Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Estabilização do Sistema Termoelástico com Dissipação Localizada: Domínio Limitado e Domínio Exterior

Gilberto Elias Dallastra

Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis
Março de 2008

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Estabilização do Sistema Termoelástico com Dissipação Localizada: Domínio Limitado e Domínio Exterior

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Gilberto Elias Dallastra
Florianópolis
Março de 2008

Estabilização do Sistema Termoelástico com Dissipação Localizada: Domínio Limitado e Domínio Exterior

por

Gilberto Elias Dallastra

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre” em Matemática ,
Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Clóvis Caesar Gonzaga
Coordenador da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Cláudio R. Ávila da Silva Junior (UTFPR)

Prof. Dr. Gustavo Adolfo T. F. da Costa (UFSC)

Prof. Dr. Jaúber Cavalcante de Oliveira (UFSC)

Florianópolis, Março de 2008.

A Deus.

Em memória de Silvio Dallastra.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por permitir e tornar possível a conclusão deste trabalho.

Agradeço a minha esposa, Eliane que em muito me apoiou, para se concluir esta importante fase de minha vida.

Meus sinceros agradecimentos, ao professor Dr. Ruy Coimbra Charão que não somente orientou este trabalho, mas se mostrou um excelente profissional, uma pessoa de grande índole e um grande amigo.

A meus familiares e amigos, que me apoiaram nestes anos de estudo e que, de uma forma ou outra, não mediram esforços para se concluir este trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSC, os quais tive a oportunidade de convívio e em especial aos professores, a secretária e ao coordenador da Pós-Graduação desse Departamento.

Também, aos colegas e amigos do Bacharelado em Matemática, e do mestrado, que muitas alegrias e horas de estudos compartilhamos.

Finalmente, agradeço ao CNPQ pelo auxílio financeiro durante o período de março de 2007 a fevereiro de 2008.

Resumo

Neste trabalho estudamos o sistema termoelástico linear em um domínio limitado sob efeito de uma dissipação linear localizada em uma vizinhança da fronteira do domínio e obtemos que a energia decai exponencialmente. Também, estudamos o mesmo sistema em um domínio exterior com dissipação linear localizada próximo do infinito. Mostramos a estabilização da energia com taxa polinomial. Para isso foi necessário como em [5] impor restrições adicionais nos coeficientes de Lamé do sistema.

Abstract

In this work we study the linear thermoelastic system on a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with a linear dissipation localized in a neighborhood of part of the boundary of the domain and we obtain the exponential decay of the energy. Also, we study the same system in the exterior domain with some linear dissipations localized near infinity. To prove that the energy decays to zero in a polynomial decay rate we assume the same additional restriction as in [5] on the Lamé coefficients.

Sumário

Introdução **1**

1 Notação e Resultados Preliminares **4**

1.1 Notação 4

1.2 Alguns resultados da teoria de semigrupos 5

1.2.1 Operadores lineares limitados 5

1.2.2 Semigrupos de classe C_0 6

1.2.3 Caracterização dos geradores de semigrupos de classe C_0 . . . 8

1.2.4 Teorema de Hille-Yosida 8

1.2.5 Teorema de Lumer-Phillips 9

1.2.6 Operadores lineares não limitados 10

1.3 Espaços de Sobolev 12

2 O Sistema Termoelástico em um Domínio Limitado **15**

2.1 Introdução 15

2.2 Formulação Variacional 16

2.3 Existência, Unicidade de soluções fortes 18

2.4 Lema de Nakao 25

2.5 Identidades de Energia 26

2.6 Estimativas de Energia 40

2.7 Estimativa Fundamental 53

2.8 Prova do Teorema de Estabilização 61

3 O Sistema Termoelástico em um Domínio Exterior **63**

3.1 Introdução 63

3.2 Existência e Unicidade 64

3.3 Estabilização da Energia 74

3.4 Lemas Técnicos 75

3.5 Prova do Teorema (3.5) 92

Bibliografia **93**

Introdução

Neste trabalho, estudamos o sistema termoelástico com uma dissipação linear localizada em parte do domínio. O trabalho é dividido em três capítulos. No primeiro capítulo apresentamos a notação utilizada no decorrer de todo o trabalho e ainda destacamos alguns conceitos e resultados básicos sobre a teoria de semigrupos, espaços de Sobolev e de Análise Funcional.

No segundo capítulo, estudamos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira associado ao sistema termoelástico:

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 \triangle u - (b^2 - a^2)\nabla div\, u + \nabla\theta + \alpha(x) u_t = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0 \\
\theta_t - \triangle\theta + div\,(u_t) = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0 \\
u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega \\
\theta(x,0) = \theta_0(x) & x \in \Omega \\
u(x,t) = 0 = \theta(x,t) & x \in \partial\Omega, \quad t > 0
\end{cases}
$$

em um domínio limitado Ω do $\mathbb{R}^n$.

O termo $\alpha(x)\, u_t$ representa uma dissipação de energia no sistema. A função $\alpha(x)$ que localiza o termo dissipativo é tal que $\alpha(x) \geq 0,\ \alpha \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ para $x \in w \subset \Omega$, com w uma vizinhança de parte da fronteira de Ω. Notamos que $u(x,t) = (u^1(x,t),\ \cdots,\ u^n(x,t))$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$ para cada (x,t) fixado. Aqui $\Delta\, u = (\Delta u^1(x,t),\ \cdots,\ \Delta\, u^n(x,t))$ é o operador Laplaciano de u, $div\, u$ é o divergente usual de u e ∇ é o operador gradiente. A função θ representa a distribuição da temperatura no domínio Ω. Os coeficientes a e b estão relacionadoss com coeficientes de Lamé μ e λ da Teoria de Elasticidade. De fato, temos $a^2 = \mu$ e $b^2 = \lambda + 2\mu$ com $b^2 - a^2 > 0$.

Para este problema apresentamos apenas um breve roteiro sobre o estudo da existência e unicidade de soluções fortes, usando o método de Faedo-Galerkin, visto que uma prova análoga, para a equação vetorial da onda sob efeito térmico, já foi feita detalhes em [20].

Assim, no capítulo 2 fazemos com mais detalhes a análise do decaimento exponencial da energia total desse sistema usando o lema de Nakao, e argumentos da continuação única.

No capítulo 3, estudamos o seguinte problema termoelástico

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\triangle u - (b^2 - a^2)\nabla div\, u + \nabla\theta + \alpha(x)u_t = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \theta_t - \triangle\theta + div\, u_t + \mathcal{X}_R\theta = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega \\ \theta(x,0) = \theta_0(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 = \theta(x,t) & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \end{cases}$$

em um domínio exterior Ω, isto é, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ com $\mathcal{O}$ um conjunto compacto do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Aqui $\mathcal{X}_R$ é a função característica do conjunto

$$\Big\{x \in \Omega / \; ||x|| \geq R\Big\}, \qquad R > 0.$$

Neste problema, temos novamente que $u = (u^1, \ldots, u^n)$ com $u^i = u^i(t,x)$, $\triangle u = (\triangle u^1, \ldots, \triangle u^n)$, $u_t = (u^1_t, \ldots, u^n_t)$, $u_{tt} = (u^1_{tt}, \ldots, u^n_{tt})$, ∇ é o operador gradiente e $div\, u$ é o divergente de u.

Assumimos que $0 \notin \overline{\Omega}$ e $\partial\Omega \subset B_R(0) := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\Big\}$ para algum $R > 0$. A função $\alpha(x)$ que localiza a dissipação é limitada e $\alpha(x) \geq 0$ em Ω. Os coeficientes a e b estão relacionados com os coeficientes de Lamé da Teoria de Elasticidade. A teoria de Elasticidade impõe que $b^2 > a^2 > 0$. Neste trabalho assumimos a condição adicional que $4a^2 > b^2$.

Para este problema provamos, no capítulo 3, a existência de uma única solução (u, θ), usando a teoria de semigrupos. Também obtemos a estabilização da energia total do sistema com taxa de $\dfrac{1}{t}$. Também provamos a limitação da norma L^2 da solução.

Destacamos aqui alguns trabalhos importantes com respeito ao sistema termoelástico. Dafermos [6] estudou o sistema termoelástico unidimensional sem termo dissipativo e mostrou que a energia decai para zero. No entanto, não mostrou taxa de decaimento. Rivera [28] estudou o mesmo sistema que Dafermos e mostrou que a energia decai exponencialmente, devido à influencia do efeito térmico. Pereira-Menzala [25] estudaram o sistema termoelástico em alta dimensão e mostram decaimento exponencial sob influencia de uma dissipação. Racke [26], estudou o sistema termoelástico em três dimensões. Ainda, em [27] estudou problemas em termoelasticidade. Em [3] Bisognin-Charão estudaram o sistema de elasticidade em um domínio limitado com dissipação localizada não linear.

Em [5] Charão-Ikehata estudaram o sistema de elasticidade em um domínio exterior. Sobre o estudo de estabilidade assintótica para, problemas em um domínio exterior também citamos os trabalhos de Ikehata [9], [10], [11], Ikehata-Matsuyama [12] e Ikehata-Tanizawa [13] e Nakao [22]. Em Charão-Oliveira [23] foi estudado a equação da onda com dissipação não linear.

Para mais referências bibliográficas a respeito de problemas em domínio limitado ou em domínio exterior pode-se consultar as referências dos trabalhos acima citados.

Capítulo 1

Notação e Resultados Preliminares

1.1 Notação

1. $\mathbb{K}$ indica o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

2. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

4. Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, então o gradiente de f, que será denotado por ∇f, é definido como o vetor de $\mathbb{R}^n$ dado por $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

5. Se $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$ é um campo vetorial de classe C^1, definimos o divergente de $F(x)$, denotado por $div\, F$ como $div\, F = \nabla \cdot F = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}$, onde ∇ é o operador definido como $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n} \right)$.

6. O Laplaciano de uma função f é definida como $div\,(\nabla f) = \nabla \cdot \nabla f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ e é denotado por $\triangle f$.

7. $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{L^2(\Omega)}$.

8. $\|\nabla u\|^2_{[L^2(\Omega)]^n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|\nabla u^i\|^2_{L^2(\Omega)}$,

9. $(h : \nabla u) = (h \cdot \nabla u^1, h \cdot \nabla u^2, \cdots, h \cdot \nabla u^n)$,

10. $D_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$,

11. $\|\nabla u^i\|^2_{L^2(\Omega)} = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u^i(x)|^2 dx$, com u^i é a i-ésima componente do vetor $u = (u^1, u^2, \ldots, u^n)$.

Neste trabalho também denotamos $\|\nabla u\|^2$ como sendo $\|\nabla u\|^2_{[L^2(\Omega)]^n}$ e $\|u\|^2$ como sendo $\|u\|^2_{[L^2(\Omega)]^n}$.

1.2 Alguns resultados da teoria de semigrupos

1.2.1 Operadores lineares limitados

Os próximos resultados de semigrupos podem ser encontrados em Pazy [24], Alvercio [7] ou Kreyszig [15].

Definição 1.1. *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador linear entre X e Y é uma aplicação linear $A : D(A) \subset X \to Y$, com $D(A)$ o domínio de A um subespaço vetorial de X. Dizemos que o operador linear é limitado se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X, \quad \forall u \in D(A).$$

Definição 1.2. *Representamos por $B(X,Y)$ a família dos operadores lineares limitados de X em Y. A função real $\|\cdot\|$ definida por*

$$\|A\| = \|A\|_{B(X,Y)} = \sup_{\{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}} \|Ax\|_Y < \infty,$$

é uma norma sobre $B(X,Y)$.

Definição 1.3. *Seja A_n uma seqüência em $B(X,Y)$ com $n = 1, 2, \cdots$. Dizemos que A_n é convergente se existir $A \in B(X,Y)$ tal que $\|A_n - A\| \to 0$ quando $n \to \infty$ e escrevemos $A_n \to A$.*

1.2.2 Semigrupos de classe C_0

Definição 1.4. *Seja X um espaço de Banach e $B(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X em X. Uma família $\Big\{S(t)\Big\}_{t\geq 0}$ é um Semigrupo de operadores lineares e limitados sobre X se:*

(a) $S(0) = I,\quad$ *com I operador identidade de X;*

(b) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+.$

Além disso, dizemos que o semigrupo $\Big\{S(t)\Big\}_{t\geq 0}$ é de Classe C_0 se

(c) $\lim_{t\to 0^+} \|[S(t) - I]x\| = 0, \quad \forall x \in X.$

Proposição 1.5. *Se $\Big\{S(t)\Big\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 então $\|S(t)\|$ é uma função limitada em qualquer intervalo limitado $[0, T]$.*

Demonstração em Pazy [24], Alvercio [7] ou Kreyszig [15].

Proposição 1.6. *Seja $\Big\{S(t)\Big\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0. Então*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = w_0 \tag{1.1}$$

e para cada $w > w_0$, existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\| \leq M e^{wt}, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.2}$$

Demonstração em Pazy [24], Alvercio [7] ou Kreyszig [15].

Definição 1.7. *Seja X espaço de Banach e seja $\Big\{S(t)\Big\}_{t\geq 0}$ semigrupo de classe C_0. O operador linear $A : D(A) \subset X \to X$, definido por $D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \quad \text{existe} \right\}$ e $Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \forall x \in D(A)$, é chamado Gerador Infinitesimal ou simplesmente Gerador do semigrupo $\Big\{S(t)\Big\}_{t\geq 0}$.*

Notamos que $D(A) \neq \emptyset$ pois $0 \in D(A)$.

Proposição 1.8. *Seja A o gerador do semigrupo de classe C_0, $\Big\{S(t)\Big\}_{t\geq 0}$. Temos que*

(i) *Se $x \in D(A)$ e $t \geq 0$, então $S(t)x \in D(A)$ e a função de $\mathbb{R}^+ \to X$, dada por: $t \mapsto S(t)x$ é diferenciável e*

$$\frac{d(S(t)x)}{dt} = AS(t)x = S(t)Ax, \quad x \in D(A). \tag{1.3}$$

(ii) *Se $x \in D(A)$, então*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Axd\tau. \tag{1.4}$$

(iii) *Se $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$ com $t \geq 0$, então*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x\, d\tau \;=\; S(t)x. \tag{1.5}$$

(iv) *Para $x \in X$, tem-se $\displaystyle\int_0^t S(\tau)xd\tau \in D(A)$ e além disso,*

$$S(t)x - x = A\int_0^t S(\tau)xd\tau. \tag{1.6}$$

Demonstração em Pazy [24], Alvercio [7] ou Kreyszig [15].

Observação 1.9. *Notamos que o item (i) da proposição (1.8) diz que se $x \in D(A)$ então as função $u(t) = S(t)x$ é solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u = Au, \quad t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{1.7}$$

com $u \in C^1(0,\infty;X) \cap C(0,\infty,D(A))$.

Assim, se queremos achar a solução de um problema do tipo (1.7) em algum espaço de Banach X, devemos tentar verificar se A é gerador de algum semigrupo de classe C^0.

Proposição 1.10. *O gerador de um semigrupo de classe C_0 é um operador fechado com domínio denso em X.*

Demonstração em Pazy [24], Alvercio [7] ou Kreyszig [15].

1.2.3 Caracterização dos geradores de semigrupos de classe C_0

Definição 1.11. *Seja A um operador linear em X, sendo X um espaço de Banach. O conjunto dos números $\lambda \in \mathbb{C}$, para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é inversível e seu inverso é limitado e tem domínio denso em X é chamado Conjunto Resolvente de A e é representado por $\rho(A)$. O operador linear $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ é dito Resolvente de A.*

Teorema 1.12. *Seja $\Big\{S(t)\Big\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador. Considerando $\mathbb{R}e\lambda$ a parte real do número complexo λ, então, se $\mathbb{R}e\lambda > w_0$, sendo $w_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\log \|S(t)\|}{t}$, temos que $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\, dt, \qquad \forall x \in X. \tag{1.8}$$

Demonstração em Pazy [24], Alvercio [7] ou Kreyszig [15].

1.2.4 Teorema de Hille-Yosida

Um teorema importante que ajuda a decidir quando um operador linear A é gerador de um semigrupo de classe C^0 é o:

Teorema 1.13 (Hille-Yosida). *Seja X um espaço de Banach. Para que um operador linear A, definido em $D(A) \subset X$ e com valores em X seja gerador de um semigrupo de classe C_0, é necessário e suficiente que*

(i) *A seja operador fechado com domínio denso em X;*

(ii) *Existam M e w reais tais que, para cada real $\lambda > w$ se tenha $\lambda \in \rho(A)$ e para cada $n \in \mathbb{N}$*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}.$$

Neste caso, o semigrupo $\Big\{ S(t) \Big\}_{t \geq 0}$ satisfaz a condição $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$.

Demonstração em Yosida [29].

Definição 1.14. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é* **dissipativo** *relativamente a uma aplicação dualidade j, se*

$$\mathbb{R}e\,(Ax, j(x)) \leq 0, \quad \forall x \in D(A). \tag{1.9}$$

Proposição 1.15. *Se A for dissipativo relativamente a alguma aplicação dualidade, então*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \quad \forall \lambda > 0 \quad e \quad \forall x \in D(A). \tag{1.10}$$

Demonstração em Pazy [24], Alvercio [7] ou Kreyszig [15].

1.2.5 Teorema de Lumer-Phillips

Um outro resultado importante que caracteriza quando um operador linear A é gerador de um semigrupo de classe C^0 é o Teorema de Lumer-Phillips:

Observação 1.16. *No teorema abaixo é utilizado para facilitar a linguagem, a expressão $A \in G(M, w)$ para indicar que A é gerador de um semigrupo de operadores lineares limitados de classe C_0, digamos $\Big\{ S(t) \Big\}_{t \geq 0}$, que satisfaz a condição $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$. Quando $w = 0$ e $M = 1$ dizemos que $\Big\{ S(t) \Big\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações.*

Teorema 1.17 (Lumer-Phillips). *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Se $A \in G(1,0)$ então*

(i) *A é dissipativo relativamente a qualquer aplicação dualidade;*

(ii) *$R(\lambda - A) = X$, $\forall \lambda > 0$.*

Reciprocamente, se

(iii) *$D(A)$ é denso em X;*

(iv) *A é dissipativo relativamente a alguma aplicação dualidade;*

(v) *$R(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$;*

então $A \in G(1,0)$.

Demonstração Brezis [4].

1.2.6 Operadores lineares não limitados

Definição 1.18. *Seja H espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear não limitado. Dizemos que A é* **monótono** *se*

$$(Av, v) \geq 0, \qquad \forall v \in D(A).$$

Definição 1.19. *O operador A é dito* **maximal monótono**, *se A é monótono e ainda $R(I + A) = H$. Isto é, $\forall f \in H, \exists u \in D(A)$ tal que $(I + A)u = f$.*

Proposição 1.20. *Seja A um operador maximal monótono e H um espaço de Hilbert. Então,*

(a) *$D(A)$ é denso em H;*

(b) *A é um operador fechado.*

Com a ajuda do teorema de Lumer-Phillips (1.17) se pode provar facilmente o seguinte resultado (Brezis [4] pg. 104).

Teorema 1.21. *Seja A um operador maximal monótono em um espaço de Hilbert H. Então, para todo $u_0 \in D(A)$ existe uma única função*

$$u \in C^1([0,\infty); H) \cap C([0,\infty); D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Também,

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad e \quad \left\| \frac{du(t)}{dt} \right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração em Brezis [4] pg. 104.

O próximo teorema pode ser provado facilmente com ajuda do teorema do **ponto fixo.**

Teorema 1.22 (Cauchy, Lipschitz, Picard). *Seja X um espaço de Banach $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ gerador de um Semigrupo de classe C^0 e seja $F : X \to X$ uma aplicação globalmente Lipschitz, isto é:*

$$\|Fu - Fv\| \leq L\|u - v\|, \quad \forall u, v \in X$$

com $L > 0$ uma constante.
Então, para cada valor inicial $u_0 \in X$, existe único $u \in C([0,\infty), X)$ tal que u é solução fraca de

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = F(u), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Além disso, se $u_0 \in D(A)$ e X é reflexivo então (1.12) tem uma única solução clássica, isto é, $u \in C^1([0,\infty), X) \cap C([0,\infty), D(A))$, em $D(A)$ com a norma do gráfico.

A demonstração é encontrada em Brezis [4], pg.104.

1.3 Espaços de Sobolev

Os resultados da teoria dos espaços de Sobolev que relatamos a seguir podem ser encontrados em [21], [1] ou [14].

Definição 1.23. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. O Espaço de Sobolev, $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ f \in L^p(\Omega); D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\alpha| \leq m \Big\},$$

sendo D^α a derivada no sentido distribucional.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

A notação $H^m(\Omega)$ é usada para representar o espaço $W^{m,p}(\Omega)$, quando $p = 2$. O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\Big(f \, , \, g \Big)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \Big(D^\alpha f \, , \; D^\alpha g \Big)_{L^2(\Omega)}.$$

Definição 1.24. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Analogamente, $H_0^m(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$.*

Um resultado importante e nada trivial da teoria de espaços de Sobolev é o teorema do traço. Ele diz que para achar a solução de um problema de fronteira com condições de Dirichlet, basta procurar em $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 1.25 (Teorema do Traço). *Seja Ω um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular. Então existe uma função*

$$\gamma_o : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

que é sobrejetiva e $Ker(\gamma_o) = H_0^1(\Omega)$. *Além disso,* $\gamma_o u = u\mid_\Gamma$ *se* $u \in D(\Omega)$. *A função* γ_o *é chamada de função traço e* $\gamma_o u$ *o traço de* u *sobre* Γ.

A demonstração pode ser vista em Medeiros-Rivera [21] e Adams [1].

Proposição 1.26 (Teorema da divergência e fórmulas de Green). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado com fronteira bem regular. Então valem as seguintes fórmulas:*

$$\int_\Omega \Big(div\, F\Big)(x)\, dx = \int_\Gamma F(x)\cdot \eta(x)\, d\Gamma, \qquad F \in \left[H^1(\Omega)\right]^n, \tag{1.13}$$

$$\int_\Omega v(x)\triangle u(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla v(x)\cdot \nabla u(x)\, dx, \qquad v \in H_0^1(\Omega),\, u \in H^2(\Omega), \tag{1.14}$$

$$\int_\Omega v(x)\triangle u(x)\, dx = \int_\Omega \triangle v(x)\, u(x)\, dx, \qquad u, v \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega). \tag{1.15}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um aberto limitado com fronteira de classe* C^2 *e* $\eta = \eta(x)$ *a normal unitária externa no ponto* $x \in \Gamma$. *A função* F *integrada sobre* Γ *é no sentido da função traço, isto é* $\int_\Gamma F(x)\cdot\eta(x)\, d\Gamma$ *significa* $\int_\Gamma (\gamma\circ F)(x)\cdot \eta(x)\, d\Gamma$.

A demonstração dessa proposição pode ser vista em Kesavan [14] e ela utiliza o teorema do traço.

Corolário 1.27 (Desigualdade de Poincaré). *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *e* $1 \leq p < \infty$. *Então, existe uma constante* C, *dependendo somente de* Ω *e* p, *tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\, \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

A demonstração pode ser encontrada em Brezis [4].

O próximo resultado é muito usado para se provar a existência de solução de uma equação eliptica linear.

Teorema 1.28 (Lax-Milgram). *Seja H espaço de Hilbert e $a(u,v)$ forma bilinear contínua e coerciva sobre H. Seja $f \in H'$. Então, existe único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H.$$

A demonstração pode ser encontrada em Brezis [4], pg. 84.

A justificativa de mais regularidade da solução de um problema elíptico obtido com a ajuda do teorema de Lax-Milgram (1.28) é dado pelo

Teorema 1.29 (Regularidade Elíptica). *Sejam L um operador diferencial elíptico de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$, definido em um aberto regular $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in D'(\Omega)$, sendo $D'(\Omega)$ o espaço das distribuições. Seja u solução de $Lu = f$, no sentido das distribuições, com $f \in L^2(\Omega)$. Então, $u \in H^{2m}(\Omega)$.*

A demonstração pode ser encontrada em Agmon [2].

O teorema a seguir pode ser usado para passagem ao limite das soluções aproximadas via Método de Faedo - Galerkin para problemas de valor inicial e de fronteira.

Teorema 1.30 (Teorema de Rellich). *Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então $H_0^{m+1}(\Omega)$ está imerso compactamente em $H_0^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$. Além disso, se Ω for aberto limitado com a propriedade do m-prolongamento, então a imersão de $H^{m+1}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ é compacta.*

A demonstração pode ser vista em Medeiros- Rivera [21].

Proposição 1.31. *Sejam V_1 e V_2 espaços de Hilbert tal que V_1 está imerso continuamente em V_2. Seja, $W(0,T) = \left\{\phi \in L^p(0,T;V_1) : \dfrac{d\phi}{dt} \in L^p(0,T;V_2)\right\}$. Então $W(0,T)$ está imerso continuamente em $C(0,T;V_2)$.*

Esta proposição pode ser encontrada em Lions [18] e [19].

Capítulo 2

O Sistema Termoelástico em um Domínio Limitado

2.1 Introdução

Neste capítulo estudamos a existência, unicidade e estabilização de soluções fortes do Sistema Termoelástico descrito abaixo, usando o método de Faedo-Galerkin.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \triangle u - (b^2 - a^2)\nabla div\, u + \nabla\theta + \alpha(x) u_t = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \theta_t - \triangle\theta + div\, u_t = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega \\ \theta(x,0) = \theta_0(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 = \theta(x,t) & x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Aqui $u = u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t), \dots, u^n(x,t))$, $\theta = \theta(x,t)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$, é um conjunto aberto limitado regular do $\mathbb{R}^n$ sendo (u_0, u_1, θ_0) as condições iniciais do problema. A função $\alpha = \alpha(x)$ $\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que localiza no domínio o termo dissipativo $\alpha(x)\, u_t$ é uma função de $L^\infty(\Omega)$. Também observamos que $\triangle u = (\triangle u^1(x,t), \cdots, \triangle u^n(x,t))$, onde $\triangle u^i$ com $i = 1, 2, \cdots, n$ é o operador Laplaciano de u^i. O simbolo ∇ representa o operador gradiente e $div\, u$ o divergente usual de u. As constantes a e b, estão relacionadas com a teoria da elasticidade e $b^2 > a^2 > 0$. A função e $\alpha(x)$ é efetiva apenas em uma vizinhança de parte da fronteira de Ω, que representamos como de modo usual por $\partial\Omega$.

2.2 Formulação Variacional

Supondo que $(u(x,t),\theta(x,t))$ é uma solução regular de (2.1) em algum intervalo $[0,T]$ e tomando o produto interno em $\mathbb{R}^n$, que aqui indicamos por "·", da equação $u_{tt} - a^2\triangle u - (b^2-a^2)\nabla div\, u + \nabla\theta + \alpha(x)u_t = 0$, com $w \in [H_0^1(\Omega)]^n$ e integrando com relação a $x \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_{tt}\cdot w\,dx - \int_\Omega a^2\triangle u\cdot w\,dx - \int_\Omega (b^2-a^2)\nabla div\, u\cdot w\,dx \\ + \int_\Omega \nabla\theta\cdot w\,dx + \int_\Omega \alpha(x)u_t\cdot w\,dx = 0.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Calculamos em separado alguns termos. Para isso, fazemos uso da proposição 1.26.

$$-\int_\Omega a^2\triangle u\cdot w\,dx = a^2\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w\,dx \tag{2.3}$$

pois, $w \in [H_0^1(\Omega)]^n$.

$$\int_\Omega -(b^2-a^2)\nabla\, div\, u\cdot w\,dx = (b^2-a^2)\int_\Omega div\, u\cdot div\, w dx, \tag{2.4}$$

onde,

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w\,dx \;=\; \sum_{i=1}^n \int_\Omega \nabla u^i\cdot\nabla w^i\,dx$$

com u^i e w^i as i-ésimas componentes de $u = u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t), \ldots, u^n(x,t))$ e $w(x) = (w^1(x), \ldots, w^n(x))$.

Com isso, substituindo (2.3) e (2.4) a equação (2.2) fica

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_{tt}\cdot w\,dx \;+\; a^2\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w\,dx \;+\; (b^2-a^2)\int_\Omega div\, u\cdot div\, w\,dx \\ &+ \int_\Omega \nabla\theta\cdot w\,dx \;+\; \int_\Omega \alpha(x)u_t\cdot w\,dx \;=\; 0, \qquad \forall w \in \Big[H_0^1(\Omega)\Big]^n.\end{aligned}$$

Então, escrevendo em termos de produto interno em $L^2(\Omega)$ temos

$$
\begin{aligned}
&(u_{tt}\,,\,w)_{L^2(\Omega)}+a^2(\nabla u\,,\,\nabla w)_{L^2(\Omega)}+(b^2-a^2)(div\,u\,,\,div\,w)_{L^2(\Omega)}\\
&\quad+(\nabla\theta\,,\,w)_{L^2(\Omega)}+(\alpha(x)\,u_t\,,\,w)_{L^2(\Omega)}\;=\;0,\qquad \forall w\in[H^1_0(\Omega)]^n.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Agora, multiplicando a segunda equação de (2.1), $\theta_t-\triangle\theta+div\,u_t=0$ por $v\in H^1_0(\Omega)$ e integrando em Ω, temos

$$
\int_\Omega v\theta_t\,dx-\int_\Omega v\triangle\theta\,dx+\int_\Omega v\,div\,u_t\,dx=0,\qquad \forall v\in H^1_0(\Omega).
$$

Da Fórmula de Green, para $v\in H^1_0(\Omega)$ temos que

$$
-\int_\Omega v\triangle\theta\,dx\;=\;\int_\Omega\nabla\theta\cdot\nabla v\,dx
$$

e

$$
\int_\Omega v\,div\,u_t\,dx=-\int_\Omega u_t\cdot\nabla v\,dx.
$$

Assim obtemos que

$$
\int_\Omega\theta_t\,v\,dx+\int_\Omega\nabla\theta\cdot\nabla v\,dx-\int_\Omega u_t\cdot\nabla v\,dx=0,\qquad \forall v\in H^1_0(\Omega),
$$

ou ainda,

$$
(\theta_t\,,\,v)_{L^2(\Omega)}+(\nabla\theta\,,\,\nabla v)_{L^2(\Omega)}-(u_t\,,\,\nabla v)_{L^2(\Omega)}=0,\qquad \forall v\in H^1_0(\Omega).\tag{2.6}
$$

Concluímos por (2.5) e (2.6), que $(u\,,\,\theta)$ devem satisfazer o seguinte problema variacional, associado ao problema (2.1)

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(u_{tt}\,,\,w)+a^2(\nabla u\,,\,\nabla w)+(b^2-a^2)(div\,u\,,\,div\,w)\\
&\qquad\qquad\qquad+(\nabla\theta\,,\,w)+(\alpha(x)u_t\,,\,w)=0,\\
&\qquad\qquad(\theta_t\,,\,v)+(\nabla\theta\,,\,\nabla v)-(u_t\,,\,\nabla v)\;=\;0,
\end{aligned}
\right.
\tag{2.7}
$$

para $w\in[H^1_0(\Omega)]^n$, para $v\in H^1_0(\Omega)$ e para $t\in[0,\infty)$.

É claro, que se o par (u,θ) é solução clássica de (2.1), então o par (u,θ) é solução de (2.7). Se o par (u,θ) é solução de (2.7) na classe,

$u \in L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)]^n)$,

$u_t \in L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n)$,

$u_{tt} \in L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n)$,

$\theta \in L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$,

$\theta_t \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$,

então o par (u,θ), é chamado de solução forte da equação (2.1) em $[0,\infty)$.

2.3 Existência, Unicidade de soluções fortes

Teorema 2.1. *Seja α uma função contínua e limitada com $\alpha(x) \geq 0$ q.s. em Ω e*

$$(u_0,\, u_1,\, \theta_0) \in [H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)]^n \times [H_0^1(\Omega)]^n \times [H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)].$$

Então, existe um único par (u,θ) solução forte de (2.1).

A demonstração desse Teorema é muito similar a apresentada por Cleuzir Da Luz [20], no capítulo 2 da sua dissertação de mestrado em 2005. Por isso, apresentamos aqui apenas um roteiro da mesma, o qual é baseada no Método de **Faedo-Galerkin**.

A prova é feita considerando-se os seguintes passos:

♦ **Problema Aproximado**

Lembramos aqui a notação que $(\nabla u\,,\,\nabla w) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}(\nabla u^i\,,\,\nabla w^i)$. Fazendo no problema varacional associado (2.7)

$$\begin{aligned} u = u^m &= \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \\ \theta = \theta^m &= \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) v_j \end{aligned} \tag{2.8}$$

com $\Big\{ w_j \Big\}_{j=1}^{\infty}$ uma base de $\Big[H_0^1(\Omega)\,\cap H^2(\Omega)\Big]^n$, $\Big\{ v_j \Big\}_{j=1}^{\infty}$ uma base de $H_0^1(\Omega)$, $g_{jm}(t)$ e $h_{jm}(t)$ funções reais definidas no intervalo $[0,\infty)$ e satisfazendo adequadas condições iniciais em $t=0$.

Escrevendo

$$u_0 \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, w_j, \quad u_1 \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} d_j\, w_j \;\text{ e }\; \theta_0 \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} e_j\, v_j \tag{2.9}$$

com c_j, d_j e e_j constantes reais, $j = 1, 2, \ldots$, o problema aproximado associado ao problema variacional (2.7) é:

$$\left\{ \begin{array}{r} (u^m_{tt}\,,\, w^m) + a^2(\nabla u^m\,,\, \nabla w^m) + (b^2 - a^2)(div\, u^m\,,\, div\, w^m) \\ +(\nabla \theta^m\,,\, w^m) + (\alpha(x) u^m_t\,,\, w^m) = 0, \\ (\theta^m_t\,,\, v^m) + (\nabla \theta\,,\, \nabla v^m) - (u^m_t\,,\, \nabla v^m) \;=\; 0, \end{array} \right. \tag{2.10}$$

para $w \in [H^1_0(\Omega)]^n$, para $v \in H^1_0(\Omega)$ e para $t \in [0, \infty)$.

É necessário provar que existem funções u e θ em algum espaço tal que

$$u^m = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \rightarrow u(t)$$

$$\theta^m = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) v_j \rightarrow \theta(t)$$

em algum sentido e que o par (u, θ) seja solução de (2.1). O problema aproximado, (2.10) fica equivalente ao seguinte sistema linear de Equações Diferenciais Ordinárias, para as funções $g_{jm}(t)$ e $h_{jm}(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} A_{ji} g^{''}_{jm}(t) + \sum_{j=1}^{m} C_{ji} g_{jm}(t) + \sum_{j=1}^{m} D_{ji} h_{jm}(t) + \sum_{j=1}^{m} B_{ji} g^{'}_{jm}(t) + \sum_{j=1}^{m} E_{ji} g_{jm}(t) = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} F_{ji} h^{'}_{jm}(t) + \sum_{j=1}^{m} G_{ji} h_{jm}(t) - \sum_{j=1}^{m} H_{ji} g^{'}_{jm}(t) = 0, \\ g_{jm}(0) = c_j, \qquad 1 \leq j \leq m \\ g^{'}_{jm}(0) = d_j, \qquad 1 \leq j \leq m \\ h_{jm}(0) = e_j, \qquad 1 \leq j \leq m \end{array} \right. \tag{2.11}$$

para $1 \leq i \leq m$.

Com: $A_{ji} = (w_j\,,\, w_i)$, $B_{ji} = (\alpha(x) w_j\,,\, w_i)$, $C_{ji} = a^2(\nabla w_j\,,\, \nabla w_i)$, $D_{ji} = (\nabla v_j\,,\, w_i)$, $E_{ji} = (b^2 - a^2)(div\, w_j\,,\, div\, v_i)$, $F_{ji} = (v_j\,,\, v_i)$, $G_{ji} = (\nabla v_j\,,\, \nabla v_i)$ e $H_{ji} = (w_j\,,\, \nabla v_i)$.

O sistema (2.11) possui uma solução global dada por

$$Y(t) = e^{t\mathcal{A}} Y_0, \quad t \geq 0,$$

com $\mathcal{A}$ a matriz associada a (2.11).

Portanto as funções $u^m : [0, \infty) \longrightarrow \Big[H_0^1(\Omega) \cap\ H^2(\Omega)\Big]^n$ e $\theta^m : [0, \infty) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ dadas por $u^m = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$ e $\theta^m = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) v_j$ são soluções do problema aproximado (2.10) no intervalo $[0, \infty)$.

♦ **Estimativas para as Soluções Aproximadas**

Usando que $u^m = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$ e $\theta^m = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) v_j$ estão definidas para todo $t \geq 0$ e a definição da energia do problema aproximado (2.10) temos que

$$E_m(t) + \int_0^t \|\sqrt{\alpha(\cdot)}\, u_t^m\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds + \int_0^t \|\nabla \theta^m\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds = E_m(0), \tag{2.12}$$

logo,

$$E_m(t) \leq E_m(0), \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Mas,

$$E_m(0) = \frac{1}{2} \left\{ \|u_1^m\|^2 + a^2 \|\nabla u_0^m\|^2 + \|\theta_0^m\|^2 + (b^2 - a^2) ||div\, u_0^m||^2 \right\}.$$

Se obtem que

$$\begin{aligned}
&\{u^m\} \text{ limitada em } L^\infty(0, \infty; [H_0^1(\Omega)]^n),\\
&\{u_t^m\} \text{ limitada em } L^\infty(0, \infty; [H_0^1(\Omega)]^n),\\
&\{u_{tt}^m\} \text{ limitada em } L^\infty(0, \infty; [L^2(\Omega)]^n),\\
&\{\theta^m\} \text{ limitada em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)),\\
&\{\theta^m\} \text{ limitada em } L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)),\\
&\{\theta_t^m\} \text{ limitada em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

De onde, pelo Teorema Banach-Alaoglu-Boubarki (ver Brezis [4]) existem funções $u \in L^\infty(0, \infty; [H_0^1(\Omega)]^n)$ e $\theta \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$ com,

$u_t \in L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n)$, $u_{tt} \in L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n)$ e $\theta_t \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$, tais que

$$\begin{aligned}
&u^m \to u, \ \text{ fraco-}\star \text{ em } \ L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n),\\
&u_t^m \to u_t, \ \text{ fraco-}\star \text{ em } \ L^\infty(0,\infty;[H_0^1(\Omega)]^n),\\
&u_{tt}^m \to u_{tt}, \ \text{ fraco-}\star \text{ em } \ L^\infty(0,\infty;[L^2(\Omega)]^n),\\
&\theta^m \to \theta, \ \text{ fraco-}\star \text{ em } \ L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)),\\
&\theta^m \to \theta, \ \text{ fraco em } \ L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega)),\\
&\theta_t^m \to \theta_t, \ \text{ fraco-}\star \text{ em } \ L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

♦ **Passagem ao Limite**

Devido a linearidade do probema (2.10) fazendo limite com $m \to \infty$, resulta que as funções u e θ dadas em (2.14) satisfazem o problema variacional

$$\left\{ \begin{aligned} &(u_{tt}\,,\,w) + a^2(\nabla u\,,\,\nabla w) + (\nabla\theta\,,\,w) + (\alpha(\cdot)\,u_t\,,\,w) + (b^2-a^2)(div\,u\,,\,w) = 0,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\theta_t\,,\,v) + (\nabla\theta\,,\,\nabla v) - (u_t\,,\,\nabla v) = 0, \end{aligned} \right.$$

para toda $w \in [H_0^1(\Omega)]^n$ e $v \in H_0^1(\Omega)$, no sentido de $\mathcal{D}'(0,\infty)$.

Em particular, temos que

$$\left\{ \begin{aligned} &u_{tt} - a^2\triangle u + \alpha(x)u_t + \nabla\theta + (b^2-a^2)div\,u = 0,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \theta_t - \triangle\theta + div\,u_t = 0, \end{aligned} \right. \tag{2.15}$$

no sentido de $\mathcal{D}'((0,\infty)\times\Omega)$.

♦ **Regularidade:**

A regularidade das soluções (u,θ) se obtem utilizando o Teorema da Regularidade Elíptica (1.29).

♦ **Analise de condições iniciais:**

As soluções (u,θ), satisfazem as condições iniciais do problema (2.1). Para isso, se faz uso da proposição (1.31).

♦ **Unicidade de Soluções:**

É feita de modo padrão. Ver em Cleuzir [20].

Definição 2.2. *Por estabilização se entende como o comportamento assintótico da energia $E(t)$ do sistema, quando $t \longrightarrow \infty$ ou então do comportamento assintótico das soluções do sistema, em alguma norma, quando $t \longrightarrow \infty$. Neste trabalho se estuda a estabilização em relação a zero (função nula). Na estabilização é sempre importante se obter a taxa para o comportamento assintótico.*

Por exemplo, estudar $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}$ e $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \|\theta(t)\|_{L^2(\Omega)}$ ou $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ e $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \|\theta(t)\|_{L^\infty(\Omega)}$, mostrando taxas de decaimento explícitas, para as soluções do sistema (2.1).

De fato, o objetivo é estudar a estabilização da energia $E(t)$ do sistema (2.1), que é dada por

$$E(t) \; = \frac{1}{2}\left\{ \; \|u_t\|^2 \; + \; a^2\|\nabla u\|^2 \; + \; \|\theta\|^2 + (b^2 - a^2)||div\, u||^2 \right\}, \tag{2.16}$$

ou

$$E(t) \; = \; \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\; |u_t|^2 \; + a^2 \, |\nabla u|^2 \; + \; \theta^2 \; + (b^2 - a^2)(div\, u)^2 \Big) \; dx.$$

A energia $E(t)$ é dada pela, soma das energias, $E_1(t)$ e $E_2(t)$ as quais, são dadas por:

Energia cinética e potencial

$$E_1(t) \; = \; \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\; |u_t|^2 \; + a^2 \, |\nabla u|^2 \; + (b^2 - a^2)(div\, u)^2 \Big) \; dx, \tag{2.17}$$

energia térmica

$$E_2(t) \; = \; \frac{1}{2}\int_\Omega \theta^2 \; dx \tag{2.18}$$

Tomamos $w \; = \; u_t$ e $v \; = \; \theta$ no problema Varacional associado (2.7) Notamos que:

$$\begin{aligned}(u_{tt} \, , \, u_t)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u_{tt} \cdot u_t \, dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[u_t \cdot u_t] \, dx = \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u_t)^2 \, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \|u_t\|^2,\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}(\nabla u,\, \nabla u_t)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_t\, dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, |\nabla u|^2\, dx = \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \|\nabla u\|^2,\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}(\alpha(x)\, u_t\, ,\, u_t)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \alpha(x)\, u_t \cdot u_t\, dx \;= \\ \int_\Omega (\sqrt{\alpha(\cdot)}\, u_t)^2\, dx &= \|\sqrt{\alpha(\cdot)}\, u_t\|^2,\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}(div\, u\, ,\, div\, u_t)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega div\, u\, div\, u_t dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(div\, u)^2\, dx = \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \|div\, u\|^2\, ,\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}(\theta_t\, ,\, \theta)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \theta_t\, \theta\, dx \;= \\ \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, (\theta)^2\, dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\theta)^2\, dx \;= \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \|\theta\|^2, &\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$(\nabla\theta,\, \nabla\theta)_{L^2(\Omega)} = \|\nabla\theta\|^2. \tag{2.24}$$

$$(u_t\, ,\, \nabla\theta)_{L^2(\Omega)} = (\nabla\theta\, ,\, u_t)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.25}$$

Substituíndo (2.19), (2.20), (2.21) e (2.22) na primeira equação de (2.7), resulta que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \|u_t\|^2 \;+\; a^2\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \|\nabla u\|^2 \;+\; (\nabla\theta\, ,\, u_t)_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|\sqrt{\alpha(\cdot)}\, u_t\|^2 \;+\; (b^2 - a^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||div\, u||^2 = 0.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Substituíndo (2.23), (2.24) e (2.25) na segunda equação de (2.7), resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \|\theta\|^2 \;+\; \|\nabla\theta\|^2 \;-\; (\nabla\theta\, ,\, u_t)_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{2.27}$$

Agora, somando (2.26) com (2.27) temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2 + a^2\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + (\nabla\theta\,,\,u_t)_{L^2(\Omega)} + \|\sqrt{\alpha(\cdot)}\,u_t\|^2$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2 + \|\nabla\theta\|^2 - (\nabla\theta\,,\,u_t)_{L^2(\Omega)} + (b^2-a^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||div\,u||^2 = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\Big\{\|u_t\|^2 + a^2\|\nabla u\|^2 + \|\theta\|^2 + (b^2-a^2)||div\,u||^2\Big\} + \|\sqrt{\alpha(\cdot)}\,u_t\|^2 + \|\nabla\theta\|^2 = 0. \tag{2.28}$$

De (2.16) a equação (2.28) fica

$$\frac{d}{dt}E(t) + \|\sqrt{\alpha(\cdot)}\,u_t\|^2 + \|\nabla\theta\|^2 = 0. \tag{2.29}$$

Ou seja

$$\frac{d}{dt}E(t) + \int_\Omega \alpha(x)|u_t|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx = 0,$$

para todo $t \geq 0$.

Assim, para $t \geq 0$ e $T > 0$ a energia $E(t)$, satisfaz a identidade

$$-\int_t^{t+T}\frac{d}{dt}E(t)\,ds = \int_t^{t+T}\int_\Omega \alpha(x)|u_t|^2\,dx\,ds + \int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\,ds.$$

$$E(t) - E(t+T) = \int_t^{t+T}\int_\Omega \alpha(x)|u_t|^2\,dx\,ds + \int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\,ds. \tag{2.30}$$

Em particular, observamos que a energia $E(t)$ é uma função decrescente. Por isso, faz sentido estudar taxas de decaimento da energia total $E(t)$ associada ao sistema (2.1).

Agora, definimos o subconjunto $\Gamma(x_0)$ de $\Gamma = \partial\Omega$, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixado de modo arbitrário:

$$\Gamma(x_0) = \Big\{x \in \Gamma;\ (x - x_0)\cdot\eta(x) \geq 0\Big\},$$

onde $\eta(x)$ é a normal exterior unitária a Ω no ponto $x \in \Gamma = \partial\Omega$.

Seja, $\omega \subset \bar{\Omega}$ uma vizinhança em $\bar{\Omega}$ de $\Gamma(x_0)$. Assim, $\omega = \bar{\Omega} \cap W$, onde W é um aberto do $\mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma(x_0) \subset W$.

A estabilização da energia $E(t)$ será estudada com a seguinte hipótese adicional na função $\alpha(x)$

$$\alpha(x) \geq \alpha_0 \ \text{ sobre } \ \omega \tag{2.31}$$

para alguma constante α_0 positiva.

Assim, o termo dissipativo $\alpha(x)\, u_t$ na primeira equação em (2.1), está localizado ou efetivo apenas em uma parte de Ω.

De fato, segue o seguinte resultado:

Teorema 2.3 (Estabilização). *Sejam $u = u(x,t)$ e $\theta = \theta(x,t)$ as soluções do problema (2.1). Seja, $\alpha \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha(x) \geq 0$ q.s. em Ω, satisfazendo (2.31). Então, existem constantes positivas C e σ, com C dependendo da energia inicial $E(0)$, tais que:*

$$E(t) \leq Ce^{-\sigma t}, \tag{2.32}$$

para todo $t \geq 0$.

Para provar esse teorema será necessário, alguns lemas e estimativas especiais sobre as soluções u e θ.

2.4 Lema de Nakao

Para provar a estabilização da energia $E(t)$ será mostrado que $E(t)$ satisfaz uma desigualdade do tipo:

$$E(t) \leq C \left[E(t) - E(t+T) \right], \qquad t \geq 0, \tag{2.33}$$

onde C é uma constante positiva e $T > 0$ é uma constante fixada adequadamente.

Então, a propriedade de decaimento (2.32) seguirá de (2.33) e do seguinte lema:

Lema 2.4 (Nakao). *Seja, $\varphi(t)$ uma função não negativa, em $\mathbb{R}^+$ satisfazendo, para $t \geq 0$:*

$$\sup_{t \leq s \leq t+T} \varphi(s) \leq C \left[\varphi(t) \, - \varphi(t+T)\right],$$

com $T > 0$ e $C > 0$ constantes fixas. Então, φ tem o seguinte comportamento assintótico,

$$\varphi(t) \leq C\varphi(0)e^{-\sigma t}, \qquad t \geq 0$$

para algum $\sigma > 0$ fixo e $C > 0$ constante.

2.5 Identidades de Energia

Para provar (2.33), também é necessário desenvolver, algumas identidades de energia.

Lema 2.5. *Sejam, $u = u(x,t)$ e $\theta = \theta(x,t)$ as soluções do problema (2.1). Sejam $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, função de classe $C^1(\overline{\Omega})$, $m \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e $T > 0$ fixado. Então as seguintes identidades são válidas, para todo $t \geq 0$:*

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \int_\Omega m\,(x) \, \left[- |u_t|^2 \, + a^2 \, |\nabla u|^2\right] \, dx\, ds \, = \\
- \left[\int_\Omega m\,(x) \, u_t \cdot u \, dx\right]_t^{t+T} - \int_t^{t+T} \int_\Omega m\,(x) \, \alpha(x)\, u_t \cdot u \, dx\, ds \\
-a^2 \int_t^{t+T} \int_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial m}{\partial x_j} u_i \, dx\, ds - \int_\Omega m\,(x) \, \nabla\theta \cdot u \, dx\, ds \\
-(b^2 - a^2) \int_t^{t+T} \int_\Omega \left[m(x)\, (div\, u)^2 \, + \, div\, u \left[\nabla m(x) \cdot u\right]\right] \, dx\, ds.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega}(h\cdot\eta)\ \left[a^2\ \left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2+(b^2-a^2)\,(div\,u)^2\right]\,d\Gamma\,ds\quad &= \\
\left[\int_\Omega (h:\nabla u)\cdot u_t\ dx\right]_t^{t+T}+\int_t^{t+T}\int_\Omega (h:\nabla u)\cdot\alpha(x)u_t\,dx\,ds \\
+\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega(\nabla\cdot h)\ \left[|u_t|^2-a^2\ |\nabla u|^2\ -(b^2-a^2)\,(div\,u)^2\right]\,dx\,ds \\
+\int_t^{t+T}\int_\Omega(h:\nabla u)\cdot(\nabla\theta)\ dx\,ds+a^2\ \int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^N(\partial_k h_i)\ (\partial_i u_j\ \partial_k u_j)\ dx\,ds \\
+(b^2-a^2)\ \int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^N(\partial_j h_k)\ (\partial_i u_i\ \partial_k u_j)\ dx\,ds. \quad (2.35)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega}((x-x_o)\cdot\eta)\ \left[a^2\ \left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2+(b^2-a^2)\,(div\,u)^2\right]\,d\Gamma\ ds\quad &= \\
\left[\int_\Omega((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot u_t\,dx\right]_t^{t+T}+\int_t^{t+T}\int_\Omega((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot\alpha(x)u_t\,dx\,ds \\
+\frac{N}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[|u_t|^2-a^2\ |\nabla u|^2\ -(b^2-a^2)\,(div\,u)^2\right]\,dx\,ds \\
+\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[a^2\ |\nabla u|^2\ +(b^2-a^2)\,(div\,u)^2\right]\,dx\,ds \\
+\int_t^{t+T}\int_\Omega((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot\nabla\theta\,dx\,ds. \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[-\,|u_t|^2+a^2\,|\nabla u|^2\ +(b^2-a^2)\,(div\,u)^2\right]\,dx\,ds\quad &= \\
-\left[\int_\Omega u_t\cdot u\,dx\right]_t^{t+T}-\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[\nabla\theta\ +\alpha(x)\,u_t\right]\cdot u\,dx\,ds, \qquad (2.37)
\end{aligned}
$$

onde $\eta=\eta\,(x)$ *é o vetor normal à* $x\in\partial\Omega$.

Prova:

Para provar a equação (2.34), basta multiplicar a primeira equação de (2.1) por $m(x)\cdot u$, aqui representado por $m\cdot u$ afim de simplificar notação e integrar em $[t,t+T]\times\Omega$

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+T}\int_\Omega u_{tt}\, m\cdot u\, dx\, ds-\int_t^{t+T}\int_\Omega a^2\nabla u\, m\cdot u\, dx\, ds\\&-(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla\, div\, u\, m\cdot u\, dx\, ds+\int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla\theta\, m\cdot u\, dx\, ds\\&+\int_t^{t+T}\int_\Omega \alpha(x)\, u_t\ \cdot m\cdot u\, dx\, ds=0.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Calculando, alguns termos em separado:

$$\int_t^{t+T}\int_\Omega u_{tt}\, m\cdot u\, dx\, ds=\int_t^{t+T}\int_\Omega m\frac{d}{dt}(u\cdot u_t)\, dx\, ds-\int_t^{t+T}\int_\Omega m|u_t|^2\, dx\, ds=$$
$$\left[\int_\Omega m\frac{d}{dt}(u\cdot u_t)\, dx\right]_t^{t+T}-\int_t^{t+T}\int_\Omega m\,|u_t|^2\, dx\, ds,$$

isto é,

(i) $\displaystyle\int_t^{t+T}\int_\Omega u_{tt}\, m\cdot u\, dx\, ds=\left[\int_\Omega m\frac{d}{dt}(u\cdot u_t)\, dx\right]_t^{t+T}-\int_t^{t+T}\int_\Omega m|u_t|^2\, dx\, ds.$

$$\int_t^{t+T}\int_\Omega \alpha(x)\, u_t\ \cdot m\cdot u\, dx\, ds=\int_t^{t+T}\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\alpha(x)\, m|u|^2\, dx\, ds=\left[\int_\Omega \frac{1}{2}\alpha(x)\, m|u|^2\, dx\right]_t^{t+T},$$

isto é,

(ii) $\displaystyle\int_t^{t+T}\int_\Omega \alpha(x)\, u_t\ \cdot m\cdot u\, dx\, ds=\left[\int_\Omega \frac{1}{2}\alpha(x)\, m|u|^2\, dx\right]_t^{t+T}.$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega div(\nabla u\cdot m\, u)\, dx\ =\int_\Omega \triangle u\cdot m\, u\, dx\ +\int_\Omega \nabla u(m\,\nabla u+u\nabla m)\, dx\ =\\&\int_\Omega mu\triangle u\, dx\ +\int_\Omega \nabla u(m\nabla u+u\nabla m)\, dx\ =\\&\int_\Omega mu\triangle u\, dx\ +\int_\Omega \nabla u(m\nabla u)\, dx\ +\int_\Omega \nabla u\cdot(u\nabla m)\, dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$-\int_\Omega mu\triangle u\, dx\ =\int_\Omega m|\nabla u|^2\, dx\ +\int_\Omega u\nabla u\cdot\nabla m\, dx\ -\int_\Omega div(\nabla u\cdot m\, u)\, dx\ =$$
$$\int_\Omega m|\nabla u|^2\, dx\ +\int_\Omega u\nabla u\cdot\nabla m\, dx.$$

Para u escalar, mas como u é vetorial,

$$\triangle u\cdot m\, u=m\, u\cdot\triangle u=\sum_{i=1}^n m\, u^i\triangle u^i$$

assim,

$$\begin{aligned}
&-a^2\int_\Omega \triangle u\cdot m\,u\,dx \;=-a^2\sum_{i=1}^n\int_\Omega m u^i\triangle u^i\,dx\;=\\
&a^2\sum_{i=1}^n\int_\Omega m|\nabla u^i|^2\,dx\;+a^2\sum_{i=1}^n\int_\Omega \nabla m\,u^i\nabla u^i\,dx\;=\\
&a^2\int_\Omega m|\nabla u|^2\,dx\;+a^2\sum_{i=1}^n\int_\Omega u^i\nabla u^i\nabla m\,dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\textbf{(iii)}\;\; -a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega \triangle u\cdot m\,u\,dx\,ds=\int_t^{t+T}a^2\left[\int_\Omega m|\nabla u|^2\,dx\;+\sum_{i=1}^n\int_\Omega u^i\nabla u^i\nabla m\,dx\right]ds$$

$$\begin{aligned}
&-(b^2-a^2)\;\int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla\,div\;u\,m\cdot u\,dx\,ds=-(b^2-a^2)\;\int_t^{t+T}\int_\Omega m\,u\nabla\,div\;u\,dx\,ds=\\
&-(b^2-a^2)\;\int_t^{t+T}\int_\Omega div\,(m\,u\,div\;u)\,dx\,ds+(b^2-a^2)\;\int_t^{t+T}\int_\Omega div\,(m\,u)\,div\;u\,dx\,ds=\\
&(b^2-a^2)\;\int_t^{t+T}\int_\Omega div\,(m\,u)\,div\;u\,dx\,ds=\\
&(b^2-a^2)\;\int_t^{t+T}\int_\Omega div\,u(m\,div\,u+\nabla m\cdot u)\,dx\,ds=\\
&(b^2-a^2)\;\int_t^{t+T}\int_\Omega \Big[m\,(div\,u)^2\;+div\,u(\nabla m(x)\cdot u)\Big]\;dx\,ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\textbf{(iv)}\quad \begin{aligned}
&-(b^2-a^2)\;\int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla\,div\;(u)\,m\cdot u\,dx\,ds=\\
&\qquad (b^2-a^2)\;\int_t^{t+T}\int_\Omega\Big[m\,(div\,u)^2\;+div\,u\,(\nabla m(x)\cdot u)\Big]\;dx\,ds.
\end{aligned}$$

Com **(i), (ii), (iii)** e **(iv)** a equação (2.38) fica:

$$\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega m(u\cdot u_t)\,dx\right]_t^{t+T}-\int_t^{t+T}\int_\Omega m|u_t|^2\,dx\,ds\\
&+\int_t^{t+T}a^2\left[\int_\Omega m|\nabla u|^2\,dx\,ds+\sum_{i=1}^n\int_\Omega u^i\nabla u^i\nabla m\,dx\right]ds\\
&+(b^2-a^2)\;\int_t^{t+T}\int_\Omega\Big[m\,(div\,u)^2\;+div\,u(\nabla m(x)\cdot u)\Big]\;dx\,ds\\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)\nabla\theta\,u\,dx\,ds+\left[\int_\Omega\frac{1}{2}\alpha(x)\,m|u|^2\,dx\right]_t^{t+T}=0,
\end{aligned}$$

assim,

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega m\,\left[-|u_t|^2\;+a^2|\nabla u|^2\right]\,dx\,ds=-\left[\int_\Omega m(u\cdot u_t)\,dx\right]_t^{t+T}\\
&-\left[\int_\Omega \frac{m(x)}{2}\alpha(x)\,|u|^2\,dx\right]_t^{t+T}-a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\frac{\partial m}{\partial x_j}u^i\right]dx\,ds\\
&+(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[m\,(div\,u)^2\;+div\,u(\nabla m(x)\cdot u)\right]\,dx\,ds\\
&-\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)\nabla\theta\,u\,dx\,ds,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega m\,(x)\;\left[-\,|u_t|^2\;+a^2\;|\nabla u|^2\right]\;dx\;\;ds\;=\\
&-\left[\int_\Omega m\,(x)\;\,u_t\cdot u\;\,dx\right]_t^{t+T}-\int_t^{t+T}\int_\Omega m\,(x)\;\,\alpha(x)u_t\cdot u\;\,dx\;\,ds\\
&-a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\;\frac{\partial m}{\partial x_j}\;u_i\;\,dx\;\,ds-\int_\Omega m\,(x)\;\,\nabla\theta\cdot u\right]\;dx\;\,ds\\
&-(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[m(x)\;(div\;u)^2\;+div\;u\;[\nabla m(x)\cdot u]\right]\;dx\;\,ds.
\end{aligned}
$$

Para provar a equação (2.35), basta multiplicar a primeira equação de (2.1) por $(h:\nabla u)$ e integrar em $[t,t+T]\times\Omega$

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega u_{tt}(h:\nabla u)\,dx\,ds-\int_t^{t+T}\int_\Omega a^2\nabla u\,(h:\nabla u)\,dx\,ds\\
&-(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega\nabla\,div\;u\,(h:\nabla u)\,dx\,ds\\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega\nabla\theta\,(h:\nabla u)\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\Omega\alpha(x)\,u_t\;\cdot(h:\nabla u)\,dx\,ds=0.
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Calculando, alguns termos em separado:

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega u_{tt}(h:\nabla u)\,dx\,ds = \int_t^{t+T}\sum_{i=1}^n\int_\Omega u^i_{tt}(h\cdot\nabla u^i)\,dx\,ds =\\
&\int_t^{t+T}\sum_{i=1}^n\int_\Omega \frac{d}{dt}[(h\cdot\nabla u^i)u^i_t]\,dx\,ds - \int_t^{t+T}\sum_{i=1}^n\int_\Omega \frac{d}{dt}u^i_t[(h\cdot\nabla u^i)]\,dx\,ds =\\
&\left[\sum_{i=1}^n\int_\Omega[(h\cdot\nabla u^i)u^i_t]\,dx\right]_t^{t+T} - \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\sum_{i=1}^n\int_\Omega 2\frac{d}{dt}u^i_t[(h\cdot\nabla u^i)]\,dx\,ds + 0 =\\
&\left[\sum_{i=1}^n\int_\Omega[(h\cdot\nabla u^i)u^i_t]\,dx\right]_t^{t+T} - \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\sum_{i=1}^n\int_\Omega 2\frac{d}{dt}u^i_t[(h\cdot\nabla u^i)]\,dx\,ds\\
&+\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega div(h\cdot|u_t|^2)\,dx\,ds =\\
&\left[\sum_{i=1}^n\int_\Omega[(h\cdot\nabla u^i)u^i_t]\,dx\right]_t^{t+T} + \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega div(h\cdot|u_t|^2)\,dx\,ds.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega u_{tt}(h:\nabla u)\,dx\,ds =\\
&\left[\sum_{i=1}^n\int_\Omega[(h\cdot\nabla u^i)u^i_t]\,dx\right]_t^{t+T} + \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega div(h\cdot|u_t|^2)\,dx\,ds.
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

$$
\begin{aligned}
&div(\nabla u^i h\cdot\nabla u^i) = \triangle u^i h\cdot\nabla u^i + \nabla u^i\cdot\nabla(h\cdot\nabla u^i) =\\
&\triangle u^i h\cdot\nabla u^i + \nabla u^i\cdot\nabla\left(\sum_{j=1}^n h_j D_j u^i\right) = \triangle u^i h\cdot\nabla u^i + \nabla u^i\cdot\left(\sum_{j=1}^n \nabla(h_j D_j u^i)\right) =\\
&\triangle u^i h\cdot\nabla u^i + \sum_{j=1}^n \nabla u^i\cdot\nabla\left(h_j D_j u^i\right) =\\
&\triangle u^i h\cdot\nabla u^i + \sum_{j=1}^n \nabla u^i\cdot\left[h_j\cdot\nabla\left(D_j u^i\right) \; + D_j u^i\nabla h_j\right],
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\triangle u^i h\cdot\nabla u^i = div(\nabla u^i h\cdot\nabla u^i) - \sum_{j=1}^n\left[h_j\nabla u^i\cdot\nabla(D_j u^i) \; + D_j u^i\nabla u^i\cdot\nabla h_j\right].
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&\triangle u \cdot (h : \nabla u) = \sum_{i=1}^{n} \triangle u^i h \cdot \nabla u^i = \\
&\sum_{i=1}^{n} div\left(\nabla u^i h \cdot \nabla u^i\right) - \sum_{j=1}^{n} \left[h_j \nabla u^i \cdot \nabla\left(D_j u^i\right) \ + D_j u^i \nabla u^i \nabla h^j\right] = \\
&\sum_{i=1}^{n} div\left(\left(h \cdot \nabla u^i\right) \cdot \nabla u^i\right) - \sum_{j,i=1}^{n} \left[h_j \nabla u^i \cdot \nabla\left(D_j u^i\right) \ + D_j u^i \nabla u^i \nabla h^j\right] = \\
&\sum_{i=1}^{n} div\left(\left(h \cdot \nabla u^i\right) \cdot \nabla u^i\right) - \sum_{k,j,i=1}^{n} \left[h_j D_k u^i D_k D_j u^i \ + D_j u^i D_k u^i D_k h^j\right],
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega \triangle u \cdot (h : \nabla u)\, dx \ = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} div((h \cdot \nabla u^i) \cdot \nabla u^i)\, dx \\
&+\int_\Omega \sum_{k,j,i=1}^{n} h_j D_k u^i D_k D_j u^i\, dx \ + \int_\Omega \sum_{k,j,i=1}^{n} D_j u^i D_k u^i D_k h^j\, dx.
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

Lema 2.6. *Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\nabla u^i(x) = \dfrac{\partial u^i}{\partial \eta}\eta(x), \qquad \forall x \in \partial\Omega.$*

Aplicando, o lema (2.6) a equação (2.41) fica

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega \triangle u \cdot (h : \nabla u)\, dx \ = -\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} (h \cdot \eta) \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma \\
&+\int_\Omega \sum_{k,j,i=1}^{n} h_j D_k u^i D_k D_j u^i\, dx \ + \int_\Omega \sum_{k,j,i=1}^{n} D_j u^i D_k u^i D_k h^j\, dx \ = \\
&-\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} (h \cdot \eta) \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma + \sum_{k,j,i=1}^{n} \int_\Omega D_k u^i (h \cdot \nabla(D_k u^i))\, dx \\
&+\int_\Omega \sum_{k,j,i=1}^{n} D_j u^i D_k u^i D_k h^j\, dx.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega \triangle u \cdot (h : \nabla u)\, dx \ = -\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} (h \cdot \eta) \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma \\
&+\sum_{k,j,i=1}^{n} \int_\Omega D_k u^i (h \cdot \nabla(D_k u^i))\, dx \ + \int_\Omega \sum_{k,j,i=1}^{n} D_j u^i D_k u^i D_k h^j\, dx.
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

Calculando, alguns termos em separado:

$$div\,(D_k\,u^i\,D_k\,u^i\,h) = div\,(|D_k\,u^i|^2\,h) = div\,(h)|D_k\,u^i|^2 + h\cdot 2D_k\,u^i\nabla(D_k\,u^i) =$$
$$div\,(h)|D_k\,u^i|^2 + 2D_k\,u^i(h\cdot\nabla(D_k\,u^i)),$$

assim,

$$D_k\,u^i(h\cdot\nabla(D_k\,u^i)) = \frac{1}{2}div\,(h|D_k\,u^i|^2) - \frac{1}{2}div\,(h)|D_k\,u^i|^2,$$

com isso,

$$\begin{aligned}&\sum_{k,j,i=1}^{n}\int_\Omega D_k\,u^i\,(h\cdot\nabla(D_k\,u^i))\,dx\ =\\ &\sum_{k,j,i=1}^{n}\int_\Omega \frac{1}{2}div\,(h|D_k\,u^i|^2)\,dx\ - \sum_{k,i=1}^{n}\int_\Omega \frac{1}{2}div\,(h)|D_k\,u^i|^2\,dx\ =\\ &\sum_{k,j,i=1}^{n}\int_\Omega \frac{1}{2}div\,(h|D_k\,u^i|^2)\,dx\ - \int_\Omega \frac{1}{2}div\,(h)|\nabla u|^2\,dx.\end{aligned}$$

De onde, a equação (2.42) fica

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega \triangle u\cdot(h:\nabla u)\,dx\ = -\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}(h\cdot\eta)\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma + \sum_{k,i=1}^{n}\int_\Omega \frac{1}{2}div\,(h|D_k\,u^i|^2)\,dx\\ &-\int_\Omega \frac{1}{2}div\,h|\nabla u|^2\,dx\ + \int_\Omega \sum_{k,j,i=1}^{n} D_j\,u^i\,D_k\,u^i\,D_k\,h^j\,dx,\end{aligned}$$

integrando, em $[t, t+T]$ segue que

$$\begin{aligned}&-\int_t^{t+T}\int_\Omega \triangle u\cdot(h:\nabla u)\,dx\,ds\ = -\int_t^{t+T}\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}(h\cdot\eta)\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma\,ds\\ &+\int_t^{t+T}\sum_{k,i=1}^{n}\int_\Omega \frac{1}{2}div\,(h|D_k\,u^i|^2)\,dx\,ds - \int_t^{t+T}\int_\Omega \frac{1}{2}div\,h|\nabla u|^2\,dx\,ds\\ &+\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{k,j,i=1}^{n} D_j\,u^i\,D_k\,u^i\,D_k\,h^j\,dx\,ds,\end{aligned}$$

ou seja,

$$-\int_t^{t+T}\int_\Omega \triangle u\cdot(h:\nabla u)\,dx\,ds = -\int_t^{t+T}\sum_{i=1}^n\int_{\partial\Omega}(h\cdot\eta)\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\sum_{i=1}^n\int_{\partial\Omega}(h\cdot\eta)\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma ds-\int_t^{t+T}\int_\Omega\frac{1}{2}div\,h|\nabla u|^2\,dx\,ds$$
$$+\int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{k,j,i=1}^n D_ju^iD_ku^iD_kh^j\,dx\,ds.$$

Portanto,

$$-a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega \triangle u\cdot(h:\nabla u)\,dx\,ds = -a^2\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\sum_{i=1}^n\int_{\partial\Omega}(h\cdot\eta)\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma ds$$
$$-\frac{1}{2}a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega div\,h|\nabla u|^2\,dx\,ds+a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{k,j,i=1}^n D_j\,u^i\,D_k\,u^i\,D_k\,h^j\,dx\,ds. \tag{2.43}$$

Calculando, a seguir:

$$div\,(div\,u\,(h\,:\nabla u)) = div\,u\cdot div\,(h:\nabla u)+\nabla div\,u\cdot(h\,:\nabla u),$$

assim,

$$\nabla div\,u\cdot(h\,:\nabla u) = div\,(div\,u\cdot(h\,:\,\nabla u))-div\,u\cdot div\,(h\,:\nabla u),$$

com isso,

$$\int_\Omega \nabla div\,u\cdot(h\,:\nabla u)\,dx = \int_\Omega div\,(div\,u\cdot(h\,:\nabla u))\,dx-\int_\Omega div\,u\cdot div\,(h\,:\nabla u)\,dx =$$
$$\int_{\partial\Omega} div\,u(h\,:\nabla u)\eta(x)d\Gamma-\int_\Omega div\,u\cdot div\,(h\,:\nabla u)\,dx.$$

Mas,

$$div\,(h\,:\nabla u)=\sum_{i=1}^n D_i(h\cdot\nabla u^i)=\sum_{i,j=1}^n D_i(h^j\,D_j\,u^i)=$$
$$\sum_{i,j=1}^n(D_i\,h^j\,D_j\,u^i+h^j\,D_i\,D_j\,u^i)=\sum_{i,j=1}^n D_i\,h^j\,D_j\,u^i+\sum_{i,j=1}^n h^j\,D_i\,D_j\,u^i,$$

assim,

$$
\begin{aligned}
&(b^2-a^2)div\, u\, div\,(h\ : \nabla u) = \\
&(b^2-a^2)div\, u\, \sum_{i,j=1}^{n} D_i\, h^j\, D_j\, u^i + (b^2-a^2)div\, u\, \sum_{i,j=1}^{n} h^j\, D_i\, D_j\, u^i = \\
&(b^2-a^2)div\, u\, \sum_{i,j=1}^{n} D_i\, h^j\, D_j\, u^i + (b^2-a^2)\sum_{k=1}^{n} D_k\, u^k \sum_{i,j=1}^{n} D_i\, h^j\, D_j\, u^i = \\
&(b^2-a^2)div\, u\,(\nabla\cdot h)\, div\, u + (b^2-a^2)\sum_{i,j,k=1}^{n} D_i\, h^j\, D_k\, u^k\, D_j\, u^i = \\
&(b^2-a^2)(\nabla\cdot h)\,(div\, u)^2 + (b^2-a^2)\sum_{i,j,k=1}^{n} D_i\, h^j\, D_k\, u^k\, D_j\, u^i.
\end{aligned}
$$

Ainda,

$$(h : \nabla u) = (h\cdot\nabla u^1, h\cdot\nabla u^2, \cdots, h\cdot\nabla u^n),$$

com isso,

$$
\begin{aligned}
&(h : \nabla u)\cdot\eta = (h\cdot\nabla u^1\cdot\eta, h\cdot\nabla u^2\cdot\eta, \cdots, h\cdot\nabla u^n\cdot\eta) = \\
&\sum_{i=1}^{n} h\nabla u^i\,\eta = \sum_{i=1}^{n}(h\cdot\eta)\, D_j\, u^i = (h\cdot\eta)\sum_{i=1}^{n} D_j\, u^i = (h\cdot\eta)\, div\, u.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla div\, u(h:\nabla u)\, dx\, ds = \\
&(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega}(h\cdot\eta)(div\, u)^2 d\Gamma ds + (b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega(\nabla\cdot h)\,(div\, u)^2\, dx\, ds \\
&+(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^{n} D_i\, h^j\, D_k\, u^k\, D_j\, u^i\, dx\, ds.
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Utilizando (2.40), (2.43) e (2.44) em (2.39), resulta

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}[(h\cdot\nabla u^i)u_t^i]\,dx\right]_t^{t+T}+\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Omega} div\,(h\cdot|u_t|^2)\,dx\,ds\\
&-a^2\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}(h\cdot\eta)\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma ds\\
&-\frac{1}{2}a^2\int_t^{t+T}\int_{\Omega} div\,h|\nabla u|^2\,dx\,ds+a^2\int_t^{t+T}\int_{\Omega}\sum_{k,j,i=1}^{n} D_j\,u^i\,D_k\,u^i\,D_k\,h^j\,dx\,ds\\
&+(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega}(h\cdot\eta)(div\,u)^2 d\Gamma ds+(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_{\Omega}(\nabla\cdot h)\,(div\,u)^2\,dx\,ds\\
&+(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{n} D_i\,h^j\,D_k\,u^k\,D_j\,u^i\,dx\,ds\\
&+\int_t^{t+T}\int_{\Omega}\nabla\theta\,(h:\nabla u)\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_{\Omega}\alpha(x)\,u_t\,\cdot(h:\nabla u)\,dx\,ds\;=\;0.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega}(h\cdot\eta)\,\left[a^2\,\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2+(b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\right]\,d\Gamma\,ds=\\
&\left[\int_{\Omega}(h:\nabla u)\cdot u_t\,\,dx\right]_t^{t+T}+\int_t^{t+T}\int_{\Omega}(h:\nabla u)\cdot\alpha(x)\,u_t\,dx\,ds\\
&+\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Omega}(\nabla\cdot h)\,\left[|u_t|^2-a^2\,\,|\nabla u|^2-(b^2-a^2)\,(div\,(u))^2\right]\,dx\,ds\\
&+\int_t^{t+T}\int_{\Omega}(h:\nabla u)\cdot(\nabla\theta)\,\,dx\,ds+a^2\,\int_t^{t+T}\int_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{N}(\partial_k h_i)\,\,(\partial_i u_j\,\partial_k\,u_j)\,\,dx\,ds\\
&+(b^2-a^2)\,\int_t^{t+T}\int_{\Omega}\sum_{i,j,k=1}^{N}(\partial_j h_k)\,\,(\partial_i u_i\,\partial_k u_j)\,\,dx\,ds.
\end{aligned}
$$

Onde $\eta=\eta\,(x)$ é o vetor normal à $x\in\partial\Omega$.

Para provar a equação (2.36), basta substituir h em (2.35) por $(x-x_0)$, pois (2.36) é apenas um caso particular da equação (2.35).

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega}((x-x_0)\cdot\eta)\ \left[a^2\ \left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2+(b^2-a^2)\,(div\,u)^2\right]\ d\Gamma\ ds=\\
&\left[\int_\Omega((x-x_0):\nabla u)\cdot u_t\,dx\right]_t^{t+T}+\int_t^{t+T}\int_\Omega((x-x_0):\nabla u)\cdot\alpha(x)\,u_t\,dx\,ds\\
&+\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega(\nabla\cdot(x-x_0))\ \left[|u_t|^2-a^2\ |\nabla u|^2-(b^2-a^2)\ (\ div\,u\ )^2\right]\ dx\,ds\\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega((x-x_0):\nabla u)\cdot(\nabla\theta)\ dx\,ds\\
&+a^2\ \int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^{N}\big(\partial_k(x^i-x_0^i)\big)\ (\partial_i u_j\ \partial_k u_j)\ dx\,ds\\
&+(b^2-a^2)\ \int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^{N}\big(\partial_j(x^k-x_0^k)\big)\ (\partial_i u_i\ \partial_k u_j)\ dx\,ds.
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Calculando em separado:

$$
\nabla\cdot(x-x_0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(x-x_0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}x-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}x_0=\sum_{j=1}^{n}1-\sum_{j=1}^{n}0=n,
$$

assim,

(i) $\nabla\cdot(x-x_0)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(x-x_0)=n.$

$$
a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^{n}(\partial_k(x-x_0))\partial_i u^j\,\partial_k u^j\,dx\,ds\ =a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^{n}\partial_i u^j\,\partial_k u^j\,dx\,ds=
$$

$$
a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}[\partial_i u^j]\sum_{j,k=1}^{n}[\partial_k u^j]\,dx\,ds=a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{j=1}^{n}|\nabla u^j|\sum_{j=1}^{n}|\nabla u^j|\,dx\,ds=
$$

$$
a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega|\nabla u||\nabla u|\,dx\,ds=a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\,ds,
$$

assim,

(ii) $a^2\displaystyle\int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^{n}(\partial_k(x-x_0))\partial_i u^j\,\partial_k u^j\,dx\,ds=a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\,ds.$

$$
(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{i,j,k=1}^{n}(\partial_j(x^k-x_0^k))\cdot(\partial_i u^i\,\partial_k u^j)\,dx\,ds=
$$

$$(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n \partial_i u^i \partial_k u^j \, dx\, ds =$$

$$(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \partial_i u^i \sum_{j,k=1}^n \partial_k u^j \, dx\, ds =$$

$$(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i=1}^n D_i u^i \sum_{j,k=1}^n D_j u^j \, dx\, ds =$$

$$(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega div\, u\, div\, u\, dx\, ds =$$

$$(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega (div\, u)^2\, dx\, ds,$$

assim,

(iii)
$$(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\partial_j(x^k-x_0^k))\cdot(\partial_i u^i \partial_k u^j)\, dx\, ds = (b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega (\,div\, u)^2\, dx\, ds.$$

Substituíndo, **(i), (ii), (iii)** em (2.45) segue que:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega} ((x-x_0)\cdot\eta)\,\left[a^2\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 + (b^2-a^2)\,(\,div\, u)^2\right]\, d\Gamma\, ds = \\
&\left[\int_\Omega ((x-x_0):\nabla u)\cdot u_t\, dx\right]_t^{t+T} + \int_t^{t+T}\int_\Omega ((x-x_0):\nabla u)\cdot \alpha(x)\, u_t\, dx\, ds \\
&+\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega n\,\left[|u_t|^2 - a^2\,|\nabla u|^2\, - (b^2-a^2)\,(\,div\, u)^2\right]\, dx\, ds \\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega ((x-x_0):\nabla u)\cdot(\nabla\theta)\, dx\, ds + a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\, ds \\
&+(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega (\,div\, u)^2\, dx\, ds,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega}((x-x_o)\cdot\eta)\,\left[a^2\,\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2+(b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\right]\,d\Gamma\,ds=\\
&\left[\int_\Omega((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot u_t\,dx\right]_t^{t+T}+\int_t^{t+T}\int_\Omega((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot\alpha(x)\,u_t\,dx\,ds\\
&+\frac{N}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[|u_t|^2-a^2\,\,|\nabla u|^2\,\,-(b^2-a^2)\,(\,div\,(u))^2\right]\,dx\,ds\\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[a^2\,\,|\nabla u|^2\,\,+(b^2-a^2)\,(\,div\,(u))^2\right]\,dx\,ds\\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot\nabla\theta\,dx\,ds,
\end{aligned}
$$

onde $\eta=\eta\,(x)$ é o vetor normal à $x\in\partial\Omega$.

Para provar a equação (2.37), multiplicamos a primeira equação de (2.1) por u e integramos em $[t,t+T]\times\Omega$

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega u_{tt}u\,dx\,ds-\int_t^{t+T}\int_\Omega a^2\nabla u\,u\,dx\,ds-(b^2-a^2)\,\int_t^{t+T}\int_\Omega\nabla\,div\,(u)\,u\,dx\,ds\\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega\nabla\theta\,u\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\Omega\alpha(x)\,u_t\,\cdot u\,dx\,ds=0.
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

Calculando, alguns termos em separado:

$$
\frac{d}{dt}(u\cdot u_t)=u_t\,u_t+u\,u_{tt}=|u_t|^2+u\,u_{tt},
$$

assim,

$$
\int_t^{t+T}\int_\Omega u_{tt}\,u\,dx\,ds=\int_t^{t+T}\int_\Omega\frac{d}{dt}(u\cdot u_t)\,dx\,ds-\int_t^{t+T}\int_\Omega|u_t|^2\,dx\,ds. \tag{2.47}
$$

$$
-\int_t^{t+T}\int_\Omega a^2\nabla u\,u\,dx\,ds=a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla u\,dx\,ds=a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\,ds,
$$

assim,

$$
-\int_t^{t+T}\int_\Omega a^2\nabla u\,u\,dx\,ds=a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\,ds. \tag{2.48}
$$

$$
\begin{aligned}
-(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla\, div\ u\, u\, dx\, ds &= -(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega div\,(u\, div\ u)\, dx\, ds \\
+(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega div\ u\ \cdot div\ u\, dx\, ds &= (b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega (div\ u)^2\, dx\, ds,
\end{aligned}
$$

assim,

$$
-(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla\, div\ u\, u\, dx\, ds = (b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega (div\ u)^2\, dx\, ds. \tag{2.49}
$$

Com isso, substituído (2.47), (2.48) e (2.49) em (2.46), segue que

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega \frac{d}{dt}(u\cdot u_t)\, dx\, ds - \int_t^{t+T}\int_\Omega |u_t|^2\, dx\, ds + a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\, xds \\
&+(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega (div\ u)^2\, dx\, ds + \int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla\theta\, u\, dx\, ds \\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega \alpha(x)\, u_t\ \cdot u\, dx\, ds = 0,
\end{aligned}
$$

então,

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega -|u_t|^2\, dx\, ds + a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\, ds + (b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega (div\ u)^2\, dx\, ds = \\
&-\left[\int_\Omega (u\cdot u_t)\, dx\right]_t^{t+T} - \int_t^{t+T}\int_\Omega \nabla\theta\, u\, dx\, ds - \int_t^{t+T}\int_\Omega \alpha(x)\, u_t\ \cdot u\, dx\, ds,
\end{aligned}
$$

então,

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega \left[-|u_t|^2 + a^2\,|\nabla u|^2\ + (b^2-a^2)\,(\,div\ u)^2\right] dx\, ds = \\
&-\left[\int_\Omega u_t\cdot u\, dx\right]_t^{t+T} - \int_t^{t+T}\int_\Omega \left[\nabla\theta + \ \alpha(x)\, u_t\right]\cdot u\, dx\, ds.
\end{aligned}
$$

□

2.6 Estimativas de Energia

Observamos, que em todas as estimativas que se seguirem, a letra C poderá indicar diferentes constantes positivas.

Seja, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 sobre $(\overline{\Omega})$, tal que

$$\begin{aligned} h(x) &= \eta(x), && \text{sobre} \quad \Gamma(x_0) \\ h(x)\cdot\eta(x) &\geq 0, && \text{sobre} \quad \partial\Omega \\ h(x) &= 0, && \text{sobre} \quad \Omega\backslash\hat{\omega} \end{aligned} \tag{2.50}$$

onde $\eta(x)$ é a normal unitária exterior a Ω no ponto $x \in \partial\Omega$ e $\widehat{\omega}$, é um aberto do $\mathbb{R}^n$ tal que $\widehat{\omega} \subset W$, $\Gamma(x_0) \subset \widehat{\omega} \cap \overline{\Omega} \subset \overline{\Omega}$. (a existência de um tal campo h aparece em Lions [17]). O conjunto ω foi definido na introdução deste capítulo, $\omega \subset \overline{\Omega}$ vizinhança de $\Gamma(x_0)$, $\omega = \overline{\Omega} \cap W$ onde W é um aberto do $\mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma(x_0) \subset W$.

A primeira estimativa é dada pelo seguinte lema:

Lema 2.7. *Seja $T > 0$ fixo. Então, existem $\gamma > 0$ e $\beta > 0$ tal que as soluções $u(x,t)$ e $\theta(x,t)$ de (2.1) satisfazem a seguinte desigualdade:*

$$\begin{aligned} &\gamma \int_t^{t+T} E_1(s)\, ds \leq C\Big[E_1(t+T) \,+\, E_1(t)\Big] \\ &+\frac{1}{2}\beta M \int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} \left[a^2\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 \,+ (b^2-a^2)(div\, u)^2\right] d\Gamma ds \\ &+ \int_t^{t+T}\int_\Omega [|u| + \beta M|\nabla u|]\, |\alpha(x)\, u_t|\, dx\, ds \\ &+ \int_t^{t+T}\int_\Omega \Big[|u| \,+ \beta M|\nabla u|\Big]\, |\nabla\theta|\, dx\, ds, \end{aligned}$$

onde $M = \sup\limits_{\bar{\Omega}} |x - x_0|$ e $E_1(t)$ é a energia associada a solução $u(x,t)$ da primeira equação do sistema (2.1), isto é,

$$E_1(t) \,=\, \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\,|u_t|^2 \,+\, a^2|\nabla u|^2 \,+ (b^2-a^2)(div\, u)^2\Big)\, dx.$$

Prova:

Multiplicando (2.36) por $-\beta$, $\beta > 0$ e somando com (2.37) resulta que

$$
\begin{aligned}
&\frac{-\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega}((x-x_o)\cdot\eta)\ \left[a^2\ \left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2+(b^2-a^2)\ (\,div\,u)^2\right]\ d\Gamma\ ds\\
&\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[-\left|u_t\right|^2+a^2\left|\nabla u\right|^2\ +(b^2-a^2)\ (\,div\,u)^2\right]\ dx\,ds=\\
&-\beta\left[\int_\Omega((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot u_t\,dx\right]_t^{t+T}-\beta\int_t^{t+T}\int_\Omega((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot\alpha(x)\,u_t\,dx\,ds\\
&-\beta\frac{N}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[\left|u_t\right|^2-a^2\ \left|\nabla u\right|^2\ -(b^2-a^2)\ (\,div\,u)^2\right]\ dx\,ds\\
&-\beta\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[a^2\ \left|\nabla u\right|^2\ +(b^2-a^2)\ (\,div\,u)^2\right]\ dx\,ds\\
&-\beta\int_t^{t+T}\int_\Omega((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot\nabla\theta\,dx\,ds\\
&-\left[\int_\Omega u_t\cdot u\,dx\right]_t^{t+T}-\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[\nabla\theta+\ \alpha(x)\,u_t\right]\cdot u\,dx\,ds,
\end{aligned}
$$

assim,

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[-\left|u_t\right|^2+a^2\left|\nabla u\right|^2\ +(b^2-a^2)\ (\,div\ u)^2\right]\ dx\,ds\\
&+\beta\frac{N}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[\left|u_t\right|^2\ -a^2\ \left|\nabla u\right|^2-(b^2-a^2)\ (\,div\,u)^2\right]\ dx\,ds\\
&+\beta\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[a^2\ \left|\nabla u\right|^2\ +(b^2-a^2)\ (\,div\,u)^2\right]\ dx\,ds=\\
&-\beta\left[\int_\Omega((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot u_t\,dx\right]_t^{t+T}-\beta\int_t^{t+T}\int_\Omega((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot\alpha(x)\,u_t\,dx\,ds\\
&-\beta\int_t^{t+T}\int_\Omega((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot\nabla\theta\,dx\,ds\\
&-\left[\int_\Omega u_t\cdot u\,dx\right]_t^{t+T}-\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[\nabla\theta+\ \alpha(x)\,u_t\right]\cdot u\,dx\,ds\\
&\frac{+\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega}((x-x_o)\cdot\eta)\ \left[a^2\ \left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2+(b^2-a^2)\ (\,div\ u)^2\right]\ d\Gamma\ ds,
\end{aligned}
$$

mas,

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega \Big[-|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 \ + (b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\Big]\,dx\,ds\\
&+\beta\frac{N}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega \Big[|u_t|^2 \ - a^2\ |\nabla u|^2 - (b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\Big]\,dx\,ds\\
&+\beta\int_t^{t+T}\int_\Omega \Big[a^2\ |\nabla u|^2 \ + (b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\Big]\,dx\,ds =\\
&\left(1-\beta\frac{N}{2}\right)\int_t^{t+T}\int_\Omega \Big[-|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 \ + (b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\Big]\,dx\,ds\\
&+\beta\frac{N}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega \Big[|u_t|^2 - a^2\ |\nabla u|^2 \ - (b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\Big]\,dx\,ds =\\
&\left(\beta\frac{N}{2}-1\right)\int_t^{t+T}\int_\Omega |u_t|^2\ dx\,ds\\
&+\left(1+\beta-\beta\frac{N}{2}\right)\int_t^{t+T}\int_\Omega \Big[a^2\ |\nabla u|^2 \ + (b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\Big]\,dx\,ds.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\left(\beta\frac{N}{2}-1\right)\int_t^{t+T}\int_\Omega |u_t|^2\ dx\,ds\\
&+\left(1+\beta-\beta\frac{N}{2}\right)\int_t^{t+T}\int_\Omega \Big[a^2\ |\nabla u|^2 \ + (b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\Big]\,dx\,ds =\\
&-\beta\left[\int_\Omega ((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot u_t\,dx\right]_t^{t+T} - \beta\int_t^{t+T}\int_\Omega ((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot\alpha(x)\,u_t\,dx\,ds\\
&-\beta\int_t^{t+T}\int_\Omega ((x-x_o)\cdot\nabla u)\cdot\nabla\theta\,dx\,ds\\
&-\left[\int_\Omega u_t\cdot u\,dx\right]_t^{t+T} - \int_t^{t+T}\int_\Omega \Big[\nabla\theta + \ \alpha(x)\,u_t\Big]\cdot u\,dx\,ds\\
&\frac{+\beta}{2}\int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega} ((x-x_o)\cdot\eta)\ \left[a^2\ \left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 \ + (b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\right]\ d\Gamma\ ds.
\end{aligned}
$$

Agora, fixando um número β tal que

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{n} < \beta < \frac{2}{n-2}, \quad n \geq 3\\
&\beta > 2, \quad n = 1\\
&\beta > 1, \quad n = 2
\end{aligned}
$$

escolhemos $\gamma := 2\,min\left\{\dfrac{\beta N}{2} - 1,\ 1+\beta\left(1-\dfrac{N}{2}\right)\right\}\ >\ 0.$
Então, de (2.51) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\gamma \int_t^{t+T} \frac{1}{2} \int_\Omega \Big[|u_t|^2 + a^2|\nabla u|^2 \ + (b^2-a^2)\ (\,div\, u)^2\Big]\ dx\, ds \le \\
&-\beta \left[\int_\Omega [(x-x_0)\cdot \nabla u]\ u_t\right]_t^{t+T} - \left[\int_\Omega u\cdot u_t\, dx\right]_t^{t+T} \\
&-\beta \int_t^{t+T} \int_\Omega \Big[\ (x-x_0)\nabla u\Big] \Big[\nabla\theta\ + \alpha(x)\, u_t\Big]\ dx\, ds - \int_\Omega \Big[\nabla\theta\ + \alpha(x)\, u_t\Big]\, u\, dx\, ds \\
&+\frac{\beta}{2} \int_t^{t+T} \int_\Gamma [(x-x_0)\cdot\eta] \left[a^2 \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 + (b^2-a^2)\ (\,div\, u)^2\right] d\Gamma ds,
\end{aligned}
$$

substituíndo $E_1(t)$ no primeiro membro e uma vez que, $M = \sup\limits_{x\in\bar{\Omega}} |x-x_0|$, temos

$$
\begin{aligned}
&\gamma \int_t^{t+T} E_1(s) ds \le \left[\int_\Omega \beta M \nabla u u_t\right]_t^{t+T} + \left[\int_\Omega u\cdot u_t\, dx\right]_t^{t+T} \\
&+ \int_t^{t+T} \int_\Omega [\beta M \nabla u] \Big[\nabla\theta\ + \alpha(x)\, u_t\Big]\ dx\, ds + \int_\Omega [\nabla\theta +\ \alpha(x)\, u_t]\, u\, dx\, ds \\
&+\frac{1}{2} \int_t^{t+T} \int_{\Gamma(x_0)} M\beta \left[a^2 \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 + (b^2-a^2)\ (\,div\, u)^2\right] d\Gamma ds \le \\
&\frac{\beta M}{2} \int_t^{t+T} \int_{\Gamma(x_0)} \left[a^2 \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 + (b^2-a^2)\ (\,div\, u)^2\right] d\Gamma ds \\
&+ \int_t^{t+T} \int_\Omega \alpha(x)|u_t| \Big[|u|\ + \beta M|\nabla u|\Big]\ dx\, ds \\
&+ \int_t^{t+T} \int_\Omega |\nabla\theta| \Big[|u| +\ \beta M|\nabla u|\Big]\ dx\, ds\ + \left[\int_\Omega \beta M\nabla u + u u_t\right]_t^{t+T},
\end{aligned}
$$

assim,

$$
\begin{aligned}
&\gamma \int_t^{t+T} E_1(s)\, ds \le C\Big[E_1(t+T)\ + E_1(t)\Big] \\
&+\frac{1}{2}\beta M \int_t^{t+T} \int_{\Gamma(x_0)} \left[a^2 \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 + (b^2-a^2)(\,div\, u)^2\right] d\Gamma ds + \\
&\int_t^{t+T} \int_\Omega \Big[|u| + \beta M|\nabla u|\ \Big]\ |\alpha(x)\, u_t|\, dx\, ds \\
&+ \int_t^{t+T} \int_\Omega \Big[|u|\ + \beta M|\nabla u|\Big]\ |\nabla\theta|\, dx\, ds.
\end{aligned}
$$

Pois, usando a desigualdade de Poincaré (1.27), segue que

$$
\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega \left[\beta M \nabla u + u\right] u_t\right]_t^{t+T} \leq \\
&C\left\{\|u_t(t+T)\| \left[\|\nabla u(t+T)\| + \|u(t+T)\|\right] + \|u_t(t)\| \left[\|\nabla u(t)\| + \|u(t)\|\right]\right\} \leq \\
&C\left\{\|u_t(t+T)\|\|\nabla u(t+T)\| + \|u_t(t)\|\|\nabla u(t)\|\right\} \leq \\
&C\left\{\frac{\|u_t(t+T)\|^2}{2} + \frac{\|\nabla u(t+T)\|^2}{2} + \frac{\|u_t(t)\|^2}{2} + \frac{\|\nabla u(t)\|^2}{2}\right\} \leq \\
&C\left\{\frac{1}{2}\left[\|u_t(t+T)\|^2 + \|\nabla u(t+T)\|^2 + (b^2-a^2)\left(div\, u(t+T)\right)^2\right]\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}\left[\|u_t(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 + (b^2-a^2)(div\, u(t))^2\right]\right\} = \\
&C\left[E_1(t+T) + E_1(t)\right].
\end{aligned}
$$

□

Para a demonstração do próximo Lema, será necessário definir $m = m(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, uma função satisfazendo as seguintes propriedades:

$$
\begin{aligned}
&\frac{|\nabla m|^2}{m}, && \text{é limitada em } \Omega. \\
&0 \leq m(x) \leq 1, && \text{em } \Omega. \\
&m = 1, && \text{em } \widehat{\omega} \cap \overline{\Omega}. \\
&m = 0, && \text{em } \overline{\Omega} \backslash \omega.
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

onde $\widehat{\omega}$ aparece nas propriedades de h em (2.50).

A existência de uma tal função $m(x)$ é mencionada em Lions [17].

Lema 2.8. *Seja $T > 0$ fixo. Então, existe $\gamma > 0$ tal que as soluções $u(x,t)$ e $\theta(x,t)$ de (2.1) satisfazem a seguinte desigualdade:*

$$
\begin{aligned}
\gamma \int_t^{t+T} E_1(s)\, ds \ &\leq C\left[E_1(t) + E_1(t+T) + \int_t^{t+T}\int_\omega \left(|u_t|^2 + |u|^2\right) dx\, ds\right. \\
&+ \int_t^{t+T}\int_\Omega |\alpha(x)\, u_t| \left[|u| + \nabla u\right] dx\, ds \\
&\left. + \int_t^{t+T}\int_\omega |\nabla\theta| \left[|\nabla u| + |u|\right] dx\, ds\right],
\end{aligned}
$$

sendo, $E_1(t)$ é a energia associada a solução $u(x,t)$ da primeira equação, do sistema (2.1).

Prova:

Usando a identidade (2.35) com $h = h(x)$ satisfazendo (2.50), obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega}(h\cdot\eta)\ \left[a^2\ \left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 + (b^2-a^2)\ (\,div\, u)^2\right]\ d\Gamma\ ds = \\
&\left[\int_\Omega (h:\nabla u)\cdot u_t\, dx\right]_t^{t+T} + \int_t^{t+T}\int_\Omega (h:\nabla u)\cdot\alpha(x)\, u_t\, dx\, ds \\
&+\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (\nabla\cdot h)\ \left[|u_t|^2 - a^2\ |\nabla u|^2\ - (b^2-a^2)\ (\,div\, u)^2\right]\ dx\, ds \\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega (h:\nabla u)\cdot(\nabla\theta)\ dx\, ds + a^2\ \int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^N (\partial_k h_i)\ (\partial_i u_j\ \partial_k u_j)\ dx\, ds \\
&+(b^2-a^2)\ \int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^N (\partial_j h_k)\ (\partial_i u_i\ \partial_k u_j)\ dx\, ds.
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

Estimando, alguns elementos em separado de (2.52)

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^N (\partial_j h_k)\ (\partial_i u_j\ \partial_k u_j)\ dx\, ds = \\
&\int_t^{t+T}\int_{\widehat{\omega}\cap\overline{\Omega}} \sum_{i,j,k=1}^N (\partial_j h_k)\ (\partial_i u_j\ \partial_k u_j)\ dx\, ds \leq \\
&C\int_t^{t+T}\int_{\widehat{\omega}\cap\overline{\Omega}} \sum_{i,j,k=1}^N |\partial_i u_j|\ |\partial_k u_j|\, dx\, ds \leq \\
&C\int_t^{t+T}\int_{\widehat{\omega}} \left(N\sum_{i,j=1}^N \frac{|\partial_i u_j|^2}{2}\right) + \left(N\sum_{j,k=1}^N \frac{|\partial_k u_j|^2}{2}\right)\ dx\, ds \leq \\
&C\int_t^{t+T}\int_{\widehat{\omega}} \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N |\nabla u_j|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N |\nabla u_j|^2\right)\ dx\, ds = C\int_t^{t+T}\int_{\widehat{\omega}} |\nabla u|^2\, dx\, ds,
\end{aligned}
$$

usando, $h \in C^1(\overline{\Omega})$, $h = 0$ em $\Omega\setminus\widehat{\omega}$ e $\widehat{\omega}\subset\omega$, e ainda $\|\nabla h\|_{L^2(\Omega)} \leq C$,

$$
\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega (h:\nabla u)\cdot u_t\,dx\right]_t^{t+T} = \left[\int_{\widehat{\omega}\cap\overline{\Omega}} \left(h\,,\,\sum_{j=1}^N \nabla u^j\right)\cdot u_t\,dx\right]_t^{t+T} \leq \\
&C\left[\int_{\widehat{\omega}\cap\overline{\Omega}} \sum_{j=1}^N \left(h\,,\,\nabla u^j\right)\cdot u_t\,dx\right]_t^{t+T} \leq C\left[\int_{\widehat{\omega}\cap\overline{\Omega}} \sum_{j=1}^N |\nabla u^j||u_t|\,dx\right]_t^{t+T} \leq \\
&C\left[\int_{\widehat{\omega}\cap\overline{\Omega}} |\nabla u||u_t|\,dx\right]_t^{t+T} \leq C\left[\int_{\widehat{\omega}\cap\overline{\Omega}} |\nabla u|^2+|u_t|^2\,dx\right]_t^{t+T} \leq \\
&C\Big[E_1(t+T)\ +E_1(t)\Big].
\end{aligned}
$$

Substituíndo, estas duas estimativas em (2.52)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\partial\Omega}(h\cdot\eta)\ \left[a^2\ \left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2+(b^2-a^2)\ (\,div\,u)^2\right]\ d\Gamma\ ds \\
&\leq C\Big[E_1(t+T)\ +E_1(t)\Big]+\int_t^{t+T}\int_\Omega (h:\nabla u)\cdot\alpha(x)\,u_t\,dx\,ds \\
&+\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (\nabla\cdot h)\ \Big[|u_t|^2-a^2\ |\nabla u|^2\ -(b^2-a^2)\ (\,div\,u)^2\Big]\ dx\,ds \\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega (h:\nabla u)\cdot(\nabla\theta)\ dx\,ds+C\int_t^{t+T}\int_{\widehat{\omega}} |\nabla u|^2\,dx\,ds \leq \\
&C\Bigg[E_1(t+T)+E_1(t)+\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla u|\alpha(x)|u_t|\,dx\,ds \\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega \Big[|u_t|^2\ +a^2\ |\nabla u|^2+(b^2-a^2)\ (\,div\,u)^2\Big]\ dx\,ds \\
&+\int_t^{t+T}\int_{\widehat{\omega}\cap\overline{\Omega}} |\nabla u||\nabla\theta|\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_{\widehat{\omega}} |\nabla u|^2\,dx\,ds\Bigg] \leq
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&C\Bigg[E_1(t+T)+E_1(t)+\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla u|\alpha(x)\,|u_t|\,dx\,ds \\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega \left[|u_t|^2+a^2\ |\nabla u|^2+(b^2-a^2)\ (\,div\,u)^2\right]\ dx\,ds \\
&+\int_t^{t+T}\int_{\widehat{\omega}\cap\overline{\Omega}} |\nabla u||\nabla\theta|\,dx\,ds\Bigg] \leq \\
&C\Bigg[E_1(t+T)+E_1(t)+\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla u|\alpha(x)\,|u_t|\,dx\,ds \\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega\ |u_t|^2\ dx\,ds \\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega\ m(x)\Big[a^2\ |\nabla u|^2\ +(b^2-a^2)\ (\,div\,u)^2\Big]\ dx\,ds \\
&+\int_t^{t+T}\int_{\widehat{\omega}\cap\overline{\Omega}} |\nabla u||\nabla\theta|\,dx\,ds\Bigg].
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)}\left[a^2\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2+(b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\right]d\Gamma\,ds\leq\\
&C\left[E_1(t+T)+E_1(t)+\int_t^{t+T}\int_\Omega|\nabla u|\alpha(x)\,|u_t|\,dx\,ds\right.\\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega|u_t|^2\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_{\widehat{\omega}\cap\overline{\Omega}}|\nabla u||\nabla\theta|\,dx\,ds\\
&\left.+\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)\left[a^2\,|\nabla u|^2\,+(b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\right]dx\,ds\right].
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

Estimando agora:

(a)
$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)\left[a^2\,|\nabla u|^2+(b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\right]dx\,ds=\\
&\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)|u_t|^2\,dx\,ds-\left[\int_\Omega m(x)\,u_t\,u\,dx\right]_t^{t+T}\\
&-\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)\,\alpha(x)\,u_t\,u\,dx\,ds-\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)\nabla\theta\cdot u\,dx\,ds\\
&-a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^N\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\frac{\partial m}{\partial x^j}u^i\,dx\,ds-(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega div\,u[\nabla m(x)\cdot u]\,dx\,ds.
\end{aligned}
$$

(b)
$$
\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega m(x)\,u_t\,u\,dx\right]_t^{t+T}\leq\left[\int_\Omega|u_t||u|\,dx\right]_t^{t+T}\leq\frac{1}{2}\left[\int_\Omega|u_t|^2+|u|^2\,dx\right]_t^{t+T}\leq\\
&\frac{1}{2}\left[\int_\Omega C|\nabla u|^2+|u_t|^2\,dx\right]_t^{t+T}\leq C\left[E_1(t)+\,E_1(t+T)\right].
\end{aligned}
$$

(c) $\displaystyle\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)|u_t|^2\,dx\,ds=\int_t^{t+T}\int_\omega m(x)|u_t|^2\,dx\,ds\leq\int_t^{t+T}\int_\omega|u_t|^2\,dx\,ds.$

(d)
$$
\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)\alpha(x)\,u_t\,u\,dx\,ds=\int_t^{t+T}\int_\omega m(x)\,\alpha(x)\,u_t\,u\,dx\,ds\leq\\
&C\int_t^{t+T}\int_\omega\alpha(x)|u_t||u|\,dx\,ds.
\end{aligned}
$$

(e) $$\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)\nabla\theta\cdot u\,dx\,ds=\int_t^{t+T}\int_\omega m(x)\nabla\theta\cdot u\,dx\,ds\le\int_t^{t+T}\int_\omega |u||\nabla\theta|\,dx\,ds.$$

(f) $$\begin{aligned}\int_t^{t+T}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^N\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\frac{\partial m}{\partial x^j}u^i\,dx\,ds\le\int_t^{t+T}\int_\Omega\frac12\left[|u|^2\frac{|\nabla m|^2}{m}+m|\nabla u|^2\right]\,dx\,ds\le\\ C\int_t^{t+T}\int_\omega |u|^2\,dx\,ds+\frac12\int_t^{t+T}\int_\Omega a^2|\nabla u|^2\,dx\,ds.\end{aligned}$$

(g) $$\begin{aligned}\int_t^{t+T}\int_\Omega div\,u[\nabla m(x)\cdot u]\,dx\,ds=\\ \int_t^{t+T}\int_\Omega\sqrt{m}\,div\,u\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}\left[\frac{\nabla m(x)}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{b^2-a^2}}\right]\,dx\,ds\le\\ \int_t^{t+T}\int_\Omega\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}\sqrt{m}\,|div\,u|\left|\frac{\nabla m(x)}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b^2-a^2}}\right||u|\,dx\,ds\le\\ \left(\frac{b^2-a^2}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega m|div\,(u)|^2\,dx\,ds\right)^{\frac12}\left(\frac{2}{b^2-a^2}\int_t^{t+T}\int_\Omega\frac{|\nabla m|^2}{m}|u|^2\,dx\,ds\right)^{\frac12}\le\\ \frac12\int_t^{t+T}\int_\Omega(b^2-a^2)(div\,u)^2\,dx\,ds+\frac{2}{b^2-a^2}\int_t^{t+T}\int_\omega C|u|^2\,dx\,ds\le\\ \frac12\int_t^{t+T}\int_\Omega(b^2-a^2)(div\,u)^2\,dx\,ds+C\int_t^{t+T}\int_\omega|u|^2\,dx\,ds.\end{aligned}$$

Substituíndo, **(b)**, **(c)**, **(d)**, **(e)**, **(f)** e **(g)** em **(a)**, temos

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)\left[a^2\ |\nabla u|^2\ +(b^2-a^2)\ (\ div\,u)^2\right]\ dx\ ds\le\\ &C\left[E_1(t)+E_1(t+T)+\int_t^{t+T}\int_\omega|u_t|^2\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\omega\alpha(x)|u_t||u|\,dx\,ds\right.\\ &+\int_t^{t+T}\int_\omega|u||\nabla\theta|\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\omega|u|^2\,dx\,ds+\frac12\int_t^{t+T}\int_\Omega a^2|\nabla u|^2\,dx\,ds\\ &\left.+\frac12\int_t^{t+T}\int_\Omega(b^2-a^2)(div\,u)^2\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\omega|u|^2\,dx\,ds\right]\le\\ &C\left[E_1(t)+E_1(t+T)+\int_t^{t+T}\int_\omega|u_t|^2\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\omega|u|^2\,dx\,ds\right.\\ &\left.+\int_t^{t+T}\int_\omega\alpha(x)\,|u_t||u|\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\omega|u||\nabla\theta|\,dx\,ds\right]\le\\ &+C\left[E_1(t)+E_1(t+T)+\int_t^{t+T}\int_\omega\left[|u_t|^2+\ |u|^2\right]\,dx\,ds\right.\\ &\left.+\int_t^{t+T}\int_\omega\left[\alpha(x)|u_t|+\ |\nabla\theta|\right]|u|\,dx\,ds\right],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_\Omega m(x)\left[a^2\ |\nabla u|^2\ +(b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\right]\ dx\ ds \leq \\
&C\left[E_1(t)+E_1(t+T)+\int_t^{t+T}\int_\omega\left[|u_t|^2+\ |u|^2\right]dx\,ds\right. \qquad (2.54)\\
&\left.+\int_t^{t+T}\int_\omega\left[\alpha(x)|u_t|+\ |\nabla\theta|\right]|u|\,dx\,ds\right].
\end{aligned}$$

Substituíndo (2.54) em (2.53) temos

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)}\left[a^2\ \left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2\ +(b^2-a^2)\,(\,div\,u)^2\right]d\Gamma\ ds\\
&\leq C\left[E_1(t+T)+E_1(t)+\int_t^{t+T}\int_\Omega|\nabla u|\alpha(x)|u_t|\,dx\,ds\right.\\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega\ |u_t|^2\ dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_{\widehat{\omega}\cap\overline{\Omega}}|\nabla u||\nabla\theta|\,dx\,ds \qquad (2.55)\\
&+\int_t^{t+T}\int_\omega\left[|u_t|^2+\ |u|^2\right]dx\,ds\\
&\left.+\int_t^{t+T}\int_\omega\left[\alpha(x)\,|u_t|+\ |\nabla\theta|\right]|u|\,dx\,ds\right].
\end{aligned}$$

Substituíndo, (2.55) no lema 2.7 segue que

$$\begin{aligned}
&\gamma\int_t^{t+T}E_1(s)\,ds\leq C\left[E_1(t+T)\ +E_1(t)+\int_t^{t+T}\int_\Omega|\nabla u|\alpha(x)|u_t|\,dx\,ds\right.\\
&+\int_t^{t+T}\int_{\widehat{\omega}\cap\overline{\Omega}}|\nabla u||\nabla\theta|\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\omega\left[|u_t|^2+\ |u|^2\right]dx\,ds\\
&+\int_t^{t+T}\int_\omega\left[\alpha(x)|u_t|+\ |\nabla\theta|\right]|u|\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[|u|+\beta M|\nabla u|\ \right]|\alpha(x)\,u_t|\,dx\,ds\\
&+\int_t^{t+T}\int_\Omega\left[|u|+\ \beta M|\nabla u|\right]|\nabla\theta|\,dx\,ds,\leq C\left[E_1(t)\ +E_1(t+T)\right.\\
&+\int_t^{t+T}\int_\omega\left[|u_t|^2+\ |u|^2\right]dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\omega\alpha(x)|u_t|\left[|\nabla u|+\ |u|\right]dx\,ds\\
&\left.+\int_t^{t+T}\int_\omega|\nabla\theta|\left[|u|+\ |\nabla u|\right]\ dx\,ds\right],
\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
&\gamma\int_t^{t+T}E_1(s)\,ds\leq C\left[E_1(t)+E_1(t+T)+\int_t^{t+T}\int_\omega\left[|u_t|^2+\ |u|^2\right]dx\,ds\right.\\
&\left.+\int_t^{t+T}\int_\omega\alpha(x)|u_t|\left[|\nabla u|+\ |u|\right]dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\omega|\nabla\theta|\left[|u|\ +|\nabla u|\right]dx\,ds\right].
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.9. *Seja, (u,θ) solução do problema (2.1), existe uma constante $T > 0$ dependendo de $E(0)$, tal que*

$$\begin{aligned} E(t) \ &\leq C\Bigg\{ E(t) - E(t+T) + \int_t^{t+T}\int_\omega \Big[|u_t|^2 + |u|^2\Big]\,dx\,ds \\ &+ \int_t^{t+T}\int_\omega \nabla\theta \Big[|\nabla u| + |u|\Big]\,dx\,ds\Bigg\}, \end{aligned} \tag{2.56}$$

para alguma constante positiva C e para todo $t \geq 0$.

Prova:

É conhecido de (2.30) que

$$\int_t^{t+T}\int_\Omega \alpha(x)|u_t|^2\,dx\,ds + \int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\,ds = E(t) - E(t+T),$$

pela desigualdade de Poincaré,

$$\int_t^{t+T}\int_\Omega \theta^2\,dx\,ds \leq C\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\,ds \leq C\Big[E(t) - E(t+T)\Big].$$

Isto diz que,

$$\int_t^{t+T} E_2(t)ds \leq C\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\,ds \leq C\Big[E(t) - E(t+T)\Big], \tag{2.57}$$

onde $E_2(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega \theta^2\,dx$.

Multiplicando, a equação (2.57) por γ e somado com a equação do lema (2.8), segue que

$$\begin{aligned} \gamma\int_t^{t+T} E_1(s)\,ds + \gamma\int_t^{t+T} E_2(t)ds &\leq C\Bigg[E_1(t) + E_1(t+T) + \int_t^{t+T}\int_\omega \Big(|u_t|^2 + |u|^2\Big)\,dx\,ds \\ &+ \int_t^{t+T}\int_\Omega |\alpha(x)\,u_t|\Big[|u| + \nabla u\Big]\,dx\,ds + \int_t^{t+T}\int_\omega |\nabla\theta|\Big[|\nabla u| + |u|\Big]\Bigg] + \gamma \triangle E, \end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\gamma \int_t^{t+T} E(s)\, ds \leq C \Bigg[& E(t) + E(t+T) + \triangle E + \int_t^{t+T} \int_\omega \Big(|u_t|^2 + \, |u|^2 \Big) \, dx \, ds \\
& + \int_t^{t+T} \int_\Omega |\alpha(x) \, u_t| \Big[|u| \, + \nabla u \Big] \, dx \, ds + \int_t^{t+T} \int_\omega |\nabla \theta| \Big[|\nabla u| + \, |u| \Big] \Bigg],
\end{aligned} \tag{2.58}
$$

onde $\triangle E = E(t) - E(t+T)$.

No entanto, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Poincaré e que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, temos a seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
& \int_t^{t+T} \int_\Omega |\alpha(x) \, u_t| \Big[|u| \, + \nabla u \Big] \, dx \, ds \, \leq \\
& C \left[\int_t^{t+T} \int_\Omega |\alpha(x) \, u_t|^2 \, dx \, ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_t^{t+T} \int_\Omega \Big(|\nabla u|^2 + \, |u|^2 \Big) \, dx \, ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
& C\sqrt{2} \left[\int_t^{t+T} \int_\Omega |\alpha(x) \, u_t|^2 \, dx \, ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_t^{t+T} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, ds \right]^{\dfrac{1}{2}} \leq \\
& C\sqrt{2} \left[\int_t^{t+T} \int_\Omega |\alpha(x) \, u_t|^2 \, dx \, ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_t^{t+T} \int_\Omega E(s) \, dx \, ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
& C\sqrt{2}\sqrt{T} \left[\int_t^{t+T} \int_\Omega |\alpha(x) \, u_t|^2 \, dx \, ds \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{E(s)} \leq C \left[\int_t^{t+T} \int_\Omega |u_t|^2 \, dx \, ds \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{E(s)} \leq \\
& C \left[\int_t^{t+T} E(s) \, ds \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{E(s)} \, \leq \, C\sqrt{T} E(t) \, \leq \, C \, E(t).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\int_t^{t+T} \int_\Omega |\alpha(x) \, u_t| \Big[|u| \, + \nabla u \Big] \, dx \, ds \, \leq C \, E(t). \tag{2.59}
$$

Logo, substituíndo (2.59) em (2.58), obtemos

$$
\begin{aligned}
\gamma \int_t^{t+T} E(s) \, ds \quad & \leq C \Bigg[E(t) + E(t+T) + \triangle E + \int_t^{t+T} \int_\omega \Big(|u_t|^2 + \, |u|^2 \Big) \, dx \, ds \\
& + \int_t^{t+T} \int_\omega |\nabla \theta| \Big(|\nabla u| + \, |u| \Big) \Bigg].
\end{aligned} \tag{2.60}
$$

Do fato que $E(t)$ é decrescente segue que

$$
T E(t) \geq \int_t^{t+T} E(s) ds \geq T E(t+T).
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
T\,E(t+T) \quad & \leq C\left[E(t)+E(t+T)+\triangle E+\int_t^{t+T}\int_\omega\Big(|u_t|^2+\,|u|^2\Big)\,dx\,ds\right.\\
& \left.+\int_t^{t+T}\int_\omega|\nabla\theta|\Big(|\nabla u|\,+|u|\Big)\right].
\end{aligned} \tag{2.61}
$$

Somando $E(t)$ em ambos os membros, e tomando $T \geq 2C+1$ em (2.61), temos que

$$
\begin{aligned}
& E(t)+(2C+1)\,E(t+T)\ \leq E(t)+T\,E(t+T)\ \leq\\
& E(t)+C\Big[E(t)+E(t+T)\ +\triangle E\Big]\\
& +C\left[\int_t^{t+T}\int_\omega\Big(|u_t|^2+\,|u|^2\Big)\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\omega|\nabla\theta|\Big(|\nabla u|\,+|u|\Big)\,dx\,ds\right],
\end{aligned}
$$

assim,

$$
\begin{aligned}
& E(t)\leq (C+1)\,E(t)\ -(C+1)\,E(t+T)\ +C\Big[E(t)\ +E(t+T)+\triangle E\Big]\\
& +C\left[\int_t^{t+T}\int_\omega\Big(|u_t|^2\ +|u|^2\Big)\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\omega|\nabla\theta|\Big(|\nabla u|+\,|u|\Big)\,dx\,ds\right]=\\
& (C+1)\ \Big[E(t)\ -\ E(t+T)\Big]\ +C\Big[E(t)\ +E(t+T)+\triangle E\Big]\\
& +C\left[\int_t^{t+T}\int_\omega\Big(|u_t|^2+\,|u|^2\Big)\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\omega|\nabla\theta|\Big(|\nabla u|\ +|u|\Big)\,dx\,ds\right]\leq\\
& +C\left[\triangle E+\int_t^{t+T}\int_\omega\Big(|u_t|^2+\,|u|^2\Big)\,dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\omega|\nabla\theta|\Big(|\nabla u|+\,|u|\Big)\,dx\,ds\right].
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
E(t)\ \leq\ C\left[\triangle E+\int_t^{t+T}\int_\omega\Big(|u_t|^2+\,|u|^2\Big)\ dx\,ds+\int_t^{t+T}\int_\omega|\nabla\theta|\Big(|\nabla u|+\,|u|\Big)\,dx\,ds\right].
$$

Nas estimativas acima C, indica diferentes constantes positivas.

$\square$

2.7 Estimativa Fundamental

Proposição 2.10. *Sejam u e θ as soluções do problema (2.1) e $T > 0$ fixado pelo Lema (2.9). Então, existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\int_t^{t+T}\int_\omega \Big[|u|^2 \,+\, |\nabla\theta|\,\Big[|\nabla u| +\, |u|\Big]\Big]\,dx\,ds \,\le\, C\left[\triangle E \,+\, \int_t^{t+T}\int_\omega |u_t|^2\,dx\,ds\right], \tag{2.62}$$

para todo $t \ge 0$.

Prova:

Supondo por absurdo, que exista uma seqüência de soluções $\Big\{(u^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\theta^n)_{n\in\mathbb{N}}\Big\}$ com dados iniciais $\Big\{(u_0^n), (u_1^n), (\theta_0^n)\Big\}$ e uma seqüência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$, tais que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\displaystyle\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega \Big(|u^n|^2 + |\nabla\theta^n|\,\Big[|u^n| +\, |\nabla u^n|\Big]\Big)\,dx\,ds}{\displaystyle\triangle E_n \,+\, \int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega |u_t^n|^2\,dx\,ds}\right] = \infty. \tag{2.63}$$

Sejam,

$$\lambda_n^2 = \int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega \Big(|u^n|^2 + |\nabla\theta^n|\,\Big[|u^n| +\, |\nabla u^n|\Big]\Big)\,dx\,ds, \tag{2.64}$$

e

$$I_n(t_n) = \frac{1}{\lambda_n^2}\left[\triangle E_n \,+\, \int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega |u_t^n|^2\,dx\,ds\right]. \tag{2.65}$$

Então, de (2.63) temos

$$\lim_{n\to\infty} I_n(t_n) \,=\, 0. \tag{2.66}$$

Sejam $v^n(x,t) = \dfrac{u^n(x,t+t_n)}{\lambda_n}$ e $w^n(x,t) = \dfrac{\theta^n(x,t+t_n)}{\lambda_n}$, $0 \le t \le T$. Além disso, de (2.64) segue que

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega \Big(|u^n|^2 + |\nabla\theta^n|\,\Big[|u^n| +\, |\nabla u^n|\Big]\Big)\,dx\,ds \,=\, 1, \tag{2.67}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Da estimativa do lema (2.9), de (2.66) e de (2.67), segue que

$$
\begin{aligned}
E(v^n(t)\,,\,w^n(t)) = \ & E\left(\frac{u^n(x\,,\,t+t_n)}{\lambda_n}\,,\,\frac{\theta^n(x\,,\,t+t_n)}{\lambda_n}\right) = \\
& \frac{1}{\lambda_n^2}\,E\,\Big(u^n(x\,,\,t+t_n)\,,\;\theta^n(x\,,\,t+t_n)\Big) \leq \\
& \frac{1}{\lambda_n^2}\,E\,\Big(u^n(t_n)\,,\;\theta^n(t_n)\Big) \leq \\
& \frac{C}{\lambda_n^2}\left\{\triangle E_n + \int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega \Big(|u_t^n|^2 + |u^n|^2 + |\nabla\theta^n|\,\Big[|\nabla u^n|\,+|u^n|\Big]\Big)\,dx\,ds\right\} = \\
& \frac{C}{\lambda_n^2}\left\{\triangle E_n + \int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega |u_t^n|^2\,dx\,ds\right\} + C = \\
& C\,I_n(t_n) + C \leq C.
\end{aligned}
$$

Pois, por (2.66) $I_n(t_n)$ é limitado. Assim, obtemos que

$$
E(v^n(t)\,,\,w^n(t)) \leq C, \quad \text{isto é} \quad \int_\Omega \left(|v_t^n|^2 + |\nabla v^n|^2 + |\nabla w^n|^2\right)\,dx\ \leq C,
$$

para todo $0 \leq t \leq T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, onde a constante $C > 0$ independe de t e n.

Portanto,

$$
\|v_t^n(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n} \leq C, \quad \|\nabla v^n(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n} \leq C \quad \text{e} \quad \|w^n(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \tag{2.68}
$$

para todo $0 \leq t \leq T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mas da desigualdade de Poincaré e da estimativa (2.68), segue que

$$
\|v^n(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^n} = \int_\Omega |v^n(x,t)|^2\,dx\ = \int_\Omega \frac{1}{\lambda_n^2}|u^n(x,t+t_n)|^2\,dx
$$

$$
\leq C_1 \int_\Omega \frac{1}{\lambda_n^2}|\nabla u^n(x,t+t_n)|^2\,dx\ = C_2 \int_\Omega |\nabla v^n(x,t)|^2\,dx\ \leq\ C,
$$

para todo $0 \leq t \leq T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Isto é, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$
\int_\Omega |v_n(x,t)|^2\,dx\ \leq C, \tag{2.69}
$$

para todo $0 \leq t \leq T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, concluímos que:

$$
\begin{aligned}
&v^n \text{ é limitada em } \quad W^{1,\infty}(0,T;[L^2(\Omega)]^n) \cap L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^n) \\
&\text{e} \\
&w^n \text{ é limitada em } \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),
\end{aligned} \tag{2.70}
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação 1:

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \Big[\alpha(x)\, u_t^n(t+t_n)\Big] = 0 \;\text{ em }\; L^1((0,T)\times\Omega). \tag{2.71}
$$

Prova:

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$
\int_0^T \int_\Omega \Big|\frac{1}{\lambda_n}\alpha(x)\, u_t^n(t+t_n)\Big|\, dx\, dt = \int_0^T \int_\Omega \alpha(x)\Big|\frac{u_t^n(t+t_n)}{\lambda_n}\Big|\, dx\, dt \leq
$$
$$
\left[\int_0^T \int_\Omega \alpha(x)\, dx\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^T \int_\Omega \alpha(x)\Big|\frac{u_t^n(t+t_n\,,\, x)}{\lambda_n}\Big|^2 dx\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \leq
$$
$$
\frac{C}{\lambda_n^2}\, T\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \left[\int_{t_n}^{t_n+T} \int_\Omega \alpha(x)\big|u_t^n(s\,,\, x)\big|^2\, dx\, ds\right]^{\frac{1}{2}} \leq C\left[\frac{1}{\lambda_n^2} \triangle E\right]^{\frac{1}{2}} \leq C\sqrt{I_n}.
$$

Logo,

$$
\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T \int_\Omega \alpha(x)|u_t^n|\, dx\, ds \leq C\sqrt{I_n(t_n)} \to 0, \tag{2.72}
$$

quando $n \to \infty$.

$\square$

Afirmação 2:

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \Big(\nabla\theta^n(t+t_n)\Big) = 0 \;\text{ em }\; L^1\Big((0,T)\times\Omega\Big). \tag{2.73}
$$

Prova:

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega \Big| \frac{\nabla\theta^n(t+t_n)}{\lambda_n} \Big| \, dx\, dt \leq \; & \left[\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\lambda_n^2} \, dx\, ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^T \int_\Omega \Big| \nabla\theta^n(t+t_n\,,\,x) \Big|^2 dx\, dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
& C_\Omega \sqrt{T} \left[\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T \int_\Omega \Big| \nabla\theta^n(t+t_n\,,\,x) \Big|^2 dx\, dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
& C_\Omega \sqrt{T} \left[\frac{1}{\lambda_n^2} \int_{t_n}^{t_n+T} \int_\Omega |\nabla\theta^n(s,x)|^2 \, dx\, ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
& C_\Omega \sqrt{T} \left[\frac{1}{\lambda_n^2} \triangle E_n \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
& C \sqrt{I_n}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\frac{1}{\lambda_n} \int_0^T \int_\Omega |\nabla\theta^n(t+t_n)| \, dx\, ds \leq C \sqrt{I_n(t_n)} \to 0, \tag{2.74}
$$

quando $n \to \infty$.

$\square$

Afirmação 3:

$$
\int_0^T \int_\omega |v_t|^2 \, dx\, ds = 0. \tag{2.75}
$$

Prova:

De fato, por (2.66) temos que

$$
I_n(t_n) = \frac{1}{\lambda_n^2} \left[\triangle E_n + \int_{t_n}^{t_n+T} \int_\omega |u_t^n|^2 \, dx\, ds \right] \to 0,
$$

assim,

$$
\begin{aligned}
0 \; = \; \lim_{n\to\infty} \int_{t_n}^{t_n+T} \int_\omega \left| \frac{u_t^n(s)}{\lambda_n} \right|^2 dx\, ds \; = \; & \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_\omega \left| \frac{u_t^n(t+t_n)}{\lambda_n} \right|^2 dx\, ds \; = \\
& \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_\omega |v_t^n(t)|^2 \, dx\, dt \; = \\
& \int_0^T \int_\omega |v_t(t)|^2 \, dx\, dt,
\end{aligned}
$$

pois $v^n \to v$ fraco-$\star$ em $L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^n)$.

$\square$

Afirmação 4:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_\omega \nabla w^n\left[|v^n(t)| + |\nabla v^n(t)|\right]\,dx\,dt \,=\, 0. \tag{2.76}$$

Prova:

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\omega \nabla w^n\left[|v^n(t)| + |\nabla v^n(t)|\right]\,dx\,dt \,\leq\\
&\left(\int_0^T\int_\omega |\nabla w^n|^2\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_\omega\left[|\nabla v^n|^2 \,+\, |v^n|^2\right]\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq\\
&C\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\Omega |\nabla\theta^n|^2\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\Omega |\nabla u^n|^2\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq\\
&C\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\triangle E\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_\Omega |\nabla v^n|^2\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq\\
&C\left[\frac{\left[\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\triangle E\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}{2} + \frac{\left[\left(\int_0^T\int_\Omega |\nabla v^n|^2\,dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}{2}\right] \leq\\
&C\frac{1}{\lambda_n^2}\left[\triangle E + \int_0^T\int_\Omega |\nabla u^n|^2\,dx\,dt\right] \leq\, C\sqrt{I_n} \,\to\, 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Agora, passando ao limite de $\Big\{(v^n(t))_{n\in\mathbb{N}}, (w^n(t))_{n\in\mathbb{N}}\Big\}$. De (2.70) segue que existem funções $v(t)$ e $w(t)$ e subseqüências das seqüências v^n e w^n que continuão sendo denominadas por v^n e w^n, sendo que

$$v^n(t) \to v(t) \;\text{ fraco } \star \text{ em }\; W^{1,\infty}(0,T;[L^2(\Omega)]^n) \cap L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^n)$$

e

$$w^n(t) \to w(t) \text{ fraco} \star \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Assim, as funções $v(t)$ e $w(t)$ satisfazem:

$$v \in W^{1,\infty}(0,T;[L^2(\Omega)]^n) \cap L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^n) \text{ e } w \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \quad (2.77)$$

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2\triangle v - (b^2 - a^2)\nabla div\, v \;=\; 0, \\ w_t - \triangle w + div\, v_t \;=\; 0. \end{cases} \quad (2.78)$$

Pois, v^n e w^n são soluções do sistema (2.1).

De fato, usando que (u^n, θ^n) satisfazem

$$\begin{cases} u^n_{tt}(t+t_n) - a^2\triangle u^n(t+t_n) + \nabla\theta^n(t+t_n) + \alpha(x)\, u^n_t(t+t_n) \\ \qquad\qquad\qquad -(b^2-a^2)\nabla div\, u^n\,(t+t_n) = 0, \\ \theta^n_t(t+t_n) - \triangle\theta^n(t+t_n) + div\, u^n_t\,(t+t_n) \;=\; 0, \end{cases} \quad (2.79)$$

a qual, dividido por λ_n temos

$$\begin{cases} v^n_{tt}(t) - a^2\triangle v^n(t) + \dfrac{\nabla\theta^n(t+t_n)}{\lambda_n} + \dfrac{\alpha(x)\, u^n_t(t+t_n)}{\lambda_n} - (b^2-a^2)\nabla div\, v^n(t+t_n) \;=\; 0, \\ w^n_t(t) - \triangle w^n(t) + div\, v^n_t(t) \;=\; 0, \end{cases} \quad (2.80)$$

para $0 \leq t \leq T$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Passando o limite quando $n \to \infty$, obtemos das Afirmações (2.71) e (2.73) que

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2\triangle v - (b^2 - a^2)\nabla div\, v^n \;=\; 0, \\ w_t - \triangle w + div\, v_t \;=\; 0. \end{cases}$$

Ainda, da afirmação (2.75) e da equação (2.64), temos que

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega \Big(|u^n|^2 + |\nabla\theta^n|\left[|u^n| \;+ |\nabla u^n|\right]\Big)\, dx\, ds \;=\; 1. \quad (2.81)$$

Agora, pelas definições de $v^n(x,t)$ e de $w^n(x,t)$

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega \left(|\lambda_n v^n|^2 + |\lambda_n \nabla w^n|\left[|\lambda_n v^n| + |\lambda_n \nabla v^n|\right]\right)\,dx\,ds \;=\; 1,$$

assim,

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega \left(\lambda_n^2 |v^n|^2 + \lambda_n |\nabla w^n|\left[|\lambda_n\left[|v^n| + |\nabla v^n|\right]\right]\right)\,dx\,ds \;=\; 1,$$

anda,

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega \lambda_n^2\left[|v^n|^2 + |\nabla w^n|\left[|v^n| + |\nabla v^n|\right]\right]\,dx\,ds \;=\; 1,$$

isto é,

$$\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega \left[|v^n|^2 + |\nabla w^n|\left[|v^n| + |\nabla v^n|\right]\right]\,dx\,ds \;=\; 1.$$

Agora, aplicando o limite temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega |v^n|^2\,dx\,ds + \lim_{n\to\infty}\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega |\nabla w^n|\left[|v^n| + |\nabla v^n|\right]\,dx\,ds \;=\; 1,$$

ou seja, usando a equação (2.76)

$$\int_{t_n}^{t_n+T}\int_\omega |v|^2\,dx\,ds \;=\; 1. \tag{2.82}$$

Assim, como $v(x,t)$ é solução de

$$v_{tt} - a^2\,\triangle v - (b^2 - a^2)\nabla div\,(v) \;=\; 0, \tag{2.83}$$

em $\Omega \times [0,T)$. Então também v_t é solução de (2.83) em $\Omega \times [0,T)$.

Mas (2.75) diz que $v_t = 0$ q.s. em $\omega \times [0,T)$. Logo, pelo Teorema de Holmgreen (continuação única) em Lions [16] resulta que $v_t \equiv 0$ em $\Omega \times [0,T)$.

Assim, $v(x,t) = f(x)$ em $\Omega \times [0,T)$.

Portanto, voltando ao problema (2.83), temos que v é solução de

$$
\begin{cases} -a^2\triangle v - (b^2 - a^2)\nabla div\, v \;=\; 0, \quad \text{em} \quad \Omega. \\ v = 0, \quad \text{sobre} \quad \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.84}
$$

v satisfaz as condições de Dirichelt sobre $\partial\Omega$, pois v é limite de v^n que é solução do sistema (2.1) e portanto, pela unicidade do Problema de Dirichelt, resulta que $v = 0$ q.s. em $(0, T) \times \Omega$. Contradição com (2.82).

Assim, a Proposição (2.10) é válida.

□

2.8 Prova do Teorema de Estabilização

Pelo Lema (2.9) temos a seguinte estimativa:

$$
E(t) \;\leq C \left[\triangle E \,+ \int_t^{t+T} \int_\omega \left[|u_t|^2 + \,|u|^2 \right] \,dx\,ds \,+ \int_t^{t+T} \int_\omega \nabla\theta \left[|\nabla u| + \,|u| \right] \,dx\,ds \right],
$$

para alguma constante positiva C e para todo $t \geq 0$.

Usando a Proposição (2.10) do fato que $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$, sobre ω segue que

$$
\begin{aligned}
E(t) \leq \;\; & C \left[\triangle E + \int_t^{t+T} \int_\omega \left[|u_t|^2 \,+\, |u|^2 \right] \,dx\,ds + \int_t^{t+T} \int_\omega \nabla\theta \left[|\nabla u| + \,|u| \right] \,dx\,ds \right] \leq \\
& C \left[\triangle E + \int_t^{t+T} \int_\omega |u_t|^2 \,dx\,ds \right] \leq \\
& C \left[\triangle E + \widetilde{C} \int_t^{t+T} \int_\Omega \alpha(x) |u_t|^2 \,dx\,ds \right] \leq \\
& C \left[\triangle E + \widetilde{C} \int_t^{t+T} \int_\Omega \alpha(x) |u_t|^2 \,dx\,ds + \int_t^{t+T} \int_\omega |\nabla\theta|^2 \,dx\,ds \right] \leq \\
& C \left[\triangle E + \widetilde{C} \triangle E \right] \leq \\
& C \triangle E.
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$
E(t) \;\leq\, C \,\triangle\, E, \tag{2.85}
$$

para todo $t \geq 0$, com C uma constante positiva independente de u e θ. Mas dependente dos dados iniciais.

Agora, como $E(t)$ é decrescente temos que

$$\sup_{t\leq s\leq t+T} E(s) \leq E(t) \leq C \triangle E = C[E(t) - E(t+T)]$$

com $T > 0$ fixado e dado pelo Lema (2.9) e $t \geq 0$ qualquer.

Portanto aplicando o Lema Nakao (2.4) obtemos que

$$E(t) \leq Ce^{-\sigma t}, \qquad \forall t \geq 0$$

para constantes positivas C e σ.

Completando a demonstração do Teorema (2.3) de estabilização exponencial da energia.

$\square$

Capítulo 3

O Sistema Termoelástico em um Domínio Exterior

3.1 Introdução

Neste capítulo estudamos o sistema termoelástico linear em um domínio exterior, a saber, o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \triangle u - (b^2 - a^2)\nabla div\, u + \nabla\theta + \alpha(x) u_t = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \theta_t - \triangle\theta + div\, u_t + \mathcal{X}_R \theta = 0 & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega \\ \theta(x,0) = \theta_0(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 = \theta(x,t) & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

sobre Ω é um domínio exterior, isto é, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ com $\mathcal{O}$ um conjunto do $\mathbb{R}^n$.

A norma usual de $x \in \mathbb{R}^n$ é denotada por $|x|$. O produto interno entre dois vetores x e y em $\mathbb{R}^n$ será denotado por $x \cdot y$.

Sobre a função $\alpha(x)$ que localiza o termo dissipativo $\alpha(x)\, u_t$ fazemos as seguintes hipóteses:

$(\mathbf{H_1})$ $\alpha \in L^\infty(\Omega),\ \alpha(x) \geq 0$, e existem constantes $\alpha_0 > 0$ e $L \gg 1$ tal que,

$$\alpha(x) \geq \alpha_0$$

para todo $x \in \Omega$ com $|x| \geq L$.

Assim, a função $\alpha(x)$ é efetiva somente na bola B(0,L). Por isso dizemos que o termo dissipativo correspondente está localizado próximo do infinito.

A função $\mathcal{X}_R = \mathcal{X}_R(x)$ indica a função característica do conjunto: $\Big\{x \in \Omega / \, |x| \geq R\Big\}$ com $R >> 1$ um número fixado arbitrariamente.

Para o domínio exterior Ω será assumido que,

$(\mathbf{H_2})$ $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ é estrelado com respeito $0 \notin \overline{\Omega}$, isto é, $\eta(x) \cdot x \leq 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, onde $\eta = \eta(x)$ indica o vetor normal unitário exterior usual em $x \in \partial\Omega$.

Seja E um espaço de Banach. Será denotado por E^n o produto $E \times \ldots \times E$, n vezes. Também aqui o produto interno em $L^2(\Omega)^n$ será denotado por $(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$ e a norma por $||\cdot||$. A norma em $H^m(\Omega)^n$, o espaço de Sobolev de ordem m, será denotado simplesmente por $||\cdot||_{H^m(\Omega)}$.

Se $u = (u^1, u^2, \ldots, u^n) \in H^1(\Omega)^n$ será denotado $||\nabla u||$ por

$$||\nabla u||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||\nabla u^i||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left|\left|\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\right|\right|^2.$$

Também usamos a notação: $|\nabla u(x)|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\nabla u^j(x)|^2$ para $x \in \Omega$.

Para, $u_0 \in H^1(\Omega)^n$, $u_1 \in L^2(\Omega)^n$ e $\theta_0 \in L^2(\Omega)$ definimos

$$I_0 = ||u_0||_{H^1(\Omega)^n} + ||u_1|| + ||\theta_0||, \tag{3.2}$$

3.2 Existência e Unicidade

A energia associada ao problema (3.1) é definida por

$$E(t) = E_1(t) + \frac{1}{2}\int_\Omega \theta^2\,dx \ = \ \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[|u_t|^2 \ + a^2|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)(\,div\,u)^2 + \theta^2\Big]\,dx$$

similarmente como em (2.17) e (2.18) para o sistema termoelástico em um domínio limítado . O problema (3.1) tem natureza dissipativa porque,

$$E(t) + \int_0^t \int_\Omega \alpha(x)\,|u_t(s,x)|^2\,dx\,ds + \int_0^t \int_\Omega \mathcal{X}_R \theta^2 dx\,ds \ = \ E(0), \quad t \geq 0.$$

De fato, da hipótese que $\alpha(x) \geq 0$ segue que a função $E(t)$ é não crescente.

Essa identidade é obtida fazendo produto interno em $L^2(\Omega)$ entre a equação para u em (3.1) e u_t e também tomando-se o produto interno em $L^2(\Omega)$ da equação para θ com o próprio θ.

Teorema 3.1. *(Existência): Seja $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ uma função tal que, $\alpha(x) \geq 0$ em Ω. Seja $(u_0\,,\,u_1\,,\,\theta_0) \in H_0^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)$. Então existe uma única solução $(u\,,\,\theta)$ de (3.1) na classe*

$$(u\,,\,\theta) \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)) \bigcap C^1([0,\infty); L^2(\Omega)^n \times L^2(\Omega)).$$

Demonstração:

A demonstração desse teorema é feita usando teoria de semigrupos.

Consideramos em $H^1(\Omega)$ o seguinte produto interno,

$$(u\,,\,v)_{H^1} = (u\,,\,v) + a^2(\nabla u\,,\,\nabla v) + (b^2 - a^2)(div\,u\,,\,div\,v) \tag{3.3}$$

cuja norma induzida é dada por

$$||u||^2_{H^1} = ||u||^2 + a^2\|\nabla u\|^2 + (b^2 - a^2)\|div\,u\|^2. \tag{3.4}$$

Em vista que $||div\,u||^2$ é limitada, por $||\nabla u||^2$, resulta que essa norma é equivalente a norma usual de $H^1(\Omega)$.

A primeira equação de (3.1) é equivalente a

$$u_{tt} - a^2\triangle u - (b^2 - a^2)\nabla div\,u + \nabla\theta + \alpha(x)\,u_t + u = u. \tag{3.5}$$

Assim, mostraremos primeiro a existência e unicidade de solução global para o problema

$$
\begin{cases}
u_{tt} \,-\, a^2\triangle u \,-\, (b^2 \,-\, a^2)\nabla div\, u \,+\, \nabla\theta \,+\, \alpha(x)\, u_t \,+\, u \,=\, 0, & x \in \Omega,\ t > 0 \\
\theta_t \,-\, \triangle\theta \,+\, div\, u_t \,+\, \mathcal{X}_R\theta \,=\, 0, & t > 0 \\
u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega \\
\theta(x,0) = \theta_0(x), & x \in \Omega \\
u(x,t) = 0 = \theta(x,t), & x \in \partial\Omega,\ t > 0.
\end{cases}
\tag{3.6}
$$

Para isso, fazemos

$$
U(t) \;=\; \begin{pmatrix} u(t) \\ u_t(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}.
$$

Então,

$$
U_t(t) \;=\; \frac{d}{dt}U(t) \;=\; \begin{pmatrix} u_t(t) \\ u_{tt}(t) \\ \theta_t(t) \end{pmatrix}.
$$

Considerando o operador $\mathcal{A}$ dado por

$$
\mathcal{A} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\,1 & 0 \\ -\,a^2\triangle \,-\, (b^2 \,-\, a^2)\nabla div \,+\, 1 & \alpha(x) & \nabla \\ 0 & div & -\,\triangle \,+\, \mathcal{X}_R \end{pmatrix}
$$

é facil ver que o sistema (3.6) pode ser representado na forma:

$$
\begin{cases}
U_t \,+\, \mathcal{A}U \,=\, 0 \\
U_t(0) \,=\, U_0 \,=\, \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \theta_0 \end{pmatrix}
\end{cases}
\tag{3.7}
$$

desde que seja definido em algum espaço em que o traço de u e θ sobre $\partial\Omega$ se anule.

Para usar a teoria de semigrupos precisamos definir $\mathcal{A}$ sobre algum subespaço de um espaço de Hilbert.

Assim, definimos

$$
D(\mathcal{A}) \;=\; \left(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \times H_0^1(\Omega) \times \left(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right).
$$

Também consideramos $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Então H é um espaço de Hilbert e

$$D(\mathcal{A}) \subset H,$$

sendo esta inclusão densa devido às propriedade dos espaços de Sobolev.

Agora, queremos mostrar que $\mathcal{A}$ é um operador monótono, isto é

$$\langle \mathcal{A}U\,,\,U\rangle_H \geq 0, \qquad \forall U \in D(\mathcal{A}),$$

sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno de H.

De fato, tomando $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$, notamos que

$$\langle \mathcal{A}U\,,\,U\rangle_H = \left\langle \begin{pmatrix} -v \\ -a^2\triangle u - (b^2 - a^2)\nabla div\, u + u + \alpha(x)\,v + \nabla\theta \\ -\triangle\theta + div\, v + \mathcal{X}_R\theta \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \right\rangle_H .$$

Usando a definição de produto interno em H obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U\,,\,U\rangle_H &= (-v\,,\,u)_{H_0^1} - a^2(\triangle u\,,\,v) - (b^2 - a^2)(\nabla div\, u\,,\,v) \\ &+ (u\,,\,v) + (\alpha(x)\,v\,,\,v) + (\nabla\theta\,,\,v) - (\triangle\theta\,,\,\theta) + (div\, v\,,\,\theta) + (\mathcal{X}_R\theta\,,\,\theta). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Usando a fórmula de Green e o produto interno sobre H^1, definido em (3.3), a equação (3.8) fica

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U\,,\,U\rangle_H &= (-u\,,\,v) - a^2(\nabla u\,,\,\nabla v) - (b^2 - a^2)(div\, u\,,\,div\, v) \\ &+ a^2(\nabla u\,,\,\nabla v) + (b^2 - a^2)(div\, u\,,\,div\, v) + (u\,,\,v) \\ &+ (\alpha(x)\,v\,,\,v) + (\nabla\theta\,,\,v) + (\nabla\theta\,,\,\nabla\theta) - (v\,,\,\nabla\theta) + (\mathcal{X}_R\theta\,,\,\theta) = \\ &||\sqrt{\alpha(\cdot)}v||^2 + ||\nabla\theta||^2 + ||\sqrt{\mathcal{X}_R}\theta||^2. \end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{A}$ é operador monótono em H.

Observação 3.2. *Na expressão anterior foi usado a Fórmula de Green*

$$\Big(\triangle u\,,\, v\Big)_{L^2(\Omega)} = -\Big(\nabla u\,,\, \nabla v\Big)_{L^2(\Omega)} \tag{3.9}$$

com Ω um domínio exterior e $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$.

As fórmulas de Green, em geral, (proposição 1.26) são válidas apenas em domínios limitados.

Para justificar a validade de 3.9 com Ω domínio exterior e $u \in H_0^1 \cap H^2$ e $v \in H_0^1$ é suficiente aproximar u e v por funções no mesmo espaço mas com suporte compacto. Para tais funções as fórmulas de Green são válidas. Logo, por densidade segue a validade de 3.9.

A seguir queremos mostrar $\mathcal{A}$ é **maximal monótono.**

Para isso falta verificar que:

$$R(\mathcal{A} - \lambda\, I) \,=\, H$$

para algum $\lambda > 0$. Isto é, devemos mostrar que dado $F \in H$ existe $U \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$(\mathcal{A} \,-\, \lambda\, I)\, U \,=\, F. \tag{3.10}$$

Seja,

$$F \,=\, \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \in H.$$

Então a equação (3.10) é equivalente a

$$\begin{pmatrix} -\,v - \,\lambda\, u \\ -\,a^2\triangle u \,-\, (b^2 \,-\, a^2)\nabla div\, u \,+\, u \,+\, \alpha(x)\, v \,+\, \nabla\theta - \,\lambda\, v \\ -\triangle\theta \,+\, div\, v \,+\, \mathcal{X}_R\theta \,-\, \lambda\,\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

com $f \in H_0^1(\Omega), \quad g \in L^2(\Omega), \quad h \in L^2(\Omega)$.

Assim, devemos provar que existe $(u\,,\,\theta) \,\in\, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $v \,\in\, H_0^1(\Omega)$ tal que

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
- v - \lambda u & = & f \\
- a^2 \triangle u - (b^2 - a^2) \nabla div\, u + u + \alpha(x)\, v + \nabla\theta - \lambda v & = & g \\
-\triangle\theta + div\, v + \mathcal{X}_R\theta - \lambda\theta & = & h
\end{array}
\right.
\tag{3.11}
$$

Para simplificar o sistema (3.11) tomamos $v = -\lambda u - f$, da primeira equação e substituíndo na segunda temos:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
- a^2 \triangle u - (b^2 - a^2) \nabla div\, u + u + \alpha(x)\, (-\lambda u - f) + \nabla\theta + \lambda^2 u + \lambda f & = & g \\
-\triangle\theta + div\, (-\lambda u - f) + \mathcal{X}_R\theta - \lambda\theta & = & h
\end{array}
\right.
$$

ou

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
- a^2 \triangle u - (b^2 - a^2) \nabla div\, u - \lambda\, \alpha(x)\, u + \nabla\theta + u + \lambda^2 u & = & g - \lambda f + \alpha(x)\, f \\
-\triangle\theta - \lambda\, div\, u + \mathcal{X}_R\theta - \lambda\theta & = & h + div\, f
\end{array}
\right.
$$

Assim, tomando $F = g - \lambda f + \alpha(x)\, f$ e $G = h + div\, f$, devemos resolver o seguinte sistema para u e θ.

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
- a^2 \triangle u - (b^2 - a^2) \nabla div\, u + (1 + \lambda^2 - \lambda\alpha(x))\, u + \nabla\theta & = & F \\
-\triangle\theta - \lambda\, div\, u + (\mathcal{X}_R - \lambda)\theta & = & G.
\end{array}
\right.
\tag{3.12}
$$

Observação 3.3. *Do fato que* $g,\, h \in L^2, f \in H^1, \alpha \in L^\infty$ *segue que* $F, G \in L^2(\Omega)$.

Para resolver o sistema (3.12) usamos o Teorema de Lax-Milgram 1.28 no espaço de Hilbert: $\mathcal{H} = H_0^1 \times H_0^1$

A forma bilinear que associamos ao sistema (3.12) é

$$
a(U, V) = a\left(\begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} \right) = a^2(\nabla u, \nabla v) + (b^2 - a^2)(div\, u\,,\, div\, v)
$$

$$
+((1 + \lambda^2 - \lambda\alpha(\cdot))\, u\,,\, v) + (\nabla\theta\,,\, v) + (\nabla\theta\,,\, \nabla h) + ((\mathcal{X}_R - \lambda)\theta\,,\; h) - \lambda(div\, u\,,\, h)
$$

Assim:

$$
a(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}
$$

está bem definida.

Devemos mostrar que $a(\cdot,\cdot)$ é continua e coerciva.

A continuidade é imediata, ela segue por cálculos convencionais e usando a desigualdade de Schwarz.

Para ver a coercividade, calculamos $a(U,U)$ com $U = \begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$. Isto é:

$$a(U,U) = a^2\|\nabla u\|^2 + (b^2-a^2)\|div\, u\|^2 + \int_\Omega \Big(1+\lambda^2 \; - \lambda\alpha(x)\Big)\; u^2\, dx \; + (\nabla\theta\,,\, u)$$
$$+\|\nabla\theta\|^2 + \int_\Omega \Big(\mathcal{X}_R \; - \lambda\Big)\,\theta^2\, dx \; - \lambda(div\, u\,,\, \theta).$$

Observação 3.4.

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} = \left\|\begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix}\right\|^2_{\mathcal{H}} = \|u\|^2_{H^1_0} + \|\theta\|^2_{H^1_0}.$$

Assim :

$$a(U,U) = a^2\|\nabla u\|^2 + (b^2-a^2)\|div\, u\|^2 + (1+\lambda^2)\|u\|^2 - \lambda\|\sqrt{\alpha}\, u\|^2$$
$$+(\nabla\theta\,,\, u) + \|\nabla\theta\|^2 + \|\sqrt{\mathcal{X}_R}\,\theta\|^2 - \lambda\|\theta\|^2 + \lambda(u\,,\,\nabla\theta) \geq$$

$$a^2\|\nabla u\|^2 + (b^2-a^2)\|div\, u\|^2 + \|\sqrt{1+\lambda^2-\lambda\alpha(\cdot)}\, u\|^2$$
$$-(1\,+\,\lambda)||\nabla\theta||||u|| + \|\nabla\theta\|^2 + \|\sqrt{\mathcal{X}_R}\,\theta\|^2 - \lambda\|\theta\|^2 \geq$$

$$a^2\|\nabla u\|^2 + (b^2-a^2)\|div\, u\|^2 + \|\sqrt{1+\lambda^2-\lambda\alpha(\cdot)}\, u\|^2$$
$$-\frac{(1\,+\,\lambda)}{2}(||\nabla\theta||^2 + ||u||^2) + \|\nabla\theta\|^2 + \|\sqrt{\mathcal{X}_R}\,\theta\|^2 - \lambda\|\theta\|^2 =$$

$$a^2\|\nabla u\|^2 + (b^2-a^2)\|div\, u\|^2 + \int_\Omega \left(1+\lambda^2 - \lambda\alpha(x) - \frac{1+\lambda}{2}\right) u^2\, dx$$
$$+\left(1 - \frac{1+\lambda}{2}\right)\|\nabla\theta\|^2 + \|\sqrt{\mathcal{X}_R}\,\theta\|^2 - \lambda\|\theta\|^2 =$$

$$a^2\|\nabla u\|^2 + (b^2-a^2)\|div\, u\|^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{2} + \lambda^2 - \lambda\alpha(x) - \frac{\lambda}{2}\right) u^2\, dx$$
$$+\left(1 - \frac{1+\lambda}{2}\right)\|\nabla\theta\|^2 + \|\sqrt{\mathcal{X}_R}\,\theta\|^2 - \lambda\|\theta\|^2.$$

Tomando $\lambda > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{1}{2} + \lambda^2 - \lambda||\alpha||_\infty - \frac{\lambda}{2} > \frac{1}{4}. \tag{3.13}$$

Obtemos

$$
\begin{aligned}
&a(U,U) \geq a^2\|\nabla u\|^2 + (b^2-a^2)\|div\, u\|^2 + \frac{1}{4}||u||^2 \\
&+\left(1-\frac{1+\lambda}{2}\right)\|\nabla\theta\|^2 + \|\sqrt{\mathcal{X}_R}\,\theta\|^2 - \lambda\|\theta\|^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, usando a definição de norma em $H^1(\Omega)^n$ temos que para $U = \begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix}$:

$$
a(U,U) \geq \frac{1}{4}||u||^2_{H^1} + \left(1-\frac{1+\lambda}{2}\right)\|\nabla\theta\|^2 + \|\sqrt{\mathcal{X}_R}\,\theta\|^2 - \lambda\|\theta\|^2 =
$$

$$
\frac{1}{4}||u||^2_{H^1} + \left(1-\frac{1+\lambda}{2}\right)\|\nabla\theta\|^2 + (1-\epsilon)\|\sqrt{\mathcal{X}_R}\,\theta\|^2 - \lambda\|\theta\|^2 + \epsilon||\theta||^2 - \epsilon\int_{\Omega(R)}\theta^2\,dx
$$

onde $\Omega(R) = \Omega \cap \Big\{x \in \Omega/||x|| \leq R\Big\}$ com $0 < \epsilon < 1$ um número a ser escolhido.

Agora, usando a desigualdade de Poincaré temos que

$$
\begin{aligned}
&a(U,U) \geq \frac{1}{4}||u||^2_{H^1} + \left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)\|\nabla\theta\|^2 + (1-\epsilon)\|\sqrt{\mathcal{X}_R}\,\theta\|^2 + (\epsilon-\lambda)\|\theta\|^2 \\
&-C_R\epsilon\int_{\Omega(R)}|\nabla\theta|^2\,dx \geq \frac{1}{4}||u||^2_{H^1} + \left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}-C_R\epsilon\right)\|\nabla\theta\|^2 + (\epsilon-\lambda)\|\theta\|^2.
\end{aligned}
$$

Aqui, escolhemos $\epsilon > 0$ tal que $C_R\epsilon = \dfrac{1}{4}$. Com isso segue que

$$
a(U,U) \geq \frac{1}{4}||u||^2_{H^1} + \left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}\right)\|\nabla\theta\|^2 + \left(\frac{1}{4C_R}-\lambda\right)\|\theta\|^2.
$$

Finalmente, também queremos λ satisfazendo

$$
0 < \lambda < min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8C_R}\right\}. \tag{3.14}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
a(U,U) \geq\ & \frac{1}{4}||u||^2_{H^1} + \frac{1}{8}\|\nabla\theta\|^2 + \left(\frac{1}{8C_R}\right)\|\theta\|^2 \geq \\
& C\left(||u||^2_{H^1} + \|\nabla\theta\|^2 + \|\theta\|^2\right).
\end{aligned}
$$

com $C = \min\left\{\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{8C_R}\right\}$.

Logo, provamos que existe $C > 0$ tal que

$$a(U,U) \geq C||U||^2_{\mathcal{H}}, \quad U \in \mathcal{H}.$$

A conclusão é que $a(\cdot,\cdot)$ satisfaz as hipóteses do Lema de Lax-Milgram. Assim, dado $\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ existe único $U = \begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ tal que

$$a(U,U) = \left(\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, V \right), \quad \forall V \in \mathcal{H}.$$

com $\mathcal{H} = H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ e $\lambda > 0$ um número fixado satisfazendo a condição (3.13) e a condição (3.14).

Equivalentemente, para $V = \begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} &a^2(\nabla u\,,\,\nabla v) + (b^2 - a^2)(div\, u\,,\, div\, v) + ((1+\lambda^2 - \lambda\alpha(\cdot))\,u\,,\,v) + (\nabla\theta\,,\,v) \\ &+(\nabla\theta\,,\,\nabla h) + ((\mathcal{X}_R - 1)\theta\,,\,h) - \lambda(div\, u\,,\,h) = (F\,,\,v) + (G\,,\,h). \end{aligned}$$

Em particular isso vale para quaisquer $v,\ h \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Portanto:

$$\begin{aligned} &-a^2\langle\triangle u, v\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} - (b^2-a^2)\langle\nabla div\, u, v\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} + \langle(1+\lambda^2-\lambda\alpha(\cdot))u, v\rangle + \langle\nabla\theta, v\rangle \\ &-\langle\triangle\theta, h\rangle + \langle(\mathcal{X}_R - \lambda)\theta, h\rangle - \lambda\langle div\, u\,, h\rangle = \langle F\,, v\rangle + \langle G\,, h\rangle \end{aligned}$$

para quaisquer $v, h \in \mathcal{D}(\Omega)$. Isto é:

$$\begin{aligned} &\langle -a^2\triangle u - (b^2-a^2)\nabla div\, u + (1+\lambda^2-\lambda\alpha(\cdot))u + \nabla\theta, v\rangle \\ &\langle -\triangle\theta + (\mathcal{X}_R - \lambda)\theta - \lambda\, div\, u\,, h\rangle = \langle F\,, v\rangle + \langle G\,, h\rangle \end{aligned}$$

para quaisquer $v, h \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Portanto concluimos que

$$\left\{ \begin{array}{l} -a^2\triangle u - (b^2-a^2)\nabla div\, u + (1+\lambda^2-\lambda\alpha(\cdot))u + \nabla\theta \;=\; F \\ -\triangle\theta + (\mathcal{X}_R - \lambda)\theta - \lambda\, div\, u \;=\; G \end{array} \right. \tag{3.15}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Segue do Teorema (1.29) da Regularidade Elíptica que $u, \theta \in H^2(\Omega)$.

Logo, $u, \theta \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e satisfazem (3.15) no sentido de $L^2(\Omega)$.

Com isso provamos que $R(\mathcal{A} - \lambda) = H$ para $\lambda > 0$ um número satisfazendo (3.13) e (3.14).

Assim $\mathcal{A}$ é maximal monótono.

Então o Teorema de Lumer-Philips (1.17) nos diz que $\mathcal{A}$ gera um semigrupo $\Big\{ T(t) \Big\}_{t \geq 0}$ de classe $\mathcal{C}^0$ sobre H. Portanto o problema (3.7) possui uma única solução na forma

$$U(t) = T(t)U_0, \qquad t \geq 0.$$

Claro que o par de componentes $(u(t), \theta(t))$ de $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$ é a única solução fraca do problema (3.6).

Finalmente, notamos que o problema original (3.1) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} V_t + \mathcal{A}V = F(V) \\ V(0) = U_0 \end{cases} \tag{3.16}$$

com $V = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}$ e $F(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$.

Como $\mathcal{A}$ é gerador de semigrupo de classe $\mathcal{C}^0$ e F é linear, em particular globalmente Lipschitz sobre H, resulta da teoria de semigrupos (Teorema 1.22) que a equação (3.16) possui única solução global V em $D(\mathcal{A})$ se $V_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$, isto é, $V \in C([0, \infty), D(A)) \cap C^1([0, \infty), H)$.

Se $V_0 \in H$ então a solução $V = V(t)$ está na classe: $V \in C([0, \infty), H)$.

Assim, o problema original (3.1) também possui única solução global:

$$\begin{cases} u \in C((0,\infty), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty), H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty), L^2(\Omega)) \\ \theta \in C((0,\infty), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty), L^2(\Omega)) \end{cases}$$

se $(u_0, u_1, \theta_0) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

A solução (u, θ) está na classe:

$$\begin{cases} u \in C((0,\infty), H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0,\infty), L^2(\Omega)) \\ \theta \in C((0,\infty), L^2(\Omega)) \end{cases}$$

se $(u_0, u_1, \theta_0) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

□

3.3 Estabilização da Energia

Teorema 3.5. *(Decaimento da Energia): Sejam $n \geq 2$, e $0 < a^2 < b^2 < 4a^2$. Assumir as hipóteses (H_1) e (H_2). Se os dados iniciais satisfazem*

$$(u_0, u_1, \theta_0) \in H_0^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega),$$

então a única solução (u, θ) de (3.1) satisfaz:

$$E(t) \leq C I_0^2 (1+t)^{-1}, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

e

$$\|u\| \leq C I_0$$

com C uma constante positiva que independe de t e dos dados iniciais (u_0, u_1, θ_0) e I_0 esta definido em (3.2).

A demonstração, deste resultado depende de estimativas especiais.

3.4 Lemas Técnicos

Para $R > 0$ denota-se:

$$\Omega(R) = \Omega \bigcap B_R(0) = \Omega \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < R\}.$$

Lema 3.6. *Existe uma constante $C_R > 0$, C_R constante dependente de R, tal que*

$$\int_{\Omega(R)} |v|^2 \, dx \ \leq C_R ||\nabla v||^2 \,, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^n.$$

Lema 3.7. *(Identidades da Energia): A solução fraca de (3.1) satisfaz as identidades,*

$$E_1(t) + \int_0^t \int_\Omega \alpha(x) \, |u_t|^2 \, dx \, ds + \int_0^t \int_\Omega u_t \cdot \nabla\theta \, dx \, ds = E_1(0), \qquad t > 0. \tag{3.17}$$

$$\frac{d}{dt} E_1(t) + \int_\Omega \alpha(x) \, |u_t|^2 \, dx \ + \int_\Omega u_t \cdot \nabla\theta \, dx \ = 0, \qquad t > 0. \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(u_t \,, \, u) - ||u_t||^2 + a^2 \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 \, dx \ + (b^2 - a^2) \int_\Omega (div \, u)^2 \, dx \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega \alpha(x) \, |u|^2 \, dx \ + \int_\Omega u \cdot \nabla\theta \, dx \ = 0, \qquad t > 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Prova:

Notar que (3.17), é obtido de (3.18) por integração em $(0, t)$. As provas (3.18) e (3.19), são obtidas usando os multiplicadores $M(u) = u_t$ e $M(u) = u$, respectivamente sobre a primeira equação de (3.1).

De fato, essas identidades são obtidas de modo análogo ao caso de domínio limitado (ver Cap. 2).

□

Lema 3.8. *A solução u de (3.1) satisfaz*

$$\frac{d}{dt}E(t) + \int_\Omega \alpha(x)|u_t|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx + \int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx = 0, \qquad t \geq 0. \tag{3.20}$$

$$E(t)+\int_0^t\int_\Omega \alpha(x)|u_t|^2\,dx\,ds+\int_0^t\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\,ds+\int_0^t\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx\,ds = E(0), \qquad t \geq 0. \tag{3.21}$$

onde $\mathcal{X}_R$ é a função característica de $B(0,R)^c$.

Prova:

Multiplicando-se a segunda equação de (3.1) por θ e integrando sobre Ω obtemos:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{\theta^2}{2}\,dx + \int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx + \int_\Omega u_t\cdot\nabla\theta\,dx + \int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx = 0. \tag{3.22}$$

Agora, somando (3.18) com (3.22) obtemos (3.20). Notar que (3.21), é obtida de (3.20) integrando em $(0,t)$.

□

Lema 3.9. *A solução u do problema (3.1) satisfaz*

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t\cdot(h:\nabla u)\,dx + \frac{1}{2}\int div\,h\left[|u_t|^2 - a^2|\nabla u(x)|^2 - (b^2-a^2)(div\,u)^2\right]dx\\
&+\sum_{i,j,k}\int_\Omega\left[a^2\,D_ih_j\,D_iu^k\,D_ju^k + (b^2-a^2)\,D_ih_j\,D_ku^k\,D_ju^i\right]dx\\
&-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(h\cdot\eta)\left[a^2\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 + (b^2-a^2)(div\,u)^2\right]d\Gamma\\
&+\int_\Omega \alpha(x)\,u_t\cdot(h:\nabla u)\,dx + \int_\Omega(h:\nabla u)\nabla\theta\,dx = 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Com, $h:\nabla u \equiv (h\cdot\nabla u^1, h\cdot\nabla u^2,\cdots,h\cdot\nabla u^n)$, com u^i a i-ésima componente de u e $\eta=\eta(x)$, já definida anteriormente e $\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = \left(\dfrac{\partial u^1}{\partial\eta},\cdots,\dfrac{\partial u^n}{\partial\eta}\right)$.

Prova:

É obtida tomando produto interno entre a primeira equação de (3.1), com $(h : \nabla u)$ e a seguir integrando sobre (Ω) (ver Ruy-Ikehata [5]).

$\square$

Seja, $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por:

$$\phi(r) = \begin{cases} \alpha_0, & 0 \leq r \leq L, \\ \dfrac{L\alpha_0}{r}, & r \geq L, \end{cases}$$

com α_0 e L definidas na introdução são constantes que localizam a dissipação. Nota-se que ϕ é uma função contínua e limitada, com derivada também limitada e $\phi^{'}(r) \leq 0, \;\; \forall r \in (0, +\infty)$.

Escolhendo $h(x) = \phi(|x|)x = \phi(r)x\,,\; r = |x|\,,$ no Lema 3.9, segue que:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t \cdot (\phi(r)x : \nabla u)\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega div\,(\phi(r)x)[|u_t|^2 - a^2|\nabla u(x)|^2 - (b^2 - a^2)(div\, u)^2]\, dx \\
&-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} ((\phi(r)\, x) \cdot \eta) \left[a^2 \left| \frac{\partial u(x)}{\partial \eta} \right|^2 + (b^2 - a^2)(div\, u)^2 \right] dS \\
&+ \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega \left[(b^2 - a^2) D_i(\phi(r)x)_j D_k u^k\, D_j u^i + a^2 D_i(\phi(r)x)_j D_i u^k\, D_j u^k \right]\, dx \\
&+ \int_\Omega \alpha(x)\, u_t \cdot ((\phi(r)x) : \nabla u)\, dx + \int_\Omega (\phi(r)x : \nabla u) \nabla\theta\, dx = 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Notamos que:

$$\begin{aligned}
&div\,(\phi(r)x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi(r)x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\phi(r)x + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} x\phi(r) = \\
&\phi^{'}(r)|x| + n\phi(r) = r\phi^{'}(r) + n\phi(r),
\end{aligned}$$

assim,

(i) $div\,(\phi(r)x) = r\phi^{'}(r) + n\phi(r).$

Também notar que:

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} D_i(\phi(r)x)_j D_i u^k\, D_j u^k \;=$$
$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \left[\phi(r)\delta_{ij} \;+\; \phi^{'}(r)\frac{x_i x_j}{r}\right] D_i u^k\, D_j u^k \;=$$
$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \left[\phi(r)\delta_{ij}\, D_i u^k\, D_j u^k \;+\; \phi^{'}(r)\frac{x_i x_j}{r}\, D_i u^k\, D_j u^k\right] \;=$$
$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\phi^{'}(r)}{r}|x\cdot\nabla u^k|^2 \;+\; \sum_{i,j,k=1}^{n} \phi(r)|D_i u^k|^2 \;=$$
$$\frac{\phi^{'}(r)}{r}|x:\nabla u(x)|^2 \;+\; \phi(r)|\nabla u(x)|^2,$$

logo, obtemos que

(ii) $$\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_{\Omega} a^2\, D_i(\phi(r)x)_j D_i u^k\, D_j u^k\, dx \;=\; a^2\int_{\Omega}\left[\frac{\phi^{'}(r)}{r}|x:\nabla u(x)|^2 \;+\; \phi(r)|\nabla u(x)|^2\right] dx.$$

Agora, calculamos:

$$D_i(\phi(r)x)_j D_k u^k\, D_j u^i \;=\; D_i\phi_j(r)x_j D_k u^k\, D_j u^i \;+\; \phi_j(r) D_i x_j D_k u^k\, D_j u^i,$$

portanto,

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} D_i(\phi(r)x)_j D_k u^k\, D_j u^i \;=$$
$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \phi(r)\delta_{ij} D_k u^k\, D_j u^i \;+\; \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\phi^{'}(r)x_i}{r} x_j D_k u^k\, D_j u^i \;=$$
$$\phi(r)\left(\sum_{k=1}^{n} D_k u^k\right)\left(\sum_{i=1}^{n} D_i u^i\right) \;+\; \frac{\phi^{'}(r)}{r}\sum_{i,k=1}^{n} x_i D_k u^k \left(\sum_{i,j,k=1}^{n} x_j D_j u^i\right) \;=$$
$$\phi(r)\,(div\, u)^2(x) \;+\; \frac{\phi^{'}(r)}{r}\sum_{i,k=1}^{n} x_i D_k u^k\,\left(x\cdot\nabla u^i\right) \;=$$
$$\phi(r)\,(div\, u)^2(x) \;+\; \frac{\phi^{'}(r)}{r}\sum_{k=1}^{n} D_k u^k\,\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} x_i(x\cdot\nabla u^i)\right) \;=$$
$$\phi(r)\,(div\, u)^2(x) \;+\; \frac{\phi^{'}(r)}{r}\sum_{k=1}^{n} D_k u^k\,\left(x\cdot(x:\nabla u^i)\right) \;=$$
$$\phi(r)\,(div\, u)^2(x) \;+\; \frac{\phi^{'}(r)}{r}\,(\,div\, u)\,(x:\nabla u)\cdot x,$$

assim, concluímos que

$$\textbf{(iii)}\ \sum_{i,j,k=1}^{n}\int_\Omega (b^2-a^2)D_i(\phi(r)x)_j D_k u^k\, D_j u^i\,dx\ =$$
$$\int_\Omega (b^2-a^2)\left[\phi(r)\,(div\,u)^2(x)\ +\ \frac{\phi^{'}(r)}{r}\,(\,div\,u)\,(x:\nabla u)\cdot x\right]\,dx.$$

Com isso, substituíndo (i), (ii), e (iii) em (3.24), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega \phi(r)\,u_t\cdot(x:\nabla u)\,dx\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega [n\phi(r)+r\phi^{'}(r)][|u_t|^2-a^2|\nabla u(x)|^2-(b^2-a^2)(div\,u)^2]\,dx\\
&-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot\eta)\phi(r)\left[a^2\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2+(b^2-a^2)(div\,u)^2\right]d\Gamma\\
&+\int_\Omega (b^2-a^2)\left[\phi(r)(div\,u)^2+\frac{\phi^{'}(r)}{r}div\,u(x:\nabla u)\cdot x\right]\,dx\\
&+\int_\Omega a^2\left[\phi(r)|\nabla u|^2+\frac{\phi^{'}(r)}{r}\,|x:\nabla u|^2\right]\,dx\\
&+\int_\Omega \alpha(x)\,\phi(r)\,u_t\cdot(x:\nabla u)\,dx\ +\int_\Omega(\phi(r)\,x:\nabla u)\cdot\nabla\theta\,dx\ =\ 0,
\end{aligned}\tag{3.25}$$

onde $x:\nabla u(x)=(x\cdot\nabla u^1(x),\dots,x\cdot\nabla u^n(x))$.

Multiplicando (3.20) por $k>0$ e (3.21) por $\gamma>0$ e em seguida somado ambas, tem-se:

$$\begin{aligned}
&k\,\frac{d}{dt}\,E(t)+k\int_\Omega \alpha(x)\,|u_t|^2\,dx\ +\ k\int_\Omega\,|\nabla\theta|^2\,dx\ +\ k\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx\ +\ \gamma\frac{d}{dt}\,(u_t,u)\\
&-\gamma\|u_t\|^2\ +\ \gamma\,a^2\ \int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\ +\ \gamma(b^2-a^2)\int_\Omega(div\,u)^2\,dx\ +\ \frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\ \int_\Omega\alpha(x)|u|^2\,dx\\
&+\gamma\ \int_\Omega u\cdot\nabla\theta\,dx\ =\ 0.
\end{aligned}$$

Agora, somado este resultado com a equação (3.25), e usando os fatos que, $\eta\cdot x\leq 0,\forall x\in\partial\Omega$ e que $\phi^{'}(r)\leq 0$, obtemos a seguinte desigualdade:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega \phi u_t\cdot(x:\nabla u)\,dx\;+\gamma(u_t,u)+\frac{\gamma}{2}\int_\Omega \alpha(x)\,|u|^2\,dx\;+kE(t)\right\}\\
&+\int_\Omega\left[\frac{n\phi+r\phi^{'}}{2}-\gamma+\frac{k}{2}\alpha(x)\right]|u_t|^2\,dx\;+\frac{k}{2}\int_\Omega \alpha(x)\,|u_t|^2\,dx\\
&+\int_\Omega a^2\left[\gamma-\frac{n\phi+r\phi^{'}}{2}+\phi+r\phi^{'}\right]|\nabla u|^2\,dx\\
&+\int_\Omega (b^2-a^2)\left[\gamma-\frac{n\phi+r\phi^{'}}{2}+\phi\right](div\,u)^2\,dx\\
&+\int_\Omega (b^2-a^2)\frac{\phi^{'}}{r}div\,u(x:\nabla u)\cdot x\,dx\;+\gamma\int_\Omega u\cdot\nabla\theta\,dx\\
&+\int_\Omega (\phi(r)\,x:\nabla u)\cdot\nabla\theta\;dx\;+k\int_\Omega|\nabla\theta|^2\,dx\;+k\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx\;\leq\\
&-\int_\Omega \alpha(x)\,\phi\,u_t\cdot(x:\nabla u)\,dx
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

devido ao fato que $\dfrac{\phi^{'}}{r}|x:\nabla u|^2\geq r\phi^{'}|\nabla u|^2$.

Também devido ao fato que

$$|x:\nabla u|\leq r|\nabla u|,$$

obtemos que

$$(b^2-a^2)\frac{x}{r}\cdot(x:\nabla u)\leq(b^2-a^2)r|\nabla u|.$$

Como $\phi^{'}\leq 0$ segue que

$$(b^2-a^2)\frac{\phi^{'}}{r}(x:\nabla u)\cdot x\geq(b^2-a^2)r\phi^{'}|\nabla u|.$$

Portanto

$$(b^2-a^2)\frac{\phi^{'}}{r}\,|div\,u|\,(x:\nabla u)\cdot x\geq(b^2-a^2)r\phi^{'}\,|div\,u|\,|\nabla u|.$$

Agora, pela desigualdade de Young $ab\leq\delta a^2+\dfrac{b^2}{4\delta}$, escolhendo $\delta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{b}{2a}$ e do fato que $\phi^{'}\leq 0$, segue que

$$
\begin{aligned}
&(b^2-a^2)\frac{\phi^{'}}{r}|div\,u|(x:\nabla u)\cdot x\geq\\
&(b^2-a^2)r\,\phi^{'}\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)(div\,u)^2+a^2\left(\frac{b}{2a}-\frac{1}{2}\right)r\,\phi^{'}|\nabla u|^2.
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Substituíndo (3.27) em (3.26) obtemos a seguinte desigualdade:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \phi\, u_t\cdot(x:\nabla u)\,dx\; + \gamma(u_t\,,\,u) + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \alpha(x)\,|u|^2\,dx\; +\; k\,E(t)\right]\\
&+\int_\Omega\left[\frac{n\phi + r\phi'}{2} - \gamma + \frac{k\alpha(x)}{2}\right]|u_t|^2\,dx\; + \frac{k}{2}\int_\Omega \alpha(x)\,|u_t|^2\,dx\\
&+\gamma\int_\Omega u\cdot\nabla\theta\,dx\; + \int_\Omega (\phi(r)\,x:\nabla u)\cdot\nabla\theta\,dx\; + k\,\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\\
&+a^2\int_\Omega\left[\gamma - \frac{n\phi + r\phi'}{2} + \phi + r\phi'\left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2a}\right)\right]|\nabla u|^2\,dx\\
&+(b^2-a^2)\int_\Omega\left[\gamma - \frac{n\phi + r\phi'}{2} + \phi + r\phi'\left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2a}\right)\right](div\,u)^2\,dx\\
&+k\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx\; \leq -\int_\Omega \alpha(x)\,\phi\,u_t\cdot(x:\nabla u)\,dx.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Agora, deve-se estimar a integral $\displaystyle\int_\Omega u\cdot\nabla\theta\,dx$. Temos, pela fórmula de Green, que

$$
\left|\gamma\int_\Omega u\cdot\nabla\theta\,dx\right| = \left|-\gamma\int_\Omega \theta\,div\,u\,dx\right| \leq \gamma\int_{\Omega(R)}|\theta|\,|div\,u|\,dx\; + \gamma\int_{|x|\geq R}|\theta|\,|div\,u|\,dx.
\tag{3.29}
$$

Notar que para $\lambda > 0$, λ a ser escolhido,

$$
\begin{aligned}
&\gamma\int_{\Omega(R)}|\theta|\,|div\,u|\,dx\; \leq \frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}\int_{\Omega(R)}\theta^2\,dx\; + \frac{(b^2-a^2)}{2}\lambda\int_\Omega |div\,u|^2\,dx\\
&\frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}C_R\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\; + \frac{(b^2-a^2)}{2}\lambda\int_\Omega (div\,u)^2\,dx
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

devido ao lema (3.6).

Também

$$
\begin{aligned}
&\gamma\int_{|x|\geq R}|\theta|\,|div\,u|\,dx\; \leq \frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}\int_{|x|\geq R}\theta^2\,dx\; + \frac{(b^2-a^2)}{2}\lambda\int_\Omega (div\,u)^2\,dx\\
&\frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx\; + \frac{(b^2-a^2)}{2}\lambda\int_\Omega (div\,u)^2\,dx
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Substituindo as estimativas (3.30) e (3.31) em (3.29) e combinando com (3.28), segue que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \phi\, u_t\cdot(x:\nabla u)\,dx \;+\gamma(u_t\,,\,u)+\frac{\gamma}{2}\int_\Omega \alpha(x)\,|u|^2\,dx \;+\;k\,E(t)\right]\\
&+\int_\Omega\left[\frac{n\phi+r\phi^{'}}{2}-\gamma+\frac{k\alpha(x)}{2}\right]|u_t|^2\,dx\;+\frac{k}{2}\int_\Omega \alpha(x)\,|u_t|^2\,dx\\
&+\int_\Omega \phi(\,x:\nabla u)\cdot\nabla\theta\,dx\\
&+a^2\int_\Omega\left[\gamma-\frac{n\phi+r\phi^{'}}{2}+\phi+r\phi^{'}\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)\right]|\nabla u|^2\,dx\\
&+(b^2-a^2)\int_\Omega\left[\gamma-\frac{n\phi+r\phi^{'}}{2}+\phi+r\phi^{'}\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)-\lambda\right](div\,u)^2\,dx\\
&+\left(k-\frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}C_R\right)\int_\Omega|\nabla\theta|^2\,dx\;+\;\left(k-\frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}\right)\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx\;\leq\\
&-\int_\Omega \alpha(x)\,\phi\,u_t\cdot(x:\nabla u)\,dx.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

A seguir estima-se

$$\int_\Omega \phi(x:\nabla u)\cdot\nabla\theta\,dx.$$

Temos

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \phi(x:\nabla u)\cdot\nabla\theta\,dx\right|\leq\int_\Omega \phi r|\nabla u||\nabla\theta|\,dx\leq L\,\alpha_0\int_\Omega|\nabla u||\nabla\theta|\,dx\leq\\
&\frac{L^2\,\alpha_0^2}{\lambda 2a^2}\int_\Omega|\nabla\theta|^2\,dx\;+\;\frac{\lambda a^2}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

Substituindo (3.33) em (3.32), resulta que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \phi\, u_t\cdot(x:\nabla u)\,dx \;+\gamma(u_t\,,\,u)+\frac{\gamma}{2}\int_\Omega \alpha(x)\,|u|^2\,dx \;+\;k\,E(t)\right]\\
&+\int_\Omega\left[\frac{n\phi+r\phi^{'}}{2}-\gamma+\frac{k\alpha(x)}{2}\right]|u_t|^2\,dx\;+\frac{k}{2}\int_\Omega \alpha(x)\,|u_t|^2\,dx\\
&+a^2\int_\Omega\left[\gamma-\frac{n\phi+r\phi^{'}}{2}+\phi+r\phi^{'}\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)\right]|\nabla u|^2\,dx\\
&+(b^2-a^2)\int_\Omega\left[\gamma-\frac{n\phi+r\phi^{'}}{2}+\phi+r\phi^{'}\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{2a}\right)\right](div\,u)^2\,dx\\
&+\left(k-\frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}C_R-\frac{L^2\,\alpha_0^2}{\lambda 2a^2}\right)\int_\Omega|\nabla\theta|^2\,dx\;+\;\left(k-\frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}\right)\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx\;\leq\\
&-\int_\Omega \alpha(x)\,\phi\,u_t\cdot(x:\nabla u)\,dx\;+\;\frac{\lambda\,a^2}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\;+\;\lambda\,(b^2-a^2)\int_\Omega(div\,u)^2\,dx,
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

com $\lambda>0$ arbitrário.

Usando a hipótese que $0 < a^2 < b^2 < 4a^2$, obtemos

$$0 < \frac{\alpha_0}{2}\left[n-2+\frac{b}{a}\right] < \frac{\alpha_0}{2}[n-2+2] = \frac{n\alpha_0}{2}. \qquad (n \geq 2)$$

Tomando γ como em Charão-Ikehata [5], isto é

$$\gamma = \frac{\frac{\alpha_0}{2}\left[n-2+\frac{b}{a}\right] + \frac{n\alpha_0}{2}}{2} = \frac{n\alpha_0}{2} - \frac{\alpha_0}{2} + \frac{b\alpha_0}{4a} = \frac{n-1}{2}\alpha_0 + \frac{b\alpha_0}{4a} \tag{3.35}$$

tem-se $\gamma > 0$ e

$$\frac{\alpha_0}{2}\left[n-2+\frac{b}{a}\right] < \gamma < \frac{n\alpha_0}{2}. \tag{3.36}$$

Agora, seja $\epsilon_1 > 0$, dado por:

$$\epsilon_1 = \frac{n\alpha_0}{2} - \gamma.$$

Usando a definição de γ em (3.35), resulta que

$$\epsilon_1 = \frac{\alpha_0}{2} - \frac{b\alpha_0}{4a} = \frac{\alpha_0}{2}\left(1 - \frac{b}{2a}\right). \tag{3.37}$$

Notar que $\epsilon_1 > 0$ pela hipótese $b^2 < 4a^2$.

Usando, (3.36) e (3.37) segue:

$$\frac{n\phi + r\phi'}{2} - \gamma + \frac{k\alpha(x)}{2} \geq \begin{cases} \dfrac{n\phi + r\phi'}{2} - \gamma, & \text{se } |x| \leq L. \\ \dfrac{n\phi + r\phi'}{2} - \gamma + \dfrac{\alpha_0\, k}{2}, & \text{se } |x| \geq L. \end{cases}$$

Caso 1 : $|x| \leq L$.

$$\frac{n\phi + r\phi'}{2} - \gamma = \frac{n\phi + r\phi'}{2} - \frac{n\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_0}{2} - \frac{b\alpha_0}{4a} = \frac{n\phi + r\phi'}{2} - \frac{n\alpha_0}{2} + \epsilon_1 = \frac{n\alpha_0}{2} - \frac{n\alpha_0}{2} + \epsilon_1 = \epsilon_1$$

pois $\phi' = 0$ se $0 \leq r \leq L$.

Assim,

$$\frac{n\phi + r\phi'}{2} - \gamma + \frac{k\alpha(x)}{2} \geq \epsilon_1$$

para $0 \leq |x| \leq L$.

Caso 2 : $|x| \geq L.$

$$
\begin{aligned}
&\frac{n\phi + r\phi^{'}}{2} - \gamma + \frac{\alpha_0\, k}{2} = \frac{n\phi + r\phi^{'}}{2} - \frac{n\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_0}{2} - \frac{b\alpha_0}{4a} + \frac{\alpha_0\, k}{2} = \\
&\frac{n\, L\, \alpha_0}{2r} - \frac{L\, \alpha_0}{2r} - \frac{n\, \alpha_0}{2} + \frac{\alpha_0}{2} - \frac{b\alpha_0}{4a} + \frac{\alpha_0\, k}{2} = \\
&\frac{n\, L\, \alpha_0}{2r} - \frac{L\, \alpha_0}{2r} - \frac{n\, \alpha_0}{2} + \frac{\alpha_0\, k}{2} + \epsilon_1 = \\
&\frac{\alpha_0}{2}\left(\frac{n\, L}{r} - \frac{L}{r} - n + k\right) + \epsilon_1 \geq \epsilon_1
\end{aligned}
$$

se k for escolhido tal que $k \geq n$.

Assim,

$$\frac{n\phi + r\phi^{'}}{2} - \gamma + \frac{k\alpha(x)}{2} \geq \epsilon_1.$$

se $|x| \geq L$.

Portanto

$$\frac{n\phi + r\phi^{'}}{2} - \gamma + \frac{k\alpha(x)}{2} \geq \epsilon_1 > 0, \tag{3.38}$$

para $x \in \Omega$.

Novamente considerando os casos:

Caso 1 : $0 \leq r \leq L.$

Nessa região, tem-se

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha_0}{2}\left(\frac{b}{a} + n - 2\right) + \phi\left(1 - \frac{n}{2}\right) + r\,\phi^{'}\left(\frac{b}{2a}\right) = \\
&\frac{\alpha_0}{2}\left(\frac{b}{a} + n - 2\right) + \alpha_0\left(1 - \frac{n}{2}\right) = \\
&\frac{\alpha_0}{2}\frac{b}{a} + \frac{\alpha_0}{2}n - \alpha_0 + \alpha_0 - \frac{n}{2}\alpha_0 = \\
&\frac{\alpha_0}{2}\frac{b}{a} > 0.
\end{aligned}
$$

Caso 2 : $r \geq L$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_0}{2}\left(\frac{b}{a} + n - 2\right) + \phi\left(1 - \frac{n}{2}\right) + r\,\phi^{'}\left(\frac{b}{2a}\right) = \\
&\frac{\alpha_0}{2}\left(\frac{b}{a} + n - 2\right) + \frac{L\alpha_0}{r}\left(1 - \frac{n}{2}\right) - \frac{L\alpha_0}{r}\left(\frac{b}{2a}\right) = \\
&\frac{\alpha_0}{2}\left(\frac{b}{a} + n - 2 - \frac{L\,n}{r} + \frac{2L}{r} - \frac{L\,b}{a\,r}\right) = \\
&\frac{\alpha_0}{2}\left(\frac{r\,b + n\,a\,r - 2\,a\,r - n\,a\,L + 2\,a\,L - L\,b}{a\,r}\right) = \\
&\frac{\alpha_0}{2}\left(\frac{(r - L)}{a\,r}(n\,a + b - 2\,a)\right) \geq \\
&\frac{\alpha_0}{2}\frac{(r - L)}{a\,r}(n\,a + a - 2\,a) = \\
&\frac{\alpha_0}{2}\frac{(r - L)}{a\,r}(n\,a - a) \geq 0.
\end{aligned}$$

Desses dois casos concluímos que

$$\frac{\alpha_0}{2}\left(\frac{b}{a} + n - 2\right) + \phi\left(1 - \frac{n}{2}\right) + r\,\phi^{'}\left(\frac{b}{2a}\right) \geq 0.$$

para todo $r \geq 0$.

Com isso, da escolha de γ em (3.35) e ϵ_1 em (3.37), tem-se

$$\begin{aligned}
&\gamma - \frac{n\phi + r\phi^{'}}{2} + \phi + r\phi^{'}\left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2a}\right) = \\
&\left(\frac{n-1}{2}\right)\alpha_0 + \frac{b}{4a}\alpha_0 - \frac{n\phi}{2} - \frac{r\phi^{'}}{2} + \phi + \frac{r\phi^{'}}{2} + \frac{b\,r\,\phi^{'}}{2a} = \\
&\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{4a}\right)\alpha_0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{4a}\right)\alpha_0 + \left(\frac{n-1}{2}\right)\alpha_0 + \frac{b}{4a}\alpha_0 - \frac{n\phi}{2} + \phi + \frac{b\,r\,\phi^{'}}{2a} = \\
&\epsilon_1 - \frac{\alpha_0}{2} + \frac{b}{4a}\alpha_0 + \left(\frac{n-1}{2}\right)\alpha_0 + \frac{b}{4a}\alpha_0 - \frac{n\phi}{2} + \phi + \frac{b\,r\,\phi^{'}}{2a} = \\
&\epsilon_1 + \frac{\alpha_0}{2}\left(\frac{b}{a} + n - 2\right) + \phi\left(1 - \frac{n}{2}\right) + r\,\phi^{'}\left(\frac{b}{2a}\right) \geq \epsilon_1.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\gamma - \frac{n\phi + r\phi^{'}}{2} + \phi + r\phi^{'}(\frac{1}{2} + \frac{b}{2a}) \geq \epsilon_1 = \frac{\alpha_0}{2}\left(1 - \frac{b}{2a}\right) > 0 \tag{3.39}$$

$\forall x \in \Omega$, onde $r = |x|$, pois $a < b < 2a$.

Agora, usado (3.38) e (3.39), em (3.28), conclui-se que:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \phi\, u_t \cdot (x:\nabla u)\,dx\, + \gamma(u_t\,,\,u) + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \alpha(x)\,|u|^2\,dx\, +\, k\,E(t)\right]\\
&+\epsilon_1\int_\Omega |u_t|^2\,dx\, + \epsilon_1 a^2\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\, + \epsilon_1(b^2-a^2)\int_\Omega (div\,(u))^2\,dx\\
&+\left(k - \frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}\right)\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx\, + \left(k - \frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}C_R - \frac{L^2\alpha_0^2}{4\lambda a^2}\right)\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\\
&+\frac{k}{2}\int_\Omega \alpha(x)\,|u_t|^2\,dx\, \leq -\int_\Omega \alpha(x)\,\phi u_t.(x:\nabla u)\,dx\, +\, \frac{\lambda}{2}a^2\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\\
&+\lambda(b^2-a^2)\int_\Omega (div\,u)^2\,dx.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Definindo

$$G_k(t) = \int_\Omega \phi u_t \cdot (x:\nabla u)\,dx\, + \gamma(u,u_t) + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \alpha(x)\,|u|^2\,dx\, + kE(t), \tag{3.41}$$

tem-se,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}G_k(t)\, +\, 2\,\epsilon_1\,E_1(t)\, + \left(k - \frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}\right)\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx\\
&+\left(k - \frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}C_R - \frac{L^2\alpha_0^2}{4\lambda a^2}\right)\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\, + \frac{k}{2}\int_\Omega \alpha(x)\,|u_t|^2\,dx\, \leq\\
&-\int_\Omega \alpha(x)\,\phi u_t.(x:\nabla u)\,dx\, +\, \frac{\lambda}{2}a^2\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\, +\, \lambda(b^2-a^2)\int_\Omega (div\,u)^2\,dx.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Lema 3.10. *Existe $\beta > 0$ tal que,*

$$\begin{aligned}
&G_k(t) + \beta\int_0^t E(s)\,ds + \gamma\int_0^t\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\,ds\, + \frac{k}{4}\int_0^t\int_\Omega \alpha(x)u_t^2\,dx\,ds\\
&+C_k\int_0^t\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx\,ds\, \leq G_k(0), \quad \forall t > 0.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Prova:

Usando, que $|x|\phi(x) \leq\, L\,\alpha_0$ em $\mathbb{R}^n$, e de (3.42) segue,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}G_k(t)\, +\, 2\,\epsilon_1\,E_1(t)\, + \left(k - \frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}\right)\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx\\
&+\left(k - \frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}C_R - \frac{L^2\alpha_0^2}{4\lambda a^2}\right)\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\, + \frac{k}{2}\int_\Omega \alpha(x)\,|u_t|^2\,dx\, \leq\\
&L\,\alpha_0\int_\Omega \alpha(x)\,|u_t||\nabla u|\,dx\, +\, \frac{\lambda}{2}a^2\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\, +\, \lambda(b^2-a^2)\int_\Omega (div\,u)^2\,dx.
\end{aligned}$$

Como, $\alpha(x) \in L^\infty(\Omega)$, tomado $C_0 = L^2\alpha_0^2\|\alpha(\cdot)\|_\infty > 0$ e usando que $a\,b \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
& L\,\alpha_0 \int_\Omega \alpha(x)\,|u_t||\nabla u|\,dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega \left[L^2\,\alpha_0^2|\alpha(x)|^2\,\frac{k}{2C_0}|u_t|^2 + \frac{2C_0}{k}|\nabla u|^2\right]dx = \\
& \int_\Omega \left[\frac{k}{4}\frac{L^2\,\alpha_0^2\,|\alpha(x)|^2}{C_0}|u_t|^2 + \frac{C_0}{k}|\nabla u|^2\right]\,dx \le \int_\Omega \left[\frac{k|\alpha(x)|}{4}|u_t|^2 + \frac{C_0}{k}|\nabla u|^2\right]\,dx.
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\,G_k(t) + 2\,\epsilon_1\,E_1(t) + \left(k - \frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}\right)\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx \\
& + \left(k - \frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}C_R - \frac{L^2\alpha_0^2}{4\lambda a^2}\right)\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx + \frac{k}{2}\int_\Omega \alpha(x)\,|u_t|^2\,dx \le \\
& \int_\Omega \left[\frac{k|\alpha(x)|}{4}|u_t|^2 + \frac{C_0}{k}|\nabla u|^2\right]\,dx + \frac{\lambda}{2}a^2\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx + \lambda(b^2-a^2)\int_\Omega (div\,u)^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\,G_k(t) + 2\,\epsilon_1\,E_1(t) + \left(k - \frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}\right)\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx \\
& + \left(k - \frac{\gamma^2}{2\lambda(b^2-a^2)}C_R - \frac{L^2\alpha_0^2}{4\lambda a^2}\right)\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx + \frac{k}{4}\int_\Omega \alpha(x)\,|u_t|^2\,dx \le \\
& \int_\Omega \frac{C_0}{k}|\nabla u|^2\,dx + \frac{\lambda}{2}a^2\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx + \lambda(b^2-a^2)\int_\Omega (div\,u)^2\,dx.
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Agora, escolhendo $\lambda = \frac{\epsilon_1}{2}$ e k suficientemente grande tal que $\frac{C_0}{k} \le \frac{\epsilon_1}{4}$ resulta de (3.44) que

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\,G_k(t) + \epsilon_1\,E_1(t) + \left(k - \frac{\gamma^2}{2\,\lambda(b^2-a^2)}\right)\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx \\
& + \left(k - \frac{\gamma^2}{\epsilon_1(b^2-a^2)}C_R - \frac{L^2\alpha_0^2}{\epsilon_1 a^2}\right)\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx + \frac{k}{4}\int_\Omega \alpha(x)\,|u_t|^2\,dx \le 0.
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

Completando a energia E_1 tem-se que

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\,G_k(t) + \epsilon_1\,E(t) + \left(k - \frac{\gamma^2}{2\,\lambda(b^2-a^2)}\right)\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx \\
& + \left(k - \frac{\gamma^2}{\epsilon_1(b^2-a^2)}C_R - \frac{L^2\alpha_0^2}{\epsilon_1 a^2}\right)\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx + \frac{k}{4}\int_\Omega \alpha(x)\,|u_t|^2\,dx \le \\
& \frac{\epsilon_1}{2}\int_\Omega \theta^2\,dx = \frac{\epsilon_1}{2}\int_{\Omega(R)} \theta^2\,dx + \frac{\epsilon_1}{2}\int_{|x|\ge R} \theta^2\,dx \le \\
& \frac{\epsilon_1}{2}\,C_R\int_{\Omega(R)} |\nabla\theta|^2\,dx + \frac{\epsilon_1}{2}\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx
\end{aligned}
$$

pelo lema (3.6).

Portanto:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\,G_k(t)\,+\,\epsilon_1\,E(t)\,+\left(k-\frac{\gamma^2}{\epsilon_1(b^2-a^2)}C_R-\frac{L^2\alpha_0^2}{\epsilon_1 a^2}-\frac{\epsilon_1}{2}\,C_R\right)\int_\Omega|\nabla\theta|^2\,dx\\
&+\left(k-\frac{\gamma^2}{2\,\lambda(b^2-a^2)}-\frac{\epsilon_1}{2}\right)\int_\Omega\mathcal{X}_R\theta^2\,dx\,+\frac{k}{4}\int_\Omega\alpha(x)\,|u_t|^2\,dx\,\leq 0.
\end{aligned}
$$

Agora, se necessário, aumentar $k>0$ para que os números $\left(k-\dfrac{\gamma^2}{\epsilon_1(b^2-a^2)}C_R-\dfrac{L^2\alpha_0^2}{\epsilon_1 a^2}-\dfrac{\epsilon_1}{2}\,C_R\right)$ e $\left(k-\dfrac{\gamma^2}{2\,\lambda(b^2-a^2)}-\dfrac{\epsilon_1}{2}\right)$ sejam positivos.

Em conclusão tomando

$$
k>max\left\{\left(k-\frac{\gamma^2}{\epsilon_1(b^2-a^2)}C_R-\frac{L^2\alpha_0^2}{\epsilon_1 a^2}-\frac{\epsilon_1}{2}\,C_R\right),\left(k-\frac{\gamma^2}{2\,\lambda(b^2-a^2)}-\frac{\epsilon_1}{2}\right),\frac{4C_0}{\epsilon_1},n\right\} \tag{3.46}
$$

resulta que

$$
\frac{d}{dt}\,G_k(t)\,+\,\epsilon_1\,E(t)\,+C_k\int_\Omega|\nabla\theta|^2\,dx\,+\,C_k\int_\Omega\mathcal{X}_R\theta^2\,dx\,+\frac{k}{4}\int_\Omega\alpha(x)\,|u_t|^2\,dx\,\leq 0. \tag{3.47}
$$

Por fim, integrando (3.47) em $[0,t]$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
&G_k(t)+\epsilon_1\int_0^t E(t)\,ds\,+C_k\int_0^t\int_\Omega|\nabla\theta|^2\,dx\,ds\,+\,C_k\int_0^t\int_\Omega\mathcal{X}_R\theta^2\,dx\\
&+\frac{k}{4}\int_0^t\int_\Omega\alpha(x)\,|u_t|^2\,dx\,ds\,\leq\,G_k(0).
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

$\square$

Observação 3.11. *A estimativa (3.48), é válida para soluções regulares. Usando argumentos de densidade, ela também é válida para soluções fracas.*

Lema 3.12. *Existe uma constante $C=C(k)>0$ tal que,*

$$
|G_k(0)|\leq C\left(||u_0||^2_{H^1(\Omega)^n}+||u_1||^2+\,\|\theta_0\|^2\right). \tag{3.49}
$$

Prova:

De fato, usando novamente que $|x||\phi| = |x|\phi \leq L\,\alpha_0$ tem-se da definição de $G_k(t)$ em (3.41):

$$
\begin{aligned}
&|G_k(0)| \leq \left| \int_\Omega \phi u_1 \cdot (x : \nabla u_0)\, dx + \gamma(u_0\,,\, u_1) + \frac{\gamma}{2} \int_\Omega \alpha(x)\, |u_0|^2\, dx + k\, E(0) \right| \leq \\
&L\, \alpha_0 \int_\Omega |u_1||\nabla u_0|\, dx + \gamma ||u_1|| \cdot ||u_0|| + \frac{\gamma ||\alpha||_\infty}{2} \int_\Omega |u_0|^2\, dx + k\, E(0) \leq \\
&C \left(||u_0||^2_{H^1(\Omega)^n} + ||u_1||^2 + \|\theta_0\|^2 \right).
\end{aligned}
$$

□

A seguir prova-se que $G_k(t) \geq 0$ para todo t. Na verdade, tem-se

Lema 3.13. *Com as hipóteses do Teorema (3.5) tem-se:*

$$
G_k(t) \geq C \int_\Omega \alpha(x) |u_t|^2 dx + C_k E(t), \quad \forall\, t \geq 0,
$$

para $k \gg 1$ suficientemente grande, com C e C_k constantes positivas.

Em particular,

$$
G_k(t) \geq 0, \qquad \forall\, t \geq 0.
$$

Prova:

Usando o lema (3.6), e assumindo (H_1) tem-se:

$$
\begin{aligned}
&-\gamma(u_t\,,\, u) \leq \frac{\gamma}{2\epsilon} ||u_t||^2 + \frac{\gamma\epsilon}{2} ||u||^2 \leq \frac{\gamma}{\epsilon} E(t) + \frac{\gamma\epsilon}{2} \left(\int_{|x| \geq L} \frac{\alpha(x)}{\alpha_0} |u|^2\, dx + \int_{\Omega(L)} |u|^2\, dx \right) \leq \\
&\frac{\gamma}{\epsilon} E(t) + \frac{\gamma\epsilon}{2\alpha_0} \int_\Omega \alpha(x)\, |u|^2\, dx + \frac{\gamma\epsilon}{2} C_L \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \leq \\
&\frac{\gamma}{\epsilon} E(t) + \frac{\gamma\epsilon}{2\alpha_0} \int_\Omega \alpha(x)\, |u|^2\, dx + \frac{\gamma\epsilon C_L}{a^2} E(t).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
-\gamma(u_t\,,\, u) \leq \left(\frac{\gamma}{\epsilon} + \frac{\gamma\epsilon C_L}{a^2} \right) E(t) + \frac{\gamma\epsilon}{2\alpha_0} \int_\Omega \alpha(x)\, |u|^2\, dx, \tag{3.50}
$$

onde $\epsilon > 0$, é um número real arbitrário. Também tem-se

$$-\int_\Omega \phi u_t \cdot (x : \nabla u)\, dx \;\leq \int_\Omega |x| \phi |u_t| |\nabla u|\, dx \;\leq L\,\alpha_0 \int_\Omega |u_t| \cdot |\nabla u|\, dx \;\leq$$
$$\frac{L\,\alpha_0}{a} \int_\Omega \left(\frac{|u_t|^2}{2} + \frac{a^2}{2} |\nabla u|^2 \right) dx.$$

Assim

$$-\int_\Omega \phi u_t \cdot (x : \nabla u)\, dx \;\leq \frac{L\,\alpha_0}{a} E(t), \quad t \geq 0. \tag{3.51}$$

De (3.50) e (3.51) segue,

$$-\gamma(u_t\,,\,u) - \int_\Omega \phi\, u_t \cdot (x : \nabla u)\, dx \;\leq \left[\frac{\gamma}{\epsilon} + \frac{\gamma \epsilon C_L}{a^2} + \frac{L\,\alpha_0}{a} \right] E(t) + \frac{\gamma \epsilon}{2\alpha_0} \int_\Omega \alpha(x)\, |u|^2\, dx. \tag{3.52}$$

Da definição de $G_k(t)$ em (3.41), tem-se:

$$G_k(t) - \int_\Omega \phi\, u_t \cdot (x : \nabla u)\, dx \;- \gamma(u_t\,,\,u) = \frac{\gamma}{2} \int_\Omega \alpha(x)\, |u|^2\, dx \;+ k\, E(t). \tag{3.53}$$

Combinando (3.53) com (3.52) resulta:

$$G_k(t) + \left[\frac{\gamma}{\epsilon} + \frac{\gamma \epsilon C_L}{a^2} + \frac{L\,\alpha_0}{a} \right] E(t) + \frac{\gamma \epsilon}{2\alpha_0} \int_\Omega \alpha(x)\, |u|^2\, dx \;\geq\; \frac{\gamma}{2} \int_\Omega \alpha(x)\, |u|^2\, dx + k\, E(t).$$

Agora, fixando-se $\epsilon_1 > 0$, tal que $\epsilon_1 < \alpha_0$. Também fixando $k > 1$ suficientemente grande tal que satisfaz (3.46) e

$$k > \frac{\gamma}{\epsilon} + \frac{\gamma \epsilon C_L}{a^2} + \frac{L\,\alpha_0}{a}.$$

Assim, tomando: $k_1 = k - \left[\frac{\gamma}{\epsilon} + \frac{\gamma \epsilon C_0}{a^2} + \frac{L\,\alpha_0}{a} \right] > 0$ e $\gamma_1 = \gamma \left[1 - \frac{\epsilon}{\alpha_0} \right] > 0$, segue que

$$G_k(t) \;\geq\; \frac{\gamma_1}{2} \int_\Omega \alpha(x)\, |u|^2\, dx \;+ k_1\, E(t) \;\geq\; 0.$$

Para todo $t \geq 0$.

Isto prova o lema (3.13).

$\square$

Lema 3.14. *Com as hipóteses do teorema (3.5) tem-se:*

$$\begin{aligned}&\int_0^t E(s)\,ds + \frac{C_k}{\epsilon_1}\int_0^t\int_\Omega \mathcal{X}_R\theta^2\,dx\,ds + \frac{k}{4\epsilon_1}\int_0^t\int_\Omega \alpha(x)|u_t|^2\,dx\,ds\\ &+\frac{C_k}{\epsilon_1}\int_0^t\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\,ds \le \frac{1}{\epsilon_1}G_k(0), \qquad t\ge 0\end{aligned} \tag{3.54}$$

e

$$(1+t)E(t) \le E(0) + \frac{1}{\beta}G_k(0), \qquad t \ge 0, \tag{3.55}$$

para $k \gg 1$ suficientemente grande.

Prova:

Notamos que (3.54) segue imediatamente de (3.48) e do lema (3.13).

Para provar (3.55) usamos o fato que $E(t)$ é uma função decrescente (ver lema 3.9). Com isso, obtemos da primeira parte (3.54) que

$$\begin{aligned}&(1+t)E(t) = E(t) + t\,E(t) \le E(t) + \int_0^t E(s)\,ds\\ &\le E(0) + \int_0^t E(s)\,ds \le E(0) + \frac{1}{\epsilon_1}G_k(0).\end{aligned}$$

Isso provou o lema (3.14).

□

Observação 3.15. *Notar que a estimativa (3.55) diz que a energia $E(t)$ decai para zero, com $t \longrightarrow \infty$, na taxa $\frac{1}{t}$ pois $G_k(0)$ é limitado conforme lema (3.12).*

Lema 3.16. *Nas hipóteses do Teorema (3.1) a solução u do sistema (3.1) satisfaz*

$$\|u\| \le C\,I_0$$

com C constante independente dos dados iniciais.

Prova:

Notar que

$$\int_\Omega |u|^2 dx \;\leq\; \int_{\Omega(L)} |u|^2 dx \;+\; \int_{|x|\geq L} \frac{\alpha(x)}{\alpha_0} |u|^2 dx \;\leq$$
$$C_L \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \;+\; \frac{1}{\alpha_0} \int_\Omega \alpha(x) |u|^2 dx \;\leq$$
$$2\, C_L\, E(0) + \frac{2}{\alpha_0 \gamma_1 \epsilon_1} G_k(0) \;\leq\; C\, I_0^2.$$

Isso provou o lema (3.16).

□

3.5 Prova do Teorema (3.5)

Segue imediatamente dos lemas (3.14) e (3.16).

□

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] S. Agmon, H. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II.* Comm. Pure Appl. Math, 17, 35-92, 1964.

[3] E. Bisognin, V. Bisognin, R. C. Charão, *Decaimento exponencial das soluções do sistemas de ondas elásticas com dissipação não linear localizada.* Atas do 51º Seminário Brasileiro de Análise, UFSC, Florianópolis, 337-382, 2000.

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle: theórie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[5] R. C. Charão, R. Ikehata , *Decay of solutions for a semilinear system of elastic waves in an exterior domain with damping near infinity*, Nonlinear Analysis 67 (2007), 398–429.

[6] C. M. Dafermos, *On the existence and asymptotic stability of solution to the equation of linear thermoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., 29 (1968), 241-247.

[7] A. M. Gomes, *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução.* Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.

[8] C. W. Groetsch, *Elements of applicable functional analysis.* Marcel Dekker, New York and Basel, 1983.

[9] R. Ikehata, *Energy decay of solutions for the semilinear dissipative wave equations in an exterior domain*, Funkcial. Ekvac. 44 (2001) 487-499.

[10] R. Ikehata, *Fast decay of solutions for linear wave equations with dissipation localized near infinity in an exterior domain*, J. Differential Equations, 188 (2003) 390-405.

[11] R. Ikehata, *Global existence of solutions for 2-D semilinear wave equations with dissipation localized near infinity in an exterior domain*, Math. Methods Appl. Sci. 29 (2006), 479-496.

[12] R. Ikehata, T. Matsuyama, *L^2-behaviour of solutions to the linear heat and wave equations in exterior domains*, Sci. Math. Japan. 55 (2002) 33-42.

[13] R. Ikehata, K. Tanizawa, *Global existence of solutions for semilinear damped wave equations in $\mathbf{R}^n$ with non-compactly supported initial data*, Nonlinear Anal. T. M. A. 61 (2005), 1189–1208.

[14] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications.* Copyright, Bangalore, India, 1989.

[15] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley e Sons, 1978.

[16] J. L. Lions, *Exact Contrôlabilé Exacte Perturbations et Stabilization De Systèmes Distribués.* Tome 1, Masson, Paris, 1988.

[17] J. L. Lions, *Exact Controllability, Stabilization and perturbations for Distributed Systems.* SIAM Rev.30, 1-68, 1988

[18] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires.* Gauthier - Villars, Paris, 1969.

[19] J. L. Lions, *Problèmes aux limites dans les equations aux de riveés partielles* . Press univ. Montreal, 1962 (ver p.51).

[20] C. da Luz, *Existência, Unicidade e Estabilização de Soluções de um Modelo de Ondas com Efeitos Térmicos na Presença de Dissipação Localizada.* Dissertação de Mestrado em Matemática, UFSC, Florianópolis, 2005.

[21] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais*. Textos de Métodos Matemáticos número 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

[22] M. Nakao, *Energy decay for the linear and semilinear equations in exterior domains with some localized dissipations,* Math. Z. 238 (2001), 781–797.

[23] J. C. Oliveira, R. C. Charão, *Stabilization of a Locally Damped Thermoelastic System* (preprint).

[24] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[25] D. C. Pereira, G. P. Menzala, *Exponential decay of solutions to a coupled system of equations of linear thermoelasticity*, Mat. Aplic., 8(3) (1989), 193-204.

[26] R. Racke, *On the Cauchy problem in nonlinear 3-d thermoelasticity*, Math. Z. 203(4) (1990), 649-682.

[27] R. Racke, *Exponential decay for a class of initial-boundary value problems in thermoelasticity*, Mat. Apl. Comput. 12(1) (1993),67-80.

[28] J. E. M. Rivera, *Energy decay rates in linear thermoelasticity*, Funkcialaj Ekvacioj, 35 (1) (1992), 19-30.

[29] K. Yosida, *Functional analysis*. Springer-Verlag, Berlim-Heildelberg, New York, 1966.