

**UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO E  
SISTEMAS**

**SOBRE O CONTROLE PARA UMA CLASSE DE  
SISTEMAS NÃO-LINEARES COM ATUADORES  
SATURANTES**

Tese de Doutorado submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Engenharia de Automação e Sistemas

**JONES CORSO**

Florianópolis, junho de 2009.

# **SOBRE O CONTROLE PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES COM ATUADORES SATURANTES**

Jones Corso

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de *Automação e Sistemas*, Área de Concentração em Controle, Automação e Sistemas, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina.

---

Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto  
Orientador

---

Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto  
Coordenador do Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas

Banca Examinadora:

---

Romeu Reginatto, Dr.  
UNIOESTE/Foz do Iguaçu

---

Valter Júnior de Souza Leite, Dr.  
CEFET/MG

---

Alexandre Trofino Neto, Dr.  
DAS/UFSC

---

Ubirajara Franco Moreno, Dr.  
DAS/UFSC

## AGRADECIMENTOS

A Deus, que em todos os momentos da minha vida esteve presente, guiando-me na sua luz divina, dando-me o dom da vida e da sabedoria.

Agradeço ao meu professor orientador Eugênio de Bona Castelan Neto a qualidade da orientação oferecida. Por sua amizade, dedicação, incentivo e paciência, especialmente diante das falhas ao longo de minha formação.

Meu carinho e gratidão à equipe de professores que me transmitiram experiências e conhecimentos e proporcionaram a busca e o desejo de vencer por meio do saber.

Agradeço aos meus pais, Silvério e Lúcia, pelo amor que sempre me dedicaram, estimulando para que eu persistisse em meus objetivos. Agradeço aos demais familiares e amigos que sempre estiveram ao meu lado, apoiando e encorajando esta jornada.

Agradeço especialmente a minha amada esposa Gladis, a qual esteve presente em todos os momentos de euforia e aflição, incentivando para eu prosseguir na caminhada.

Agradecimento especial as minhas duas pérolas, Bruna e Luana (minhas filhas), que com suas cartas preenchiam o vazio do meu coração no decorrer das semanas em que estive ausente de casa. Ao Darlan, que conviveu conosco neste período de realização do curso.

Resumo de tese apresentada à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas.

# **SOBRE O CONTROLE PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES COM ATUADORES SATURANTES**

**Jones Corso**

Junho / 2009

Orientador: Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.

Área de Concentração: Controle, Automação e Sistemas

Palavras-chave: Controle não-linear, não-linearidades de setor, saturação, estabilidade absoluta, realimentação dinâmica de saída, LMI.

Número de Páginas: 96

Apresentamos uma metodologia sistemática visando estudar e computar leis de controle para uma classe de sistemas não-lineares, em tempo contínuo e em tempo discreto, sujeitos à saturação de atuadores. Para modelar o sistema saturado não-linear, utiliza-se uma não-linearidade de tipo zona-morta satisfazendo uma condição de setor modificada, a qual engloba a representação clássica da saturação como uma não-linearidade de setor.

Para proposição dos resultados teóricos e algoritmos, consideramos um sistema não-linear tipo Lur'e e, baseados em ferramentas de estabilidade absoluta, uma condição de setor modificada para levar em conta os efeitos da saturação nas entradas de controle. A estrutura do controlador é composta por uma parte linear, um termo associado a saída da não-linearidade dinâmica e, no caso do compensador dinâmico, de uma malha *anti-windup*.

Abordamos, para uma classe de sistemas não-lineares em tempo discreto e com parâmetros variantes, o problema de estabilização sob saturação via uma lei de controle dependente de parâmetros e uma lei de controle a ganhos fixos, ambas sob a forma de uma realimentação de estados mais uma realimentação da não-linearidade. Com base nos resultados obtidos, desenvolvemos também um compensador dinâmico não-linear parcialmente dependente de parâmetros e analisamos a influência da realimentação das não-linearidades consideradas.

Para os problemas de controle considerados ao longo deste trabalho, são propostos problemas de otimização convexa com restrições de tipo LMI para o projeto dos controladores, com o objetivo de determinar a maximização da região de atração ou melhoramento do desempenho com a garantia de estabilidade. Exemplos numéricos foram desenvolvidos para ilustrar as potencialidades dos algoritmos propostos.

Abstract of Thesis presented to the Federal University of Santa Catarina as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Engineering of Automation and Systems.

# ON THE CONTROL FOR A CLASS OF NON-LINEAR SYSTEMS WITH SATURATING ACTUATORS

**Jones Corso**

June / 2009

Advisor: Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.

Area of Concentration: Control, Automation and Systems

Keywords: Non-linear control, sector non-linearity, saturation, static feedback, absolute stability, dynamic output feedback, LMI.

Number of Pages: 96

We present a systematic methodology to study and compute control laws for a class of nonlinear continuous and discrete-time systems, subject to actuator saturations. A dead-zone type nonlinearity satisfying a *modified sector condition*, which encompasses a classical sector condition, is used to model the closed-loop saturated system.

To propose the theoretical results and algorithms, we consider a Lur'e type nonlinear open-loop system and we use absolute stability tools, with the modified sector condition to take the saturation effects into account, to determine certain domains of stability or performance for the closed-loop system. The controller structure is composed of a linear part, a term associated to the nonlinearity present in the open-loop dynamics and, in the case of dynamic compensators, an anti-windup loop.

Next, for a class of discrete-time nonlinear systems with time-varying parameters and under actuator saturations, we approach the considered constrained stabilization problem via a parameter dependent control law and via a fixed-gains control law, both of which are composed by a state feedback term plus the nonlinearity feedback. Based on these results, we develop a dynamical nonlinear compensator which is partially dependent on the time-varying parameter, and we analyze the influence of the considered nonlinearities in the control law.

Thus, convex optimization problems with LMI type constraints are proposed, aiming at the synthesis controllers parameters and the maximization of the region of attraction or the performance improvement with guarantee of stability in a given set. Numerical examples are developed to illustrate the potentialities of the proposed algorithms.



# Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
Lista de Abreviaturas	xiii
Lista de Símbolos	xiv
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Controle sob saturação para uma classe de sistemas não-lineares</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução . . . . .	7
2.2 Apresentação dos problemas . . . . .	8
2.3 Resultados no caso de sistemas contínuos no tempo . . . . .	11
2.3.1 Estabilidade . . . . .	11
2.3.2 Estabilização . . . . .	13
2.3.3 Problema de otimização . . . . .	14
2.3.4 Comentários adicionais . . . . .	16
2.4 Resultados no caso de sistemas discretos no tempo . . . . .	18
2.5 Exemplo Numérico . . . . .	19
2.6 Conclusão . . . . .	22
<b>3 Estabilização por realimentação dinâmica de saídas</b>	<b>25</b>
3.1 Introdução . . . . .	25
3.2 Apresentação do problema . . . . .	26
3.3 Estabilização . . . . .	28
3.3.1 Estabilização Local . . . . .	28

3.3.2	Estabilização Global . . . . .	33
3.4	Problema de otimização . . . . .	33
3.4.1	Síntese via programação convexa . . . . .	34
3.5	Melhoramento do desempenho . . . . .	35
3.6	Análise de estabilidade absoluta . . . . .	37
3.7	Exemplo numérico . . . . .	38
3.8	Conclusão . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Controle sob saturação de sistemas a parâmetros variantes</b>	<b>43</b>
4.1	Introdução . . . . .	43
4.2	Estabilização com lei de controle dependente de parâmetros . . . . .	45
4.2.1	Estabilização robusta . . . . .	47
4.2.2	Síntese via programação convexa . . . . .	51
4.3	Estabilização com lei de controle a parâmetros fixos . . . . .	52
4.3.1	Estabilização robusta . . . . .	53
4.3.2	Síntese via programação convexa . . . . .	54
4.4	Exemplo numérico . . . . .	55
4.5	Conclusão . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Compensador dinâmico parcialmente dependente de parâmetros</b>	<b>65</b>
5.1	Introdução . . . . .	65
5.2	Apresentação do problema . . . . .	66
5.3	Estabilidade local . . . . .	68
5.4	Condições de Estabilização . . . . .	72
5.5	Projeto do controlador . . . . .	75
5.6	Exemplo . . . . .	77
5.7	Conclusão . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>87</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>90</b>



# Lista de Figuras

1.1	Não-linearidade de setor . . . . .	3
1.2	Esquema de controle em malha fechada . . . . .	4
1.3	Sistema em malha fechada após transformação . . . . .	5
2.1	Saturação . . . . .	10
2.2	Zona-morta . . . . .	10
2.3	Representação de $\mathcal{S}_0$ com $\varphi$ globalmente e localmente verificada . . . . .	20
2.4	Representação da maximização de $\beta$ na região de estabilização . . . . .	20
2.5	Representação de $\mathcal{S}_0$ considerando $u(t) = Kx(t) + \Gamma\varphi(z_k)$ e $u(t) = Kx(t)$ .	21
2.6	Representação de $\mathcal{S}_0$ com alocação de pólos e $\varphi$ globalmente e localmente .	21
2.7	Representação de $\mathcal{S}_0$ sem e com alocação de pólos . . . . .	22
2.8	Representação de $\mathcal{S}_0$ com alocação de pólos e dos conjuntos poliedrais . . .	22
2.9	Simulações para síntese com alocação de pólos . . . . .	23
3.1	$\mathcal{E}(Y, 10)$ para a condição de setor globalmente e localmente verificada . . .	39
3.2	Simulações para condições de setor globalmente verificada com $\nu = 10$ . . .	39
3.3	Simulações para condições de setor localmente verificada com $\nu = 10$ . . .	40
3.4	Síntese e análise para condição de setor globalmente verificada . . . . .	40
4.1	Conjuntos $\mathcal{E}(Q_1^{-1})$ e $\mathcal{E}(Q_2^{-1})$ para $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$ . . . . .	56
4.2	Simulações para duas seqüências aleatórias diferentes, $\{\xi_k\}_1$ e $\{\xi_k\}_2$ . . . .	57
4.3	Valores de $V(x_k, \xi_k)$ ao longo das trajetórias dos estados da Figura 4.2 . .	58
4.4	Conjuntos $\mathcal{E}(Q_1^{-1})$ e $\mathcal{E}(Q_2^{-1})$ para $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi$ e $u_k = Kx_k + \Gamma\varphi$ .	58
4.5	Simulações para $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$ e $u_k = Kx_k + \Gamma\varphi(z_k)$ . . . . .	59
4.6	Valores de $V(x_k, \xi_k)$ para $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$ e $u_k = Kx_k + \Gamma\varphi(z_k)$ .	60
4.7	Conjuntos $\mathcal{E}(Q_1^{-1})$ e $\mathcal{E}(Q_2^{-1})$ para $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$ e $u_k = K(\xi)x_k$	61
4.8	Simulação para $u_k = K(\xi)x_k$ . . . . .	61

4.9	Valores de $V(x_k, \xi_k)$ para $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$ e $u_k = K(\xi)x_k$ . . . . .	62
4.10	Conjuntos $\mathcal{E}(Q_1^{-1})$ e $\mathcal{E}(Q_2^{-1})$ para $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$ . . . . .	62
5.1	Região de estabilidade para o compensador dinâmico (5.4)-(5.5) . . . . .	78
5.2	Simulações para o compensador dinâmico (5.4)-(5.5) . . . . .	79
5.3	Valores de $V(\zeta_k, \xi_k)$ das trajetórias dos estados - $u_k = \mathbb{K}\zeta_k + F_c\varphi(z_k)$ . . . . .	80
5.4	Representação da região de estabilidade para o problema (5.38) . . . . .	81
5.5	Simulações para o problema de programação convexa (5.38) . . . . .	81
5.6	Valores de $V(\zeta_k, \xi_k)$ das trajetórias dos estados da Figura 5.5 . . . . .	82
5.7	Comparativo da região de estabilidade entre $F_c \neq 0$ e $G_c \neq 0$ e, $F_c = G_c = 0$ . . . . .	82
5.8	Representação da região de estabilidade para $E_c(\xi_k) = 0$ , $S = 0.4$ . . . . .	83
5.9	Simulações para $E_c(\xi_k) = 0$ , $S = 0.4$ e utilizando (5.40) . . . . .	84
5.10	Valores de $V(\zeta_k, \xi_k)$ das trajetórias dos estados da Figura 5.9 . . . . .	84
5.11	Comparativo da região de estabilidade entre $E_c \neq 0$ e $E_c = 0$ . . . . .	85

# Lista de Tabelas

2.1	Resultados numéricos para $\varphi(z) \in [0, \Omega]$ globalmente e localmente verificada	19
2.2	Resultados numéricos com alocação de pólos . . . . .	21
3.1	Determinação do valor de $\beta$ para valores de $\nu = 10$ . . . . .	38
3.2	Resultados numéricos para condições de setor globalmente e localmente . .	39
3.3	Desempenho quadrático com $\nu = 1$ e para $\varphi$ localmente verificada . . . . .	41
3.4	Desempenho quadrático com $\nu = 1$ e para $\varphi$ globalmente verificada . . . . .	41
3.5	Parâmetros de controladores para $\kappa = 1$ . . . . .	41
4.1	Resultados numéricos - $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$ . . . . .	56
4.2	Resultados numéricos - $u_k = Kx_k + \Gamma\varphi(z(k))$ . . . . .	58
4.3	Resultados numéricos - $u_k = K(\xi)x_k$ . . . . .	60
4.4	Resultados numéricos para $\varphi(\cdot)$ localmente verificada . . . . .	62
5.1	Resultados numéricos utilizando compensador dinâmico (5.4)-(5.5) . . . . .	78
5.2	Resultados numéricos para $F_c = 0$ , $G_c(\xi_k) = 0$ , $S_\Delta = 1.2$ e utilizando (5.38)	80
5.3	Resultados numéricos para $E_c = 0$ , $S = 0.4$ e utilizando (5.40) . . . . .	83



# Lista de Abreviaturas

<b>FLDP</b>	<i>Função de Lyapunov Dependente de Parâmetros</i>
<b>CL</b>	<i>Conjunto de tipo Lyapunov</i>
<b>LMI</b>	<i>Desigualdade Matricial Linear (do inglês "Linear Matrix Inequality")</i>
<b>BMI</b>	<i>Desigualdade Matricial Bilinear (do inglês "Bilinear Matrix Inequality")</i>
<b>GEVP</b>	<i>Problema de Autovalor Generalizado (do inglês "Generalized Eigenvalue Problem")</i>
<b>LDI</b>	<i>Inclusão Diferencial Linear (do inglês "Linear Differential Inclusions")</i>
<b>MA</b>	<i>Malha Aberta</i>
<b>MF</b>	<i>Malha Fechada</i>

# Lista de Símbolos

$\mathfrak{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathfrak{R}_+$	Conjunto dos números reais não negativos
$\mathfrak{R}^n$	Espaço dos vetores com $n$ componentes reais
$\mathfrak{R}^{m \times n}$	Espaço das matrizes reais com dimensões $m \times n$
$P'$	Transposta da matriz $P$
*	Denota os elementos ou blocos simétricos em relação à diagonal principal de uma matriz simétrica
$\Psi$	Não-linearidade de zona-morta
$\rho$	Vetor cujos componentes são os limites simétricos do sinal de controle
$\mathcal{E}(P)$	Elipsóide $\{x \in \mathfrak{R}^n; x'Px \leq 1\}$
$\mathcal{E}(P, \nu)$	Elipsóide $\{x \in \mathfrak{R}^n; x'Px \leq \nu\}$
$P > (\geq 0)$	Matriz definida positiva (ou semi-definida positiva)
$diag(a_{11}, a_{22}, a_{33})$	Matriz diagonal, isto é, $a_{ij} = 0$ ( $i \neq j$ )
$A_{(i)}$	Representa a $i$ -ésima linha da matriz $A$
$He(A)$	Representa a soma $A + A'$

# Capítulo 1

## Introdução

O controle não-linear é o conjunto de procedimentos destinados a fazer com que as variáveis de saída de um sistema não-linear aproximem-se de uma determinada referência e se estabilizem numa vizinhança do seu valor [14]. Diversas publicações, monografias e livros-textos (veja, por exemplo, [35, 39, 54]) têm sido dedicados ao controle de sistemas não-lineares. Inicialmente a teoria de controle não-linear era baseada em conceitos de estabilidade, otimização e incertezas. Essas concepções baseavam-se sobretudo em ferramentas de análise, ou seja, eram empregadas mais para descrever propriedades dos sistemas do que para o projeto de controladores. Nas duas últimas décadas esses conceitos começaram a ser convertidos em ferramentas de projeto, por meio de procedimentos construtivos, aplicáveis à determinadas classe de sistemas não-lineares [2, 39, 54]. Esse processo é o resultado da confluência de várias linhas de pesquisa: teoria de geometria diferencial aplicada a controle, conceitos de dissipatividade e passividade em sistemas dinâmicos, controle baseado em funções de Lyapunov<sup>1</sup> e controle robusto.

Na prática, as não-linearidades presentes em um sistema de controle podem ser inerentes ao comportamento dinâmico dos subsistemas envolvidos na malha de controle (planta, sensor ou atuador), em virtude das limitações práticas (tecnológicas ou de segurança) impostas sobre diferentes variáveis do sistema, ou podem ser não-linearidades introduzidas no projeto do sistema com o objetivo de cumprir requisitos de desempenho em malha fechada [36].

Na prática da Engenharia de Controle, uma não-linearidade comumente encontrada é a saturação dos sinais dos atuadores, tanto em amplitude quanto em velocidade, devido aos

---

<sup>1</sup>Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, matemático e engenheiro russo, 1857-1918.

limites físicos impostos pelos dispositivos de atuação. A presença da saturação pode causar efeitos indesejados, como o surgimento de ciclos limites e instabilidade do sistema em malha-fechada. Desta forma, a consideração da saturação na análise e projeto de sistemas de controle é um tema de importância teórica e prática, e tem sido alvo de pesquisas intensas por parte da comunidade científica da área de controle (veja, por exemplo, [29, 52, 55]).

O problema de controle de sistemas lineares e invariantes com atuadores saturantes já foi amplamente tratado na literatura e, nos últimos 10 anos, vários trabalhos foram propostos empregando, principalmente, duas abordagens para a consideração da saturação do sistema: a abordagem politópica proposta em [15, 22, 60] e abordagem por setor modificada proposta em [1, 21, 45]. Nesta mesma linha, encontram-se resultados que tratam sistemas com atrasos de transporte e saturação nos atuadores [18], cálculo de compensadores dinâmicos sob saturação [37], resultados para sistemas com saturação em amplitude e velocidade dos atuadores [49], entre outros.

Nas últimas décadas, vários estudos sobre controle robusto de sistemas lineares incertos representados por modelos de estado e também por modelos freqüenciais têm surgido, sendo a metodologia mais aplicada a que se baseia em funções de Lyapunov, como podemos ver em [5, 6]. A estabilidade robusta de politopos de matrizes, empregando LMIs para sistemas lineares, pode ser encontrada em [40, 41, 50, 51].

Um conceito importante para nossos estudos é o de estabilidade absoluta, o qual constitui uma ferramenta para análise e síntese de sistemas não-lineares que podem ser representados como a interconexão em realimentação de um sistema linear com alguma não-linearidade de tipo setor limitado, como representado na Figura 1.1. Para termos estabilidade absoluta, necessitamos mostrar que a origem deste sistema interconectado é assintoticamente estável para toda não-linearidade que satisfaz a uma determinada condição de setor. O problema da estabilidade absoluta foi proposto inicialmente por Lur'e e, em decorrência, é muitas vezes chamado de problema de Lur'e. Os resultados de estabilidade absoluta mais conhecidos são os critérios de Popov e do Círculo, que podem ser interpretados no espaço de estado via estabilidade de Lyapunov, e no domínio da freqüência via positividade real [35, 42], e serem associados a propriedades de passividade do sistema [4]. Recentemente pesquisas e o desenvolvimento de métodos baseados em estabilidade absoluta [32] se intensificaram, devido à possibilidade do tratamento



matemático e computacional via ferramentas eficientes, geralmente associadas às conhecidas Desigualdades Matriciais Lineares (ou LMIs, do inglês Linear Matrix Inequalities) [6]. Em particular, estabilidade absoluta e LMIs têm sido adotadas para o tratamento de problemas de controle de sistemas lineares e não-lineares sujeitos a saturações (veja por exemplo, [7, 10, 11, 18, 25, 33, 38, 46, 55]).

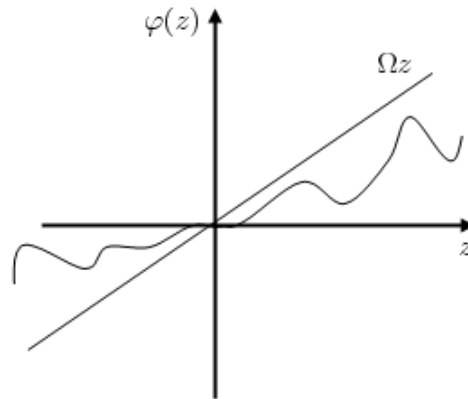


Figura 1.1: Não-linearidade de setor

Neste trabalho, considera-se o controle de uma classe particular de sistemas não-lineares sob saturação dos atuadores. Na Figura 1.2, temos uma representação esquemática geral do problema de controle não-linear considerado. Esse esquema é composto pelo sistema a controlar, representado por um sistema linear realimentado por uma não-linearidade de setor associada à dinâmica da planta, e um controlador cuja saída é limitada em amplitude. Para a estabilização local ou global em malha fechada, o controlador admite como entradas os estados do sistema, ou parte deles, informações relativas à não-linearidade associada ao sistema a controlar e, no caso de compensadores dinâmicos, informações sobre a saturação do sinal de controle.

O problema de controle para a classe de sistemas não-lineares considerada sem a saturação de controle foi tratada em [3, 4, 39]. Nesses trabalhos, mostrou-se que a realimentação da não-linearidade introduziu graus de liberdade interessantes para garantir a estabilidade absoluta do sistema em malha fechada, o que pode não ocorrer empregando-se apenas uma realimentação dos estados. Os resultados propostos no presente trabalho visam a mostrar como a estratégia de realimentação da não-linearidade permite melhorar o desempenho de sistemas sob saturação, tanto no que se refere ao tamanho do domínio de estabilidade como para o desempenho temporal do sistema de controle. Além disso, também são propostos resultados para o caso de sistemas com parâmetros variantes e

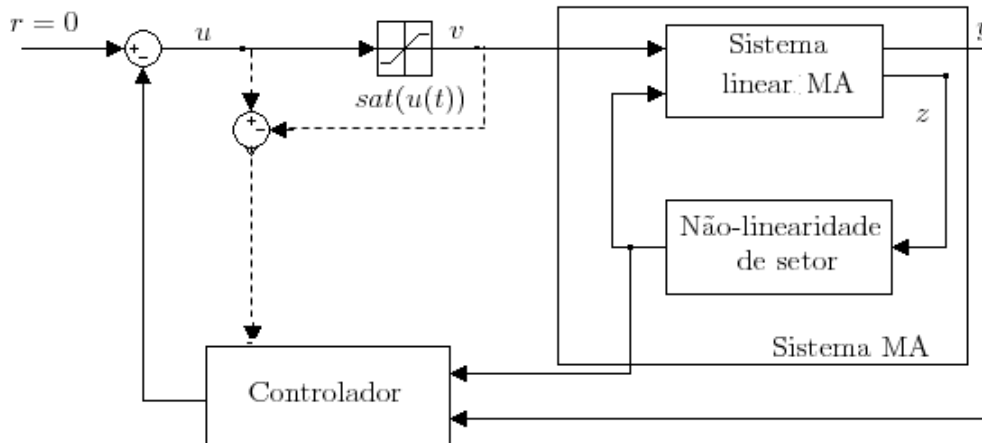


Figura 1.2: Esquema de controle em malha fechada

utilizando-se leis de controle por realimentação de saídas [8, 13, 19].

Na literatura encontramos três aproximações para modelar a não-linearidade de saturação: a aproximação por sistema híbrido [21, 24], o modelo politópico [30] e a técnica via não-linearidade de setor. Neste trabalho, seguindo a linha de vários trabalhos recentes [28, 43, 46, 59, 60], adotaremos uma condição modificada de setor no tratamento da saturação da ação de controle e conceitos de estabilidade absoluta para propor resultados que permitem projetar controladores para a classe de sistemas não-lineares representadas na Figura 1.2. A utilização da condição modificada de setor comparativamente à abordagem politópica permite reduzir a complexidade dos algoritmos e propor abordagens baseadas em LMI no caso de compensador dinâmico.

Na Figura 1.3 temos a representação esquemática do sistema da Figura 1.2 sob a forma de um novo sistema tipo Lur'e com duas não-linearidades de setor, obtido após efetuarmos uma transformação de malha [35]. Neste sistema transformado a saturação dos atuadores é tratada via uma não-linearidade de tipo zona-morta que satisfaz a condição modificada de setor citada anteriormente. A análise de estabilidade absoluta do sistema em malha fechada e a obtenção das condições de estabilização são determinadas a partir desse esquema.

Dentro do contexto apresentado anteriormente, encontramos em [11] a formulação e o tratamento do problema de controle sob saturação com uma lei de controle composta por uma realimentação de estados em conjunto com uma realimentação da não-linearidade associada à dinâmica do sistema. No presente estudo foram formulados os problemas de análise de estabilidade e de síntese do controlador (estabilização), e igualmente fornecidas

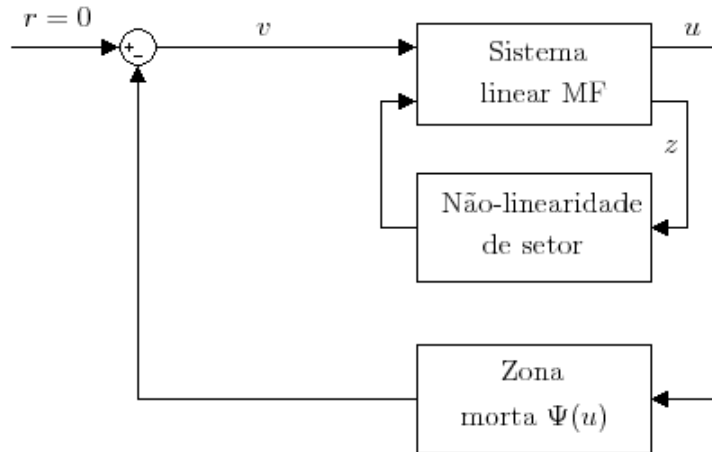


Figura 1.3: Sistema em malha fechada após transformação

condições LMIs para a resolução dos problemas tanto no contexto local quanto global. Estes resultados formulados para o caso de sistemas em tempo contínuo, cujos parâmetros do subsistema linear foram considerados precisamente conhecidos, foram retomados em [9] no contexto de sistemas discretos no tempo, e aperfeiçoados em [12] para o projeto de controladores para sistemas em tempo contínuo. Esses resultados serviram de base para a realização da presente tese, e são apresentados e comentados no Capítulo 2.

Os três capítulos subseqüentes são dedicados à apresentação dos resultados desenvolvidos ao longo do curso de Doutorado. No Capítulo 3 consideramos um sistema não-linear tipo Lur'e em tempo contínuo. Para o controle com o emprego do compensador dinâmico, foi adotada a técnica *anti-windup*, que consiste em considerar os efeitos da não-linearidade na realimentação, introduzindo assim algumas modificações na origem do controle para mitigar os efeitos indesejáveis da saturação. Descrevemos também condições de estabilização global e local, apresentando o problema de otimização convexa para computar as matrizes do controlador e tratamos um problema de desempenho quadrático para o sistema de controle.

Nos Capítulos 4 e 5 apresentamos resultados relativos ao caso de sistemas discretos no tempo com parâmetros incertos, com resultados de estabilização adaptados para os casos em que estes parâmetros são mensuráveis em tempo real. Assim, no Capítulo 4 é retomada a estrutura do controlador sob a forma de uma realimentação de estados mais uma realimentação da não-linearidade cujas matrizes de ganhos têm uma estrutura dependente de parâmetros. Para alcançar os resultados de estabilização de controle recorreremos

a uma Função de Lyapunov Dependente de Parâmetros (FLDP), à qual é associado um Conjunto de tipo Lyapunov (CL), e uma condição de setor modificada para levar em conta a não-linearidade de saturação. Assim, para assegurar a convergência das trajetórias do sistema em malha fechada para a origem, com um determinado desempenho temporal, propomos condições do tipo LMI que garantem a propriedade de  $\lambda$ -contratividade [44] de um conjunto de condições iniciais. Esta propriedade é assegurada de forma robusta em relação às possíveis variações paramétricas e para toda não-linearidade pertencente ao setor sob consideração. O conjunto de condições iniciais é formado pela interseção de elipses associadas a cada um dos vértices do politopo de matrizes que descreve o sistema não-linear a controlar. Os resultados numéricos obtidos permitem constatar a eficiência da estratégia de controle sob saturação, bem como evidenciar alguns compromissos existentes entre robustez, desempenho e tamanho do conjunto de condições iniciais alcançado via problema de otimização convexa proposto para a síntese das matrizes do controlador variante.

No Capítulo 5 empenhamo-nos em um aprofundamento dos estudos, mormente ao controle via realimentação de saídas, propondo um controlador dinâmico com estrutura parcialmente dependente de parâmetros, para estabilização local em malha fechada. Analisamos ainda os casos em que a realimentação da não-linearidade  $\varphi$  é nula e também quando a realimentação da não-linearidade de zona-morta é nula.

Para encerrar o trabalho temos o Capítulo 6, em que realizamos as considerações finais, além do direcionamento de linhas de pesquisa que serão abordadas futuramente.

# Capítulo 2

## Controle sob saturação para uma classe de sistemas não-lineares

### 2.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados propostos em [9, 11, 12], os quais serviram de base para o desenvolvimento do presente trabalho de Doutorado. Nesses estudos foi focalizado o problema do controle de uma classe de sistemas não-lineares, contínuos e discretos no tempo, sujeitos à saturação de atuadores. Esta classe de sistemas não-lineares pode ser representada pela interconexão de um sistema linear precisamente conhecido e de uma não-linearidade associada à dinâmica da planta. A lei de controle sob saturação considerada consiste na realimentação de estados do sistema e da não-linearidade que modela a parte não-linear da dinâmica do sistema em malha fechada. O projeto dos ganhos de realimentação é determinado considerando uma transformação de malha sobre o sistema saturado não-linear, o que permite transformar a saturação em uma não-linearidade de tipo zona-morta, satisfazendo a uma condição de setor modificada. As condições para solução dos problemas tratados são obtidas sob a forma de LMIs, as quais podem ser utilizadas como restrições em problemas de otimização convexa.

## 2.2 Apresentação dos problemas

Considere-se um sistema não-linear representado por:

$$\begin{aligned}\delta[x(t)] &= Ax(t) + G\varphi(z(t)) + Bsat(u(t)) \\ z(t) &= Lx(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

em que:  $\delta[x(t)] = \frac{dx(t)}{dt}$ , com  $t \in \mathfrak{R}^+$  no caso de um sistema contínuo no tempo, e  $\delta[x(t)] = x(t+1)$ , com  $t \in \mathbb{Z}^+$  no caso de um sistema discreto no tempo,  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ ,  $z(t) \in \mathfrak{R}^p$  e  $\varphi(\cdot) : \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}^p$ . A, B, G e L são matrizes constantes reais de dimensões apropriadas.

A não-linearidade  $\varphi(\cdot)$  verifica uma condição de setor tipo cone limitado,  $\varphi(\cdot) \in [0, \Omega] \forall z \in \mathfrak{R}^p$  [35], isto é, para a matriz simétrica definida positiva  $\Omega = \Omega' \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  tem-se

$$\varphi'(z(t))\Delta[\varphi(z(t)) - \Omega z(t)] \leq 0, \quad \forall z \in \mathfrak{R}^p, \quad \varphi(0) = 0\tag{2.2}$$

na qual  $\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  é uma matriz diagonal qualquer:

$$\Delta = \begin{cases} \text{diag}\{\delta_\ell\} & , \quad \delta_\ell > 0, \quad \forall \ell = 1, \dots, p, \quad \text{se } \varphi(\cdot) \text{ é descentralizada;} \\ \delta I_p & , \quad \delta > 0, \quad \text{caso contrário.} \end{cases}\tag{2.3}$$

Por definição, considera-se que a não-linearidade  $\varphi(\cdot)$  satisfaz globalmente à condição de setor (2.2). Note que a matriz  $\Omega$  é um dado do projeto e considerada como conhecida. Por outro lado, a partir da definição de  $\Delta$ , vemos que (2.2) é verificada se, e somente se, a condição de setor clássica  $\varphi'(z(t))[\varphi(z(t)) - \Omega z(t)] \leq 0$  é também verificada. Desse modo,  $\Delta$  representa um grau de liberdade (uma variável de decisão a ser utilizada posteriormente) [8].

As entradas de controle são limitadas em amplitude e o modelo da função saturação considerado é:

$$\text{sat}(u_{(i)}(t)) = \text{sign}(u_{(i)}(t)) \min(\rho_{(i)}, |u_{(i)}(t)|)\tag{2.4}$$

$\forall i = 1, \dots, m$ , em que  $\rho_{(i)} > 0$  denota o limite simétrico da amplitude relativo ao  $i$ -ésimo controle.

Foi empregada a seguinte lei de controle de realimentação [9, 11, 12]:

$$u(t) = Kx(t) + \Gamma\varphi(z(t)) \quad (2.5)$$

em que  $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $\Gamma \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ . Com  $\Gamma \neq 0$ , esta lei de controle requer o conhecimento da não-linearidade  $\varphi(\cdot)$  ou a disponibilidade do sinal [4]. O sistema em malha fechada correspondente é dado por:

$$\begin{aligned} \delta[x(t)] &= Ax(t) + G\varphi(z) + B_{sat}(Kx(t) + \Gamma\varphi(z(t))) \\ z(t) &= Lx(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Foram considerados dois problemas:

**Problema 2.1** (Análise de estabilidade absoluta): *Conhecidas as matrizes de realimentação  $K$  e  $\Gamma$ , determinar uma região  $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathfrak{R}^n$ , tão grande quanto possível, de tal forma que a origem do sistema em malha fechada (2.6) é assintoticamente estável para qualquer condição inicial  $x_0 \in \mathcal{S}_0$  e para qualquer  $\varphi(\cdot)$  verificando a condição de setor (2.2).*

Observe que  $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathfrak{R}^n$  define uma *região de estabilidade* para o sistema em malha fechada e, por definição, encontra-se no interior da região de atração da origem, denotada  $\mathcal{R}a(0)$  [35]. No caso em que  $\mathcal{S}_0$  é o próprio espaço de estados  $\mathfrak{R}^n$ , tem-se estabilidade assintótica global. Nos outros casos garante-se a estabilidade assintótica local e  $\mathcal{S}_0$  é, portanto, uma estimativa de  $\mathcal{R}a$ .

**Problema 2.2** (Síntese): *Determinar as matrizes de ganhos de realimentação  $K$  e  $\Gamma$  e uma região  $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathfrak{R}^n$ , tão grande quanto possível, de tal forma que a origem do sistema em malha fechada (2.6) é assintoticamente estável para qualquer condição inicial  $x_0 \in \mathcal{S}_0$  e para qualquer  $\varphi(\cdot)$  verificando a condição de setor (2.2).*

No problema de síntese 2.2, um objetivo implícito no cálculo de  $K$  e  $\Gamma$  é o de maximizar a região de atração do sistema em malha fechada (2.6), através da maximização de  $\mathcal{S}_0$ . Se o sistema em malha aberta é assintoticamente estável, então é possível garantir a estabilidade assintótica global [12].

Para a obtenção dos resultados foi empregada a não-linearidade de zona-morta descentralizada<sup>1</sup>,

$$\Psi(u) = u - \text{sat}(u) \quad (2.7)$$

associada ao conjunto

$$S(\rho) = \{u \in \mathfrak{R}^m; w \in \mathfrak{R}^m; -\rho \leq u - w \leq \rho\}. \quad (2.8)$$

O Lema a seguir apresenta uma condição de setor modificada [23, 24] utilizada ao longo deste trabalho para levar em conta a saturação dos atuadores, seguindo a formulação apresentada em [56].

**Lema 2.1** *Se  $u$  e  $w$  são elementos de  $S(\rho)$  então  $\Psi(u)$  satisfaz à inequação*

$$\Psi(u)'T(\Psi(u) - w) \leq 0 \quad (2.9)$$

para qualquer matriz diagonal definida positiva  $T \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ .

Nas figuras 2.1 e 2.2 encontramos a representação da saturação e da não-linearidade de zona-morta, respectivamente, para uma única entrada de controle delimitada por uma condição de setor clássica [35].

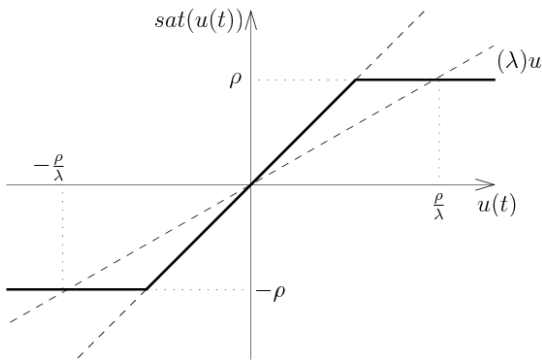


Figura 2.1: Saturação

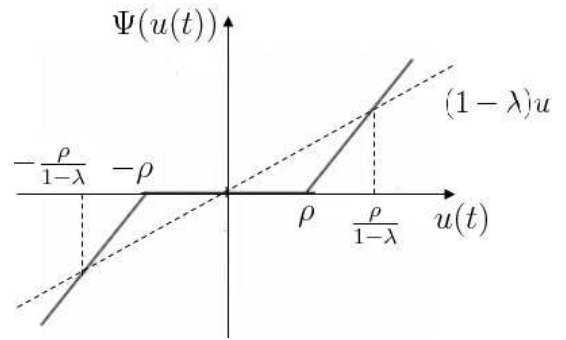


Figura 2.2: Zona-morta

A condição clássica de setor [35], também usada em [27] e [49] para estudar a estabilidade do sistema saturado em malha fechada é dada por:

$$\Psi(u)'(\Psi(u) - \Lambda u) \leq 0,$$

<sup>1</sup>Nas equações que seguem omitiremos a variável tempo,  $t$ , para simplificação das mesmas.



com  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ ,  $\lambda_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Considerando-se o caso particular  $w = \Lambda u$ , observa-se que a condição de setor modificada (2.9) engloba a condição clássica e pode, portanto, ser empregada para determinar condições de estabilidade e de estabilização menos conservadoras. Além disso, uma característica importante da condição (2.9) é que esta conduz diretamente a condições de estabilidade e estabilização sob a forma de LMIs, em vez das formulações BMIs obtidas em [27] e [49]. Também é importante salientar que, comparativamente à abordagem politópica para representar a saturação ([28, 31]), a utilização da condição de setor modificada reduzir a complexidade numérica dos problemas tratados ao longo deste trabalho (veja, por exemplo, [12, 57]).

Então, para utilização do Lema 2.1, considera-se  $u$  dado por (2.5):  $u = Kx + \Gamma\varphi(z)$ . Assim, somando e substituindo  $u$  em (2.1), reescreve-se o sistema em malha fechada na forma

$$\begin{aligned} \delta[x] &= (A + BK)x + (G + B\Gamma)\varphi(z) - B\Psi(u) \\ z &= Lx \end{aligned} \tag{2.10}$$

De forma similar a  $u$ , o vetor  $w$  é definido como  $w = E_1x + E_2\varphi(z)$ , visando à obtenção de condições de estabilidade e estabilização menos conservadoras sob a forma de LMIs. Além disso, utiliza-se uma função quadrática de Lyapunov,  $V(x) > 0 \forall x \neq 0 : V(x) = x'Px$ , com  $P = P' > 0$  e o conjunto elipsoidal associado  $\mathcal{E}(P)$  para determinar o domínio (de contratividade)  $S_0: \mathcal{E}(P) = \{x \in \mathfrak{R}^n; x'Px \leq 1\}$ .

## 2.3 Resultados no caso de sistemas contínuos no tempo

Os resultados para o caso de sistemas em tempo contínuo foram inicialmente propostos por [11].

### 2.3.1 Estabilidade

Para a análise de estabilidade absoluta consideremos o sistema em malha fechada, estável assintoticamente, para as matrizes  $K$  e  $\Gamma$  dadas.

**Proposição 2.1** *Se existe uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , duas matrizes diagonais positivas  $S_\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , e duas matrizes  $Z_1 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e*

$Z_2 \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  satisfazendo:

$$\begin{bmatrix} W(A+BK)' + (A+BK)W & (G+B\Gamma)S_\Delta + WL'\Omega & Z_1 - BS \\ \star & -2S_\Delta & Z_2' \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} W & -WL'\Omega & WK'_{(i)} - Z'_{1(i)} \\ \star & 2S_\Delta & S_\Delta \Gamma'_{(i)} - Z'_{2(i)} \\ \star & \star & \rho_{(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.12)$$

então o elipsóide  $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathfrak{R}^n; x'Px \leq 1\}$ , com  $P = W^{-1}$ , é uma região de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada (2.6), para qualquer não-linearidade  $\varphi(z)$  satisfazendo à relação (2.2) com  $\Delta = S_\Delta^{-1}$ .

Apresenta-se a seguir, de forma resumida, os passos empregados para demonstrar este resultado. Passos similares serão utilizados, de forma mais detalhada, para demonstrar os resultados propostos nos capítulos subseqüentes.

### Comentários sobre a demonstração:

Para a aplicação do Lema 2.1 com a não-linearidade  $\Psi(u)$  consideremos os vetores  $u$  e  $w$ , em que  $u$  é dado por (2.5) e  $w = E_1x + E_2\varphi(z)$ , sendo  $E_1 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $E_2 \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ .

Considere agora  $E_1 = Z_1W^{-1}$  e  $E_2 = Z_2S_\Delta^{-1}$ . O elipsóide  $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathfrak{R}^n; x'Px \leq 1\}$ , com  $P = W^{-1}$ , está incluso em  $S(\rho)$ , isto é,  $|Kx + \Gamma\varphi(z)| \leq \rho \forall x \in \mathcal{E}(P)$ , se

$$\begin{bmatrix} x' & \varphi' \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{K}'_i \\ \mathbb{G}'_i \end{bmatrix} \frac{1}{\rho_{(i)}^2} \begin{bmatrix} \mathbb{K}_i & \mathbb{G}_i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.13)$$

$$\forall i = 1, \dots, m \text{ e } \forall x, \varphi \text{ tal que } 2\varphi'\Delta(\varphi - \Omega Lx) \leq 0$$

em que  $\begin{bmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K - E_1 & \Gamma - E_2 \end{bmatrix}$ . Fazendo uso da  $S$ -procedure e do complemento de Schur [6] e realizando manipulações algébricas, demonstramos a equação (2.12). Assim, a satisfação da relação (2.12) garante que o elipsóide  $\mathcal{E}(P)$  está incluso em  $S(\rho)$  e então a não-linearidade  $\Psi(u)$  satisfaz à condição de setor (2.9) para qualquer  $x \in \mathcal{E}(P)$ .

Para a demonstração da desigualdade (2.11) empregamos uma função quadrática de Lyapunov  $V(x) = x'Px$ . Realizando a derivada de  $V(x)$  ao longo das trajetórias do

sistema em malha fechada (2.6) e considerando que as condições de setor (2.2) e (2.9) são verificadas para qualquer  $x \in \mathcal{E}(P)$  e  $x \neq 0$ , chega-se a desigualdade:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & 2x'((A+BK)'P + P(A+BK))x + 2x'P(G+B\Gamma)\varphi - 2x'PB\Psi \\ & - 2\Psi'(\Psi - E_1x - E_2\varphi) - 2\varphi'\Delta(\varphi - \Omega Lx) < 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Reescrevendo a desigualdade anterior em forma matricial e realizando manipulações algébricas com  $W = P^{-1}$ ,  $S_\Delta = \Delta^{-1}$ ,  $T = S^{-1}$ , constata-se que se a relação (2.11) é satisfeita então (2.14) também é verificada. Isto demonstra que  $\mathcal{E}(P)$  é um conjunto contrativo ao longo das trajetórias do sistema (2.6) e esta é uma região de estabilidade assintótica.  $\square$

No caso em que a matriz  $A$  é Hurwitz, podemos analisar a estabilidade absoluta global. Para tanto, considera-se  $E_1 = K$  e  $E_2 = \Gamma$ , de forma a garantir que  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $x \neq 0$  será verificada para todo  $x \in \mathfrak{R}^n$ .

**Proposição 2.2** *Se existe uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e duas matrizes diagonais positivas  $S_\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  satisfazendo:*

$$\begin{bmatrix} W(A+BK)' + (A+BK)W & (G+B\Gamma)S_\Delta + WL'\Omega & WK' - BS \\ * & -2S_\Delta & S_\Delta\Gamma' \\ * & * & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (2.15)$$

então, o sistema em malha fechada (2.6) é globalmente assintoticamente estável para qualquer não-linearidade  $\varphi(z)$  satisfazendo à relação (2.2) com  $\Delta = S_\Delta^{-1}$ .

### 2.3.2 Estabilização

As proposições descritas a seguir são condições de estabilização no tempo contínuo, sob a forma de LMI. Elas são obtidas a partir de (2.11) e (2.12), no caso de estabilidade local, fazendo-se uso das trocas de variáveis  $KW = Y_1$ ,  $\Gamma S_\Delta = Y_2$ ,  $E_1W = Z_1$  e  $E_2S_\Delta = Z_2$ .

**Proposição 2.3** *Se existe uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , duas matrizes diagonais positivas  $S_\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , e quatro matrizes  $Z_1 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,*

$Z_2 \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ ,  $Y_1 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $Y_2 \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  satisfazendo:

$$\begin{bmatrix} WA' + Y_1' B' + AW + BY_1 & GS_\Delta + BY_2 + WL'\Omega & Z_1' - BS \\ \star & -2S_\Delta & Z_2' \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (2.16)$$

$$\begin{bmatrix} W & -WL'\Omega & Y_{1(i)}' - Z_{1(i)}' \\ \star & 2S_\Delta & Y_{2(i)}' - Z_{2(i)}' \\ \star & \star & \rho_{(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (2.17)$$

então os ganhos  $K = Y_1 W^{-1}$  e  $\Gamma = Y_2 S_\Delta^{-1}$  e o elipsóide  $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathfrak{R}^n; x' P x \leq 1\}$ , com  $P = W^{-1}$  é uma região de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada (2.6), para qualquer não-linearidade  $\varphi(z)$  satisfazendo a relação (2.2) com  $\Delta = S_\Delta^{-1}$ .

Considerando  $Y_1 = Z_1$  e  $Z_2 = Y_2$ , o resultado seguinte de estabilização global pode ser declarado a partir da Proposição 2.3:

**Proposição 2.4** *Se existe uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , duas matrizes diagonais positivas  $S_\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e duas matrizes  $Y_1 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $Y_2 \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  satisfazendo:*

$$\begin{bmatrix} WA + Y_1' B' + AW + BY_1 & GS_\Delta + BY_2 + WL'\Omega & Y_1' - BS \\ \star & -2S_\Delta & Y_2' \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (2.18)$$

neste caso os ganhos  $K = Y_1 W^{-1}$  e  $\Gamma = Y_2 S_\Delta^{-1}$  estabiliza globalmente assintoticamente o sistema em malha fechada (2.6) para qualquer não-linearidade  $\varphi(z)$  satisfazendo à relação (2.2) com  $\Delta = S_\Delta^{-1}$ .

### 2.3.3 Problema de otimização

Atualmente a evolução dos métodos numéricos, principalmente com o uso computacional, permite a determinação de soluções confiáveis para problemas de estabilidade e estabilização de sistemas. No desenvolvimento deste trabalho adotamos, tanto para análise quanto para síntese de sistemas, a ferramenta de otimização de critérios lineares com restrições do tipo LMIs para a resolução dos problemas [6].

Em termos de inequações matriciais lineares, diversas especificações de desempenho e robustez em sistemas dinâmicos podem ser descritas. A seguir, fazendo uso dessas inequações matriciais lineares, descrevemos o método a ser empregado.

Para a resolução dos Problemas 2.1 e 2.2 foi utilizado o conjunto modelo poliedral  $\Xi_0 \in \mathbb{R}^n$  e o fator escalar  $\beta$ , em que  $\Xi_0 = \text{Co}\{v_r \in \mathbb{R}^n, r = 1, \dots, n_r\}$ . Quando é verificado  $\beta \Xi_0 \subset \mathcal{E}(P)$ , por meio da maximização do fator escalar  $\beta$ , tem-se um procedimento para a otimização do tamanho do conjunto de condições iniciais admissíveis  $\mathcal{E}(P)$ . Temos o seguinte problema de programação convexa para a solução do Problema 2.1:

$$\begin{aligned} & \min_{W, S_\Delta, S, Z_1, Z_2} \mu \\ & \text{sujeito à} \\ & \begin{bmatrix} \mu & v_r' \\ v_r & W \end{bmatrix} \geq 0 \quad r = 1, \dots, n_r, \end{aligned} \quad (2.19) \end{aligned}$$

(2.11) e (2.12).

Observe que cada desigualdade em (2.19) é equivalente à  $(\frac{1}{\sqrt{\mu}}v_r')P(v_r\frac{1}{\sqrt{\mu}}) \leq 1$ , o que descreve a inclusão  $\frac{1}{\sqrt{\mu}}\Xi_0 \subset \mathcal{E}(P)$ . Deste modo, considerando  $\beta = 1/\sqrt{\mu}$ , a minimização de  $\mu$  implica a maximização de  $\beta$ .

Para a resolução do Problema 2.2 temos o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min_{W, S_\Delta, S, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2} \mu \\ & \text{sujeito à} \\ & \begin{bmatrix} \mu & v_r' \\ v_r & W \end{bmatrix} \geq 0 \quad r = 1, \dots, n_r, \end{aligned} \quad (2.20)$$

(2.16) e (2.17).

**Observação 2.1** Quando  $\varphi$  é localmente verificada, ou seja, a condição (2.2) é válida somente para o subconjunto de  $z \in Z \subset \mathbb{R}^p$  descrito por  $Z = \{z \in \mathbb{R}^p; -\rho \leq z \leq \rho\}$ , deve-se considerar adicionalmente a condição de inclusão  $\mathcal{E}(P) \subset Z$ , descrita pela LMI

$$\begin{bmatrix} W & Y_{1(i)}' - Z_{1(i)}' \\ \star & \rho_{(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.21)$$

**Observação 2.2** Para obter a estabilização com a alocação regional de pólos numa faixa

do semiplano complexo esquerdo, definida por  $-\sigma \leq \text{Re}(s) \leq -\alpha$  com  $0 \geq \alpha > \sigma$ , podemos substituir a inequação (2.16) por:

$$\begin{bmatrix} WA' + Y_1' B' + AW + BY_1 + 2\alpha W & GS_\Delta + BY_2 + WL'\Omega & Z_1' - BS \\ \star & -2S_\Delta & Z_2' \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < 0. \quad (2.22)$$

e incluir a seguinte LMI ao problema de otimização (2.20):

$$WA' + Y_1' B' + AW + BY_1 + 2\sigma W > 0 \quad (2.23)$$

### 2.3.4 Comentários adicionais

Em [12] o resultado apresentado anteriormente é adaptado para tratar o sistema não-linear seguinte:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + G\varphi(z(t)) + B\text{sat}(u(t)) \\ z(t) &= Lx(t) + N\varphi(z(t)) + M\text{sat}(u(t)) \end{aligned} \quad (2.24)$$

no qual  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ ,  $z(t) \in \mathfrak{R}^p$  e  $\varphi(\cdot) : \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}^p$ .  $A$ ,  $B$ ,  $G$ ,  $L$ ,  $N$  e  $M$  são matrizes constantes reais de dimensões apropriadas. A não-linearidade  $\varphi(z(t))$  é definida como anteriormente em (2.2). Nota-se que a não-linearidade  $\varphi(\cdot)$  pode depender agora não apenas de uma combinação de estados do sistema, mas também das entradas de controle saturantes e da própria não-linearidade  $\varphi(\cdot)$ . As entradas de controle são limitadas por (2.4) e a lei de controle de realimentação utilizada é (2.5). Assim, o sistema em malha fechada correspondente pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + G\varphi(z(t)) - B\text{sat}(Kx(t) + \Gamma\varphi(z(t))) \\ z(t) &= Lx(t) + N\varphi(z(t)) - M\text{sat}(Kx(t) + \Gamma\varphi(z(t))) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Neste trabalho os autores trataram a resolução do Problema 2.2 utilizando as ferramentas apresentadas anteriormente, mas consideraram, entretanto, o vetor  $w$  no Lema 2.1 como  $w = E_1 x + \Gamma\varphi(z)$ , com  $E_1 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ .

**Lema 2.2** [12] *Se  $x$  pertence a  $S(\rho) = \{x \in \mathfrak{R}^n; -\rho \preceq (K - E_1)x \preceq \rho\}$ , então a não-*

linearidade  $\Psi(u)$  satisfaz à seguinte desigualdade

$$\Psi(u)'T(\Psi(u) - E_1x - \Gamma\varphi(z)) \leq 0 \quad (2.26)$$

para qualquer matriz diagonal definida positiva  $T \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ .

Observa-se que com esta nova escolha de  $w$ , o conjunto  $S(\rho)$  está definido somente no espaço de estados do sistema a controlar, ao contrário de  $S(\rho)$  utilizado na demonstração da Proposição 2.1 ou 2.2. Desse modo, trata-se a condição de inclusão  $\mathcal{E}(P) \subset S(\rho)$  diretamente no espaço de estados como:  $x'(P - \mathbb{K}'_i \frac{1}{\rho_{(i)}^2} \mathbb{K}_i)x \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, m$ , sem a necessidade de incluir adicionalmente a condição de setor (2.2), como foi o caso em (2.13).

Assim, para determinar as matrizes de ganhos  $K$  e  $\Gamma$ , as quais resolvem o problema de estabilização 2.2 no contexto local, temos a seguinte proposição:

**Proposição 2.5** *Se existe uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , duas matrizes diagonais positivas  $S_\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e três matrizes  $Z_1 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $Y_1 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $Y_2 \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  satisfazendo:*

$$\begin{bmatrix} WA' + AW + Y_1'B' + BY_1 & GS_\Delta + BY_2 + (WL' + Y_1'M')\Omega & Z_1' - BS \\ \star & -2S_\Delta + \Omega(MY_2 + NS_\Delta) + (MY_2 + NS_\Delta)'\Omega' & Y_2' - \Omega MS \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (2.27)$$

$$\begin{bmatrix} W & Y_{1(i)}' - Z_{1(i)}' \\ \star & \rho_{(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.28)$$

então os ganhos  $K = Y_1W^{-1}$  e  $\Gamma = Y_2S_\Delta^{-1}$  e o elipsóide  $\mathcal{E}(W) = \{x \in \mathfrak{R}^n; x'W^{-1}x \leq 1\}$ , com  $P = W^{-1}$ , são soluções para o Problema 2.2.

Para a demonstração de (2.27) devemos seguir passos similares da demonstração de (2.11). Além disso, (2.28) garante a inclusão do elipsóide  $\mathcal{E}(P)$  na região  $S(\rho)$ .

Como será observado, mediante um exemplo numérico, a utilização das LMIs (2.27) e (2.28) em substituição a (2.16) e (2.17) no problema de otimização (2.20), permite obter soluções menos conservadoras em termos do tamanho da região  $S_0 \triangleq \mathcal{E}(P)$ , apesar da escolha de um vetor  $w$  aparentemente menos estruturado que no primeiro caso.

## 2.4 Resultados no caso de sistemas discretos no tempo

O caso de sistemas em tempo discreto foi tratado em [9]. Seguiu-se o procedimento de demonstração da Proposição 2.1 adaptando-o para o caso discreto no tempo, com a função quadrática  $V(x) = x'Px$ , em que  $P = W^{-1}$ , para garantir que  $\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0$ . Da satisfação da condição de setor (2.2) e (2.9) para qualquer  $x \in \mathcal{E}(\mathcal{P})$ , segue que  $\Delta V(x_k) < 0$ ,  $x \in \mathcal{E}(\mathcal{P})$  é verificado se a seguinte desigualdade for verdadeira:

$$\Delta V(x_k) - 2\varphi' \Delta(\varphi - \Omega L x_k) - 2\Psi' T(\Psi - E_1 x_k - E_2 \varphi) < 0 \quad (2.29)$$

Assim, uma solução para o problema de estabilização local no caso de sistemas discretos no tempo pode ser enunciada da mesma forma que na Proposição 2.1, substituindo-se (2.16) por (2.30):

$$\begin{bmatrix} -W & WA' + Y_1' B' & WL' \Omega & -Z_1' \\ \star & -W & GS_\Delta + BY_2 & BS \\ \star & \star & -2S_\Delta & -Z_2' \\ \star & \star & \star & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (2.30)$$

Cabe ressaltar que condições de estabilidade e estabilização local alternativas podem também ser obtidas no caso discreto seguindo os comentários da Subseção 2.3.4.

Para estabilização global, fazendo uso da Proposição 2.4, a equação (2.18) é substituída por (2.31):

$$\begin{bmatrix} -W & WA' + Y_1' B' & WL' \Omega & -Y_1' \\ \star & -W & GS_\Delta + BY_2 & BS \\ \star & \star & -2S_\Delta & -Y_2' \\ \star & \star & \star & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (2.31)$$



## 2.5 Exemplo Numérico

Considere os seguintes dados para o sistema em tempo contínuo (2.1)-(2.4):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega = 1.4, \quad \rho = 1.8.$$

Para a otimização do tamanho do conjunto  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{E}(P)$  fizemos uso do problema de programação convexa (2.20).

Assumindo  $\Xi_0 = \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ , os resultados numéricos que se encontram na Tabela 2.1 foram obtidos por meio da resolução da programação convexa (2.20) para  $\varphi$  globalmente verificada. Quando  $\varphi$  é localmente verificada fizemos uso da Observação 2.1. Com estes dados obtivemos as elipses, representadas na Figura 2.3, que determina uma região de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada. Verificamos na representação das elipses que a estabilização global engloba a estabilização local, o que era esperado, devido ao fato de a estabilização local ser restrita a um espaço de estado.

$\varphi(z)$	Localmente verificada $\{z \in \mathbb{R}^p;  z  \leq 1.4\}$	Globalmente verificada $z \in \mathbb{R}^p$
$W$	$\begin{bmatrix} 26.6208 & 29.7548 \\ 29.7548 & 102.7435 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 35.2858 & 61.6507 \\ 61.6507 & 220.9697 \end{bmatrix}$
$Y_1$	$\begin{bmatrix} -3.4824 & -1.7276 \end{bmatrix} \times 10^4$	$\begin{bmatrix} -2.5246 & -1.2347 \end{bmatrix} \times 10^4$
$Y_2$	$-97.2825$	$-133.8631$
$Z_1$	$\begin{bmatrix} -3.4816 & -1.7275 \end{bmatrix} \times 10^4$	$\begin{bmatrix} -2.5238 & -1.2346 \end{bmatrix} \times 10^4$
$Z_2$	$-110.3423$	$-$
$\beta$	$4.2413$	$4.2525$
$K$	$\begin{bmatrix} -1.6564 & 0.3115 \end{bmatrix} \times 10^3$	$\begin{bmatrix} -1.2055 & 0.2805 \end{bmatrix} \times 10^3$
$\Gamma$	$-0.4764$	$-1.1528$

Tabela 2.1: Resultados numéricos para  $\varphi(z) \in [0, \Omega]$  globalmente e localmente verificada

A representação da maximização de  $\beta$ , o qual corresponde a otimização do conjunto de condições iniciais admissíveis  $\mathcal{E}(P)$ , encontra-se na Figura 2.4.

Na Figura 2.5 o conjunto elipsoidal interno corresponde à região de estabilidade local estimada para  $\mathcal{S}_0$  levando em conta a lei de controle  $u(t) = Kx(t)$ . Como esperado, este

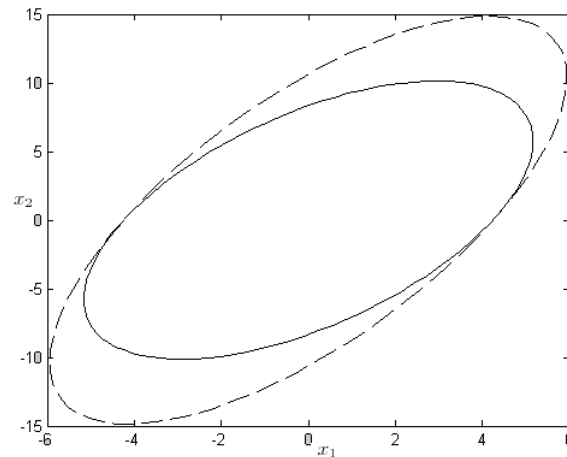


Figura 2.3: Representação da região  $\mathcal{S}_0$  para a estabilização com a condição de setor globalmente (- -) e localmente verificada (-)

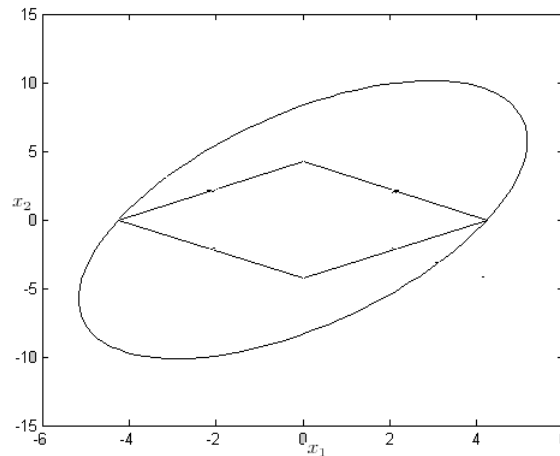


Figura 2.4: Representação da maximização de  $\beta$  na região de estabilização para  $\varphi$  localmente verificada (-)

é menor que o conjunto  $\mathcal{S}_0$  externo obtido considerando  $u(t) = Kx(t) + \Gamma\varphi(z_k)$ .

A Tabela 2.2 descreve os resultados obtidos para a condição de setor localmente e globalmente verificada com a alocação de pólos, conforme Observação 2.2, no intervalo de  $\alpha = 0.3$  e  $\sigma = 10$ . Estes dados estão representados na Figura 2.6.

Na Figura 2.7 temos a representação das elipses, as quais determinam a região de estabilidade assintótica em malha fechada, obtidas via síntese, sendo  $\varphi$  globalmente verificada e a condição de setor localmente verificada sem a alocação de pólos (linha cheia) e com alocação de pólos (linha tracejada). Percebe-se, assim, que com a alocação de pólos, a elipse fica menor, ou seja, torna-se mais restritiva.

Na Figura 2.8 temos a representação da elipse obtida com a alocação de pólos via síntese com os resultados numéricos obtidos anteriormente. Nessa mesma figura temos a

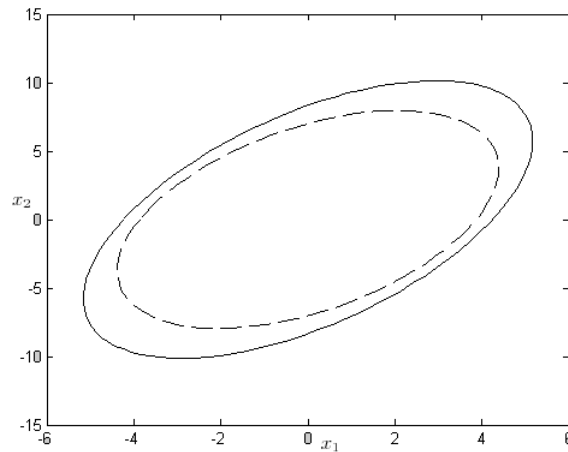


Figura 2.5: Representação da região  $\mathcal{S}_0$  considerando as leis de controle  $u(t) = Kx(t) + \Gamma\varphi(z_k)$  (-) e  $u(t) = Kx(t)$  (- -)

$\varphi(z)$	Localmente verificada $\{z \in \mathbb{R}^p;  z  \leq 1.4\}$	Globalmente verificada $z \in \mathbb{R}^p$								
$W$	<table border="1"><tr><td>13.5584</td><td>16.0004</td></tr><tr><td>16.0004</td><td>57.2309</td></tr></table>	13.5584	16.0004	16.0004	57.2309	<table border="1"><tr><td>15.4995</td><td>23.2154</td></tr><tr><td>23.2154</td><td>84.0943</td></tr></table>	15.4995	23.2154	23.2154	84.0943
13.5584	16.0004									
16.0004	57.2309									
15.4995	23.2154									
23.2154	84.0943									
$Y_1$	<table border="1"><tr><td>-31.3582</td><td>-3.6785</td></tr></table>	-31.3582	-3.6785	<table border="1"><tr><td>-31.5264</td><td>-3.6917</td></tr></table>	-31.5264	-3.6917				
-31.3582	-3.6785									
-31.5264	-3.6917									
$Y_2$	-0.3686	-5.6938								
$Z_1$	<table border="1"><tr><td>-25.7598</td><td>-3.02677</td></tr></table>	-25.7598	-3.02677	<table border="1"><tr><td>-25.9498</td><td>-3.1271</td></tr></table>	-25.9498	-3.1271				
-25.7598	-3.02677									
-25.9498	-3.1271									
$Z_2$	-9.1445	-								
$\beta$	3.0139	3.0139								
$K$	<table border="1"><tr><td>-3.3384</td><td>0.8691</td></tr></table>	-3.3384	0.8691	<table border="1"><tr><td>-3.3559</td><td>0.8825</td></tr></table>	-3.3559	0.8825				
-3.3384	0.8691									
-3.3559	0.8825									
$\Gamma$	-0.0032	-0.1028								

Tabela 2.2: Resultados numéricos com alocação de pólos

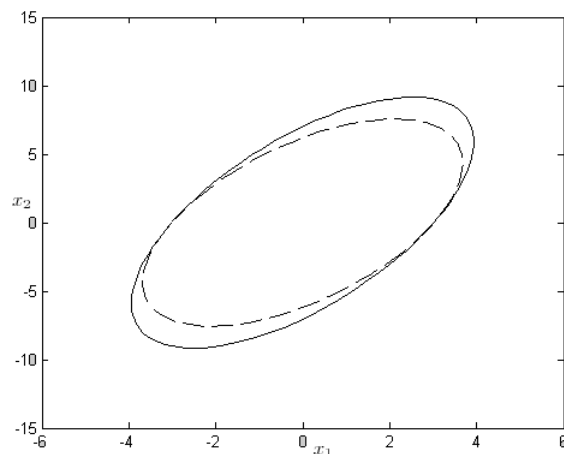


Figura 2.6: Representação da região  $\mathcal{S}_0$  com alocação de pólos com  $\varphi$  globalmente (-) e localmente verificada (- -)

representação das retas de  $Kx = \rho$  e  $Kx = -\rho$ . Dentro deste domínio as entradas de controle não saturam, porém no interior desta elipse, com ou sem saturação, a estabilidade

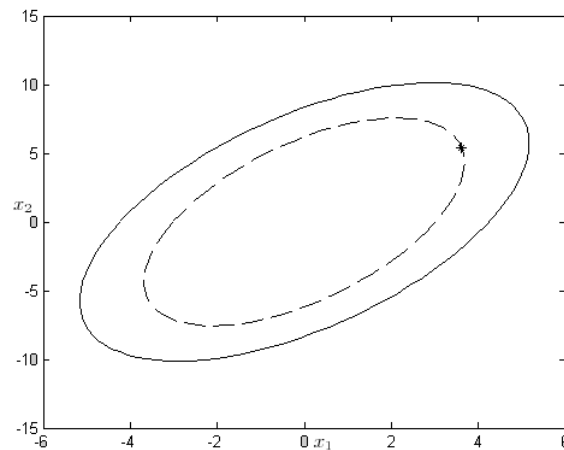


Figura 2.7: Representação da região  $\mathcal{S}_0$  sem (-) e com alocação de pólos (- -)

é garantida. Além destas retas temos a representação de  $(K - E_1)x = \rho$  e  $(K - E_1)x = -\rho$ , em que também temos a saturação, porém a estabilidade do sistema precisa ser analisada.

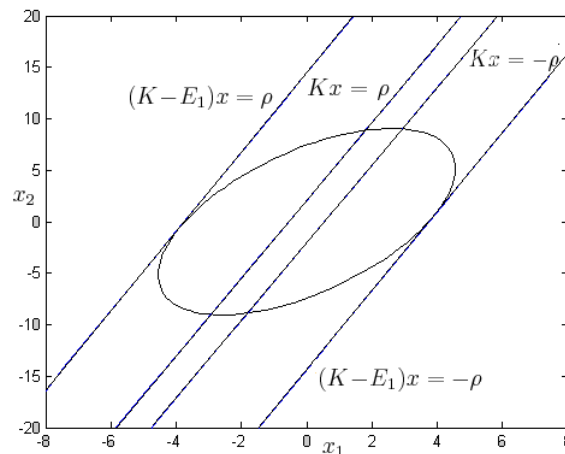


Figura 2.8: Representação da região  $\mathcal{S}_0$  com alocação de pólos e dos conjuntos poliedrais

A Figura 2.9 foi obtida via simulação com os dados obtidos por meio da síntese com alocação de pólos localmente verificada, para o ponto  $x_0 = [3.6217 \ 5.3916]$  que está assinalado na Figura 2.7. Nesta, encontramos a representação dos estados  $x_1$  e  $x_2$  e a saturação do sistema respectivamente.

## 2.6 Conclusão

No desenrolar deste capítulo os resultados sobre o controle sob saturação para uma classe de sistemas não-lineares com relação a estabilidade e estabilização, foram obtidos no contexto de sistemas precisamente conhecidos e estados completamente acessíveis. Assim,

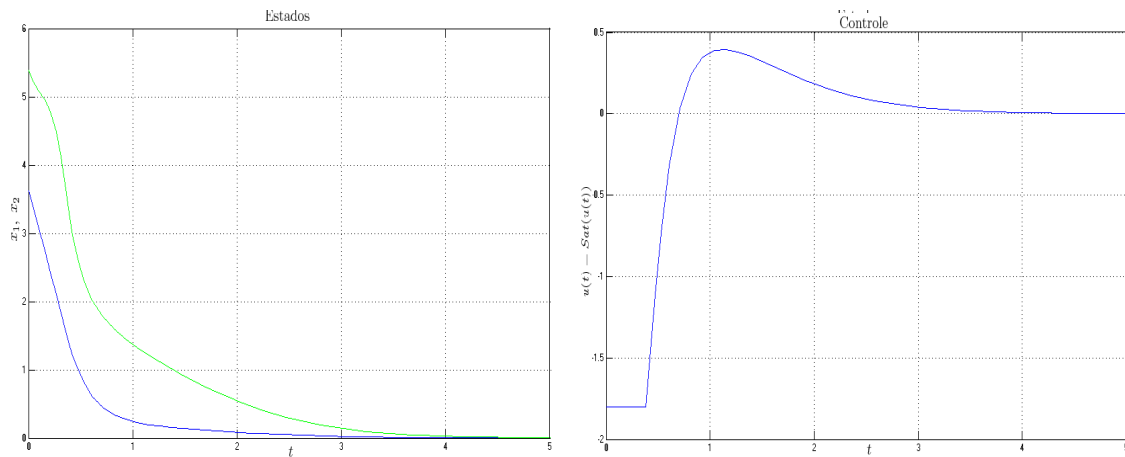


Figura 2.9: Simulações para síntese com alocação de pólos

através das demonstrações e do exemplo numérico, percebemos que a realimentação dos estados e da não-linearidade de setor  $\varphi(\cdot)$  amplia a região de estabilidade com relação à realimentação de estado pura. Verificamos também que realizando a alocação de pólos a região de estabilidade torna-se menor, isto é, fica mais restritiva.

Com base nestes resultados é que desenvolvemos o próximo capítulo, em que será abordado o problema de realimentação dinâmica de saídas.



# Capítulo 3

## Estabilização por realimentação dinâmica de saídas

### 3.1 Introdução

Neste capítulo propomos uma metodologia para calcular leis de controle do tipo realimentação dinâmica de saídas para um sistema não-linear em tempo contínuo sujeito a entradas de controle limitadas em amplitude, considerando uma classe de sistemas não-lineares de tipo Lur'e. Com base em ferramentas de estabilidade absoluta e na condição de setor modificado para levar em conta efeitos de saturação na entrada, uma abordagem LMI é proposta para o projeto do controlador. São apresentados resultados de estabilização global e local. A estrutura do controlador é composta por uma parte linear, uma malha *anti-windup* e um termo associado à saída da não-linearidade ligada à dinâmica do sistema a controlar [20, 26, 48]. São propostos problemas de otimização convexos para computar as matrizes do controlador que direcionam à maximização da região de atração ou ao aumento do desempenho com uma região garantida de estabilidade. Para este capítulo adotamos como base [19].

## 3.2 Apresentação do problema

Considere-se um sistema não-linear em tempo contínuo representado pelo sistema tipo Lur'e:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + G\varphi(z(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \\ z(t) &= Lx(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

no qual  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  e  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  são o estado e a entrada do controle, respectivamente,  $y(t) \in \mathfrak{R}^p$  corresponde à saída medida e  $z(t) \in \mathfrak{R}^q$  é a entrada para a função vetorial não-linear  $\varphi(\cdot) : \mathfrak{R}^q \rightarrow \mathfrak{R}^q$ .  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $G$  e  $L$  são matrizes constantes reais de dimensões apropriadas.

Com relação ao sistema (3.1) as hipóteses seguintes são consideradas:

**H1** A não-linearidade  $\varphi(z)$  verifica uma condição de setor de tipo cone limitado, isto é, existe uma matriz simétrica definida positiva  $\Omega \in \mathfrak{R}^{q \times q}$  tal que

$$\varphi(z)' \Delta (\varphi(z) - \Omega z) \leq 0, \quad \varphi(0) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{S}_1 \subseteq \mathfrak{R}^q \tag{3.2}$$

em que  $\Delta \in \mathfrak{R}^{q \times q}$  é uma matriz diagonal qualquer definida como:

$$\Delta = \begin{cases} \text{diag}(\delta_l), & \delta_l > 0, \text{ se } \varphi(\cdot) \text{ é descentralizada;} \\ \delta I_q, & \delta > 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

A matriz  $\Omega$  é considerada conhecida. Por outro lado, a matriz  $\Delta$  representa um grau de liberdade no projeto do controlador [8]. Se  $\mathcal{S}_1 = \mathfrak{R}^q$ , então a condição de setor (3.2) é verificada globalmente, caso contrário só é verificada localmente, como será caracterizado na seqüência.

**H2** A saída do sistema  $y(t)$  e a saída da não-linearidade  $\varphi(z(t))$  estão disponíveis em tempo real.

**H3** A entrada do controle é limitada como segue:

$$-u_{0(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{0(i)}, \quad u_{0(i)} > 0, \quad i = 1, \dots, m \tag{3.3}$$

Em conseqüência do controle limitado, o sinal do controle a ser injetado no sistema



é uma saturação, isto é, considerando o sinal corrente do atuador dado por  $v(t)$ , teremos

$$u(t) = \text{sat}(v(t)) \quad (3.4)$$

em que cada componente da  $\text{sat}(v)$  é definida,  $\forall i = 1, \dots, m$ , por meio de:

$$\text{sat}(v)_{(i)} = \text{sat}(v_{(i)}) = \text{sign}(v_{(i)}) \min(\rho_{0(i)}, |v_{(i)}|).$$

Considere-se agora um controle por realimentação dinâmica de saída, não-linear, com a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c u_c(t) + E_c (\text{sat}(v(t)) - v(t)) + G_c \varphi(z(t)) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c u_c(t) + F_c \varphi(z(t)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que  $x_c(t) \in \mathfrak{R}^n$  é o estado do controlador,  $u_c(t)$  é a entrada do controlador,  $y_c(t)$  é a saída do controle e as matrizes  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$ ,  $D_c$ ,  $E_c$ ,  $F_c$  e  $G_c$  são de dimensões apropriadas. O termo  $E_c(\text{sat}(v(t)) - v(t))$  corresponde a uma malha *anti-windup* estática para mitigar o efeito indesejável do *windup* causado pela saturação de entrada [23, 58]. A conexão entre a planta e o controle é dada por:  $v(t) = y_c(t)$ ,  $u_c(t) = y(t)$ .

Definem-se as seguintes matrizes:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \mathbb{G} = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} D_c C & C_c \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbb{L} = \begin{bmatrix} L & 0 \end{bmatrix}.$$

Conseqüentemente, considerando um vetor de estado aumentado  $\zeta(t) = \begin{bmatrix} x(t)' & x_c(t)' \end{bmatrix}'$ , o sistema em malha fechada, composto pela conexão do sistema (3.1) e o controle (3.5), pode ser reescrito como:

$$\dot{\zeta}(t) = \mathbb{A}\zeta(t) + (\mathbb{G} + \mathbb{B}F_c + \mathbb{R}G_c)\varphi(z(t)) - (\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c)\Psi(y_c(t)) \quad (3.6)$$

no qual

$$\begin{aligned} y_c(t) &= \mathbb{K}\zeta(t) + F_c \varphi(z(t)) \\ \Psi(y_c(t)) &= y_c(t) - \text{sat}(y_c(t)) \end{aligned} \quad (3.7)$$

com  $(\Psi(y_c))_{(i)} \triangleq y_{c(i)} - \text{sat}(y_c)_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Note-se que  $\Psi(y_c)$  corresponde à não-linearidade de zona-morta descentralizada.

Considerando uma matriz  $H = \begin{bmatrix} H_\zeta & H_\varphi \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{m \times (2n+q)}$  e definindo o conjunto poliedral

$$\mathcal{S}_2 \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} \zeta \\ \varphi \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2n+q}; |[(\mathbb{K} - H_\zeta) (F_c - H_\varphi)]_{(i)} \begin{bmatrix} \zeta \\ \varphi \end{bmatrix}| \leq v_{0(i)}, \quad i = 1, \dots, m \right\} \quad (3.8)$$

temos o Lema seguinte, referente à não-linearidade  $\Psi(y_c)$  [23] (ver também Lema 2.1):

**Lema 3.1** *Se  $\begin{bmatrix} \zeta \\ \varphi \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_2$  então a relação*

$$\Psi(y_c)'T (\Psi(y_c) - H_\zeta \zeta - H_\varphi \varphi) \leq 0 \quad (3.9)$$

*é verificada para qualquer matriz  $T \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  definida positiva e diagonal.*

## 3.3 Estabilização

### 3.3.1 Estabilização Local

Neste caso, nós consideramos inicialmente o conjunto  $\mathcal{S}_1 \subset \mathfrak{R}^q$  definido como a seguir, ou seja, a condição de setor (3.2) é localmente verificada:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &\triangleq \{x \in \mathfrak{R}^q ; |L_{(i)}x| \leq v_{(i)}, v_{(i)} > 0, i = 1, \dots, q\} \\ &= \{\zeta \in \mathfrak{R}^{2n} ; |\mathbb{L}_{(i)}\zeta| \leq v_{(i)}, v_{(i)} > 0, i = 1, \dots, q\}. \end{aligned}$$

**Teorema 3.1** *Considere que existem matrizes simétricas definidas positivas  $(X, Y) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , matrizes diagonais definidas positivas  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e  $S_\Delta \in \mathfrak{R}^{q \times q}$ , matrizes  $\hat{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\hat{B} \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ ,  $(\hat{C}, \hat{H}_{\zeta 1}, \hat{H}_{\zeta 2}) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $(\hat{H}_\varphi, \hat{F}) \in \mathfrak{R}^{m \times q}$ ,  $\hat{D} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ ,  $\hat{G} \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ , e um escalar*

$\nu > 0$  tal que as seguintes desigualdades matriciais lineares são verificadas:

$$\begin{bmatrix} He\{AX + B\hat{C}\} & A + \hat{A}' + B\hat{D}C & GS_{\Delta} + B\hat{F} + XL'\Omega & -BS + \hat{H}'_{\zeta 1} \\ * & He\{YA + \hat{B}C\} & \hat{G} + L'\Omega & \hat{E} + \hat{H}'_{\zeta 2} \\ * & * & -2S_{\Delta} & \hat{H}'_{\varphi} \\ * & * & * & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} X & I & * & * \\ I & Y & * & * \\ \Omega LX & \Omega L & 2S_{\Delta} & * \\ \hat{C}_{(i)} - \hat{H}_{\zeta 1(i)} & \hat{D}_{(i)}C - \hat{H}_{\zeta 2(i)} & \hat{F}_{(i)} - \hat{H}_{\varphi(i)} & \nu \rho_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} X & * & * \\ I & Y & * \\ L_{(i)}X & L_{(i)} & \nu v_{(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, q \quad (3.12)$$

Então o controlador dinâmico (3.5), com

$$\begin{aligned} D_c &= \hat{D}, \\ B_c &= V^{-1}(\hat{B} - YB\hat{D}), \\ C_c &= (\hat{C} - \hat{D}CX)(U')^{-1}, \\ A_c &= V^{-1}[\hat{A} - (YAX + YB\hat{C} + VB_cCX)](U')^{-1}, \\ E_c &= -V^{-1}(\hat{E}S^{-1} + YB), \\ F_c &= \hat{F}S_{\Delta}^{-1}, \\ G_c &= -V^{-1}(-\hat{G}S_{\Delta}^{-1} + YG + YBF_c) \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que as matrizes  $U$  e  $V$  verificam  $VU' = I - YX$ , garantem que a região  $\mathcal{E}(P, \nu^{-1}) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n}; \zeta'P\zeta \leq \nu^{-1}\}$  com  $P = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \bullet \end{bmatrix}$  é um domínio de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada (3.6).

**Demonstração:** Defina uma função de Lyapunov candidata

$$V(t) = \zeta'(t)P\zeta(t) \quad (3.14)$$

com  $P = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \bullet \end{bmatrix}$  e  $P^{-1} = \begin{bmatrix} X & U \\ U' & \bullet \end{bmatrix}$  ([53]). Segue que

$$\dot{V}(t) = 2\zeta'(t)\mathbb{A}'P\zeta(t) - 2\Psi'(y_c(t))(\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c)'P\zeta(t) + 2\varphi'(z(t))(\mathbb{B}F_c + \mathbb{G} + \mathbb{R}E_c)'P\zeta(t) \quad (3.15)$$

Do Lema 3.1 e H1, contanto que  $\zeta(t) \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ , temos que:

$$\dot{V}(t) \leq \dot{V}(t) - 2\Psi(y_c(t))'T(\Psi(y_c(t)) - H_\zeta\zeta(t) - H_\varphi\varphi(z(t))) - 2\varphi(z(t))'\Delta(\varphi(z(t)) - \Omega\mathbb{L}\zeta(t)) \quad (3.16)$$

Reescrevendo esta expressão em forma matricial, segue que  $\dot{V}(\zeta(t)) \leq \eta(t)'\Gamma\eta(t)$  com  $\eta(t) = \begin{bmatrix} \zeta(t)' & \varphi(z(t))' & \Psi(y_c(t))' \end{bmatrix}'$  e

$$\Gamma = \begin{bmatrix} He\{\mathbb{A}'P\} & P(\mathbb{G} + \mathbb{R}G_c + \mathbb{B}F_c) + \mathbb{L}'\Omega\Delta & -P(\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c) + H_\zeta'T \\ \star & -2\Delta & H_\varphi'T \\ \star & \star & -2T \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Defina agora uma matriz  $\Pi = \begin{bmatrix} X & I \\ U' & 0 \end{bmatrix}$  [53]. Note que, da condição (3.11) segue que  $I - YX$  é não-singular. Isto significa que sempre é possível calcular matrizes quadradas e não-singulares  $V$  e  $U$  verificando a equação  $VU' = I - YX$ . Este fato assegura que  $\Pi$  é não-singular.

Pré e pós multiplicando (3.17) respectivamente por  $diag(\Pi', S'_\Delta, S')$  e  $diag(\Pi, S_\Delta, S)$ , com  $S_\Delta = \Delta^{-1}$  e  $S = T^{-1}$ , obtemos:

$$\begin{bmatrix} He\{\Pi'\mathbb{A}'P\Pi\} & \Pi'P(\mathbb{G} + \mathbb{R}G_c + \mathbb{B}F_c)S_\Delta + \Pi'\mathbb{L}'\Omega & -\Pi'P(\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c)S + \Pi'H'_\zeta \\ \star & -2S_\Delta & S_\Delta H'_\varphi \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.18)$$

Considerando a mudança das variáveis seguintes:

$$\begin{aligned}
\hat{D} &= D_c, \\
\hat{B} &= YBD_c + VB_c, \\
\hat{C} &= C_cU' + D_cCX, \\
\hat{A} &= YAX + YBD_cCX + VB_cCX + YBC_cU' + VA_cU', \\
\hat{E} &= -(YBS + VE_cS), \\
\hat{F} &= F_cS_\Delta, \\
\hat{G} &= YGS_\Delta + VG_cS_\Delta + YBF_cS_\Delta, \\
\hat{H}_\varphi &= H_\varphi S_\Delta \\
\hat{H}_{\zeta 1} &= H_{\zeta 1}X + H_{\zeta 2}U', \\
\hat{H}_{\zeta 2} &= H_{\zeta 1}
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\Pi'P\Pi &= \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}; \quad \Pi'P(\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c)S = \begin{bmatrix} BS \\ -\hat{E} \end{bmatrix}; \\
\Pi'P(\mathbb{G} + \mathbb{R}G_c + \mathbb{B}F_c)S_\Delta &= \begin{bmatrix} GS_\Delta + B\hat{F} \\ \hat{G} \end{bmatrix}; \quad \Pi'H'_\zeta = \begin{bmatrix} \hat{H}'_{\zeta 1} \\ \hat{H}'_{\zeta 2} \end{bmatrix}; \\
\Pi'P\mathbb{A}\Pi &= \begin{bmatrix} AX + B\hat{C} & A + B\hat{D}C \\ \hat{A} & YA + \hat{B}C \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Conseqüentemente, como  $\Pi$ ,  $S_\Delta$  e  $S$  são não-singulares, segue que se (3.10) é equivalente a  $\Gamma < 0$  (ver 3.17), então de (3.16), isto implica que  $\dot{V}(t) < 0$  com as matrizes  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$ ,  $D_c$ ,  $E_c$ ,  $F_c$  e  $G_c$  definidas em (3.13).

Considere agora  $\mathcal{E}(P, \nu^{-1})$ . Pré e pós multiplicando as inequações (3.11) respectivamente por  $\begin{bmatrix} (\Pi^{-1})' & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  e sua transposta, e desde que  $\mathbb{K}\Pi = [D_cCX + C_cU' \quad D_cC] = [\hat{C} \quad \hat{D}C]$ , segue que as condições (3.11) garantem que  $\mathcal{E}(P, \nu^{-1}) \subset \mathcal{S}_2$  [11]. Por meio de raciocínio semelhante, (3.12) implica que  $\mathcal{E}(P, \nu^{-1}) \subset \mathcal{S}_1$ , conforme capítulo anterior. Desta forma, se as relações (3.10), (3.11) e (3.12) são satisfeitas, obtemos efetivamente  $\dot{V}(t) < 0$ ,  $\forall \zeta \in \mathcal{E}(P, \nu^{-1})$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

Seguindo argumentação apresentada no capítulo anterior, subseção 2.3.4, pode-se redefinir o conjunto poliedral  $\mathcal{S}_2$  como

$$\mathcal{S}_2 \triangleq \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n}; |(\mathbb{K} - H_\zeta)\zeta| \leq v_{0(i)}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (3.20)$$

o que corresponde à escolha de  $w = H_\zeta\zeta + F_c\varphi$  ao invés de  $w = H_\zeta\zeta + H_\varphi\varphi$  em (3.8). Assim sendo, pode-se enunciar um resultado similar ao Lema 3.1:

**Lema 3.2** *Se  $\zeta \in \mathcal{S}_2$  então a relação*

$$\Psi(y_c)'T(\Psi(y_c) - H_\zeta\zeta - F_c\varphi(z)) \leq 0 \quad (3.21)$$

*é verificada para qualquer matriz  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  definida positiva e diagonal.*

Podemos enunciar um resultado similar ao Teorema 3.1 para abordar a estabilização local, como segue:

**Teorema 3.2** *Considere que existem matrizes simétricas definidas positivas  $(X, Y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes diagonais definidas positivas  $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $S_\Delta \in \mathbb{R}^{q \times q}$ , matrizes  $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $(\hat{C}, \hat{H}_{\zeta 1}, \hat{H}_{\zeta 2}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\hat{F} \in \mathbb{R}^{m \times q}$ ,  $\hat{D} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $\hat{G} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ , e um escalar  $\nu > 0$  de tal forma que as seguintes desigualdades matriciais lineares são verificadas, conjuntamente com (3.12) caso  $\varphi(z)$  seja localmente verificada:*

$$\begin{bmatrix} He\{AX + B\hat{C}\} & A + \hat{A}' + B\hat{D}C & GS_\Delta + B\hat{F} + XL'\Omega & -BS + \hat{H}'_{\zeta 1} \\ * & He\{YA + \hat{B}C\} & \hat{G} + L'\Omega & \hat{E} + \hat{H}'_{\zeta 2} \\ * & * & -2S_\Delta & \hat{F}' \\ * & * & * & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} X & * & * \\ I & Y & * \\ \hat{C}_{(i)} - \hat{H}_{\zeta 1(i)} & \hat{D}_{(i)}C - \hat{H}_{\zeta 2(i)} & \nu \rho_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.23)$$

*Então o controlador dinâmico (3.5), com as suas matrizes definidas em (3.13) em que as matrizes  $U$  e  $V$  verificam  $VU' = I - YX$ , garante que a região  $\mathcal{E}(P, \nu^{-1}) = \{\zeta \in$*

$\mathfrak{R}^{2n}; \zeta' P \zeta \leq \nu^{-1}$  com  $P = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \bullet \end{bmatrix}$  é um domínio de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada (3.6).

### 3.3.2 Estabilização Global

Neste caso, nós consideramos que o conjunto  $\mathcal{S}_1 = \mathfrak{R}^q$  e que a matriz malha aberta  $A$  é Hurwitz.

**Corolário 3.1** *Se existem matrizes simétricas definidas positivas  $(X, Y) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , matrizes diagonais definidas positivas  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $S_\Delta \in \mathfrak{R}^{q \times q}$  e matrizes  $\hat{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\hat{B} \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ ,  $(\hat{C}, \hat{H}_{\zeta_1}, \hat{H}_{\zeta_2}) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $(\hat{H}_\varphi, \hat{F}) \in \mathfrak{R}^{m \times q}$ ,  $\hat{D} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  e  $\hat{G} \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ , tal que as desigualdades matriciais lineares seguintes são verificadas:*

$$\begin{bmatrix} He\{AX + B\hat{C}\} & A + \hat{A}' + B\hat{D}C & GS_\Delta + B\hat{F} + XL'\Omega & -BS + \hat{C}' \\ * & He\{YA + \hat{B}C\} & \hat{G} + L'\Omega & \hat{E} + C'\hat{D} \\ * & * & -2S_\Delta & \hat{F}' \\ * & * & * & -2S \end{bmatrix} < 0, \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (3.25)$$

então o controlador dinâmico (3.5) com as matrizes definidas como em (3.13), em que as matrizes  $U$  e  $V$  verificam  $VU' = I - YX$ , assegura a estabilidade assintótica global da origem do sistema de malha fechada (3.6) com  $\mathcal{S}_1 = \mathfrak{R}^q$ .

**Demonstração:** Considere  $H_\zeta = \mathbb{K}$  e  $H_\varphi = F_c$ . Segue que a condição de setor  $\Psi(y_c(t))'T(\Psi(y_c(t)) - \mathbb{K}\zeta(t) - F_c\varphi(z(t))) \leq 0$  é verificada para todo  $\zeta(t) \in \mathfrak{R}^{2n}$  e  $\forall \varphi(z(t)) \in \mathfrak{R}^q$ . Neste caso, observamos que (3.24) corresponde a (3.10), o que assegura a estabilidade assintótica global.

## 3.4 Problema de otimização

Nesta seção os problemas de otimização serão formulados com base nas condições de estabilização local estabelecidas no Teorema 3.2, as quais são menos conservadoras que as condições dadas no Teorema 3.1.

### 3.4.1 Síntese via programação convexa

Um objetivo implícito na síntese do controlador (3.5) pode ser a maximização de estimativas da região de atração associado ao sistema de malha fechada. Em outras palavras, nós queremos computar (3.5) tal que a região associada de estabilidade assintótica é tão grande quanto possível considerando algum critério de tamanho. De forma similar ao capítulo anterior, isto pode ser obtido se levamos em conta um conjunto  $\Xi_0$  com uma determinada forma e um fator escalar  $\beta$ . Esta forma fixada pode ser definida facilmente como um conjunto poliedral descrito pelo envelope convexo de seus vértices:

$$\Xi_0 \triangleq \text{Co}\{v_1, v_2, \dots, v_{n_r}\}, \quad v_r \in \mathfrak{R}^{2n}, \quad r = 1, \dots, n_r$$

Conseqüentemente, recordando o Teorema 3.2, buscamos determinar as matrizes  $X, Y, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}, \hat{F}, \hat{G}, \hat{H}_{\zeta_1}, \hat{H}_{\zeta_2}$  e  $\hat{H}_\varphi$  para obter  $\beta \Xi_0 \subset \mathcal{E}(P, \nu^{-1})$  com  $\beta$  tão grande quanto possível.

Os vetores  $v_r$  podem ser vistos então como direções nas quais pretendemos maximizar a região de atração. Sabendo-se que  $\beta v_r \in \mathcal{E}(P, \nu^{-1})$  é equivalente a

$$\beta v_r' P v_r \beta \leq \nu^{-1} \quad (3.26)$$

e considerando  $\mu = 1/\beta^2$ , tem-se que a maximização do elipsóide  $\mathcal{E}(P, \nu^{-1})$  ao longo das direções  $v_r$  é equivalente à minimização de  $\mu$ . Conseqüentemente, para um determinado valor  $\nu > 0$ ,  $\mathcal{E}(P, \nu^{-1})$ , pode ser maximizado ao longo das direções dadas por vetores genéricos  $v_r = \begin{bmatrix} v_{r1}' & v_{r2}' \end{bmatrix}'$  em que  $v_{r1} \in \mathfrak{R}^n$  e  $v_{r2} \in \mathfrak{R}^n$ , resolvendo o problema de otimização convexo seguinte:

$$\begin{aligned} & \min_{v, X, Y, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}, \hat{F}, \hat{G}, \hat{H}_{\zeta_1}, \hat{H}_{\zeta_2}, \hat{H}_\varphi} \mu \\ & \text{sujeito à} \\ & \left[ \begin{array}{ccc} \nu^{-1} \mu & v_{r1}' & v_{r1}' Y + v_{r2}' V' \\ v_{r1} & X & I_n \\ Y v_{r1} + V v_{r2} & I_n & Y \end{array} \right] > 0 \quad r = 1, \dots, n_r \end{aligned} \quad (3.27)$$

(3.22) e (3.23),

em que  $X$  e  $Y$  são matrizes que verificam as condições do Teorema 3.1.



Para provarmos (3.27), basta aplicar o complemento de Schur em (3.26) e, na seqüência, pré e pós multiplicar a inequação matricial obtida respectivamente por  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & Y & V \end{bmatrix}$  e  $F'$ .

Note que a matriz  $V$  aparece explicitamente em (3.27). Neste caso, uma vez que  $V$  é obtida, deveria ser verificado *a posteriori* se realmente é inversível. Alternativamente, uma restrição do tipo  $V + V' > 0$  (ou  $< 0$ ) pode ser incorporada ao problema de otimização para assegurar que  $V$  não será singular.

Por outro lado, na prática, estamos interessados em maximizar a região de estabilidade nas direções associadas aos estados da planta. Neste caso os vetores  $v_r$  assumem a forma  $\begin{bmatrix} v'_{r1} & 0 \end{bmatrix}'$  e (3.26) pode ser substituída pela restrição:

$$v'_{r1} Y v_{r1} \leq \nu^{-1} \mu, \quad r = 1, \dots, n_r \quad (3.28)$$

### 3.5 Melhoria do desempenho

Seja agora  $\Phi$  um conjunto no espaço de estados, para o qual queremos garantir que  $\forall \zeta(0) \in \Phi, \zeta(t) \rightarrow 0$  com  $t \rightarrow \infty$ . Entre os possíveis controladores que asseguram isto, estamos interessados em melhorar o desempenho do sistema de malha fechada.

Uma medida de desempenho é determinada pelo critério quadrático seguinte a partir do estado da planta:  $\mathcal{J} = \int_0^\infty x(t)' Q x(t) dt$  em que  $Q = Q' \geq 0, Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ .

Deseja-se assegurar que

$$\dot{V} + \frac{1}{\gamma} \zeta' \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \zeta < 0, \quad (3.29)$$

ou seja,  $\dot{V}(x) + \frac{1}{\gamma} x' Q x < 0$ . Assim, integrando ambos os termos

$$\int_0^\infty \dot{V}(x) dt + \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty x(t)' Q x(t) dt < 0$$

$$V(x(\infty)) - V(x(0)) + \frac{1}{\gamma} \mathcal{J} < 0$$

e, na seqüência,  $\mathcal{J} < \gamma V(0) < \gamma \nu^{-1}, \forall \zeta(0) \in \mathcal{E}(P, \nu^{-1})$ .

Assim, (3.29) é satisfeito se, para  $\gamma = \frac{1}{\eta}$ :

$$\left[ \begin{array}{ccccc} He\{AX + B\hat{C}\} & A + \hat{A}' + B\hat{D}C & X'(Q^{1/2})' & GS_{\Delta} + B\hat{F} + XL'\Omega & -BS + \hat{H}'_{\zeta_1} \\ * & He\{YA + \hat{B}C\} & (Q^{1/2})' & \hat{G} + L'\Omega & \hat{E} + \hat{H}'_{\zeta_2} \\ * & * & -\frac{1}{\eta}I & 0 & 0 \\ * & * & * & -2S_{\Delta} & \hat{F}' \\ * & * & * & * & -2S \end{array} \right] < 0 \quad (3.30)$$

Outro critério de desempenho é a maximização da convergência exponencial das trajetórias. Observe que se nós asseguramos que

$$\dot{V} + \eta\zeta'P\zeta < 0 \quad (3.31)$$

segue que  $V(t) < e^{-\eta t}V(0)$ ,  $\forall \zeta(0) \in \mathcal{E}(P, \nu^{-1})$ . Isto garante convergência exponencial das trajetórias à origem com uma taxa dada por  $\eta$ . A relação (3.31) é satisfeita se

$$\left[ \begin{array}{ccccc} He\{AX + B\hat{C}\} + \eta X & A + \hat{A}' + B\hat{D}C + \eta I & GS_{\Delta} + B\hat{F} + XL'\Omega & -BS + \hat{H}'_{\zeta_1} \\ * & He\{YA + \hat{B}C\} + \eta Y & \hat{G} + L'\Omega & \hat{E} + \hat{H}'_{\zeta_2} \\ * & * & -2S_{\Delta} & \hat{F}' \\ * & * & * & -2S \end{array} \right] < 0 \quad (3.32)$$

Percebemos que, neste caso, (3.32) assegura que todos os autovalores da matriz  $\mathbb{A}$  tenham parte real menor que  $-\eta$ .

O problema de otimização convexo a seguir pode ser formulado para levar em conta o desempenho desejável quanto a convergência exponencial das trajetórias com uma região garantida de estabilidade:

$$\begin{array}{c} \max \eta \\ \text{sujeito à} \\ \left[ \begin{array}{ccc} \nu^{-1} & v'_{r1} & v'_{r1}Y + v'_{r2}V' \\ v_{r1} & X & I_n \\ Yv_{r1} + Vv_{r2} & I_n & Y \end{array} \right] > 0 \quad r = 1, \dots, n_r \end{array} \quad (3.33)$$

(3.12) e (3.30) (ou (3.32))

Assim, no caso em que o objetivo é a maximização da convergência exponencial das trajetórias usando (3.32), o problema (3.33) pode ser resolvido eficazmente como um GEVP [6].

**Observação 3.1** *A condição (3.32) também pode ser empregada para adaptar o problema de otimização convexo (3.27) com o objetivo de maximizar o tamanho de  $\mathcal{E}(P, \nu^{-1})$  ou  $\mathcal{E}(Y, \nu^{-1})$  enquanto garante um grau pré-especificado de convergência exponencial dentro deste. Para tanto, basta substituir a condição (3.10) por (3.32), com um valor fixo  $\mu > 0$ .*

## 3.6 Análise de estabilidade absoluta

A partir da demonstração do Teorema 3.2 (ou do Teorema 3.1) é possível obter condições para a análise de estabilidade assintótica local para um compensador dinâmico (3.5) conhecido *a priori*.

**Teorema 3.3** *Considere a existência de uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , de matrizes diagonais definidas positivas  $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $S_\Delta \in \mathbb{R}^{q \times q}$  e de matrizes  $Z_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $Z_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$ , tais que as seguintes desigualdades matriciais lineares são verificadas:*

$$\begin{bmatrix} WA' + AW & (\mathbb{G} + \mathbb{R}G_c + \mathbb{B}F_c)S_\Delta + WL'\Omega & -(\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c)S + Z_1' \\ \star & -2S_\Delta & Z_2' \\ \star & \star & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ \mathbb{K}_{(i)}W - Z_{1(i)} & \rho_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.35)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ \mathbb{L}_i W & v_i^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, q. \quad (3.36)$$

Então, o elipsóide  $\mathcal{E}(P, \nu^{-1}) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n}; \zeta' P \zeta \leq \nu^{-1}\}$ , com  $P = W^{-1}$  é uma região de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada (3.6), para qualquer não-linearidade  $\varphi(z)$  satisfazendo à relação (3.2).

### 3.7 Exemplo numérico

Considere os seguintes dados para o sistema linear (3.1):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega = 1.4 \text{ e } \rho_0 = 5.$$

Desde que  $A$  não é Hurwitz, somente a estabilização local (regional) é possível. Primeiro resolvemos o problema convexo (3.27), com  $\mu = 1$  (veja observação 3.1), e

com  $\Xi_0 = \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ <sup>1</sup>. Para  $\nu = 10$ , a Tabela 3.1 mostra o fator escalar

obtido de  $\Xi_0$  e a área de  $\mathcal{E}(Y, \nu^{-1})$  (dada por  $\pi \sqrt{\det((\nu Y)^{-1})}$ ), considerando que a não-linearidade  $\varphi(\cdot)$  é localmente verificada e a condição de setor globalmente ou localmente verificada.  $\mathcal{E}(Y, \nu^{-1})$  corresponde à interseção de  $\mathcal{E}(P, \nu^{-1})$  com o hiperplano definido por meio de estados da planta, isto é,  $\zeta' = [x' \ 0]$ . Como esperado, o domínio maior de estabilidade é obtido quando a condição de setor é globalmente verificada. A Figura 3.1 mostra os conjuntos elipsoidais  $\mathcal{E}(Y, \nu^{-1})$  obtidos de  $\nu = 10$ , para a condição de setor globalmente e localmente verificada. Os parâmetros do compensador dinâmico obtidos estão relacionados na Tabela 3.2.

$\nu$	Condição de Setor $z \in \mathfrak{R}^p$		Condição de Setor $z \in S_1 \subseteq \mathfrak{R}^q$	
	$\beta$	Área	$\beta$	Área
10	4.7031	75.1680	1.7245	17.4527

Tabela 3.1: Determinação do valor de  $\beta$  para valores de  $\nu = 10$

A simulação quando a condição de setor é globalmente verificada para  $\nu = 10$  e o ponto  $x_0 = [3.6887 \ 4.0482]'$  conforme Figura 3.1, está representado na Figura 3.2. Nesta Figura encontramos a representação dos estados e da saturação.

A representação da simulação para a condição de setor localmente verificada está

<sup>1</sup>Uma restrição adicional na parte real dos pólos em malha fechada,  $-10 \leq \Re(\lambda(\mathbb{A})) \leq -1$ , é considerada para garantir o bom condicionamento da solução para o presente exemplo numérico.

	Condição de Setor $z \in \mathbb{R}^p$		Condição de Setor $z \in S_1 \subseteq \mathbb{R}^q$	
$A_c$	-2.3726	87.9030	1.3560	1.2266
	-0.0115	-5.5953	-5.3656	-3.9224
	$\times 10^3$		$\times 10^3$	
$B_c$		-0.0106		-0.0418
		-0.0046		0.1647
$C_c$	0.0808	4.0142	4.1797	2.91512
	$\times 10^4$		$\times 10^4$	
$D_c$	-3.9246		-3.4238	
$E_c$		0.0042		0.0409
		0.0020		-0.0262
$F_c$	-0.2191		-0.4591	
$G_c$		0.0032		-0.1863
		0.0000		0.3709
			$\times 10^{-4}$	

Tabela 3.2: Resultados numéricos para condições de setor globalmente e localmente verificada

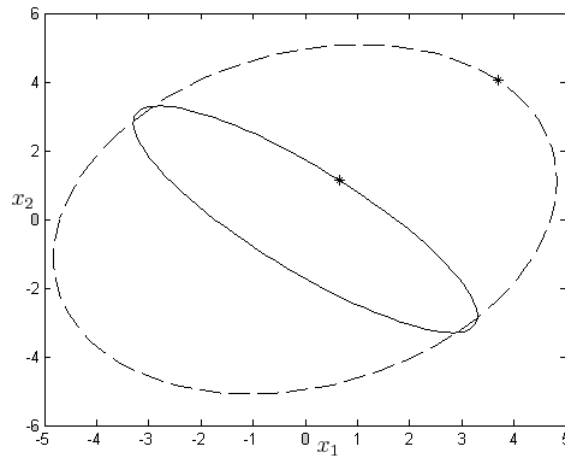


Figura 3.1:  $\mathcal{E}(Y, 10)$  para a condição de setor globalmente (- -) e localmente verificada (-)

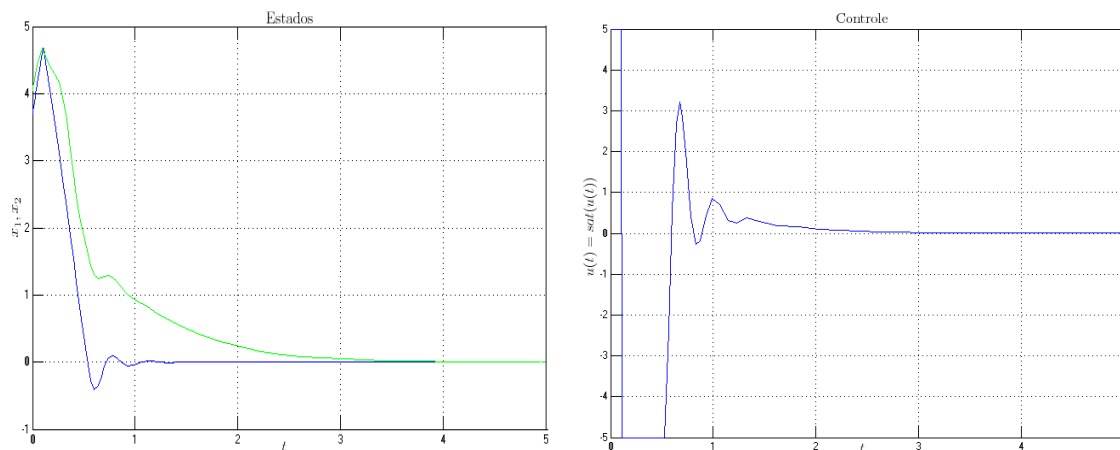


Figura 3.2: Simulações para condições de setor globalmente verificada com  $\nu = 10$

representada na Figura 3.3, na qual foram utilizados os dados  $\nu = 10$  e o ponto  $x_0 = [0.5844 \ 1.2670]'$  que está assinalado na Figura 3.1.

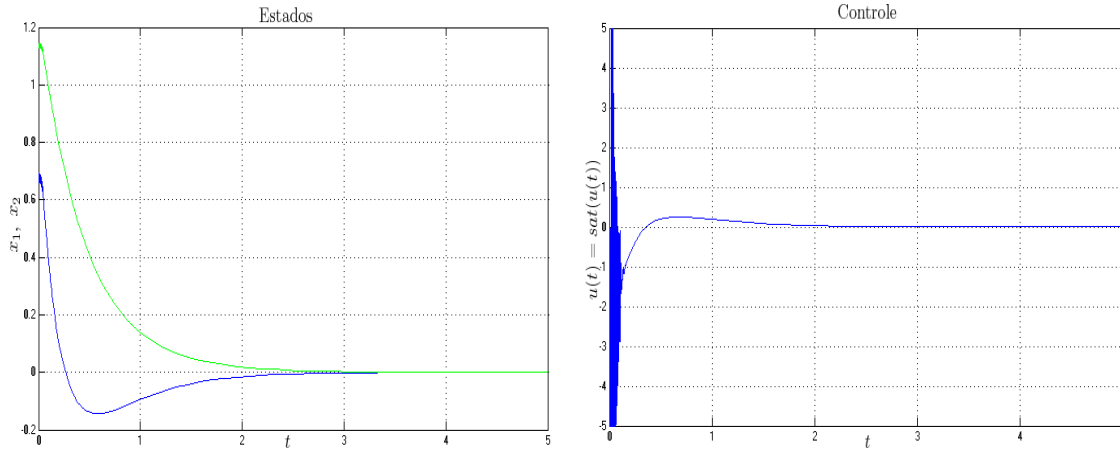


Figura 3.3: Simulações para condições de setor localmente verificada com  $\nu = 10$

Na Figura 3.4 temos a representação das elipses, referente à síntese e análise, com a condição de setor globalmente verificada.

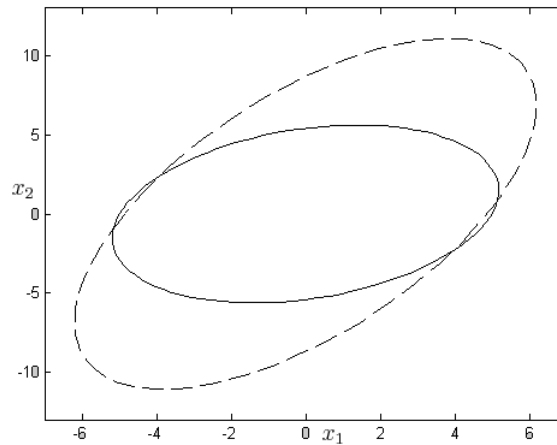


Figura 3.4: Síntese (—) e análise (---), para condição de setor globalmente verificada

Vamos considerar agora, para  $\nu = 1$ , a minimização do limite superior  $\gamma = \gamma\nu^{-1}$  para o critério quadrático  $\mathcal{J}$ , com  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , resolvendo o problema de otimização

convexa (3.33). Neste caso, consideramos  $\Xi_0 = \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} \kappa \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ , em que  $\kappa > 0$  pode

assumir valores diferentes. As tabelas 3.3 e 3.4 mostram os resultados obtidos quando  $\varphi(\cdot)$  é localmente e globalmente verificada, respectivamente. Comparando as duas tabelas, constatamos resultados melhores quando a condição de setor  $\varphi(\cdot)$  é verificada globalmente,

desde que desempenhos garantidos menores sejam obtidos para um valor crescente de  $\kappa$ , conforme Tabela 3.4. Agora, em cada tabela pode ser percebida uma conexão entre o tamanho da região garantida de estabilidade e o limite superior para  $\mathcal{J}$ . De fato, o aumento de  $\kappa$ , em consequência a área obtida  $\mathcal{E}(Y, \nu^{-1})$ , tem o seu limitante inferior como sendo o limite superior obtido para  $\mathcal{J}$ . As tabelas mostram também o valor de  $\sqrt{\det(\nu P)^{-1}}$ , o qual é proporcional ao volume da região de estabilidade inteira  $\mathcal{E}(P, \nu^{-1})$ .

$\kappa$	$\gamma$	Area	$\sqrt{\det(\nu P)^{-1}}$
1	10.5736	3.2709	0.0250
1.5	1.1771	7.6826	0.0013
1.73	0.0251	17.7135	$2.8216 \times 10^{-5}$
1.74	-	-	-

Tabela 3.3: Desempenho quadrático garantido com  $\nu = 1$  e para  $\varphi$  localmente verificada

$\kappa$	$\gamma$	Area	$\sqrt{\det(\nu P)^{-1}}$
1	15.4268	3.4257	0.1576
3	0.2705	30.7833	0.0501
4.99	$1.5739 \times 10^{-4}$	85.3101	0.0018
5	-	-	-

Tabela 3.4: Desempenho quadrático garantido com  $\nu = 1$  e para  $\varphi$  globalmente verificada

A Tabela 3.5 mostra, para  $\kappa = 1$  e  $\nu = 1$ , os parâmetros do controlador quando  $\varphi$  é localmente ou globalmente verificada.

	$\varphi \in \mathcal{S}_1$ , com $\nu = 1.8$	$\varphi \in \mathbb{R}^p$
$A_c$	$\begin{bmatrix} 14.1 & 1361.4 \\ -2.2 & -19.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5206 & 920.2466 \\ 0.1237 & -2.8549 \end{bmatrix}$
$B_c$	$\begin{bmatrix} -4.6322 \\ -3.9501 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -6.0370 \\ -5.0900 \end{bmatrix}$
$C_c$	$\begin{bmatrix} 30.1 & 2045.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.9 & 1245 \end{bmatrix}$
$D_c$	-6.8804	-7.8604
$E_c$	$\begin{bmatrix} 2.2489 \\ 3.1999 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.5973 \\ 18.0048 \end{bmatrix}$
$F_c$	-0.3477	-0.0648
$G_c$	$\begin{bmatrix} 0.4335 \\ -0.0058 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.8169 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$

Tabela 3.5: Parâmetros de controladores para  $\kappa = 1$

## 3.8 Conclusão

Os resultados obtidos para o problema de estabilização de sistemas não-lineares tipo Lur'e sujeito à saturação na entrada, foram a proposição de condições LMIs permitindo computar um controle dinâmico não-linear que tem como entrada a saída da planta e a não-linearidade dinâmica. Destas condições de LMI, propomos problemas de otimização convexos para computar o controlador visando a maximização de uma região de estabilidade local para o sistema em malha fechada, determinada por um domínio elipsoidal incluso na região de atração do sistema. Outro item abordado foi a melhoria do desempenho do sistema de malha fechada, o qual determinou uma região pré-especificada de estabilidade. Problemas de controle similares aos desenvolvidos neste capítulo são encontrados em [37], onde os autores consideram uma não-linearidade limitada de setor (com comportamento de zona-morta) associada a dinâmica da planta ou uma não-linearidade estática de saturação. Nestes casos, os resultados obtidos utilizam a condição clássica de setor e, portanto, a condição de estabilização obtida é sob a forma de BMIs.



# Capítulo 4

## Controle sob saturação de sistemas a parâmetros variantes

### 4.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se resultados sobre a utilização de duas leis diferentes de controle para determinar a estabilização de uma classe de sistemas não-lineares incertos discretos no tempo com atuadores saturantes [8, 13]. A primeira lei de controle é dependente de parâmetros e a segunda lei de controle é a ganhos fixos.

O sistema não-linear em tempo discreto com incertezas variantes no tempo a ser considerado é:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A(\xi_k)x_k + G(\xi_k)\varphi(z_k) + B(\xi_k)\text{sat}(u_k) \\z_k &= L(\xi_k)x_k\end{aligned}\tag{4.1}$$

em que  $x_k \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u_k \in \mathfrak{R}^m$ ,  $z_k \in \mathfrak{R}^p$ ,  $\varphi(\cdot) : \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}^p$  e  $\xi_k \in \mathfrak{R}^N$  é um vetor de parâmetros, variante no tempo e limitado no simplex unitário:

$$\Upsilon = \{\xi_k \in \mathfrak{R}^N; \sum_{i=1}^N \xi_{k(i)} = 1, \xi_{k(i)} \geq 0, i = 1, \dots, N\}.\tag{4.2}$$

As estruturas das matrizes do sistema são assumidas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A(\xi_k) & B(\xi_k) & G(\xi_k) & L'(\xi_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \xi_{k(i)} \begin{bmatrix} A_i & B_i & G_i & L'_i \end{bmatrix}.\tag{4.3}$$

A não-linearidade  $\varphi$  satisfaz à condição de setor (2.2), repetida a seguir:

$$\varphi'(z(t))\Delta[\varphi(z(t)) - \Omega z(t)] \leq 0, \quad \forall z \in \mathfrak{R}^p, \quad \varphi(0) = 0 \quad (4.4)$$

Trataremos e discutiremos dois problemas de estabilização, sob a hipótese de que se tenha acesso às variáveis de estado do sistema e à não-linearidade  $\varphi(\cdot)$ .

1. *No caso em que o vetor  $\xi_k$  é mensurável em tempo real, considera-se a lei de controle dependente de parâmetro sob a forma:*

$$u_k = K(\xi_k)x_k + \Gamma(\xi_k)\varphi(z_k) \quad (4.5)$$

com

$$\begin{bmatrix} K(\xi_k) & \Gamma(\xi_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \xi_{k(i)} \begin{bmatrix} K_i & \Gamma_i \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

na qual  $K(\xi_k)$  é uma matriz de realimentação de estado, com  $K_i \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , e  $\Gamma(\xi_k)$  é uma realimentação associada à não-linearidade  $\varphi(\cdot)$ , com  $\Gamma_i \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ .

2. *No caso em que o vetor  $\xi_k$  não está acessível, considera-se a lei de controle de realimentação a ganhos fixos descrita no Capítulo 2, ou seja,*

$$u(t) = Kx(t) + \Gamma\varphi(z(t)) \quad (4.7)$$

em que  $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $\Gamma \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ .

Com  $\Gamma(\xi_k) \neq 0$  ou  $\Gamma \neq 0$  requer-se o conhecimento da não-linearidade  $\varphi(\cdot)$  ou a disponibilidade do sinal [4]. Caso isto não seja possível pode-se empregar uma realimentação de estados dependente de parâmetros,  $u_k = K(\xi_k)x_k$ , ou a parâmetros fixos,  $u_k = Kx_k$ , para cada um dos casos anteriores.

## 4.2 Estabilização com lei de controle dependente de parâmetros

Para o sistema não-linear (4.1, 4.3) e a lei de controle dependente de parâmetros (4.5) tem-se o sistema em malha fechada

$$x_{k+1} = A(\xi_k)x_k + G(\xi_k)\varphi(z_k) + B(\xi_k)\text{sat}(K(\xi_k)x + \Gamma(\xi_k)\varphi(z_k)). \quad (4.8)$$

O problema de estabilização robusta é

**Problema 4.1** (Estabilização com controle dependente de parâmetros sob atuador saturante)

*Determine as matrizes de ganho de realimentação  $K_i$  e  $\Gamma_i$  que formam a lei de controle dependente de parâmetro (4.5) e (4.6), e uma região  $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathfrak{R}^n$ , tão grande quanto possível, de tal forma que a origem do sistema em malha fechada (4.8) é assintoticamente estável para qualquer condição inicial  $x_0 \in \mathcal{S}_0$  e para qualquer  $\varphi(\cdot)$  verificando a condição de setor (4.4).*

O sistema (4.8) pode ser reescrito na forma

$$x_{k+1} = A_{cl}(\xi_k)x_k + G_{cl}(\xi_k)\varphi(z_k) - B(\xi_k)\Psi(u_k) \quad (4.9)$$

na qual:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\xi_k) & G_{cl}(\xi_k) & B(\xi_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \xi_{k(i)} \begin{bmatrix} A_i + B_i \sum_{j=1}^N \xi_{k(j)} K_j & G_i + B_i \sum_{j=1}^N \xi_{k(j)} \Gamma_j & B_i \end{bmatrix}.$$

Seja o conjunto poliedral:

$$S(\rho) = \{u_k \in \mathfrak{R}^m, w_k \in \mathfrak{R}^m; -\rho \leq u_k - w_k \leq \rho\} \quad (4.10)$$

e a não-linearidade genérica de tipo zona-morta, dada por

$$\Psi(u_k) = u_k - \text{sat}(u_k). \quad (4.11)$$

O Lema na seqüência permite considerar a zona-morta como uma não-linearidade que satisfaz a uma condição de setor modificada [23].

**Lema 4.1** *Se  $u_k$  e  $w_k$  são elementos de  $S(\rho)$ , então a não-linearidade  $\Psi(u_k)$  satisfaz à seguinte desigualdade*

$$\Psi(u_k)'T(\xi_k)(\Psi(u_k) - w_k) \leq 0 \quad (4.12)$$

para qualquer matriz diagonal e positiva  $T(\cdot)$  de dimensão  $m \times m$ .

**Demonstração:** Segue as mesmas linhas de [56] e [47].  $\square$

Para obter condições de estabilização sob a forma de LMIs, nós consideramos o conjunto poliedral (4.10), o Lema 4.1,  $u_k$  dado por (4.5) e o vetor,  $w_k$ , será estruturado como:

$$w_k = E_1(\xi_k)x_k + E_2(\xi_k)\varphi(z_k) \quad (4.13)$$

com

$$\begin{bmatrix} E_1(\xi_k) & E_2(\xi_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \xi_{k(i)} \begin{bmatrix} E_{1i} & E_{2i} \end{bmatrix}, \quad E_1 \in \mathfrak{R}^{m \times n} \text{ e } E_2 \in \mathfrak{R}^{m \times p}. \quad (4.14)$$

Considere também uma Função de Lyapunov Dependente de Parâmetros (FLDP),  $V(x_k, \xi_k) : \mathfrak{R}^n \times \Upsilon \longrightarrow \mathfrak{R}^+$ , e o Conjunto de tipo Lyapunov (CL) associado a  $V(x_k, \xi_k)$  dado por

$$L_V \triangleq \{x_k \in \mathfrak{R}^n; V(x_k, \xi_k) \leq 1, \forall \xi_k \in \Upsilon\} \quad (4.15)$$

A noção de conjunto contrativo é básica para determinar regiões de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada (4.9) [44]. A definição seguinte de  $\lambda$ -contratividade é adaptada para considerar incertezas nos parâmetros e a caracterização da não-linearidade de setor limitado  $\varphi(\cdot)$ .

**Definição 4.1** *Seja  $\lambda \in (0, 1]$ . O CL,  $L_V$ , é robustamente absolutamente  $\lambda$ -contrativo (com respeito às trajetórias do sistema (4.9)), se*

$$\begin{aligned} \Delta V(x, \xi) &\triangleq V(x_{k+1}, \xi_{k+1}) - \lambda V(x_k, \xi_k) < 0 \\ &\forall x_k \in L_V, \forall \xi_k \in \Upsilon \quad \text{e} \quad \forall \varphi(\cdot) \in [0, \Omega] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Observe que se  $L_V$  satisfaz à Definição 4.1, então  $V(x_k, \xi_k) < \lambda V(x_{k-1}, \xi_{k-1}) < \dots < \lambda^k V(x_0, \xi_0) \leq 1$ . Assim, a cada instante de tempo  $k > 0$ , a trajetória do sistema converge assintoticamente para a origem, isto é,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0, \forall x_0 \in L_V$ .

Na seqüência tomemos a FLDP na forma [30, 34]:

$$V(x_k, \xi_k) = x'_k Q^{-1}(\xi_k) x_k, \quad (4.17)$$

em que  $Q(\xi_k) = \sum_{i=1}^N \xi_{k(i)} Q_i$ ,  $Q_i = Q'_i > 0$ .

**Lema 4.2** *Considere os conjuntos elipsoidais:*

$$\mathcal{E}(Q_i^{-1}) = \{x \in \mathfrak{R}^n; x' Q_i^{-1} x \leq 1\}, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (4.18)$$

Então, o CL obtido de (4.15) e (4.17) é a interseção dos conjuntos elipsoidais (4.18):

$$\mathcal{E}(Q^{-1}(\xi_k)) \triangleq \bigcap_{\xi_k \in \Upsilon} \{\mathcal{E}(Q^{-1}(\xi_k))\} = \bigcap_{i \in \{1, \dots, N\}} \mathcal{E}(Q_i^{-1})$$

**Demonstração:** [34]:

$$x \in L_V \Leftrightarrow \forall \xi_k \in \Upsilon, \quad V(x_k, \xi_k) < 1 \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\xi_k \in \Upsilon} \{\mathcal{E}(Q^{-1}(\xi_k))\}$$

Além disso, necessariamente,  $\bigcap_{\xi_k \in \Upsilon} \{\mathcal{E}(Q^{-1}(\xi_k))\} \subset \bigcap_{i \in \{1, \dots, N\}} \mathcal{E}(Q_i^{-1})$ . Por outro lado, para provar que  $\bigcap_{i \in \{1, \dots, N\}} \mathcal{E}(Q_i^{-1}) \subset \bigcap_{\xi_k \in \Upsilon} \{\mathcal{E}(Q^{-1}(\xi_k))\}$ , considere  $x \in \bigcap_{i \in \{1, \dots, N\}} \mathcal{E}(Q_i^{-1})$ , então  $\forall i = 1, \dots, N$ ,  $x' Q_i^{-1} x < 1$ , o qual, pelo complemento de Schur, é equivalente a  $\begin{bmatrix} 1 & x' \\ x & Q_i \end{bmatrix} > 0$ . Assim,  $\forall \xi_k \in \Upsilon$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & x' \\ x & Q(\xi_k) \end{bmatrix} > 0$ . Isto implica que  $x \in \mathcal{E}(Q^{-1}(\xi_k))$ ,  $\forall \xi_k \in \Upsilon$ , ou  $x \in \bigcap_{\xi_k \in \Upsilon} \mathcal{E}(Q^{-1}(\xi_k))$ .  $\square$

Observamos, a partir do Lema 4.2, que o conjunto  $L_V$  considerado é independente do parâmetro variante no tempo  $\xi_k$ , o que permite analisar a contratividade de forma robusta  $\forall \xi_k \in \Upsilon$ .

### 4.2.1 Estabilização robusta

Visando ao projeto de matrizes de realimentação  $K_i$  e  $\Gamma_i$ , temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.1** *Dado  $\lambda \in (0, 1]$ , considere que existem matrizes definidas positivas  $Q_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , matrizes diagonais positivas  $S_i \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e  $S_\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ , e matrizes  $Z_{1i} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,*

$Z_{2i} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ ,  $U \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $Y_{1i} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $Y_{2i} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  que verificam:

$$\mathcal{M}_{ji}^+ = \begin{bmatrix} -Q_j & A_i U + B_i Y_{1i} & G_i S_\Delta + B_i Y_{2i} & -B_i S_i \\ \star & \lambda(Q_i - U - U') & U' L'_i \Omega & Z'_{1i} \\ \star & \star & -2S_\Delta & Z'_{2i} \\ \star & \star & \star & -2S_i \end{bmatrix} < 0$$

$\forall j = 1, \dots, N$  e  $\forall i = 1, \dots, N$

(4.19)

$$\mathcal{M}_{jiq}^+ = \begin{bmatrix} -2Q_j & \mathbf{M}_{1iq} & \mathbf{M}_{2iq} & -(B_i S'_q + B_q S'_i) \\ \star & \lambda(Q_i + Q_q - 2U - 2U') & U'(L'_i + L'_q)\Omega & Z'_{1i} + Z'_{1q} \\ \star & \star & -2S_\Delta & Z'_{2i} + Z'_{2q} \\ \star & \star & \star & -2(S_i + S_q) \end{bmatrix} < 0$$

$\forall j = 1, \dots, N$ ,  $\forall i = 1, \dots, N-1$  e  $\forall q = i+1, \dots, N$

(4.20)

$$\begin{bmatrix} -Q_i + U + U' & -U' L'_i \Omega & Y'_{1i(\ell)} - Z'_{1i(\ell)} \\ \star & 2S_\Delta & Y'_{2i(\ell)} - Z'_{2i(\ell)} \\ \star & \star & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \text{ e } \forall \ell = 1, \dots, m$$
(4.21)

nas quais:  $\mathbf{M}_{1iq} = (A_i + A_q)U + B_i Y_{1q} + B_q Y_{1i}$  e  $\mathbf{M}_{2iq} = (G_i + G_q)S_\Delta + B_i Y_{2q} + B_q Y_{2i}$ .

Então, os ganhos  $K_i$  e  $\Gamma_i$  que verificam

$$K_i U = Y_{1i} \quad , \quad \Gamma_i S_\Delta = Y_{2i} \tag{4.22}$$

e o conjunto  $\mathcal{S}_0 \triangleq \bigcap_i \{\mathcal{E}(Q_i^{-1})\} = \mathcal{E}(Q^{-1}(\xi_k))$ , é uma região de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada (4.8), para qualquer não-linearidade  $\varphi(z)$  satisfazendo à relação (4.4) com  $\Delta = S_\Delta^{-1}$ .

**Demonstração:** De (4.19) percebemos primeiramente que  $U$  e  $S_\Delta$  são, necessariamente, inversíveis. Assim, podemos definir  $E_{1i} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $E_{2i} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  como segue:

$$E_{1i} = Z_{1i} U^{-1} \quad , \quad E_{2i} = Z_{2i} S_\Delta^{-1} \tag{4.23}$$

A partir de (4.22) e (4.23), (4.21) pode ser reescrita:

$$\begin{bmatrix} -Q_i + U + U' & -U' L'_i \Omega & U'(K'_{i(\ell)} - E'_{1i(\ell)}) \\ \star & 2S_\Delta & S_\Delta(\Gamma'_{i(\ell)} - E'_{2i(\ell)}) \\ \star & \star & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.24)$$

Multiplicando a desigualdade (4.24) por  $\xi_i$  para todo  $i = 1, \dots, N$  e somando-as, temos:

$$\begin{bmatrix} -Q(\xi) + U + U' & -U' L'(\xi) \Omega & U'(K'_{(\ell)}(\xi) - E'_{1(\ell)}(\xi)) \\ \star & 2S_\Delta & S_\Delta(\Gamma'_{(\ell)}(\xi) - E'_{2(\ell)}(\xi)) \\ \star & \star & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \geq 0$$

nas quais  $E_1(\xi)$  e  $E_2(\xi)$  são definidos em (4.14).

Como  $(U - Q(\xi))' Q(\xi)^{-1} (U - Q(\xi)) \geq 0 \iff U' Q(\xi)^{-1} U \geq -Q(\xi) + U + U'$ , obtemos:

$$\begin{bmatrix} Q^{-1}(\xi) & -L'(\xi) \Omega S_\Delta^{-1} & K'_{(\ell)}(\xi) - E'_{1(\ell)}(\xi) \\ \star & 2S_\Delta^{-1} & \Gamma'_{(\ell)}(\xi) - E'_{2(\ell)}(\xi) \\ \star & \star & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Segue-se que, para todo e qualquer  $\xi \in \Upsilon$ , a relação (4.21) garante que  $\mathcal{E}(Q^{-1}(\xi))$  está incluída em  $S(\rho) = \{x \in \mathfrak{R}^n, \varphi \in \mathfrak{R}^r; -\rho \leq (K_a(\xi) - E_a(\xi)) \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} \leq \rho\}$ , em que  $\begin{bmatrix} K_a(\xi) & E_a(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(\xi) - E_1(\xi) & \Gamma(\xi) - E_2(\xi) \end{bmatrix}$ . Então, o Lema 4.1 pode ser aplicado à não-linearidade  $\Psi(u)$  considerando o vetor  $u$  dado por (4.5) e escolhendo o vetor  $w = E_1(\xi)x + E_2(\xi)\varphi(z)$ , (4.13), de forma que a não-linearidade  $\Psi(u)$  satisfaz à condição de setor (4.12),  $\forall x \in \mathcal{E}(Q^{-1}(\xi)) = \bigcap_i \mathcal{E}\{Q_i^{-1}\}$ .

Para assegurar que (4.16) é verificada, consideramos a desigualdade

$$\Delta V(x, \xi) - 2\varphi(z) S_\Delta^{-1} (\varphi(z) - \Omega L(\xi)x) - 2\Psi(u) S(\xi)^{-1} (\Psi(u) + E_1(\xi)x + E_2(\xi)\varphi(z)) < 0 \quad (4.25)$$

Utilizando  $V(x_k, \xi_k)$  dada por (4.17), (4.25) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} x' & \varphi' & \Psi' \end{bmatrix} \mathcal{M}(\xi) \begin{bmatrix} x \\ \varphi \\ \Psi \end{bmatrix} < 0$$

na qual, utilizando as trocas de variáveis representadas por (4.22) e (4.23),

$$\mathcal{M}(\xi) = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^N \xi_j Q_j & \mathbf{M}_1(\xi) & \mathbf{M}_2(\xi) & -\sum_{i=1}^N \xi_i B_i \sum_{q=1}^N \xi_q S_q \\ * & \sum_{i=1}^N \xi_i Q_i - U - U' & U' \sum_{i=1}^N \xi_i L'_i \Omega & \sum_{i=1}^N \xi_i Z'_{1i} \\ * & * & -2S_\Delta & \sum_{i=1}^N \xi_i Z'_{2i} \\ * & * & * & -2 \sum_{i=1}^N \xi_i S_i \end{bmatrix} < 0$$

em que o índice  $j$  está associado ao instante  $k + 1$ , os índices  $i$  e  $q$  estão associados ao instante  $k$ , e:

$$\mathbf{M}_1(\xi) = \sum_{i=1}^N \xi_i A_i U + \sum_{i=1}^N \xi_i B_i \sum_{q=1}^N \xi_q Y_{1q}, \quad e \quad \mathbf{M}_2(\xi) = \sum_{i=1}^N \xi_i G_i S_\Delta + \sum_{i=1}^N \xi_i B_i \sum_{q=1}^N \xi_q Y_{2q}.$$

Considere, em particular, o produto (no instante  $k$ ):

$$\begin{aligned} B(\xi_k)Y_1(\xi_k) &= \sum_{j=1}^N \xi_j \sum_{i=1}^N \xi_i B_i \sum_{q=1}^N \xi_q Y_{1q} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \xi_j \xi_i^2 B_i Y_{1i} + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{q=i+1}^N \xi_j \xi_i \xi_q (B_i Y_{1q} + B_q Y_{1i}) \end{aligned}$$

Procedendo de forma similar para todos os termos envolvidos, pode-se escrever  $\mathcal{M}(\xi)$  sob a forma equivalente

$$\mathcal{M}(\xi) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \xi_j \xi_i^2 \mathcal{M}_{ji}^+ + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{q=i+1}^N \xi_j \xi_i \xi_q \mathcal{M}_{jiq}^+ < 0 \quad (4.26)$$

na qual as matrizes  $\mathcal{M}_{ji}^+$  e  $\mathcal{M}_{jiq}^+$  são dadas em (4.19) e (4.20).

A partir de (4.19) e (4.20) tem-se, respectivamente  $\mathcal{M}_{ji}^+ < 0$  e  $\mathcal{M}_{jiq}^+ < 0$ , o que garante que (4.26) é verificada. Por consequência, a desigualdade (4.25) também é satisfeita. Como por hipótese a não-linearidade  $\varphi(z_k)$  é válida globalmente e, por construção,  $\Psi(u_k)$  é verificada  $\forall x_k \in \mathcal{E}((Q^{-1}(\xi)))$ , temos  $\Delta V(x_k, \xi_k) = V(x_{k+1}, \xi_{k+1}) - \lambda V(x_k, \xi_k) < 0$  e, pela Definição 4.1, o CL  $\mathcal{E}((Q^{-1}(\xi)))$  é robustamente  $\lambda$ -contrativo. Em decorrência, para todo  $x_0 \in S_0 \triangleq \mathcal{E}((Q^{-1}(\xi))) = \bigcap_i \mathcal{E}\{Q_i^{-1}\}$ , as trajetórias correspondentes do sistema (4.9) convergem assintoticamente para a origem para toda e qualquer não-linearidade  $\varphi(z_k)$



verificando (2.3).  $\square$

### 4.2.2 Síntese via programação convexa

Para a otimização do tamanho do conjunto  $\mathcal{S}_0 \triangleq \mathcal{E}(Q^{-1}(\xi))$ , nós adotamos, como em [9, 17, 21, 33] um conjunto modelo para síntese. Assim, considere um conjunto modelo poliedral dado por  $\Xi_0 \subset \mathfrak{R}^n$  e o fator escalar  $\beta \in \mathfrak{R}$ :  $\Xi_0 \triangleq \text{Co}\{v_r \in \mathfrak{R}^n, r = 1, \dots, n_r\}$ . A meta consiste em maximizar o fator escalar  $\beta$  de tal forma que a seguinte condição de inclusão seja verificada:

$$\beta \Xi_0 \subset \mathcal{E}(Q^{-1}(\xi)) \iff (\beta v_r') Q^{-1}(\xi) (\beta v_r) \leq 1 \quad \forall r = 1, \dots, n_r, \quad \forall \xi \in \Upsilon \quad (4.27)$$

Mediante o complemento de Schur, a verificação de (5.33) é equivalente à seguinte restrição convexa:

$$\begin{bmatrix} \mu & v_r' \\ v_r & Q_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall r = 1, \dots, n_r \quad (4.28)$$

na qual, por definição,

$$\mu = \frac{1}{\beta^2}.$$

Então, é possível formular o problema de programação convexa seguinte para a síntese de um controlador dependente de parâmetros o qual é solução para o Problema 4.1:

$$\begin{aligned} & \min_{Q_i, U, S_\Delta, S_i, Z_{1i}, Z_{2i}, Y_{1i}, Y_{2i}, \mu} \\ & \text{sujeito a} \end{aligned} \quad (4.29)$$

LMI's (4.19), (4.20), (4.21) e (4.28)

Note que a região  $\beta \Xi_0$  obtida a partir de (4.29) é uma região de estabilidade assintótica associada ao sistema em malha fechada, uma vez que, por construção,  $\beta \Xi_0$  encontra-se no interior do domínio de contratividade  $\mathcal{E}(Q^{-1}(\xi))$ . Isto garante que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ ,  $\forall x_0 \in \beta \Xi_0$ , muito embora parte das trajetórias que emanam desta região possam evoluir no seu exterior.

Além disso, outra possibilidade é escolher o conjunto modelo sob a forma elipsoidal,  $\Xi_0 \triangleq \mathcal{E}(R^{-1})$ , em que  $R = R' > 0$  é escolhida *a priori*, da mesma forma que os valores de  $v_r$  do conjunto modelo poliedral [33]. No caso elipsoidal pode-se substituir a restrição

convexa (4.28) por: 
$$\begin{bmatrix} \mu R & I \\ I & Q_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Observe que restrições convexas adicionais podem ser consideradas nos problemas de otimização anteriores, por exemplo, para tratar o caso em que a condição de setor (2.2) é localmente verificada.

**Observação 4.1** *Se a condição (4.4) é válida localmente, ou seja, somente em  $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^p$  definido por*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \{z_k \in \mathbb{R}^p; |z_k| \leq v\}, \quad \text{com } v_{(m)} > 0, \quad m = 1, \dots, p \\ &= \{x_k \in \mathbb{R}^n; |L(\xi_k)x_k| \leq v, \quad \forall \xi \in \Upsilon\}, \end{aligned}$$

então, considera-se a condição adicional  $\mathcal{E}(Q^{-1}(\xi)) \subset \mathcal{Z}$ , dada por

$$\begin{bmatrix} Q_i & L'_{i(m)} \\ * & v_{(m)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall m = 1, \dots, p \quad (4.30)$$

*Esta condição adicional pode restringir o tamanho do conjunto  $\mathcal{S}_0$ , comparativamente ao caso em que  $\varphi(z_k)$  é globalmente verificada, como relatado na seção subsequente.*

Finalmente, é importante observar que a restrição de inclusão (4.21) permite explorar efetivamente a saturação da ação de controle para o atendimento dos requisitos de projeto. Uma técnica similar é proposta por [17] e utilizada em [16] para o caso de sistemas contínuos no tempo. Esta técnica, contudo, utiliza restrições de inclusão que, ao contrário de (4.21), não consideram que as entradas de controle possam saturar. Note também que a abordagem proposta permite considerar, conjuntamente ou de forma isolada, não-linearidades que podem ser representadas sob a forma de parâmetros variantes e/ou que podem ser consideradas pertencentes a um setor. Deste ponto de vista, nossa abordagem tem um caráter mais abrangente do que a técnica utilizada por [17] e [16].

### 4.3 Estabilização com lei de controle a parâmetros fixos

Considere o sistema não-linear em tempo discreto com incertezas variantes no tempo (4.1) e, fazendo uso da condição de setor (4.4) e da lei de controle de realimentação (4.7),

temos o seguinte sistema em malha fechada:

$$x_{k+1} = A(\xi_k)x_k + G(\xi_k)\varphi(z(k)) + B(\xi_k)\text{sat}(Kx_k + \Gamma\varphi(z(k))) \quad (4.31)$$

O problema de estabilização a ser abordado será:

**Problema 4.2** (Estabilização robusta sob atuador saturante) *Determinar ganhos de realimentação  $K$  e  $\Gamma$  e uma região  $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathfrak{R}^n$ , tão grande quanto possível, de tal forma que a origem do sistema em malha fechada incerto correspondente (4.31) é estável assintoticamente para qualquer condição inicial  $x_0 \in \mathcal{S}_0$  e para qualquer  $\varphi(\cdot)$  verificando a condição de setor (4.4).*

Considerando (4.7) para a utilização de condição de setor modificada (Lema 2.1,  $\Psi(u_k)'T(\Psi(u_k) - w) \leq 0$ ), o sistema malha fechada (4.31) é reescrito sob a forma

$$x_{k+1} = A_{cl}(\xi_k)x_k + G_{cl}(\xi_k)\varphi(z_k) - B(\xi_k)\Psi(u_k) \quad (4.32)$$

no qual

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\xi_k) & G_{cl}(\xi_k) & B(\xi_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \xi_k^{(i)} \begin{bmatrix} A_i + B_i K & G_i + B_i \Gamma & B_i \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Para desenvolver a próxima subseção vamos considerar o conjunto poliedral (2.8),  $S(\rho) = \{u_k \in \mathfrak{R}^m, w_k \in \mathfrak{R}^m; -\rho \leq u_k - w_k \leq \rho\}$ , o Lema 2.1 com  $w_k = E_1(\xi_k)x_k + E_2(\xi_k)\varphi(z_k)$ , a Função de Lyapunov Dependente de Parâmetros (FLDP)  $V(x_k, \xi_k) : \mathfrak{R}^n \times \Upsilon \rightarrow \mathfrak{R}$ , (4.17), o Conjunto de tipo Lyapunov (CL) associado a  $V(x_k, \xi_k)$  dado por (4.15) e o Lema 4.2.

### 4.3.1 Estabilização robusta

Para o projeto de matrizes de realimentação  $K$  e  $\Gamma$  propomos o seguinte resultado:

**Teorema 4.2** *Dado  $\lambda \in (0, 1]$ , considere que existam as matrizes definidas positivas  $Q_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , matrizes diagonais positivas  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e  $S_\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e matrizes  $Z_{1i} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,*

$Z_{2i} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ ,  $U \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $Y_1 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $Y_2 \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  verificando:

$$\begin{bmatrix} -Q_j & A_i U + B_i Y_1 & G_i S_\Delta + B_i Y_2 & -B_i S \\ * & \lambda(Q_i - U - U') & U' L' \Omega & Z'_{1i} \\ * & * & -2S_\Delta & Z'_{2i} \\ * & * & * & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \text{ e } \forall j = 1, \dots, N \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} -Q_i + U + U' & -U' L' \Omega & Y'_{1(\ell)} - Z'_{1i(\ell)} \\ * & 2S_\Delta & Y'_{2(\ell)} - Z'_{2i(\ell)} \\ * & * & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \text{ e } \forall \ell = 1, \dots, m \quad (4.35)$$

Então, os ganhos  $K$  e  $\Gamma$  que verificam

$$KU = Y_1 \quad , \quad \Gamma S_\Delta = Y_2 \quad (4.36)$$

e o conjunto  $\mathcal{S}_0 \triangleq \text{Co} \{ \mathcal{E}(Q_i^{-1}) \} = \mathcal{E}(Q^{-1}(\xi))$ , são soluções para o Problema 4.2 para qualquer não-linearidade  $\varphi(z)$  satisfazendo à relação (4.4) com  $\Delta = S_\Delta^{-1}$ .

**Demonstração:** Segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 4.1, porém sem os produtos cruzados.

**Observação 4.2** Caso  $\lambda = 1$ , obtém-se os resultados da estabilização inicialmente propostos em [8].

### 4.3.2 Síntese via programação convexa

Para o desenrolar da síntese via programação convexa empregamos os mesmos procedimentos da Subseção 4.2.2. Assim, o problema de programação convexa de estabilização de realimentação robusta resulta em:

$$\begin{aligned} & \min_{Q_i, U, S_\Delta, S, Z_{1i}, Z_{2i}, Y_1, Y_2, \mu} \mu \\ & \text{sujeito à} \end{aligned} \quad (4.37)$$

LMI's (4.34), (4.35) e (4.28)

Note que restrições convexas adicionais podem ser consideradas no programa anterior. Por exemplo, considere o caso em que a condição de setor (4.4) é localmente verificada.

Além disso, para propósitos de síntese, algumas restrições estruturais nos ganhos de realimentação  $K$  e  $\Gamma$  podem ser consideradas por uma adequação na estrutura das variáveis de decisão  $(U, Y_1)$  e  $(S_\Delta, Y_2)$ .

## 4.4 Exemplo numérico

Para ilustrar a aplicabilidade dos resultados teóricos e do algoritmo da síntese propostos, considere os dados seguintes para o sistema (4.1, 4.3) [8]:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.4 \\ -0.2 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.7 \\ 0.6 & 1.3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.3 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad \Omega = 0.7,$$

$$\rho = 1 \quad e \quad \varphi = 0.3z(1 + \sin(z)), \quad \forall z \in \mathfrak{R}^p$$

Leve em conta também:

$$\Xi_0 = \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

e as seqüências aleatórias de parâmetros:

$$\{\xi_k\}_1 = \{0, 0.0888, 0.2825, 0.1866, 0.9635, 0.0563, 0.1753, 0.4410, 0.7579, 0.9288, \\ 0.3496, 0.2224, 0.0524, 0.6427, 0.4539, 0.4110, 0.5076, 0.6418, 0.8435, 0.5471\};$$

$$\{\xi_k\}_2 = \{0, 0.9, 0.1, 0, 0.0138, 0.9875, 0.1740, 0.4030, 0.3993, 1, 1, 0.9, 0.1, 0, \\ 0.7857, 0.5059, 0.5624, 0.7012\}.$$

Os resultados numéricos apresentados na Tabela 4.1 referem-se à lei de controle dependente de parâmetros (4.5) e foram obtidos utilizando (4.29). Na Figura 4.1 temos as representações dos conjuntos  $\mathcal{E}(Q_1^{-1})$  e  $\mathcal{E}(Q_2^{-1})$ . Na Figura 4.1(a), a interseção das elipses externas, em linhas cheias, corresponde à solução  $\mathcal{S}_0$  para  $\lambda = 0.95$ , e a interseção das elipses internas, em linhas tracejadas, para  $\lambda = 0.8$  e, da mesma forma, para  $\lambda = 0.95$  e  $\lambda = 0.6405$  na Figura 4.1(b). É possível constatar que com a exigência de melhor desempenho (ou seja, menor coeficiente de contratividade) ocorre uma diminuição da região em

que a estabilidade assintótica é garantida. O menor valor de  $\lambda$  para o qual o problema (4.29) é factível é  $\lambda = 0.6405$ .

	$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.6405$
$Q_1$	$\begin{bmatrix} 3.9365 & 1.7751 \\ 1.7751 & 2.0421 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.6468 & 0.5442 \\ 0.5442 & 0.5864 \end{bmatrix}$
$Q_2$	$\begin{bmatrix} 3.0956 & 0.7287 \\ 0.7287 & 1.4142 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.6882 & 0.3184 \\ 0.3184 & 0.2757 \end{bmatrix}$
$K_1$	$\begin{bmatrix} -0.3065 & -0.7634 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.6062 & -0.6361 \end{bmatrix}$
$K_2$	$\begin{bmatrix} -0.3892 & -0.9111 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.4766 & -0.7237 \end{bmatrix}$
$\Gamma_1$	-0.0021	0.8488
$\Gamma_2$	0.2459	0.2079
$\beta$	1.1140	0.3583

Tabela 4.1: Resultados numéricos -  $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$

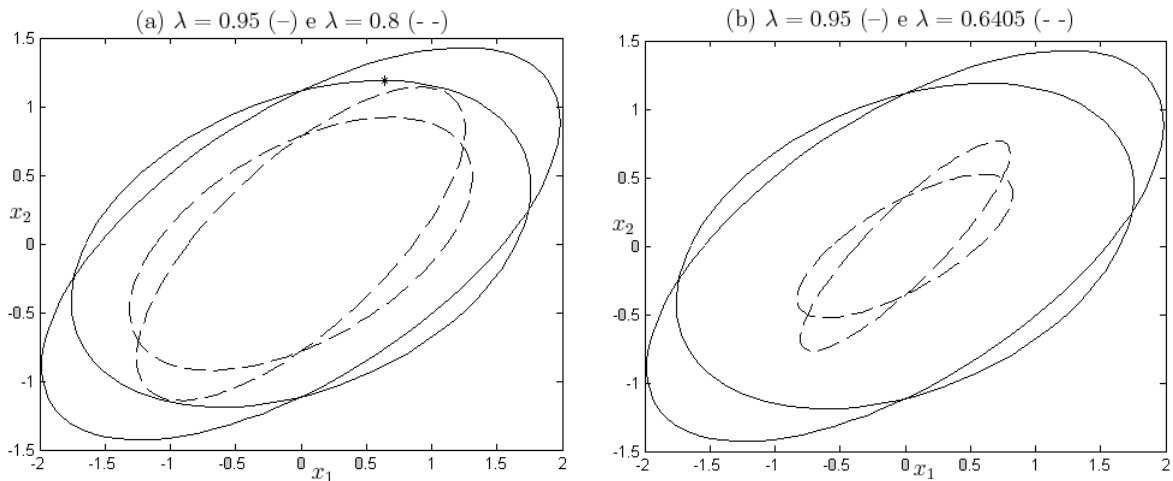


Figura 4.1: Conjuntos  $\mathcal{E}(Q_1^{-1})$  e  $\mathcal{E}(Q_2^{-1})$  para  $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$

A simulação do sistema sob saturação, para  $\lambda = 0.95$  e a condição inicial  $x_0 = [0.6388 \ 1.1891]'$  assinalada na Figura 4.1(a), é mostrada na Figura 4.2 utilizando-se duas seqüências diferentes de parâmetros, as quais são denotadas  $\{\xi_k\}_1$  e  $\{\xi_k\}_2$  conforme descritas anteriormente. Nos gráficos à direita representamos o valor de controle calculado,  $u_k$  (representado por  $*$ ), e o valor de controle efetivamente aplicado,  $\text{sat}(u_k)$ , (representado por  $\square$ ). Cabe salientar que a saturação da ação de controle observada para estas duas seqüências de parâmetros pode não ocorrer para outras seqüências particulares. Nos gráficos à esquerda observa-se a convergência assintótica para a origem das trajetórias dos estados  $x_1$  (representado por  $\circ$ ) e  $x_2$  (representado por  $*$ ). A Figura 4.3 mostra o

desempenho do sistema em termos dos valores de  $V(x_k, \xi_k)$ , calculado ao longo destas trajetórias.

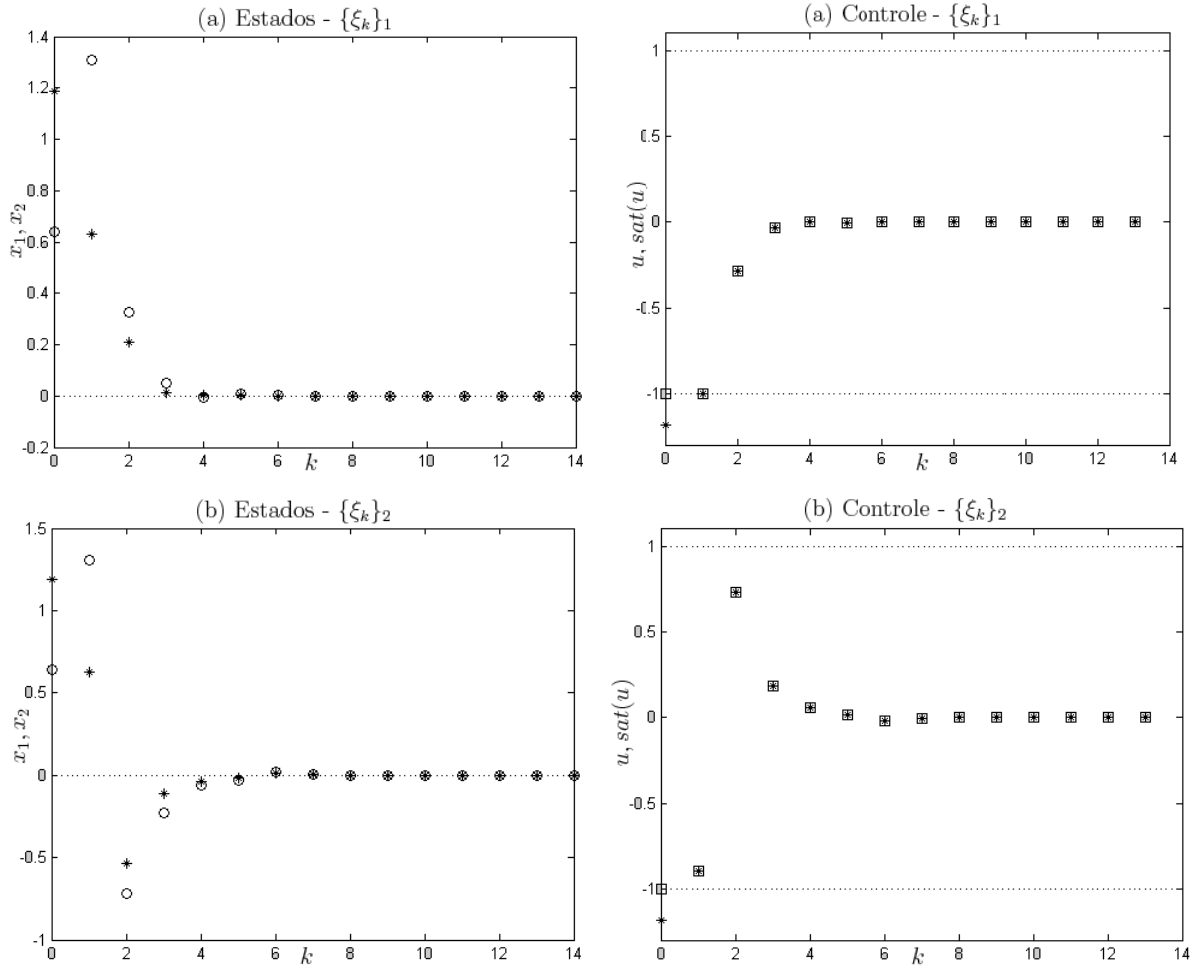


Figura 4.2: Simulações para duas seqüências aleatórias diferentes,  $\{\xi_k\}_1$  e  $\{\xi_k\}_2$ , com  $x_0 = [0.6388 \ 1.1891]'$ ,  $\lambda = 0.95$  e  $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$

Na Figura 4.4 a interseção das elipses em linhas pontilhadas representa os conjuntos  $\mathcal{S}_0$  obtidos, via problema de otimização (4.37), para a lei de controle a parâmetros fixos (2.5) calculadas para  $\lambda = 0.95$  e  $\lambda = 0.6424$ , conforme Tabela 4.2. O menor valor factível para  $\lambda$ -contratividade, com a lei de controle a parâmetros fixos, é  $\lambda = 0.6424$ . A interseção das elipses em linhas cheias representa os conjuntos  $\mathcal{S}_0$  obtidos via problema de otimização (4.29), associados às leis de controle dependentes de parâmetros calculadas para os mesmos coeficientes de contratividade. Observamos que a lei de controle dependente de parâmetros permite obter maiores regiões de estabilidade para o sistema em malha fechada, comparativamente à lei de controle a parâmetros fixos. Além disso, esta diferença aumenta com a diminuição do coeficiente de contratividade.

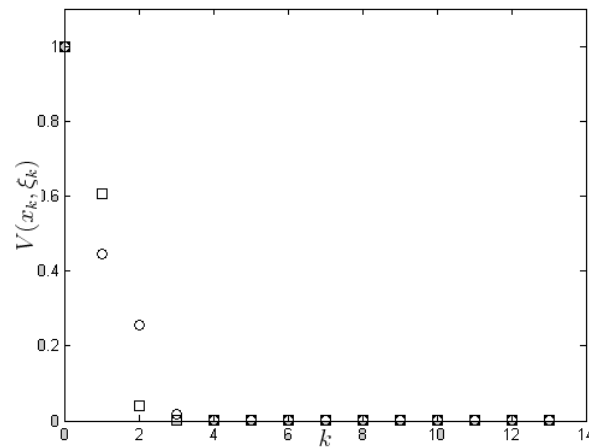


Figura 4.3: Valores de  $V(x_k, \xi_k)$  ao longo das trajetórias dos estados da Figura 4.2 (a) e (b), para as duas seqüências  $\{\xi_k\}_1$  ( $\square$ ) e  $\{\xi_k\}_2$  ( $\circ$ )

	$\lambda = 0.95$		$\lambda = 0.6424$	
$Q_1$	2.3993	1.2595	0.8947	0.6704
	1.2595	1.6054	0.6704	0.5080
$Q_2$	2.7040	0.8527	0.9002	0.6685
	0.8527	1.2368	0.6685	0.5022
$K$	-0.4605	-0.4591	-0.5516	-0.6221
$\Gamma$	-0.1949		0.5645	
$\beta$	0.9714		0.0753	

Tabela 4.2: Resultados numéricos -  $u_k = Kx_k + \Gamma\varphi(z(k))$

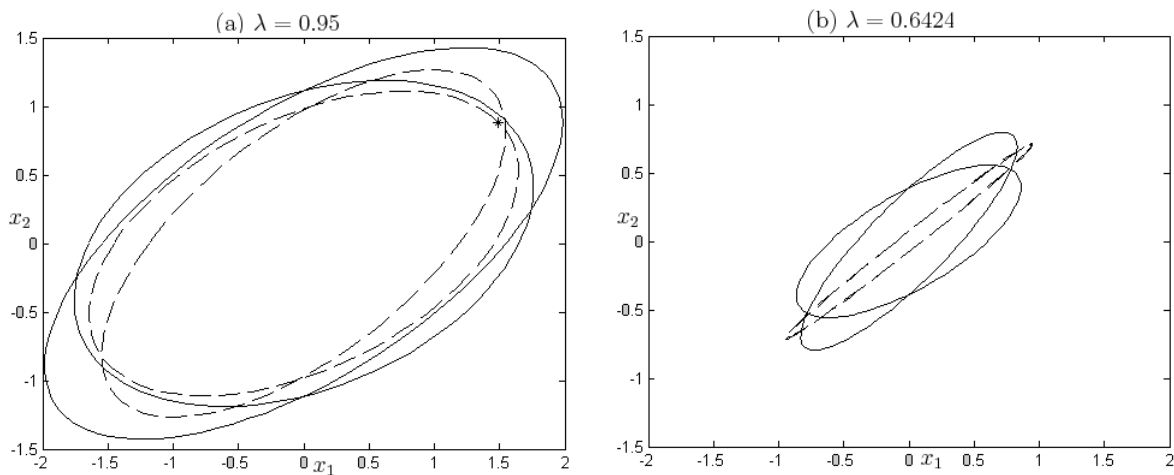


Figura 4.4: Conjuntos  $\mathcal{E}(Q_1^{-1})$  e  $\mathcal{E}(Q_2^{-1})$  para  $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$  (-) e  $u_k = Kx_k + \Gamma\varphi(z_k)$  (- -)

Na Figura 4.5 são exibidos os resultados de simulações para o sistema em malha fechada sob a ação da lei de controle a parâmetros variantes e fixos, considerando  $x_0 = [1.4911 \ 0.8850]'$  indicada na Figura 4.4(a),  $\lambda = 0.95$  e a seqüência  $\{\xi_k\}_1$ . Na parte superior, Figura 4.5(a), consideramos os ganhos a parâmetros variantes e, na parte infe-



rior, Figura 4.5(b), temos o resultado da simulação quando os ganhos são a parâmetros fixos. É importante salientar que a utilização de outras seqüências de parâmetros e/ou de outras condições iniciais implicarão desempenhos distintos para cada caso. Na Figura 4.6 encontramos o comparativo do desempenho do sistema em termos dos valores de  $V(x_k, \xi_k)$  para a lei de controle a parâmetros variantes e fixos, ao longo destas trajetórias.

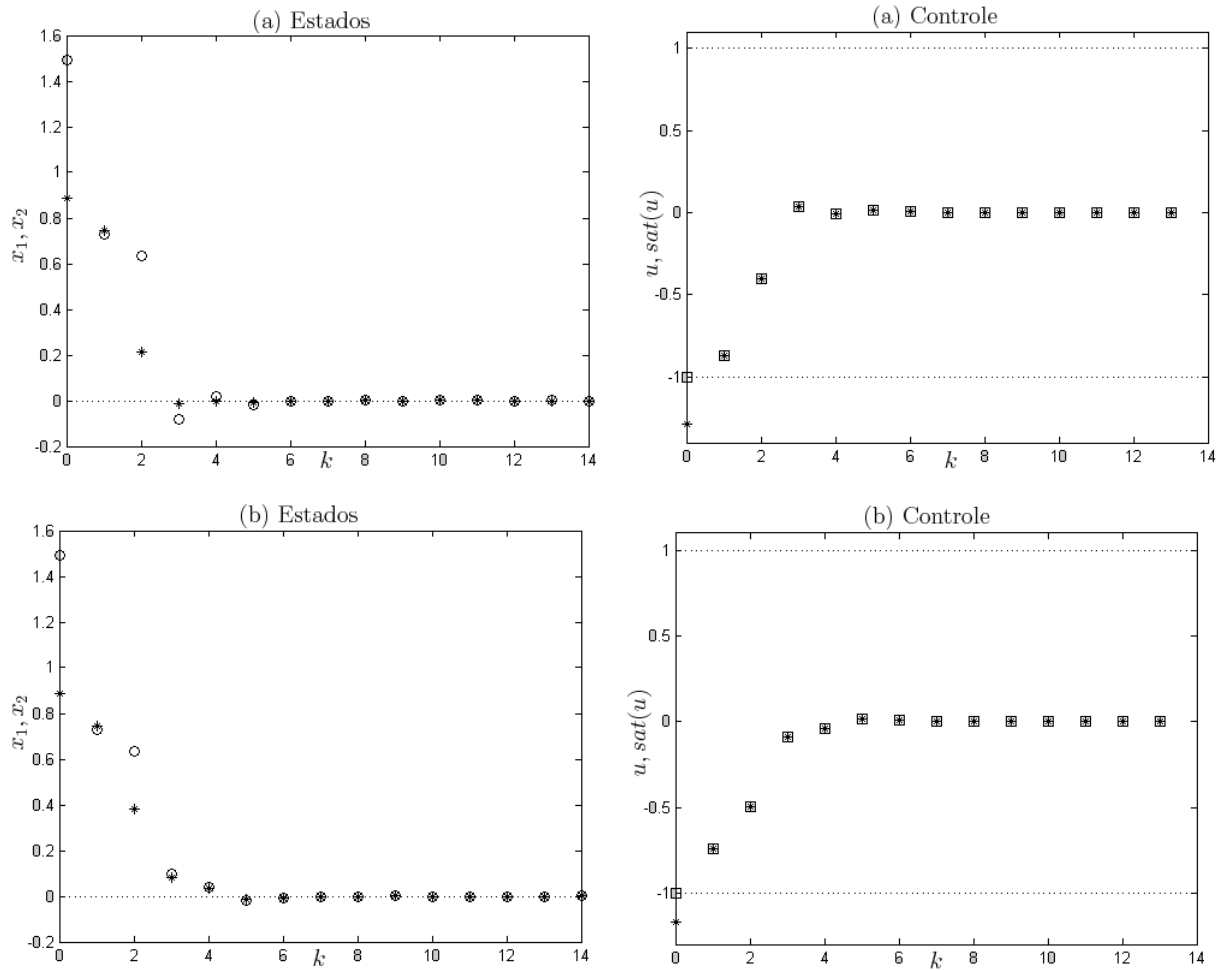


Figura 4.5: Simulações com  $\lambda = 0.95$ ,  $\{\xi_k\}_1$  e  $x_0 = [1.4911 \ 0.8850]'$  para: (a)  $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$  e (b)  $u_k = Kx_k + \Gamma\varphi(z_k)$

Na Figura 4.7 são mostrados os conjuntos elipsoidais obtidos ao calcular-se  $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$  e  $u_k = K(\xi)x_k$ , para  $\lambda = 0.8$  e  $\lambda = 0.6627$ , via problema de otimização (4.29). Considerou-se  $Y_{2i}, Z_{2i} = 0$  para o caso em que se deseja  $\Gamma(\xi) = 0$  e o menor valor factível obtido para  $\lambda$ —contratividade neste caso foi  $\lambda = 0.6627$ , conforme Tabela 4.3. A diminuição do conjunto  $\mathcal{S}_0$  associado a  $u_k = K(\xi)x_k$  fica mais evidenciada para valores menores de  $\lambda$ . Na Figura 4.8 encontra-se a simulação do sistema em malha fechada empregando o controle sem a realimentação da não-linearidade calculada para  $\lambda = 0.95$ ,

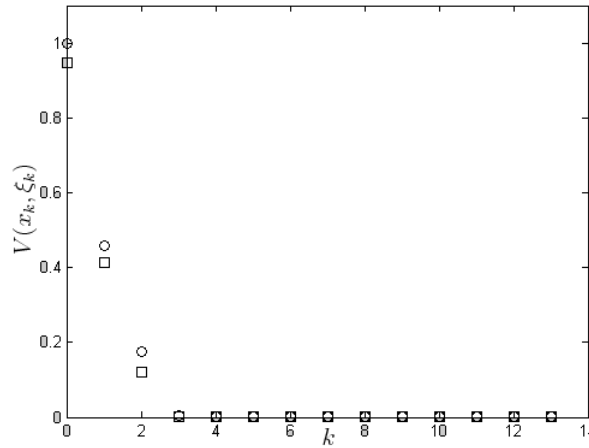


Figura 4.6: Valores de  $V(x_k, \xi_k)$  ao longo das trajetórias dos estados para  $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$  - (□) e  $u_k = Kx_k + \Gamma\varphi(z_k)$  - (○), com  $\lambda = 0.95$ ,  $\{\xi_k\}_1$  e  $x_0 = [1.4911 \ 0.8850]'$

com a condição inicial  $x_0 = [0.6388 \ 1.1891]'$ , indicada na Figura 4.1(a), e a seqüência  $\{\xi_k\}_1$ ; neste caso, o conjunto  $\mathcal{S}_0$  obtido tende ao conjunto  $\mathcal{S}_0$  associado à lei de controle com realimentação da não-linearidade, correspondente à interseção das elipses em linha cheia da Figura 4.1(a). Constata-se que o desempenho temporal é similar utilizando-se as duas leis de controle com e sem a realimentação da não-linearidade (Figuras 4.2(a) e 4.8, respectivamente); isto também pode ser observado na Figura 4.9(a), que mostra o desempenho do sistema em termos dos valores de  $V(x_k, \xi_k)$ . Por meio de simulações verificamos que a realimentação da não-linearidade pode proporcionar melhor desempenho à medida que se calculam as leis de controle para menores coeficientes de  $\lambda$ -contratividade. A Figura 4.9(b) apresenta o desempenho em termos de  $V(x_k, \xi_k)$  ao longo das trajetórias obtidas com as leis de controle calculadas para  $\lambda = 0.6627$ , com a seqüência  $\{\xi_k\}_1$ , e  $x_0 = [0.5778 \ 0.4782]$ , conforme assinalado na Figura 4.7(b).

	$\lambda = 0.95$		$\lambda = 0.6627$	
$Q_1$	3.6669	1.5859	0.4792	0.3796
	1.5859	1.8462	0.3796	0.4459
$Q_2$	3.1211	0.6133	0.5263	0.2729
	0.6133	1.2825	0.2729	0.2287
$K_1$	-0.2578	-0.8953	-0.9090	-0.1019
$K_2$	-0.4062	-0.7433	-0.5545	-0.4522
$\beta$	1.0768		0.2952	

Tabela 4.3: Resultados numéricos -  $u_k = K(\xi)x_k$

Finalmente, com o objetivo de ilustrar a Observação 4.1, a Figura 4.10 mostra, em linhas pontilhadas, os conjuntos elipsoidais obtidos ao calcular-se  $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$

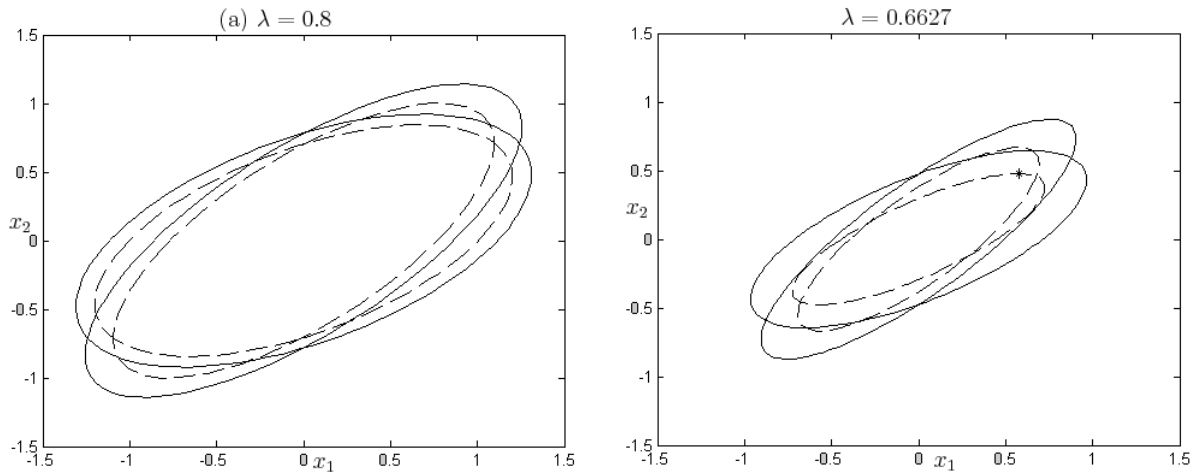


Figura 4.7: Conjuntos  $\mathcal{E}(Q_1^{-1})$  e  $\mathcal{E}(Q_2^{-1})$  para  $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$  (—) e  $u_k = K(\xi)x_k$  (---)

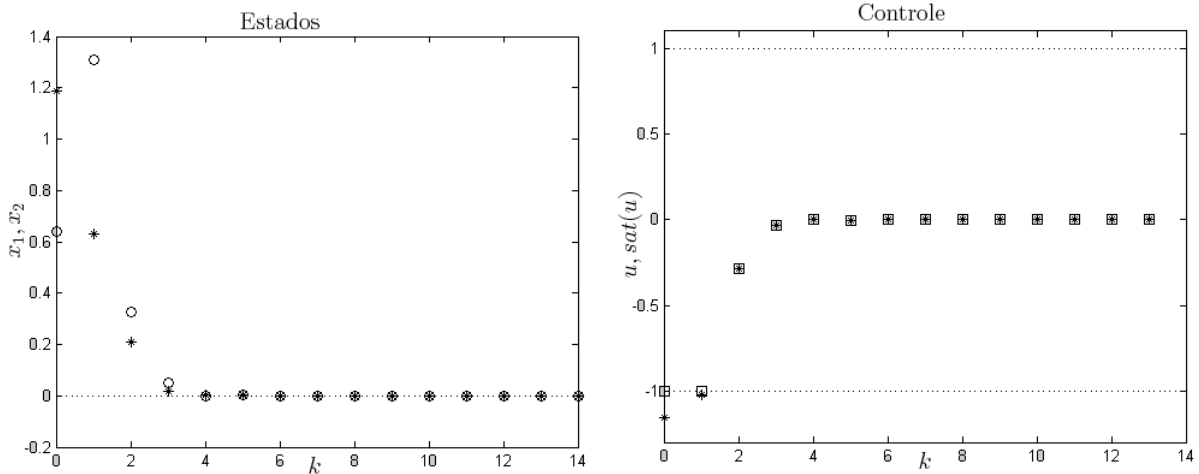


Figura 4.8: Simulação para  $u_k = K(\xi)x_k$ , calculada para  $\lambda = 0.95$ , com  $\{\xi_k\}_1$  e  $x_0 = [0.6388 \ 1.1891]'$

para  $\varphi(z_k)$  localmente verificada,  $z_k \in \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^p$ , com  $\nu = 10$ . Neste caso, o menor valor factível para o coeficiente de contratividade é  $\lambda = 0.731$ . Em linhas cheias são mostrados os conjuntos elipsoidais obtidos quando  $\varphi(z_k)$  é globalmente verificada,  $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^p$ . Conseqüentemente, a região de estabilidade garantida  $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{E}(Q_i^{-1})$  é mais restrita quando  $\varphi(z_k)$  é localmente verificada. Os dados numéricos correspondentes encontram-se na Tabela 4.4.

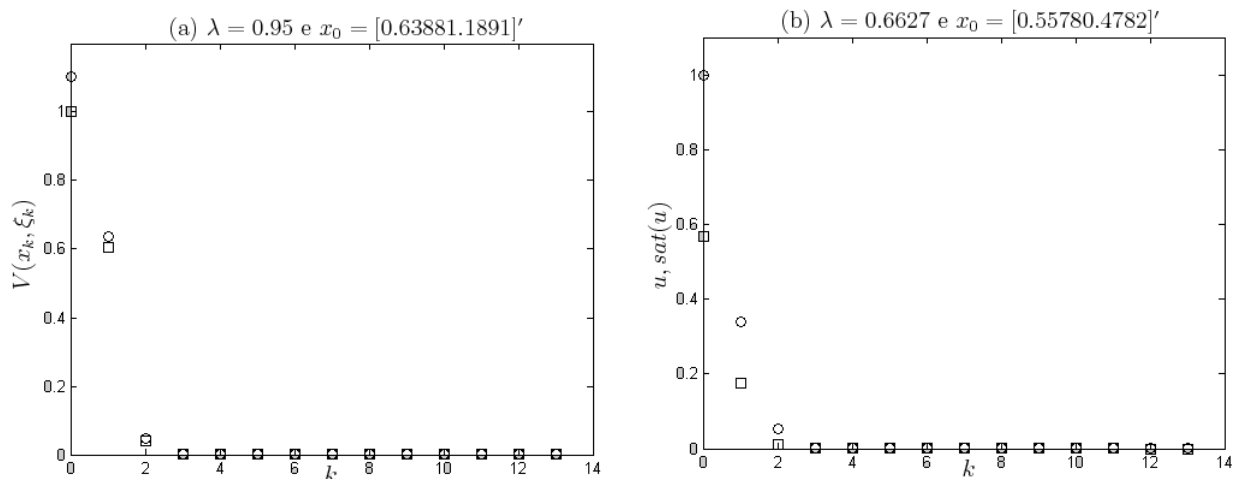


Figura 4.9: Valores de  $V(x_k, \xi_k)$  ao longo das trajetórias dos estados para  $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$  - ( $\square$ ) e  $u_k = K(\xi)x_k$  - ( $\circ$ ) e  $\{\xi_k\}_1$

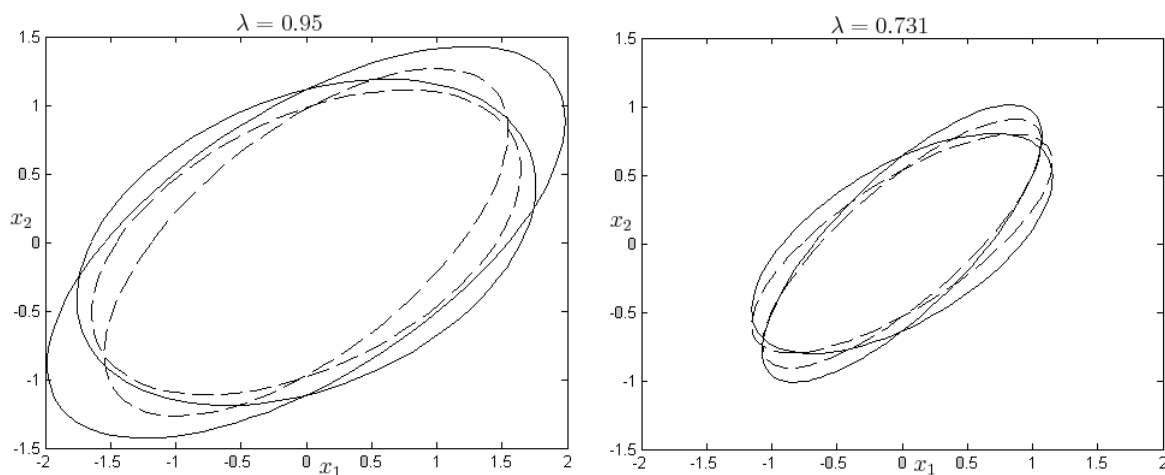


Figura 4.10: Conjuntos  $\mathcal{E}(Q_1^{-1})$  e  $\mathcal{E}(Q_2^{-1})$  para  $u_k = K(\xi)x_k + \Gamma(\xi)\varphi(z_k)$  e  $\varphi(\cdot)$  localmente (- -) e globalmente verificada (-)

	$\lambda = 0.95$		$\lambda = 0.731$	
$Q_1$	2.4815	1.2812	1.1481	0.7879
	1.2812	1.6305	0.7879	0.8280
$Q_2$	2.8388	0.8371	1.3260	0.6825
	0.8371	1.2368	0.6825	0.6391
$K_1$	-0.2537	-0.7851	-0.4165	-0.7331
$K_2$	-0.5599	-0.7653	-0.5927	-0.6225
$\Gamma_1$	-3.8447		-10.1242	
$\Gamma_2$	-2.5841		-10.0296	
$\beta$	0.9842		0.5357	

Tabela 4.4: Resultados numéricos para  $\varphi(\cdot)$  localmente verificada

## 4.5 Conclusão

Neste capítulo analisamos problemas de estabilização sob restrições de controle de um sistema incerto não-linear representado pela interconexão de um sistema linear e uma não-linearidade de setor tipo cone limitado. Foram propostas condições do tipo LMI baseadas no uso de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros e uma condição de setor modificada para representar a não-linearidade de saturação, com a aplicação das leis de controle a parâmetros variantes e com ganhos constantes.

Também aplicamos o conceito de  $\lambda$ -contratividade para tratar o problema de síntese de uma lei de controle dependente de parâmetros para uma classe de sistemas não-lineares sob atuadores saturantes. A abordagem empregada permite considerar não-linearidades que podem ser representadas como parâmetros variantes e/ou não-linearidades de tipo setor globalmente ou localmente verificadas.

O exemplo numérico considerado teve por objetivo mostrar, em particular, que o uso de ganhos variantes e a realimentação da não-linearidade permitem encontrar resultados menos conservadores, no que se refere ao tamanho da região  $\mathcal{S}_0$  onde é garantida a estabilidade, do que nos casos sem realimentação da não-linearidade de setor ou no caso a ganhos fixos. Também procuramos evidenciar o compromisso existente entre o tamanho de  $\mathcal{S}_0$  e o desempenho associado a  $\lambda$ .

Finalmente, é importante lembrar que uma escolha alternativa para o vetor  $w_k$ , em (4.12), pode ser obtida sob a forma  $w_k = E_1(\xi_k)x_k + \Gamma(\xi_k)\varphi(z_k)$ , com o objetivo de se obter resultados menos conservadores.



# Capítulo 5

## Compensador dinâmico parcialmente dependente de parâmetros

### 5.1 Introdução

Para este capítulo consideramos um sistema não-linear em tempo discreto com parâmetros variantes no tempo e, do capítulo 4, que apenas uma parte dos estados, ou a combinação deles, está disponível para a implementação do controlador. Dessa forma, propõe-se a utilização de um compensador dinâmico com estrutura similar ao controlador usado no capítulo 3. Este controlador é dito como parcialmente dependente de parâmetros devido ao fato de a lei de controle ser a ganhos fixos. Para a realimentação da não-linearidade, temos as matrizes de ganho a parâmetros fixos e a realimentação da não-linearidade de zona-morta por meio do termo *anti-windup*. Para resolver o problema de estabilização utilizamos uma função de Lyapunov dependente de parâmetros. A convergência das trajetórias são asseguradas mediante condições do tipo LMI, que garante a propriedade de  $\lambda$ -contratividade de um conjunto de condições iniciais.

## 5.2 Apresentação do problema

Considere um sistema não-linear em tempo discreto com parâmetros variantes no tempo, representado por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\xi_k)x_k + G(\xi_k)\varphi(z_k) + B(\xi_k)\text{sat}(u_k) \\ y_k &= Cx_k \\ z_k &= L(\xi_k)x_k \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $x_k \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u_k \in \mathfrak{R}^m$ ,  $z_k \in \mathfrak{R}^p$ ,  $y_k \in \mathfrak{R}^q$ ,  $\varphi(\cdot) : \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}^p$  e  $\xi_k \in \mathfrak{R}^N$  é um vetor de parâmetros variantes no tempo, mensuráveis em tempo real e que pertencem ao simplex unitário  $\Upsilon = \{\xi_k \in \mathfrak{R}^N; \sum_{i=1}^N \xi_{k(i)} = 1, \xi_{k(i)} \geq 0, i = 1, \dots, N\}$ . A estrutura das matrizes do sistema tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A(\xi_k) & B(\xi_k) & G(\xi_k) & L'(\xi_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \xi_{k(i)} \begin{bmatrix} A_i & B_i & G_i & L'_i \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

e  $C \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ . A não-linearidade  $\varphi(\cdot)$  satisfaz a condição de setor (2.2), a qual iremos repetir a seguir

$$\varphi'(z_k)\Delta[\varphi(z_k) - \Omega z_k] \leq 0, \quad \forall z_k \in \mathfrak{R}^p, \quad \varphi(0) = 0. \quad (5.3)$$

A matriz diagonal  $\Delta$  e o modelo da função saturação foram definidos anteriormente, conforme as equações (2.3) e (2.4), respectivamente.

Assim, consideramos que o vetor  $\xi_k$  é mensurável em tempo real. O controle não-linear por realimentação dinâmica de saídas, parcialmente dependente do vetor dos parâmetros  $\xi_k$ , tem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} x_{c,k+1} &= A_c(\xi_k)x_{c,k} + B_c(\xi_k)u_{c,k} + E_c(\xi_k)\Psi(u_k) + G_c(\xi_k)\varphi(z_k) \\ y_{c,k} &= C_c x_{c,k} + D_c u_{c,k} + F_c \varphi(z_k) \end{aligned} \quad (5.4)$$

em que  $x_{c,k} \in \mathfrak{R}^n$  e no qual  $y_{c,k} = u_k$ ,  $u_{c,k} = y_k$  e  $\Psi(u_k) = u_k - \text{sat}(u_k)$  é a entrada para o termo de *anti-windup*, correspondente à não-linearidade de zona-morta. As matrizes do



controlador com parâmetros variantes são estruturadas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A_c(\xi_k) & B_c(\xi_k) & G_c(\xi_k) & E_c(\xi_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \xi_{k(i)} \begin{bmatrix} A_{ci} & B_{ci} & G_{ci} & E_{ci} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

em que:  $A_{ci} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B_{ci} \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ ,  $G_{ci} \in \mathfrak{R}^{n \times q}$  e  $E_{ci} \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ . Além disso, as matrizes constantes associadas à entrada do controlador são tais que:  $C_c \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ ,  $D_c \in \mathfrak{R}^{q \times q}$  e  $F_c \in \mathfrak{R}^{q \times p}$ . Note que com  $G_c(\xi_k) \neq 0 \forall k$  e  $F_c \neq 0$  o controle de realimentação anterior requer o conhecimento ou a disponibilidade da não-linearidade  $\varphi(\cdot)$  como um sinal [4].

A partir do sistema (5.1) e do compensador dinâmico definido por (5.4) obtém-se

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{c,k+1} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} A(\xi_k) & 0 \\ B_c(\xi_k)C & A_c(\xi_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\xi_k) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_c C & C_c \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_k \\ x_{c,k} \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} B(\xi_k) \\ 0 \end{bmatrix} F_c + \begin{bmatrix} G(\xi_k) \\ G_c(\xi_k) \end{bmatrix} \right) \varphi(z_k) - \begin{bmatrix} B(\xi_k) \\ E_c(\xi_k) \end{bmatrix} \Psi(u_k) \quad (5.6)$$

Assim, definindo o vetor de estado aumentado  $\zeta_k = \begin{bmatrix} x'_k & x'_{c,k} \end{bmatrix}' \in \mathfrak{R}^{2n}$  e a matriz de realimentação de estado aumentado  $\mathbb{K} \in \mathfrak{R}^{m \times 2n}$

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} D_c C & C_c \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

podemos representar o sistema em malha fechada (5.6) por:

$$\begin{cases} \zeta_{k+1} = (\mathbb{A}(\xi_k) + \mathbb{B}(\xi_k)\mathbb{K}) \zeta_k + (\mathbb{B}(\xi_k)F_c + \mathbb{G}(\xi_k)) \varphi(z_k) - \bar{\mathbb{B}}(\xi_k)\Psi(u_k) \\ z_k = \mathbb{L}(\xi_k)\zeta_k \\ u_k = \mathbb{K}\zeta_k + F_c\varphi(z_k) \end{cases} \quad (5.8)$$

em que

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}(\xi_k) & \mathbb{B}(\xi_k) & \mathbb{G}(\xi_k) & \bar{\mathbb{B}}(\xi_k) & \mathbb{L}'(\xi_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \xi_{k(i)} \begin{bmatrix} \mathbb{A}_i & \mathbb{B}_i & \mathbb{G}_i & \bar{\mathbb{B}}_i & \mathbb{L}'_i \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

com, por definição:

$$\mathbb{A}(\xi_k) = \begin{bmatrix} A(\xi_k) & 0 \\ B_c(\xi_k)C & A_c(\xi_k) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}(\xi_k) = \begin{bmatrix} B(\xi_k) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbb{B}}(\xi_k) = \begin{bmatrix} B(\xi_k) \\ E_c(\xi_k) \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{G}(\xi_k) = \begin{bmatrix} G(\xi_k) \\ G_c(\xi_k) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{L}(\xi_k) = \begin{bmatrix} L(\xi_k) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\mathbb{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{ci}C & A_{ci} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbb{B}}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ E_{ci} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{G}_i = \begin{bmatrix} G_i \\ G_{ci} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{L}_i = \begin{bmatrix} L_i & 0 \end{bmatrix}.$$

É interessante verificar a semelhança entre (5.8) e o sistema em malha fechada (4.32)-(4.33), particularmente considerando o fato de as matrizes de ganho serem constantes:  $\mathbb{K}$  e  $F_c$  presentemente, e  $K$  e  $\Gamma$  no capítulo anterior. A partir desta constatação pode-se encontrar condições suficientes para a resolução do problema de estabilização a seguir, utilizando-se elementos desenvolvidos no capítulo 3.

**Problema 5.1** (Estabilização robusta via compensador dinâmico parcialmente dependente de parâmetros) *Determinar as matrizes  $A_{ci}$ ,  $B_{ci}$ ,  $C_c$ ,  $D_c$ ,  $E_{ci}$ ,  $F_c$  e  $G_{ci}$  que formam o compensador dinâmico (5.4) e uma região  $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathfrak{R}^{2n}$ , tão grande quanto possível, de tal forma que a origem do sistema em malha fechada (5.8) é assintoticamente estável para qualquer condição inicial  $\zeta_0 \in \mathcal{S}_0$  e para qualquer  $\varphi(\cdot)$  verificando a condição de setor (5.3).*

## 5.3 Estabilidade local

Como primeiro passo para resolução do Problema 5.1, estabeleceremos condições para a estabilidade local do sistema em malha fechada, utilizando a formulação (5.8). Para tanto, faremos uso de alguns conceitos descritos anteriormente, adaptando-os ao espaço de estados aumentado do sistema em malha fechada.

Considere, então, uma Função de Lyapunov Dependente de Parâmetros (FLDP)  $V(\zeta_k, \xi_k) : \mathfrak{R}^{2n} \times \Upsilon \longrightarrow \mathfrak{R}$ . Um Conjunto de tipo Lyapunov (CL) associado a  $V(\zeta_k, \xi_k)$  dado por

$$L_V \triangleq \{\zeta_k \in \mathfrak{R}^{2n} ; V(\zeta_k, \xi_k) \leq 1, \xi_k \in \Upsilon\} \quad (5.10)$$

A noção de conjunto contrativo é básica para determinar regiões de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada (5.8) [44]. A definição seguinte de  $\lambda$ -contratividade foi adaptada para o espaço de estados aumentado do sistema.

**Definição 5.1** *Considere um escalar não-negativo  $\lambda \in (0, 1]$ . O conjunto  $L_V$  é robustamente absolutamente  $\lambda$ -contrativo (com respeito às trajetórias do sistema (5.8)), se*

$$\Delta V_\lambda(\zeta, \xi) \triangleq V(\zeta_{k+1}, \xi_{k+1}) - \lambda V(\zeta_k, \xi_k) < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \zeta_k \in L_V, \forall \xi_k \in \Upsilon \\ e \forall \varphi(\cdot) \in [0, \Omega] \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Observe que se  $L_V$  satisfaz à Definição 5.1, então

$$V(\zeta_k, \xi_k) < \lambda V(\zeta_{k-1}, \xi_{k-1}) < \dots < \lambda^k V(\zeta_0, \xi_0) \leq 1.$$

Assim, a cada instante de tempo  $k > 0$  a trajetória do sistema converge assintoticamente para a origem do sistema (5.8), isto é,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_k = 0, \forall \zeta_0 \in L_V$ .

Na seqüência tomemos a FLDP na forma

$$V(\zeta_k, \xi_k) = \zeta_k' \mathbb{P}(\xi_k) \zeta_k, \quad (5.12)$$

em que  $\mathbb{P}(\xi_k) = \sum_{i=1}^N \xi_{k(i)} \mathbb{P}_i = \sum_{i=1}^N \xi_{k(i)} \mathbb{Q}_i^{-1}$ ,  $\mathbb{Q}_i = \mathbb{Q}_i' > 0$ , com  $\mathbb{Q}_i^{-1} = \mathbb{P}_i \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ . Então, o CL obtido de (5.10) e (5.12) é a interseção dos conjuntos elipsoidais [34]

$$\mathcal{E}(\mathbb{P}(\xi_k)) \triangleq \bigcap_{i=1, \dots, N} \mathcal{E} \{ \mathbb{Q}_i^{-1} \} = \bigcap_{\xi_k \in \Upsilon} L_V \quad (5.13)$$

em que, para  $i = 1, \dots, N$ :

$$\mathcal{E}(\mathbb{Q}_i^{-1}) = \{ \zeta \in \mathfrak{R}^{2n} ; \zeta' \mathbb{Q}_i^{-1} \zeta \leq 1 \} \quad (5.14)$$

Podemos agora declarar o resultado de estabilidade local seguinte.

**Lema 5.1** *Sejam  $A_{ci}, B_{ci}, G_{ci}, E_{ci}, C_c, D_c$  e  $F_c$  ganhos de realimentação de um controlador sob a forma (5.4). Para um dado escalar não-negativo  $\lambda \in (0, 1]$ , considere a existência de matrizes simétricas e definidas positivas  $\mathbb{Q}_i \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ , de matrizes diagonais*

positivas  $S_\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e  $S_i \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e de matrizes  $\mathbb{U} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ ,  $\mathbb{H}_i \in \mathfrak{R}^{m \times 2n}$ , satisfazendo:

$$\begin{bmatrix} -Q_j & (\mathbb{A}_i + \mathbb{B}_i \mathbb{K})\mathbb{U} & (\mathbb{G}_i + \mathbb{B}_i F_c)S_\Delta & -\bar{\mathbb{B}}_i S_i \\ * & \lambda(Q_i - \mathbb{U} - \mathbb{U}') & \mathbb{U}' \mathbb{L}'_i \Omega & \mathbb{H}'_i \\ * & * & -2S_\Delta & S_\Delta F'_{ci} \\ * & * & * & -2S_i \end{bmatrix} < 0$$

$$\forall j = 1, \dots, N \quad e \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (5.15)$$

$$\begin{bmatrix} -Q_i + \mathbb{U}' + \mathbb{U} & \mathbb{U}' \mathbb{K}'_{(\ell)} - \mathbb{H}'_{i(\ell)} \\ * & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\forall i = 1, \dots, N \quad e \quad \forall \ell = 1, \dots, m. \quad (5.16)$$

Então, o conjunto  $\mathcal{S}_0 \triangleq \bigcap_i \{\mathcal{E}(Q_i^{-1})\} = \mathcal{E}(\mathbb{P}(\xi)) = \{\zeta \in \mathfrak{R}^{2n}; \zeta' \mathbb{P}(\xi) \zeta \leq 1, \xi \in \Upsilon\}$  é tal que para qualquer condição inicial  $\zeta_0 \in \mathcal{S}_0$  a origem do sistema em malha fechada correspondente (5.8), é assintoticamente estável para qualquer  $\varphi(\cdot)$  verificando a condição de setor (5.3) com  $\Delta = S_\Delta^{-1}$ .

**Demonstração:** Das condições propostas, primeiramente constatamos que  $\mathbb{U}$  é inversível, pois  $\mathbb{U} + \mathbb{U}' > 0$ . De (5.16) podemos concluir que

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{U}' Q_i^{-1} \mathbb{U} & \mathbb{U}' \mathbb{K}'_{(\ell)} - \mathbb{H}'_{i(\ell)} \\ * & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad e \quad \forall \ell = 1, \dots, m.$$

ou, equivalentemente

$$\begin{bmatrix} -Q_i^{-1} & \mathbb{K}'_{(\ell)} - \mathbb{Y}'_{i(\ell)} \\ * & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \geq 0$$

com  $\mathbb{Y}_i = \mathbb{H}_i \mathbb{U}^{-1}$ . Segue que:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}(\xi) & \mathbb{K}'_{(\ell)} - \mathbb{Y}(\xi)'_{(\ell)} \\ * & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall \ell = 1, \dots, m \quad e \quad \forall \xi \in \Upsilon$$

em que  $\mathbb{Y}(\xi) = \sum_{i=1}^N \xi_{k(i)} \mathbb{Y}_i$ . Assim, a inclusão  $\mathcal{E}(\mathbb{P}(\xi_k)) \subset S(\mathbb{K} - \mathbb{Y}(\xi_k), \rho)$  é obtida, na qual:

$$S(\mathbb{K} - \mathbb{Y}(\xi_k), \rho) = \{\zeta \in \mathfrak{R}^{2n}; |(\mathbb{K} - \mathbb{Y}(\xi_k))_{(\ell)} \zeta| \leq \rho, \forall \ell = 1, \dots, m\} \quad (5.17)$$

Agora, para garantirmos a  $\lambda$ -contratividade de  $\mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(\xi))$ , por meio de (5.11), consideremos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\lambda(\zeta_k, \xi_k) &= \Delta V_\lambda(\zeta_k, \xi_k) - 2\varphi(z_k)' S_\Delta^{-1} (\varphi(z_k) - \Omega \mathbb{L}(\xi_k) \zeta_k) - 2\Psi' S^{-1}(\xi_k) (\Psi - \mathbb{Y}(\xi_k) \zeta_k - F_c \varphi(z_k)) \\ &= \begin{bmatrix} \zeta_k' & \varphi(z_k)' & \Psi(u_k)' \end{bmatrix} \mathcal{M}(\xi) \begin{bmatrix} \zeta_k \\ \varphi(z_k) \\ \Psi(u_k) \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

na qual

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\xi) &= \begin{bmatrix} (\mathbb{A}(\xi_k) + \mathbb{B}(\xi_k)\mathbb{K})' \\ (\mathbb{G}(\xi_k) + \mathbb{B}(\xi_k)F_c)' \\ -\bar{\mathbb{B}}(\xi_k)' \end{bmatrix} \mathbb{Q}^{-1}(\xi_{k+1}) \begin{bmatrix} (\mathbb{A}(\xi_k) + \mathbb{B}(\xi_k)\mathbb{K}) & (\mathbb{G}(\xi_k) + \mathbb{B}(\xi_k)F_c) & -\bar{\mathbb{B}}(\xi_k) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -\lambda\mathbb{Q}^{-1}(\xi_k) & \mathbb{L}'(\xi_k)\Omega S_\Delta^{-1} & \mathbb{Y}'(\xi_k)S^{-1}(\xi_k) \\ S_\Delta^{-1}\Omega\mathbb{L}(\xi_k) & -2S_\Delta^{-1} & F_c' S^{-1}(\xi_k) \\ S^{-1}(\xi_k)\mathbb{Y}(\xi_k) & S^{-1}(\xi_k)F_c & -2S^{-1}(\xi_k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note que se  $\mathcal{V}_\lambda(\zeta_k, \xi_k) < 0$ , então também temos  $\Delta V_\lambda(\zeta_k, \xi_k) < 0$  como desejado. Constata-se que (5.18) é verificado se e somente se  $\mathcal{M}(\xi) < 0$  ou, pelo complemento de Schur, se e somente se

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{Q}(\xi_{k+1}) & (\mathbb{A}(\xi_k) + \mathbb{B}(\xi_k)\mathbb{K}) & (\mathbb{G}(\xi_k) + \mathbb{B}(\xi_k)F_c) S_\Delta & -\bar{\mathbb{B}}(\xi_k)S(\xi_k) \\ * & -\lambda\mathbb{Q}^{-1}(\xi_k) & \mathbb{L}'(\xi_k)\Omega & \mathbb{Y}'(\xi_k) \\ * & * & -2S_\Delta & S_\Delta F_c' \\ * & * & * & -2S(\xi_k) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.19)$$

Por outro lado, se a condição (5.15) é verificada, nós temos:

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{Q}(\xi_{k+1}) & (\mathbb{A}(\xi_k) + \mathbb{B}(\xi_k)\mathbb{K})\mathbb{U} & (\mathbb{B}(\xi_k)F_c + \mathbb{G}(\xi_k))S_\Delta & -\bar{\mathbb{B}}(\xi_k)S(\xi_k) \\ * & \lambda(\mathbb{Q}(\xi_k) - \mathbb{U} - \mathbb{U}') & \mathbb{U}'\mathbb{L}'(\xi_k)\Omega & \mathbb{H}'(\xi_k) \\ * & * & -2S_\Delta & S_\Delta F_c' \\ * & * & * & -2S(\xi_k) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.20)$$

onde  $\mathbb{H}(\xi_k) = \mathbb{Y}(\xi_k)\mathbb{U}$ . Segue que (5.20) implica que (5.19) ou, equivalentemente, que (5.18) é verificado, pois  $\mathbb{U}'\mathbb{Q}^{-1}(\xi)\mathbb{U} < -\mathbb{Q}(\xi) + \mathbb{U}' + \mathbb{U}$ . Assim, como a não-linearidade  $\varphi(z_k)$  é verificada globalmente e, por construção, a não-linearidade  $\Psi(u_k)$  é verificada  $\forall \zeta_k \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(\xi))$  temos, pela definição 5.1, que a FLDP  $\mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(\xi))$  é *robustamente absolutamente*

$\lambda$ -contrativo. Conseqüentemente, para todo  $\zeta_k \in S_0 \triangleq \mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(\xi))$ , segue que as trajetórias do sistema (5.8) convergem assintoticamente para a origem para toda não-linearidade  $\varphi(z_k)$  verificando (5.3) para  $\Delta = S_\Delta^{-1}$ .  $\square$

## 5.4 Condições de Estabilização

Com base no trabalho de [53] e no resultado obtido no capítulo 3, definimos as matrizes, de dimensão  $n$ , reais e quadradas  $N$ ,  $M$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $W$  e  $Z$  tais que:

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} X & N \\ Z & \bullet \end{bmatrix}, \quad \mathbb{U}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & M \\ W & \bullet \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta_1 = \begin{bmatrix} Y & I \\ W & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

De (5.21) segue que

$$XY + NW = YX + MZ = I \quad (5.22)$$

Também temos:

$$\mathbb{U}\Theta_1 = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & Z \end{bmatrix} \implies \Theta_1' \mathbb{U}\Theta_1 = \begin{bmatrix} Y' & T' \\ I & X \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

em que, por construção:

$$T' = Y'X + W'Z \quad (5.24)$$

Além disso, particionando  $\mathbb{Q}_i = \begin{bmatrix} Q_{11i} & Q_{12i} \\ * & Q_{22i} \end{bmatrix}$ , leva-nos a:

$$\begin{aligned} \Theta_1' \mathbb{Q}_i \Theta_1 &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11i} & \bar{Q}_{12i} \\ * & \bar{Q}_{22i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Y'Q_{11i}Y + W'Q'_{12i}Y + Y'Q_{12i}W + W'Q_{22i}W & Y'Q_{11i} + W'Q'_{12i} \\ * & Q_{11i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Agora podemos propor a seguinte condição de estabilização local via LMIs.

**Teorema 5.1** *Dado um escalar não negativo  $\lambda \in (0, 1]$ , suponha que existam matrizes  $(\bar{Q}_{11i}, \bar{Q}_{12i}, \bar{Q}_{22i}, X, Y, T) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , matrizes diagonais positivas  $S_i \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e  $S_\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  e matrizes  $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{F}_i, \hat{G}_i, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}, \hat{H}_{1i}, \hat{H}_{2i} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , satisfazendo as duas*

condições seguintes:

$$\begin{bmatrix} -\bar{Q}_{11j} & -\bar{Q}_{12j} & Y'A_i + \hat{B}_i C & \hat{A}_i & \hat{F}'_i & \hat{G}_i \\ * & -\bar{Q}_{22j} & A_i + B_i \hat{D} C & A_i X + B_i \hat{C} & B_i \hat{E} + G_i S_\Delta & -B_i S_i \\ * & * & \lambda(\bar{Q}_{11i} - Y' - Y) & \lambda(\bar{Q}_{12i} - T' - I) & L'_i \Omega & \hat{H}'_{1i} \\ * & * & * & \lambda(\bar{Q}_{22i} - X' - X) & X' L'_i \Omega & \hat{H}'_{2i} \\ * & * & * & * & -2S_\Delta & \hat{E}' \\ * & * & * & * & * & -2S_i \end{bmatrix} < 0 \quad (5.26)$$

$\forall j = 1, \dots, N \quad e \quad \forall i = 1, \dots, N$

$$\begin{bmatrix} -\bar{Q}_{11i} + Y' + Y & -\bar{Q}_{12i} + T' + I & (\hat{D}_{(\ell)} C)' - \hat{H}'_{1i(\ell)} \\ * & -\bar{Q}_{22i} + X' + X & \hat{C}'_{(\ell)} - \hat{H}'_{2i(\ell)} \\ * & * & \rho_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (5.27)$$

$\forall i = 1, \dots, N \quad e \quad \forall \ell = 1, \dots, m$

Sendo a matriz  $N$  e a matriz não-singular  $W$  obtidas por meio da decomposição

$$NW = I - XY \quad (5.28)$$

determine:

$$Z = (W')^{-1} (T' - Y'X) \quad (5.29)$$

Então, o controlador (5.4) com

$$\begin{cases} D_c = \hat{D} \ , \ C_c = (\hat{C} - D_c C X) Z^{-1} \ , \ B_{ci} = (W')^{-1} (\hat{B}_i - Y' B_i D_c) \ , \\ A_{ci} = (W')^{-1} (\hat{A}_i - W' B_{ci} C X - Y' B_i C_c Z - Y' (A_i + B_i D_c C) X) Z^{-1} \ , \\ F_c = \hat{E} S_\Delta^{-1} \ , \ E_{ci} = -(W')^{-1} (\hat{G}_i S_i^{-1} + Y' B_i) \ , \\ G_{ci} = (W')^{-1} (\hat{F}_i S_\Delta^{-1} - Y' (G_i + B_i F_c)) \end{cases} \quad (5.30)$$

e o conjunto  $\mathcal{S}_0 \triangleq \mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(\xi_k)) = \bigcap_{i=1, \dots, N} \mathcal{E}(\mathbb{Q}_i^{-1})$ , com  $\mathbb{Q}_i = \begin{bmatrix} Q_{11i} & Q_{12i} \\ * & Q_{22i} \end{bmatrix}$ , em que:

$$\begin{cases} Q_{11i} = \bar{Q}_{22i} \quad , \quad Q_{12i} = (\bar{Q}'_{12i} - Q_{11i}Y)W^{-1} \quad , \\ Q_{22i} = (W')^{-1} (\bar{Q}_{11} - Y'Q_{11i}Y - W'Q'_{12i}Y - Y'Q_{12i}W) W^{-1} \end{cases} \quad (5.31)$$

é uma região de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada (5.8), para qualquer não-linearidade  $\varphi(z)$  satisfazendo à relação (5.3) com  $\Delta = S_{\Delta}^{-1}$ .

**Demonstração:** De (5.26) temos que  $\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11i} & \bar{Q}_{12i} \\ * & \bar{Q}_{22i} \end{bmatrix} > 0$  e, conseqüentemente, que

$$\begin{bmatrix} Y' + Y & T' + I \\ T + I & X' + X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y' & T' \\ I & X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y & I \\ T & X' \end{bmatrix} > 0.$$

Segue que  $X$  e  $Y$  são matrizes não singulares. Além disso,  $\text{rank}(T' - Y'X) = n$ , pois

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} Y' & T' \\ I & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & Y' \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & T' - Y'X \\ I & X \end{bmatrix} \right) = 2n.$$

Escolhendo uma matriz não singular  $W$  a partir da decomposição (5.28), segue que (5.29) é bem definida e também que  $Z$  é não singular. Isto significa que, a partir de (5.22), podemos calcular  $M = (I - YX)Z^{-1}$ . Além disso, concluímos que a matriz correspondente  $\Theta_1$ , definida em (5.21), é também não singular.

Considere na seqüência (5.25) e a mudança de variáveis seguinte:

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= W'A_{ci}Z + W'B_{ci}CX + Y'B_iC_cZ + Y'(A_i + B_iD_cC)X, \\ \hat{B}_i &= Y'B_iD_c + W'B_{ci}, \quad \hat{C} = D_cCX + C_cZ, \quad \hat{D} = D_c, \\ \hat{E} &= F_cS_{\Delta}, \quad \hat{F}_i = Y'B_i\hat{E} + Y'G_iS_{\Delta} + W'G_{ci}S_{\Delta}, \quad \hat{H}_{2i} = H_{1i}, \\ \hat{G}_i &= -Y'B_iS_i - W'E_{ci}S_i, \quad \hat{H}_{1i} = H_{1i}Y + H_{2i}W \end{aligned} \quad (5.32)$$

Assim, pré e pós multiplicando as desigualdades (5.15) por  $\text{diag}(\Theta_1, \Theta_1, I_p, I_m)'$  e sua transposta, respectivamente, mostramos que a verificação de (5.15) é equivalente à verificação de (5.26). Igualmente, pré e pós multiplicando a desigualdade (5.16) por  $\text{diag}(\Theta_1, 1)$  e sua transposta, respectivamente, mostramos a equivalência entre (5.16) e



(5.27).

Finalmente, a partir dos valores obtidos de  $X$  e  $Y$ , e os valores calculados de  $N$ ,  $M$ ,  $Z$  e  $W$ , as expressões (5.30) e (5.31) são soluções únicas para (5.25) e (5.32), respectivamente. Por intermédio do Lema 5.1 asseguramos  $\mathbb{H}_i = \begin{bmatrix} H_{1i} & H_{2i} \end{bmatrix}$ , com  $H_{1i} = \hat{H}_{2i}$  e  $H_{2i} = (\hat{H}_{1i} - H_{1i}Y)W^{-1}$ . Isto conclui a prova.  $\square$

## 5.5 Projeto do controlador

Para a otimização do tamanho do conjunto  $\mathcal{S}_0 \triangleq \mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(\xi))$  adotamos o modelo descrito nos capítulos anteriores  $\Xi_0 = \{v_r \in \mathfrak{R}^{2n}, r = 1, \dots, n_r\}$ . Assim, a meta consiste em maximizar o fator escalar  $\beta$  tal que a seguinte condição de inclusão seja verificada:

$$\beta \Xi_0 \subset \mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(\xi)) \iff (\beta v_r') \mathbb{Q}^{-1}(\xi) (\beta v_r) \leq 1 \quad \forall r = 1, \dots, n_r \text{ e } \forall \xi \in \Upsilon \quad (5.33)$$

Aplicando o complemento de Schur, a satisfação de (5.33) é equivalente às seguintes restrições convexas:

$$\begin{bmatrix} \mu & v_r' \\ * & \mathbb{Q}_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, N \\ \forall r = 2, \dots, n_r \end{array} \quad (5.34)$$

em que, por definição,  $\mu = \frac{1}{\beta^2}$ . Como estamos interessados em maximizar a região de estabilidade nas direções associada aos estados da planta, vamos considerar  $v_r = \begin{bmatrix} v_{r1}' & 0 \end{bmatrix}'$ . Pré e pós multiplicando (5.34) por  $\text{diag}(1, \Theta_1')$  e sua transposta, respectivamente, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \mu & v_{r1}' Y & v_{r1}' \\ * & \bar{Q}_{11i} & \bar{Q}_{12i} \\ * & * & \bar{Q}_{22i} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, N \\ \forall r = 2, \dots, n_r \end{array} \quad (5.35)$$

Assim sendo, o seguinte problema de programação convexa resulta na solução numérica do Problema 5.1:

$$\begin{array}{l} \min \quad \mu \\ \bar{Q}_{11i}, \bar{Q}_{12i}, \bar{Q}_{22i}, \bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{F}_i, \bar{G}_i, \\ \bar{H}_{1i}, \bar{H}_{2i}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}, X, Y, T, S_{\Delta}, S_i \\ \text{sujeito à} \end{array} \quad (5.36)$$

LMI's (5.26), (5.27) e (5.35).

**Observação 5.1** Quando não realimentamos a não-linearidade  $\varphi(\cdot)$  no compensador dinâmico, isto é,  $F_c = 0$  e  $G_c(\xi_k) = 0$ , a desigualdade (5.26) é substituída por

$$\begin{bmatrix}
-\bar{Q}_{11j} & -\bar{Q}_{12j} & Y'A_i + \hat{B}_i C & \hat{A}_i & Y'G_i S'_\Delta & \hat{G}_i \\
* & -\bar{Q}_{22j} & A_i + B_i \hat{D} C & A_i X + B_i \hat{C} & G_i S_\Delta & -B_i S_i \\
* & * & \lambda(\bar{Q}_{11i} - Y' - Y) & \lambda(\bar{Q}_{12i} - T' - I) & L'_i \Omega & \hat{H}'_{1i} \\
* & * & * & \lambda(\bar{Q}_{22i} - X' - X) & X' L'_i \Omega & \hat{H}'_{2i} \\
* & * & * & * & -2S_\Delta & 0 \\
* & * & * & * & * & -2S_i
\end{bmatrix} < 0$$

$$\forall j = 1, \dots, N \quad e \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (5.37)$$

sendo as variáveis definidas como em (5.32). Dessa forma, para podermos determinar a desigualdade (5.37) como uma LMI necessitamos fixar a priori  $S_\Delta$ . Agora, para a resolução do problema de programação convexa, temos:

$$\begin{aligned}
& \min \quad \mu \\
& \quad \bar{Q}_{11i}, \bar{Q}_{12i}, \bar{Q}_{22i}, \hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{G}_i, \\
& \quad \hat{H}_{1i}, \hat{H}_{2i}, \hat{C}, \hat{D}, X, Y, T, S_i
\end{aligned} \quad (5.38)$$

sujeito à

LMI (5.37), (5.27) e (5.35).

**Observação 5.2** Quando no compensador dinâmico a realimentação da não-linearidade de zona-morta for nula, isto é, o termo de realimentação do anti-windup  $E_c = 0$ , temos a desigualdade seguinte:

$$\begin{bmatrix}
-\bar{Q}_{11j} & -\bar{Q}_{12j} & Y'A_i + \hat{B}_i C & \hat{A}_i & \hat{F}'_i & -Y'B_i S \\
* & -\bar{Q}_{22j} & A_i + B_i \hat{D} C & A_i X + B_i \hat{C} & B_i \hat{E} + G_i S_\Delta & -B_i S \\
* & * & \lambda(\bar{Q}_{11i} - Y' - Y) & \lambda(\bar{Q}_{12i} - T' - I) & L'_i \Omega & \hat{H}'_{1i} \\
* & * & * & \lambda(\bar{Q}_{22i} - X' - X) & X' L'_i \Omega & \hat{H}'_{2i} \\
* & * & * & * & -2S_\Delta & \hat{E}' \\
* & * & * & * & * & -2S
\end{bmatrix} < 0$$

$$\forall j = 1, \dots, N \quad e \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (5.39)$$

Então, para a resolução da desigualdade (5.39) necessitamos fixar a priori o valor de  $S$ , com as variáveis sendo definidas como anteriormente (5.32). O problema de programação

convexa passa a ser:

$$\begin{aligned} & \min_{\substack{\mu \\ \bar{Q}_{11i}, \bar{Q}_{12i}, \bar{Q}_{22i}, \hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{F}_i, \\ \hat{H}_{1i}, \hat{H}_{2i}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}, X, Y, T, S_{\Delta}}} \mu \\ & \text{sujeito à} \\ & \text{LMIs (5.39), (5.27) e (5.35).} \end{aligned} \quad (5.40)$$

## 5.6 Exemplo

Considere os dados seguintes para o sistema (5.1)-(5.2), correspondente aos dados empregados no exemplo numérico do capítulo anterior acrescidos da matriz de saída  $C$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -1.1 & 0.4 \\ -0.2 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.7 \\ 0.6 & 1.3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.3 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \\ \Omega &= 0.7, \quad \rho = 1 \quad \text{e} \quad \varphi = 0.3z(1 + \sin(z)), \quad \forall z \in \mathfrak{R}^p \end{aligned}$$

Considere também:

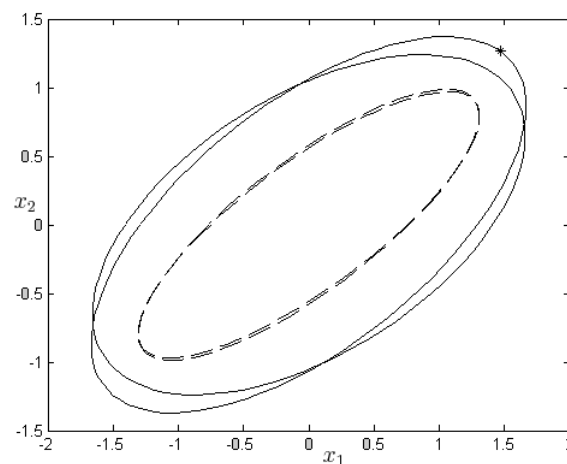
$$\Xi_0 = \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Os resultados numéricos da Tabela 5.1 correspondem à utilização do problema de otimização (5.36) para obtenção do compensador dinâmico parcialmente dependente de parâmetros (5.4)-(5.5). O valor  $\lambda = 0.7657$  foi o menor valor factível obtido para o coeficiente de contratividade. As elipses representadas na Figura 5.1 referem-se aos resultados numéricos, conforme Tabela 5.1. Nesta representação, a interseção das elipses externas, em linhas cheias, correspondem à projeção para  $\lambda = 0.95$ , e a interseção das elipses internas, linhas tracejadas, para  $\lambda = 0.7657$ . Constatamos então que com a exigência de melhor desempenho, isto é, menor coeficiente de contratividade, ocorre uma diminuição da região em que a estabilidade assintótica é garantida.

Uma simulação do sistema sob saturação está representada na Figura 5.2, na qual os dados utilizados foram:  $\lambda = 0.95$ , a condição inicial  $x_0 = [1.4695 \ 1.2642]'$  que está

	$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.7657$
$Q_1$	$\begin{bmatrix} 2.7782 & 1.4413 \\ 1.4413 & 1.8785 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.7035 & 1.0422 \\ 1.0422 & 0.9738 \end{bmatrix}$
$Q_2$	$\begin{bmatrix} 2.7503 & 1.0813 \\ 1.0813 & 1.5336 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.7105 & 1.0357 \\ 1.0357 & 0.9400 \end{bmatrix}$
$A_{c1}$	$\begin{bmatrix} -0.5007 & -0.0032 \\ -6.9448 & -0.0186 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0586 & 0.0036 \\ -0.3677 & -0.0082 \end{bmatrix}$
$A_{c2}$	$\begin{bmatrix} 0.0148 & 0.0040 \\ 37.1206 & -0.1432 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0098 & 0.0039 \\ -1.2561 & 0.0128 \end{bmatrix}$
$B_{c1}$	$\begin{bmatrix} 0.3612 \\ 16.7805 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9193 \\ -0.8652 \end{bmatrix}$
$B_{c2}$	$\begin{bmatrix} 0.2662 \\ 0.5795 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5792 \\ 0.9930 \end{bmatrix}$
$C_c$	$\begin{bmatrix} 0.4771 & -0.0018 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.3291 & 0.0014 \end{bmatrix}$
$D_c$	$-0.9359$	$-0.9790$
$E_{c1}$	$\begin{bmatrix} -0.9808 \\ -47.6089 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.4657 \\ 13.3782 \end{bmatrix}$
$E_{c2}$	$\begin{bmatrix} -1.3287 \\ 79.0009 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.6810 \\ -12.2338 \end{bmatrix}$
$F_c$	$0.4444$	$-0.1234$
$G_{c1}$	$\begin{bmatrix} -0.9643 \\ 1.7950 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.1441 \\ -0.6268 \end{bmatrix}$
$G_{c2}$	$\begin{bmatrix} -1.1455 \\ -7.4404 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.1697 \\ -0.7459 \end{bmatrix}$
$\beta$	$1.0047$	$0.0208$

Tabela 5.1: Resultados numéricos utilizando compensador dinâmico (5.4)-(5.5)

Figura 5.1: Representação da região de estabilidade para  $\lambda = 0.95$  (-),  $\lambda = 0.7657$  (- -) e compensador dinâmico (5.4)-(5.5)

assinalada na Figura 5.1 e as seqüências de parâmetros  $\{\xi_k\}_1$  e  $\{\xi_k\}_2$ , conforme exemplo numérico do capítulo 4. Nos gráficos à esquerda observa-se a convergência assintótica para

a origem das trajetórias dos estados  $x_1$  (representado por  $\circ$ ) e  $x_2$  (representado por  $*$ ). Já a representação à direita refere-se ao valor de controle calculado  $u_k$  (representado por  $*$ ) e o valor de controle efetivamente aplicado  $sat(u_k)$  (representado por  $\square$ ). Salientamos que para a seqüência  $\{\xi_k\}_1$ , temos dois pontos de saturação e na seqüência  $\{\xi_k\}_2$  um ponto de saturação, concluindo assim que para diferentes seqüências o comportamento do sinal de controle sob saturação é diferente. O desempenho do sistema em termos dos valores de  $V(\zeta_k, \xi_k)$ , calculado ao longo destas trajetórias, é mostrado na Figura 5.3, onde constatamos que para a seqüência dois a convergência é mais rápida.

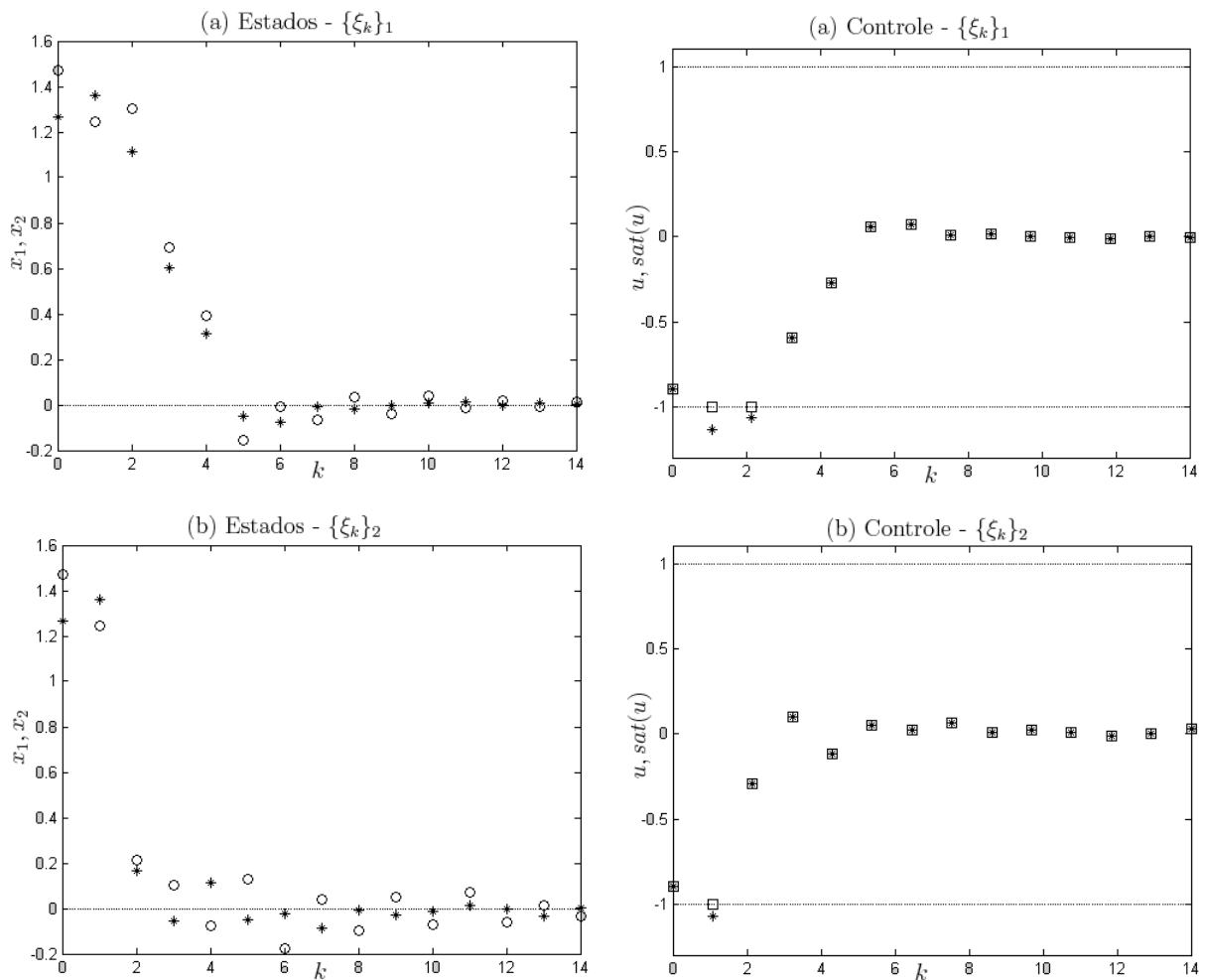


Figura 5.2: Simulações para duas seqüências aleatórias, com  $x_0 = [1.4695 \ 1.2642]'$ ,  $\lambda = 0.95$  e compensador dinâmico (5.4)-(5.5)

A Tabela 5.2 exhibe os resultados numéricos obtidos quando resolvemos o problema de programação convexa (5.38) para obtenção de um compensador dinâmico sem a realimentação da não-linearidade  $\varphi$  ( $F_c = 0$  e  $G_c(\xi_k) = 0$ ), utilizando-se  $S_\Delta = 1.2$ . Na Figura 5.4, a interseção das elipses externas corresponde ao resultado obtido quando  $\lambda = 0.95$  e

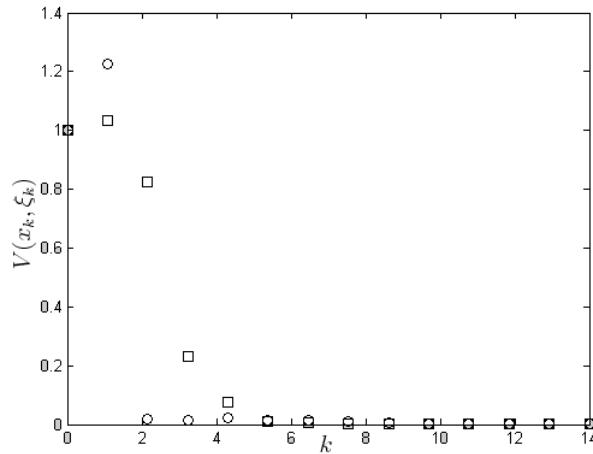


Figura 5.3: Valores de  $V(\zeta_k, \xi_k)$  ao longo das trajetórias dos estados da Figura 5.2, para as duas seqüências  $\{\xi_k\}_1(\square)$  e  $\{\xi_k\}_2(\circ)$

a interseção das elipses internas, tracejadas, corresponde a  $\lambda = 0.8582$ , o qual é o menor valor factível para o coeficiente de  $\lambda$ -contratividade. As simulações para este caso estão representadas na Figura 5.5 e o desempenho do sistema em termos dos valores de  $V(\zeta_k, \xi_k)$  é mostrado na Figura 5.6, para as duas seqüências  $\{\xi_k\}_1$  e  $\{\xi_k\}_2$ .

	$\lambda = 0.95$	$\lambda = .8348$
$Q_1$	$\begin{bmatrix} 2.9475 & 1.5236 \\ 1.5236 & 1.9362 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.2518 & 1.2222 \\ 1.2222 & 1.1808 \end{bmatrix}$
$Q_2$	$\begin{bmatrix} 2.8878 & 1.1387 \\ 1.1387 & 1.5503 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.2584 & 1.2184 \\ 1.2184 & 1.1829 \end{bmatrix}$
$A_{c1}$	$\begin{bmatrix} -0.4425 & -0.0029 \\ -2.1085 & -0.0273 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.1868 & 0.0011 \\ -2.2771 & 0.0090 \end{bmatrix}$
$A_{c2}$	$\begin{bmatrix} -0.1336 & 0.0086 \\ 5.2799 & -0.0347 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0214 & -0.0003 \\ 1.2020 & -0.0115 \end{bmatrix}$
$B_{c1}$	$\begin{bmatrix} 0.3896 \\ 2.7831 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5188 \\ -5.1765 \end{bmatrix}$
$B_{c2}$	$\begin{bmatrix} 0.1868 \\ -1.2304 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2838 \\ 1.9285 \end{bmatrix}$
$C_c$	$\begin{bmatrix} 0.7605 & 0.0004 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5992 & -0.0020 \end{bmatrix}$
$D_c$	$-0.7311$	$-0.9207$
$E_{c1}$	$\begin{bmatrix} -0.7151 \\ -16.5684 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0961 \\ 17.0213 \end{bmatrix}$
$E_{c2}$	$\begin{bmatrix} -0.6208 \\ 3.2087 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.1005 \\ 2.8660 \end{bmatrix}$
$\beta$	$0.9844$	$0.5596$

Tabela 5.2: Resultados numéricos para  $F_c = 0$ ,  $G_c(\xi_k) = 0$ ,  $S_\Delta = 1.2$  e utilizando (5.38)

Resolvendo os problemas de programação convexa (5.36) e (5.38) com  $\lambda = 0.8582$  e

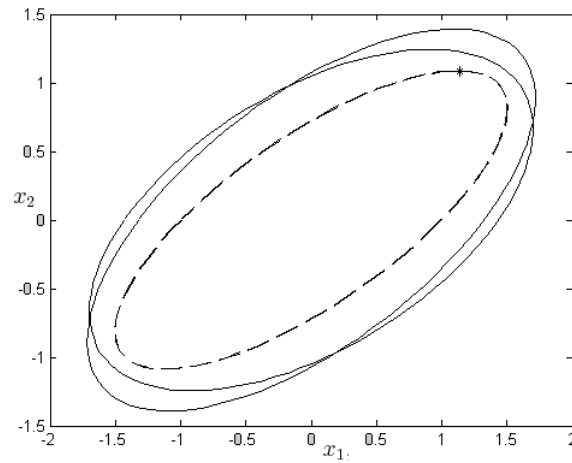


Figura 5.4: Representação da região de estabilidade para  $\lambda = 0.95$  (—),  $\lambda = 0.8582$  (---),  $F_c = 0$ ,  $G_c(\xi_k) = 0$ ,  $S_\Delta = 1.2$  e utilizando (5.38)

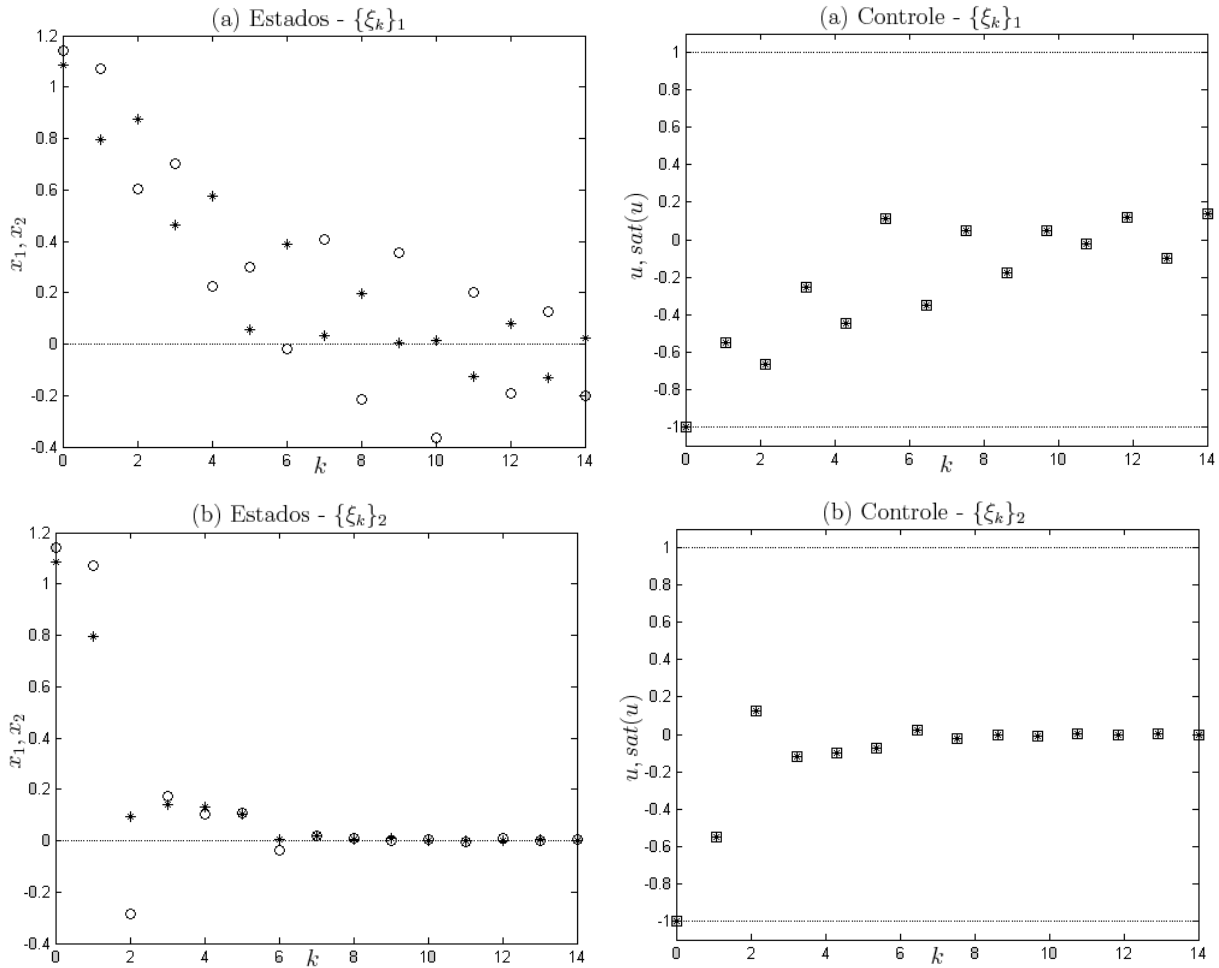


Figura 5.5: Simulações para duas seqüências aleatórias, com  $x_0 = [1.1404 \ 1.0865]'$ ,  $S_\Delta = 1.2$ ,  $\lambda = 0.8348$ ,  $F_c = 0$ ,  $G_c(\xi_k) = 0$  e utilizando (5.38)

$S_\Delta = 1.2$  (para a resolução do problema 5.38), encontramos as regiões de estabilidade que estão representadas na Figura 5.7. Nesta representação, verificamos que realimentando a

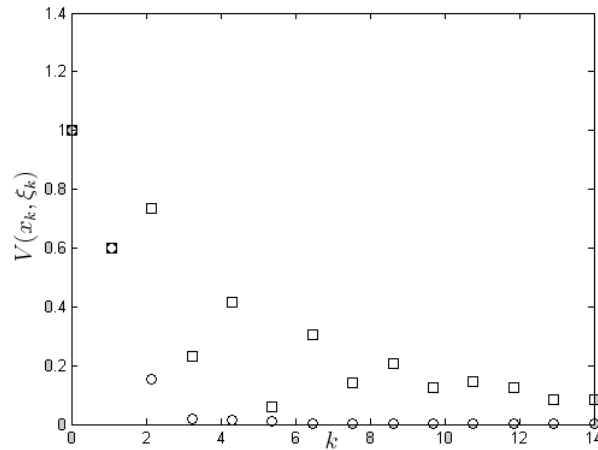


Figura 5.6: Valores de  $V(\zeta_k, \xi_k)$  ao longo das trajetórias dos estados da Figura 5.5, para as duas seqüências  $\{\xi_k\}_1(\square)$  e  $\{\xi_k\}_2(\circ)$

não-linearidade  $\varphi$  ( $F_c \neq 0$  e  $G_c(\xi_k) \neq 0$ ), linha cheia, a região de estabilidade é maior do que quando temos a realimentação da não-linearidade  $\varphi$  nula, isto é,  $F_c = 0$  e  $G_c(\xi_k) = 0$ .

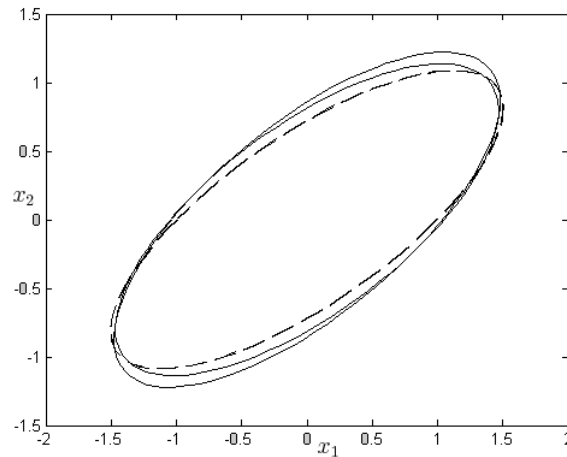


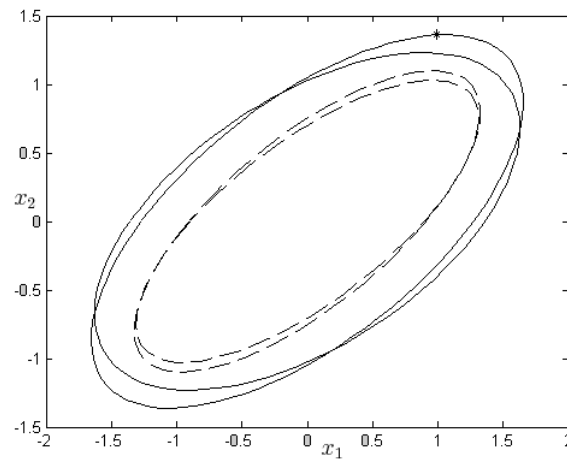
Figura 5.7: Comparativo da região de estabilidade entre os sistemas com  $F_c \neq 0$  e  $G_c \neq 0$  (—) e com  $F_c = 0$  e  $G_c = 0$  (- -) para  $\lambda = 0.8582$  e  $S_\Delta = 1.2$

Os valores obtidos para o compensador dinâmico encontrados na Tabela 5.3 foram calculados fazendo uso do problema de programação convexa (5.40), o qual desconsidera a realimentação da não-linearidade de zona-morta, utilizando-se  $S = 0.4$ . As elipses encontradas estão representadas na Figura 5.8. As simulações das trajetórias dos estados, os valores de controle e o comparativo do desempenho do sistema em termos dos valores de  $V(\zeta_k, \xi_k)$  estão representados nas Figuras 5.9 e 5.10 respectivamente.

Quando realimentamos a não-linearidade de zona-morta ( $E_c \neq 0$ ), problema (5.36), temos uma região de estabilidade maior do que no caso em que não há realimentação



	$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.8751$
$Q_1$	$\begin{bmatrix} 2.7322 & 1.4372 \\ 1.4372 & 1.8538 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.7531 & 1.0580 \\ 1.0580 & 1.2050 \end{bmatrix}$
$Q_2$	$\begin{bmatrix} 2.6534 & 1.1064 \\ 1.1064 & 1.5163 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.7168 & 0.9833 \\ 0.9833 & 1.0569 \end{bmatrix}$
$A_{c1}$	$\begin{bmatrix} -0.4859 & -0.0112 \\ -6.6845 & -0.3604 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.1454 & -0.0027 \\ -1.8144 & -0.0353 \end{bmatrix}$
$A_{c2}$	$\begin{bmatrix} 0.0524 & 0.0015 \\ 13.7203 & 0.0516 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2532 & 0.0054 \\ 3.6347 & -0.0196 \end{bmatrix}$
$B_{c1}$	$\begin{bmatrix} 0.2565 \\ 1.2170 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.8552 \\ 6.5995 \end{bmatrix}$
$B_{c2}$	$\begin{bmatrix} 0.1783 \\ 2.1104 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.3100 \\ -4.4388 \end{bmatrix}$
$C_c$	$\begin{bmatrix} 0.4970 & -0.0104 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2203 & 0.0008 \end{bmatrix}$
$D_c$	$-1.0075$	$-1.1277$
$F_c$	$0.3382$	$0.4737$
$G_{c1}$	$\begin{bmatrix} -1.0390 \\ -8.5399 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.2457 \\ -29.0266 \end{bmatrix}$
$G_{c2}$	$\begin{bmatrix} -0.6850 \\ 9.4726 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5003 \\ 26.8191 \end{bmatrix}$
$\beta$	$0.9865$	$0.6777$

Tabela 5.3: Resultados numéricos para  $E_c = 0$ ,  $S = 0.4$  e utilizando (5.40)Figura 5.8: Representação da região de estabilidade para  $\lambda = 0.95$  (—),  $\lambda = 0.8751$  (- -),  $E_c(\xi_k) = 0$ ,  $S = 0.4$  e utilizando (5.40)

da zona-morta ( $E_c = 0$ ), problema (5.40), conforme é mostrado na Figura 5.11 para  $\lambda = 0.8751$  e  $S = 0.4$ .

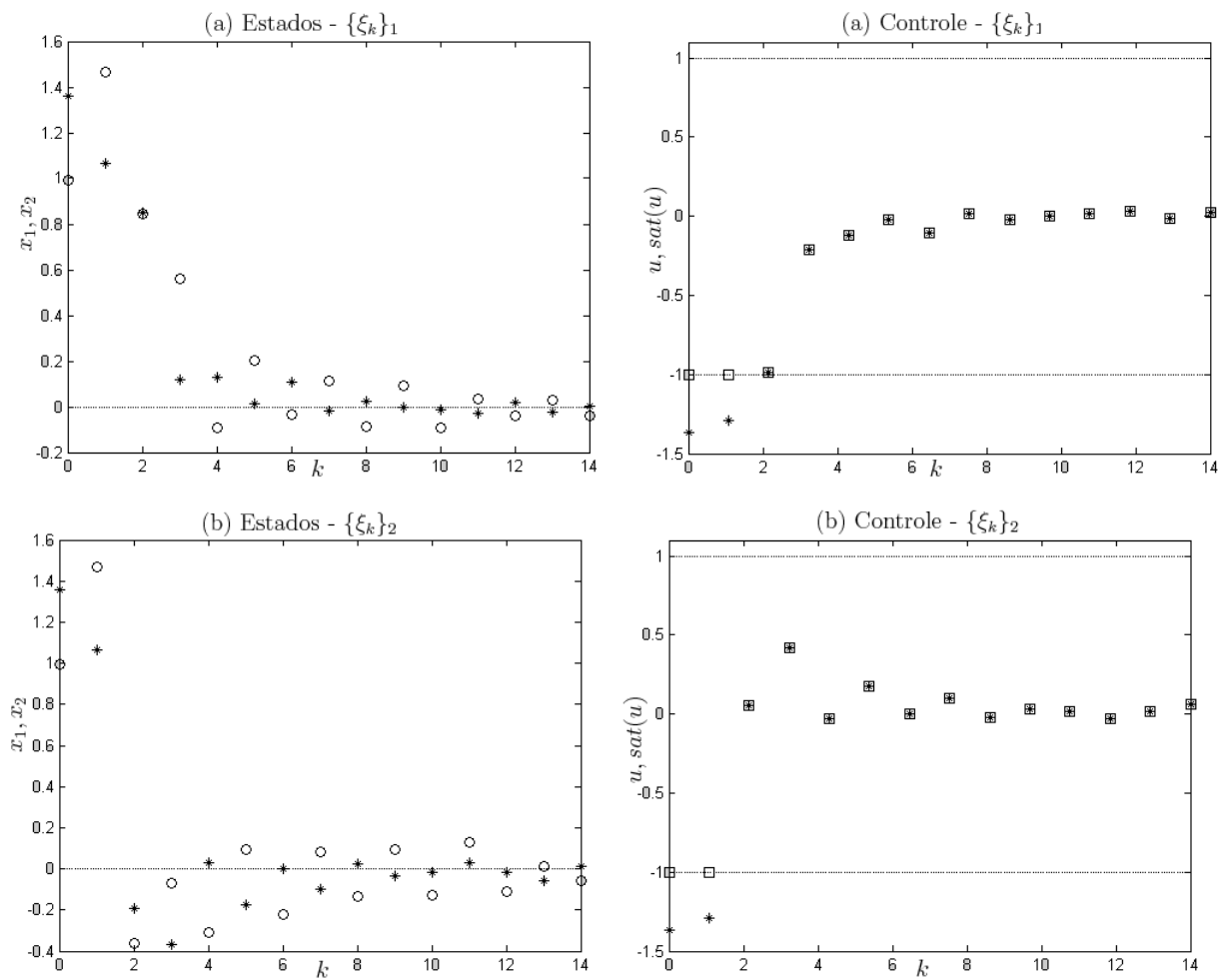


Figura 5.9: Simulações para duas seqüências aleatórias, com  $x_0 = [0.9705 \ 1.0279]'$ ,  $\lambda = 0.8751$ ,  $E_c(\xi_k) = 0$ ,  $S = 0.4$  e utilizando (5.40)

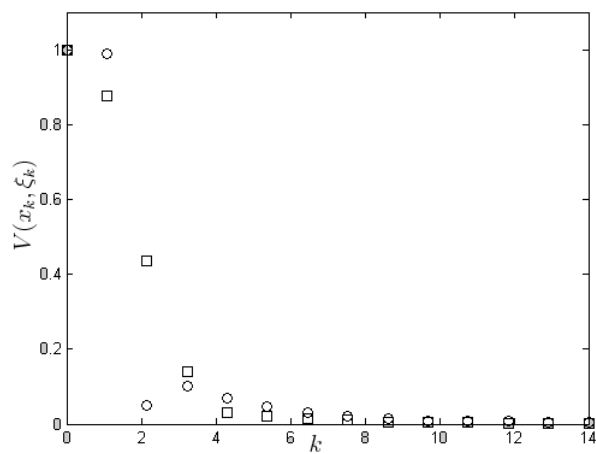


Figura 5.10: Valores de  $V(\zeta_k, \xi_k)$  ao longo das trajetórias dos estados da Figura 5.9, para as duas seqüências  $\{\xi_k\}_1$  ( $\square$ ) e  $\{\xi_k\}_2$  ( $\circ$ )

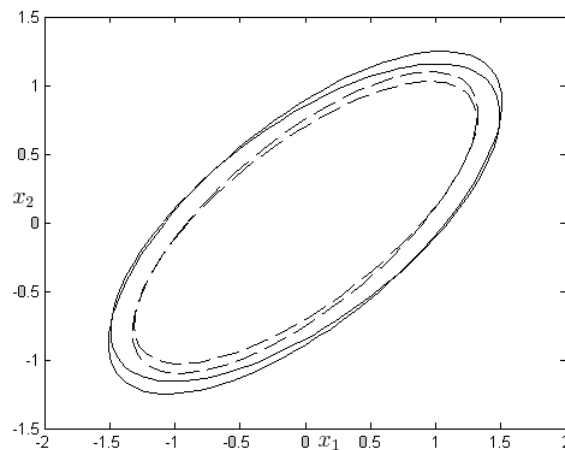


Figura 5.11: Comparativo da região de estabilidade entre os sistemas com  $E_c \neq 0$  (—) e com  $E_c = 0$  (- -) para  $\lambda = 0.8751$  e  $S = 0.4$

## 5.7 Conclusão

Neste capítulo realizamos o estudo do controle sob saturação de um sistema não-linear em tempo discreto e com parâmetros variantes via um compensador dinâmico parcialmente dependente de parâmetros. Propomos, então, condições de estabilização com o uso de uma Função de Lyapunov dependente de parâmetros e condição de setor modificada para representar a não-linearidade de saturação.

Com o emprego da técnica similar a proposta por Scherer [53] e a desenvolvida no capítulo 3, verificamos que a região de estabilidade torna-se mais restrita com relação ao sistema não-linear em tempo discreto e com parâmetros variantes sem o compensador dinâmico .

Verificamos, por intermédio do exemplo numérico, que a realimentação da não-linearidade  $\varphi(\cdot)$  e a realimentação da não-linearidade de zona-morta influenciam diretamente no desempenho e tamanho da região elipsoidal de estabilização.



# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho foram apresentadas algumas contribuições teóricas e ferramentas para o projeto de controladores para uma classe de sistemas não-lineares com atuadores saturantes. A classe de sistemas não-lineares a controlar pode ser vista como um sistema de tipo Lur'e, composto por um sistema linear realimentado por uma não-linearidade de tipo setor limitado associada à dinâmica do sistema, na presença de limites impostos sobre a amplitude das entradas de controle. Estes limites podem ser devido às limitações tecnológicas ou de segurança dos atuadores. Ao longo do trabalho as leis de controle, inspiradas em [9, 11, 39], consideraram a possibilidade de realimentação de estados do sistema, ou de parte destes, em conjunto com a realimentação da não-linearidade associada à dinâmica do sistema, com o objetivo de melhorar o desempenho dinâmico e de maximizar a região de estabilidade assintótica do sistema de controle. Os resultados apresentados ao longo do trabalho aplicam-se ao problema de regulação de sistemas não-lineares com atuadores saturantes.

Dentro do contexto descrito acima, o Capítulo 1, visou introduzir e contextualizar a problemática de controle considerada, referenciando trabalhos existentes em controle sob saturação de sistemas lineares e não-lineares, e apresentando brevemente as ferramentas utilizadas ao longo do trabalho. Os resultados existentes e que serviram de base para o desenvolvimento da presente tese de doutorado foram apresentados no Capítulo 2 [9, 11, 12]. Assim, foi realizada uma breve descrição dos problemas considerados nestas referências, apresentando-se os resultados previamente propostos para o controle de sistemas de tipo Lur'e com parâmetros conhecidos/fixos, nos casos contínuo e discreto no tempo. Em particular, relatamos e mostramos como os resultados teóricos, obtidos sob a forma de LMIs,

se adaptam para o projeto de controladores que maximizam a região de estabilidade do sistema em malha fechada, via a resolução de problemas de programação convexa.

Os capítulos seguintes foram dedicados à apresentação dos resultados propostos no contexto desta tese. As contribuições do trabalho estão relacionadas principalmente à utilização de leis de controle de tipo realimentação de saídas e no tratamento do problema de controle para o caso de sistemas de tipo Lur'e com parâmetros variantes no tempo. Assim, no Capítulo 3, inspirado no trabalho de Scherer et al [53], propusemos a utilização de um compensador dinâmico não-linear para tratar o caso de sistemas precisamente conhecidos. Este controlador é composto por uma parte linear, uma malha *anti-windup* e um termo associado à saída da não-linearidade vinculada à dinâmica do sistema a controlar. Mediante um problema de otimização, conseguimos maximizar a região elipsoidal de atração do domínio, determinando assim a região de estabilização, além de melhorar o desempenho do sistema em malha fechada. Os resultados deste capítulo foram publicados no Congresso Mundial do IFAC, 2008 [19].

Nos capítulos seguintes consideramos o caso de sistemas não-lineares em tempo discreto com parâmetros variantes no tempo. Para o Capítulo 4, utilizamos duas leis de controle diferentes para controlar a classe de sistemas não-lineares com atuadores saturantes: uma lei de controle com parâmetros variante e uma lei de controle com parâmetros fixos, ambos sob a forma de uma realimentação de estados e mais a realimentação da não-linearidade. Abordamos o conceito de  $\lambda$ -contratividade para tratar o problema de síntese para uma classe de sistemas não-lineares sob atuadores saturantes. A propriedade de contratividade é garantida de forma robusta para um conjunto de condições iniciais definido a partir de uma Função de Lyapunov dependente dos parâmetros. A abordagem utilizada permite considerar não-linearidades que podem ser representadas como parâmetros variantes e/ou não-linearidades de tipo setor globalmente ou localmente verificadas. Através, de estudo de caso, verificamos que o uso de ganhos variantes e a realimentação da não-linearidade permitiram encontrar resultados menos conservadores do que nos casos sem realimentação da não-linearidade de setor ou no caso a ganhos fixos, no que se refere ao tamanho da região  $\mathcal{S}_0$ .

No capítulo 5, com base no trabalho de [53] e no Capítulo 3, desenvolvemos o projeto para o sistema não-linear em tempo discreto com parâmetros variantes no tempo, no qual inserimos um controlador dinâmico parcialmente dependente de parâmetros.

Neste percebemos um melhor desempenho comparativamente ao sistema não-linear com parâmetros variantes sem o compensador dinâmico. Verificamos, através do exemplo, que a realimentação da não linearidade  $\varphi(\cdot)$  e da não-linearidade de zona morta, influenciam no tamanho da região de estabilidade do sistema.

Com o intuito de aprofundar e melhorar os resultados obtidos até o presente momento, propomos: *i)* solução do problema de controle de um sistema não-linear em tempo discreto com parâmetros variantes no tempo via a utilização de compensadores dinâmicos com ganhos completamente dependente de parâmetros; *ii)* aprimoramento dos algoritmos visando à obtenção de resultados menos conservadores no que se refere à região de estabilidade garantida,  $\mathcal{S}_0$ , particularmente considerando que o parâmetro incerto tem variação limitada e/ou utilizando técnicas menos conservadoras para a solução de LMIs dependente de parâmetros; e *iii)* a utilização e a adaptação das abordagens para a solução de problemas práticos.





# Referências Bibliográficas

- [1] Alamo, T., Tempo, R., Ramírez, D. R., e Camacho, E. F. “A new vertex result for robustness problems with interval matrix uncertainty”. *Syst. & Contr. Letters*, 57: 474–481, 2008.
- [2] Arcak, M. e Kokotovic, P. “Feasibility conditions for circle criterion designs”. *Syst. & Contr. Letters*, 42(5):405–412, 2001.
- [3] Arcak, M. e Kokotovic, P. “Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis”. *Automatica*, 37(12):1923–1930, 2001.
- [4] Arcak, M., Larsen, M., e Kokotovic, P. “Circle and Popov criteria as tools for nonlinear feedback designs”. *Automatica*, 39:643–650, 2003.
- [5] Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H., e Keel, L. H. *Robust control: the parametric approach*. Prentice-Hall Publishing Co., Upper Saddle River, NJ, USA, 1995.
- [6] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., e Balakrishnan, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [7] Cao, Y.-Y. e Lin, Z. “Stability analysis of discrete-time systems with actuator saturation by a saturation-dependent Lyapunov function”. *Automatica*, (39):1235–1241, 2003.
- [8] Castelan, E. B., Corso, J., e Moreno, U. F. “Stability and stabilization of a class of uncertain nonlinear discrete-time systems with saturating actuators”. In *3<sup>rd</sup> IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Foz do Iguassu - Brazil, October 2007.
- [9] Castelan, E. B., Moreno, U., e de Pieri, E. R. “Absolute stabilization of discrete-time systems with a sector bounded nonlinearity under control saturations”. In *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 3105–3108, Greece, 2006.

- [10] Castelan, E. B., Tarbouriech, S., da Silva Jr., J. G., e Queinnec, I. “ $L_2$ -stabilization of continuous-time linear systems with saturating actuators”. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 16:935–944, 2006.
- [11] Castelan, E. B., Tarbouriech, S., e Queinnec, I. “Stability and stabilization of a class of nonlinear systems with saturating actuators”. In *of 16th IFAC World Congress in Automatic Control*, Prague, 2005.
- [12] Castelan, E. B., Tarbouriech, S., e Queinnec, I. “Control design for a class of nonlinear continuous-time systems”. *Automatica*, 44(8):2034–2039, 2008.
- [13] Corso, J., Castelan, E. B., Moreno, U., e de Pieri, E. R. “Controle dependente de parâmetros para uma classe de sistemas não-lineares incertos com atuadores saturantes”. *Revista Controle e Automação*, 20(2):119–132, 2009.
- [14] da Silva, G. V. M. *Controlo não linear*. Escola Superior Tecnologia Setúbal, 2003.
- [15] Fang, H., Lin, Z., e Rotea, M. “On IQC approach to the analysis and design of linear systems subject to actuator saturation”. *Syst. & Contr. Letters*, 57:611–619, 2008.
- [16] Ghaoui, L. E. e Niculescu, S. L. *Advances in linear matrix inequality methods in control*. Siam, 2000.
- [17] Ghaoui, L. E. e Scorletti, G. “Control of rational systems using linear-fractional representations and linear matrix inequalities”. *Automatica*, 32(9):1273–1284, 1996.
- [18] Ghiggi, I. e Gomes da Silva Jr., J. M. “Análise de estabilidade de sistemas lineares com atraso apresentando saturação de controle”. In *XVI Brazilian Automatic Control Conference*, pp. 1477–1482, Salvador - BA, Brasil, Outubro 2006.
- [19] Gomes da Silva Jr., J. M., Corso, J., e Castelan, E. B. “Output feedback stabilization for systems presenting sector-bounded nonlinearities and saturating inputs”. In *IFAC- 17th World Congress in Automatic Control*, pp. 14109–14114, 2008.
- [20] Gomes da Silva Jr., J. M., Limon, D., e Alamo, T. “Dynamic output feedback for discrete-time systems under amplitude and rate actuator constraints”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 5588–5593, 2005.

- 
- [21] Gomes da Silva Jr., J. M., Reginatto, R., e Tarbouriech, S. “Anti-windup design with guaranteed regions of stability for discrete-time linear systems with saturating controls”. *Revista Controle e Automação*, 14(1):3–9, 2004.
- [22] Gomes da Silva Jr., J. M., Reginatto, R., e Tarbouriech, S. “Application of hybrid and polytopic modeling to the stability analysis of linear systems with saturating inputs”. *Revista Controle e Automação*, 14(4):401–412, 2004.
- [23] Gomes da Silva Jr., J. M. e Tarbouriech, S. “Anti-windup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1):106–111, 2005.
- [24] Gomes da Silva Jr., J. M. e Tarbouriech, S. “Anti-windup design with guaranteed regions of stability for discrete-time linear systems”. *Syst. & Contr. Letters*, 55:184–192, 2006.
- [25] Gomes da Silva Jr., J., Paim, C., e Castelan, E. “LMI-based framework for synthesis of saturating control laws”. *Revista Controle e Automação*, 12(3):171–177, 2001.
- [26] Grimm, G., Hatfield, J., Postlethwaite, I., Teel, A., Turner, M., e Zaccarian, L. “Anti-windup for stable systems with input saturation: an LMI-based synthesis”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(9):1509–1525, 2003.
- [27] Hindi, H. e Boyd, S. “Analysis of linear systems with saturation using convex optimization”. In *37th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC’98)*, volume 1, pp. 903–908, Tampa, USA, 1998.
- [28] Hu, T. e Blanchini, F. “Polyhedral functions, composite quadratic functions, and some equivalent conditions for stability/stabilization”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47:5432–5437, 2008.
- [29] Hu, T. e Lin, Z. *Control system with actuator saturation: analysis and design*. Birkhäuser, Boston, MA, 2001.
- [30] Hu, T. e Lin, Z. “Composite quadratic Lyapunov functions for constrained control systems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3):440–450, 2003.

- [31] Hu, T. e Lin, Z. “Controlled invariance of ellipsoids: linear vs. nonlinear feedback”. *Syst. & Contr. Letters*, 53(3):203–210, 2004.
- [32] Hu, T. e Lin, Z. “Absolute stability analysis of discrete-time systems with composite quadratic Lyapunov function”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(6): 781–797, 2005.
- [33] Hu, T., Lin, Z., e Chen, B. M. “An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance”. *Automatica*, 38:351–359, 2002.
- [34] Jungers, M. e Castelan, E. B. “Gain-scheduled control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators”. *Relatório interno PPGEAS-DAS/UFSC, submetido à Systems & Control Letters*, 2008.
- [35] Khalil, H. K. *Nonlinear Systems - Third Edition*. Prentice Hall, 2002.
- [36] Khalil, H. “Use of nonlinearities as a tool for improving performance”. *Plenary Session of XV CBA, Gramado - RS*, 2004.
- [37] Kiyama, T., Hara, S., e Iwasaki, T. “Effectiveness and limitation of circle criterion for LTI robust control systems with control input nonlinearities of sector type”. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, (15):873–901, 2005.
- [38] Kiyama, T. e Iwasaki, T. “On the use of multi-loop circle for saturating control synthesis”. *Systems & Control Letters*, 41(2):105–114, 2000.
- [39] Kokotović, P. e Arcak, M. “Constructive nonlinear control: a historical perspective”. *Automatica*, 37:637–662, 2001.
- [40] Leite, V. J. S. e Peres, P. L. D. “An improved LMI condition for robust D-stability of uncertain polytopic systems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3): 500–504, 2003.
- [41] Leite, V. J. S., Peres, P. L. D., Castelan, E. B., e Tarbouriech, S. “Estabilidade robusta de sistemas neutrais com atrasos variantes no tempo”. *Revista Controle e Automação*, 18(4):434–446, 2007.
- [42] Liberzon, M. R. “Essays on the absolute stability theory”. *Automation and Remote Control*, 67(10):1610–1644, 2006.

- [43] Lv, L. e Lin, Z. “Analysis and design of singular linear systems under actuator saturation and  $L_2/L_\infty$  disturbances”. *Syst. & Contr. Letters*, 57:904–912, 2008.
- [44] Milani, B. E. A. e Coelho, A. D. “Funções de Lyapunov lineares por partes para sistemas lineares com controles saturáveis”. *Revista Controle e Automação*, 13(1): 42–50, 2002.
- [45] Montagner, V. F., Gomes da Silva Jr., J. M., e Peres, P. L. “Regional stabilization of switched systems subject to input saturation”. In *Third IFAC Symposium on System Structure and Control*, 2007.
- [46] Montagner, V. F., Peres, P. L. D., Queinnec, I., e Tarbouriech, S. “Determinação de regiões de estabilidade robusta para sistemas lineares incertos com saturação de atuadores: uma abordagem LMI”. In *XVI Brazilian Automatic Control Conference*, pp. 1207–1212, Salvador - BA, Brazil, Outubro 2006.
- [47] Montagner, V. F., Peres, P. L. D., Tarbouriech, S., e Queinnec, I. “Improved estimation of stability regions for uncertain linear systems with saturating actuators: an LMI-based approach”. In *45th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 5429–5434, San Diego, CA, December 2006.
- [48] Mulder, E. F., Kothare, M. V., e Morari, M. “Multivariable anti-windup controller synthesis using linear matrix inequalities”. *Automatica*, 37(9):1407–1416, 2001.
- [49] Paim, C., Tarbouriech, S., Gomes da Silva Jr., J. M., e Castelan, E. B. “Control design for linear systems with saturating actuators and  $\mathcal{L}_2$ -bounded disturbances”. 4:4148–4153, 2002.
- [50] Ramos, D. C. W. e Peres, P. L. D. “An LMI approach to compute robust stability domains for uncertain linear systems”. *American Control Conference*, 1:4073–4078, 2001.
- [51] Ramos, D. C. W. e Peres, P. L. D. “An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4):675–678, 2002.
- [52] Saberi, A., Lin, Z., e Teel, A. R. “Control of linear systems with saturating actuators”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):368–378, 1996.

- [53] Scherer, C., Gahinet, P., e Chilali, M. “Multiobjective output-feedback control via LMI optimization”. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 42(7):896–911, 1997.
- [54] Sepulcre, R., Jankovic, M., e Kokotovic, P. *Constructive nonlinear control*. Springer, NY, 1997.
- [55] Tarbouriech, S. e Garcia, G. *Control of uncertain systems with bounded inputs*. Number 227 in LNCIS. Springer, 1997.
- [56] Tarbouriech, S., Garcia, G., e Langouet, P. “Anti-windup strategy with guaranteed stability for linear systems with amplitude and dynamics restricted actuator”. In *6th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems (NOLCOS04)*, Stuttgart (Germany), 2004.
- [57] Tarbouriech, S., Prieur, C., e da Silva Jr., J. M. G. “Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(8):1364–1371, 2006.
- [58] Teel, A. R. “Anti-windup for exponentially unstable linear systems”. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 9(10):701–716, 1999.
- [59] Valmórbida, G., Queinnec, I., Peres, P. L. D., e Tarbouriech, S. “Controle descentralizado para sistemas saturados com atrasos”. In *XVI Brazilian Automatic Control Conference*, pp. 1195–1200, Salvador - BA, Brasil, Outubro 2006.
- [60] Zheng, Q. e Wu, F. “Output feedback control of saturated discrete-time linear systems using parameter-dependent Lyapunov functions”. *Syst. & Contr. Letters*, 57: 896–903, 2008.