

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS

CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES ATRAVÉS
DE TRANSDUTORES PIEZELÉTRICOS

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas

ANDRÉ MARCELO MARIA TRINTINI

Florianópolis, Novembro 2009

CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES ATRAVÉS DE TRASDUTORES PIEZELÉTRICOS

André Marcelo Maria Trintini

‘Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas, Área de Concentração em Controle, Automação e Sistemas e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina’

Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.
Orientador

Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.
Co-orientador

Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas

Banca Examinadora:

Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.
Presidente

Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.

Prof. Ubirajara Franco Moreno, Dr.

Prof. Henrique Simas, Dr.

Prof. Arcanjo Lenzi, Dr.

“YO SÉ QUIÉN SOY”

O Engenhoso Fidalgo Don Quixote de La Mancha – Miguel Cervantes Saavedra

Dedico este trabalho à minha mãe Maria Aparecida de Jesus Trintini.

AGRADECIMENTOS

No caminho que percorri até o presente momento, diversas pessoas influenciaram minha maneira de pensar e contribuíram de algum modo para a minha formação profissional e pessoal. Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por ter conhecido essas pessoas, infelizmente somente algumas serão citadas neste agradecimento, porém para os amigos e familiares que não forem citados fica aqui minha sincera gratidão.

Agradeço ao meu finado pai (João M. Trintini) por ter aguçado minha curiosidade pela ciência e por criar as bases para minha independência intelectual. Meu pai sempre evidenciou os valores morais e o sentimento cívico, os quais tiveram papel fundamental na formação da minha matriz de personalidade. Também sou sinceramente grato a minha mãe (Maria Aparecida Trintini) por me apoiar em todas as decisões, por servir de inspiração para as minhas conquistas e por me ajudar financeiramente durante o projeto. Obrigado ao meu irmão pelo seu companheirismo e pela sua criatividade inesgotável.

Agradeço aos amigos da universidade Nasser, Dorival, Bernardo, Marcelo, Leandro e Ricardo. Também não posso me esquecer do Homero e Diego e das nossas aventuras na terra das Cataratas. Ao amigo Morum registro aqui toda minha admiração. Gostaria de parabenizar os amigos Homero, Renato, Huei e Paulo Wu pelos esforços em construir uma universidade pública de qualidade, se os políticos e lideranças deste país tivessem a honestidade e competência deste grupo com certeza o Brasil seria muito melhor. Agradeço aos professores Marcus Mendes e Elidio Lobão pela confiança investida através da minha recomendação ao mestrado.

Agradeço também aos amigos do DAS especialmente ao Helton, Carlão, Adilson, Marcus e Leonardo pelos momentos que passamos juntos. Com certeza não conseguiria ter cumprido meus créditos sem a ajuda de vocês. Agradeço a Nelly pela eficiência, simpatia e ótimo atendimento na secretaria do DAS. Também não posso deixar de agradecer ao “SINDICATO” e as animadas discussões no “pesa gato”.

Agradeço ao professor Arcanjo Lenzi pela oportunidade de desenvolver um projeto em conjunto com o LVA e pelo apoio e incentivo dedicado durante todas as etapas do trabalho. Agradeço aos amigos Mikio, Olavo, Marcus e Marcos pelos auxílios técnicos, os quais tiveram um papel fundamental para a conclusão deste projeto.

Gostaria de agradecer a todos os amigos do LVA especialmente meus companheiros de caiaque, Marcos, Henrique e Thiago, nunca esquecerei as nossas aventuras. Quero

agradecer ao Paulo, Geiovanni, Gustavo, Heric, Erico, Fabilson e Renato pelo companheirismo e pelas agradáveis conversas na hora do café.

Agradeço meus orientadores Edson e Eugênio pela paciência, dedicação, bom humor e amizade. Felizmente tive o privilégio de ter orientadores que possuem não apenas um impressionante conhecimento técnico, mas também uma ampla formação cultural, este conjunto de características tornou meu mestrado uma experiência agradável e enriquecedora.

Agradeço à minha linda namorada Bia pela dedicação, compreensão e carinho. Desde quando nos conhecemos ela teve participações decisivas no meu sucesso. Devido a sua grande inteligência e determinação tenho certeza que terá um futuro brilhante.

Muito obrigado ao conselho nacional de desenvolvimento científico e tecnológico (CNPQ) e a empresa EMBRACO por fornecerem apoio financeiro à realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	ix
SIMBOLOGIA	xii
RESUMO	xvi
ABSTRACT	xvii
INTRODUÇÃO	18
1.2 Estado da Arte	21
PIEZELETRICIDADE	26
2.1 Piezeletricidade	26
2.1.2 Aplicações de Materiais Piezelétricos	28
2.2 Equações Piezelétricas	30
2.3 Transdutores Piezelétricos	35
2.3.1 Cerâmicas Piezelétricas	36
2.3.2 Modos de Atuação dos Materiais Piezelétricos	37
2.3.3 Sensor piezelétrico	40
2.3.4 Amplificador de Carga	45
2.3.5 Ponto Zero de Medição	47
2.4 Atuadores Piezelétricos	47
MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA	53
3.1 Método dos Elementos Finitos	53
3.1.1 Caso de estudo deste trabalho	54
3.1.2 Modelagem por elementos finitos do caso de estudo	55
3.1.3 Interpolação e Funções de Forma	62
3.1.4 Matrizes Elementares	65
3.2 Análise Modal	69
3.2.1 Equação do Movimento de Lagrange para o caso linear	70
3.2.2 Problema de autovalores e modos normais de vibração	75
3.2.3 Transformação Modal Aplicada à Viga com Transdutores Piezelétricos	81
VALIDAÇÃO DO MODELO E REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA	86
4.1 Validação do Modelo	86
4.1.2 Cadeia Básica de Medições	87
4.1.3 Objetivos da Análise Modal Experimental	89
4.1.4 Resultados Experimentais	90
4.1.5 Considerações Finais	99
4.2 Representação do Sistema	99
4.2.1 Espaço de Estados	100
4.2.2 Função de Transferência	103
PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE	107
5.1 Compensador em Avanço de Fase	107
5.1.1 Topologia das Funções de Transferência	107
5.1.2 Projeto do controlador	108
5.2 Controle LQR	113

5.2.2 Propriedades estruturais do Sistema.....	114
5.2.3 Projeto do Controlador LQR	118
5.2.4 Observador de Estados	120
5.2.5 Princípio da Separação	122
5.2.6 Considerações sobre o Controle LQR.....	123
5.3 Controle Robusto.....	124
5.3.2 Representações das Incertezas	125
5.3.3 Teorema do Pequeno Ganho.....	130
5.3.4 Controle H_∞	132
RESULTADOS	144
6.1 Introdução	144
6.2 Controle LQR.....	145
6.3 Compensador em avanço de fase	148
6.4 Controle H_∞ Considerando Variações Paramétricas do Modelo.....	150
6.5 Controlador H_∞ e Análise de incertezas dinâmicas.....	153
CONCLUSÕES	159
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA	163
ANEXO 1	168
ANEXO 2	170
ANEXO 3	172
ANEXO 4.....	173
ANEXO 5.....	174

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - (a) Efeito direto da piezeletricidade: Um campo elétrico provoca o alongamento do material. (b) Efeito direto da piezeletricidade: Um campo elétrico provoca a contração do material. (c) Efeito inverso da piezeletricidade: A compressão do material provoca o surgimento de cargas elétricas.	26
Figura 2.2 - Cristal de turmalina.....	27
Figura 2.3 - Blenda de Zinco.....	28
Figura 2.4 - Robô com músculos artificiais	29
Figura 2.5 – Material piezelétrico polarizado	31
Figura 2.6 – Sistema de coordenadas definido no elemento piezelétrico.....	38
Figura 2.7 – Modo de atuação transversal de um atuador piezelétrico.....	38
Figura 2.8 – Modo de atuação paralelo de um atuador na configuração pilha.....	39
Figura 2.9 - Modo de atuação cisalhante de um transdutor piezelétrico.....	39
Figura 2.10 – Eletrômero folha de ouro	40
Figura 2.11 – Curva de carga de um capacitor.....	42
Figura 2.12 – Amplificador de carga	44
Figura 2.13 – Gráfico de isotensões do atuador piezelétrico	49
Figura 2.14 – Campo do atuador piezelétrico	50
Figura 3.1 - Aplicação de uma malha de elementos finitos	52
Figura 3.2 - Fluxograma do processo de obtenção do modelo de espaço de estados.....	54
Figura 3.3 - Disposição dos transdutores no caso de estudo deste trabalho	54
Figura 3.4 - (a) Elemento retangular sólido de transdutor; (b) Elemento retangular sólido da viga.....	56
Figura 3.5 – Deslocamento nas 3 dimensões do elemento.....	58
Figura 3.6 - Conjunto de tensões agindo sobre o elemento	59
Figura 3.7 – Parâmetros do elemento trilinear	65
Figura 4.1 – Fluxograma do processo de validação do modelo FE da estrutura.....	87
Figura 4.2 – Topologia da cadeia de medição.....	89
Figura 4.3 – Disposição dos pontos usados na medição.....	90
Figura 4.4 – Comparação entre a FRF experimental e simulada do ponto 6	92
Figura 4.5 – Comparação entre a FRF experimental e simulada do ponto 22	92
Figura 4.6 – Comparação entre a FRF experimental e simulada do ponto 38.	93
Figura 4.7 – Comparação entre a FRF experimental e simulada do ponto 48.	93
Figura 4.8 – Primeiro modo de vibração do Modelo EF	94
Figura 4.9 – Segundo modo de vibração do Modelo EF	95
Figura 4.10 – Segundo modo de vibração da estrutura real.....	95
Figura 4.11 – Terceiro modo de vibração do Modelo EF.....	95
Figura 4.12 – Terceiro modo de vibração da estrutura real	96
Figura 4.13 – Quarto modo de vibração do Modelo EF	96
Figura 4.14 – Quarto modo de vibração da estrutura real.....	96

Figura 4.15 – Quinto modo de vibração do modelo EF.....	97
Figura 4.16 – Quinto modo de vibração da estrutura real.....	97
Figura 4.17 – Sexto modo de vibração do modelo EF.....	97
Figura 4.18 – Sexto modo de vibração da estrutura real.....	98
Figura 4.19 – Sétimo modo de vibração do Modelo EF.....	98
Figura 4.20 – Sétimo modo de vibração da estrutura real.....	98
Figura 4.21 – Diagrama de blocos do sistema na representação por espaço de estados.....	103
Figura 4.22 –Interação entre as funções de transferência do sistema.....	106
Figura 5.1 – Topologia do sistema utilizado no projeto	107
Figura 5.2 - Lugar das Raízes de $\mathbf{G}_{u_\phi, y_Q}(s)$	109
Figura 5.3 – Diagrama de bode de $\mathbf{G}_{u_\phi, y_Q}(s)$	110
Figura 5.4 - Diagrama de bode do compensador $C(s)$	111
Figura 5.5 – Comparação do diagrama de bode de $\mathbf{G}_{u_\phi, y_Q}(s)C(s)$ e $\mathbf{G}_{u_\phi, y_Q}(s)$	112
Figura 5.6 – Comparação do diagrama de bode do sistema em malha aberta com o diagrama de malha fechada.....	113
Figura 5.7 – Topologia do Observador de Estados.....	121
Figura 5.8 – Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.....	123
Figura 5.9 - Comparação entre o diagrama de bode de malha aberta e fechada	124
Figura 5.10 – Diagrama de blocos do sistema da equação 9.2 com as incertezas.....	127
Figura 5.11 – Diagrama de blocos do modelo considerando as incertezas como entradas ...	128
Figura 5.12 – Funções de transferência com as respectivas incertezas	129
Figura 5.13 – Diagrama de blocos considerando os sinais da incerteza $\Delta_{a2}(s)$ como entrada e saída do sistema.	130
Figura 5.14 – Diagrama de blocos de um sistema realimentado.....	130
Figura 5.15 – Sistema realimentado considerando incertezas aditivas.....	131
Figura 5.16 – Diagrama de blocos genérico para a representação do controle H_∞	134
Figura 6.1 – Ponto de atuação da perturbação.....	144
Figura 6.2 – Perturbação na forma de ruído branco atuante no sistema.....	145
Figura 6.3 – Diagramas de Bode do sistema considerando a saída mecânica para o caso LQR	146
Figura 6.4 – Diagramas de Bode do sistema considerando a saída elétrica para o caso LQR	146
Figura 6.5 – Resposta temporal do sistema para o caso LQR.....	147
Figura 6.6 – Sinal de controle para o caso LQR.....	148
Figura 6.7 – Diagramas de Bode do sistema considerando a saída elétrica para o caso do compensador	149
Figura 6.8 – Resposta temporal do sistema para o caso do compensador	149
Figura 6.9 – Sinal de controle para o caso do compensador	150
Figura 6.10 – Diagramas de Bode do sistema considerando a saída mecânica para o caso H_∞ com variações paramétricas.....	151
Figura 6.11 – Resposta temporal do sistema para o caso H_∞ com variações paramétricas.	152

Figura 6.12 – Sinal de controle para o caso H_∞ com variações paramétricas.	153
Figura 6.13 – Diagramas de Bode do sistema considerando a saída mecânica para o modelo de 50 modos.....	154
Figura 6.14 – Diagramas de Bode do sistema considerando a saída mecânica para o caso H_∞	155
Figura 6.15 – Verificação da condição de robustez para incertezas dinâmicas	156
Figura 6.16 – Resposta temporal do sistema para o caso H_∞ com incertezas dinâmicas	157
Figura 6.17 – Sinal de controle para o caso H_∞ com incertezas dinâmicas	157

SIMBOLOGIA

\bar{H}	Momento dipolar global
\bar{H}_i	Momento dipolar elementar
Q_i	Carga elétrica elementar
\bar{f}	Distância entre a carga positiva e negativa
\bar{D}	Deslocamento elétrico
ΔS	Volume da estrutura cristalina
\bar{P}	Polarização
Q_p	Carga de polarização
\bar{E}	Campo elétrico
ϵ_0	Permissividade elétrica no vácuo
Q_L	Carga livre
S	Superfície
Q_T	Carga total
ϵ	Permissividade elétrica do material
ϵ_R	Permissividade relativa do material
$\bar{\epsilon}$	Vetor de deformações mecânicas
$\bar{\sigma}$	Vetor de tensões mecânicas
[S]	Matriz de elasticidade
[c]	Matriz de rigidez
[ϵ]	Constantes dielétricas
[e]	Constantes piezelétricas
[d]	Constantes piezelétricas
[g]	Constantes piezelétricas
[h]	Constantes piezelétricas
ϕ	Tensão elétrica
ΔL	Diferencial de comprimento do elemento piezelétrico
L	Comprimento do elemento piezelétrico
U_0	Tensão elétrica de saída
F	Força

h	Espessura do elemento piezelétrico
α	Ângulo entre as laminas do eletrômetro
τ	Constante de tempo do piezelétrico
f_u	Constante limite inferior
U_i	Tensão de entrada
ν	Ganho do amplificador operacional
U_r	Diferença de tensão da realimentação do amplificador de carga
C_r	Capacitância de realimentação do amplificador de carga
C_i	Capacitância de entrada do amplificador de carga
R_r	Resistência de realimentação do amplificador de carga
A_1	Área superior do elemento piezelétrico
A_2	Área inferior do elemento piezelétrico
\mathcal{L}	Lagrangiano
\mathcal{T}	Energia cinética
\mathcal{U}	Energia potencial
\mathcal{V}^o	Volume do elemento piezelétrico
\mathcal{W}^o	Trabalho virtual
$\{P_A\}$	Força distribuída na superfície
$\{P_C\}$	Carga mecânica concentrada
q_A	Carga elétrica de superfície
$\{u\}$	Vetor deslocamento
∇	Operador gradiente
β	Variável de campo
$[m_{uu}]$	Matriz de massa global
$[k_{uu}]$	Matriz de rigidez global
$[k_{u\phi}]$	Matriz de acoplamento piezelétrico global
$\{f_i\}$	Vetor de força nodal
$\{g_i\}$	Vetor de carga nodal
n_u	Número de graus de liberdade mecânico

f_u	Número de graus de liberdade elétrico
\mathbf{r}_i	Deslocamento
Q_j	Forças não conservativas
δ_{rj}	Delta de Kronecker
m_{rs}	Coefficientes de inércia
ω	Frequências naturais modais
Ψ_u	Formas modais
$\eta(t)$	Deslocamento modal
Q_s	Carga do sensor
F_u	Força Modal
$\mathbf{x}(t)$	Vetor de estados
\mathbf{A}	Matriz de estados
\mathbf{B}_{MEC}	Matriz de entrada mecânica
\mathbf{B}_{PZT}	Matriz de entrada elétrica
\mathbf{C}_{MEC}	Matriz de saída mecânica
\mathbf{C}_{PZT}	Matriz de saída elétrica
$\mathbf{u}_\phi(t)$	Sinal de controle
$\mathbf{y}_u(t)$	Saída mecânica
$\mathbf{y}_Q(t)$	Saída elétrica
$\mathbf{G}_{F,Y_u}(s)$	Função de transferência da entrada mecânica para a saída mecânica
$\mathbf{G}_{F,Y_Q}(s)$	Função de transferência da entrada mecânica para a saída elétrica
$\mathbf{G}_{u_\phi,Y_u}(s)$	Função de transferência da entrada elétrica para a saída mecânica
$\mathbf{G}_{u_\phi,Y_Q}(s)$	Função de transferência da entrada elétrica para a saída elétrica
$\mathbf{G}_{MA}(s)$	Função de transferência em malha aberta
$\mathbf{G}_{MF}(s)$	Função de transferência em malha fechada
$C(s)$	Controlador
\mathbf{M}_C	Matriz de controlabilidade
$\tilde{\mathbf{A}}$	Matriz de estados transformada
\mathbf{P}	Matriz positiva definida

Q	Matriz de ponderação de estados
R	Matriz de ponderação do sinal de controle
\mathbf{A}_{nO}	Autovalores não observáveis
\mathbf{A}_O	Autovalores observáveis
\mathbf{A}_{nc}	Autovalores não controláveis
\mathbf{A}_c	Autovalores controláveis
K	Ganho do controlador
J	Função custo do problema LQR
$\mathbf{e}(t)$	Erro de estimação de estados
$\mathbf{x}_r(t)$	Estado estimado
L	Ganho do observador de estados
$\mathbf{A}_2(s)$	Função de transferência do sistema com relação as incertezas
Δ	Incertezas
$\Delta_{a2}(s)$	Incertezas aditivas
$\tilde{\mathbf{G}}(s)$	Função de transferência real do sistema
$\mathbf{G}(s)$	Função de transferência incompleta
$\ \mathbf{G}\ _\infty$	Norma H_∞ do sistema
w(s)	Entradas exógenas do sistema
u(s)	Sinal de controle genérico
z(s)	Saída de desempenho
y(s)	Saída genérica do sistema
γ	Valor máximo da norma H_∞
$\mathbf{T}_{zw}(s)$	Função de transferência da entrada exógena para a saída de desempenho
$\hat{\mathbf{x}}(t)$	Vetor de estados estimados para o caso H_∞

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES ATRAVÉS DE TRANSDUTORES PIEZELÉTRICOS

André Marcelo Maria Trintini

Orientador: Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.

Co-orientador: Prof. Eugênio de Bonna Castelan Neto, Dr.

Área de Concentração: Engenharia de Controle

Palavras Chave: Controle Ativo de Vibrações, Método dos Elementos Finitos, Transdutores Piezelétricos.

Número de Páginas: 164.

RESUMO: A capacidade de medir e controlar vibrações é importante para diversas áreas da engenharia, como a automobilística, aeroespacial, de refrigeração, e petroquímica, praticamente todos os sistemas podem ser perturbados e tirados do seu funcionamento normal graças a ação de ruídos e vibrações indesejáveis. Além disso, a presença de ruídos nos ambientes de atividades humanas é cada vez menos tolerada. Devido a esses fatores o controle de vibrações e ruído é considerado um desafio tecnológico altamente relevante. Este trabalho trata o controle ativo de vibração usando como transdutores dispositivos piezelétricos. O modelo matemático do conjunto estrutura/transdutores é formulado através do método de elementos finitos, onde a partir do software de elementos finitos Ansys as matrizes de massa global, rigidez global e acoplamento piezelétrico são obtidas. Usando as matrizes globais um sistema nodal é escrito e posteriormente reduzido através de uma transformação modal, para então ser escrito na forma de espaço de estados. O modelo de elementos finitos é validado a através de uma análise modal experimental, essa análise gera um conjunto de dados como funções de resposta em frequência (FRFs), formas modais e frequências modais que são comparados com os resultados obtidos por simulação através do software Ansys.

O problema do controle ativo consiste basicamente na rejeição de perturbações, sendo o projeto dos controladores baseado no modelo de espaço de estados e em funções de transferências. O problema foi abordado sobre a ótica da engenharia de controle e três metodologias de projeto foram utilizadas: a do compensador em avanço de fase, a LQR e a H_{∞} . Os controladores projetados foram simulados usando os softwares Matlab e Simulink e uma análise de robustez, considerando incertezas paramétricas e dinâmicas foi realizada para o caso H_{∞} .

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements of the degree of Master in Automation and Systems Engineering.

ACTIVE VIBRATION CONTROL BY MEANS OF PIEZOELECTRIC TRANSDUCERS

André Marcelo Maria Trintini

Advisor: Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.

Co-advisor: Prof. Eugênio de Bonna Castelan Neto, Dr.

Area of Concentration: Control Engineering

Keywords: Controle Active Vibration Control, Finite Element Method, Piezoelectric Transducers.

Número de Páginas: 164.

ABSTRACT: The capability of measure and control vibrations is of great important for several engineering areas, like automobilistic, aerospace, refrigeration and petrochemical. Every system can be disturbed and taken off its normal functionality by to noise action and undesirable vibrations. Besides, the presence of those noises on human activity environments is increasingly less tolerated. Due to those factors the vibration and noise control is considered a technological challenge highly relevant. This work deals with the active control by means of piezoelectric transducers. The mathematical model of the set structure/transducers is made through finite element method, where using finite element software the global mass, global stiffness and piezoelectric coupling matrices are obtained. Using the global matrices a nodal system is written and after reduced through a modal transformation to be written as space state form. The finite elements model is validated through an experimental modal analysis.

The active control issue consists basically in disturbance rejection. Based on the space state model the problem was approached by the control engineering way and three project methodologies were used: those of advance phase compensator, LQR and H_∞ . The projected controllers were simulated using Matlab and Simulink softwares, and a robustness analysis considering parametric uncertainties and dynamics was made for the H_∞ case.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A perturbação na forma de vibrações influencia a operação de sistemas das mais diversas áreas da engenharia, pode-se citar a automobilística, petroquímica, aeroespacial e refrigeração. Praticamente todos os sistemas têm seu funcionamento prejudicado devido a ação das vibrações [55]. Porém para alguns sistemas a influência das vibrações além de prejudicar a operação pode trazer efeitos críticos como o comprometimento da estrutura. Para o caso aeroespacial, petroquímico e automobilístico, em particular o comprometimento da estrutura destes sistemas implicaria em enorme prejuízo financeiro e humano [56]. Já a refrigeração se preocupa com a redução das vibrações visando o conforto acústico de seus produtos. As normas relacionadas ao nível de ruído de ambientes de trabalho e de eletrodomésticos estão cada vez mais rígidas, devido a isso o controle de vibração vem despertando o interesse das empresas [3].

Para enfrentar o desafio tecnológico que representa a redução dos efeitos de vibrações e ruídos, diversas estratégias são utilizadas. Basicamente essas estratégias se classificam em duas grandes vertentes, o controle passivo e o controle ativo [34]. A abordagem passiva é a mais antiga e também a mais utilizada devido a sua simplicidade e baixo custo, além disso, por ser pesquisada a mais tempo sua tecnologia está consolidada sendo um tópico clássico da engenharia [6]. A idéia principal do controle passivo é dissipar a energia das vibrações e ruídos, através do amortecimento de seus elementos de projeto, na forma de calor. O desempenho de atenuação do controle passivo é geralmente pobre, devido a sua incapacidade de adaptação e reação a mudanças da perturbação e da estrutura ao longo do tempo [3].

Já o controle ativo atingiu sua maturidade na década de 1980 onde suas principais aplicações usavam como atuadores dispositivos hidráulicos e metodologia de controle simples como alocação de pólos [53]. O controle ativo utiliza uma malha de controle composta basicamente por atuadores, sensores, controladores e amplificadores, sendo essa malha a principal diferença entre a abordagem passiva e ativa. A idéia básica do sistema de controle é promover a redução das vibrações da estrutura através da injeção de energia no sistema, essa energia é fornecida pelos atuadores de acordo com a decisão do controlador, a qual depende normalmente da estratégia de controle e das informações sobre a vibração da estrutura gerada pelo sensor. Dessa maneira a malha de controle possibilita que o sistema reaja a variações do

distúrbio, permitindo assim que a estrutura rejeite as perturbações de uma ampla faixa de frequência.

O desenvolvimento dos atuadores de estado sólido formados por materiais com memória de forma, eletrostrictivos, magnetostrictivos, polímeros contrativos e piezelétricos têm expandido as possibilidades do controle ativo [39][50]. Além disso, o avanço nas pesquisas sobre a teoria de controle bem como o desenvolvimento da eletrônica digital e eletrônica de potência tornaram os transdutores piezelétricos poderosas ferramentas para o controle de vibrações [46]. As principais vantagens da utilização de atuadores piezelétricos são: rápida resposta, peso e dimensões reduzidas, além de serem facilmente comandados através de um sinal de tensão elétrica. Já os transdutores piezelétricos quando utilizados como sensor possuem uma elevada sensibilidade a vibrações e deslocamentos e geram sinal de saída na forma de carga elétrica. Este trabalho utilizará transdutores piezelétricos laminares afixados em uma estrutura mecânica para realizar o controle ativo das vibrações [1][57].

Um projeto de controle ativo possui diversas etapas que podem ser resumidas em três partes principais, escolha e dimensionamento dos transdutores e amplificadores, modelagem matemática da estrutura e projeto do sistema de controle, sendo o resultado final do projeto a obtenção do controlador [57]. O projeto do sistema de controle se baseia no modelo da estrutura e dos demais dispositivos do sistema, deste modo a etapa de modelagem desempenha um papel fundamental na elaboração do controlador. Diferentemente dos transdutores convencionais que são posicionados pontualmente na estrutura e desse modo podem ser modelados separadamente da mesma, os transdutores piezelétricos encontram-se distribuídos de modo contínuo sobre a superfície da estrutura fazendo assim parte da mesma, essa configuração peculiar exige que os transdutores sejam modelados juntamente com a estrutura não podendo ser descritos de maneira separada [5].

A modelagem matemática deste trabalho é feita utilizando a metodologia de elementos finitos (MEF), o qual consiste na divisão da estrutura em um número finito de partes conectadas entre si por intermédios de pontos discretos denominados nós, sendo todas as variáveis do sistema definidas apenas para os nós. A modelagem MEF é realizada através de softwares computacionais, atualmente existem diversos softwares comerciais de elementos finitos [10].

A modelagem matemática deste trabalho será feita usando o software ANSYS®. O objetivo principal da etapa de modelagem é a obtenção das matrizes de massa rigidez e de acoplamento piezelétrico, essas matrizes são extraídas do modelo MEF e posteriormente

processadas através do software MATLAB[®]. A partir dessas matrizes um primeiro modelo do sistema nodal é formado, mas devido a sua grande dimensão torna-se necessário a realização de uma transformação modal. Essa transformação muda a base do sistema de coordenadas físicas para coordenadas modais e reduz consideravelmente a ordem do mesmo, além disso, através desta transformação é possível escolher os modos de vibração que mais influenciarão o sistema para compor o modelo modal. Uma vez obtido o sistema modal esse pode ser escrito em um formato padrão da engenharia de controle como espaço de estados e funções de transferência, possibilitando assim o projeto do controlador. A metodologia de modelagem aplicada neste trabalho pode ser utilizada para praticamente todas as estruturas.

No âmbito do sistema de controle o problema de controle ativo de vibrações se pode ser abordado como uma aplicação de rejeição de perturbações, onde a função do controlador é diminuir a influência das perturbações sobre o sistema em malha fechada. Os projetos de controle escolhidos foram, compensador avanço de fase, LQR (Linear Quadratic Regulator) e H_{∞} . O compensador em avanço é uma metodologia de projeto clássica, cuja a teoria é simples e gera compensadores de ordem reduzidas [57]. Já a metodologia LQR é uma abordagem moderna que permite a priorização dos modos que mais influenciam o sistema, isso é feito através da escolha das matrizes de ponderação [55][56]. O projeto H_{∞} permite que as incertezas do modelo sejam consideradas no projeto, deste os controladores resultantes desta abordagem são denominados de robustos, pois eles conseguem garantir a estabilidade ou o desempenho mesmo na ocorrência de incertezas entre o modelo e a estrutura real [36]. A robustez é uma propriedade desejada nos controladores usados para rejeição de vibrações, uma vez que o modelo modal usado para o projeto é composto apenas pelos modos que mais influenciam o sistema e a estrutura real possui infinitos modos de vibração [8].

A seqüência dos tópicos deste trabalho é iniciada pela piezeletricidade onde é apresentado o desenvolvimento dos materiais piezelétricos ao longo da historia e as principais propriedades dos transdutores utilizados neste trabalho. O terceiro deste trabalho aborda a modelagem matemática da estrutura com os transdutores afixados, o desenvolvimento deste assunto é fundamentado pelos capítulos de elementos finitos, análise modal e representação do sistema. A validação do modelo mecânico do sistema é apresentada no capítulo de análise modal experimental. Após a modelagem e sua validação o projeto do compensador e do controlador LQR é apresentado no capítulo 5. O capítulo 5 também apresenta o projeto de controladores H_{∞} juntamente com uma análise das incertezas do modelo. Os resultados das simulações dos controladores propostos nos capítulo 5 são apresentados no capítulo 6, o qual

também contém uma análise de robustez para o controlador H_∞ . No capítulo de conclusões os resultados obtidos em todas as etapas do projeto são discutidos e validados.

1.2 Estado da Arte

A idéia de controlar vibrações e ruídos de maneira ativa não é recente, a mesma tem origem na década de 1930 quando Paul Lueg idealizou um sistema de controle ativo para diminuir os ruídos em dutos de sistemas de refrigeração e aquecimento de grandes edifícios [xx]. Porém a presente revisão do estado da arte se iniciará em meados da década de 1960 quando os trabalhos mais notórios relativos ao controle ativo de vibrações começaram a ser publicados.

No final da década de 1970 os esforços dos pesquisadores se voltaram para a isolação ativa de vibração, este tipo de controle ativo consistia na substituição de sistemas de amortecimento passivos, compostos por elementos como amortecedores e molas, pelo amortecimento ativo composto por elementos hidráulicos, pneumáticos e eletromagnéticos que podiam ser acionados por sistemas de controle relativamente simples, como alocação de pólos [60]. Em se tratando da modelagem matemática dos isoladores ativos, a mesma era baseada em equações diferenciais dinâmicas obtidas analiticamente, as quais eram posteriormente escritas na forma de espaço de estados ou funções de transferências [60]. Essas formas de representação do sistema são posteriormente utilizadas para o projeto dos controladores [41][45].

A partir da década de 1980 os projetos de isoladores e suspensões ativas começaram a ser aprimorados através da utilização de novas técnicas de controle como o ótimo, estes projetos também começaram a ser aplicados em sistemas complexos que exigiam grande precisão no seguimento de referência como robôs e discos rígidos [40][49][48][52]. O artigo [53] é um exemplo da evolução dos isoladores ativos, aborda um exemplo de isolação ativa para prensas industriais utilizando um controlador “feedforward”. Neste a estrutura é fixada sobre o isolador o qual possui um atuador eletro-hidraulico que é controlado através de compensadores dinâmicos. Outra classe de suspensões ativas são aquelas que utilizam sistemas líquidos para promover o amortecimento, neste sistema os líquidos são carregados eletricamente e posteriormente atuados por um campo elétrico [43][54]. O trabalho [54] realiza o controle eletromagnético do filme de óleo que sustenta um rotor visando diminuir suas oscilações.

Também nos anos de 1980 os pesquisadores começaram a considerar novas alternativas de atuação como a magnética [42][50][58]. Nessa linha o trabalho [42] apresenta um controle ativo de vibração para sistemas rotativos utilizando bobinas magnéticas. O controle ativo magnético, como o utilizado neste trabalho, apresenta a vantagens de não necessitar de contato com a estrutura para a transferência de forças. Todavia para controlar satisfatoriamente o comportamento do dinâmico do rotor é necessário um controlador projetado a partir de um modelo matemático que represente as propriedades estruturais do sistema com elevada precisão [42]. Já o artigo [50] trata um problema similar ao abordado por [42] utilizando dois controladores PIDs digitais, formando um sistema de controle de realimentação cruzada da saída. O avanço introduzido por [50] foi considerar que o deslocamento do rotor no eixo x também promoveria um deslocamento no eixo y e vice-versa, deste modo com a realimentação cruzada dos deslocamentos de cada eixo, o sistema de controle tratou o problema de acoplamento dimensional das vibrações do rotor.

Com a introdução de atuadores magnéticos e posteriormente com a utilização de transdutores de estado sólido a modelagem da estrutura e o projeto do sistema de controle se tornaram ainda mais complexos. Metodologias de controle ótimo como o LQR e LQG passaram a ser constantemente utilizadas, e a partir da metade da década de 1980 com o surgimento da metodologia de projeto H_∞ a robustez às incertezas do modelo começou a ser considerada nos projetos de controle ativo.

A partir da década de 1990 a metodologia de elementos finitos (MEF) foi amplamente utilizada nos problemas de controle ativo. O MEF juntamente com a análise modal já promovia diversos avanços na área de vibrações, facilitando o entendimento do comportamento dinâmico de estruturas complexas através da obtenção de suas frequências e formas modais [14][40]. Para o controle passivo o MEF juntamente com a análise modal fornece a previsão de como será a distribuição das frequências modais do sistema quando sua forma e material são mudados ou quando um sistema de amortecimento é acoplado na estrutura. Porém para o controle ativo essas ferramentas possibilitam ao projetista conhecer as faixas de frequência que os esforços de controle serão direcionados majoritariamente e deste modo dimensionar os atuadores de maneira mais apropriada. Além disso, o MEF pode ser usado para gerar modelos na forma de espaço de estados e funções de transferência e posteriormente os mesmos podem ser reduzidos através de técnicas derivadas da análise modal, então se observa que essas ferramentas não revolucionaram apenas a maneira de se

analisar os problemas de vibração, mas também a forma de obtenção modelos para o projeto de controladores ativos [14][17].

A partir da década de 1990 essa técnica de modelagem foi amplamente usada, principalmente para projetos de controle ativo envolvendo dispositivos de estados sólidos como os piezelétricos, eletrostrictivos e magnetostrictivos [17][18][21].

Os transdutores de estado sólidos foram extensivamente utilizados em controle de vibração a partir da década de 1990, dentre esses dispositivos destaca-se o piezelétrico. A grande difusão do piezelétrico na área de vibração se deve principalmente ao seu elevado acoplamento eletromecânico, por isso antes mesmo desses materiais, serem usados em aplicações específicas de controle ativo os mesmos já vinham sendo usados na área de vibração em acelerômetros e microfones [1].

Com a melhoria das cerâmicas piezelétricas foi possível utilizar essas matérias não somente como sensores, mas também como atuadores. Pois os coeficientes piezelétricos dessas cerâmicas eram cerca de 100 vezes maiores que dos materiais piezelétricos naturais como os cristais de quartzo [1][6]. Além disso, essas cerâmicas possibilitavam a produção de transdutores de praticamente todos os formatos, enquanto que para os cristais piezelétricos naturais as formas possíveis são limitadas e obtidas por complexos processos de lapidação. Dentre as cerâmicas piezelétricas se destacam o PZT (Titanato Zirconato de Chumbo) e PVDF, ambas normalmente utilizadas no formato laminar para aplicações de controle ativo.

Diversos trabalhos utilizaram transdutores piezelétricos em aplicações de controle ativo a partir da década de 1990. O artigo [39] aborda esse problema para uma viga simplesmente engastada, este trabalho utilizou uma lamina de PZT fixada próxima ao como atuador e uma fibra ótica fixada nas bordas da estrutura foi usada como sensor captando a evolução dos modos de vibração da estrutura. O trabalho [39] propõe uma modelagem não linear da estrutura, posteriormente uma análise de seus pontos de equilíbrio serve como base para o projeto de um compensador para reduzir as vibrações da estrutura.

Já o artigo [42] utiliza dispositivos piezelétricos para um controle híbrido das vibrações torcionais de um eixo, o termo híbrido denota a utilização conjunta da abordagem passiva e ativa. Sendo o controle híbrido do trabalho [42] realizado através de um dispositivo formado por duas lâminas piezelétricas com uma camada viscoelástica entre elas, o dispositivo formado pelos piezelétricos e o viscoelástico é então fixado ao redor do eixo cujas vibrações se deseja reduzir. O piezelétrico localizado na parte inferior serve como sensor enquanto o piezelétrico localizado na parte superior como atuador, o sinal do sensor é

realimentado e usado para controlar o atuador, a parte passiva do controle é realizada pelo material viscoelástico que aumenta o amortecimento da estrutura.

A modelagem em elementos finitos foi disseminada em aplicações de controle ativo com transdutores piezelétricos após a publicação do artigo [5], esse trabalho descreve o fenômeno da piezeletricidade para um elemento piezelétrico sólido de 8 nós. Sendo que a formulação em elemento finito sólido piezelétrico é obtida através do método variacional e pelo principio de Hamilton. Após formulado o elemento piezelétrico as matrizes globais da estrutura com os transdutores piezelétricos pode ser obtidas e através dessas matrizes um sistema de equações nodais é obtido. O trabalho[5] ainda propõe o controle de vibrações de uma placa com suas faces cobertas por lâminas piezelétricas, sendo que uma das lâminas é o sensor e a outra o atuador e estão ligadas por um controlador.

O trabalho [17] trouxe um grande avanço para obtenção de modelos de estruturas com piezelétricos acoplados, criando uma metodologia de modelagem para esses sistemas e facilitando assim o projeto de controle ativo envolvendo os transdutores piezelétricos. Posteriormente trabalhos como [55][56][57][8][9] seguiram a metodologia de modelagem proposta por [17] porém também utilizaram a redução modal visando reduzir as dimensões das matrizes nodais do sistema. Sendo a viga simplesmente engastada com transdutores piezelétricos fixados perto do engaste o caso de estudo mais utilizado nestes trabalhos, o artigo [57] propõe um compensador em avanço como controlador para esta estrutura. Já os artigos [55][56] testa abordagens de projeto ótimas como o LQR e LQG para o problema da viga, nos artigos [4] e [5] os projetos ótimos introduziram a vantagem da priorização da redução das vibrações em uma determinada faixa de frequência.

Atualmente a grande maioria dos trabalhos em controle ativo usando piezelétricos utiliza a metodologia de modelagem proposta em [17] e métodos de projeto de controle robustos como o H_2 e o H_∞ . Esses trabalhos tentam minimizar a influência da desconsideração de alguns modos de vibração na confecção do modelo do sistema, ou seja, o controle robusto possibilita reduzir a influencia das vibrações sobre o sistema mesmo quando um modelo com incertezas é utilizado no projeto do sistema de controle. Diversos trabalhos foram realizados utilizados essa ótica de projeto [7][8] [36].

Pelos trabalhos publicados nos últimos três anos espera-se que os esforços dos pesquisadores deste ramo se mantenha na modelagem de sistemas utilizando o MEF e reduções modais, na utilização de transdutores de estado sólido e em abordagens de controle

robustas que minimizem a influência das incertezas do modelo no desempenho do controlador.

CAPÍTULO 2 PIEZELETRICIDADE

2.1 Piezeletricidade

A piezeletricidade é um fenômeno presente em alguns materiais sendo caracterizada pelo acoplamento eletromecânico dos mesmos. Formalmente esse fenômeno pode ser definido como uma interação eletromecânica entre o estado mecânico e elétrico de cristais sem um centro de simetria [1].

Existem duas manifestações da piezeletricidade, o efeito direto que surge quando uma deformação mecânica do material produz uma mudança proporcional na sua polarização elétrica. E o efeito inverso que ocorre quando uma tensão elétrica é aplicada no material causando uma deformação mecânica no mesmo. Esses efeitos (Figura 2.1) são originados pela assimetria dos centros de carga dos piezelétricos. Devido a isso os dipolos deste tipo de material se alongam ou se contraem quando submetidos a um campo elétrico. A alteração nas dimensões do material ocorre devido à alteração dos comprimentos dos dipolos elétricos pela formação de gradientes de tensão elétrica. Por outro lado quando se submete materiais desse tipo a uma tensão mecânica seus dipolos são deslocados da posição de equilíbrio provocando a alteração do diferencial de carga ao longo do cristal [2], gerando cargas opostas nas faces do cristal que podem ser posteriormente traduzidas em tensão elétrica através de dispositivos especiais.

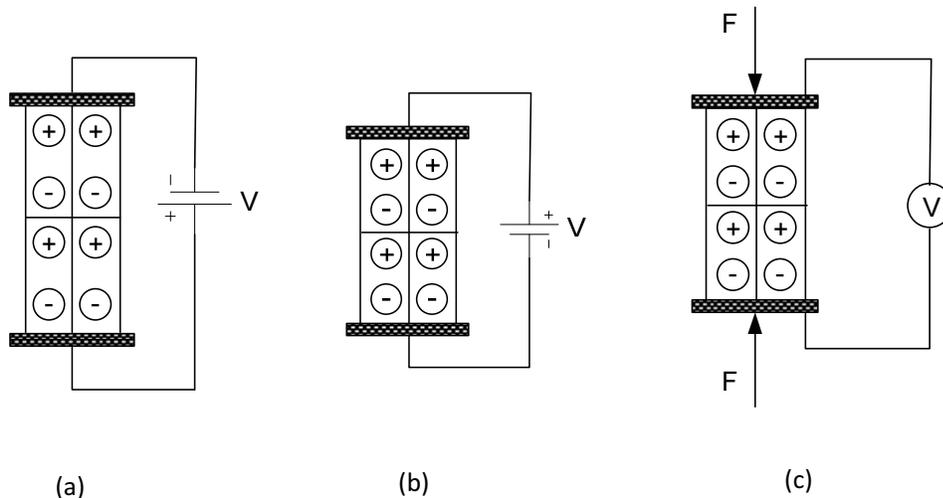


Figura 2.1 - (a) Efeito direto da piezeletricidade: Um campo elétrico provoca o alongamento do material. (b) Efeito direto da piezeletricidade: Um campo elétrico provoca a contração do material. (c) Efeito inverso da piezeletricidade: A compressão do material provoca o surgimento de cargas elétricas.

2.1.1 História da Piezeletricidade

Desde tempos remotos os povos da Índia e do Ceilão observavam fenômenos peculiares em cristais de turmalina, esses cristais quando lançados em cinzas quentes exerciam uma forte atração nas partículas ao seu redor, porém passado alguns instantes essas particular eram repelidas.

Comerciantes holandeses trouxeram esse fenômeno juntamente com os primeiros cristais de turmalina para Europa por volta de 1703, onde a turmalina era freqüentemente chamada de “ímã do Ceilão”[1]. Embora a natureza elétrica desse fenômeno tenha sido provada somente em 1756 por Aepinus, que observou as polaridades opostas nos estaremos da turmalina aquecida, já em 1747 Linnaeus havia batizado a turmalina com o nome científico de “Lapis electricus”. O efeito descrito por Aepinus foi posteriormente nomeado de “Pyroeletricidade” em 1824. A Figura 2.2 mostra um cristal de turmalina lapidado.

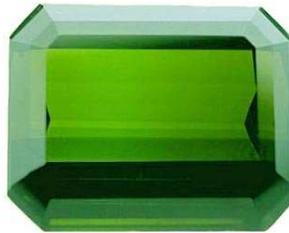


Figura 2.2 - Cristal de turmalina

Já a primeira tentativa de se obter uma relação entre a tensão mecânica e polarização elétrica foi realizada por Haüy e Becquerel, mas seus resultados não foram conclusivos. Pois as configurações experimentais da época eram propensas a sofrerem perturbações devido a triboeletricidade produzida na isolação, a qual normalmente era implementa com âmbar [1].

Apesar dos esforços de Haüy e Becquerel o efeito direto da piezeletricidade foi descoberto pelos irmãos Pierre e Jacques Curie e foi anunciada pela primeira vez durante a sessão da “Académie des Sciences” de Paris em 02/08/1880. Os irmãos relataram a relação entre tensão mecânica e polarização em alguns materiais, porém o termo piezelétrico ainda não tinha sido criado. Seus experimentos foram feitos utilizando blenda de zinco, clorato de sódio, borato, quartzo, calamina, topázio, ácido tartárico, cana de açúcar e sal de Rochelle, a Figura 2.3 ilustra a blenda de zinco.

Os irmãos Curie contribuíram grandemente no desenvolvimento da física do estado sólido, devido aos estudos sistemáticos da simetria de cristais e das propriedades de cada configuração [1].



Figura 2.3 - Blenda de Zinco

Em 1881 Lippmann previu a existência do efeito piezelétrico inverso baseando-se em conceitos da termodinâmica. Os irmãos Curie confirmaram a suspeita de Lippmann no mesmo ano. Após a confirmação da previsão de Lippmann o cientista Hankel propôs o termo piezeletricidade o qual foi aceito prontamente pelos estudiosos do ramo. O trabalho desenvolvido pelos irmãos Curie encontrou campo fora da França e despertou o interesse de físicos famosos da época como Röntgen, Kundt, e Riecke que começaram a realizar pesquisas piezeletricidade [1][4].

Todavia, por mais de 30 anos a piezeletricidade permaneceu como objeto de pesquisa científica sem qualquer aplicação prática. Quando na primeira guerra mundial uma maneira de detectar submarinos estava sendo procurada, então Langevin concebeu a idéia de excitar eletricamente placas de quartzo produzindo vibrações mecânicas através do efeito piezelétrico inverso provocando assim a emissão de ondas ultrasônicas subaquáticas. As ondas ultrasônicas refletiriam em objetos na água ou no fundo do mar e retornariam para o emissor, que utilizaria o efeito piezelétrico direto para detectá-la. Após a primeira guerra mundial os materiais piezelétricos puderam ser utilizados como elementos transdutores em sensores de força, pressão e vibração.

2.1.2 Aplicações de Materiais Piezelétricos

Materiais piezelétricos têm sido utilizados nas mais diversas áreas, como na instrumentação médica, robótica, aeroespacial, construção civil, instrumentação industrial, fabricação de semicondutores, controle de vibrações e defesa. Como mencionado na seção anterior a primeira aplicação da piezeletricidade foi realizada através do efeito inverso para gerar ondas ultrasônicas na primeira guerra mundial. Esta aplicação despertou a curiosidade de Cady que posteriormente dedicou sua vida inteira ao estudo da piezeletricidade. Já em 1918 Cady relatou peculiaridades no comportamento elétrico de placas do sal de Rochelle, permitindo a utilização dessas como sinalizadores subaquáticos nas vizinhanças de sua frequência de ressonância. Com essa aplicação Cady descobriu o princípio do oscilador piezelétrico sugerido em 1921 que é usado para estabilizar a frequência de rádio transmissores e na implementação filtros de frequência [1].

Atualmente existe uma grande diversidade de produtos que utilizam materiais piezelétricos, vários sistemas e equipamentos comerciais possuem dispositivos piezelétricos como peças chaves, dentre eles pode-se citar; bombas, impressoras jato de tinta, ignitores, motores lineares de câmeras fotográficas, etc [3].

Outra área de aplicação dos piezelétricos é da geração de energia, neste caso transdutores são utilizados para converter energia mecânica em elétrica. Um exemplo desse tipo de aplicação é uma solução que aproveita a própria vibração de motores, peças móveis ou que apresentem oscilações para gerar energia [1] [3].

Materiais piezelétricos também vêm revolucionando o campo da robótica devido à viabilização de músculos artificiais que simulam os movimentos humanos. O mesmo princípio também está sendo utilizado em próteses inteligentes, nas quais sensores captam a atividade dos nervos transmitindo-a para uma prótese, estimulando assim a ação do músculo artificial. A Figura 2.4 mostra um robô com músculos artificiais.



Figura 2.4 - Robô com músculos artificiais

A capacidade de acoplamento eletromecânico, bem como a rápida velocidade de resposta e fácil acionamento, através de controle de tensão elétrica, tornaram os materiais piezelétricos alvo de pesquisas na área controle ativo de vibrações. Na qual esses materiais desempenharam nas últimas décadas a função de sensor e atuador. O controle ativo difere da abordagem clássica de controle de vibrações denominado passivo, porque enquanto essa procura reduzir a vibração do sistema pela mudança de características intrínsecas da estrutura como massa e amortecimento, o controle ativo monitora a vibração da estrutura e injeta energia para reduzir suas vibrações.

A abordagem ativa é implementada através de uma malha de controle, composta basicamente por três dispositivos: controlador, sensor e atuador. O sensor tem a função de medir as vibrações da estrutura, através da medição feita pelo sensor e de um algoritmo previamente implementado o controlador gera um sinal que acionará o atuador que por sua vez injetará energia no sistema visando a diminuição das vibrações na estrutura. Os sensores e atuadores piezelétricos são fixados na estrutura que se deseja controlar, fazendo assim parte integral da mesma.

Comercialmente, existem diversos produtos que realizam o controle ativo de vibrações dentre os quais pode-se citar o *Active Tuned Vibration Attenuators (ATVA)* da empresa *Ultra Eletronics Ltd* (1999). Esse produto é composto por controladores e transdutores piezelétricos, sendo acoplado diretamente na fuselagem de aeronaves.

2.2 Equações Piezelétricas

Após ser feita uma abordagem qualitativa nas seções anteriores, cujo objetivo foi apresentar as definições de piezeletricidade e dar exemplos da sua aplicação, esta seção tratará das equações constitutivas dos materiais piezelétricos as quais posteriormente servirão de base para o entendimento da dinâmica dos transdutores.

Para ingressar na descrição matemática desse fenômeno torna-se necessária uma breve explanação sobre algumas relações do eletromagnetismo. Considere o momento dipolar elementar \vec{H}_i como sendo o momento dipolar entre cada par de dipolos mostrados na Figura 2.5 e representados matematicamente pela Equação 2.1:

$$\vec{H}_i = Q_i \vec{f} \quad (2.1)$$

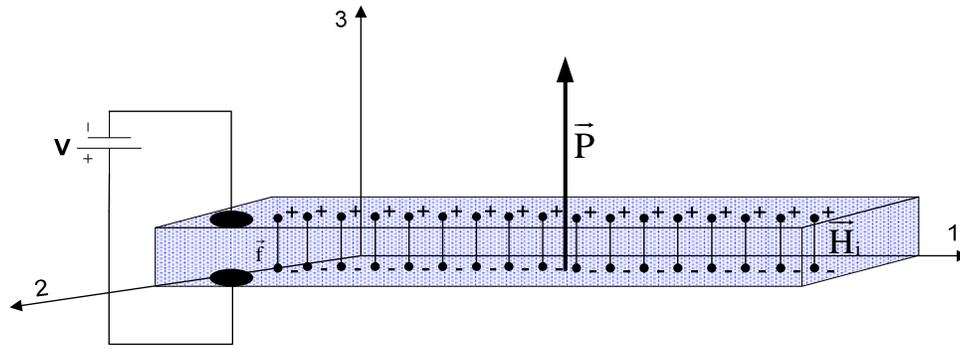


Figura 2.5 - Material piezoeletrico polarizado

onde Q_i é a carga positiva do dipolo e \vec{f} é a forma vetorial da distância entre a carga positiva e a carga negativa. Transcrevendo a definição de momento dipolar para a escala macroscópica, imagine uma estrutura cristalina de volume $\overline{\Delta S}$ sujeita a pressão, criando assim a aparição de um momento dipolar global \vec{H} em seu interior, o qual é composto pelo somatório das parcelas de momentos dipolares elementares, descrito pela Equação 2.2.

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{n\Delta S} \vec{H}_i \quad (2.2)$$

A partir do momento dipolar global pode-se descrever matematicamente a polarização através da Equação 2.3.

$$\vec{P} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \sum_{i=1}^{n\Delta S} \vec{H}_i \quad (2.3)$$

onde \vec{P} é um campo vetorial contínuo. A Figura 2.5 ilustra a definição de polarização e dipolo elétrico [5].

As cargas do dielétrico que formam os dipolos elétricos não são livres, desse modo não contribuem para o processo de condução, mas ao contrário elas são ligadas por forças atômicas e podem apenas sofrer pequenos deslocamentos em respostas às forças externas. Essas cargas são denominadas de “cargas de polarização” Q_p . Interpretando $\overline{\Delta S}$ como elemento de uma superfície fechada é possível obter o acréscimo líquido nas cargas de polarização dentro da superfície fechada através da Equação 2.4 [5].

$$Q_P = - \int_S \bar{P} \cdot dS \quad (2.4)$$

A carga total em uma dada superfície pode ser representada pela Equação 2.5:

$$Q_T = - \int_S \epsilon_0 \bar{E} \cdot dS \quad (2.5)$$

onde \bar{E} é o campo elétrico atuando sobre o dielétrico e ϵ_0 é a sua permissividade elétrica no vácuo. A carga livre pode ser expressa da seguinte forma:

$$Q_L = - \int_S \bar{D} \cdot dS \quad (2.6)$$

Sendo \bar{D} o deslocamento elétrico. Pelas definições de carga livre, carga de polarização e carga total, pode-se descrever o deslocamento elétrico em termos de polarização e campo elétrico, como mostra a Equação 2.7 [5].

$$Q_L = Q_T - Q_P = \int_S (\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) \cdot dS \quad (2.7)$$

Comparando a Equação 2.7 e 2.6 se obtém a relação que descreve o deslocamento elétrico mostrado a seguir:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad (2.8)$$

O deslocamento elétrico da equação pode ser representado apenas pela permissividade elétrica do material e pelo campo elétrico, para tal torna-se necessário obter uma relação entre polarização e campo elétrico [5].

$$\bar{P} = (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 \bar{E} \quad (2.9)$$

Onde ϵ_R é a permissividade relativa do material e ϵ a permissividade do material. Substituindo a Equação 2.9 em 2.8 obtêm-se a Equação 2.10:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \epsilon_R \bar{E} = \epsilon \bar{E} \quad (2.10)$$

Considerando o caso de uma análise tridimensional \bar{D} e \bar{E} podem ser representados pelos seguintes vetores:

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} ; \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Da teoria eletromagnética sabe-se que a polarização elétrica induzida para o caso de um dielétrico dependerá do tipo de dielétrico e do campo elétrico no interior do material, porém para o caso de piezelétricos, devido ao acoplamento eletromecânico, a polarização induzida também dependerá dos esforços exercidos sobre o material. Se as variáveis envolvidas na descrição do fenômeno piezelétrico forem separadas em variáveis mecânicas e elétricas será observado que as variáveis elétricas são campo elétrico \bar{E} e deslocamento elétrico \bar{D} ; já as variáveis mecânicas envolvidas são tensão $\bar{\sigma}$ e deformação $\bar{\epsilon}$ [2][5].

Para materiais elásticos que não possuem propriedades piezelétricas podemos utilizar a lei de Hooke para relacionar o vetor das deformações $\bar{\epsilon}$ com o vetor de tensões mecânicas $\bar{\sigma}$.

$$\bar{\epsilon} = \bar{\sigma}[s] \quad (2.12)$$

Onde [s] é a matriz de elasticidade e os vetores de deformação e tensão mecânica podem ser representados pelas seguintes notações [11]:

$$\bar{\epsilon} = [\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \gamma_{12} \ \gamma_{23} \ \gamma_{31}]^T \quad (2.13)$$

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \tau_{12} \ \tau_{23} \ \tau_{31}]^T \quad (2.14)$$

Para o caso específico de materiais piezelétricos, devido a interação dos fenômenos elétricos e mecânicos, a Equação 2.12 e 2.10 não podem ser usadas independentemente para a descrição das grandezas mecânicas e elétricas. As equações que descrevem o comportamento dos piezelétricos possuem as variáveis elétricas e mecânicas acopladas e são obtidas através da primeira e segunda lei da termodinâmica [6]. Na Tabela 2.1 estão apresentadas as equações da piezeletricidade, as quais podem ser escritas de diferentes

maneiras, possuindo assim diversas formas equivalentes que diferem entre si unicamente pela escolha das variáveis acopladas[1][8].

Tabela 2.1 – Formas equivalentes das equações da piezeletricidade

Variáveis Acopladas	Equações do comportamento
(σ, \bar{E})	$\bar{D} = [d]\sigma + [\epsilon^\sigma] \bar{E}$ $\epsilon = [s^E]\sigma + [d]^T \bar{E}$
(σ, \bar{D})	$\bar{E} = -[g]\sigma + [\epsilon^\sigma]^{-1} \bar{D}$ $\epsilon = [s^D]\sigma + [g]^T \bar{D}$
(ϵ, \bar{E})	$\bar{D} = [e]\epsilon + [\epsilon^\epsilon] \bar{E}$ $\sigma = [c^E]\epsilon - [e]^T \bar{E}$
(ϵ, \bar{D})	$\bar{E} = -[h]\epsilon + [\epsilon^s] \bar{D}$ $\sigma = [c^D]\epsilon - [h]^T \bar{D}$

Sendo que na tabela acima as matrizes $[c]$, $[s]$ são matrizes de rigidez e elasticidade respectivamente, as mesmas possuem dimensões (3×6) , $[\epsilon]$ é a matriz das constantes dielétricas de dimensão (3×3) . Já as matrizes $[e]$, $[d]$, $[g]$ e $[h]$ são de constantes piezelétricas e possuem dimensão (3×6) . Os sobrescritos $()^E$, $()^D$, $()^\sigma$ e $()^\epsilon$ sinalizam que as propriedades do material foram obtidas para campo elétrico constante, deslocamento elétrico constante, tensão mecânica constante e deformação constante. A notação $()^T$ denota a operação transposição matricial. As matrizes das equações da tabela 2.1 apresentam as propriedades das equações (2.15), (2.16) e (2.17):

$$\begin{cases} [c^E][s^E] = [c^D][s^D] = I \\ [\epsilon^\sigma]^{-1}[\epsilon^s] = [\epsilon^s]^{-1}[\epsilon^\sigma] = I \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} [c^D] = [c^E] + [e]^T [h] \\ [s^D] = [s^E] + [d]^T [g] \\ [\epsilon^\sigma] = [\epsilon^\epsilon] + [d]^T [e] \\ [\epsilon^\epsilon]^{-1} = [\epsilon^\sigma] + [d]^T [e] \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} [e]=[d][c^E] \\ [d]=[\epsilon^\sigma][g] \\ [g]=[h][s^D] \\ [h]=[\epsilon^\epsilon]^{-1}[e] \end{cases} \quad (2.17)$$

As matrizes das propriedades piezelétricas do material possuem a forma esparsa, sendo que a distribuição dos elementos na matriz dependerá da classificação cristalográfica do material [1]. Para o caso dos transdutores cerâmicos utilizados neste trabalho, o PZT-5A e o PZT-5H pertencentes ao sistema cristalográfico tetragonal da classe 4mm, a configuração das matrizes das propriedades do material são apresentadas a seguir.

$$[s^E] = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$[d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$[\epsilon^\sigma] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^\sigma \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

2.3 Transdutores Piezelétricos

Como visto na seção de aplicações da piezeletricidade os materiais piezelétricos são amplamente utilizados como transdutores, estando presentes nas mais diversas áreas da engenharia. Transdutores são simplesmente dispositivos conversores de energia, os materiais piezelétricos são transdutores eletromecânicos, pois convertem energia mecânica em elétrica e vice versa. Os transdutores podem ser classificados em duas grandes classes, a dos sensores e dos atuadores.

Pode-se definir sensor como um dispositivo que transforma uma variável do mundo externo em entrada para um sistema, por exemplo um sensor de pressão transforma a pressão (variável do mundo externo) em carga elétrica (variável de entrada do sistema). Já o atuador transforma uma variável de saída do sistema em ações para o mundo real. No caso dos transdutores piezelétricos será visto posteriormente que sensores e atuadores possuem condições de contorno elétricas distintas.

As cerâmicas piezelétricas compõem uma classe importante de transdutores piezelétricos, essa classe se destaca no âmbito industrial devido ao seu baixo custo de fabricação e grande versatilidade, ao longo dessa seção serão abordadas algumas características dessas cerâmicas.

2.3.1 Cerâmicas Piezelétricas

Atualmente, a maioria dos materiais piezelétricos é fabricado industrialmente e não extraídos diretamente da natureza na forma de cristais. As cerâmicas piezelétricas representam uma grande família desses materiais, sendo que sua utilização cresceu intensamente nas ultimas décadas. A intensa utilização das cerâmicas piezelétricas se deve principalmente ao seu baixo custo de fabricação e aos seus elevados coeficientes piezelétricos. A produção e o processamento de cerâmicas apresentam menor custo, além de ser mais rápido que o crescimento, corte e usinagem de cristais simples. As cerâmicas podem ser facilmente produzidas em larga escala com uma variedade quase ilimitada de formatos, requerendo para isso um mínimo de usinagem. Outra clara vantagem das cerâmicas piezelétricas são os seus elevados coeficientes piezelétricos, os quais são centenas de vezes maiores que os observados em cristais simples o que se traduz em transdutores com alta sensibilidade, ou seja, os dispositivos cerâmicos apresentam elevada relação entre tensão elétrica e deformação mecânica e vice versa [3] [7].

Em contrapartida as cerâmicas apresentam algumas desvantagens em relação aos cristais, a maioria relacionada com a temperatura de operação. Materiais ferroelétricos possuem propriedades eletromecânicas fortemente dependentes da temperatura, devido a isso as cerâmicas piezelétricas são extremamente limitadas por essa variável, sendo a temperatura limite de operação dessas cerâmicas denominada de temperatura de Curie, acima da qual o material perde sua polarização e conseqüentemente as propriedades piezelétricas. Outro fenômeno desfavorável que ocorre com as cerâmicas é o envelhecimento, sendo caracterizado

pela perda progressiva da sensibilidade do transdutor, resultado da despolarização da cerâmica [7][8].

As ferrocerâmicas mais utilizadas atualmente são aquelas constituídas pela mistura sólida de $PbZrO_3$ e $PbTiO_3$, conhecidas como titanato zirconato de chumbo (PZT). Cerâmicas compostas por essa mistura podem ser facilmente polarizadas apresentando desse modo uma grande sensibilidade piezométrica originária dos valores dos seus coeficientes piezométricos. As propriedades termo físicas dessa cerâmica também são satisfatórias, o PZT apresenta a temperatura de Curie na ordem de 300° . Devido a elevada sensibilidade piezométricas, estabilidade térmica satisfatória e a forma laminar que facilita a fixação do dispositivo, o PZT torna-se uma boa opção de transdutores para controle ativo de vibrações [9].

Outra característica importante das cerâmicas piezométricas é o modo de atuação do elemento, o qual tem influência direta nos resultados obtidos pelos transdutores e esta ligada as propriedades constitutivas do material. No caso do atuador os modos de atuação indicam a maneira que o material se deformará devido a um determinado sentido de aplicação do campo elétrico. Já no caso do sensor o modo de atuação influenciará na sua sensibilidade de medição para um determinado tipo de deformação. Devido a esses fatores torna-se necessária uma breve explanação sobre os modos de atuação das cerâmicas piezométricas.

2.3.2 Modos de Atuação dos Materiais Piezométricos

Os modos de atuação dos materiais piezométricos dependem de suas propriedades intrínsecas as quais definem a matriz de acoplamento eletro-mecânico do material a qual por sua vez definirá a maneira que o transdutor responderá a deformações em um determinado sentido e aplicação de campo elétrico com uma dada orientação [6]. As propriedades que regem a piezeletricidade, representadas basicamente pelas matrizes 2.18, 2.19 e 2.20, são anisotrópicas, ou seja, variam conforme a direção, devido a essa peculiaridade deve-se definir um sistema de orientação, no qual propriedades do transdutor piezométrico estarão definidas. A Figura 2.6 define um sistema de coordenadas no elemento piezométrico, onde o eixo 1 equivale ao eixo x, o eixo 2 ao y e o eixo 3 ao z. O vetor \vec{P} representa o sentido de polarização o qual é paralelo ao eixo 3 do sistemas de coordenadas.

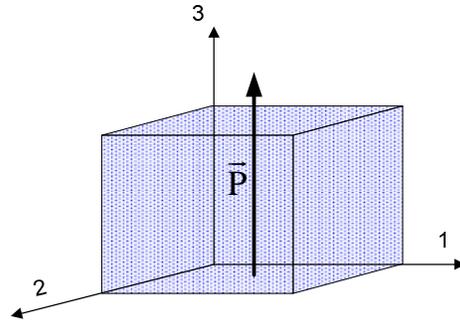


Figura 2.6 - Sistema de coordenadas definida no elemento piezelétrico

Como mencionado anteriormente o transdutor utilizado neste trabalho é composto pelo PZT-5A, o qual possui a matriz de acoplamento piezelétrica da Equação 2.21.

$$[d]= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 584 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 584 & 0 & 0 \\ -171 & -171 & 374 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

A unidade da matriz 2.21 é $\rho C/N$ e os elementos d_{31} e d_{15} são relacionados aos modos de atuação transversal e cisalhante respectivamente, já d_{33} é responsável pelo modo de atuação paralelo [10].

A Figura 2.7 ilustra uma lâmina cerâmica piezelétrica sobre efeito do modo de atuação transversal, é valido notar que a lamina possui dimensão significativamente menor na direção do eixo 3. Neste caso as deformações predominantes ocorrerão nas direções de 1, isso considerando que a direção de polarização seja paralela ao eixo 3. O comprimento da deformação pode ser obtido por $\Delta L=d_{31} \frac{\phi}{h}$, sendo h a espessura da lâmina e ϕ a diferença de potencial elétrico aplicado no sentido do eixo 3 [6].

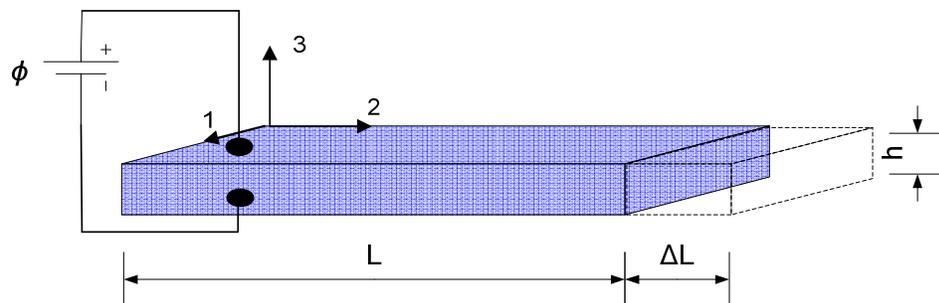


Figura 2.7- Modo de atuação transversal de um transdutor piezelétrico

A Figura 2.8 mostra um transdutor em pilha a qual é formado pela sobreposição de diversos discos piezelétricos, com essa configuração se obtém o modo de atuação paralelo, cujas deformações predominantes ocorrem no sentido da polarização. O módulo do deslocamento da deformação da pilha pode ser obtida por $\Delta L = d_{33} n \phi$, onde n é número de elementos na pilha [6].

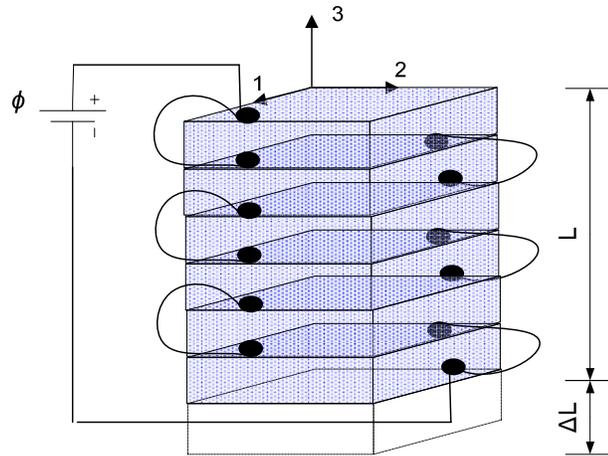


Figura 2.8 - Modo de atuação paralelo de um atuador na configuração de pilha

No modo de atuação cisalhante o transdutor faz uso do cisalhamento em seu deslocamento. O sentido de polarização é na direção do eixo 3 e o transdutor se deforma na prioritariamente na direção do eixo 1 da maneira ilustrada na Figura 2.9. O módulo de sua deformação pode ser estimado através de $\Delta h = d_{15} \frac{\phi}{h} L$.

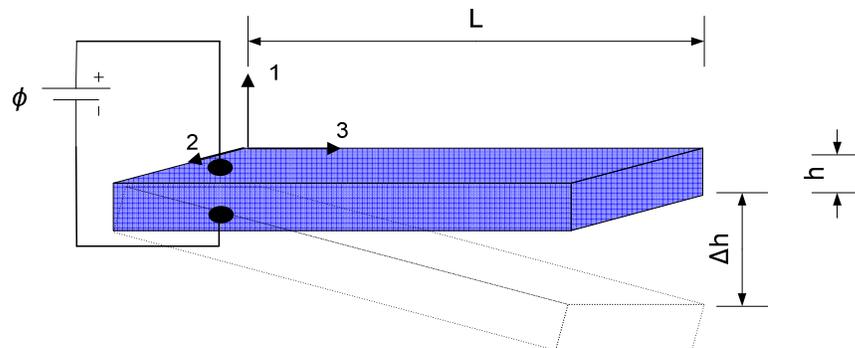


Figura 2.9 - Modo de atuação cisalhante do transdutor piezelétrico

2.3.3 Sensor piezelétrico

Sensores piezelétricos são caracterizados por possuir o elemento transdutor formado por materiais piezelétricos, esses sensores são amplamente utilizados, dentre os seus diversos usos destacam-se a medição de pressão, vibração, aceleração, emissão acústica, força, torque e deformação [6].

A saída dos sensores piezelétricos é carga elétrica cuja unidade “Coulomb” (C) , definido como $1C=1A.s$. A quantidade de carga elétrica fornecida pelos sensores piezelétricos é normalmente da ordem de ρC , por essa razão a unidade de trabalho para dispositivo piezelétricos é adotado como sendo ρC [3].

Os sensores de modo geral podem ser classificados em dois grupos, os ativos e os passivos. Sensores ativos não necessitam de fonte externa de energia para a produção do sinal de saída, já os passivos precisam de fonte externa para geração do sinal medido. Os sensores piezelétricos pertencem ao pequeno grupo de sensores ativos, e assim em princípio eles não requerem uma fonte externa de potência para produzir um sinal de saída. Isso pode ser demonstrado com o clássico eletrômetro “folha de ouro” ilustrado na figura 2.10. Sendo que α , o ângulo de afastamento entre as duas folhas, é proporcional a tensão de U_o a qual por sua vez é proporcional a carga Q . Estando esta relacionada com a força F [1].

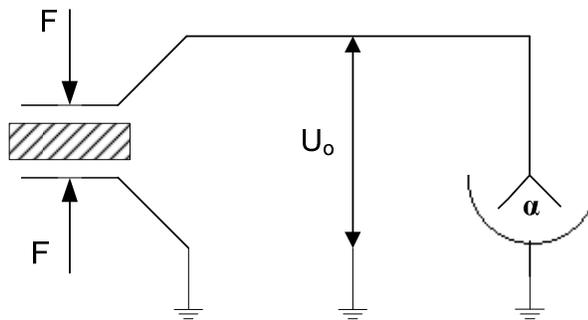


Figura 2.10 - Eletrômetro folha de ouro

Para quantificar a relação entre força e tensão elétrica considere um sensor piezelétrico com sensibilidade $d_{11} = 2.3 \frac{\rho C}{N}$, sujeito a uma força de 1kN e com capacitância

de $10\rho F$, para essas variáveis a tensão de saída será: $U_o = \frac{\left[\left(2.3 \frac{\rho C}{N} \right) \cdot (1kN) \right]}{10\rho F} = 230 V$. Como

mostrado nesse simples exemplo a voltagem em malha aberta desse tipo de sensor pode alcançar centenas de volts [1].

A modelagem elétrica de um sensor piezométrico é a mesma de um capacitor com o elemento piezométrico atuando como dielétrico, porém neste caso o dielétrico apresenta propriedades piezométricas, o capacitor pode ser considerado ativo, ou seja, que se alto carrega eletricamente quando solicitado mecanicamente. A carga elétrica é normalmente armazenada no capacitor através de diferença de potencial elétrico, obedecendo à seguinte relação $U_o = \frac{Q}{C}$.

Para um capacitor carregado com uma carga elétrica Q a uma tensão U_o , esse manteria a voltagem U_o entre suas placas por tempo infinito, se o capacitor tivesse resistência de isolamento infinitamente alta. Porém como na prática é impossível a obtenção de tal resistência,

ocorre o surgimento de uma corrente de fuga $I = \frac{U_o}{R}$, a qual flui através da resistência finita

R fazendo com que a tensão U_o decresce exponencialmente para zero com o passar do tempo [1][2][5]. Desse modo a dinâmica da tensão no capacitor pode ser representada pela equação exponencial 2.22:

$$U(t) = U_o e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.22)$$

onde τ é a constante de tempo e indicará a velocidade que um capacitor descarregará, quanto maior for a constante de tempo do sistema maior será o tempo em que o capacitor reterá a carga, e conseqüentemente menor será sua variação da tensão ao longo do tempo. A constante

de tempo pode ser entendida da seguinte maneira, se a corrente de fuga inicial $I = \frac{U_o}{R}$

continuasse a fluir inalteradamente o capacitor descarregaria após $t = \tau = RC$. Isso pode ser facilmente observando através da Figura 2.11 pela reta que passa por U_o e tangencia a curva exponencial de descarga, essa reta é denominada reta de carga. Na realidade o tempo de descarga total de um capacitor é indefinido, pois sua representação é dada por uma função exponencial que tende a zero de maneira assintótica quando o tempo tende a infinito [5][6].

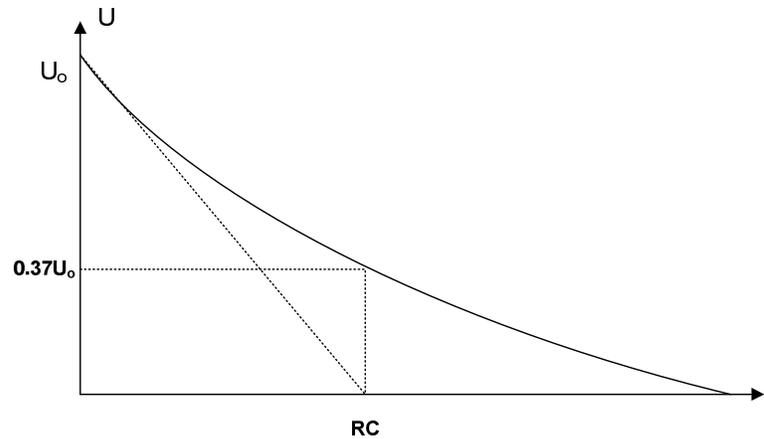


Figura 2.11- Curva de carga de um capacitor

Como mencionado anteriormente a constante de tempo τ define a reta tangente inicial à curva de descarga do capacitor, a qual pode ser utilizada para determinar de maneira prática o tempo máximo de duração da medição do sensor piezelétrico. Para medições que durem entre $0 < t < 0.1\tau$ a reta tangente inicial é uma ótima aproximação para a curva de descarga. Permitindo determinar de maneira simples a duração máxima de uma dada medição sem erros consideráveis. Para um erro máximo de 2% o tempo de medição não deverá exceder 0.02τ [1].

Os parâmetros do sensor que interferem diretamente na constante de tempo são a resistência elétrica R e a capacitância C , a qual é composta pela capacitância do sensor, pela capacitância do cabo que é utilizado para conectar o sensor ao amplificador de carga e também pela capacitância do próprio amplificador de carga. A capacitância do sensor e do cabo são definidas pelo projeto do sensor e pelo tipo do cabo, não podendo assim ser alteradas. Somente a capacitância do amplificador de carga pode ser escolhida dentro de certos limites. O segundo parâmetro que determina a constante de tempo é a resistência R a qual está essencialmente relacionada com a resistência de isolamento dos materiais utilizados na confecção do sensor do cabo e também do amplificador de carga. Devido a isso para se obter grandes constantes de tempo materiais com alta resistência de isolamento devem ser utilizados. Embora em aplicações elétricas convencionais valores de isolamento na faixa de $100\text{M}\Omega$ já são considerados suficientes e até mesmo excelentes, os sistemas piezelétricos por sua vez necessitam de isolamento de pelo menos $1\text{T}\Omega$ se possível $10\text{T}\Omega$. Os altos valores de isolamento de dispositivos piezelétricos são necessários para se obter uma frequência limite inferior suficientemente baixa que viabilize a realização de medições quase estáticas [1] [6].

A realização de medições verdadeiramente estáticas implicaria em uma frequência de corte inferior nula, para isso a constante de tempo deve ser infinita, porém essas condições exigiriam uma resistência de isolamento infinita, infelizmente tal resistência não existe na prática. Esse é um dos motivos pelo qual medições verdadeiramente estáticas não podem ser realizadas por sensores piezelétricos [1][3]. Para sistemas de medição senoidal a frequência limite inferior é dada pela Equação 2.23 :

$$f_u = \frac{1}{2\pi\tau} \quad (2.23)$$

Nesta frequência limite a amplitude de uma onda senoidal é reduzida para $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de seu valor original, essa redução de 30% na amplitude da onda pode ser traduzida com um amortecimento de 3dB, além da atenuação na frequência limite inferior também ocorre uma defasagem de 45° entre o sinal de entrada e de saída. Para sistemas de medições erros de 30% e defasagens de 45° são obviamente inaceitáveis, logo para evitar imprecisões torna-se necessário estabelecer um critério para a escolha da constante de tempo de acordo com a frequência do sinal que se deseja medir. Um critério adotado na prática é escolher uma frequência limite inferior de 5 a 10 vezes menor que a menor frequência a ser medida, isso é feito através do ajuste da constante de tempo. Os sinais a serem medidos raramente são puramente senoidais, sendo assim a menor frequência contida no sinal deve ser o critério decisivo para a escolha da frequência limite inferior [1][2][3].

Como a entrada da maioria dos sistemas de aquisição de sinais é tensão elétrica, torna-se necessário a utilização de um dispositivo que converta a saída de carga elétrica do sensor em tensão. Para esse fim será utilizado um amplificador de carga, esse dispositivo será o assunto da próxima subseção.

2.3.4 Amplificador de Carga

A carga elétrica geralmente não é uma unidade bem compreendida como tensão e corrente elétrica, além disso, tendo em vista que o sinal medido será processado por um sistema de aquisição digital torna-se necessário a conversão de carga para tensão ou corrente elétrica. Para realizar a conversão de carga elétrica em tensão este trabalho utiliza-se um dispositivo denominado amplificador de carga. O termo “amplificador de carga” tem sido

amplamente utilizado há alguns anos, porém essa é uma denominação confusa, pois o mesmo não amplifica carga elétrica e sim converte carga em tensão. O termo “medidor de carga” é mais adequado para expressar o real funcionamento desse dispositivo, porém devido sua ampla difusão este trabalho continuará utilizando o termo amplificador de carga. O princípio de funcionamento do amplificador de carga foi descrito primeiramente por W.P Kistler em 1950. Basicamente um amplificador de carga é apenas um amplificador DC com um ganho interno tão grande quanto possível [1].

O princípio de operação de um amplificador de carga pode ser entendido a partir da Figura 2.12.

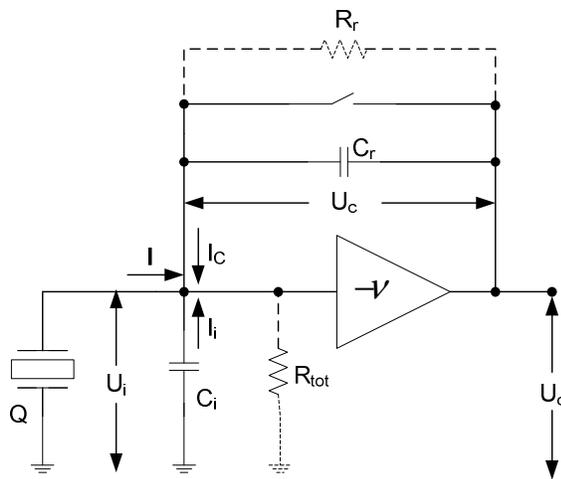


Figura 2.12 - Amplificador de carga

Considere que a relação entre tensão de entrada e saída é dada pela Equação 2.24.

$$U_o = -vU_i \quad (2.24)$$

onde v é o ganho tensão do amplificador operacional, R_r é a resistência de realimentação, C_r é a capacitância de realimentação, C_i é a capacitância de entrada e R_{tot} é a resistência de entrada do amplificador. A diferença de tensão sobre o capacitor de realimentação é dada por:

$$U_r = U_o - U_i = U_o + \frac{U_o}{v} = \left(1 + \frac{1}{v}\right)U_o \quad (2.25)$$

Considerando que não existem correntes de fuga na entrada do amplificador, aplicando a lei de Kirchoff se obtêm as seguintes relações para as correntes elétricas mostradas na Figura 2.12.

$$I + I_r + I_i = 0 \quad (2.26)$$

Sendo:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (2.27)$$

$$I_r = C_r \frac{dU_i}{dt} = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) C_r \frac{dU_o}{dt} \quad (2.28)$$

$$I_i = C_i \frac{dU_i}{dt} = \frac{1}{\nu} C_i \frac{dU_o}{dt} \quad (2.29)$$

A capacitância total do circuito de entrada é dada pela soma das capacitâncias do sensor, do cabo e da entrada do amplificador. Procedendo desse modo é possível escrever a corrente I da seguinte forma:

$$I = \frac{dQ}{dt} = - \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) C_r \frac{dU_o}{dt} - \frac{1}{\nu} C_i \frac{dU_o}{dt} \quad (2.30)$$

Após efetuar a integração da equação 2.30 e desprezar as constantes de integração encontra-se a seguinte relação que descreve a tensão de saída do amplificador de carga.

$$U_o = - \frac{Q}{\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) C_r + \frac{1}{\nu} C_i} \quad (2.31)$$

Considerando o ganho intrínseco do amplificador operacional infinitamente alto a Equação 2.31 é simplificada para a seguinte aproximação:

$$U_o = -\frac{Q}{C_r} \quad (2.32)$$

Como mostra a equação acima é possível observar que a saída de tensão U_o é agora diretamente proporcional a carga elétrica fornecida pelo sensor. No caso ideal onde o amplificador tem um ganho de tensão infinitamente alto, a tensão de entrada é $U_i = -\frac{U_o}{\nu} = 0$, isso significa que não haverá tensão através do sensor e do cabo. Outra consequência da tensão de entrada ser nula é a não existência de correntes que circulam pela resistência equivalente de entrada do circuito, logo para o caso ideal conclui-se que a resistência do sensor e do cabo não interfere no processo de medição.

Sendo assim na entrada do amplificador apenas a corrente originária da polarização das cargas elétricas no sensor e a corrente de carregamento do capacitor de realimentação estão presentes. Pela lei de Kirchhoff sabe-se que essas correntes são de magnitudes iguais, porém possuem sentidos opostos. Desse modo pode-se dizer que o amplificador de carga compensa continuamente a carga elétrica fornecida pelo sensor com uma carga igual, porém de polaridade oposta no capacitor de realimentação [3].

A dinâmica quase estática do amplificador é agora determinada apenas pela constante de tempo $\tau = R_r C_r$, a qual é regida pelo elemento capacitivo e resistivo do circuito de realimentação do amplificador de carga. Sendo a resistência R_r composta essencialmente pela resistência de isolamento do próprio capacitor de realimentação.

As seguintes vantagens do amplificador de carga podem ser citados [1]:

- Não existe tensão entre o sensor e o cabo, isso significa que a resistência de isolamento não é um parâmetro crítico.
- A capacitância de entrada do circuito, composta pela capacitância do sensor e do cabo, tem pouca influência na tensão de saída.
- Existe proporcionalidade entre a carga elétrica, tensão de saída e a grandeza que se deseja medir.
- A saída de tensão é inversamente proporcional a capacitância do capacitor de realimentação, permitindo a obtenção de faixas de tensão de saída convenientes.

Porém é válido salientar que na realidade os ganhos mais altos dos amplificadores operacionais estão na faixa de 100000 a 300000 , ou seja o ganho do amplificador é alto porém não é infinito. A resistência de entrada do AMP-OP também não é infinita, estando na faixa de 300TΩ [1].

2.3.5 Ponto Zero de Medição

Uma característica particular de sistemas de medições piezelétricos é a possibilidade da livre escolha do ponto zero para a medição. Em outras palavras o sistema de medição piezelétrico não tem um ponto de referência inerente, o qual deve ser definido intencionalmente antes de cada medição, esse ponto pode ser definido de forma manual resetando o amplificador após cada medição, ou de forma automática através de um circuito apropriado. O princípio da seleção e definição da referência pode ser melhor entendido utilizando como exemplo um sensor de força, se o sensor sofre um carregamento constante provocado por um peso que repousa sobre o mesmo, a voltagem $U_o = \frac{Q}{C} = 0$, (sendo Q a carga elétrica fornecida pelo sensor e C a capacitância equivalente do mesmo) que surge na saída do sensor decaíra para zero, transcorrido um certo tempo, pois a resistência de isolamento do sensor não é infinita. Então se uma nova carga solicitar o sensor sua voltagem U_o terá uma nova referência a qual dependerá da carga remanescente no capacitor. Invés de esperar a voltagem do capacitor decrescer para zero após cada medição, a saída do sensor pode ser simplesmente conectada à terra após a realização de cada medida, essa conexão normalmente é efetuada através de uma chave como mostra a Figura 2.12. Assim uma referência é definida e todas as medidas serão realizadas em relação a um ponto zero constante.

2.4 Atuadores Piezelétricos

Atuadores piezelétricos são dispositivos que apresentam deformação ou alongamento quando uma entrada de tensão é aplicada em seus terminais, ou seja, o atuador piezelétrico converte uma entrada de energia elétrica em deslocamento mecânico ou deformação. De maneira geral atuadores podem ser classificados em dois principais grupos: os convencionais e os de estados-sólidos. Os convencionais são aqueles que proporcionam grandes deslocamentos na atuação como os atuadores hidráulicos, pneumáticos, servo motores, motores de passo, etc, as principais desvantagens dessa classe de atuadores é a necessidade de

grande espaço físico para sua alocação e também sua resposta relativamente lenta. Os atuadores convencionais são capazes de gerar deslocamentos na faixa de milímetros e centímetros, porém são inadequados para aplicações que exijam precisão micrométrica [37].

Já os atuadores de estado-sólido proporcionam pequenos deslocamentos com grande precisão (μm) e rápida resposta (μs), nessa classe enquadra-se os atuadores piezelétricos, atuadores eletrostrictivos e atuadores de memória de forma [1][7]. Uma comparação entre as principais características dos atuadores de estado sólido é na Tabela 1.

Tabela 1 - Atuadores de Estado Sólido

Característica	Piezelétrico	Eletrostrictivos	Magnetostrictivo	Memória de Forma
Classe Férrica	Ferroelétrica	Ferroelétrica	Ferromagnética	Ferroelástica
Maneira de Atuação	Campo Elétrico	Campo Elétrico	Campo Magnético	Térmica
Máxima Deformação %	0.1	0.1-0.2	0.1-0.2	7-10
Velocidade de Resposta	μs	μs	μs	S
Forças Generativas (N/cm²)	3.500	5.000	3.500	20.000
Eficiência(%)	50	50	80-90	3
Exemplo	Pb(Zr, Ti)O ₃	Pb(Mg _{1/3} , Nb _{2/3})O ₃	(Tb,Dy)Fe ₂	Ni _{1-x} Ti _x

Como mencionado anteriormente este trabalho utiliza um atuador cerâmico piezelétrico denominado PZT-5A, o qual diferencia-se da grande maioria dos atuadores utilizados em controle de sistemas dinâmicos, devido ao PZT estar distribuído de maneira laminar sobre a estrutura, enquanto os atuadores convencionais são discretos, ou seja, são alocados em pontos específicos da estrutura de acordo com os critérios de atuação estabelecidos pelo projetista [36].

O fato do atuador PZT estar distribuído continuamente sobre a estrutura se reflete diretamente na etapa de modelagem do sistema onde o atuador é considerado como parte integrante da estrutura. Devido a essa peculiaridade o método de elementos finitos se mostra uma ótima ferramenta de obtenção de modelos para aplicações de controle ativo [31].

Uma etapa importante do projeto de sistemas de controle ativo é a especificação dos atuadores, para tal deve-se considerar as dimensões na estrutura a faixa de vibrações que se deseja atenuar, a relação tensão deslocamento do atuador e a dimensão das forças envolvidas

no processo. Normalmente para atuadores piezelétricos a frequência de atuação não representa um problema, principalmente em aplicações convencionais onde as frequências máximas que se desejam atenuar estão na faixa de 20 kHz, devido esses atuadores apresentarem velocidade de resposta na faixa de μ s os mesmos são capazes de obedecer sinais de controle na faixa de MHz. Porém para garantir que o atuador atue na faixa de frequência desejada deve-se especificar o amplificador de potência de modo que esse seja capaz de gerar sinais nessa faixa [7].

Uma maneira de se avaliar o desempenho do atuador é através do gráfico de força por deslocamento obtido das equação constitutiva do material, esse gráfico possui linhas de isotensões elétricas para condições de força e deslocamento variáveis [6].

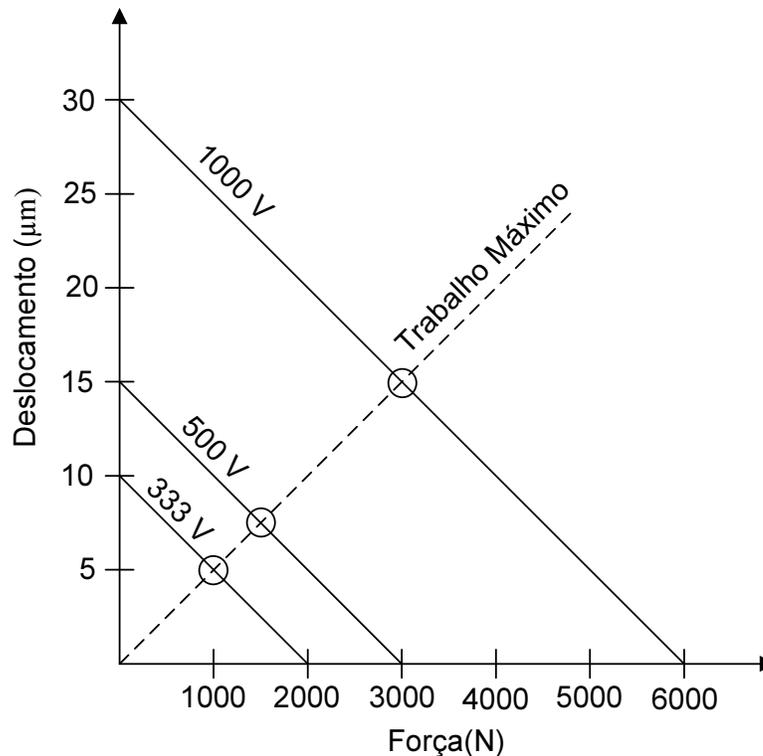


Figura 2.13 - Gráfico de isotensões do atuador piezelétrico

Aplicações convencionais envolvendo piezoatuadores são na sua maioria para produzir deslocamento, porém se os atuadores piezelétricos sofrerem restrições mecânicas os mesmos podem gerar forças. A geração de força está sempre associada a uma redução no deslocamento do atuador, a máxima força obtida ocorrerá quando o deslocamento for nulo. Isso pode ser observado na Figura 2.13, a qual é formada por retas de isotensões elétricas para

cada ponto dessas restas é definido um valor de força e deslocamento. Nos extremos das retas observa-se que para deslocamento máximo do atuador a força será nula e para força máxima o deslocamento será nulo. A reta pontilhada da Figura 2.13 intercepta os pontos de máximo trabalho de cada curva isotensões [7]. A máxima força produzida pelo atuador pode ser calculada pela Equação 2.33.

$$F_{\max} = k_T \Delta L_{\max} \quad (2.33)$$

onde k_T é a rigidez mecânica do atuador, cuja unidade é $N/\mu m$ e ΔL_{\max} é o máximo deslocamento nominal dado em μm .

Como exemplo considere um atuador com rigidez $k_T = 200N/\mu m$ e cujo gráfico de isotensões é representado pela figura 2.13. Para tal atuador a máxima força passível de ser obtida é $F_{\max} = 200N/\mu m \times 30\mu m = 6000N$, sendo a mesma definida para uma tensão elétrica de 1000V.

Para avaliar o desempenho do atuador utilizado neste trabalho, foram realizadas simulações utilizando o software Ansys Multiphysics®. Utilizando essa ferramenta uma pastilha cerâmica composta pelo material PZT-5A foi modelada e posteriormente teve seu campo de deslocamento obtido, considerando uma tensão de 200V aplicada em seus terminais.

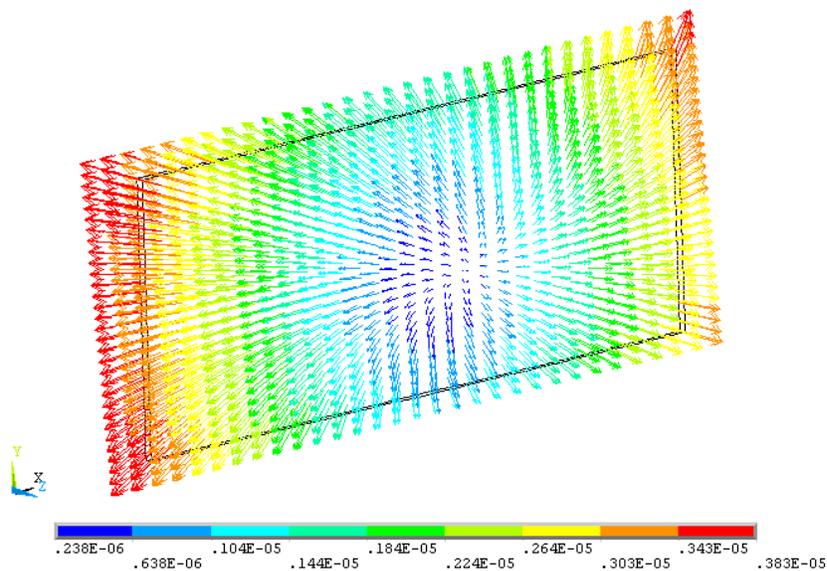


Figura 2.14 - Campo de deslocamento do atuador piezolétrico

Sendo a unidade da barra de escalas da figura 2.14 dada em metros, as dimensões da pastilha piezelétrica são: largura 10cm, comprimento 2cm e largura 1mm.

Pela figura 2.14 observa-se o sentido do vetor deslocamento e sua intensidade em cada região do PZT, porém, como abordado anteriormente, esses deslocamentos se traduzirão em forças aplicadas na estrutura na qual o atuador estiver fixado. O fato do atuador estar fixado em uma estrutura o faz operar em modo quase “bloqueado”.

O gráfico de isotensões juntamente com simulações do deslocamento do atuador para diversas dimensões propriedades piezelétricas e condições de contorno, compõe um ferramental que auxilia o projetista na escolha dos melhores transdutores para uma dada aplicação. Porém para tirar o máximo proveito desse ferramental o projetista deve estabelecer de maneira sensata as condições de contorno elétricas e mecânicas, isso exige um estudo aprofundado e sistemático do problema no qual se deseja aplicar esses dispositivos.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA

3.1 Método dos Elementos Finitos

Desde seu desenvolvimento na década de 1950 o método dos elementos finitos (MEF) tem expandido seu domínio de aplicação [10]. Originalmente as primeiras aplicações do MEF ocorreram em problemas estruturais onde se desejava determinar as tensões mecânicas, deslocamentos e deformações em estruturas sujeitas à aplicação de forças e condições de contorno diversas. Atualmente o MEF é utilizado nas mais diversas áreas, como: eletrostática, eletrodinâmica, transferência de calor, acústica, vibrações, etc [10] [11].

A grande maioria dos fenômenos da engenharia pode ser descrito em termos de equações diferenciais parciais, o MEF é um método numérico aproximado para análise de diversos fenômenos físicos que ocorrem em meios contínuos e podem ser descritos através de equações diferenciais parciais, com determinadas condições de contorno [12]. Esse método se baseia na discretização do domínio contínuo do problema em sub-regiões de geometria simples, conforme ilustra a Figura 3.1.

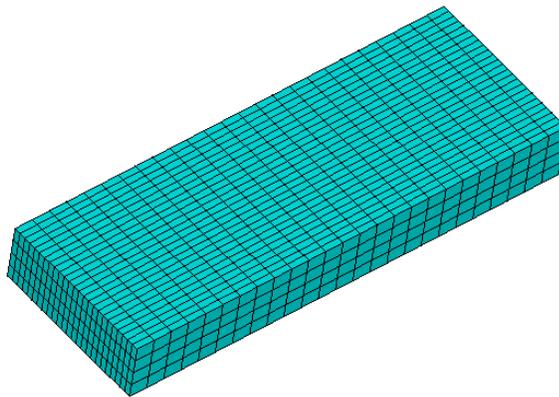


Figura 3.1- Aplicação de uma malha de elementos finitos

As sub-regiões da estrutura da Figura 3.1 são denominadas elementos e suas conexões são chamadas de nós, sendo a configuração composta pelos nós e elementos conhecida como malha de elementos. Após a geração da malha de elementos da estrutura o problema que antes era formulado no domínio contínuo e cujas variáveis podiam assumir valores independentes em cada ponto do domínio originando assim um sistema com número infinito de incógnitas, passa a ser definido de maneira discreta, cuja solução consiste na

resolução da equação dinâmica de cada elemento e posteriormente na utilização de funções matemáticas que interpolarão os resultados elementares visando à obtenção de uma solução global para o sistema. É válido salientar que na abordagem MEF as incógnitas e as variáveis do sistema são definidas apenas para os nós e não para todos os pontos da estrutura como é feito no método contínuo.

Para o âmbito de controle ativo de vibrações o MEF se mostra uma poderosa ferramenta de modelagem que possibilita a simulação de transdutores, auxiliando assim na escolha dos mesmos [8][13]. A simulação também permite a obtenção dos modos de vibrações da estrutura os quais podem ser comparados com resultados experimentais, permitindo dessa maneira a validação do modelo [14].

Porém a grande vantagem do MEF é que possibilita uma maneira sistêmica de obter o modelo para qualquer estrutura com PZT afixados. A capacidade de transformar um modelo de elementos finitos em uma representação de espaço de estados é de extrema importância na área de controle ativo, pois além de evidenciar uma relação entre variáveis de entrada, saída e perturbações, essa representação permite que o projetista observe o conjunto estrutura/transdutores na ótica da engenharia de controle, tornando possível a utilização de metodologias de projeto de controladores consagradas na área de controle de processos. Além disso, é possível utilizar essa metodologia de conversão de modelos para qualquer estrutura, desde vigas (como é o caso de estudo desse trabalho) até geometrias mais complexas.

O processo de obtenção do modelo em espaço de estados consiste em quatro etapas básicas: primeiramente cria-se o modelo de elementos finitos do conjunto formado pela estrutura e transdutores. Nesta etapa foi utilizado o software comercial de elementos finitos ANSYS®. Na segunda etapa, a partir do modelo do obtido através do ANSYS® extraem-se suas matrizes de massa e rigidez globais. Porém, para que essas matrizes possam ser utilizadas na composição do modelo de espaços de estados é necessária a conversão das mesmas do formato Harwel-Boing para o formato matricial padrão. Na terceira etapa as matrizes de massa e rigidez globais são reduzidas através de transformações modais. Na quarta e última etapa o sistema é escrito na forma de espaço de estados [8][6]. O fluxograma da Figura 3.2 ilustra esse processo.

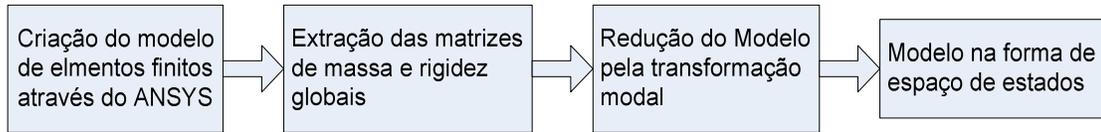


Figura 3.2 - Fluxograma do processo de obtenção do modelo de espaço de estados

O objetivo deste capítulo é obter as matrizes de massa e rigidez global através da modelagem por elementos finitos, as quais possibilitarão escrever o sistema pela abordagem de espaços de estado.

3.1.1 Caso de estudo deste trabalho

O procedimento descrito na seção anterior pode ser aplicado para qualquer estrutura, desde as mais simples até as mais complexas. A estrutura escolhida como caso de estudo foi uma viga simplesmente engastada, tendo seus transdutores afixados perto do engaste. Esta configuração viga transdutores é clássica para o controle ativo de vibrações sendo o caso de estudo escolhidos em diversos trabalhos [30][32][34][38].

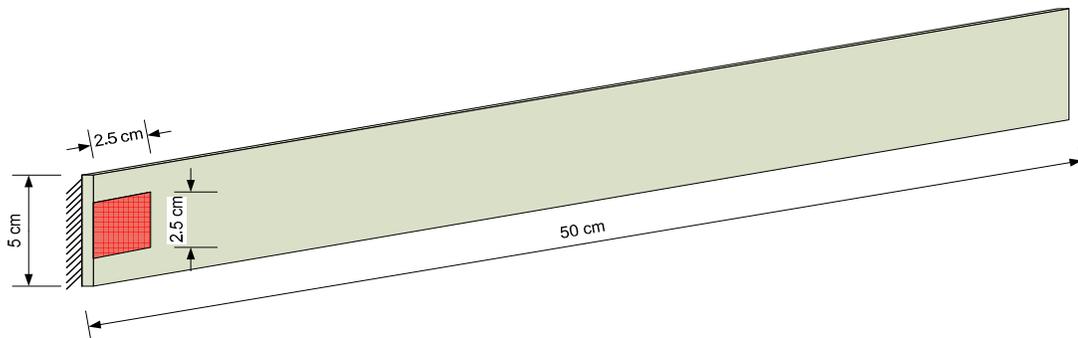


Figura 3.3 - Disposição dos transdutores no caso de estudo deste trabalho

As dimensões da viga e dos transdutores bem com os materiais que os compõem são mostrados na Tabela 3.1:

Tabela 3.1 – Dimensões da viga e dos transdutores

	Comprimento (m)	Largura (m)	Espessura(m)	Composição
Viga	0.5	0.05	0.003	alumínio
Sensor	0.02	0.02	0.001	PZT-5A
Atuador	0.02	0.02	0.001	PZT-5A

A Figura 3.3 ilustra a disposição dos sensores e atuadores na estrutura. É importante salientar que o foco de diversos trabalhos é a alocação ótima dos transdutores na estrutura visando medir e atuar nas vibrações da maneira mais eficiente possível, porém esse não é o objetivo deste trabalho. Para estruturas complexas a disposição ótima dos transdutores pode possuir as mais elaboradas configurações. No caso de uma viga simplesmente engastada a melhor posição para se fixar os transdutores é o mais próximo possível do engaste, isso pode ser explicado pelo fato do engaste não possuir nenhum nó das formas de vibrações.

Para modelar a estrutura da Figura 3.3 através do MEF foi escolhido um elemento tridimensional retangular de oito nós, tanto para a viga quanto para seus transdutores, porém devido ao acoplamento eletromecânico do material piezelétrico os elementos utilizados para sua modelagem terão algumas peculiaridades em relação aos utilizados para representar estruturas puramente mecânicas.

3.1.2 Modelagem por elementos finitos do caso de estudo

O caso de estudo deste trabalho é composto por materiais com propriedades físicas diferentes, em se tratando da modelagem de elementos finitos a principal diferença entre o PZT-5A e o alumínio se refletirá diretamente no número de graus de liberdade. O comportamento dos elementos é praticamente definido pelo número e posicionamento de seus nós, e pelo número de graus de liberdade por nó [15]. Apesar dos transdutores piezelétricos e da viga, ambos utilizarem elementos sólidos retangulares de oito nós, os mesmos não possuem os mesmos graus de liberdade. Em problemas clássicos de mecânica dos sólidos como análise de tensões mecânicas, os graus de liberdade correspondem os movimentos dos nós nas três dimensões [10]. Já para a descrição do fenômeno piezelétrico as principais

variáveis envolvidas serão além do deslocamento dos nós nos três eixos de coordenadas, a tensão elétrica de cada nó [56].

Os elementos sólidos retangulares possuem oito nós, os quais se traduzem em 24 graus de liberdade no caso dos elementos de viga e 32 graus de liberdade no caso dos elementos dos transdutores piezelétricos [56]. A figura 3.4 ilustra os elementos sólidos retangulares e seus respectivos nós e graus de liberdade.

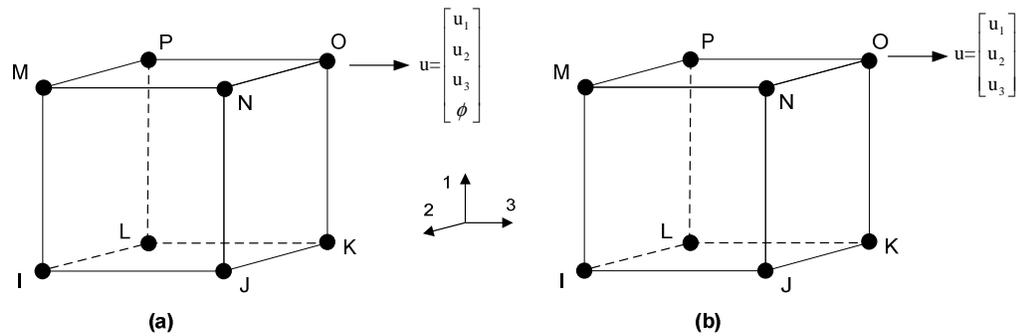


Figura 3.4 - (a) Elemento retangular sólido de transdutor; (b) Elemento retangular sólido da viga

Na Figura 3.4 os nós dos elementos são nomeados pelas letras: M, P, O, N, I, L, K e J, com referencial formado pelos eixos 1, 2 e 3. Os graus de liberdade de cada nó são exemplificados pelo nó O do elemento (a) e (b) da Figura 3.4. Sendo os graus de liberdade de cada nó designados pelo vetor u , o qual no caso do elemento piezelétrico é composto pelo deslocamento nos três eixos do sistema de coordenadas, u_1 , u_2 , u_3 e pela tensão elétrica do nó denominada ϕ [18][17]. Para o caso do elemento de viga os graus de liberdade são puramente estruturais, sendo compostos apenas pelo deslocamento mecânico de cada nó [10].

O problema de modelagem é fortemente acoplado devido ao uso de diferentes materiais, no decorrer desta seção será estudada a consequência deste acoplamento nas matrizes de massa e rigidez globais do sistema.

3.1.2.1 Relação entre tensão mecânica e deformação

Primeiramente serão abordadas as relações de tensão e deformação para o caso puramente mecânico, posteriormente essas relações serão expandidas para o caso piezelétrico. Relações entre tensão mecânica e deformação de estruturas simplesmente mecânicas foram

introduzidas no capítulo 2, porém torna-se necessário que essas sejam abordadas com maior profundidade tendo em vista sua grande importância para a formulação MEF.

Considere o vetor de tensão $\{\sigma\}$, o vetor de tensões iniciais $\{\sigma_o\}$, o vetor de deformações $\{\varepsilon\}$ e a matriz de constantes elásticas $[c]$. Para condições elásticas lineares, a tensão pode ser relacionada à deformação através da Equação 3.1:

$$\{\sigma\} = [c]\{\varepsilon\} + \{\sigma_o\} \quad (3.1)$$

Considerando uma análise tridimensional e desconsiderando as tensões iniciais pode-se expandir a Equação 3.2 para a seguinte forma tridimensional:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Para o caso tridimensional $[c]$ é uma matriz 6x6 simétrica.

Após definida a relação entre tensão e deformação torna-se necessário definir a relação entre deformação e deslocamento. Relações entre deformação e deslocamento extraem o campo de deformação contido no campo de deslocamento e desempenham um papel fundamental na formulação dos elementos. Para obter essas relações são usadas definições de deformação da engenharia, as quais definem deformação normal como mudança no comprimento pelo comprimento original de uma dada estrutura [10] [11]. O conceito de deformação aplicado ao elemento sólido retangular é mostrado na Figura 3.5.

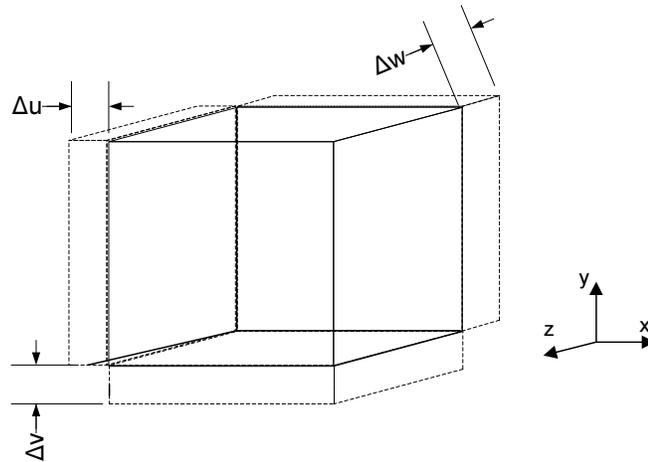


Figura 3.5 – Deslocamento nas 3 dimensões do elemento

Onde u , v e w são os vetores de deslocamentos na direção de do eixo x , y e z respectivamente. Esses deslocamentos normalmente são funções de todas as coordenadas, ou seja, $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ e $w=w(x,y,z)$. Então, considerando as mudanças nas dimensões do elemento retangular da Figura 3.5, Δv , Δu e Δw próximas de zero é possível utilizar derivadas parciais para obter as relações entre deformação e deslocamento [10][11].

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \epsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases} \quad (3.3)$$

onde γ_{12} , γ_{23} e γ_{31} são os deslocamentos nos planos xy , yz e zx respectivamente. A partir do conjunto de equações 3.3 é possível descrever a relação entre deformação e deslocamento pela operação matricial apresentada pela Equação 3.4 [10][11].

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

A equação 3.4 pode ser escrita de uma maneira mais genérica utilizando o operador ∂ .

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} \quad (3.5)$$

Uma das razões da utilização de elementos finitos baseado em deslocamento é a facilidade de obedecer a condição de compatibilidade, a qual requer que o deslocamento seja contínuo e unicamente função da posição. Para cumprir esse requisito são utilizados polinômios, os quais representam campos de deslocamento[10][11].

Para analisar a interferência de uma força agindo na estrutura torna-se necessário a obtenção de relação de equilíbrio entre as tensões e forças. Essas relações podem ser obtidas considerando o conjunto de tensões e as forças elementares, como ilustra a Figura 3.6 [10].

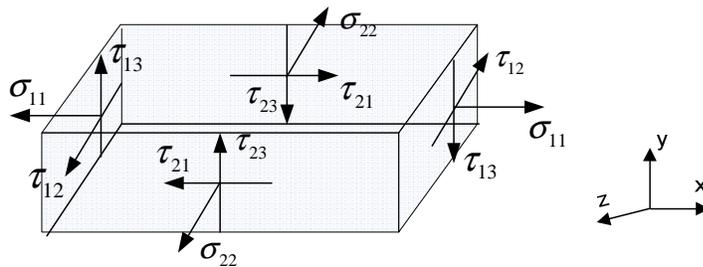


Figura 3.6 - Conjunto de tensões agindo sobre o elemento

As equações de equilíbrio elementares podem ser obtidas considerando que sobre o elemento da Figura 3.6 atua uma força, cujas componentes F_1 , F_2 e F_3 se relacionam com as tensões mecânicas elementares de acordo com o conjunto de equações 3.6.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial z} + F_1 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z} + F_2 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + F_3 = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

As equações 3.6 podem ser escritas na forma matricial através da Equação 3.7, onde F é o vetor força, o qual é formado pelas componentes das forças $[F_1 \ F_2 \ F_3]^T$ que atuam no volume do elemento, e o operador $[\partial]$ é a matriz composta pelas derivadas parciais das três dimensões espaciais mostradas na Equação 3.4.

$$[\partial]^T \{\sigma\} + \{F\} = 0 \quad (3.7)$$

Uma vez definidas as condições de equilíbrio para o caso mecânico simples, serão analisadas as equações constitutivas do elemento piezoeletrico e posteriormente serão obtidas relações globais de equilíbrio que satisfaçam o conjunto formado tanto por elementos mecânicos simples quanto por elementos piezoeletricos.

3.1.2.2 Equações do Elemento Piezoeletrico

As equações da piezoeletricidade serão utilizadas para descrever o comportamento piezoeletrico do elemento e obter através do princípio variacional de Hamilton as matrizes de acoplamento piezoeletrico do sistema. Para tal será considerado que as forças elétricas e mecânicas agindo no elemento piezoeletrico estão equilibradas para qualquer instante de tempo. Assim as equações piezoeletricas podem ser desacopladas, i.e uma aproximação quasi-estática é usada nesta formulação. A variação da temperatura é desconsiderada, dessa maneira os efeitos da piroeletricidade não interferirão na análise. As equações constitutivas piezoeletricas acoplam o campo elástico e elétrico, e dependendo da maneira que são escritas

podem representar o efeito piezométrico direto ou inverso [7][8]. Considere as equações 3.8 e 3.9, as quais foram selecionadas da Tabela 2.1 para representar os efeitos da piezeletricidade.

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & c_{41} & c_{51} & c_{61} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & c_{42} & c_{52} & c_{62} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{43} & c_{53} & c_{63} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{54} & c_{64} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{65} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ e_{16} & e_{26} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

A Equação 3.8 descreve o efeito piezométrico direto enquanto a Equação 3.9 representa o efeito inverso da piezeletricidade. A configuração das tensões no elemento possui a mesma orientação do elemento mecânico simples mostrado na Figura 3.6. As equações 3.9 e 3.8 podem ser escritas na forma vetorial originando as equações 3.10.

$$\begin{cases} \bar{D} = [e]\varepsilon + [\varepsilon^E]\bar{E} \\ \sigma = [c^E]\varepsilon - [e]^T\bar{E} \end{cases} \quad (3.10)$$

Onde \bar{D} é o deslocamento elétrico, $[\varepsilon^E]$ é a matriz de permissividade dielétrica obtida a partir da deformação constante, $[c^E]$ é a matriz de elasticidade para um campo elétrico constante e $[e]$ é a matriz de acoplamento piezométrico.

3.1.3 Interpolação e Funções de Forma

Como já mencionado o MEF consiste em modelar a estrutura como uma montagem de pequenas partes chamadas de elementos, sendo a conexão entre eles é feita através de pontos discretos denominados nós, nos quais são aplicadas as cargas distribuídas na estrutura [16]. Como os elementos que compõem o sistema são ligados pelos nós, considera-se que a carga dos deslocamentos, ou a tensão elétrica atuante nos nós, são responsáveis pelo estado de deformações e tensão dos elementos e consecutivamente da estrutura. Desse modo verifica-se que para o MEF não existe a necessidade de se conhecer o comportamento da estrutura ponto a ponto como nos métodos de solução analítica de uma equação diferencial, basta apenas conhecer os valores das variáveis nodais [10]. Esse método transforma um problema de infinitos graus de liberdade para um de graus de liberdade finito, porém uma questão persiste. Como relacionar as variáveis nodais com o comportamento dos elementos, e como esse comportamento influenciará na resposta global do sistema? A resposta a essa pergunta é obtida a partir da interpolação e das funções de forma utilizadas no MEF.

O processo de interpolação consiste em dividir uma função contínua, satisfazendo condições preestabelecidas para um número finito de pontos. Para o MEF os pontos são os nós do elemento e as condições preestabelecidas são os valores nodais de uma variável de campo, ou algumas vezes, as suas derivadas [11]. De maneira geral, uma variável de campo β pode ser interpolada sobre um elemento com n valores nodais, em termos de graus de liberdade generalizados a_i e da variável dependente x , da seguinte forma:

$$\beta = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (3.11)$$

A Equação 3.11 também pode ser escrita através da Equação 3.12.

$$\beta = [X]\{a\} \quad (3.12)$$

Sendo $[X] = [1 \ x^1 \ x^2 \ \dots \ x^n]$ e $\{a\} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$. O índice n denota o tipo de interpolação, para $n=1$ a interpolação será linear, para $n=2$ será quadrática, e assim

sucessivamente. As componentes do vetor $\{a\}$ podem ser expressas em termos de valores nodais de β através da Equação 3.13.

$$\beta_e = [A]\{a\} \quad (3.13)$$

onde β_e são os valores nodais e cada linha de $[A]$ é composta pelo vetor $[X]$ considerando a localização nodal apropriada. Substituindo a Equação 3.13 em 3.12 se obtém a seguinte relação entre β e β_e .

$$\beta = [N]\{\beta_e\}; \quad [N] = [X][A]^{-1} = [N_1 \ N_2 \ \dots] \quad (3.14)$$

As componentes N_i da matriz $[N]$ são chamadas de função de forma. Cada N_i define a distribuição de β do elemento quando o i -ésimo grau de liberdade nodal β_i possuir valor unitário e todos os outros graus de liberdade forem zero. Considerando a interpolação como sendo linear, uma das funções de forma mais utilizadas é a lagrangiana e pode ser escrita genericamente pela Equação 3.15.

$$N_i = \frac{(x_1 - x)(x_2 - x) \dots [x_i - x] \dots (x_n - x)}{(x_1 - x_j)(x_2 - x_j) \dots [x_i - x_j] \dots (x_n - x_j)} \quad (3.15)$$

Os termos entre colchetes da Equação 3.15 são omitidos na obtenção da k ésima função de forma. Funções de forma lagrangianas apresentam as seguintes características:

- Todas as funções interpoladas possuem o mesmo grau e conseqüentemente a função interpoladora possui esse mesmo grau.
- Para qualquer função de forma N_i , $N_i = 1$ quando $x = x_i$ e $N_i = 0$ quando $x = x_j$ onde $i \neq j$. Ou seja, N_i é unitário para seu próprio nó, mas é nulo para todos os outros.

- O somatório das funções forma C^0 é a unidade. Esta conclusão está implícita na equação 3.14, pois $\beta = 1$ quando $\{\beta_e\}$ for uma das colunas de 1.¹

3.1.3.1 Elemento sólido hexagonal

Para um elemento retangular sólido de 8 nós ilustrado na Figura 3.5, o vetor de deslocamento na direção x é dado pela Equação 3.16.

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7zx + a_8xyz \quad (3.16)$$

Expressões similares podem ser utilizadas para descrever os vetores v e w , responsáveis pelos deslocamentos em y e z respectivamente. Desse modo cada elemento possui um total de 24 graus de liberdade, desconsiderando o grau de liberdade elétrico adicional no caso dos elementos piezelétricos. Em termos de função forma o campo de deslocamento elementar pode ser escrito através da Equação 3.17.

$$\{u\} = [N_u] \{u_i\} \quad (3.17)$$

Onde $\{u_i\}$ é o vetor deslocamento modal. Expandindo a equação vetorial 3.17 tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ w_8 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Onde cada função forma individual N_i é obtida pela Equação 3.19.

¹ C^0 indica a continuidade da função sobre a uma variável, ou seja, considerando apenas uma dimensão se $\beta = \beta(x)$ é C^0 contínua se β é contínua, mas $\frac{d\beta}{dx}$ não é contínua.

$$N_i = \frac{(a \pm x_i)(b \pm y_i)(c \pm z_i)}{8abc} \quad (3.19)$$

Os parâmetros a , b e c estão relacionados com a dimensão do elemento, como mostra a Figura 3.7. Devido à função forma do elemento retangular sólido ser composta pelo produto de três funções lineares, esse também é conhecido como elemento trilinear [10][11].

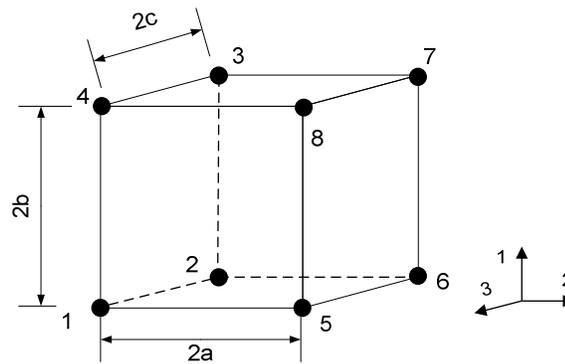


Figura 3.7- Parâmetros do elemento trilinear

3.1.4 Matrizes Elementares

Nesta seção serão obtidas as matrizes elementares globais do sistema, as quais servirão de base para a composição do modelo de espaço de estados modal do sistema. Para tal será utilizado como ferramenta a teoria de trabalho virtual.

Utilizando o conjunto de equações 3.10 é possível escrever o Lagrangiano de um corpo piezolétrico limitado. Desconsiderando os formalismos matemáticos, o Lagrangiano pode ser entendido como o somatório de todas as energias que atuam no sistema, ou seja, as energias cinéticas e potenciais. Como o sistema neste caso é o corpo piezolétrico, o qual possui graus de liberdades de naturezas distintas, a energia do sistema será composta pela interação de parcelas mecânicas e elétricas. As parcelas mecânicas serão compostas pelo deslocamento, tensão mecânica e deformação; Já as parcelas elétricas serão compostas pelo campo e deslocamento elétricos. O Lagrangiano do corpo piezolétrico é dado pela Equação 3.20 [17][18].

$$L = \int_{V_p} (T - V) dV_p = \int_{V_p} \left(\frac{1}{2} \rho \{\dot{\mathbf{u}}\}' \{\dot{\mathbf{u}}\} - \frac{1}{2} [\{\boldsymbol{\varepsilon}\}' \{\boldsymbol{\sigma}\} - \{\mathbf{E}\}' \{\mathbf{D}\}] \right) dV_p \quad (3.20)$$

Sendo $\{\dot{\mathbf{u}}\}$ a velocidade obtida a partir da derivada primeira do deslocamento, L o Lagrangiano, T a energia cinética, V a energia potencial, ρ é a densidade do material e V_p é o volume do piezelétrico. Aplicando a teoria dos trabalhos virtuais realizados por forças externas e carga e tensão elétrica aplicadas na superfície obtém-se a relação descrita pela Equação 3.21 [17][18].

$$\delta W = \int_{V_p} \{\delta \mathbf{u}\}' \{\mathbf{P}_b\} dV_p + \int_{A_1} \{\delta \mathbf{u}\}' \{\mathbf{P}_A\} dA_1 + \{\delta \mathbf{u}\}' \{\mathbf{P}_C\} - \int_{A_2} \phi q_A dA_2 \quad (3.21)$$

onde $\{\mathbf{P}_b\}$ é a força do corpo, A_1 e A_2 a área da superfície, $\{\mathbf{P}_A\}$ a força distribuída na superfície, $\{\mathbf{P}_C\}$ a carga mecânica concentrada, ϕ é a tensão elétrica e q_A é a carga elétrica da superfície. Através do Lagrangiano e do trabalho virtual, as equação dinâmicas do piezelétrico podem ser obtidas a partir do princípio variacional de Hamilton descrito pela Equação 3.22 [16][17][18].

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(L+W) dt = 0 \quad (3.22)$$

Onde t_1 e t_2 definem o intervalo de tempo no qual as variações devem ocorrer. Substituindo as equações 3.20, 3.21 na Equação 3.22 obtém-se a Equação 3.23.

$$\int_{V_p} \left(\rho \{\delta \dot{\mathbf{u}}\}' \{\dot{\mathbf{u}}\} - \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}' [c^E] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} + \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}' [e]^T \{\mathbf{E}\} - \{\delta \mathbf{E}\}' [e] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\delta \mathbf{E}\}' [e] \{\mathbf{E}\} + \{\delta \mathbf{u}\}' \{\mathbf{P}_b\} \right) dV_p + \int_{A_1} \{\delta \mathbf{u}\}' \{\mathbf{P}_A\} dA_1 - \int_{A_2} \delta \phi q_A dA_2 + \{\delta \mathbf{u}\}' \{\mathbf{P}_C\} = 0 \quad (3.23)$$

Para obter as matrizes elementares de massa e rigidez global, a qual contém a matriz de acoplamento piezelétrico, é necessário escrever o deslocamento $\{\mathbf{u}\}$ e o potencial elétrico ϕ definidos em variáveis nodais através das matrizes das funções de forma. A relação entre o

deslocamento do sistema e o deslocamento nodal é definida pela equação 3.17, já a relação entre tensão elétrica e a tensão elétrica nodal é feita através da Equação 3.24 [16].

$$\{\phi\} = [N_\phi] \{\phi_i\} \quad (3.24)$$

Onde o índice i denota que a variável é nodal. A relação entre a deformação $\{\varepsilon\}$ e o deslocamento $\{u\}$ feita através da Equação 3.5 pode ser transcrita para forma nodal pelo conjunto de equações a seguir:

$$\begin{cases} \{\varepsilon\} = [B_u] \{u_i\} \\ [B_u] = [\partial][N_u] \end{cases} \quad (3.25)$$

Como no sistema de controle a variável manipulada é a tensão elétrica nos terminais do atuador, torna-se necessário definir o campo elétrico $\{E\}$ utilizando a tensão elétrica ϕ . Para tal utiliza-se o operador gradiente como mostra a Equação 3.26.

$$\{E\} = -\nabla \phi \quad (3.26)$$

Escrevendo a Equação 3.26 em termos de variável nodal obtém-se o conjunto de equações 3.27.

$$\begin{cases} \{E\} = -[B_\phi] \{\phi\} \\ [B_\phi] = \partial [N_\phi] \end{cases} \quad (3.27)$$

Utilizando as equações 3.24, 3.25, 3.26 e 3.27 obtêm-se as matrizes elementares que compõem as equações dinâmicas do sistema. As matrizes elementares são dadas pelas seguintes integrais envolvendo as matrizes constitutivas do material e as funções de forma do MEF.

$$[m_{uu}]_{n_u \times n_u} = \int_{V_p} \rho [N_u]' [N_u] dV_p \quad (3.28)$$

$$[\mathbf{k}_{uu}]_{n_u \times n_u} = \int_{V_p} [\mathbf{B}_u]' [\mathbf{c}^E] [\mathbf{B}_u] dV_p \quad (3.29)$$

$$[\mathbf{k}_{u\phi}]_{n_u \times n_\phi} = \int_{V_p} [\mathbf{B}_u]' [e] [\mathbf{B}_\phi] dV_p \quad (3.30)$$

$$[\mathbf{k}_{\phi\phi}]_{n_\phi \times n_\phi} = \int_{V_p} [\mathbf{B}_\phi]' [\epsilon^s] [\mathbf{B}_\phi] dV_p \quad (3.31)$$

$$\{\mathbf{f}_i\}_{n_u \times 1} = \int_{V_p} [\mathbf{N}_u]' \{\mathbf{P}_b\} dV_p + \int_{A_1} [\mathbf{N}_u]' \{\mathbf{P}_A\} dA_1 + [\mathbf{N}_u]' \{\mathbf{P}_C\} \quad (3.32)$$

$$\{\mathbf{g}_i\}_{n_\phi \times 1} = - \int_{A_2} [\mathbf{N}_\phi]' q_A dA_2 \quad (3.33)$$

$$[\mathbf{k}_{u\phi}] = [\mathbf{k}_{\phi u}]' \quad (3.34)$$

Onde da Equação 3.28 até a 3.34 os índices n_u e n_ϕ representam o número de graus de liberdades mecânicos e elétricos, respectivamente. O número de graus de liberdade elétrico é igual à soma de todos os nós da viga e dos transdutores piezelétricos vezes três, pois todos os nós de todos os elementos sejam eles piezelétricos ou puramente mecânicos possuem deslocamento nas três dimensões. Já o número de graus elétricos é igual ao número de nós do atuador somado ao número de nós do sensor, isso porque o grau de liberdade elétrico é definido apenas para os nós dos elementos piezelétricos.

A matriz $[\mathbf{m}_{uu}]$ é conhecida como matriz de massa elementar, sendo uma matriz quadrada de ordem n_u e $[\mathbf{k}_{uu}]$ é a matriz de rigidez mecânica do sistema, possuindo as mesmas dimensões que $[\mathbf{m}_{uu}]$. A matriz $[\mathbf{k}_{u\phi}]$ é conhecida como matriz de acoplamento piezelétrico. Ela descreve a interação entre os graus de liberdades mecânicos e elétricos, sendo assim utilizada para modelar a dinâmica eletromecânica dos transdutores. A matriz $[\mathbf{k}_{\phi\phi}]$ é a matriz dielétrica global. O vetor $\{\mathbf{f}_i\}$ representa a força atuante em cada nó e o vetor $\{\mathbf{g}_i\}$ representa a carga nos transdutores piezelétricos.

Através das matrizes elementares é possível escrever as equações dinâmicas do sistema viga/transdutores com mostra a Equação 3.35.

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{m}_{uu}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{u}_i\} \\ \{\phi_i\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{uu}] & [\mathbf{k}_{\phi u}] \\ [\mathbf{k}_{u\phi}] & [\mathbf{k}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{u}_i\} \\ \{\phi_i\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{f}_i\} \\ \{\mathbf{g}_i\} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Uma vez obtida a equação dinâmica do sistema viga/transdutores, essa será submetida a uma transformação modal e posteriormente será escrita na forma de espaços de estados. Esses procedimentos serão descritos nas seções posteriores.

3.2 Análise Modal

Existem diversos métodos capazes de obter a equação de movimento para sistemas com múltiplos graus de liberdade, dentre os quais podemos destacar o método de Lagrange. O método de Lagrange, baseado na energia do sistema, tem se mostrado uma solução elegante tanto para sistemas lineares como para sistemas não lineares. Porém, a teoria que permite a obtenção da resposta de sistemas com múltiplos graus de liberdade se baseia no princípio da superposição o qual é definido apenas para sistemas lineares [19]. Devido a isso a resposta de sistemas não lineares não pode ser obtida de maneira generalizada sendo necessária uma análise específica para cada caso. Devido a essa peculiaridade os analistas frequentemente optam por linearizar os sistemas em torno de um ponto específico do espaço de estado restringindo seus movimentos às vizinhanças do ponto escolhido. Esse procedimento permite que a análise seja feita utilizando as ferramentas específicas para sistemas lineares [20].

Através das equações de Lagrange para o movimento e utilizando o conceito de modo normal de vibração é possível formular um método que desacople as equações dinâmicas do sistema. A ortogonalidade dos modos de vibrações forma a base para o procedimento que obtém a resposta do sistema conhecido como análise modal, a qual transforma um sistema de n graus de liberdade em n sistemas com um único grau de liberdade [6].

A análise modal foi aplicada primeiramente para o melhor entendimento do comportamento dinâmico de aeronaves. Nos anos que precederam sua primeira aplicação a análise modal foi utilizada basicamente como ferramenta para o entendimento do problema de vibrações em estruturas. Porém a partir dos anos 80 o desenvolvimento e a validação de modelos modais têm sido o principal foco do desenvolvimento desse método. Para tal, uma abordagem física e matemática mais rigorosa foi formulada [14].

Este trabalho utiliza a análise modal como ferramenta de modelagem e validação, essa abordagem se mostra uma boa opção para a formulação de problemas de controle ativo, pois permite que o modelo obtido por MEF tenha seu tamanho reduzido sem que o mesmo

perca consideravelmente suas informações dinâmicas. Isso ocorre porque é possível escolher os modos que mais influenciam as vibrações de um dado sistema e desprezar aqueles que não contribuem de forma efetiva para o aumento das vibrações ou aqueles que não podem ser atuados de maneira eficiente. Com a escolha adequada dos modos que compõem o sistema é possível focar o modelo no problema que se deseja atacar. Como posteriormente o projeto do controlador será baseado no modelo modal essa etapa também influenciará todo o sistema de controle, sendo assim uma etapa crítica para o sucesso do projeto de controle ativo [13].

Esse capítulo formulará a base da teórica da análise modal e aplicará o método para o caso de estruturas que contenham piezelétricos afixados.

3.2.1 Equação do Movimento de Lagrange para o caso linear

Para sistemas lineares as variáveis dependentes aparecem na equação de movimento na primeira potência somente. Devido aos vários termos da equação do movimento resultarem da diferenciação do Lagrangiano em relação às velocidades e deslocamentos generalizados, os termos com potência maior que 2 no Lagrangiano resultam em termos não lineares na equação de movimento. Se os deslocamentos e as velocidades são suficientemente pequenos de tal modo que os termos não lineares possam ser desprezados, então o sistema resultante é chamado de linearizado [19]. Considerando que o sistema se enquadre na hipótese dos pequenos deslocamentos sua energia cinética pode ser escrita de acordo com a Equação 3.36.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{r=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \right) \cdot \left(\sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \right) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_r} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \right) \dot{q}_r \dot{q}_s = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n m_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \quad (3.36)$$

onde:

$$m_{rs} = m_{sr} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_r} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \quad (3.37)$$

Sendo que nas equações 3.36 e 3.37 \mathbf{r}_i representa o deslocamento, q_r e q_s são os deslocamentos generalizados, e $m_{rs}(r, s = 1, 2, \dots, n)$ são os coeficientes de inércia. O próximo passo será definir uma expressão linear que represente a energia potencial. Normalmente a

energia potencial é escrita através de uma função não linear dos deslocamentos generalizados. Considerando sem perda de generalidade que $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ representam pontos de equilíbrio e expandindo a equação de energia potencial do sistema em termos através da série de Taylor sobre os pontos de equilíbrio, é possível escrever a energia potência do sistema através da seguinte equação [19].

$$V(q_1, q_2, \dots, q_n) = V(0, 0, \dots, 0) + \sum_{r=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_r} \Big|_{q_r=0} q_r + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s} \Big|_{q_r=q_s=0} q_r q_s + O(q^3) \quad (3.38)$$

Onde $O(q^3)$ denota a contribuição dos termos de maior ordem em função das coordenadas generalizadas. Devido à substituição dos pontos de equilíbrio o termo $V(0, 0, \dots, 0)$ torna-se apenas uma constante e como a equação de Lagrange envolve derivadas de V esse termo pode ser ignorado [20]. Considerando as condições de equilíbrio estático tem-se:

$$\frac{\partial V}{\partial q_r} = 0 \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.39)$$

Então ignorando os termos de ordem mais elevadas e introduzindo a notação mostrada pela Equação 3.40 encontra-se a Equação 3.41.

$$k_{rs} = k_{sr} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s} \Big|_{q_r=q_s=0} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_r} \Big|_{q_s=q_r=0} \quad (3.40)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n k_{rs} q_r q_s \quad (3.41)$$

Sendo k_{rs} ($r, s = 1, 2, \dots, n$) chamados de coeficientes de rigidez. A energia cinética definida pela equação 3.36 e a energia potencial dada pela equação 3.41 foram escritas através das velocidades generalizadas e das coordenadas generalizadas respectivamente possuindo ambas uma forma linear. Uma vez formuladas essas equações, o processo de obtenção das

equações lineares do movimento podem continuar. Para tal será utilizada a definição geral do movimento de Lagrange apresentada pela Equação 3.42.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.42)$$

Onde Q_j são as forças não conservativas. Derivando a Equação 3.36 em relação à \dot{q}_j obtém-se:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n m_{rs} \left(\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_s + \dot{q}_r \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n m_{rs} (\dot{q}_s \delta_{rj} + \dot{q}_r \delta_{sj}) \quad (3.43)$$

Onde o operador δ_{rj} é conhecido como delta de Kronecker, este operador assume valor unitário quando $r = j$ e valor nulo quando $r \neq j$. Os operadores de Kronecker reduzem a série da Equação 3.43 à Equação 3.44 [19].

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n m_{js} \dot{q}_s + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_{rj} \dot{q}_r \quad (3.44)$$

Considerando que as duas séries que compõem a Equação 3.44 são iguais e lembrando que o coeficiente de massa é simétrico, pode-se efetuar uma mudança de índices na Equação 3.44 e escrevê-la da seguinte maneira:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{s=1}^n m_{js} \dot{q}_s \quad (3.45)$$

Derivando a Equação 3.46 em relação ao tempo obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{s=1}^n m_{js} \ddot{q}_s \quad (3.46)$$

As mesmas considerações feitas para a obtenção da Equação 3.46 podem ser utilizadas para realizar a derivada da energia potencial em relação às coordenadas generalizadas. Então a derivada da equação 3.41 em relação à q_j é mostrada diretamente pela Equação 3.47:

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = \sum_{s=1}^n k_{js} q_s \quad (3.47)$$

Como o coeficiente de massa é constante e a energia cinética contém termos de velocidade generalizada e não de coordenadas generalizadas tem-se que:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \quad (3.48)$$

Substituindo as equações 3.45, 3.46, 3.47 e 3.48 na Equação 3.42 obtêm-se a equação de Lagrange para o movimento de sistemas lineares.

$$\sum_{s=1}^n [m_{js} \ddot{q}_s(t) + k_{js} q_s(t)] = Q_j(t) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.49)$$

A Equação 3.49 representa a equação do movimento considerando o sistema como sendo linear e não amortecido, porém uma parcela de amortecimento pode ser inserida na Equação 3.49. Para tal será utilizada a função de dissipação de Rayleigh definida pela Equação 3.50 [14]:

$$F_R = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \quad (3.50)$$

Onde c_{rs} são simétricos, ou seja, $c_{rs} = c_{sr}$ ($r, s = 1, 2, \dots, n$) e conhecidos como coeficientes de amortecimento viscoso. Pode-se considerar a influência do amortecimento no movimento do sistema inserindo a derivada da função de Rayleigh em relação à velocidade generalizada na Equação 3.42, então a geral do movimento de Lagrange pode ser reescrita de acordo com a Equação 3.51 [19]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.51)$$

Onde analogamente à equação 3.50 tem-se:

$$\frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{s=1}^n c_{js} \dot{q}_s \quad (3.52)$$

Substituindo as equações 3.45, 3.46, 3.47, 3.48, 3.52 na Equação 3.51 é obtida a equação que representa o movimento de um sistema linear amortecido:

$$\sum_{s=1}^n [m_{js} \ddot{q}_s(t) + c_{js} \dot{q}_s(t) + k_{js} q_s(t)] = Q_j(t) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.53)$$

A Equação 3.53 pode ser escrita na forma matricial, para tal serão apresentadas as seguintes matrizes $n \times n$:

$$M = [m_{rs}], \quad C = [c_{rs}], \quad K = [k_{rs}] \quad (3.54)$$

Sendo as matrizes M , C e K conhecidas como matriz de massa, de amortecimento e de rigidez respectivamente, sendo todas as três matrizes simétricas. Para escrever a Equação 3.53 de maneira matricial compacta definiram-se os vetores de deslocamentos generalizados $q(t)$ e de forças não conservativas da seguinte maneira $Q(t)$ de acordo com a Equação 3.55 [20].

$$q(t) = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \dots \quad q_n(t)], \quad Q(t) = [Q_1(t) \quad Q_2(t) \quad \dots \quad Q_n(t)] \quad (3.55)$$

Então reescrevendo a Equação 3.53 através dos vetores da Equação 3.55 e da nova formulação matricial apresentada pela Equação 3.54 chega-se a nova forma matricial compacta da equação de movimento de Lagrange mostrada a seguir.

$$M \ddot{q}(t) + C \dot{q}(t) + K q(t) = Q(t) \quad (3.56)$$

A Equação 3.56 será a base do desenvolvimento do problema de autovalor e do conceito de modo normal de vibração os quais serão utilizados para reduzir as equação dinâmica elementares do sistema composto pelo conjunto viga e PZTs.

3.2.2 Problema de autovalores e modos normais de vibração

A Equação 3.56 apresenta um conjunto de n equações diferenciais de movimento. Para obter a resposta do sistema é necessário solucionar essas equações. Para ilustrar um procedimento de resolução será desconsiderado o amortecimento da Equação 3.56 e serão analisadas as vibração descritas pela equação homogênea a seguir [20].

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = 0 \quad (3.57)$$

A solução candidata da uma equação diferencial 3.57 possui a seguinte forma exponencial:

$$q(t) = e^{\lambda t} u \quad (3.58)$$

Substituindo a solução candidata da Equação 3.58 na Equação 3.57 é obtida a seguinte equação algébrica de ordem n .

$$[\lambda^2 M + K] u = 0 \quad (3.59)$$

O problema de determinar os parâmetros λ^2 de modo que esses satisfaçam uma solução não trivial é conhecido como problema de autovalor. Da álgebra linear é sabido que um conjunto de equações homogêneas algébricas possui uma solução trivial se e somente se o determinante da matriz composta por seus coeficientes for nulo [20]. Essa condição pode ser escrita através da seguinte equação:

$$\Delta(\lambda^2) = \det[\lambda^2 M + K] = |\lambda^2 M + K| = 0 \quad (3.60)$$

A Equação 3.60 é conhecida como equação característica, o polinômio $\Delta(\lambda^2)$ é chamado de polinômio característico e possui ordem n . Logo, o mesmo possui n raízes, $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$, as quais são conhecidas como autovalores. A substituição de cada autovalor na equação 3.60 originará um autovetor. Pode-se então reescrever a equação 3.60 da seguinte maneira.

$$[\lambda_r^2 M + K] u_r \quad (3.61)$$

onde u_r é a solução do problema de autovalor correspondente a $\lambda^2 = \lambda_r^2 (r=1,2,\dots,n)$. O vetor u_r é conhecido como autovetor pertencente ao autovalor λ_r^2 . No caso de sistemas elásticos os autovalores apresentam a seguinte forma:

$$\lambda_r^2 = -\omega_r^2, \quad r=1,2,\dots,n \quad (3.62)$$

Sendo que a Equação 3.62 também pode ser escrita da seguinte maneira.

$$\lambda_r = \pm i\omega_r, \quad r=1,2,\dots,n \quad (3.63)$$

Devido λ_r ser um número complexo a solução candidata assume a seguinte forma:

$$q_r(t) = (a_r e^{i\omega_r t} + b_r e^{i\omega_r t}) u_r \quad (3.64)$$

Porém deve-se considerar algumas peculiaridades da equação 3.64, os valores de $q_r(t)$ são valores reais, desse modo a expressão entre parênteses da Equação 3.64 também deve assumir valores reais. Para tal considerar-se-á o coeficiente b_r como sendo o complexo conjugado de a_r , ou seja, $b_r = \bar{a}_r$ [19]. Então a Equação 3.64 será reduzida para a seguinte forma.

$$\begin{aligned} q_r(t) &= (a_r e^{i\omega_r t} + \bar{a}_r e^{i\omega_r t}) u_r, \\ &= 2 \operatorname{Re}(a_r e^{i\omega_r t}) u_r, \quad r=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (3.65)$$

Considerando que as componentes reais e imaginárias de a_r são:

$$\operatorname{Re}(a_r) = \frac{1}{2} c_r \cos \phi_r, \quad \operatorname{Im}(a_r) = -\frac{1}{2} c_r \sin \phi_r \quad (3.66)$$

Utilizando a notação de Euler a_r podem ser expressas da seguinte forma:

$$a_r = \frac{1}{2} c_r e^{-i\phi_r}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.67)$$

Então através da Equação 3.67 é possível escrever a Equação 3.65 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} q_r(t) &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} c_r e^{-i\phi_r} e^{i\omega_r t} \right) u_r \\ &= c_r \cos(\omega_r t - \phi_r) u_r, \quad r = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.68)$$

Na Equação 3.68 as vibrações livres do sistema podem ocorrer de n formas diferentes. Em cada forma de vibração do sistema o movimento é harmônico e possui amplitude c_r , frequência ω_r e ângulo de fase ϕ_r . Sendo o deslocamento de cada massa proporcional ao componente correspondente do vetor u_r . As frequências ω_r e os autovalores $u_r (r = 1, 2, \dots, n)$ são características do sistema determinadas a partir das matrizes M e K as quais por sua vez dependem dos tipos de material que compõem a estrutura e de suas dimensões. Isso implica que para um dado sistema os movimentos $q_r(t) (r = 1, 2, \dots, n)$ são únicos, exceto pela amplitude e pelo ângulo de fase. Por essa razão $q_r(t)$ são chamados de movimentos naturais, ω_r de frequências naturais de vibração e os autovetores u_r são conhecidos como modos naturais de vibração [14][19][20].

Devido aos vetores modais serem solução de um conjunto de soluções algébricas, a magnitude do vetor modal não é único, como $\alpha_r u_r$ representa o mesmo vetor modal, onde α_r representa uma constante. Para obter um conjunto de vetores modais únicos é necessário atribuir um valor para sua magnitude, esse procedimento é conhecido como normalização

vetorial [23]. Este trabalho utiliza a normalização pela massa, ou seja, a magnitude de u_r é escolhida de tal maneira que satisfaça a seguinte relação:

$$u_r^T M u_r = 1, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.69)$$

Se a mesma transformação for feita com a matriz de rigidez a seguinte relação é obtida:

$$u_r^T K u_r = \omega_r, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.70)$$

Os modos naturais possuem uma propriedade muito importante conhecida como ortogonalidade. Sendo que um conjunto ortogonal de vetores implica em um conjunto linearmente dependente, desta maneira um conjunto ortogonal pode servir como “base vetorial”, ou seja, é possível escrever outros vetores em relação a essa base através de uma transformação linear. A transformação linear que utiliza como base os vetores modais é conhecida como transformação modal. Sendo amplamente utilizada na área de vibração por facilitar a obtenção da resposta de sistemas. A principal consequência da ortogonalidade dos vetores modais $u_r (r = 1, 2, \dots, n)$ é que os movimentos naturais $q_r(t)$ podem ser excitados independentemente um dos outros [19].

Em geral as vibrações livres de um sistema de n graus de liberdade podem ser expressas através de uma combinação linear dos movimentos naturais como mostra a Equação 3.71.

$$q(t) = \sum_{r=1}^n q_r(t) = \sum_{r=1}^n c_r \cos(\omega_r t - \phi_r) u_r \quad (3.71)$$

onde as amplitudes c_r e os ângulos de fase ϕ_r desempenham o papel de constantes de integração. Estas constantes podem ser determinadas através da imposição de condições iniciais para o sistema [14].

3.2.2.1 Ortogonalidade dos Vetores Modais

Antes de aplicar a transformação modal ao caso específico das estruturas que contém dispositivos piezelétricos, será aprofundado o conceito de ortogonalidade dos vetores modais, esta propriedade é muito útil por facilitar a obtenção da resposta de sistemas com múltiplos graus de liberdade.

Considerando duas soluções distintas para o problema de autovalor do movimento livre não amortecido ω_r, u_r e ω_s, u_s , e então as associando à Equação 3.59, as seguintes relações podem ser obtidas.

$$Ku_r = \omega_r^2 Mu_r \quad (3.72)$$

$$Ku_s = \omega_s^2 Mu_s \quad (3.73)$$

Pré multiplicando a equação 3.72 por u_s^T e a equação 3.73 por u_r^T obtém-se as seguintes relações.

$$u_s^T Ku_r = \omega_r^2 u_s^T Mu_r \quad (3.74)$$

$$u_r^T Ku_s = \omega_s^2 u_r^T Mu_s \quad (3.75)$$

Devido à simetria da matriz de massa M e de rigidez K é possível reescrever as equações 3.74 e 3.75 da seguinte maneira.

$$\left(u_r^T Ku_s\right)^T = u_s^T K^T u_r = u_s^T Ku_r \quad (3.76)$$

$$\left(u_r^T Mu_s\right)^T = u_s^T M^T u_r = u_s^T Mu_r \quad (3.77)$$

Transpondo a Equação 3.75, subtraindo essa transposição da Equação 3.74 e utilizando as propriedades descritas pelas equações 3.76 e 3.77 é possível escrever obter a seguinte equação.

$$0 = \left(\omega_r^2 - \omega_s^2\right) u_s^T Mu_r \quad (3.78)$$

Então considerando que as frequências $\omega_r^2 \neq \omega_s^2$ a condição para que a Equação 3.78 seja satisfeita é dada pela Equação 3.79.

$$\mathbf{u}_s^T \mathbf{M} \mathbf{u}_r = 0 \quad (3.79)$$

A Equação 3.79 expressa a ortogonalidade dos vetores modais, ou seja, a ortogonalidade desses vetores em relação à matriz de massa. Substituindo a Equação 3.79 na Equação 3.74 obtêm-se a seguinte relação.

$$\mathbf{u}_s^T \mathbf{K} \mathbf{u}_r = 0 \quad (3.80)$$

A equação 3.80 mostra que os vetores modais também são ortogonais em relação à matriz de rigidez. Ortogonalidade de um conjunto de vetores implica na independência linear desse conjunto.

Porém quando os índices r e s são iguais os produtos $\mathbf{u}_s^T \mathbf{M} \mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_s^T \mathbf{K} \mathbf{u}_r$, não são nulos, mas sim valores reais e positivos. Como descrito na subseção anterior é utilizado a normalização pela massa para impor a condição $\mathbf{u}_s^T \mathbf{M} \mathbf{u}_r = 1$. Se todos os vetores modais forem normalizados de acordo com essa condição então os vetores são chamados de ortonormais. A ortonormalidade dos vetores modais pode então ser escrita de forma generalizada utilizando o operador delta de Kronecker, cujas propriedades foram descritas na seção 3.2.1 [19][20].

$$\begin{cases} \mathbf{u}_s^T \mathbf{M} \mathbf{u}_r = \delta_{rs} \\ \mathbf{u}_s^T \mathbf{K} \mathbf{u}_r = \omega_r^2 \delta_{rs} \end{cases} \quad r, s = 1, 2, \dots, n \quad (3.81)$$

A ortogonalidade dos vetores modais tem implicações importantes na área de vibrações, pois ela permite que o movimento de um sistema dinâmico com múltiplos graus de liberdade seja expresso em termos de vetores modais multiplicados por coeficientes dependentes do tempo. Em outras palavras, devido à ortogonalidade, os vetores modais podem servir como base para a representação dos movimentos do sistema [19].

A próxima seção fará uso das propriedades de ortogonalidade para efetuar uma transformação modal no sistema obtido a partir da modelagem por elementos finitos.

3.2.3 Transformação Modal Aplicada à Viga com Transdutores Piezelétricos

A análise modal além de ser uma poderosa ferramenta para o entendimento do fenômeno de vibração e para a obtenção da resposta de sistemas lineares, também é amplamente utilizada para a obtenção e redução de modelos dinâmicos [14].

Considere a seguinte equação obtida do modelo de elementos finitos do sistema composto pela viga e transdutores.

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{m}_{uu}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{u}_i\} \\ \{\phi_i\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{uu}] & [\mathbf{k}_{\phi u}] \\ [\mathbf{k}_{u\phi}] & [\mathbf{k}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{u}_i\} \\ \{\phi_i\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{f}_i\} \\ \{\mathbf{g}_i\} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Para simplificar a notação usa-se:

$$M_{uu} = [\mathbf{m}_{uu}], \quad K_{uu} = [\mathbf{k}_{uu}], \quad K_{u\phi} = [\mathbf{k}_{u\phi}], \quad K_{\phi u} = [\mathbf{k}_{\phi u}], \quad K_{\phi\phi} = [\mathbf{k}_{\phi\phi}] \quad (3.83)$$

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_i\}, \quad \phi = \{\phi_i\}, \quad \mathbf{F} = \{\mathbf{f}_i\}, \quad \mathbf{Q} = \{\mathbf{g}_i\} \quad (3.84)$$

Efetuada a mudança de nomenclatura a Equação 3.82 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{\phi u} \\ K_{u\phi} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Como visto no decorrer deste capítulo a primeira etapa da análise modal consiste na resolução do autoproblema do sistema dinâmico que se deseja analisar [55]. Então a fim de efetuar uma transformação modal na Equação 3.85 o problema de autovalores do sistema piezelétrico é descrito a seguir.

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{\phi u} \\ K_{u\phi} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_\phi \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_\phi \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

onde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ são os autovalores do sistema e os autovalores apresentam a seguinte configuração.

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ \Psi_u \right\} \\ \left\{ \Psi_\phi \right\}_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \left\{ \Psi_u \right\} \\ \left\{ \Psi_\phi \right\}_2 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} \left\{ \Psi_u \right\} \\ \left\{ \Psi_\phi \right\}_n \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Diferente do problema de autovalor originado da equação de movimento de Lagrange resolvido nas seções anteriores, o problema originário da Equação 3.87 apresenta graus de liberdade elétricos. Devido aos graus de liberdade elétricos introduzidos pelos elementos piezelétricos, a matriz de massa do sistema passa a ser semidefinida positiva possuindo elementos nulos na sua diagonal principal. Isso gera um novo problema, pois os autovetores que compõem a matriz Ψ não podem ser gerados utilizando a condição de ortonormalidade pela massa da Equação 3.81 [6].

Para solucionar esse problema os graus de liberdade elétricos serão suprimidos por meio de uma condensação estática, a qual consiste em reduzir os graus de liberdade do sistema. Esse procedimento é realizado escrevendo os graus de liberdade a serem reduzidos em função dos graus de liberdade principais do sistema [13][6]. No caso deste trabalho os graus de liberdade elétricos serão representados em termos dos graus mecânicos, para tal considere a segunda linha da Equação 3.81, onde se obtém a seguinte relação:

$$\Psi_\phi = -K_{\phi\phi}^{-1} K_{u\phi} \Psi_u \quad (4.88)$$

Substituindo a Equação 3.88 em 3.86 os termos nulos da matriz de massa são eliminados e uma matriz de rigidez global é formada através da interação entre as matrizes de rigidez mecânica, matriz de acoplamento piezelétrico e matriz dielétrica.

$$K_g = K_{uu} - K_{\phi u} K_{\phi\phi}^{-1} K_{u\phi} \quad (3.89)$$

Então o problema de autovalor pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$(K_g - \lambda^2 M) \Psi_u = 0 \quad (3.90)$$

Porém devido aos coeficientes piezelétricos serem muito menores que os modos de elasticidade pode-se considerar $K_g = K_{uu}$, então o problema de autovalor descrito pela equação 3.90 pode ser simplificado da seguinte maneira:

$$(K_{uu} - \omega^2 M) \Psi_u = 0 \quad (3.91)$$

Então é possível concluir que os piezelétricos não influenciam significativamente os modos de vibração e as frequências naturais da estrutura.

Uma vez resolvido o autoproblema da Equação 3.85 pode-se efetuar uma transformação modal, utilizando como base os autovetores da Equação 3.91. Dessa maneira é possível escrever os deslocamentos nodais através das coordenadas generalizadas da seguinte maneira.

$$u(t) = \Psi_u \eta(t) \quad (3.92)$$

Expandindo a Equação 3.85 e substituindo a relação mostrada na Equação 3.92 obtém-se o conjunto de equações 3.93.

$$\begin{cases} M_{uu} \Psi_u \ddot{\eta}(t) + K_{uu} \Psi_u \eta(t) + K_{\phi u} \phi(t) = F \\ K_{u\phi} \Psi_u \eta(t) + K_{\phi\phi} \phi(t) = Q \end{cases} \quad (3.93)$$

Para fazer uso das propriedades da ortogonalidade descritas pelo conjunto de equações 3.81, pré multiplica-se a primeira equação de 3.93 por Ψ_u^T e como resultado é obtida a seguinte equação.

$$\Psi_u^T M_{uu} \Psi_u \ddot{\eta}(t) + \Psi_u^T K_{uu} \Psi_u \eta(t) + \Psi_u^T K_{\phi u} \phi(t) = \Psi_u^T F \quad (3.94)$$

Fazendo uso das propriedades da ortonormalidade a Equação 3.94 adquire a seguinte forma:

$$\ddot{\eta}(t) + \text{diag}(\omega_i^2) \eta(t) = \Psi_u^T F - \Psi_u^T K_{\phi u} \phi(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.95)$$

Para evidenciar a força de origem mecânica e de origem elétrica (geradas pelo atuador piezelétrico) a equação 3.95 é reescrita da seguinte maneira.

$$\ddot{\eta}(t) + \text{diag}(\omega_r^2)\eta(t) = F_u - F_\phi, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.96)$$

onde $F_u = \Psi_u^T F$ é a força mecânica modal e $F_\phi = \Psi_u^T K_{\phi u} \phi(t)$ é a força piezelétrica modal [56]. Da segunda linha da Equação 3.93 extrai-se a relação entre carga elétrica e deslocamento nodal generalizado.

$$Q = K_{u\phi} \Psi_u \eta(t) + K_{\phi\phi} \phi(t) \quad (3.97)$$

A Equação 3.97 a dinâmica do sensor piezelétrico, então desconsiderando a parcela da tensão elétrica têm-se:

$$Q_s = K_{u\phi} \Psi_u \eta(t) \quad (3.98)$$

A última parcela da Equação 3.97 é eliminada devido à tensão elétrica no sensor piezelétrico ser nula. A fim de representar o sistema dinâmico da viga com maior fidelidade, a Equação 3.96 será acrescida de um termo que representará o amortecimento da estrutura. O parâmetro que representa o amortecimento do sistema é denominado de C , efetuando a transformação na parcela de amortecimento é obtida o resultado [55].

$$\Psi_u^T C \Psi_u = \text{diag}(2\zeta_r \omega_r), \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.99)$$

onde os parâmetros ζ são obtidos através de uma análise modal experimental, este procedimento será detalhado posteriormente no capítulo de validação do modelo.

Inserindo a equação 3.99 na Equação 3.96 e considerando a forma final da equação de carga para do sensor (Equação 3.98) obtém-se o seguinte conjunto modal de equações.

$$\begin{cases} \ddot{\eta}(t) + \text{diag}(2\zeta_r \omega_r) \dot{\eta}(t) + \text{diag}(\omega_r^2) \eta(t) = F_u - F_\phi \\ Q_s = K_{u\phi} \Psi_u \eta(t) \end{cases} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.100)$$

A Equação 3.100 rege a interação entre os transdutores piezelétricos e a viga. A primeira linha dessa equação diz respeito à dinâmica da viga e do atuador, a segunda traduz a relação carga deslocamento do sensor.

Uma vez efetuada a transformação modal nas equações que representam a dinâmica do sistema, essas equações adquirem a forma desacopladas, facilitando dessa forma a realização por espaço de estados. O capítulo 4 formulará a representação do sistema por espaço de estados através do conjunto de equações 3.100

CAPÍTULO 4

VALIDAÇÃO DO MODELO E REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA

4.1 Validação do Modelo

A fim de validar o modelo mecânico do caso de estudo deste trabalho obtido no capítulo 3 este capítulo apresenta uma análise modal experimental. Os resultados obtidos através deste experimento serão comparados com os resultados da simulação realizados com o software Ansys[®]. A validação de modelos obtidos por MEF é uma aplicação da análise modal que vem sendo objeto de estudo de vários pesquisadores, atraindo atenção tanto das áreas acadêmicas como industriais [14]. O interesse por esse tópico pode ser facilmente explicado pela capacidade da análise modal em revelar o verdadeiro comportamento dinâmico do sistema, traduzindo-o em propriedades modais como frequências naturais e formas modais. Com isso as riquezas de informações obtidas através desse método possibilitam não só a validação do modelo MEF como o ajuste do mesmo através da utilização de parâmetros obtidos experimentalmente [22].

A análise modal experimental efetuada neste trabalho utilizou como mecanismo de excitação um martelo de impacto e como dispositivo de medição um vibrômetro laser Doppler. O laser é usado para medir a velocidade de pontos pré estabelecidos na estrutura, enquanto esta era excitada pelo martelo de impacto. Os sinais de força originados pelo martelo e os sinais de velocidade do laser foram então enviados ao sistema analisador de sinais (LMS). Esse sistema relacionou os sinais obtidos pelo processo de medição retornando as funções respostas de Fourier (FRF). Através das FRFs dos pontos medidos o sistema compôs os modos de vibração das frequências naturais da estrutura. Juntamente com os modos de vibração são conseguidos os coeficientes de amortecimento modais, os quais serão posteriormente utilizados para a inserção de amortecimento no modelo EF original, que até então era não amortecido. A obtenção do amortecimento por vias experimentais tende a tornar o modelo mais fidedigno com a estrutura real [23].

O processo de validação do modelo EF consistiu na obtenção da solução harmônica e modal através de simulações utilizando o Ansys[®] e na posterior comparação dos resultados simulados com os obtidos pela medição, sendo o resultado da solução harmônica e modal as FRFs e os modos de vibração do modelo, respectivamente. Para esse trabalho o processo de validação juntamente com o levantamento do amortecimento modal pode ser representado de maneira sucinta pelo diagrama da Figura 4.1.

faixa de frequências. Além disso, o martelo de impacto é de simples utilização e não necessita de elementos de conexão com a estrutura, como os excitadores eletrodinâmicos, evitando assim desvios de medição devido à interferência de massa dos elementos de acoplamento. A faixa de frequência coberta por um martelo dependerá de sua massa da rigidez da “sua cabeça de impacto” e também da massa e rigidez da estrutura que será impactada. O sistema de medição do martelo é composto por um material piezolétrico o qual quando pressionado sofre polarização gerando carga elétrica em função da força aplicada. Como o sensor do martelo se baseia no efeito direto da piezeletricidade, ele é denominado transdutor ativo não necessitando assim de alimentação externa para a geração de sinal.

O dispositivo de medição que integra a cadeia é responsável por obter a resposta do sistema ao sinal de excitação. Existe uma grande variedade de sensores que desempenham esse papel na análise modal dentre eles os mais comumente usados são os transdutores de força e os acelerômetros. Porém, neste trabalho é utilizada a medição da velocidade de pontos específicos da estrutura através de um vibrômetro laser Doppler. O tamanho e massa dos transdutores têm implicações que influenciam o comportamento dinâmico das estruturas, por exemplo, quanto menor for a massa de uma estrutura maior será a interferência da massa de um acelerômetro afixado nessa. Desse modo a resposta obtida por esse sensor pode desviar sobremaneira da realidade. Porém, os recentes avanços de sistemas transdutores baseados em laser vêm disseminando a utilização dessa tecnologia no ramo de vibrações possibilitando desse modo a realização de medições sem a interferência da massa do sensor. O vibrômetro laser é usado para medir a velocidade instantânea de pontos especificados na estrutura. A medição da velocidade baseia-se na detecção da mudança da frequência Doppler entre o feixe de luz emitido e o refletido pela superfície em movimento.

O analisador de sinais pode ser considerado o elemento principal da cadeia de medições. Nele estão conectados o mecanismo de excitação e o dispositivo de medição. Entre o analisador de sinais e os demais dispositivos da cadeia pode haver amplificadores e outros equipamentos visando condicionar os sinais gerados para a grandeza e amplitude elétrica requeridas pelo analisador. O objetivo do analisador de sinais é compor a resposta dinâmica da estrutura através dos sinais obtidos pelo mecanismo de excitação e dispositivos de medição além de verificar a magnitude e a fase desses sinais. A resposta dinâmica da estrutura é representada através de FRFs, as quais são processadas e obtidas pelo analisador usando o algoritmo da transformada rápida de Fourier (TRF). Basicamente os analisadores TRF convertem sinais no tempo contínuo gerados pelos transdutores em sinais de tempo discretos,

para que esses possam ser processados por computadores digitais. Então a cadeia de medição utilizada neste trabalho calcula a FRF da velocidade a partir das medidas da força de excitação no tempo e da resposta dinâmica da velocidade. A topologia dessa cadeia é mostrada na Figura 4.2.

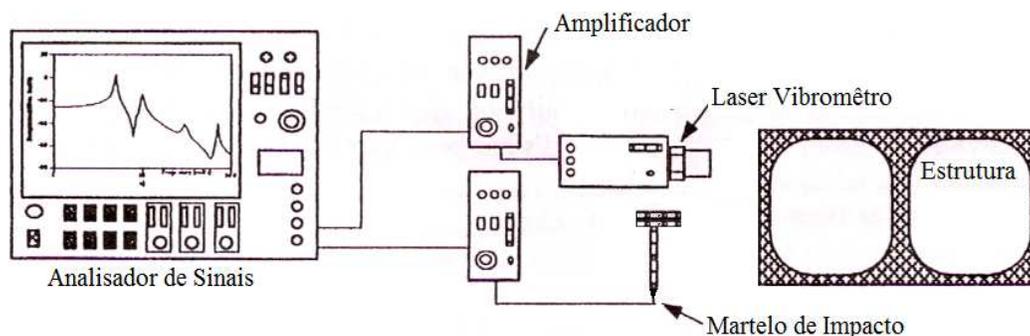


Figura 4.2 – Topologia da cadeia de medição

4.1.3 Objetivos da Análise Modal Experimental

O objetivo da análise modal experimental para esse trabalho é validar o modelo EF que servirá de base para o projeto do sistema de controle, além de obter o amortecimento da estrutura. Para atingir esses objetivos o teste modal se focará em:

- Obter as frequências modais da estrutura
- Obter as formas modais e o amortecimento da estrutura
- Comparar o modelo EF da estrutura com os resultados da medição obtidos a partir da estrutura real

As formas modais priorizadas na medição foram as de flexão, pois essas são as que mais contribuem para o deslocamento global da viga e também são os modos que o PZT consegue atuar com maior facilidade. A faixa de frequência que a medição conseguirá cobrir dependerá fortemente do número de pontos medidos na estrutura. No processo de medição foram utilizados 28 pontos de medição e um ponto de impactação. As medições foram feitas com a viga engastada e a disposição dos pontos de medição é mostrada na Figura 4.3.

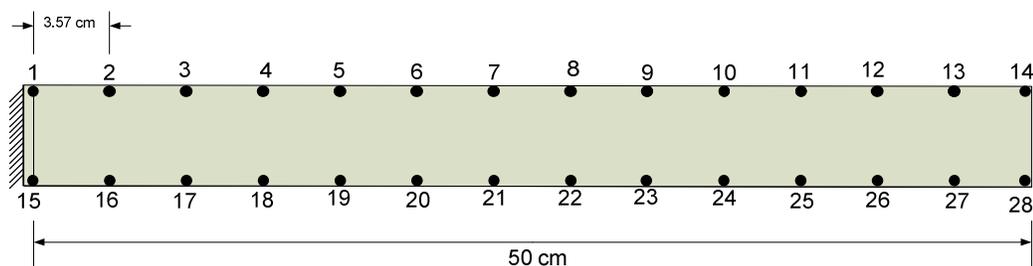


Figura 4.3 – Disposição dos pontos usados na medição

O ponto de impactação foi escolhido como sendo o ponto 4 da figura 4.3, porém na face oposta da ilustrada pela Figura 4.3.

Como os modos de maior interesse são os modos de flexão e esses são representados por componentes senoidais, a escolha dos pontos de medição se baseou no critério de amostragem de Nyquist o qual diz que a frequência de amostragem deve ser no mínimo duas vezes maior que a maior frequência do sinal a ser amostrado. Trazendo a definição do critério de amostragem de Nyquist para o domínio espacial no qual a viga está representada, por analogia pode-se relacionar a frequência de amostragens ao número de pontos medidos e a frequência do sinal à frequência da senóide que representa a forma modal de um determinado modo de vibração. Dessa maneira o número de modos de flexão que a análise modal conseguirá identificar dependerá do número de pontos medidos na direção x da figura 5.3. A insuficiência desses pontos pode ocasionar um fenômeno conhecido como “aliasing” espacial. O “aliasing” espacial ocorre quando a discretização da estrutura em pontos de medição não é suficiente para detectar todos os nós e anti-nós da resposta, ocasionando um erro ao se estimar as frequências de resposta e formas modais, principalmente nos modos de frequências mais altas [14] [24].

Experimentos preliminares mostraram que para a configuração de pontos da Figura 4.3 as medições conseguem obter, de maneira razoável, as frequências e formas modais contidas na banda de 0 até 1024 Hz. Devido a isso, será efetuada para essa faixa de frequência.

4.1.4 Resultados Experimentais

Essa seção mostrará os resultados da medição e fará uma comparação entre esses e os obtidos através de simulações usando o Modelo EF. Primeiramente serão apresentados os coeficientes de amortecimento modal, pois esses coeficientes serão utilizados para compor o

amortecimento da estrutura. Então, efetuando o procedimento de medição descrito na seção 4.2 e 4.3 obtiveram-se os coeficientes de amortecimento modais contidos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Coeficientes de Amortecimento Modal

Modo de Vibração	Frequência (Hz)	Coefficiente de Amortecimento (%)
2°	62.1678	0.41
3°	172.0349	0.30
4°	221.4077	0.12
5°	335.9370	0.30
6°	553.7387	0.26
7°	825.0912	0.33

O primeiro modo de vibração não consta na Tabela 4.1, pois o mesmo não conseguiu ser identificado pelas medições, devido a incapacidade da cadeia de medição detectar modos com frequências inferiores a 15 Hz. De posse dos coeficientes de amortecimento modais da Tabela 4.1 foi realizada uma média dos mesmos e essa considerada o coeficiente de amortecimento (ξ) da estrutura. Então um $\xi=0.00287$ foi inserido no modelo EF da estrutura, a fim de se validar esse modelo foram comparadas as FRFs da estrutura obtidas pela análise modal experimental e as obtidas através de simulação usando o software EF Ansys. As FRFs foram medidas seguindo o procedimento detalhado pela seção 4.3. Já para as FRFs simuladas utilizou-se uma análise harmônica na qual a faixa de frequência considerada foi de 0 a 1024 Hz, sendo que uma força unitária aplicada no ponto 4 da Figura 4.3 no sentido positivo do eixo z excitou a estrutura; Como resultado obteve-se a resposta de deslocamento para cada ponto da Figura 4.3. Esses resultados foram exportados para o software Matlab onde os deslocamentos de cada ponto foram convertidos em velocidade e posteriormente suas FRFs foram traçadas.

Para se efetuar o procedimento de validação do modelo EF foram escolhidos 4 diferentes pontos da estrutura, os pontos 3, 11, 19, 24. As respostas dinâmicas medidas e simuladas serão comparadas para esses pontos nas figuras a seguir.

A Figura 4.4 mostra a FRR experimental e simulada para o ponto 3.

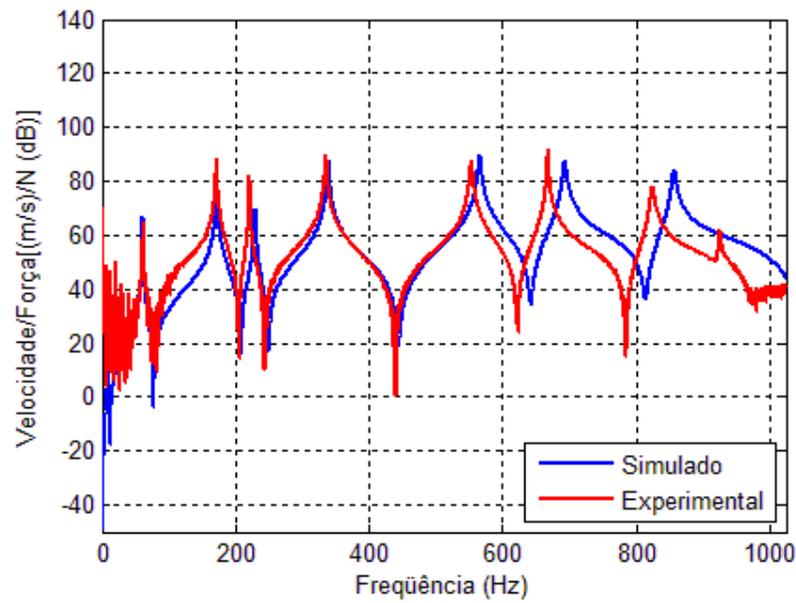


Figura 4.4 – Comparação entre a FRF experimental e simulada do ponto 3

A Figura 4.5 mostra a FRR experimental e simulada para o ponto 11.

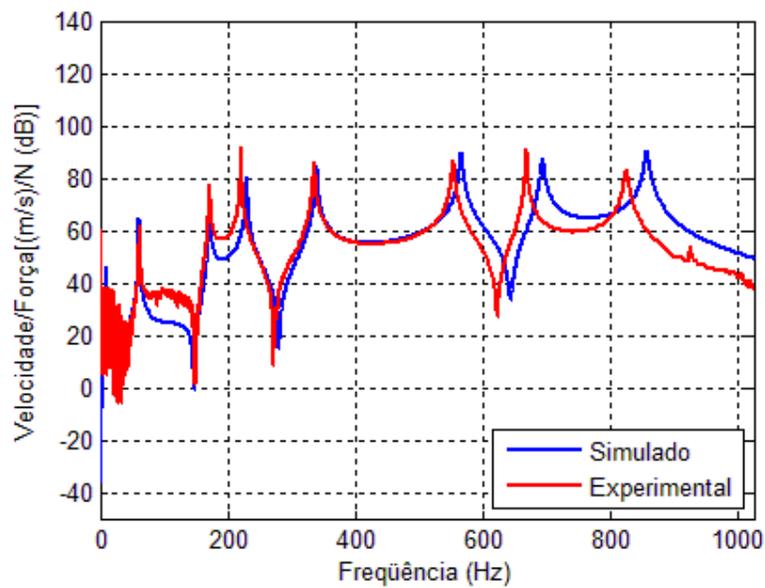


Figura 4.5 – Comparação entre a FRF experimental e simulada do ponto 11

A Figura 4.6 mostra a FRR experimental e simulada para o ponto 19.

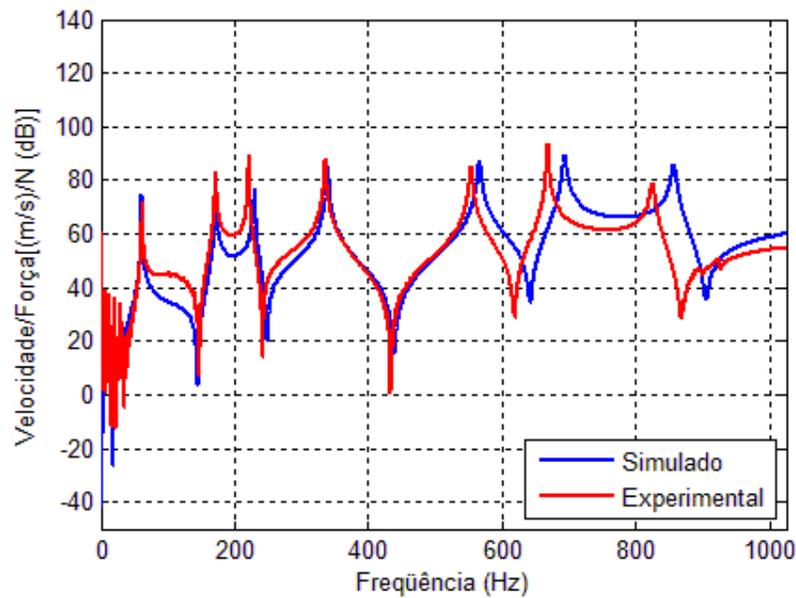


Figura 4.6 – Comparação entre a FRF experimental e simulada do ponto 19.

A figura 4.7 mostra a FRR experimental e simulada para o ponto 24.

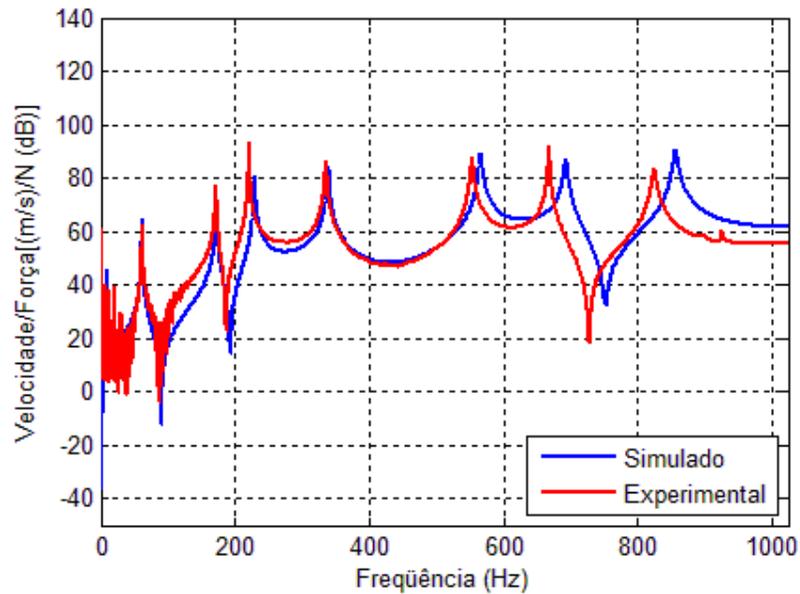


Figura 4.7 – Comparação entre a FRF experimental e simulada do ponto 24.

Como mostram as figuras 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7, as FRFs da estrutura apresentam comportamentos similares, sofrendo um pequeno desvio a partir de 600 Hz o qual aumenta conforme a frequência cresce. Esse fenômeno pode ser explicado pelo “alising” espacial. Também é possível observar nessas FRFs que as frequências até 20 Hz para o caso

experimental apresentam grande influência de ruídos; Por esse motivo o analisador de sinais não conseguiu recuperar o primeiro modo de vibração da estrutura.

Com as FRFs da estrutura o analisador de sinais identifica a frequência natural de cada modo e compõe suas respectivas formas modais. A Tabela 4.2 compara as frequências modais obtidas experimentalmente com as obtidas através de simulações.

Tabela 4.2 – Comparação entre as frequências modais experimentais e simuladas

Modo	Frequência Modal (Hz)	
	Simulado	Experimental
1°	9.8463	----
2°	61.4692	62.1678
3°	172.2766	172.0349
4°	229.9071	221.4077
5°	339.3191	335.9370
6°	566.0286	553.7387
7°	856.5498	825.0912

As formas modais do Modelo EF e da estrutura real, cujas frequências naturais foram apresentadas na Tabela 4.2 são mostradas a seguir:

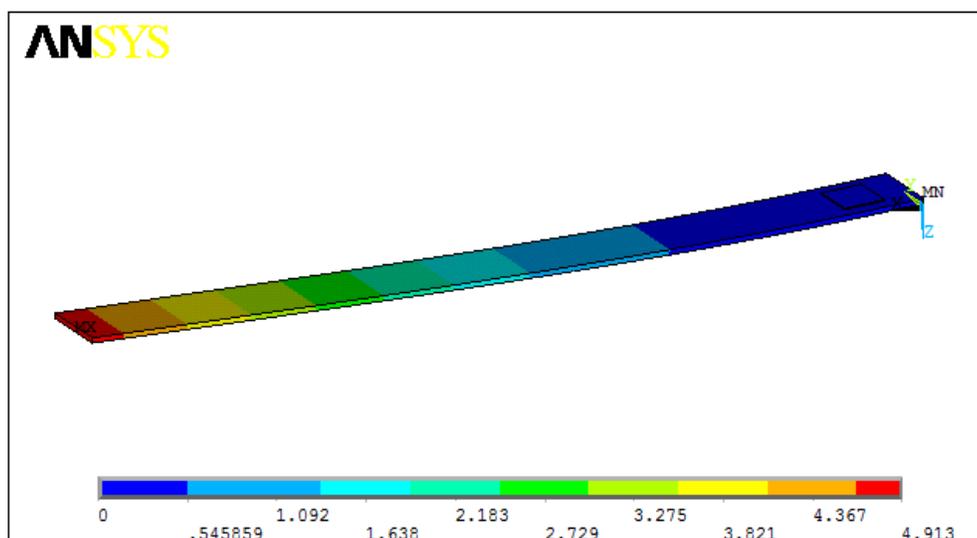


Figura 4.8 – Primeiro modo de vibração do Modelo EF

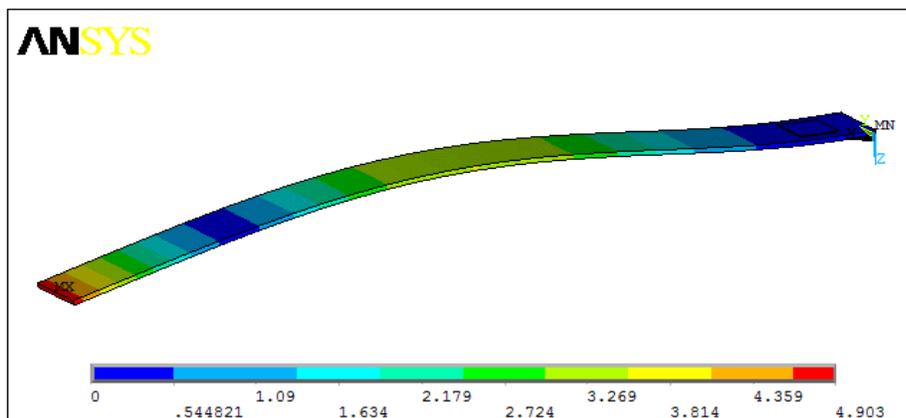


Figura 4.9 – Segundo modo de vibração do Modelo EF

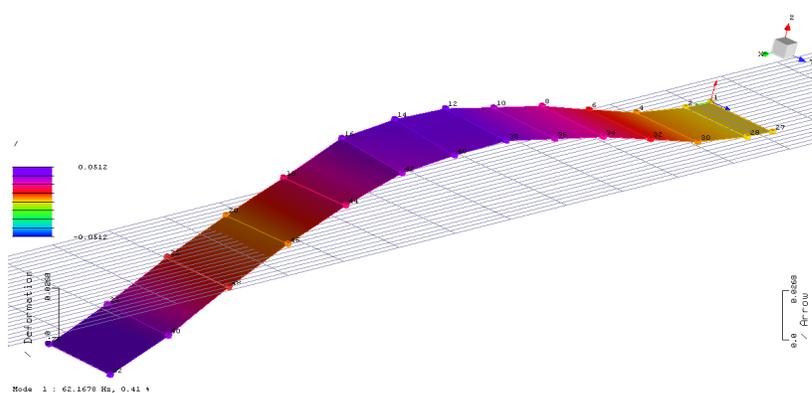


Figura 4.10 – Segundo modo de vibração da estrutura real

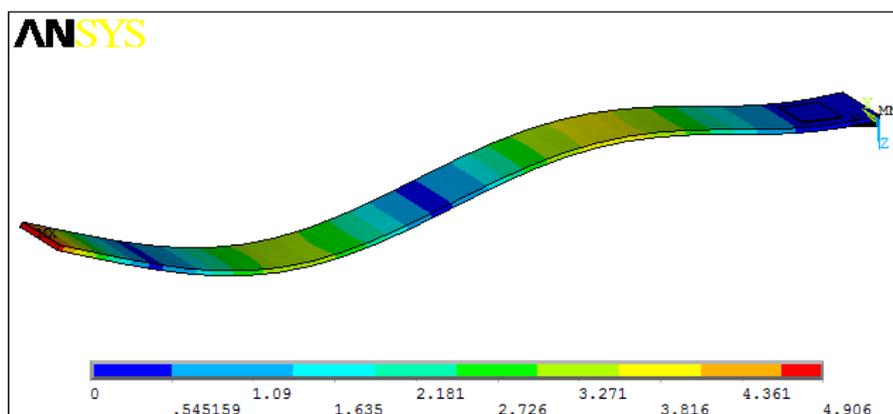


Figura 4.11 – Terceiro modo de vibração do Modelo EF

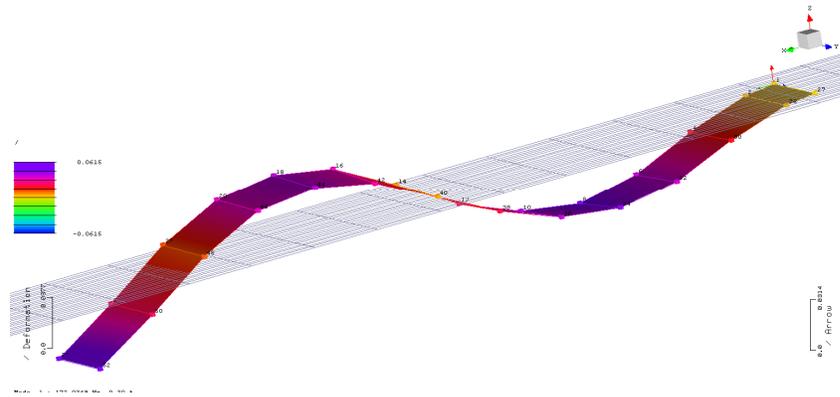


Figura 4.12 – Terceiro modo de vibração da estrutura real

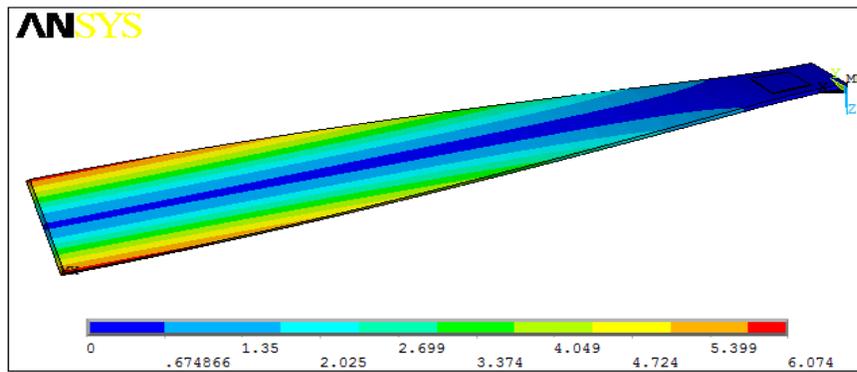


Figura 4.13 – Quarto modo de vibração da estrutura real

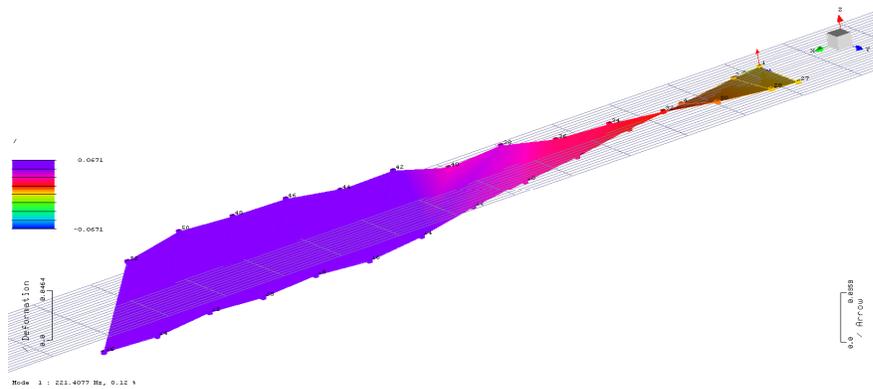


Figura 4.14 – Quarto modo de vibração da estrutura real

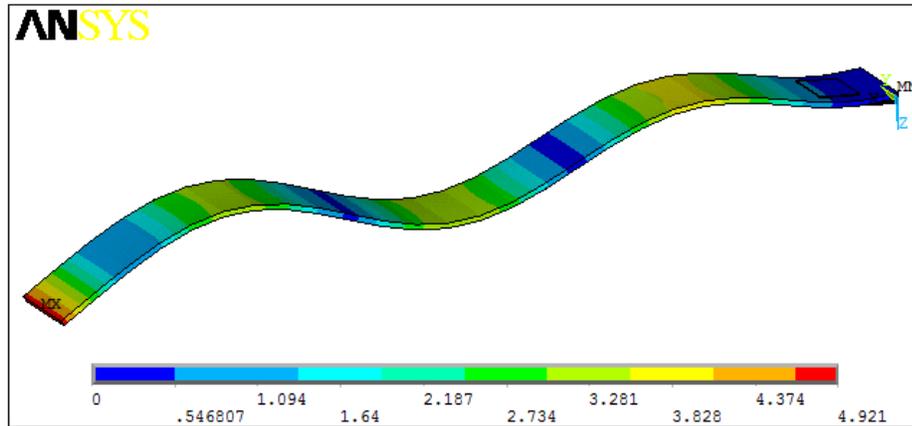


Figura 4.15 – Quinto modo de vibração do modelo EF

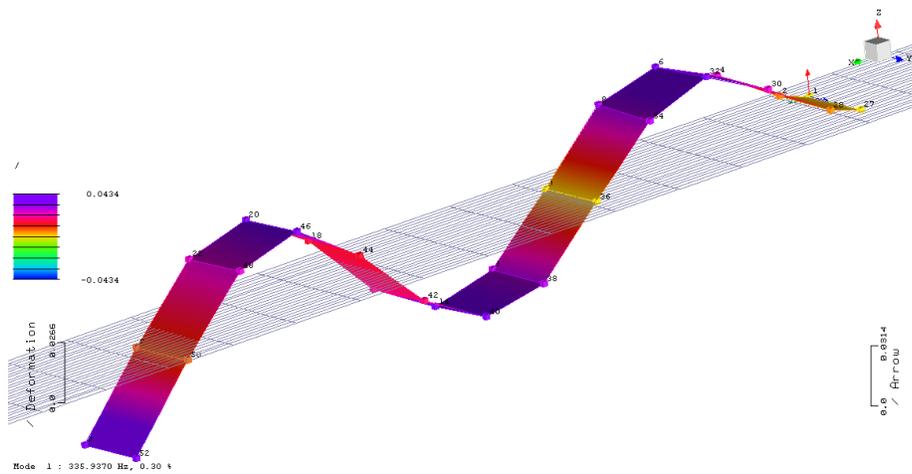


Figura 4.16 – Quinto modo de vibração da estrutura real

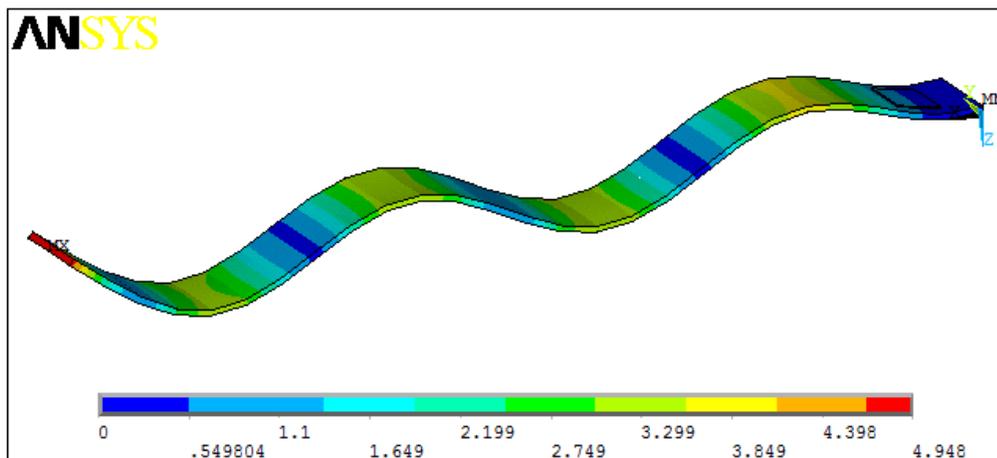


Figura 4.17 – Sexto modo de vibração do modelo EF

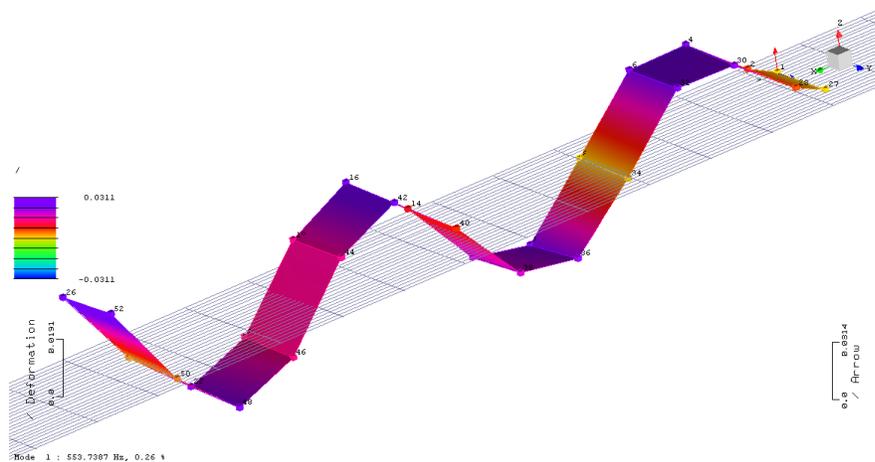


Figura 4.18 – Sexto modo de vibração da estrutura real

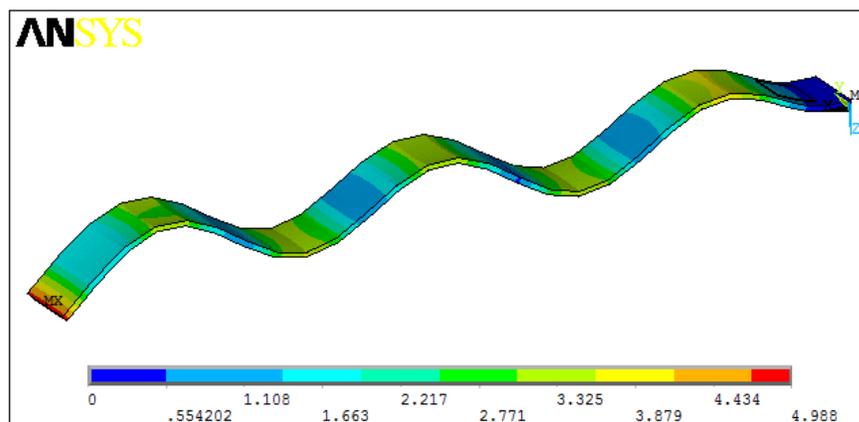


Figura 4.19 – Sétimo modo de vibração do Modelo EF

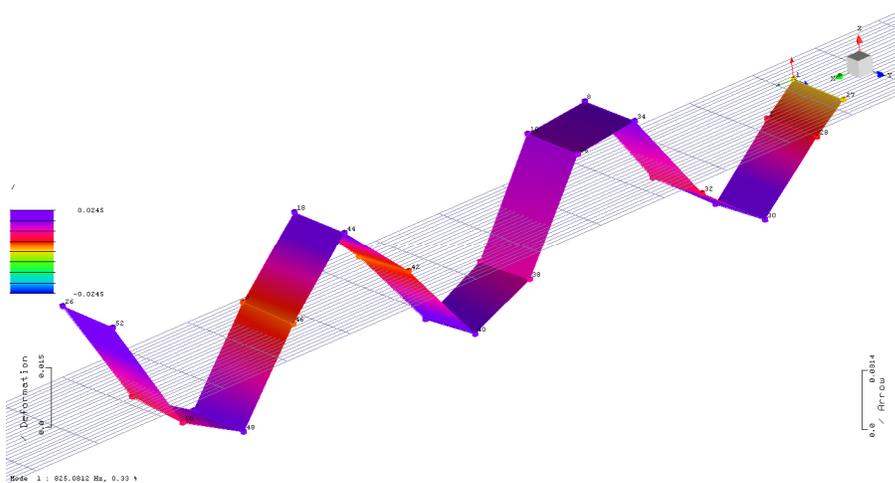


Figura 4.20 – Sétimo modo de vibração da estrutura real

Sendo as cores dos modos de vibração das figuras 4.9 à 4.20 uma escala deslocamentos, porém é válido salientar que as formas modais representadas por essas figuras são apenas qualitativas e representam a maneira que a estrutura se deslocaria quando excitada em uma frequência de vibração.

4.1.5 Considerações Finais

De acordo com a Tabela 4.2 pode-se observar que de maneira geral as frequências modais do Modelo EF são próximas as da estrutura real, se desviando apenas poucos Hertz dessa. Porém, a partir do sexto modo as diferença entre o modelo e a estrutura real aumentam. Essa conclusão pode ser formulada ao observar-se o aumento do desvio das FRFs e a ampliação da diferença entre as frequência modais. Já as formas modais recuperadas pelo analisador de sinais condizem com as obtidas pelo simulador EF. Esse resultado já poderia ser esperado tendo em vista que a grande similaridade das FRFs uma vez que o analisador compõe os modos de vibração da estrutura a partir das FRFs obtidas pela medição de cada ponto da Figura 4.3. Na Figura 4.18 e 4.20 observa-se uma leve degradação nos modos de vibração da estrutura quando comparados aos modos do Modelo EF (Figura 4.17 e 4.19 respectivamente), essa degradação se deve ao número de pontos medidos os quais começam a ser insuficientes para recuperar com fidelidade os modos de vibrações para frequências mais altas. Então visando evitar a ocorrência do “alising espacial” decidiu-se, conservativamente, considerar o Modelo FE válido até a frequência de 1024 Hz .

A frequência de validade do modelo pode ser expandida aumentando os pontos de medição ou utilizando técnicas de ajuste de modelos. Porém para a aplicação deste trabalho os resultados da validação são satisfatórios. Uma vez validado o Modelo EF da estrutura o sistema será escrito na forma de espaço de estados e funções de transferência.

4.2 Representação do Sistema

Com a obtenção e a validação de um modelo para o caso de estudo, esse trabalho ingressa na etapa de projeto do sistema de controle. Sendo o primeiro passo dessa etapa a representação do sistema já modelado através de uma abordagem de controle, onde as entradas e saídas são evidenciadas. Neste capítulo serão apresentadas duas maneiras de se representar sistemas: a função de transferência e o espaço de estados.

A representação por funções de transferência é a base do controle clássico, essa representação é formulada no domínio da frequência através das transformadas de Laplace ou da transformada Z a qual é utilizada quando dispositivos digitais são usados para compor o sistema de controle [26]. As funções de transferência expressam a relação entrada/saída de um dado sistema no domínio da frequência, possuindo diversas ferramentas de análise consagradas como o diagrama de Bode e de Nyquist, as quais vêm sendo desenvolvidas desde 1920 [25]. Além disso, essas representações permitem que o projetista de controle utilize diversas ferramentas de projeto consolidadas como lugar das raízes, “loopshaping”, margens de ganho e fase, as quais normalmente geram controladores que possuem estruturas conhecidas como o PID e compensadores de fase [25][26][28]. Porém, as funções de transferência não são capazes de representar sistemas como múltiplas entradas e/ou múltiplas saídas, além de não possibilitar o entendimento do comportamento das variáveis do sistema e de suas respectivas dinâmicas [28].

A representação por espaços de estados é obtida diretamente das equações diferenciais do sistema, sendo assim formulada no domínio do tempo e podendo, diferentemente das funções de transferência, ser utilizada tanto para sistemas lineares quanto para não lineares. O espaço de estados é a representação utilizada pela abordagem de controle moderna da qual Kalman foi um dos precursores. Ele acreditava que os métodos de controle baseados em espaço de estados possibilitavam um melhor entendimento da natureza física do sistema bem como a descrição de seus estados permitindo desse modo definir e explicar conceitos fundamentais como controlabilidade e observabilidade [27].

A partir da Equação 3.100, apresentada no capítulo 3, serão escritas as equações de espaço de estados do sistemas, as quais posteriormente serão transformadas em funções de transferência.

4.2.1 Espaço de Estados

Pode-se definir espaço de estados como sendo uma representação matemática para modelos dinâmicos de sistemas físicos formados por equações diferenciais de ordem n , onde essas podem ser reescritas de tal modo que o sistema passe a ser descrito por n equações diferenciais de primeira ordem, cujas variáveis são denominadas de estados [26]. Mais especificamente os estados de um sistema dinâmico são um conjunto de n variáveis que conseguem descrever completamente o comportamento do sistema com a evolução do tempo.

Para o caso do sistema formado pela viga e pelos transdutores piezelétricos a equação diferencial 3.100 que representa o modelo modal do sistema será reescrita na forma de espaço de estados. Neste caso os estados do sistema serão os modos de vibração da estrutura. Desta maneira pode-se defini-se o vetor de estados do sistema através da Equação 4.1.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(\mathbf{t}) &= [\eta_1(\mathbf{t}), \eta_2(\mathbf{t}), \dots, \eta_n(\mathbf{t})]^T \\ \mathbf{x}_2(\mathbf{t}) &= \dot{\mathbf{x}}_1(\mathbf{t})\end{aligned}\quad (4.1)$$

Usando o vetor definido na Equação 4.1 e reescrevendo a Equação 3.100, obtém-se a Equação 4.2.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(\mathbf{t}) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(\mathbf{t}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[n \times n]} & \mathbf{I}_{[n \times n]} \\ -\text{diag}(\omega_r^2, \dots, \omega_n^2) & -2 \text{diag}(\zeta_r \omega_r, \dots, \zeta_n \omega_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(\mathbf{t}) \\ \mathbf{x}_2(\mathbf{t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[n \times n_u]} \\ [\Psi_u]^T \end{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{t}) + \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[n \times n_\phi]} \\ -[\Psi_u]^T [K_{\phi u}] \end{bmatrix} \mathbf{u}_\phi(\mathbf{t})\end{aligned}\quad (4.2)$$

onde os índices n_u representam o número de graus de liberdade mecânicos do sistema, n_ϕ graus de liberdade elétricos do sistema e n representa o número de modos de vibração escolhidos para representar o sistema. Já o índice r apresenta a seguinte forma $r = 1, 2, \dots, n$.

Usando os vetores definidos na Equação 4.1 pode-se reescrever a Equação 3.98 da seguinte maneira:

$$\mathbf{y}_Q(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} [K_{u\phi}] [\Psi_u] & \mathbf{0}_{[n_\phi \times n]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(\mathbf{t}) \\ \mathbf{x}_2(\mathbf{t}) \end{bmatrix}\quad (4.3)$$

A relação entre os estados do sistema e o deslocamento de cada nó do modelo EF também pode ser escrita na forma de espaço de estados a partir da Equação 3.92, originando a seguinte equação.

$$\mathbf{y}_u(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} [\Psi_u] & \mathbf{0}_{[n_u \times n]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(\mathbf{t}) \\ \mathbf{x}_2(\mathbf{t}) \end{bmatrix}\quad (4.4)$$

Das equações 4.2, 4.3 e 4.4 obtêm-se as seguintes matrizes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_{[2n \times 2n]} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[n \times n]} & \mathbf{I}_{[n \times n]} \\ -\text{diag}(\omega_r^2, \dots, \omega_n^2) & -2\text{diag}(\zeta_r \omega_r, \dots, \zeta_n \omega_n) \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{MEC[2n \times n_u]} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[n \times n_u]} \\ [\boldsymbol{\psi}_u]^T \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{PZT[2n \times n_\phi]} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[n \times n_\phi]} \\ -[\boldsymbol{\psi}_u]^T [K_{\phi u}] \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{MEC[n_u \times 2n]} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\psi}_u] & \mathbf{0}_{[n_u \times n]} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{PZT[2n \times n_\phi]} = \begin{bmatrix} [K_{u\phi}] [\boldsymbol{\psi}_u] & \mathbf{0}_{[n_\phi \times n]} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Na área de controle a matriz \mathbf{A} é conhecida como matriz de estados, \mathbf{B}_{MEC} e \mathbf{B}_{PZT} como matrizes de entrada, \mathbf{C}_{MEC} e \mathbf{C}_{PZT} são as matrizes de saída. Utilizando o conjunto de matrizes apresentadas na Equação 4.5 é possível escrever as equações 4.2, 4.3 e 4.4 na forma compacta apresentada pela Equação 4.6.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A} \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_{PZT} \mathbf{u}_\phi(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_{MEC} \mathbf{F}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{y}_Q(\mathbf{t}) = \mathbf{C}_{PZT} \mathbf{x}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{y}_u(\mathbf{t}) = \mathbf{C}_{MEC} \mathbf{x}(\mathbf{t}) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

O sistema da equação 4.6 pode ser representado pelo diagrama de blocos da Figura 4.21.

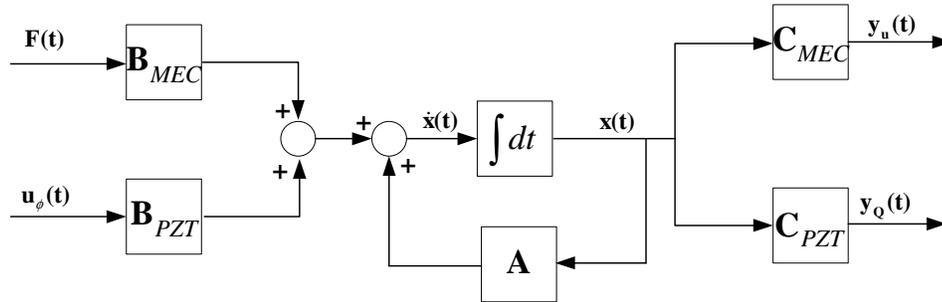


Figura 4.21 – Diagrama de blocos do sistema na representação por espaço de estados.

Pela Figura 4.21 é possível observar que o sistema apresenta duas entradas. Uma entrada é considerada mecânica e representa uma perturbação no sistema onde uma força $\mathbf{F}(t)$ atua em algum ponto da viga, a outra entrada é chamada de elétrica e representa o sinal de controle, possuindo a forma de tensão elétrica $\mathbf{u}_\phi(t)$ aplicada no terminal do atuador piezoeletrico. O sistema da Figura 4.21 também possui duas saídas, uma elétrica e outra mecânica. A saída elétrica é a carga elétrica nos terminais do sensor piezoeletrico, já a mecânica é o deslocamento dos nós da estrutura.

Na realidade a saída existente é unicamente a elétrica, sendo a saída mecânica obtida apenas por meios de simulações. Porém a saída mecânica pode ser utilizada como uma saída de desempenho para o projeto do controlador.

4.2.2 Função de Transferência

A função de transferência de um sistema representado por uma equação diferencial linear invariante no tempo é definida como relação entre a transformada de Laplace da saída, a função resposta e a transformada de Laplace da entrada, conhecida como função excitação [26]. De acordo com essa definição podemos concluir que as funções de transferência caracterizam uma relação entrada e saída de sistemas. Logo, para representar o caso de estudo desse trabalho utilizando essa abordagem torna-se necessário avaliar as entradas e saídas do sistema. Considerando as formulações realizadas na seção 4.2.1 observa-se que o sistema possui duas entradas e duas saídas. Assim a representação em funções de transferência do mesmo necessitará de quatro relações. As quatro funções de transferência serão obtidas da representação de espaço de estados já desenvolvidas neste capítulo. A relação entre função de transferência e espaço de estados pode ser obtida considerando a representação de espaço de estados padrão mostrada na Equação 4.7.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A} \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B} \mathbf{u}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{C} \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{D} \mathbf{u}(\mathbf{t}) \end{cases} \quad (4.7)$$

Realizando a transformada de Laplace no conjunto de Equações 4.7 e posteriormente substituindo a primeira linha na segunda obtém-se a seguinte relação:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (4.8)$$

Antes de utilizar a Equação 4.8 é válido esclarecer alguns pontos em relação às matrizes que compõem o conjunto de equações 4.6. A matriz $[\Psi_{\mathbf{u}}]$ possui a seguinte forma:

$$[\Psi_{\mathbf{u}}] = \begin{bmatrix} \Psi_{\mathbf{u}_1}(o_1) & \cdots & \Psi_{\mathbf{u}_n}(o_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{\mathbf{u}_1}(o_{n_u}) & \cdots & \Psi_{\mathbf{u}_n}(o_{n_u}) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Onde n é o número de modos de vibração do sistema e o denota a coordenada do nó do modelo EF da estrutura. Sendo que cada coluna da matriz $[\Psi_{\mathbf{u}}]$ representa uma forma modal, como foi visto no capítulo 3 as formas modais são representadas por senoides cuja variável é o espaço, porém como no caso do MEF o espaço é discreto as formas serão vetores e seu número de elementos será o número de graus de liberdade mecânicos da estrutura n_u , sendo o índice o a orientação espacial de um dado grau de liberdade. Os índices de orientação espacial dos elementos dos vetores modais são definidos de o_1 até o_{n_u} . Já a matriz

$-[\Psi_{\mathbf{u}}]^T [K_{\phi_u}]$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$-[\Psi_{\mathbf{u}}]^T [K_{\phi_u}] = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

A matriz descrita pela equação 4.10 teria a dimensão a $n \times n_\phi$ porém devido a condição de equipotencialidade elétrica dos transdutores piezelétrico essa matriz terá a dimensão de $n \times 1$.

Aplicando a relação da Equação 4.8 no sistema representado pela Equação 4.6, utilizando as notações definidas em 4.9 e 4.10 e considerando apenas as entradas e saídas de interesse, obtêm-se as funções de transferência do sistema.

Considerando apenas a entrada mecânica $\mathbf{F}(\mathbf{t})$, sendo esta entrada a força incidente no nó o_i , e a saída mecânica $\mathbf{y}_u(\mathbf{t})$, sendo esta saída o deslocamento do nó o_o , encontra-se a função de transferência dada pela Equação 4.11.

$$\mathbf{G}_{\mathbf{F}, \mathbf{y}_u}(\mathbf{s}) = \frac{Y_u(s, o_o)}{F(s, o_i)} = \sum_{r=1}^n \frac{\Psi_{\mathbf{u}r}(o_o) \Psi_{\mathbf{u}r}(o_i)}{s^2 + 2\zeta_r \omega_r s + \omega_r^2} \quad (4.11)$$

Considerando apenas a entrada mecânica $\mathbf{F}(\mathbf{t})$ e a saída elétrica $\mathbf{y}_Q(\mathbf{t})$ obtêm-se -se a função de transferência dada pela Equação 4.12.

$$\mathbf{G}_{\mathbf{F}, \mathbf{y}_Q}(\mathbf{s}) = \frac{Y_Q(s)}{F(s, o_i)} = \sum_{r=1}^n \frac{L_r \Psi_{\mathbf{u}r}(o_i)}{s^2 + 2\zeta_r \omega_r s + \omega_r^2} \quad (4.12)$$

Considerando apenas a entrada elétrica $\mathbf{u}_\phi(\mathbf{t})$ e a saída mecânica $\mathbf{y}_u(\mathbf{t})$ obtêm-se a função de transferência dada pela Equação 4.13.

$$\mathbf{G}_{\mathbf{u}_\phi, \mathbf{y}_u}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{u}_\phi(s)}{Y_u(s, o_o)} = \sum_{r=1}^n \frac{\Psi_{\mathbf{u}r}(o_o) L_r}{s^2 + 2\zeta_r \omega_r s + \omega_r^2} \quad (4.13)$$

Considerando apenas a entrada elétrica $\mathbf{u}_\phi(\mathbf{t})$ e a saída elétrica $\mathbf{y}_Q(\mathbf{t})$ obtêm-se a função de transferência dada pela Equação 4.14.

$$\mathbf{G}_{\mathbf{u}_\phi, \mathbf{y}_Q}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{u}_\phi(s)}{Y_Q(s)} = \sum_{r=1}^n \frac{L_r L_r}{s^2 + 2\zeta_r \omega_r s + \omega_r^2} \quad (4.14)$$

As funções de transferência descritas pelas equações 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14 descrevem conjuntamente a dinâmica do sistema composto pela viga e pelos transdutores piezelétricos. A interação entre essas funções de transferência pode ser observada pela Figura 4.22

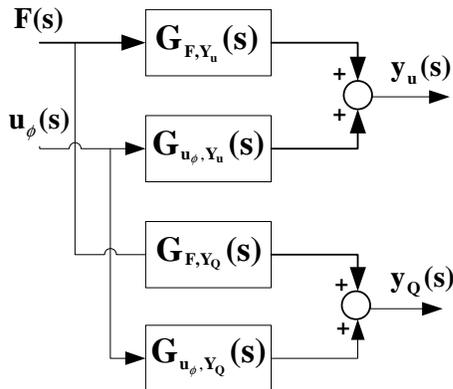


Figura 4.22 –Interação entre as funções de transferência do sistema

No capítulo 5 a representação na forma de funções de transferência será utilizada para o projeto do compensador em avanço de fase. Enquanto a representação em espaço de estados será utilizada para projetar os controladores LQR e H_∞ .

CAPÍTULO 5

PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE

O objetivo do controle ativo de vibrações é a diminuição dos picos de ressonância do sistema visando a rejeição de perturbações. Este capítulo abordará esse problema usando as técnicas de projeto LQR, H_∞ e um controlador em avanço de fase. Para isso serão utilizadas as representações do sistema obtidas no capítulo 4

5.1 Compensador em Avanço de Fase

5.1.1 Topologia das Funções de Transferência do Sistema

Uma característica peculiar dos atuadores e sensores compostos por cerâmicas piezelétricas é a distribuição esparsa dos mesmos sobre a estrutura a ser controlada. Porém apesar da natureza esparsa destes transdutores a interação dos mesmos com a estrutura pode ser representada através de funções de transferência devido a cada atuador estar associado a uma variável de entrada e cada sensor estar associado a uma variável de saída. Como já mencionado no capítulo de piezeletricidade a variável de saída do sensor é a carga elétrica, na ordem de ρC e a variável de entrada do atuador é a tensão elétrica. A topologia do sistema representado pelas funções de transferência é ilustrada pela Figura 4.22 na sua forma completa, porém para fins de projeto o sistema pode ser representado de maneira simplificada, tendo em vista que as o deslocamento nodal $\mathbf{y}_u(s)$ não é medido na realidade. As funções de transferência $\mathbf{G}_{F, \mathbf{y}_u}(s)$ e $\mathbf{G}_{u, \mathbf{y}_u}(s)$ são utilizadas apenas para analisar o deslocamento de um determinado nó quando a estrutura é perturbada por uma força ou quando uma tensão é aplicada nos terminais do atuador. Então desconsiderando a influência de $\mathbf{G}_{F, \mathbf{y}_u}(s)$ e $\mathbf{G}_{u, \mathbf{y}_u}(s)$, para fins de projeto do controlador será considerada a seguinte topologia:

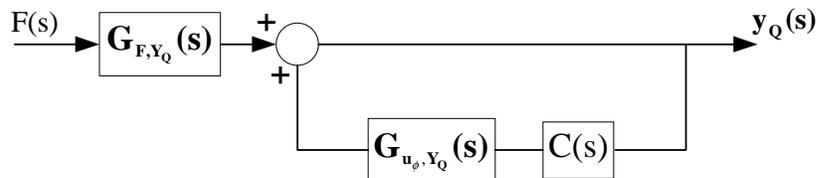


Figura 5.1 – Topologia do sistema utilizado no projeto

Considera-se que a perturbação $\mathbf{F}(s)$ atua no meio da extremidade livre da viga, sendo o deslocamento nodal $\mathbf{y}_a(s)$ considerado para esse mesmo ponto. As funções de transferência apresentadas neste capítulo são formuladas considerando os 6 primeiros modos de vibração e estão contidas no anexo 2 deste trabalho.

5.1.2 Projeto do controlador

O desafio do projeto de controle é obter uma função $\mathbf{C}(s)$ que em malha fechada promova a rejeição da perturbação $\mathbf{F}(s)$. Para fins de projeto primeiramente será considerada a função de transferência de malha fechada do sistema ilustrado pela Figura 5.1 mostrada a seguir.

$$\mathbf{G}_{MA}(s) = \frac{\mathbf{y}_Q(s)}{\mathbf{F}(s)} = \frac{\mathbf{G}_{F,Y_Q}(s)}{1 - \mathbf{G}_{u_\phi,Y_Q}(s)\mathbf{C}(s)} \quad (5.1)$$

Analisando a Equação 5.1 conclui-se que para minimizar os efeitos da perturbação $\mathbf{F}(s)$ o denominador deveria possuir o maior módulo possível e conseqüentemente o módulo de $\mathbf{G}_{u_\phi,Y_Q}(s)\mathbf{C}(s)$ seria o maior possível. Porém o aumento indiscriminado do módulo de $\mathbf{G}_{u_\phi,Y_Q}(s)\mathbf{C}(s)$ através da inserção de um ganho simples poderia desestabilizar o sistema, assim, apenas um ganho não traria a dinâmica desejada para a rejeição das perturbações. Devido às funções de transferência $\mathbf{G}_{F,Y_Q}(s)$ e $\mathbf{G}_{u_\phi,Y_Q}(s)$ possuírem o mesmo denominador os zeros de $\mathbf{G}_{F,Y_Q}(s)$ não interferirão nos pólos de malha fechada do sistema, então para analisar a influência de um ganho nos pólos de malha fechada a Figura 5.2 apresentará o lugar das raízes do sistema, considerando a função de malha aberta como sendo a função de transferência $\mathbf{G}_{u_\phi,Y_Q}(s)$. Essa consideração é feita apenas para avaliar o comportamento dos pólos de malha fechada do sistema com relação à variação do ganho, pois na realidade se a malha de realimentação da Figura 5.1 fosse aberta é evidente que a sua dinâmica unicamente por $\mathbf{G}_{F,Y_Q}(s)$. Os pólos do sistema de malha fechada manteriam sua estabilidade com um ganho máximo de até 4×10^9 aproximadamente, porém devido a configuração do lugar das raízes apresentado pela Figura 5.2, mesmo com elevados ganhos a capacidade do sistema de rejeitar perturbações não melhoraria consideravelmente. Além disso, em uma primeira análise

um ganho dessa dimensão pode parecer exagerado, porém devido a saída de carga do sensor ser da ordem de 10^{-12} e a entrada de tensão do atuador ser superior a 200 V, a magnitude desse ganho é considerada normal.

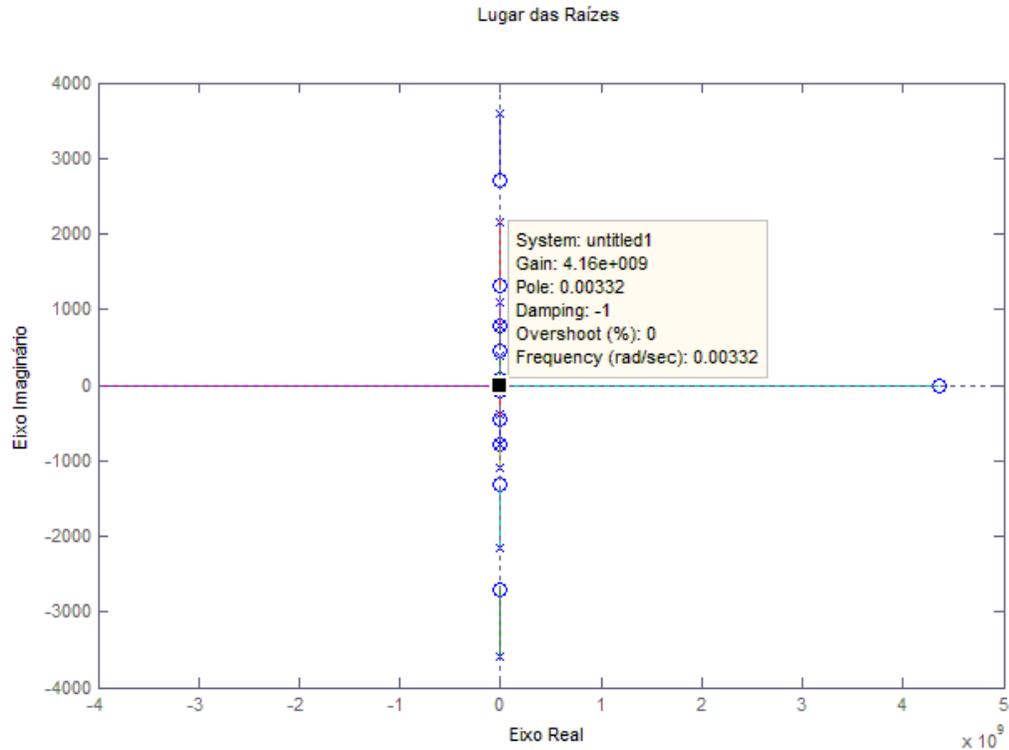


Figura 5.2 - Lugar das Raízes de $\mathbf{G}_{u_\phi, Y_Q}(s)$

A tentativa de rejeitar todas as faixas de perturbação com o aumento de $\mathbf{G}_{u_\phi, Y_Q}(s)C(s)$ escolhendo o controlador $C(s)$ como sendo um ganho simples desestabilizaria o sistema, porém se além de se considerar apenas o comportamento do módulo do sistema o comportamento da fase também for considerado é possível aumentar a magnitude de $\mathbf{G}_{u_\phi, Y_Q}(s)C(s)$ em frequências específicas, desse modo as limitações de ganho e de fase do sistema seriam consideradas, garantindo assim a estabilidade do mesmo em malha fechada [27]. Mas em contrapartida as especificações utilizadas para o projeto do controlador devem ser formuladas para uma faixa de frequência específica. Para tal será proposta uma abordagem baseada em filtros de frequência.

5.1.2.1 Compensador em avanço de fase

Projetando o controlador adequadamente é possível moldar a resposta em malha fechada do sistema, atenuando as faixas de frequência desejadas e desse modo rejeitando perturbações de uma faixa de frequência específica. Neste caso o grande desafio de projeto é atenuar as frequências escolhidas e tentar atenuar também as frequências não especificadas, sem amplificar consideravelmente nenhuma faixa de frequência.

Para efeitos de projeto será primeiramente avaliada a resposta do sistema sem a malha de controle, cuja dinâmica é representada somente por $\mathbf{G}_{u_\phi, y_Q}(s)$. E então escolhido os modos de vibração que se deseja atenuar.

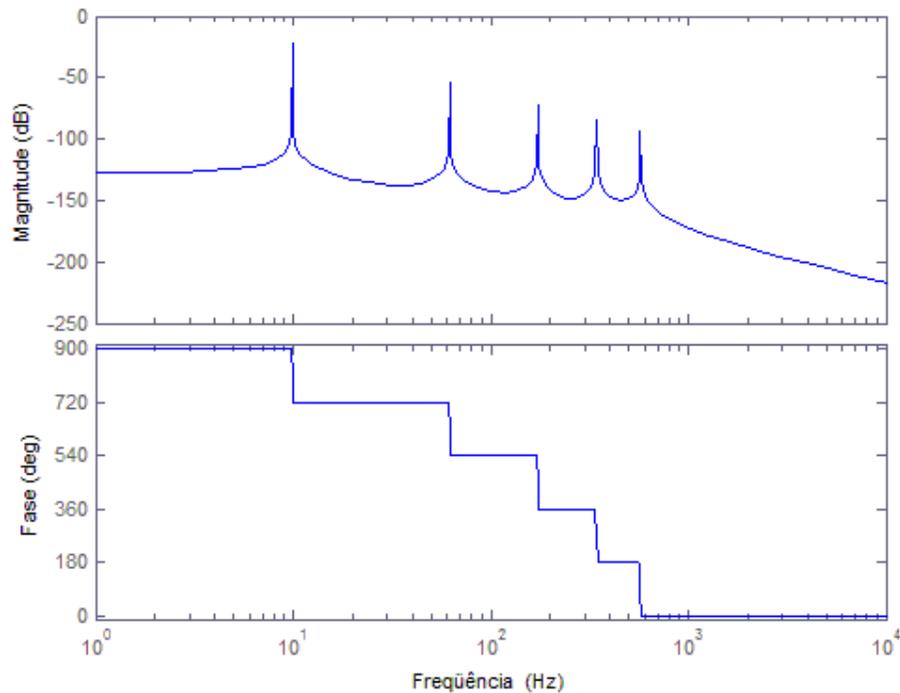


Figura 5.3 – Diagrama de bode de $\mathbf{G}_{u_\phi, y_Q}(s)$

O objetivo do controle é atenuar o consideravelmente os dois primeiros modos de vibração, os quais, como pode ser observado pela Figura 5.3, estão situados na faixa de frequência de 9 á 62 Hz. Para esse propósito será projetado um compensador em avanço de fase o qual consiste em um filtro passa baixas. A estrutura do compensador em avanço de fase é mostrada a seguir pela Equação 5.2.

$$C(s) = k_j \frac{s + z_1}{s + p_1} \quad z_1 > p_1 \quad (5.2)$$

Visando atenuar em 50 dB o primeiro modo de vibração do sistema em malha fechada foram escolhidos os seguintes parâmetros para o compensador representado pela equação 5.2, $k_j = 6.55 \times 10^8$, $z_1 = 80$ e $p_1 = 15$. O compensador composto por esses parâmetros apresenta o seguinte diagrama de bode.

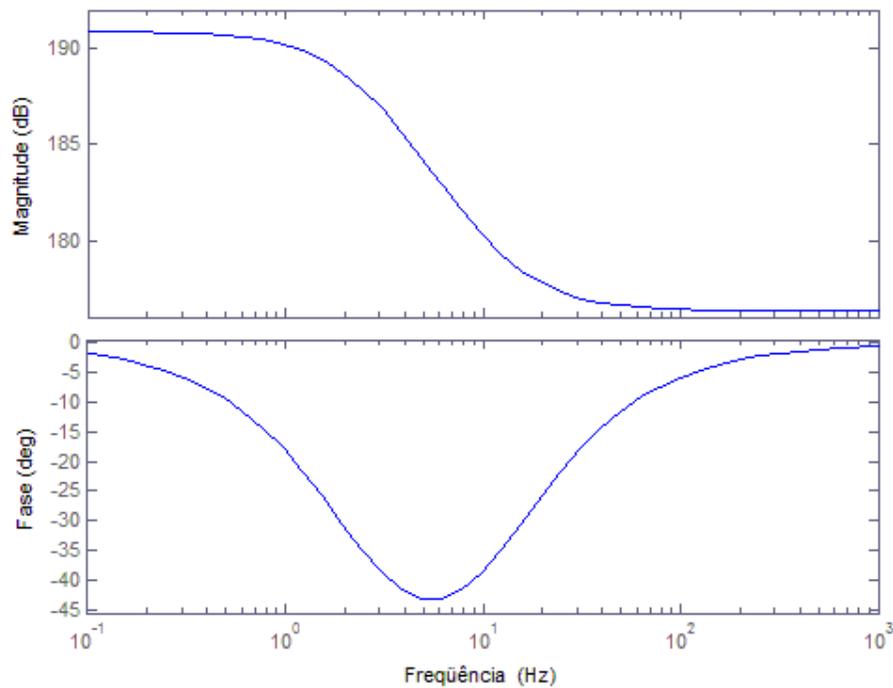


Figura 5.4 - Diagrama de bode do compensador $C(s)$

Como pode ser observado pela Figura 5.5 o compensador $C(s)$ aumentou o módulo de $\mathbf{G}_{u_0, y_0}(s)$ e mudou sua margem de fase de ganho e fase, a escolha do compensador em avanço de fase se deve ao fato da realimentação positiva da malha da Figura 5.1, se a realimentação fosse negativa um compensador em atraso poderia ser utilizado para obter resultados semelhantes. Já o zero e o pólo do compensador foram escolhidos visando à atenuação da frequência correspondente ao primeiro modo de vibração sendo o ganho k_j escolhido de maneira a fornecer o nível de atenuação desejado.

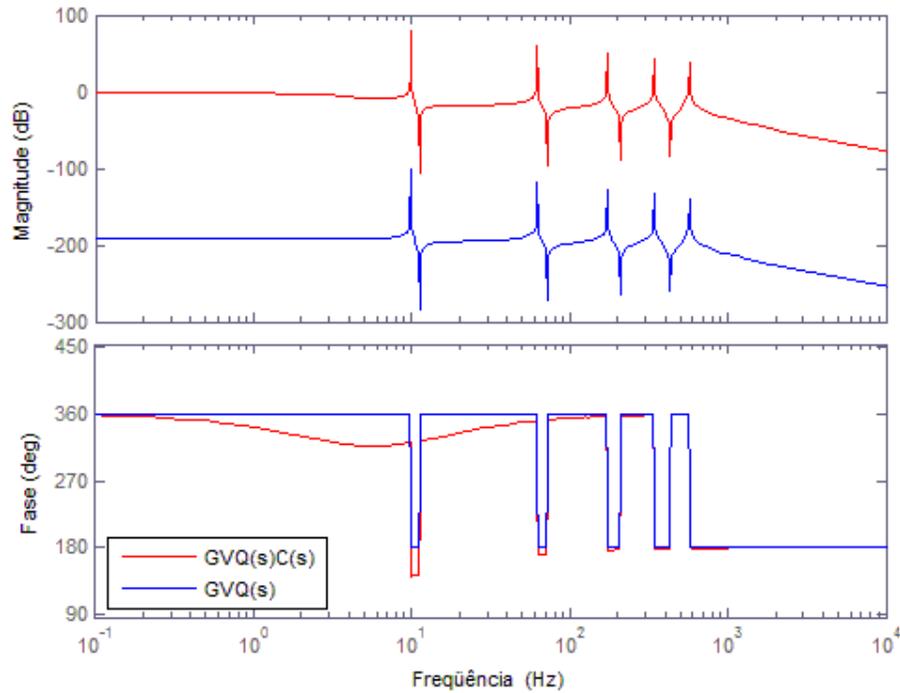


Figura 5.5 – Comparação do diagrama de bode de $\mathbf{G}_{u_\phi, Y_Q}(s)C(s)$ e $\mathbf{G}_{u_\phi, Y_Q}(s)$

A Figura 5.5 mostra a ação do compensador sobre $\mathbf{G}_{u_\phi, Y_Q}(s)$ onde é possível observar o grande aumento da magnitude em relação à função não compensada, também é possível observar a mudança de fase na faixa de frequência de 0 à 100 a qual garantirá a estabilidade em malha fechada do sistema.

O efeito da compensação em avanço no sistema em malha fechada pode ser avaliado pela Figura 5.6, onde se observa a redução de todos os picos de ressonância do sistema. Porém como esperado, devido às especificações do projeto os dois primeiros modos de vibração foram os mais reduzidos, sendo que a atenuação do primeiro modo foi superior a 50 dB. A Figura 5.6 também mostra que o compensador provocou incremento de aproximadamente 16 dB para a faixa de frequência de 0 à 4 Hz, essa amplificação não influencia consideravelmente no comportamento global do sistema tendo em vista a estreita faixa de frequência em que ocorre a amplificação, além disso a amplificação 16 dB nessa região pode ser considerada desprezível quando comparada com a atenuação do picos de vibração. Porém essa amplificação pode ser reduzida se um projeto considerando filtros de ordem mais alta for realizado.

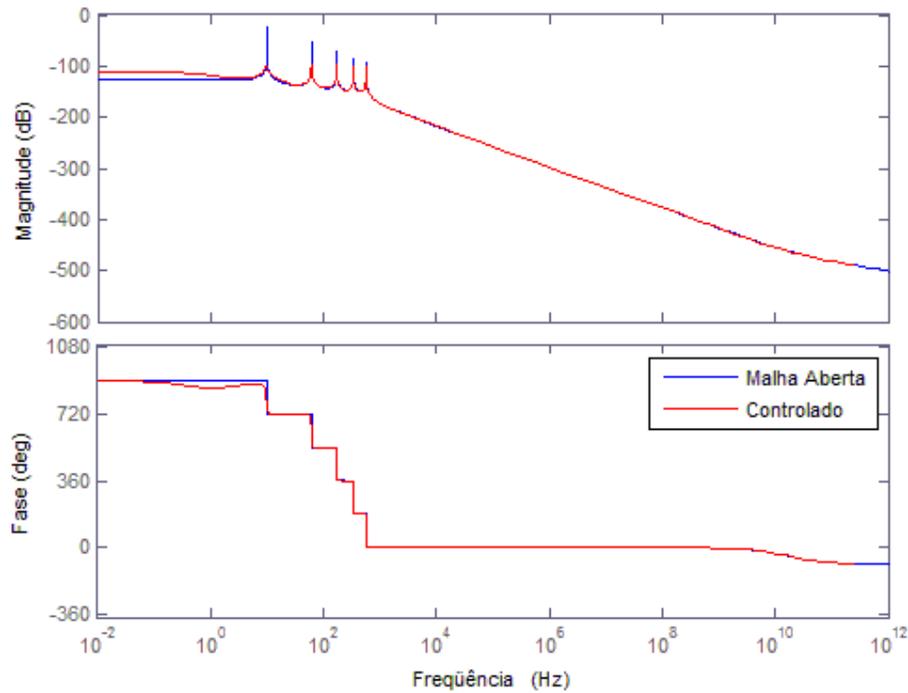


Figura 5.6 – Comparação do diagrama de bode do sistema em malha aberta com o diagrama de malha fechada

Através da figura 5.6 pode-se concluir que o compensador obteve sucesso em seu propósito de atenuar os dois primeiros modos de vibração, além de melhorar de maneira geral a capacidade de rejeição de perturbação do sistema.

5.2 Controle LQR

Diferentemente da seção 5.1 no qual foi abordado o projeto do controlador via funções de transferência, esta seção apresentará o projeto sistema de controle através da formulação de espaço de estados. Para isso será utilizada a representação introduzida pela Equação 4.6 e a partir desta será proposto um sistema controle baseado na realimentação das variáveis de estados do sistema. O projeto de controle foi realizado utilizando uma metodologia ótima denominada LQR (Linear Quadratic Regulator) a qual consiste na minimização de um índice de performance que normalmente é representado por uma integral de funções quadráticas compostas pelos vetores de estados e pelos sinais de controle [28]. A solução do problema LQR retorna uma matriz de ganho que minimiza uma função custo e estabiliza o sistema simultaneamente [21].

Normalmente nem todos os estados do sistema são passíveis de medição o que acarreta uma complicação adicional ao projeto de controle baseado em realimentação de estados, pois um dispositivo que estime os estados não medidos a partir da medição da saída do sistema e do sinal de controle deve ser considerado, este dispositivo é denominado observador de estados e tem seu projeto formulado através das matrizes que compõem a sistema de espaço de estados [27][28][29]. Apesar de complementares os projetos do controlador e do observador de estados são elaborados independentemente obedecendo ao principio da separação [25].

Para o caso particular desse trabalho as variáveis de estado do sistema são os modos de vibração, e a saída do mesmo é a carga elétrica gerada pela deformação do transdutor piezelétrico, então para se utilizar uma metodologia de controle baseada na realimentação de estados torna-se necessário a inserção de um observador de estados na malha de controle.

Antes de se projetar o controlador e o observador algumas propriedades estruturais do sistema como controlabilidade e observabilidade devem ser investigadas visando verificar se o sistema permite que seus estados sejam respectivamente alterados pelo controlador e recuperados pelo observador. A seção seguinte prosseguirá com a verificação dessas propriedades.

5.2.2 Propriedades estruturais do Sistema

Essa seção abordará duas importantes propriedades estruturais de um sistema linear de malha aberta, a controlabilidade e a observabilidade, ambos os conceitos foram introduzidos por Kalman na década de 60. Quando a estrutura do sistema apresentar essas propriedades tem-se a garantia de poder projetar um controlador de tal forma que os pólos da malha fechada possam ser escolhidos de forma arbitrária pelo projetista.

5.2.2.1 Controlabilidade

Formalmente um sistema é definido como controlável quando existir um vetor de controle que transfira, em um instante finito de tempo, o sistema de qualquer estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ para qualquer outro estado final $\mathbf{x}(t_f)$ [29].

A verificação da propriedade de controlabilidade de um sistema linear pode ser feita considerando o par de matrizes (A,B) que compõem o sistema genérico descrito pela Equação 5.1.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_\phi(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{5.3}$$

Um sistema é considerado controlável se o posto da matriz \mathbf{M}_c , apresentada pela Equação 5.4, for igual a ordem da matriz \mathbf{A} [26][29].

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \cdots \ \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B}]\tag{5.4}$$

onde a matriz \mathbf{M}_c é denominada matriz de controlabilidade e o índice p indica a ordem da matriz \mathbf{A} . A condição necessária e suficiente para um sistema ser controlável é dada pela Equação 5.5 [26] [29].

$$\text{posto}(\mathbf{M}_c) = p\tag{5.5}$$

5.2.2.2 Estabilizabilidade

A propriedade de estabilizabilidade pode ser considerada uma extensão da controlabilidade, quando o posto de \mathbf{M}_c for menor que p significa que o sistema não pode ser controlado porém isso não indica que o mesmo não possa ser estabilizado em malha fechada [25][29]. Quando o posto matriz \mathbf{M}_c for menor que p existirá uma transformação de similaridade de modo que:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{nc} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}\tag{5.6}$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_c \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} = [\mathbf{C}_{nc} \ \mathbf{C}_c] \end{cases}\tag{5.7}$$

Sendo \mathbf{A}_{nc} são autovalores não controláveis e \mathbf{A}_c são os autovalores controláveis do sistema. Então o sistema é considerado estabilizável quando os autovalores não controláveis possuem parte real negativa [29].

5.2.2.3 Observabilidade

Um sistema é dito observável se qualquer estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ puder ser determinado unicamente a partir do conhecimento do vetor de saída $\mathbf{y}(t)$ e do vetor de controle $\phi(t)$ em um intervalo finito de tempo $t_0 \leq t \leq t_f$.

A verificação da propriedade de observabilidade de um sistema linear pode ser feita considerando o par de matrizes (A,C) que compõem o sistema genérico descrito pela Equação 5.3. Um sistema é considerado observável se o posto da matriz \mathbf{M}_O , apresentada pela Equação 5.8, for igual a ordem da matriz \mathbf{A} [26] [29].

$$\mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{p-1} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Então de forma análoga à condição de controlabilidade, a condição necessária e suficiente para um sistema ser observável é dada pela Equação 5.9 [26] [29].

$$\text{posto}(\mathbf{M}_O) = p \quad (5.9)$$

5.2.2.4 Detectabilidade

Quando o posto da matriz \mathbf{M}_O não é completo o sistema é dito não observável e uma transformação de similaridade pode ser efetuada na matriz de estados do sistema de modo que a mesma seja escrita da seguinte maneira [25] [29]:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{nO} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_O \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{no} \\ \mathbf{B}_o \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} = [0 \quad \mathbf{C}_c] \end{cases} \quad (5.11)$$

onde \mathbf{A}_{no} são os autovalores não observáveis e \mathbf{A}_o são os autovalores observáveis do sistema. O sistema é dito detectável quando os autovalores não observáveis possuem parte real negativa [29].

5.2.2.5 Investigação das propriedades estruturais do sistema

A controlabilidade e a observabilidade do sistema representado pela Equação 4.6 será avaliada nessa seção, para tal serão consideradas como matrizes de entrada e saída a matriz \mathbf{B}_{PZT} e \mathbf{C}_{PZT} respectivamente. O sistema será composto pelos 6 primeiros modos de vibração, logo pelas informações apresentadas no capítulo 6 conclui-se que matriz de estados será quadrada e de ordem 12. Já a matriz \mathbf{B}_{PZT} terá dimensão $[12 \times 1]$ e a matriz \mathbf{C}_{PZT} terá dimensão $[1 \times 12]$. As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B}_{PZT} e \mathbf{C}_{PZT} são apresentadas no apêndice 2. As matrizes de controlabilidade e observabilidade podem então ser reescritas considerando o caso específico do sistema deste trabalho.

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{B}_{PZT} & \mathbf{A}^2\mathbf{B}_{PZT} & \cdots & \mathbf{A}^{11}\mathbf{B}_{PZT} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{PZT} \\ \mathbf{C}_{PZT}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}_{PZT}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{PZT}\mathbf{A}^{11} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Avaliando o posto das matrizes de controlabilidade e observabilidade das equações 5.12 e 5.13 respectivamente observa-se que $\text{posto}(\mathbf{M}_C) = 4$ e $\text{posto}(\mathbf{M}_O) = 4$. Como o posto da matriz de controlabilidade e de observabilidade é menor que 12 o sistema não é controlável nem observável. Para verificar a se o mesmo é detectável e estabilizável os autovalores da matriz \mathbf{A} devem ser verificados.

Tabela 5.1 – Autovalores da matriz de estados

Autovalores de A
$-0.0002 \pm 62.2202i$
$-0.0076 \pm 389.0011i$
$-0.2319 \pm 2153.6478i$
$-0.0316 \pm 794.4244i$
$-0.0596 \pm 1091.7664i$
$-0.6474 \pm 3598.2886i$

A Tabela 5.1 mostra que o sistema é detectável e estabilizável, logo é possível recuperar os estados do sistema a partir de seu vetor de saída e de controle. Como o sistema também é estabilizável torna-se possível projetar um controle baseado em realimentação de estados que garanta a sua estabilidade. Logo um sistema de controle composto por um observador de estados e um controlador LQR pode ser projetado para o caso de estudo desse trabalho.

5.2.3 Projeto do Controlador LQR

O Controle LQR se enquadra na classe de controle denominada de ótimo, nessa classe de controladores a escolha dos pólos de malha fechada é feita visando minimização de uma função custo. Por esse motivo o controle LQR se diferencia de outras técnicas de projeto clássicas como a alocação de pólos cujo posicionamento dos pólos em malha fechada é feito pelo projetista [28] [29] .

O resultado do projeto LQR é um ganho que realimentará os estados do sistema visando a minimização de um índice de desempenho formulado a partir de uma função quadrática composta pelo vetor de variáveis de estado e pelo vetor de controle do sistema.

Deste modo a função custo está associada a energia dos estados e do sinal de controle, sendo o desafio do projeto LQR estabelecer um compromisso entre essas energias através das matrizes de ponderação \mathbf{Q} e \mathbf{R} . Através dos vetores de estado $\mathbf{x}(t)$ e controle $\mathbf{u}_\phi(t)$ e usando \mathbf{Q} como a matriz de ponderação da energia dos estados e \mathbf{R} como a matriz de ponderação da energia do sinal de controle é possível formular a função custo da Equação 5.14.

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \phi(t)^T \mathbf{R} \phi(t)] dt \quad (5.14)$$

As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} são positivas definidas, sendo normalmente escolhidas como diagonais. No caso desse trabalho o controle LQR se mostra uma boa opção, pois através das matrizes de ponderação é possível priorizar os modos de vibração que se deseja minimizar. Porém para que a escolha das matrizes de ponderação retornem o resultado desejado, o projetista deve conhecer profundamente o comportamento dinâmico do sistema, bem como a influência dos estados na resposta global do sistema.

Como mostrado na subseção 5.2.2.2 o sistema representado pela Equação 4.6 é estabilizável, então é possível projetar um controlador LQR que estabilize o sistema e minimize a Equação 5.14 simultaneamente. Considerando a lei de controle do sistema como sendo:

$$\mathbf{u}_\phi(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t) \quad (5.15)$$

onde o ganho \mathbf{K} é dado pela Equação 5.16.

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_{PZT}^T \mathbf{P} \quad (5.16)$$

onde \mathbf{P} é uma matriz positiva definida. A condição de estabilidade do sistema juntamente com a minimização da função custo pode ser escrita através de uma equação de Riccati mostrada pela Equação 5.17 [29].

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B}_{PZT} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_{PZT}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.17)$$

Se considerando função custo a ser minimizada o sistema permanecer estável, então existirá uma matriz \mathbf{P} definida positiva que satisfaça a Equação 5.17 e conseqüentemente existirá um ganho \mathbf{K} que estabilize o sistema e minimize a função custo da Equação 5.14.

Porém para se efetuar a realimentação de estados utilizando o ganho \mathbf{K} é necessária a disponibilidade de todos os estados do sistema. Porém como será visto na seção seguinte os estados do sistema não são medidos diretamente, isso torna necessário que um observador de estados seja projetado visando disponibilizar os estados para o controlador LQR.

5.2.4 Observador de Estados

Para viabilizar a utilização do controlador LQR na malha de controle será projetado um observador de estados que recupere todos os estados do sistema a partir do sinal de carga elétrica do sensor e do sinal de controle. A estrutura do observador é mostrada pela Equação 5.18.

$$\dot{\mathbf{x}}_f(t) = \mathbf{A}_f \mathbf{x}_f(t) + \mathbf{B}_f \mathbf{u}_\phi(t) + \mathbf{L} \mathbf{y}(t) \quad (5.18)$$

onde os parâmetros da Equação 5.18 são determinados de modo a satisfazer duas condições. A primeira condição é que em regime permanente os estados estimados $\mathbf{x}_f(t)$ convirjam para os estados reais do sistema $\mathbf{x}(t)$, essa condição pode ser expressa pela Equação 5.19.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_f(t)) = 0 \quad (5.19)$$

A segunda condição é que a dinâmica do erro de estimação dependa apenas das condições iniciais do sistema e do observador. Essa condição implica que o erro de estimação é independente dos sinais de controle $\mathbf{u}_\phi(t)$ e da saída $\mathbf{y}(t)$, devido a isso o projeto do controlador e do observador podem ser realizados independentemente. A dinâmica do erro de estimação é dada pela Equação 5.20.

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_f(t) \quad (5.20)$$

Considerando a derivada da Equação 5.20 e os sistemas representados pela Equação 5.3 e 5.18 se obtém a Equação 5.21.

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t) + (\mathbf{B} - \mathbf{B}_f)\mathbf{u}_\phi(t) + (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{A}_f)\mathbf{y}(t) \quad (5.21)$$

Para que o erro de estimação seja independente do sinal de controle e da saída do sistema os parâmetros \mathbf{A}_f e \mathbf{B}_f devem ser escolhidos de acordo com o conjunto de equações 5.22.

$$\begin{cases} \mathbf{A}_f = \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \\ \mathbf{B}_f = \mathbf{B} \end{cases} \quad (5.22)$$

As escolhas dos parâmetros descritos pelas equações 5.22 levam a seguinte dinâmica do erro de estimação:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t) \quad (5.23)$$

Para que o observador possua erro de estimação nulo em regime permanente os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ devem ter a parte real negativa. O observador de estados que obedece essas condições é denominado de observado de Luenberger [29].

Através do sistema apresentado pela Figura 4.21 e considerando os fundamentos apresentados nessa seção, foi projetado o seguinte observador de Luenberger para o caso de estudo deste trabalho.

$$\dot{\mathbf{x}}_f(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}_{PZT})\mathbf{x}_f(t) + \mathbf{B}_{PZT}\mathbf{u}_\phi(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}_Q(t) \quad (5.24)$$

Sendo que o ganho \mathbf{L} foi projetado para que a dinâmica do erro de estimação fosse aproximadamente três vezes mais rápida que a dinâmica do sistema realimentado, o ganho \mathbf{L} pode ser consultado no apêndice 2. A Figura 5.7 ilustra a topologia do observador de estados da Equação 5.24.

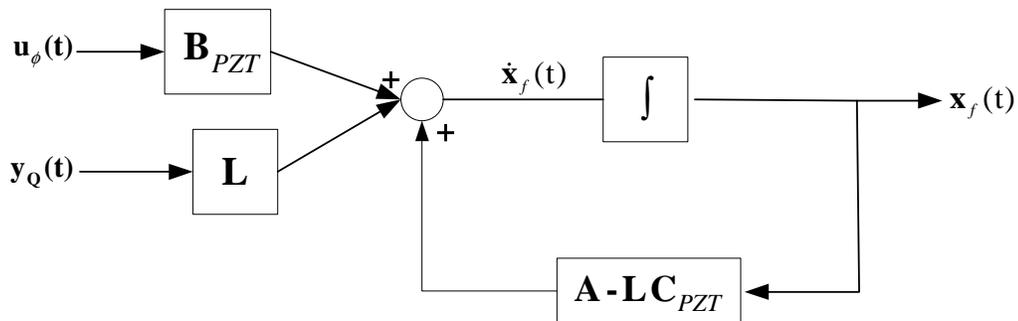


Figura 5.7 – Topologia do Observador de Estados

5.2.5 Princípio da Separação

Como mostrado nas seções anteriores deste capítulo o projeto do controlador e do observador de estados foram realizados de maneira independente, esse procedimento de projeto é conhecido como princípio da separação e pode ser realizado graças as propriedades do observador de Luenberger.

A dinâmica do sistema em malha fechada do caso de estudo deste trabalho sofrerá influência do controlador e do observador de estados. Deste modo a averiguação da estabilidade em malha fechada deve considerar os autovalores das matrizes $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}_{PZT}$ e $\mathbf{A} - \mathbf{B}_{PZT}\mathbf{K}$. Para que o sistema seja estável os autovalores dessas matrizes devem possuir a parte real negativa. Os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}_{PZT}$ definem a dinâmica do erro de estimação, já os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{B}_{PZT}\mathbf{K}$ representam a dinâmica do sistema realimentado. Os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{B}_{PZT}\mathbf{K}$ podem ser considerados a dinâmica dominante do sistema realimentado, pois eles definem a resposta do sistema quando o erro de estimação for nulo. A Tabela 5.2 mostra os autovalores de malha fechada do sistema.

Tabela 5.2 – Autovalores do sistema em malha fechada

Autovalores de Malha Fechada	
$\mathbf{A} - \mathbf{B}_{PZT}\mathbf{K}$	$\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}_{PZT}$
$-626.5765 \pm 3515.1968i$	$-2.0874 \pm 3598.2907i$
$-406.6573 \pm 2119.8394i$	$-2.1565 \pm 2153.6475i$
$-222.6211 \pm 1072.6315i$	$-2.2563 \pm 1091.7688i$
$-14.0714 \pm 60.6368i$	$-2.3973 \pm 62.2447i$
$-84.3837 \pm 380.4389i$	$-2.3333 \pm 389.004i$
$-0.0316 \pm 794.4244i$	$-0.0316 \pm 794.4244i$

A disposição do controlador e do observador de estados na composição do sistema em malha fechada é mostrada pela Figura 5.8.

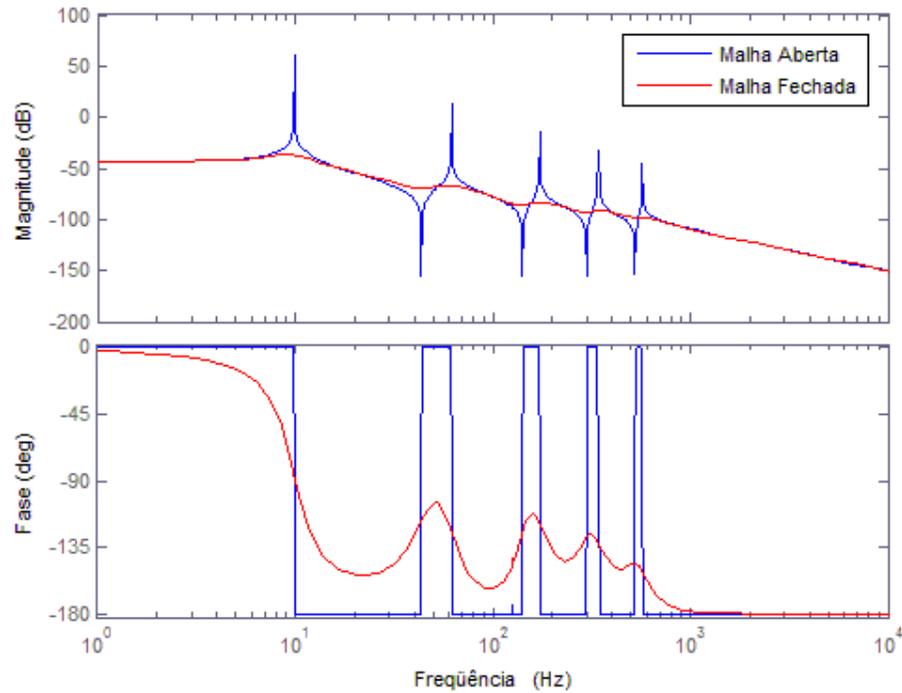


Figura 5.9 - Comparação entre o diagrama de bode de malha aberta e fechada

Como pode ser observado na Figura 5.9 apesar do controle LQR ter sido projetado priorizando a atenuação dos três primeiros modos de vibração, o controlador conseguiu reduzir consideravelmente todos os picos de ressonância, promovendo uma redução de aproximadamente 90dB para o primeiro modo e de 80 dB para o segundo modo.

Como visto nessa seção o LQR se mostrou uma boa opção para o controle ativo de vibração, por facilitar a seletividade da atenuação. Além disso é possível através do ajuste das matrizes de ponderação obter uma ótima atenuação para todas as faixas de frequência. Porém o ajuste fino das matrizes de ponderação não é trivial requerendo um conhecimento profundo da dinâmica do sistema por parte do projetista.

5.3 Controle Robusto

Um dos principais objetivos da engenharia de controle é projetar sistemas de controle capazes de agir em ambientes reais, cujos parâmetros são influenciados por diversas variáveis as quais muitas vezes não são consideradas no modelo da planta devido à falta de conhecimento das suas dinâmicas ou simplesmente para diminuir a complexidade matemática

do mesmo. Dessa maneira o modelo utilizado no projeto do controlador possui incertezas em relação à planta real, as quais podem degradar o desempenho do controlador ou até mesmo levar o sistema em malha fechada à instabilidade, quando o sistema de controle for implementado [25] [28].

A robustez pode ser definida como a propriedade que sistemas de controle possuem de operar satisfatoriamente em situações reais. Sendo essas situações caracterizadas por incertezas de modelo e por perturbações infligidas ao sistema [30]. A robustez pode ser classificada em estabilidade robusta e desempenho robusto. Um sistema apresenta estabilidade robusta se conseguir estabilizar a planta real, se além da estabilidade o sistema de controle garantir o desempenho desejado esse possuirá desempenho robusto. O problema de controle caracterizado pelo projeto de controladores que assegurem um índice de desempenho robusto é denominado de controle robusto, sendo amplamente pesquisado desde 1980 até os dias atuais. Diversas técnicas de controle permitem abordar o problema de robustez, dentre elas pode-se destacar o controle H_∞ , o qual foi primeiramente apresentado por G. Zames na década de 80 [28].

Para se projetar um controlador robusto deve-se considerar as incertezas do modelo e de alguma maneira estipular um índice de variação máxima para essas incertezas, no qual o sistema de controle garantirá a estabilidade ou o desempenho desejável. Existem basicamente dois tipos de incertezas para um dado modelo, as incertezas paramétricas e as dinâmicas, a interferência desses tipos de incertezas na robustez do sistema pode ser avaliada através do teorema do pequeno ganho.

Essa seção apresentará uma análise de robustez para controladores H_∞ , para tal será avaliada a influência das incertezas para a estabilidade robusta do sistema.

5.3.2 Representações das Incertezas

Como mencionado anteriormente existem dois tipos básicos de incertezas as paramétricas e as dinâmicas. As incertezas paramétricas ocorrem devido à falta do conhecimento exato de determinado parâmetro, ou seja, se conhece a faixa de variação desse parâmetro, porém não se conhece o valor exato do mesmo. Além da falta de precisão acerca do conhecimento de determinados parâmetros as incertezas paramétricas são agravadas pelo envelhecimento de alguns dispositivos. No caso particular desse trabalho o fenômeno do envelhecimento ocorre no sensor e atuador piezelétricos, cuja cerâmica tem seus coeficientes

piezelétricos reduzidos com o passar do tempo, resultando na perda da capacidade de transdução dos dispositivos.

As incertezas dinâmicas são originadas pela simplificação da dinâmica original da estrutura, ou pela falta do conhecimento sobre o comportamento da estrutura em uma dada faixa de frequência. Para o caso específico deste trabalho as incertezas dinâmicas podem ser representadas pelos modos de vibração desprezados na modelagem da viga com os transdutores acoplados.

Normalmente as incertezas paramétricas ocorrem em baixas frequências onde a dinâmica do sistema é bem conhecida e representada, resultando apenas em pequenas imprecisões na representação de alguns parâmetros. Já as incertezas dinâmicas ocorrem normalmente em altas frequências onde o comportamento do sistema não é bem conhecido ou onde ocorre a supressão de dinâmicas para a simplificação do modelo.

Este capítulo utilizará algumas notações especiais para representar as incertezas do modelo, o sistema real será denominado de $\tilde{G}(s)$, o modelo do sistema será denominado de $G(s)$ e as incertezas serão nomeadas de $\Delta(s)$.

5.3.2.1 Incertezas Paramétricas

Para efeito de exemplo serão consideradas como variações paramétricas a mudança da frequência de ressonância modal do sistema e a alteração do coeficiente de amortecimento. As variações das frequências modais e do amortecimento podem ocorrer devido a variações na composição do material que forma a viga, ou seja, a viga pode ser composta não somente por alumínio, mas também por pequenas parcelas de outros materiais, essa composição mista originaria propriedades físicas diferentes das que foram utilizadas na etapa de modelagem da estrutura.

Para avaliar a influência dessas variações será utilizado um modelo do sistema contendo apenas o primeiro modo de vibração, representado pela Equação 5.25:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\zeta_1 \omega_1 + \delta_c) \dot{\mathbf{x}}(t) + (\omega_1^2 + \delta_k) \mathbf{x}(t) = \mathbf{u}_\phi(t) - \mathbf{F}_u(t) \quad (5.25)$$

onde δ_c é a incerteza relacionada com o amortecimento da estrutura, e δ_k é a incerteza relacionada como a rigidez mecânica da mesma. A partir da Equação 5.25 pode-se obter a seguinte representação em espaço de estados:

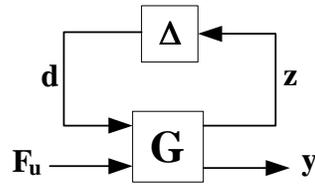


Figura 5.11 – Diagrama de blocos do modelo considerando as incertezas como entradas

Esta formulação para as incertezas paramétricas será posteriormente utilizada para o projeto do controlador H_{∞} . Sendo que z será considerada uma saída de desempenho a ser minimizada, esse procedimento visará diminuir a influência das incertezas sobre a saída do sistema.

5.3.2.2 Incertezas Dinâmicas

Uma estrutura real apresenta infinitos modos de vibrações, porém a utilização de um modelo que contemple todos os modos é impraticável, devido a isso são escolhidos os modos mais importantes do sistema para compor o modelo. Sendo a importância dos mesmos definida pelo projetista de acordo com a contribuição de cada modo para a vibração global do sistema e principalmente de acordo com faixa de frequência na qual o sistema de controle deverá agir.

Apesar do sistema de controle ser projetado para atuar em uma determinada faixa de frequência é interessante que o mesmo tenha um bom desempenho nas faixas de frequência não especificadas, para que perturbações fora das faixas de frequência consideradas pelo projetista não levem o sistema à instabilidade.

Como pode ser observado pelas equações 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14 do capítulo 4, as funções de transferência do sistema são compostas pelo somatório das funções de transferência dos modos de vibração considerados. Desta maneira as funções de transferência dos modos desprezados representarão para o sistema uma incerteza dinâmica do tipo aditiva. A Equação 5.27 representa o sistema real $\tilde{G}(s)$, através da equação de transferência truncada $G(s)$ e da incerteza dinâmica aditiva $\Delta_a(s)$.

$$\tilde{G}(s) = G(s) + \Delta_a(s) \quad (5.27)$$

Para avaliar o efeito das incertezas aditivas para as funções de transferência que compõem o sistema, serão obtidas as funções de transferências que determinam a influência das incertezas no sistema. Para isso a saída da incerteza será considerada a entrada do sistema e a entrada da incerteza será a saída do sistema. O diagrama de blocos do sistema em malha fechada juntamente com as incertezas é mostrado pela Figura 5.12.

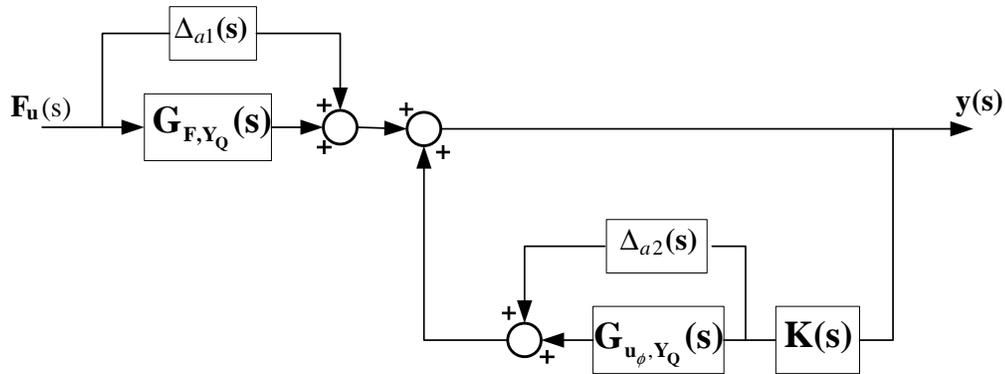


Figura 5.12 – Funções de transferência com as respectivas incertezas

Primeiramente será obtida a função de transferência vista da incerteza $\Delta_{a2}(s)$, para tal a entrada e a saída do sistema serão consideradas como sendo $u_{a2}(s)$ e $y_{a2}(s)$ respectivamente. As demais entradas e saídas do sistema mostradas na Figura 5.12 serão desconsideradas. A Figura 5.13 ilustra a configuração do sistema considerando a nova entrada $u_{a2}(s)$ e a nova saída $y_{a2}(s)$, para a entrada de distúrbio $\mathbf{F}_u(s)$ nula. Analisando o diagrama de blocos da Figura 5.13 é possível obter a função de transferência vista da incerteza $\Delta_{a2}(s)$, nomeada de $\mathbf{A}_2(s)$ como descreve a Equação 5.28.

$$\mathbf{A}_2(s) = \frac{y_{a2}(s)}{u_{a2}(s)} = \frac{K(s)}{1 - K(s)G_{u_\phi, Y_Q}(s)} \quad (5.28)$$

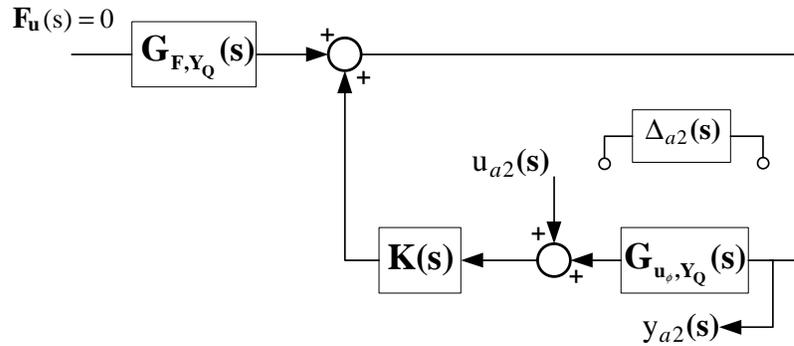


Figura 5.13 – Diagrama de blocos considerando os sinais da incerteza $\Delta_{a2}(s)$ como entrada e saída do sistema.

A função de transferência $G_{F,Y_Q}(s)$ tem o objetivo de transformar um sinal de perturbação em carga elétrica que será posteriormente utilizado pelo sistema de controle. Como pode ser visto pela Figura 5.13 essa função de transferência está fora da malha de controle, deste modo as incertezas de $G_{F,Y_Q}(s)$ interferirão no sistema como uma perturbação, sendo seus efeitos minimizados através de requisitos de rejeição de perturbação.

5.3.3 Teorema do Pequeno Ganho

Considerando o sistema da Figura 5.14 e assumindo que as funções de transferência $G(s)$ e $H(s)$ são estáveis, então o sistema em malha fechada será estável se a condição expressa pela inequação 5.5 for obedecida.

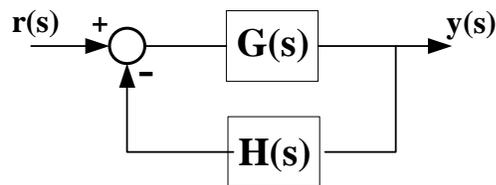


Figura 5.14 – Diagrama de blocos de um sistema realimentado

Em essência, o teorema do pequeno ganho define que para existir a garantia de estabilidade de malha fechada o ganho em malha aberta deve ser pequeno.

$$|G(s)H(s)| < 1 \tag{5.29}$$

O lado esquerdo da inequação 5.29 obedece a seguinte relação:

$$|G(s)H(s)| \leq |G(s)||H(s)| \quad (5.30)$$

Utilizando as inequações 5.29 e 5.30 a estabilidade de malha fechada também pode ser garantida pela seguinte inequação:

$$|G(s)||H(s)| < 1 \quad (5.31)$$

O critério da estabilidade de Nyquist pode ser usado para provar a validade do teorema. Devido ao requerimento do módulo da função de transferência em malha aberta ser menor que a unidade é garantido que não haverá envoltórios do ponto (-1,0). Além disso, também é considerado que o sistema em malha aberta é estável, esses fatores garantem que o sistema em malha fechada será estável.

É possível utilizar o teorema do ganho pequeno para investigar a estabilidade robusta de um dado sistema. A partir desse teorema pode-se descobrir se para uma dada incerteza o sistema em malha fechada continuará estável.

Para proceder com análise de robustez baseada no teorema do pequeno ganho é útil descrever o sistema e suas incertezas na forma do diagrama de blocos da Figura 5.13. Considerando a incerteza aditiva $\Delta_{a2}(s)$ e a função de transferência $\mathbf{A}_2(s)$ é possível compor um sistema similar ao da Figura 5.14.

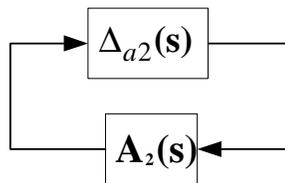


Figura 5.15 – Sistema realimentado considerando incertezas aditivas

Aplicando o teorema do pequeno ganho no sistema da figura 5.15 obtém-se a desigualdade 5.32.

$$|\Delta_{a2}(s)||\mathbf{A}_2(s)| < 1 \quad (5.32)$$

Da desigualdade 5.32 é possível obter a seguinte condição de estabilidade robusta.

$$|\mathbf{A}_2(s)| < \frac{1}{|\Delta_{a2}(s)|} \quad (5.33)$$

A desigualdade 5.33 será posteriormente utilizada para verificar a robustez de sistemas de controle projetados a partir de modelos modais truncados.

5.3.4 Controle H_∞

Durante a década de 80 a robustez tornou-se a preocupação principal da comunidade de controle, devido a isso técnicas de controle que permitiam o projeto robusto de controladores para sistemas multivariáveis começaram a surgir. Dentre essas técnicas destaca-se o controle H_∞ , formulado pela primeira vez por G. Zames, o qual consiste basicamente em um método de otimização no domínio da frequência para o projeto de sistemas de controle robustos [25] [28].

O controle H_∞ é capaz de promover a robustez do sistema em um sentido amplo, pois tanto a robustez às perturbações quanto a robustez às incertezas do modelo podem ser consideradas especificações do sistema de controle quando se utiliza essa técnica de projeto. Isso é possível porque com a minimização da norma H_∞ do sistema em malha fechada, consegue-se reduzir a influência de entradas exógenas do sistema garantindo assim que essas entradas não desestabilizem o sistema [8].

5.3.4.1 Norma H_∞

O nome H_∞ se refere ao espaço estável e próprio de funções de transferências, normalmente deseja-se que a função de transferência do sistema em malha fechada seja própria e estável. Se a função de transferência for estável e própria a mesma estará contida no espaço H_∞ .

O objetivo básico do controle H_∞ é encontrar uma função de transferência procurando-a no espaço H_∞ . De fato essa busca por uma função de transferência é um processo de otimização, onde a norma H_∞ de diferentes funções de transferência são comparadas. A norma H_∞ é descrita matematicamente pela Equação 5.34.

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (5.34)$$

A solução Equação 5.34 é obtida facilmente por métodos gráficos, basta somente avaliar o maior valor da magnitude do gráfico de Bode. O objetivo do controle H_{∞} é encontrar a função de transferência que possua a menor norma H_{∞} possível, ou seja, o resultado do projeto H_{∞} é um controlador que minimize a norma H_{∞} do sistema em malha fechada.

5.3.4.2 Representação do Controle H_{∞}

O controle H_{∞} utiliza uma notação característica para a representação do sistema. Onde a representação de espaço de estados e de função de transferência é escrita em um formato compactado. Para efeito de exemplo será considerada a Equação 5.35.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (5.35)$$

Escrevendo a Equação 5.35 na forma compacta normalmente utilizada na abordagem H_{∞} se obtém a Equação 5.36.

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

A próxima subseção utilizará a notação compactada para formular o problema de controle H_{∞} .

5.3.4.3 Formulação do Problema H_{∞}

O problema de controle H_{∞} pode ser formulado através do diagrama de blocos da Figura 5.16, esse diagrama é capaz de representar uma grande variedade de problemas de maneira simples e sucinta.

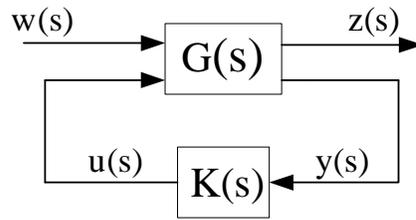


Figura 5.16 – Diagrama de blocos genérico para a representação do controle H_∞ .

Os dois blocos que compõem o diagrama da Figura 5.16 são o modelo da planta $G(s)$ e o controlador H_∞ $K(s)$. A planta possui dois tipos de entradas as exógenas representadas na Figura 5.16 por $w(s)$ e a entrada de controle $u(s)$. As entradas exógenas $w(s)$ não podem ser manipuladas pelo controlador, já a entrada de controle $u(s)$ aciona o atuador visando à minimização dos efeitos das entradas exógenas.

Já as saídas das plantas podem ser classificadas em dois grupos, o primeiro grupo $y(s)$ são os sinais que são medidos e realimentados, tornando-se as entradas do controlador. O segundo grupo de saídas $z(s)$ são as de desempenho, ou seja, os sinais que se desejam controlar ou minimizar [28].

As funções de transferências que representam o sistema da Figura 5.16 podem ser escritas na forma do conjunto de Equações 5.37 [28].

$$\begin{cases} z(s) = G_{zw}(s)w(s) + G_{zu}(s)u(s) \\ y(s) = G_{yw}(s)w(s) + G_{yu}(s)u(s) \\ u(s) = K(s)y(s) \end{cases} \quad (5.37)$$

A função de transferência de malha fechada entre a saída controlada e as entradas exógenas será obtida a seguir.

$$y(s) = G_{yw}(s)w(s) + G_{yu}(s)K(s)y(s) \quad (5.38)$$

Manipulando a Equação 5.38 é possível isolar a equação $y(s)$ como mostra a Equação 5.39.

$$y(s) = (I - G_{yu}(s)K(s))^{-1} G_{yw}(s)w(s) \quad (5.39)$$

Através da substituição da Equação 5.39 $u(s)$ torna-se a equação descrita por 5.40.

$$u(s) = K(s)(I - G_{yu}(s)K(s))^{-1} G_{yw}(s) w(s) \quad (5.40)$$

Substituindo a Equação 5.40 em $z(s)$ obtêm-se a Equação 5.41.

$$z(s) = G_{zw}(s) w(s) + G_{zu}(s) \left[K(s)(I - G_{yu}(s)K(s))^{-1} G_{yw}(s) \right] w(s) \quad (5.41)$$

De acordo com a Equação 5.41 pode-se definir a função de transferência de malha fechada entre a saída de desempenho e as entradas exógenas T_{zw} através da Equação 5.42.

$$T_{zw}(s) = G_{zw}(s) + G_{zu}(s) \left[K(s)(I - G_{yu}(s)K(s))^{-1} G_{yw}(s) \right] \quad (5.42)$$

Usando a equação 5.42 é possível reescrever a equação 5.41 através da equação 5.43.

$$z(s) = T_{zw}(s)w(s) \quad (5.43)$$

A planta também pode ser representada na forma de espaço de estados como mostra o conjunto de Equação 5.44.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \end{cases} \quad (5.44)$$

Onde as dimensões de $x(t)$, $w(t)$, $u(t)$, $z(t)$ e $y(t)$ são respectivamente n_1 , m_1 , m_2 , p_1 e p_2 .

O conjunto de equações 5.44 pode ser escrito na forma compacta apresentada na seção 5.3.4.2, o sistema na representação compacta é mostrado na Equação 5.45.

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Após a exposição do problema de controle H_∞ feita nesta seção. A próxima seção abordará a solução desse problema.

5.3.4.4 Solução do Problema H_∞

Considerando o diagrama de blocos genérico da Figura 5.16, a solução do problema de controle H_∞ é encontrar um controlador $K(s)$ que estabilize internamente o sistema em malha fechada composto pelo controlador e pela planta $G(s)$. Além disso, tal controlador também deverá minimizar a norma H_∞ da função de transferência de malha fechada $T_{zw}(s)$, dada pela Equação 5.52, essa minimização deve garantir que a norma H_∞ de $T_{zw}(s)$ fique abaixo de um dado nível γ , o qual é um número escalar positivo. Este problema é chamado de problema de controle H_∞ padrão [25]. Já para solucionar o problema de controle H_∞ ótimo deve-se partir do problema de controle padrão definindo um limite γ inicial e reduzi-lo progressivamente, até que o problema não tenha mais solução. Então o último controlador $K(s)$ obtido antes que a solução do sistema falhe é definido como controlador H_∞ ótimo, ou seja, o controlador que consegue reduzir a norma H_∞ da função de transferência de malha fechada $T_{zw}(s)$ para um mínimo valor γ e simultaneamente promover a estabilidade interna do sistema da Figura 5.16. O processo de obtenção de minimização de γ é conhecido como iteração- γ : sendo esse realizado por algoritmos computacionais.

Porém para o problema ter uma solução certos requisitos devem ser satisfeitos, esses serão listados a seguir.

- O par (A, B_2) deve ser estabilizável e o par (C_2, A) deve ser detectável. Essa consideração é necessária para que o controlador seja capaz de estabilizar todos os estados do sistema e conseqüentemente que consiga prover a estabilidade do sistema em malha fechada.

- O posto de D_{12} deve ser igual a m_1 e o posto de D_{21} deve ser igual a p_2 . Essas condições são necessárias para assegurar que o controlador seja próprio. Elas também implicam que a função de transferência não é nula para altas frequências.
- A condição introduzida pela Equação 5.56 deve ser respeitada.

$$\text{posto} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = n_1 + m_2 \quad (5.56)$$

- A condição introduzida pela Equação 5.57 deve ser respeitada.

$$\text{posto} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = n_1 + p_2 \quad (5.57)$$

Uma vez apresentada às condições básicas da solução do problema H_∞ , pode abordar a solução do problema. A abordagem H_∞ é similar em alguns aspectos ao controle LQR com observador de estados, já abordado em seções anteriores. O controlador H_∞ também utiliza um estimador de estados e realimenta os estados estimados através de um ganho. O ganho do controlador e do observador de estados assim como no caso LQR também pode ser calculado utilizando duas equações de Ricatti. Porém a equação do controle H_∞ possuem coeficientes diferentes do caso LQR, o observador de estados no caso do controle H_∞ possui uma configuração mais elaborada tendo um termo adicional ao observador de Luenberger utilizado na abordagem LQR. O sinal de controle $u(t)$ da Equação 5.54 é dado pela Equação 5.58.

$$u(t) = -K_c \hat{x}(t) \quad (5.58)$$

onde K_c é o ganho do controlador e $\hat{x}(t)$ são os estados estimados. A Equação 5.59 descreve a dinâmica do estimador de estados.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B_2 u(t) + B_1 \hat{w}(t) + Z_\infty K_c (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (5.59)$$

Sendo que os sinais estimados $\hat{w}(t)$ e $\hat{y}(t)$ da Equação 5.49 pode ser obtido a partir das equações 5.50 e 5.51 respectivamente.

$$\hat{w}(t) = \gamma^2 B_1' X_\infty \hat{x}(t) \quad (5.50)$$

$$\hat{y}(t) = C_2 \hat{x}(t) + \gamma^2 D_{21} B_1' X_\infty \hat{x}(t) \quad (5.51)$$

Utilizando a notação matricial compactada introduzida pela Equação 5.36 o controlador $K(s)$ da Figura 5.16 pode ser escrito através da Equação 5.52.

$$K(s) = \begin{bmatrix} A - B_2 K_c - Z_\infty K_e C_2 + \gamma^2 (B_1 B_1' - Z_\infty K_e D_{21} B_1') X_\infty & Z_\infty K_e \\ -K_c & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

O termo $\hat{w}(t)$ é uma estimativa do pior caso de entrada de perturbação para o sistema, e $\hat{y}(t)$ é a saída estimada. O ganho do estimador é dado por $Z_\infty K_e$. O ganho do controlador K_c e o ganho do observador K_e são definidos pelas equações 5.53 e 5.55 respectivamente.

$$K_c = \tilde{D}_{12} (B_2' X_\infty + D_{12}' C_1) \quad (5.53)$$

Onde o termo \tilde{D}_{12} da Equação 9.29 é mostrado na Equação 9.30

$$\tilde{D}_{12} = (D_{12}' D_{12})^{-1} \quad (5.54)$$

$$K_e = (Y_\infty C_2' + B_1 D_{21}') \tilde{D}_{21} \quad (5.55)$$

$$\tilde{D}_{21} = (D_{21} D_{21}')^{-1} \quad (5.56)$$

O termo Z_∞ é dado pela Equação 5.57.

$$Z_\infty = (I - \gamma^2 Y_\infty X_\infty)^{-1} \quad (5.57)$$

Já os termos X_∞ e Y_∞ são solução das equações de Riccati do controlador e do estimador de estados. A Equação 5.58 mostra a equação de Riccati de X_∞ na forma matricial.

$$X_\infty = \text{Ric} \left(\begin{bmatrix} A - B_2 \tilde{D}'_{12} D'_{12} C_1 & \gamma^2 B_1 B'_1 - B_2 \tilde{D}'_{12} B'_2 \\ -\tilde{C}'_1 \tilde{C}_1 & -(A - B_2 \tilde{D}'_{12} D'_{12} C_1)' \end{bmatrix} \right) \quad (5.58)$$

Sendo o termo \tilde{C}_1 da equação 5.58 é definido pela equação 5.59.

$$\tilde{C}_1 = (I - D_{12} \tilde{D}'_{12} D'_{12}) C_1 \quad (5.59)$$

O termo Y_∞ é dado pela equação 5.60.

$$Y_\infty = \text{Ric} \left(\begin{bmatrix} (A - B_1 D'_{21} \tilde{D}_{21} C_2)' & \gamma^2 C'_1 C_1 - C'_2 \tilde{D}_{21} C'_2 \\ -\tilde{B}_1 \tilde{B}'_1 & -(A - B_1 D'_{21} \tilde{D}_{21} C_2) \end{bmatrix} \right) \quad (5.60)$$

Sendo o termo \tilde{B}_1 da equação 5.60 é definido pela equação 5.61.

$$\tilde{B}_1 = B_1 (I - D'_{21} \tilde{D}_{21} D_{21}) \quad (5.61)$$

Uma vez solucionado o problema de controle H_∞ a dinâmica em malha fechada do sistema é dada pelas equações de espaço de estados 5.62 e 5.63.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{\hat{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_2 K_c \\ Z_\infty K_c C_2 & A - B_2 K_c + \gamma^2 B_1 B'_1 X_\infty - Z_\infty K_c (C_2 + \gamma^2 D_{21} B'_1 X_\infty) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ Z_\infty K_c D_{21} \end{bmatrix} w(t) \quad (5.62)$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -D_{12}K_c \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix} w(t) \quad (5.63)$$

O controlador da Figura 5.16 existirá se e somente se existir uma solução semidefinida positiva para as equações 5.58 e 5.60 e se a condição expressa pela Equação 5.64 for cumprida.

$$\rho(Y_\infty X_\infty) < \gamma^2 \quad (5.64)$$

Sendo que a Equação 5.64 impõe um limite ao raio espectral de $Y_\infty X_\infty$, o raio espectral de uma dada matriz é definida pelo seu maior autovalor. Então a condição da Equação 5.64 exige que o maior autovalor de X_∞ e de Y_∞ seja menor que γ^2 .

O problema H_∞ deve ser resolvido com auxílio computacional, tendo em vista que para cada iteração duas equações de Riccati devem ser calculadas. Particularmente esse trabalho utiliza o software Matlab[®] que possui uma função especial para a solução do problema de controle H_∞ . De maneira geral as etapas da solução do problema podem ser resumidas como se segue:

- I. Escrever a planta $G(s)$ na forma matricial compactada como a Equação 5.45.
- II. Verificar se as condições de posto das matrizes 5.46 e 5.47 são satisfeitas, se não forem deve-se reformular o problema mudando as matrizes de ponderação D_{21} e D_{12} , ou adicionando entradas e saídas fictícias.
- III. Selecionar um valor inicial positivo e relativamente grande para o parâmetro γ .
- IV. Solucionar as duas equações de Riccati, descritas pelas equações 5.58 e 5.60 e verificar se essas soluções são semidefinidas positiva. A condição do raio espectral definida pela Equação 5.64 também deve ser obedecida.
- V. Se todas as condições do item IV forem cumpridas, deve-se diminuir o valor γ e repetir a etapa IV. Se as condições de IV não forem cumpridas deve-se aumentar o valor de γ e repetir a etapa IV. As etapas IV e V devem ser repetidas até que uma solução ótima ou satisfatória seja obtida.

Quando se utiliza softwares que possuem funções especiais para a solução do problema H_∞ normalmente o próprio software processa os itens IV e V, os repetindo até a solução ótima seja encontrada.

5.3.4.5 Projeto de controle H_∞ Robusto a Variações Paramétricas

Através do teorema do pequeno ganho introduzido pela Equação 5.31 é possível utilizar a abordagem H_∞ como ferramenta de projeto para controladores robustos às incertezas do modelo. Isso pode ser feito considerando as entradas do bloco de incertezas como saídas de desempenho a serem minimizadas. Desta maneira a minimização da norma H_∞ seria aplicada às incertezas. Ou seja, a norma H_∞ minimizada seria a da função de transferência das incertezas, convertendo assim o problema convencional de controle H_∞ em um problema de controle robusto.

Como exemplo da aplicação do problema de robustez H_∞ será considerado o sistema ilustrado pela Figura 5.10. Esse sistema representa o primeiro modo de vibração do caso de estudo deste trabalho e considera as variações paramétricas descritas na seção 5.3.2.1. Como é possível observar pela Figura 5.10 as entradas exógenas $w(t)$ do sistema são $F_u(t)$ relativa ao distúrbio e $d(t)$ relativa às incertezas paramétricas. Sendo que a dimensão de $F_u(t)$ é unitária e $d(t)$ possui a dimensão 2.

Visando reduzir a vibração na extremidade livre da viga e tornar o sistema robusto às variações paramétricas descritas na seção 5.3.2.1 será realizando um projeto de controle H_∞ , para tal será utilizado o modelo da Equação 5.26. As saídas de performances z_1 , z_2 e z_3 serão escolhidas devido às incertezas, já a saída z_4 será escolhida visando à redução da vibração. Desta forma o problema de controle H_∞ para esse caso particular pode ser formulado através do conjunto de equações 5.65.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & -\zeta_1 \omega_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -I & I & -[\boldsymbol{\psi}_u][K_{\phi u}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{F}_u \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_4 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -\omega_1^2 & -2\zeta_1 \omega_1 \\ [\boldsymbol{\psi}_u] & 0 \\ [K_{u\phi}][\boldsymbol{\psi}_u] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -I & I & -[\boldsymbol{\psi}_u][K_{\phi u}] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{F}_u \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \quad (5.65)
\end{aligned}$$

A formulação do problema H_∞ como mostrado pela Equação 5.65 garante estabilidade para variação com norma H_∞ das incertezas limitadas à unidade [30].

5.3.4.6 Projeto de um Controlador H_∞ para o Modelo com Seis Modos de Vibração

Um controlador H_∞ foi projetado considerando o modelo com seis modos de vibração utilizado no projeto LQR. Devido a grande dimensão das matrizes que compõem o sistema, a formulação do problema H_∞ para este caso será escrita através da notação matricial compacta. A equação 5.66 ilustra a forma compactada do problema H_∞ .

$$G(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_{Mec} & \mathbf{B}_{PZT} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_{PZT} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B}_{Mec} , \mathbf{B}_{PZT} e \mathbf{C}_{PZT} são obtidas de acordo com o capítulo 4, considerando os seis primeiros modos de vibrações. Já a matriz \mathbf{C}_1 é formada pela matriz \mathbf{C}_{Mec} aumentada por elementos nulos visando o cumprimento da condição de posto introduzido pela Equação 5.46. A matriz \mathbf{C}_{Mec} compõe a matriz \mathbf{C}_1 , pois as saídas de desempenho visam minimizar a norma H_∞ da função de transferência cuja entrada é a perturbação na extremidade livre da viga e a saída é o deslocamento no eixo Z desta mesma extremidade. As matrizes \mathbf{D}_{12} e \mathbf{D}_{21} são escolhidas de modo a ponderar a atenuação das vibrações e a magnitude do sinal de controle, além disso, essas matrizes devem obedecer as condições de posto impostas pela Equação 5.46 e 5.47. As matrizes \mathbf{D}_{11} e \mathbf{D}_{22} são ambas

nulas e possuem dimensões apropriadas. Mais detalhes sobre as matrizes que compõem a Equação 5.66 podem ser encontrados nos anexos 1 e 5. No capítulo seguinte também será feita uma análise da robustez deste controlador às incertezas estruturais dinâmicas.

CAPÍTULO 6 RESULTADOS

6.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os resultados de simulação dos controladores LQR, compensador em avanço de fase e H_∞ propostos ao longo deste trabalho. Também será feita uma análise de robustez às incertezas dinâmicas para o caso do controlador H_∞ .

Todas as simulações considerarão o distúrbio com uma força atuando na direção z da extremidade livre da viga (ponto P1 da Figura 6.1), possuindo a forma de um ruído branco. O distúrbio na forma de ruído branco, mostrado na Figura 6.2, foi escolhido devido ao mesmo conseguir excitar todas as faixas de frequência da estrutura, dessa maneira é possível avaliar o desempenho do sistema de controle em um sentido global [6]. A Figura 6.1 ilustra a viga sendo P₁ o ponto de atuação da perturbação.

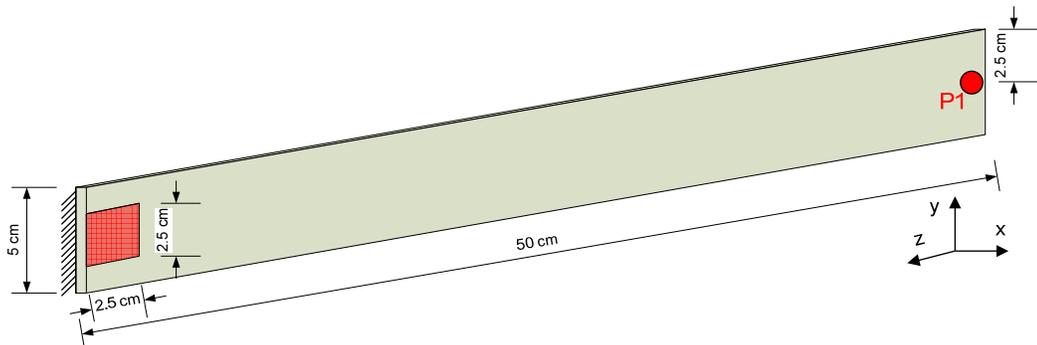


Figura 6.1 – Ponto de atuação da perturbação

As simulações foram realizadas utilizando os softwares Matlab[®] e Simulink[®].

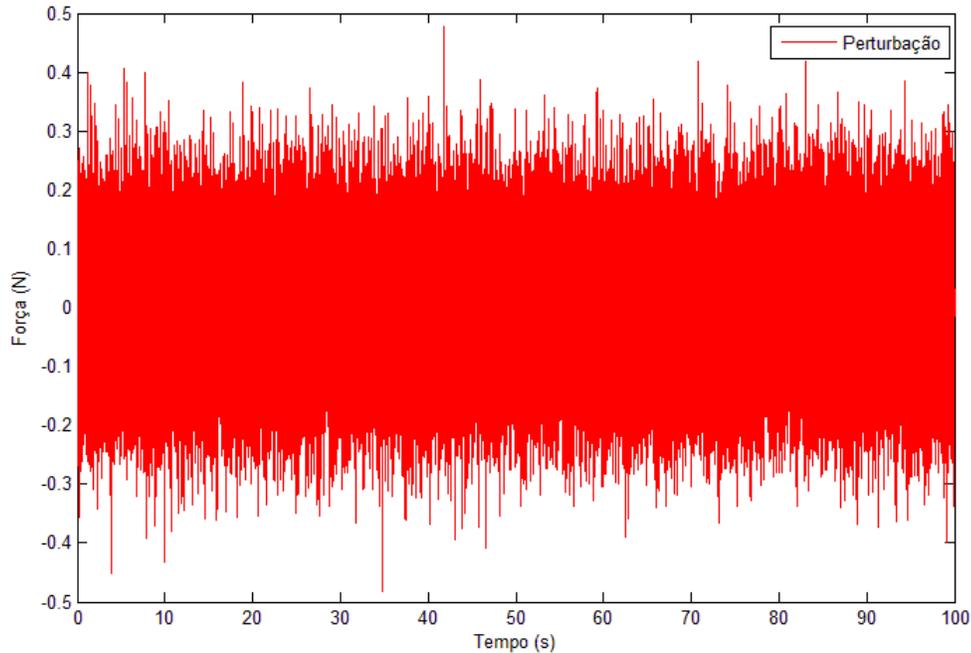


Figura 6.2 – Perturbação na forma de ruído branco atuante na estrutura.

6.2 Controle LQR

Para o projeto e simulação do controle LQR o modelo utilizado é formado pelos seis primeiros modos de vibração. O sistema de controle para este caso é composto por um observador de estados do tipo Luenberger e um controlador LQR, o objetivo do sistema de controle é reduzir prioritariamente os 3 primeiros modos de vibração, esse objetivo é evidenciado pelas matrizes de ponderação mostradas no anexo 3. Os ganhos do controlador e do estimador de estados também estão contidos no anexo 3. Para este caso a saída do sistema será considerada o deslocamento do ponto P_1 mostrado pela figura 6.1. A Figura 6.3 compara o diagrama de Bode do sistema em malha fechada com o diagrama de bode do sistema em malha aberta, considerando a saída do sistema o deslocamento extremidade livre da viga.

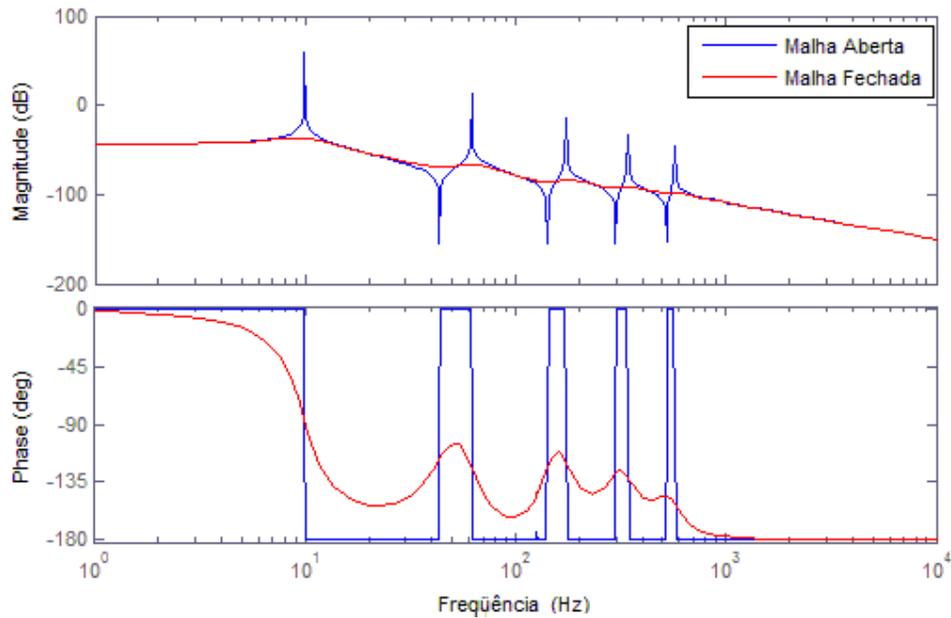


Figura 6.3 – Diagramas de Bode do sistema considerando a saída mecânica para o caso LQR

Considerando saída do sistema como carga do sensor piezométrico também é possível comparar os diagramas de Bode do sistema em malha com o de malha fechada.

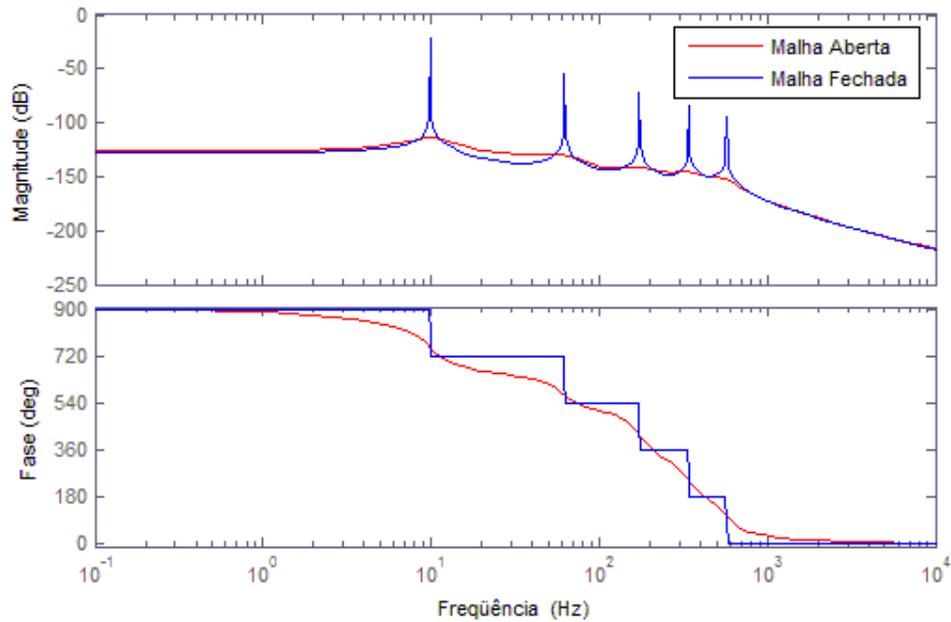


Figura 6.4 – Diagramas de Bode do sistema considerando a saída elétrica para o caso LQR

Como pode ser observado pela Figura 6.3 o sistema de controle diminui consideravelmente todos os picos de ressonância melhorando assim a capacidade de rejeição de perturbação do sistema. O controle LQR foi bem sucedido em priorizar a redução dos três primeiros modos de vibração, sendo que para um atuador piezométrico ideal seria possível

obter a redução de aproximadamente 100 dB para o primeiro modo de vibração e em média de 70 dB para o segundo e terceiro modo. Porém, devido as limitações operacionais do atuador piezelétrico os níveis de atenuação obtido pelo sistema de controle seriam na realidade inferiores aos mostrados pela Figura 6.3. Para avaliar o desempenho do controlador sobre a influência da restrição operacional do atuador, nas simulações foi considerado que o sinal de controle possui uma saturação de ± 200 V.

A Figura 6.5 mostra a resposta temporal do sistema para uma perturbação com na forma de ruído branco, comparando a resposta do sistema controlado com a resposta do sistema em malha aberta. Como pode ser observado pela Figura 6.5 mesmo com a inserção do saturador o sistema de controle apresenta um bom desempenho conseguindo rejeitar consideravelmente a influência da perturbação sobre a estrutura. Diminuindo a energia da resposta do sistema à perturbação em mais que 85%.

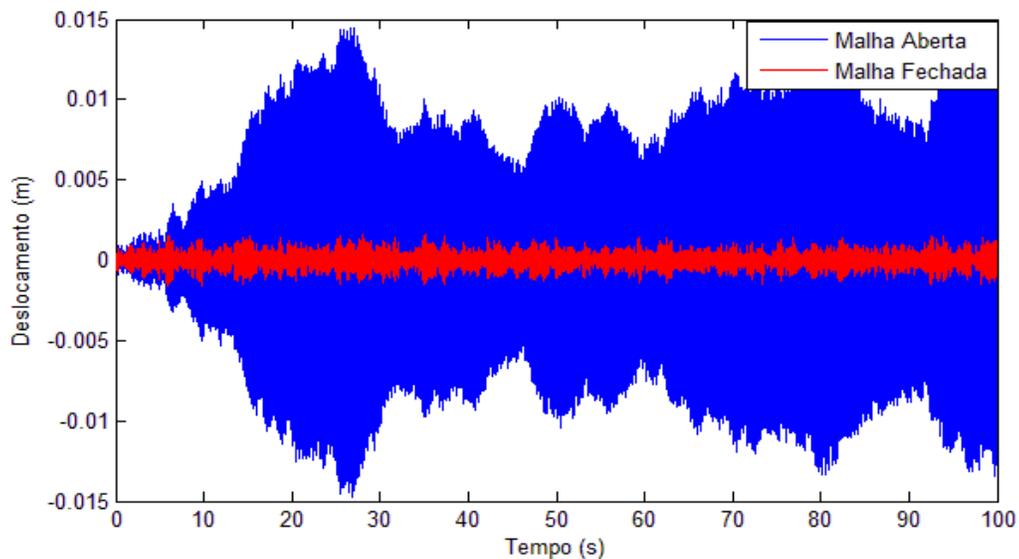


Figura 6.5 – Resposta temporal do sistema para o caso LQR

Como é possível observar pela Figura 6.6 o sinal de controle respeita as limitações operacionais do atuador PZT, sendo que os máximos valores de tensão elétrica são da ordem de 150 V ocorrendo em intervalos pequenos de tempo, menores que um segundo.

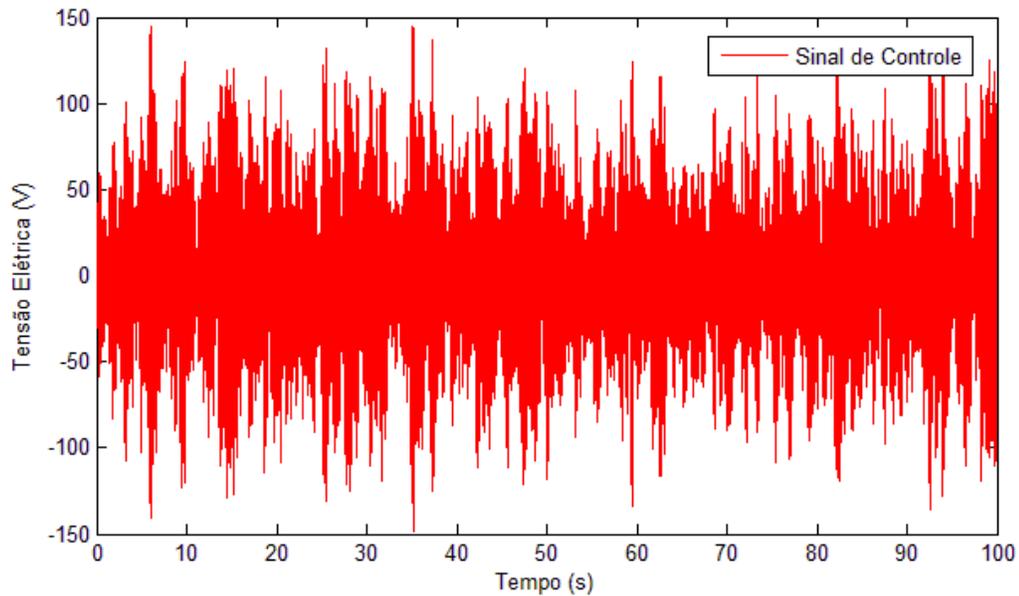


Figura 6.6 – Sinal de controle para o caso LQR

6.3 Compensador em Avanço de Fase

O próximo controlador experimentado será o compensador em avanço de fase cuja estrutura foi introduzida no capítulo 5. A idéia principal da utilização do compensador em avanço de fase foi mostrar que um controlador clássico convencional é capaz de tratar o problema de controle ativo de vibração para o caso de estudo particular deste trabalho. Evidentemente devido à ordem reduzida deste controlador em comparação com as abordagens LQR e H_∞ seu desempenho é prejudicado, isso pode ser concluído observando o diagrama de bode da Figura 6.3. Como esse controlador não utiliza observador de estados, foi considerado somente o subsistema elétrico para o projeto do compensador, porém ao minimizar a influência da perturbação sobre a saída elétrica o compensador conseqüentemente também minimizará essa influência sobre a saída mecânica do sistema. Desta maneira diferentemente do caso do controlador LQR serão comparados somente o diagrama de bode de malha aberta e fechada para o sistema elétrico. O projeto do compensador priorizou a redução dos 3 primeiros modos de vibração, porém diferentemente do caso LQR onde a escolha dos modos prioritários é feita através das matrizes de ponderação, para o compensador essa escolha é feita pela definição de seu pólo, zero e ganho. Como pode ser observado pela Figura 6.7 o compensador consegue obter uma boa atenuação para os 3 primeiros modos, porém a atenuação para os demais modos não é tão satisfatória como no caso LQR.

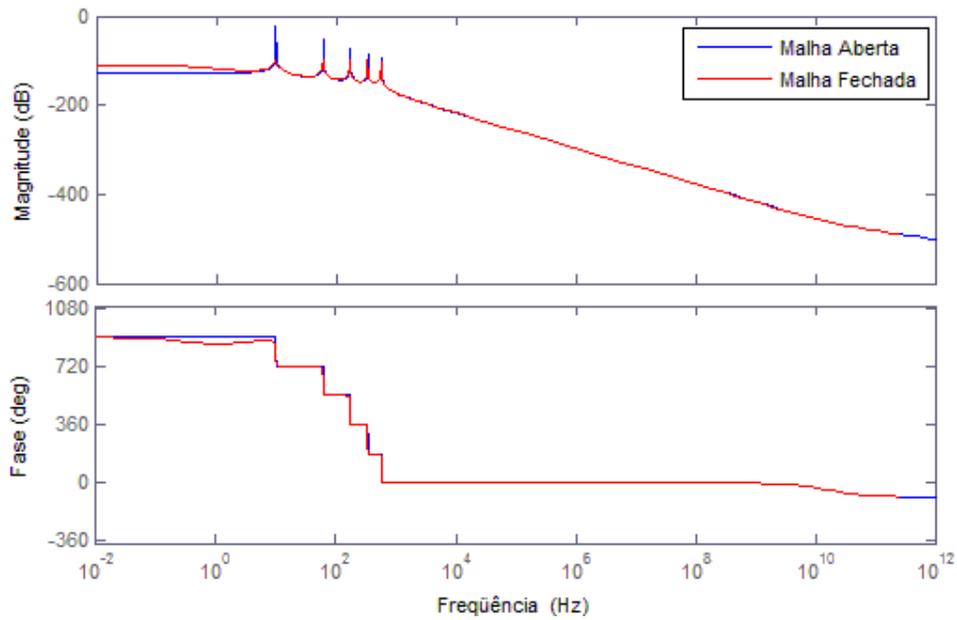


Figura 6.7 – Diagramas de Bode do sistema considerando a saída elétrica para o caso do compensador

Para avaliar o desempenho do controle sobre as restrições operacionais do atuador uma saturação de ± 200 V foi considerada para o sinal de controle.

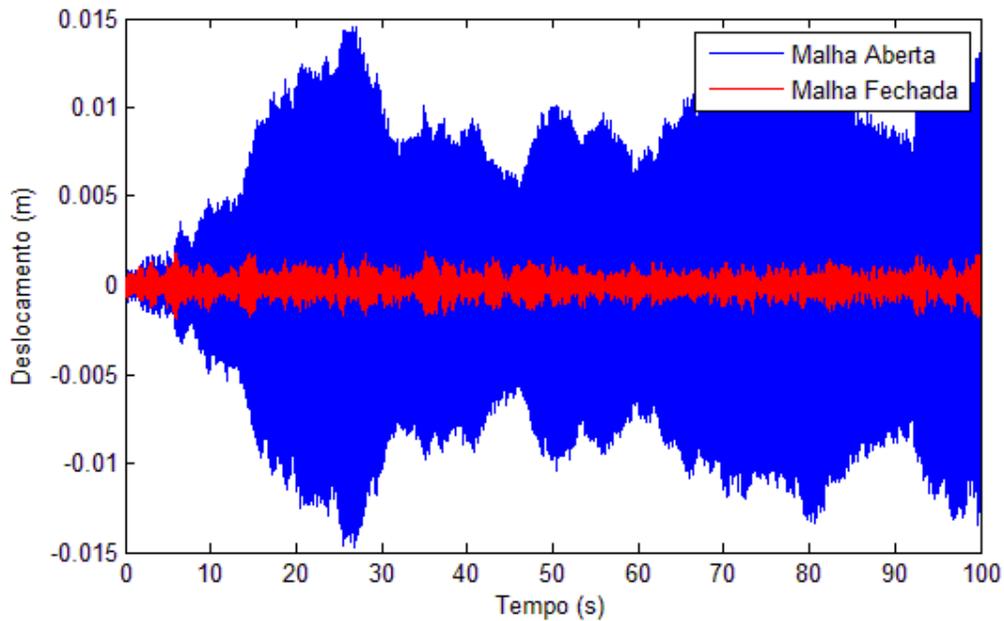


Figura 6.8 – Resposta temporal do sistema para o caso do compensador

Como pode ser observado pela Figura 6.8 a rejeição de perturbações para o caso do compensador é ligeiramente menor que a promovida pelo sistema de controle LQR. Sendo que a energia da resposta do sistema em malha fechada foi 6.3% maior que o caso LQR. Em

uma primeira análise pode-se concluir que o compensador obteve praticamente os mesmo resultados para a rejeição do ruído branco, porém como pode ser observado pela Figura 6.9, o esforço do atuador é muito maior para o caso do compensador. Sendo a energia do sinal de controle para o caso do compensador cerca de 56% maior que a do caso LQR.

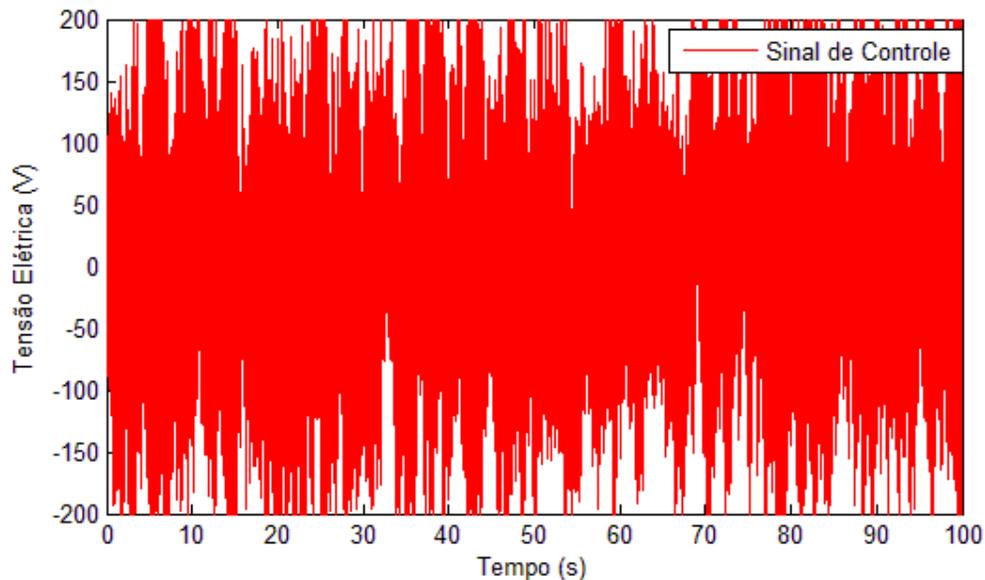


Figura 6.9 – Sinal de controle para o caso do compensador

Então se pode concluir que o sistema de controle LQR é mais eficiente que o compensador, tendo em vista que o controlador LQR consegue níveis maiores de atenuação utilizando um sinal de controle cuja energia é três vezes menor que a utilizada pelo compensador. A maior eficiência do controle LQR se deve ao seu projeto, onde as matrizes de ponderação permitem estabelecer uma relação entre as energias dos estados e do sinal de controle com relativa facilidade. Já o projeto clássico de compensadores não oferece a mesma facilidade de ponderação das energias do sistema, isso se deve porque os requisitos de projeto desse controlador envolvem apenas a estabilidade em malha fechada e a rejeição de perturbações. As grandes vantagens do compensador são a ausência de observador de estados e as dimensões reduzidas do controlador, essas características facilitam a implementação real do sistema de controle.

6.4 Controle H_{∞} Considerando Variações Paramétricas do Modelo

Nessa seção serão apresentados os resultados do controlador H_∞ proposto na seção 5.3.4.5 do capítulo 5. Para o projeto desse controlador foi utilizado um modelo composto por um modo de vibração, as matrizes que formam o modelo bem como o controlador estão contidos no anexo 4.

Para as simulações foi considerada uma variação de 30% dos parâmetros $-\omega^2$ e $-\zeta_1\omega$ que formam a matriz de estados do sistema. Então o desempenho do controlador projetado a partir do modelo nominal (sem variações) foi testado usando o modelo com variações paramétricas. O diagrama de bode da Figura 6.10 mostra a atenuação provida pelo controlador à saída mecânica do sistema com variações paramétricas.

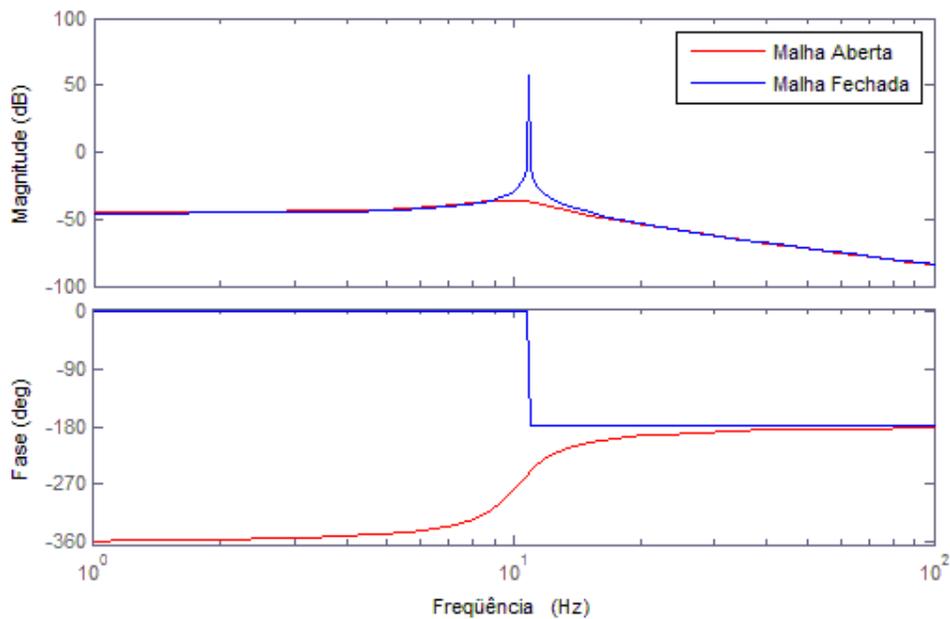


Figura 6.10 – Diagramas de Bode do sistema considerando a saída mecânica para o caso H_∞ com variações paramétricas

Como pode ser observado pelo diagrama de bode da Figura 6.5 o sistema de controle consegue promover uma atenuação de 80 dB no sistema em malha aberta. Para avaliar como o controlador interfere na robustez do sistema às variações paramétricas, as normas H_∞ do sistema em malha aberta será comparada com a norma H_∞ do sistema em malha fechada. Essa comparação pode ser feita verificando a redução relativa da norma, como mostra a Equação 6.1.

$$\frac{\|H(s)\|_{\infty}}{\|G(s)\|_{\infty}} = 1.6246 \times 10^{-4} \quad (6.1)$$

Como mostra a Equação 6.1 o sistema de controle produziu uma redução significativa na norma H_{∞} do sistema. Conseqüentemente devido às saídas de desempenho escolhidas na seção 5.3.4.5 do capítulo 5 a redução da norma H_{∞} do sistema também significa a redução das influências das incertezas sobre as saídas do sistema. Devido às limitações operacionais do atuador a magnitude da redução da norma H_{∞} será inferior a mostrada pela Equação 6.1. Para avaliar o desempenho do controlador sobre as restrições operacionais do atuador, foi considerado que o atuador possui uma saturação de ± 200 V e então a resposta do sistema foi simulada para uma entrada de perturbação na forma de ruído branco.

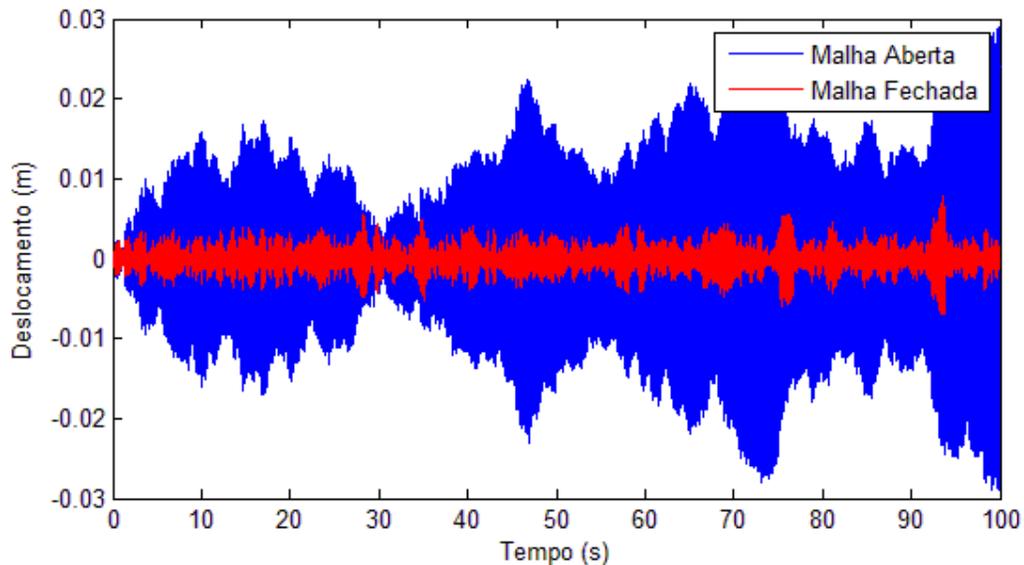


Figura 6.11 – Resposta temporal do sistema para o caso H_{∞} com variações paramétricas.

Pela Figura 6.11 é possível observar que mesmo com as restrições operacionais do atuador e com as variações paramétricas o controlador consegue reduzir a influência das perturbações sobre o sistema. A Figura 6.12 mostra o esforço de controle necessário para promover a atenuação observada na Figura 6.11.

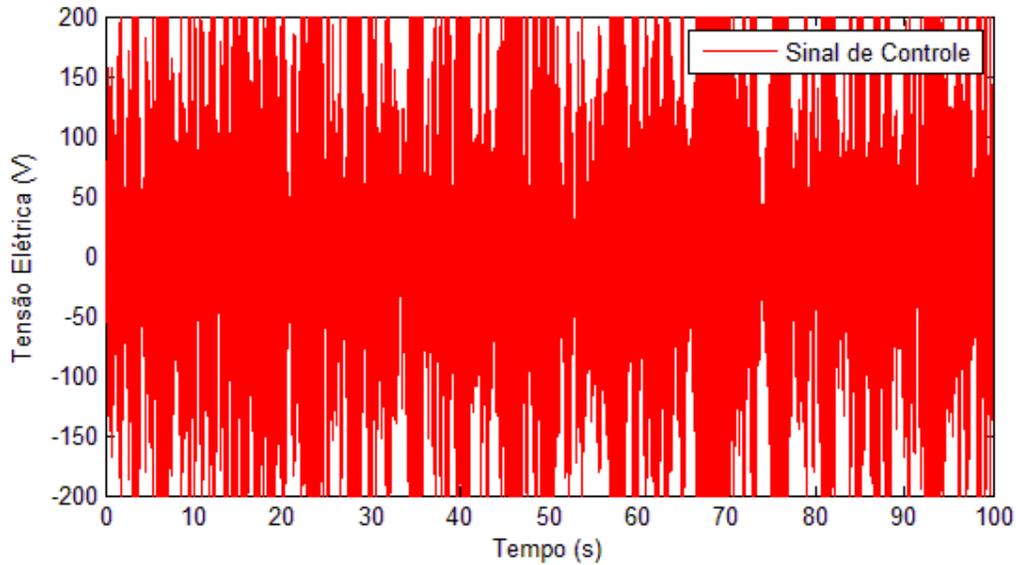


Figura 6.12 – Sinal de controle para o caso H_∞ com variações paramétricas.

6.5 Controlador H_∞ e Análise de incertezas dinâmicas

Essa seção apresentará os resultados de simulação do controlador H_∞ proposto na seção 5.3.4.6 do capítulo 5, posteriormente a robustez às incertezas dinâmicas deste controlador será analisada. O projeto deste controlador utilizou um modelo formado pelos primeiros seis modos de vibração da estrutura, para avaliar a robustez do sistema posteriormente este controlador foi simulado utilizando um modelo composto pelos primeiros 50 modos de vibração da estrutura.

A utilização dos 50 primeiros modos foi escolhida visando aproximar a simulação da aplicação real do sistema de controle. Evidentemente a estrutura real do caso de estudo deste trabalho apresenta infinitos modos de vibração, essa característica limita a aproximação entre os resultados obtidos por simulação e os obtidos experimentalmente. Porém a utilização dos 50 primeiros modos cobre uma larga faixa de frequências que vai desde 9.55 Hz à 16000 Hz, além disso, quando maior for a frequência da perturbação menor será a sensibilidade do sistema à mesma. Isso pode ser observado pelo diagrama de bode em malha aberta do sistema contido na Figura 6.13.

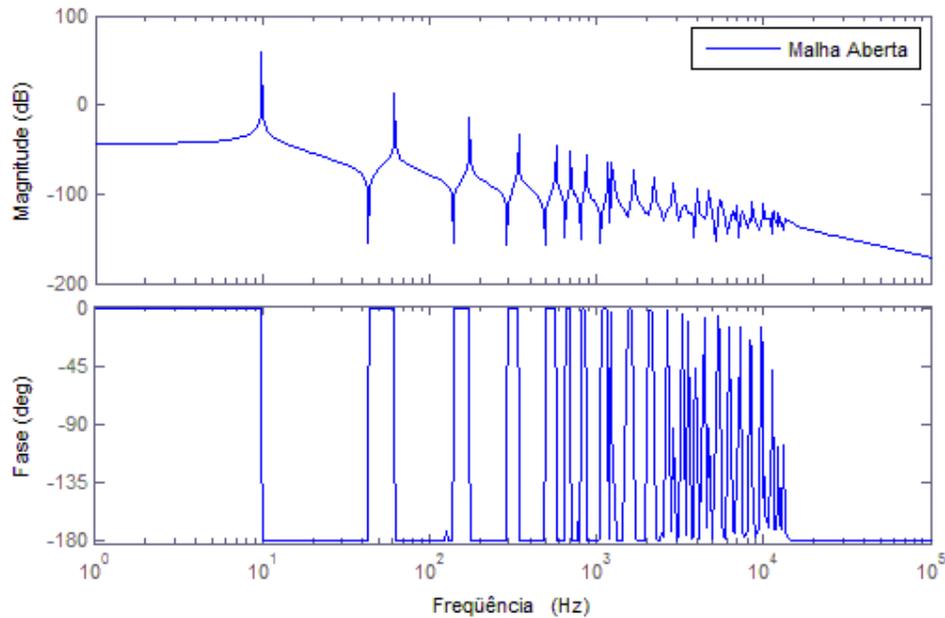


Figura 6.13 – Diagramas de Bode do sistema considerando a saída mecânica para o modelo de 50 modos

Objetivo escolhido para o controle H_∞ foi à atenuação das vibrações da extremidade livre da viga, esse objetivo pode ser observada pela saída de desempenho escolhida na seção 5.3.4.6 do capítulo nove. Uma vez estabelecidas as saídas de desempenho o controlador minimiza a norma H_∞ das funções de transferência que relacionam as entradas exógenas com essas saídas. No caso particular da formulação deste problema de controle como a única entrada exógena considerada é a perturbação da estrutura e a única saída de desempenho é o deslocamento da extremidade livre da viga, o controlador minimizará a norma H_∞ da função de transferência que relaciona o distúrbio com o deslocamento da extremidade livre da viga, promovendo assim a rejeição de perturbações. A formulação do problema de controle bem como o controlador obtido são mostrados no anexo 5.

A Equação 6.2 mostra a redução relativa da norma H_∞ do sistema:

$$\frac{\|H(s)\|_\infty}{\|G(s)\|_\infty} = 0.0153 \quad (6.2)$$

Onde $\|H(s)\|_\infty$ representa a norma H_∞ do sistema em malha fechada e $\|G(s)\|_\infty$ a norma H_∞ em malha aberta. Como mencionando anteriormente essa redução na norma H_∞ do sistema para essa formulação particular, simboliza a redução da influência das

perturbações na saída mecânica do sistema. Essa redução pode ser mais bem avaliada através do diagrama de bode da Figura 6.14.

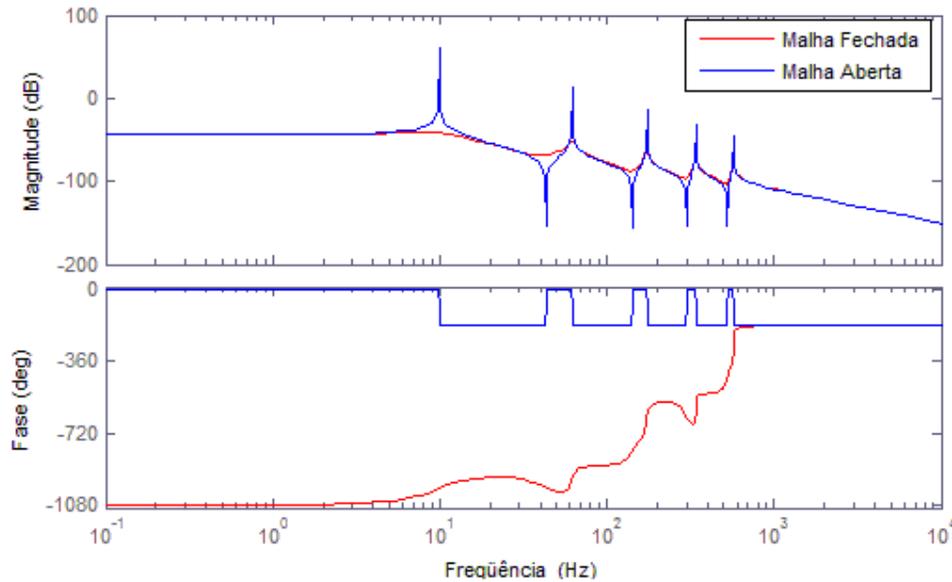


Figura 6.14 – Diagramas de Bode do sistema considerando a saída mecânica para o caso H_∞ .

Como pode ser visto na Figura 6.14 o sistema de controle provoca grandes níveis de atenuação em todos os seis modos de vibração, porém esse resultado é obtido para o mesmo modelo utilizado no projeto do controlador. Visando avaliar o desempenho desse controlador sobre a influência das incertezas dinâmicas, o mesmo será utilizado em um modelo aumentado formado pelos primeiros 50 modos de vibração. Para avaliar a robustez do sistema de controle às incertezas dinâmicas serão utilizadas as relações obtidas na seção 5.3.3 do capítulo 5. Essas relações definem que para que a estabilidade do sistema seja garantida na presença das incertezas dinâmicas o inverso do módulo dessas incertezas deve ser maior que o módulo da função de transferência $\mathbf{A}_2(s)$ para todas as frequências. Sendo que a função de transferência $\mathbf{A}_2(s)$ representa o sistema visto pela incerteza dinâmica, onde a entrada do sistema é a saída da incerteza e a entrada da incerteza é a saída do sistema. A Figura 6.15 verifica a condição da Equação 5.18, considerando o sistema nominal composto pelos 6 primeiros modos de vibração, já as incertezas são as dinâmicas restantes até o cinqüentagésimo modo de vibração denominadas na seção 5.3.2.2 de $\Delta_{a2}(s)$.

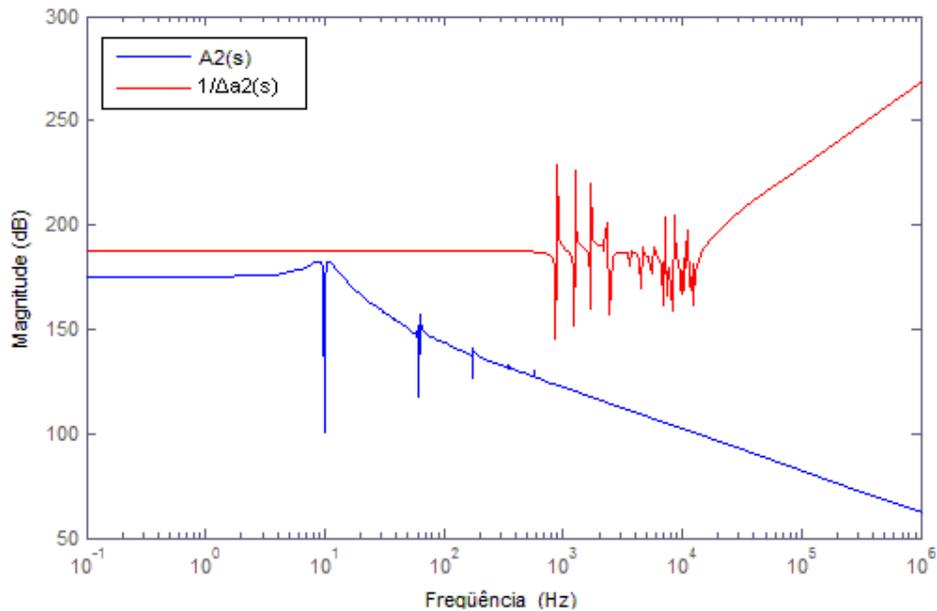


Figura 6.15 – Verificação da condição de robustez para incertezas dinâmicas

A Figura 6.15 mostra que a estabilidade do sistema será garantida se um controlador projetado a partir do modelo composto pelos seis primeiros modos for aplicado em um modelo formado pelos 50 primeiros modos. Como mencionado anteriormente uma estrutura real possui infinitos modos de vibração, então se fosse considerados modos adicionais às incertezas dinâmicas ocorreria uma diminuição da magnitude da função $1/\Delta_{a2}(s)$. Se essa diminuição fosse significativa a curva vermelha do diagrama de bode da figura 6.15 cortaria a curva azul e assim a estabilidade do sistema não continuaria sendo assegurada. Dessa maneira a utilização dos 50 primeiros modos para análise de robustez consegue assegurar a estabilidade do sistema para uma faixa de operação de 0 à 10.000 Hz. É válido lembrar que análise feita a partir da figura 6.15 é conservadora, sendo que o não cumprimento da condição de robustez não implica em instabilidade do sistema, isso porque essa análise se baseia no teorema do pequeno ganho e este considera apenas a condição de módulo do sistema.

Para avaliar a capacidade de rejeição do sistema de controle quando este é usado em modelos aumentados, o controlador projetado a partir dos seis primeiros modos foi aplicado em um modelo composto por 50 modos. A Figura 6.16 mostra a rejeição de perturbação promovida pelo sistema de controle.

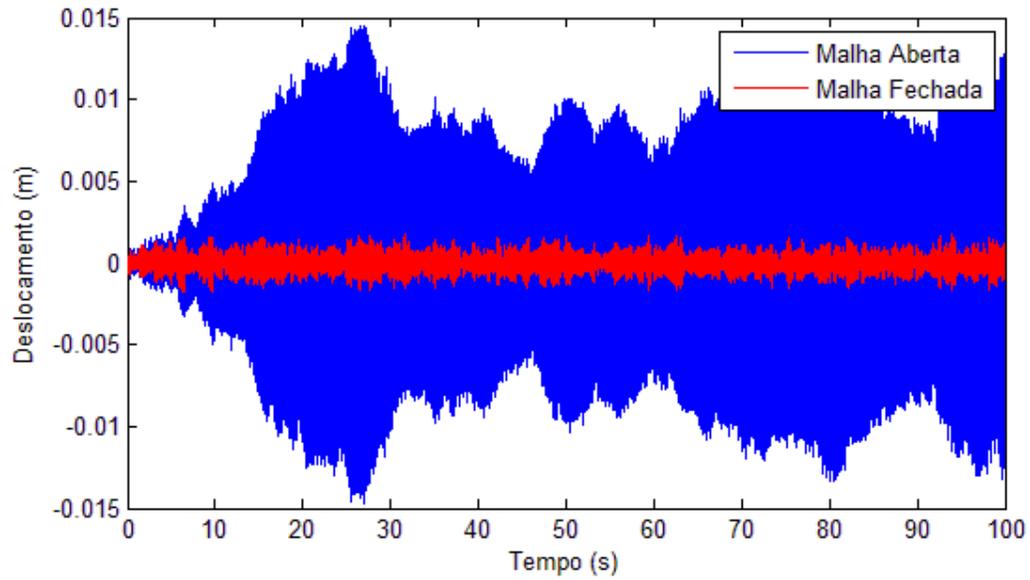


Figura 6.16 – Resposta temporal do sistema para o caso H_∞ com incertezas dinâmicas

Como pode ser visto pela Figura 6.16 o sistema de controle consegue atenuar consideravelmente uma perturbação na forma de ruído branco, obtendo um bom desempenho até mesmo para o modelo aumentado. A Figura 6.17 mostra o esforço de controle necessário para promover a atenuação mostrada na Figura 6.16.

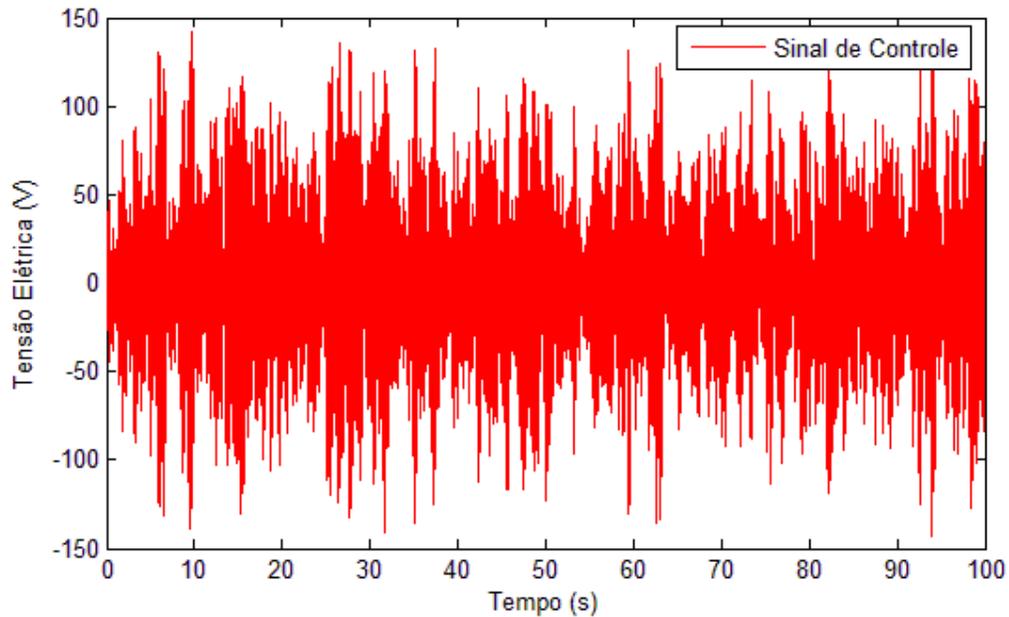


Figura 6.17 – Sinal de controle para o caso H_∞ com incertezas dinâmicas

A Figura 6.17 mostra que o sinal de controle respeitou os limites operacionais do atuador permanecendo durante todo o tempo na faixa de $\pm 150\text{ V}$.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

Esse trabalho abordou o problema de controle ativo de vibrações de estruturas mecânicas através de transdutores piezelétricos. Para tal foi estabelecida uma metodologia de modelagem matemática baseada em elementos finitos e análise modal, a qual torna possível a obtenção da representação de espaço de estados para qualquer estrutura com transdutores piezelétricos fixados.

Desde o advento das cerâmicas piezelétricas as mesmas tem sido uma ótima opção de transdutores para aplicações envolvendo vibrações. Os transdutores piezelétricos estudados neste trabalho apresentaram ótima velocidade de resposta e forte acoplamento eletromecânico devido aos elevados valores dos coeficientes piezelétricos do PZT – 5A. A escolha dos transdutores piezelétricos foi feita se baseando nas propriedades do material, principalmente na matriz dos coeficientes piezelétricos. Devido às propriedades piezelétricas serem anisotrópicas foi avaliado o campo de deslocamento do atuador levando em conta a direção de aplicação do campo elétrico, para isso foi utilizado o software de elementos finitos Ansys. Através da análise do campo de deslocamento dos transdutores, as formas de atuação dos mesmos são evidenciadas. Após a escolha dos transdutores estes foram simulados fixados na estrutura para avaliar o desempenho do conjunto viga/transdutores e verificar se as dimensões e a alocação dos transdutores eram adequadas para promover medição das vibrações e atuação sobre as mesmas.

Posteriormente ao estudo dos transdutores este trabalho realizou a modelagem matemática do conjunto viga/transdutores, sendo o resultado da mesma a representação em espaços de estados do sistema. O processo de modelagem foi baseado no método de elementos finitos e na redução modal. Devido aos transdutores piezelétricos estarem distribuídos espacialmente sobre a estrutura o modelo dos mesmos não pode ser obtido de maneira independente, como normalmente é feito com os transdutores convencionais, mas considerando o conjunto estrutura/transdutores. Essa peculiaridade dos transdutores tornou o MEF uma ótima opção para a modelagem do sistema, pois a abordagem MEF é capaz de considerar a esparcidade desses transdutores e calcular a matriz de massa global, rigidez global e de acoplamento piezelétrico do sistema. A partir dessas matrizes é possível descrever o comportamento dinâmico do conjunto viga transdutores, o qual possui com variáveis de entrada a força aplicada em cada nó e a tensão elétrica aplicada nos terminais do atuador, já as variáveis de saída são os deslocamentos nodais e a carga gerada pelo sensor. O sistema

composto a partir das matrizes obtidas do modelo de elementos finito apresenta uma ordem elevada, que tem relação direta com o número de nós do modelo MEF, para reduzir as dimensão no sistema foi aplicada uma transformação modal, muda a base de coordenadas física do sistema para uma base generalizada, essa técnica se mostrou eficiente pois além de reduzir o sistema permitiu priorizar os modos de vibração que mais influenciavam o comportamento do mesmo. A etapa final do procedimento de modelagem matemática é a representação do sistema em espaço de estados.

A utilização conjunta do MEF e da transformação modal se mostrou uma poderosa metodologia de modelagem matemática, simplificando e sistematizando o processo de obtenção de modelos para estruturas com dispositivos piezelétricos afixados, desta maneira essa metodologia torna-se uma poderosa ferramenta para projetos de controle ativo de vibrações. A base computacional utilizada na etapa de modelagem foi composta pelos softwares Ansys e Matlab, onde este foi usado para implementar a redução modal e representar o sistema na forma de espaço de estados e aquele foi utilizado para desenvolver o modelo de elementos finitos e obter as matrizes globais. A utilização de um software de elementos finitos também facilitou o processo de validação do modelo, por permitir a obtenção de suas FRFs, as quais posteriormente foram comparadas com as FRRs obtidas através das medições realizadas na estrutura real, validando assim a parte estrutural do modelo de elementos finitos.

Baseado no modelo de espaço de estado e nas funções de transferências procedeu-se a etapa de projeto do sistema de controle. Foram utilizadas três abordagens de projeto de controladores, um compensador em avanço de fase, controle LQR e controle H_{∞} .

A primeira abordagem de projeto utilizada foi a do controlador em avanço de fase, este projeto utiliza a representação de funções de transferências, sendo seu objetivo principal a mudança da função de sensibilidade do sistema em malha fechada. Através da diminuição do módulo da função de sensibilidade para frequências específicas foi possível diminuir os picos de ressonância do sistema e desta maneira aumentar a capacidade de rejeição de perturbações do mesmo. A priorização da redução de determinados modos de vibração é feita através da escolha dos pólos e zeros do compensador, no caso deste trabalho foram priorizados os três primeiros modos de vibração. Os resultados das simulações mostraram que o compensador conseguiu atenuar todos os modos de vibração, sendo que a atenuação mais significativa ocorreu nos três primeiros modos. O compensador se mostrou uma opção

de projeto simples e eficiente para o problema de controle ativo de vibrações originando um controlador de ordem reduzida que não necessita de estimadores de estados.

A segunda abordagem de projeto utilizada foi a LQR, este projeto é realizado a partir da representação do sistema por espaço de estados. O controle LQR é classificado como controle ótimo, devido ao projeto do controlador ser baseado em uma função de custo a ser minimizada. Nesta abordagem a escolha dos modos prioritários é feita através das matrizes de ponderação, as quais estabelecem um compromisso entre a energia dos estados do sistema de do sinal de controle. Neste projeto foram priorizados os três primeiros modos de vibração. Porém todos os modos foram atenuados significativamente. A grande vantagem desta abordagem foi a facilidade da escolha dos modos que se deseja atenuar, a qual pode ser feita de forma mais precisa que no caso do compensador em avanço devido a utilização das matrizes de ponderação.

O último projeto de controlador apresentado neste trabalho foi o H_∞ , foram realizados dois experimentos com controladores H_∞ . O primeiro experimento considerou um modelo composto por um único modo de vibração sobre a influência de incertezas paramétricas, então foi projetado um controlador H_∞ visando rejeitar as perturbações e manter a estabilidade do sistema mesmo sobre a influência de variações paramétricas. Como mostrado nos resultados obtidos por simulação este projeto foi robusto às variações paramétricas, sendo que o mesmo conseguiu reduzir consideravelmente o pico de ressonância do sistema.

O segundo experimento realizado com a abordagem H_∞ utilizou um modelo de seis modos de vibração para o projeto. O objetivo deste experimento foi testar a robustez do controlador às incertezas dinâmicas, para isso o controlador projetado a partir do modelo de seis modos foi simulado utilizando um modelo de 50 modos de vibração. Analisando os resultados da simulação pode-se concluir que o controlador proposto é robusto às incertezas dinâmicas, sendo que o mesmo conseguiu rejeitar as perturbações incidentes no sistema de 50 modos.

O diferencial da abordagem H_∞ é a possibilidade de representar as incertezas do sistema como suas entradas exógenas, e a partir disso, usando o teorema dos pequenos ganhos e escrevendo a saída de desempenho do sistema de maneira adequada, a solução do problema H_∞ passa a ser a minimização da norma H_∞ da função de transferência das incertezas do modelo para a saída de performance. Deste modo o controlador obtido é robusto às incertezas consideradas durante a fase de projeto.

Para o caso de controle de vibrações a abordagem H_∞ se mostrou uma poderosa ferramenta para projeto de controladores, pois devido a própria representação do sistema ser formada por apenas alguns modos de vibração existe uma forte influência das incertezas dinâmicas sobre o comportamento do sistema em malha fechada. Sendo que esta influência pode ser minimizada por um projeto adequado de controle robusto, onde a abordagem H_∞ se mostra uma ótima candidata para este propósito.

De maneira geral este trabalho abordou o problema de controle ativo de vibrações desde a etapa de especificação dos transdutores até a etapa do projeto dos controladores, estabelecendo deste modo uma metodologia de projeto completa.

Algumas propostas para trabalhos futuros podem ser formuladas, no âmbito da modelagem dos transdutores piezelétricos seria válido utilizar equação constitutivas não lineares as quais descrevem com maior fidelidade o comportamento dinâmico dos dispositivos piezelétricos. Outro tópico que pode ser estudado em trabalhos futuros é o controle ativo de vibração a partir de transdutores piezelétricos não colocados, esta disposição dos transdutores cria uma defasagem entre o sinal medido e a atuação, a qual deve ser considerada na etapa do projeto do controlador. A última sugestão é a futura utilização de um protótipo para testar os exemplos de controladores estudados nesta dissertação.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- [1] Gautschi, G. “Piezoelectric sensorics: Force, strain, pressure, acceleration and acoustic emission sensors, materials and amplifiers”. 1. ed. Germany: Springer, 2002.
- [2] Vlack, V. L. “Princípio de Ciência dos Materiais”. São Paulo: Edgar Blücher, 1970.
- [3] Setter, N. “Piezelectric Materials in Devices”. Lousanne, Suíça: Instituto suíço de tecnologia, Laboratório de Cerâmicas, 2002.
- [4] Cady, W. G. “Piezoelectricity”. London and New York, McGraw-Hill Book, 1946
- [5] Hayt, W. H. “Eletromagnetismo”. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1994
- [6] Marinho, M. V. A. “Modelagem dinâmica por elementos finitos e controle de placas e vigas usando sanduiches de sensor-atuador piezelétrico”. 2008. 151p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis.
- [7] Barrault, Guillaume F. G. “Controle ativo de vibrações de baixas e altas frequências e ruído radiado de estruturas complexas. 2006”. 188p. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis.
- [8] Leleu, S. “Amortissement actif des vibrations d’une structure flexible de type plaque à l’aide de transducteurs piézoélectriques”. Tese (Doutorado), Escola Normal Superior de Cachan, Cachan, França, 2002.
- [9] Ahmad, S. N.; Upadhyay, C. S.; Venkatesan, C. “Electro-thermo-elastic formulation for the analysis of smart structures. Smart Materials and Structures”, United Kingdom v. 15, p. 401-416, 2006.
- [10] Fish, J.; Belytschko, T. “A First Course in Finite Elements”, 4. ed. England: John Wiley & Sons Inc. 2007.
- [11] Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. “Concepts and applications of finite element analysis”. 4. ed. United States of America: John Wiley & Sons, 2002. 719p.
- [12] KWON, Young W.; BANG, Hyochoong. “The finite element method using MATLAB”. 1. ed. United States of America: CRC Press, 1997. 519p.
- [13] Fuller, C. R.; Elliot, S. J.; Nelson, P. A. “Active control of vibration”. 2.ed. United States: Academic Press, 1997. 332p.
- [14] Maia, N. M. N.; Silva, J. M. M.; “Theoretical and Experimental Modal Analysis”. Portugal: Instituto Superior Técnico, 1997.

- [15] Pierfort, V.; “Finite element modelling of piezoelectric active structures”. 2001. 126p. Thesis (Doctorate) – Université Libre de Bruxelles, Faculty of Applied Sciences, Department of Mechanical Engineering and Robotics, Bruxelles, Bélgica.
- [16] Soriano, H. L. “Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas”. 1. ed. São Paulo: Editora USP, 2003. 580p.
- [17] Tzou, H.S.; Tseng, C.I.: “Distributed piezoelectric sensor/actuator design for measurement/control of distributed parameter system, a piezoelectric finite element approach”. *Journal of Sound and Vibration*, 137, (1990), 1-18.
- [18] Tzou, H.S.; Ye, R.: “Piezothermoelasticity and precision control of piezoelectric systems: theory and finite element analysis”. *Journal of Sound and Vibration*, 116, (1994), 489-495.
- [19] Meirovitch, L. “Elements of vibration analysis”. International student ed. Tokyo, Japan: McGraw-Hill Kogakusha, 1975. 495p.
- [20] Meirovitch, L. “Introduction to dynamics and control”. 1. ed. United States of America: John Wiley & Sons, 1985. 392p.
- [21] Inman, D. J. “Vibration with control”. 1. ed. United Kingdom: John Wiley & Sons, 2006. 376p.
- [22] Ewins, D. J. “Modal testing: Theory and practice”. 1. ed. London, England: Research Studies Press, 1984. 269p.
- [23] Yang, C. Y. “Random Vibration of Structures” 1. ed. Canada, John Wiley & Sons, 1986. 295p.
- [24] Ayyub, M. B.; Guran, A.; Haldar, A.; “Uncertainty Modeling in Vibration, Control and Fuzzy Analysis of Structural Systems”. 3. ed. United Kingdom: World Scientific, 1997. 356p.
- [25] Dorf, C. D.; Bishop, R. H. “Modern Control Systems”. 7. ed. United States of America: Addison Wesley, 1995, 807p.
- [26] Ogata, K. “Engenharia de Controle Moderno”. 3. ed. Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, Brasil, 2000, 323p.
- [27] Ortega, R.; Schaft, A.; Mareels, I.; Maschke, B.: “Putting Energy Back in Control”. *IEE Control Systems Magazine*, February 2001.
- [28] Belanger, P. R. “Control Engineering: A Modern Approach”. 3. ed. United States of America: Oxford University Press, 1994, 471p.
- [29] Chen, C. T. “Linear System Theory and Design”. 7. ed. England: Holt, Rinehalt and Wilson, 1984. 205p.

- [30] Vasques, C. M. A.; Rodrigues, J. D.: “Active vibration control of smart piezoelectric beams: Comparison of classical and optimal feedback control strategies”. *Journal of Computers and Structures*, 84, (2006), 1402 – 1414.
- [31] Richelot, J.; Bordeneuve – Guibe, J.; Pommier- Budinger, V: “ Active Control of a clamped beam equipped with piezoelectric actuator and sensor using Generalized Predictive Control” *IEE, Transactions on Control Systems Technology*, 4, (2004), 583 – 588.
- [32] Gani, A.; Salami, M. J. E.; Khan, R. M.: “Active Vibration Control of a Beam with Piezoelectric Patches: Real – time implementation with xPC target”. *IEE, Transactions on Control Systems Technology*, 3, (2003), 538 – 544.
- [33] Moheimani, S. O. R.; Fleming, A. J.; Behrens, S.: “Dynamics, Stability, and Control of Multivariable Piezoelectric Shunts”. *IEE, Transactions on Mechatronics*, 9, (2004), 87 – 89.
- [34] Baillargeon, B. P.; Vel, S. V.: “Active Vibration Suppression of Sandwich Beams using Piezoelectric Shear Actuators: Experiments and Numerical Simulation”. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 16, (2005), 517 – 530.
- [35] Nguyen, C. H.; Pietrzko, S. J.: “ FE analysis of a PZT – actuated adaptive beam with vibration damping using a parallel R – L shunt circuit”. *Journal of finite elements in analysis and design*, 42, (2006), 1231 – 1239.
- [36] Rao, A. K.; Bhat, M. S.; Ganguli, R.; “Experimental Demonstration of H_{∞} Control based Active Vibration Suppression in Composite Fin – tip of Aircraft using Optimally Placed Piezoelectric Patch Actuators”. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 19, (2008), 651 – 669.
- [37] Clark, W. W.; “ Vibration Control with State-Switched Piezoelectric Materials”. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 11, (2000), 263 – 271.
- [38] Cox, D. E.; Lindner, D. K.: “ Active Control for Vibration Suppression in a Flexible Beam Using a Modal Domain Optical Fiber Sensor ”. *Journal of Vibration and Acoustics*, 113, (1991), 369 – 382.
- [39] Liu, B.; Tzou, H. S.: “Distributed Photostrictive Actuation and Opto-Piezothermoelasticity Applied to vibration Control of Plates” . *Journal of Vibration and Acoustics*, (1998), 937 – 943.
- [40] Chiou, S. S.; Miu, D. K.; “Tracking Dynamics of In-Line Suspensions in High-Performance Rigid Disk Drives with Rotary Actuators”. *Journal of Vibration and Acoustics*, 114, (1992), 67 –73.
- [41] Lieh, J.: “Optimal Design of Active Suspensions Using Damping Control”. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119, (1997), 609 – 611.
- [42] Shen, I. Y.; Guo, W.; Pao, Y. C.: “Torsional Vibration Control of a Shaft Through Active Constrained Layer Damping Treatments”. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119, (1997), 505 – 511.

- [43] Gordaninejad, F.; Ray, A.; Wang, H.: "Control of Forced Vibration Using Multi-Electrode Electro-Rheological Fluid Dampers". *Journal of Vibration and Acoustics*, 119, (1997), 527 – 531.
- [44] Liao, W. H.; Wang, K. W.: "On the Active-Passive Hybrid Control Actions of Structures With Active Constrained Layer Treatments". *Journal of Vibration and Acoustics*, 119, (1997), 563 – 572.
- [45] Garcia, E.; Webb, C. S.; Duke, M. J.: "Passive and active control of active control of a complex flexible structure using reaction mass actuators". *Journal of Vibration and Acoustics*, 117, (1995), 117 – 123.
- [46] Dimitriadis, E. K.; Fuller, C. R.; Roggers, C. A.: "Piezoelectric Actuators for Distributed Vibration Excitation of Thin Plates". *Journal of Vibration and Acoustics*, 113, (1991), 100 – 107.
- [47] Hac, A.; Youn, I.: "Optimal Semi-Active Suspension with Preview Based on a Quarter Car Model". *Journal of Vibration and Acoustics*, 114, (1992), 84 – 92.
- [48] Yamada, I.; Nakagawa, M.: "Reduction of Residual Vibrations in Positioning Control Mechanism". *Journal of Vibration and Acoustics*, 107, (1985), 47 – 52.
- [49] Meckl, P.; Seering, W.: "Active Damping in a Three-Axis Robotic Manipulator". *Journal of Vibration and Acoustics*, 107, (1985), 38 – 46.
- [50] Okada, Y.; Nagai, B.; Shimane, T.: "Cross-Feedback Stabilization of the Digitally Controlled Magnetic Bearing", 114 ,(1992), 54 – 59.
- [51] Bradfield, C. D.; Roberts, J. B.; Karunendiran, S.: "A programmable Electromagnetic Bearing for vibration Control of a Flexible Shaft". *Journal of Vibration and Acoustics*, 113, (1991) 160 – 166.
- [52] Kakizaki, T.; Mizukami, M.; Kogure, K.: "Dynamic Analysis and Control of a Double-Carriage Rotary Actuator for Accurate Magnetic Disk Head Positioning". *Journal of Vibration and Acoustics*, 113, (1991), 434 – 440.
- [53] Tanaka, N.; Kikushima, Y.: "A Study of Active Vibration Isolation". *Journal of Vibration and Acoustics*, 107, (1985), 392 – 397.
- [54] Burrows, C. R.; Sahinkaya, M. N.; Clements, S.: "Electromagnetic Control of Oil Film Supported Rotors Using Sparse Measurements". *Journal of Vibration and Acoustics*, 110, (1988), 295 – 299.
- [55] Trintini, A. M. M.; Marinho, M. V. A.; Pieri, E. R.; Castelan, E. B.; Lenzi, A.; Paim, G. V.: "Modelagem e Controle de uma Viga Simplesmente Engastada Utilizando Transdutores Piezelétricos". 2009, Brasília, SBAI 2009.
- [56] Trintini, A. M. M.; Pieri, E. R.; Castelan, E. B.; Lenzi, M.; Silva, O.; Doi, R. M.: "Active Vibration Control of a Clamped Beam By Means of PZT Transducers". 2009, Gramado. COBEM 2009.

[57] Trintini, A. M. M.; Pieri, E. R.; Castelan, E. B.: “Controle Ativo de Vibração Através de um Compensador em Avanço de Fase”. 2009, Foz do Iguaçu, C3N 2009.

[58] Anton, E.; Ulbrich, H.: “Active Control of Vibration in the Case of Asymmetrical High – Speed Rotors by Using Magnetic Bearing”. *Journal of Vibration and Acoustics*, 107, (1985), 410 – 415.

[59] Shubert, D. W.; Rujik, J. E.: “Theoretical and Experimental Investigation of Electrohydraulic Vibration Isolation Systems”. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 91, (1985), 981 – 990.

Anexo 1

Este anexo apresentará as matrizes do modelo de espaço de estados formadas pelos seis primeiros modos de vibração.

$$A = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -3.8714 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & -1.5132 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -6.3111 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1.1920 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -4.6382 \times 10^6 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2948 \times 10^7 \\
 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \dots & -3.8714 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & -0.0151 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & -0.0631 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & -0.1192 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4638 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2948
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{\text{PZT}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5.6345 \times 10^{-4} \\ -0.0034 \\ -4.8956 \times 10^{-11} \\ -0.0093 \\ 0.0174 \\ 0.0268 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{\text{MEC}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4.9204 \\ -4.9138 \\ 0.0144 \\ 4.9173 \\ 4.9281 \\ -4.9436 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{\text{PZT}} = \begin{bmatrix} 3.8365 \times 10^{-4} & -0.0023 & -3.4279 \times 10^{-11} & -0.0063 & 0.0119 & 0.0183 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{\text{MEC}} = \begin{bmatrix} -4.9204 & -4.9138 & 0.0144 & 4.9173 & 4.9281 & -4.9436 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Anexo 2

Funções de transferência do sistema considerando os seis primeiros modos de vibração.

$$G_{FU}(s) = \frac{3.93 \times 10^{-14} s^{11} + 121.3 s^{10} + 191.1 s^9 + 1.911 \times 10^9 s^8 + \dots}{s^{12} + 1.956 s^{11} + 1.956 \times 10^7 s^{10} + 1.918 \times 10^7 s^9 + \dots}$$

$$\frac{\dots + 1.45 \times 10^9 s^7 + 7.249 \times 10^{15} s^6 + 2.375 \times 10^{15} s^5 + 7.915 \times 10^{21} s^4 + \dots}{\dots + 9.588 \times 10^{13} s^8 + 4.114 \times 10^{13} s^7 + 1.371 \times 10^{20} s^6 + 2.571 \times 10^{19} s^5 + \dots}$$

$$\frac{\dots + 1.136 \times 10^{21} s^3 + 2.839 \times 10^{27} s^2 + 8.523 \times 10^{25} s + 1.705 \times 10^{32}}{\dots + 6.427 \times 10^{25} s^4 + 3.541 \times 10^{24} s^3 + 7.083 \times 10^{30} s^2 + 1.588 \times 10^{28} s + 2.646 \times 10^{34}}$$

$$G_{FQ}(s) = \frac{5.242 \times 10^{-13} s^{11} - 0.05347 s^{10} - 0.01121 s^9 - 1.122 \times 10^5 s^8 + \dots}{s^{12} + 1.956 s^{11} + 1.956 \times 10^7 s^{10} + 1.918 \times 10^7 s^9 + \dots}$$

$$\frac{\dots + 1.568 \times 10^5 s^7 - 7.839 \times 10^{11} s^6 - 7.296 \times 10^9 s^5 - 2.438 \times 10^{16} s^4 + \dots}{\dots + 9.588 \times 10^{13} s^8 + 4.114 \times 10^{13} s^7 + 1.371 \times 10^{20} s^6 + 2.571 \times 10^{19} s^5 + \dots}$$

$$\frac{\dots + 1.036 \times 10^{17} s^3 - 2.59 \times 10^{23} s^2 - 5.72 \times 10^{21} s - 1.144 \times 10^{28}}{\dots + 6.427 \times 10^{25} s^4 + 3.541 \times 10^{24} s^3 + 7.083 \times 10^{30} s^2 + 1.588 \times 10^{28} s + 2.646 \times 10^{34}}$$

$$G_{VU}(s) = \frac{1.299 \times 10^{-13} s^{11} - 0.0784 s^{10} - 0.01643 s^9 - 1.643 \times 10^5 s^8 + \dots}{s^{12} + 1.956 s^{11} + 1.956 \times 10^7 s^{10} + 1.918 \times 10^7 s^9 + \dots}$$

$$\frac{\dots + 2.3 \times 10^5 s^7 - 1.15 \times 10^{12} s^6 - 1.058 \times 10^{10} s^5 - 3.529 \times 10^{16} s^4 + \dots}{\dots + 9.588 \times 10^{13} s^8 + 4.114 \times 10^{13} s^7 + 1.371 \times 10^{20} s^6 + 2.571 \times 10^{19} s^5 + \dots}$$

$$\frac{\dots + 1.521 \times 10^{17} s^3 - 3.803 \times 10^{23} s^2 - 8.4 \times 10^{21} s - 1.68 \times 10^{28}}{\dots + 6.427 \times 10^{25} s^4 + 3.541 \times 10^{24} s^3 + 7.083 \times 10^{30} s^2 + 1.588 \times 10^{28} s + 2.646 \times 10^{34}}$$

$$G_{v\varrho}(s) = \frac{-1.747 \times 10^{-13} s^{11} + 0.0007628 s^{10} + 0.0007537 s^9 + 7557 s^8 + \dots}{s^{12} + 1.956 s^{11} + 1.956 \times 10^7 s^{10} + 1.918 \times 10^7 s^9 + \dots}$$

$$\frac{\dots + 3118 s^7 + 1.561 \times 10^{10} s^6 + 2.724 \times 10^9 s^5 + 9.097 \times 10^{15} s^4 + \dots}{\dots + 9.588 \times 10^{13} s^8 + 4.114 \times 10^{13} s^7 + 1.371 \times 10^{20} s^6 + 2.571 \times 10^{19} s^5 + \dots}$$

$$\frac{\dots + 5.232 \times 10^{14} s^3 + 1.311 \times 10^{21} s^2 + 3.178 \times 10^{18} s + 6.364 \times 10^{24}}{\dots + 6.427 \times 10^{25} s^4 + 3.541 \times 10^{24} s^3 + 7.083 \times 10^{30} s^2 + 1.588 \times 10^{28} s + 2.646 \times 10^{34}}$$

Anexo 3

Este apresenta as matrizes de ponderação, as matrizes de ganho do controlador e do observador de estados para o caso do controle LQR. As matrizes de ponderação Q e R são mostradas a seguir:

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = 4 \times 10^{-6}$$

Os vetores K e L representam os ganhos do controlador e do observador respectivamente:

$$K = \begin{bmatrix} -3.3878 \times 10^5 & 3.6743 \times 10^6 & 290.0602 & 8.1743 \times 10^6 & \dots \\ \dots & 6.1165 \times 10^6 & 8.3934 \times 10^7 & 4.9767 \times 10^4 & -4.9095 \times 10^4 & \dots \\ \dots & -0.6871 & -4.9420 \times 10^4 & 4.9885 \times 10^4 & 4.4163 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1.2948 \times 10^4 & -1.9906 \times 10^3 & 2.0181 \times 10^{-4} & -693.5351 & \dots \\ \dots & 324.7706 & 157.6240 & 2.1157 \times 10^4 & -1.1454 \times 10^4 & \dots \\ \dots & -24.8603 & -7.4509 \times 10^3 & 4.6527 \times 10^3 & 4.0670 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

Anexo 4

Neste anexo serão apresentados o modelo e o controlador H_∞ utilizado na simulação do caso envolvendo incertezas paramétricas. A seguir serão apresentadas as matrizes que compõem o sistema considerando apenas o primeiro modo de vibração.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.8713 \times 10^3 & -3.8713 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$B_{PZT} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5.6345 \times 10^{-4} \end{bmatrix}; \quad B_{MEC} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.9204 \end{bmatrix}$$

$$C_{PZT} = [3.8365 \times 10^{-4} \quad 0]$$

$$C_{MEC} = [-4.9204 \quad 0]$$

A seguir será apresentado o controlador H_∞ projetado a partir do modelo composto por um único modo de vibração.

$$k(s) = \frac{-8.54 \times 10^9 s + 2.36 \times 10^{12}}{s^2 + 28.93 s^7 + 4276}$$

Anexo 5

A seguir serão apresentadas as matrizes utilizadas na formulação do problema de controle H_∞ , considerando o sistema composto por seis modos de vibração. As matrizes A , B_{Mec} , B_{PZT} e C_{PZT} usadas na formulação do problema H_∞ são as mesmas apresentadas no Apêndice 1. Já as matrizes D_{11} , D_{12} , D_{21} e D_{22} são apresentadas a seguir.

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \times 10^{-5} \end{bmatrix}; \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \times 10^{-5} \end{bmatrix}; \quad D_{22} = 0$$

Já a matriz C_1 é dada a seguir:

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{MEC} \\ C_{zo} \end{bmatrix}$$

Onde a matriz C_{MEC} é a mesma apresentada no anexo 1 e a matriz C_{zo} é uma matriz nula de ordem 1×12 .

O controlador $k(s)$ originado a partir da formulação apresentada neste anexo é apresentado a seguir:

$$k(s) = \frac{-8.149 \times 10^9 s^{11} + 3.112 \times 10^{12} s^{10} - 1.594 \times 10^{17} s^9 + 5.85 \times 10^{19} s^8 + \dots}{s^{12} + 54.99 s^{11} + 1.957 \times 10^7 s^{10} + 9.605 \times 10^8 s^9 + \dots}$$

$$\frac{\dots - 7.802 \times 10^{23} s^7 + 2.72 \times 10^{26} s^6 - 1.113 \times 10^{30} s^5 + 3.679 \times 10^{32} s^4 \dots}{\dots + 9.59 \times 10^{13} s^8 + 4.134 \times 10^{15} s^7 + 1.372 \times 10^{20} s^6 + 5.19 \times 10^{21} s^5 + 6.442 \times 10^{25} s^4 \dots}$$

$$\frac{\dots + 5.179 \times 10^{35} s^3 + 1.638 \times 10^{38} s^2 - 5.531 \times 10^{40} s + 1.624 \times 10^{43}}{\dots + 2.161 \times 10^{27} s^3 + 7.144 \times 10^{30} s^2 + 1.893 \times 10^{32} s + 3.224 \times 10^{34}}$$