UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ESBOÇO DE CURVAS: UMA ANÁLISE SOB A PERSPECTIVA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

MADELINE ODETE SILVA

FLORIANÓPOLIS – SC
2008

2008

MADELINE ODETE SILVA

ESBOÇO DE CURVAS: UMA ANÁLISE SOB A PERSPECTIVA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dissertação submetida ao Colegiado do Curso de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina, em cumprimento parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Científica e Tecnológica, sob a orientação do Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti.

FLORIANÓPOLIS – SC

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

"ESBOÇO DE CURVAS: UMA ANÁLISE SOB A PERSPECTIVA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA"

Dissertação submetida ao Colegiado do Curso de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica em cumprimento parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Científica e Tecnológica

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 19/08/2008

Dr. Méricles Thadeu Moretti (Orientador)

Drª. Célia Finck Brandt (Examinadora)

Drª. Neri Terezinha Both Carvalho (Examinadora)

Drª. Sônia Maria da Silva Corrêa de Souza Cruz (Suplente)

Dr. José de Pinho Alves Filho
Coordenador do PPGECT

Madeline Odete Silva
Florianópolis, Santa Catarina, agosto de 2008.

Dedico essa dissertação ao meu namorado José Augusto Melo Corrêa, pelo amor, paciência e companheirismo durante toda a trajetória da escrita.

AGRADECIMENTOS

A **Deus** por mais essa conquista, porque sei que “tudo posso Naquele que me fortalece”(Fl.:4,13)

Ao professor **Méricles Thadeu Moretti** por ter aceitado ser meu orientador e às professoras **Célia Finck Brandt**, **Neri Terezinha Both Carvalho** e **Sônia Maria S.C. de Souza Cruz** por aceitarem o convite para participar da banca examinadora.

Aos demais **professores do PPGECT**, com os quais cursei disciplina, por compartilharem de seus conhecimentos.

Às amizades que conquistei no curso de mestrado: **Patrícia Franco** e **Nadir Boing** e aos demais colegas da turma com quem convivi durante esse período.

Aos amigos **Marcos Henrique Santos Martins** e **Elisa Beatriz Macarini** por me ajudarem com elementos necessários para a escrita desse trabalho.

À minha mãe **Odete Maria Soares**, ao meu namorado **José Augusto Melo Corrêa** e a todos que torceram e oraram pela concretização de mais essa etapa da minha vida.

A todos os meus amigos: os que sempre vejo ou os que há tempos não encontro, mas que estão sempre no meu coração e compartilham das minhas alegrias...

A todos: MUITO OBRIGADA!

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo do Esboço de Curvas, baseado no uso da interpretação global das propriedades figurais proposta por Raymond Duval. Para objetivá-lo, levamos em consideração a teoria sobre os Registros de Representação Semiótica e, por conseguinte, todo o processo está voltado para evidenciar as especificidades das operações cognitivas de tratamento e conversão que possibilitam esta interpretação das propriedades figurais da curva. As operações de tratamento permitem contemplar as transformações geométricas de translação e simetria que se consolidam como recursos auxiliares para as interpretações e tornam mais próxima e visível a relação entre a expressão algébrica de uma curva e seu esboço no plano cartesiano, possibilitando a operação de conversão entre essas duas formas de representação da curva. O estudo contemplou também uma análise das formas de abordagem do esboço de curvas em livros didáticos e evidenciou como resultado uma tendência para uma abordagem pautada no uso de pares ordenados.

Palavras-chaves: Esboço de curvas, Registros de Representação Semiótica, Livro Didático.

ABSTRACT

This work is going to show a study about Draft of Curves, refered in the use of the global interpretation of the picture properties proposal for Raymond Duval. We consider the theory about the Semiotic Representation Registers and, superficially, all the process is to evidence the particularities of the cognitive operations of treatment and conversion that help in this interpretation picture properties of the curve. The treatment operations permit observing the translations and simetry geometric transformations that consolidate themselves as auxiliary resources for the interpretations and become nearly and visible the relation between the algebraic expressions of a curve and its first draft in the “cartesiano” plane. It makes possible the conversion operation between these two ways of curve representation. The learning helped an analysis of the Draft of Curves in didactic books too and evidenced as resulting a bent for a study since of ordered pair.

Key words: Draft of Curves, Semiotic Representation Registers, Didactic Books.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Na chamada “Era da Informação” em que vivemos, a representação gráfica é um recurso de grande importância por ser uma forma eficiente de comunicação, principalmente de dados estatísticos, como podemos observar tanto nos meios de comunicação escrita quanto em noticiários na TV.

Por serem também instrumentos de representação de fenômenos ou situações cotidianas que precisamos compreender, as diversas formas de representação gráfica vêm merecendo cada vez mais destaque em livros didáticos e sua aprendizagem também vem sendo cada vez mais cobrada, pois questões que as utilizam são cada vez mais freqüentes em provas e exames vestibulares.

Dentre as mais diversas formas de representação gráfica está presente o *esboço de curvas*, nosso objeto de estudo neste trabalho.

Mas o que é uma curva?

Intuitivamente podemos dizer ser um conjunto infinito de pontos ou o rastro deixado pelo movimento contínuo de um único ponto sobre uma superfície ou até mesmo no espaço. Todavia, se nos voltarmos para a História da Matemática, veremos que os gregos definiam curva de uma forma tão restrita que apenas a reta, a circunferência e as cônicas poderiam ser consideradas como tal, mas que, com o surgimento da Geometria Analítica, o conceito de curva foi ampliado e esse objeto matemático passou a ser visto como a imagem geométrica de uma função real de variável real. É nesse conceito de curva, onde identificamos a articulação de dois registros diferentes (figural e algébrico) para a compreensão do objeto, que nossa pesquisa se apóia.

No entanto, para entendermos as dificuldades que grande parte dos alunos têm na compreensão de conteúdos matemáticos, além do campo específico da Matemática e sua história, uma abordagem cognitiva pode oferecer grande auxílio e, quando falamos em Educação Matemática, o fato do objeto matemático não ser diretamente acessível aos sentidos e a variedade de formas que podem ser utilizadas para representar um mesmo objeto, são características que tornam o ensino dessa disciplina muito peculiar.

Dessa forma, considerando a grande dificuldade apresentada pelos educandos no que tange à percepção de um mesmo objeto sob diferentes formas de representação, é que esta pesquisa vem problematizar o ensino do *esboço de curvas* para alunos do curso de nível médio.

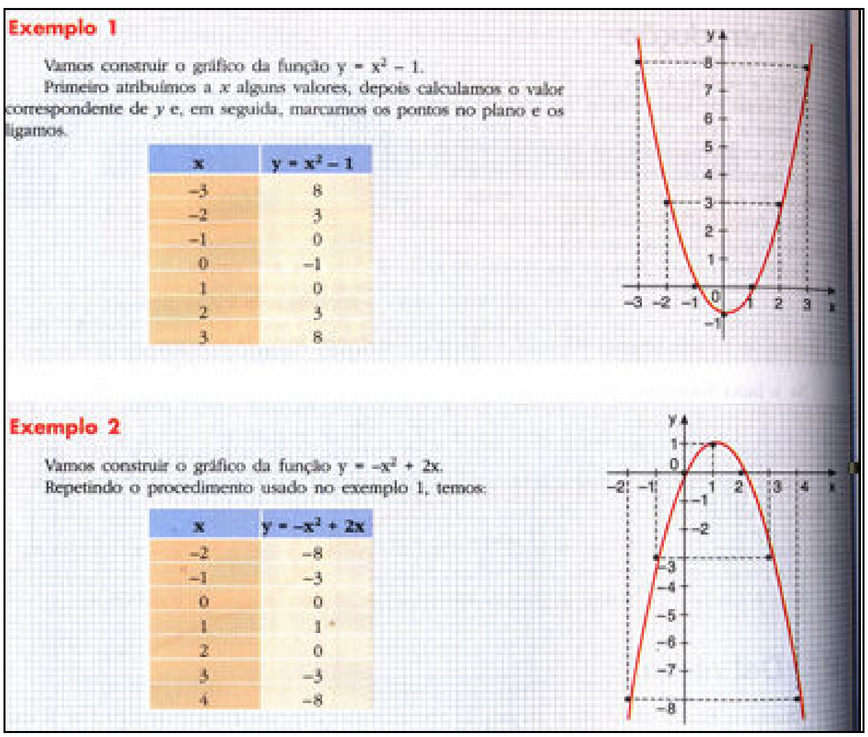
DEFININDO O PROBLEMA DE PESQUISA

Nossa vivência escolar e o uso contínuo de livros didáticos tanto no preparo de aulas, quanto no decorrer das mesmas, nos levou a perceber a forma quase unânime de trabalhar o esboço de curvas, entre elas, mais expressivamente, os gráficos de funções.

Percebemos que a forma mais comum apresentada nos livros didáticos para se esboçar gráficos de funções é através de um processo que se inicia pela substituição de valores na lei da função representada na expressão algébrica, passa pela organização de uma tabela de pares ordenados de números reais e pela localização no plano cartesiano dos pontos oriundos destes pares ordenados e termina com a junção dos pontos no plano que faz surgir o esboço da curva.

Para ilustrar o procedimento que acabamos de expor, observemos a figura seguinte que foi retirada de um livro didático de ensino médio. Ela mostra a obtenção da parábola – curva que representa graficamente a função quadrática.

Figura 1



Exemplo 1

Vamos construir o gráfico da função $y = x^2 - 1$.
Primeiro atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de y e, em seguida, marcamos os pontos no plano e os ligamos.

x	$y = x^2 - 1$
−3	8
−2	3
−1	0
0	−1
1	0
2	3
3	8

Exemplo 2

Vamos construir o gráfico da função $y = -x^2 + 2x$.
Repetindo o procedimento usado no exemplo 1, temos:

x	$y = -x^2 + 2x$
−2	−8
−1	−3
0	0
1	1
2	0
3	−3
4	−8

Segundo Moretti (2003), este modo de proceder, esboçando individualmente cada curva, apenas a partir da sua equação algébrica particular e com o uso de alguns pontos aleatórios, impossibilita que se percebam as modificações da equação responsáveis por modificações no gráfico e vice-versa.

O processo é apresentado de forma muito mecânica e repetitiva, podendo gerar a crença de que este é o único procedimento possível para se obter o gráfico a partir da lei da função ou expressão algébrica. E, além disso, as etapas favorecem a compreensão da curva como uma união de pontos e da transformação de pares ordenados em pontos no plano cartesiano, mas não favorece que se compreenda a relação entre a expressão algébrica e o esboço da curva depois de pronto. É como se não houvesse ligação entre álgebra e geometria.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2004), os temas e conteúdos desenvolvidos durante o período de escolaridade básica, devem levar o indivíduo a desenvolver competências que contribuam na sua formação de cidadão. “Nessa perspectiva, não só a seleção de temas e conteúdos, como também a forma de tratá-los no ensino médio é decisiva” (BRASIL, 2004, p.113).

Refletindo sobre a forma de tratar os conteúdos, mais especificamente o esboço de curvas, nossa pesquisa terá por base a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a noção de congruência semântica desenvolvidos, a partir da década de 80, por Raymond Duval. Para Duval (2003), há importância em tratar os objetos em matemática nas suas mais diversas formas de representação, compreender suas interligações e ainda, de que maneira modificações em uma dessas formas, pode implicar em modificações na outra.

Com relação à área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais alertam quanto à necessidade deste tipo de compreensão, tendo em vista que uma das competências que se espera ser adquirida pelos estudantes de nível médio, é: “Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas”(BRASIL, 2004, p.114). E, mais especificamente do estudo da Matemática se espera que o educando saiba: “Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; (...) transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações.” (BRASIL, 2004, p.114).

Observamos que apesar de considerar a forma de tratar temas e conteúdos como fator decisivo para a aprendizagem, os Parâmetros Curriculares indicam competências a serem alcançadas pelo educando, mas não fazem referência à quais metodologias o professor deve utilizar para que o educando, mediado pela ação do professor e interagindo com o objeto de estudo, as alcance. Todavia, quando fala em tradução e transformação de linguagens, implicitamente podemos perceber a necessidade do uso de diversas representações, conforme sugere Duval (2003), como condição para a aprendizagem matemática.

Neste contexto, nos questionamos: **Como tratar o esboço de curvas proposto no Ensino Médio sob a perspectiva dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval?**

Uma vez analisado do ponto de vista dos registros de representação semiótica, o esboço de curvas pretende contribuir na aprendizagem matemática para, como conseqüência, ampliar a educação do aluno numa perspectiva que o leve a desenvolver suas habilidades e competências.

Como diz Moretti (2003 p.160): “O aluno poderá perceber certas variações ou lugares na curva que são, em geral, importantes na interpretação dos fenômenos que ela retrata.” Fala esta que vem ao encontro a mais um dos objetivos do ensino da Matemática, proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como a Física, Química e Biologia, seja nas ciências humanas e sociais, como a Geografia ou a Economia, ou ainda nos mais diversos setores da sociedade, como na agricultura, na saúde, nos transportes e na moradia. (BRASIL, 2004, p.117)

Duval defende a interpretação global das propriedades figurais, ou seja, a compreensão da curva como um todo, sua relação com a expressão algébrica correspondente e a interligação entre as modificações em uma das formas de representação, que implicam em modificações na outra, como uma necessidade no estudo do esboço de curvas, a fim de que habilidades (interdisciplinares) como estas, presentes no trecho do documento acima, sejam adquiridas:

> Sem a via de interpretação global não há utilização possível dos gráficos para dar valor intuitivo à escrita algébrica, para expressar analiticamente as propriedades geométricas, ou,“a fortiori”, para interpretar os gráficos nos quais os eixos representam magnitudes heterogêneas (tempo, distância percorrida, velocidade, etc...). (DUVAL, 1988, p.134).

Observando que os livros didáticos apresentam o estudo do esboço de curvas de maneira quase única, refletindo sobre as dificuldades que podem surgir ao se utilizar apenas esta forma de aprendizagem, bem como sobre alguns dos objetivos do ensino da Matemática, presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais, nossa pesquisa pretende mostrar as contribuições de se considerar o esboço de uma curva e sua expressão algébrica, procedendo com variações nas unidades significantes de uma dessas formas de representação e verificando as variações ocorridas na outra, ao se esboçar graficamente outras curvas semelhantes ou em atividades que tenham por objetivo relacionar esboços gráficos com as expressões algébricas correspondentes. Para tanto nos apoiaremos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Raymond Duval.

Pretendemos contribuir, ainda que em pequena escala, na busca da significação do ensino da matemática por parte dos professores e na compreensão do objeto matemático esboço de curvas por parte dos educandos do ensino médio. Todavia, ao invés de atingir alunos diretamente, nossa pesquisa terá professores como público-alvo, à medida que fornece elementos para uma reflexão sobre o ensino do esboço de curvas na prática docente. Assim sendo, pretendemos:

Fazer um estudo analítico do esboço de curvas numa perspectiva que leve em conta as mudanças de registros de representação semiótica, tanto figural quanto algébrico, e que permita uma interpretação global das propriedades figurais.

Para tanto, iremos:

- Analisar a representação de curvas tendo por base a Teoria de Registros de Representação Semiótica;
- Verificar em livros didáticos de ensino médio como é proposto o esboço de algumas curvas que são gráficos de funções;
- Propor uma nova forma de conceber o esboço de curvas que considere a interpretação global das propriedades figurais, associando a representação gráfica à expressão algébrica da curva, apropriando-se de esboços pré-existentes ao esboçar outras curvas semelhantes.

Com a finalidade de situar nossa pesquisa entre as já desenvolvidas na área da Educação Matemática, fizemos uma revisão bibliográfica do nosso tema, a fim de verificar o que já existe sobre o Esboço de Curvas tendo como base teórica os Registros de Representação Semiótica.

Entre as teses e dissertações desenvolvidas nos últimos dois anos, encontramos a tese : "Uma professora, seus alunos e as representações do objeto matemático funções em aulas do ensino fundamental"(BASSOI, 2006) e a dissertação: "Função do 1º grau: um estudo sobre seus registros de representação semiótica por alunos da 1ª série do ensino médio."(LOPES JUNIOR, 2006). Em ambos trabalhos, o objeto matemático em estudo é *funções* e não especificamente o *esboço de curvas*. No entanto, entre as formas de representação trabalhadas estão tanto o gráfico quanto a escrita algébrica das funções e há uma preocupação com a aprendizagem levando em conta as operações cognitivas de conversão e tratamento, o que revela uma proximidade com nossa pesquisa, porém essa pesquisas se diferem da nossa na metodologia utilizada: o primeiro trabalho utilizou-se de uma observação natural do ambiente escolar e o segundo da aplicação e interpretação dos resultados de uma sequência didática.

Colombo(2008) em sua tese, fez uma revisão dos trabalhos sobre Representação Semiótica produzidos na década de 1990 e no período de 2000 a 2005. Entre eles encontramos três dissertações que estão relacionadas à nossa pesquisa por que envolvem de alguma forma a conversão entre diversos registros, incluindo a equação algébrica e a representação gráfica. Todavia essa relação é indireta porque estão focadas no objeto matemático *função*, e não especificamente no esboço de curvas. Além disso, todas têm como metodologia a elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática e não um estudo analítico. São elas: "Função Afim y = ax + b: a articulação entre os registros gráfico e algébrico com o auxílio de um software educativo" (SANTOS, 2002), "A Construção da Noção de Função Linear: transitando em diferentes registros de representação semióticos" (SOUZA, 2003), "Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis" (PELHO, 2003).

Com relação à artigos, encontramos "Graphiques e équations : l'articulation de deux régistres" (DUVAL, 1988) e "A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais"(MORETTI, 2003). O primeiro trata especificamente do esboço de retas por meio da interpretação global das propriedades figurais e o segundo, baseado no que preconiza o primeiro, trata do esboço de parábolas e inclui como recurso a translação e o uso de uma curva base para os esboço de outras semelhantes. Ambos servirão de referência para o nosso estudo que pretende mostrar o uso de propriedades figurais no esboço de outras curvas que são gráficos de funções estudadas no nível médio de ensino.

ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Nossa pesquisa será dividida em três etapas.

Primeiramente descreveremos elementos da teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, nosso referencial teórico. Noções de registro de representação, operações cognitivas envolvidas no processo de aprendizagem, e especificamente o que a teoria contempla sobre o Esboço de Curvas. Nesta mesma etapa buscaremos auxílio de outros materiais que relacionem o Esboço de Curvas à teoria dos Registros de Representação Semiótica, já detectados, que poderão contribuir para o desenvolvimento da nossa proposta.

Na segunda etapa, faremos uma pesquisa em livros didáticos de ensino médio que estejam em uso nas escolas, para verificar como é apresentado o Esboço de Curvas, classificando a forma apresentada pelos autores, de acordo com elementos de análise retirados do referencial teórico e certificando-nos de que a proposta que apresentaremos ainda não está sendo trabalhada.

Uma vez conhecida e analisada a forma como os livros didáticos apresentam o Esboço de Curvas, em um terceiro momento partiremos para a nossa proposta que tem a intenção de mostrar uma forma de trabalho diferente daquela encontrada nos livros.

Capítulo I

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica como Referencial Teórico

Este capítulo objetiva-se a mostrar parte da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, a qual servirá de base para solucionarmos nossa questão de pesquisa. Nele apresentaremos alguns conceitos da teoria necessários à compreensão de como se dá a aprendizagem matemática sob a ótica de Duval, bem como o seu estudo sobre a interpretação global das propriedades figurais do esboço de Retas. Remeteremos também ao uso da translação como recurso no esboço de Parábolas – um estudo realizado por Moretti (2003) que também considera os escritos de Duval sobre o esboço de curvas.

A Matemática se utiliza de diversas formas de representação, pois os objetos matemáticos não são acessíveis diretamente. Não podemos tocá-los ou observá-los por meio de instrumentos como acontece em outras áreas do conhecimento. O único meio de se chegar a um objeto matemático é fazendo uso da representação.

Mas, o que é *representar*?

Um dicionário comum apresenta, entre outros significados, "... ser a reprodução de; tornar presente; estar em lugar de; substituir..."(FERREIRA, 1986, p.1489).

Duval (2004) afirma que a noção de *representação* foi utilizada em três ocasiões distintas: A primeira foi por Piaget e se deu no período de 1924 a 1926, significando "evocação de objetos ausentes". A segunda utilização do termo foi de 1955 a 1960, tratado como "codificação de uma informação" por Broadbent entre outros. Já a terceira, foi por volta de 1985, quando o termo *representação* aparece acompanhado do vocábulo *'semiótica'*, em trabalhos que tratam da aquisição de conhecimentos matemáticos e problemas suscitados durante o processo de aprendizagem matemática.

Para entendermos o que são sistemas de representação semiótica, precisamos compreender primeiramente o que é um sistema semiótico e o que são signos.

Um sistema semiótico é um conjunto de signos que possuem convenções e regras próprias de formação e, Colombo (2008), nos diz que "... o signo está no lugar de algo; é uma expressão que designa, denota ou representa alguma coisa a alguém sob algum aspecto". (p.91)

Dentre os mais diversos tipos de sistemas semióticos, encontramos os que são, segundo Duval (2004), sistemas semióticos de *representação* por cumprirem as três atividades cognitivas inerentes a toda representação:

> Constituir uma marca ou um conjunto de marcas perceptíveis que sejam identificáveis como *uma representação de alguma coisa em um sistema determinado*, transformar as representações de acordo com as únicas regras próprias ao sistema, de modo que se obtenham outras representações que possam constituir um ganho de conhecimento em comparação com as representações iniciais e, por último, converter as representações produzidas em um sistema de representação em outro sistema, de maneira tal que estas últimas permitam explicitar outras significações relativas àquilo que é representado. (p.30)

Logo, a linguagem natural, as linguagens simbólicas, as representações gráficas e as figuras geométricas são exemplos de sistemas semióticos que cumprem a função de representação, pois, além da função de comunicação, os registros[1] destes sistemas permitem as operações cognitivas de tratamento e conversão.

1.1 A OPERAÇÃO COGNITIVA DE TRATAMENTO

Duval (2003) diz que "os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo sistema semiótico". (p.16)

Para exemplificar as operações de tratamento, podemos citar a resolução de uma equação, a resolução de uma expressão numérica sem mudar a forma de representação dos números, modificações na equação de uma parábola usando a técnica de completar quadrados e na lei de uma função utilizando propriedades de potenciação ou do fator comum em evidência, conforme podemos verificar nos exemplos abaixo:

a) Nos passos da resolução da equação: $2x+15=23$.

$$\begin{aligned} 2x+15&=23 \\ 2x+15+(-15)&=23+(-15) \\ 2x&=8 \\ 2x\cdot\frac{1}{2}&=8\cdot\frac{1}{2} \\ x&=4 \end{aligned}$$

b) Quando escrevemos a expressão algébrica da parábola $y=x^2+2x+5$ na forma $y-4=(x+1)^2$, utilizando o procedimento conhecido como "complementação do quadrado".

[1] Duval (2003, p.14) usa o termo "registro" de representação, para designar diferentes tipos de representações semióticas utilizadas em matemática.

$y = x^2 + 2x + 5$

$y = x^2 + 2x + 1 + 4$

$y - 4 = x^2 + 2x + 1$

$y - 4 = (x + 1)^2$

c) Resolvendo a expressão numérica $37 + 5 \cdot 4 + 70 : 35 - 21$ da seguinte forma:

$37 + 5 \cdot 4 + 70 : 35 - 21 =$

$37 + 20 + 2 - 21 =$

$57 + 2 - 21 =$

$59 - 21 =$

38

d) Ou ainda nas funções:

Seja f uma função de domínio e contradomínio real, dada pela lei: $f(x) = 8 \cdot 2^x$. Podemos escrever a lei da função f como $f(x) = 2^{x+3}$, utilizando para isso propriedades próprias da potenciação. Observe:

$f(x) = 8 \cdot 2^x$

$f(x) = 2^3 \cdot 2^x$

$f(x) = 2^{x+3}$

Dada a função expressa pela lei de formação $y = \text{sen}(4x+2\pi)$ também de domínio e contradomínio real, podemos escrever sua lei na forma $y = \text{sen}\left[4(x+\frac{\pi}{2})\right]$.

Em todos os exemplos, apesar das modificações, observamos que a forma de representação foi conservada, o que caracteriza a aplicação de tratamento.

1.2 A OPERAÇÃO COGNITIVA DE CONVERSÃO

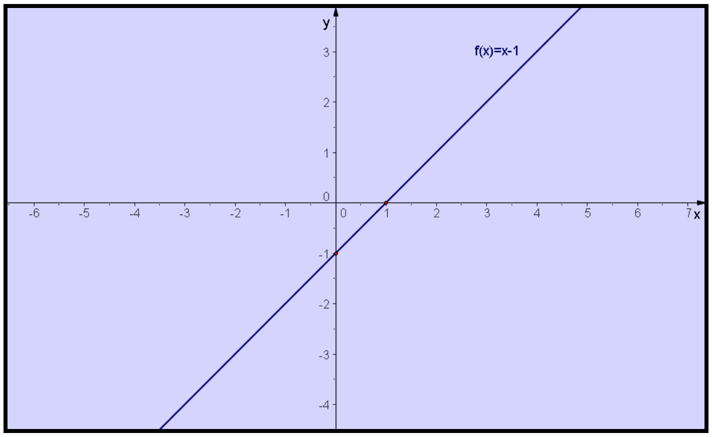
Para Duval (2003), além do tratamento, um outro tipo de operação cognitiva presente durante o processo de aprendizagem matemática é o que ele intitula de conversão:

> "As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica". (p.16)

Podemos então apresentar as seguintes situações como exemplos de conversão, voltadas especificamente ao esboço de curvas:

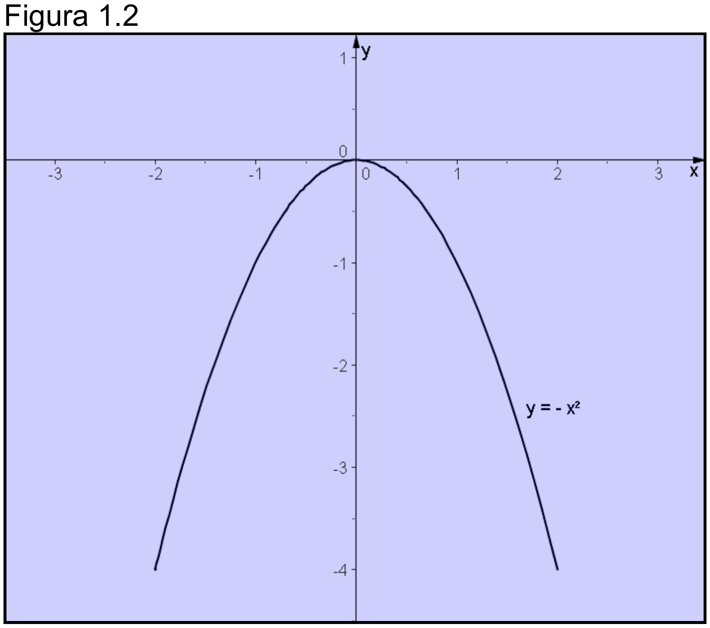
a) A equação da reta $y = x - 1$ e sua representação no plano:

Figura 1.1



b) A equação da parábola $y = -x^2$ e sua representação no plano:

Figura 1.2



Em ambos os casos, há mudança de registro, pois cada uma das formas de representação (escrita algébrica e representação gráfica) possui regras próprias de transformação, internas ao sistema semiótico, mas em cada um dos exemplos o objeto matemático é conservado mesmo havendo a mudança de registro, são eles as curvas: reta no primeiro exemplo e parábola no segundo.

1.3 A NOÇÃO DE CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

As variações de congruência e não-congruência são fenômenos que se manifestam mais intensamente nas operações de conversão.

Quando observamos dois registros de representação em que houve uma conversão, Duval (2003) nos diz que duas situações podem ocorrer:

> Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência –, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência. (p.19)

Duas representações semioticamente diferentes representam, ao menos parcialmente, o mesmo conteúdo, quando obedecem a três critérios de congruência:

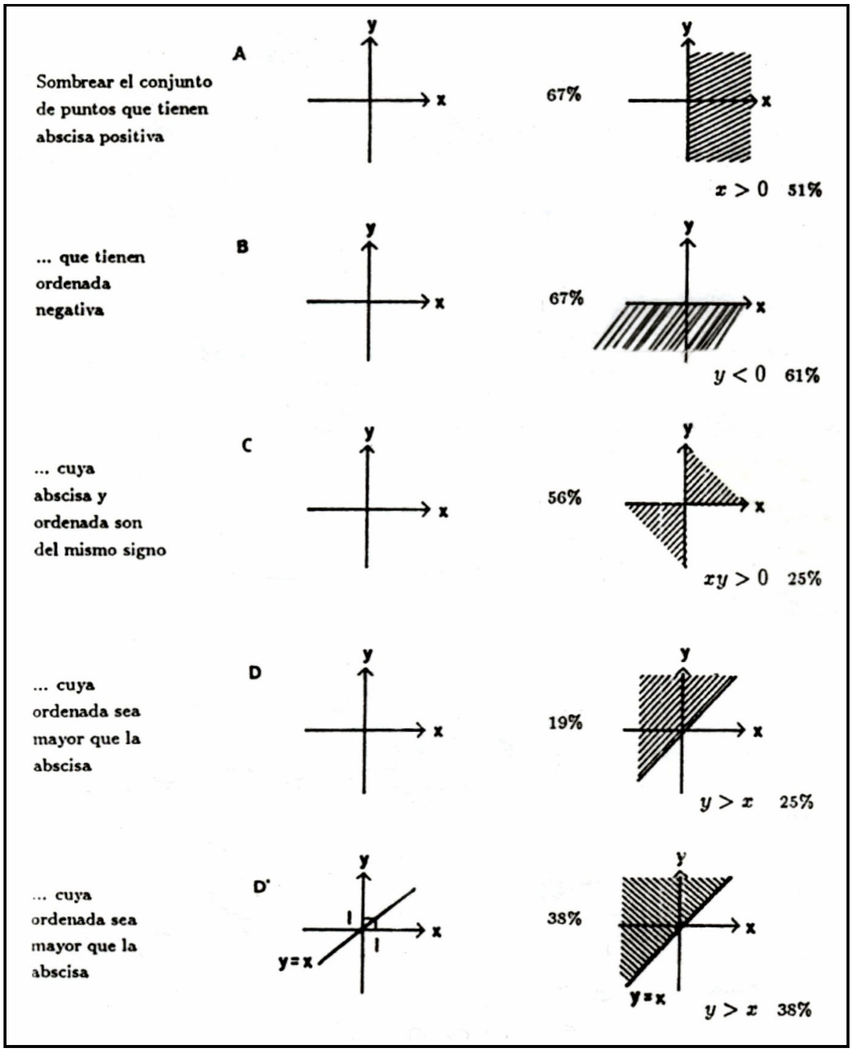
> (1°) *Possibilidade de uma correspondência "semântica" entre os elementos significantes:* A cada unidade significante simples de uma das representações, se pode associar uma unidade significante elementar.
> (2°) *Univocidade semântica terminal:* a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma única unidade significante elementar no registro de representação de chegada.
> (3°) *Organização de unidades significantes:* As organizações respectivas das unidades significantes das duas representações comparadas, conduz a apreender as unidades em correspondência semântica segundo à mesma ordem nas duas representações (desde que tenham o mesmo número de dimensões). (DUVAL, 2004, p.53)

Como exemplo podemos citar os resultados de uma pesquisa apresentada por Duval (1988), realizada com alunos do *primeiro preparatório* e do *terceiro secundário*, na França, com o intuito de verificar como eles se saíam em tarefas de conversão entre dois registros. Eles deveriam sombrear corretamente no plano cartesiano as regiões correspondentes a algumas expressões fornecidas em língua materna. Posteriormente, a tarefa foi aplicada apenas a alunos do *primeiro preparatório*, solicitando que associassem cada uma das regiões sombreadas à expressão algébrica correspondente dentre várias citadas. Logo, foram utilizados na pesquisa dois sentidos de conversão e três formas de representação de um mesmo objeto: língua materna → representação gráfica → expressão algébrica.

A figura[2] seguinte apresenta o percentual do número de alunos que resolveu corretamente cada uma das atividades:

[2] Na figura 1.3 a expressão algébrica correta e o percentual de alunos que optaram pela resposta correta, referente à última atividade da pesquisa, não se encontram em uma coluna lateral, mas sim abaixo de cada representação gráfica.

Figura 1.3



O autor comenta que nos casos A e B, há congruência semântica entre as três representações (abscissa positiva, semi-eixo X positivo e x > 0 no caso A, por exemplo) e, portanto, o número de acertos, para o total das quatro questões conjuntas destes dois casos, são de mesma ordem de magnitude. Já no caso C, as representações em língua materna e representação gráfica são congruentes, mas não há congruência alguma entre a representação gráfica e a expressão xy > 0, o que justifica a brusca queda no número de acertos. Na questão D, não há congruência, pois a relação já não se expressa nem discursivamente, nem algebricamente em função dos elementos identificadores do gráfico. No entanto, a não-congruência é reduzida em D’ com o auxilio da reta y=x, o que justifica o aumento no número de acertos.

1.4 O PROCESSO DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA SEGUNDO DUVAL

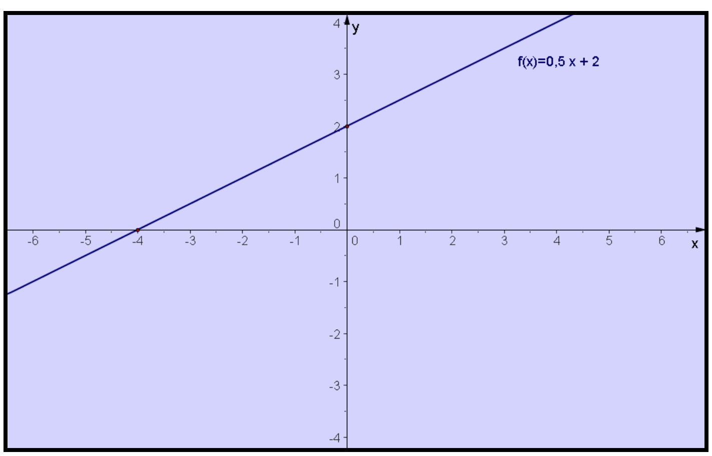
Se o único meio de se acessar um objeto matemático é através de suas formas de representação, mas ao mesmo tempo, a representação não é o objeto em si e jamais se deve confundi-los, estamos diante de um paradoxo. E, para entendermos como se dá verdadeiramente a apreensão de um objeto matemático pelos sentidos humanos, é conveniente observarmos o que Duval (1993) coloca como hipótese fundamental para a aprendizagem matemática:

> "A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão". (p.51).

Cada registro de representação utilizado para representar um objeto deixará evidente alguma característica ou propriedade do objeto, as quais não estarão tão evidentes em um outro registro. Como nos diz Moretti (2002): "... de um ponto de vista cognitivo uma representação é parcial em relação aquilo que ela quer representar, de um registro a outro não são os mesmos conteúdos de uma situação que são representados". (p.347)

Vejamos como exemplo a expressão algébrica da reta $y = 0{,}5x + 2$ e seu esboço no plano cartesiano:

Figura 1.4



Para sabermos se um ponto específico de coordenadas (x_0, y_0), pertence a esta reta, ou qual o valor da ordenada de um ponto que pertence à reta, conhecendo sua abscissa, é conveniente utilizarmos a expressão algébrica. No entanto, os pontos em que a reta intercepta os eixos coordenados ficam bem mais evidentes na representação gráfica no plano cartesiano. Dessa forma, a variedade de registros contribuirá para a não confusão do objeto com sua representação e permitirá um maior conhecimento do objeto, tendo em vista que cada registro deixará evidente diferentes propriedades e características do mesmo.

Além disso, conhecendo diversas representações de um mesmo objeto e sabendo fazer a conversão de um registro a outro, poderá se escolher o mais conveniente na resolução de um problema, ou seja, aquele que proporcionará uma economia de tratamento durante a resolução.

Convém ainda destacar, com relação à compreensão de um conteúdo conceitual que: “se se chama **semiosis** a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e **noesis** os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, (...) não há noesis, sem semiosis”. (DUVAL, 2004, p.14-16)

Ou ainda, como assinala Moretti (2002):

> Do ponto de vista genético, as representações mentais e as semióticas não podem estar situadas em domínios distintos. Como assinalam Piaget e Vygotski citado por Duval(1993,p.38-39): ‘o desenvolvimento das representações mentais se efetua como uma interiorização das representações semióticas do mesmo modo que as imagens mentais são uma interiorização dos perceptos’. (p.348)

Vemos assim que não pode haver a compreensão de um objeto matemático sem o uso de diferentes registros de representação, ou seja, quando se fala em aprendizagem matemática, é necessário representar para compreender.

1.5 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E O ESBOÇO DE CURVAS

Remetendo-nos ao Esboço de Curvas, temos que a *equação algébrica* e a *representação gráfica* são dois registros de representações de uma mesma curva, mas que pertencem a sistemas semióticos diferentes.

Entendemos o Esboço de Curvas como sendo toda a atividade envolvida no processo que leva da equação algébrica à representação gráfica de uma curva.

Se esta atividade for vista como uma simples *codificação*, será realizada associando pares ordenados de números a pontos no plano cartesiano, o que possibilitará apenas uma leitura pontual da representação gráfica, gerando uma apreensão superficial.

> A regra de codificação só permite, portanto, duas coisas: ou a leitura de uma dupla de números sobre o gráfico a partir de um ponto designado, ou a designação de um ponto a partir de uma dupla de números. A repetição destas duas operações elementares não é suficiente para a conversão de representações entre os dois registros. (DUVAL, 1993; p.45)

Ainda que inúmeros pontos de uma mesma curva sejam identificados no plano cartesiano pela sua associação a pares de números, o procedimento não é suficiente para garantir o traço contínuo que representa a curva graficamente e muito menos a compreensão deste processo. Essa garantia apenas pode ser dada pelo *conceito de continuidade*, que não se aplica entre os conteúdos do Ensino Médio.

No entanto, é possível que haja uma apreensão global e qualitativa, desde que nesta atividade de conversão se consiga levar em conta tanto os valores escalares das equações (coeficientes) enquanto registros de saída, quanto as variáveis visuais próprias da representação gráfica (inclinação, concavidade, intersecção com os eixos) enquanto registro de chegada, pois, segundo Duval (2003, p.15):

> Há por trás da aplicação de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. São essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração em cada um dos dois registros.

Duval (1988, p. 236) classifica o esboço de curvas como uma atividade de três tipos distintos quanto à forma de realizar o traçado:

(1) O procedimento por pontos

(2) O procedimento de extensão de um traçado efetuado

(3) O procedimento de interpretação global das propriedades figurais

O procedimento do tipo (1) é bastante presente nos livros didáticos: pontos obtidos por substituição na expressão da função são localizados em um sistema de eixos graduados para que em seguida a curva possa ser traçada através da junção desses pontos. Nesse modo de proceder não há ligação entre o gráfico e a expressão algébrica da função correspondente. Diversos problemas podem surgir devido ao fato de que se há congruência semântica entre um par ordenado e a sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática a ele equivalente.

O tipo (2) caracteriza o esboço de curvas por meio de atividades de interpolação e extrapolação. Esta via não se apóia sobre o conjunto finito de pontos marcados como no caso do procedimento (1), mas sim sobre o conjunto infinito dos pontos potenciais, ou seja, sobre os intervalos entre os pontos marcados, pois, no caso da interpolação[3], por exemplo, uma das necessidades de seu uso se dá quando são conhecidos somente os valores numéricos da função para alguns pontos, mas há necessidade de se calcular o

---

[3] Segundo Ruggiero e Lopes (1996,p.212),interpolar uma função f(x) consiste em aproximar essa função por uma outra função g(x), escolhida entre uma classe de funções definida a priori e que satisfaça algumas propriedades. A função g(x) é então usada em substituição à função f(x).

valor numérico de um ponto não conhecido, o qual poderá ser determinado de forma aproximada através da função interpoladora.

No modo (3), o conjunto traçado/eixo forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Este modo permite que se identifiquem as modificações possíveis conjuntamente na imagem e na expressão algébrica. Como diz Duval, "neste tipo de tratamento não estamos em presença da associação um ponto ↔ um par de números, mas na associação variável visual da representação ↔ unidade significativa da escrita algébrica." (DUVAL, 1988, p.237)

O procedimento do tipo (3) foi estudado por Duval para o caso das retas. O quadro seguinte mostra como ele identificou as variáveis visíveis da representação gráfica de uma reta e as unidades simbólicas das equações algébricas e relacionou-as:

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência do símbolo **-** presença do símbolo **-**
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor (45°) ângulo maior (45°)	coef.var.=1 coef.var<1 coef.var>1	não tem coef. Escrito
Posição sobre o eixo	corta acima	acrescenta-se uma constante	sinal **+**
	corta abaixo Corta na origem	subtrai-se uma constante não tem correção aditiva	sinal **-**

(DUVAL, 1988, p.240).

1.5.1 Estudando o procedimento de interpretação global das propriedades figurais no esboço de retas

Com base na tabela formulada por Duval (1988, p.240), mostrada acima, apresentamos um estudo que nos permite conhecer as variáveis visuais e quais são os valores que cada uma delas pode assumir no esboço de uma reta no plano cartesiano, bem como a relação existente entre estes valores e as unidades simbólicas presentes (ou ausentes) na expressão algébrica da reta. Este estudo nos ajuda a compreender o esboço de retas de maneira global e qualitativa pois estamos associando diretamente elementos figurais do esboço no plano à expressão algébrica da reta na forma $y = ax + b$.

Sentido de inclinação

A variável visual sentido de inclinação pode se apresentar de duas maneiras.

Sentido de inclinação ascendente: considerando uma leitura do gráfico no sentido da esquerda para a direta, as retas que possuem este sentido de inclinação percorrem do 3° ao 1° quadrante podendo passar pelo 2° quadrante, pelo 4° quadrante ou pela origem dos eixos.

Sentido de inclinação descendente: considerando o mesmo sentido de leitura do gráfico, as retas que possuem sentido de inclinação descendente percorrem do 2° ao 4°quadrante podendo passar pelo 1° quadrante, pelo 3° quadrante ou pela origem dos eixos.

O sentido de inclinação tem uma relação direta com a unidade simbólica que Duval chama de coeficiente, ou seja, com o valor que acompanha x e que, na expressão algébrica está indicado por '*a'*. Se este valor for positivo (não está acompanhado do símbolo -), a reta terá sentido de inclinação ascendente. Exemplos: $y = x + 1$, $y = x$, $y = x - 1$, $y = 0.5x$, $y = 0.5x - 2$, $y = 0.5x + 2$, $y = 2x + 3$, $y = 2x - 3$, $y = 2x$.

Caso o valor de '*a*' seja negativo, vem acompanhado do símbolo - e a reta tem sentido de inclinação descendente. Exemplos: $y = -x + 1$, $y = -x$, $y = -x - 1$, $y = -0.5x$, $y = -0.5x - 2$, $y = -0.5x + 2$, $y = -2x + 3$, $y = -2x - 3$, $y = -2x$.

Ângulos com os eixos

O ângulo que a reta forma com o eixo x, está também, diretamente relacionado ao coeficiente '*a*' da expressão algébrica. Se este coeficiente tem módulo igual a 1(não aparece na expressão algébrica), o ângulo que a reta forma com o eixo X (e neste caso com o eixo Y ou com uma reta paralela a ele) tem medida de 45°, indicado na tabela da página anterior, na coluna *Valores* como partição simétrica. Exemplos: $y = x + 1$, $y = x$, $y = x - 1$, $y = -x + 1$, $y = -x$, $y = -x - 1$.

Se este coeficiente for, em módulo, um valor menor que 1, o ângulo que a reta forma com o eixo X tem medida inferior a 45°. Exemplos: $y = 0.5x$, $y = 0.5x - 2$, $y = 0.5x + 2$, $y = -0.5x$, $y = -0.5x - 2$, $y = -0.5x + 2$.

Já um coeficiente com valor maior que 1, em módulo, indica um ângulo entre a reta e o eixo X com medida superior a 45°. Exemplos: $y = 2x + 3$, $y = 2x - 3$, $y = 2x$, $y = -2x + 3$, $y = -2x - 3$, $y = -2x$.

Esse coeficiente é a medida da tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo X.

Posição sobre o eixo

Se a reta intercepta o eixo das ordenadas acima do eixo das abscissas, a expressão algébrica apresenta uma constante '*b*' positiva. Exemplos: $y = x + 1$, $y = -x + 1$, $y = 0.5x + 2$, $y = -0.5x + 2$, $y = 2x + 3$, $y = -2x + 3$.

Se a reta intercepta o eixo das ordenadas abaixo do eixo das abscissas, a expressão algébrica apresenta uma constante ‘*b*’ negativa. Exemplos: $y = x - 1$, $y = -x - 1$, $y = 0.5x - 2$, $y = -0.5x - 2$, $y = 2x - 3$, $y = -2x - 3$.

Se esta interceptação for na origem, a constante vale zero e não está explícita na expressão algébrica, observamos, na verdade, a ausência da constante ‘*b*’. Exemplos: $y = x$, $y = -x$, $y = 0.5x$, $y = -0.5x$, $y = 2x$, $y = -2x$.

Esta constante corresponde à ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo Y.

Esboçando graficamente os exemplos

Com base no estudo feito, montamos uma árvore de possibilidades para as retas exemplificando cada possibilidade e, na sequência, esboçamos graficamente cada um dos exemplos, conforme pode ser visto na tabela e nas figuras 1.5 a 1.22 localizadas em Anexo (p.133).

Encontramos um total de dezoito possibilidades de reta, seguindo os critérios da classificação de Duval (1988, p.240): variáveis visuais e valores.

1.5.2 Estudando o procedimento de interpretação global das propriedades figurais no esboço de parábolas que são gráficos de funções polinomiais do 2º grau

Interpretar as *propriedades figurais* de outras curvas não é tão simples quanto para a reta, requer noções de limite e derivada, caso a forma da curva não seja conhecida *a priori*. Noções estas, que não estão contempladas entre os conteúdos do ensino de Nível Médio.

Apesar disso, Moretti (2003) mostra como manter a relação entre *variável visual de representação* e *unidade significativa da escrita algébrica* para a função quadrática, usando como recurso a translação. Conhecendo a forma de uma curva podemos, a partir de seu esboço – usando propriedades da curva e a *interpretação global das propriedades figurais*, proposta por Duval (1988) – chegar à representação gráfica de outras curvas semelhantes, por exemplo, “as parábolas com equações gerais do tipo $y=ax^2+bx+c$,sendo $a \neq 0$, b e c constantes reais, podem ser esboçadas a partir de deslocamentos de parábolas com vértice localizado na origem ($y=ax^2$)” (MORETTI, 2003, p.153). Isso possibilitará reconhecer quais modificações na expressão algébrica refletem em modificações na expressão gráfica da curva e vice-versa, o que contribuirá para uma melhor aprendizagem, pois:

> As unidades significantes de um gráfico correspondem aos valores de diferentes variáveis visuais. O aluno que não discrimina estas variáveis é como se fosse cego para a conversão inversa àquela que se ensina habitualmente. Isto quer dizer que ele tem poucas oportunidades para fazer uma “leitura correta” dos gráficos. (DUVAL, 2004, p.60).

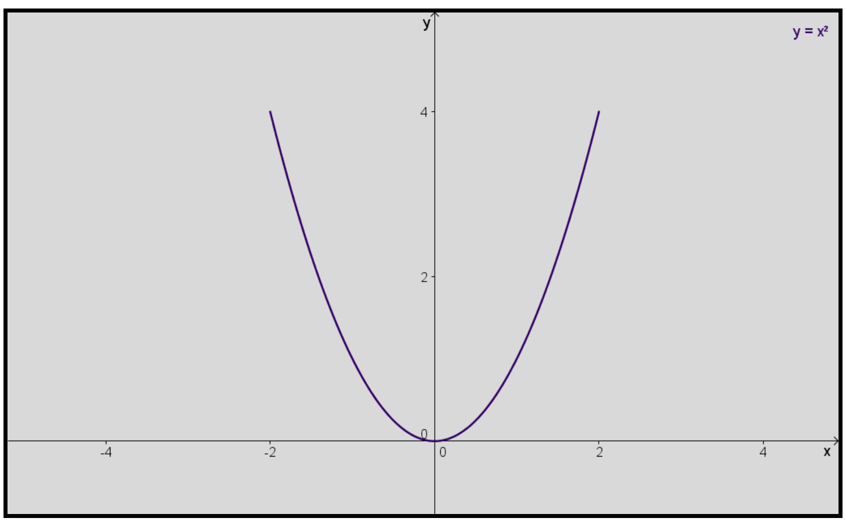
O uso da translação no esboço do gráfico da função polinomial do 2°grau

Usando alguns exemplos vamos verificar como obter o gráfico de parábolas que têm como equação geral $y = ax^2 + bx + c$, sendo $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ a partir do deslocamentos de parábolas com equação geral $y = ax^2$, $a \in R^*$, cujo vértice está localizado na origem do sistema cartesiano, conforme sinalizou Moretti(2003).

O coeficiente a

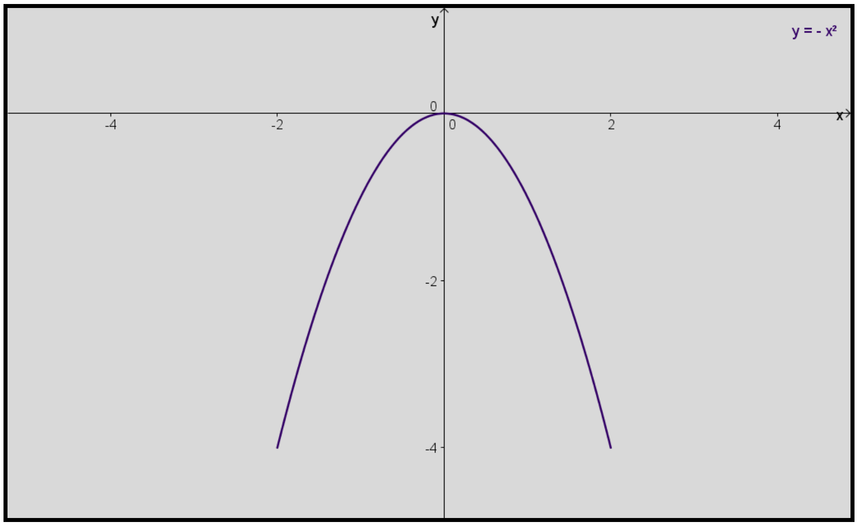
Observemos o gráfico da parábola que tem como equação geral $y = x^2$ ($a = 1, b = 0, c = 0$)

Figura 1.23



Agora vejamos o gráfico de $y = -x^2$ ($a = -1, b = 0, c = 0$)

Figura 1.24



Observemos então, o que ocorre variando o valor do coeficiente a, permanecendo com $b = c = 0$

Figura 1.25

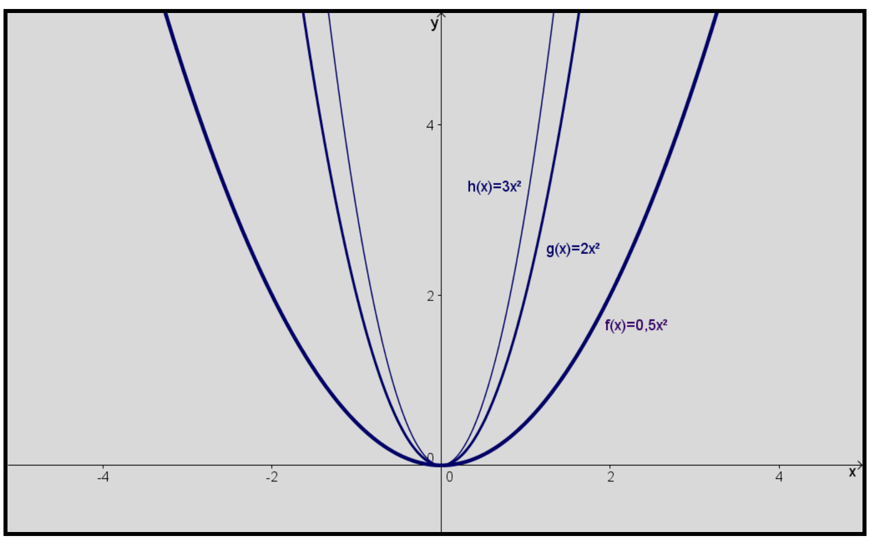
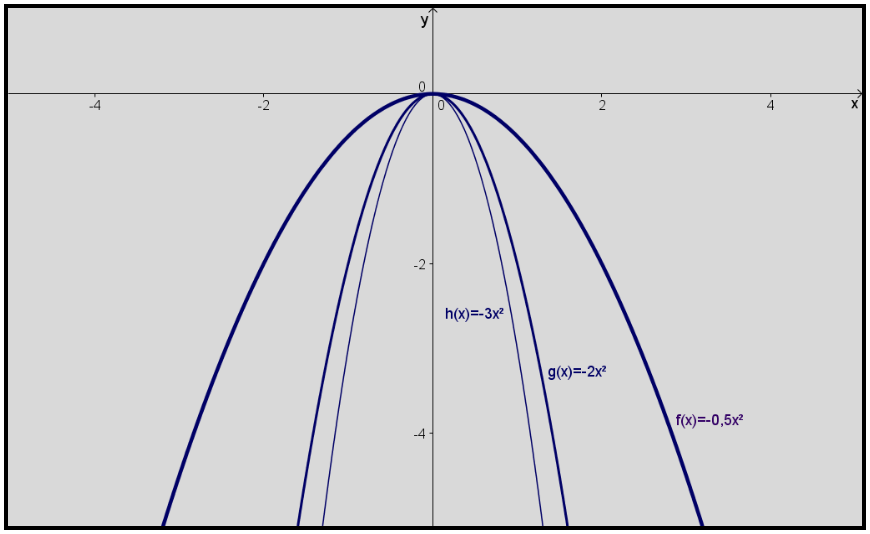


Figura 1.26



Observando as duas figuras anteriores, notamos que o sinal do coeficiente a determina se a parábola terá concavidade voltada para cima ou para baixo e que o valor do coeficiente *a* está relacionado diretamente ao tamanho da abertura da parábola. A ausência dos coeficientes *b* e *c* determina parábolas centradas na origem do sistema cartesiano, as quais conhecemos o esboço utilizando o procedimento de ligação de pontos oriundos de uma tabela de pares ordenados.

Diferentes parábolas com o mesmo coeficiente a

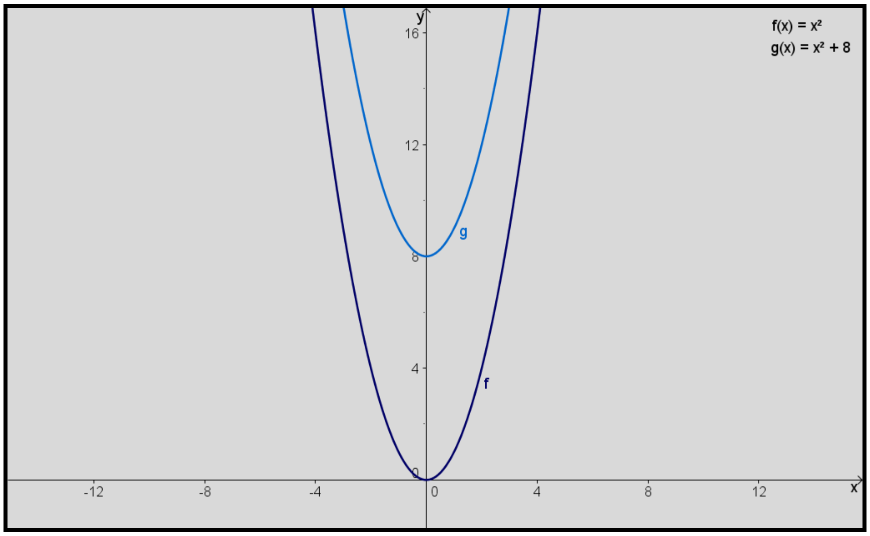
Modificações algébricas na equação geral $y = ax^2 + bx + c$ podem fazer com que os esboços de parábolas que têm o mesmo coeficiente a sejam obtidos a partir de deslocamentos verticais ou horizontais (translação) da parábola $y = ax^2$, ou seja, uma vez conhecido o esboço da curva $y = ax^2$, não precisaremos mais recorrer a uma tabela de pontos para a obtenção de outras parábolas com o mesmo coeficiente a, se usarmos como recurso a translação.

Vejamos exemplos nos quais $a = 1$:

a) $y = x^2 + 8$

Esta expressão algébrica pode ser escrita, sem perda de generalidade como: $y - 8 = x^2$ ou ainda $y - {}^{+}8 = x^2$. Que é obtida graficamente com uma translação vertical de oito unidades para cima da parábola $y = x^2$, ou seja, é uma parábola com mesma abertura desta, mas com novo vértice no ponto de coordenadas $(0,8)$.

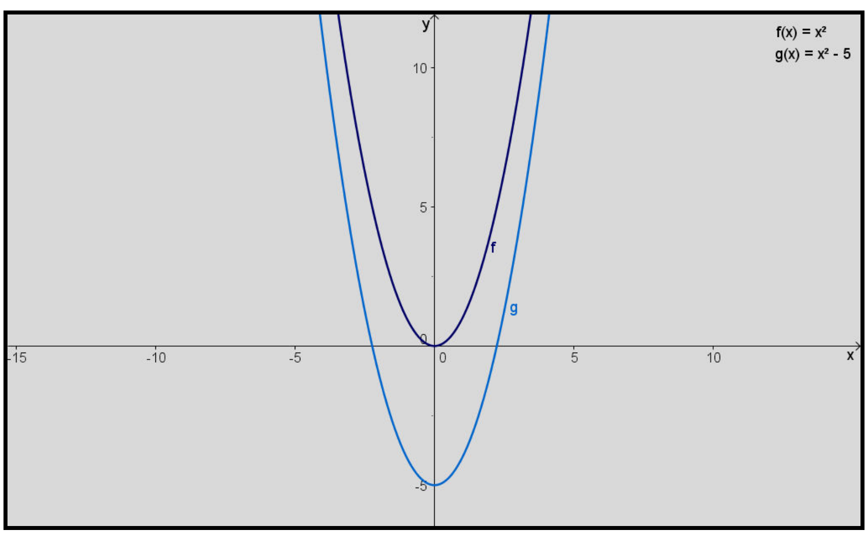
Figura 1.27



b) $y = x^2 - 5$

De maneira análoga, podemos escrever esta expressão, na forma $y + 5 = x^2$, ou ainda $y - {}^{-} 5 = x^2$, obtida graficamente também como uma translação vertical de $y = x^2$, neste caso, de cinco unidades para baixo.

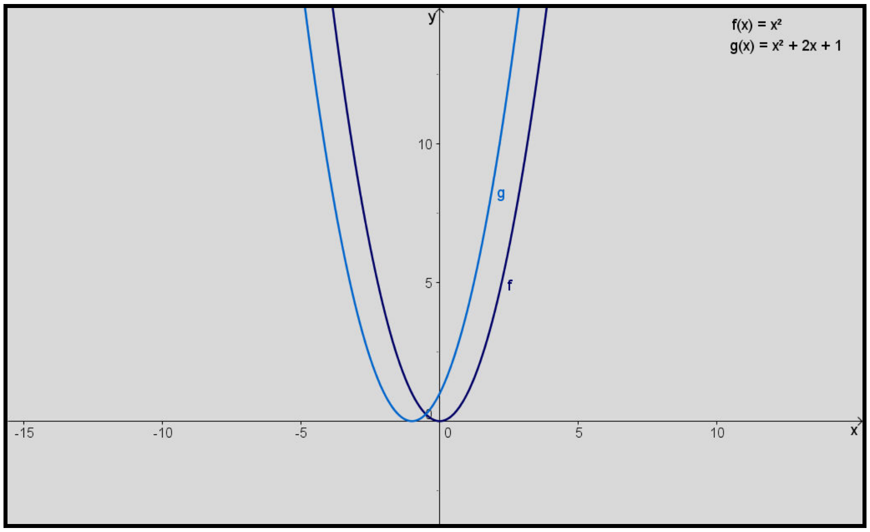
Figura 1.28



c) $y = x^2 + 2x + 1$

Notando que a expressão algébrica desta curva corresponde a um trinômio quadrado perfeito e pode ser escrita como: $y = (x+1)^2$, ou ainda $y = (x - {}^{-}1)^2$, percebemos que sua curva corresponde a uma translação horizontal da curva $y = x^2$ de uma unidade para a esquerda.

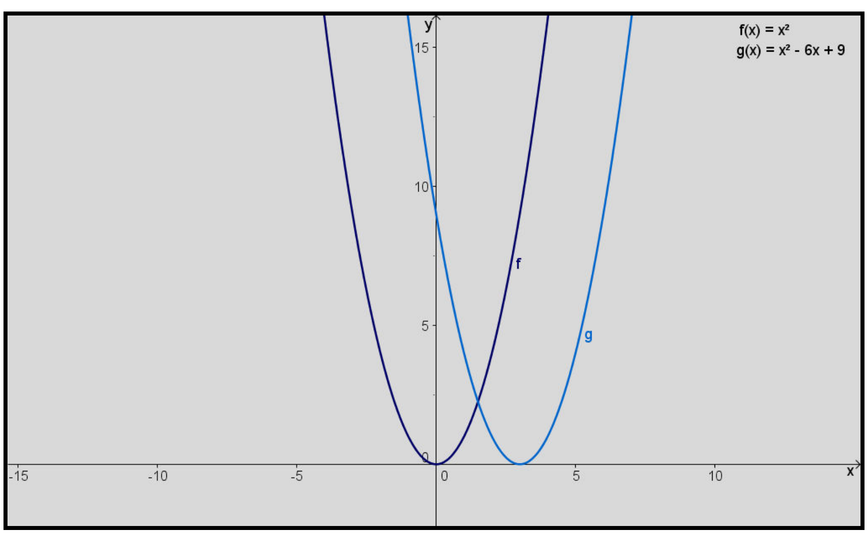
Figura 1.29



d) $y = x^2 - 6x + 9$

De maneira análoga à anterior, esta expressão algébrica também corresponde a um trinômio quadrado perfeito: $y = (x-3)^2$ ou $y = (x - ^{+}3)^2$ e sua curva também pode ser obtida a partir da translação da curva $y = x^2$ em três unidades para a direita.

Figura 1.30



Notamos que nos exemplos a e b, nos quais as expressões algébricas têm coeficiente b nulo, as curvas podem ser obtidas por translações verticais da curva $y = x^2$.

Por outro lado, nos exemplos c e d nos quais *b* e *c* são valores reais diferentes de zero mas, a expressão algébrica corresponde a um trinômio quadrado perfeito, as curvas podem ser obtidas por translação horizontal da curva $y = x^2$.

Ressaltamos ainda que as formas $y - {}^{+}8 = x^2$, $y - {}^{-}5 = x^2$, $y = (x - {}^{-}1)^2$ e $y = \left(x - {}^{+}3\right)^2$ de escrever as expressões algébricas das curvas, favorecem a observação direta do vértice da parábola transladada, bem como o sentido do deslocamento da translação,ou seja, “têm um maior grau de congruência semântica com as translações já descritas”(MORETTI, 2003, p.155), o que não ocorre com as formas $y - 8 = x^2$, $y + 5 = x^2$, $y = (x+1)^2$, $y = \left(x-3\right)^2$, nas quais os sinais + ou – podem dificultar a percepção do sentido da translação.

Observemos agora a equação $y = x^2 - 3x + 7$. Seu coeficiente *b* é não nulo e ela não representa um trinômio quadrado prefeito.

Neste caso, Moretti (2003) assinala que é possível transformá-la em um quadrado perfeito aplicando operações de tratamento algébrico, a fim de que seja possível esboçar graficamente a curva usando ainda a translação da curva $y = x^2$.

Vejamos:

$$y = x^2 - 3x + 7$$
$$y = (x-1,5)^2 + 4,75$$
$$y - 4,75 = (x-1,5)^2$$
$$y - {}^{+}4,75 = (x - {}^{+}1,5)^2$$

Assim, a expressão $y = x^2 - 3x + 7$ é equivalente à expressão $y - {}^{+}4,75 = (x - {}^{+}1,5)^2$ e torna-se visível que sua curva pode ser obtida transladando a curva $y = x^2$ verticalmente em 4,75 unidades para cima e horizontalmente em 1,5 unidades para a direita ou vice-versa conforme pode ser observado nas figuras 1.31a e 1.31b.

Figura 1.31a

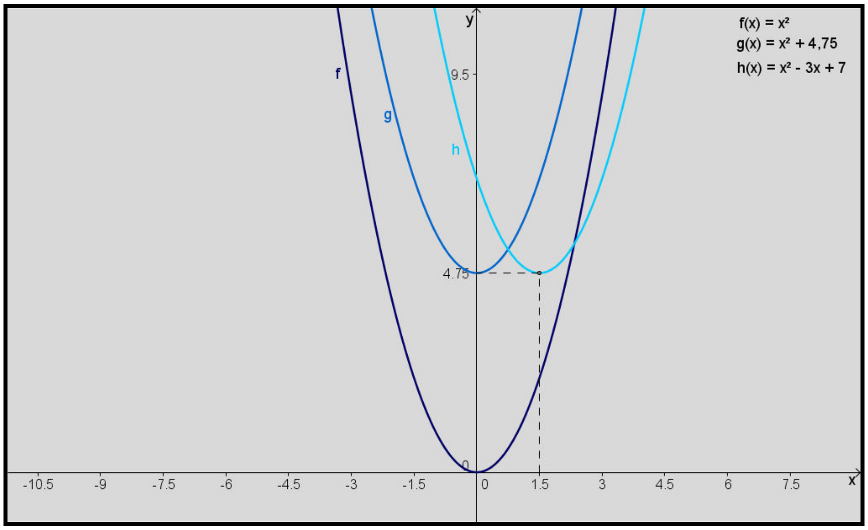
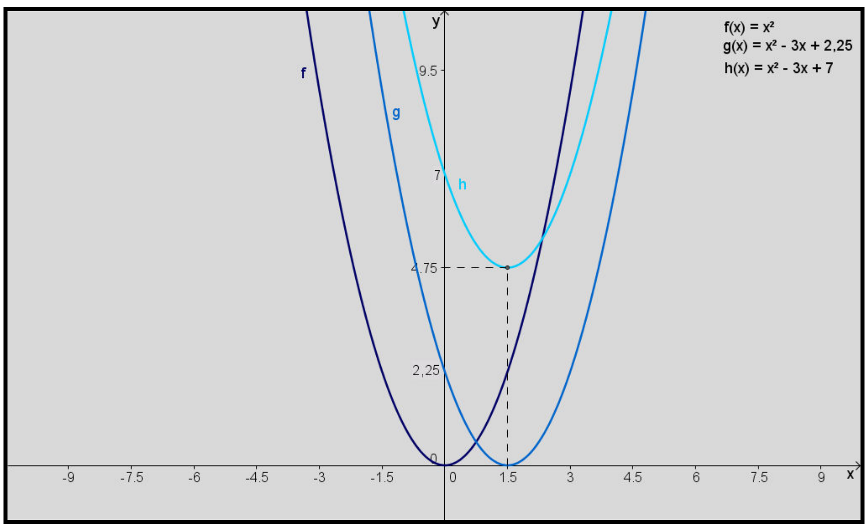


Figura 1.31b



Em todos os exemplos aplicamos operações de tratamento na expressão algébrica e na translação da curva $y = x^2$ que resultaram na conversão de cada uma das expressões algébricas nas representações gráficas correspondentes.

As mesmas operações aplicadas nesses exemplos nos quais a curva usada como base foi a de $y = x^2$, podem ser aplicadas em outros, nos quais a curva usada como base seja a de $y = ax^2$ e, o coeficiente *a* assuma outros valores reais diferentes de 1.

Vejamos dois exemplos onde mostraremos em cada um deles a translação nos dois sentidos:

1) a tem módulo maior que 1: y = $2x^2$ +12x +15

$$y = 2x^2+12x+15$$

$$y = 2(x^2+6x+7{,}5)$$

$$y = 2[(x+3)^2-1{,}5]$$

$$y = 2(x+3)^2-3$$

$$y + 3 = 2(x+3)^2$$

$$y - {}^{-}3 = 2(x - {}^{-}3)^2$$

Figura 1.32a

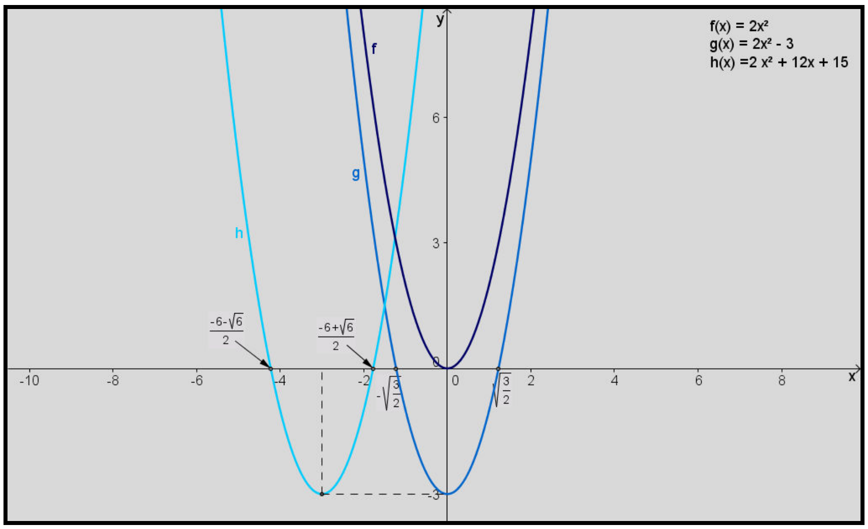
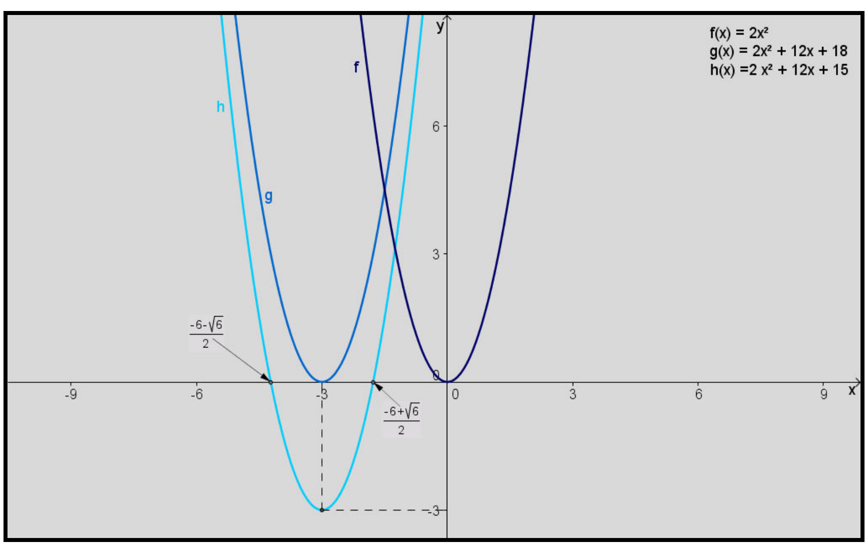


Figura 1.32b



2) a tem módulo menor que 1: $y = -0{,}5x^2 + 4x + 5$

$$y = -0,5x^2 + 4x + 5$$

$$y = -0,5(x^2 - 8x - 10)$$

$$y = -0,5[(x - 4)^2 - 26]$$

$$y = -0,5(x - 4)^2 + 13$$

$$y - 13 = -0,5(x - 4)^2$$

$$y -^{+} 13 = -0,5(x -^{+} 4)^2$$

Figura 1.33a

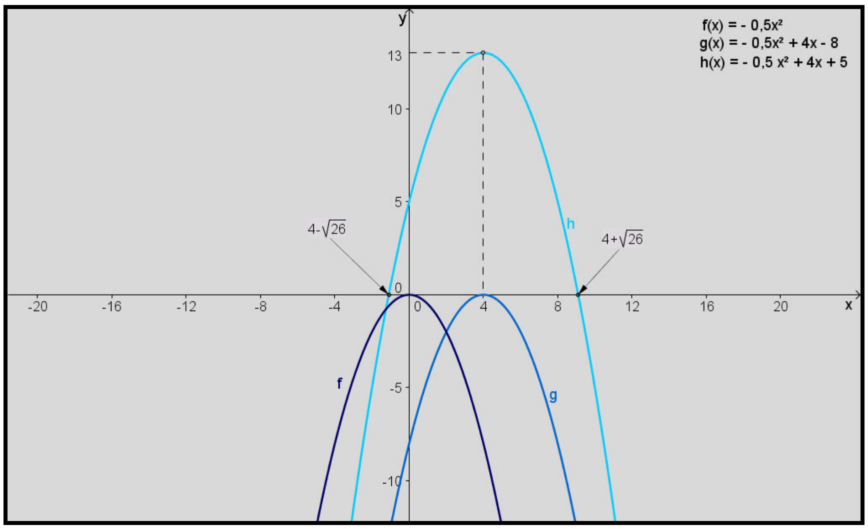
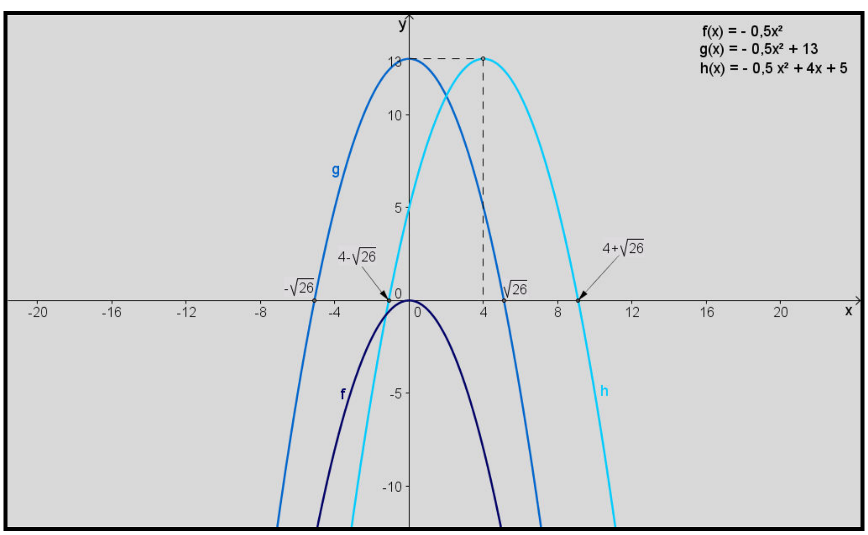


Figura 1.33b



Considerações

Com base nos exemplos vistos, vamos destacar, de maneira geral, as percepções adquiridas com o uso da translação no esboço do gráfico da função polinomial do 2°grau.

Notamos que, quando na equação geral os coeficientes *b* e *c* são nulos e o coeficiente *a* é positivo, temos parábolas com vértice na origem do sistema cartesiano e concavidade para cima e que diferem da parábola $y = x^2$ apenas na abertura, sendo esta maior em parábolas cujo o valor de *a* tem módulo menor que 1, e menor em parábolas cujo o valor de *a* tem módulo maior que 1. Se o coeficiente *a* for negativo, a concavidade será para baixo e, neste caso, teremos parábolas que diferem de $y = -x^2$ apenas na abertura. Ou, podemos dizer ainda que para cada expressão algébrica com coeficiente '*a*' negativo, a parábola será simétrica em relação ao eixo X, à parábola de mesma expressão algébrica com '*a*' positivo. Por exemplo, conhecendo o gráfico de $y = 4x^2$, o gráfico de $y = -4x^2$, pode ser obtido por simetria do anterior em relação ao eixo X.

Já em equações nas quais somente o coeficiente '*b*' é nulo, as parábolas com mesmo coeficiente '*a*' diferem da parábola que tem equação geral $y = ax^2$ apenas por uma translação vertical para baixo ou para cima no eixo Y, que é determinada pelo valor real do coeficiente '*c*'.

Para os casos em que o membro $ax^2 + bx + c$ da equação geral da parábola representa um trinômio quadrado perfeito, temos uma translação horizontal da parábola cuja equação geral é $y = ax^2$ (mesmo valor de *a* em ambas) para a esquerda ou para a direita do eixo X.

Nos demais casos, nos quais não se têm estas particularidades, aplicamos tratamento algébrico que corresponde à técnica de completar quadrados na equação geral, de modo a evidenciarmos as translações (horizontal e vertical) que deverão ser feitas na parábola que tem equação geral $y = ax^2$ (com o mesmo valor de *a*) a fim de obtermos o gráfico da parábola cuja expressão algébrica nos foi fornecida. Para tanto é necessário que o coeficiente *a* seja colocado em evidência antes de se completar o quadrado na expressão. Como exemplo nos reportamos às expressões $y = 2x^2 + 12x + 15$ e $y = -0,5x^2 + 4x + 5$ e suas respectivas representações gráficas já vistas.

Agindo desta maneira, o ato de esboçar curvas que se baseia em uma tabela de pontos é usado apenas para que se conheça a curva base, ou seja, aquela cuja expressão tem a forma $y = ax^2$. Para outras semelhantes, com mesmo valor para o coeficiente '*a*', o uso da translação como recurso favorece a uma relação mais direta entre a expressão algébrica e o esboço da curva no plano como um todo, conforme sugere Duval (1988). Dessa forma, a curva não é vista apenas como a ligação de alguns pontos previamente determinados, tendo em vista que os procedimentos utilizados por Moretti (2003) no esboço de parábolas, levam à compreensão da conversão da expressão algébrica na representação gráfica da curva à medida que são identificadas unidades significativas pertencentes às duas formas de representação e as variações via tratamento algébrico na expressão algébrica, possibilitam a identificação das variações de deslocamento (translação) na representação gráfica. Dessa forma, a conversão de um registro em outro não se resume a uma simples codificação.

CAPÍTULO II

Análise de Livros Didáticos

Esta análise objetiva verificar como é proposto, em livros didáticos de ensino médio, o esboço de curvas. Pesquisamos, através de um banco de dados do FNDE[4], cada uma das escolas estaduais do Estado de Santa Catarina situadas na região da Grande Florianópolis, gerenciadas pela 18ª GERED[5] e formada pelos municípios de: Águas Mornas, Angelina, Anitápolis, Antônio Carlos, Biguaçu, Florianópolis, Governador Celso Ramos, Palhoça, Santo Amaro, São Bonifácio, São José, São Pedro de Alcântara e Rancho Queimado, a fim de identificarmos o livro didático de matemática adotado para o ensino médio no ano de 2006.

A tabela seguinte relaciona as coleções adotadas com o número total de escolas que as adotaram.

Coleção/Autor(es)	**Número de escolas que adotaram a coleção**
Matemática Aula por Aula Barreto & Silva	24
Matemática Dante	11
Matemática – Ciência e Aplicações Iezzi,Dolce,Degenszajn & Périgo	08
Matemática – Ensino Médio Smole, Vieira & Kiyukawa	05
Matemática Bianchini & Paccola	04
Matemática Paiva	02
Matemática – Uma atividade humana Longen	01

Faremos a análise das coleções citadas nas três primeiras linhas da tabela, por serem essas as adotadas pelo maior número de escolas.

Nesta análise, verificaremos se é apresentado e como é apresentado o esboço

[4] Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação.
[5] Gerência de Educação.

de curvas das funções: polinomial do primeiro grau, quadrática, trigonométricas (seno e cosseno), exponencial e logarítmica, segundo a classificação feita por Duval (1988), ou seja, pesquisaremos a relação que é feita entre a expressão algébrica (lei da função) e a representação gráfica (esboço do gráfico) da curva, para cada uma destas funções, a fim de identificar o tipo de procedimento usado na apresentação do esboço de curvas em cada obra:

(1) O procedimento por pontos

(2) O procedimento de extensão de um traçado efetuado

(3) O procedimento de interpretação global das propriedades figurais

2.1 COLEÇÃO MATEMÁTICA AULA POR AULA

Esta coleção é formada por três volumes. Cada um deles destina-se a uma série específica do ensino médio.

Nossa análise abordará o primeiro volume, dividido em nove unidades, pois nele encontramos o estudo das funções que pretendemos analisar e o esboço de suas respectivas curvas nas seguintes unidades:

- Unidade 2: Funções
- Unidade 3: Função polinomial do primeiro grau
- Unidade 4: Função polinomial do segundo grau (quadrática)
- Unidade 5: Função exponencial
- Unidade 6: Função logarítmica
- Unidade 8: Trigonometria

A Unidade 2 apesar de não referir-se a nenhuma função específica, merece destaque por apresentar um tópico denominado *Gráfico Cartesiano* que mostra a associação entre pares ordenados e pontos no plano cartesiano. Esse assunto é tratado dentro do capítulo *Pré-requisitos para o estudo de funções*. Isso nos dá indicativos de que o procedimento por pontos, do tipo (1) na classificação de Duval(1988), será bastante utilizado no esboço do gráfico das funções.

Destacamos também que o estudo das funções trigonométricas é revisto no segundo volume dessa coleção, na unidade *Retomando e aprofundando Trigonometria*. No entanto, como a parte da unidade referente às funções trigonométricas é apresentada de maneira idêntica à do primeiro volume, tanto ao descorrer sobre o conteúdo quanto nos exemplos e exercícios, julgamos desnecessária a sua análise.

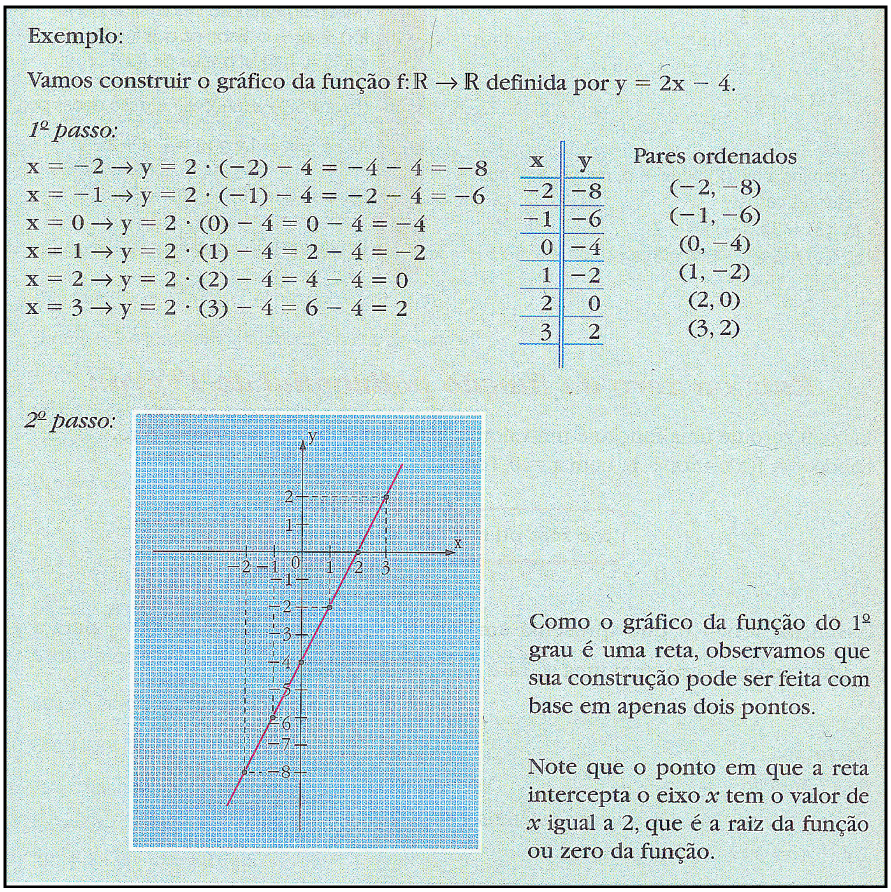
2.1.1 Unidade 3: Função polinomial do primeiro grau

No terceiro capítulo desta unidade – Gráfico de uma função do 1º grau – encontramos os tópicos: *Representação gráfica de uma função do 1º grau* e *Construção.*

O primeiro deles informa que a curva que representa o gráfico de uma função do tipo $y = ax + b, (a \neq 0)$ é uma reta e o segundo mostra como esboçar gráficos deste tipo de função em dois passos, seguido de exemplos de aplicação:

> A construção do gráfico de uma função do 1º grau, y = ax + b, pode ser feita:
> 1°) Atribuindo-se alguns valores reais a x e obtendo-se valores de y, correspondentes, organizando-os em uma tabela.
> 2°) Localizando no plano cartesiano os pontos (x,y) e traçando a reta que passa por eles. (BARRETO; SILVA, v.1,p.84)

Figura 2.1



Exemplo:

Vamos construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 2x - 4$.

1º passo:

$x = -2 \to y = 2 \cdot (-2) - 4 = -4 - 4 = -8$
$x = -1 \to y = 2 \cdot (-1) - 4 = -2 - 4 = -6$
$x = 0 \to y = 2 \cdot (0) - 4 = 0 - 4 = -4$
$x = 1 \to y = 2 \cdot (1) - 4 = 2 - 4 = -2$
$x = 2 \to y = 2 \cdot (2) - 4 = 4 - 4 = 0$
$x = 3 \to y = 2 \cdot (3) - 4 = 6 - 4 = 2$

x	y	Pares ordenados
−2	−8	(−2, −8)
−1	−6	(−1, −6)
0	−4	(0, −4)
1	−2	(1, −2)
2	0	(2, 0)
3	2	(3, 2)

2º passo:

Como o gráfico da função do 1º grau é uma reta, observamos que sua construção pode ser feita com base em apenas dois pontos.

Note que o ponto em que a reta intercepta o eixo *x* tem o valor de *x* igual a 2, que é a raiz da função ou zero da função.

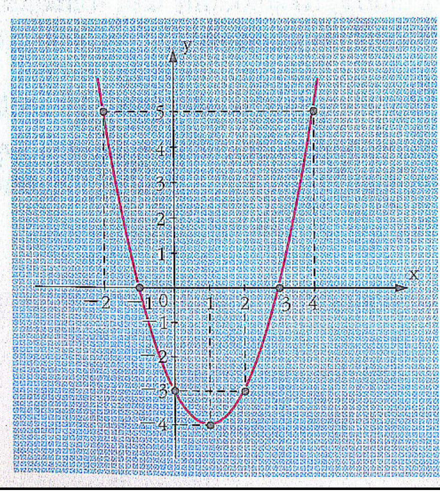
Este procedimento mostrado no exemplo é repetido em exercícios resolvidos. Depois são sugeridos exercícios propostos com enunciado e itens semelhantes.

2.1.2 Unidade 4: Função polinomial do segundo grau (quadrática)

No caso da função polinomial do segundo grau, a citação do tipo de curva (*parábola*) que representa o gráfico destas funções é seguida de dois exemplos de construção do gráfico que têm o intuito de mostrar que a parábola poderá ser de duas formas: com concavidade para cima ou para baixo, sendo concavidade o assunto subsequente. A parábola cuja expressão algébrica é $y = x^2 - 2x - 3$, é um destes exemplos e pode ser vista na figura :

Figura 2.2

x	y
−2	5
−1	0
0	−3
1	−4
2	−3
3	0
4	5



Para o caso em que a parábola tem concavidade para baixo, o exemplo apresentado é a construção da parábola que tem como expressão algébrica $y = -x^2 + 2x + 3$, que segue o modelo de construção análogo ao de $y = x^2 - 2x - 3$: construção de uma tabela de valores que representam pontos no plano cartesiano, cuja junção nos dá o esboço da parábola.

2.1.3 Unidade 5: Função exponencial e Unidade 6: Função logarítmica

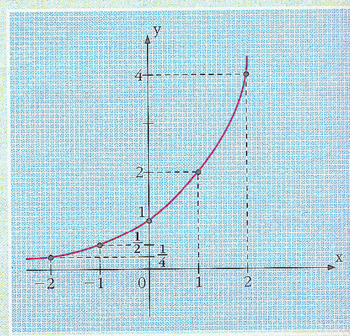
No caso das funções exponencial e logarítmica, os exemplos visam diferenciar a curva, cuja expressão algébrica possui como coeficiente a um número real maior que 1 ($a > 1$) daquela cujo o mesmo coeficiente tem valor real entre 0 e 1($0 < a < 1$). Ligando este fato ao crescimento ou decrescimento das funções. A figura seguinte ilustra esta diferenciação com o exemplo de funções exponenciais, conforme apresentado no livro.

Figura 2.3

1º caso A base é um número real maior que 1: $a > 1$

Exemplo: $f(x) = 2^x$ ou $y = 2^x$

x	$y = 2^x$
2	4
1	2
0	1
−1	$\frac{1}{2}$
−2	$\frac{1}{4}$

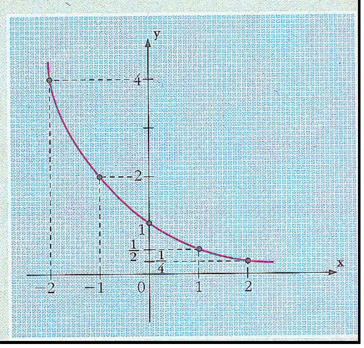


Função crescente

2º caso A base é um número real, maior que 0 e menor que 1: $0 < a < 1$

Exemplo: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ou $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

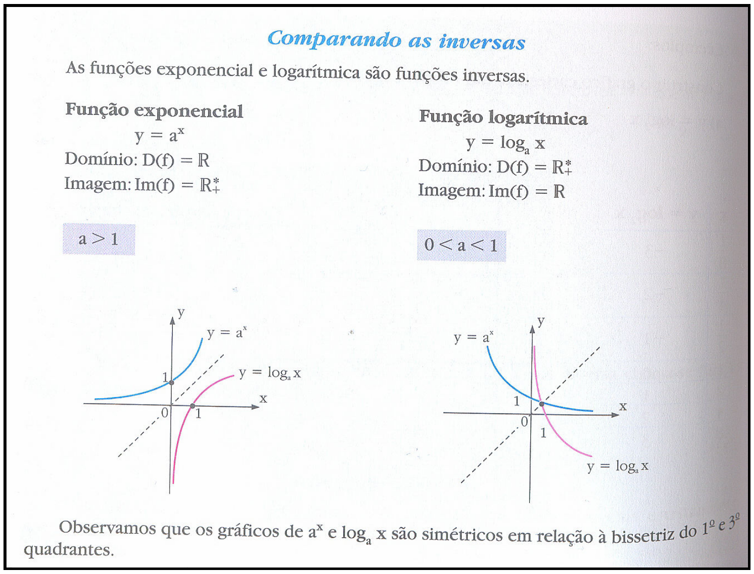
x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
2	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
0	1
−1	2
−4	4



Para a função logarítmica a forma de apresentação é análoga.

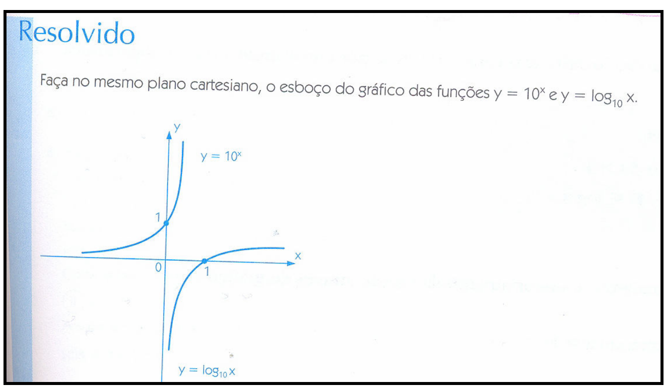
Vale destacar que no final da unidade destinada ao estudo da função logarítmica, é citado o fato das funções exponencial e logarítmica serem inversas e que há simetria entre seus gráficos, conforme ilustra a figura na próxima página:

Figura 2.4



No entanto, esta propriedade está presente em apenas um dos exercícios resolvidos e de forma implícita. E os exercícios propostos, da maneira como são enunciados, indicam que a resolução deve se basear nos exemplos onde a técnica presente é a junção de pontos no plano obtidos via tabela, não sugerem a aplicação da simetria.

Figura 2.5



46. Construir o esboço do gráfico cartesiano das seguintes funções:

a) $y = \log_3 x$ c) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

b) $y = \log_4 x$ d) $y = \log_{\frac{1}{10}} x$

48. Esboçar o gráfico cartesiano das seguintes funções:

a) $y = \log_3 x + 1$

b) $y = \log_2 (x-1)$

c) $y = \log_2 x - 1$ (BARRETO; SILVA, v.1,p.197)

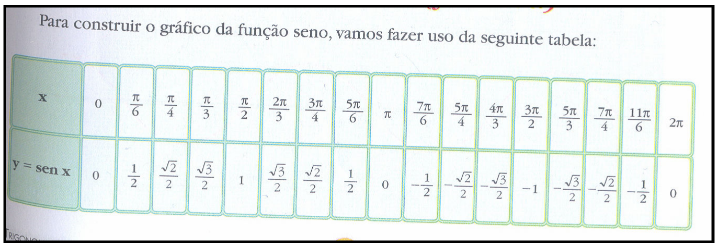
2.1.4 Unidade 8: Trigonometria

O esboço de curvas das funções trigonométricas, também se baseia em tabela de pontos, mas os valores atribuídos à variável *x* não são quaisquer, são valores cujo o seno e o cosseno são notáveis e pertencentes ao intervalo [0,2π], estudados com maior ênfase nos capítulos anteriores da mesma unidade.

Vejamos mais detalhadamente o caso da função seno. Para a função cosseno a forma de apresentação é análoga.

Para mostrar como esboçar o gráfico da função $y = sen\,x$ (figura 2.7), utiliza-se a tabela de pontos(figura 2.6):

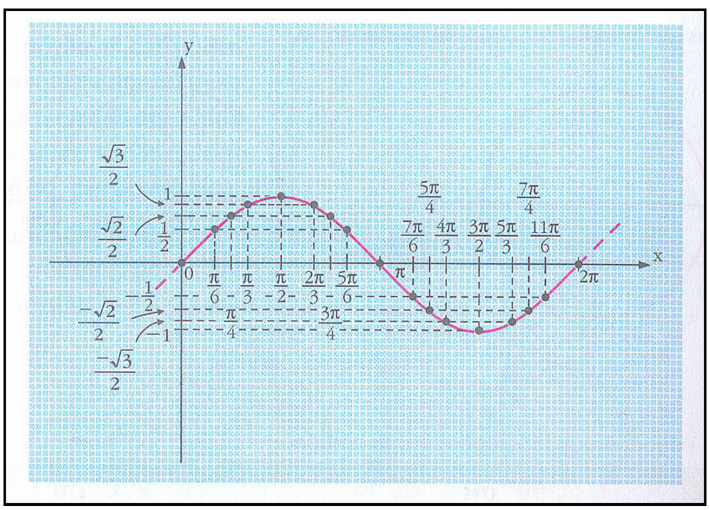
Figura 2.6



Para construir o gráfico da função seno, vamos fazer uso da seguinte tabela:

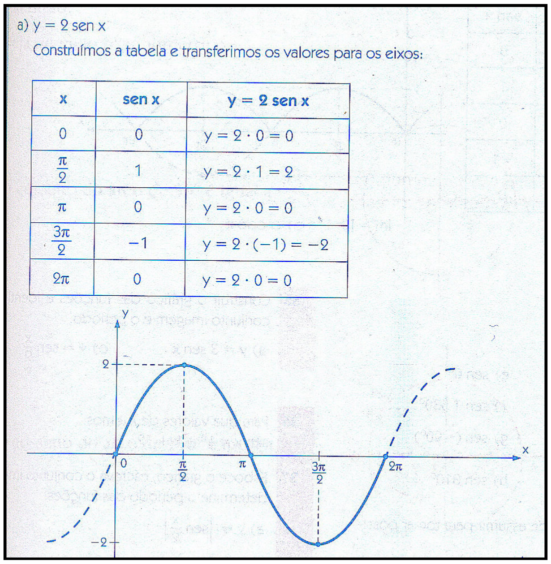
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Figura 2.7



Para esboçar o gráfico de $y = 2sen\,x$, todo o processo é repetido novamente sem que seja feita uma relação com a curva de $y = sen\,x$, então já conhecida.

Figura 2.8


a) $y = 2 \text{ sen } x$

Construímos a tabela e transferimos os valores para os eixos:

x	sen x	y = 2 sen x
0	0	$y = 2 \cdot 0 = 0$
$\frac{\pi}{2}$	1	$y = 2 \cdot 1 = 2$
π	0	$y = 2 \cdot 0 = 0$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$y = 2 \cdot (-1) = -2$
2π	0	$y = 2 \cdot 0 = 0$

Na seqüência do capítulo, são indicados exercícios propostos.

2.1.5 Considerações

Em todas as unidades identificamos capítulos ou sessões destinadas à apresentação da curva e à orientação quanto ao esboço da mesma e, em todos os casos o procedimento utilizado é o que Duval (1988) nomeia *procedimento por pontos*. Faz-se uma tabela atribuindo valores à variável x e calcula-se pela equação algébrica da função os valores de y. Em seguida, localizam-se os pontos no plano cartesiano através dos pares ordenados e, ligando-os, obtêm-se a curva que é o esboço do gráfico da função.

A única relação feita entre a expressão algébrica e a representação gráfica da curva, foi a ligação do coeficiente *a* da expressão algébrica da função polinomial do segundo grau, com a concavidade da parábola representada no plano cartesiano. E do coeficiente *a* da expressão algébrica das funções exponencial e logarítmica relacionado graficamente ao crescimento e decrescimento das funções.

Observamos a repetição do uso do procedimento por pontos, mesmo se tratando de curvas semelhantes.

2.2 Coleção Matemática

Esta coleção é formada por três volumes, um para cada série do nível médio de ensino, dos quais nossa análise abordará dois.

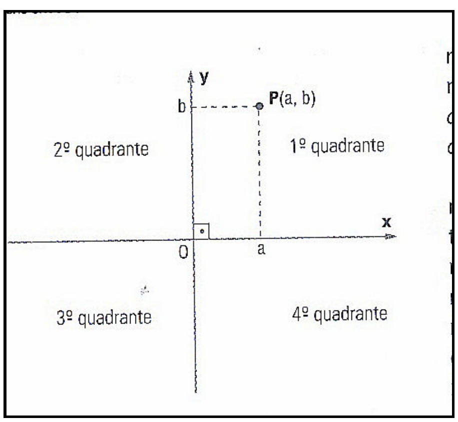
Apresentaremos aqui um estudo do terceiro, quarto e quinto capítulos do primeiro volume e, quarto, sétimo e oitavo capítulos do segundo volume. Capítulos esses, destinados ao estudo das funções, as quais estamos investigando o esboço de curvas.

2.2.1 Volume destinado à primeira série

Neste volume, o terceiro capítulo não trata de nenhum tipo específico de função, mas merece nossa atenção por trazer conceitos e noções que serão retomados nos capítulos posteriores que estudam os tipos de funções. Nele, o esboço do gráfico é tratado como um instrumento que auxilia na análise da variação de duas grandezas.

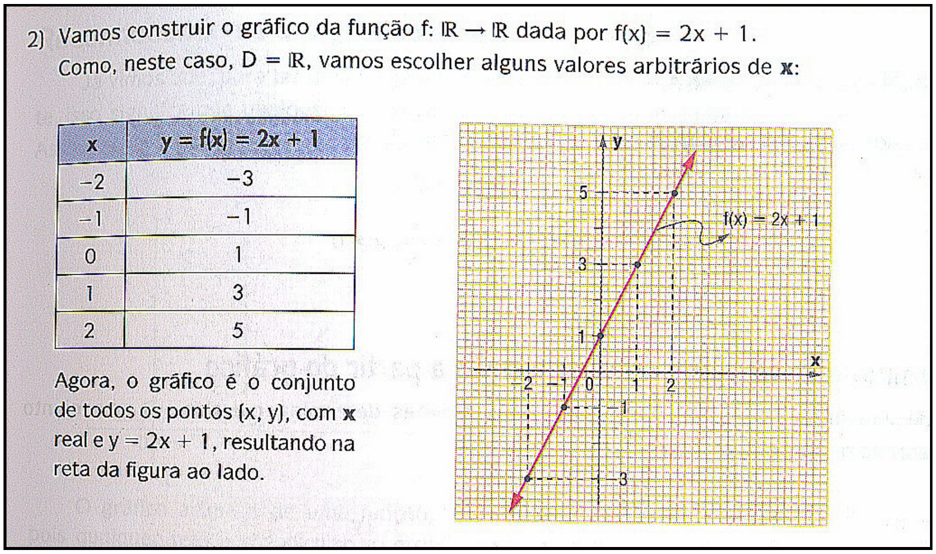
Existe a preocupação em definir Coordenadas Cartesianas e Sistema de Eixos Ortogonais, bem como de exemplificar a localização de pontos no plano cartesiano, conforme pode ser visto na figura seguinte:

Figura 2.9



Há também um tópico dentro do capítulo que trata especificamente da construção de gráficos por meio do *procedimento por pontos* (DUVAL, 1988). Observemos um dos exemplos apresentados:

Figura 2.10


2) Vamos construir o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$.
Como, neste caso, $D = \mathbb{R}$, vamos escolher alguns valores arbitrários de **x**:

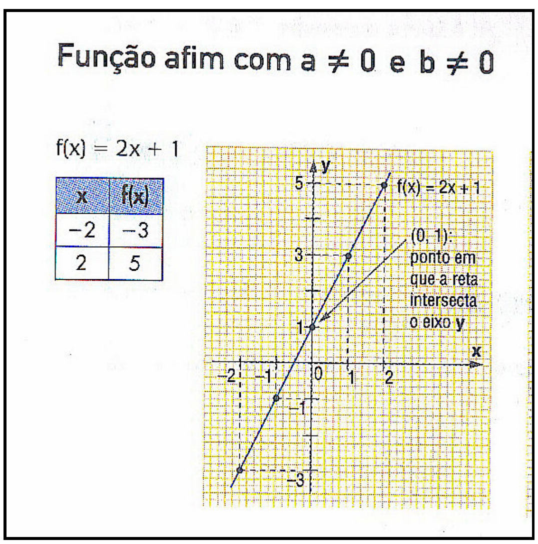
x	y = f(x) = 2x + 1
−2	−3
−1	−1
0	1
1	3
2	5

Agora, o gráfico é o conjunto de todos os pontos (x, y), com **x** real e y = 2x + 1, resultando na reta da figura ao lado.

O quarto capítulo trata do estudo da função afim.

No tópico deste capítulo que tem por objetivo o esboço do gráfico, inicialmente prova-se analiticamente que o gráfico da função Afim é uma reta. Em seguida, fazendo uso do axioma: “Dois pontos determinam uma única reta”, são esboçados gráficos de funções afins, com o uso de tabelas contendo apenas dois pares ordenados que representam dois pontos no plano, apesar do esboço apresentar outros (Figura 2.11).

Figura 2.11

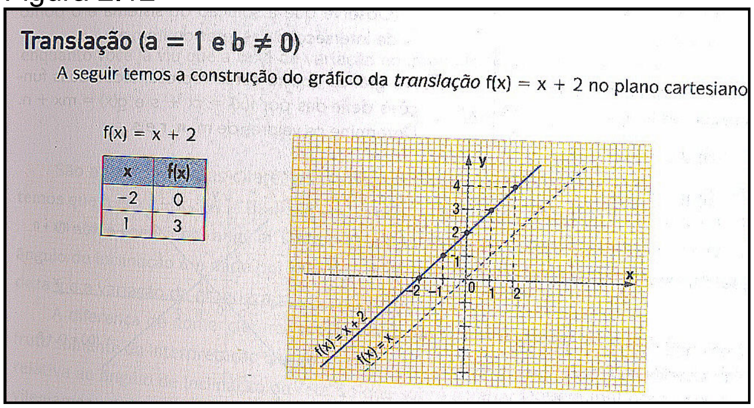

Função afim com a ≠ 0 e b ≠ 0

f(x) = 2x + 1

x	f(x)
−2	−3
2	5

Destacamos o gráfico da função $f(x) = x + 2$, utilizado para exemplificar que funções do tipo $f(x) = x + b$ (onde o coeficiente angular é 1) têm como gráfico retas que são translações da reta bissetriz do 1° e 3° quadrantes do plano cartesiano, representada algebricamente pela equação $f(x) = x$. Todavia, esta translação é apenas apresentada como uma característica, não é utilizada como ferramenta para o esboço da reta, cuja construção sendo precedida de uma tabela de pares ordenados (Figura 2.12).

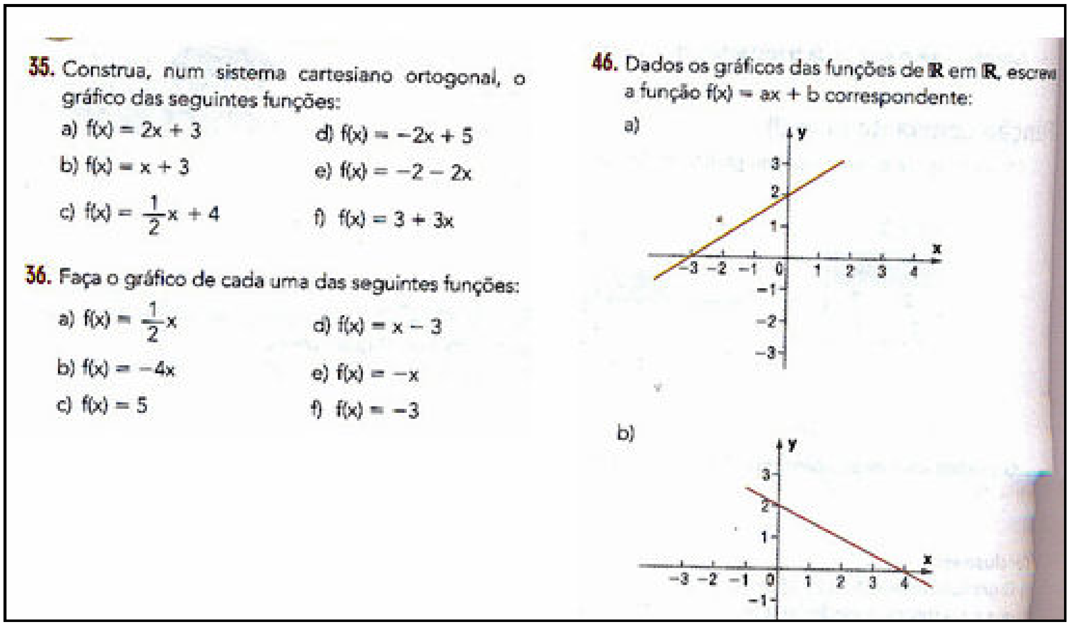
Figura 2.12



Os exercícios propostos que envolvem o esboço do gráfico da função afim transitam tanto da expressão algébrica para o gráfico quanto no sentido inverso, sendo que em ambos os sentidos, a base é a ligação de pontos no plano, a qual pode ser feita via tabela de pares ordenados, para o sentido de conversão equação → gráfico, ou resolução de sistema de equações, sendo conhecidas as coordenadas de dois pontos pertencentes à reta, se o sentido de conversão for o inverso, ou seja, do gráfico para a equação.

Vejamos alguns dos exercícios apresentados na figura 2.13:

Figura 2.13



35. Construa, num sistema cartesiano ortogonal, o gráfico das seguintes funções:

a) f(x) = 2x + 3
b) f(x) = x + 3
c) f(x) = $\frac{1}{2}$x + 4
d) f(x) = −2x + 5
e) f(x) = −2 − 2x
f) f(x) = 3 + 3x

36. Faça o gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) f(x) = $\frac{1}{2}$x
b) f(x) = −4x
c) f(x) = 5
d) f(x) = x − 3
e) f(x) = −x
f) f(x) = −3

46. Dados os gráficos das funções de ℝ em ℝ, escreva a função f(x) = ax + b correspondente:

a)

b)

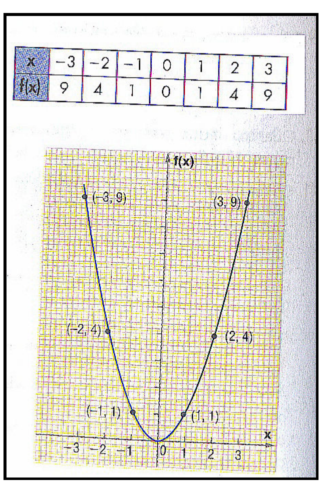
O quinto capítulo do mesmo volume destina-se ao estudo da função quadrática.

Relativo ao esboço do gráfico, primeiramente define-se parábola, indica-se seus elementos e afirma-se que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

> Consideremos um ponto **F** e uma reta **d** que não o contém. Chamamos *parábola de foco **F** e diretriz **d*** ao conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de **F** e de **d**.
> A reta perpendicular à diretriz que contém o foco chama-se eixo da parábola. O ponto (V) da parábola mais próximo da diretriz chama-se vértice dessa parábola. O vértice (V) é o ponto médio do segmento cujos extremos são o foco e a intersecção do eixo com a diretriz.
> O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. (DANTE, 2004, v.1, p.128)

Esta afirmação é exemplificada pelo esboço do gráfico de $f(x) = x^2$, realizado via *procedimento por pontos* (DUVAL,1988), conforme figura:

Figura 2.14



x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	9	4	1	0	1	4	9

Na seqüência segue a prova analítica de que o gráfico de $f(x) = x^2$ é uma parábola e, separadamente são estudados os gráficos das funções quadráticas cujas expressões algébricas têm as formas:

$f(x) = ax^2$

$f(x) = ax^2 + k$

$f(x) = a(x - m)^2$

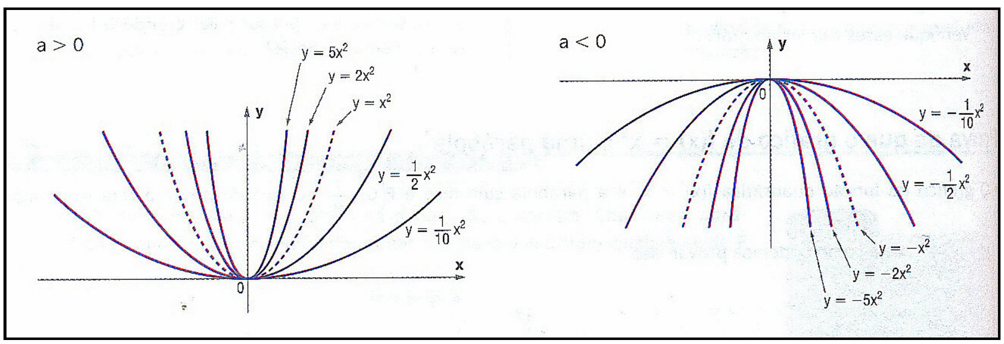
$f(x) = a(x - m)^2 + k$, em todos considerando $a \neq 0$.

Gráfico da função definida por $f(x) = ax^2 (a \neq 0)$

São apresentados exemplos de curvas cujas expressões algébricas têm diferentes valores para o coeficiente a e, por observação direta, são apresentadas as conclusões a cerca da influência do coeficiente a, no esboço da curva, ou seja, na abertura da parábola. Além disso, verifica-se também que todas as parábolas estão centradas na origem.

Seguem os exemplos apresentados:

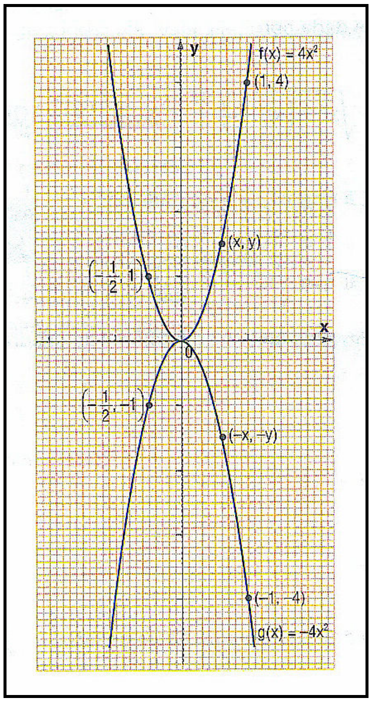
Figura 2.15



Vale destacar dois pontos deste tópico:

- Uma observação feita sobre a simetria de parábolas cujas expressões algébricas apresentam coeficientes a com mesmo valor absoluto que diferem apenas pelo sinal: "os gráficos das funções quadráticas $f(x) = ax^2$ e $g(x) = a'x^2$, em que a e a' são números simétricos, são simétricos em relação ao eixo **x.** Veja, por exemplo, os gráficos de $f(x) = 4x^2$ e $g(x) = -4x^2$:" (DANTE, 2004, v., p.130)

Figura 2.16



- Uma generalização: "é possível demonstrar que o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 \quad (a \neq 0)$ é uma parábola cujo foco é **F** $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja reta diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$. (DANTE, 2004, v.1, p.131)

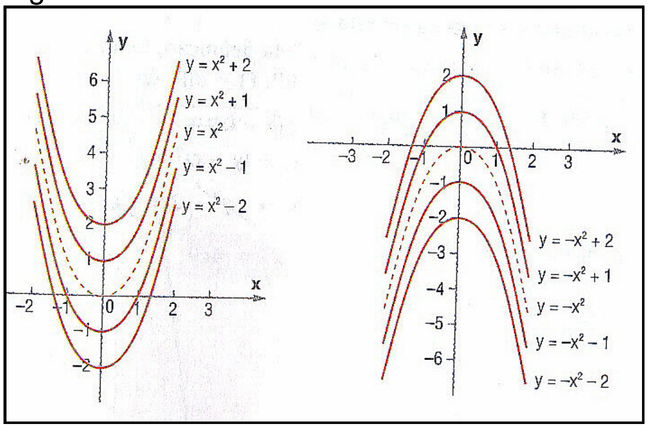
Com relação ao primeiro ponto destacado, ressaltamos que apesar da simetria ser comentada pelo autor, ambos os gráficos são feitos via junção de pontos no plano cartesiano. A observação deste fato nos leva a crer que a simetria não é utilizada como ferramenta de construção, visto que pontos simétricos são destacados mais expressivamente do que a simetria das curvas como um todo, levando-se a pensar que a garantia da simetria entre as curvas depende mais do reconhecimento de alguns pontos simétricos do que da simetria dos coeficientes a nas expressões algébricas.

Quanto ao segundo ponto, é um resultado que auxilia a construção da parábola geometricamente, podemos dizer que se trata de uma *propriedade figural* importante, pois, sabendo a localização do foco e da diretriz é possível construir o gráfico da função $f(x) = ax^2 \quad (a \neq 0)$, a partir da definição de parábola, sem a preocupação de se estabelecer pares ordenados que satisfaçam a expressão algébrica a fim de encontrar pontos que pertençam à curva.

Gráfico da função definidas por $f(x) = ax^2 + k, (a \neq 0)$

Inicialmente é feita a comparação de diversos gráficos que têm como expressão algébrica, leis de formação do tipo $f(x) = ax^2 + k$ e comparados com o gráfico de $f(x) = ax^2$, conforme a figura:

Figura 2.17



Utilizam-se gráficos, mas *o esboço* das curvas apresentadas não é aqui o ponto principal, o foco do texto está voltado para a forma do ponto de máximo ou de mínimo que é do tipo (0,k). Isso pode ser observado também nos exercícios que são propostos neste tópico, eles têm como tarefa indicar o vértice de parábolas deste tipo, ou identificar se elas possuem valor máximo ou mínimo. Todavia, observamos elementos diferentes no esboço destas curvas. Ao invés do procedimento por pontos, o uso da translação:

> Repare que o gráfico de $f(x) = ax^2 + k$ é congruente ao gráfico de $f(x) = ax^2$, porém sua posição é, em valores absolutos, k unidades acima ou abaixo, conforme k seja positivo ou negativo. A parábola corta o eixo y no ponto (0,k). (DANTE, 2004, v.1,p.133)

Gráfico da função definida por $f(x) = a(x - m)^2, (a \neq 0)$

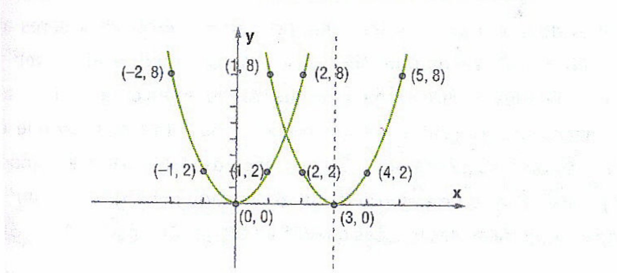
Utiliza-se o procedimento por pontos via tabela para o esboço de duas curvas particulares e, a partir da observação deste exemplo, são feitas generalizações a respeito do esboço das curvas do tipo $y = a(x - m)^2$**,** como um todo. Estas generalizações apresentam elementos que auxiliam o esboço de curvas sem o uso do procedimento por pontos, pois dão idéia da concavidade, da forma e da posição da parábola no plano cartesiano a partir de uma outra parábola, que esteja centrada na origem, desde que ambas tenham o mesmo valor para o coeficiente a em suas expressões algébricas.

Apesar do uso de uma tabela de valores que correspondem a pontos da parábola, a idéia de translação de curvas está presente.

Vejamos o exemplo e as generalizações:

Figura 2.18

x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$f(x) = 2x^2$	...	8	2	0	2	8	18	...	...	...
$g(x) = 2(x - 3)^2$	...	...	...	18	8	2	0	2	8	...



De um modo geral, temos que:

- O gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ é <u>congruente</u> ao gráfico de $f(x) = ax^2$, porém sua posição, em valores absolutos, <u>é m unidades à direita ou à esquerda</u> do gráfico de $f(x) = ax^2$, conforme m seja positivo (m>0) ou negativo (m<0), respectivamente.
- se $a > 0$, a concavidade da parábola é para cima e ela tem um ponto mínimo (m,0); se $a < 0$, a concavidade é para baixo e a parábola tem um ponto máximo (m,0).
- o gráfico é <u>simétrico</u> em relação à reta x=m e essa reta é o eixo da parábola.
- é possível provar que o gráfico da função quadrática $y = a(x-m)^2, \quad (a > 0)$, e $m \in \mathbb{R}$ é uma parábola cujo foco é o ponto F$\left(m, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$. (DANTE, 2004, v.1,p.133-134, grifo nosso)

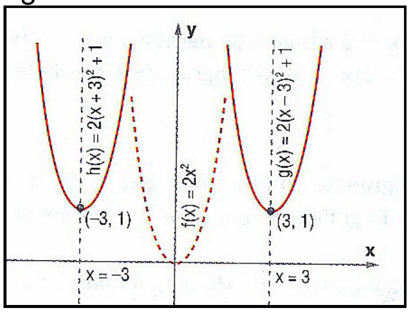
Os exercícios propostos neste tópico não têm como tarefa explícita esboçar os gráficos, mas, dada a equação algébrica, identificar os elementos: eixo, vértice, foco e diretriz.

Gráfico da função definida por $\boldsymbol{y = a(x-m)^2 + k, \quad (a \neq 0)}$

No esboço de gráficos de parábolas, cujas expressões algébricas têm esta forma, o autor une as informações sobre translação apresentadas nos dois tópicos imediatamente anteriores. Notamos que ele apóia-se no recurso da translação a partir da curva $f(x) = ax^2$ e abandona o procedimento por pontos.

O exemplo apresentado mostra claramente o esboço das curvas $h(x) = 2(x+3)^2 + 1$ e $g(x) = 2(x-3)^2 + 1$ obtidas a partir da translação da curva $f(x) = 2x^2$.

Figura 2.19



O autor salienta ainda que, para este tipo de parábola, "o foco é o ponto **F** $\left(m, k+\frac{1}{4a}\right)$, a diretriz é a reta horizontal $y = k - \frac{1}{4a}$ e o vértice é o ponto **V** (m,k)". (DANTE, 2004, v.1, p.135)

2.2.2 Volume destinado à segunda série

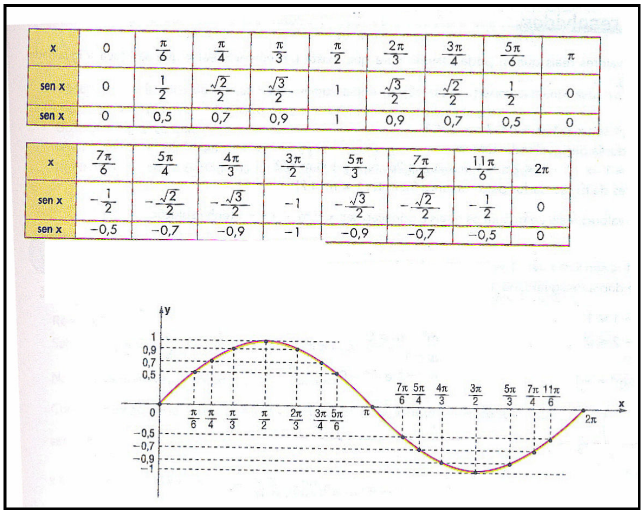
Neste volume analisaremos o quarto, o sétimo e o oitavo capítulos, nos quais são apresentados os esboços das curvas das funções trigonométricas, exponencial e logarítmica respectivamente.

No quarto capítulo, o tópico que trabalha o gráfico da função seno, indica como fazê-lo através do *procedimento por pontos*, sendo que os valores dados à variável x (abscissa dos pontos) são notáveis e apresentados em capítulo anterior. Neste esboço, o gráfico é apresentado apenas para o domínio [0,2π] e, depois, a função é estendida para todos os reais $(f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R})$ e apresenta-se a curva, nestas novas condições.

Ainda no mesmo capítulo e de modo análogo, no tópico relativo ao gráfico da função cosseno $(y = \cos x)$, é mostrado o esboço desta curva, via *procedimento por pontos*.

A figura 2.20 mostra o gráfico da função seno para o intervalo [0,2π] com a respectiva tabela de valores, conforme apresentada no livro:

Figura 2.20



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sen x	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
sen x	−0,5	−0,7	−0,9	−1	−0,9	−0,7	−0,5	0

No tópico seguinte, o autor exemplifica funções que ele denomina “do tipo trigonométricas” (DANTE, 2004, v.2,p.65). Os exemplos nos indicam implicitamente que ele está se referindo à soma de funções trigonométricas entre si, a translações de funções deste tipo ou ainda a composições de funções trigonométricas com funções lineares. Observe os exemplos citados:

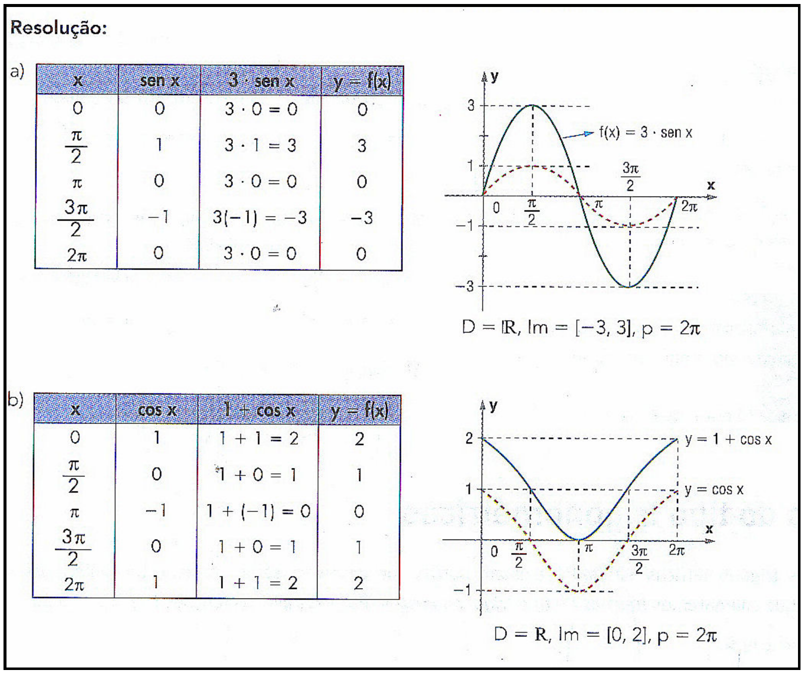
- $f(x) = 2 + \cos x,\ com\ x \in \mathbb{R}$
- $g(x) = sen 2x,\ com\ x \in \mathbb{R}$
- $h(x) = tg\,x + \sec x,\ com\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ com\ k \in \mathbb{Z}.$
- $i(x) = 1 - \cos\sec x,\ com\ x \neq k\pi,\ com\ k \in \mathbb{Z}.$ (DANTE, 2004, v.2,p.65)

Dentre os exercícios resolvidos apresentados neste tópico, destacamos o seguinte, que envolve o esboço das curvas:

> 8. Construa e analise os gráficos das funções abaixo dando o seu domínio, sua imagem e seu período. (Construa apenas um período completo).
>
> a) $f(x) = 3 \cdot sen\,x$
>
> b) $f(x) = 1 + \cos x$ (DANTE, 2004, v.2,p.65)

Vale destacar que as resoluções apresentadas seguem o procedimento por pontos (via tabela), mas, apresentam tracejados os gráficos das funções $f(x) = sen\,x$ (na resolução do item a) e $f(x) = \cos x$ (na resolução do item b). Com estes elementos, o autor levanta questões com o intuito de fazer o leitor observar e refletir sobre as mudanças que ocorrem nos gráficos das funções de cada uma das resoluções. Observemos a resolução apresentada na figura seguinte:

Figura 2.21



a)

x	sen x	$3 \cdot$ sen x	y = f(x)
0	0	$3 \cdot 0 = 0$	0
$\frac{\pi}{2}$	1	$3 \cdot 1 = 3$	3
π	0	$3 \cdot 0 = 0$	0
$\frac{3\pi}{2}$	−1	$3(-1) = -3$	−3
2π	0	$3 \cdot 0 = 0$	0

b)

x	cos x	1 + cos x	y = f(x)
0	1	$1 + 1 = 2$	2
$\frac{\pi}{2}$	0	$1 + 0 = 1$	1
π	−1	$1 + (-1) = 0$	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	$1 + 0 = 1$	1
2π	1	$1 + 1 = 2$	2

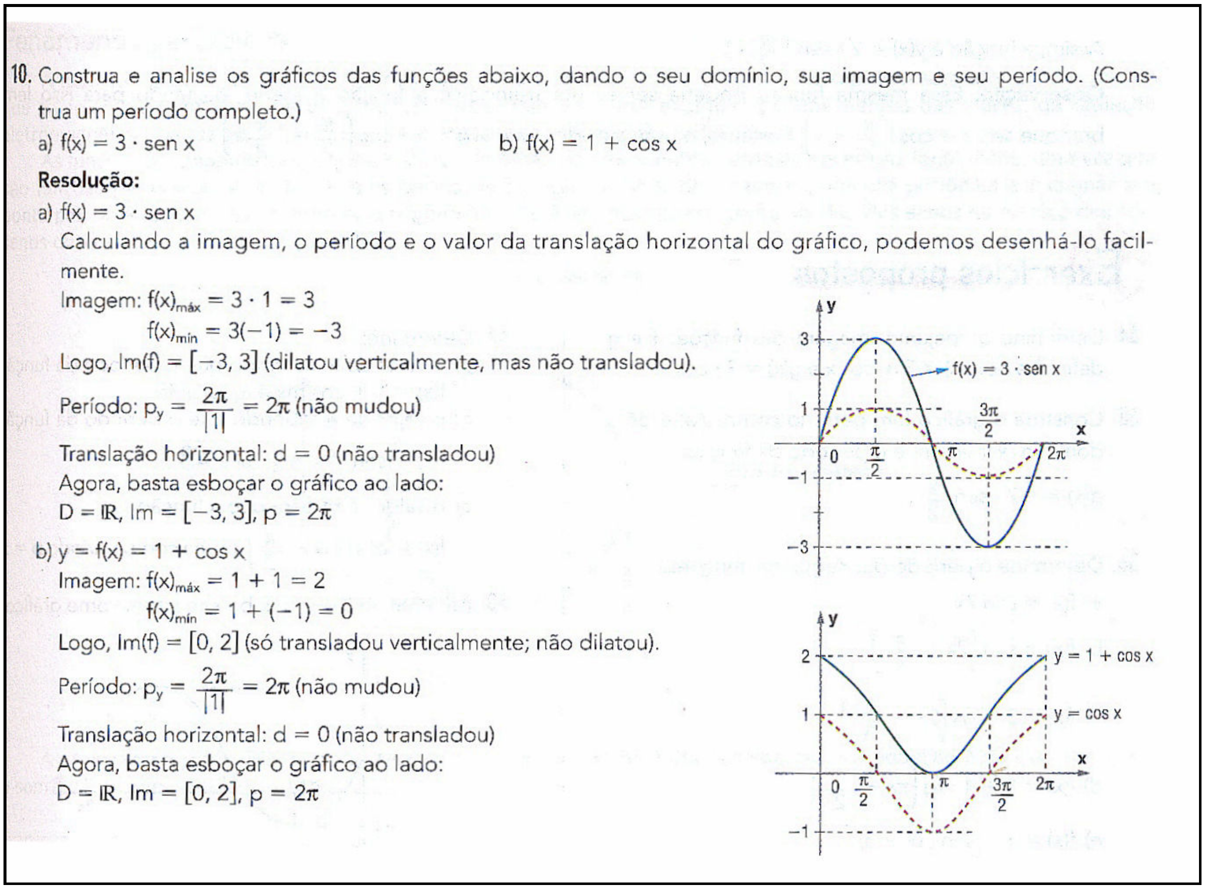
O tópico seguinte trata exclusivamente das funções que o autor denomina Senóides do tipo $y = a + b \cdot sen(cx + d)$

Nele são considerados outros elementos na construção do gráfico. O autor apresenta exemplos, faz considerações sobre os valores máximos e mínimos de cada um deles, e de como se obtém o período. Comenta também sobre simetria e translação:

> Além disso, é conveniente saber mais dois outros detalhes sobre as senóides:
> - se b < 0 o gráfico fica simétrico ao gráfico com b > 0 (simetria em relação ao eixo x);
> - se d ≠ 0 o gráfico translada $\frac{-d}{c}$ unidades. (DANTE, 2004, v.2,p.67, grifo nosso).

Na sessão de exercícios resolvidos deste tópico, encontramos a repetição deste exercício comentado acima, porém com a apresentação de uma outra forma de resolução onde é possível notar que o *procedimento por pontos* é substituído pelo cálculo e reflexão a cerca dos elementos: imagem e período da função e verificação se houve ou não translação horizontal. A figura seguinte detalha a resolução conforme apresentada na obra:

Figura 2.22



10. Construa e analise os gráficos das funções abaixo, dando o seu domínio, sua imagem e seu período. (Construa um período completo.)

a) $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$ b) $f(x) = 1 + \cos x$

Resolução:

a) $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$

Calculando a imagem, o período e o valor da translação horizontal do gráfico, podemos desenhá-lo facilmente.

Imagem: $f(x)_{máx} = 3 \cdot 1 = 3$

$f(x)_{mín} = 3(-1) = -3$

Logo, $Im(f) = [-3, 3]$ (dilatou verticalmente, mas não transladou).

Período: $p_y = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$ (não mudou)

Translação horizontal: d = 0 (não transladou)

Agora, basta esboçar o gráfico ao lado:

$D = \mathbb{R}$, $Im = [-3, 3]$, $p = 2\pi$

b) $y = f(x) = 1 + \cos x$

Imagem: $f(x)_{máx} = 1 + 1 = 2$

$f(x)_{mín} = 1 + (-1) = 0$

Logo, $Im(f) = [0, 2]$ (só transladou verticalmente; não dilatou).

Período: $p_y = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$ (não mudou)

Translação horizontal: d = 0 (não transladou)

Agora, basta esboçar o gráfico ao lado:

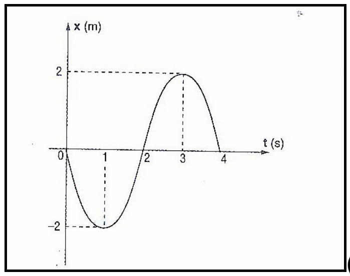
$D = \mathbb{R}$, $Im = [0, 2]$, $p = 2\pi$

Uma das preocupações visíveis do autor neste capítulo é elucidar conceitos nos quais se aplicam as funções trigonométricas e apresentar resoluções de exemplos que as envolvam.

Vale destacar um exercício resolvido que trata do movimento harmônico simples – uma das aplicações das funções trigonométricas. Nele, é apresentada a curva e solicitada como tarefa a determinação da função y(x) que a represente, ou seja, a expressão algébrica ou lei de formação da função.

Também dentre os exercícios propostos encontramos tanto os que têm como tarefa a construção do gráfico a partir da expressão algébrica quanto os que fazem o caminho inverso:

> 35. Construa o gráfico (um período completo) e dê o domínio, a imagem e o período da função $g(x) = -2 \cdot sen\frac{x}{2}$. (Dante, v.2, p.68)
>
> 47. (UFG-GO) O gráfico abaixo mostra a posição em função do tempo de uma partícula em movimento harmônico simples (MHS) no intervalo de tempo entre 0 e 4 s. A equação da posição em função do tempo para este movimento harmônico é dada por $x = A \cdot \cos(\varpi t + \sigma)$. A partir do gráfico, encontre A, ϖ e σ.



(DANTE, 2004, v.2, p.73)

O exercício 35 pode ser resolvido pelo procedimento baseado na tabela de pontos, mas o exercício 47 que solicita o processo inverso, ou seja, a determinação dos coeficientes da expressão algébrica, requer atenção sobre as modificações presentes na curva quando comparada à curva $x = \cos t$ para favorecer à uma interpretação correta do movimento descrito por ela que, segundo (DUVAL,1988), uma análise pontual não favorece.

Analisaremos agora, o sétimo capítulo cujo assunto é função exponencial.

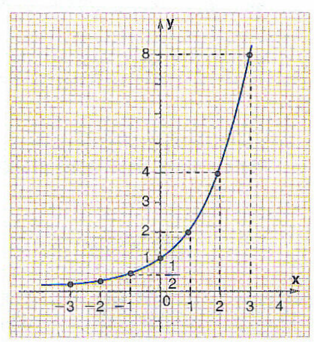
Logo após a definição de função exponencial e apresentação de exemplos, temos o tópico referente ao esboço do gráfico que segue o modelo do *procedimento por pontos*. A figura seguinte mostra o exemplo apresentado:

Figura 2.23

Vamos analisar os gráficos de duas funções exponenciais, a primeira com $a > 1$ e a segunda com $0 < a < 1$.

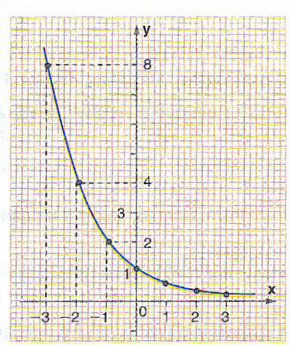
1ª) $f(x) = 2^x$ ou $y = 2^x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
2^x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



2ª) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ou $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



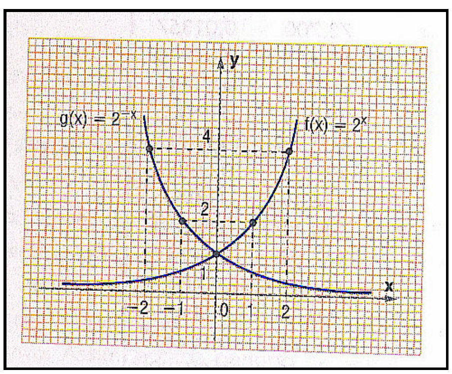
A partir da observação dos exemplos, são feitas algumas conclusões sobre crescimento, decrescimento, bijeção e ainda: “o gráfico é uma curva chamada exponencial, que passa por (0,1); o gráfico não toca o eixo x e não tem pontos nos quadrantes III e IV” (DANTE, 2004, v.2, p.115), o que podemos dizer serem propriedades figurais da curva.

Mais à frente é feita a observação de que “as idéias desenvolvidas no estudo da função exponencial $f(x) = a^x$ podem ser aplicadas em outras funções em que a variável aparece no expoente, como $f(x) = 2 \cdot 3^x$, $f(x) = 5^{x-2}$, $f(x) = 5^x - 2$” (DANTE, 2004, v.2, p.116)

Aplica-se, então, a tabela de pontos para a construção do gráfico da função $f(x) = 4^x + 1$ e, a título de reflexão, é posta a seguinte questão: “o que muda no gráfico de $f(x) = 4^x + 1$ em relação ao gráfico de $f(x) = 4^x$?” (DANTE, 2004, v.2, p.116)

Na seqüência o autor apresenta um tópico especial sobre a função $g(x) = a^{-x}$, chamada de *recíproca da função exponencial* ($f(x) = a^x$) (DANTE, 2004, v.2, p.125) para mostrar a simetria como característica entre seus gráficos. Como exemplos são mostrados no mesmo sistema de eixos os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. A figura seguinte mostra estes esboços:

Figura 2.24



Dentre os exercícios propostos encontramos os que solicitam o esboço de gráficos de funções exponenciais e outras que também apresentam a variável no expoente:

39. Construa o gráfico das funções e confirme as observações feitas sobre as funções exponenciais.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 3^x$

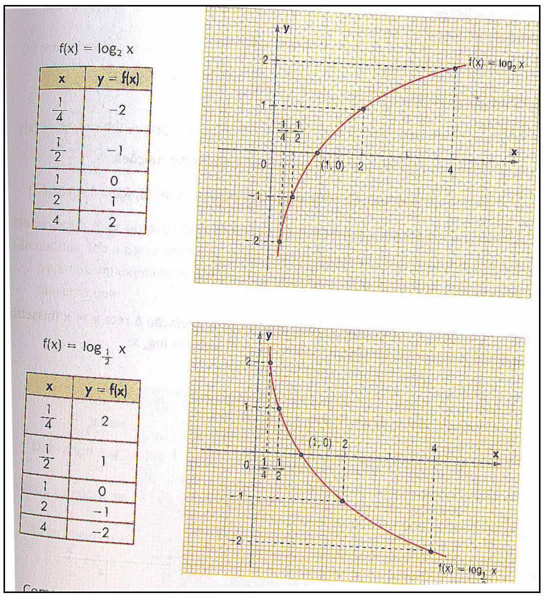
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

43. Construa o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2^{x-1}$ e determine Im(f). (DANTE, 2004, v.2, p.117).

O oitavo capítulo apresenta o estudo da função logarítmica.

Com relação ao esboço do gráfico, observamos que se dá de forma análoga ao da função exponencial: Conclusões obtidas a partir de dois exemplos esboçados via procedimento por pontos que podem ser observados conforme a ilustração:

Figura 2.25



Nos exercícios propostos que envolvem o gráfico de funções logarítmicas, a tarefa é justamente esboçar o gráfico.

79. Construa os gráficos das funções logarítmicas e confirme neles as conclusões obtidas:

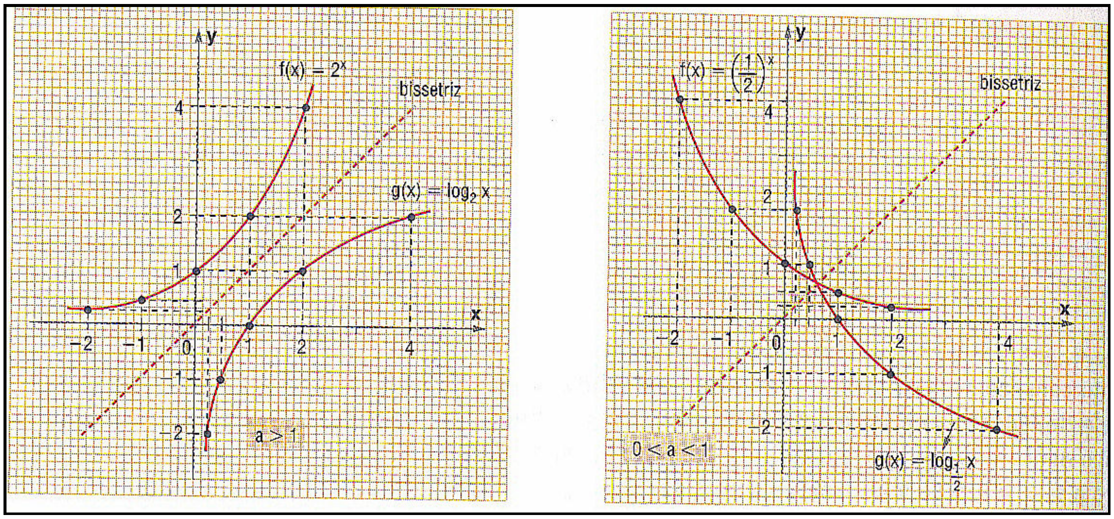
a) $f(x)=\log_3 x$ b) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$

81. Construa os gráficos das funções:

a) $f(x)=\log_2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ b) $f(x)=\log_2(x-1)$ (DANTE, 2004, v.2, p.148)

A simetria em relação à reta $y=x$ para duas funções inversas vista em capítulo anterior é retomada e mostrada graficamente para dois casos de funções logarítmicas com suas respectivas inversas exponenciais, como podemos observar na figura 2.26:

Figura 2.26



Como exercício propõe-se a construção dos gráficos de $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \log_3 x$, no mesmo sistema de eixos.

2.2.3 Considerações

Identificamos o procedimento descrito por Duval (1988) como *procedimento por pontos*, como sendo o mais presente entre os esboços das curvas estudadas. Porém, em alguns casos, propriedades figurais como simetria e translação estavam presentes, ora como simples características apresentadas, ora como ferramentas para o esboço de curvas.

Nos exemplos de esboços de gráficos de funções Afins, embora o procedimento por pontos fosse o único utilizado como ferramenta, destacou-se, como características dos gráficos de funções cujas expressões algébricas são do tipo $y = x + b, \quad (a = 1)$, o fato de suas representações gráficas serem translações da reta bissetriz do 1° e 3° quadrantes do plano cartesiano, cuja equação algébrica é $y = x$.

No esboço de parábolas que são gráficos de funções quadráticas, percebemos um estudo dividido em casos. Para o caso mais simples, cuja expressão era do tipo $y = ax^2$, o procedimento utilizado foi o de ligação de pontos, mas para a obtenção dos gráficos de parábolas cujas expressões são do tipo $y = ax^2 + k$, $y = a(x - m)^2$ e $y = a(x - m)^2 + k$, foi utilizada a translação vertical, horizontal e ambas respectivamente, de parábolas cujas equações gerais são do tipo $y = ax^2$.

Ao tratar das funções "do tipo trigonométricas" (DANTE, 2004, v.2, p.65), os recursos de translação e simetria são explorados inclusive em exercícios resolvidos e nos exercícios propostos encontramos os que propõem a obtenção do gráfico a partir da expressão algébrica e vice-versa.

No caso das funções exponenciais e logarítmicas, o procedimento por pontos (DUVAL 1988) é exclusivo como ferramenta no esboço de suas curvas, apesar das noções de translação e simetria serem colocadas de maneira implícita em algumas questões, incentivando o leitor (estudante) a refletir sobre o assunto.

2.3 Coleção Matemática – Ciência e Aplicações

Nesta coleção, o estudo de funções e gráficos os quais estamos analisando, está presente nos volumes 1 e 2. Distribuído da seguinte maneira:

No primeiro volume, o capítulo dois trata de noções, definições e conceitos que envolvem funções como um todo e, entre outros assuntos, traz a construção de gráficos de um modo geral. Os capítulos três, quatro, seis e oito, destinam-se respectivamente ao estudo das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica especificamente.

No segundo volume encontramos as funções trigonométricas abordadas no capítulo cinco, dentre as quais nos voltaremos para as funções seno e cosseno.

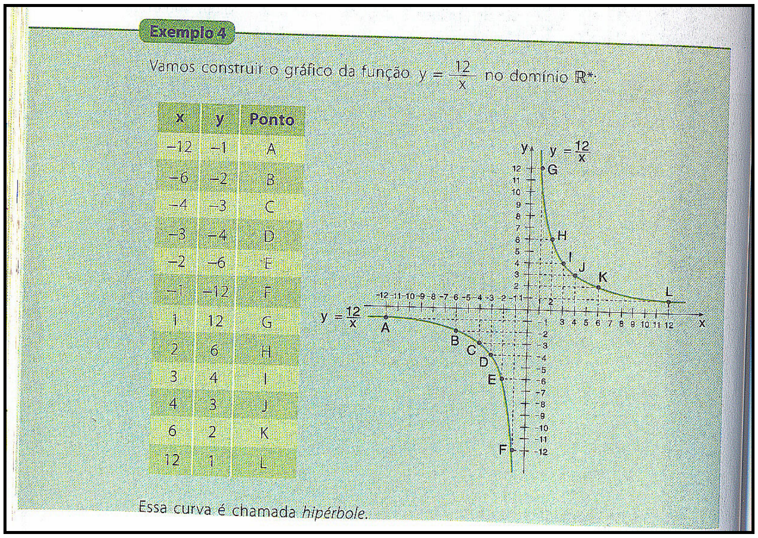
2.3.1 Noções básicas de plano cartesiano e construção de gráficos

O segundo capítulo do primeiro volume apresenta um tópico específico para apresentar o plano cartesiano e mostrar como localizar pontos no mesmo, a partir de pares ordenados de números reais e, no tópico seguinte, mostra o método denominado por Duval (1988) de *procedimento por pontos*, passo a passo para a construção de gráficos, conhecendo a lei de formação $y = f(x)$ e o domínio da função:

> 1º passo: construímos uma tabela na qual aparecem os valores de x(variável independente) e os valores do correspondente y, calculados através da lei $y = f(x)$.
> 2º passo: representamos cada par ordenado (a,b) da tabela por um ponto do plano cartesiano.
> 3º passo: ligamos os pontos construídos no passo anterior por meio de uma curva, que é o próprio gráfico de função $y = f(x)$. (IEZZI, 2004, v.1, p.47)

São mostrados exemplos de aplicação do procedimento e, na seqüência são propostos alguns exercícios para que o método seja exercitado. A figura seguinte apresenta um dos exemplos:

Figura 2.27



Exemplo 4

Vamos construir o gráfico da função $y = \frac{12}{x}$ no domínio $\mathbb{R}^*$.

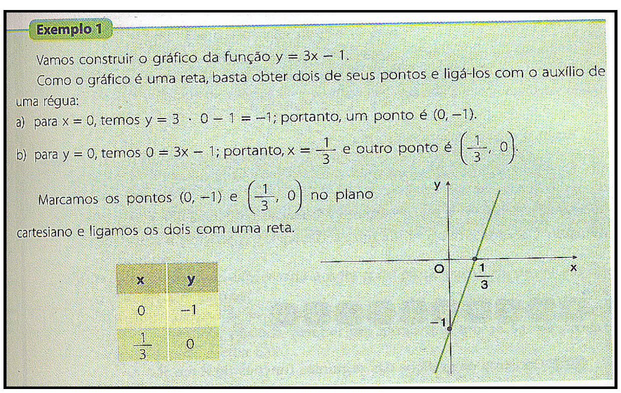
x	y	Ponto
−12	−1	A
−6	−2	B
−4	−3	C
−3	−4	D
−2	−6	E
−1	−12	F
1	12	G
2	6	H
3	4	I
4	3	J
6	2	K
12	1	L

Essa curva é chamada *hipérbole*.

2.3.2 Gráfico da função Afim

Ao tratar do esboço do gráfico da função afim, no terceiro capítulo, o procedimento por pontos é repetido, mas com a informação de que "o gráfico da função polinomial do 1° grau, $y = ax + b, com\ b \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy." (IEZZI, 2004, v.1, p.69), a tabela fica restrita a dois pares ordenados correspondentes a dois pontos no gráfico. Estes dois pontos são bem característicos: indicam onde o gráfico intercepta os eixos coordenados, conforme pode ser observado na figura:

Figura 2.28



Exemplo 1

Vamos construir o gráfico da função $y = 3x - 1$.

Como o gráfico é uma reta, basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua:

a) para $x = 0$, temos $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$; portanto, um ponto é $(0, -1)$.

b) para $y = 0$, temos $0 = 3x - 1$; portanto, $x = \frac{1}{3}$ e outro ponto é $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

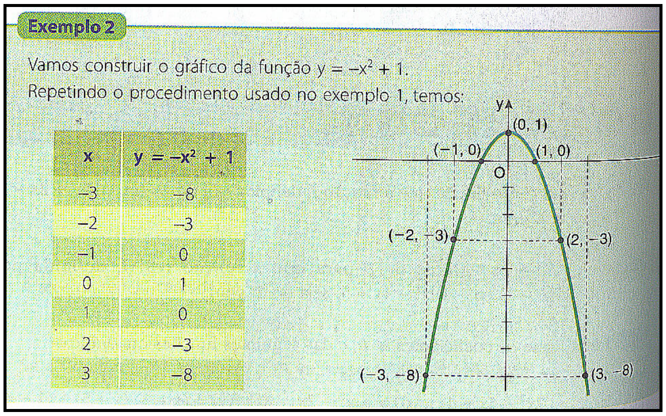
Marcamos os pontos $(0, -1)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ no plano cartesiano e ligamos os dois com uma reta.

x	y
0	−1
$\frac{1}{3}$	0

2.3.3 Gráfico da função Quadrática

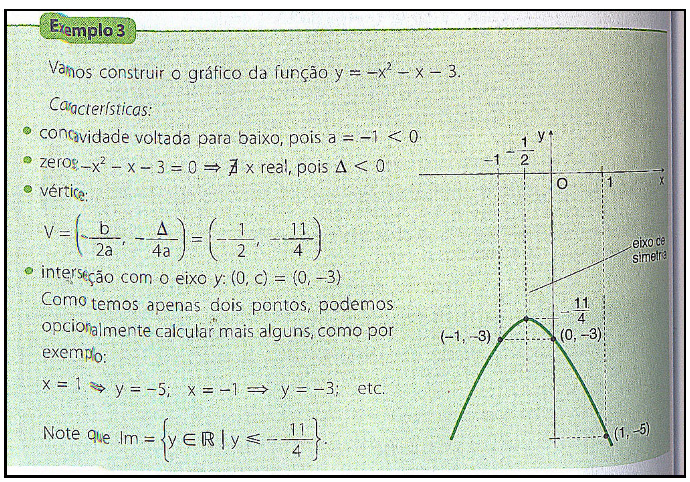
De modo análogo ao da função Afim é mostrado o esboço do gráfico da função quadrática: Informa-se que a curva é uma parábola e parte-se para dois exemplos com as duas possíveis posições: concavidade para cima ou para baixo. A ilustração a seguir, mostra o exemplo de construção no qual a parábola apresenta concavidade para baixo:

Figura 2.29



Mais à frente, após o estudo das raízes, do vértice e de outros elementos, é apresentada uma nova forma de esboçar o gráfico baseada nestes elementos (figura 2.30). No entanto, o procedimento ainda se baseia na ligação de pontos para a obtenção da curva, e continua não contribuindo para uma identificação mais direta entre a expressão algébrica da curva e seu esboço no plano.

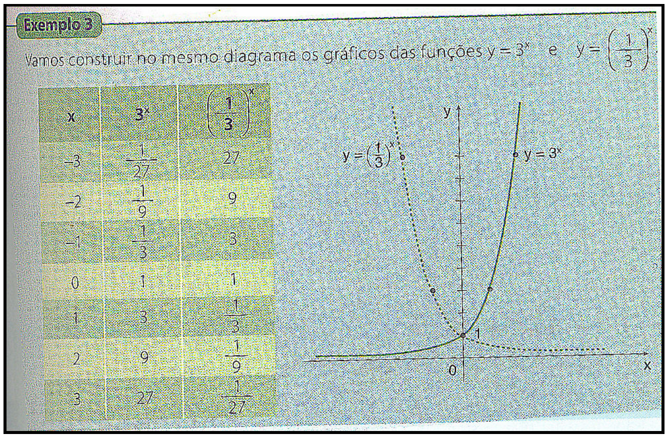
Figura 2.30



2.3.4 Gráfico das funções Exponenciais e Logarítmicas

Nos capítulos seis e oito, destinados ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas respectivamente, o procedimento para esboço dos gráficos se mantém. Destacamos duas ilustrações: uma onde duas funções exponenciais recíprocas são esboçadas no mesmo sistema de coordenadas (onde a simetria existente pode ser visualizada). E uma outra a qual mostra um exemplo de função logarítmica esboçado no sistema de eixos juntamente com a sua inversa, onde se aproveita da simetria das curvas, apesar da tabela de pontos não ser desprezada para nenhum dos dois esboços.

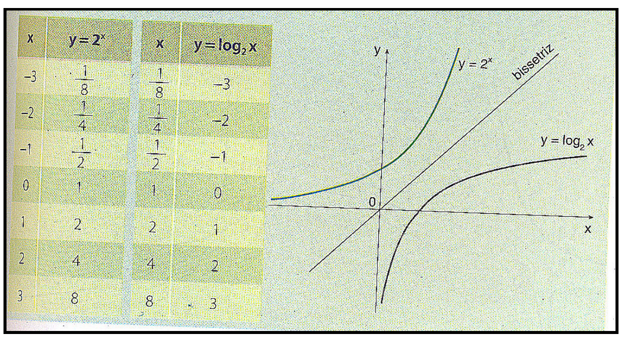
Figura 2.31


Exemplo 3

Vamos construir no mesmo diagrama os gráficos das funções $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	3^x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
–3	$\frac{1}{27}$	27
–2	$\frac{1}{9}$	9
–1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$

Figura 2.32



x	$y = 2^x$
–3	$\frac{1}{8}$
–2	$\frac{1}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

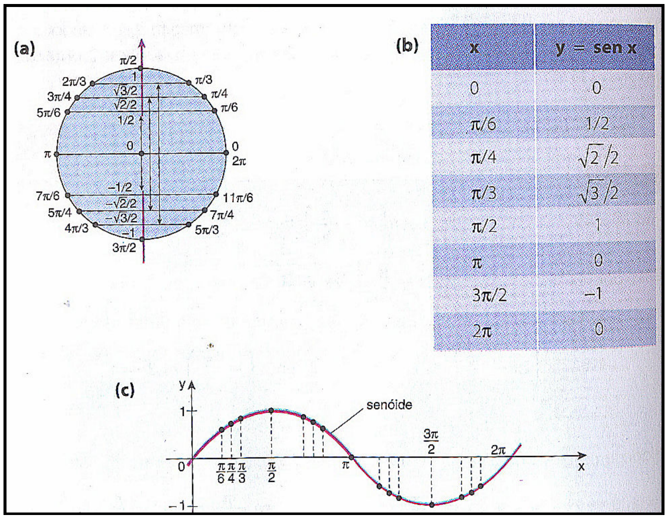
x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	–3
$\frac{1}{4}$	–2
$\frac{1}{2}$	–1
1	0
2	1
4	2
8	3

2.3.5 Gráfico das funções Trigonométricas – Seno e Cosseno

Este assunto está contemplado no quinto capítulo do segundo volume. Tanto para o esboço do gráfico da função seno quanto da função cosseno, o procedimento utilizado é de ligação de pontos, via tabela, como nos casos das outras funções.

A figura seguinte ilustra o caso da função seno, sendo que, para a função cosseno segue analogamente.

Figura 2.33



O que diferencia este processo do caso das funções que analisamos anteriormente é que os valores da tabela são retirados do círculo trigonométrico.

No caso de outras funções que envolvem seno ou cosseno modifica-se um pouco a construção da tabela de pontos. Os valores atribuídos primeiramente não são, como nos casos anteriores, os da variável x, mas sim os do argumento da função, porque é destes que se precisa obter o valor correspondente ao seno ou ao cosseno facilmente, ou seja, valores já estudados e reconhecidos do círculo trigonométrico. Se o processo for iniciado pela primeira coluna da tabela, poderá se cair em valores não tão simples de se obter o valor do seno ou do cosseno. O processo, apesar de já trabalhado no esboço de outras curvas, envolve, neste caso, sutilezas que devem ser percebidas apenas pela observação de exemplos, e despreza grande parte do trabalho, visto que para o esboço do gráfico serão utilizadas apenas duas colunas da tabela (dos valores de x e de y) as quais formam os pares ordenados que se transformarão em pontos no plano cartesiano. A figura seguinte exemplifica a obtenção de uma curva senóide. No livro também são apresentados exemplos envolvendo cossenóides que não mostraremos aqui por serem análogos.

Figura 2.34

Exemplo 3

Seja a função $y = 1 + \text{sen } 2x$. Vejamos:

1ª etapa:

x	2x	sen 2x	y
	0	?	
	$\pi/2$	?	
	π	?	
	$3\pi/2$	?	
	2π	?	

2ª etapa:

x	2x	sen 2x	$y = 1 + \text{sen } 2x$
	0	0	?
	$\pi/2$	1	?
	π	0	?
	$3\pi/2$	-1	?
	2π	0	?

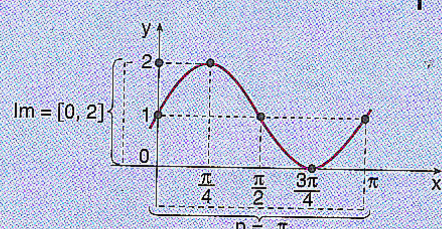
3ª etapa:

x	2x	sen 2x	$y = 1 + \text{sen } 2x$
?	0	0	1
?	$\pi/2$	1	2
?	π	0	1
?	$3\pi/2$	-1	0
?	2π	0	1

Finalmente:

x	2x	sen 2x	$y = 1 + \text{sen } 2x$
0	0	0	1
$\pi/4$	$\pi/2$	1	2
$\pi/2$	π	0	1
$3\pi/4$	$3\pi/2$	-1	0
π	2π	0	1

Para a construção do gráfico, utilizamos apenas a primeira e a última colunas, desprezando as demais.



2.3.6 Considerações

O único procedimento utilizado nos esboços dos gráficos das funções estudadas é o procedimento por pontos (DUVAL, 1988) que inclusive é apresentado e exemplificado antes do estudo das funções específicas.

No caso da função quadrática, os primeiros exemplos apresentam uma tabela de valores quaisquer para a determinação dos pontos da curva. Porém, após o estudo das raízes, do vértice e demais características, estes são os elementos que determinam a escolha dos pontos para o traçado.

Destacamos a simetria entre as curvas das funções exponenciais e suas respectivas inversas logarítmicas, apresentada como característica destas curvas.

2.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE A FORMA DE APRESENTAÇÃO DO ESBOÇO DE CURVAS NOS LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS

Constatamos que o procedimento dominante no esboço de curvas das funções afim, quadrática, seno, cosseno, exponencial e logarítmica é o que Duval (1988) nomeia de procedimento por pontos.

A simetria é apresentada como uma característica entre os gráficos da função exponencial e logarítmica nas três coleções, mas não é utilizada como uma propriedade figural que permite o traçado de uma curva, tendo por base o traçado da inversa.

Apenas o autor Dante (2004) se utiliza da translação no traçado de funções quadráticas e de funções senóides. Nestas últimas, o autor apresenta exemplos onde o esboço da curva é feito via tabela de pontos e posteriormente repete os mesmos exemplos tomando por base a curva da função $y = \text{sen } x$, se utilizando da translação e de modificações de elementos da função (período, imagem) para realizar o esboço de outras senóides, todavia não generaliza a utilização desta forma de proceder, que aparece restritamente em alguns exercícios resolvidos apresentados.

Dessa forma, apesar do uso da simetria e da translação, não podemos dizer que o procedimento utilizado pelos autores caracteriza-se como o que Duval (1988) nomeia como “interpretação global das propriedades figurais”, pois não se baseia no uso de operações em um dos registros verificando as modificações em outro paralelamente a fim de generalizar os resultados obtidos, ficando aquém da realização de uma atividade de conversão, que em se tratando do esboço de curvas, para se concretizar, precisa da relação entre as variáveis visuais da representação gráfica e as unidades simbólicas presentes na expressão algébrica, a fim de que sejam reconhecidas, em conjunto, as modificações nos dois registros, conforme realizou Duval (1988) para o esboço de retas, apresentado no capítulo anterior.

Capítulo III

Uma abordagem diferente para o esboço de curvas

Nos primeiros quatro tópicos deste capítulo, descreveremos alguns conceitos importantes que farão parte de nosso estudo. São eles: translação, simetria, funções pares e funções ímpares e função inversa.

Posteriormente, apresentaremos uma abordagem do esboço de curvas de algumas funções que se servirá desses conceitos e de uma curva a qual será utilizada como base para a obtenção de outras que pertencem a um mesmo grupo, considerando propriedades figurais específicas de cada grupo de funções.

Os grupos abordados neste estudo e que serão definidos mais à frente, são das funções dos tipos: senóide, cossenóide, exponencial e logarítmica.

3.1 TRANSLAÇÃO

Segundo Moretti (2003), o uso da noção de translação no esboço de curvas pode contribuir para que seja mais perceptível a relação entre a expressão algébrica e o gráfico, tanto no esboço de parábolas conforme apresentado por ele, quanto no esboço de outras curvas. Vamos então verificar a noção de translação para posteriormente aplicá-la no esboço das curvas integrantes da nossa pesquisa.

Em geometria analítica, podemos definir tanto a translação dos eixos coordenados quanto de figuras localizadas no plano cartesiano.

Observemos a noção de translação dos eixos:

> Consideremos um par de eixos coordenados retangulares no plano, com origem *O*. Se um novo eixo dos *y* for escolhido paralelo a *OY*, passando pelo ponto *(a, 0)*, onde *a* pode ser positivo ou negativo, então o ponto *P*, cujas coordenadas eram *(x, y)* em relação aos eixos originais, terá coordenadas *(x – a, y)* em relação aos novos eixos.(MURDOCH, 1971, p. 59)

Analogamente, podemos considerar que, se um novo eixo dos *x* for escolhido paralelo a *OX*, passando pelo ponto *(0, b)*, onde *b* pode ser positivo ou negativo, então o ponto *P*, cujas coordenadas eram *(x, y)* em relação aos eixos originais, terá coordenadas *(x, y – b)* em relação aos novos eixos.

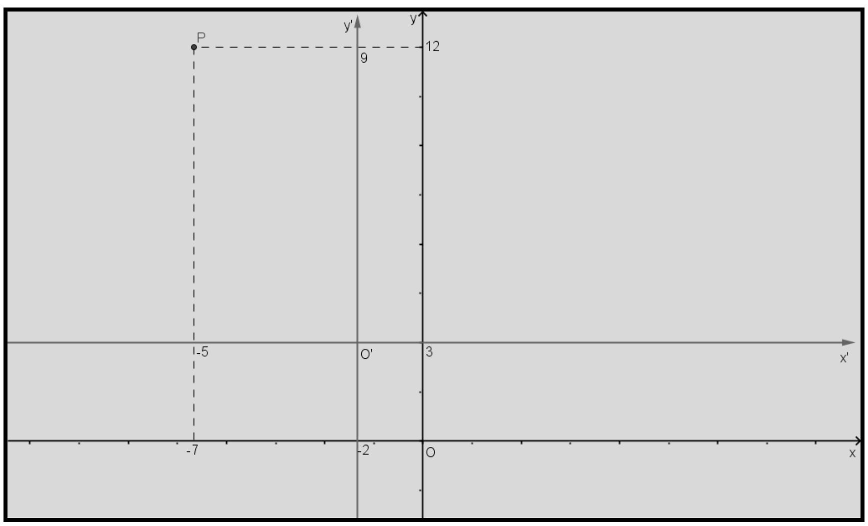
Dessa forma, concluímos conforme Murdoch (1971) que:

> Se a origem for mudada para o ponto *O'(a, b)* e os novos eixos de coordenadas são paralelos e têm as mesmas orientações dos respectivos eixos originais, as novas coordenadas do ponto *P(x, y)* serão *(x',y')* onde *x' = x – a, y' = y – b.*

> A mudança dos eixos de coordenadas *OX, OY* para os eixos *O'X', O'Y'* é chamada de ***translação dos eixos*** e as equações acima relacionam as coordenadas de um ponto arbitrário *P* em relação aos dois pares de eixos. (p.60)

Suponhamos por exemplo um sistema de eixos transladados, onde a origem *O'* seja o ponto (-2,3). Em relação ao sistema de origem *O*, o eixo *OY* foi transladado duas unidades para a esquerda e o eixo *OX*, três unidades para cima. Logo, qualquer ponto terá abscissa aumentada em duas unidades e a ordenada subtraída de três unidades no novo sistema, o que pode ser constatado com o uso das equações de *x'* e *y'*. Para verificar, consideremos o ponto P de coordenadas (-7,12) no sistema de origem *O*. Não é difícil perceber (usando as equações de *x*' e *y*') que no sistema de origem *O'* suas coordenadas serão (-5,9), conforme ilustra a figura 3.1.

Figura 3.1



No entanto, se ao invés de um único ponto tomarmos uma curva, então todos os pontos pertencentes a ela sofrerão a modificação de suas coordenadas, quando consideramos o sistema de origem *O'*.

Todavia, Moretti (2003) afirma que o efeito é o mesmo se optarmos por transladar a curva em sentido contrário ao que usaríamos para transladar os eixos e a opção de transladar a curva pode parecer "mais natural" devido a questões de congruência semântica. Por esse motivo, optaremos em nosso estudo em considerar a translação da curva e não dos eixos.

Assim, reportando-nos ao exemplo anterior, ao invés de transladarmos os eixos poderíamos deslocar o ponto em sentido contrário, ou seja, duas unidades para a direita e três unidades para baixo e obteríamos as novas coordenadas (-5, 9) para o ponto, mantendo o sistema de eixos. O processo ocorrerá analogamente para uma curva, se considerarmos a translação de uma curva como sendo a translação conjunta, de todos os pontos pertencentes a ela.

Para exemplificar, acompanhemos a translação da curva[6] $y = \sqrt{x}$ no plano cartesiano de três diferentes formas:

Figura 3.2 – f_1: curva $y = \sqrt{x}$, f_2: curva $y = \sqrt{x}$ transladada uma unidade para a direita.

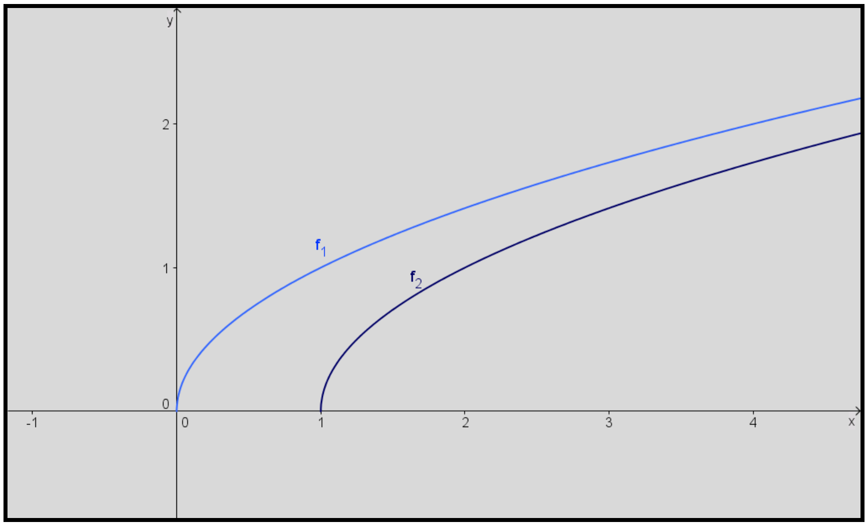
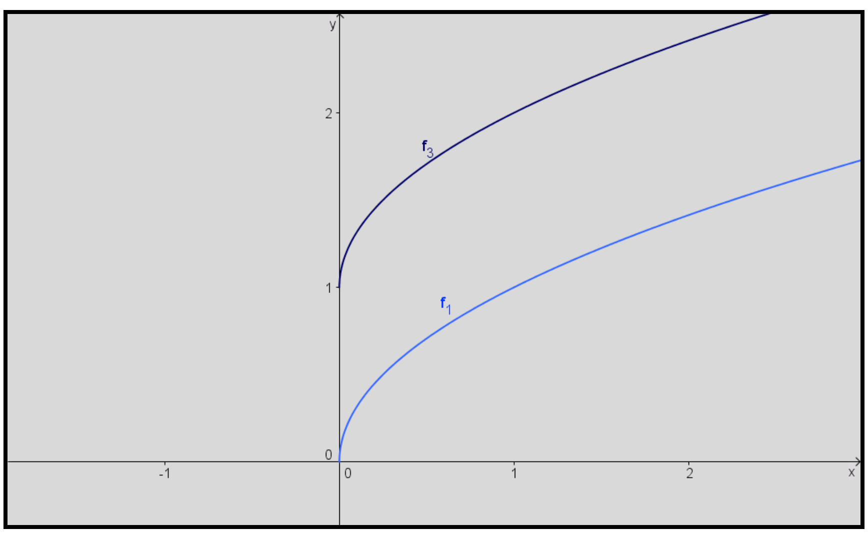
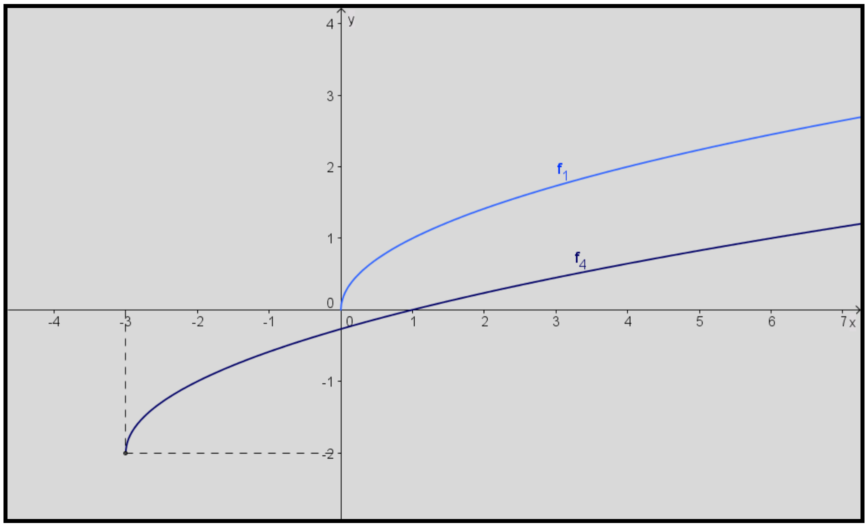


Figura 3.3 - f_1: curva $y = \sqrt{x}$, f_3: curva $y = \sqrt{x}$ transladada uma unidade para cima.



[6] Quando dizemos a translação da curva $y = \sqrt{x}$, estamos nos referindo à curva cuja expressão algébrica correspondente é $y = \sqrt{x}$. Referiremo-nos diversas vezes à curva usando diretamente a expressão, por questões de praticidade.

Figura 3.4 - f_1: curva $y = \sqrt{x}$, f_4: curva $y = \sqrt{x}$ transladada três unidades para a esquerda e duas unidades para baixo.



Nos exemplos vistos, observa-se que as curvas transladadas não mudam de forma, apenas movem-se no plano, pois “uma translação tem por efeito, mover cada ponto de uma figura pela mesma distância, na mesma direção [...] é uma transformação do plano, tal que a imagem de cada ponto *(a,b)* seja o ponto *(a+h,b+k)*, onde *h* e *k* são dados” (RICH, 2003, p. 317). Sendo assim, “uma translação fica definida quando se conhecem três características deste deslocamento: a direção, o sentido e a amplitude” (PUTNOKI, 1991, p.7).

A definição apresentada por Rich (2003) é válida para curvas em qualquer plano, inclusive no plano *cartesiano*. No entanto, se estivermos trabalhando uma translação no plano cartesiano, para facilitar o nosso estudo, podemos considerar que uma curva C’ representa a translação de uma curva C se a imagem de cada ponto expresso na equação de C pelas coordenadas x e y for um ponto que, na equação de C’, tiver suas coordenadas expressas por *x-h* e *y-k* ou, *x+h* e *y+k* que poderá ser representado de maneira única, conservando o sinal ‘-’ e, segundo Moretti (2003), sendo semanticamente mais congruente se usarmos as representações $x - {}^{\pm}h$ e $y - {}^{\pm}k$, conforme vimos no capítulo I. Seguindo essa notação, as expressões algébricas das curvas que são translações de $y = \sqrt{x}$ vistas nas figuras 3.2, 3.3 e 3.4 são respectivamente: $y = \sqrt{x - {}^{+}1}$, $y - {}^{+}1 = \sqrt{x}$, $y - {}^{-}2 = \sqrt{x - {}^{-}3}$.

3.2 SIMETRIA

A simetria é uma transformação do plano do tipo reflexão. Mas o que é uma reflexão?

> Uma reflexão na reta *m* é uma transformação do plano, tendo a propriedade de a imagem de qualquer ponto *S*, fora de *m*, ser *S'*, onde *m* é o bissetor perpendicular de *SS'*; a imagem de qualquer ponto *O* sobre *m* será o próprio *O*. (RICH, 2003, p. 312)

A reflexão de uma figura por simetria pode ser de duas formas distintas: "linear e pontual" (RICH, 2003, p.313). Na primeira, a figura será sua própria imagem, sob uma reflexão em uma reta, também chamada *eixo de simetria*. Na segunda, a reflexão se dá por um ponto (digamos P), de maneira que a imagem de qualquer ponto Q da figura seja Q' tal que a distância de P a Q seja a mesma de P a Q'.

Em nosso estudo consideraremos a simetria linear[7] presente como propriedade figural de algumas curvas, onde serão considerados os eixos X e Y e a reta $y = x$ como eixos de simetria, bem como a simetria pontual a partir da Origem do sistema cartesiano.

3.3 FUNÇÕES PARES E FUNÇÕES ÍMPARES

Ao analizarmos os livros didáticos de ensino médio quanto à forma de apresentar o esboço de curvas, objetivo do nosso estudo no capítulo anterior, percebemos que o domínio das funções analisadas é, em geral o conjunto $\mathbb{R}$, ou, no caso das funções trigonométricas, em alguns momentos, considera-se o intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ como tal. Em ambos os casos, os domínios considerados são simétricos, ou seja, para todo número real pertencente ao domínio da função, temos que o seu oposto (ou simétrico) também pertence a ele. Logo, é pertinente abordarmos os conceitos de função par e de função ímpar como elementos de auxílio em nosso estudo.

Segundo Fernandez e Yossef (1994):

> Uma função será denominada par se para todo x do domínio ocorrer: f(x) = f(-x). Isso significa que, numa função par, valores simétricos do domínio têm mesma imagem. (p.45)
> Uma função será chamada ímpar se para todo x do domínio ocorrer: f(-x) = -f(x). Dessa forma, toda função ímpar associará a valores simétricos imagens simétricas. (p.46)

Esses conceitos trazem, graficamente, duas características importantes quando nos remetemos ao esboço das curvas de funções desses tipos: o gráfico de qualquer função par apresenta simetria linear em relação ao eixo Y e o gráfico de qualquer função ímpar, apresenta simetria pontual em relação ao ponto (0,0) que é a origem do sistema

[7] Denominada também simetria axial por outros autores.

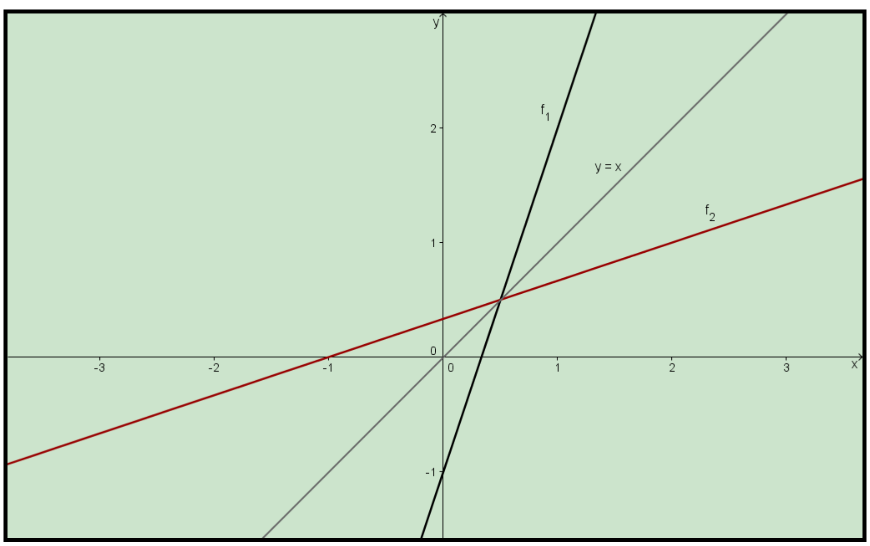
cartesiano. Essas propriedades figurais serão importantes ao tratarmos de esboço das curvas das funções seno e cosseno, pois essas são, respectivamente, função ímpar e função par.

3.4 FUNÇÕES INVERSAS

Segundo Iezzi e Murakami(1993) uma função inversa é definida assim: "Se *f* é uma função bijetora de *A* em *B*, a relação inversa de *f* é uma função de *B* em *A* que denominamos *função inversa de f* e indicamos por f^{-1}."(p. 235)

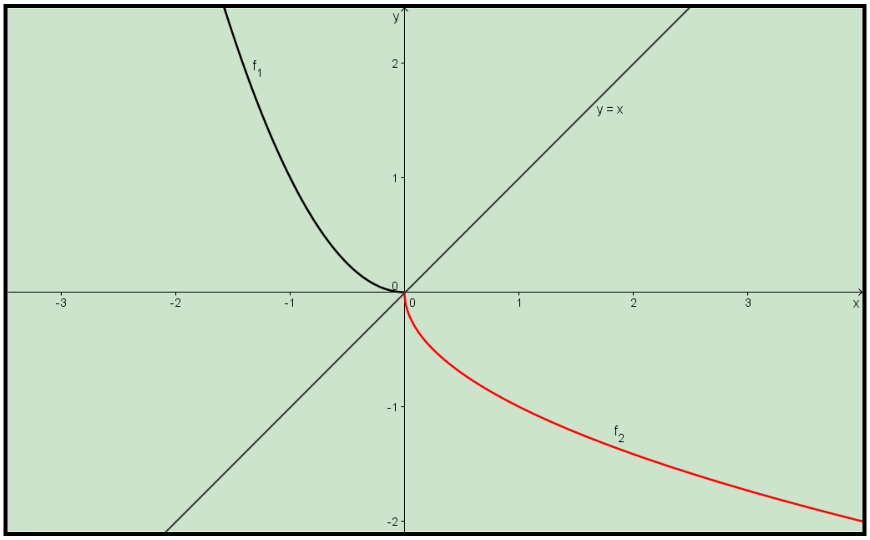
Uma propriedade que surge como consequência dessa definição é que funções inversas possuem curvas simétricas em relação à reta $y = x$, bissetriz do primeiro e terceiro quadrante, quando esboçadas no plano cartesiano. Tomemos como exemplo as funções inversas de domínio e contradomínio real definidas pelas leis $f_1(x) = 3x - 1$; $f_2(x) = \frac{x+1}{3}$. A figura 3.5a mostra a simetria entre suas curvas no plano cartesiano em relação à reta $y = x$.

Figura 3.5a – $f_1(x) = 3x - 1$; $f_2(x) = \frac{x+1}{3}$



Um outro exemplo de funções inversas são: $f_1 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+, f_1(x) = x^2$ e $f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, f_2(x) = -\sqrt{x}$. A figura 3.5b mostra a simetria entre suas curvas no plano cartesiano em relação à reta $y = x$.

Figura 3.5b – $f_1 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+, f_1(x) = x^2$ e $f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, f_2(x) = -\sqrt{x}$



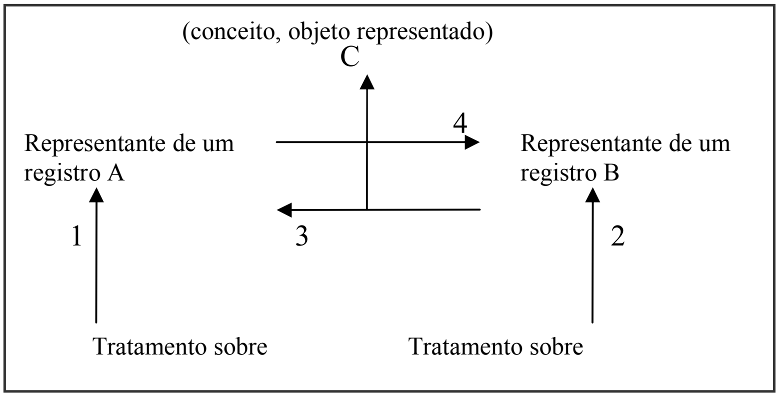
Esta propriedade nos auxilia no esboço de curvas de funções logarítmicas, uma vez conhecido o esboço da sua inversa, a função exponencial ou vice-versa. Sendo assim, se conhecermos por exemplo a curva da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $y = 2^x$, usando simetria linear em relação à reta $y = x$, podemos esboçar o gráfico da função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $y = \log_2 x$, conforme veremos mais à frente. Desta maneira estaremos priorizando propriedades da curva conforme preconiza Duval (1988) e nos distanciando sempre que possível da repetição do *procedimento por pontos* (DUVAL,1988, p. 236)

3.5 A PROPOSTA

Como vimos no primeiro capítulo, Duval(1993) coloca como hipótese fundamental que o estudante seja capaz de coordenar pelo menos dois registros de representação de um mesmo objeto para que possa compreendê-lo e além disso é através da atividade de conversão que essa compreensão é verificada.

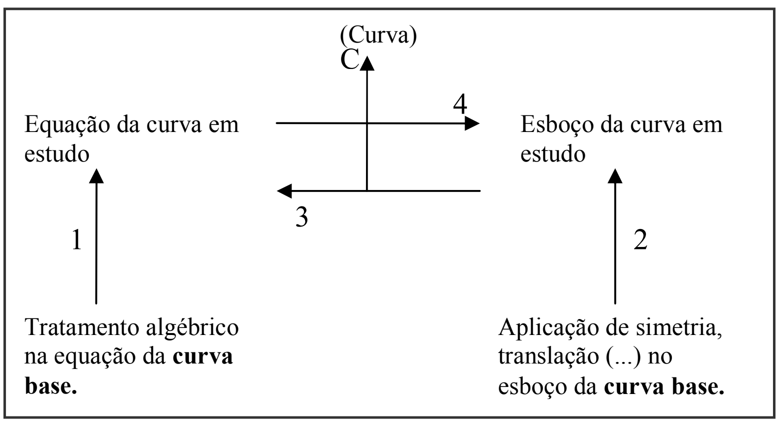
Duval(2004, p. 68) representa essa hipótese usando o seguinte modelo:

Figura 3.6a



Observando o modelo de Duval, criamos um modelo que mostra especificamente os tratamentos e os registros de representação que utilizaremos em nossa proposta voltada para o esboço de curvas.

Figura 3.6b



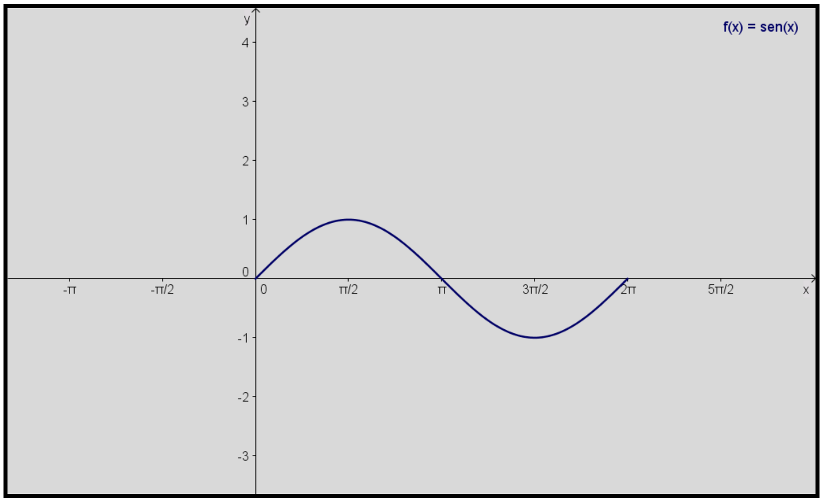
3.6 O ESBOÇO DE CURVAS DO GRUPO DAS FUNÇÕES DO TIPO SENÓIDE E COSSENÓIDE

Vamos abordar o esboço de curvas das funções do tipo senóide que aqui definiremos, como sendo as funções que têm como equação algébrica $y = \pm a + b \operatorname{sen}(kx \pm c)$, sendo $a,b,k,c \in \mathbb{R}$.

Nessa abordagem verificaremos quais modificações nos coeficientes da expressão algébrica da curva refletem em modificações no esboço do gráfico.

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = \operatorname{sen} x$ é a função que associa a cada $x \in \mathbb{R}$, um número $y \in \mathbb{R}$ que corresponde ao seno de x. Esta função é periódica de período 2π em todo o seu domínio, mas vamos nos limitar, inicialmente à sua representação utilizando apenas os valores de x pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$, como costumam apresentar os livros didáticos de ensino médio. Assim, temos o seguinte esboço da curva $y = \text{sen } x$, também chamada senóide:

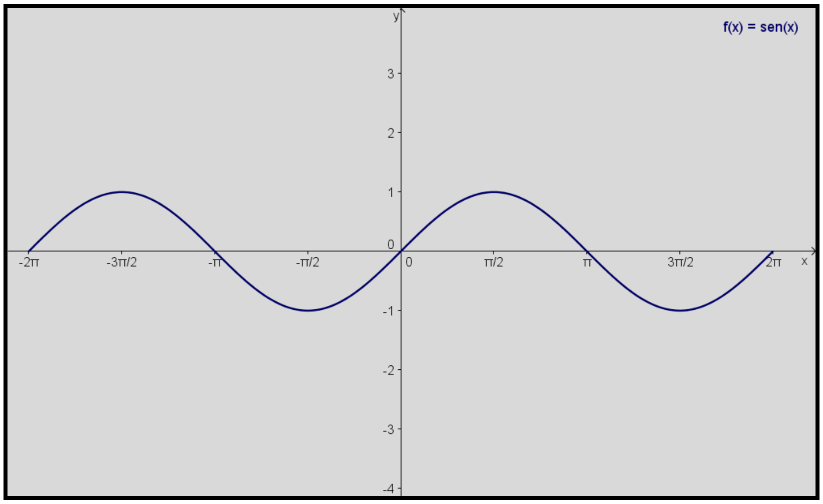
Figura 3.7



Para conhecermos esse esboço inicial, trabalhando com alunos em nível médio, podemos recorrer ao uso da tabela de pontos conforme apresentam os livros didáticos. A partir deste, conhecendo propriedades figurais da curva, faremos uso delas tanto para conhecermos a curva à esquerda do eixo Y, quanto para as demais curvas do tipo senóide.

Conforme visto anteriormente, a função seno é uma função ímpar, pois, se consideramos $\mathbb{R}$ como domínio, para todo x real: $f(x) = -f(-x)$, ou seja, sen(x)=-sen(-x). Logo, poderemos considerar a simetria em relação à origem do sistema cartesiano e assim obtermos o gráfico da função seno no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, conhecendo a representação gráfica também à esquerda do eixo Y:

Figura 3.8



Essa curva servirá de base no esboço das demais curvas do grupo das senóides aqui analisadas.

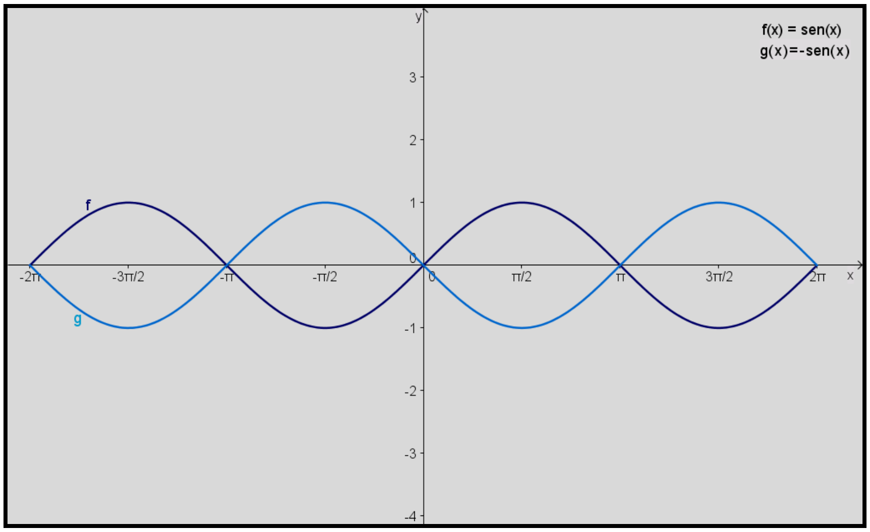
Analisaremos agora o esboço de outras curvas deste grupo. Primeiramente em exemplos onde variaremos os coeficientes um a um. Após esta análise, partiremos para exemplos onde todos os coeficientes são valores reais não nulos.

3.6.1 y = b sen x   b $\in \mathbb{R}^*$, b $\neq$ 1

Iniciaremos analisando o caso particular onde $b = -1$, ou seja, y = - sen x .

Esta função associa a cada x pertencente ao domínio da função, o valor oposto ao do seno de x. Então a função assumirá para cada valor do seu domínio, valores opostos aos assumidos pela função y = sen x . Sendo assim, a partir do esboço da curva y = sen x podemos obter por simetria em relação ao eixo X, o gráfico de y = - sen x conforme ilustra a figura 3.9.

Figura 3.9 – f: curva y = sen x , g: curva y = - sen x .



Se considerarmos $b \neq -1$ e compararmos as curvas que têm diferentes valores de *b* na expressão algébrica com a curva de y = sen x , perceberemos que este coeficiente altera a amplitude do gráfico, ou seja, altera a distância vertical entre os seus valores máximos e mínimos. Conseqüentemente influencia também na imagem da função. Enquanto y = sen x , tem por imagem os valores de y pertencentes ao intervalo [-1,1] e amplitude igual a 2, y = 2 sen x tem por imagem os valores de y pertencentes ao intervalo [-2,2] e amplitude igual a 4 e $y = \frac{1}{2} \text{sen } x$ tem por imagem os valores de y pertencentes ao intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ e amplitude igual a 1. Conforme podemos observar nas figuras:

Figura 3.10 – f: curva $y = \text{sen } x$, g: curva $y = 2 \text{ sen } x$.

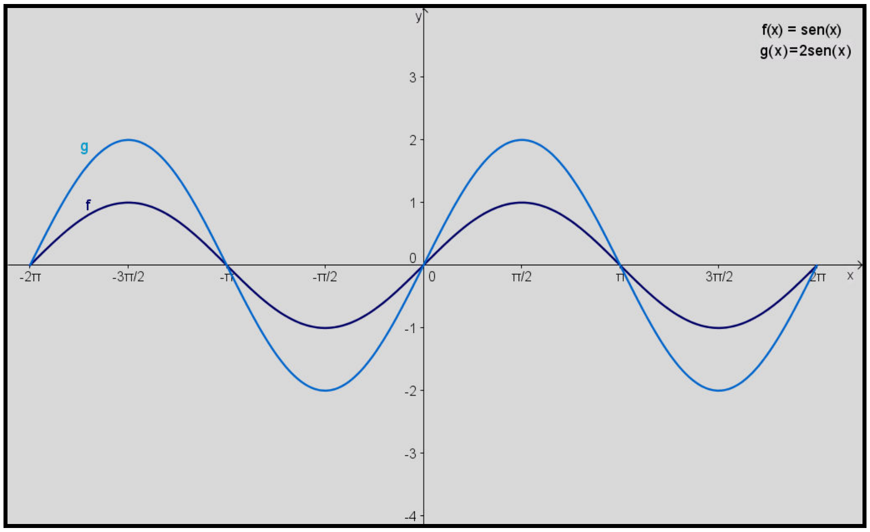
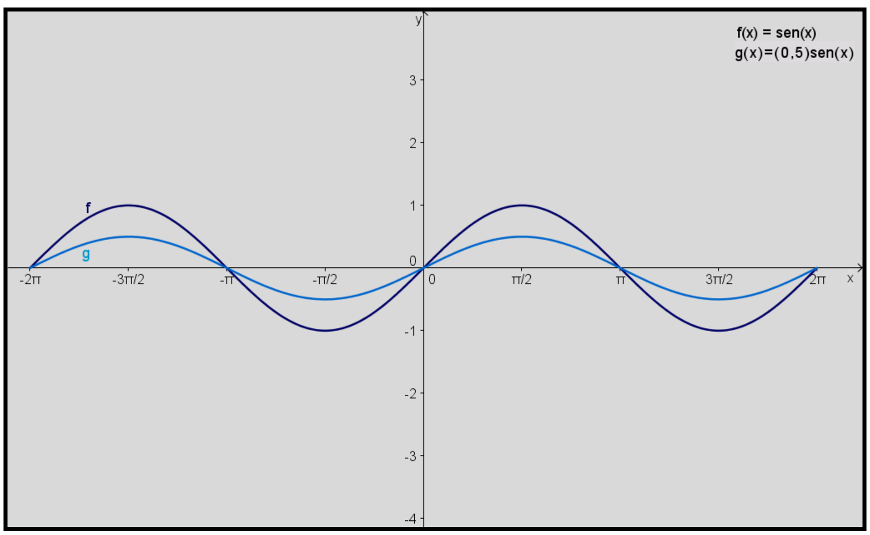


Figura 3.11 - f: curva $y = \text{sen } x$, g: curva $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$.



De um modo geral, $y = b \text{ sen } x$ tem por imagem os valores de y pertencentes ao intervalo [-b, b] e amplitude 2b se b for um número real positivo, ou tem por imagem os valores de y pertencentes ao intervalo [b, -b] e amplitude |2b| se b for um número real negativo. Logo, a modificação do coeficiente *b*, altera o tamanho do intervalo imagem, mas preserva a simetria do mesmo.

Notamos que há congruência semântica entre o coeficiente *b* da expressão algébrica e a amplitude da curva, propriedade figural associada a ele.

Vale ressaltar que se o coeficiente *b* for negativo, a curva poderá ser obtida graficamente a partir da curva $y = -\text{ sen } x$, ou a partir da curva que tem o coeficiente *b* oposto, neste caso usando simetria em relação ao eixo x, conforme apresentamos a obtenção da curva de $y = -\text{sen } x$ tendo por base a curva de $y = \text{sen } x$.

Para exemplificar vamos mostrar a obtenção de $y = -2 \text{ sen } x$ a partir de $y = -\text{sen } x$ na figura 3.12. Em seguida mostraremos a mesma curva, mas obtida a partir de $y = 2 \text{ sen } x$, cujo coeficiente b é oposto na figura 3.13.

Figura 3.12 – g: curva $y = -\text{sen } x$, h: curva $y = -2 \text{ sen } x$.

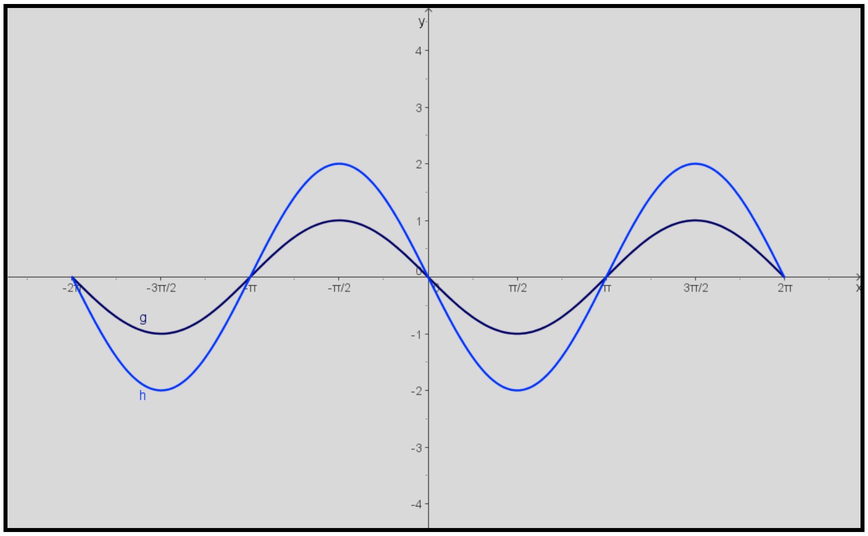
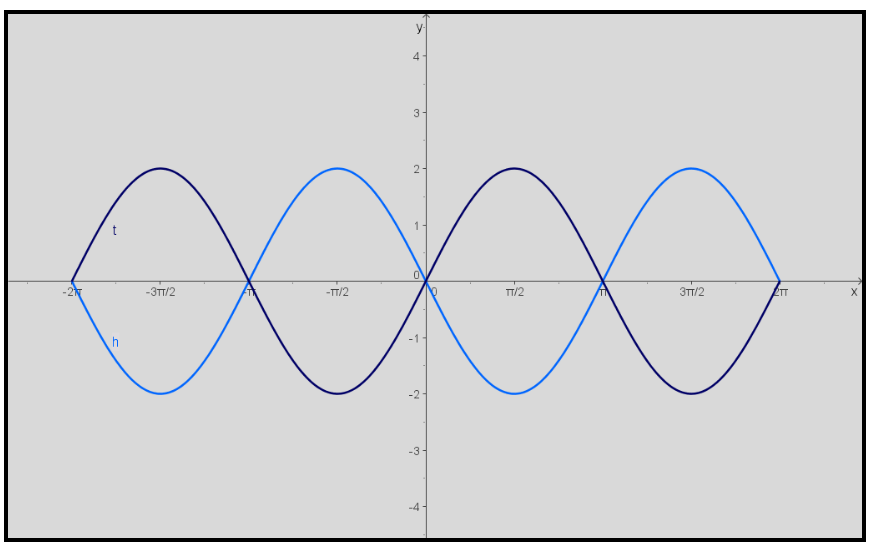


Figura 3.13 – t: curva $y = 2 \text{ sen } x$, h: curva $y = -2 \text{ sen } x$



3.6.2 $y = \pm a + \text{senx}$ $a \in R^*$

Aplicando tratamento algébrico, podemos escrever a expressão dessa curva da seguinte maneira:

$y - {}^{\pm}a = \text{sen } x$

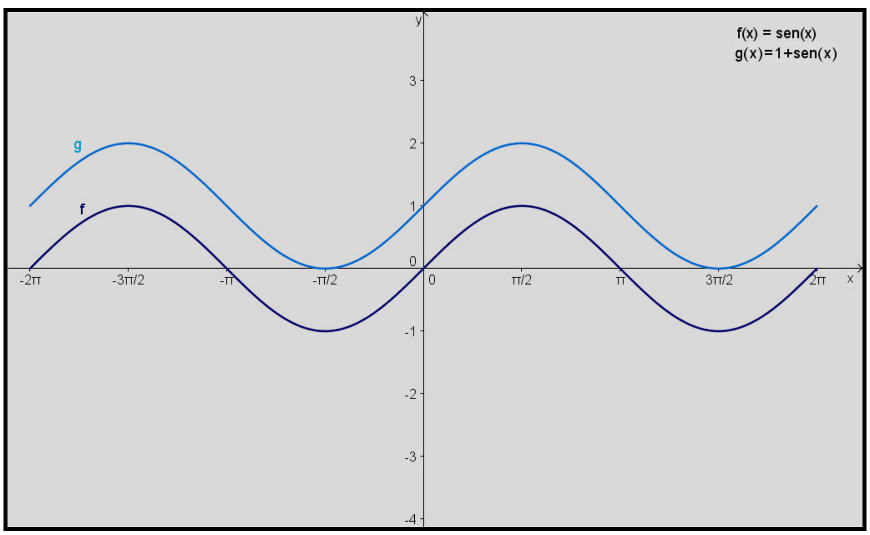
A expressão $y - {}^{+}a = \text{sen } x$ nos indica uma translação vertical da curva $y = \text{sen } x$, neste caso, de *a* unidades acima do eixo X. Logo, o coeficiente *a* influencia na imagem da função e, deslocando a curva verticalmente, desloca também o seu intervalo imagem.

Assim, se *a* for um número real positivo, resultará em uma translação de *a* unidades para cima do eixo X da curva $y = \text{sen } x$ e se *a* for um número real negativo, resultará em uma translação de *a* unidades para baixo do eixo X, desta mesma curva. Mantendo a mesma notação do coeficiente a na curva para o intervalo imagem, temos que a imagem da curva deslocada será $[-1 \pm a, 1 \pm a]$.

Para exemplificar vejamos os casos onde *a* = 1 e *a* = -1.

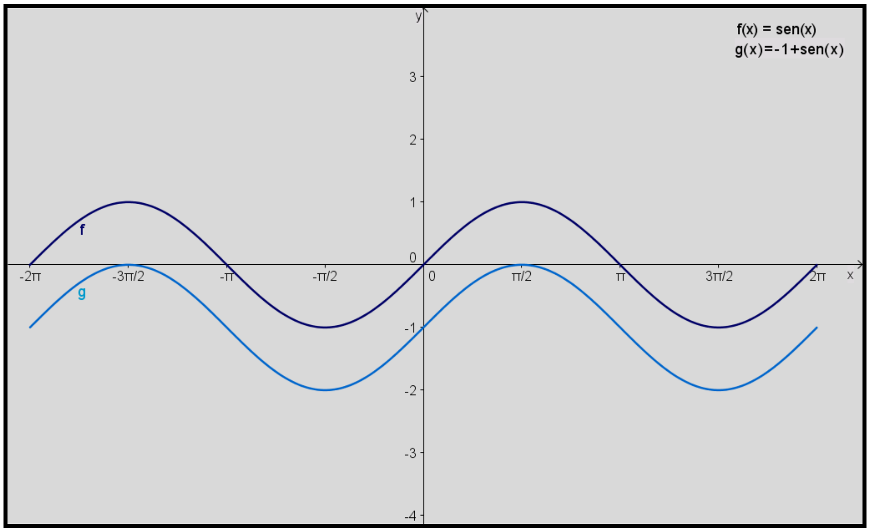
A expressão $y = 1 + \text{sen } x$ pode ser escrita na forma $y - {}^{+}1 = \text{sen } x$ que evidencia a translação vertical da curva no sentido para cima. O intervalo imagem desta curva é [-1+1,1+1], ou seja, [0, 2].

Figura 3.14 – f: curva $y = \text{sen } x$, g: curva $y - {}^{+}1 = \text{sen } x$.



Caso análogo ocorre com $y = -1 + \text{sen } x$ que pode ser escrita na forma $y - {}^{-}1 = \text{sen } x$ evidenciando a translação vertical da curva no sentido para baixo, seu intervalo imagem é [-1-1, 1-1], ou seja, [-2,0].

Figura 3.15 - f: curva $y = \text{sen } x$, g: curva $y - {}^{-}1 = \text{sen } x$.



3.6.3 y = sen kx $k \in R^*$

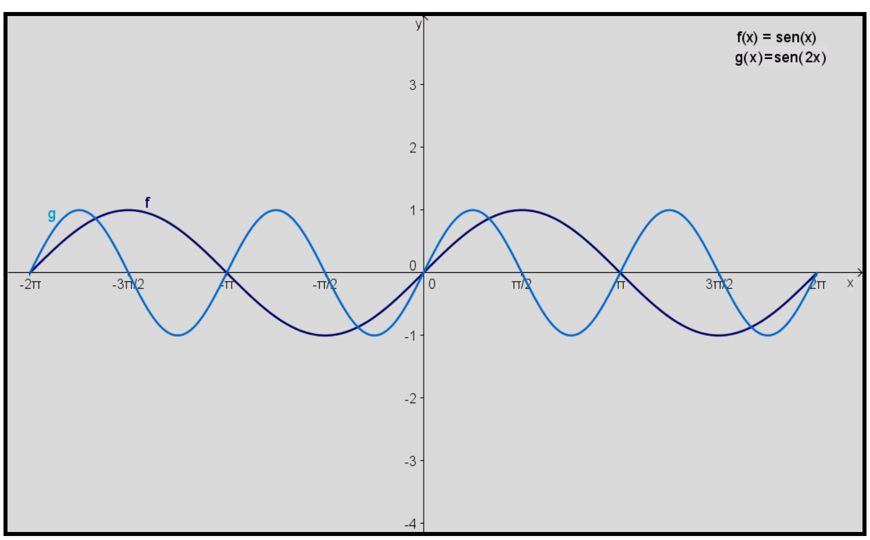
A função $y = \text{sen } x$ é uma função periódica de período 2π.

"Dizemos que uma função é periódica se existe um número real T≠ 0 tal que f(x + T) = f(x). O gráfico de uma função periódica se repete a cada intervalo de comprimento |T|." (FLEMMING e GONÇALVES, 1992, p. 41)

No caso da função seno, dizemos que a curva se repete a cada intervalo de comprimento 2π.

A variável **k** altera o período da curva. Vejamos o que acontece quando k = 2, ou seja, com a curva $y = \text{sen } 2x$.

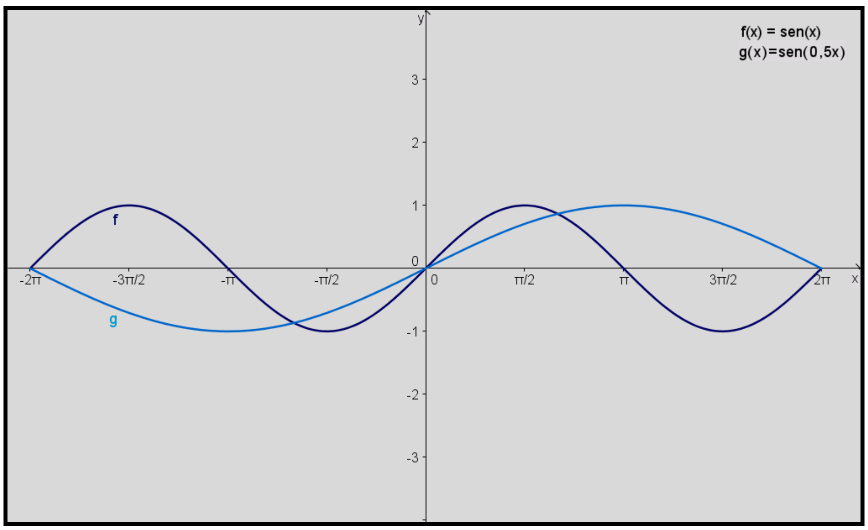
Figura 3.16 - f: curva $y = \text{sen } x$, g: curva $y = \text{sen } 2x$.



Se compararmos a curva $y = \text{sen } 2x$ à curva $y = \text{sen } x$, veremos que numa mesma região do plano cartesiano, conseguimos o dobro da curva, percebemos assim que o período de repetição foi reduzido à metade.

Para k = $\frac{1}{2}$ (0,5) temos a curva $y = \text{sen } \frac{1}{2}x$, observemos na figura 3.17 as alterações ocorridas ao modificarmos o valor da constante k de 1 para $\frac{1}{2}$.

Figura 3.17 - f: curva $y = \text{sen } x$, g: curva $y = \text{sen } \frac{1}{2}x$.



Em comparação a curva $y = \text{sen } \frac{1}{2}x$ à curva $y = \text{sen } x$, o período dobrou. Para uma mesma região do plano cartesiano temos apenas a metade da curva.

De um modo geral, para determinarmos o período T de uma curva qualquer do grupo das funções senóides, podemos usar a relação: $T = \frac{2\pi}{|k|}$. Logo, $0 < k < 1$ resulta em um período maior que 2π, enquanto $k > 1$ resulta em um período menor que 2π. Se o valor de k for negativo, a alteração do período será a mesma, porém teremos a curva simétrica em relação ao eixo X, àquela cujo valor de k for oposto.

3.6.4 y = sen (x $\pm$ c) $c \in R^*$

A variável **c** determina uma translação horizontal na curva, se a compararmos à curva $y = \text{sen } x$.

Se c > 0 teremos uma translação de c unidades para a *esquerda* e o sinal entre a variável x e o coeficiente c será o *sinal '+'*.

Se c < 0 teremos uma translação de c unidades para a *direita* e o sinal entre a variável x e o coeficiente c será o *sinal '-'*.

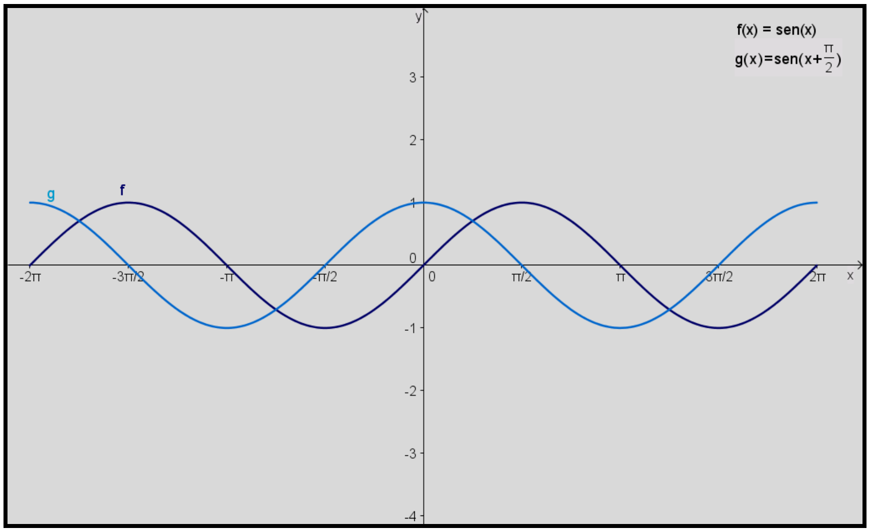
Observamos que não há uma relação direta entre o sinal do coeficiente e o sentido do deslocamento da curva de $y = \text{sen } x$ para a obtenção da curva de $y=\text{sen}(x \pm c)$, pois, o sinal '+' nos remete ao lado direito do eixo X enquanto o sinal '-' nos remete ao lado esquerdo devido à própria convenção da posição dos números na reta numérica o que não acontece nesta conversão. Sendo assim, esta transformação da expressão algébrica na representação gráfica requer maiores cuidados no sentido de se diminuir os problemas de congruência semântica.

Para tanto, como se trata de uma translação, aplicaremos tratamento algébrico na expressão $y=\text{sen}(x \pm c)$, conservando o sinal '-' entre a variável *x* e o coeficiente *c* e teremos: $y=\text{sen}(x - {}^{\pm}c)$, mesma forma aplicada no item 3.5.2, quando a translação é vertical. Escrito dessa maneira o coeficiente c apresenta sinal diretamente relacionado ao sentido de deslocamento horizontal: se for negativo, a translação se dará para a esquerda e se for positivo, para a direita.

Como exemplo, vamos observar a obtenção das curvas de $y = \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ e $y = \text{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ a partir da curva de $y = \text{sen } x$ respectivamente conforme as figuras 3.18 e 3.19.

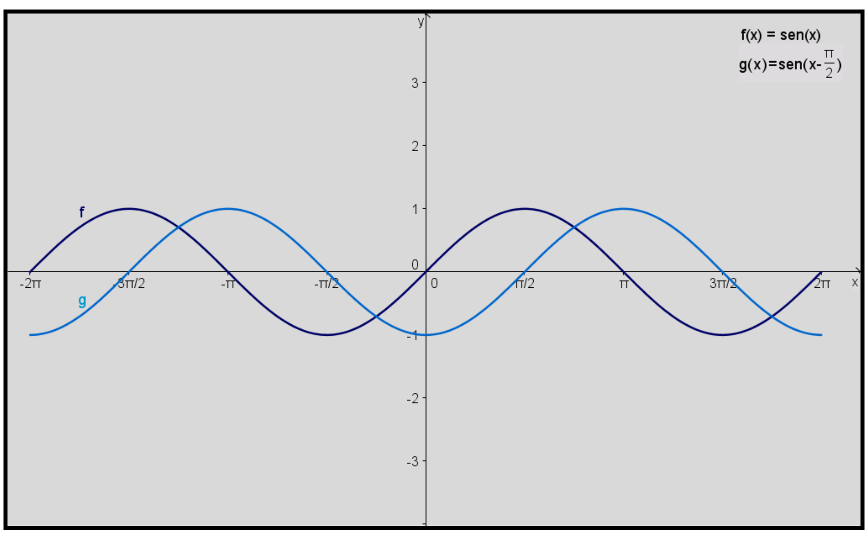
A expressão $y = \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ pode ser escrita como $y = \text{sen}\left(x - \frac{{}^{-}\pi}{2}\right)$ mostrando mais claramente uma translação de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda do eixo Y.

Figura 3.18 – f: curva $y = \mathrm{sen}\,x$, g: curva $y = \mathrm{sen}\left(x - {}^{-}\frac{\pi}{2}\right)$.



A expressão $y = \mathrm{sen}\left(x\text{-}\frac{\pi}{2}\right)$ pode ser escrita como $y = \mathrm{sen}\left(x - {}^{+}\frac{\pi}{2}\right)$ mostrando mais claramente uma translação de $\frac{\pi}{2}$ para a direita do eixo Y.

Figura 3.19 – f: curva $y = \mathrm{sen}\,x$, g: curva $y = \mathrm{sen}\left(x - {}^{+}\frac{\pi}{2}\right)$.



Essa forma de escrever a expressão algébrica da função expõe claramente o sentido e valor numérico do deslocamento, desde que k=1, ou seja, desde que tenhamos o argumento $(x \pm c)$. Para as equações onde $k \in R, k \neq 1$, deve-se aplicar tratamento algébrico para que seja possível determinar o valor e o sentido do deslocamento horizontal (neste caso não aparente), mas sem alterar a expressão:

$$kx \pm c = k\left(x \pm \frac{c}{|k|}\right) = k\left(x - \pm \frac{c}{|k|}\right)$$

Logo, se $k \in R, k \neq 1$, a translação horizontal da função é dada por $\pm \frac{c}{|k|}$, agora aparente na expressão algébrica tanto no valor quanto no sentido do deslocamento.

Até aqui, a trajetória desse tópico apontou os procedimentos utilizados para identificar as unidades cognitivas e as devidas variações para contemplar todas as alterações possíveis. São elas: variação da *amplitude* por modificação do coeficiente *b*, variação do *período* por modificação do coeficiente *k*, ambas provocando contrações ou expansões na curva, alterando "elasticamente" o seu formato. Variações de *deslocamento* por modificações do coeficiente *a*, na direção vertical, e também do coeficiente c em conjunto com o coeficiente k, na direção horizontal.

Dessa forma, com a compreensão dessas modificações garantimos que a atividade cognitiva de conversão seja contemplada ao esboçarmos o gráfico de uma senóide qualquer cuja equação tem a forma $y = \pm a + b\ \text{sen}\ (kx \pm c)$, processo no qual essas variações estarão presentes.

Para o grupo das funções cossenóides, definidas como $y = \pm a + b\cos(kx \pm c)$, basta considerarmos a curva da função $y = \cos x$, definida no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, como base para o esboço das demais curvas deste grupo, a qual poderá ser conhecida com o uso de uma tabela de pontos, no intervalo de $[0, 2\pi]$ (figura 3.20) e, após conhecida nesse intervalo, pode ser obtida no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ usando a simetria linear em relação ao eixo Y (figura 3.21).

Figura 3.20

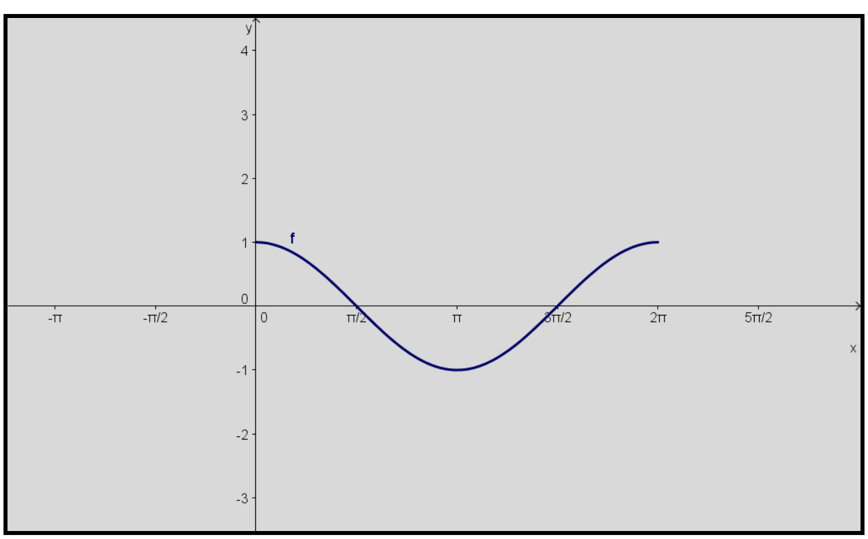
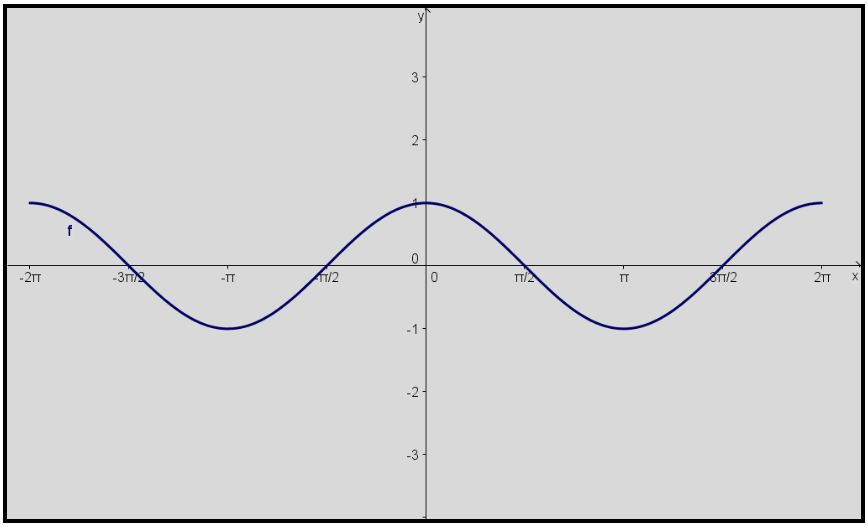


Figura 3.21



Além do uso de uma tabela de pontos, uma vez que já se tenha feito o estudo do esboço de curvas das funções do tipo senóides, a curva $y=\cos x$ pode ser conhecida como a translação da curva da função seno ($y=\text{sen}x$) em $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda no eixo X, ou seja, a curva da função $y=\cos x$ corresponde à curva $y = \text{sen}\left(x - {}^{-}\frac{\pi}{2}\right)$. Podemos observar este fato comparando a curva *g* da figura 3.18 com a curva da figura 3.21.

De modo geral, as alterações provocadas pela mudança em cada um dos coeficientes são análogas às do grupo das funções senóides. Destacamos apenas o fato da função cosseno ser par e por isso ter uma curva simétrica em relação ao eixo Y e não em relação à origem como ocorre com a função seno, por ser uma função ímpar.

Vejamos agora como obter o esboço de algumas curvas senóides e cossenóides tendo por base o esboço das curvas $y=\text{sen}x$ e $y=\cos x$ respectivamente.

3.6.5 Esboço de senóides do tipo $y = \pm a + b\ \text{sen}\ (kx \pm c)$ a partir de $y = \text{sen}\ x$

Exemplo 1: $y = 1 + 2\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

Primeiramente vamos aplicar tratamento algébrico em $y=1+2\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ a fim de podermos identificar as modificações figurais da curva que estão associadas aos coeficientes da equação algébrica, bem como a possibilidade do uso da translação.

$$y = 1 + 2\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

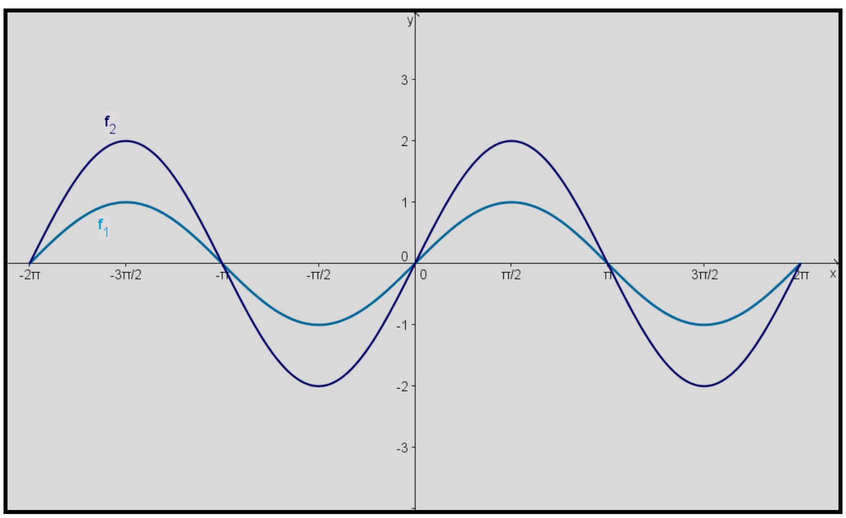
$$y - 1 = 2\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y -^{+} 1 = 2\text{sen}\ 2\left(x -^{+} \frac{\pi}{4}\right)$$

Partindo da curva $y = \text{sen}x$, vamos modificar um a um os coeficientes dessa expressão, a fim de obtermos a curva $y -^{+} 1 = 2\text{sen}\ 2\left(x -^{+} \frac{\pi}{4}\right)$, cuja expressão algébrica apresenta os coeficientes $a = {}^{+}1$, $b = 2$, $c = {}^{+}\frac{\pi}{4}$, $k = 2$,observando suas propriedades figurais.

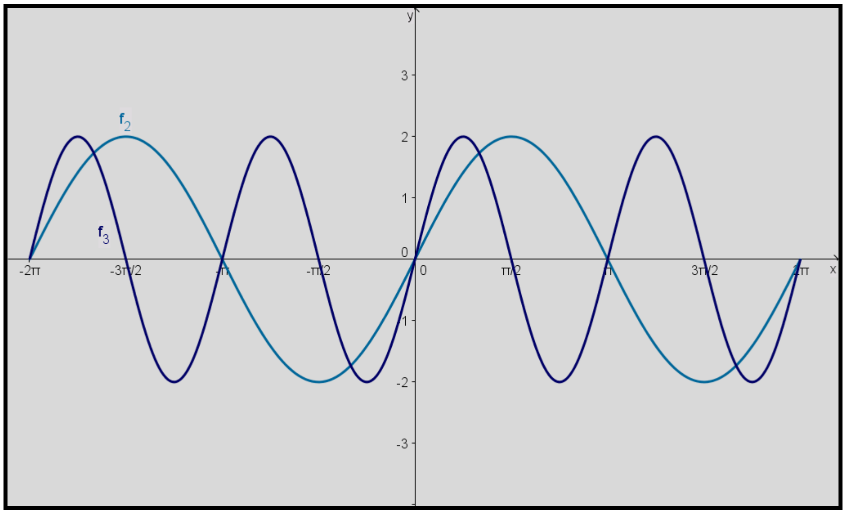
Tendo por base a curva $y = \text{sen}\ x$, traçamos a curva $y = 2\text{sen}\ x$. Sabemos que o coeficiente *b* altera a amplitude da curva. Neste caso, b = 2 alterará os valores máximos e mínimos da função de 1 e -1 para 2 e -2.

Figura 3.22a – f_1: curva $y = \text{sen}\ x$, f_2: curva $y = 2\text{sen}\ x$.



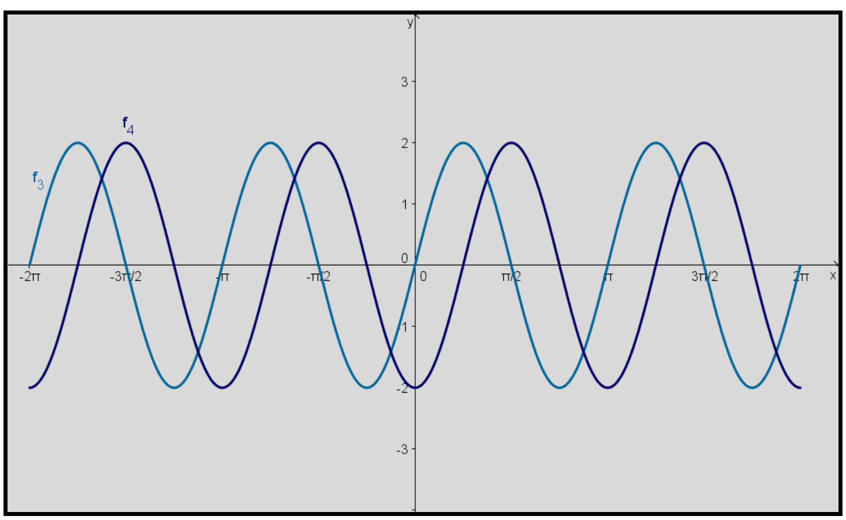
Partindo de $y = 2\ \text{sen}\ x$, esboçaremos a curva de $y = 2\ \text{sen}(2x)$, expressão na qual observamos a alteração do coeficiente *k* do valor 1 para o valor 2 que implicará em uma modificação visível graficamente no período da curva, de 2π para π, conforme ilustra a figura 3.22b:

Figura 3.22b – f_2: curva $y = 2\text{sen}\ x$, f_3: curva $y = 2\ \text{sen}(2x)$.



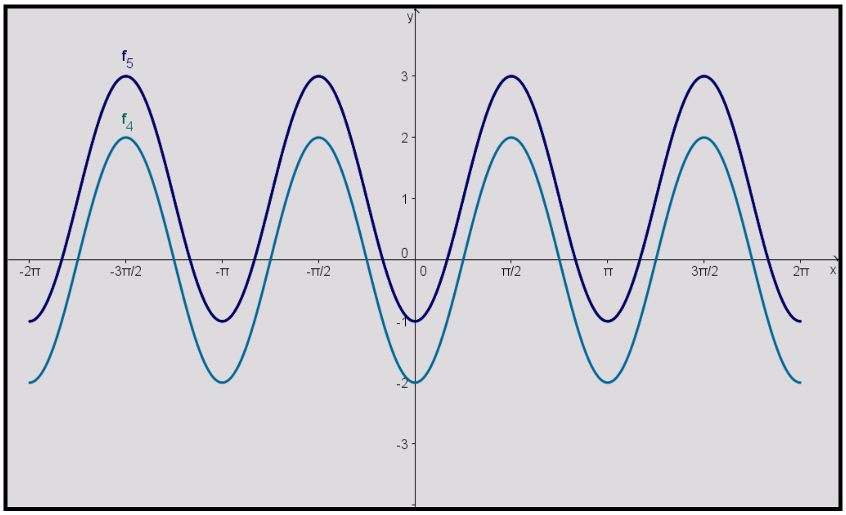
A expressão da curva a qual queremos esboçar evidencia uma translação de $\frac{\pi}{4}$ unidades para a direita. Logo, a partir da curva $y = 2\ \text{sen}(2x)$ chegaremos à curva $y = 2\ \text{sen}\ 2\left(x -^{+} \frac{\pi}{4}\right)$, aplicando esse deslocamento.

Figura 3.22c – f_3: curva $y = 2\ \text{sen}(2x)$, f_4: curva $y = 2\ \text{sen}\ 2\left(x -^{+} \frac{\pi}{4}\right)$.



Finalmente, para chegarmos ao gráfico de $y -^{+} 1 = 2\text{sen}\ 2\left(x -^{+} \frac{\pi}{4}\right)$, basta aplicarmos translação vertical de uma unidade para cima à curva de $y = 2\text{sen }2\left(x -^{+} \frac{\pi}{4}\right)$, esse deslocamento pode ser observado na próxima figura.

Figura 3.22d – f_4: curva $y = 2\text{sen }2\left(x -^{+} \frac{\pi}{4}\right)$, f_5: curva $y -^{+} 1 = 2\text{sen }2\left(x -^{+} \frac{\pi}{4}\right)$.



Na figura anterior, f_5 representa a curva que tem por expressão algébrica $y -^{+} 1 = 2\text{sen }2\left(x -^{+} \frac{\pi}{4}\right)$ ou, na representação em que foi enunciada, $y = 1 + 2\text{ sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$, obtida gradativamente a partir da curva de $y = \text{sen } x$.

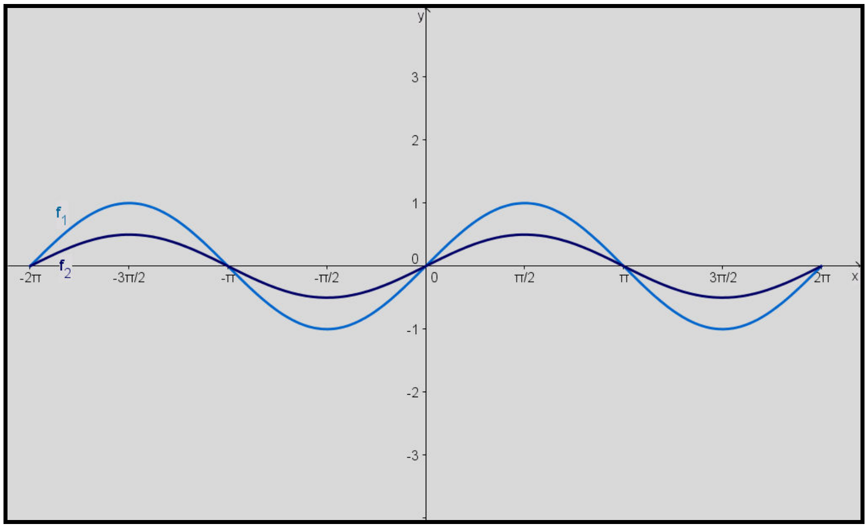
Exemplo 2: $\mathbf{y = -3 + \frac{1}{2}\text{ sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)}$

Aplicando tratamento algébrico na expressão $y = -3 + \frac{1}{2}\text{ sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$, podemos escrevê-la na forma $y - ^{-}3 = \frac{1}{2}\text{ sen } 3\left(x - ^{-}\frac{\pi}{12}\right)$ cujos coeficientes são: $a = ^{-}3$, $b = \frac{1}{2}$, $c = ^{-}\frac{\pi}{12}$ e $k = 3$.

Tendo como base a curva de $y = \text{sen } x$, usaremos as curvas de: $y = \frac{1}{2}\text{sen } x$, $y = \frac{1}{2}\text{sen } 3x$ e $y = \frac{1}{2}\text{sen } 3\left(x - ^{-}\frac{\pi}{12}\right)$, a fim de obtermos a curva de

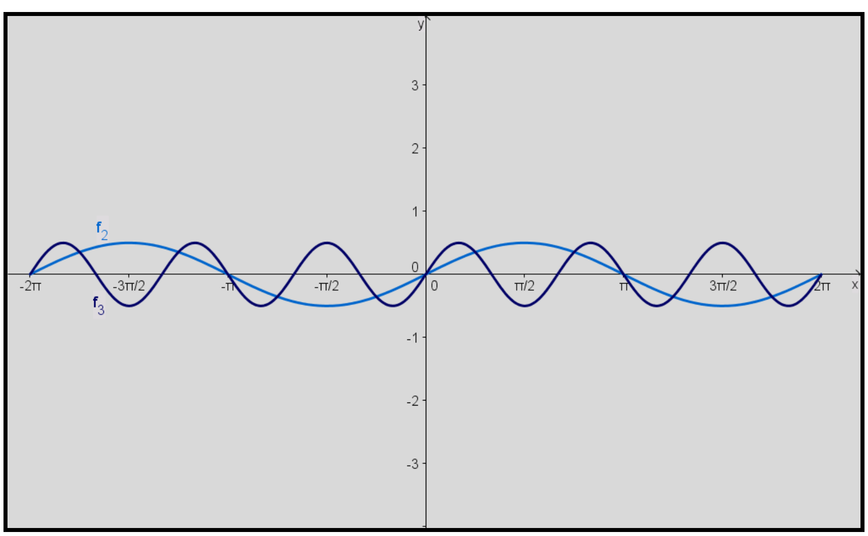
$y - {}^{-}3 = \frac{1}{2}\text{sen}\;3\left(x - {}^{-}\frac{\pi}{12}\right)$. Conforme pode ser observado a partir nas figuras:

Figura 3.23a – f_1: curva $y = \text{sen}x$, f_2: curva $y = \frac{1}{2}\text{sen}\;x$.



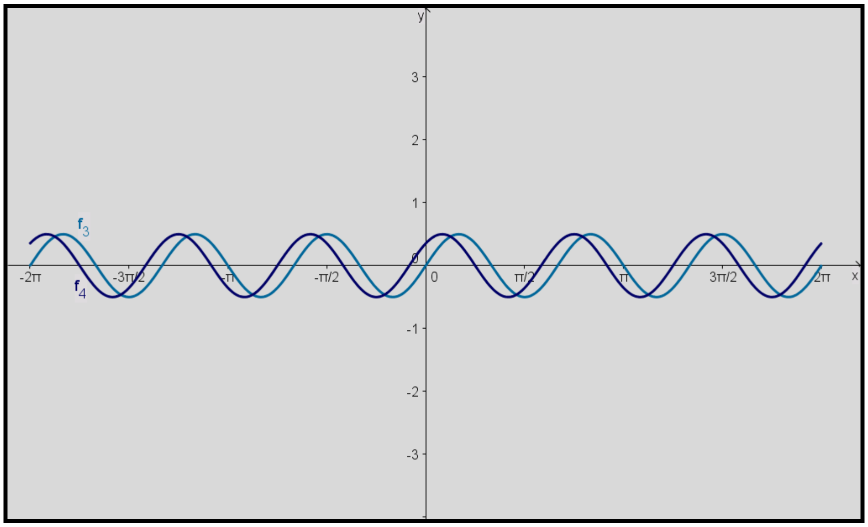
No esboço da curva $y = \frac{1}{2}\text{sen}\;x$, tendo por base $y = \text{sen}\;x$, notamos a redução da amplitude. Os valores máximos e mínimos que eram de 1 e -1 na curva base são agora $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ respectivamente.

Figura 3.23b – f_2 :curva $y = \frac{1}{2}\text{sen}\;x$, f_3 :curva $y = \frac{1}{2}\text{sen}\;3x$.



No esboço de $y = \frac{1}{2}\text{sen}\;3x$, o valor do coeficiente *k* foi alterado de 1 para 3, resultando na redução do período de 2π para $\frac{2\pi}{3}$.

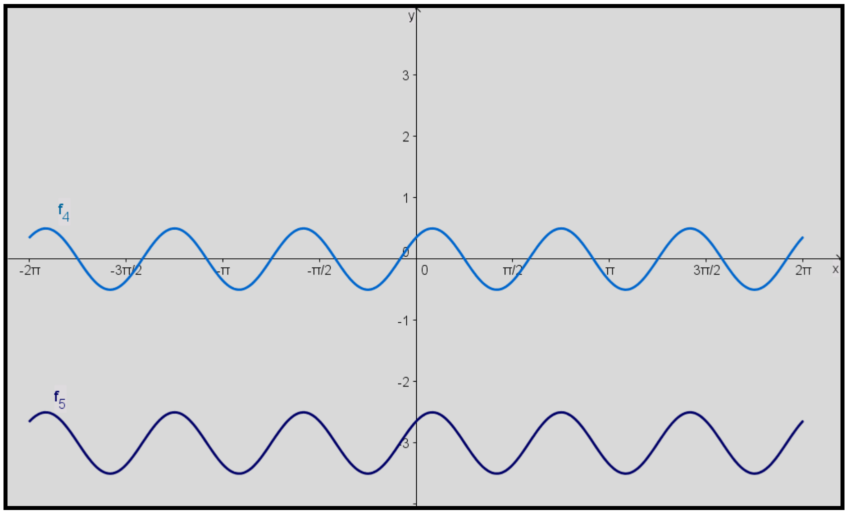
Figura 3.23c – f_3: curva $y = \frac{1}{2}\text{sen } 3x$, f_4 : curva $y=\frac{1}{2}\text{sen } 3\left(x - -\frac{\pi}{12}\right)$



Para obter $y = \frac{1}{2}\text{sen } 3\left(x - -\frac{\pi}{12}\right)$, a partir de $y = \frac{1}{2}\text{sen } 3x$, aplicamos uma translação horizontal de $\frac{\pi}{12}$ unidades para a esquerda, uma vez que o argumento de f_3 era apenas *x* e em f_4 passou a ser $x - -\frac{\pi}{12}$.

Para obtermos o gráfico de $y - -3 = \frac{1}{2}\text{sen } 3\left(x - -\frac{\pi}{12}\right)$, falta apenas a aplicação de uma translação vertical de 3 unidades para baixo na curva f_4, conforme pode ser observado na figura 3.23d.

Figura 3.23d – f_4: curva $y = \frac{1}{2}\text{sen } 3\left(x - ^{-}\frac{\pi}{12}\right)$ e f_5: curva $y - ^{-}3 = \frac{1}{2}\text{sen } 3\left(x - ^{-}\frac{\pi}{12}\right)$.



A senóide f_5 é a curva $y = -3 + \frac{1}{2}\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

3.6.6 Esboço de cossenóides do tipo $y = \pm a + b\cos(kx \pm c)$ a partir de $y = \cos x$

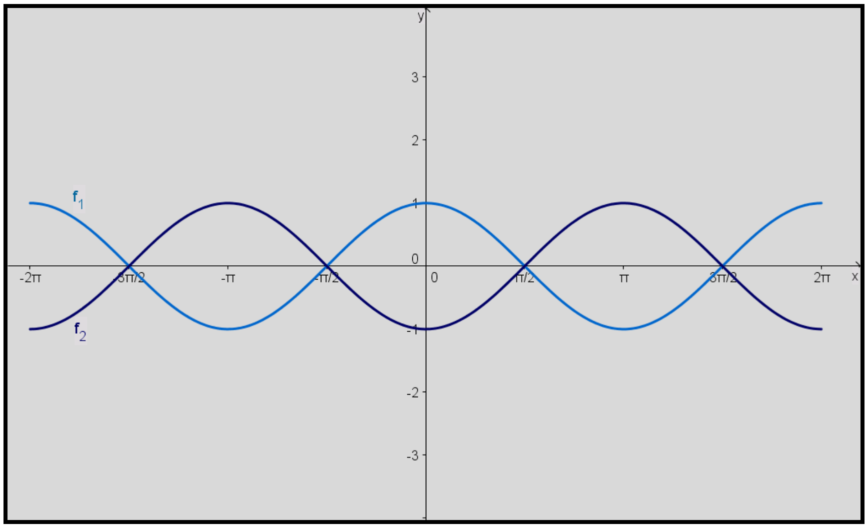
Exemplo 1: $y = 2 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

Aplicando tratamento algébrico essa expressão pode ser reescrita da seguinte maneira: $y - ^{+}2 = -\cos 2\left(x - ^{-}\frac{\pi}{4}\right)$, onde identificamos os coeficientes: $a = 2$, $b = -1$, $c = ^{-}\frac{\pi}{4}$ e $k = 2$.

Partindo da expressão $y = \cos x$ e modificando um a um os coeficientes, até obtermos a expressão $y - ^{+}2 = -\cos 2\left(x - ^{-}\frac{\pi}{4}\right)$, determinamos $y = -\cos x$, $y = -\cos(2x)$ e $y = -\cos 2\left(x - ^{-}\frac{\pi}{4}\right)$ que nos indicam as curvas, as quais precisaremos esboçar para representar $y - ^{+}2 = -\cos 2\left(x - ^{-}\frac{\pi}{4}\right)$ no plano cartesiano.

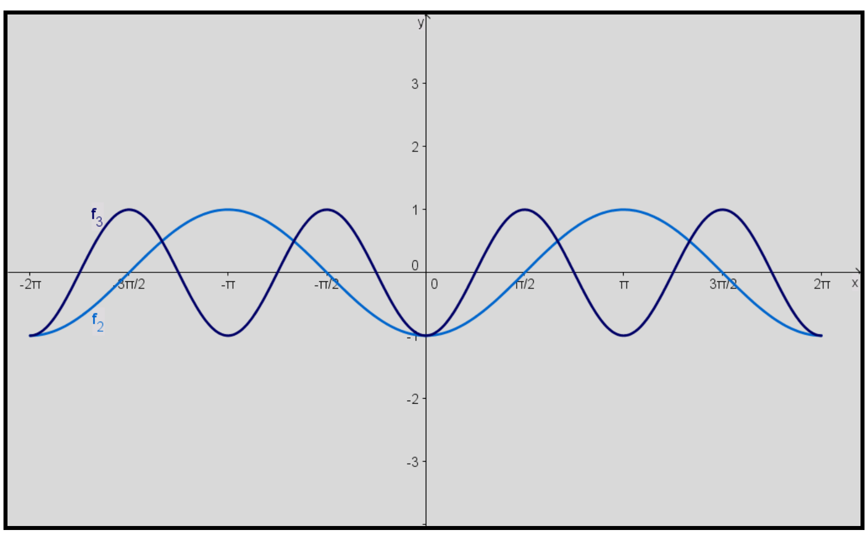
Partindo da curva $y = \cos x$, nossa base para o esboço de cossenóides, traçamos inicialmente $y = -\cos x$ e, notando a modificação do coeficiente *b* de 1 para -1, temos que a curva $y = -\cos x$ será simétrica à curva $y = \cos x$ em relação ao eixo X.

Figura 3.24a – f_1: curva $y = \cos x$, f_2: curva $y = -\cos x$.



Modificando o coeficiente k obtemos a curva $y = -\cos(2x)$, a qual apresenta uma redução no período se comparada à curva $y = -\cos x$, pois esta apresenta período igual a 2π enquanto aquela apresenta período igual a π, ou seja, dobrar o coeficiente *k* implica em reduzir o período da curva à metade.

Figura 3.24b – f_2: curva $y = -\cos x$, f_3: curva $y = -\cos(2x)$.



Comparando as expressões algébricas $y = -\cos(2x)$ e $y = -\cos 2\left(x - -\frac{\pi}{4}\right)$ é possível notar que suas curvas diferem no plano cartesiano apenas por uma translação horizontal, isto é, $y = -\cos 2\left(x - {}^{-}\frac{\pi}{4}\right)$ difere graficamente de $y = -\cos(2x)$ por um deslocamento de $\frac{\pi}{4}$ unidades para a esquerda (figura 3.24c). Assim como, de modo análogo, transladando a curva $y = -\cos 2\left(x - {}^{-}\frac{\pi}{4}\right)$ duas unidades verticalmente para cima, obtermos a curva $y - {}^{+}2 = -\cos 2\left(x - {}^{-}\frac{\pi}{4}\right)$, translação esta que se torna visível na expressão pela presença do coeficiente $a = {}^{+}2$ e que pode ser verificada na figura 3.24d.

Figura 3.24c – f_3: curva $y = -\cos(2x)$, f_4: curva $y = -\cos 2\left(x - {}^{-}\frac{\pi}{4}\right)$.

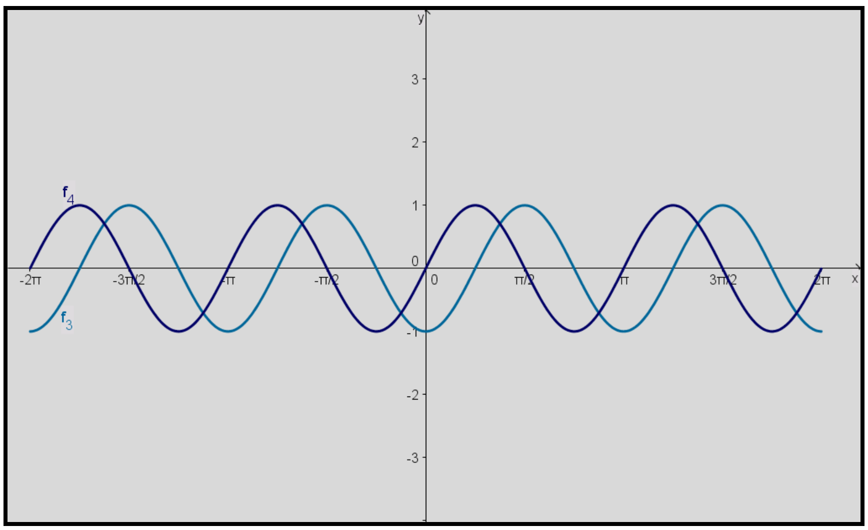
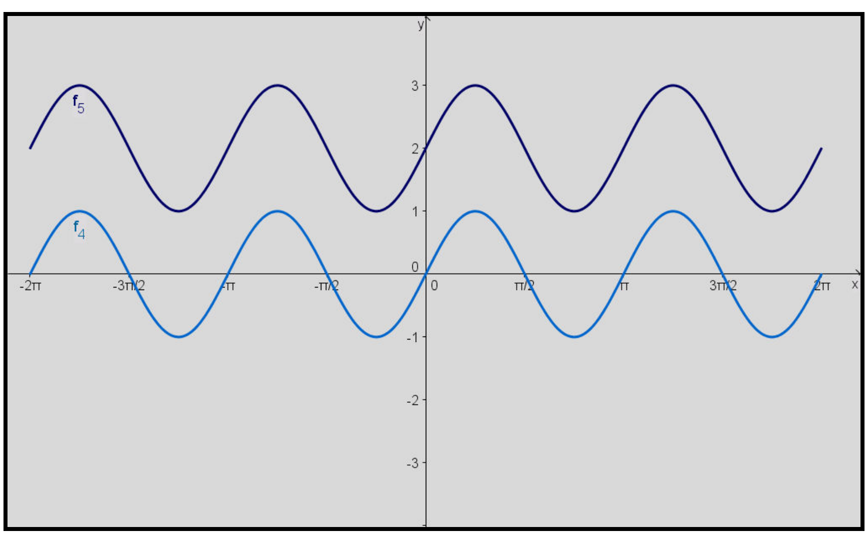


Figura 3.24d – f_4: curva $y = -\cos 2\left(x - {}^{-}\frac{\pi}{4}\right)$, f_5: curva $y - {}^{+}2 = -\cos 2\left(x - {}^{-}\frac{\pi}{4}\right)$



Exemplo 2: $\mathbf{y = -1 + 2cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}$

Reescrevendo a expressão, aplicando tratamento algébrico temos:

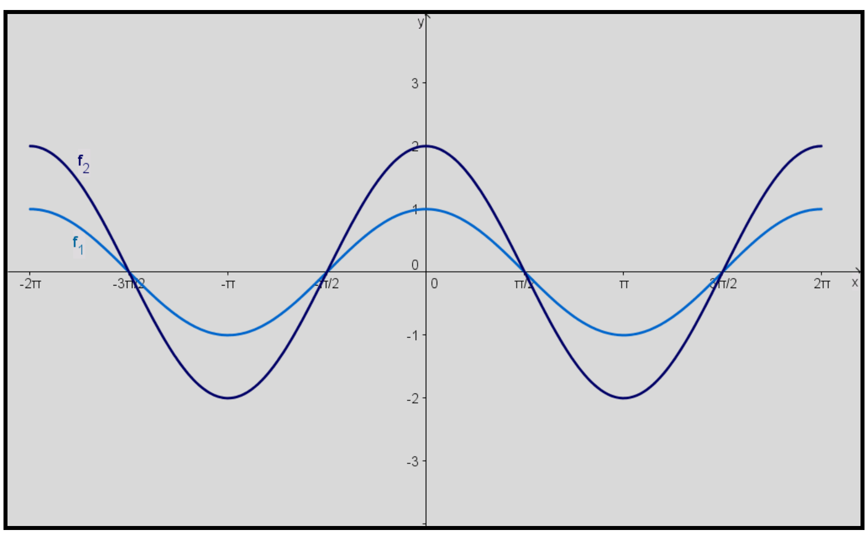
$$y = -1 + 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y - {}^{-}1 = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y - {}^{-}1 = 2\cos 3\left(x - {}^{+}\frac{\pi}{12}\right)$$

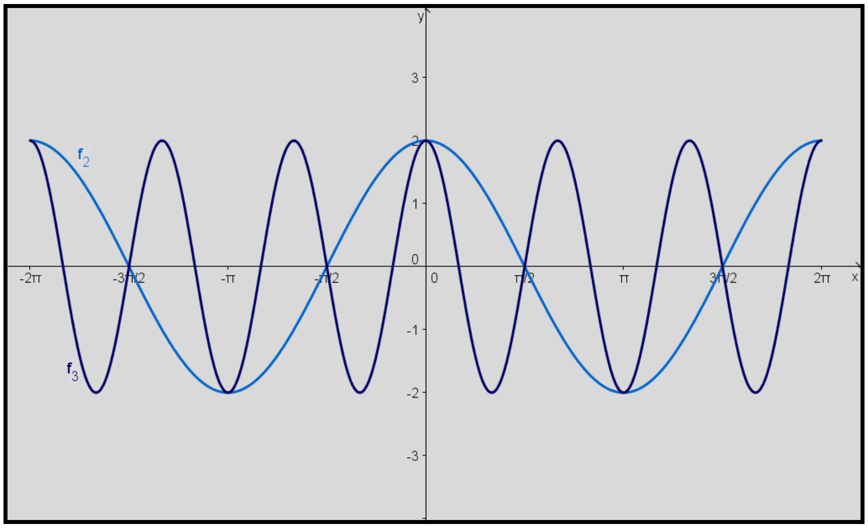
Nessa nova forma de escrever a expressão reconhecemos os coeficientes: $a = {}^{-}1$, $b = 2$, $k = 3$ e $c = {}^{+}\frac{\pi}{12}$. Logo, tendo como base a curva $y = \cos x$, esboçaremos as curvas $y = 2\cos x$, $y = 2\cos(3x)$ e $y = 2\cos 3\left(x - {}^{+}\frac{\pi}{12}\right)$ para então obtermos a curva $y - {}^{-}1 = 2\cos 3\left(x - {}^{+}\frac{\pi}{12}\right)$ conforme ilustra a sequência de figuras 3.25a, 3.25b, 3.25c e 3.25d.

Figura 3.25a – f_1: curva $y = \cos x$, f_2: curva $y = 2\cos x$.



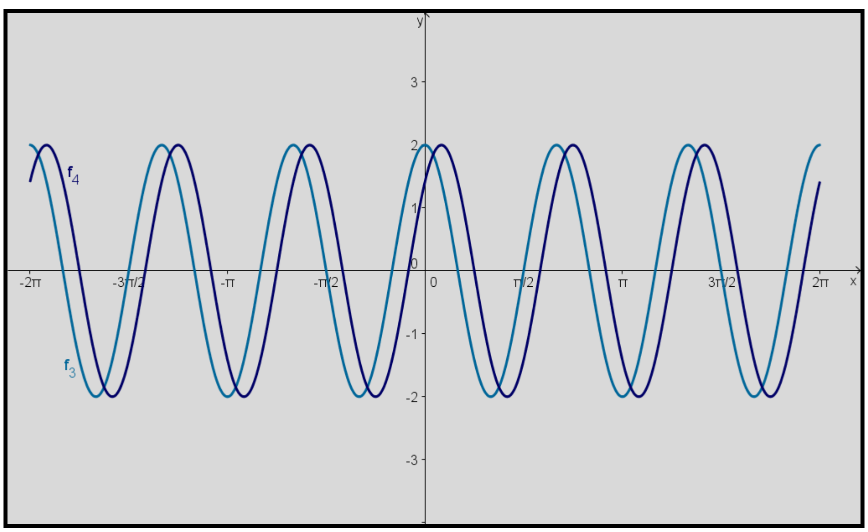
A alteração do coeficiente *b* de 1 para 2 provoca uma duplicação na amplitude da curva, alterando seu intervalo imagem de [-1,1] para [-2,2].

Figura 3.25b – f_2: curva $y = 2\cos x$, f_3: curva $y = 2\cos(3x)$



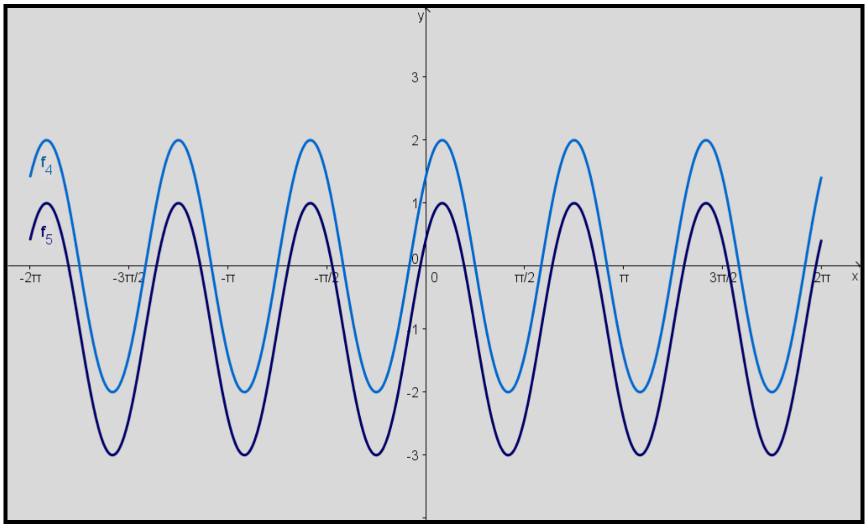
Valor 3 para o coeficiente k, reduz o comprimento do intervalo de repetição da curva de 2π para $\frac{2\pi}{3}$.

Figura 3.25c – f_3: curva $y = 2\cos(3x)$, f_4: curva $y = 2\cos 3\left(x - {}^{+}\frac{\pi}{12}\right)$



Coeficiente $c \neq 0$ indica uma translação horizontal da curva. Neste exemplo temos $c = {}^{+}\frac{\pi}{12}$, logo, o deslocamento é de $\frac{\pi}{12}$ unidades para a direita.

Figura 3.25d – f_4: curva $y = 2\cos 3\left(x - {}^{+}\frac{\pi}{12}\right)$, f_5: curva $y - {}^{-}1 = 2\cos 3\left(x - {}^{+}\frac{\pi}{12}\right)$.



Coeficiente $a \neq 0$ indica uma translação vertical da curva. Neste exemplo temos a = $^{-}1$, logo, o deslocamento é de 1 unidade para baixo.

Portanto a curva f_5 dessa última figura é o esboço de $y = -1 + 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

3.6.7 Considerações

O esboço de curvas das funções dos tipos senóide e cossenóide aqui apresentado buscou considerar propriedades figurais das curvas associando variáveis visuais das mesmas(amplitude, período, simetria...) aos coeficientes das expressões algébricas, procurando mostrar que tipo de alterações na curva eram provocadas por variações nos coeficientes de suas expressões.

Tentando se distanciar do que Duval (1988) nomeia “procedimento por pontos”, informações sobre paridade das funções, o uso da translação como recurso e de uma curva base para o esboço das demais, foram de grande valia.

No caso das senóides o estudo pode ser resumido da seguinte forma:

Curva base: curva da função seno dada por $f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$, y = sen x .

Forma de obtenção: tabela de pontos para o intervalo $[0,2\pi]$, simetria em relação à origem do sistema cartesiano para conhecê-la em $[-2\pi,0]$ obtendo-a em todo o intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Curvas senóides escritas na forma $y - {}^{\pm}a = b\ \text{sen}\left(kx - {}^{\pm}c\right)$ onde a,b,c,k são números reais

Características da curva base cuja expressão é $y = \text{sen}\ x$:

Coeficiente	**Expressão (unidades da escrita algébrica)**	**Curva (variáveis visuais)**
b = 1	O coeficiente não aparece.	Amplitude 2, intervalo de imagem [-1,1].
k = 1	O coeficiente não aparece.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a 2π.
a = 0 e c = 0	Os coeficientes não aparecem.	Não há translações; O ponto (0,0) pertence à curva; A curva é simétrica em relação à origem do sistema cartesiano.

Senóides em geral:

Coeficiente	**Expressão (unidades da escrita algébrica)**	**Curva (variáveis visuais)**
b	Positivo: Ausência do sinal +; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Amplitude 2b, intervalo imagem [-b, b].
	Negativo: Presença do sinal -; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Amplitude |2b|, intervalo imagem [b, -b], curva simétrica em relação ao eixo X àquela que apresenta coeficiente b positivo.
k	Positivo: Ausência do sinal +; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a $\frac{2\pi}{k}$.
	Negativo: Presença do sinal -; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a $\frac{2\pi}{\|k\|}$; Curva simétrica em relação ao eixo X àquela que apresenta coeficiente k positivo.
a	Positivo: ${}^{+}a$ (presença do coeficiente com o sinal +).	Translação no eixo Y de *a* unidades para cima em relação à senóides onde a=0. Modificação do intervalo imagem para [-b+a,b+a] se b>0 ou para [b+a,-b+a] se b<0.
	Negativo: ${}^{-}a$ (presença do coeficiente com o sinal -).	Translação no eixo Y de *a* unidades para baixo em relação à senóides onde a=0. Modificação do intervalo imagem para [-b-a,b-a] se b>0 ou para [b-a,-b-a] se b<0.
c	Positivo: ${}^{+}c$ (presença do coeficiente com o sinal +).	Translação no eixo X de $\left\|\frac{c}{k}\right\|$ unidades para a direita em relação à senóides onde c=0.
	Negativo: ${}^{-}c$ (presença do coeficiente com o sinal -).	Translação no eixo X de $\left\|\frac{c}{k}\right\|$ unidades para a esquerda em relação à senóides onde c=0.

Para as cossenóides o estudo fica assim resumido:

Curva base: curva da função cosseno dada por $f:[-2\pi,2\pi]\to\mathbb{R}$, y = cos x.

Forma de obtenção: tabela de pontos para o intervalo $[0,2\pi]$, simetria em relação ao eixo Y para conhecê-la em $[-2\pi,0]$ obtendo-a em todo o intervalo $[-2\pi,2\pi]$. Ou para um estudo posterior ao das senóides, a curva da função cosseno pode ser reconhecida como sendo a mesma curva de $y = \text{sen}\left(x - \frac{-\pi}{2}\right)$.

Curvas cossenóides escritas na forma $y - {}^{\pm}a = b\cos\left(kx - {}^{\pm}c\right)$ onde a,b,c,k são números reais

Características da curva base cuja expressão é y = cos x:

Coeficiente	**Expressão (unidades da escrita algébrica)**	**Curva (variáveis visuais)**
b = 1	O coeficiente não aparece.	Amplitude 2, intervalo de imagem [-1,1].
k = 1	O coeficiente não aparece.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a 2π.
a = 0 e c = 0	Os coeficientes não aparecem.	Não há translações; O ponto (0,1) pertence à curva; A curva é simétrica em relação à origem do sistema cartesiano.

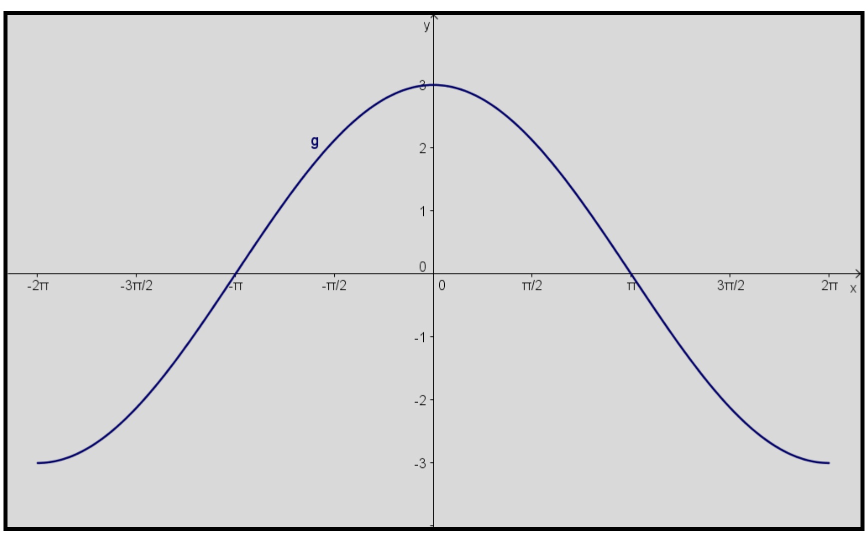
Cossenóides em geral:

Coeficiente	**Expressão (unidades da escrita algébrica)**	**Curva (variáveis visuais)**
b	Positivo: Ausência do sinal +; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Amplitude 2b, intervalo imagem [-b, b].
	Negativo: Presença do sinal -; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Amplitude |2b|, intervalo imagem [b, -b], curva simétrica em relação ao eixo X àquela que apresenta coeficiente b positivo.
k	Positivo: Ausência do sinal +; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a $\frac{2\pi}{k}$.
	Negativo: Presença do sinal -; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a $\frac{2\pi}{\|k\|}$.

a	Positivo: ^{+}a (presença do coeficiente com o sinal +).	Translação no eixo Y de *a* unidades para cima em relação à cossenóides onde a=0. Modificação do intervalo imagem para [-b+a,b+a] se b>0 ou para [b+a,-b+a] se b<0.
	Negativo: ^{-}a (presença do coeficiente com o sinal -).	Translação no eixo Y de *a* unidades para baixo em relação à cossenóides onde a=0. Modificação do intervalo imagem para [-b-a,b-a] se b>0 ou para [b-a,-b-a] se b<0.
c	Positivo: ^{+}c (presença do coeficiente com o sinal +).	Translação no eixo X de $\left\|\frac{c}{k}\right\|$ unidades para a direita em relação à cossenóides onde c=0.
	Negativo: ^{-}c (presença do coeficiente com o sinal -).	Translação no eixo X de $\left\|\frac{c}{k}\right\|$ unidades para a esquerda em relação à cossenóides onde c=0.

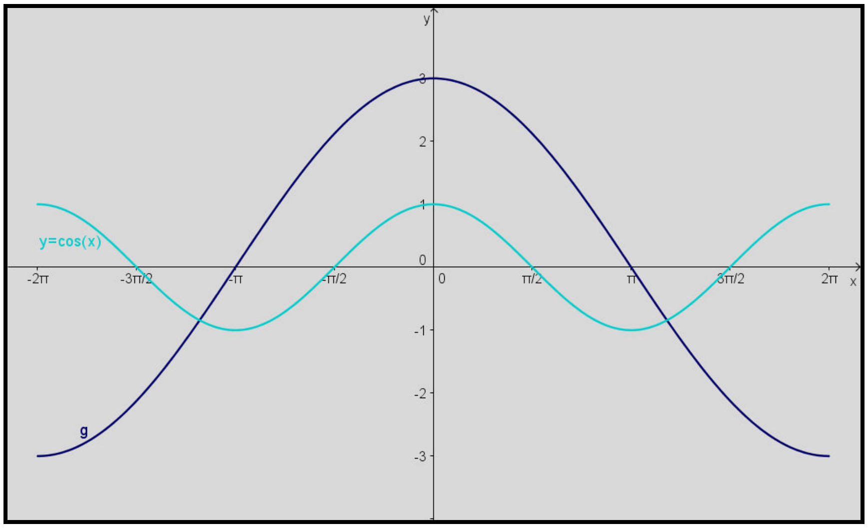
Essa forma de proceder, considerando as propriedades figurais da curva, possibilita a sua visualização como um todo, reforçando a relação entre o esboço e sua expressão algébrica e não entre a curva e alguns pontos. Duval (2004) preconiza esta forma de trabalhar o esboço de curvas por ser ela a que favorece a conversão no sentido inverso, ou seja, à compreensão de maneira qualitativa do que ocorre com seus coeficientes e uma leitura correta do gráfico. Além disso, é possível ainda, a partir do gráfico se chegar à expressão algébrica (desde que sejam conhecidos alguns valores numéricos). Para exemplificar observemos o esboço:

Figura 3.26a



A forma dessa curva nos lembra a curva da função $y = \cos x$, no entanto, esboçando a curva da função cosseno no mesmo plano, percebemos algumas diferenças.

Figura 3.26b



Se compararmos a curva *g* à curva $y = \cos x$, percebemos que há diferenças na amplitude e no período, mas que não há deslocamentos, nem horizontais, nem verticais.

Em relação à curva $y = \cos x$, a curva *g* apresenta o triplo da amplitude, que, na equação, é expressa pela modificação do coeficiente *b* de 1 para 3.

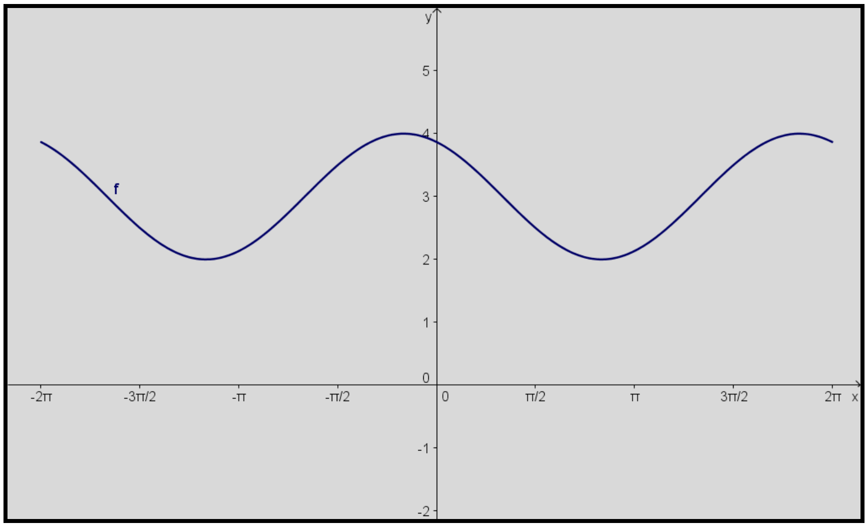
A curva *g* apresenta também o dobro do período da curva $y = \cos x$, que na equação é expresso pelo coeficiente *k*. A duplicação do período reflete na redução do coeficiente *k* à metade. Logo, a curva g apresenta $k = \frac{1}{2}$.

Como não há deslocamentos, os coeficientes *a* e *c* continuam com valor zero e, portanto, não aparentes na expressão algébrica.

Com essa análise e a presença de valores numéricos nos eixos que nos indicaram com precisão os valores dos coeficientes *b* e *k*, podemos afirmar que a curva *g* tem por expressão algébrica $y = 3\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$.

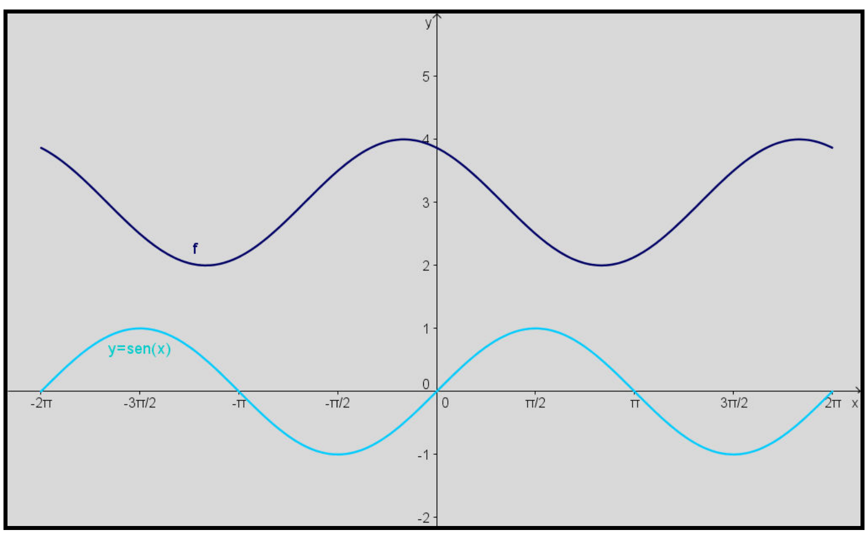
Todavia, nem sempre é possível determinar com exatidão os coeficientes, mas uma análise qualitativa, observando o tipo de modificação, sem se preocupar com valores exatos também é de grande valia. A curva da figura seguinte é um exemplo:

Figura 3.27a



Percebemos que a curva *f* é do tipo senóide ou cossenóide, pelo seu formato. No entanto, esboçando a curva $y = \text{sen}\ x$ e a curva *f* no mesmo plano, observamos algumas diferenças.

Figura 3.27b



Comparando as duas curvas, observamos que o período e a amplitude são os mesmos em ambas, mas *f* está deslocada tanto verticalmente quanto horizontalmente em relação à curva $y = \text{sen}\ x$. Além disso, elas não apresentam a mesma posição em relação ao eixo X, estão em posições opostas, o que nos leva a concluir que o coeficiente *b* da curva f é -1.

O valor do deslocamento de *f* em relação à curva $y = \text{sen}\ x$ de duas unidades para cima é facilmente percebido, no entanto o mesmo não se pode dizer do deslocamento horizontal, seria necessário mais algum valor de referência no eixo X para que pudéssemos afirmar o valor desse deslocamento com exatidão, mas podemos estimar um valor menor que π unidades para a direita.

Logo, uma possível expressão algébrica para esta curva é $y \mp 3 = -\operatorname{sen}(x \mp c)$, ou de maneira mais comum $y = 3 - \operatorname{sen}(x - c)$, onde c em valor absoluto é menor que π. Dizemos "possível" porque poderíamos considerá-la como do grupo das cossenóides e então determinar uma outra expressão algébrica equivalente para a mesma curva.

3.7 O ESBOÇO DE CURVAS DO GRUPO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Neste tópico abordaremos o esboço de curvas das funções "do grupo das exponenciais".

A função exponencial é definida como f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

Inicialmente podemos pensar nas funções "do grupo das exponenciais" como sendo aquelas as quais a lei de formação tem a forma $y = b + c \cdot a^{kx+d}$, sendo *b,c,k,d* constantes reais e $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Mas, por propriedades de potenciação as constantes *c* e *d* podem ser aglutinadas em uma única e a constante *k* pode ser unida à base *a*, de modo que teremos apenas três constantes:

$$y = b + c \cdot a^{kx+d}$$
$$y = b + c \cdot a^{kx} \cdot a^{d}$$
$$y = b + \underbrace{c \cdot a^{d}}_{M} \cdot \underbrace{(a^{k})}_{N}{}^{x}$$
$$y = b + M \cdot N^{x}$$

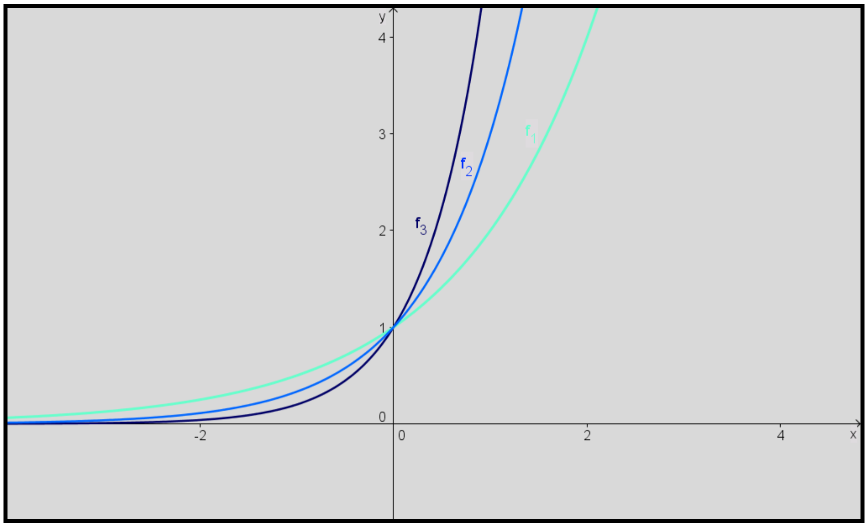
Nessa outra forma de escrevê-la, temos apenas três constantes, porém no plano cartesiano, a representação será a mesma de $y = b + c \cdot a^{kx+d}$.

Em nosso estudo vamos considerar os tipos mais encontrados em livros didáticos, as exponenciais simples com lei de formação na forma $y = a^x$ e outras cuja lei de formação aparece na forma $y = a^{kx}$, $y = a^{x+d}$ e $y = b + a^{x}$ sendo *b, k, d* constantes reais e $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, as quais nomeamos integrantes "do grupo das funções exponenciais".

As curvas base para o esboço de curvas desse grupo são as da forma $y = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}, a > 1$.

Observemos os esboços de algumas curvas base que podem ser obtidos com o auxílio de uma tabela de pontos, conforme apresentam os livros didáticos.

Figura 3.28 – curvas $f_1: \ y = 2^x, \ f_2: \ y = 3^x, \ f_3: \ y = 5^x$.



Na figura é possível notar que o ponto de coordenadas (0,1) pertence à todas as curvas e que o valor da base influencia diretamente no crescimento da função.

Conhecendo o esboço das curvas $y = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}, a > 1$, é possível obter as curvas cujas bases são inversas, ou seja, $0 < a < 1$ sem a repetição do uso de uma tabela de pontos, pois elas apresentam simetria linear em relação ao eixo Y. Logo, a partir dos esboços das curvas base $f_1: \ y = 2^x, \ f_2: \ y = 3^x, \ f_3: \ y = 5^x$, é possível traçar as curvas $f_4\text{: } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f_5\text{: } y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f_6\text{: } y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, conforme ilustram as figuras 3.29a, 3.29b e 3.29c.

Figura 3.29a – curvas $f_1\text{: } y = 2^x$ e $f_4\text{: } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

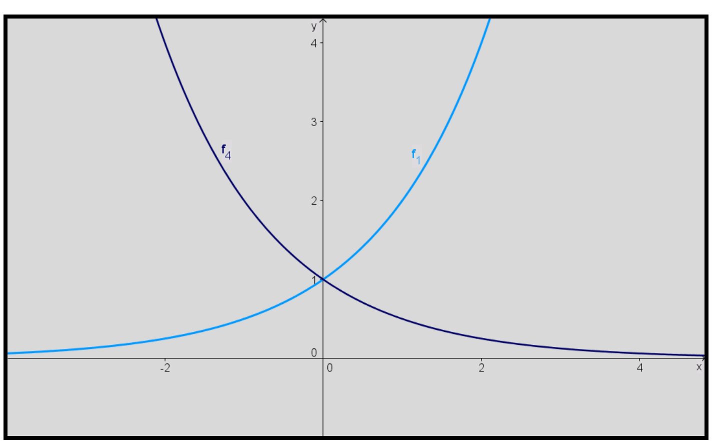


Figura 3.29b – curvas f_2: $y = 3^x$ e f_5: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

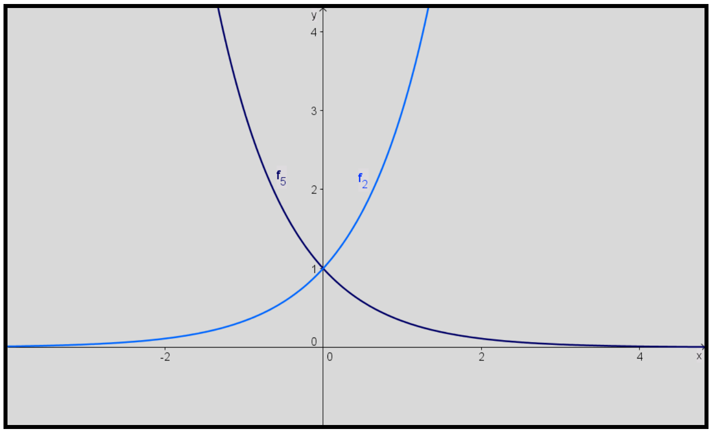
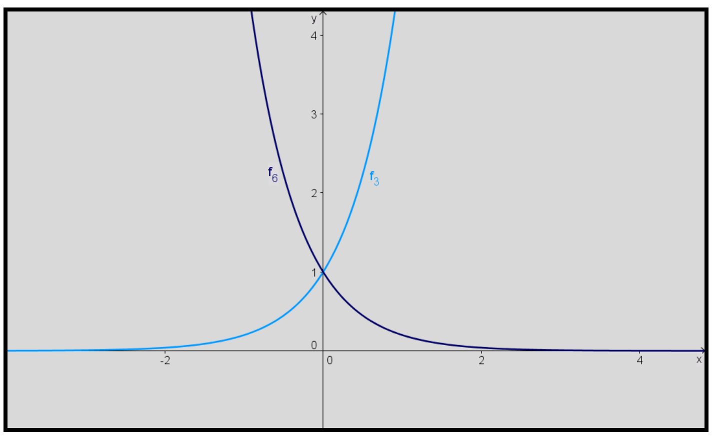
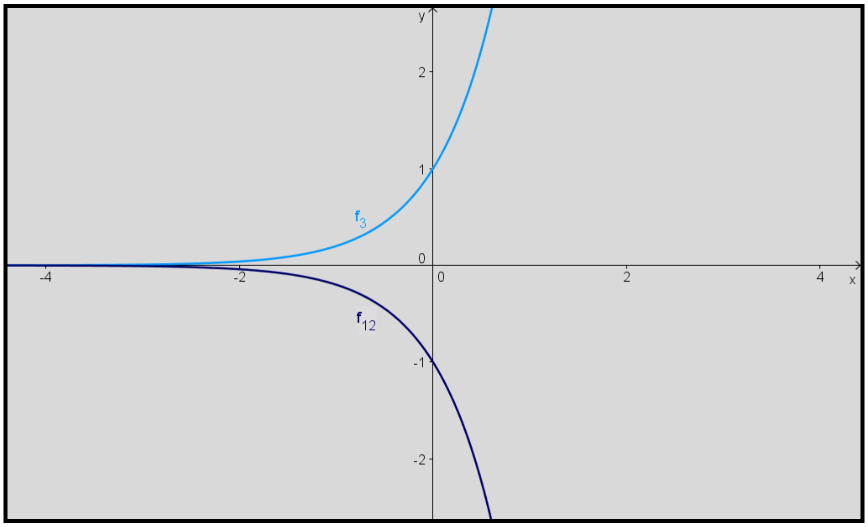


Figura 3.29c – curvas: f_3: $y = 5^x$ e f_6: $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.



A curva oposta à $y = a^x$, definida como $y = -(a^x)$, $a \in \mathbb{R}, a > 1$, também pode ser obtida a partir da curva $y = a^x$ devido ao fato delas apresentarem simetria linear em relação ao eixo X. Como exemplo a figura 3.30 apresenta as curvas simétricas $y = 5^x$ e $y = -(5^x)$.

Figura 3.30 – curvas: f_3: $y = 5^x$ e f_{12}: $y = -(5^x)$.



3.7.1 – Exponenciais do tipo $y = a^{kx}$, $k \in \mathbb{R}^*$.

Conforme já comentamos, o coeficiente *k* pode ser unido à base e, sendo assim influencia no crescimento da curva. A figura 3.31 ilustra essa informação para diferentes valores de *k*, onde a base é a curva $y = 2^x$. Cada uma das expressões algébricas das curvas representadas na figura pode ser escrita de outra forma onde *k,* unido à base 2 por propriedade de potenciação, forma uma nova base.

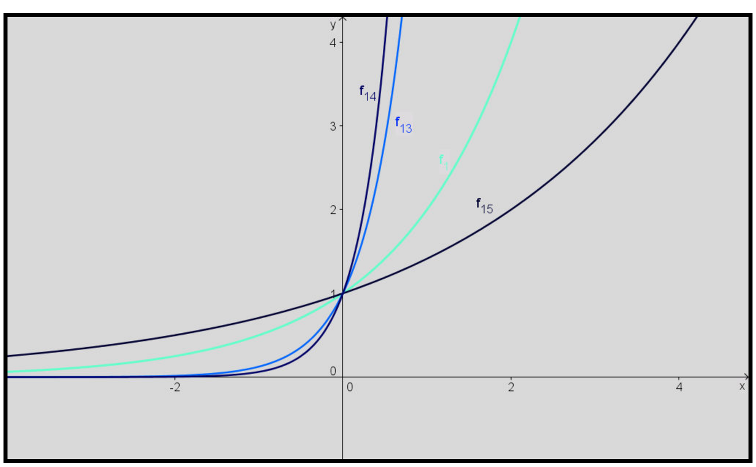
$2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$

$2^{4x} = (2^4)^x = 16^x$

$2^{\frac{1}{2}x} = (2^{\frac{1}{2}})^x = (\sqrt{2})^x$

Logo, quanto maior for o valor de *k*, mais acentuado será o crescimento da curva.

Figura 3.31 – curvas: f_1: $y = 2^x$, f_{13}: $y = 2^{3x}$, f_{14}: $y = 2^{4x}$, f_{15}: $y = 2^{\frac{1}{2}x}$.



3.7.2 – O uso da translação como recurso do esboço de curvas das funções do grupo das exponenciais

As expressões do tipo $y = a^{x+d}$ e $y = b + a^{x}$ (onde *b* e *d* são números reais) no plano cartesiano representam translações das curvas base $y = a^{x}$ pois, aplicando tratamento algébrico é possível escrevê-las nas seguintes formas:

$$y = a^{x+d} \qquad \text{e} \qquad y = b + a^{x}$$
$$y = a^{x - {}^{\pm}d} \qquad\qquad y - {}^{\pm}b = a^{x}$$

Assim, temos os seguintes resultados:

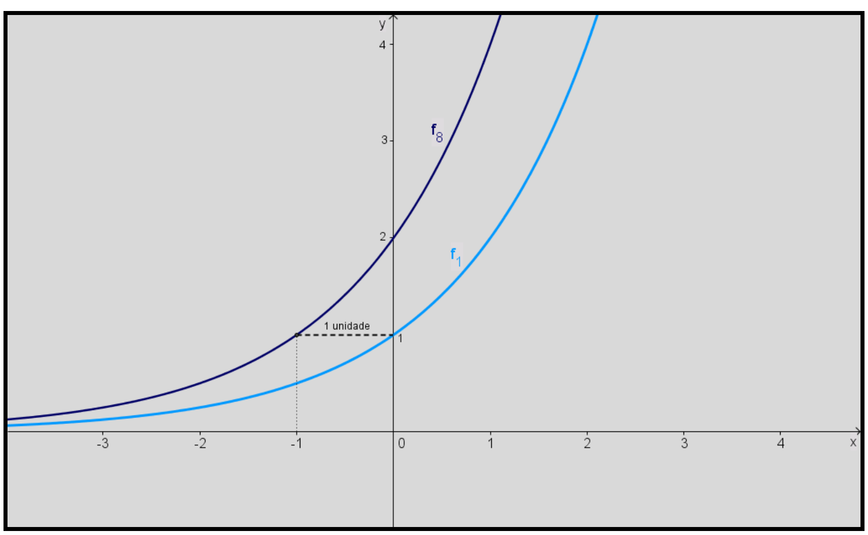
a) A curva $y = a^{x - {}^{-}d}$ é a curva $y = a^{x}$ transladada horizontalmente *d* unidades para a esquerda.

b) A curva $y = a^{x - {}^{+}d}$ é a curva $y = a^{x}$ transladada horizontalmente *d* unidades para a direita.

Então, conhecendo a curva $y = a^{x}$ e aplicando translação horizontal torna-se possível a obtenção das curvas $y = a^{x - {}^{-}d}$ e $y = a^{x - {}^{+}d}$.

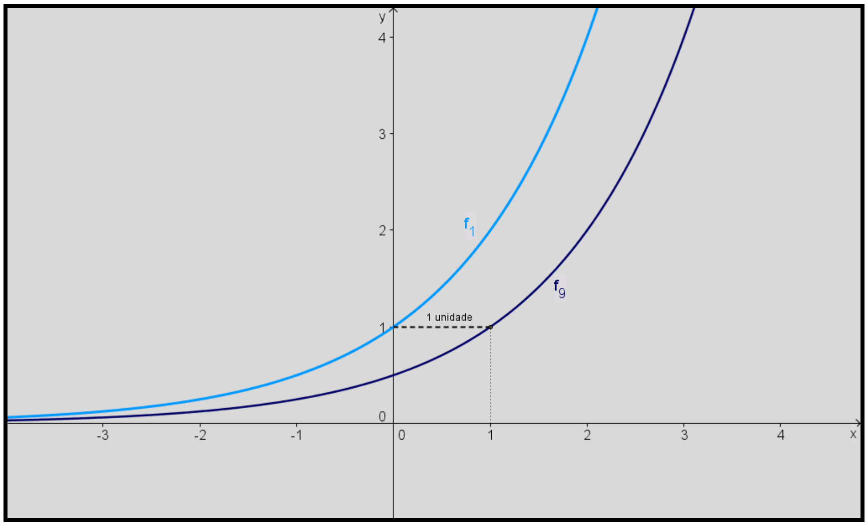
As figuras 3.32a e 3.32b ilustram estes resultados com translações horizontais onde a curva base é $y = 2^{x}$.

Figura 3.32a – curvas f_1: $y = 2^{x}$ e f_8: $y = 2^{x - {}^{-}1}$.



A expressão algébrica $y = 2^{x+1}$ escrita como $y = 2^{x - {}^{-}1}$ mostrou que no plano cartesiano ela representa uma translação da curva $y = 2^x$ em uma unidade para a esquerda.

Figura 3.32b – curvas f_1: $y = 2^x$ e f_9: $y = 2^{x - {}^{+}1}$.



A expressão algébrica $y = 2^{x-1}$ escrita como $y = 2^{x - {}^{+}1}$ mostrou que no plano cartesiano ela representa uma translação da curva $y = 2^x$ em uma unidade para a direita.

Os pontos das curvas $y = 2^x$ e $y = 2^{x - {}^{-}1}$, bem como os pontos das curvas $y = 2^x$ e $y = 2^{x - {}^{+}1}$ que apresentam mesmo valor de ordenada possuem os valores das abscissas diferindo de uma unidade a menos ou a mais respectivamente, apesar desse deslocamento não ser tão perceptível devido à proximidade da curva com o eixo X, à medida que o valor de x tende a números negativos cada vez maiores em módulo.

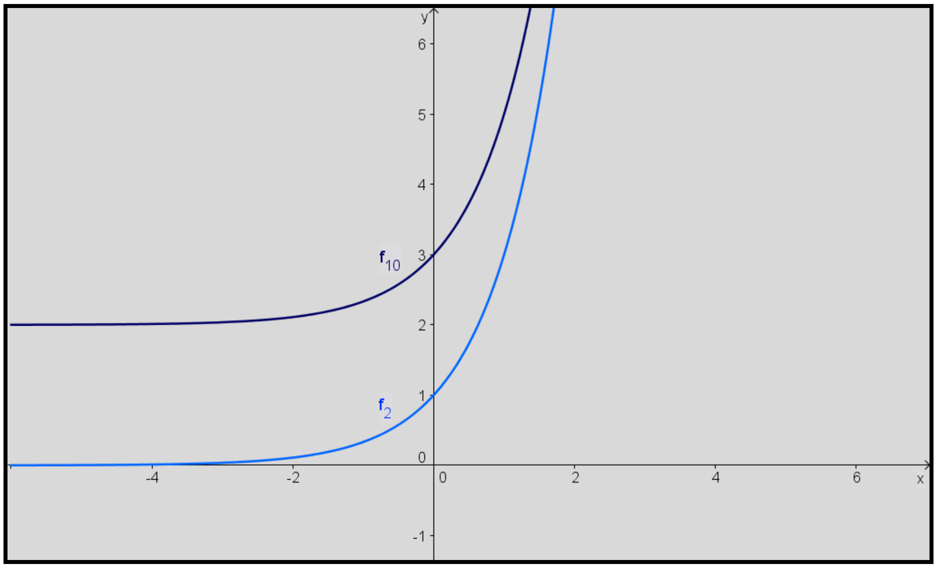
c) $y - {}^{+}b = a^x$ é a curva $y = a^x$ transladada verticalmente *b* unidades para cima.

d) $y - {}^{-}b = a^x$ é a curva $y = a^x$ transladada verticalmente *b* unidades para baixo.

Então, conhecendo a curva $y = a^x$ e aplicando translação vertical torna-se possível a obtenção das curvas $y - {}^{+}b = a^x$ e $y - {}^{-}b = a^x$.

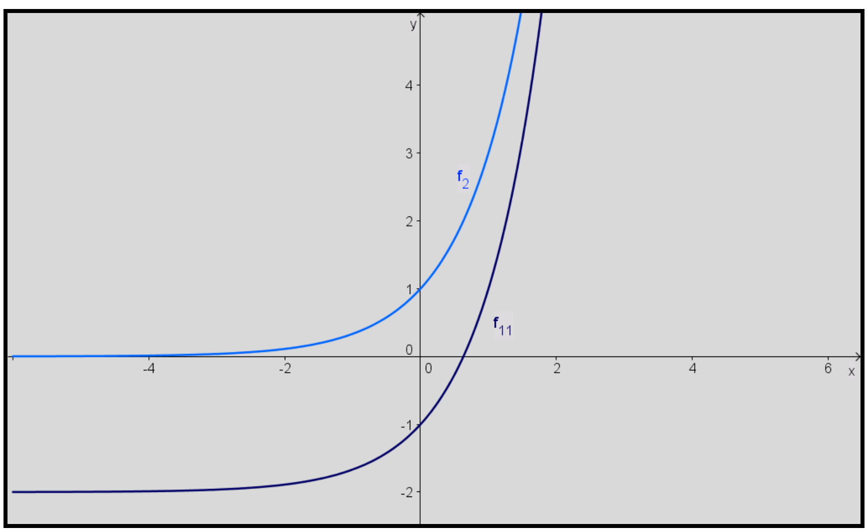
As figuras 3.33a e 3.33b ilustram estes resultados com translações verticais onde a curva base é $y = 3^x$.

Figura 3.33a - curvas f_2: $y = 3^x$ e f_{10}: $y - {}^{+}2 = 3^x$.



A expressão algébrica $y = 2 + 3^x$ escrita como $y - {}^{+}2 = 3^x$ mostrou que no plano cartesiano ela representa uma translação da curva $y = 3^x$ em duas unidades para cima.

Figura 3.33b - curvas f_2: $y = 3^x$ e f_{11}: $y - {}^{-}2 = 3^x$



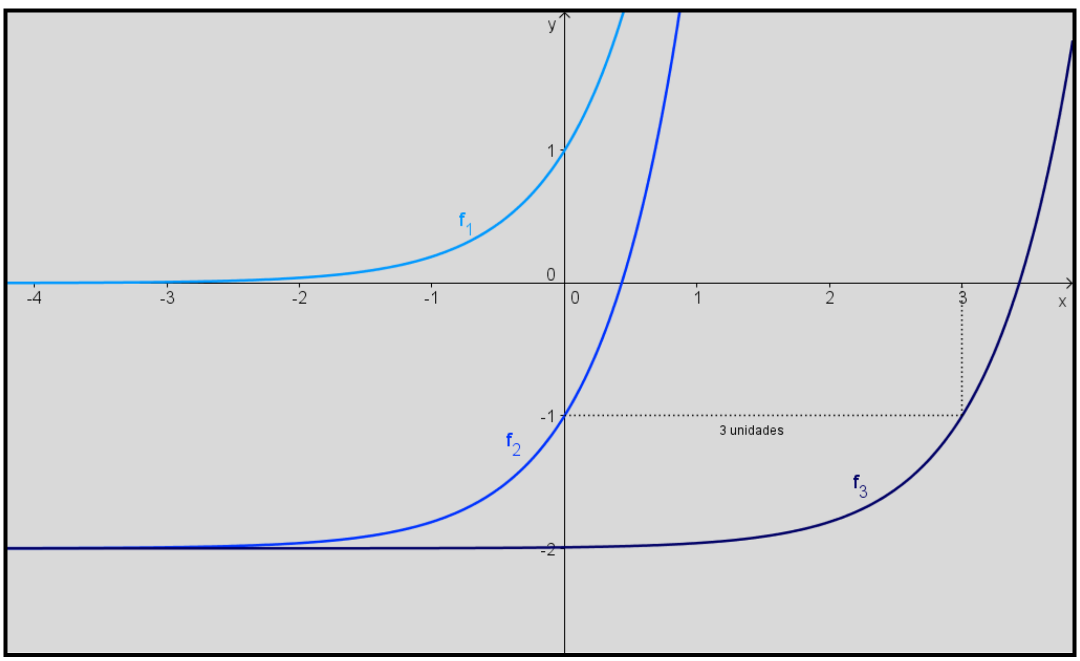
A expressão algébrica $y = 3^x - 2$ escrita como $y - {}^{-}2 = 3^x$ mostrou que no plano cartesiano ela representa uma translação da curva $y = 3^x$ em duas unidades para baixo.

Conforme a figura é possível observar que os pontos da curva $y - {}^{+}2 = 3^x$ que possuem mesmo valor de abscissa que os pontos da curva $y = 3^x$ apresentam seus valores de ordenadas aumentados de duas unidades se comparados aos valores das ordenadas dos pontos de $y = 3^x$. Analogamente, os pontos da curva $y - {}^{-}2 = 3^x$ que possuem mesmo valor de abscissa que os pontos da curva $y = 3^x$ apresentam seus valores de ordenadas subtraídos de duas unidades se for feita a mesma comparação. Ambos, efeitos da translação vertical.

Apesar de não ser tão comum em livros didáticos, existem casos onde ocorrem as duas translações, isto é, partindo de uma curva base $y = a^x$ pode-se chegar a uma curva do tipo $y - {}^{\pm}b = a^{x - {}^{\pm}d}$. Um exemplo é a curva $y = -2 + 5^{x-3}$.

Aplicando tratamento algébrico, podemos escrever a expressão algébrica $y = -2 + 5^{x-3}$ na forma $y - {}^{-}2 = 5^{x - {}^{+}3}$. Logo, a curva cuja expressão é $y - {}^{-}2 = 5^{x - {}^{+}3}$ pode ser obtida a partir da curva base $y = 5^x$ com a aplicação de uma translação vertical de duas unidades para baixo, seguida de uma translação horizontal de três unidades para a direita, conforme apresentado na figura 3.34.

Figura 3.34 – curvas f_1: $y = 5^x$, f_2: $y - {}^{-}2 = 5^x$ e f_3: $y - {}^{-}2 = 5^{x - {}^{+}3}$.



Na figura, a curva f_3 é a curva objeto do exemplo. Sua expressão algébrica pode ser escrita como $y = -2 + 5^{x-3}$, formato utilizado pelos livros e que apresentamos inicialmente.

3.7.3 – Considerações

Sobre o esboço de curvas do grupo das funções do tipo exponenciais, vale destacar alguns pontos-chave dos procedimentos:

- **Curva base**: esboço das exponenciais $y = a^x$ onde $a \in \mathbb{R}, a > 1$.
- **Exponenciais do tipo** $y = a^x$ **onde** $a \in \mathbb{R}, 0<a<1$**:** obtidas por simetria em relação ao eixo Y, a partir da curva da exponencial com base inversa.
- **Exponenciais do tipo** $y = -(a^x)$ **onde** $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$: obtidas por simetria em relação ao eixo X , a partir da curva $y = a^x$.
- **Curvas cuja expressão pode ser escrita na forma** $y = a^{x - {}^-d}$**:** obtidas por translação horizontal de *d* unidades para a esquerda da curva base $y = a^x$**.**
- **Curvas cuja expressão pode ser escrita na forma** $y = a^{x - {}^+d}$**:** obtidas por translação horizontal de *d* unidades para a direita da curva base $y = a^x$**.**
- **Curvas cuja expressão pode ser escrita na forma** $y - {}^+b = a^x$: obtidas por translação vertical de *b* unidades para cima da curva base $y = a^x$**.**
- **Curvas cuja expressão pode ser escrita na forma** $y - {}^-b = a^x$: obtidas por translação vertical de *b* unidades para baixo da curva base $y = a^x$**.**
- **Curvas cuja expressão pode ser escrita na forma** $y - {}^\pm b = a^{x - {}^\pm d}$: obtidas por translação vertical e horizontal da curva $y = a^x$, onde o sentido do deslocamento é dado pelo sinal que acompanha os valores de *b* e *d*. Sinal positivo indica deslocamento para cima no caso de *b* e para a direita no caso de *d*. Já o sinal negativo indica deslocamento para baixo no caso de *b* e para a esquerda no caso de *d*.

3.8 O ESBOÇO DE CURVAS DO GRUPO DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Uma função logarítmica é definida da seguinte forma f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tal que $y = \log_a x$, sendo $a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$.

Neste tópico abordaremos o esboço de curvas que são gráficos de funções logarítmicas e de outras que consideramos como sendo “do grupo das funções logarítmicas” porque podem ser obtidas a partir de curvas de funções logarítmicas que obedecem a essa definição apresentada.

As funções do grupo das logarítmicas as quais abordaremos apresentam lei de formação do tipo $y = b + \log_a(x+d)$ onde $a,b,d \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 1$.

Para iniciar, lembremos que a função exponencial foi definida como f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Se restringirmos o seu contradomínio ao seu conjunto imagem teremos uma função que vai de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, isto é, f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $y = a^x$, onde $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Definida desta forma podemos dizer que a função exponencial de base *a* é a inversa da função logarítmica de mesma base e vice-versa.

Conforme vimos no tópico 3.4 FUNÇÕES INVERSAS deste capítulo, as curvas de funções inversas possuem como característica a simetria linear em relação à reta $y = x$. Então, uma vez conhecida a curva de uma função exponencial, podemos obter a curva da função logarítmica de mesma base, usando a simetria em relação à reta $y = x$.

No tópico anterior vimos as curvas $y=2^x$, $y=3^x$ e $y=5^x$ as quais sugerimos que fossem obtidas com o auxílio de uma tabela de pontos. Agora elas nos servirão como curvas base para obtermos as curvas de $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_5 x$ por simetria, onde a reta $y = x$ servirá de eixo. Obteremos o esboço de uma curva tendo por base um esboço já conhecido e uma propriedade de ambas, sendo desnecessária a repetição do procedimento que se apóia em uma tabela de pontos. As figuras 3.35a, 3.35b e 3.35c mostram exemplos.

Figura 3.35a – curvas f_1: $y = 2^x$ e f_2: $y = \log_2 x$.

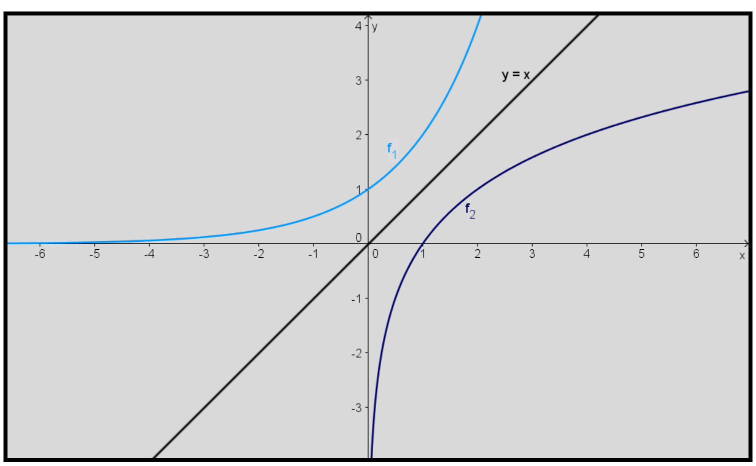


Figura 3.35b – curvas f_3: $y = 3^x$ e f_4: $y = \log_3 x$.

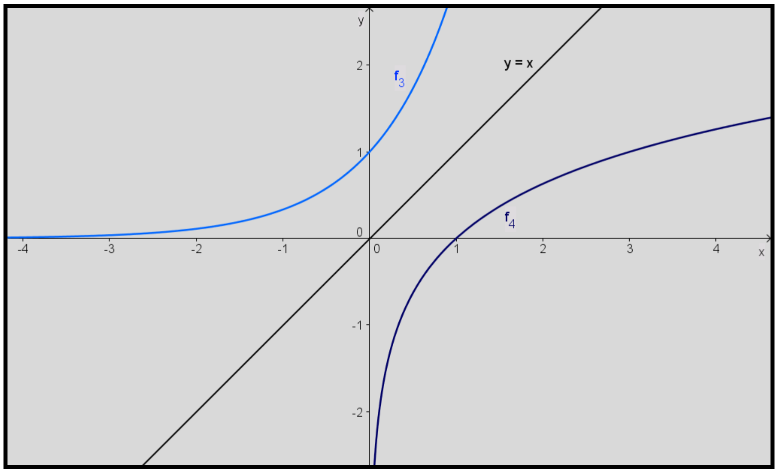
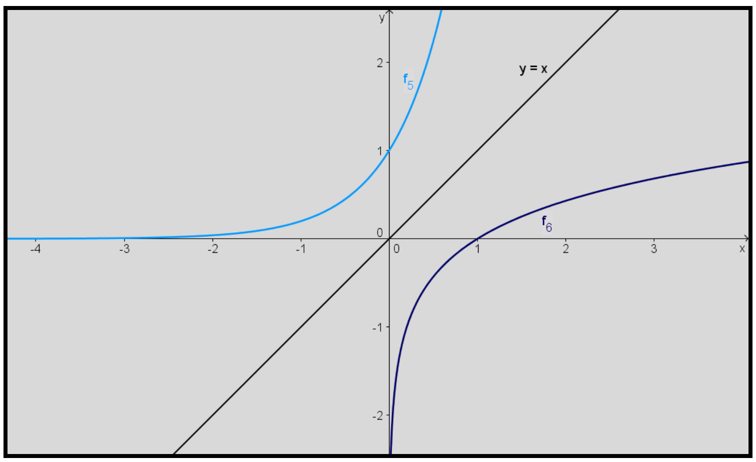
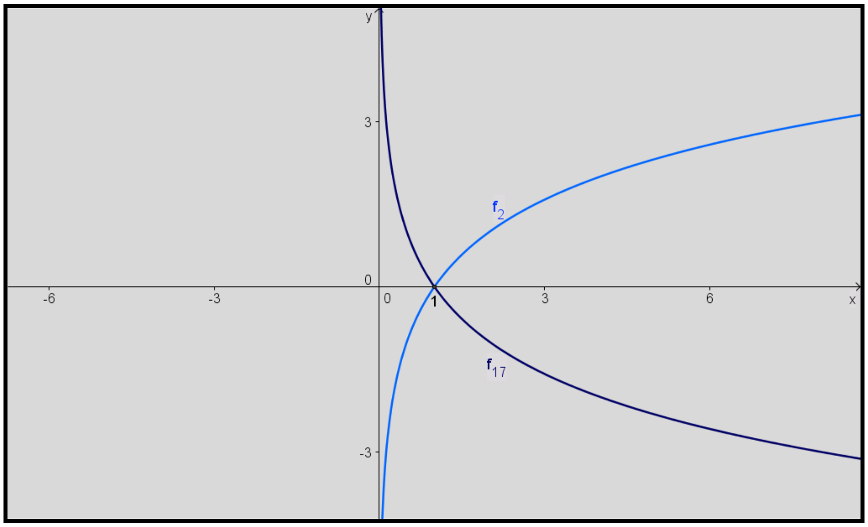


Figura 3.35c – curvas f_5: $y = 5^x$ e f_6: $y = \log_5 x$.



Uma vez conhecidos os esboços das curvas das funções logarítmicas de base *a* tal que $a > 1$, para esboçarmos as que têm base inversa e, portanto, pertencentes ao intervalo (0,1), basta usarmos simetria em relação ao eixo X. Para exemplificar, verifiquemos a obtenção da curva $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, obtida a partir da curva base $y = \log_2 x$.

Figura 3.36 – curvas f_2: $y = \log_2 x$ e f_{17}: $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.



3.8.1 – O uso da translação no esboço de curvas das funções do tipo logarítmicas

Consideraremos como funções do tipo logarítmicas as funções f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tais que $y = b + \log_a(x+d)$, sendo $a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$, b e $d \in \mathbb{R}$.

O esboço das curvas dessas funções no plano cartesiano representam translações das curvas das funções f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tais que $y = \log_a x$, sendo $a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$.

Se o coeficiente b for nulo, a lei de formação da função será $y = \log_a(x+d)$ que pode ser escrita na forma $y = \log_a(x - {}^{\pm}d)$, revelando uma translação horizontal para a direita se tivermos ${}^{+}d$, ou para a esquerda se tivermos ${}^{-}d$.

As figura 3.37a e 3.37b, apresentam exemplos de obtenção de curvas das funções do tipo logarítmicas onde a translação horizontal foi utilizada como recurso.

Figura 3.37a – Obtenção da curva f_{16}: $y = \log_3(x - {}^{+}2)$ por translação da curva f_4: $y = \log_3 x$.

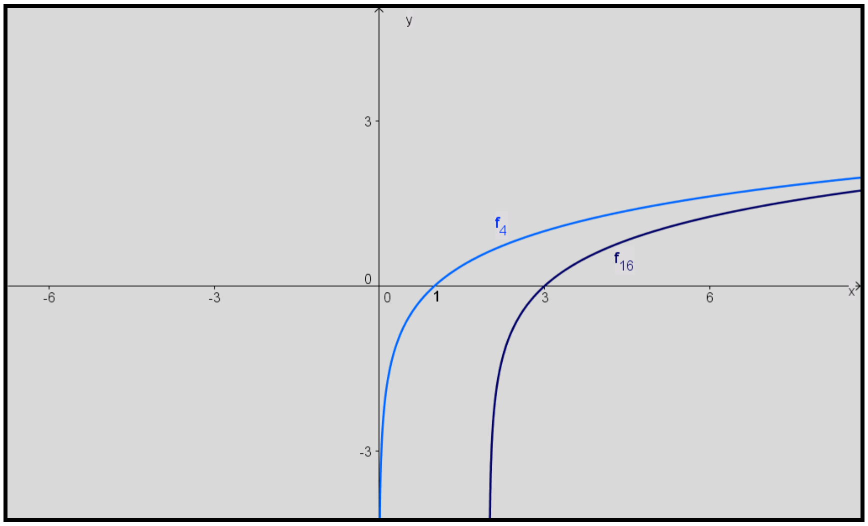
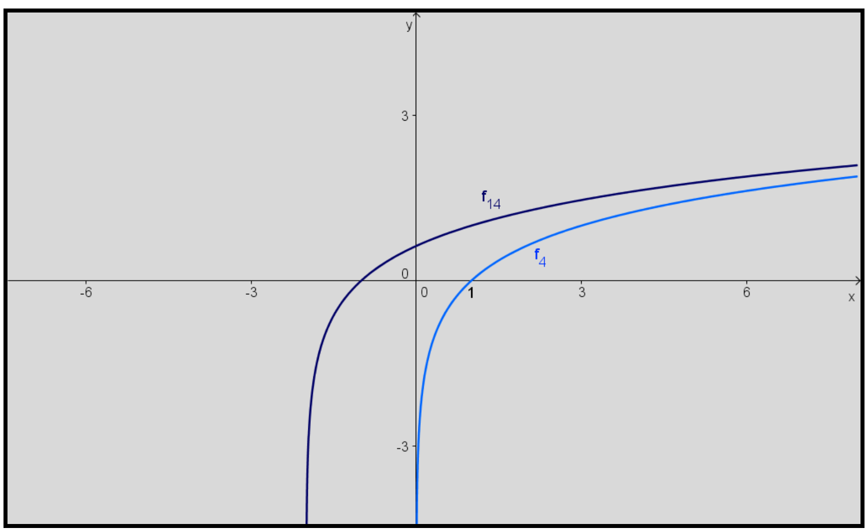


Figura 3.37b – Obtenção da curva f_{14}: $y = \log_3(x - {}^{-}2)$ por translação da curva f_4: $y = \log_3 x$.



Caso o coeficiente d seja nulo, a lei de formação será $y = b + \log_a x$ que pode ser escrita na forma $y - {}^{\pm}b = \log_a x$, indicando uma translação vertical que pode ser para cima, se a expressão for da forma $y - {}^{+}b = \log_a x$ ou, para baixo, se a expressão for da forma $y - {}^{-}b = \log_a x$.

As figura 3.38a e 3.38b, apresentam exemplos de obtenção de curvas das funções do tipo logarítmicas onde a translação vertical foi utilizada como recurso.

Figura 3.38a - Obtenção da curva f_{10}: $y - {}^{-}1 = \log_2 x$ por translação da curva f_2: $y = \log_2 x$.

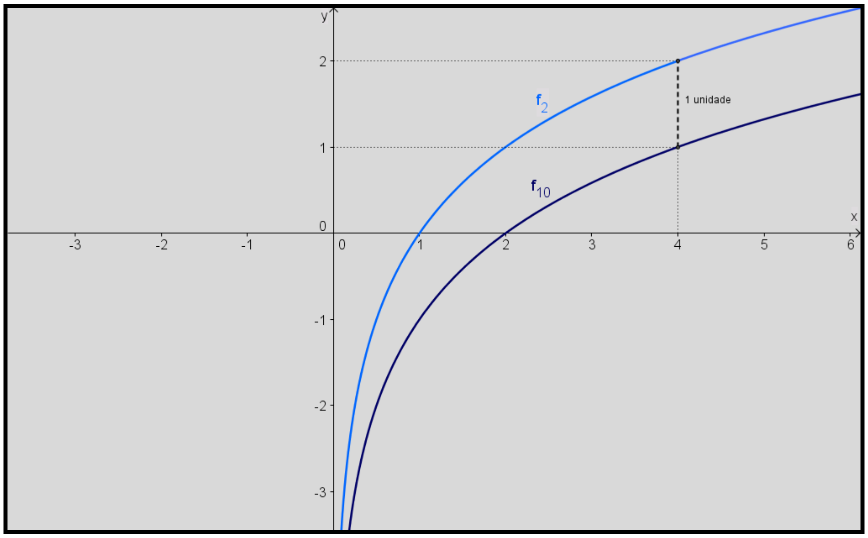
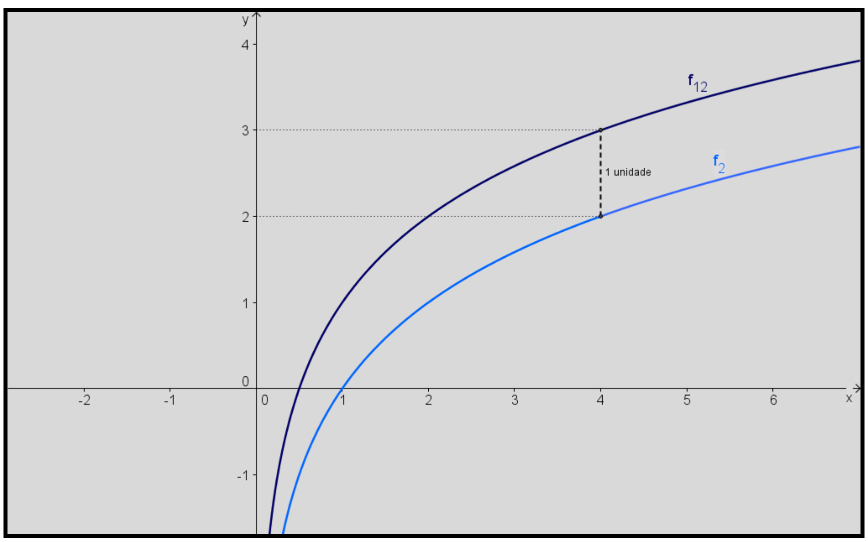


Figura 3.38b - Obtenção da curva f_{12}: $y - {}^{+}1 = \log_2 x$ por translação da curva f_2: $y = \log_2 x$.



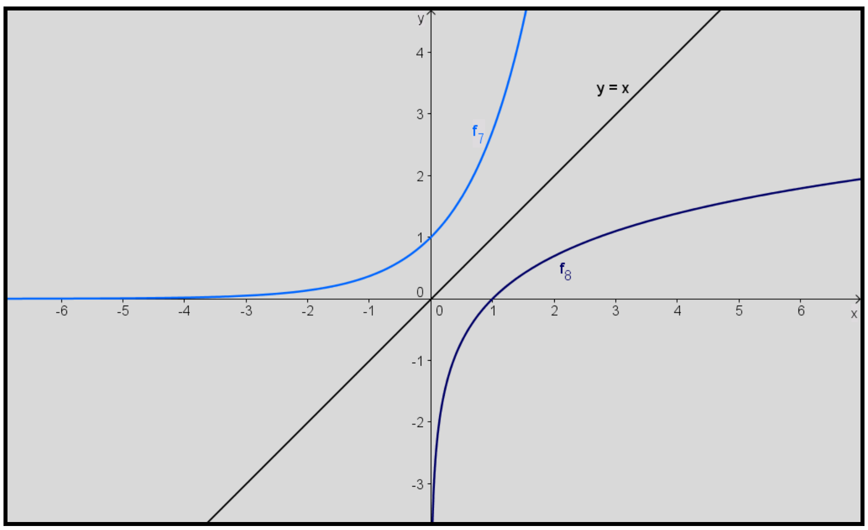
Vale destacar que, de modo semelhante ao que ocorre com as curvas exponenciais, Os pontos das curvas $y = \log_2 x$ e $y - {}^{-}1 = \log_2 x$, bem como os pontos das curvas $y = \log_2 x$ e $y - {}^{+}1 = \log_2 x$ que apresentam mesmo valor de abscissa possuem os valores das ordenadas diferindo de uma unidade a menos ou a mais respectivamente, apesar desse deslocamento não ser tão perceptível devido à proximidade da curva com o eixo Y à medida que o valor de x tende a zero.

Existe ainda a possibilidade de ambos os coeficientes *b* e *d* serem não nulos e a expressão algébrica da curva apresentar a forma $y = b + \log_a(x+d)$, que pode ser reescrita na forma $y - {}^{\pm}b = \log_a(x - {}^{\pm}d)$. Nesse caso, a obtenção da curva se dará tanto por uma translação horizontal quanto vertical.

Apresentaremos um exemplo envolvendo a função logarítmica onde a base é o número *e* (número neperiano). Sua lei de formação é $y = \ln x$ que significa $y = \log_e x$. A inversa dessa função é a exponencial de base *e*, cuja lei de formação é $y = e^x$.

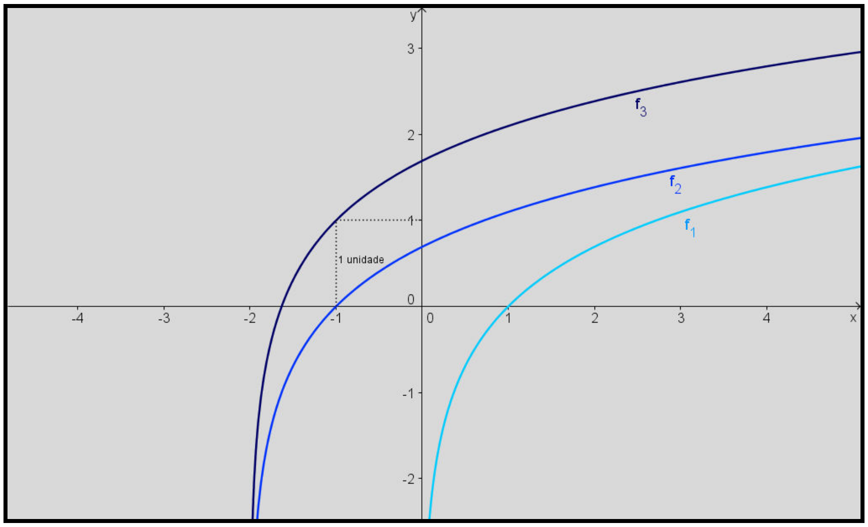
Usando a idéia inicial de nossa proposta, a curva $y = e^x$ pode ser obtida com o auxílio de uma tabela de pontos. Conhecendo essa curva, podemos utilizá-la como base para obter a curva inversa $y = \ln x$, aplicando simetria em relação à reta $y = x$ conforme a figura 3.39.

Figura 3.39 – Obtenção da curva f_8: $y = \ln x$ por simetria em relação à reta $y = x$, tendo como base a curva f_7: $y = e^x$.



Conhecendo a curva $y = \ln x$, podemos obter, por exemplo, a curva $y = 1 + \ln(x+2)$, pois elas apresentam a mesma base e $y = 1 + \ln(x+2)$ pode ser escrita como $y - {}^{+}1 = \ln(x - {}^{-}2)$. Então, utilizando como curva base a curva $y = \ln x$ e tranladando-a horizontalmente duas unidades para a esquerda e uma unidade verticalmente para cima chegamos ao esboço de $y - {}^{+}1 = \ln(x - {}^{-}2)$, ou seja, $y = 1 + \ln(x+2)$, conforme pode ser observado na figura 3.40.

Figura 3.40 – f_1: $y = \ln x$, f_2: translação horizontal de f_1 ($y = \ln(x - {}^{-}2)$) e f_3: $y = 1 + \ln(x+2)$.



3.8.2 – Considerações

Destacaremos aqui os pontos principais do esboço de curvas das funções do tipo logarítmicas tais como: curvas base, simetria e o uso da translação como recurso.

A curva base para o esboço de curvas das funções do tipo logarítmicas é a curva f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tais que $y = \log_a x$, sendo $a \in \mathbb{R}_+^*, a > 1$, obtida por simetria em relação à reta $y = x$ a partir da curva da função exponencial de mesma base *a*.

As funções logarítmicas de base *a* tais que $0 < a < 1$, podem ser obtidas por simetria em relação ao eixo X, a partir das curvas das funções logarítmicas cuja base *a* é inversa, ou seja, $a > 1$, então já conhecidas.

O esboço de curvas, cujas expressões algébricas podem ser escritas na forma $y - {}^{\pm}b = \log_a x$, pode ser obtido por translação vertical da curva $y = \log_a x$ de *b* unidades nos sentidos para cima ou para baixo, conforme o coeficiente *b* seja acompanhado do sinal “+” ou “-” respectivamente.

Já o esboço de curvas, cujas expressões algébricas podem ser escritas na forma $y = \log_a(x - {}^{\pm}d)$, pode ser obtido por translação horizontal da curva $y = \log_a x$ de *d* unidades nos sentidos para a direita ou para a esquerda, conforme o coeficiente *d* seja acompanhado do sinal “+” ou “-” respectivamente.

Caso a expressão possa ser escrita na forma $y - {}^{\pm}b = \log_a(x - {}^{\pm}d)$, onde *b* e *d* são não nulos, a curva pode ser obtida por uma translação em duas etapas, uma na direção horizontal e outra na direção vertical, onde os sentidos dos deslocamentos são dados pelos sinais dos coeficientes *b* e *d* conforme visto anteriormente.

O uso da simetria bem presente como propriedade figural das funções do tipo logarítmicas e da translação como recurso, nos permitiu a realização de um esboço de curvas mais distante, sempre que possível, do procedimento por pontos, com o intuito de direcionar o olhar para uma visão perceptora das modificações do esboço da curva paralelamente às modificações da equação conforme preconiza Duval(1988), para que ocorra a compreensão desse objeto matemático.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise realizada em livros didáticos confirmou nossos indicativos de que a maior parte desses livros que são acessíveis tanto aos professores quanto aos alunos, propõem um esboço de curvas baseado em um procedimento pontual que desfavorece a leitura e interpretação correta das variáveis envolvidas e, segundo Duval (1988) não oferece subsídios para o sentido da conversão inversa, ou seja, que vai do gráfico à expressão algébrica. Apesar de já haver o uso de algumas propriedades figurais por parte de alguns autores como constatamos em Dante (2004), essa forma de proceder ainda não aparece nos livros de forma sistematizada e com generalizações, ficando restritamente apresentada em alguns exemplos ou exercícios resolvidos.

Longe de ser um estudo fechado e concluído, nossa proposta procurou mostrar uma forma diferente de abordar o esboço de curvas, de maneira a favorecer a compreensão da curva como um todo a partir da conversão entre as formas de representação expressão algébrica e representação gráfica considerando propriedades de cada tipo de curva analisada e aplicando tratamentos específicos em cada forma de representação: tratamento algébrico nas expressões e deslocamentos no plano nas representações gráficas.

Fazendo um recorte em nosso objeto de pesquisa, optamos pelo esboço de curvas das funções seno e cosseno como representativas do grupo das funções trigonométricas e pelas funções exponenciais e logarítmicas, para continuar um trabalho que já existia com relação à parábola, gráfico da função quadrática realizado por Moretti (2003), e que Raymond Duval foi pioneiro em 1988, apresentando às diferenciações entre as maneiras se tratar o esboço de curvas, detalhando cuidadosamente o esboço de retas.

Nosso estudo, norteado pelos escritos de Duval e Moretti, buscou em conceitos como função inversa e funções pares e ímpares que às vezes são abordados apenas de maneira algébrica, a simetria de curvas, uma propriedade geométrica de grande auxílio para a realização dos esboços no plano. E buscou também, nos conceitos de simetria e translação que podem ser tratados apenas como transformações geométricas em disciplinas de desenho, uma relação com a álgebra à medida que favorecem a interligação entre a expressão de uma curva e seu esboço no plano para a compreensão desse objeto matemático.

Quanto ao uso da translação, cumpre ressaltar o padrão que pode ser observado em todos os grupos de funções: a soma de uma constante real às variáveis indica deslocamentos horizontais e/ou verticais e, além disso, a convenção utilizada para expressar os sinais dessas constantes favorece a compreensão do sentido das translações diminuindo ou evitando possíveis problemas de congruência semântica.

Outra percepção possível na correspondência entre as unidades significativas da escrita algébrica e as variáveis visuais da representação gráfica é com relação aos coeficientes multiplicadores da variável dominante (no caso x) cuja influência é direta no formato da curva provocando expansões, contrações, etc.

Nossa pesquisa focou-se no estudo analítico de algumas curvas estudadas no ensino médio. No entanto, outras curvas poderiam ser estudadas com o mesmo enfoque sendo elas gráfico de funções ou não. Citamos com exemplo elipses, circunferências e hipérboles que também são vistas no ensino médio e não foram aqui abrangidas. Ou ainda, um estudo centrado no nível superior poderia analisar o uso de propriedades figurais no esboço de sólidos como esferas, parabolóides e cones, entre outros.

Não tivemos a intenção de atingir diretamente estudantes do nível médio de ensino, para tanto, um desdobramento possível de nossa pesquisa seria a elaboração de seqüências didáticas baseadas na forma aqui apresentada de conceber o esboço de curvas, onde softwares matemáticos poderiam ser usados como ferramentas de auxílio.

Ressaltamos que esta forma de abordar o esboço de curvas permite uma visão mais completa do conjunto traçado/eixo, das propriedades específicas de cada grupo de curvas e da percepção das diferenças e semelhanças entre curvas de um mesmo grupo, bem como da percepção em conjunto das modificações da expressão algébricas e do esboço gráfico da curva, a fim de que essas duas formas sejam reconhecidas como representações de um mesmo objeto, hipótese fundamental para a compreensão (DUVAL, 1993).

Uma aprendizagem que garanta essas percepções permitirá a aplicação desse conhecimento em outras áreas, favorecendo a compreensão e a interpretação de situações e fenômenos que podem ser representados pelo esboço de curvas, de modo que adquirir todo esse conhecimento não tenha um fim em si mesmo, mas sirva de instrumento para a aquisição de outros.

REFERÊNCIAS

BARRETO Filho,Benigno ; SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática Aula por Aula.**Vol 1.Editora FTD, São Paulo, 2003.

BASSOI, Tania Stella. **Uma professora, seus alunos e as representações do objeto matemático funções em aulas do ensino fundamental.** Paraná, 2006. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná.

BIANCHINI, Edwaldo ; PACCOLA, Herval. **Matemática**. Editora Moderna, São Paulo,2004.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ministério da Educação e Cultura. Disponível em: www.mec.gov.br. Acesso em: 23 de julho de 2004.

BRASIL. **Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – PNLEM/2006.** Ministério da Educação,Secretaria da Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, 2004.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorin. **Representações Semióticas no Ensino : Contribuições para Reflexões acerca dos Currículos de Matemática Escolar.** Florianópolis, 2008. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Educação, Ciências Físicas, Biológicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** Editora Ática. São Paulo, 2004.

DUVAL, R. **Graphiques e équations: l'articulation de deux régistres. Annales de didactique et de sciences cognitives**, v1, p.235-253, 1988.

DUVAL, R. **Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?** RDM, v16, n3, p.349-382, 1996.

DUVAL, R. **Registre de représentation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Strasbourg : IREM – ULP, 1993.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Org. Sílvia Dias Alcântara Machado. Campinas: Papirus, 2003.

DUVAL, R. **Semiosis y Pensamento Humano – Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.** Universidad del Valle. Instituto de Educación e Pedagogía.Ciudad Universitaria Meléndez. 2004.

FERNANDEZ, Vicente Paz;YOUSSEF, Antônio Nicolau. **Matemática para o 2° grau: curso completo.**Editora Scipione, São Paulo, 1994.

FERREIRA, Aurélio B. H. **Dissionário Aurélio**. 2ª edição. Editora Nova Fronteira S.A, Rio de Janeiro, 1986.

FLEMMING, Diva M.; GONÇALVES, Mirian B. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração**. 5ª ed.Editora Makron. São Paulo, 1992.

IEZZI,Gelson;DOLCE,Osvaldo;DEGENSZAJN,David;PÉRIGO,Roberto. **Matemática.**Vol único. Editora Atual, São Paulo,2002.

IEZZI,Gelson;DOLCE,Osvaldo;DEGENSZAJN,David;PÉRIGO,Roberto;ALMEIDA, Nilze de. **Matemática – Ciência e Aplicações**.Vol 1 e 2. Editora Atual, São Paulo,2004.

IEZZI,Gelson;MURAKAMI,Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar: conjuntos, funções**. Vol 1. 7ª edição. Editora Atual, São Paulo, 1993.

LONGEN, Adilson. **Matemática - Uma Atividade Humana**. Base Editora e gerenciamento pedagógico. São Paulo, 2004.

LOPES JUNIOR, Dejahyr. **Função do 1º grau: um estudo sobre seus registros de representação semiótica por alunos da 1ª série do ensino médio.** Mato Grosso do Sul, 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

MORETTI, Méricles T. **A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais**. In Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Org. Sílvia Dias Alcântara Machado. Campinas: Papirus, 2003.

MORETTI, Méricles T. **O papel dos Registros de Representação na Aprendizagem de Matemática.** Contra Pontos - Revista de Educação da Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, n.6, set/dez 2002.

MURDOCH, David C. **Geometria Analítica**. 2ª edição, Livros Técnicos e Científicos editora ltda, Rio de Janeiro, 1971.

PAIVA, Manoel R. **Matemática**. Editora Moderna, São Paulo, 2004.

PUTNOKI, José C. **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico**. Vol. 2. 2ª edição. Editora Scipione, São Paulo, 1991.

RICH, Barnett. **Teoria e Problemas de Geometria**. Traduzido por Irineu Bicudo (UNESP). 3ª edição. Editora Bookman. São Paulo, 2003.

RUGGIERO, Márcia A.G.; LOPES, Vera L. **Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2ª edição, Makron Books, São Paulo,1996.

SMOLE, Kátia C.S.; VIEIRA, Maria Ignez de S.; KIYUKAWA, Rokusaburo. **Matemática – Ensino Médio**. Saraiva livreiros editores S/A. São Paulo, 2004.

ANEXOS

Tabela com a árvore de possibilidades de modificações das variáveis visuais e valores no esboço de retas seguida da representação gráfica de cada exemplo.

	VARIÁVEIS VISUAIS			
	Sentido de Inclinação	**Ângulo com os Eixos**	**Posição sobre o eixo**	**exemplo**
VALORES	Ascendente	Partição simétrica	Corta acima	y = x + 1
			Corta abaixo	y = x – 1
			Corta na origem	y = x
		Menor que 45°	Corta acima	y = 0.5x + 2
			Corta abaixo	y = 0.5x – 2
			Corta na origem	y = 0.5x
		Maior que 45°	Corta acima	y = 2x + 3
			Corta abaixo	y = 2x – 3
			Corta na origem	y = 2x
	Descendente	Partição simétrica	Corta acima	y = - x + 1
			Corta abaixo	y = - x -1
			Corta na origem	y = -x
		Menor que 45°	Corta acima	y = - 0.5x + 2
			Corta abaixo	y = - 0.5x – 2
			Corta na origem	y = - 0.5x
		Maior que 45°	Corta acima	y = - 2x + 3
			Corta abaixo	y = - 2x - 3
			Corta na origem	y = - 2x

Figura 1.5

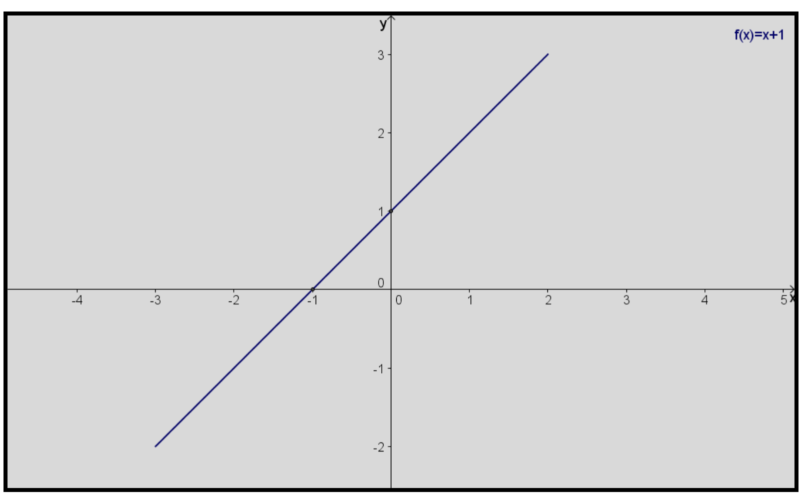


Figura 1.6

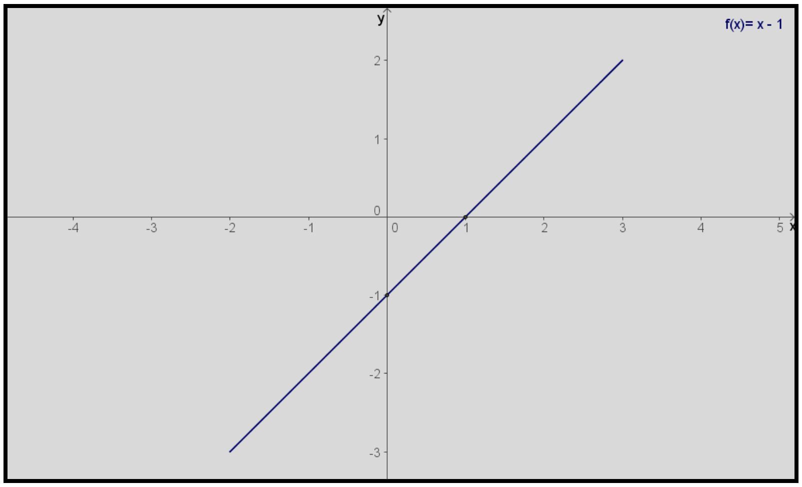


Figura 1.7

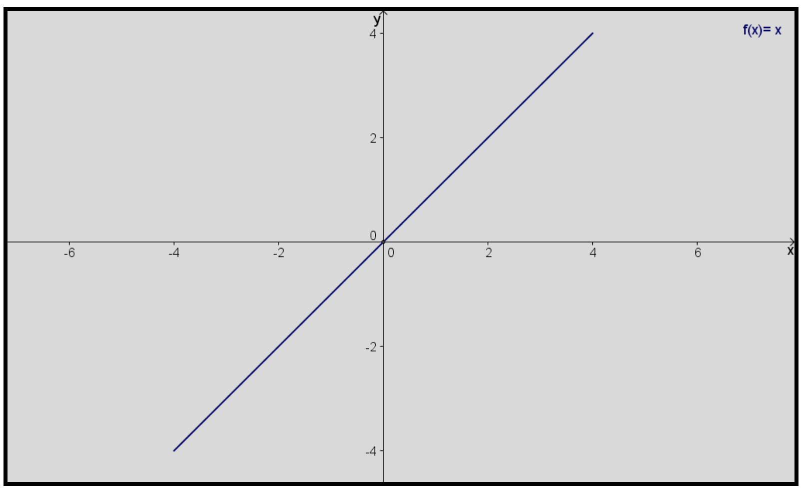


Figura 1.8

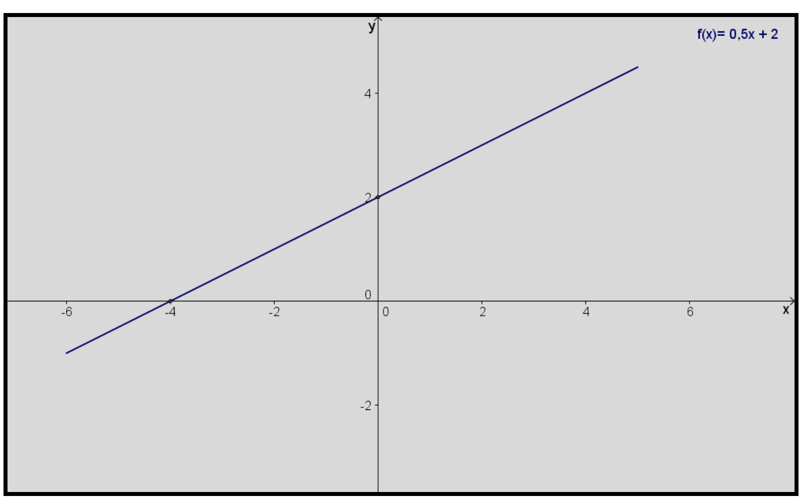


Figura 1.9

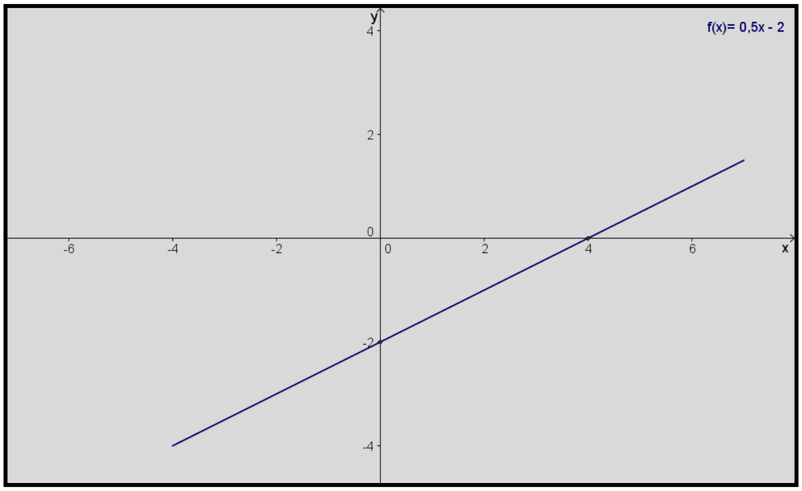


Figura 1.10

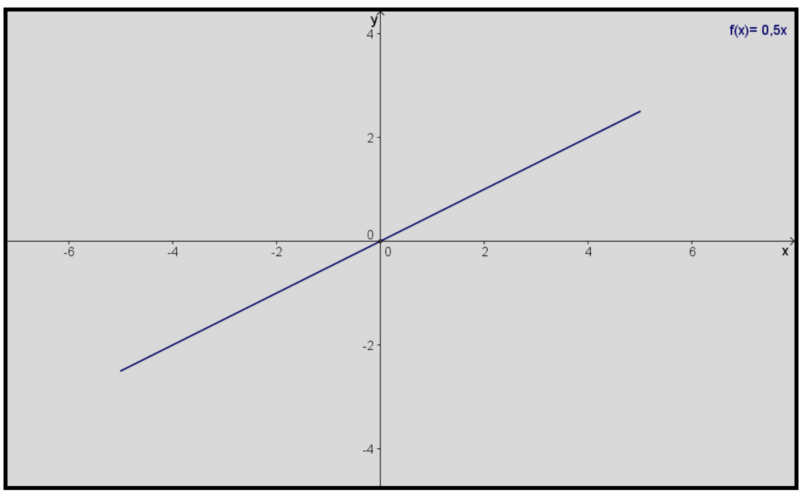


Figura 1.11

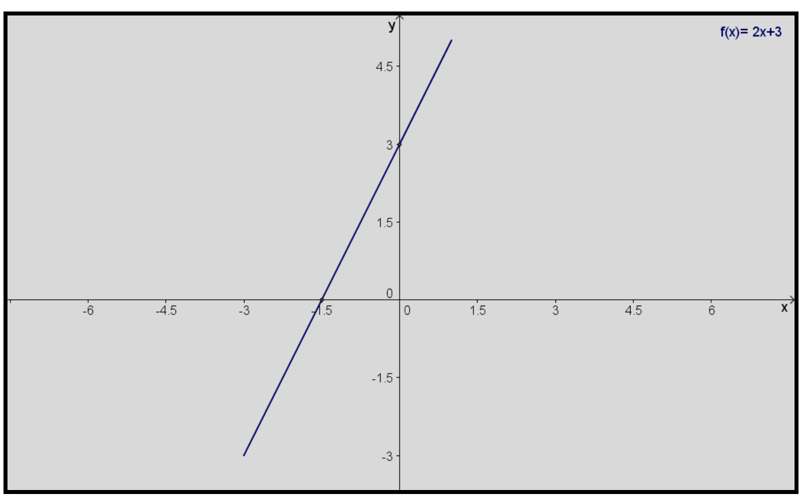


Figura 1.12

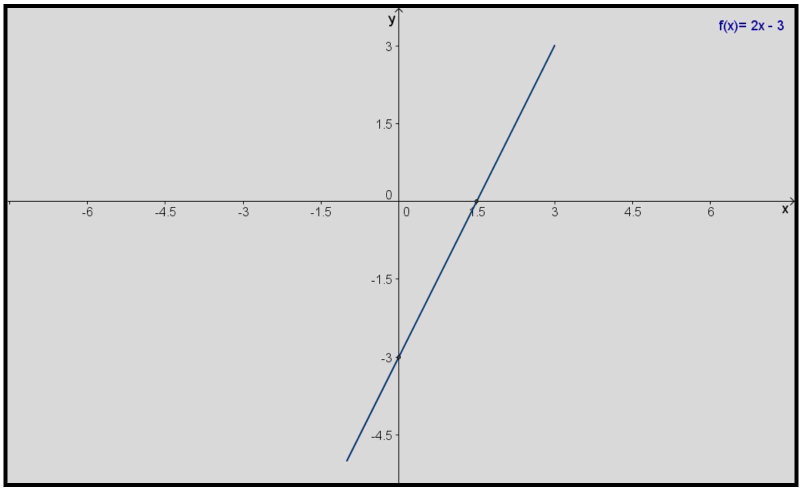


Figura 1.13

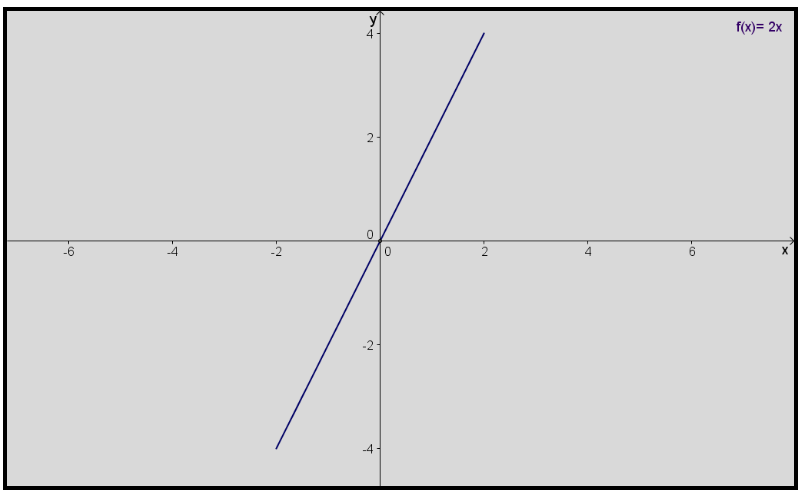


Figura 1.14

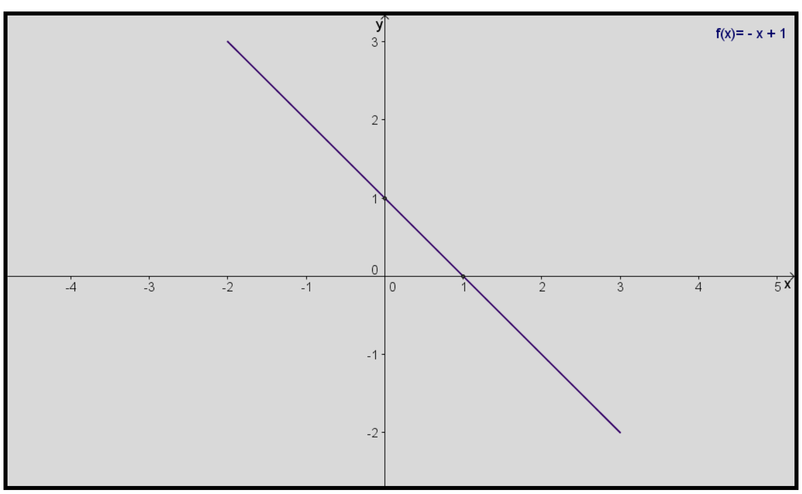


Figura 1.15

Figura 1.16

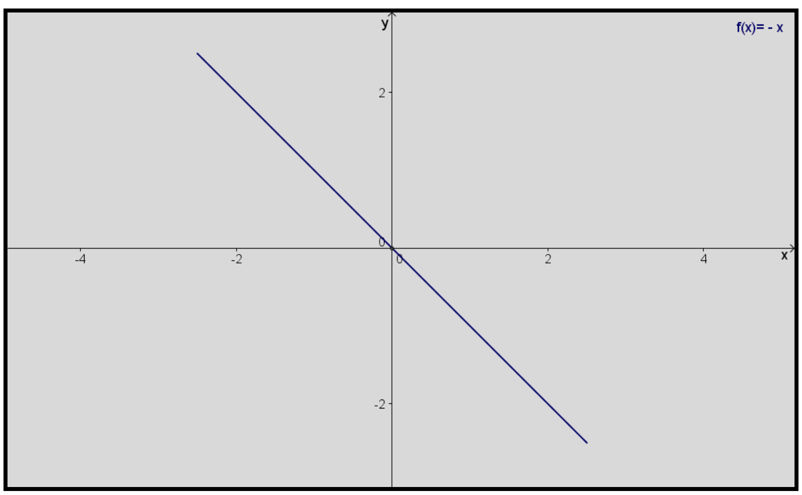


Figura 1.17

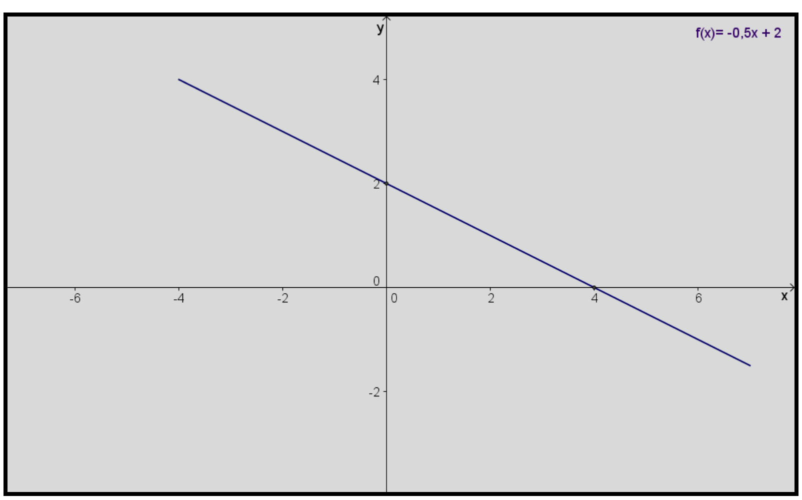


Figura 1.18

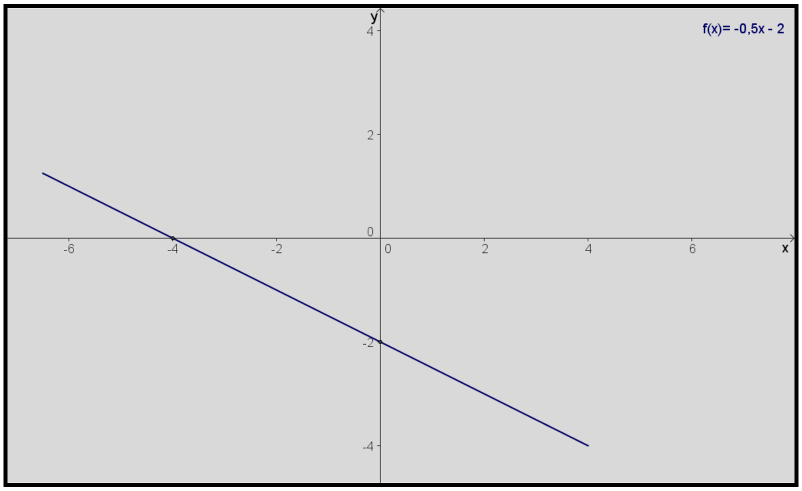


Figura 1.19

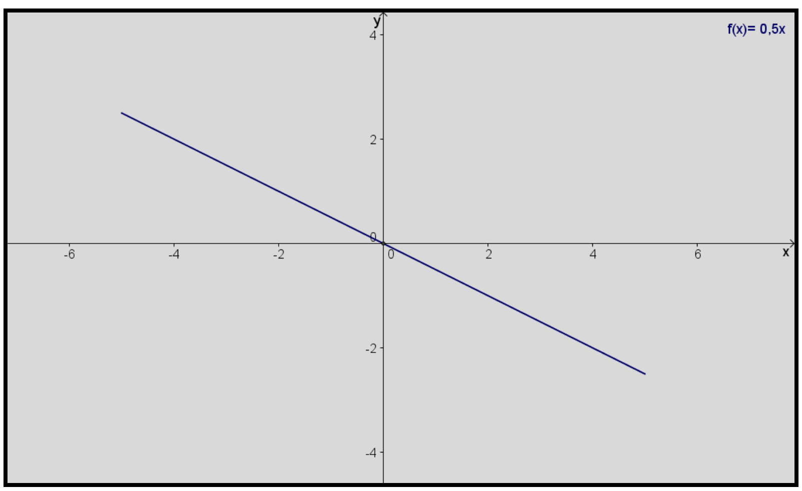


Figura 1.20

Figura 1.21

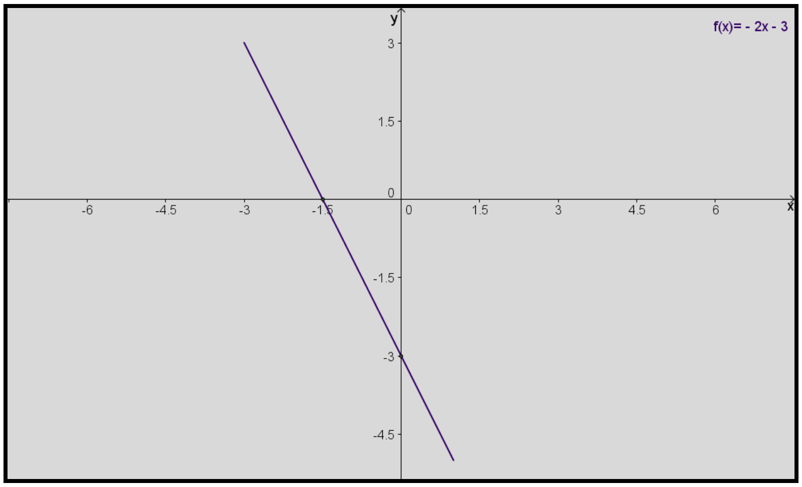


Figura 1.22