre hipótese e conclusão.

---

[28] A coordenação entre registros de representação não é natural aos alunos. A grande maioria não reconhece o mesmo objeto através de representações que são dadas nos sistemas semióticos diferentes.

Podemos observar esta diferença quando aplicamos a contrapositiva em uma afirmação na língua natural, um exemplo de Ducrot (1972, p.192):

p: Pedro vir

q: não receber Pedro

$p \rightarrow q$ (se Pedro vir, eu não o receberei)

e sua contrapositiva

$\sim q \rightarrow \sim p$ (Eu receberei Pedro, se Pedro não vier)

Na linguagem formal da Matemática, as duas proposições dizem a mesma coisa, $p \rightarrow q$ diz a mesma coisa do que $\sim q \rightarrow \sim p$, Mas na linguagem natural, elas não têm o mesmo significado.

Contudo, Ducrot (1972, p.192) coloca que este exemplo como um fracasso da contraposição. Evidentemente não se pode receber alguém, a não ser que ele venha e a impossibilidade da contraposição diz respeito a que a proposição principal da primeira premissa não tem apenas sua verdade, mas também sua significação, subordinadas a proposição condicional. Na língua natural, a contrapositiva entrelaça-se com o discurso.

Cerqueira (1979) afirma que a Lógica e a Matemática possuem uma propriedade comum. Elas são linguagens e são formais e possuem suas próprias regras de funcionamento, distinguindo-se contudo do que conhecemos como linguagem natural.

Neste sentido, o matemático e o lógico preocupam-se com a forma com que as expressões são construídas com o intuito de inferir conclusões. Como se encaixássemos em uma "fôrma" as situações de análise, obtendo assim respostas previamente determinadas. Um exemplo disso é a existência de uma tabela verdade para afirmações quaisquer *(p e q)*. Porém, como o raciocínio e a construção cognitiva do aluno se efetuam na linguagem, a análise das inferências depende não só da estrutura lógica, mas da análise dos enunciados. Isto porque a linguagem matemática é um misto de linguagem formal e natural o que eventualmente pode acarretar equívocos de sentido e ambigüidades.

Isso ocorre por exemplo no uso dos conectivos ***e*** e ***ou***. Eles não significam igualmente na Língua Formal (linguagem matemática) e na Língua Natural (linguagem comum).

Na linguagem matemática é comum a afirmação:

O número x é par ***ou*** *múltiplo de três*

Neste caso, se *x* é somente par a afirmação fica verdadeira; se *x* é somente múltiplo de três, a afirmação fica verdadeira; mas se *x* é um número par múltiplo de três a afirmação continua verdadeira.

Observando a teoria de conjuntos temos que o conectivo ***ou*** representa a união de dois conjuntos, e pode ser representado através de diagramas:

A = {conjunto dos números pares}

B = {conjunto dos múltiplos de três}

A união de A e B é formada por todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou pertencem ao conjunto B.

É possível definir: $A \cup B = \{x / x \in A \quad ou \quad x \in B\}$.

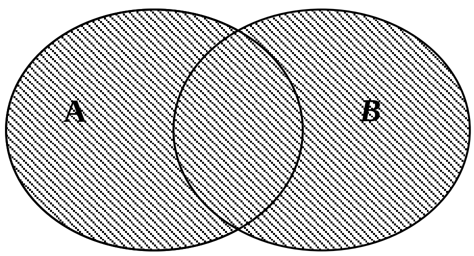


Figura 5 – Representação por diagrama da união entre o conjunto dos números pares e múltiplos de três.

Todos os espaços do diagrama estão hachurados, pois qualquer número que esteja no interior da parte pintada tornará a afirmação verdadeira. Por exemplo: o número 4 que pertence só ao conjunto A, o número 9 que pertence só ao conjunto B e o número 12 que pertence aos dois conjuntos A e B (pois está na intersecção).

Contudo, analisando a afirmação:

*Na reunião participará João **ou** Maria*

É possível dizer que se apenas João for à reunião a afirmação fica verdadeira; se apenas Maria for à reunião, a afirmação também fica verdadeira; mas se os dois "João e Maria" forem à reunião, a afirmação torna-se falsa.

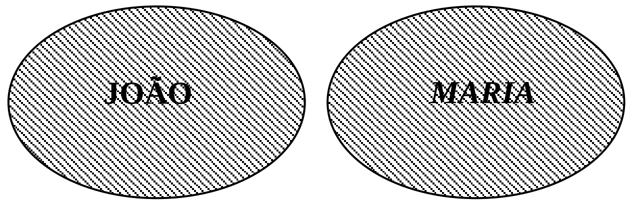


Figura 6 – Representação por diagrama da disjunção João e Maria.

Isso porque na Linguagem comum o conectivo ***ou*** é excludente. Quer dizer: Ou irá João, ou irá Maria. Por isso é que nos textos escritos em linguagem comum muitas vezes percebemos a utilização da expressão ***e/ou*** .

2.5.1. Os Obstáculos na Aquisição da Negação Lógica

Kilani (2002) afirma que um discurso recorrente no campo do ensino da Matemática verifica que muito das dificuldades entre os alunos nas atividades matemáticas são devidas às lacunas na lógica.

A maior dificuldade que se encontra no estudo da noção de negação dos quantificadores universais é que esta (negação) não é somente própria da Lógica Matemática, mas também da língua natural. A questão é que a negação lógica dos quantificadores universais não coincide com aquela que se manifesta dentro da língua natural, o que gera grandes dificuldades na aquisição desta noção.

Como vimos no item 2.4.4., Mekki (1991) diz que o contra-exemplo surge quando negamos um *quantificador universal*, a fim de falsear uma afirmação.

Por exemplo:

$$q:\ (\forall x \in A)\ p(x)$$

para todo x $\in$ *A possui a propriedade p(x)*

$$\sim q:\ \exists x \in \mathrm{A}\ (\sim\ p(x)).$$

existe x $\in$ *A que não possui a propriedade p(x)*

Analisando a aplicação da negação, podemos pensar que quando dizemos que "todos" possuem certa propriedade, significa que todos, tudo, sem exceção possuem a propriedade. Mas quando dizemos "nem todos" possuem a propriedade, negamos o quantificador e isso significa a perda da totalidade.

Essa perda pode ocorrer por apenas um caso, ou por vários. Quando afirmo algo dizendo "todos" e de súbito surge um caso que quebra esta afirmação, este caso é um contra-exemplo da afirmação.

Então não ocorrer "todos" significa que "existe pelo menos um" caso que não se encaixa. As dificuldades surgem pois na linguagem formal a negação de uma proposição com o quantificador universal transforma-se numa afirmação com o quantificador existencial, mas na linguagem comum isto não ocorre. Na linguagem comum é trivial negar "todos" por "nenhum", ao invés de negar "todos" por "existe um" ou "algum".

Assim, vemos que a interação da negação com o quantificador universal "todo" é a origem de várias dificuldades. Um exemplo de Kilani (2002) é o enunciado:

(1) <u>Todos os primeiros números não são ímpares</u>

Analisando a afirmação, podemos pensar na seqüência de números naturais {0,1,2,3,4,5...} e verificamos que é uma afirmação verdadeira porque temos tanto números pares como ímpares, portanto os primeiros números naturais não são “só ímpares”.

Porém, quando se substitui “não são ímpares” por “são pares” temos:

(2) Todos os primeiros números são pares

Esta simples troca, por uma expressão equivalente logicamente, conduz a um enunciado evidentemente falso. A afirmação (1) que significava habitualmente que **certos** primeiros números não são impares, o que deu a ele o status de enunciado verdadeiro, contudo na troca das expressões a afirmação nos conduz a outro sentido.

> “A substituição de “não são ímpares” por “são pares” é legítima de um ponto de vista gramatical visto que par e ímpar são antônimos um do outro e por conseqüência as expressões “não são ímpares” e “são pares” são sinônimos visto que dentro do conjunto dos números naturais, um número é um número seja par ou impar.“ (Kilani, 2002, p. 03)

É fato que a língua possibilita dois tipos de negação, e uma coincide com a negação lógica e a outra não. Tudo isto permite já prever a aparição de certas dificuldades por ocasião da manipulação das negações dos enunciados quantificados dentro da atividade matemática.

> Na gramática (língua natural) a negação utilizada é a negação parcial [(29)], e na Matemática ela se trata da negação lógica e coincide com a negação total [(30)] dos lingüistas. Estas duas constantes nos permitem prever a aparição de lacunas (cognitivas) nos alunos, em relação à negação lógica dos quantificadores universais por ocasião da manipulação desta noção dentro da atividade Matemática.(idem, p.4)

Um exemplo que revela a concepção comum errônea na atividade matemática de negar “todos” por “nenhum” aparece no exemplo aplicado por Kilani (2002) em sua pesquisa com alunos do ensino secundário:

Seja a definição seguinte de uma função derivável sobre o conjunto dos reais:

[(29)] A negação parcial é uma operação que contrariamente a negação total, não afeta uma parte do enunciado. Ela utiliza **palavras negativas** associadas à “**não**”, identificando assim, o componente do enunciado apontando para a negação na oposição do componente positivo correspondente.
Exemplo: Negar “são números pares” por “não são números pares”

[(30)] A negação total se assegura no aspecto semântico da negação. “a negação total” corresponde à negação lógica. Exemplo: Negar “são números pares” por “são números ímpares”

*Uma função f é derivável sobre $\Re$ se é derivável em **qualquer** (ou todos) ponto de $\Re$.*

Dê o enunciado que corresponde à definição de uma função não-derivável sobre $\Re$, e justifique a sua resposta.

Verificou-se com esta pergunta que a maioria dos alunos (58,4%) apresentou resposta adequada, porém uma grande parte dos alunos (40,3%) apresentou formulações do tipo:

*Uma função **f** não é derivável em $\Re$, se ela não é derivável em **nenhum** ponto de $\Re$.*

Visto que o correto para que uma função seja não-derivável em $\Re$, basta que exista um ponto em $\Re$ que ela não seja derivável. Assim, o correto seria:

*Uma função **f** não é derivável em $\Re$, se ela não é derivável em **algum** ponto de $\Re$.*

Isso mostra que a confusão existente na aplicação da negação apresenta um empecilho para a compreensão desta noção e sua utilização na Matemática. Verifica-se que a negação gramatical (na língua natural) e a negação matemática (língua formal) não é de forma nenhuma transparente.

CAPÍTULO III

ANÁLISE DAS AULAS GRAVADAS

Neste capítulo, pretendemos descobrir através da análise de aulas, fatores que nos permitam responder as questões de pesquisa: *1***.** Como os professores utilizam as *Formas de Negação* em suas aulas? *2*. Que elementos As *Formas de Negação* agregam ou mobilizam da teoria de Duval?

Para isso, assistimos 104 aulas gravadas em CD-ROM de cinco professores diferentes de Ensino Médio e selecionamos diversas situações distintas que possibilitassem analisar na prática do professor, como são utilizadas as *Formas de Negação*, determinando possíveis pontos de encontro com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Essas aulas fazem parte de um material didático de pesquisa dos alunos do Curso de terceiro ano do Ensino Médio de uma escola Particular de Brusque e Itajaí. Elas foram ministradas nos anos 2006 e 2007 e gravadas pela própria escola, para servir de material de apoio ao aluno vestibulando.

Para fins de organização, optamos por apresentar cada situação encontrada e analisá-la por tema, independente da forma de negação que foi empregada, mesmo porque, percebemos que estas estão de certa forma entrelaçadas e até mesmo confundidas. As situações foram enumeradas de forma seqüencial, seguidas do assunto e do professor ministrante.

3.1. Tema 1: Definição de Função

Verificamos na observação das aulas sobre a definição de função, como já comentamos anteriormente, seu ensino é voltado para a compreensão do que não é uma função, ou seja, o professor mostra ao aluno o que não é uma função para caracterizar o que é uma função.

- PROFESSOR 1: Sistema de Ensino Energia (2007b, MTM A, aula 11)

Na aula sobre “Relação e Função” do *Professor 1* foi possível perceber o uso da negação quando o professor após a definição, apresenta os casos em que não temos uma função.

O *Professor 1* inicia sua aula, apresentando no quadro o que é uma Relação para posteriormente definir a função e partir para os exemplos, ele escreve assim:

RELAÇÃO X FUNÇÃO

Observe os conjuntos, A= {1,2} e B= {3,5}

P_1: *Vamos calcular o Produto Cartesiano:*

AxB = {(1,3), (1,5),(2,3), (2,5)}

P_1: *Eu quero gerar com estes conjuntos pontos que obedeçam a regra* $R_1=\{(x,y) \in AxB / y=x+2\}$

P_1: *Vejam... qual dos pares de AxB o segundo elemento é igual ao primeiro mais 2?*

Então, apresentando um diagrama, que Duval (1995, p.157) chama de esquema sagital, passa de uma representação discursiva, para uma representação não discursiva, muda o registro e apresenta:

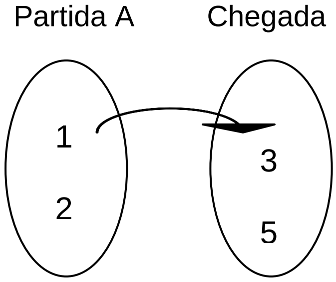


Figura 7– Esquema sagital por diagrama da relação R_1

Após isso, inicia o assunto definindo função usando na língua natural a forma tradicional da definição que aparece na apostila que utiliza.

E diz, escrevendo no quadro o título: **FUNÇÃO**

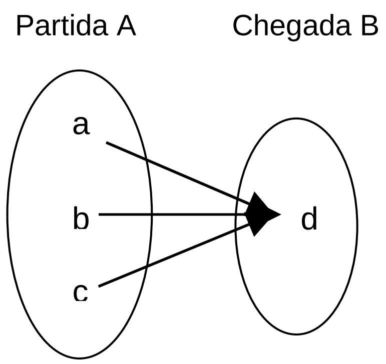
P_1: *Uma relação é uma função quando todos os elementos do conjunto de partida estão ligados a apenas um, do conjunto de chegada.*

Neste ponto, percebemos que no momento de enunciar, o professor tem a intenção de reportar-se para as duas condições apresentadas para a função:

1ª.) todos devem estar ligados;

2ª.) e ligados a apenas um.

A frase do professor quando diz: "***todos** os elementos do conjunto de partida estão ligados **a apenas um**, do conjunto de chegada"*, pode ser também interpretada da seguinte maneira:



Verificamos que ao converter a definição formal para uma definição "mais simples" na língua natural, o professor produz uma frase que deixa margem para outra interpretação da definição de função. Essa prática de pronunciar a definição do objeto de forma mais simples, evitando o formalismo matemático, foi percebida em quase todas as aulas assistidas.

Duval (1995) fala que na passagem de um registro a outro surgem obstáculos que são inerentes a cada uma das três funções discursivas (referencial – apofântica e de expansão discursiva). Ele coloca que obstáculo mais sério é relativo às funções referenciais e apofânticas, pois não é possível estabelecer uma correspondência termo a termo, pela ausência de léxico na língua formal.

Neste caso verificamos a dificuldade de converter um enunciado da língua formal para a língua comum. Como diz o autor, pode ocorrer falha na função de designar o objeto e de completude da informação do objeto. Para essa situação, Duval (1995) apresenta uma solução através de representações intermediárias. Segundo ele, o uso de tabelas, listas, esquemas sagitais, não possui regras de formação e tratamento e faz de certa forma o papel de ponte entre dois registros de representação.

Após a apresentação da definição, o professor apresenta três situações do cotidiano com a intenção que o aluno compreenda o tipo de relação que estabelece a função. Fixaremos nossa atenção a apenas em um destes métodos, que ele chama: **Pais e Filhos,** pois faz referência a música do grupo Legião Urbana.

Ele coloca aos alunos que no conjunto A estão os filhos e no conjunto B os pais. E diz que todo filho tem pai e apenas um pai. Quer dizer,

1º.) Todo filho tem um pai - todos os elementos devem estar relacionados;

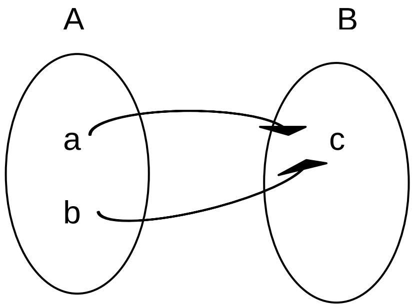
2º.) Nenhum filho pode ter dois pais – estar relacionado a apenas um elemento de B.

Então, da língua natural ele parte para uma representação intermediária não discursiva - o registro em diagrama - e apresenta exemplos de função e não-função.

Ele apresenta os esquemas por diagramas que seguem, dizendo:

Esquema 1

P_1: *Este filho (a) tem este pai (c)...este filho (b) tem este pai (c). “Cada filho tem um pai!”*
É FUNÇÃO

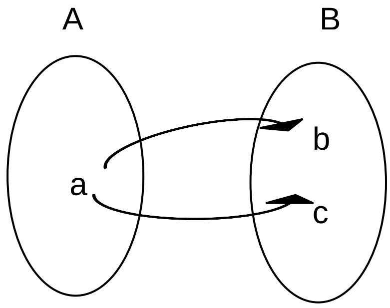


Neste exemplo, o elemento **a** relaciona-se só com o elemento **c** e o elemento **b** relaciona-se só com o elemento **c**, ou seja, “cada filho tem um, e apenas um pai”. Todos os elementos de A estão associados a apenas um elemento de B.

Esquema 2

P_1: *Um filho pode ter dois pais?*

NÃO É FUNÇÃO.

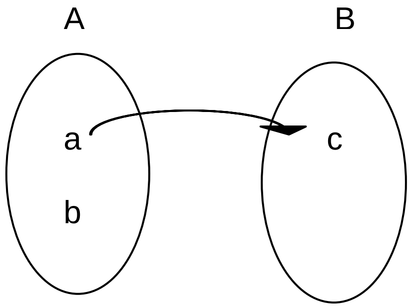


Neste exemplo, um filho que tem dois pais. Ou seja, “o elemento **a** relaciona-se com os elementos **b** e **c”**. Existe um elemento de A que possui mais de uma associação em B. Não é Função.

Esquema 3

P_1: *Um filho pode não ter pai?*

NÃO É FUNÇÃO

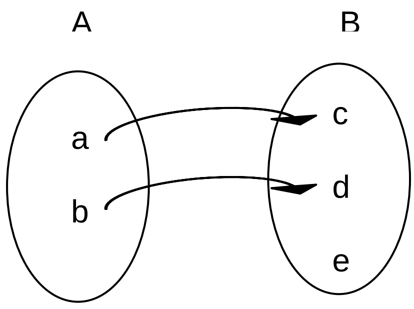


Neste exemplo, o elemento **a** relaciona-se com o elemento **c**, e o elemento **b** não se relaciona com nenhum elemento de B, quer dizer,”um filho não tem pai”. Existe um elemento de A que não é relacionado com B. Não é função.

Esquema 4

P_1: *Cada filho tem um pai*.

É FUNÇÃO

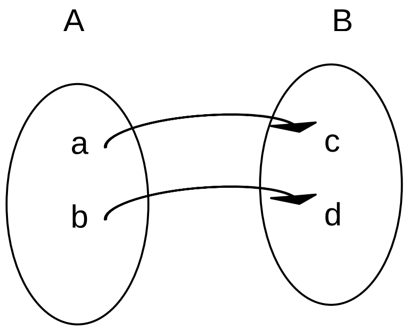


Neste exemplo, o elemento **a** relaciona-se com o elemento **c**, e o elemento **b** relaciona-se com o elemento **d**. “Cada filho tem um pai”. Todos os elementos de A estão associados a apenas um elemento de B. É função.

Esquema 5

P_1: *Cada filho tem um pai.*

É FUNÇÃO.



Neste exemplo, como no esquema anterior, todos os elementos de A estão associados a um único elemento de B. É função.

O professor apresenta com ênfase os esquemas 2 e 3, afirmando que são os únicos casos em que não temos uma função, e insiste na regra estabelecida por ele: Um pai pode ter dois filhos, pode não ter filho, **mas um filho não pode ter dois pais** (um elemento de A não pode ter duas associações em B), **e um filho não pode não ter pai** (todo elemento de A deve estar relacionado a um elemento de B).

Podemos analisar nesta situação o uso indireto da definição. O professor complementa a definição utilizando os exemplos que não são funções para que o aluno os exclua, e com isso, indica quais as relações que efetivamente são funções. O uso destes exemplos de não-função mostra-se um caminho alternativo, onde de certa forma é utilizado um registro diferente que usa uma forma de negação – a contrapositiva.

Apesar de ter apresentado inicialmente os exemplos que representam função e os que não representam, no decorrer das aulas e principalmente nos exercícios, o professor utiliza sempre a verificação de função e não função com a uma pergunta que faz referência a um raciocínio que utiliza o que não é função.

Observe a pergunta:

P_1: *“(...) verifiquem: Cada filho tem um pai?Lembrem-se, é muito importante, ... que um filho não pode ter dois pais e.... todo filho tem um pai!”*

Vemos claramente nesta situação de aula, o uso da negação no ensino da definição de função. Percebemos que, no momento em que o professor apresenta aos alunos o tipo de relação não é função, ele *“fecha o cerco”* de possibilidades de não função, abrindo todos os outros casos (o que resta) como sendo funções, a partir da noção de complementariedade.

O uso da complementariedade para atingir o objeto, solicita um caminho diferente de raciocínio, que neste caso, por ser restrito o grupo de relações que não são funções, pode facilitar a aprendizagem. Contudo cabem as questões: A complementariedade possibilita a identificação do objeto? Pode ser considerada uma representação indireta?

Observando essa situação, convertemos o “método” utilizado da linguagem comum (registro da língua natural) para a linguagem lógica (registro da língua formal). Com o auxílio de representações intermediárias – que segundo Duval (1995) facilitam esta passagem – e utilizando o quantificador universal, foi possível explorar o uso das formas de negação e assim, interpretar o emprego dos vocábulos ***e*** e ***ou***, designados logicamente por conectivos lógicos e representados pelos símbolos $\wedge$ e $\vee$, respectivamente. Assim:

O professor diz:

(a) *é função de A em B se e somente se todo filho tem um pai e todo filho tem somente um pai*

Podemos escrever na linguagem da lógica:

(a’) $f : A \to B \Leftrightarrow$ *todo filho tem pai [p]* $\wedge$ *todo filho tem somente um pai [q].*

ou seja,

$$f : A \to B \Leftrightarrow p \wedge q$$

Percebemos que a afirmação na linguagem da lógica se transforma numa proposição composta, uma conjunção em que surge o quantificador “todo”. Filho (1986, p.76) diz que a negação da conjunção transforma-se em uma disjunção, ou seja, a contrapositiva será :

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim(f : A \to B)$$

$$\sim p \vee \sim q \Leftrightarrow \sim(f : A \to B)$$

(b) *Existe um filho que não tem pai* $\vee$ *Existe um filho que tem mais do que um pai* $\Leftrightarrow$ $\sim(f : A \to B)$

Podemos observar na representação (b) que o professor apresenta os casos de relações que não são funções. Assim, a afirmação (b) é a contrapositiva da afirmação (a) e baseiam-se na complementariedade que existe entre o que “é função” e o que “não é função”.

De outro lado, Duval (1995, p.164) fala que a proposição (b) é um tratamento por oposição sobre os elementos constitutivos de (a) pois corre a operação de negação por comutação extensional combinada com a aplicação do operador unitário ao verbo. Ele continua dizendo que essa combinação é um tratamento por oposição, pois uma combinação de operações sobre os elementos constitutivos de um enunciado completo é uma forma de tratamento.

Sendo assim, podemos dizer que (b) é uma representação de função, pois é um tratamento sobre um registro de representação (a). Ora, se a partir de Duval (1995) posso aplicar um tratamento por oposição a partir de uma combinação, e o tratamento é a transformação interna de um registro que não altera o objeto, podemos dizer que o uso do que não é função (b) é um registro de representação de função, no mesmo Sistema Semiótico de Representação que (a), apesar de solicitar uma forma diferente de raciocínio.

Assim, quando o professor passa da afirmação (a) para a afirmação (b) ele utiliza uma combinação de tratamentos por oposição baseado na equivalência lógica.

Duval (1993, p.48) afirma que a troca de um registro a outro, em sistemas semióticos de representação diferentes muda o quadro cognitivo e de apreensão do objeto. Notamos que neste caso, não houve uma transformação externa de conversão, e mesmo assim essa passagem, apesar de não descrever uma conversão, revela-se de grande diferença no momento da aprendizagem da definição de função.

Na continuidade da análise desta aula, buscamos uma efetiva conversão no momento que o professor ensina como identificar uma função a partir do gráfico no Plano Cartesiano. No entanto, o professor não faz para os alunos a conversão *diagrama*$\rightarrow$*gráfico*. Muito menos utiliza tabela de pontos. Ele apresenta outra regra, também apresentada como uma das músicas do Legião Urbana, que ele chama: **Faroeste Caboclo.** Ele fala:

P_1: *Agora vou ensinar a vocês como saber se um gráfico é de uma função ou não...O que é que tem em todo filme de faroeste? Tiroteio! Portanto vamos fazer um tiroteio de forma que todos os tiros aconteçam de forma paralela ao eixo y.... É função quando o tiro acertar apenas um ponto do gráfico. Se acertar mais de um ponto do gráfico, não é função.*

E apresenta os gráficos a seguir no quadro negro simultaneamente:

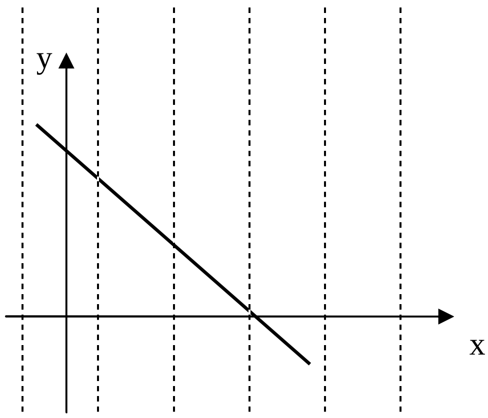


Figura 8 – Exemplo de representação gráfica de uma reta.

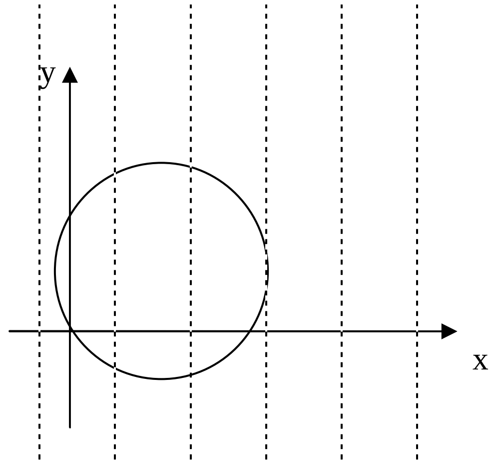


Figura 9 – Exemplo de representação gráfica de uma circunferência.

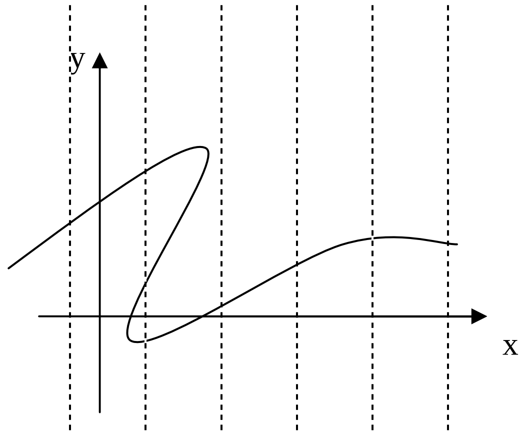


Figura 10 – Exemplo de representação gráfica de uma curva qualquer.

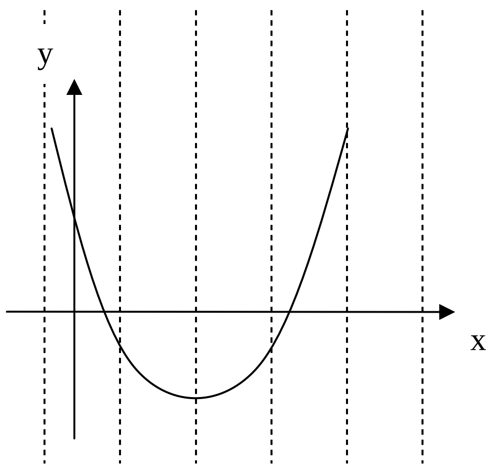


Figura 11 – Exemplo de representação gráfica de uma parábola.

Então ele coloca que os gráficos das figuras (8) e (11) representam função porque: “qualquer reta paralela ao eixo das ordenadas y, intercepta em um e somente um ponto da função”. Em contrapartida, coloca que os gráficos das figuras (9) e (10) não representam função porque: “existem retas paralelas ao eixo y que interceptam o gráfico em mais de um ponto”. Quer dizer, **afirma que para ser função tem que “cortar” em um e somente um ponto, ou não “cortar” em mais de um ponto da função**.

Se buscarmos a análise feita pela definição proferida por ele na língua natural, percebemos um equívoco do professor nesta forma de proferir a negação da definição. Exploraremos sua afirmação reescrevendo na linguagem da lógica:

(a) *f: O gráfico representa função quando qualquer reta paralela ao eixo das ordenadas y, intercepta um e apenas um ponto da função;*

(b) *~f: O gráfico não representa função quando existem retas paralelas ao eixo das ordenadas y que interceptam o gráfico em mais de um ponto.*

Percebemos que (b) não é a negação de (a) pois ele contempla apenas uma das duas condições apresentadas para a função na afirmação (a). Lembramos pela regra do professor (a) que para representar uma função, qualquer linha paralela ao eixo y precisa:

1º.) interceptar um ponto

2º.) interceptar em apenas um ponto

Utilizando uma representação chamada por Duval (1995) de intermediária, podemos reescrever (a)

(a’) *f:* $\forall \text{reta} \mathbin{//} \text{Oy} \Rightarrow$ *(intercepta em um ponto)* $\wedge$ *(intercepta apenas em um ponto)*

A negação de (a’) será:

(b’) *~f:* $\exists \text{reta} \mathbin{//} \text{Oy} \Rightarrow$ *(não intercepta em um ponto)* $\vee$ *(intercepta em mais de um ponto)*

Assim, é evidente que (b) é diferente de (b'). Quer dizer, o professor enuncia a negação da sua regra de forma equivocada, pois apenas solicita aos alunos que observem os casos em que as retas paralelas ao eixo *Oy* interceptam em mais de um ponto, esquecendo-se que também não será representação de função os gráficos em que alguma reta paralela ao eixo *Oy* (dentro do domínio da função) não intercepte a função em nenhum ponto.

Reconhecemos que há um ponto importante a comentar neste caso. Sabemos que para verificar se um gráfico é de uma função ou não, é necessário sempre ter definido o domínio. Considerando a regra do professor, precisamos analisar todas as retas existentes dentro do domínio estabelecido. Porém, em certos casos, mesmo uma reta *r* paralela ao eixo *Oy* esteja dentro do domínio, ela pode não cortar visualmente a função em um ponto. Observe o exemplo:

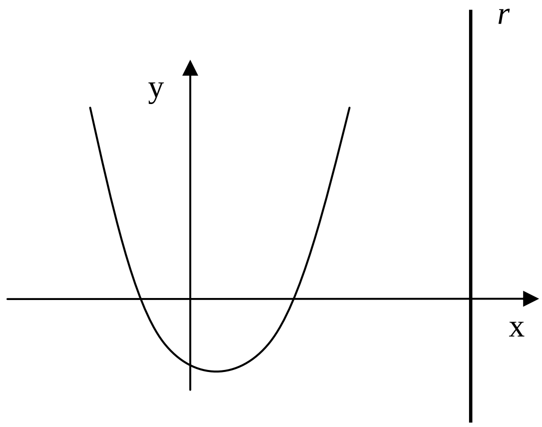


Figura 12 – Representação de um caso de não-congruência na verificação gráfica de uma função.

É o caso da análise do gráfico da parábola. Mesmo considerando para esta análise o domínio real, se passarmos uma reta um pouco distante da linha da função (figura 12), reta não intercepta **visualmente** a função. Duval (1988b, p.58), coloca que independente da figura desenhada no contexto matemático, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva, e outra que é controlada e depende da aprendizagem, que é a interpretação discursiva.

Neste caso, segundo Duval (1988a.) ocorre um alto grau de não-congruência semântica entre a apreensão perceptiva (o que o aluno vê) e a definição (o que ele deve relacionar). A figura mostra de forma imediata uma reta que visualmente não está interceptando a linha da função, o que deixaria de caracterizar uma função. Porém, neste caso é necessário buscar outras características da função que não estão presentes no momento, por exemplo: o gráfico de uma função com domínio Real é contínuo e infinito, o que nem sempre ocorre ao aluno.

Duval (1988a, p.22) coloca que a verdadeira fronteira, aquela que impede os alunos é a congruência e a não-congruência semântica no jogo da substituição de uma expressão a outra ou de um a representação a outra. E isso, a despeito da condição de ocorrer no momento das conversões internas ou externas, podemos verificar em muitos momentos da atividade matemática.

Concluindo a análise desta aula, foi possível confirmar a constante utilização da negação na definição de função. Entendemos que a apresentação dos exemplos que não são funções, completa a explicação do professor. Isso por causa da complementariedade existente entre o que é função e o que não é. Num universo bem determinado, conhecendo um dos conjuntos, logicamente conhecemos o outro.

- PROFESSOR 2 – Sistema de Ensino Energia (2006, MTM A, aula 11)

Analisando a aula do *Professor 2*, percebemos o amplo uso das *Formas de Negação.* Assim como o *Professor 1*, este professor enfatiza o conhecimento das relações que não são funções e as chama equivocadamente de contra-exemplo de função. A situação estabelecida possibilitou-nos analisar logicamente o uso desta noção e principalmente explorar as noções de contra-exemplo, contrapositiva e complementariedade.

Usando o registro da língua natural o *Professor 2* para definir uma função, coloca no quadro:

Dados dois conjuntos A e B não vazios e uma relação ***f*** de A em B, essa relação ***f*** é uma função de A em B, quando cada elemento ***x*** do conjunto A estiver associado a um e um só elemento ***y*** de B.

Então, apresenta seis diagramas com associações diversas de *A* para *B* e fala:

P_2: *“De todos estes exemplos de relação, só não é função quando sair duas flechas do mesmo elemento de A ou quando algum elemento de A não tiver flecha. O resto todo é função. Basta vocês gravarem esses dois* ***contra-exemplos*** *para identificar quando é função ou não...”*

E continua:

P_2: *”...porque, função é quando todos os elementos de A estão relacionados a um, e um só elemento de B. Então, como eu disse, não pode sobrar elemento em A e também não pode ter em A elemento com mais de uma flecha.”*

Analisando essa fala, verificamos que o professor utiliza uma representação diferente da que ele mesmo apresenta na definição, ele define o que é função e sua fala enfatiza o que não é função. O professor busca atingir seu objetivo que é o aluno identificar uma função usando o que não é função. Ele muda a forma de representação.

Assim como no caso anterior, identificamos nesta fala o uso das *Formas de Negação*. A noção de complementariedade, quando o professor afirma: é função ou não é função, e também o aparecimento da contrapositiva que neste caso é confundida com o “contra-exemplo”.

Para estudar essa situação, formalizamos a definição apresentada pelo professor no quadro, convertendo para linguagem formal (lógica) e confrontamos com a sua fala analisando as formas de negação utilizadas.

Considerando o universo das Relações:

R= {(x,y)} de A→B, em que $x \in A$ e $y \in B$

Pela definição, esta relação será função se obedecer duas condições $p \wedge q$:

$$p : (\forall x \in A)(xRy)$$

(qualquer x pertencente a A, x é relacionado com y)

$q : (\forall x \in A)$ (*xRy* unicamente)

(qualquer x pertencente a A, x é relacionado unicamente com y)

Assim:

$$f: A \to B \Leftrightarrow p \wedge q$$

$$f: A \to B \Leftrightarrow p:(\forall x \in A)(Rxy) \;\wedge\; q:(\forall x \in A) \text{ (}Rxy\text{ unicamente)}$$

Aplicando a operação de conversão para uma representação na língua natural retornamos à definição:

Uma função $f: A \to B$ *é função de A em B se e somente se, para qualquer x pertencente ao conjunto A, x possui uma relação com y em B e x possui uma relação única em B.*

Também podemos representar a função através do diagrama utilizando o que Duval (1995) chama de esquema sagital, com o objetivo de demonstrar a relação de unicidade entre os elementos do conjunto A e do conjunto B e novamente converter:

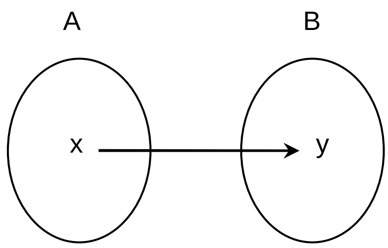


Figura 13 – Representação da função $f: A \to B$

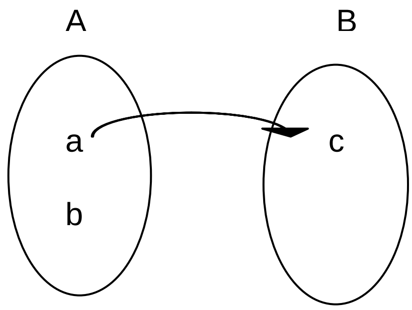
A partir disso, podemos estudar o que ocorre nesta situação em que ele usa a negação da definição de função.

O professor diz:

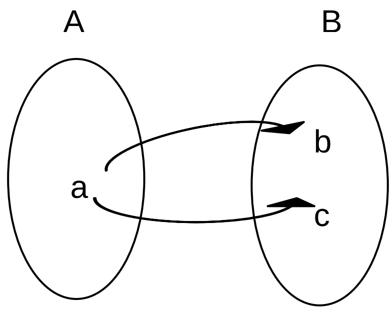
P_2: "...*não é função quando sair duas flechas do mesmo elemento de A ou quando algum elemento de A não tiver flecha.*"

Ele afirma que para que uma relação não seja função ela deve "ferir" pelo menos uma das duas condições: $p \vee q$. De fato, existem apenas dois grupos de casos em que isso ocorre. Na aula, verificamos que ele destaca os dois grupos de casos de relações que não são funções (como vimos na aula do *professor 1*), através dos diagramas como podemos ver:

- grupo 1



- grupo 2



O grupo 1 expressa os casos em que existe algum elemento do conjunto A que não possui relação em B, enquanto o grupo 2 expressa os casos de relações em que existe algum elemento do conjunto A com mais de uma relação em B.

Desse modo, sendo a definição de função expressa pela afirmação (I) a seguir, notamos que para definir o que não é uma função o professor usa a contrapositiva, e para isso precisa negar a conjunção que descreve a função:

Considerando $f : A \to B$

$$p : (\forall x \in A)(xRy)$$

$$q : (\forall x \in A)(xRy \text{ unicamente})$$

(I) $$f \Leftrightarrow p \wedge q$$

Vejamos, a negação da conjunção implica no não acontecimento de pelo menos uma das duas condições determinadas (*p* ou *q*). Não acontecer *p* ou *q* é o mesmo que acorrer ~*p* ou ~*q*. Escrevendo de forma intermediária estas situações, temos:

$$\sim p : (\exists x \in A)(x \not R y)$$

e

$$\sim q : (\exists x \in A) \text{ (}xRy\text{ não é única)}$$

A negativa de (I) será:

$$\textbf{(II)} \qquad \sim f \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

A contrapositiva de **(I)**:

$$\textbf{(III)} \ (\exists x \in A)(x \not R y) \vee (\exists x \in A) \text{(}xRy\text{ não é única)} \Leftrightarrow \sim f$$

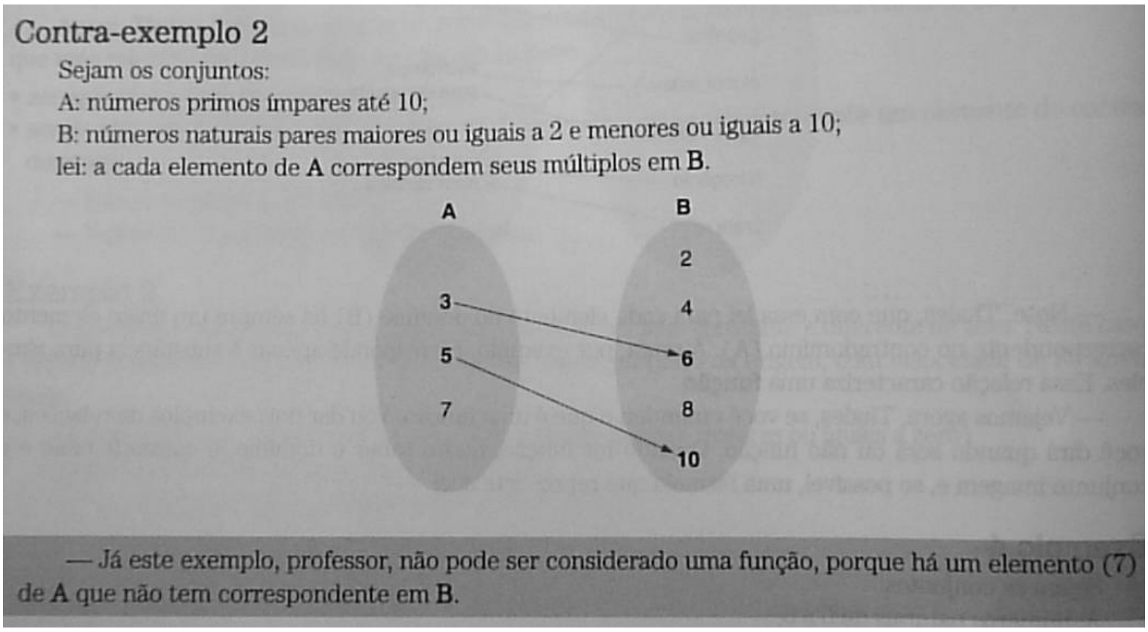
Esta forma de utilizar a definição de função **(II)** exprime segundo Duval (1995) uma forma de tratamento discursivo por negação sobre a representação **(I)**. O Professor nega, por comutação extensional a expressão "para todo..." por "existe um..." e também por aplicação do operador unitário ao verbo quando negamos "relaciona-se unicamente" por "a relação não é única".

Barnet (2003) apresenta em relação às operações lógicas com definições, um princípio que diz "A recíproca de uma definição é sempre verdadeira" (p.279). Assim, Podemos dizer que tanto as afirmações as afirmações (I) e (II), como as afirmações (II) e (III) são equivalentes logicamente pois referem-se a definição de função.

O professor coloca aos alunos que basta conhecer os dois grupos de "contra-exemplos" de função, para que se excluam todos os casos em que não temos uma função, admitindo tudo o que "resta" como função. Ele afirma: *"De todos estes exemplos de relação, só não é função quando (...). O resto todo é função. Basta vocês gravarem esses dois* ***contra-exemplos*** *para identificar quando é função ou não..."*

Aqui, percebemos o equívoco no uso do contra-exemplo pelo professor. Ele chama de contra-exemplo de função os casos (grupos) de relações que não representam funções. Apesar de o contra-exemplo ser baseado na negação, este elemento de lógica não se aplica neste caso. Também encontramos esta confusão nos livros didáticos:

Em Netto & Filho (2000, p.11), está explícita esta confusão. O autor apresenta o conceito de função e em seguida exemplifica, alternando com um exemplo um “contra-exemplo” de função. Na figura a seguir, (Contra-exemplo 2) podemos perceber, a apresentação de uma relação que não é função, em que o professor analisado classifica como Grupo 1 de contra-exemplos. O autor escreve “(...) há um elemento de A que não tem correspondente em B”.(idem, p.12).

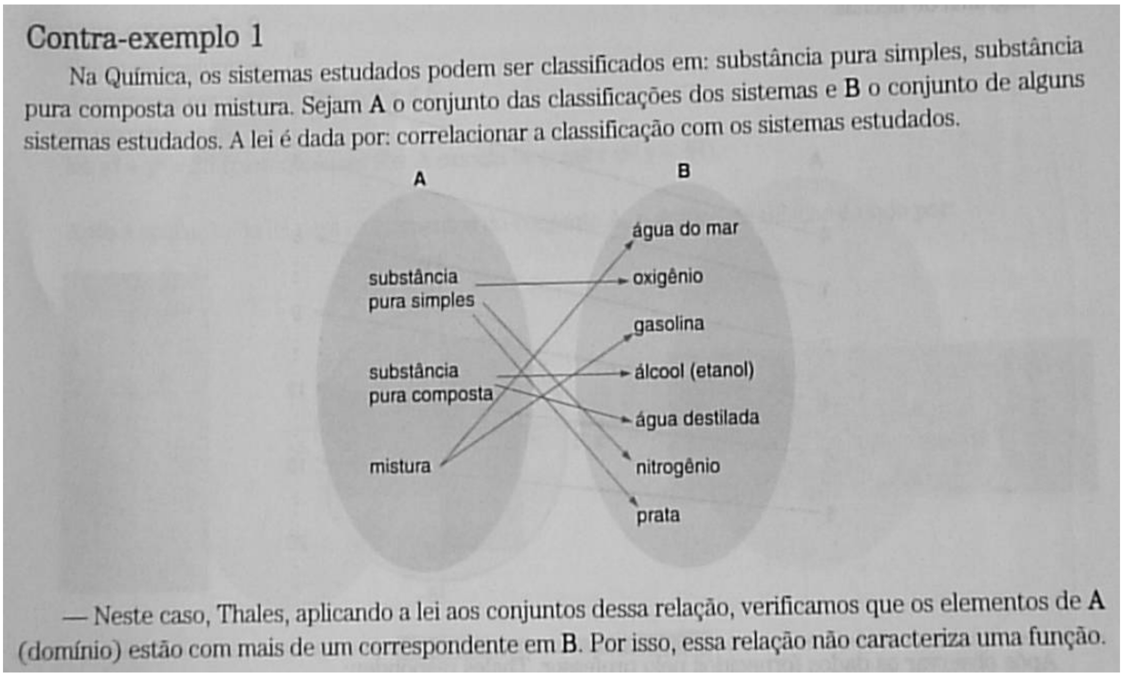


Contra-exemplo 2

Sejam os conjuntos:
A: números primos ímpares até 10;
B: números naturais pares maiores ou iguais a 2 e menores ou iguais a 10;
lei: a cada elemento de **A** correspondem seus múltiplos em **B**.

— Já este exemplo, professor, não pode ser considerado uma função, porque há um elemento (7) de **A** que não tem correspondente em **B**.

Figura 14 – Uso equivocado do contra-exemplo - Grupo 1



Contra-exemplo 1

Na Química, os sistemas estudados podem ser classificados em: substância pura simples, substância pura composta ou mistura. Sejam **A** o conjunto das classificações dos sistemas e **B** o conjunto de alguns sistemas estudados. A lei é dada por: correlacionar a classificação com os sistemas estudados.

— Neste caso, Thales, aplicando a lei aos conjuntos dessa relação, verificamos que os elementos de **A** (domínio) estão com mais de um correspondente em **B**. Por isso, essa relação não caracteriza uma função.

Figura 15 – Uso equivocado do contra-exemplo - Grupo 2

No caso do Contra-exemplo 1, o autor escreve "(...) os elementos de A (domínio) estão com mais de um correspondente em B". (idem). Reconhecemos que o mesmo raciocínio utilizado pelo *professor 2*, ocorreu para estes autores. A intenção de mostrar o que não é função e excluir, para aproximar-se do que é função.

Entretanto, vimos no Capítulo II, que o contra exemplo é um exemplo que contradiz uma teoria ou uma afirmação. Ele é usado para mostrar que uma afirmação é falsa. Quer dizer, encontrar um contra-exemplo de uma definição é o mesmo que mostrar que a definição é falsa. Para verificar este equívoco, podemos fazer os seguintes questionamentos:

1) *Existe uma **função** de A em B, que algum elemento de A está relacionado com mais de um elemento de B?*

2) *Existe uma **função** de A em B, que em A existe ao menos um elemento não relacionado com algum elemento de B?*

Se a resposta de uma das duas perguntas for positiva para uma função, podemos dizer que encontramos um contra-exemplo de função. Entretanto isso não ocorre nunca pois não existe uma função que obedeça alguma das duas solicitações, de tal forma a derrubar a definição de função. Então, estes grupos não podem ser chamados de contra-exemplos de função.

Voltando-se para a lógica formal, constatamos que de fato o que é utilizado no discurso do professor quando apresenta esses casos de não-função é a noção de contrapositiva. Como podemos ver a seguir:

$$\sim p \vee \sim q \Leftrightarrow \ \sim f$$

Ou seja

$$(\exists x \in A)(x \not R y) \ \vee \ (\exists x \in A)(xRy \text{ não é única}) \ \Leftrightarrow \sim f$$

Quer dizer, que para ser função deve ocorrer *p* e *q*, e se ocorrer *~p* ou *~q*, não temos uma função. Passando para a linguagem natural verificamos ser esta a frase “chave” do professor em suas aulas.

Forma direta :

É função quando todos os elementos de A estão relacionados com algum elemento de B e essa relação é única.

A contrapositiva:

Se tiver duas flechas saindo de algum elemento de A ou se algum elemento de A não tiver nenhuma flecha, não é função.

Vimos assim, que neste caso, o uso do contra-exemplo não é possível, contudo a noção de complementariedade e a contrapositiva é que exprime a equivalência existente entre a forma de afirmação do professor com a definição tradicional de função.

Compreendemos que o conhecimento destes dois grupos de casos em que não temos uma função pode ser suficiente para definir o que é uma função, pois basta que seja feita a exclusão destes para definir o que resta como função:

Não quero ***~f*** *= quero* ***f***

Podemos perceber que esta forma de raciocinar, é baseada na dupla negação:

$$\sim(\sim f)=f$$

A idéia dessa prática parte da intenção de excluir o que não serve no conjunto de todas as relações. É usada então a noção de conjunto complementar. Explorando esta situação para análise, podemos escrever:

Considerando ***R*** como o universo das Relações, ***f*** são as funções e ***~f*** são as não-funções.

Temos que $f \subset R$ e $\sim f \subset R$

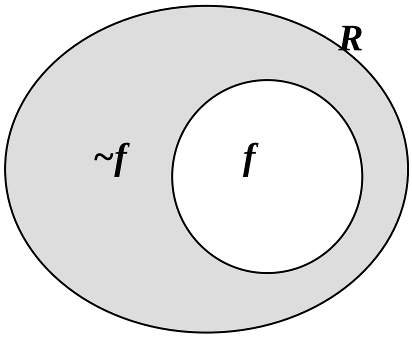


Figura 16 - Representação por diagrama da complementariedade das funções e não-funções no universo das Relações

Então, no Universo R, podemos escrever:

(1) $f \cup \sim f = R$

(2) $f \cap \sim f = \varnothing$

(3) $(\sim f)^C = f$

(4) $(f)^C = \sim f$

Usando (3) e (4), podemos escrever:

(5) $\left((f)^C\right)^C = f$

Percebemos nesta análise que a afirmação (5) apresenta a dupla negação. Convertendo para a língua natural, teremos: “O complementar do complementar do conjunto de todas as funções resulta no conjunto das funções”, quer dizer, neste caso temos uma representação que nos solicita utilizar o que não é função (4) que resulta nas funções, logicamente correta.

Assim, conhecendo o universo dado e o conjunto ***~f*** (os dois grupos de casos que não são funções) logicamente conhecemos ***f***. Quer dizer, apoiado na noção de complementariedade o professor muda a forma de representação do um objeto, como indica Duval (1993) apresenta o que não é função, proporcionando outras formas de raciocínio, facilitando a compreensão do aluno.

Com estes exemplos percebemos o quanto estão entrelaçadas as operações lógicas de negação, contrapositiva, contra-exemplo e complementariedade. Estas noções, fornecem instrumentos importantes para o ensino da Matemática. Porém, precisam ser compreendidas para que sejam corretamente usadas.

3.2. Tema 2 : Domínio da Função

Na continuidade da aula sobre a definição de função, o *Professor 1*, define o que é domínio de uma função e apresenta apenas os casos em que o domínio possui as restrições recorrentes das operações nos Reais. O princípio que percebemos é o do complementar, como fica difícil citar todos os casos de domínio possíveis, excluindo os casos que possuem restrição – operações que não podem acontecer no conjunto dos Reais – pela complementariedade, conclui-se que todo o restante pode ser domínio.

- PROFESSOR 1: Sistema de Ensino Energia (2007b, MTM A, aula 11)

ESTUDO DO DOMÍNIO DA FUNÇÃO

P_1: *Sabemos que o domínio são os valores de **x**, e que a imagem são os valores de **y**. Mas quando a função é definida no conjunto dos Reais “de $\Re$ para $\Re$”, elas podem apresentar restrição no domínio, existem valores que **x** não pode assumir.*

Então ele escreve no quadro:

Restrição do Domínio *f*: $\Re \rightarrow \Re$:

1º. Caso: (I) $y = \frac{a}{b}$

P$_1$: *Observem essa função... O "de baixo" pode ser qualquer coisa? Não! Não pode ser zero! Porque divisão por zero não existe. Então, b pode assumir qualquer valor menos zero. Quer dizer que b tem que ser diferente de zero.*

Então escreve:

(I) $y = \frac{a}{b} \rightarrow b \neq 0$

Por exemplo, para determinar o domínio da função $y = \frac{1}{x+2}$, dizemos que a expressão do denominador não pode ser nula, fazemos então o cálculo $x + 2 \neq 0$, obtendo $x \neq -2$. Então, o domínio da função $y = \frac{1}{x+2}$ é $D(f) = \{x \in \mathrm{R} / x \neq -2\}$ ou $D(f) = \mathrm{R} - \{-2\}$

2º. Caso: (II) $y = \sqrt[PAR]{a}$

P$_1$: *O* ***a*** *pode ser um número negativo? Pode ou não pode? E pode ser zero?Então se ele não pode ser negativo ele tem que ser positivo ou nulo!*

E registra:

(II) $y = \sqrt[PAR]{a} \rightarrow a \geq 0$

Por exemplo, para achar o domínio da função $y = \sqrt[4]{x-3}$, é necessário que o radicando não seja negativo. Ou seja, que $x - 3 \geq 0$, o que obtemos $x \geq 3$. Então o domínio da função será $D(f) = \{x \in \mathrm{R} / x \geq 3\}$

3º. Caso (III) $y = \frac{a}{\sqrt[PAR]{b}}$

P$_1$: *O “cara” de baixo tem problema?Ele tem dois problemas! Ele não pode ser zero e ele não pode ser negativo. Então ele tem que ser maior que zero!*

E conclui:

(III) $y = \frac{a}{\sqrt[PAR]{b}} \rightarrow b > 0$

Por exemplo, para determinar o domínio da função real $y = \frac{x+1}{\sqrt{x-5}}$ dizemos que a expressão que este no radicando do denominador não pode ser nula e não pode ser negativa, ou seja, $x - 5 > 0$, o que resulta $x > 5$. Então o domínio desta função será $D(f) = \{x \in \mathrm{R} / x > 5\}$

Com essa explicação, o professor diz aos alunos que eles precisam conhecer estes três casos em que a função possui restrição no domínio, e que em todas as outras funções o domínio é Real. Reconhecemos neste caso o uso explícito da complementariedade.

O professor mostra o que invalida a função pela restrição existente nas operações com números Reais, para que seja excluído do domínio. Temos então outra forma de representação (indireta) que pretende chegar na identificação do objeto, utilizando a negação.

O uso da negação foi percebido também entre a pergunta do professor e o seu registro. Como no 3º. Caso, o professor fala: “*ele não pode ser zero e ele não pode ser negativo. Então ele tem que ser maior que zero!*”

E escreve:

(III) $y = \frac{a}{\sqrt[PAR]{b}} \rightarrow b > 0$

O professor utiliza a negação na língua natural quando diz que *“ele não pode ser zero e ele não pode ser negativo”* e a partir de uma transformação externa de conversão registra na língua formal convertendo para outro registro na língua formal e na negativa da afirmação de partida : “b > 0”.

Também destacamos a dupla negação empregada quando o professor transforma a afirmação da língua natural para o registro formal. Ele aplica uma combinação de tratamentos por negação que conservam o valor de verdade . E diz:

(I) *“não pode ser nulo”*, que equivale a: *“pode ser positivo ou negativo”*

(II) *“não pode ser negativo”,* que equivale a: *“pode ser positivo ou nulo”*

(III) *“não pode ser nulo e não pode ser negativo”*, que equivale a: *“deve ser positivo”*

Na linguagem formal:

(I) $\sim (x = 0) \Leftrightarrow x \neq 0$

(II) $\sim (x < 0) \Leftrightarrow x \geq 0$

(III) $\sim (x \leq 0) \Leftrightarrow x > 0$

Esta transformação ocorre entre duas afirmações dizem a mesma coisa e são referencialmente equivalentes, mas não são semanticamente congruentes. Podem não fazer o mesmo sentido para o aluno. Duval (1988a, p.09) diz que a equivalência referencial destaca-se da congruência semântica e que o funcionamento do pensamento segue a congruência semântica. Assim, a utilização da dupla-negação - transformação que Duval (1988a) chama de transformação intra-registro, que é a troca de uma representação a partir de um tratamento entre representações - possibilita a criação de outra representação mais congruente semanticamente em relação aos tratamentos a serem efetuados.

Também reconhecemos mostrar-se mais fácil o aluno saber o que *"não pode ser"* do que o que *"pode ser"*. O conjunto da restrição é menor que o todo e possível de ser listado por "casos". A dupla negação junto à noção de complementariedade possibilita uma mudança de raciocínio que mesmo de forma indireta é capaz de tornar possível a compreensão.

3.3. Tema 3: Função Injetora

- PROFESSOR 1: Sistema de Ensino Energia (2007b, MTM A, aula 17)

Na definição da função injetora, o *Professor 1* inicia colocando aos alunos:

P_1: *Se vocês me perguntarem o que é uma função injetora eu vou responder: "É quando cada **x** tem apenas um **y**".*

E registra:

FUNÇÃO INJETORA

$$x \leftrightarrow y$$

E começa representando a situação enunciada por diagrama:

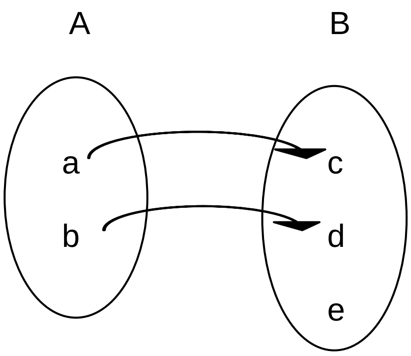


Figura 17 – Representação da função injetora do P*rofessor 1* por diagrama.

P_1: *Esse diagrama é injetor ou não? Olha que facinho gente... Basta verificar... cada x tem apenas um y? Neste caso,* ***a*** *tem* ***c*** *e* ***b*** *tem* ***d****. Então é injetora! "****Cada x tem apenas um y!****" Injetora é de um para um. Só isso.*

Analisando a fala do professor quando enuncia a sua "regra" para ensinar ao aluno quando uma função é injetora, foi possível perceber que apesar da tentativa do professor de deduzir uma "regra" a partir da definição utilizando outra forma de representação, ocorre um equívoco. Para Duval (2003, p.14), este tipo de dedução que ocorre a partir de definições é uma forma de representação discursiva. Contudo, neste caso, podemos verificar utilizando a contrapositiva que a dedução não é válida.

Sabemos que uma afirmação e sua contrapositiva são referencialmente equivalentes, e conforme afirma Duval (1988a) duas representações que possuem a mesma referência são representações do mesmo objeto que sofreram transformações externas (de conversão) ou internas (de tratamento).

Ao aplicar a contrapositiva na afirmação *"**Cada x tem apenas um y**",* ocorre uma variação na referência do objeto. Vamos passar essa afirmação para a linguagem da lógica ***"Todo x tem apenas um y"*** e analisar:

p: a função é injetora

q: todo x tem apenas um y

$p \rightarrow q$: Se a função é injetora então todo x tem apenas um y

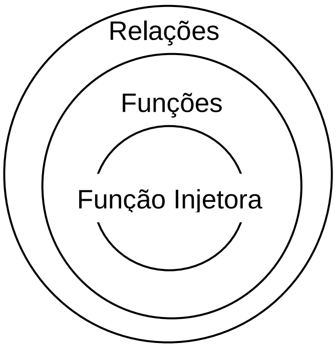
e sua contrapositiva

$\sim q \rightarrow \sim p$: Se existe x que tem mais de um y, então a função não é injetora.

Notamos que ao aplicarmos a contrapositiva, não temos uma afirmação equivalente com a definição de função injetora, porque a negação da proposição *q* diz: "se algum x tiver mais que um y" apresenta uma contradição com a definição de função. O objeto em questão deixa de ser uma função.

Para ser função, todos os elementos (x) do conjunto de partida, precisam ter uma e apenas uma associação com os elementos (y) do conjunto de chegada. Quer dizer, há um equívoco do professor ao proferir sua regra apesar de que ela possa surtir o efeito desejado nas resoluções de exercícios.

Barnet (2003) escreve sobre as exigências em relação a ordem de uma definição e coloca que “o termo a ser definido deve ser colocado no conjunto ou na classe maior seguinte ao qual pertence”. (p.278). Assim, no caso da função injetora, para que ela seja definida, primeiramente precisamos definir função. Desse modo, Relação, Função e Função injetora, devem ser sempre definidas nesta ordem:



Assim, utilizando a negação, podemos mostrar a falha na dedução desta regra que demonstra não existir função não-injetora, pois pela lógica essa afirmação diz que se ela não é injetora ela também não será função. Observe:

É Injetora: **(a)** “*todo x tem apenas um y*”

Não é injetora: **(b)** *“existe x que tem mais de um y”*

O tratamento por negação aplicado em (a) determina por dupla comutação, a produção de um enunciado contraditório, como afirma Duval (1995, p. 164) o tratamento por negação mais imediato “todo x tem apenas um y”, é “todo x tem mais de um y”, o que, da mesma forma fere a definição de função, determinando outro objeto matemático.

Distinguimos neste caso que a afirmação *“cada x tem apenas um y”* poderia ter sido trocada pelo professor por *“cada y tem no máximo um x”.* Como podemos ver:

p: a função é injetora

q': cada y tem no máximo um x

p→*q'*: Se a função é injetora então cada y tem no máximo um x

e sua contrapositiva

~*q'*→~*p*: Se algum y tem mais de um x, então a função não é injetora.

Assim, percebemos a importância do conhecimento e uso das formas de negação e da lógica para organizar “técnicas de ensino” que facilitem a aprendizagem do aluno a partir de uma representação diferente da tradicional. A regra utilizada pelo professor não é referencialmente equivalente com a definição, apesar de atingir os objetivos imediatos de resolução de exercício. A aplicação da contrapositiva na afirmação do professor foi imprescindível para determinar o equívoco na definição.

Os registros representados na língua natural como a língua formal possuem regras de tratamento e conformidades diferentes, e isso é um dos motivos das dificuldades encontradas nas operações de conversão. Duval (1988a) coloca que “a substituição de uma expressão relevante em uma rede semântica a uma expressão de uma outra rede semântica aparece, às vezes, como um salto dificilmente transponível.” (p.09).

As dificuldades verificadas a partir do equívoco na definição do professor são decorrentes do alto nível de não-congruência semântica entre o registro da língua formal e sua conversão na língua natural. Duval (1995) coloca que quando o nível de não-congruência entre dois registros é muito alto, a passagem de um registro a outro não pode efetuar-se diretamente sendo necessário o uso de uma representação intermediária.

Uma representação matemática na língua natural corre o risco de ser incompleta, neste caso, como diz Duval (1995) o uso de uma representação mista (intermediária) que mescla as características dos dois registros é uma saída para esse impasse. Ele coloca que obtemos assim, “(...) um enunciado que se parece a um enunciado na língua natural, e que este tipo de leitura habitualmente se utiliza no sentido da língua formal para a língua natural." (p.156)

Por exemplo, Iezzi e Murakami (2004, p.226) apresentam para a definição de função injetora, duas definições (uma contrapositiva da outra) que são consideradas por Duval (idem) como representações mistas (intermediárias):

(1) Uma função *f* de A em B é injetora se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A, **se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$**

(2) Uma função *f* de A em B é injetora se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A, **se $f(x_1)= f(x_2)$, então $x_1= x_2$**

As duas definições são formadas por uma mescla de dois sistemas semióticos de representação. Neste caso, a dificuldade de expressão a definição em um único sistema semiótico de representação o fez partir para uma representação intermediária. Duval (1993) afirma que toda representação é incompleta, então o uso de uma representação mista, apesar dos obstáculos de conformidade entre a línguas discursivas, natural e algébrica, pode trazer uma informação mais completa sobre o objeto denotado.

Verificamos que apesar de proferir estas duas definições o autor após o primeiro exercício recorre à frase na língua natural "A função é injetora, pois dois elementos distintos de A têm como imagem dois elementos distintos de B. **Observemos que não existem duas ou mais flechas convergindo para um mesmo elemento de B**."(p.227, grifo nosso)

Essa necessidade de recorrer ao que "não pode" é uma tentativa do professor de cercar o objeto de ensino, devido ao alto nível de não-congruência entre os registros natural e formal na definição da injetora. Sobre isso Duval (1995) coloca que:

> Para efetuar a passagem da língua formal para língua natural, geralmente se recorre a uma paráfrase em um enunciado na língua natural que trata de aproximar-se do que seria uma leitura ditada da língua formal, introduzindo por exemplo as proposições que codificam quantificadores. Mas isso pode ir de encontro apenas à condição de parafrasear o enunciado em língua natural como modo de adaptar às regras de formação própria da língua formal. Isso supõe que se tenha um mínimo de familiaridade com essas regras! Apesar de

> tudo, isto não é suficiente . **Se pode chegara uma proposição bem formada que significa outra coisa distinta ao enunciado de partida, sem perceber!** Tal procedimento se baseia pois não existe nenhum meio de controle para evitar as rupturas semióticas e semânticas entre os dois registros. (p.156, 157, grifo nosso)

- PROFESSOR 2: Sistema de Ensino Energia (2006, MTM A, aula 17)

Como no caso anterior, o *Professor 2* faz uso da contrapositiva para ensinar a função injetora, porém não usa o registro da língua natural e sim o registro formal algébrico. Examinando simultaneamente aula e material didático, notamos a semelhança na prática deste professor entre aula e apostila, diferente do *Professor 1* que tenta, sempre que possível, mudar a forma de representação da definição no intuito de simplificar e facilitar a compreensão do aluno.

O *Professor 2* inicia sua aula pronunciando a definição de injetora que se encontra na apostila: “Uma função f: A→B será denominada injetora se, e somente se, quaisquer dois domínios distintos corresponderem a duas imagens distintas.” [31] (Sistema de Ensino Energia, 2007a, v.05, p.01).

Então, ilustra a definição:

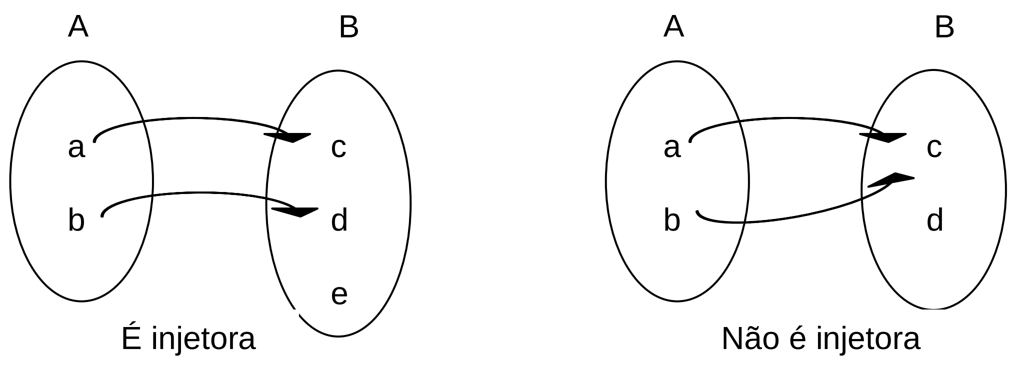


Figura 18 – Representação por diagrama da função injetora e não-injetora.

[31] Observamos que na definição da apostila e em toda a aula ministrada, o professor utiliza o termo “dois domínios”. Entendemos que para essa expressão o correto seria utilizar ”dois elementos do domínio”. Utilizamos no desenvolvimento desta análise a expressão exata utilizada pelo professor.

Continua com a fala:

P$_2$: *Vamos ver então...No primeiro diagrama, temos uma função injetora pois o domínio **a** tem imagem **c** e o domínio **b** tem imagem **d**. Cada domínio tem uma imagem diferente do outro. E o segundo diagrama não é de uma função injetora, porque os domínios **a** e **b** possuem a mesma imagem **c**. Quer dizer, dois domínios distintos têm imagens iguais!*

E escreve no quadro a definição na língua formal:

$$f\text{: A}\rightarrow\text{B é injetora} \Leftrightarrow \text{com } x_1 \neq x_2 \text{ tem-se } f(x_1) \neq f(x_2)$$

Após isso ele explica a definição formal, utilizando a operação que Duval (1993) chama de conversão, pois profere novamente a definição na língua natural. Percebemos que neste momento ele muda a forma apresentada da definição usando a dupla-negação. O professor troca "ocorram valores distintos" por "não ocorram valores iguais". Essa substituição, que combina duas operações de oposição, no caso, a oposição por comutação antonímica e a oposição por aplicação do operador unitário ao verbo é classificada por Duval como um tratamento por oposição (1995) que transforma a afirmação em outra afirmação equivalente.

O professor diz assim:

P$_2$: *Quer dizer que a função é injetora sempre que cada dois valores distintos de **x**, não ocorram valores iguais em y.*

O que significa na língua formal:

$$f\text{: A}\rightarrow\text{B é injetora: } x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \sim(y_1 = y_2)$$

ou seja

$$f\text{: A}\rightarrow\text{B é injetora: } x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow y_1 \neq y_2$$

Após isso ele exemplifica, apresentando no quadro dois exemplos:

Exemplo (1) : A função definida por $y = x^2$ é injetora?

P$_2$: *Vamos substituir na função dois valores diferentes para x_1 e x_2, e ver o que acontece:*

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = -2 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 2^2 = 4 \\ f(-2) = (-2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad y_1 = y_2$$

P$_2$: *Olha só, obtemos dois valores iguais, para valores diferentes de x, então concluímos que essa função não é injetora.... porque para valores diferentes de x deveríamos ter valores diferentes para y.*

Exemplo (2): $y = x + 1$

P$_2$: *E agora? Que valores devemos atribuir para x_1 e x_2? Neste caso, podemos pensar assim: Se para ser injetora valores diferentes para x_1 e x_2, produzem valores diferentes para y_1 e y_2, então atribuindo valores iguais para y_1 e y_2 teremos valores iguais para x_1 e x_2.*

$$y_1 = y_2$$

$$x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

O professor fala então que um elemento da imagem produz apenas um elemento para o domínio, – e ressalta que se a função fosse do segundo grau teriam dois valores para analisar – então a função é injetora.

Esta forma de verificação da função injetora do professor é baseada na equivalência lógica proporcionada pela contrapositiva. Sem perceber, o professor emprega na definição formal a contrapositiva lógica e obtém uma nova representação, com implicações cognitivas diferentes. Duval (1988a) fala que “Duas expressões podem ser sinônimos (elas podem “dizer a mesma coisa”, elas podem ser verdadeiras ou falsas juntas) e não serem semanticamente congruentes: neste caso, há um custo cognitivo importante para a compreensão”(p.08). Podemos escrever e verificar:

f: A→B é injetora: $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Destacando a implicação da definição:

(I) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Podemos escrever a negação:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sim(x_1 = x_2)$$

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow \sim[f(x_1) = f(x_2)]$$

então a contrapositiva de **(I)** será

(II) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Assim, a representação da definição (I) é equivalente à representação da definição (II), pois ocorre um tratamento entre elas a partir da aplicação da contrapositiva. Assim uma é a contrapositiva da outra, elas possuem a mesma referência, no entanto, não possuem o mesmo significado para o aluno, conforme se pode constatar nos exemplos citados por esse professor. Reconhecemos que para provar, por exemplo, que a função real $f(x) = x^2$ não é injetora, a forma (I) é semanticamente mais congruente com o tipo de tratamento a ser executado, no entanto, para provar que a função real $f(x) = x + 1$ é injetora, a definição (II) é a forma com maior congruência com o tipo de tratamento utilizado.

As definições (I) e (II) são registros de representação do mesmo objeto matemático. Como vimos por Duval (idem), elas não possuem congruência semântica. No entanto, cada uma delas pode ser congruente com certo tipo de tratamento.

Outro fato observado nas aulas de função injetora, foi em relação à determinação do gráfico injetor. Ambos os professores dos quais analisamos a aula sobre Função Injetora, determinam uma função injetora com base no seu gráfico, da mesma forma que sugere a apostila, a partir do traçado de retas paralelas ao eixo $O\vec{x}$.

Afirmam que para o gráfico de uma função descrever uma função injetora, essas retas devem “cortar” o gráfico em no máximo um ponto.

Na linguagem formal temos:

f: A→B é injetora ⇔ yRx (unicamente)

Entendemos que avaliar a quantidade de vezes que as retas traçadas paralelas ao eixo horizontal interceptam gráfico da função, significa verificar a quantidade de x para cada y. Ou seja, se qualquer reta traçada interceptar apenas um ponto do gráfico, significa que para cada y teremos apenas um x correspondente.

No quadro, o *Professor 2* apresenta:

(a) *f*: $R_+ \rightarrow R$ definida por $f(x) = x^2$

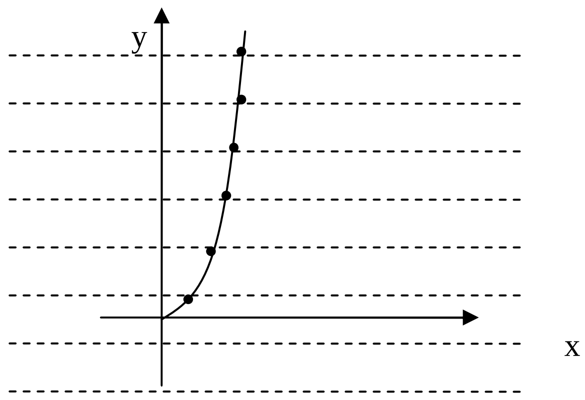


Figura 19 - Representação gráfica da função $f(x) = x^2$

(b) *f*: R→R definida por $f(x) = |x-2|$

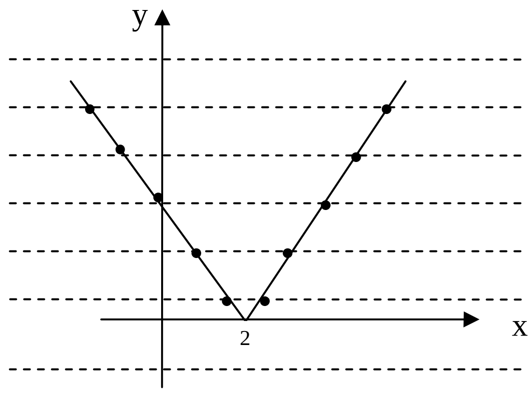


Figura 20 – Representação gráfica da função $f(x) = |x - 2|$

E coloca que a representação gráfica da função (a) é injetora pois no gráfico todas as linhas paralelas ao eixo $O\vec{x}$ interceptam a curva em, no máximo, um ponto, portanto a função é injetora. E logo, apresenta a negação de (a) pois no gráfico (b) algumas linhas paralelas ao eixo $O\vec{x}$ interceptam o gráfico em mais de um ponto, determinando assim a função não-injetora.

Podemos estudar essa prática frente ao uso das formas de negação e analisar as operações de tratamento por oposição aplicadas. Buscamos na apostila do professor forma para definição da função injetora a partir da representação gráfica e encontramos respectivamente abaixo de cada exemplo gráfico, (gráficos apresentados anteriormente) as observações:

Considerando o gráfico de uma função:

Será injetora se:

(a) *todas as linhas paralelas ao eixo Ox interceptam a curva em, no máximo, um ponto;*

Não será injetora se:

(b) *algumas linhas paralelas ao eixo Ox interceptam o gráfico em mais de um ponto;*

Percebemos aqui que (b) é a negação por comutação extensional e por aplicação do operador unitário ao término extensional de (a), quer dizer, de (a) para (b) como diz Duval (1995, p.164), ocorre um tratamento combinado por oposição (todo $\rightarrow$ alguns e no máximo um $\rightarrow$ mais de um), determinando afirmações contrárias e complementares.

Como Duval (1988a), reconhecemos que duas formas de representação podem ter significados diferentes apesar de estar se referindo ao mesmo objeto e que todo procedimento matemático implica na substituividade de representações, com base numa invariabilidade de referência.

A importância do uso destes tratamentos, da dupla negação e da complementariedade nas práticas dos professores, que a partir de uma transformação interna de negação, mudam a forma de representação do objeto desejado a partir de uma representação referencialmente equivalente.

O exemplo da dupla negação aparece de forma a contribuir no processo quando o professor afirma que *“a função será injetora se não ocorrer (b)”*. Contudo, encontramos na fala do *Professor 1* no decurso da resolução de exercícios a seguinte afirmação:

P_1*: ...Olhem o gráfico... Ele é injetor porque não existe nenhuma linha que corta a função em mais de um ponto! Todas cortam em apenas um ponto.*

Analisando logicamente, verificamos que o professor usa sem perceber a dupla negação, apresentando uma afirmação que não condiz com o que ele tenta afirmar: quando diz, “não existe nenhuma linha” ele usa a forma negativa da afirmação “existe uma linha”, o que determina uma função não injetora, que é o oposto do que ele deseja afirmar. Quando apresentamos uma afirmação matemática na língua natural é comum ocorrer esse tipo de equívoco pelos próprios vícios pessoais de linguagem. Segundo Duval (1995) esse é um dos obstáculos que ocorre nos tratamentos por negação da língua natural.

Nesta fala, percebemos que o professor tem a intenção de dizer “*Ele é injetor porque não existe uma linha que corta a função em mais de um ponto”.* Então, voltando para as afirmações (a) e (b) anteriores, podemos dizer que elas são complementares e escrever:

(a) = ~(b)

A negação total de (b) pode ser escrita:

~(b) *Nenhuma linha paralela ao eixo* $O\vec{x}$ *intercepta o gráfico em mais de um ponto;*

Segundo Duval (1995, p. 164, 165) nestes exemplos, é possível observar a contradição de um enunciado em língua natural e dizer que sua negação no sentido lógico se obtém sem recorrer ao operador unitário de oposição, e sem que haja no enunciado a menor marca de negação, o que aparece segundo ele, nos enunciados contrários.

Notamos que o uso da dupla negação, quando corretamente empregada, pode ser uma alternativa de representação que facilita a compreensão do aluno, pois dependendo dos tratamentos necessários requer raciocínios diferentes que podem ser menos custosos.

3.4. Tema 4 : Análise Combinatória

No ensino da definição de Arranjo e Combinação da Análise Combinatória, foi possível distinguir o uso negação, da complementariedade e da contrapositiva. Notamos que ao longo de toda a aula o professor apresenta os agrupamentos: arranjo e combinação, como sendo agrupamentos complementares. O professor utiliza a negação e a contrapositiva quando afirma na língua natural que a negação do arranjo é a combinação. Veremos a seguir.

- PROFESSOR 3: Sistema de Ensino Energia (2007b, MTM E, aula 8)

O *professor 3* para dar início a aula sobre Análise Combinatória apresenta aos alunos o que é um agrupamento, os tipos de agrupamentos, com repetição e sem repetição (simples e compostos), apresenta a importância de saber diferenciar os agrupamentos pela comparação entre eles em relação ao tamanho, natureza e ordem e coloca no quadro assim:

ARRANJOS SIMPLES E COMBINAÇÃO SIMPLES

Arranjos Simples:	**Combinação Simples:**
É quando a ordem altera o resultado final.	É quando a ordem não altera (conserva) o resultado final.

Figura 21 – Esquema do Professor 3 sobre Arranjos Simples e Combinação Simples

E fala:

P_3: *Tem casos que a ordem é importante, tem casos que não é. Quando a ordem for importante é arranjo e quando a ordem não for importante vai ser combinação.*

Analisando esta fala, foi possível verificar que o professor deixa de lado a definição de arranjo e combinação, e constrói sua explicação a partir de apenas uma característica existente entre os agrupamentos simples: a comparação em relação à ordem dos elementos.

Como vimos no esquema colocado no quadro negro, o professor separa os agrupamentos em dois casos distintos:

(I) **A ordem altera** , ou seja, *a mudança de ordem entre os elementos de um grupo, determina outro grupo. – PARA O ARRANJO.*

(II) **A ordem não altera**, ou seja, *a mudança de ordem entre os elementos de um grupo, não determina outro grupo. – PARA A COMBINAÇÃO.*

Verificamos que ocorre aqui um efeito chamado por Brousseau (1996, p.43) de *deslize metacognitivo*. Segundo o autor, este feito ocorre quando o professor, para facilitar a atividade de ensino é levado a tomar suas próprias explicações e seus meios heurísticos como objetos de estudo no lugar do verdadeiro conhecimento matemático. O professor apóia-se em apenas uma característica do objeto deslocando a atenção apenas para a questão da análise e comparação da ordem dos elementos no momento da identificação do tipo de agrupamento simples.

A partir desse desvio, utiliza o conceito de complementariedade e fala que se não é arranjo, é combinação. De fato, se considerarmos isoladamente as características, “altera o grupo” e “não altera o grupo”, podemos dizer que elas são complementares. Contudo, a passagem feita pelo professor quando transfere a complementariedade da característica para a complementariedade entre arranjo e combinação é que ocorre um equívoco.

Se buscarmos na aula do professor, encontramos uma fala em que ele, no momento da resolução dos exercícios, questiona os alunos e apresenta de forma evidente a negação do arranjo por combinação considerando-os complementares:

P_3: *... neste caso... é arranjo ou combinação?A ordem altera ou não altera o resultado?Se não é arranjo é porque é combinação! Só existem esses dois casos!*

Vemos nesta fala que ele diz:

$$\sim(\textit{arranjo}) \Rightarrow \textit{combinação}$$

Contudo, se ***A*** é arranjo e *C* é combinação e eles são complementares então $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{C}$ será vazio. Ou seja, a intersecção entre arranjo e combinação é vazia. O que é falso, visto que considerando todos os agrupamentos simples possíveis de se escrever de um conjunto (agrupamentos simples de *n* elementos, tomados *p* a *p),* a combinação será um subconjunto dos arranjos. E podemos dizer que toda combinação é um arranjo! Podemos verificar através de um esquema por diagrama esta situação no universo dos agrupamentos simples e com um exemplo algébrico:

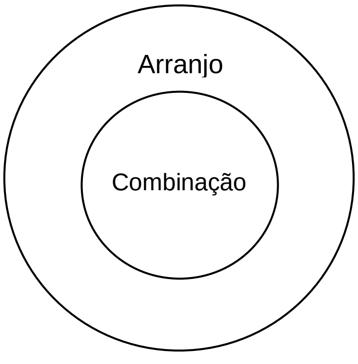


Figura 22 – Representação por diagrama dos Arranjos e Combinações Simples

Se considerarmos todos os agrupamentos de {a,b,c} tomados 2 a 2, podemos escrever:

A = Arranjo ={ ab, ac, ba, bc, ca, cb}

C = Combinação = {ab, ac, bc}

Assim, verificamos que ***C*** $\subset$ ***A***, o que invalida logicamente a afirmação do professor em relação a complementariedade existente entre arranjo e combinação.

Entretanto, observamos que a prática de identificar o tipo de agrupamento através das características (I) e (II) é possível pela complementariedade existente entre elas, e surte o efeito pretendido pois é valida para os tratamentos a serem implementados em que o aluno precisa identificar em exercícios de verificação os casos que temos um arranjo ou uma combinação.

Considerando essa atividade e voltando ao nosso objeto de análise, podemos analisar as formas de negação empregadas. Voltando para a fala do professor, verificamos claramente o uso da contrapositiva, de forma entrelaçada com a noção de complementariedade.

p: é arranjo

q: a mudança de ordem entre os elementos de um grupo, determina outro grupo.

então $p \Rightarrow q$ significa

(a) Se é arranjo então a mudança de ordem entre os elementos de um grupo, determina outro grupo.

Aplicando a contrapositiva, $\sim q \Rightarrow \sim p$ temos:

(b) Se a mudança de ordem entre os elementos de um grupo não determina outro grupo então não é arranjo.

Encontramos na aplicação da contrapositiva, uma representação logicamente equivalente com aquela que o professor descreve para os agrupamentos denominados combinação. Aqui, percebemos um caso de congruência entre o que não é arranjo e o que é combinação. “Duas expressões diferentes podem ser referencialmente equivalentes sem que sejam semanticamente congruentes. Inversamente, duas expressões podem ser semanticamente congruentes sem que sejam referencialmente equivalentes.” (DUVAL, 1988a, p.08)

Analisando a fala do professor quando diz: “*Tem casos que a ordem é importante, tem casos que não é. Quando a ordem for importante é arranjo e quando a ordem não for importante vai ser combinação”.* Foi possível verificar o uso da complementariedade imbricada na negação quando o professor fala que um caso *“a ordem altera o grupo”* característica (I) e o outro caso *“a ordem não altera”* o grupo característica (II).

Este tipo de negação, que utiliza o operador unitário negativo “não” diretamente ao verbo, não é considerado por Duval (1995, p. 164, 165) como um tratamento por negação, contudo, essa é a forma pura de negação, que dá base à complementariedade.

Reconhecemos também que o professor sente a necessidade de registrar outra representação para o termo “não altera”, trocando por “conserva” o que segundo Duval (1995) descreve um tratamento por oposição por comutação antonímica.

- PROFESSOR 3: Sistema de Ensino Energia (2007b, MTM E, aula 11)

Ainda neste tópico, encontramos na ocasião da resolução de exercícios de permutação o uso da complementariedade. O *professor 3* propõe a questão: “Quatro pessoas, Caio, Nara, Fernando e Selma, devem sentar-se em quatro cadeiras numeradas. De quantas maneiras as cadeiras podem ser ocupadas se Caio e Nara devem ficar separados?” (Sistema de Ensino Energia, 2007a. v. 03, p.93)

E diz:

P_3: *Para termos Caio e Nara separados, precisamos fazer:*

E apresenta no quadro um esquema sagital, chamado por Duval (1995) de representação intermediária:

1º.) C __ N __	4º.) N __ C __
2º.) C __ __ N	5º.) N __ __ C
3º.) __ C __ N	6º.) __ N __ C

Como o exercício anteriormente resolvido solicitava a resolução de um problema com as mesmas informações porém com Caio e Nara juntos, o professor fala:

P_3: *Para fazer o cálculo de Caio e Nara juntos foi fácil, mas separados complica, não é?Tenho que fazer muitos cálculos! É vantajoso isso?Tudo bem que é fácil, mas se forem 5 ou 6 lugares?... As vezes, fazer da maneira direta é muito demorado, então a melhor opção é fazer o caminho indireto!*

E registra no quadro:

QUERO = TOTAL – NÃO QUERO

P_3: *Para achar o que eu quero, é melhor pegar o total e tirar o que não quero.*

Neste caso:

2 PESSOAS SEPARADAS = TOTAL – 2 PESSOAS JUNTAS

Assim:

Total de permutações: $P_4 = 4! = 24$

2 pessoas juntas: $P_2.P_3 = 2!\ 3! = 12$

2 Pessoas separadas: $24 - 12 = 12$

P_3: *Se você tentar fazer um exercício e aparecer muita conta, talvez é melhor fazer assim, usar o caminho indireto!*

Percebemos aqui o uso evidente da complementariedade. O professor utiliza um esquema baseado na noção de complementar. Quer dizer, que se eu conheço a quantidade de agrupamentos que eu não quero, que no caso seriam as maneiras de Caio e Nara sentarem juntos, e conheço também o todo, que são todos os agrupamentos possíveis, eu logicamente conheço àqueles em que eles estão separados.

O método indireto mencionado pelo professor, é um método baseado na negação. Verificamos que

p: Caio e Nara Juntos

~p: Caio e Nara Separados

$p \vee \sim p$: Total

Quando negamos a solicitação do problema, para resolvê-lo pelo método indireto, mudamos a forma de representação da situação a partir de um tratamento por negação, partimos por outro caminho, que da mesma forma nos leva ao resultado pretendido.

Notamos que esse tratamento utiliza a dupla negação, pois primeiramente negamos o que queremos e encontramos o que não queremos e logo após excluímos novamente, para chegar então no resultado pretendido. Existem muitos outros casos semelhantes a este encontrado nas análises, como por exemplo no caso da definição do número de diagonais de um polígono, ou o número de triângulos formados a partir de pontos distintos que se encontram em duas retas paralelas.

3.5. Tema 5 : Divisibilidade

Outra situação selecionada em nossa análise das aulas aparece quando o *Professor 4* introduz aos alunos a noção de divisibilidade. Verificamos que neste assunto, o professor apresenta apenas através de “exemplos e contra-exemplos”. Observe:

- PROFESSOR 4: Sistema de Ensino Energia (2007b, MTM C, aula 1)

DIVISIBILIDADE

Considere a divisão:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ \hline 0 & 8 \end{array}$$

Como o resto é zero, a divisão é exata

P_4: *Neste caso, dizemos que 40 é divisível por 5 ou que 5 é divisor de 40*

$$\begin{array}{r|l} 41 & 5 \\ \hline 1 & 8 \end{array}$$

Como o resto é 1, a divisão não é exata

P_4: *Neste caso, dizemos que 41 não é divisível por 5 ou que 5 não é divisor de 40*

O professor define o que é divisibilidade a partir de um exemplo que verifica a divisibilidade e um que não verifica. Temos duas situações complementares dentro de um universo limitado: Divisões com resto nulo e divisões com resto não-nulo.

A estratégia utilizada parte da lógica. Um número qualquer **a** ou é divisível por um número qualquer **b**, ou não é, não existe meio termo. Pela lógica, temos aí uma afirmação e sua negação, e logicamente se a afirmação é verdadeira, sua negação é falsa e se a afirmação é falsa, sua negação é verdadeira, pelo princípio do terceiro excluído, não existe terceiro valor lógico.

Então, quando sabemos que um número não é divisível por outro, a negação ou exclusão dos que não são divisíveis nos leva aos divisíveis. Neste caso estamos utilizando a operação de tratamento sobre a definição, usando outra representação a partir do uso da dupla negação, que é um princípio de lógica que determina a invariabilidade na referência.

É possível também analisar este caso e mostrar a importância dos exemplos que não verificam uma definição usando a contrapositiva. Observemos:

Para que certo número *p* seja divisível por outro número *q*, é necessário que o resto da divisão seja zero. Portanto, Se o resto da divisão *não* for zero, significa que o número *p não* é divisível por *q.* Na linguagem formal:

$p/q \Rightarrow r = 0$ *(p é divisível por q, portanto o resto da divisão é zero)*

e a contrapositiva

$r \neq 0 \Rightarrow \sim (p/q)$ *(o resto da divisão é diferente de zero, portanto p não é divisível por q)*

Verificamos que a operação que legitima esta prática, além da dupla negação que mantém a referência do objeto, é a contrapositiva. Ela auxilia na aprendizagem pois permite outra forma de definir o mesmo objeto.

Esta forma, é segundo Duval (1993) uma transformação interna de tratamento sobre o de registro de representação, que não privilegia a conversão. No entanto, a idéia da complementariedade, apesar de não fazer referência direta do objeto é usada pelo professor como uma representação indireta, pois trabalha no complementar, e pode auxiliar na compreensão.

3.6. Tema 6 : Relação de Pertinência e Inclusão

Encontramos na Teoria de Conjuntos, no ensino da aplicação da Relação de Pertinência e da Relação de Inclusão, o uso puro da negação. O professor utiliza a negação no momento da avaliação de afirmações em que aparecem os símbolos “não está contido” e “não contém” com a intenção de facilitar o raciocínio dos alunos. Ou seja, na aplicação dos símbolos $\not\subset$ e $\not\supset$.

O *professor 1* coloca no quadro todos os símbolos e em seguida apresenta diversas situações em que o aluno necessita avaliar o valor-verdade. Dentre todas as situações por ele apresentadas, analisaremos apenas aquelas em que ocorre a negação.

- PROFESSOR 1: Sistema de Ensino Energia (2007b, MTM A, aula 5)

Ele registra no quadro:

PERTINÊNCIA E INCLUSÃO

E apresenta a simbologia a ser utilizada:

$$\in, \notin, \subset, \not\subset, \supset, \not\supset$$

Determina o conjunto:

A = {1, 2, {3},4}

Após isso, questiona o valor-verdade da seguinte sentença:

$\{1\} \not\supset A$

P_1: *Olha essa frase.... Pensa bem.... Verdadeiro ou falso? Olha que a negação pode te atrapalhar! Vou te dar uma dica: Vou apagar a negação.... leia agora....*

$\{1\} \supset A$

P_1: *Me responde... A é conjunto de {1}? Verdadeiro ou falso? Falso! Então, se assim: $\{1\} \supset A$ fica falso é porque assim: $\{1\} \not\supset A$ fica verdadeiro! É lógico! Claro! Se você se atrapalha com a negação, pensa o contrário e daí marca o contrário!*

Mais adiante, apresenta o exercício da apostila (Sistema de Ensino Energia 2007a. v.02, p.05)

Considerando o conjunto A={0, 2, 4, 6}

E pergunta,

$\{0, 1, 2\} \not\subset A$, é verdadeiro ou falso?

P_1: *Olha que mudar na negação pode te ajudar...Então muda....O conjunto {0,1,2} é conjunto de A? Falso! Então quer dizer que a negação é verdadeira!*

Reconhecemos na fala do professor o uso puro da negação. O professor prefere examinar o caso positivo (estar contido) em detrimento do caso negativo (não está contido). Esta forma de oposição permite separar sobre o valor de verdade, duas afirmações **opostas** em que uma é necessariamente verdadeira enquanto a outra é falsa. A partir da negação, é possível construir uma outra afirmação que seja contrária. Assim:

$$\boldsymbol{p} \text{ é Verdadeira} \Rightarrow \boldsymbol{\sim p} \text{ é Falsa}$$

Podemos então escrever o exemplo analisado:

$$\{1\} \supset A \text{ é Falso} \Rightarrow \{1\} \not\supset A \text{ é Verdadeiro}$$

Sabemos por Duval (1995) que a simples aplicação do operador unitário ao verbo é um tipo de oposição que torna as afirmações contrárias. Assim, o professor utiliza o contrário e na hora da resposta muda novamente: *“pensa o contrário e marca o contrário!”* (dupla negação), onerando principalmente o aspecto semântico da afirmação. Negando duas vezes, volta para afirmação inicial: $\sim(\sim p) = p$

Notamos que na aula, o professor naturalmente solicita ao aluno que transforme a afirmação negativa em uma afirmação positiva. Isto ocorre por causa do alto custo cognitivo solicitado em uma afirmação onde é aplicado o operador unitário **não**. Segundo Duval (1988a) a verificação de afirmações onde é empregada a negação possui um alto custo cognitivo. Ele afirma que o tempo que um aluno leva na identificação de afirmações na forma negativa é maior do que na forma positiva.

Em um estudo com alunos sobre o custo da não-congruência em atividades de verificação, Duval (idem) apresenta uma figura icônica e afirmações discursivas para serem verificadas. Estas afirmações, escritas de forma positiva e na forma negativa, na mesma ordem ou na ordem inversa; com o mesmo traço antonímico ou com o mesmo traço semântico e são apresentadas aos alunos para medir a variação de tempo necessária para darem a resposta.

Observe o esquema:

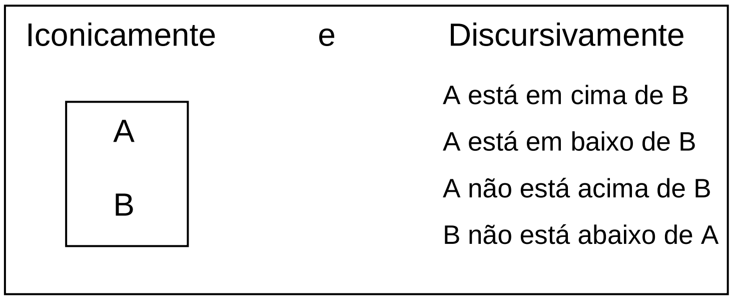


Figura 23 – Esquema de Duval (1988a) para análise da não-congruência semântica em atividades de verificação.

O autor mostra que quanto maior a quantidade de seqüências internas necessárias para emparelhar os dois registros e comparar, maior foi tempo de resposta dos alunos, consequentemente maior o custo cognitivo. No caso das afirmações negativas, o tempo decorrido para conseguirem dar a resposta foi maior, demonstrando que a negação realmente pode “atrapalhar” como afirma o *professor 1.*

Entendemos que as afirmações na forma negativa, podem trazer um custo cognitivo alto, entretanto, na aula do *professor 1*, foi possível perceber que a negação também possibilita mudar uma representação que está na forma negativa passando para a forma positiva, de forma a diminuir o custo cognitivo para os tratamentos ou raciocínios necessários.

3.7. Tema 7 : Paralelismo

Encontramos no ensino de Geometria de Posição o uso do contra-exemplo. O *Professor 5*, no instante da explicação dos Teoremas de Paralelismo, apresenta um exemplo trivial do uso do contra-exemplo na sala de aula.

- PROFESSOR 5: Sistema de Ensino Energia (2007b, MTM D aula 18)

TEOREMAS DO PARALELISMO

O professor inicia apresentando quatro teoremas de paralelismo e ao final de cada um apresenta um exemplo, demonstrando de forma não-discursiva (geometricamente) cada um deles.

P1) Se uma reta r é paralela a um plano α e se existir um plano β que contém r e é secante a α, segundo uma reta s, então as retas r e s são paralelas;

P2) Se uma reta não contida num plano é paralela a uma reta deste plano, então essa reta é paralela ao plano;

P3) Se dois planos são paralelos, então, qualquer reta contida em um é paralela ao outro;

P4) Se um plano contém duas retas concorrentes paralelas um outro plano, então os planos são paralelos.

Ao final da explicação ele dialoga com a turma[32] assim:

P_6: *É claro que seria fácil vocês apenas decorarem esses teoremas e ficarem prontos para qualquer questão de vestibular... Mas vou apresentar para vocês um tipo de questão que cai muito no vestibular, utilizando esses conhecimentos e que não adianta decoreba... Me digam se é verdadeiro ou falso, tá?*

-Se um plano contém duas retas, paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos?

T: *Sim!*

P_6: *Prestem atenção, eu vou repetir...(...)*

T: *Não...sim...*

P_6: *Existe um caso que faça isso mentira?*

T: *Não!*

P_6: *Então quer dizer que é verdade!?*

T: .....(?)

---

[32] Mostraremos este diálogo com a turma na íntegra, e denominaremos “T” as respostas dos alunos.

P_6: *Quando acontecer isso, vocês têm que pensar num contra-exemplo. Se tu conseguir montar um contra-exemplo em relação ao que está sendo dito, significa que é falso. Quer ver? Por exemplo:*

Neste momento o professor vai ao quadro e desenha um plano α e diz:

P_6: *Eu vou colocar duas retas deste plano paralelas a outro plano e mesmo assim os planos não serão paralelos... Por isso que essa afirmacão é uma afirmação falsa. Olhem...*

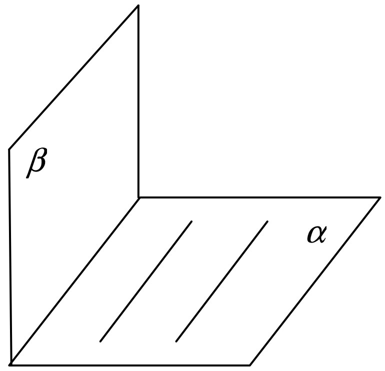


Figura 24 – Contra-exemplo em paralelismo

E diz:

P_6: *Viram? O plano α contém duas retas que são paralelas ao plano β. Então os planos são paralelos?*

T: *Não.*

P_6: *Então aqui está um contra-exemplo. Por isso a afirmação é falsa.*

Constatamos aqui o uso do contra-exemplo e da negação. Lembramos que para mostrar que uma afirmação é falsa, basta provar que sua negação é verdadeira. Quer dizer, achar um contra-exemplo é o mesmo que achar um exemplo que verifica a negação da afirmação. Explorando esse caso utilizado pelo professor, reescrevendo as afirmações na linguagem lógica, podemos verificar a negação do quantificador universal:

p: Todo plano que contém duas retas, paralelas a outro plano, é paralelo a este plano

~p: Existe um plano que contém duas retas, paralelas a outro plano, e não é paralelo a este plano.

Convertendo para a língua formal, podemos representar:

$$p\text{: } (\forall r, s \subset \alpha)(r // \beta \text{ e } s // \beta) \Rightarrow \alpha // \beta$$

$$\sim p\text{: } \alpha\ (\exists r, s \subset \alpha)(r // \beta \text{ e } s // \beta) \Rightarrow \ \alpha \angle \beta$$

Isto é, que existe pelo menos um caso que verifica a afirmação *~p,* (figura 24) tornando a afirmação *p* uma proposição falsa. Pois bem, esse caso diz-se um contra-exemplo da afirmação *p.*

O professor coloca ao aluno que para ser verdadeira a afirmação em questão é necessário dizer que as retas devem ser concorrentes, o que nos leva de encontro ao Teorema P4 (enunciado inicialmente) e escrever p':

p': Se um plano contém duas retas ***concorrentes*** *paralelas um outro plano, então os planos são paralelos.*

$$p'\text{: } (r \angle s \subset \alpha)(r // \beta \text{ e } s // \beta) \Rightarrow \alpha // \beta$$

E termina dizendo:

P_6: *Vocês têm sempre que pensar em um possível exemplo que faça com que vá por água abaixo a afirmação. A criatividade para você achar é fundamental. Se você não conseguir encontrar é porque afirmação é verdadeira.*

A partir desta aula, foi possível verificar a importância do conhecimento dos elementos da lógica (neste caso, o contra-exemplo) para que eles sejam corretamente empregados e evidentemente uma ferramenta importante no ensino da Matemática. Cabe salientar, o necessário cuidado quando o professor fala que se o aluno não consegue encontrar é porque é verdadeira. Vimos no caso do Trinômio de Euler (página 65) que não é sempre assim que ocorre.

RESULTADOS

Neste capítulo, temos a intenção de apresentar algumas considerações sobre a pesquisa realizada, respondendo nossas questões: “*Como os professores utilizam as Formas de Negação?” e “Que elementos as formas de negação agregam e mobilizam da teoria de Raymond Duval?”*

Inicialmente, constatamos que é bastante freqüente o uso das *Formas de Negação* na prática do professor. Percebemos em alguns tópicos de Matemática que o professor usa as *Formas de Negação* como uma **técnica de ensino** no momento em que faz a sua leitura do conteúdo a ser ministrado, e elabora outra forma de apresentá-lo (uma regra, uma técnica) que utiliza a negação com o objetivo de tornar a compreensão mais fácil ao aluno.

Também verificamos que na maioria das aulas é muito utilizado o conceito de complementariedade. O professor apresenta : os casos onde **não temos uma função**, as regras para uma função **não ser injetora**, os casos em que **não existem operações com Reais** (domínio), etc. Com o objetivo de, pela complementariedade, atingir o objeto pretendido. Percebemos que essa prática acontece na maioria dos casos entrelaçada com a dupla negação. O professor apresenta um universo bem determinado e mostra a partir da negação, os casos que não satisfazem as análises e negando-os, retorna ao objeto pretendido a partir da invariabilidade da referência que determina a dupla-negação . Como no exemplo analisado em uma das aulas: Se considerarmos o conjunto das relações como universo, e se eu conheço todas as relações que não quero “as não-funções”, significa que pela complementariedade que eu conheço as funções! Pois, não querer as não-funções é o mesmo que querer as funções, ou seja, $\boldsymbol{\sim(\sim p)=p}$.

Outra forma de negação que surgiu em todas as análises foi a operação da contrapositiva. Verificamos que uma afirmação e sua contrapositiva, possuem logicamente a mesma referência, mas **não dizem a mesma coisa**. A passagem de uma representação para outra não determina efetivamente uma conversão, porém solicita ao aluno um caminho diferente de compreensão, pela negação.

Encontramos nessa operação uma atitude extremamente benéfica para o ensino da matemática. Notamos nas aulas que o professor usa a contrapositiva nas definições e implicações com o objetivo de facilitar as representações do objeto de estudo sem perceber. Duval (1993, 2003) fala que a passagem de uma expressão a outra no mesmo sistema semiótico de representação denota uma operação de tratamento. E que a compreensão da matemática está diretamente ligada à manipulação de ao menos dois registros, através da operação de conversão. No entanto, verificamos que apesar de referir-se a uma operação intra-registro, (dentro do mesmo sistema semiótico de representação) e não proporcionar uma operação de conversão, a aplicação da contrapositiva mostrou-se extremamente benéfica para a compreensão matemática, pois do ponto de vista dos registros de representação semiótica, a proposição $p \Rightarrow q$ diz a mesma coisa do que $\sim q \Rightarrow \sim p$, elas têm a mesma referência, mas na maioria dos casos ocorre uma diferença semântica muito grande entre uma e outra, principalmente pelo alto custo cognitivo de uma atividade que utilize a negação.

No uso puro da negação, foi possível perceber a estratégia do professor em “fugir” da negação para assim, obter uma representação com menor custo cognitivo. Duval (1988a) fala que a verificação de afirmações onde é empregada a negação possui um alto custo cognitivo. Encontramos por exemplo, na fala do *Professor 1* em atividades de verificação, a partir de um questionamento na forma negativa, ele preferiu **examinar o caso positivo em detrimento do caso negativo.** Ele diz ao aluno ao aparecer a negação: “pensa o contrário e daí marca o contrário” (2007b, MTM A, aula 5).

Percebemos também nas aulas, a contrapositiva claramente **confundida com o contra-exemplo.** Esse equívoco também foi observado nos livros didáticos. Vimos que o professor utiliza os casos de não-função como contra-exemplos de função. Sabemos que um contra-exemplo serve para mostrar que uma afirmação ou definição é falsa. Neste caso, percebemos que a intenção do professor é trabalhar a partir da complementariedade, contudo por uma lacuna na lógica, chama estes casos de contra-exemplos.

Ainda em relação aos equívocos observados, constatamos o **uso equivocado** de algumas regras apresentadas pelos professores que utilizam as formas de negação. Verificamos que com o objetivo de evitar o formalismo matemático, o professor profere **sua própria “regra”** na língua natural que não condiz com a totalidade do objeto de estudo. Vimos que esse fato ocorreu em alguns tópicos e que apesar do erro, facilmente detectado quando convertemos para a linguagem lógica formal, surte o efeito desejado pelo professor. Esse efeito, acreditamos ocorrer pois a regra mostra-se apenas delineada para um tipo de tratamento a ser realizado. Por exemplo: Para identificar se um gráfico é de uma função o professor profere a regra: “para ser função, todas as linhas paralelas ao eixo Oy e não podem cortar em mais de um ponto da função.” (esquecendo-se que também não pode não cortar!)

Verificamos que muitos destes problemas surgem pois a linguagem formal não pode prescindir a linguagem comum e barreiras existentes nos tratamentos por negação são devidas as diferenças entre estes dois sistemas semióticos de representação e suas regras de conformidade. O que explica em parte a dificuldade do professor em converter uma afirmação na língua formal, a uma mais simples na língua natural. A situação se mostra mais grave quando essa conversão ocorre em afirmações negativas, ou quando é necessário recorrer às combinações de tratamos por oposição. Duval (1995) afirma que “(...) não há tratamentos que tenham a mesma natureza em dois registros diferentes.”

Ainda sobre esse assunto, verificamos na prática do professor que as dificuldades surgem pois na linguagem formal a negação de uma proposição com o quantificador universal transforma-se numa afirmação com o quantificador existencial, mas na linguagem comum isto não ocorre. Essa dificuldade surge principalmente quando o quantificador universal está presente. Por exemplo: não ocorrer “todos” significa que “existe pelo menos um”. Na linguagem comum é trivial negar “todos” por “nenhum”, ao invés de negar “todos” por “existe um” ou “algum”. Duval (1995) diz que “uma comparação dos tratamentos por negação é essencial para uma coordenação de registros.” (p.164)

Duval (1993) coloca como hipótese fundamental de aprendizagem para a compreensão da matemática: “A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e essa coordenação se manifesta pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão." Porém, com esse estudo, constatamos que a partir das formas de negação é possível escrever um objeto em outra representação que apesar de nem sempre contemplar a conversão pode estabelecer um salto semântico e cognitivo para o desenvolvimento dos tratamentos necessários.

Essa hipótese de Duval (idem) descreve a estrutura de representações semióticas e seu funcionamento, privilegiando a conversão, como podemos ver no esquema:

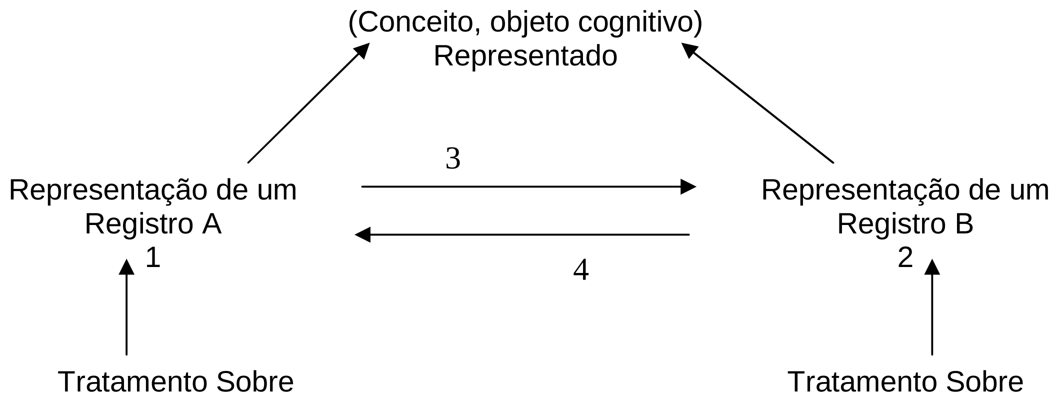


Figura 25 – Modelo de representação centrado na função de objetivação. Duval (1993)

Além da hipótese de aprendizagem, Duval (1993, 2003) assinala outras vantagens da diversidade dos registros de representação semiótica. Uma primeira tem a ver com *economia de tratamento*. Tendo vários registros de representação é possível haver mudança entre eles e estas mudanças poderão ser mais econômicas e potencializadas. Verificamos que é possível, determinar um aumento potencial de possibilidades de trocas a partir do uso correto das *Formas de Negação* e, por conseguinte, facilitar ao professor escolha mais econômica.

Ainda, uma vantagem em relação à multiplicidade de registros refere-se à o que Duval (idem) chama de *complementaridade dos registros*. Essa vantagem está altamente baseada nas possibilidades que um tipo de sistema semiótico pode oferecer. Por exemplo, a linguagem discursiva não oferece as mesmas possibilidades que podem oferecer uma figura ou um diagrama. Isto quer dizer que de um ponto de vista cognitivo uma representação é parcial em relação aquilo que ela quer representar e que de um registro a outro não são os mesmos conteúdos de uma situação que são representados. Assim, o uso da contrapositiva, da dupla-negação, mostram-se favoráveis, pois em certos casos essas representações fornecem informações diferentes do objeto denotado. Sobre a complementaridade, Duval (1993, p.18) assinala ainda que: “As representações diferentes de um mesmo objeto, não têm evidentemente o mesmo conteúdo.Cada conteúdo é comandado por um sistema pelo qual a representação foi produzida.”

Daí a conseqüência de que cada representação não apresenta as mesmas propriedades ou as mesmas características do objeto. Nenhum sistema semiótico de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequado ao objeto representado.

A partir do esquema de Duval e sua hipótese fundamental, construímos um esquema semelhante, da forma que verificamos ocorrer na análise das aulas, em que conversão é privilegiada e as *Formas de Negação* (no caso, contrapositiva e dupla-negação e complementariedade) – chamamos de **A’ e B’** -consideradas como um registro de representação a ser utilizado na aprendizagem matemática. Como podemos ver a seguir

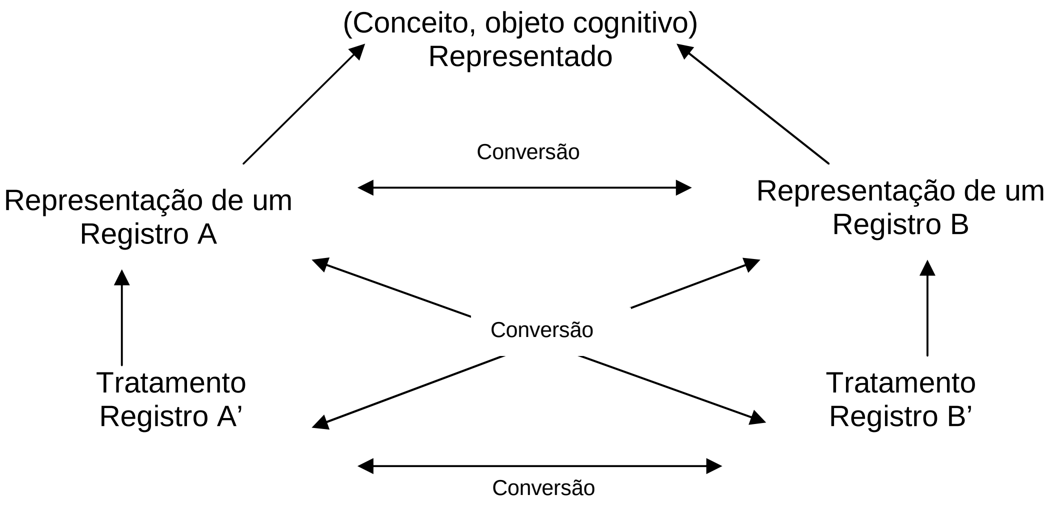


Figura 26 – Esquema de aprendizagem centrado na conversão e utilização das *Formas de Negação*

Esse esquema apresenta, assim como na Figura 25, dois registros de Representação A e B, as transformações externas de conversões entre eles, mas diferente do anterior, sugere um tratamento que utiliza uma das *Formas de Negação* citadas. Destaca-se também, a possibilidade de conversão “diagonalmente” como podemos ver acima conversão entre o **Registro A e Registro B’**, e vice-versa (flechas com duplas pontas) e entre o **Registro B e Registro A’ ,** o denota a possibilidade de permuta de posição entre os registros.

Podemos aplicar este esquema e verificar a conversão **A→B’**, na aula do Professor 1 (2007a, MTM A, aula 11) sobre o domínio das funções Reais em que o professor utiliza a negação na língua natural dizendo *“ele não pode ser zero e ele não pode ser negativo”* e a partir de uma transformação externa de conversão registra na língua formal convertendo para outro registro na língua formal utilizando a negativa da afirmação de partida : “b > 0”. Vejamos:

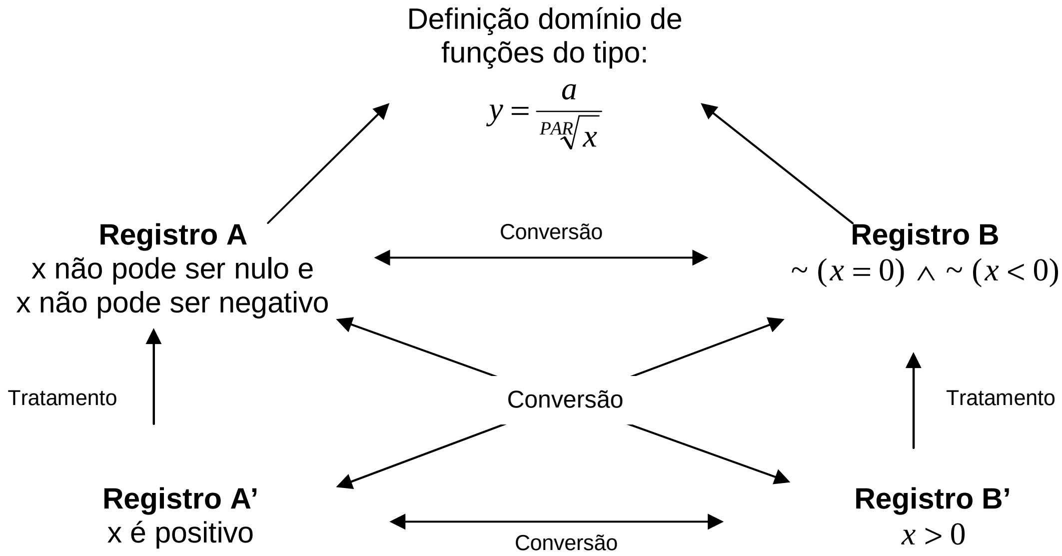


Figura 27 – Aplicação do Esquema de aprendizagem centrado na conversão e utilização das *Formas de Negação*

Constatamos neste exemplo que a afirmação negativa foi utilizada pelo professor como o Registro A, quer dizer, ele começou sua explicação pela negação, mostrando o que não pode ser, para depois converter para o na forma positiva (língua formal) Registro B’. Percebemos que o uso das *Formas de Negação,* como foi apresentado na Figura 27, possibilitam a construção e o emprego de diferentes registros de representação e fornecem instrumentos importantes para o ensino da Matemática. Contudo notamos que precisam ser compreendidas para que sejam corretamente usadas. Duval (1993) afirma que “Um sistema simbólico, para tomar o status de registro de representação, deve ser compartilhado no meio social e dar condições de tratamento interno ao registro e mobilidade entre outros registros.”

Em relação ao uso das formas de negação, um aspecto ainda importante a tratar, diz respeito a importância da **formação de professor** para que estas formas de negação possam ser melhor exploradas pelos professores e usadas com consciência nestas e em outras situações. Constatamos as formas de negação como um elemento muito rico e de vasta utilização na prática do professor, contudo, as lacunas existentes no conhecimento da lógica formal e principalmente das implicações e diferenças que ocorrem na negação de representações na língua natural e formal possam ser um obstáculo no uso desta noção pelo professor.

Assim, é importante pensar em um estudo com professores que evidencie o conhecimento da importância das representações, das possibilidades delineadas pelas formas de negação juntamente às implicações lógicas destas operações, e também como conhecimento das limitações representativas de cada registro a utilizar, mesmo porque, na atividade matemática estes elementos estarão sempre entrelaçados. “Ainda que a língua formal possa cumprir as mesmas funções discursivas que uma língua natural, sua estrutura não apresenta nenhuma semelhança com ela.” (DUVAL 1995, p.137)

REFERÊNCIAS

ABE, Jair Minoro & PAPAVERO, Nelson. *Teoria Intuitiva dos Conjuntos.* São Paulo, Makron, McGraw- Hill, 1991.

BARNETT, Rich. *Teoria e Problemas de Geometria.* 3ª. Edição. Editora Bookman, Capítulo 14: Aprimorando o Raciocínio, p.277-284. São Paulo, 2003. Tradução: Irineu Bicudo. Unesp- SP.

BROUSSEAU, Guy. *Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática*. In: BRUN, Jean. (Org.). *Didática das Matemáticas.* Tradução: Instituto Piaget, Coleção: Horizontes Pedagógicos, n. 62, Lisboa, 1996.

CERQUEIRA, Luiz Alberto & OLIVA, Alberto. *Introdução à Lógica.* 3ª. Edição. Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1979.

COPI, M. Irving. *Introdução à Lógica.* Tradução de Álvaro Cabral. 2ª. Edição. São Paulo, Mestre Jou, 1978.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática Contexto e Aplicações*. Volume único. Editora Ática, 1ª. Edição, São Paulo, SP, 2003.

_____. *Matemática : Contexto e Aplicações*. Volume 1 . Exame de textos. Ed. Ática, p. 267-268, São Paulo, 1999.

DOOP, Joseph. *Noções de Lógica Formal*. Universidade de Lovania, Editora Herder, São Paulo, 1970.

DUCROT, Oswald. *Princípios de Semântica Lingüística.* Cultrix, São Paulo, 1972. p.179-196.

DUVAL, Raymond. *Écarts semantiques et cohérence mathématique: introduction aux problems de congruence.* Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 1, páginas 7-25, IREM de Strasbourg, 1988a.

______. *Registres de représentation sémiotique e fonctionnement cognitif de la pensé*. Annales de didactique et de sciences cognitives. Strasbourg, IREM-ULP, volume 5, 1993.

______. *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et aprenttissages intellecetuels*. Bern, Peter Lang, 1995.

______. *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?* RDM, v.16, número 3, páginas 349-382, 1996.

______. *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática.* In: MACHADO, Silvia Dias de Alcântara (Org), *Aprendizagem em Matemática:* Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

FILHO, Edgard de Alencar. *Iniciação à Lógica Matemática*. Nobel, São Paulo 16ª. ed. 1986.

GIOVANNI, José Ruy & PARENTE, Eduardo. Aprendendo Matemática. 5ª. Série, FTD, São Paulo, SP, 2002. Edição revisada em 2005.

GUSMAN R., ISMÊNIA del C. Le role des representations dans l'appropriation de la notion de fonction. Strasbourg: Thèse-Université Louis Pasteur, 1990.

HELLMEISTER, Ana Carolina P. *A lógica através de exemplos*. RPM, número 47, SBM, São Paulo, 2001.

IEZZI, Gelson & MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de Matemática Elementar.* Vol.01, Editora Atual, 8ª. Edição, São Paulo, 2004.

KILANI, Bem Imed Eddine. *La négation gramaticale dês énonces universellement quantifiés risque – t-elle d'être un obstacle a l'acquisition de la négatino logique?* Versinon eletrônica du Cederon d'accompagnement, La Penseé Sauvage – Editions – Fabriqué en France. p.1-8, 2002.

LEGRAND, Marc. Os cosmonautas. Petit x, nº.1. Páginas 57-73,1983.

LOUREIRO, Antônio Alfredo Ferreira. *Fundamentos da Lógica Proposicional*. Anotações de aula: Matemática Discreta. UFMG, 2001 Homepage http//homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md1.pdf. Acesso em: 20/03/2007

MACHADO, Nilson José. *Lógica ? É Lógico!* Coleção: Vivendo a Matemática. Editora Scipione. 9ª. Edição, São Paulo, SP, 2000.

Sistema de Ensino Energia*: Apostila de Matemática.* Ensino Médio. Curso: Terceirão. Volumes 1-8. Editora Energia, Florianópolis, 2007a.

Sistema de Ensino Energia: Material Didático Gravado em CD-ROM do*:MTM A, aulas 1 -32, MTM C – Aulas 1-18, MTM E, 1-20, MTM D, Aulas 1-10 e 20-32.* Ensino Médio. Curso: Terceirão, Itajaí, SC, 2007b.

Sistema de Ensino Energia: Material Didático Gravado em CD-ROM do*:MTM A, aulas 8-20.* Ensino Médio. Curso: Terceirão, Brusque SC, 2006.

MEKKI, El F. *El Logique et Enseignement Mathematique*. Document a l'attention des professeurs de mathematique. IREM de Strasbourg, Volume 3, p.22-25, 1991.

MORETTI, Méricles Thadeu. *O Papel dos Registros de Representação na Aprendizagem da Matemática*. Revista Contra Pontos, Ano 2, número 6, Univali, Itajaí, 2002.

NETTO, Scipione. Di Pierro & FILHO, Sérgio Orsi. *Matemática em fascículos para o Ensino Médio.* Coleção Quanta, Volume 1, Saraiva, São Paulo, SP, 2000.

APÊNDICE A – ÍNDICE DE TABELAS

APÊNDICE B – ÍNDICE DE FIGURAS