

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA - EMC  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
METROLOGIA CIENTÍFICA E INDUSTRIAL**

**AVALIAÇÃO DE INTEGRIDADE DE DUTOS COM  
MOSSAS DE TOPOLOGIA COMPLEXA COM BASE  
EM DEFORMAÇÃO EQUIVALENTE**

**Dissertação submetida à  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
para a obtenção do grau de  
MESTRE EM METROLOGIA CIENTÍFICA E INDUSTRIAL**

**JOÃO CARLOS DE FREITAS**

**Florianópolis, 03 de dezembro de 2009**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA - EMC**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**

**METROLOGIA CIENTÍFICA E INDUSTRIAL**

**AVALIAÇÃO DE INTEGRIDADE DE DUTOS COM MOSSAS DE  
TOPOLOGIA COMPLEXA COM BASE EM DEFORMAÇÃO  
EQUIVALENTE**

**JOÃO CARLOS DE FREITAS**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

**MESTRE EM METROLOGIA**

sendo aprovada em sua forma final.

---

**Prof. Dr. Armando Albertazzi Gonçalves Júnior,**  
Orientador

---

**Dr. Matias Roberto Viotti,**  
Co-orientador

---

**Prof. Dr. Armando Albertazzi Gonçalves Júnior**  
Coordenador do Curso

**BANCA EXAMINADORA**

---

**Prof. Dr. Marco Antônio Martins Cavaco**  
PÓSMCI - UFSC

---

**Prof. Dr. Eng. José Carlos Pereira**  
PÓSMEC - UFSC

---

**Dr. Eng. Adib Paulo Abdalla Kurban, DIC, PhD**  
PETROBRAS

**“O conhecimento amplo e satisfatório sobre um processo ou fenômeno somente existirá quando for possível medi-lo e expressá-lo através de números”**

*William Thompson - Lord Kelvin*

**"Que cada qual examine os seus pensamentos, e os achará sempre ocupados com o passado e com o futuro. Quase não pensamos no presente; e, quando pensamos é apenas para tomar-lhe a luz a fim de iluminar o futuro. O presente não é nunca o nosso fim; o passado e o presente são os nossos meios; só o futuro é o nosso fim. Assim, nunca vivemos, mas esperamos viver, e, dispondo-nos sempre a ser felizes, é inevitável que nunca o sejamos."**

**“Somente o Saber liberta o Homem.”**

*Blaise Pascal*

**"O mal dos tempos de hoje é que os estúpidos vivem cheios de si e os inteligentes cheios de dúvidas."**

*Bertrand Russell*

**À minha mãe, Lila.**

## AGRADECIMENTOS

À minha família, em especial a minha esposa Paula e meus filhos João Paulo e Joanna e meu neto, João Pedro, e minha enteada Fernanda pelo apoio emocional e pelo sacrifício que lhes impus com minhas ausências resultantes de minha dedicação à elaboração deste trabalho;

Ao meu orientador, Professor Armando Albertazzi Gonçalves Júnior, que confiou em minha capacidade e dedicação, referendou meu ingresso neste importante programa de pós-graduação e que, ao longo deste período de preparação, não se furtou em momento algum em me oferecer o melhor de sua competência e conhecimentos me ofertando, sempre de bom grado, os ensinamentos necessários e fomentando minha inspiração. Há muito dele presente neste trabalho;

À equipe do *Labmetro* que, direta ou indiretamente, ofereceu uma contribuição muito importante a este trabalho e à minha própria formação: Matias Roberto Viotti, Analucia Fantin Pezzotta, Pedro de Deus Buschinelli, Fabrício Luís Broering, entre outros.

Aos professores do *Labmetro*, Marco Antônio Martins Cavaco, as preciosas aulas de análise de tensões e *funções de Airy* combinadas com metrologia óptica, Carlos Alberto Flesch e inestimáveis aulas desvendando os segredos da instrumentação e automação industrial, de grande valia na filtragem e convolução dos dados obtidos experimentalmente, e o não menos Carlos Alberto Schneider, que tentou conter minha “exuberância na escrita” (sem grande sucesso aparentemente!), mas com quem muito aprendi, sem falar do professor Armando Albertazzi, com suas sempre instigantes aulas de Metrologia e Probabilidades e Estatística, suas provas e problemas criativos, sempre abordando questões de nosso dia a dia, e seus “campeonatos” de calibração. Especial reconhecimento ao professor José Carlos Pereira do *Grupo de Análise e Projetos Mecânicos/GRANTE, do PósMec*, que foi magnífico no curso de Estabilidade Estrutural, onde tive oportunidade de exercitar o *método dos elementos finitos* (no ANSYS® e na “*ponta-do-lápis*”) e derivar a teoria das cascas, placas e cilindros, incorporando importante sentimento quanto a seu comportamento estrutural sob carregamentos diversos, e ao professor e pesquisador do *Instituto nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA*, Fernando Codá, pelas inestimáveis conferências sobre Geometria Diferencial, todos muito úteis e fundamentais a este trabalho.

À *Petróleo Brasileiro SA – Petrobras*, e seu *Departamento de Engenharia*, órgão ao qual estou lotado atualmente, pela compreensão e apoio nos momentos em que não pude estar presencialmente nos empreendimentos – GASDUC III (NPS 38 in), GASJAP (NPS 28 in), GASBEL II (NPS 18 in) – entre outros, grato pela ajuda dos colegas Paulo Montes, Celso Araripe, André Noronha, José Carlos Faria, Francisco de Assis, entre tantos outros, que me substituíram nesses momentos a custa de uma sobrecarga pessoal episódica e, um especial agradecimento ao colega Dauro Braga Noronha Jr, do *Centro de Pesquisas e Desenvolvimento Leopoldo Américo Miguez de Mello – CENPES*, da Petrobras, pela inspiração, incentivo e ajuda sempre oportuna e, cujo pioneirismo e grande competência na matéria abordada neste trabalho, muito me motivaram.

Aos meus colegas da *Transportadora Brasileira Gasoduto Bolívia Brasil – TBG*, meu empregador à época em que ingressei no programa de pós-graduação, onde tive a oportunidade de aprender e exercitar as rotinas da Operação e Manutenção de um gasoduto de mais de 2.300 km de extensão (850 km sob nossa jurisdição, três Estações de Compressão, 17 Estações de Entrega (*City Gates*), 62 válvulas *SDV (Shut Down Valves)* de bloqueio e mais de 200 vasos de pressão, entre outros), cortando três Estados e imerso na Serra do Mar, terreno instável, de comportamento imprevisível e topografia desafiadora.

Aos demais amigos dentro ou fora do *Labmetro* que foram essenciais ao meu trabalho e à minha vida; Adib Kurban, Arno Duarte, Oswaldo Monte, Walter Kapp, Carlo Filippin, Borys Horbatchiuk, Rodrigo Xavier, Sérgio Sell, e tantos outros que seria difícil citar a todos.

À minha mãe (*in memoriam*) que me indicou os rumos a seguir nesta vida, de onde estiver, sei que está bem orgulhosa desta conquista do seu filho e a meu pai que me ensinou a importância da dedicação ao estudo, ao trabalho e a fidelidade aos bons princípios, e a meus professores da graduação na UFRJ que me fizeram aprender, pra valer, sólidos conhecimentos em diversas áreas que mais tarde agregaram valores fundamentais à minha vida profissional. Por fim, mas não menos, ao meu “anjo de guarda” Maryah Haertel, que me ajudou a colocar este trabalho no “*template*” ABNT, pela sua valorosa ajuda e, a não menos, nossa sempre presente, prestativa e querida secretária, Rosana Magali Vieira cuja ajuda preciosa evitou que eu muitas vezes perdesse algum prazo importante;

Deus abençoe a todos!

## SUMÁRIO

Lista de Figuras .....	iii
Lista de Tabelas .....	vi
Simbologia .....	vii
Lista de Abreviaturas.....	viii
Resumo .....	ix
Abstract.....	x
INTRODUÇÃO .....	11
1.1 Motivação.....	11
1.2 Objetivos .....	12
1.3 Estrutura do Trabalho .....	13
Capítulo II DEFORMAÇÕES EM DUTOS .....	14
2.1 Introdução.....	14
2.2 Mossas .....	15
2.3 Flambagem.....	16
2.4 Danos mecânicos.....	17
2.5 Ação de terceiros.....	19
Capítulo III ELEMENTOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL .....	20
3.1 Superfícies Regulares .....	20
3.2 Primeira forma fundamental.....	20
3.3 A Geometria da Aplicação de Gauss.....	22
3.4 Segunda Forma Fundamental e Curvaturas.....	23
3.5 Aplicação de Gauss em coordenadas locais.....	28
3.6 Curvaturas e Direções principais – Exemplos .....	31
Capítulo IV TENSÕES E DEFORMAÇÕES EM CASCAS .....	41
4.1 Cálculo dos Esforços Solicitantes nas Cascas pela Teoria de Membrana.....	41
4.2 Tensões e Deformações (curvaturas) no regime elástico .....	47
4.3 Elementos da Teoria da Plasticidade .....	51
4.4 Critérios de Falha .....	58

Capítulo V METODOLOGIA PROPOSTA.....	64
5.1 Interpolação .....	64
5.2 Discretização da geometria.....	66
5.3 Cálculo das curvaturas principais.....	66
5.4 Determinação das Deformações Equivalentes .....	69
5.5 Avaliação da Integridade.....	72
Capítulo VI VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL .....	74
6.1 Concepção do corpo de prova.....	74
6.2 Aparato experimental .....	76
6.3 Procedimento experimental.....	77
6.3.1 Carregamento e registro em etapas .....	78
6.3.2 Retorno elástico e medição da geometria final.....	79
6.4 Discussão dos Resultados .....	80
6.4.1 Extensometria .....	80
6.4.2 Comparação entre o <i>SM PEROLA</i> e metodologia <i>AIMCODE</i> .....	84
Capítulo VII CONCLUSÕES.....	90
7.1 Conclusões do trabalho .....	90
7.2 Sugestões para futuros trabalhos .....	92
Referências.....	93
Anexo A.3 .....	97
Anexo A.4 .....	102
Anexo A.5 .....	125

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Mossas em dutos (a) vista externa (b) vista interna [ <i>Macaw's pipelines defects</i> ]	16
Figura 2: (a) e (b) Flambagem em dutos causas e (c) consequências [ <i>Macaw's pipelines defects</i> ].	17
Figura 3: Acidente em duto por ação de terceiros em <i>Karel Dekeyser</i> .	19
Figura 4: Projeção do vetor $kn$ sobre a Normal em $P$ . [1]	23
Figura 5: Proposição de <i>Meusnier</i> . $C$ e $Cn$ têm a mesma curvatura normal em $p$ ao longo de $v$ [1][2].	24
Figura 6: Esfera de raio unitário e suas seções normais [1].	25
Figura 7: Cilindro reto e suas seções [1].	25
Figura 8: $v$ e $w$ são auto-vetores de $dN$ . [1]	25
Figura 9: Direções principais em $p=(0,0,0)$ [1].	26
Figura 10: Cada ponto de $S$ possui uma vizinhança que pode ser representada como $z = h(x,y)$ [1].	33
Figura 11: Parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ e direções principais em $p=(0,0,0)$ . [13]	37
Figura 12: Parabolóide $z = x^2 + y^2$ e direções principais em $p=(0,0,0)$ . [13]	40
Figura 13: Elemento infinitesimal de casca [16].	43
Figura 14: (a) Traços de planos (b) Distribuição dos carregamentos [26] [67].	44
Figura 15: Vista de topo do elemento infinitesimal mostrando as projeções das tensões no plano $xy$ [67].	44
Figura 16: Carregamentos principais [67].	45
Figura 17: Segmento $ab$ [67].	46
Figura 18: Componente de membrana e de flexão da tensão $\sigma_{II}$ [67].	47
Figura 19: Tensor das tensões [67].	47
Figura 20: (a) Tensões num elemento de casca e (b) Mudança de curvatura [26].	48
Figura 21: Representação dos critérios de plasticidade de <i>Tresca e von Mises</i> [24].	54
Figura 22: Deformação elementar uniaxial de uma barra de seção retangular [24].	55
Figura 23: Deformações de flexão e de membrana [59].	59
Figura 24: Flexão de uma placa plana [25].	61
Figura 25: Valores experimentais e analíticos de $R/t$ versus $A_r$ [25].	62
Figura 26: Falha em flexão (Dobramento) [25].	63
Figura 27: Fluxograma do <i>AIMCODE</i> .	65
Figura 28: (a) Esquemático da mossa e (b) esquema de implantação da matriz de discretização, em planta [do autor].	67
Figura 29: Deformação de Flexão e Membrana principais	69



Figura 30: Comprimento da moosa $L$ versus $l_i$ [56].....	71
Figura 31: comprimento da moosa na direção circunferencial. ....	72
Figura 32: CP em sua base [Do autor].....	74
Figura 33: CP em sua base e sistema PEROLA em 1° plano [Do autor]. ....	75
Figura 34: Disposição dos extensômetros [Do autor].....	76
Figura 35: Conjunto Vishay P-3500 e SB-10 [Do autor]. ....	76
Figura 36: De cima para baixo, da esquerda para direita, CP e Sistema PEROLA usado para medir a geometria interna do CP, a máquina de tração com o indentador fixado ao carro móvel, acompanhamento fotográfico, sistema aquisitivo, bancada para medição com relógio comparador e, Pedro Buschinelli e o autor [Do autor]. ....	77
Figura 37: Extensômetros 2 e 5. ....	79
Figura 38: Extensômetros 3 e 6. ....	79
Figura 39: Medição tridimensional do CP [Do autor]. ....	85
Figura 40: Mudança de coordenadas – translação e rotação de eixos [68].....	86
Figura 41: SM PEROLA e AIMCODE, sem mudança de coordenadas [Do autor]. ....	87
Figura 42: SM PEROLA e AIMCODE, após mudança de coordenadas [Do autor]. ....	87
Figura 43: Diferença máxima entre o perfil calculado pelo SM PEROLA e o perfil reconstruído pelo método AIMCODE [Do autor]. ....	88
Figura 44: Reconstrução da superfície do CP [Do autor]. ....	89
Figura 45: Parametrização de R2→R3 [1]. ....	97
Figura 46: Curvas coordenadas. [1].....	98
Figura 47: Faixa de Moebius [1]. ....	101
Figura 48: Segmento cilíndrico [67]. ....	102
Figura 49: Segmento cilíndrico – Cisalhamento [67]. ....	102
Figura 50: Segmento de casca com dupla curvatura e as tensões principais [67].....	103
Figura 51: Esquemático do princípio de resistência das cascas [67]. ....	103
Figura 52: Esforços normais num segmento cilíndrico [67]. ....	104
Figura 53: Sistema de coordenadas global. ....	105
Figura 54: Coordenadas esféricas [67]. ....	105
Figura 55: Tensor das tensões [67]. ....	107
Figura 56: Esforços de membrana e transversos. ....	108
Figura 57: Esforços de flexão [67]. ....	109

Figura 58: Curva tensão-deformação nominais (de engenharia), traçada em coordenadas cartesianas [25][32].	111
Figura 59: Característica tensão x deformação verdadeiras, em escala logarítmica. [25]	114
Figura 60: Comparação de curvas de <i>encruamento</i> na base $\sigma_t = \sigma_e + \sigma_p$ e $\sigma_t = \sigma_p$ somente. [25]	115
Figura 61: Curva <i>carga – deformação verdadeira</i> [25].	120
Figura 62: Representação esquemática de dois tipos extremos de curvas tensão-deformação verdadeiras em escala <i>log-log</i> . A curva A é o tipo menos comum, enquanto que a curva B é o tipo associado aos materiais que não tem tendência a apresentar o fenômeno “ponto de escoamento” (ver seção 4.4.1-g) [25].	122
Figura 63: Efeito oscilatório no ajuste de curvas através de polinômios globais.	126
Figura 64: Interpolação por polinômio global. A rotina <i>Polyinterp</i> .	129
Figura 65: Interpolação por polinômio de grau pleno.	130
Figura 66: Interpolação linear por partes.	131
Figura 67: Interpolação com preservação de forma de <i>Hermite</i> .	134
Figura 68: Exemplos de tangentes para <i>Pchip</i> .	135
Figura 69: Exemplo de interpolação por <i>Splines</i> .	137
Figura 70: Interpolantes <i>Spline e Pchip</i> e suas três primeiras derivadas.	140
Figura 71: Comparação dos quatro interpolantes.	144
Figura 72: Os quatro interpolantes num mesmo frame para comparação.	145
Figura 73: Levantamento planialtimétrico $Z_{ij}(x,y)$ .	146
Figura 74: Interpolação 1D.	146
Figura 75: : Resultado da Interpolação 1D.	147
Figura 76: A matriz “pivô $Z_{ij}$ e seus 8 vizinhos”.	148
Figura 77: Curvas de nível e superfície reconstruída através do método AIMCODE.	148
Figura 78: (a) cisalhamento a 0 rad. (b) cisalhamento a $(\pi/6)$ 30°.	149
Figura 79: Segunda derivada direcional.	151

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 1: Deformações lidas em cada extensômetro [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ].	78
Tabela 2: Deformações extensionais de membrana [ $\text{m}/\text{m}$ ].	78
Tabela 3: Relação $S_u/S_y$ para vários valores de $m$ .	123

## SIMBOLOGIA

## Alfabeto Latino:

$A_r$	Redução de área ou medida de trabalho a frio ( <i>cold work</i> )	[%]
$P$	Ponto numa superfície	[N/A]
$S$	Superfície	[R <sup>2</sup> ]
$S_y$	Tensão de escoamento nominal	[MPa]
$S_u$	Tensão última nominal	[MPa]
$n$	Deformação nominal (ou de engenharia)	[μm/m]
$m$	Coefficiente de encruamento	[N/A]
$N$	Vetor normal	[N/A]
$X, v, w$	Vetores	[N/A]

## Alfabeto Grego:

$\sigma$	Tensão mecânica verdadeira	[MPa]
$\varepsilon$	Deformação verdadeira	[μm/m]
$\theta, \varphi$	Ângulos	[rd]

## Índices:

$i, j$	subíndices matriciais;
$o$	valores iniciais;

**LISTA DE ABREVIATURAS**

**API** – American Petroleum Institute

**ASME** – American Society of Mechanical Engineers

**PDAM** – Pipeline Defect Assessment Manual

**DOT** – US Department of Transportation

**UFSC** – Universidade Federal de Santa Catarina

**PUC-RJ** – Pontifícia Universidade Católica

**IMPA** – Instituto nacional de Matemática Pura e Aplicada

**SBM** – Sociedade Brasileira de Matemática

**HARVARD** – Harvard University

**GTI** - Gas Technology Institute

**ILI** – In Line Inspection tool

**NPS** – Nominal Pipe Size

**DN** – Diâmetro nominal

**FEA**- Finite Elements Analysis

FREITAS, João Carlos de. **Avaliação de Integridade de dutos com Mossas de Topologia Complexa com base em Deformação Equivalente**. Florianópolis, 2009. 158 pp. Dissertação (Mestrado em Metrologia) – Departamento de Engenharia Mecânica - Curso de Pós Graduação em Metrologia Científica e Industrial. Universidade Federal de Santa Catarina.

## RESUMO

Mais de 40 % das causas de falha em linhas de transporte de hidrocarbonetos decorre de ações de terceiros, que acarretam a criação de mossas, entalhes ou combinações de ambos. Assim sendo, danos em dutos na forma de mossas tem emergido como uma preocupação chave para operação, confiabilidade e segurança do público em geral, dentro da indústria dutoviária. Os principais códigos de construção e montagem internacionais consideram mossas lisas deletérias se estas excedem a 6 % do diâmetro nominal do duto, em seu ponto mais profundo. A norma *ASME B 31.8 – Gas Transmission and Distribution Piping System – 2003 Edition*, apresenta uma alternativa a este critério. De acordo com esta edição da norma, qualquer mossa de qualquer profundidade, pode ser aceita desde que seus níveis de deformação associados à deformação geométrica não excedam a uma deformação equivalente (ou efetiva) de 6 % (ou 60.000  $\mu\text{m}/\text{m}$ ). O apêndice R da norma B 31.8 apresenta um procedimento orientativo para o cálculo da assim chamada deformação equivalente. Em sua última edição de 2008, o comitê da ASME corrigiu alguns pequenos erros materiais em fórmulas, porém manteve inalterado o critério condenatório mencionado. Não obstante o autor desta dissertação de mestrado não ter a intenção de atacar ou criticar este critério de integridade, apenas fornece sugestões para ampliá-lo. Por outro lado, é pacífico que alguma forma de interpolação ou outra técnica matemática é necessária para desenvolver ou reconstruir a superfície sob avaliação com base nos dados oriundos de uma corrida de *pig* geométrico, por exemplo, ou uma medição externa através de um sistema de medição que produza a melhor exatidão possível. Além disso, existem outras deformações geométricas na seção reta do duto que alteram sua circularidade tais como, flambagem local, ovalização, ou mesmo ondulações decorrentes de curvamento a frio, entre outras alterações geométricas, que também podem ser investigadas através das técnicas descritas neste trabalho. Uma abordagem confiável e segura para o levantamento destas alterações geométricas é uma meta deste trabalho. Em adição, a metodologia proposta se pretende ser amigável ao operador, não requer nenhuma erudição matemática especial, nem qualquer conhecimento do método dos Elementos Finitos, por exemplo. Este trabalho também se propõe a fornecer uma metodologia direta, rápida e confiável para avaliação da integridade de dutos com mossas.

**Palavras-chave:** integridade, mossas, estrutura, inspeção, dutos, perfilometria.

## ABSTRACT

More than 40 % of failures in transmission pipelines are caused by third-party damages, which drives to the creation of dents, grooves and combinations of both. So, mechanical damages to pipelines in the form of dents has emerged as a key safety concern for operating, reliability and public safety within the pipeline industry. Most international pipeline codes consider plain dents injurious if they exceed a depth of 6% of its nominal diameter, at its deepest point. *ASME B 31.8 – Gas Transmission and Distribution Piping System – 2003 Edition*, states an alternative to this criterion. According to this edition, any plain dent of any depth are acceptable provided strain levels associated with the deformation do not exceed 6% (or 60.000  $\mu\text{m}/\text{m}$ ) equivalent strain. In the appendix R of B 31.8 code is issued a procedure for assessing and measuring the so called “equivalent strain”. In the last 2008 Edition of the code the ASME committee has corrected some minor material errors in formulae but still maintained the criterion above mentioned. Nevertheless the author of this *MSc* dissertation does not intend to attack or remark this integrity criterion (but just suggest to “enlarging” it). In the other hand, it also must be agreed that some kind of interpolation or other mathematical technique is necessary to develop (or rebuilt) the surface contours based on a caliper pig run information, for instance, or an assessment from a exogenous source within the best exactness attainable. Furthermore, there are other geometrical alterations in pipe sections which alter its roundness such as local buckling, smooth ovalization, or even undulations (ripples) due to field cold bends, among others that can be equally investigated as far as strain concern. A reliable and safe approach for assessing such geometrical alterations is the aim of this work. In addition, the method proposed herein is intended to be friendly to the operators, nor requiring deep knowledge of mathematics neither a specialization in *Finite Element Analysis – FEA*, for instance. This work intends as well to provide a straightforward methodology, fast and reliable for integrity assessment.

**Key-words:** integrity, dents, structure, inspection, pipeline, profilometry.

## Capítulo I

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 MOTIVAÇÃO

Amassamentos ou “mossas” são alterações na geometria cilíndrica do duto causada por agente indentador externo e pode se apresentar como superfícies de topologia simples<sup>1</sup> ou complexa. A questão ‘mossas’ em dutos ‘povoa’ – e aflige – o cotidiano de todas as empresas operadoras de dutos. É claro que sua convivência com este tipo de descontinuidade se conecta, em primeiro lugar, às questões de segurança e integridade estrutural e, num segundo plano, àquelas ligadas à manutenção de dutos, tais como a inspeção interna através de ferramentas inteligentes de inspeção em linha – *In Line Inspection tools, ILI* – ou *pigs* especialistas, uma vez que, mossas excessivas podem danificar ou mesmo impedir a passagem de *ILI* nas linhas. Surge então uma pergunta recorrente: como se pode avaliar a integridade de um duto que apresenta uma moossa? Deve-se interromper o funcionamento de uma linha de transporte vital, somente porque apresenta este tipo de defeito? Como, por exemplo, avaliar sua severidade como sendo aceitável, mediana, ou crítica? Como elaborar tal taxonomia em matéria tão complexa?

A presença de mossas em dutos e a falta de respostas para algumas destas perguntas aflige o (s) engenheiro (s) responsável (is) quanto à possibilidade de um colapso catastrófico e suas conseqüências em danos ao patrimônio, às pessoas, ao ambiente e à imagem institucional da empresa. Alguns são valores tangíveis enquanto outros são de mais difícil métrica.

Outrossim, até a presente data, todos os estudos e pesquisas conduzidos que se conhece sobre este tema, tiveram como base mossas ditas “*plain dents*” ou “mossas lisas”<sup>1</sup> (cujos raios de curvatura nunca são menores que 5 vezes sua espessura), simétricas, preparadas artificialmente através de indentação por cilindros ou domos esféricos. Estas abordagens podem ser explicadas por serem especialmente apropriadas para repetição em laboratório ou mesmo para sua modelagem e reprodução pelo método dos elementos finitos.

---

<sup>1</sup> Trata-se de uma alteração suave na curvatura da parede do duto, sem redução significativa da sua espessura e sem estar associada a uma solda ou a quaisquer defeitos ou imperfeições tais como perdas de massa ou entalhes.



Após vários anos militando na área dutoviária como engenheiro de dutos, lidando com sua construção, operação e manutenção, pude observar a extensa ocorrência deste tipo de defeito, sobretudo em dutos instalados em áreas geologicamente instáveis ou mesmo aqueles que sofreram problemas durante a montagem, entre outras causas. Percebemos também que a topologia apresentada pelas moças reais é bastante diferente daquelas consideradas nas pesquisas, apresentando superfícies irregulares, não simétricas, assumindo formas aleatórias geradas pelos variados agentes indentadores que as provocaram (figuras 1 e 2).

Uma motivação para realizar um trabalho aprofundado nesta área é que, os ditos planos normais ou planos verticais paralelos ao eixo do duto, sugeridos pelos procedimentos normatizados, nem sempre – para não dizer quase nunca – coincidem com as direções das curvaturas principais das regiões da moça sob avaliação. Ora, como os procedimentos vigentes preconizam a avaliação de integridade com predominância para a determinação dos raios de curvatura da superfície da moça para posterior aplicação da teoria das membranas e cálculo das deformações equivalentes, se entende que a contribuição deste trabalho será altamente relevante uma vez que será demonstrada ao longo do mesmo uma metodologia para o cômputo destas duplas-curvaturas de forma mais adequada que, por sua vez, irá conduzir a resultados melhor aferidos com a real condição presente nestes defeitos.

Igualmente, mesmo no caso de uma moça lisa, sua representação em modelo pelo método dos elementos finitos, única técnica atualmente utilizada em pesquisa teórica, requer uma profunda especialização do operador. Também requer uma posterior calibração do modelo através de experimentação física, o que quase, ou nunca, é feito. Por sua vez, esta calibração é demorada e tem um elevado custo para ser elaborada. Cabe destacar que, pelo fato de envolver a avaliação da integridade estrutural, de um ativo desta importância, a questão tempo de análise é de grande relevância.

Este trabalho também tem por motivação diminuir este tempo de avaliação, ser amigável ao operador, não requerer conhecimentos especiais em matemática, apenas os conhecimentos ordinários de um engenheiro ou técnico de dutos com experiência em sua operação e manutenção.

## **1.2 OBJETIVOS**

Assim sendo, este trabalho tem como principais metas:

**1.1.1.** Desenvolver um modelo analítico-numérico apropriado para a determinação das curvaturas principais de uma casca de dupla curvatura com base na medição de sua geometria;

**1.1.2.** A partir desta determinação, calcular as deformações locais devido à flexão;

**1.1.3.** Da mesma forma, sugerir uma metodologia para cálculo das deformações extensionais de membrana locais;

**1.1.4.** Uma vez obtidas estas grandezas acima, serão calculadas as deformações equivalentes de *von Mises*, nas fibras mais internas e externas ao duto, de forma a se produzir um critério de avaliação de integridade, comparável com um padrão desta grandeza pré-estabelecida.

**1.1.5.** Verificar parcialmente de forma experimental o modelo desenvolvido com base em experimentos simplificados controlados.

**1.1.6.** Ainda neste critério de integridade estrutural, fazer sugestões de trabalhos complementares para, em conjunto com os resultados aqui obtidos, produzir um critério de integridade ainda mais abrangente.

### **1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO**

No **capítulo 2** serão abordados os principais defeitos ditos geométricos, quais sejam mossas e flambagem, decorrentes de causa naturais e de ação de terceiros.

Em seqüência, no **capítulo 3**, serão abordados os elementos de geometria diferencial, requisito imprescindível para o entendimento da metodologia proposta.

No **capítulo 4** serão abordados de forma sucinta, tópicos importantes ao desenvolvimento deste trabalho, sobre a teoria das cascas e onde as mesmas se inserem no contexto deste trabalho.

O **capítulo 5** é todo dedicado à metodologia proposta, sua fundamentação, várias aplicações da mesma, o cálculo das deformações equivalentes e os critérios de integridade sugeridos.

No **capítulo 6** será apresentado a verificação experimental da técnica proposta, com uma descrição detalhada do aparato experimental, o procedimento adotado e os resultados alcançados, bem como a discussão dos resultados obtidos, sua validação e avaliação crítica da análise comparativa dos valores obtidos experimentalmente e aqueles obtidos de um padrão de referência.

O **capítulo 7** será dedicado às conclusões finais.

Por fim, apresenta-se a bibliografia e demais referências consultadas, bem como os anexos A3, A4 e A5 complementares ao material dos capítulos 3, 4 e 5, respectivamente.

#### 2.1 INTRODUÇÃO

O ano de 1998 pode ser considerado como um divisor de águas na área de avaliação de deformações em dutos. Naquele ano, foi publicado um trabalho de *Michael J. Rosenfeld*<sup>2</sup> *et al.* [57] que faz um retrospecto desse tipo de falha na indústria até então e propõe uma metodologia usando elementos geométricos para avaliar mochas em dutos, baseando-se em uma interpolação das curvas por pontos resultantes da medição dos deslocamentos radiais decorrentes da deformação. Para tanto, foram utilizados polinômios de *Bessel* cúbicos por partes e derivadas explícitas daqueles nos subintervalos entre os pontos medidos ou “*break points*” – no ponto medial, para ser mais exato - para cálculo das deformações de flexão resultantes das variações de curvatura. Dependendo da resolução da ferramenta de inspeção, os autores aconselhavam o uso de *círculos osculadores* que envolvem o ajuste local de um círculo que passa por três pontos adjacentes e que possui a mesma curvatura da curva no ponto, seguindo a formulação clássica da geometria analítica [2][5][6][9]. Mais adiante, este assunto será retomado e poderá ser mais bem entendido quando for descrita a metodologia proposta no capítulo 5.

A indústria recebeu com sincera admiração este esforço de fôlego uma vez que, até então, desde os anos 1950 (e mais intensamente nos cerca de 10 anos que precederam o trabalho de *Rosenfeld et al.*), as operadoras de dutos adotavam, via de regra, como critério somente admitir como aceitáveis, deformações de até 6% do diâmetro nominal do duto. *Rosenfeld et al.* trouxeram um critério mais robusto como sugestão para tais avaliações, introduzindo o critério adicional complementar para se avaliar também as deformações equivalentes máximas.

Danos mecânicos na forma de mochas têm se tornado uma importante preocupação de segurança em dutos. A norma *ASME B31.8* [44] é um código de segurança que normatiza as fases de projeto, construção, operação e manutenção de sistemas de dutos de transmissão e distribuição de gás. Contém também critérios de aceitação ou reparo de mochas, entalhes e

---

<sup>2</sup> Atualmente (2008) à frente da *Kiefner & Associates, inc.*, e membro de comissão executiva da norma *ASME B31.8, Gás Transmission and Distribution Pipelines*.

defeitos combinados consistindo de moissas com concentradores de tensão, tais como entalhes, aberturas de arco ou soldas.

O comitê da seção *B31.8* se preocupa continuamente com a evolução do código de modo a refletir, da melhor maneira, o pensamento e a tecnologia corrente, visando a segurança dos dutos enquanto mantém um certo conservadorismo, assegurando-se que todos os conceitos presentes no mesmo sejam devidamente testados.

O código contém critérios de aceitação ou reparo de moissas, entalhes e defeitos combinados consistindo de moissas com concentradores de tensão, tais como entalhes, aberturas de arco ou soldas.

Até a edição de 1999, as prescrições do código *ASME* não estavam suficientemente completas, detalhadas ou atualizadas para prover as devidas instruções. Existia o conhecimento básico para tomada de decisões no tratamento de danos mecânicos, porém não havia um único documento para orientação do operador nesse campo. Com o auxílio do *Gas Technology Institute - GTI*, um grupo tarefa especial revisou os conhecimentos acumulados com o intuito de desenvolver critérios de forma compreensiva e atualizada.

Vários danos associados a agentes externos, tais como moissas, entalhes e trincas, são de interesse. Termos como “moissas” e “danos mecânicos” são freqüentemente tratados de forma distinta por diferentes pessoas. Para evitar confusão, passa-se a definir alguns destes termos.

## 2.2 MOSSAS

O termo moissa, como já observado, descreve uma deformação permanente da seção circular do duto causada por agentes externos. De acordo com a versão atual da norma *ASME B31.8*, a moissa é expressa em termos quantitativos como “*o espaço mais profundo da mesma e o prolongamento do contorno original do duto, em qualquer direção*”. A curvatura da parede do duto na região da moissa pode ser reduzida, achatada ou reversa (reentrante). Desta forma, o termo moissa também inclui o que alguns autores descrevem como ovalização ou achatamento da seção reta.

Baseando-se na análise do comportamento de recuperação da seção da moissa, o fenômeno de ovalização é um componente inevitável de moissas reais em dutos. E, tal ovalização, mesmo que elástica, contribui para a resposta à flexão da moissa devido à pressão interna.

A moessa que não apresenta arranhaduras, entalhes ou outros concentradores de tensão, é denominada “moessa lisa” (*plain dent*). Moessas indentadas por rochas são tipicamente dessa classe. Moessas causadas por equipamento de escavação, por exemplo, não se enquadram nessa categoria.

A moessa que tem uma tendência a recuperar sua seção original circular chamada sua recuperação elástica (*rerounding*), pela pressão interna, impedida pelo solo é denominada “moessa confinada” (*constrained dent*). Moessas indentadas por rochas são tipicamente dessa classe.

A moessa que é livre para recuperação elástica sob influência da pressão interna é dita não confinada. Moessas produzidas por equipamentos de escavação são tipicamente não confinadas. Elas recobram sua circularidade, total ou em parte, assim que o equipamento é retirado da superfície do duto.

Na maioria dos dutos operando, mesmo em níveis moderados de pressão, moessas não confinadas costumam recuperar quase totalmente a circularidade da seção devido à pressão interna. Desse modo, qualquer moessa que apresente profundidade superior a 2% de seu diâmetro nominal, muito provavelmente se trata de moessa confinada. Por outro lado, moessas com profundidade inferior ou igual a 2%, provavelmente caracterizam moessas livres ou não confinadas ou, ainda, moessas confinadas de pequena profundidade.



Figura 1: Moessas em dutos (a) vista externa (b) vista interna [Macaw's pipelines defects].

### 2.3 FLAMBAGEM

O surgimento de aços de alta resistência ou cujo limite mínimo da tensão de escoamento (*Specified Minimum Yield Strength - SMYS*) > 460 MPa) permite aos engenheiros e projetistas, desenhar estruturas cada vez mais leves e esbeltas com uma alta capacidade de resistência a carregamentos externos. Da mesma forma, na indústria de dutos o mesmo acontece. Com o advento dos aços API 5L graus X70, X80 e maiores, o fator “economia de aço” se torna cada vez mais preponderante nos projetos atuais, pois linhas com espessuras

menores podem ser projetadas porque a resistência e a rigidez ficam asseguradas pela melhor qualidade dos aços modernos. Entretanto, sua estabilidade estrutural fica mais ameaçada uma vez que seu momento de inércia resistente fica muito menor.

Os dutos não escapam disto. Imersos no solo, estão sujeitos a diversos carregamentos mecânicos, não raras vezes esforços de compressão e flexão combinadas [62]. A flambagem de dutos ocorre quando se perde a estabilidade estrutural decorrente dos carregamentos a que se encontra submetida ultrapassar seu carregamento crítico [77].

Danos por flambagem em dutos ocorrem de duas maneiras: por flambagem global, onde a estabilidade é perdida por completo chegando mesmo ao colapso total da estrutura e perda de produto ou, por flambagem localizada, onde uma parte de sua seção circular sofre uma alteração geométrica de maior ou menor intensidade. Isto pode ocorrer, por exemplo, numa transição de espessuras ou numa curva a frio com excessiva ondulação, podendo, muitas vezes, manter-se a continuidade do transporte. Não obstante, dependendo da intensidade da deformação geométrica, sua integridade também pode ser avaliada pela metodologia proposta neste trabalho.

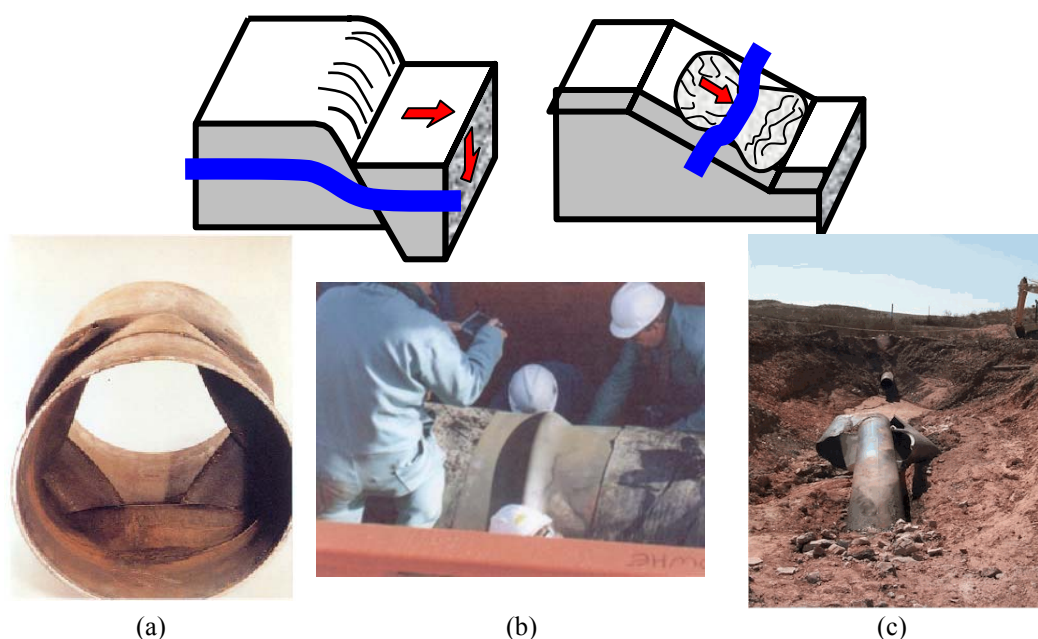


Figura 2: (a) e (b) Flambagem em dutos causas e (c) consequências [Macaw's pipelines defects].

## 2.4 DANOS MECÂNICOS

O termo *dano mecânico* refere-se neste texto a arranhaduras, entalhes ou conformações (metal esmagado) provocados pelo contato com escavadeiras ou outros equipamentos mecânicos. Exibe uma ou mais das seguintes características:

- Visível arranhadura, entalhe ou conformação;
- Perda de metal localizada ou redução de espessura de parede não decorrente de corrosão;
- Indicação de trabalho a frio, quando a superfície do tubo é atacada por uma solução adequada, tal como o *persulfato de amônia*, por exemplo;
- Trinca em uma arranhadura ou em um entalhe;
- Dobra ou prega da parede do tubo, ou uma longa e estreita indentação.

A deformação residual, após a recuperação parcial da circularidade, pode ser pequena o suficiente para não ser detectada por um *III*. Também pode ser menor que o usual critério de aceitação de 6% do diâmetro nominal do duto, atualmente em uso pela indústria.

O que é pior: mossas longas e suaves, ou curtas e profundas? Resposta: Depende! Mossas profundas e curtas têm recuperação menor, pois são mais rígidas, ao passo que mossas longas têm recuperação maior e, portanto, ficam mais suaves que as anteriores. Isto acarreta maiores tensões residuais resultantes da maior amplitude da recuperação elástica, fazendo com que sua vida à fadiga, por exemplo, fique abreviada. Por essas razões, dentre outras, uma suspeita de dano mecânico, na opinião deste autor, **nunca deve ser aceita com base somente na profundidade residual da mossa.**

Em adição, a mossa residual e alguma arranhadura presente podem parecer, a olhos não treinados, muito superficiais e não causar preocupação. Entretanto, um dano mecânico, com respaldo unicamente em uma inspeção visual, nunca deve ser considerado seguro o bastante para continuidade do serviço, uma vez que trincas e esmagamento do metal base possam não estar tão aparentes ao olho desarmado.

Este trabalho objetiva fornecer uma metodologia capaz de lidar com mossas de qualquer natureza. Todavia, mossas que contenham entalhes, perdas de massa, corrosão, soldas ou outros danos mecânicos, fogem ao escopo do mesmo e não serão aqui abordados.

Por outro lado, em se tratando de mossas lisas, sem intensificadores de tensão, os procedimentos contidos neste estudo são aplicáveis especialmente para gasodutos. Para líquidos, as técnicas propostas são igualmente válidas. No entanto, recomenda-se adicional cautela nas avaliações e que sejam considerados outros efeitos, como por exemplo, fadiga de baixo ciclo, isto em razão do regime de operação típico daquelas instalações.

## 2.5 AÇÃO DE TERCEIROS

Mais de 60% dos danos a dutos são causados pela ação de terceiros.[65] Razão pela qual ações preventivas devem – e são – tomadas para melhorar a comunicação das operadoras com a comunidade circunvizinha às redes de dutos enterrados.

Abaixo são apresentados números do acidente ocorrido em *Karel Dekeyser* na Bélgica em julho de 2004, causado pela ação de terceiros (figura 3). Neste acidente, uma máquina agrícola tocou a linha, mas não a rompeu de imediato. Algumas semanas depois, a operadora resolveu aumentar a capacidade de transporte elevando a pressão do duto. O duto, com uma moessa, e provavelmente com algum dano mecânico, não resistiu e colapsou de forma catastrófica seguida da deflagração do produto e incêndio com influência da radiação de calor a mais de 300 m, com as seguintes conseqüências [Fonte:*New York Times*, *apud* [62]]:

- 17 vítimas fatais;
- 40 queimados graves;
- 200 feridos;
- 30 dias fora de operação;
- Fainas de inspeção e troca de trechos: 14 dias;
- Teste Hidrostático: 14 dias;
- Grandes exigências por parte das autoridades;
- Inspeção aérea semanal;

Algumas companhias chegam a fazer inspeção aérea diária em determinados trechos.



Figura 3: Acidente em duto por ação de terceiros em *Karel Dekeyser*.



O presente capítulo pressupõe que o leitor tenha conhecimentos básicos de Álgebra Linear e alguma familiaridade com cálculo de várias variáveis, envolvendo a continuidade e a diferenciabilidade de funções e aplicações em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , que podem ser encontrados em bons textos de Cálculo Multivariável [4][5][6] e de Álgebra Linear [9] e, não serão aqui abordados.

Todas as demonstrações e derivações das grandezas e expressões a seguir neste capítulo podem ser encontradas no *Anexo A.3* a este trabalho de Mestrado.

#### 3.1 SUPERFÍCIES REGULARES

A referência [1] define intuitivamente uma *superfície regular* como:

*“A Grosso modo, uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$  é obtida tomando-se pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si, de tal modo que a figura resultante não apresente pontas, arestas ou auto-interseções; e que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos desta figura. A idéia é definir um conjunto que seja, em certo sentido, bidimensional e que seja também suficientemente suave de forma que as noções usuais de Cálculo possam ser estendidas a um tal conjunto.”*

Segundo a definição A.3.1.1, do anexo A.3, as moças se enquadram nas condições expostas, sobretudo porque serão abordadas de forma discreta e, desta forma, neste trabalho, serão consideradas *superfícies regulares*.

#### 3.2 PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL

Esta sessão apresenta de forma sucinta, estruturas associadas a uma superfície. Talvez a mais importante delas seja a *primeira forma fundamental*. Corresponde a uma forma alternativa de representar uma superfície contínua e diferenciável  $S$  através de três funções, definidas em termos das coordenadas ao longo da superfície  $(u_0, v_0)$  usando os vetores  $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$  que formam a base de  $T_p S$ , que é o plano tangente à  $S$  por um dado ponto  $p$ :

$$\mathbf{E}(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p \\ \mathbf{G}(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Onde,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ , são os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_pS$ . A notação  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa o produto interno (ou escalar) entre vetores.

Portanto, a primeira forma fundamental é meramente a expressão de como a superfície  $S$  herda o produto interno natural do  $\mathbb{R}^3$ . Geometricamente, a primeira forma fundamental possibilita fazer medidas sobre a superfície tais como comprimento de curvas, ângulos de vetores tangentes, áreas de regiões, sem fazer menção ao espaço ambiente  $\mathbb{R}^3$ , onde está a superfície em tela.

Fazendo  $p$  variar na vizinhança coordenada correspondente a  $\mathbf{x}(u, v)$ , obtém-se as funções  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$  e  $G(u, v)$ , que são diferenciáveis nessa vizinhança.

**Exemplo 3.2.1:** Calcular a *primeira forma fundamental* de uma esfera de raio unitário em um ponto da vizinhança coordenada dada pela parametrização abaixo:

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\text{sen } \theta \cos \varphi, \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi, \cos \theta).$$

Derivando em relação a  $\theta$  e a  $\varphi$ :

$$\mathbf{x}_\theta(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \text{sen } \varphi, -\text{sen } \theta),$$

$$\mathbf{x}_\varphi(\theta, \varphi) = (-\text{sen } \theta \text{ sen } \varphi, \text{sen } \theta \cos \varphi, 0).$$

Logo, de (3.2.1):

$$E(\theta, \varphi) = \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\theta \rangle = 1$$

$$F(\theta, \varphi) = \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\varphi \rangle = 0$$

$$G(\theta, \varphi) = \langle \mathbf{x}_\varphi, \mathbf{x}_\varphi \rangle = \text{sen}^2 \theta$$

### 3.3 A GEOMETRIA DA APLICAÇÃO DE GAUSS

É uma relação bem conhecida do cálculo clássico de uma variável que a taxa de variação da reta tangente a uma curva  $C$  nos leva a uma entidade geométrica importante, a saber, à curvatura de  $C$ . Nesta seção e nas seguintes, esta idéia será estendida para superfícies regulares; isto é, será medido o quão rapidamente uma superfície  $S$  se afasta do plano tangente  $T_pS$ , em uma vizinhança de  $p \in S$ . Isto é equivalente a medir a taxa de variação em  $p$  de um campo vetorial normal unitário  $N$  em uma vizinhança de  $p$ .

Um número surpreendente de propriedades locais de  $S$  em  $p$  pode ser obtido a partir desta aplicação. Neste trabalho, o interesse maior estará focado na definição das *Curvaturas Principais* ( $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$ ) e *direções principais* ( $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ ), *Curvatura de Gauss* ( $\mathbf{K}$ ) e *Curvatura Média* ( $H$ ).

#### 3.3.1. A definição da Aplicação de Gauss e suas propriedades fundamentais

Sabe-se das propriedades do produto vetorial que um vetor normal à parametrização  $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de uma superfície regular  $S$  em um ponto  $p \in S$ , pode-se escolher, para cada ponto de  $\mathbf{x}(U)$ , um vetor normal unitário como abaixo:

$$N(q) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(q), \quad q \in \mathbf{x}(U) \quad (3.3.1)$$

Assim temos uma aplicação diferenciável  $N: \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa a cada  $q \in \mathbf{x}(U)$  um vetor normal  $N(q)$ . O símbolo “ $\wedge$ ” indica o produto vetorial.

Diz-se que uma superfície é *orientável* se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda a superfície; a escolha de um tal campo  $N$  é chamada uma *orientação de  $S$* .

As mossas em dutos, [63] de uma forma geral apresentam, numa vista em planta e perfil, curvas de nível (ou traços de planos secantes verticais e horizontais), do tipo elíptico ou circular. Esta característica denota que, pelo menos localmente, as superfícies das quais são oriundas, podem ser consideradas, pelo menos localmente, como superfícies regulares e orientáveis. Como será visto adiante, as mossas serão discretizadas e tratadas localmente como superfícies regulares (e de fato sempre o são segundo as definições dadas na seção 3.1). Deste modo, doravante neste trabalho,  $S$  denotará uma *superfície regular orientável*.

### 3.4 SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL E CURVATURAS

Demonstra-se na seção 3.2 da referencia [1] que se  $dN_p$  é uma aplicação tal que  $dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u$  e  $dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$ , desta forma,  $dN_p$  é uma aplicação linear auto-adjunta.

O fato de ser  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  uma aplicação linear auto-adjunta permite que seja associada a  $dN_p$  uma forma quadrática  $Q$  em  $T_pS$ , dada por  $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$ ,  $v \in T_pS$ . Para se obter uma interpretação geométrica desta forma quadrática, são necessárias algumas definições adicionais:

**Definição 3.4.1:** A forma quadrática  $II_p$ , definida em  $T_pS$  por  $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ , é chamada a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .

**Definição 3.4.2:** Seja  $C$  uma curva regular em  $S$  passando por  $p \in S$ ,  $k$  a curvatura de  $C$  em  $p$ , e  $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ , onde  $n$  é o vetor normal a  $C$  e  $N$  é o vetor normal a  $S$  em  $p$ . O número  $k_n = k \cdot \cos \theta$  é chamado a curvatura normal de  $C \subset S$  em  $p$ .

Em outras palavras,  $k_n$  é o comprimento da projeção do vetor  $kn$  sobre a normal à superfície em  $p$ , com um sinal dado pela orientação  $N$  de  $S$  em  $p$ , como se pode ver na figura 4.

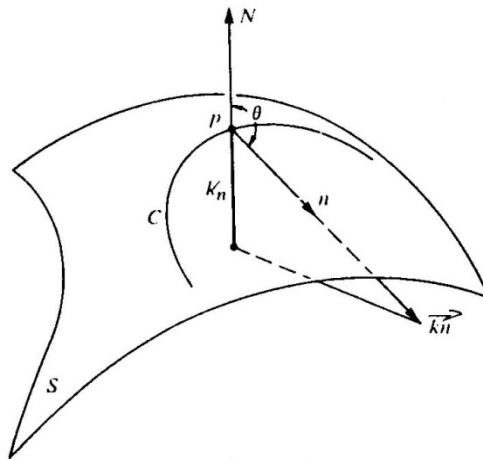


Figura 4: Projeção do vetor  $kn$  sobre a Normal em  $P$ . [1]

Para uma interpretação da segunda forma fundamental  $II_p$ , considere uma curva regular  $C \subset S$  parametrizada por  $\alpha(s)$ , onde  $s$  é o comprimento de arco de  $C$ , com  $\alpha(0) = p$ . Se indicarmos por  $N(s)$  como a restrição do vetor normal  $N$  à curva  $\alpha(s)$ ,  $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ , donde:

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle \tag{3.4.1}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{II}_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\
 &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\
 &= \langle N, \mathbf{kn} \rangle (p) = k_n(p).
 \end{aligned}
 \tag{3.4.2}$$

Em outras palavras, o valor da segunda forma fundamental  $\mathbf{II}_p$  em um vetor unitário  $\mathbf{v} \in T_pS$  é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por e tangente a  $\mathbf{v}$ . Em particular, o seguinte resultado é obtido:

**Proposição de Meusnier:** *Todas as curvas de uma superfície S que têm, em um ponto  $p \in S$ , a mesma reta tangente tem, neste ponto, a mesma curvatura normal.*

A proposição acima permite falar em curvatura *normal* ao longo de uma dada direção em p. Dado um vetor unitário  $\mathbf{v} \in T_pS$ , a interseção de S com o plano contendo  $\mathbf{v}$  e  $N(p)$  é chamada a seção normal de S em p segundo  $\mathbf{v}$  (figura 5). Em uma vizinhança de p, uma seção normal de S em p é uma curva regular plana em S, cujo vetor normal “ $\mathbf{n}$ ” em p é  $\pm N(p)$  ou zero; a sua curvatura é, portanto, igual ao valor absoluto da curvatura normal segundo  $\mathbf{v}$  em p.

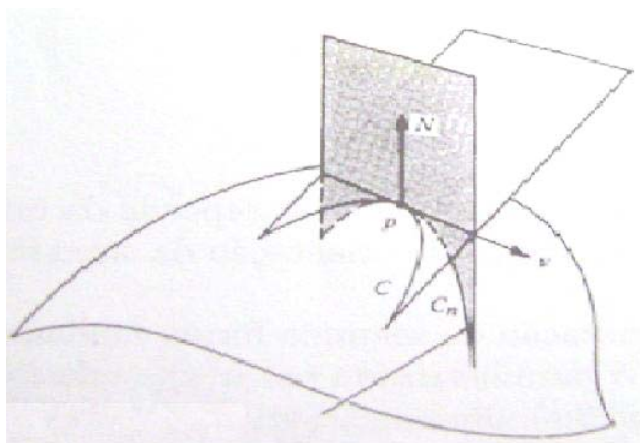


Figura 5: Proposição de Meusnier. C e Cn têm a mesma curvatura normal em p ao longo de  $\mathbf{v}$  [1][2].

No caso de um plano, todas as seções normais são retas; portanto, todas as curvaturas normais são nulas. Assim a segunda forma fundamental é identicamente nula em todos os pontos. Isto está de acordo com o fato de se ter  $dN \equiv 0$ .

Numa esfera de raio unitário, figura 6, as seções normais passando por um ponto  $p \in S^2$  são círculos com raio 1. Assim todas as curvaturas normais são iguais a 1, e a segunda forma fundamental é  $\mathbf{II}_p(\mathbf{v}) = 1$  para todo  $p \in S^2$  e todo  $\mathbf{v} \in T_pS^2$  com  $|\mathbf{v}| = 1$ .

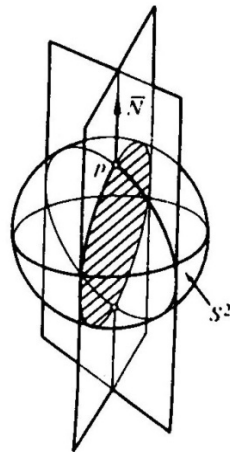


Figura 6: Esfera de raio unitário e suas seções normais [1].

No caso de um cilindro reto, figura 7, as seções normais em um ponto  $p$  variam de um círculo perpendicular ao eixo do cilindro a uma reta paralela ao eixo do cilindro, passando por uma família de elipses. Assim, as curvaturas variam de 1 a 0.

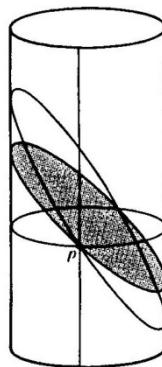


Figura 7: Cilindro reto e suas seções [1].

Ainda reproduzindo a referência [1], conforme figura 8, os vetores  $v$  e  $w$  são auto-vetores de  $dN$  com auto-valores 0 e -1, respectivamente.

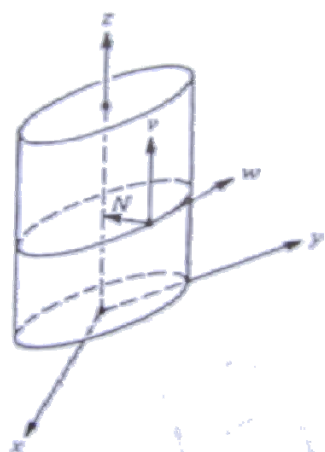


Figura 8:  $v$  e  $w$  são auto-vetores de  $dN$ . [1]

**Exemplo 3.4.1:** Análise do ponto  $p = (0,0,0)$  do parabolóide hiperbólico  $z^2 = y^2 - x^2$ .

Para isto, será considerada a parametrização  $\mathbf{x}(u,v)$  dada por:

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, v^2 - u^2),$$

E calculemos o vetor unitário  $N(u,v)$ ;

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, -2u)$$

$$\mathbf{x}_v = (0, 1, 2v)$$

$$N = \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}}, \frac{1}{2\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}} \right)$$

Como  $u=v=0 \rightarrow v^2 - u^2 = 0 \rightarrow \mathbf{x}_u = (1,0,0)$  e  $\mathbf{x}_v = (0,1,0)$ , (figura 3.4.6). Assim, em  $p = (0,0,0)$ ,  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$  coincidem com os vetores unitários ao longo dos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente.

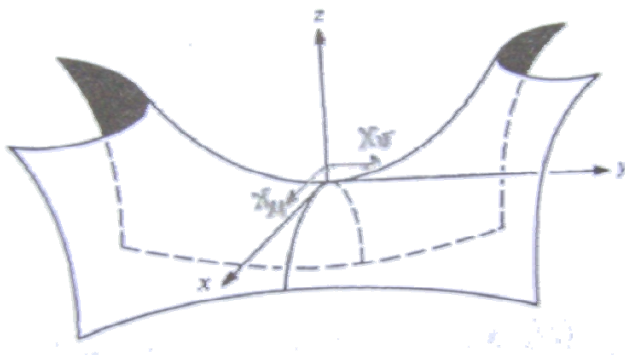


Figura 9: Direções principais em  $p=(0,0,0)$  [1].

Portanto, o vetor tangente em  $p$  à curva  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t),v(t))$ , com  $\alpha(0) = p$ , tem, em  $\mathbb{R}^3$ , coordenadas  $(u'(0), v'(0), 0)$  (figura 9). Restringindo  $N(u,v)$  a essa curva e calculando  $N'(0)$  obtem-se:

$$N'(0) = (2u'(0), -2v'(0), 0),$$

E, portanto, em  $p$ :

$$dN_p(u'(0), v'(0), 0) = (2u'(0), -2v'(0), 0),$$

Daí, que, os vetores  $(1,0,0)$  e  $(0,1,0)$  são auto-vetores de  $dN_p$  com auto-valores 2 e -2, respectivamente. Esta definição será usada mais adiante neste trabalho, quando estes conceitos serão aplicados

### 3.4.1. Curvaturas

De volta à aplicação linear  $dN_p$ . O teorema do apêndice ao capítulo 3 da referencia [1] demonstra que para cada  $p \in S$  existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_pS$  tal que  $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$ ,  $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$ . Além disso,  $k_1$  e  $k_2$  ( $k_1 > k_2$ ), são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental  $II_p$ , isto é, são os valores extremos da curvatura normal em  $p$ .

**Definição 3.4.3:** O máximo da curvatura  $k_1$  e o mínimo da curvatura  $k_2$  são denominados curvaturas principais em  $p$ ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos auto-vetores  $e_1$  e  $e_2$  são denominadas direções principais em  $p$ .

Por exemplo, no plano, todas as direções em todos os pontos são principais. O mesmo ocorre com uma esfera. Em ambos os casos, isto vem do fato de que a segunda forma fundamental, em todos os pontos, restrita a valores unitários, é constante. Assim, todas as direções são extremos para a curvatura principal.

No cilindro mostrado na figura 8, os vetores  $v$  e  $w$  fornecem as direções principais em  $p$ , correspondendo às curvaturas principais 1 e 0, respectivamente. No parabolóide hiperbólico do exemplo 3.4.1, os eixos  $Ox$  e  $Oy$  estão nas direções principais com curvaturas principais 2 e -2, respectivamente.

O conhecimento das curvaturas principais em  $p$  permite calcular facilmente a curvatura normal segundo um direção dada de  $T_pS$ . Com efeito, se  $v \in T_pS$  e  $|v| = 1$ , como  $e_1$  e  $e_2$  formam uma base ortonormal de  $T_pS$ , obtem-se para  $K_n$ :

$$\begin{aligned} k_n &= II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle \\ &= -\langle dN_p(e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta), e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta \rangle \\ &= \langle e_1 k_1 \cos\theta + e_2 k_2 \sin\theta, e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta \rangle \\ &= k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

Esta última expressão é conhecida classicamente sob o nome de fórmula de **Euler**.

Dada uma aplicação linear  $A: V \rightarrow V$  em um espaço vetorial de dimensão 2 e, dada uma base  $\{v_1, v_2\}$  de  $V$ , e lembrando que o determinante de  $A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$  e, traço de  $A = a_{11} + a_{22}$ , onde  $(a_{ij})$  é a matriz de  $A$  na base  $\{v_1, v_2\}$ . Sabe-se também que estes números não dependem da base escolhida, e são, portanto, associados à aplicação linear  $A$ .



Em nosso caso, o determinante de  $dN$  é o produto  $(-k_1)(-k_2) = k_1 k_2$  das curvaturas principais, e o traço de  $dN$  é o negativo  $-(k_1 + k_2)$  da soma das curvaturas principais.

**Definição 3.4.4:** Seja  $p \in S$  e seja  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  a diferencial da Aplicação de Gauss. O determinante de  $dN_p$  é denominado de curvatura Gaussiana  $K$  de  $S$  em  $p$ . O negativo da metade do traço de  $dN_p$  é denominada curvatura média  $H$  de  $S$  em  $p$ .

Em termos das curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$ , pode-se escrever:

$$K = k_1 + k_2 \tag{3.4.3}$$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \tag{3.4.4}$$

### 3.5 APLICAÇÃO DE GAUSS EM COORDENADAS LOCAIS

A seção anterior introduziu alguns conceitos relacionados com o comportamento local da aplicação de Gauss. A fim de dar ênfase à natureza geométrica dos entes introduzidos, evitou-se o uso de coordenadas locais. Para lidar com situações mais gerais, esse método se mostra pouco eficiente. Nesta seção, serão obtidas as expressões da segunda forma fundamental e da aplicação de Gauss, em um sistema de coordenadas locais. Deste modo, será elaborado um método sistemático para o cálculo das grandezas requeridas, em nosso caso, as curvaturas principais de uma superfície  $S$  qualquer.

A expressão da normal  $N$  num ponto  $p$  de uma superfície  $S$  qualquer é dada pela expressão (3.3.1):

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}$$

onde o símbolo “ $\wedge$ ” indica o produto vetorial.

Seja  $\mathbf{x}(u,v)$  uma parametrização em um ponto  $p \in S$  de uma superfície  $S$ , e seja  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t),v(t))$  uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p = \mathbf{x}(u_0,v_0)$ .

O vetor tangente a  $\alpha(t)$  em  $p$  é  $\alpha'(t) = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$  e,

$$dN(\alpha') = N'(u(t),v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Como  $N_u$  e  $N_v$  pertencem a  $T_pS$ , pode-se escrever,

$$N_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v,$$

$$N_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v \quad (3.5.1)$$

E, portanto,

$$dN(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v;$$

Ou, em forma matricial;

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Isto mostra que na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ ,  $dN$  é dada pela matriz  $(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ . Note-se que esta matriz não é necessariamente simétrica, a não ser que  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  seja uma base ortonormal.

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  é dada por:

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2 \end{aligned}$$

Onde, já que  $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ , (pois são perpendiculares), obtem-se, por correspondência dos termos:

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

As expressões (3.2.1) e (3.5.2) são as expressões fundamentais para o estudo das curvaturas de superfícies. Estas equações serão utilizadas em breve quando forem desenvolvidas as aplicações práticas.

Os valores de  $a_{ij}$  podem ser obtidos em termos dos coeficientes  $e, f, g$ . A partir das equações (3.5.1), obtem-se:

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}\mathbf{F} + a_{21}\mathbf{G} \\ -f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}\mathbf{E} + a_{22}\mathbf{F} \\ -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}\mathbf{E} + a_{21}\mathbf{F} \\ -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}\mathbf{F} + a_{22}\mathbf{G} \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Onde  $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ , são os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ , conforme seção 3.2.

Colocando a expressão (3.5.3) em forma matricial:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

após simples operações matriciais:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.5.4)$$

onde:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Daí decorrem as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

As equações (3.5.1) e (3.5.5) são conhecidas como as *equações de Weingarten* [1].

A partir da equação (3.5.4), obtém-se para a curvatura de Gauss:

$$\mathbf{K} = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (3.5.6)$$

Para o cálculo da curvatura média, deve-se considerar que  $-k_1, -k_2$  são os autovalores de  $dN$ . Portanto,  $k_1$  e  $k_2$  satisfazem à equação

$$dN(v) = -kv = -kI(v)$$

para algum  $v \in T_pS$ ,  $v \neq 0$ , onde  $I$  é a aplicação identidade. Decorre que a aplicação linear  $dN + kI$  não é invertível; logo tem determinante nulo. Assim:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} &= 0, \quad \text{ou} \\ k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

Como  $k_1$  e  $k_2$  são raízes da equação quadrática acima, conclui-se que:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} \quad (3.5.8)$$

E, portanto, combinando as expressões (3.5.6), (3.5.7), (3.5.8) e (3.5.9), obtêm-se para as curvaturas principais  $k_1, k_2$ ;

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K} \quad (3.5.9)$$

Nosso objetivo fica assim assegurado, isto é, como as deformações de flexão são proporcionais às variações de curvatura da superfície, como será visto em mais detalhes no capítulo 4, sua determinação poderá ser feita através da **Aplicação de Gauss** seguindo o equacionamento indicado acima e que pode ser resumido da seguinte maneira:

1. Obtém-se a primeira forma fundamental;
2. Obtém-se a segunda forma fundamental;
3. Calcula-se  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{H}$ ;
4. Obtêm-se as curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  (e, portanto,  $R1$  e  $R2$ )

Uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana  $\mathbf{K}$ , para  $\mathbf{K} \neq 0$ , é que a mesma é o análogo, para superfícies, da curvatura  $k$  para curvas planas.

Ao final da próxima seção, também será mostrado, com exemplos práticos, como obter também as **direções principais** correspondentes às curvaturas principais.

### 3.6 CURVATURAS E DIREÇÕES PRINCIPAIS – EXEMPLOS

Muitas vezes uma superfície é dada como uma função diferenciável explícita do tipo  $z = h(x, y)$ , onde  $(x, y)$  pertence a um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Como será visto mais adiante no capítulo 5, será discretizada uma superfície real segundo uma malha regularmente espaçada segundo eixos coordenados  $(x, y)$ . Desta forma, é conveniente ter à mão as fórmulas para os conceitos relevantes neste caso. Para se obter tais fórmulas primeiramente deve-se parametrizar a superfície por:

$$\mathbf{X}(u, v) = (u, v, h(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

onde:  $u = x$ ,  $v = y$ . Substituindo parâmetros e após um cálculo simples, mostra-se que: [1]

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u &= (1, 0, h_u) \\
\mathbf{x}_{uu} &= (0, 0, h_{uu}) \\
\mathbf{x}_v &= (0, 1, h_v) \\
\mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, h_{vv}) \\
\mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, h_{uv}) = (0, 0, h_{vu}) = \mathbf{x}_{vu}
\end{aligned} \tag{3.6.1}$$

Assim,

$$N(x, y) = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{(1+h_x^2+h_y^2)}} \tag{3.6.2}$$

é um campo vetorial unitário sobre a superfície, e os coeficientes da segunda forma fundamental podem ser determinados substituindo-se na expressão (3.5.2). Assim:

$$\begin{aligned}
e &= \frac{h_{xx}}{\sqrt{(1+h_x^2+h_y^2)}} \\
f &= \frac{h_{xy}}{\sqrt{(1+h_x^2+h_y^2)}} \\
g &= \frac{h_{yy}}{\sqrt{(1+h_x^2+h_y^2)}}
\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Da mesma forma, substituindo valores em (3.2.3):

$$\begin{aligned}
E &= \|\mathbf{x}_u\|^2 = \left[ \sqrt{(1+0+h_x^2)} \right]^2 = (1+h_x^2) \\
F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = (h_x h_y) \\
G &= \|\mathbf{x}_v\|^2 = \left[ \sqrt{(0+1+h_y^2)} \right]^2 = (1+h_y^2)
\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

A partir das expressões acima, as demais fórmulas podem facilmente ser calculadas. Assim sendo, a curvatura de Gauss e a curvatura média serão:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1+h_x^2+h_y^2)^2}, \\
\mathbf{H} &= \frac{1}{2} \frac{(1+h_x^2)h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy} + (1+h_y^2)h_{xx}}{(1+h_x^2+h_y^2)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{3.6.5}$$

Há ainda outra razão, não menos importante, para que se estudem superfícies dadas por  $z = h(x, y)$ . Ela vem do fato de que, localmente, toda superfície é o gráfico de uma função diferenciável (*cf.* seção 2.2 da referência [1]).

Pode-se escolher um sistema de eixos coordenados de tal forma que a origem  $O$  das coordenadas coincida com o ponto  $p$  e o eixo  $Oz$  coincida com a normal de  $S$ . Assim, os eixos  $Ox$  e  $Oy$  coincidem com  $T_pS$  em  $p$ .

Segue-se que uma vizinhança de  $p$  em  $S$  pode ser representada na forma  $z = h(x,y)$ ,  $(x,y) \in U \subset R^2$ , onde  $U$  é um conjunto aberto e  $h$  é uma função diferenciável (cf, seção 2.2 da referencia [1]), com  $h(0,0) = 0$ ,  $h_x(0,0) = 0$ ,  $h_y(0,0) = 0$ , figura (10) [1]

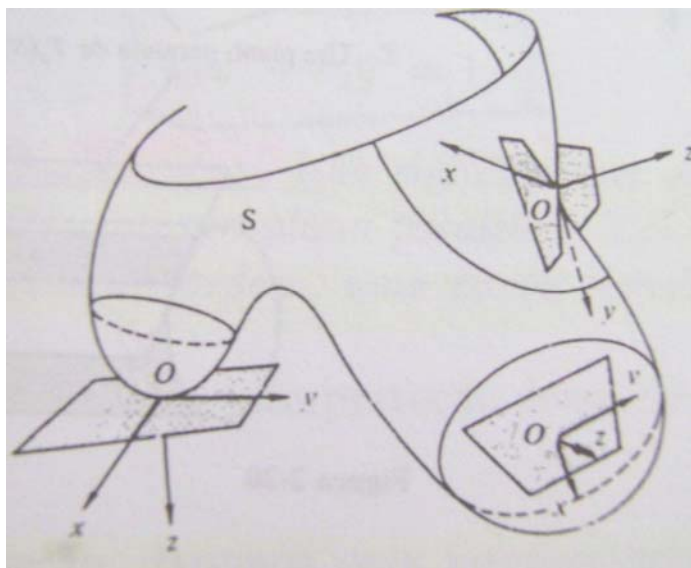


Figura 10: Cada ponto de  $S$  possui uma vizinhança que pode ser representada como  $z = h(x,y)$  [1].

A segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$  aplicada ao vetor  $(x,y) \in R^2$  é, neste caso,

$$h_{xx}(0,0)x^2 + 2h_{xy}(0,0)xy + h_{yy}(0,0)y^2 \tag{3.6.6}$$

É interessante observar que, caso nosso vetor  $(x,y)$  fosse parametrizado como  $x = \cos \alpha$  e  $y = \sin \alpha$ , esta expressão é a derivada 2ª direcional de  $h(x,y)$  na direção  $\alpha$  (ângulo de  $(x,y)$  com o eixo  $Ox$ ), do vetor  $(x,y)$ , conforme referência [3] .

No cálculo elementar de duas variáveis, a forma quadrática acima é conhecida como a **Hessiana** de  $h$  em  $(0,0)$ . Assim, a **Hessiana** de  $h$  em  $(0,0)$  é a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .

### 3.6.1. Direções principais

Antes de prosseguir aos exemplos práticos, deve-se complementar as equações (3.5.4) e calcular seus auto-vetores e autovalores que são necessários à determinação das direções principais.

Sabe-se que se  $A$  é uma matriz quadrada, seus auto-vetores e auto-valores podem ser obtidos segundo as seguintes expressões: [1][2]

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Seu determinante  $D = (ad - cb)$  e seu traço  $T = (a+d)$

Demonstra-se facilmente [64], que seus auto-valores serão:

$$L_1 = T/2 + (T^2/4 - D)^{1/2}$$

$$L_2 = T/2 - (T^2/4 - D)^{1/2}$$

Se “ $c$ ” é diferente de 0, então seus auto-vetores serão:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} s_1 \\ t_1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} L_1 - d \\ c \end{vmatrix}, e \\ \begin{vmatrix} s_2 \\ t_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} L_2 - d \\ c \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

Se “ $b$ ” é diferente de 0, então seus auto-vetores serão:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} s_1 \\ t_1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b \\ L_1 - a \end{vmatrix}, e \\ \begin{vmatrix} s_2 \\ t_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b \\ L_2 - a \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Se ambos “ $b$ ” e “ $c$ ” são iguais a 0, então seus auto-vetores serão:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} s_1 \\ t_1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, e \\ \begin{vmatrix} s_2 \\ t_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

As direções principais podem então ser obtidas segundo as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= s_1(1, 0, h_x) + t_1(0, 1, h_y), e \\ \mathbf{e}_2 &= s_2(1, 0, h_x) + t_2(0, 1, h_y) \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

Onde  $s_1, t_1, s_2, t_2$  são obtidos nas equações (3.6.7) a (3.6.9).

**Exemplo 3.6.1:** Cilindro reto  $x^2 + y^2 = 1$ , parametrizado por  $x(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ :

a. Cálculo das derivadas:

$$\mathbf{x}_u = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0)$$

$$\mathbf{x}_v = (0, 0, 1)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu} = (0, 0, 0)$$

- b. Determinação da normal  $N$ : (3.3.1)

$$N = \langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \rangle = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0) \Rightarrow |N| = 1$$

- c. Determinação da primeira forma fundamental usando a Eq. (3.2.3)

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u + 0 = 1$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 0 + 0 + 1 = 1$$

- d. Determinação da segunda forma fundamental usando a Eq. (3.5.2)

$$e = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0) \cdot (-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0) = 1$$

$$f = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0$$

$$g = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0) \cdot (0, 0, 0) = 0$$

- e. Determinação das curvaturas principal e média usando as Eqs. (3.5.6) e (3.5.8)

$$\mathbf{K} = \frac{1 \cdot 0 - 0^2}{1 \cdot 1 - 0^2} = 0$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{1 \cdot 1 - 0^2} \right] = \frac{1}{2}$$

- f. Determinação das curvaturas principais usando a Eq. (3.5.9)

$$k_1 = \mathbf{H} + \sqrt{\mathbf{H}^2 - \mathbf{K}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, e$$

$$k_2 = \mathbf{H} - \sqrt{\mathbf{H}^2 - \mathbf{K}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

- g. Determinação das direções principais: usando as Eqs. (3.5.4 e 3.5.5) e, (3.6.10)

$$A = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \parallel \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \text{ assim,}$$

$$\begin{vmatrix} s_1 \\ t_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, e$$

$$\begin{vmatrix} s_2 \\ t_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Como  $h_x = h_y = 0$ , obtém-se para as direções principais:



$$\mathbf{e}_1 = 1 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) = (1,0,0), \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e}_2 = 0 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) = (0,1,0).$$

**h.** Conclusões:

Como se esperava, os auto-valores de um cilindro reto são 1 e 0, isto é, suas curvaturas máxima e mínima, segundo a direção da tangente circunferencial e da tangente normal à primeira num ponto  $p(x,y,z)$  genérico de sua superfície. Neste caso as direções principais coincidem com as direções dos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , como já mencionado anteriormente, formando uma base ortonormal, também como já mencionado.

**Exemplo 3.6.2:** Parabolóide hiperbólico  $z = y^2 - x^2$ , parametrizado por  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$ , no ponto  $p = (0,0,0)$ :

**a.** Cálculo das derivadas:

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, -2u)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, -2)$$

$$\mathbf{x}_v = (0, 1, 2v)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (0, 0, 2)$$

$$\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu} = (0, 0, 0)$$

**b.** Determinação da normal  $N$ : (3.3.1)

$$N = \langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \rangle = \left( \frac{u}{\sqrt{(u^2 + v^2 + 1/4)}}, \frac{-v}{\sqrt{(u^2 + v^2 + 1/4)}}, \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(u^2 + v^2 + 1/4)}} \right) = (0, 0, 1) \Rightarrow |N| = 1$$

**c.** Determinação da primeira forma fundamental: (3.2.3)

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 1 + 0 + 4u^2 = 1$$

$$\mathbf{F} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0 + 0 - 4u^2 = 0$$

$$\mathbf{G} = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 0 + 1 + 4v^2 = 1$$

**d.** Determinação da segunda forma fundamental: (3.5.2)

$$\mathbf{e} = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = 0 + 0 - 2 = -2$$

$$\mathbf{f} = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0$$

$$\mathbf{g} = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = 0 + 0 + 2 = +2$$

**e.** Determinação das curvaturas principal e média: (3.5.6) e (3.5.8)

$$\mathbf{K} = \frac{-2 \cdot 2 - 0^2}{1 \cdot 1 - 0^2} = -4$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \left[ \frac{-2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2}{1 \cdot 1 - 0^2} \right] = 0$$

f. Determinação das curvaturas principais: (3.5.9)

$$k_1 = \mathbf{H} + \sqrt{\mathbf{H}^2 - \mathbf{K}} = 0 + 2 = 2, e$$

$$k_2 = \mathbf{H} - \sqrt{\mathbf{H}^2 - \mathbf{K}} = 0 - 2 = -2.$$

g. Determinação das direções principais: (3.5.4 e 3.5.5) e, (3.6.10)

$$A = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \text{ assim,}$$

$$\begin{vmatrix} s_1 \\ t_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, e$$

$$\begin{vmatrix} s_2 \\ t_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Como  $h_x = h_y = 0$ , temos:

$$e_1 = 1 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 1, 0) = (1, 0, 0), e$$

$$e_2 = 0 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) = (0, 1, 0).$$

h. Conclusões:

Os auto-valores do parabolóide hiperbólico, no ponto  $p = (0,0,0)$  são 2 e -2, respectivamente, isto é, suas curvaturas máxima e mínima, segundo a direção da tangente e da sua normal num ponto  $p(0,0,0)$  de sua superfície. Neste caso as direções principais, como no caso anterior, também coincidem com as direções dos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , como já mencionado anteriormente, formando uma base ortonormal, também como já mencionado.

Na figura 11, vê-se o parabolóide hiperbólico e suas direções principais.

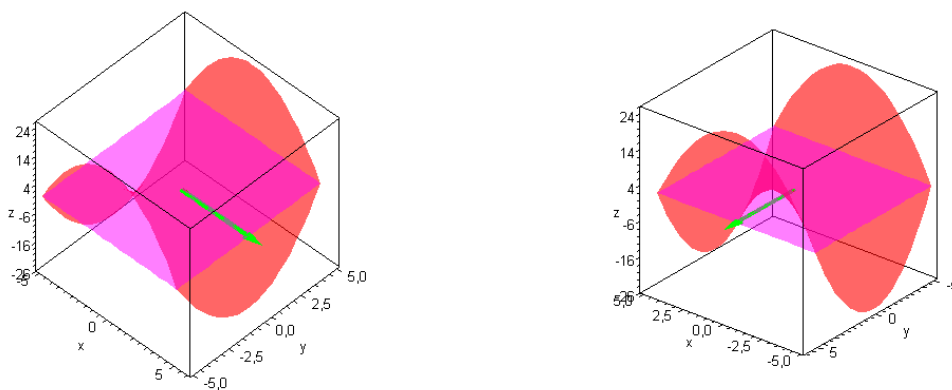


Figura 11: Parabolóide hiperbólico  $z = y^2 - x^2$  e direções principais em  $p=(0,0,0)$ . [13]

**Exemplo 3.6.3:** Parabolóide  $z = x^2 + ky^2$ ,  $k > 0$ , parametrizado por  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + kv^2)$ , no ponto  $p = (0, 0, 0)$ :

a. Cálculo das derivadas:

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, 2u)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, 2)$$

$$\mathbf{x}_v = (0, 1, 2kv)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (0, 0, 2k)$$

$$\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu} = (0, 0, 0)$$

b. Determinação da normal  $N$ : (3.3.1)

$$N = \langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \rangle = (0, 0, 1) \Rightarrow |N| = 1$$

c. Determinação da primeira forma fundamental: (3.2.3)

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 1 + 0 + 4u^2 = 1$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0 + 0 + 4uv = 0$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 0 + 1 + 4k^2v^2 = 1$$

d. Determinação da segunda forma fundamental: (3.5.2)

$$\mathbf{e} = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = 0 + 0 + 2 = +2$$

$$\mathbf{f} = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0$$

$$\mathbf{g} = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = 0 + 0 + 2k = +2k$$

e. Determinação das curvaturas principal e média: (3.5.6) e (3.5.8)

$$\mathbf{K} = \frac{2 \cdot 2k - 0^2}{1 \cdot 1 - 0^2} = 4k$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot k}{1 \cdot 1 - 0^2} \right] = (1 + k)$$

f. Determinação das curvaturas principais: (3.5.9)

$$k_1 = \mathbf{H} + \sqrt{\mathbf{H}^2 - \mathbf{K}} = (1 + k) + (1 - k) = 2, e$$

$$k_2 = \mathbf{H} - \sqrt{\mathbf{H}^2 - \mathbf{K}} = (1 + k) - (1 - k) = 2k$$

g. Determinação das direções principais: (3.5.4 e 3.5.5) e, (3.6.10)

$$A = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2k \end{vmatrix}, \text{ assim,}$$

$$\begin{vmatrix} s_1 \\ t_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, e$$

$$\begin{vmatrix} s_2 \\ t_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Como  $h_x=2x=0$ , e  $h_y=2ky=0$ , temos:

$$\mathbf{e}_1 = 1 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) = (1,0,0), e$$

$$\mathbf{e}_2 = 0 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) = (0,1,0).$$

**h.** Conclusões:

Os autovalores do parabolóide dado pela função explícita  $z = x^2 + ky^2$ , no ponto  $p = (0,0,0)$  são 2 e 2k, respectivamente, isto é, suas curvaturas máxima e mínima, segundo a direção da tangente e da sua normal num ponto  $p(0,0,0)$  de sua superfície. Neste caso as direções principais, como no caso anterior, também coincidem com as direções dos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , como já mencionado anteriormente, formando uma base ortonormal, também como já mencionado.

**Exemplo 3.6.4:** Resolvendo o exemplo anterior em termos da função explícita  $z = x^2 + ky^2$ , temos:

**a.** Cálculo das derivadas:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ky$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2k$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial yx} = 0$$

**b.** Determinação da primeira forma fundamental: (3.6.4)

$$\mathbf{E} = \|\mathbf{x}_u\|^2 = \left[ \sqrt{(1+0+h_x^2)} \right]^2 = (1+2x^2) = 1$$

$$\mathbf{F} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = (h_x h_y) = 0$$

$$\mathbf{G} = \|\mathbf{x}_v\|^2 = \left[ \sqrt{(0+1+h_y^2)} \right]^2 = (1+2ky^2) = 1$$

c. Determinação da segunda forma fundamental: (3.6.3)

$$\mathbf{e} = \frac{h_{xx}}{\sqrt{(1+h_x^2+h_y^2)}} = \frac{2}{1}$$

$$\mathbf{f} = \frac{h_{xy}}{\sqrt{(1+h_x^2+h_y^2)}} = 0$$

$$\mathbf{g} = \frac{h_{yy}}{\sqrt{(1+h_x^2+h_y^2)}} = 2k$$

d. Determinação das curvaturas principal e média: (3.6.5)

$$\mathbf{K} = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1+h_x^2+h_y^2)^2} = \frac{2 \cdot 2k}{1} = 4k$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \frac{(1+h_x^2)h_{yy} - 2h_xh_yh_{xy} + (1+h_y^2)h_{xx}}{(1+h_x^2+h_y^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \frac{2+2k}{1} = (1+k)$$

e. Determinação das curvaturas principais: (3.5.9)

$$k_1 = \mathbf{H} + \sqrt{\mathbf{H}^2 - \mathbf{K}} = (1+k) + (1-k) = 2, e$$

$$k_2 = \mathbf{H} - \sqrt{\mathbf{H}^2 - \mathbf{K}} = (1+k) - (1-k) = 2k.$$

Confirmando os valores anteriormente obtidos. Obviamente as direções principais são as mesmas do exemplo anterior, não sendo necessário recalculá-las.

f. Conclusões:

As mesmas do exemplo anterior. A única ressalva é que, como deve ter-se observado, nesta notação, não é necessário calcular a normal  $N$  à  $S$  no ponto  $p$ . Na figura 12 vê-se o parabolóide e suas direções principais. [13]

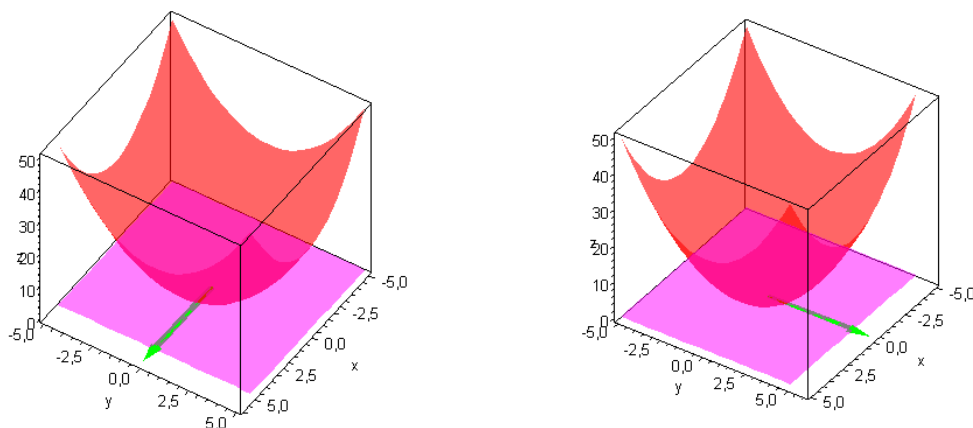


Figura 12: Parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e direções principais em  $p=(0,0,0)$ . [13]

## Capítulo IV

### TENSÕES E DEFORMAÇÕES EM CASCAS

De um modo geral as normas e manuais internacionais e em especial as principais normas adotadas para oleodutos e gasodutos, respectivamente a *ASME B 31.4 e ASME B 31.8* [24], e o *Pipeline Defect Assessment Manual – PDAM* [19] – entre outros, preconizam a avaliação de mossa, exclusive à fadiga, através da avaliação das deformações equivalentes de flexão e de membrana, com base na determinação dos raios de curvatura da superfície em avaliação e em sua profundidade relativa à extensão reta do prolongamento da geratriz original do duto.

Como poderá ser visto na seção 4.4, a avaliação das deformações extensionais de membrana não enseja maiores requisitos de interpolação geométrica, uma vez que, segundo os códigos citados [44], apenas se baseia na determinação de profundidades e comprimentos.

Ora, deste modo, o problema praticamente se restringe à determinação dos raios das curvaturas principais da superfície e suas direções, resultantes da ação do agente indentador sobre o duto, como será visto adiante.

Cascas cuja relação espessura/diâmetro é muito pequena são estudadas segundo a teoria das membranas. A seguir passa-se a descrever de forma sucinta elementos da teoria das membranas aplicadas para cascas.

#### 4.1 CÁLCULO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES NAS CASCAS PELA TEORIA DE MEMBRANA

##### 4.1.1. Definição

Cascas são estruturas de superfície delgadas, não planas, que recebem cargas distribuídas e reagem através de esforços solicitantes predominantemente de tração e compressão. Quando a espessura da casca é pequena, comparando-se com as outras dimensões, a rigidez ao momento fletor (que é proporcional ao momento de inércia) é muito pequena, e pode ser em princípio, considerada igual a zero. Nestes casos as cascas podem ser estudadas pela teoria da membrana, ou seja, as cargas externas (peso próprio, revestimento, carga acidental distribuída) serão absorvidas através de esforços solicitantes normais de compressão e tração.

Para o estudo de cascas a análise é feita pela teoria elástica das cascas delgadas [26][77] tendo-se em conta a rigidez, a flexão e, portanto, calculando-se os momentos e os esforços normais e cortantes ou tangenciais,

#### 4.1.2. Teoria de Membrana

Como já mencionado, membranas são estruturas de superfície não planas, de pequena espessura, que absorvem as cargas externas por esforços solicitantes de tração ou compressão normais às seções transversais.

Por conveniência considera-se uma barra prismática. De fato, sendo  $h$  a espessura da barra (ou casca), sabe-se da Resistência dos Materiais [18][21][33] que a rigidez à flexão de uma barra prismática, por unidade de largura é proporcional ao seu momento de inércia.

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (4.1.1)$$

E considerando  $b$  unitário ( $I$  por unidade de largura) e como  $h$  é pequeno, resulta  $h^3$  muito pequeno, ou seja, na prática, adota-se  $I \cong 0$ .

A teoria de membrana parte da hipótese de  $I = 0$ . Como o momento fletor  $M$  é proporcional a  $I$  adota-se  $M = 0$  na teoria. No caso dos dutos isto não é exatamente verdade, pois existe importante momento resistente. Contudo, assumindo a premissa acima a abordagem torna-se mais conservativa.

A expressão membrana vem de estruturas infláveis, de tecido ou de elastômero, que realmente possuem  $I = 0$ . A estrutura de um balão dirigível, um armazém inflado para estoque de grãos, um balão de gás ou um cabo tracionado (contido num plano), resistem às solicitações apenas com esforços de tração. Para estes casos a teoria é exata.

A pequena rigidez extensional e à flexão do elemento da estrutura ( $h$  pequeno) não implica em pequena rigidez do conjunto, que pode resistir aos esforços de compressão sem risco de flambagem. O conjunto de superfície curva, como um todo, tem grande rigidez quando comparado com a mesma superfície se fosse plana

A teoria de membrana tem como outra hipótese, além daquela da pequena espessura, que os esforços aplicados sejam de superfície, ou seja, em unidades de força por unidade de superfície.

A resistência das cascas, então, deve-se à sua forma geométrica que gera esforços solicitantes normais, equilibrando as cargas externas.

### 4.1.3. Definição de Raio de Curvatura no ponto

Considere-se um plano  $\pi$  tangente à superfície da casca no ponto  $O$ . Sejam  $X$  e  $Y$  dois eixos ortogonais em  $\pi$  passando por  $O$  e  $Z$ , o eixo normal ao plano  $\pi$ . Por definição,  $Z$  é a normal à casca por  $O$ .

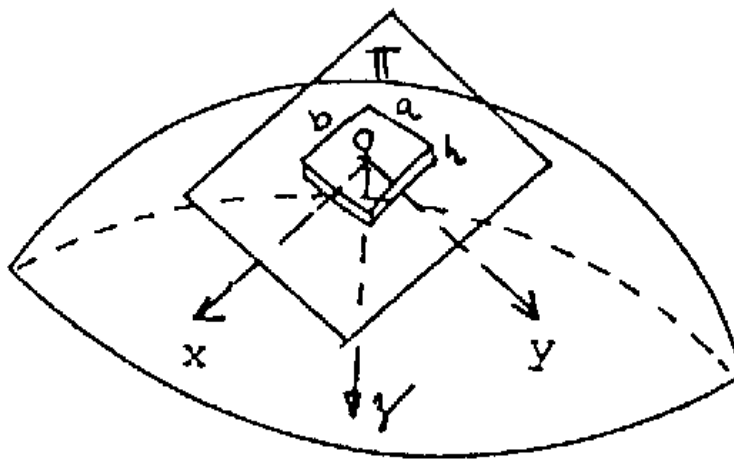


Figura 13: Elemento infinitesimal de casca [16].

O elemento infinitesimal em torno do ponto  $O$  tem dimensões  $a$  e  $b$  (na realidade, infinitesimais  $dx$  e  $dy$ ). Ficam assim definidos os três eixos ortogonais  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e, portanto, os planos ortogonais formados pelos eixos dois a dois:

- eixos  $(x,y)$ , plano  $\pi$ ;
- eixos  $(x,z)$ , plano  $\alpha$ ;
- eixos  $(y,z)$ , plano  $\beta$ ;

Determinados os planos  $\pi$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  é possível definir os raios de curvatura  $R_x$  e  $R_y$  da casca no ponto  $O$ .

A intersecção do plano  $\alpha$  com a casca define uma curva, chamada traço de plano, de equação  $z = f(x)$ . Por definição, raio de curvatura  $R_x$  no ponto  $O$  é o raio de uma circunferência cujo arco substitui a curva de equação  $z = f(x)$  nas proximidades do ponto (analiticamente, de maneira rigorosa, e dependendo do grau de contato, as duas curvas se confundem no comprimento infinitesimal  $dx$ ). Do mesmo modo a intersecção do plano  $\beta$  com a casca define uma curva de equação  $z = f(y)$ , sendo  $R_y$  é o raio do arco de círculo que se confunde com a curva de equação  $z = f(y)$  no entorno do ponto.

Consideremos o elemento de casca com dimensões infinitesimais  $dx$  e  $dy$  passando por  $O$ , onde:



- $x, y$  contidos em  $\pi$ , tangente à casca por  $O$ ;
- $x$  intersecção do plano  $\alpha$  que contém  $x, z$  com o plano  $\pi$ ;
- $y$  intersecção do plano  $\beta$  que contém  $y, z$  com o plano  $\pi$ ;

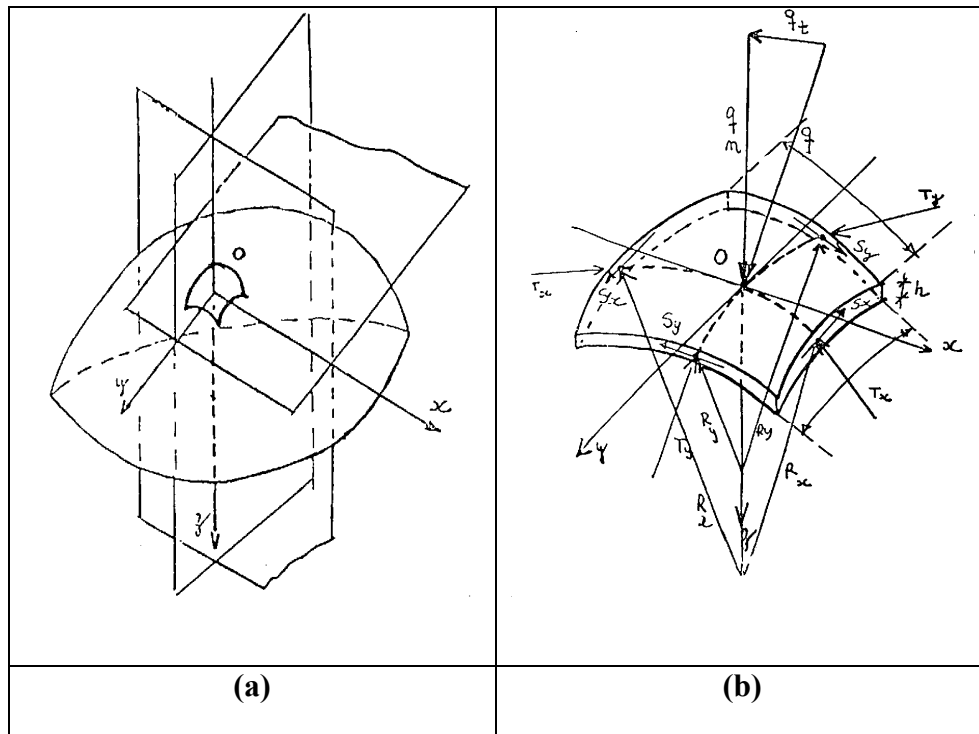


Figura 14: (a)Traços de planos (b) Distribuição dos carregamentos [26] [67].

Vista superior, em projeção no plano  $\pi$  tangente em  $O$ , o elemento de área infinitesimal tem o aspecto da figura 15, onde  $T_x$  e  $T_y$  são forças normais à seção da casca medidas por unidade de comprimento que equilibram as forças externas e  $N_x$  e  $N_y$  são os esforços normais nas direções  $x$  e  $y$  que equilibram a carga externa  $P_n = q_n \cdot a \cdot b$  ( $P_n$  não está mostrado na figura).

$$T_x = N_x / dy, \text{ e } T_y = N_y / dx \quad (4.1.2)$$

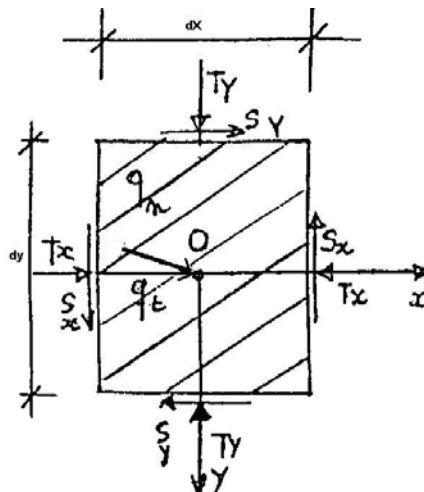


Figura 15: Vista de topo do elemento infinitesimal mostrando as projeções das tensões no plano  $xy$  [67].

Uma vez calculado  $T_x$  e  $T_y$ , determinam-se as tensões em duas direções ortogonais  $x$  e  $y$  pela expressão (4.1.3) onde  $h$  é a espessura da casa.

$$\sigma_x = T_x / h \text{ e } \sigma_y = T_y / h \tag{4.1.3}$$

Do mesmo modo,  $S_x$  e  $S_y$  são forças tangenciais que equilibram a força externa  $P_t = q_r \cdot a \cdot b$ . Assim:

$$S_x = Q_x / dy, \text{ e } S_y = Q_y / dx \tag{4.1.4}$$

Obtidos  $S_x$  e  $S_y$ , determinam-se as tensões cisalhantes:

$$\tau_x = -\tau_y = Q_x / (dy \cdot h) = Q_y / (dx \cdot h) \tag{4.1.5}$$

Pois as tensões de cisalhamento em direções ortogonais são iguais e de sinais contrários. Sabe-se do estudo de estado plano de tensões que existem duas direções ortogonais  $x_1$  e  $y_1$  ditas direções principais, que, no caso das cascas, coincidem com as curvaturas máximas e mínimas em torno do ponto  $O$ , e que estes, por sua vez, definem os eixos principais.

Nas direções principais as tensões normais são máximas e as tensões tangenciais são nulas. Assim, orientando-se os lados do elemento de centro  $O$  tal que  $X$  tenha a direção de  $x_1$  e  $Y$  a direção de  $y_1$ , ou seja, fazendo uma rotação de eixos de forma que os eixos sejam os principais e que, os esforços normais  $T_x$  e  $T_y$  sejam coincidentes com estes eixos, têm-se:

$$T_x = T_1 \tag{4.1.6}$$

$$T_y = T_2 \tag{4.1.7}$$

$$S = 0 \tag{4.1.7.a}$$

$T_1$  e  $T_2$  são os carregamentos principais de tração ou compressão por unidade de comprimento.

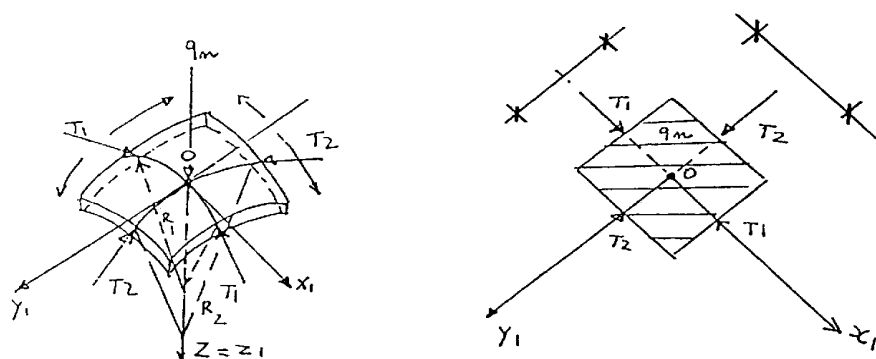


Figura 16: Carregamentos principais [67].

Estudando o equilíbrio do elemento  $ab$  carregado com a componente  $q_x$  de  $q_n$ . No cisalhamento vertical pelo plano principal  $zx_1$ ,

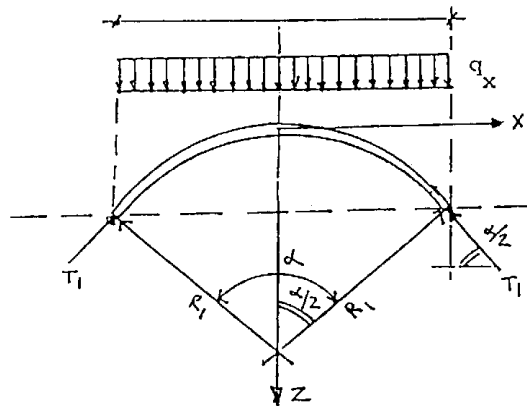


Figura 17: Segmento  $ab$  [67].

A equação de equilíbrio de forças na direção vertical considerando o arco descrito pelo ângulo  $\alpha$ :

$$\sum V = 0$$

$$q_x \cdot dx \cdot dy = T_1 \cdot dy \cdot \text{sen} \alpha / 2 + T_1 \cdot dy \cdot \text{sen} \alpha / 2 \quad (4.1.8.a)$$

$q_x$  = parcela de  $q_n$  na direção de  $x_1$

$$\text{sen} \alpha / 2 \approx \alpha / 2 \text{ pois } \alpha / 2 \text{ é muito pequeno.} \quad (4.1.8.b)$$

Pode-se escrever, a partir da equação (4.1.8.a):

$$q_x \cdot dx \cdot dy = 2T_1 \cdot dy \cdot \alpha / 2 = T_1 \cdot dy \cdot \alpha \quad (4.1.9.a)$$

e, como  $\alpha = dx / R_1$ , vem:

$$q_x \cdot dx \cdot dy = T_1 \cdot dy \cdot dx / R_1 \quad (4.1.9.b)$$

Portanto,

$$q_x = T_1 / R_1 \quad (4.1.10)$$

Analogamente, no plano principal vertical que contém  $zy_1$  :

$$q_y = T_2 / R_2 \quad (4.1.11)$$

Como  $q_n = q_x + q_y$  :

$$q_n = T_1 / R_1 + T_2 / R_2 \tag{4.1.12}$$

Que é a equação fundamental da teoria da membrana.

A equação fundamental relaciona os esforços em duas direções principais em um ponto da casca com seus respectivos raios de curvatura.

No capítulo 5.7 será mostrado como estas grandezas podem ser incorporadas ao critério de integridade proposto neste trabalho de mestrado.

## 4.2 TENSÕES E DEFORMAÇÕES (CURVATURAS) NO REGIME ELÁSTICO

### 4.2.1. Tensões

É demonstrado no Anexo A.4, que as tensões resultantes no caso de se distribuírem uniformemente e linearmente ao longo da espessura e levando em conta a representação nas figuras 57 e 58 do Anexo A.4 e, reorganizando os termos, podem ser calculadas a partir dos esforços unitários, do seguinte modo:

$$\sigma_{11} = \frac{N_{11}}{e} - \frac{12M_{11}x_3}{e^3} \tag{4.2.1}$$

sendo  $\sigma_{11}$  definido num ponto a uma distância  $x_3$  da superfície média (ver figura 19).

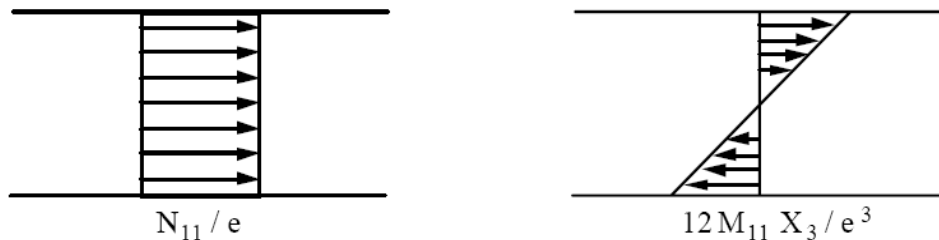


Figura 18: Componente de membrana e de flexão da tensão  $\sigma_{11}$ . [67]

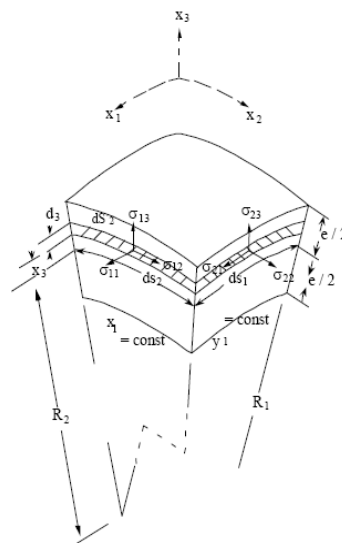


Figura 19: Tensor das tensões [67].

O primeiro termo da equação (4.2.10) representa a parcela extensional ou de membrana da tensão e o segundo termo, representa a parcela da tensão devido à flexão.

As tensões  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{21}$  são definidas de modo análogo.

#### 4.2.2. Deformação extensional de membrana

Considere um elemento de casca com dupla curvatura e considere  $OABC$  a superfície média deste elemento, como se representa na figura 20.a. Em adição, considere  $r_x$  e  $r_y$  como sendo os raios de curvatura desta superfície medial nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente. Quando submetida à ação puramente extensional de membrana devido às tensões  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , esta superfície medial apenas se estende, mas não é rotacionada. As deformações desta superfície medial devido às tensões de membrana nas direções  $x$  e  $y$  serão denominadas  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  respectivamente.

A superfície  $DEF$  situada a uma distancia  $z$  da superfície medial será denominada *superfície z* e também é mostrada na figura 20.a. Assim como a superfície medial se estende sob ação das tensões de membrana consideradas, esta *superfície z* simplesmente sofre deformações  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  e também não sofre rotação, desta forma, a *superfície z* também sofre estas mesmas deformações.

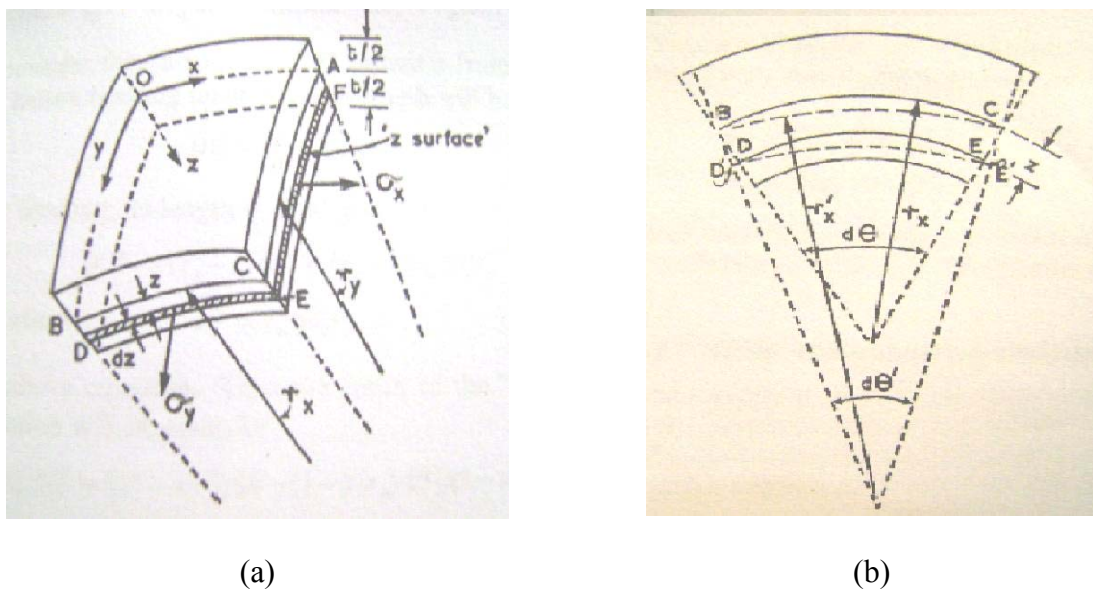


Figura 20: (a) Tensões num elemento de casca e (b) Mudança de curvatura [26].

Assim sendo, as deformações de membrana da *superfície z* são:

- Deformação de membrana na direção  $x = \epsilon_1$  (4.2.1)

- Deformação de membrana na direção  $y = \epsilon_2$  (4.2.2)

### 4.2.3. Deformação de flexão

Se agora for considerada somente flexão do mesmo elemento de casca, então a superfície medial não sofre mais extensão, porém sofre rotação. Nesta postulação da teoria das deformações de flexão, as seguintes premissas são assumidas:

- Seções planas permanecem planas;
- Linhas radiais permanecem retas;
- A superfície medial atua como a linha neutra, sofrendo apenas rotações como indicada na figura 20.b.

As duas primeiras são meramente uma extensão das premissas de *Euler-Bernoulli* para vigas curvas. A última premissa não é estritamente verdadeira, uma vez que a superfície neutra desloca-se minimamente da superfície medial devido à dupla curvatura do elemento. Entretanto, esta discrepância é suficientemente pequena e pode ser ignorada.

Considere agora um elemento de casca como mostrado na figura 20.b. Antes de se impor a flexão, o arco  $BC$  da superfície medial é representado como a linha cheia e seu raio de curvatura é  $r_x$ . Depois de aplicada a flexão, a superfície medial é representada como alinha tracejada, passando pelos pontos  $B$  e  $C$ . e seu novo raio de curvatura é  $r'_x$ . Agora, como a superfície medial não se deforma extensionalmente, o comprimento  $BC$ , antes e após a flexão, permanece constante, assim:

$$\begin{aligned} BC &= r_x d\theta = r'_x d\theta' \quad e, \\ d\theta' &= \frac{r_x}{r'_x} d\theta \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Agora considere o segmento da *superfície z*, de comprimento  $DE$  distante  $z$  da superfície medial. Antes da aplicação da flexão seu comprimento é dado por:

$$DE = (r'_x - z) d\theta \quad (4.2.4)$$

e, após a flexão, seu comprimento  $D'E'$  é dado por:

$$D'E' = (r'_x - z) d\theta' \quad (4.2.5)$$

e, substituindo a equação (4.2.3) em (4.2.5):

$$D'E' = (r'_x - z) \frac{r_x}{r'_x} d\theta \quad (4.2.6)$$

Assim, a deformação da *superfície z* na direção  $x$  será dada por:

$$\frac{(D'E'-DE)}{DE} = \frac{\left[ \left(1 - \frac{z}{r'_x}\right) d\theta - \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) d\theta \right]}{\left(1 - \frac{z}{r_x}\right) d\theta} \quad (4.2.7)$$

Levando-se em conta que  $z \ll \ll r_x$ :

$$\frac{(D'E'-DE)}{DE} = -z\chi_1, \quad \text{onde} \quad (4.2.8)$$

$$\chi_1 = \left( \frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right)$$

$\chi_1$  é denominado como a **mudança de curvatura na direção x** [26].

Similarmente, a deformação da *superfície z* na direção *y* é dada por:

$$\frac{(E'F'-EF)}{EF} = -z\chi_2, \quad \text{onde} \quad (4.2.9)$$

$$\chi_2 = \left( \frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right)$$

$\chi_2$  é denominado como a **mudança de curvatura na direção y** [26].

#### 4.2.4. Deformações combinadas da superfície z

Agora, combinando-se as ações de membrana e flexão, as deformações  $\varepsilon_x$  (na direção *x*) e  $\varepsilon_y$  (na direção *y*), da superfície *z*, pode ser obtida pela soma das equações (4.2.1), (4.2.8) e (4.2.2),(4.2.9), respectivamente:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 - z\chi_1 \quad \text{onde} \quad \chi_1 = \left( \frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right), \quad e \quad (4.2.10)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_2 - z\chi_2 \quad \text{onde} \quad \chi_2 = \left( \frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right)$$

Estas expressões (4.2.10) das deformações totais nas direções principais serão utilizadas mais tarde na determinação das deformações equivalentes.

### 4.3 ELEMENTOS DA TEORIA DA PLASTICIDADE

A teoria da elasticidade se assenta em duas propriedades fundamentais do comportamento elástico dos materiais metálicos: a configuração inicial do corpo é completamente recuperada quando as solicitações exteriores deixam de atuar, e a deformação elástica depende exclusivamente dos estados de tensão inicial e final.

Pelo contrário, no regime plástico, ou seja, quando as extensões aplicadas ao corpo ultrapassam as que determinam o limite de validade da lei de Hooke, surgem alterações comportamentais dos materiais, de tal modo que a deformação deixa de ser um processo reversível e as características mecânicas e geométricas do corpo passam a depender do modo – trajetória ou história – de como o carregamento foi aplicado [24].

Para o regime de deformação plástico, surgem alguns fenômenos particulares que determinam seu comportamento, designadamente o encruamento, a anisotropia plástica e o efeito *Bauschinger* [24]. Estes fenômenos quando inseridos na formulação, conduzem a relações tensão-deformação plásticas muito mais complexas do que aquelas da teoria da elasticidade.

Basicamente existem dois tipos de teorias para descrever a mecânica da deformação plástica dos corpos sólidos; as matemáticas, também chamadas *tecnológicas*, quando incorporam resultados da experimentação, e as físicas. As primeiras, de natureza fenomenológica, analisam as distribuições de tensão e deformação baseadas na modelação dos materiais e recorrem a meios experimentais para validar estes modelos empíricos, como é, por exemplo, o caso dos critérios de plasticidade. As segundas examinam a natureza da deformação plástica ao nível microscópico, relacionando a estrutura atômica dos metais com o comportamento plástico.

A propósito destas últimas teorias, ressalte-se a contribuição fundamental que a teoria das deslocações tem dado para a compreensão do fenômeno da plasticidade e ainda na introdução de novos conceitos de deformação plástica.

Aqui serão abordados os conceitos básicos da teoria matemática da plasticidade, indispensáveis à análise dos processos que envolvem deformação plástica dos materiais metálicos. Também serão introduzidos os principais critérios de plasticidade e identificadas as equações constitutivas tensão-deformação para cada um.



### 4.3.1 Critério de plasticidade de Tresca [24]

O critério de plasticidade de *Tresca* (1864) considera que a deformação plástica tem início quando a tensão de cisalhamento máxima absoluta,  $\tau_{\max}$ , ultrapassar um valor crítico.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq K \quad (4.3.1)$$

em que  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  são tensões principais, com  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , e  $K$  um parâmetro característico do material a ser determinado experimentalmente e que pode ser função do encruamento.

É comum referir-se que o critério de plasticidade de *Tresca* encontra fundamentação fenomenológica em conceitos de natureza físico-metalúrgica dos materiais metálicos. De fato, admitindo-se que a rede cristalina destes materiais é formada por planos atômicos sobrepostos uns sobre os outros, é fácil admitir-se que, sendo as tensões de cisalhamento responsáveis pelo deslizamento destes planos, deva existir um nível de tensão acima do qual os átomos da rede mudam de posição relativa de uma forma permanente (não recuperável), dando-se, desta forma, início à deformação plástica.

Na realidade o mecanismo de deformação não corresponde diretamente ao escorregamento desses planos atômicos, mas sim à movimentação de defeitos, do tipo deslocamento de discordâncias, no interior da rede cristalina. Ainda assim, pode-se continuar a aceitar a fundamentação fenomenológica do critério de plasticidade de *Tresca*, já que são as tensões de cisalhamento as responsáveis pela movimentação dos deslocamentos de discordâncias e pela alteração de forma do corpo.

Voltando a expressão (4.3.1), do critério de *Tresca*, vê-se que quando a tensão de cisalhamento ou de cisalhamento máximo é menor que certo valor crítico,  $K$ , a deformação induzida no material é puramente elástica. Porém este valor crítico pode ser determinado através de ensaios uniaxiais (tração, compressão ou torção). Assim, substituindo a condição uniaxial  $\sigma_1 = \sigma_e$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , na equação (4.3.1), a relação entre o valor da tensão de cisalhamento crítica,  $K$ , e a tensão limite de elasticidade,  $\sigma_e$ , é dada por:

$$K = \frac{\sigma_e}{2}$$

Se por outro lado o ensaio for de torção, o estado de tensão associado é de cisalhamento puro, sendo  $\sigma_1 = K$ ,  $\sigma_3 = -K$  e  $\sigma_2 = 0$ .

### 4.3.2 Critério de plasticidade de von Mises

O critério de plasticidade de Von Mises (1913) considera que a deformação plástica tem início quando o valor da energia elástica de distorção por unidade de volume,  $W_d^e$  atinge um valor crítico, ou na forma matemática:

$$W_d^e = \frac{J_2}{2G} = \frac{3}{4G} \tau_{oct}^2 \geq W_{crit} \quad (4.3.2)$$

Em que  $J_2$  representa o segundo invariante do tensor desviador das tensões, cuja expressão é dada por: [24]

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

e,  $\tau_{oct}$  a tensão de cisalhamento octaedral dada por: [24]

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (4.3.4)$$

A determinação do valor crítico da energia elástica de distorção por unidade de volume se dá considerando o início da deformação plástica de um estado de tração uniaxial  $\sigma_1 = \sigma_e$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Então, nestas condições, a energia elástica crítica por unidade de volume, a partir da tensão de cisalhamento octaedral será:

$$w_{crit} = \frac{3}{4G} \left[ \frac{1}{3} \sqrt{2\sigma_e^2} \right]^2 = \frac{1}{6G} \sigma_e^2 \quad (4.3.5)$$

Substituindo este resultado na equação (4.3.2) e considerando a definição do segundo invariante do tensor desviador das tensões, equação (4.3.3), obtém-se a seguinte forma para o critério de *von Mises*:

$$2\sigma_e^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \quad (4.3.6)$$

No caso geral em que o estado de tensões esteja referido a um sistema de eixos cartesianos  $(x,y,z)$ , ao invés dos eixos principais, o critério de *von Mises* escreve-se do seguinte modo:

$$2\sigma_e^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \quad (4.3.7)$$

Por fim, é conveniente salientar que o critério de plasticidade de *von Mises*, ao contrário do critério de Tresca, considera a influência da tensão intermediária,  $\sigma_2$ , sobre o

limite de elasticidade. Na figura 21 vê-se a representação de ambos os critérios sob várias condições de enformabilidade.

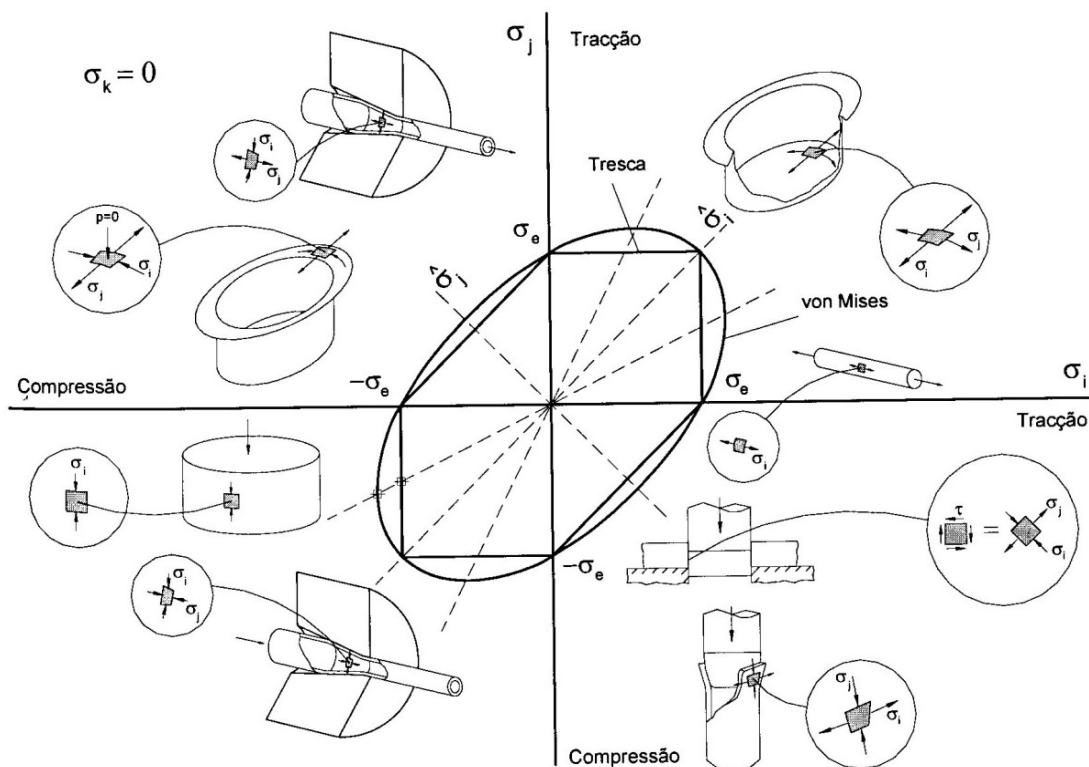


Figura 21: Representação dos critérios de plasticidade de *Tresca* e *von Mises* [24].

### 4.3.3 Noção de trabalho plástico. Tensão e deformação plástica efetiva. [24][61]

Os processos de deformação plástica são processos irreversíveis, em que grande parte do trabalho despendido na deformação é convertido em energia térmica. Este trabalho, designado por trabalho plástico, contrasta com a energia armazenada durante a deformação elástica, por não ser recuperável.

Para introduzir a noção de trabalho plástico, considere-se uma barra de comprimento inicial  $l_0$ , sofre um incremento de comprimento  $dl$ , em regime plástico, em virtude da aplicação de uma força axial de tração,  $F$ . em consequência do alongamento elementar segundo o eixo  $x$ , as dimensões iniciais da seção transversal da barra,  $(W_0, t_0)$ , reduzem-se para  $(W, t)$ , conforme figura 22.

O incremento de trabalho plástico por unidade de volume (ou incremento de energia de deformação plástica por unidade de volume) realizado na deformação da barra foi então de [24]:

$$\text{como } \sigma_x = \frac{F}{wt} \quad \text{e} \quad \varepsilon_x = \frac{dl}{l_0},$$

O trabalho por unidade de volume

$$dW^P = \frac{Fdl}{wtl} = \sigma_x d\varepsilon_x \quad (4.3.8)$$

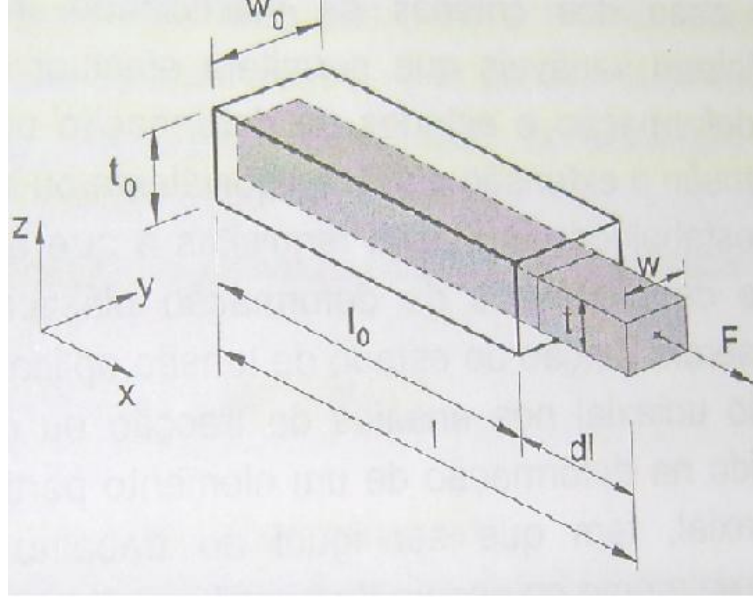


Figura 22: Deformação elementar uniaxial de uma barra de seção retangular [24].

Generalizando para o caso triaxial de tensões, o incremento de trabalho plástico por unidade de volume será dado por;

$$\begin{aligned} dW^P &= \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P \\ dW^P &= \sigma_x d\varepsilon_x^P + \sigma_y d\varepsilon_y^P + \sigma_z d\varepsilon_z^P + \tau_{xy} d\gamma_{xy}^P + \tau_{yz} d\gamma_{yz}^P + \tau_{xz} d\gamma_{xz}^P \\ dW^P &= \sigma_1 d\varepsilon_1^P + \sigma_2 d\varepsilon_2^P + \sigma_3 d\varepsilon_3^P \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Onde o índice  $p$  indica que as deformações são plásticas. Então, o trabalho plástico por unidade de volume será dado por:

$$W^P = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P \quad (4.3.10)$$

em que  $d\varepsilon_{ij}^P$ , são as componentes plásticas do tensor das deformações resultantes do incremento de deformação.

Embora os processos de deformação plástica envolvam estados complexos de tensão de natureza multiaxial, a teoria da plasticidade desenvolve-se apoiada em ensaios simples com características uniaxiais ou quando muito biaxiais, veja-se como exemplo os critérios de plasticidade vistos nas seções 4.3.1 e 4.3.2. Neste contexto, haverá necessidade de se definirem variáveis que permitam efetuar esta equivalência entre estados complexos de deformação e estados de deformação unidirecionais, surgindo assim, os conceitos de tensão e deformação equivalentes ou efetivas.

Inicialmente devem-se estabelecer alguns requisitos a que estas variáveis devem atender:

- (1) Tratando-se de processos de deformação plástica, devem depender do critério de plasticidade (*Tresca*, *von Mises*, etc), e serem função do estado de tensão aplicado;
- (2) Têm que coincidir com a Tensão e com a Deformação uniaxial nos ensaios de tração ou de compressão e;
- (3) O trabalho plástico dispendido na deformação de um elemento particular, solicitado por um estado de tensão multiaxial, tem que ser igual ao trabalho plástico do elemento equivalente, solicitado uniaxialmente no ensaio de tração ou de compressão.

Então, para o critério de plasticidade de *von Mises* (equação (4.3.6)), define-se tensão equivalente ou efetiva do seguinte modo:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]^{1/2} \quad (4.3.11)$$

Enquanto que para o critério de plasticidade de *Tresca* (equação (4.3.1)), a tensão efetiva será dada por:

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (4.3.12)$$

Observe-se que para ambas as definições de tensão plástica efetiva, equações (4.3.11) e (4.3.12), se verifica a igualdade entre a tensão efetiva e a tensão limite de elasticidade do ensaio de tração ou de compressão uniaxial,  $\bar{\sigma} = \sigma_e$ .

O incremento de deformação plástica efetiva  $d\bar{\epsilon}$ , por sua vez, é definido de tal modo que o trabalho incremental plástico por unidade de volume,  $dW^P$  (equação 4.3.9), possa igualmente ser obtido a partir dos valores efetivos da tensão e da deformação.

$$dW^P = \bar{\sigma} \cdot d\bar{\varepsilon}^P \quad (4.3.13)$$

Considerando o critério de plasticidade de *von Mises* e igualando as expressões (4.3.9) e (4.3.13):

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon}^P &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)^2 \right]^{1/2} \\ d\bar{\varepsilon}^P &= \left[ \frac{2}{3} (d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

A exemplo do critério de Von Mises, a equação (4.3.14), segundo *Mellor, apud* [61] e [25], pode ser representada pela forma integral:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 \right]^{1/2} \quad (4.3.14.a)$$

À semelhança do que havia sido dito para tensão efetiva, também o valor da deformação efetiva tem que coincidir com o valor da deformação em condições uniaxiais. Em tração uniaxial, por exemplo, admitindo conservação de volume;

$$d\varepsilon_1 = -2 \cdot d\varepsilon_2 = -2 \cdot d\varepsilon_3 \quad (4.3.15)$$

$$\text{e, portanto, } d\bar{\varepsilon} = d\varepsilon_1. \quad (4.3.16)$$

Para o critério de *Tresca*, o incremento da deformação plástica efetiva será:

$$d\bar{\varepsilon}^P = \left| d\varepsilon_i \right|_{MAX} \quad (4.3.17)$$

onde o índice “*i*” refere-se às direções principais.

Em conclusão, quando a tensão efetiva é definida pela equação (4.3.11), do critério de *von Mises*, o valor conjugado do incremento de extensão plástica é o da equação (4.3.14).

Se a tensão equivalente for definida através da expressão (4.3.12), relativa ao critério de *Tresca*, então não se deve definir a deformação plástica equivalente através da equação (4.3.14), mas deve ser usada a deformação plástica efetiva conjugada respectiva, dada pela expressão (4.3.17).

## 4.4 CRITÉRIOS DE FALHA

### 4.4.1 Máxima deformação possível de “enformabilidade”

É imperioso sabermos até que ponto pode-se deformar um material sem que se interponha um processo de alteração metalúrgica importante ao ponto de enfraquecê-lo além do que seria admissível em termos de sua integridade estrutural. Este é um dos objetivos desafiadores deste trabalho.

Existem várias teorias de falha que são adotadas para previsão de falha baseadas na *iniciação do escoamento* tais como a teoria da máxima tensão, a teoria da máxima deformação, a teoria do cisalhamento máximo, e a teoria da máxima energia de distorção, todas aqui já abordadas nas seções precedentes. Entretanto, até o presente, não existe nenhuma teoria para previsão da falha total ou falha por fratura.

Fomos buscar na literatura de fabricação de peças por conformação mecânica [25][24], onde, entre as várias “*rules-of-thumb*”, resolvemos explorar a relação  $R/t$  (raio de curvatura por espessura de parede), adotada para uma variedade de materiais, aços inclusive. A este critério chamaremos de “*Limite de enformabilidade*”.

Segundo a referência [25], o autor desenvolveu uma teoria a que deu a denominação de “*teoria da máxima deformação*”, que estabelece o seguinte:

*“A máxima deformação a que um material, numa determinada condição, pode ser submetido num processo de enformação, é a deformação que resulta em uma deformação verdadeira à tração (tensile natural strain), numa determinada direção, no corpo, que é igual à deformação verdadeira na fratura de um corpo de prova, submetido à tração, na mesma condição particular do material”.*

As deformações podem ser facilmente calculadas para formas simples. O mesmo não se dá para formas complexas. Neste último caso é necessário recorrer a um estudo experimental, ao menos parcialmente, para determinação da magnitude e da distribuição das deformações no material deformado. É possível simplificar grandemente este aspecto experimental através de um estudo de *micro-dureza* no material deformado e, então, determinar as deformações com base nas características de *deformação-enruiamento* do material, utilizando-se das equações dadas na seção 4.4.1.

É conhecido o fato de que a *deformação na fratura* de materiais laminados ou forjados é menor na direção transversal do que na direção longitudinal de laminação, mesmo no caso em que as tensões de escoamento e última sejam iguais em ambas as direções [25].

Um corpo de prova cortado transversalmente a uma chapa ou barra e submetido à tração apresenta uma deformação à fratura transversal ( $\epsilon_f$ ), cerca de 60 % da deformação à

fratura longitudinal ( $\epsilon_f$ )<sub>l</sub>. Se um corpo de prova plano cortado transversalmente de uma chapa é dobrado, a deformação à fratura transversal ( $\epsilon_f$ )<sub>t</sub> é o valor correto a ser adotado.

O valor correto de *deformação à fratura* tem que ser usado para a aplicação bem sucedida da “teoria da máxima deformação”.

#### 4.4.2 Deformação de Flexão ou Dobramento (*bending*) e de Membrana:

Neste trabalho, será dada especial atenção à deformação equivalente total presente numa região de *mossa*. Esta deformação é composta de dois tipos de deformação que ocorrem em um duto deformado em sua geometria segundo uma superfície – *mossa* ou *casca* - de dupla curvatura e que serão denominadas doravante de deformação de flexão ( $\epsilon_b$ ) e deformação de membrana ou extensional ( $\epsilon_m$ ).

Esta denominação está de acordo com a nomenclatura adotada universalmente, inclusive na norma *ASME B 31.8*. A deformação de dobramento ou de flexão será abordada na seção 5.5.1. A deformação extensional ou de membrana, não requer maiores tratamentos geométricos e será abordada mais adiante na seção 5.5.2. Caso as direções das curvaturas principais fossem coincidentes com os planos de simetria do tubo, as deformações de flexão e membrana podem ser entendidas segundo a esquematização como se vê na figura 23. Deve ser salientado que o esquema didático apresentado na figura 23, só é válido no caso particular em que as direções das deformações principais coincidam com os eixos de simetria do duto.

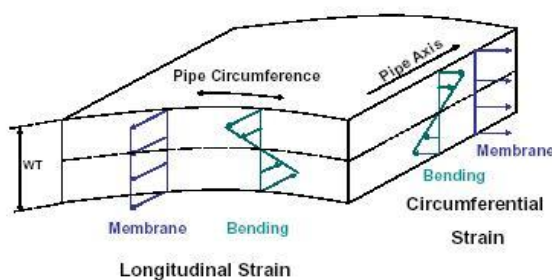


Figura 23: Deformações de flexão e de membrana [59].

Segundo ainda a referência [25], a primeira relação derivada analiticamente - e verificada experimentalmente - foi determinar qual o **mínimo raio** a que uma placa pode ser flexionada ou dobrada está correlacionado com a deformação à fratura de um corpo de prova submetido à tração.

Quando aplicada a esta situação, a teoria estabelece que “a falha irá ocorrer como uma trinca transversal na fibra mais externa (mais tracionada), de um material sendo dobrado quando a deformação verdadeira à tração na fibra mais externa for igual à



deformação verdadeira, no instante da fratura de um corpo de prova do mesmo material, submetido à tração”.

Como nota de esclarecimento, todas as expressões utilizadas nesta seção e suas demonstrações podem ser encontradas no Anexo A.4.

A deformação trativa na fibra mais externa no material como esquematizado na figura 24, é:

$$\varepsilon_{of} = \ln\left(\frac{l_{of}}{l_0}\right) = \ln\left[\frac{\theta(R+t)}{\theta(R+t/2)}\right] \quad (4.4.1)$$

A deformação verdadeira na fratura de um corpo de prova à tração é:

$$\varepsilon_f = \ln\left(\frac{A_0}{A_f}\right) = \ln\left[\frac{100}{100 - A_r}\right] \quad (4.4.2)$$

igualando-se  $\varepsilon_{of}$  e  $\varepsilon_f$ , temos:

$$\left(\frac{100}{100 - A_r}\right) = \left(\frac{R+t}{R+t/2}\right) \quad (4.4.3)$$

e, resolvendo para  $R/t$ , temos:

$$\frac{R}{t} = \frac{50}{A_r} - 1 \quad (4.4.4)$$

A determinação analítica acima partiu da premissa que a linha média da placa permaneceu no meio da espessura da peça durante as operações. Segundo a referência [25], a relação (4.4.4) foi verificada por inúmeros testes em laboratório e em plantas fabris industriais para uma ampla relação de materiais que incluíram, desde ferro fundido e aços com alto teor de carbono, assim como materiais dúteis como latão e aços de baixo teor de carbono e alumínio doce.

Para materiais muito dúteis com  $A_r > 50$ , a equação prediz valores negativos para a relação  $R/t$ , o que é fisicamente impossível. Nestes casos, a correta interpretação para a utilização desta relação para materiais muito dúteis é: - *Se um material possui  $A_r > 50$ , ele pode ser dobrado, para todos os propósitos práticos, até um raio  $R = 0$  sem apresentar fratura.*

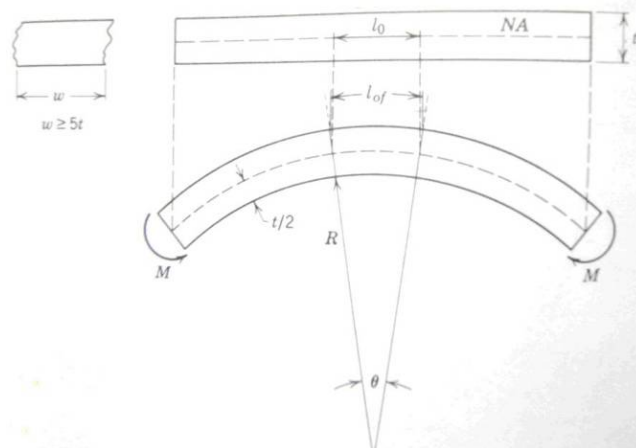


Figura 24: Flexão de uma placa plana [25].

A relação (4.4.4) pode ser modificada para levar em conta o deslocamento da linha neutra em relação à linha média da seção quando o material sofre flexão, como segue:

$$\frac{R}{t} = \frac{(100 - A_r)^2}{200A_r - A_r^2} \quad (4.4.5)$$

Esta última expressão não prediz valores negativos quando  $A_r > 50$ .

Por fim, na figura 25 é mostrado os resultados de um estudo experimental para verificação das relações analíticas determinadas acima [25]. Como se vê os dados experimentais se correlacionam muito bem com as curvas analíticas. O único ponto experimental significativamente fora da curva,  $K$ , referente a um corpo de prova de *titânio* que, segundo a referência [25], foi deformado não intencionalmente durante o processo de usinagem do corpo de prova.

Os atuais critérios de “**condenação**” delimitam os valores da relação  $R/t \leq 5^{(3)}$ . A relação (4.4.5) nos mostra que este limite corresponde a uma redução de área de cerca de 9%. Ora, considerando que os materiais usados na fabricação de dutos possuem utilidade bem acima destes valores, chegando muitas vezes a valores de  $A_r$  de 30 %, 40 % ou mais, sob este ponto de vista, trata-se de um critério conservativo. Da análise da figura acima é possível sugerir que este limite seja reduzido para relações  $R/t \leq 2$ , que correspondem a valores de  $A_r$  de cerca de 20%, ficando ainda uma boa margem de segurança para avaliação da integridade.

<sup>(3)</sup> Relação  $R/t \leq 5$  é considerada “*kincked dent*” ou “*mossa vincada ou angulosa*”.

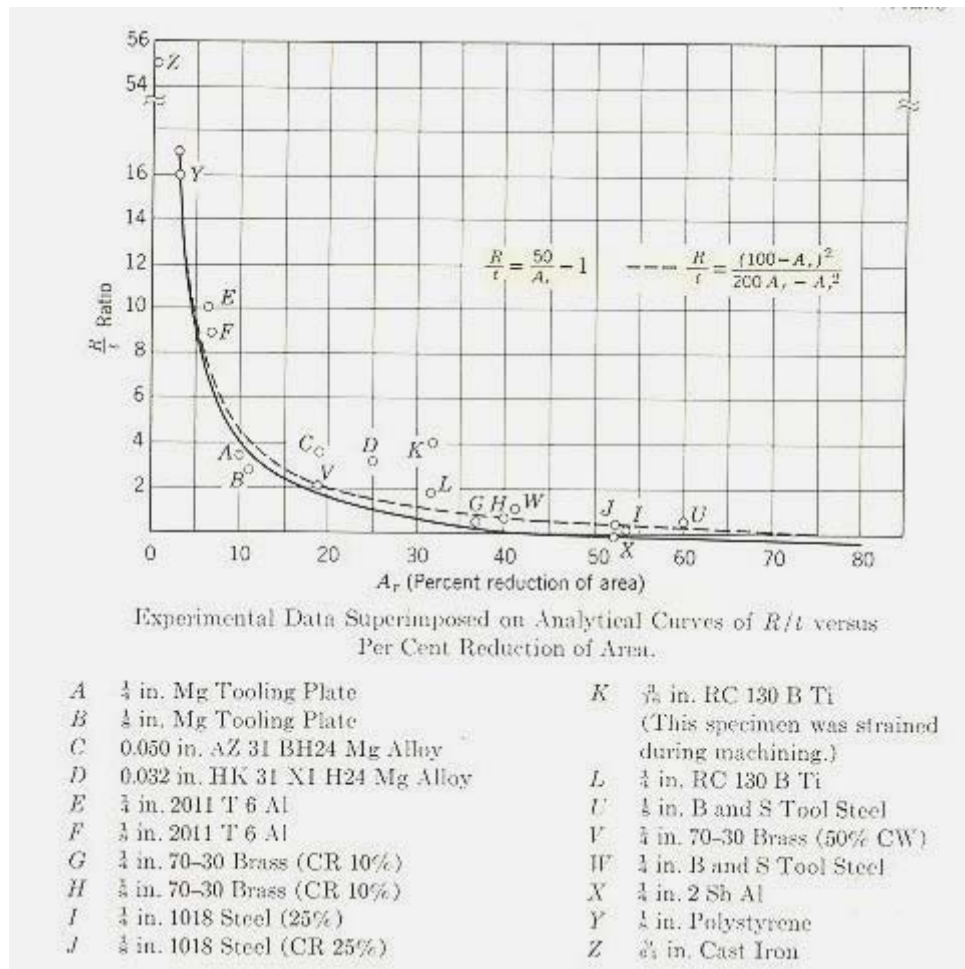


Figura 25: Valores experimentais e analíticos de  $R/t$  versus  $A_r$  [25].

Por outro lado, para um aço *API 5L X70*, por exemplo, se considerarmos que para uma redução de área de 9% a deformação equivalente seria:

$$\varepsilon = \ln \frac{100}{100 - A_r} = \ln \frac{100}{91} = 94310 \mu\text{m}/\text{m}$$

Substituindo na equação geral do encruamento, e utilizando parâmetros médios do aço em *API 5L X70*, temos:

$$\sigma_{9\%} = \sigma_0 \varepsilon^m = 745 \cdot (0,09431)^{0,07} = 631 \text{MPa}$$

Este valor está entre a faixa de tensões admissíveis pelo critério da norma para tubos *PSL2 da API 5L para Line Pipe* [42], que é de 565 a 758 MPa. Assim, o critério admitindo relações com  $R/t = 5$ , seria até generoso.

Por fim, um fato é que os *limites de enformabilidade* dos aços *API* parecem ser bem mais elevados do que os que são praticados atualmente. Neste caso, estes valores devem ser “revisitados” e novos critérios devem ser estabelecidos no sentido de tornar mais flexível o julgamento do engenheiro de integridade.



Figura 26: Falha em flexão (Dobramento) [25].

## Capítulo V

### METODOLOGIA PROPOSTA

Para se fazer a abordagem geométrica e analítica de uma superfície de topologia complexa, é natural que se procure obter sua representação virtual, da melhor forma possível ou, em outras palavras, que o modelo matemático ideal apresente correlação de 100% com a geometria tridimensional do espécime observado.

Nas aplicações práticas, seja através de medições endógenas – *In Line Inspection (ILI) tools* do tipo *PIGs* geométricos – ou através de medições exógenas – *SM* externos automáticos ou mesmo manuais – os dados que serão adquiridos são uma nuvem de pontos discretos, estruturados segundo uma grade de medição determinada *a priori*. A esta etapa chamamos de *levantamento planialtimétrico*. Uma vez adquiridos os pontos, estes se correspondem com uma matriz de elevações – ou profundidades – como queira o referencial do problema, e que deverá reconstruir a superfície “real” com a melhor exatidão quanto possível.

Assim sendo, o modelo proposto neste trabalho não deverá, em princípio, fazer demasiadas concessões à realidade que pretende retratar. No entanto, uma aproximação será assumida e estará contida num intervalo de dispersão tão pequeno quanto possível com o intuito de não prejudicar a avaliação de outras grandezas físicas tais como as deformações com base em sua geometria. Mais tarde será demonstrado que as premissas adotadas irão atender este requisito satisfatoriamente.

O título deste trabalho, “*Avaliação da Integridade de dutos com Mossas de topologia Complexa com base em Deformação Equivalente*”, gerou o acrônimo *AIMCODE*. Na figura 26, é apresentado o fluxograma da metodologia proposta.

Esta metodologia e suas etapas são descritas nas seções a seguir.

#### 5.1 INTERPOLAÇÃO

A interseção de um plano com uma superfície define uma curva espacial. A esta curva se dá o nome de “*traço de plano*”. Quando se conhece a superfície através de sua função explícita (ou implícita), é relativamente fácil de determinar a equação desta curva analiticamente. Entretanto, quando não se conhece a expressão da superfície, é necessário que

se elabore uma metodologia para que se tracem estas curvas a partir de uma nuvem de pontos discretizada.

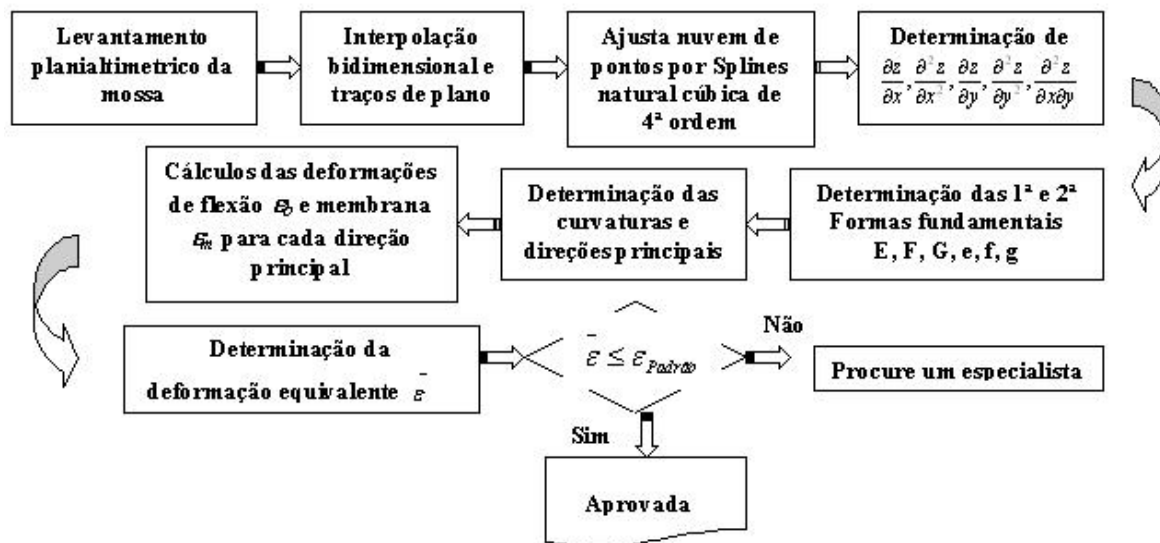


Figura 27: Fluxograma do AIMCODE.

O primeiro passo é o levantamento planialtimétrico. Este pode ser efetuado de diversas maneiras e não será aqui abordado. Partindo então da premissa de que estes dados estejam disponíveis, iniciamos a etapa da interpolação bidimensional. Por conveniência e facilidade de implementação, foi desenvolvido um algoritmo de interpolação biquadrático. Sua determinação pode ser encontrada no anexo A.5. Sua função é criar os diversos traços de plano resultantes da interseção destes planos com a superfície a incrementos angulares que podem ser determinados pelo usuário.

Em seguida, a superfície é *reconstruída* a partir destes traços e pontos, e os traços são interpolados por polinômios por partes ou “*piecewise polynomials*”.

Por tratar-se de um problema de interpolação, foram pesquisadas diversas técnicas do vasto arsenal matemático disponível entre as quais destacamos: as interpolações lineares, bilineares, curvas polinomiais, polinômios de *Lagrange*, curvas de *Bessel*, curvas *Hermitianas* e suas derivativas tais como curvas de *Hermite*, de *Bézier* e *Splines*.

Neste trabalho será adotado o interpolante polinomial cúbico de 4ª ordem por partes, conhecido como *Splines* natural. No anexo A5 são abordadas algumas destas técnicas de maior interesse comparativo, são dispostos exemplos de interpolação de dados, e são descritas várias rotinas escritas na linguagem de programação *Matlab*®, e testadas pelo autor. São discutidas suas vantagens e limitações e por fim, é estabelecido o modelo adotado neste trabalho.

## 5.2 DISCRETIZAÇÃO DA GEOMETRIA

Antes mesmo da planialtimetria, o primeiro passo do procedimento é estabelecer as dimensões da grade de gabarito que irá determinar por sua vez o espaçamento ou discretização da superfície. Nos trabalhos [55][56], é mostrado que se pode definir uma grade adequada e satisfatória, dividindo-se o perímetro do duto em 32 ou 64 setores circulares, ou em outras palavras, cordas de arcos de círculo que subentendem ângulos de segmentos de  $11,25^\circ$  ( $360^\circ/32$ ) ou  $5,625^\circ$  ( $360^\circ/64$ ) respectivamente.

Por exemplo, um tubo de 323,85 mm (12,75 in de DN ou NPS 12 in), iria requerer uma malha (*grid*) de 32 x 32 mm ou 16 x 16 mm respectivamente. Aproximações para valores mais convenientes, neste caso malhas de 30 x 30 mm ou 15 x 15 mm e outras medidas para mais ou para menos 20% também podem ser escolhidas a critério do engenheiro responsável. É desejável, mas não imprescindível que o espaçamento entre os pontos da malha seja uniforme e regular em ambas as direções. É claro que um espaçamento regular conduz a incertezas menores no resultado final.

Por conveniência e simplicidade, neste trabalho foi especialmente desenvolvido um algoritmo para interpolação bidimensional quadrática, isto é, gera uma matriz de elevações “z” para cada par (x,y). Esta nuvem de pontos irá servir de base para a reconstrução local de cada região de interesse da massa. Este algoritmo se encontra desenvolvido no anexo A5.2.

## 5.3 CÁLCULO DAS CURVATURAS PRINCIPAIS

Como foi demonstrado no capítulo 3, seção 3.6, o cálculo das curvaturas principais de funções explícitas ou implícitas é uma tarefa relativamente fácil, exclusive o trabalho com as derivadas de ordem superior.

Numa medição real, um conjunto de pontos topográficos se encontra disponível, referenciados a um sistema de coordenadas retangulares e organizados em uma matriz de pontos (x,y,z). Trata-se do já mencionado levantamento *planialtimétrico* da superfície.

Estes pontos devem ser tratados em *grupos* ou como mencionado na seção A5.2 do anexo A5, “ $Z_{ii}$  e seus oito vizinhos”. A região da massa deverá ser subdividida em uma matriz (x,y) – não necessariamente quadrada - com espaçamento preferencialmente regular, – mas não obrigatório - idêntico em ambas direções, sendo que os limites desta matriz devem ultrapassar os limites da projeção, em planta, da massa, em pelo menos duas linhas e duas colunas, conforme figura 28.

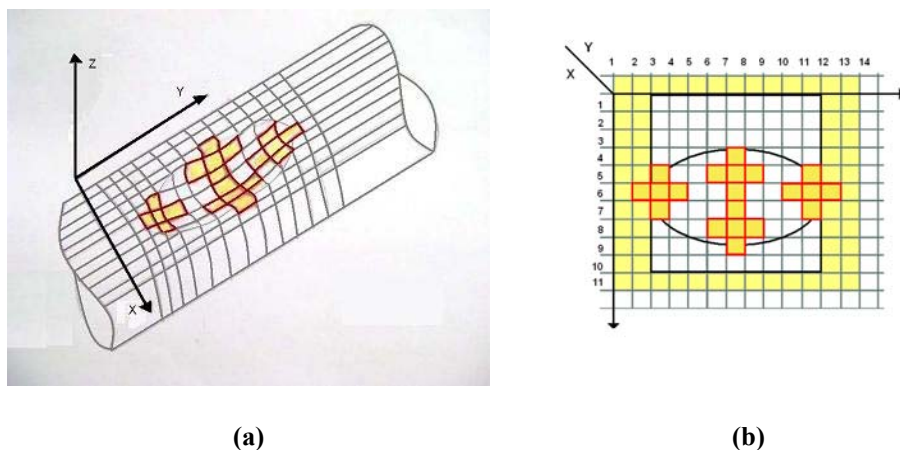


Figura 28: (a) Esquemático da moessa e (b) esquema de implantação da matriz de discretização, em planta [do autor].

A orientação do eixo  $Ox$  está contida na projeção, em planta, da seção transversal do duto, a orientação do eixo  $Oy$  é longitudinal ao duto, enquanto a orientação do eixo  $Oz$ , completa o triedro, formando um sistema de coordenadas ortonormal.

Deve-se agora *reconstruir* a superfície através dos métodos demonstrados na seção A5.2 do anexo A5. Para isto foram escritas várias rotinas em *Matlab*®. Uma primeira rotina recria a superfície total da moessa para uma visualização geral da mesma. Posteriormente, outra rotina calcula o *laplaciano* de toda a superfície, indicando num código de cores (*color shedding*) uma das curvaturas principais de cada ponto da superfície, dando, inicialmente, uma noção dos pontos de maior curvatura e, por conseguinte, os pontos de maior deformação, sendo então, estas regiões da moessa, os primeiros a serem investigados.

Uma vez selecionado na matriz topográfica  $(x,y,z)$ , o primeiro grupo “ $Z_{ii}$  e seus oito vizinhos”, uma outra rotina gera a superfície em foco, por vários *modos* a escolher pelo usuário tais como, *splines*, *hermite*, *linear* e *cúbico*. Neste trabalho, como mencionado, esta reconstrução será sempre feita por *splines* cúbicas (ou *splines* natural). Ela também gera os traços de plano a cada incremento  $\Delta\theta$ , declarado pelo usuário. Usualmente se utilizam  $\pi/4$  ou  $\pi/6$  sendo o intervalo de interpolação paramétrico  $\Delta t$  (seção A5.2 do anexo A5), usualmente igual a 0,1. Desta forma, a matriz  $ZZ_I$  é gerada.

Na seqüência, são calculadas as taxas de variação das curvaturas em duas direções, no caso  $Ox$  e  $Oy$ . Isto é feito através das derivadas 1ª e 2ª dos traços de plano, nas direções  $0^\circ$  para  $Ox$  e,  $90^\circ$  para  $Oy$ . Os valores destas derivadas são obtidos analiticamente, a partir dos polinômios por parte gerados na etapa anterior. Neste ponto são determinadas as 1ª e 2ª



derivadas  $\frac{\partial Z}{\partial x}$ , e  $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$  no ponto  $Z_{ij}$ , na direção do traço de plano  $0^\circ$ . Da mesma forma são obtidas as derivadas  $\frac{\partial Z}{\partial y}$ , e  $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$  para o plano  $90^\circ$ .

Neste ponto, as derivadas cruzadas  $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ , e  $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$  são também calculadas. Os valores destas derivadas são obtidos analiticamente, também a partir dos polinômios por parte gerados na etapa anterior. Para isto, incrementa-se o pivô  $Z_{ii}$ , na direção  $Ox$ , fazendo o novo pivô ser igual a  $Z_{i+1j}$ . Desta forma, é gerada a matriz  $ZZ_2$ . Repetem-se as etapas acima feitas na direção do traço de plano a  $0^\circ$ , também na direção do traço de plano a  $90^\circ$ .

O pivô  $Z_{ii}$  retrocede na direção  $Ox$  de uma unidade, fazendo o novo pivô ser igual a  $Z_{i-1j}$ . Posteriormente é gerada a matriz  $ZZ_3$ . Repetem-se as etapas acima, nas direções dos traços dos plano  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

Agora, se incrementa o pivô  $Z_{ii}$  na direção  $Oy$  de uma unidade, fazendo o novo pivô ser igual a  $Z_{ij+1}$ . É gerada a matriz  $ZZ_4$ . Repetem-se as etapas acima nas direções de ambos os planos

Mais uma vez, se retrocede o pivô  $Z_{ii}$  na direção  $Oy$  de uma unidade, fazendo o novo pivô ser igual a  $Z_{ij-1}$ . É gerada a matriz  $ZZ_5$ . Repetem-se as etapas acima, para ambos os planos.

Por se tratar de uma superfície regular  $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$  e  $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$  devem ser iguais, bastando que seja calculada apenas uma delas, não sendo necessário executar as matrizes  $ZZ_4$  e  $ZZ_5$ . Contudo, por serem pontos  $z=f(x,y)$ , determinados experimentalmente, pode vir a ocorrer pequenas diferenças entre as derivadas cruzadas em razão de erros aleatórios. Caso em que isto venha acontecer, aplica-se o algoritmo também a  $ZZ_4$  e  $ZZ_5$  e calculam-se as derivadas cruzadas. Com estes valores, pode-se fazer a média aritmética entre ambas e usar o valor obtido no cálculo da função “ $f$ ” da 2ª forma fundamental. Nos inúmeros testes realizados até a conclusão deste trabalho este fato ainda não foi registrado.

Obtidas as cinco derivadas, são aplicados os algoritmos desenvolvidos na seção 3.6 para funções do tipo  $z = h(x,y)$ , obtendo-se então as curvaturas e direções principais requeridas pelo método.

#### 5.4 DETERMINAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES EQUIVALENTES

Chamando os eixos das deformações principais de I, II e III, e segundo a equação (4.3.14.a), a deformação equivalente de *von Mises* é:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ (\varepsilon_I - \varepsilon_{II})^2 + (\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III})^2 + (\varepsilon_I - \varepsilon_{III})^2 \right]^{1/2} \quad (5.4.1)$$

Assume-se que as deformações na direção radial III podem ser consideradas muito pequenas e, portanto,  $\varepsilon_{III} \approx 0$ .

Segundo a norma *ASME B 31.8* em seu apêndice “R” e as referências [55],[56], [26], [59], as deformações em cada eixo podem ser obtidas da seguinte maneira:

- Para a face exterior (*out*):

$$\begin{aligned} \varepsilon_I &= -\varepsilon_1 + \varepsilon_4, \\ \varepsilon_{II} &= -\varepsilon_2 + \varepsilon_3, e \\ \varepsilon_{III} &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

- Para a face interior (*in*):

$$\begin{aligned} \varepsilon_I &= \varepsilon_1 + \varepsilon_4, \\ \varepsilon_{II} &= \varepsilon_2 + \varepsilon_3, e \\ \varepsilon_{III} &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

(para nomenclatura ver figura 29)

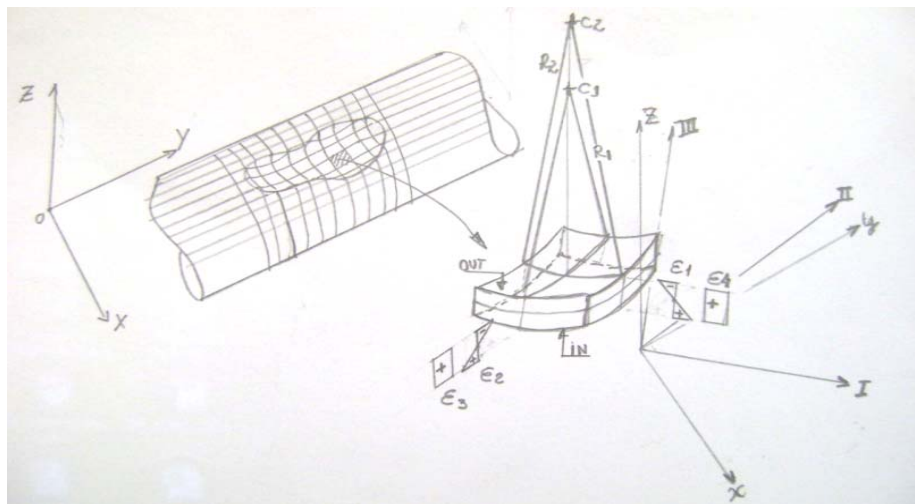


Figura 29: Deformação de Flexão e Membrana principais

Substituindo valores e desenvolvendo a equação 5.4.1:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{3} \left[ (\varepsilon_I)^2 - (\varepsilon_I \cdot \varepsilon_{II}) + (\varepsilon_{II})^2 \right]^{1/2} \quad (5.4.4)$$

na face externa:

$$\bar{\varepsilon}_o = \frac{2}{3} \left[ (-\varepsilon_1 + \varepsilon_4)^2 - (-\varepsilon_1 + \varepsilon_4)(-\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + (-\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.4.5.a)$$

e, na face interna:

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{2}{3} \left[ (\varepsilon_1 + \varepsilon_4)^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_4)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.4.5.b)$$

Alguns autores [57] consideram a deformação extensional de membrana,  $\varepsilon_4$ , desprezível uma vez que a mesma seria absorvida pela própria alteração geométrica circunferencial. Neste trabalho, a contribuição desta deformação será sempre considerada. Contudo, caso em que a mesma seja desprezada, obtêm-se as seguintes expressões:

na face externa,

$$\bar{\varepsilon}_o = \frac{2}{3} \left[ (\varepsilon_1)^2 + \varepsilon_1(-\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + (-\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.4.6.a)$$

e, na face interna,

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{2}{3} \left[ (\varepsilon_1)^2 - \varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.4.6.b)$$

Que são as expressões da referida norma para as deformações equivalentes em cada direção principal, exceto pelo fator  $2/3$  que não aparece na norma, mas que, na opinião do autor, deve ser considerado.

Nesta seção se calcula a expressão geral da deformação equivalente, segundo o critério de plasticidade de *von Mises*, para as faces interna e externa do duto. Nestas expressões, os valores das componentes das deformações podem ser obtidos de acordo com as seguintes expressões:

#### 5.4.1 Flexão

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{t}{2} \left( \frac{1}{R_{0_1}} - \frac{1}{R_1} \right), \\ e \\ \varepsilon_2 &= \frac{t}{2} \left( \frac{1}{R_{0_2}} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

onde,  $R_{01}$  e  $R_{02}$  são os raios de curvatura do ponto antes da alteração de geometria da seção. No caso das direções principais se confundirem com os eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$  do duto, então,  $R_{02}$  é infinito e a deformação  $\varepsilon_2$  pode ser obtida como:

$$\varepsilon_2 = -\frac{t}{2} \left( \frac{1}{R_2} \right) \quad (5.4.7.a)$$

que é a expressão da norma [44].

Caso contrário, sua curvatura original e, por conseguinte, seu raio original  $R_{02}$ , deve ser calculado pelo traço de plano, na mesma direção que foi calculada para suas curvaturas principais, através da mesma metodologia descrita para a obtenção das curvaturas principais descritas neste trabalho.

#### 5.4.2 Membrana

Segundo a referência [44] em seu apêndice R, a deformação de membrana deve ser avaliada pela seguinte expressão:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{L} \right)^2 \quad (5.4.8)$$

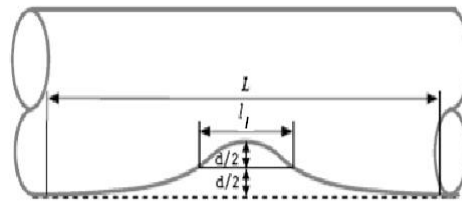


Figura 30: Comprimento da mocha  $L$  versus  $l_I$  [56].

Conforme referência [56] esta abordagem leva a valores irrealistas, muito menores do que aqueles calculados por elementos finitos, por exemplo, em modelos de mesma geometria. Nesta mesma referência, os autores sugerem uma abordagem como apresentada nas figuras 30 e 31, em que o comprimento da mocha na direção longitudinal, deve ser o comprimento “ $l_I$  ou  $l_{II}$ ” à distância média da profundidade da mocha no ponto. Estende-se este conceito para a direção circunferencial, uma vez que, neste trabalho, não se despreza a deformação extensional transversal. Assim, as deformações de membrana devem ser obtidas com base nas seguintes expressões:

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{d_I}{l_I} \right)^2, e \quad (5.4.9)$$

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{d_{II}}{l_{II}} \right)^2$$

onde,  $d_I$  é a metade da profundidade  $d$  da mocha na direção longitudinal e  $l_I$  o comprimento da mocha à profundidade média conforme figura 30 e,  $d_{II}$  é a metade da profundidade  $d$  da mocha na direção circunferencial e  $l_{II}$  o comprimento da mocha à profundidade média conforme figura 31.

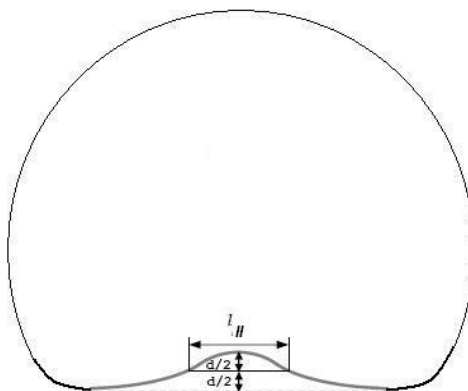


Figura 31: comprimento da mocha na direção circunferencial.

## 5.5 AVALIAÇÃO DA INTEGRIDADE

Neste ponto a superfície da mocha já se encontra reconstruída, as regiões de maior curvatura foram identificadas, sua topografia levantada, e suas curvaturas e raios de curvatura principais determinados, bem como as direções principais de curvatura e, por conseguinte, as direções dos planos das deformações principais.

Além disso, suas deformações principais equivalentes foram calculadas, grandeza esta que poderá ser comparada com outras grandezas de mesma natureza como foi amplamente desenvolvido no capítulo 4. Portanto, a metodologia se encontra apta a estabelecer condições para fazer *juízos de valor* quanto à integridade do duto na situação em que se encontra *in situ*.

Entretanto, existem outras considerações que podem agregar valor à decisão a ser tomada, como segue:

1. O estado de tensões mecânicas reinante na região da mocha tem um papel importante na avaliação da integridade estrutural como pode ser visto na seção 4.1, equação 4.1.12. Como se sabe o ponto exato em que ocorrem as deformações principais e suas

direções pode-se fazer uma medição local através de técnicas extensométricas tal como a “técnica do furo cego [87]” combinada com “holografia eletrônica” ou outro método normatizado.

2. A verificação das espessuras nos pontos mais críticos também pode se configurar num critério complementar para avaliação. Por exemplo, ajuda a verificar se ocorreu o fenômeno do empescoamento (*necking*), o que caracterizaria ultrapassagem do ponto de deformação última  $\epsilon_u$  conforme seção 4.4.1.

3. Ensaios de dureza também podem acrescentar elementos adicionais para uma melhor avaliação da região afetada pela deformação geométrica.

4. Estudar mais a condição de deformação prévia do duto ou o “*previous cold work*” – pelo menos a deformação causada pela pressão interna – devido às condições de fabricação. Como exposto no capítulo 4, seção 4.4, subitem n, esta condição pode trazer uma diminuição da capacidade de absorção de deformação plástica pelo duto e deve ser mais bem estudada.

5. Por fim, nas seções 4.4.1 e 4.4.2 encontra-se a condição limite de enformabilidade e a teoria da máxima deformação que são os melhores parâmetros, para nortear decisões envolvendo integridade de dutos com mossas em geral.

O uso do parâmetro *redução de área na fratura* ou simplesmente  $A_r$ , deve ser, especificado nas normas de “*line pipe*” como *API 5L* e de construção e montagem como a *ASME B 31.4 (líquidos)* e *B 31.8 (gás)* e também nas especificações de compra, uma vez que, foi demonstrado que o parâmetro *alongamento percentual* é pobre como grandeza de comparação para fins de integridade, sendo o parâmetro  $A_r$ , bem mais *robusto* para tal fim.

#### 6.1 CONCEPÇÃO DO CORPO DE PROVA

A metodologia desenvolvida é aplicável a mossas em dutos. Estas mossas descrevem superfícies que apresentam dupla curvatura, isto é, possuem curvaturas em duas direções ortogonais. A verificação experimental da metodologia em sua plenitude dependeria da produção de um corpo de prova longo, no qual uma mossa plena deveria ser aplicada com naturalidade. Ele deveria ainda ser ricamente instrumentado e a aplicação do carregamento deveria ser feita de forma controlada. Em função das limitações da infra-estrutura e do tempo disponível para a realização da verificação experimental deste trabalho, decidiu-se adotar uma configuração experimental simplificada. O corpo de prova foi, então, constituído de um trecho de cilindro curto, na forma de um anel circular, cuja indentação produziu uma mossa com curvatura apenas na direção circunferencial, mantendo retas as linhas da superfície paralelas ao eixo do cilindro. Assim, a dimensão do problema foi reduzida de uma ordem.

##### 6.1.1. Geometria

Foi adotado como modelo de corpo de prova - *CP*, um cilindro reto, cortado de um tubo de 75,5 mm de raio externo (NPS 6 in) e com 1,90 mm de espessura de parede. O mesmo foi usinado e esquadrejado, resultando em um *CP* como um anel circular, conforme figura 32.

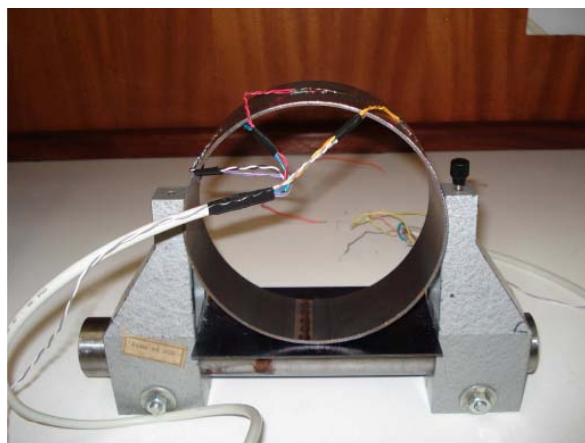


Figura 32: CP em sua base [Do autor].

### 6.1.2. Forma de carregamento

Foi projetado um indentador, também cilíndrico com 71,3 mm de diâmetro nominal, fixado à placa da máquina de tração/compressão e centrado com o eixo transversal do CP, conforme figura 33. Ainda nesta figura pode-se ver o perfilmetro óptico a laser – *PEROLA* – utilizado como referência e que será abordado mais adiante neste capítulo.

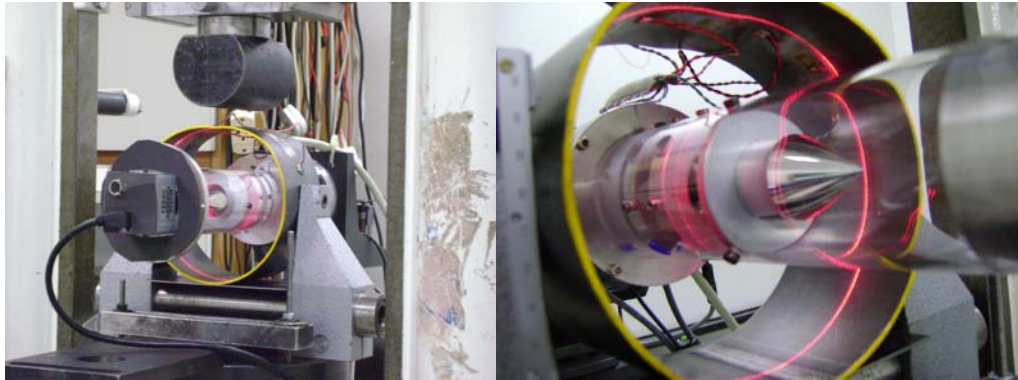


Figura 33: CP em sua base e sistema *PEROLA* em 1º plano [Do autor].

### 6.1.3. Instrumentação

O CP foi instrumentado com 6 extensômetros resistivos modelo PA-06-250BA-350LEN, 350 ohms, fator “*Strain Gage*” – *SG*, de 2,13, do fabricante *EXCEL Sensores*, instalados em *pares casados*, nas faces externa e interna, respectivamente..

A disposição dos mesmos seguiu o seguinte critério (figura 34):

- Extensômetros 1 e 4, no “ombro” direito do CP;
- Extensômetros 2 e 5, no “vale” central do CP;
- Extensômetros 3 e 6, no “ombro” esquerdo do CP;

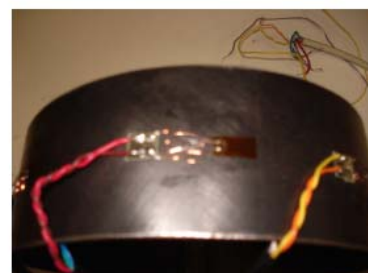
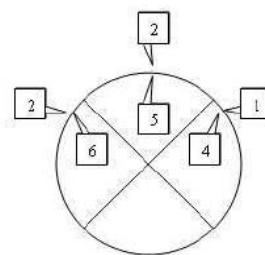




Figura 34: Disposição dos extensômetros [Do autor].

O sistema de medição utilizado foi o conjunto *P-3500* e seu complemento *SB-10* da *Vishay Measurements Group*. Trata-se de uma ponte de *Wheatstone* multiplexada com 10 canais. A ponte modelo *P-3500* tem erro máximo admissível de  $\pm 3 \mu\text{m/m}$  para extensômetros com fator  $\geq 1,000$ , na faixa de multiplicação X1 e,  $\pm 20 \mu\text{m/m}$  para extensômetros com fator  $\geq 1,000$ , na faixa de multiplicação X10. O conjunto deste sistema de medição pode ser visto na figura 35.



Figura 35: Conjunto Vishay P-3500 e SB-10 [Do autor].

Para medir a forma do *CP* ao longo do experimento e suas deformadas adquiridas a cada incremento de carga do indentador, foi utilizado o sistema denominado **PER**filômetro Radial Óptico a **LA**ser – **PEROLA**, sistema de medição óptico desenvolvido no *Labmetro* em trabalho de mestrado, como se vê na seção 6.2.2 [33]. Este sistema mede a geometria interna do anel com incerteza de medição típica da ordem de  $\pm 0,3 \text{ mm}$ .

## 6.2 APARATO EXPERIMENTAL

### 6.2.1 Máquina de tração/compressão com indentador cilíndrico

Como mencionado, foi utilizada uma máquina para ensaios de tração/compressão modelo *WPM-Ravenstein* de 100 kN (cerca de 10 tf) de capacidade nominal, instalada nos laboratórios da *Fundação Certi*. Esse equipamento possui a alternativa de avanço milimétrico manual do carro, utilizado para cada incremento de carga como será descrito na seção 6.3.

### 6.2.2 Registro fotográfico

A seguir, na figura 36, algumas fotos do processo experimental.



Figura 36: De cima para baixo, da esquerda para direita, CP e Sistema *PEROLA* usado para medir a geometria interna do CP, a máquina de tração com o indetador fixado ao carro móvel, acompanhamento fotográfico, sistema aquisitório, bancada para medição com relógio comparador e, Pedro Buschinelli e o autor [Do autor].

### 6.3 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

O extensômetro 2 foi eleito como referencia. Os valores deste bem como os valores dos demais extensômetros foram adquiridos a cada incremento de aproximadamente 1000  $\mu\text{m}/\text{m}$ .

Foram aplicados 28 passos, caracterizando 27 incrementos e, ao final, foram registrados os valores de deformação sem carga, registrando os valores de deformação resultantes da forma final após o retorno elástico.

A cada incremento foram feitas fotos do CP e aquisitadas as imagens no *Sistema PEROLA*, num total de 33 imagens, quatro antes do início da deformação, 27 – uma a cada incremento – e duas ao final.

### 6.3.1 CARREGAMENTO E REGISTRO EM ETAPAS

Os valores obtidos encontram-se listados nas tabela 1 e 2. Os valores tabulados aparecem graficamente nas figuras 37, 38 e 39.

Tabela 1: Deformações lidas em cada extensômetro [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ].

Leitura\Ext	1	2	3	4	5	6
<b>0</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>7</b>	<b>13</b>	<b>13</b>	<b>1</b>
1	435	-998	515	-494	1091	-558
2	768	-2005	1251	-877	2251	-1260
3	995	-3005	2045	-1125	3513	-1987
4	1235	-4013	2541	-1383	4898	-2465
5	1499	-5055	2930	-1660	6356	-2845
6	1766	-6042	3238	-1935	7697	-3142
7	2047	-7028	3502	-2264	9013	-3400
8	2362	-8059	3720	-2627	10299	-3609
9	2636	-9050	3958	-2943	11520	-3840
10	2884	-10068	4216	-3235	12696	-4090
11	3079	-11029	4499	-3462	13764	-4368
12	3251	-12059	4855	-3659	14845	-4719
13	3434	-13079	5189	-3879	15885	-5052
14	3624	-14047	5501	-4108	16852	-5359
15	3842	-15126	5820	-4374	17847	-5668
16	4069	-16070	6097	-4638	18735	-5939
17	4323	-17083	6380	-4951	19672	-6217
18	4571	-18068	6641	-5253	20550	-6476
19	4857	-19049	6903	-5597	21420	-6728
20	5162	-20030	7145	-5971	22280	-6966
21	5482	-21020	7378	-6352	23120	-7193
22	5834	-22010	7595	-6765	23960	-7404
23	6190	-23080	7829	-7186	25820	-7629
24	6472	-24080	8137	-7503	25620	-7929
25	6686	-25040	8513	-7734	26360	-8302
26	6901	-26030	8912	-7990	27150	-8690
27	7106	-27020	9322	-8229	27900	-9080
<b>28</b>	<b>5357</b>	<b>-22650</b>	<b>7336</b>	<b>-6369</b>	<b>23880</b>	<b>-6994</b>

Tabela 2: Deformações extensionais de membrana [ $\text{m}/\text{m}$ ].

$\varepsilon_m(1+4)$	$\varepsilon_m(2+5)$	$\varepsilon_m(3+6)$
-0,0000295	0,0000465	-0,0000215
-0,0000545	0,0001230	-0,0000045
-0,0000650	0,0002540	0,0000290
-0,0000740	0,0004425	0,0000380
-0,0000805	0,0006505	0,0000425
-0,0000845	0,0008275	0,0000480
-0,0001085	0,0009925	0,0000510
-0,0001325	0,0011200	0,0000555
-0,0001535	0,0012350	0,0000590
-0,0001755	0,0013140	0,0000630
-0,0001915	0,0013675	0,0000655
-0,0002040	0,0013930	0,0000680
-0,0002225	0,0014030	0,0000685
-0,0002420	0,0014025	0,0000710
-0,0002660	0,0013605	0,0000760
-0,0002845	0,0013325	0,0000790

-0,0003140	0,0012945	0,0000815
-0,0003410	0,0012410	0,0000825
-0,0003700	0,0011855	0,0000875
-0,0004045	0,0011250	0,0000895
-0,0004350	0,0010500	0,0000925
-0,0004655	0,0009750	0,0000955
-0,0004980	0,0013700	0,0001000
-0,0005155	0,0007700	0,0001040
-0,0005240	0,0006600	0,0001055
-0,0005445	0,0005600	0,0001110
-0,0005615	0,0004400	0,0001210
-0,000506	0,000615	0,0001710

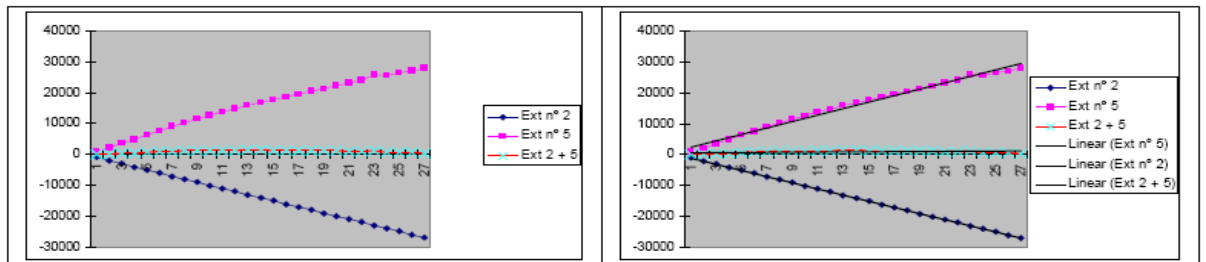


Figura 37: Extensômetros 2 e 5.

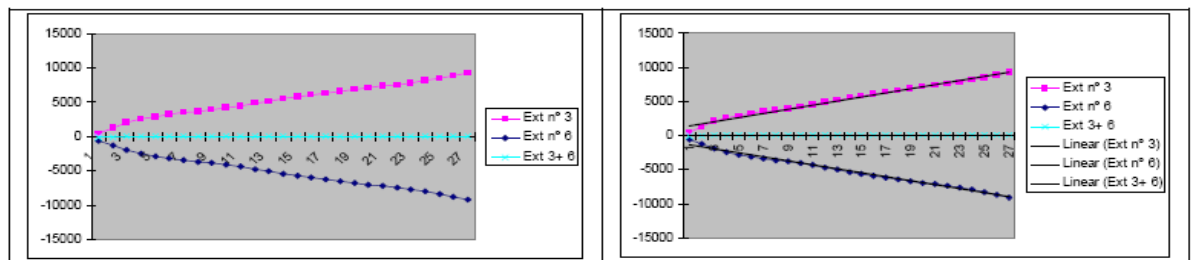


Figura 38: Extensômetros 3 e 6.

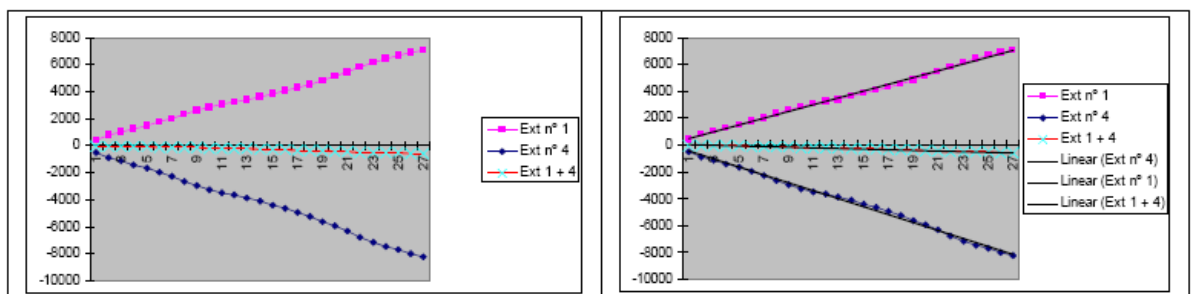


Figura 39: Extensômetros 1 e 4.

### 6.3.2 RETORNO ELÁSTICO E MEDIÇÃO DA GEOMETRIA FINAL

A última linha das tabelas 1 e 2, representa as medições do CP isento de carregamento depois da retirada do indentador cilíndrico através do afastamento do carro da máquina de compressão.

## 6.4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

### 6.4.1 EXTENSOMETRIA

As tabelas 1 e 2 e as figuras 37, 38 e 39, apresentam de forma tabular e gráfica os resultados das medições efetuadas durante o experimento. A intenção inicial era levar o *CP* até um estado máximo de deformação que evidenciasse sua capacidade de resistir a deformações nominais acima dos atuais 6% de norma. Por questões de ordem prática, tais como evitar o descolamento dos *extensômetros (SG)* por excessiva deformação – o que nos levaria à perda dos mesmos – resolveu-se interromper o ensaio quando o *extensômetro* nº 2, o “mestre”, atingiu cerca 22.000  $\mu\text{m}/\text{m}$ .

A seção central do *CP*, apesar de ter sido indentada por um indentador de diâmetro relativamente grande (relação *Diâmetro do Indentador / Diâmetro do CP*  $\approx 47\%$ ), sofreu grande deformação plástica e, como dito acima, acarretou a interrupção do teste. Contudo, mesmo assim, considerando que o material do *extensômetro* tenha características mecânicas semelhantes ao material base do *CP*, no caso um aço *ASTM A 1020*, foram feitas as seguintes considerações:

Da referência [25] são estimados os seguintes valores para as propriedades fundamentais do *CP*:

$$\sigma_0 = 860 \text{ MPa (122.000 psi)}$$

$$m = 0,22$$

$$S_y = 220 \text{ MPa}$$

E, aplicando-se a equação ( A4.5.34) do anexo A4, obtém-se:

$$\frac{S_u}{S_y} = (184.m)^m = 2,257$$

$$\therefore S_u = 497 \text{ MPa}$$

Da mesma referência [25], na fratura tem-se:

$$\varepsilon_f = 0,85 = \ln \frac{100}{100 - Ar_f},$$

$$e^{0,85} = \frac{100}{100 - Ar_f},$$

$$Ar_f \cong 59\%$$

Que representa bem a ductilidade deste material.

De acordo com o conhecido critério de 0,2% de deformação plástica residual, temos:

$$S_y = \sigma_0 \varepsilon_y^m = 860.(0,002)^{0,22} \cong 220 \text{ MPa.}$$

Como declarado na mesma referência [25].

Outro parâmetro interessante é quanto deve ser a *deformação última*,  $\varepsilon_u$ , para este material. Conforme a *equação do encruamento* tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_u &= S_u e^m, \\ \sigma_u &= 497.e^{0,22} = 619 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \sigma_0 \varepsilon_u^m, \\ 619 &= 860.\varepsilon_u^{0,22}, \text{ logo:} \\ \varepsilon_u &= 0,2243 \end{aligned}$$

Segundo a figura 60 da seção A4.5 do anexo A4, o valor correspondente para  $\varepsilon_u$  é  $\approx 0,20$ , compatível com o valor obtido analiticamente.

Após encerramento do ensaio e descarregamento do CP, houve uma recuperação elástica da peça, representada pelos valores dos extensômetros 2 e 5, linha 27 e 28 da tabela 1.

Para o extensômetro 2:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= \varepsilon_{27} - \varepsilon_{28} = 27020 - 22650 = 4370 \mu\text{m} / \text{m} \\ \sigma_{27} &= 860.(27020E - 6)^{0,22} = 388 \text{ MPa} \\ \sigma_{28} &= 860.(22650E - 6)^{0,22} = 373 \text{ MPa} \\ \Delta\sigma &= 15 \text{ MPa} (\cong 2200 \text{ psi}) \end{aligned}$$

Da figura 60 da seção A4.5, temos  $\Delta\sigma \approx 17,2 \text{ MPa} (2500 \text{ psi})$ , compatível com o valor obtido analiticamente.

Para o extensômetro 5:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= \varepsilon_{27} - \varepsilon_{28} = 27900 - 23880 = 4020 \mu\text{m} / \text{m} \\ \sigma_{27} &= 860.(27900E - 6)^{0,22} = 391 \text{ MPa} \\ \sigma_{28} &= 860.(23880E - 6)^{0,22} = 378 \text{ MPa} \\ \Delta\sigma &\cong 13 \text{ MPa} (\cong 1900 \text{ psi}) \end{aligned}$$

Da figura 60 da seção A4.5 do anexo A4, obtém-se  $\Delta\sigma \approx 13,8 \text{ MPa} (2000 \text{ psi})$ , compatível com o valor obtido analiticamente.

Com relação à **deformação de flexão**, foi selecionado o mesmo ponto  $(x,y,z) = (55,0,29)$  correspondente a última linha da tabela 1, respectiva ao extensômetro  $I$ . Do ponto mencionado, extraímos da matriz de profundidades o conjunto  $Z_{ij}$  e seus oito vizinhos.

Matriz  $Z_{ij}$  e seus oito vizinhos

X\Y	$j-1$	$j$	$j+1$
$i-1$	32,5	32,5	32,5
$i$	29	29	29
$i+1$	24,5	24,5	24,5

Aplicando-se a metodologia descrita na seção 3.6 e exemplo 3.6.1:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial x} &= -0,80 \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= -0,04 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} &= 0,00 \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} &= 0,00 \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = 0,00\end{aligned}$$

Com estes valores e ainda aplicando a metodologia da seção 3.6:

$$\begin{aligned}K &= 0,00 \\ H &= -0,009523\end{aligned}$$

Finalmente se obtém:

$$\begin{aligned}k_1 = 0,00 &\Rightarrow R_1 = \infty, e \\ k_2 = 0,019046 &\Rightarrow R_2 = 52,50 \text{ mm}\end{aligned}$$

De acordo com o valor obtido para o raio de curvatura  $R_f = R_2 = 52,50$  mm e, substituindo valores para  $R_0 = 75,50$  mm e  $t = 1,85$  mm e aplicando-se a equação 5.4.7 da seção 5.4.1:

$$\begin{aligned}|\varepsilon_b| &= \frac{t}{2} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_f} \right) = \frac{1,85}{2} \left( \frac{1}{75,50} - \frac{1}{52,50} \right) \\ |\varepsilon_b| &= 5367 \text{ } \mu\text{m} / \text{m}\end{aligned}\tag{1}$$

Com relação à **deformação de membrana**, foi selecionado o ponto  $(x,y,z) = (55,0,29)$  correspondente à última linha da tabela 2.

Da figura e segundo a equação (5.5.8) e figura 31:

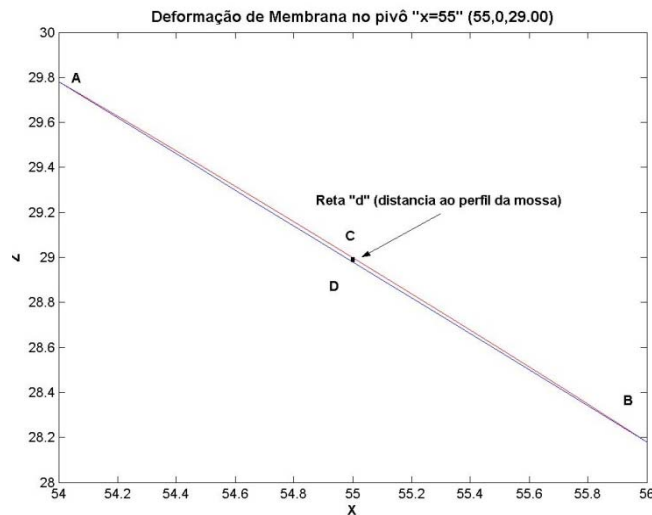


Figura 40: Região do “ombro” da mossa para avaliação de  $\epsilon_m$  [Do autor].

$$\overrightarrow{CB} = (0.5, 0, -0.405) \Rightarrow |\overrightarrow{CB}| = 0,643$$

$$\overrightarrow{AC} = (0.5, 0, -0.400) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = 0,640$$

$$\overrightarrow{AB} = (1.0, 0, -0.795) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 1,277, e \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = 0,638$$

$$|\overrightarrow{CB}| \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} \Rightarrow \alpha = 5,89^\circ$$

$$|\overrightarrow{AC}| \cos \beta = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} \Rightarrow \beta \cong 0^\circ$$

$$|\overrightarrow{CD}| = d = |\overrightarrow{CB}| \operatorname{sen} \alpha = 0.066, e$$

$$\frac{d}{2} = 0,033.$$

$$l = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{\cos \alpha} = 1.005.$$

Logo, substituindo valores na equação (5.5.8), tem-se:

$$\epsilon_m = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{0.033}{1.005} \right)^2,$$

$$\epsilon_m = 539 \mu\text{m} / \text{m}$$



O valor da *deformação verdadeira*  $\varepsilon_m$  é:

$$\begin{aligned}\varepsilon_m &= \ln(1+n) = \ln(1-506E-6), \\ \varepsilon_m &= 506.1 \mu m / m\end{aligned}\quad (2)$$

Comparável com o valor, em módulo, da última linha da tabela 2.

Somando-se os valores obtidos em (1) e (2) acima:

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon_{equivalente_{in}}} &= +5367 + 506 = 5906 \mu m / m, \text{ ou} \\ \overline{\varepsilon_{equivalente_{out}}} &= -5367 + 506 = -4828 \mu m / m\end{aligned}$$

Comparável com os valores, da última linha da tabela 1, para os extensômetros 1 e 4 respectivamente.

As diferenças observadas, cerca de 10% e 24% para os extensômetros 1 e 4 respectivamente, podem ser consideradas como aceitáveis e dentro das incertezas dos sistemas de medição, bem como em comparação com o valor nominal da deformação de flexão. Mesmo corpos de prova de mesmo material, levados a ensaio de tração uniaxial, apresentam dispersão coerente com as diferenças de valores apresentadas neste cálculo. [25]

#### 6.4.2 COMPARAÇÃO ENTRE O *SM PEROLA* E METODOLOGIA *AIMCODE*

O sistema de medição *PEROLA* foi adotado como *padrão de referência* para comparação dos resultados obtidos pela metodologia deste trabalho de Mestrado, a *AIMCODE* (Avaliação de Integridade de dutos com Mossas de topologia COmplexa com base em Deformações Equivalentes).

As características metrológicas do *sistema de medição PEROLA* são:

- Faixa de medição radial: 60,0 a 90,0 mm
- Incerteza radial:  $\pm 0,3$  mm
- Resolução angular:  $0,25^\circ$ .

O sistema *AIMCODE*, tem como base para o cálculo das deformações, a reconstrução geométrica da superfície e, posteriormente, sobre esta superfície, são aplicados os princípios da *Geometria Diferencial* (capítulos 3 e 5), para obtenção das curvaturas principais e daí, as deformações de flexão. A idéia por trás da comparação com o *SM PEROLA* está restrita a quão exata é a reconstrução geométrica do sistema *AIMCODE*, tomando-se como referencia o

*SM PEROLA*. Caso a reconstrução da superfície pelo sistema *AIMCODE* se revele bem aderente à perfilometria produzida pelo primeiro e, tendo-se em vista que a partir daí as derivações subseqüentes são puramente analíticas, infere-se que os valores obtidos para as deformações assim calculadas, estão em consonância com os valores das deformações realmente reinantes na região da moosa sob investigação.

Sendo a exatidão do *SM PEROLA* suficientemente maior do que a esperada do sistema *AIMCODE*, o *SM PEROLA* foi designado como um *padrão de referência* adequado para esta comparação.

Deste modo, foi selecionada a última leitura obtida após o descarregamento do *CP* (e respectiva recuperação elástica), uma vez que é a condição real disponível para fazer a reconstrução da superfície a partir de uma medição externa ou interna, caso fosse proveniente de um *ILI*.

As figura 39.a e 41.b mostram a medição do *CP* no laboratório do *Labmetro*. Foi utilizado um relógio comparador centesimal, marca *Mitutoyo*, com 50 mm de curso, com valor da divisão da escala de 0,01 mm, e uma base com posicionamento milimétrico, para avanço do *CP* em relação ao Sistema de Medição. A incerteza de medição estimada para a medição de cada ponto foi de  $\pm 0,005$  mm.



Figura 39: Medição tridimensional do CP [Do autor].

Os dados assim coletados, medidos em condições distintas e em locais diferentes, encontram-se num referencial de coordenadas não coincidente com o do *SM PEROLA*, aqui denominado sistema de coordenadas global, utilizado no ensaio. Por esta razão, uma transformação de coordenadas, tanto de translação como de rotação foi aplicada nos dados medidos pelo sistema de coordenadas com relógio comparador de modo a permitir a comparação entre ambos conjuntos de dados.

Esta transformação foi feita mantendo-se a ortogonalidade dos novos eixos, aplicando-se a seguinte transformação: [68]

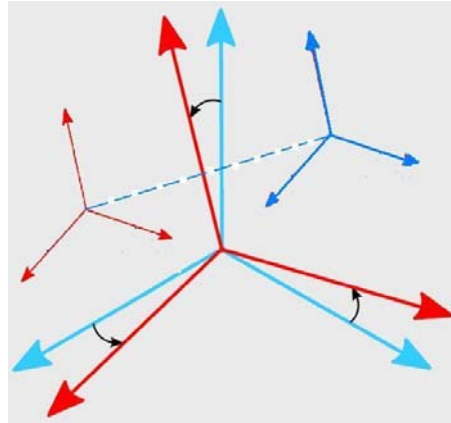


Figura 40: Mudança de coordenadas – translação e rotação de eixos [68].

Rotação de um ângulo  $\theta_x$  em relação ao eixo dos “x”:

$$R_{\theta_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\text{sen}\theta_x \\ 0 & \text{sen}\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} \quad (6.4.1)$$

Rotação de um ângulo  $\theta_y$  em relação ao eixo dos “y”:

$$R_{\theta_y} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \text{sen}\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \quad (6.4.2)$$

Rotação de um ângulo  $\theta_z$  em relação ao eixo dos “z”:

$$R_{\theta_z} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\text{sen}\theta_z & 0 \\ \text{sen}\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4.3)$$

A matriz que representa o resultado das três rotações é obtida através do produto das equações (6.4.1), (6.4.2) e (6.4.3):

$$R = R_{\theta_x} \cdot R_{\theta_y} \cdot R_{\theta_z} \quad (6.4.4)$$

Considerando-se também ter ocorrido uma translação, representada pelo vetor:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}$$

As novas coordenadas do novo sistema são calculadas por:

$$\begin{bmatrix} X_N \\ Y_N \\ Z_N \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} X_L - X_0 \\ Y_L - Y_0 \\ Z_L - Z_0 \end{bmatrix} \quad (6.4.5)$$

Assim, as coordenadas  $\begin{bmatrix} X_N \\ Y_N \\ Z_N \end{bmatrix}$  representam as novas coordenadas de um ponto “P” ∈

perfil medido com relógio comparador, agora referenciado ao sistema de coordenadas global no caso, o do *sistema de medição PEROLA*).

Em adição, os dados brutos do *SM PEROLA* apresentam algum “ruído” decorrente da dispersão natural dos dados coletados. Para atenuar esta dispersão, foi aplicado um filtro digital do tipo *passa baixa*, obtido na referência [69] e, através da convolução entre os parâmetros do filtro e os dados obtidos pelo *SM PEROLA*, foi determinado o seguinte perfil do CP.

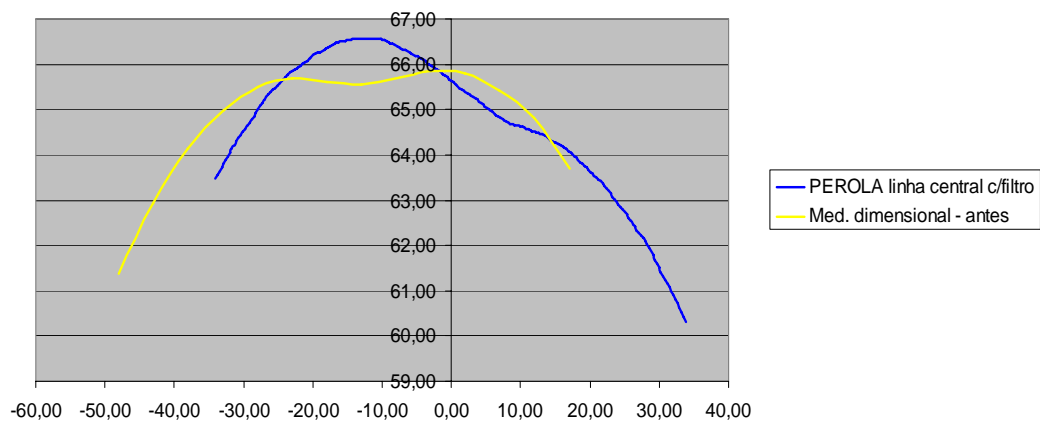


Figura 41: *SM PEROLA* e *AIMCODE*, sem mudança de coordenadas [Do autor].

Após aplicação da transformação de coordenadas, foi obtido o seguinte perfil:

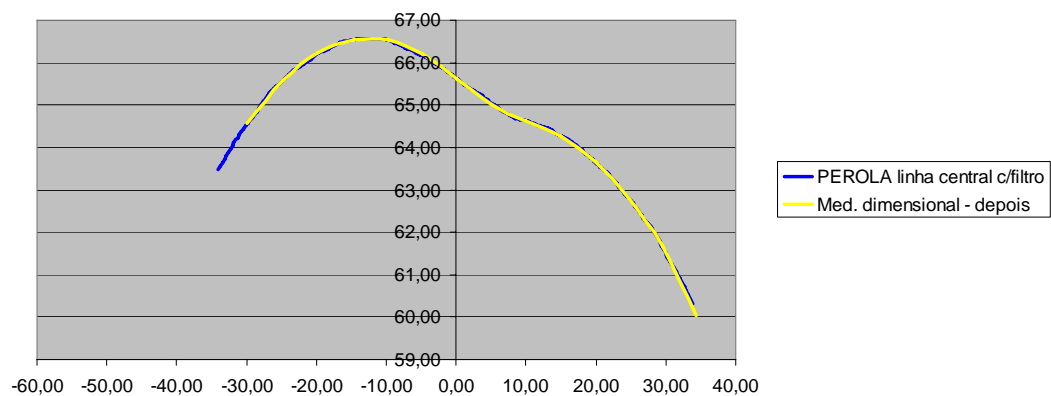


Figura 42: *SM PEROLA* e *AIMCODE*, após mudança de coordenadas [Do autor].

As diferenças medidas entre ambos os sistemas de medição estão representadas na figura 43. A menos dos pontos na extremidade direita do gráfico, o valor absoluto destas diferenças ficou abaixo de 0,15 mm. É conveniente salientar que o *SM PEROLA* mediu a superfície na face interior do *CP* e o modulo dedicado à reconstrução da superfície do sistema *AIMCODE*, teve como base as medições feitas na face externa do *CP*. Há que se descontar do perfil determinado pelo sistema de medição *PEROLA*, pelo menos a espessura de parede que, neste *CP*, é de cerca de 2,00 mm.

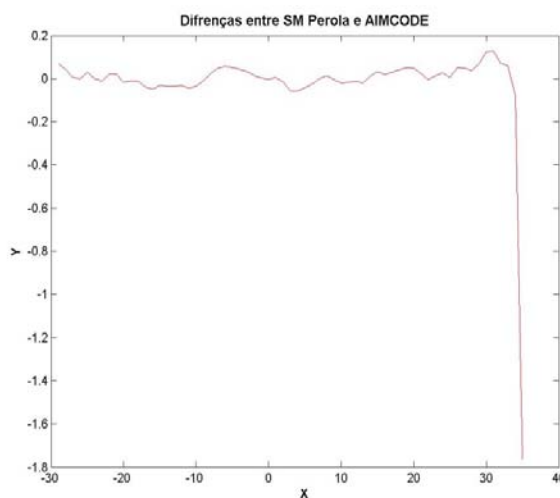


Figura 43: Diferença máxima entre o perfil calculado pelo *SM PEROLA* e o perfil reconstruído pelo método *AIMCODE* [Do autor].

Abaixo a superfície reconstruída pelo *SM PEROLA*, figura 44.a., e pelo *AIMCODE*, figura 44.b.

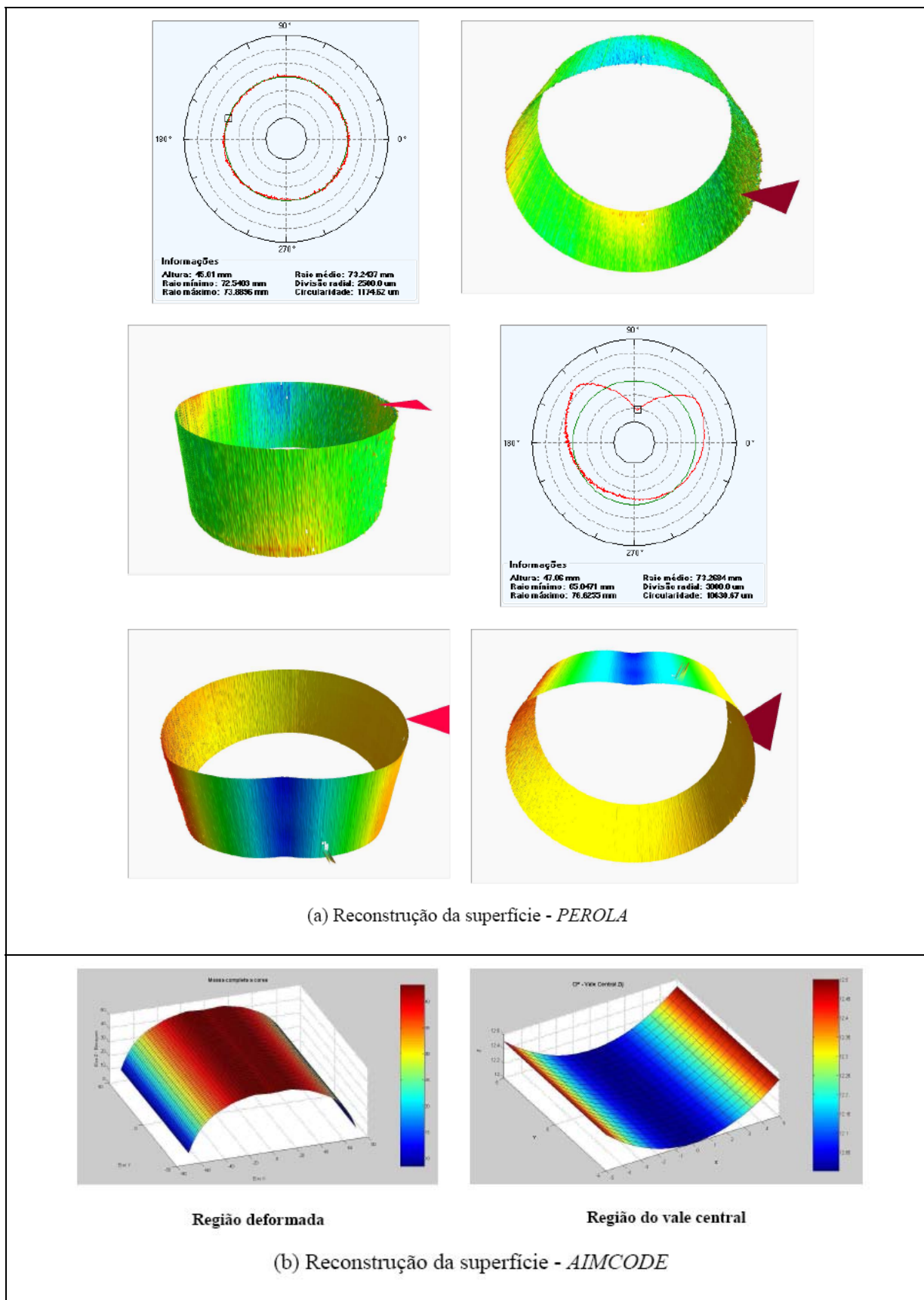


Figura 44: Reconstrução da superfície do CP [Do autor].

#### 7.1 CONCLUSÕES DO TRABALHO

No escopo deste trabalho foi feito um amplo levantamento bibliográfico e a junção de uma série de elementos de geometria diferencial, metrologia, teoria de cascas e elasto-plasticidade que resultaram num procedimento para determinar as deformações em mossas tendo como ponto de partida a forma geométrica da moessa, discretizada a partir de uma malha regular e relativamente esparsa.

Entre os principais resultados obtidos durante o transcurso do trabalho podem se destacar os seguintes aspectos:

Verificou-se que as deformações destas superfícies de dupla curvatura são dependentes das variações dos raios de curvatura, antes e depois do corpo ser submetido ao processo de deformação (*cold work*);

Desenvolveu-se uma técnica analítica e numérica, capaz de interpolar em **2D** uma matriz de pontos  $(x,y,z)$ , sendo  $(x,y)$  as coordenadas retangulares cartesianas em planta e  $(z)$  as respectivas elevações dos pontos  $(x,y)$ , e capaz de determinar seus traços de plano em qualquer orientação angular e reconstruir em **3D** a superfície com excepcional aderência à superfície real;

Apresentou-se uma técnica matemática, analítica, baseada na *Aplicação de Gauss* às superfícies regulares (isentas de vincos ou dobraduras), capaz de determinar as curvaturas principais – e, por conseguinte, seus raios de curvatura – bem como as direções principais destas curvaturas referenciadas a uma base canônica ortonormal. Isto *per se* pode ser considerado um expressivo avanço na técnica de avaliação de mossas uma vez que suas curvaturas e seus planos principais nem sempre coincidem com os eixos de simetria do duto – para não dizer quase nunca – podendo levar o engenheiro de integridade a resultados irreais e conduzindo a análise a conclusões enganosas, caso em que os procedimentos de norma vigentes se apliquem sem maior cautela;

Mostrou-se que os critérios atualmente em vigor são conservativos, talvez em demasia, deixando à discricção do engenheiro de integridade a possibilidade de adotar um critério menos conservativo, com toda segurança e confiança, com base na *teoria da máxima*

*deformação* ou do que foi enunciado neste trabalho como *Limite de enformabilidade* [24] [25];

Ao longo dos capítulos deste trabalho foi desenvolvida uma técnica destinada *à avaliação da integridade de dutos com mossa de topologia complexa*, título do mesmo, em que, o algoritmo proposto – ou seu “*funcionograma*” – é bastante amigável ao operador. Em adição:

- Não requer conhecimento ou maior erudição matemática para implementá-lo;
- Não requer sofisticadas ferramentas de modelagem numérica como por exemplo, a análise através do método dos elementos finitos (*FEA*), para tal fim;
- Não requer nem mesmo um conhecimento mais aprofundado da teoria da elasticidade ou da teoria da plasticidade ou da resistência dos materiais;
- Requer apenas uma judiciosa aquisição de dados (pontos) no campo, uma seleção igualmente judiciosa das regiões críticas (de maior curvatura/deformação), e;
- Uma comparação dos valores obtidos com valores de ensaio uniaxial do mesmo material, ensaios estes, realizados e definidos previamente<sup>4</sup>;

Procurou-se desenvolver uma metodologia não apenas confiável, mas que fosse de rápida implantação. Por exemplo, comparativamente, uma corrida de *ILI* (*pig* instrumentado) em 300 *km* de um duto - dependendo é claro do contexto geológico em que o duto está inserido - pode trazer ocorrência de 40, 50 ou mais defeitos de alteração de geometria.

Sua avaliação requer celeridade uma vez que, melhor do que um laudo “perfeito”, porém “demorado”, é um laudo “suficiente” para tomada de decisões rápidas. Isto não seria possível obter com *FEA* ou outra técnica em tempo e a tempo de programar intervenções em campo. Quando se diz “suficiente” não se está querendo abrir mão da qualidade ou exatidão do estudo, mas sim, conciliar “confiança” com “velocidade” da análise;

Verificou-se o excelente desempenho da metodologia proposta na reconstrução e desenvolvimento de superfícies, tanto teoricamente com vários exemplos de superfícies de revolução e translação que, por comodidade podiam ser expressas segundo funções explícitas do tipo  $z=f(x,y)$ , bem como verificamos seu desempenho comparando os resultados da reconstrução de um corpo de prova a um padrão de referência e cujas diferenças anotadas ficaram bem abaixo da dispersão esperada.

---

<sup>4</sup> Dado usualmente apresentado nos “data book” dos tubos.



Verificou-se experimentalmente uma correlação satisfatória entre os valores calculados pelo método para as deformações e aquelas medidas no experimento.

## 7.2 SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Aplicar testes de tração em amostras de aço API de vários Graus, obter as reduções de área (ou trabalho a frio), na fratura, confrontar com os valores obtidos teoricamente para se poder avaliar e/ou ampliar os atuais critérios de norma além dos atuais 6 %;

Não obstante a técnica apresentada neste trabalho ter apresentado valores compatíveis com os valores medidos experimentalmente e também, segundo a referência [56], ser suportada por *FEA*, investigar uma metodologia mais refinada, analiticamente, para a obtenção das deformações extensionais de membrana,;

Aplicar a metodologia deste trabalho a mossas reais, com curvaturas em duas direções, e instrumentadas, e verificar a aderência do modelo;

Sugerir a inclusão nas normas de fabricação de *line pipe* bem como exigir nos memoriais de contratação do fornecimento o parâmetro *redução de área* –  $A_r$ , parâmetro com maior abrangência do que o simples alongamento médio e de maior significância física;

Integrar todas as rotinas de programação desenvolvidas neste trabalho de uma forma sistêmica e automatizada, para maior comodidade do operador, minimizando as possibilidades de erro humano ou material;

Desenvolver uma ampla avaliação de incerteza da metodologia desenvolvida, identificar as maiores contribuições na incerteza tendo como meta aperfeiçoar a confiabilidade metrológica da metodologia.

## REFERÊNCIAS

- [1] DO CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Sociedade Brasileira de Matemática. 3ª edição. 2008.
- [2] NETO, C. D., LEAL, N. R. **Elementos de Geometria Diferencial**. Editora Interciência. 2ª edição. 1978.
- [3] PINTO, D., CÂNDIDA, M., MORGADO, F. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. SR-1/UFRJ. 2ª edição. 1999.
- [4] LARSON, R., HOSTETLER, R. P., EDWARDS, B.. **Cálculo, vol 2**. H.McGraw-Hill. 8ª edição. 2006.
- [5] STEWART, J. **Cálculo, vol 2**. CENGAGE Learning. 6ª edição. 2009.
- [6] HOWARD, A., RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. Bookman. 8ª edição. 2007.
- [7] GILAT, A., SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas**. Bookman. 1ª edição. 2008.
- [8] SPERANDIO, D., MENDES, J. T., MONKEN, L. H. **Cálculo Numérico, características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos**. Prentice Hall. 1ª edição. 2003.
- [9] LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada-IMPA. 2ª edição. 2008.
- [10] DE MAIO, W. **Geometrias-Geometria Diferencial**. LTC Editora. 1ª edição. 2007.
- [11] HANSELMAN, D., LITTLEFIELD, B. **MATLAB 6**. Prentice Hall. 2ª edição. 2004.
- [12] WILSON, H. B., TURCOTE, L. H., HALPERN, D. **Advanced Mathematics and Mechanics applications Usin Matlab**. Chapman & Hall/CRC. 1st edition. 2003
- [13] MARIANI, V. C. **MAPLE, Fundamentos e Aplicações**. LTC Editora. 1ª edição. 2005.
- [24] RODRIGUES, J., MARTINS, P.. **Tecnologia Mecânica. Vol. I e II**. Escolar Editora. Portugal. 2005.

- [25] DATSKO, J. **Material Properties and Manufacturing Processes**. John Wiley & Sons. 1<sup>st</sup> edition. 1967.
- [26] GIBSON, J.E. **Linear Elastic Theory of Thin Shells**. Pergamon Press. 1965.
- [27] FREIRE, J. L. F. **Engenharia de Dutos**. Transpetro & ABCM. 1<sup>a</sup> edição. 2009
- [28] SHIGLEY, E., MISCHKE, C. **Mechanical Engineering Design**. Mc. Graw Hill. 7<sup>o</sup> edição. 2005.
- [29] MONTGOMERY, D. C., RUNGER, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros**. LTC Editora. 2<sup>a</sup> edição. 2003.
- [30] HIBBELER, R. C. **Resistencia dos Materiais**. LTC Editora. 3<sup>a</sup> edição. 2000.
- [31] TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. M., **Theory of Elastic Stability**, McGraw-Hill. 2nd edition. 1961.
- [33] BUSCHINELLI, P. D. V. **Desenvolvimento de um Sistema Óptico por Triangulação Cônica para Inspeção do Perfil Interno de Dutos**. Maio. 2007. 135 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Metrologia Científica e Industrial, UFSC, Florianópolis, 2007. Disponível em: <http://www.posmci.ufsc.br/teses/PVB.pdf>. Acesso em: 22 out de 2009.
- [34] ÁVILA, M. A. V., FREIRE, J. L. F., SILVEIRA, T. L. **Análise de Integridade Estrutural de Dutos com Mossas Simples**. Rio de Janeiro, 2007. 196p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- [42] API Specification 5L. **Specification for Line Pipe**. Forty Second Edition.2000. American Petroleum Institute.
- [43] ASME B31.4. **Pipeline Transportation System for liquid Hydrocarbons and Others Liquids**. ASME Code for Pressure Piping. 2002 Edition.
- [44] ASME B31.8. **Gas Transmission and Distribution Piping System**. ASME Code for Pressure Piping. 2003Edition.
- [45] COSHAM, A., HOPKINS, P. Pespem Limited. **Pipeline Defect Assessment Manual (PDAM)**. 2006.
- [55] BRAGA, D. et al. **Use of B-Splines in the Assessment of Strain Levels Associated with Plain Dents**; Rio Pipeline Conference & Exposition 2005.Rio de Janeiro. 2005.
- [56] BRAGA, D. et al. **Some Remarks on the Strain Based Assesment of Pipeline Dents**. Proceedings of 7th International Pipeline Conference; ASME; Calgary. Alberta. Canada. 2008.

- [57] ROSENFELD, M.J., PORTER, P.C., COX, J.A. **Strain Estimation Using Vetco Deformation Tool Data**. Proceedings of 2nd International Pipeline Conference; ASME; Volume1. Calgary. Alberta. Canada. 1998.
- [58] ROSENFELD, M.J., et al.. **Basis of the New Criteria in ASME B 31.8 for Prioritization and Repair of Mechanical Damage**. Proceedings of 4th International Pipeline Conference; ASME; Calgary. Alberta. Canada. 2002.
- [59] LUKASIEWICS, S. A., et al. **Calculation of Strain in Dents Based on High Resolution In-Line caliper Survey**. Proceedings of 6th International Pipeline Conference; ASME; Calgary. Alberta. Canada. 2006.
- [60] LE BASTARD, A. **Influence of Internal Pressure for Depth Measurement on a Dent**. Proceedings of 6th International Pipeline Conference; ASME; Calgary. Alberta. Canada. 2006.
- [61] ILKIU, A. M. **Modelo Matemático para Análise da Conformação de Chapas Metálicas na Fabricação de Tubos**. Revista Tubo e Companhia, Ano III, nº 16. 2008. Disponível em [www.cipanel.com.br](http://www.cipanel.com.br). Acessado em: 09/11/2009.
- [62] FREITAS, J.C et al. **A Historical Case In The Bolivia-Brazil Natural Gas Pipeline: 5 Years of Stress Monitoring at the Curriola River Slope**. Proceedings of 10<sup>th</sup> International Rio Pipeline Conference; IBP; Rio de Janeiro. Brazil.2009.
- [63] KHAZHINSKII, G. M. **Approximate Evaluation of Stresses in Dents of Cylindrical Shells**. Chemical and Petroleum Engineering, Vol. 41, Nos. 3-4, 2005.
- [64] KNILL, Oliver. **Linear Algebra and Differential Equations**. Harvard. 2004. Disponível em [http://www.math.harvard.edu/archive/21b\\_fall\\_04/exhibits/2dmatrices/index.html](http://www.math.harvard.edu/archive/21b_fall_04/exhibits/2dmatrices/index.html). Acessado em 09/11/2009.
- [65] HOPKINS, P., COSHAM, A. **The Pipeline Defect Assessment Manual**. Proceedings of 4th International Pipeline Conference; ASME; Calgary. Alberta. Canada. 2002.
- [66] SIQUEIRA, J. A. L. **Cascas - PEF 604 - Sistemas Estruturais II**. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica. Disponível em <http://www.lem.ep.usp.br/pef604/index.html>. Acessado em 09/11/2009.
- [67] Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Disponível em <http://paginas.fe.up.pt/~ldinis/cap8cascas.pdf>. Acessado em 09/11/2009.
- [76] ALBERTAZZI, G. JR. ARMANDO, SOUSA, ANDRÉ R.. **Fundamentos da Metrologia Científica e Industrial**. Editora Manole. 2008.

---

[77] PEREIRA, J. C. Notas de aula do Curso de Mestrado. PosMEC/GRANTE, UFSC. “**Curso de Estabilidade Estrutural**”. 2006.

[78] FREIRE, J. L. F. **Análise da Integridade de Dutos. Noções Básicas**. Engenharia de Dutos. PUC. 2007.

[86] FIGLIOLA, R. S., BEASLEY, D. E. **Theory and Design for Mechanical Measurements**. John Wiley & Sons. 3rd edition. 2000.

[87] LU, JIAN *et al.* **Handbook of Measurement of Residual Stresses**. Society For Experimental Mechanics. The Fairmont Press, Inc. 1st edition. 1996.

### A3.1. Superfícies Regulares

A referência [1] define intuitivamente uma “superfície regular” como:

“Grosso modo, uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$  é obtida tomando-se pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si, de tal modo que a figura resultante não apresente pontas, arestas ou auto-interseções; e que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos desta figura. A idéia é definir um conjunto que seja, em certo sentido, bidimensional e que seja também suficientemente suave de forma que as noções usuais de Cálculo possam ser estendidas a um tal conjunto.”

Apresenta também a definição formal:

**Definição A3.1.1.** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $x: U \rightarrow V \cap S$  de um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que (Figura 3.1.1)  $x$  é diferenciável. Isto significa que, ao se escrever  $x(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ ,  $(u,v) \in U$ , as funções  $x(u,v)$ ,  $y(u,v)$  e  $z(u,v)$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em  $U$ .

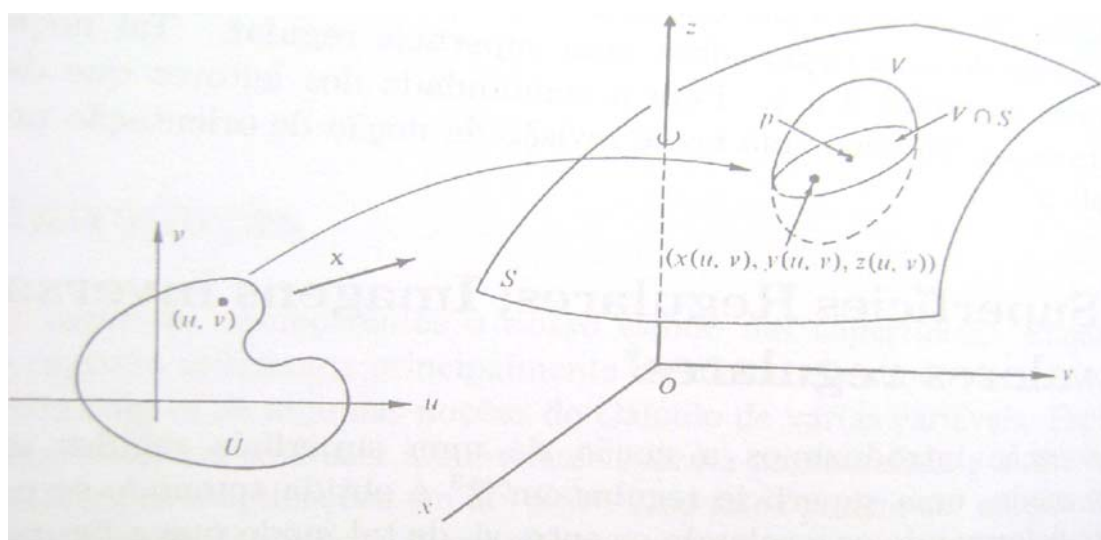


Figura 45: Parametrização de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  [1].

A aplicação  $x$  é chamada uma *parametrização* ou um sistema de coordenadas (locais) em (uma vizinhança)  $p$ . A vizinhança  $V \cap S$  de  $p$  em  $S$  é chamada uma *vizinhança coordenada*.

A aplicação linear das derivadas de  $\mathbf{x}$  num ponto  $q$  do domínio  $U$  numa base canônica  $e_1(1,0)$  e  $e_2(0,1)$  de  $\mathbb{R}^2$ , com coordenadas  $(u,v)$  e  $f_1 = (1,0,0)$ ,  $f_2 = (0,1,0)$  e  $f_3 = (0,0,1)$  de  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas  $(x,y,z)$  é mostrada na figura 45.

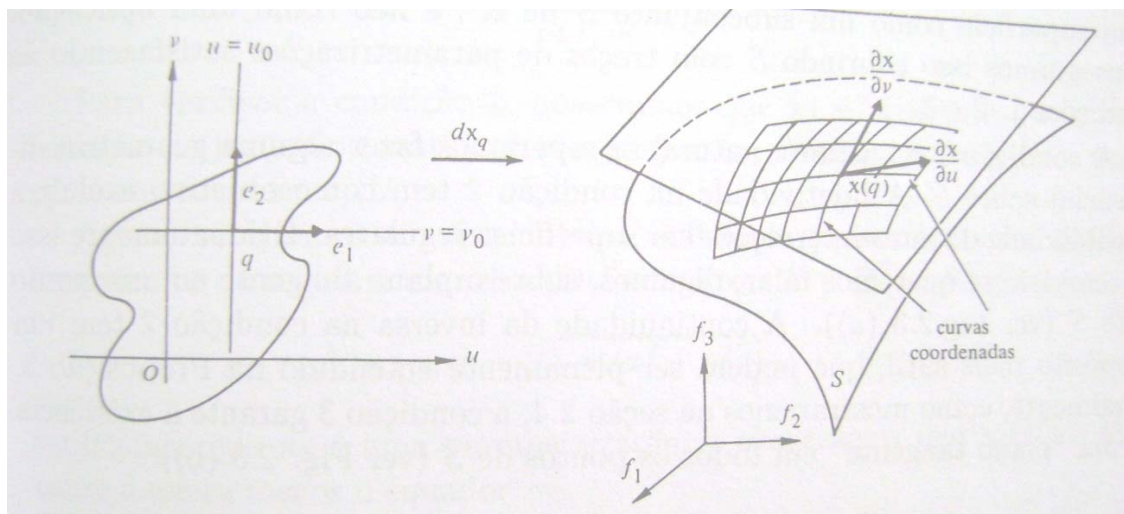


Figura 46: Curvas coordenadas. [1]

De acordo com a definição A3.1.1, cada ponto  $p$  de uma superfície regular pertence a uma vizinhança coordenada. Os pontos desta vizinhança coordenada são caracterizados pelas suas coordenadas. Assim sendo, deveria ser possível, em princípio, poder expressar as propriedades locais de interesse, em termos destas coordenadas.

### A3.2. Primeira forma fundamental

O produto interno natural do  $S \subset \mathbb{R}^3$ , induz em cada plano tangente  $T_p S$  de uma superfície regular  $S$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ : Se  $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ , então  $\langle w_1, w_2 \rangle_p$  é igual ao produto interno de  $w_1$  e  $w_2$ , como vetores em  $\mathbb{R}^3$ . A esse produto interno, que é uma forma bilinear e simétrica (ie,  $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_2, w_1 \rangle_p$  e  $\langle w_1, w_2 \rangle_p$  é linear em  $w_1$  e  $w_2$ ), corresponde uma forma quadrática  $I_p: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0 \quad (\text{A3.2.1})$$

**Definição A3.2.1:** A forma quadrática  $I_p$  em  $T_p S$  definida na Eq. (3.2.1), é chamada a primeira forma fundamental da superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  em  $p \in S$ .

Portanto, a primeira forma fundamental é meramente a expressão de como a superfície  $S$  herda o produto interno natural do  $\mathbb{R}^3$ . Geometricamente, a primeira forma fundamental possibilita fazer medidas sobre a superfície tais como comprimento de curvas, ângulos de vetores tangentes, áreas de regiões, sem fazer menção ao espaço ambiente  $\mathbb{R}^3$ , onde está a superfície em tela.

A primeira forma fundamental pode ser expressa na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  associada a uma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  em  $p$ . Como um vetor tangente  $w \in T_pS$  é o vetor tangente a uma curva parametrizada  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , com  $p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u' v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 \\ &= \mathbf{E}(u')^2 + 2\mathbf{F}u'v' + \mathbf{G}(v')^2, \end{aligned} \quad (\text{A3.2.2})$$

Onde os valores das funções envolvidas são calculados em  $t = 0$ , e

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p \\ \mathbf{F}(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p \\ \mathbf{G}(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p \end{aligned} \quad (\text{A3.2.3})$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_pS$ . Fazendo  $p$  variar na vizinhança coordenada correspondente a  $\mathbf{x}(u, v)$ , obtém-se as funções  $\mathbf{E}(u, v)$ ,  $\mathbf{F}(u, v)$  e  $\mathbf{G}(u, v)$ , que são diferenciáveis nessa vizinhança.

Outra importante propriedade da primeira forma fundamental vem do fato que, conhecendo-se  $\mathbf{I}_p$ , podem-se tratar questões métricas sobre uma superfície regular, sem fazer referencia ao ambiente  $\mathbb{R}^3$ . Por exemplo, fazendo uma remissão à física, supondo que uma curva espacial parametrizada  $\alpha: \mathbf{I} \rightarrow S$  seja dada por  $\alpha(t)$ , seu comprimento de arco  $s(t)$  é dado por:

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{\mathbf{I}(\alpha'(t))} dt. \quad (\text{A3.2.4})$$

Em particular, se  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  está contida numa vizinhança coordenada correspondente à parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$ , pode-se calcular o comprimento de arco de  $\alpha$  entre 0 e  $t$  por:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\mathbf{E}(u')^2 + 2\mathbf{F}u'v' + \mathbf{G}(v')^2} dt \quad (\text{A3.2.5})$$

O ângulo  $\theta$  entre duas curvas parametrizadas regulares  $\alpha: \mathbf{I} \rightarrow S$ ,  $\beta: \mathbf{I} \rightarrow S$  que se intersectam em  $t = t_0$  é calculado a partir da equação (3.2.6).



$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|} \quad (\text{A3.2.6})$$

Em particular, o ângulo  $\varphi$  entre as curvas coordenadas de uma parametrização  $\mathbf{x}(u,v)$  é:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{|\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (\text{A3.2.7})$$

Decorre daí que as curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais se e somente se  $F(u,v) = 0$ , para todo  $(u,v)$ . Tal parametrização é denominada de *parametrização ortogonal*.

### A3.3. A Geometria da Aplicação de Gauss

É uma relação bem conhecida do cálculo clássico de uma variável que a taxa de variação da reta tangente a uma curva  $C$  nos leva a uma entidade geométrica importante, a saber, à curvatura de  $C$ . Nesta seção e nas seguintes, esta idéia será estendida para superfícies regulares; isto é, será medido o quão rapidamente uma superfície  $S$  se afasta do plano tangente  $T_p S$ , em uma vizinhança de  $\mathbf{p} \in S$ . Isto é equivalente a medir a taxa de variação em  $\mathbf{p}$  de um campo vetorial normal unitário  $N$  em uma vizinhança de  $\mathbf{p}$ .

Um número surpreendente de propriedades locais de  $S$  em  $\mathbf{p}$  pode ser obtido a partir desta aplicação. Neste trabalho, o interesse maior estará focado na definição das *Curvaturas Principais* ( $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$ ) e *direções principais* ( $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ ), *Curvatura de Gauss* ( $\mathbf{K}$ ) e *Curvatura Média* ( $\mathbf{H}$ ).

### A3.4. A definição da Aplicação de Gauss e suas propriedades Fundamentais

Sabe-se das propriedades do produto vetorial que um vetor normal à parametrização  $\mathbf{x}$ :  $U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de uma superfície regular  $S$  em um ponto  $\mathbf{p} \in S$ , pode-se escolher, para cada ponto de  $\mathbf{x}(U)$ , um vetor normal unitário como abaixo:

$$N(q) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(q), \quad q \in \mathbf{x}(U) \quad (\text{A3.4.1})$$

Assim temos uma aplicação diferenciável  $N: \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa a cada  $q \in \mathbf{x}(U)$  um vetor normal  $N(q)$ .

Diz-se que uma superfície é *orientável* se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda a superfície; a escolha de um tal campo  $N$  é chamada uma *orientação de  $S$* .

A faixa de *Moebius* não é uma superfície orientável (figura 47). Contudo, é claro que uma superfície coberta por um único sistema de coordenadas é trivialmente orientável. Assim, toda superfície é localmente orientável e, orientação é, sem dúvida, uma propriedade global, no sentido que envolve toda a superfície.

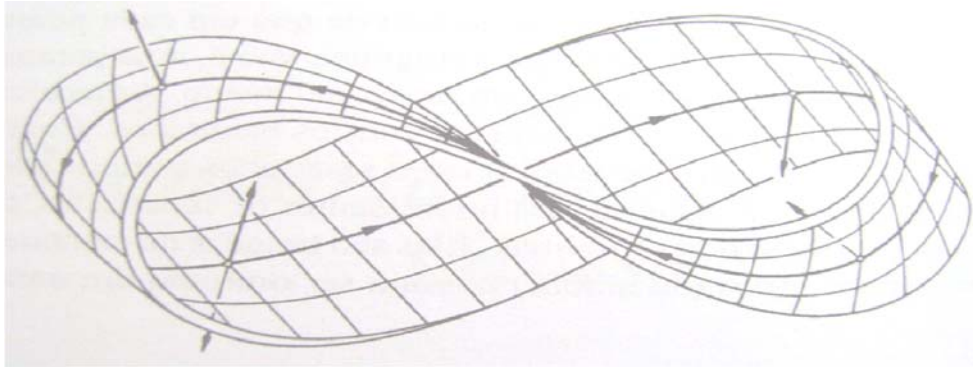


Figura 47: Faixa de Moebius [1].

As mossas em dutos, [63] de uma forma geral apresentam, numa vista em planta e perfil, curvas de nível (ou traços de planos secantes verticais ou horizontais), do tipo elíptico ou circular. Esta característica denota que, pelo menos localmente, as superfícies das quais são oriundas, podem ser consideradas, pelo menos localmente, como superfícies regulares e orientáveis. Como será visto adiante, as mossas serão discretizadas e tratadas localmente como superfícies regulares (e de fato sempre o são segundo as definições dadas na seção 3.1). Deste modo, doravante neste trabalho,  $\mathcal{S}$  denotará uma *superfície regular orientável*.

Demonstra-se na seção 3.2 da referencia [1] que se  $dN_p$  é uma aplicação tal que  $dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u$  e  $dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$ ,, desta forma,  $dN_p$  é uma aplicação linear auto-adjunta.

**A4.1. Casos particulares de cascas**

A4.1.1. Superfícies cilíndricas – O caso dos dutos:

$$q_n = T_1/R_1 + T_2/R_2 = T_1/R_1, \text{ pois } R_2 \Rightarrow \infty \text{ e, } T_2/R_2 \Rightarrow 0.$$

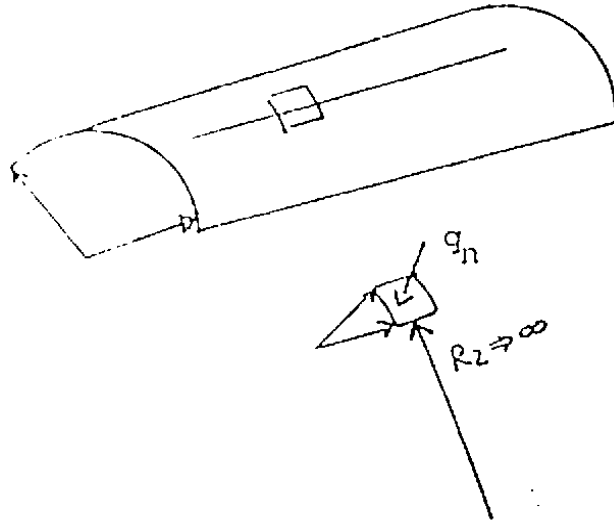


Figura 48: Segmento cilíndrico [67].

No caso particular de pressão interna em tubos de raio  $r$ , tem-se:

$$p = T/r \tag{A.4.1.1}$$

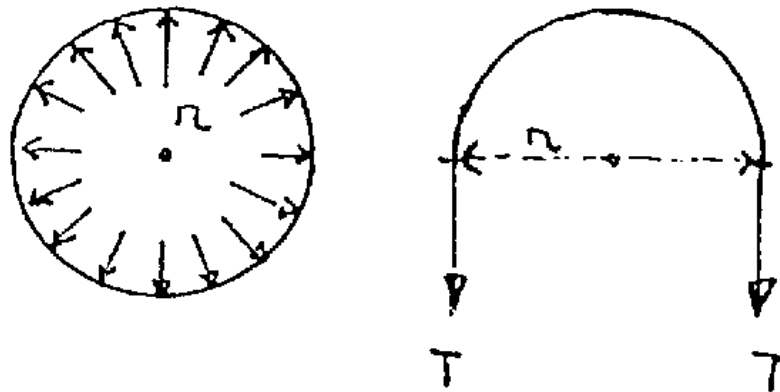


Figura 49: Segmento cilíndrico – Cisalhamento [67].  
 Figura A.4.1.2: Segmento cilíndrico – Cisalhamento [67]

onde  $R_1$  e  $R_2$  são os raios de curvatura nas direções principais no ponto em que atua  $q_n$ .

#### A4.2. Influência da curvatura na capacidade resistente da casca

Na seção anterior foi deduzida a equação fundamental da teoria de membrana, equação

$$P = T_1 / R_1 + T_2 / R_2$$

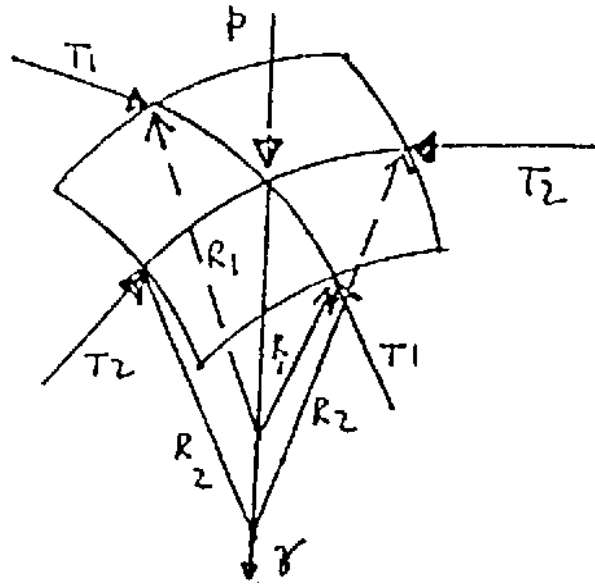


Figura 50: Segmento de casca com dupla curvatura e as tensões principais [67]

onde:

$P = qn$  (em  $[F] \cdot [L]^{-2}$ ): esforço atuante normal à superfície por unidade de área.

$T_1, T_2$  (em  $[F] \cdot [L]^{-1}$ ): esforços solicitantes em duas direções principais calculados por unidade de comprimento.

A carga atuante é resistida como se houvesse, em duas direções ortogonais, dois arcos passando pelo ponto em cascas de dupla curvatura.

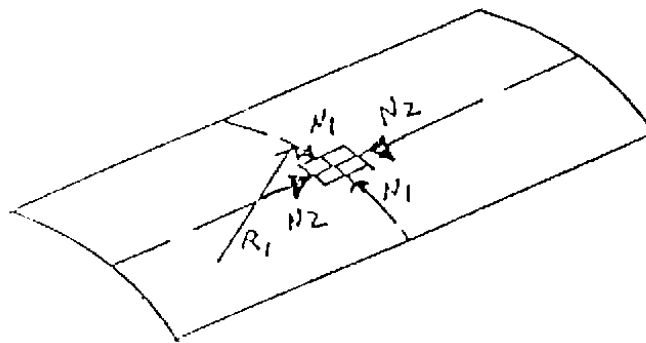


Figura 51: Esquemático do princípio de resistência das cascas [67].

No caso de cascas de simples curvatura, a carga  $P$  é resistida em uma direção por arco e em outra como viga. Assim, as cascas de simples curvatura são menos eficientes do ponto de vista estrutural que as de dupla curvatura (embora as primeiras sejam construtivamente menos trabalhosas).

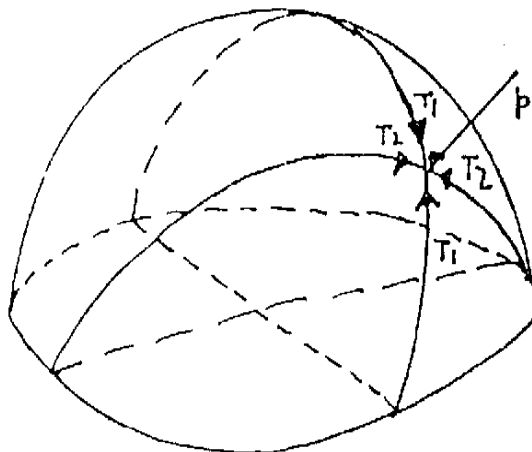


Figura 52: Esforços normais num segmento cilíndrico [67].

onde  $R_1$  finito e  $R_2 \Rightarrow \infty$ , com  $N_1 \gg N_2$ .

A capacidade de resistir cargas de cascas de dupla curvatura é maior que as de simples. O comportamento é como se houvesse duas famílias de curvas ortogonais em cada ponto resistindo aos esforços.

#### A4.3. Tensões e Deformações (curvaturas) no regime elástico

Uma estrutura tipo casca fina é uma estrutura para a qual uma das dimensões é significativamente menor do que as outras duas e caracteriza-se pela forma da superfície média, no caso da superfície média ser uma superfície de revolução a casca é dita de revolução. À semelhança do que acontece com as vigas e com as placas, o estado de tensão não é considerado tridimensional, sendo usual considerar-se para efeitos de equilíbrio, em lugar das tensões, esforços generalizados, os quais são obtidos considerando a resultante das tensões ao longo da espessura da casca na direção normal à superfície média que passa pelo ponto.

A fim de definir o estado de tensão num ponto é necessário definir um sistema de eixos, o qual pode ser definido do seguinte modo: o eixo  $x_3$  tem a direção normal à superfície média no ponto que está sendo considerado, os eixos  $x_2$  e  $x_1$  estão no plano tangente à superfície média que passa pelo ponto e são ortogonais entre si, como se representa na figura 50. Os eixos  $x_1$  e  $x_2$  permitem a localização do ponto na superfície média.

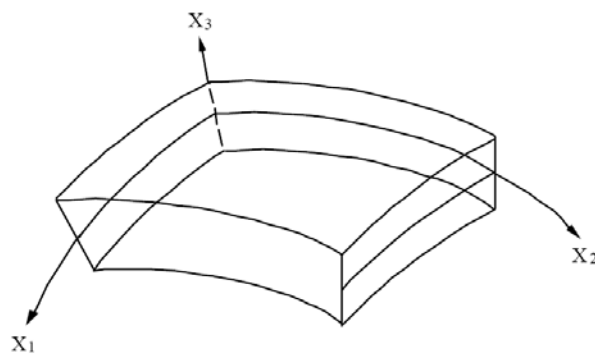


Figura 53: Sistema de coordenadas global.

A espessura da casca é designada por  $e$ . A superfície média é uma superfície de curvatura dupla cujos raios de curvatura principais ocorrem nos planos  $x_1x_3$  e  $x_2x_3$  e podem designar-se por  $R_1$  e  $R_2$  respectivamente.

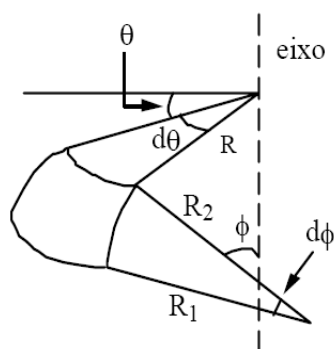


Figura 54: Coordenadas esféricas [67].

No caso de se tratar de uma casca de revolução, figura 54, pode-se considerar que a posição de um ponto sobre a casca fica definida pelos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  e por uma distância  $R$ . O eixo  $x_3$  foi considerado coincidente com o eixo de revolução da casca e os eixos  $x_1$  e  $x_2$  foram considerados num plano perpendicular. O ângulo  $\theta$  é medido sobre o paralelo a partir de uma direção previamente definida que pode ser a direção  $x_1$ . O ângulo  $\phi$  é o ângulo formado pela direção normal à superfície média com a direção do eixo de revolução, admite-se que os sentidos positivos são os que se representam na figura. Este ângulo indica a posição do ponto sobre o meridiano. Note-se que um paralelo é perpendicular ao eixo de revolução e que o meridiano contém o eixo de revolução. O raio  $R$  é a distância do ponto da superfície média ao eixo de revolução.

#### A4.4. Tensões e Esforços Unitários

O tensor das tensões tem cinco componentes significativas, no caso de se considerar que as tensões  $\sigma_{33}$  normais à superfície média são irrelevantes quando comparadas com as outras componentes do tensor das tensões. Esta hipótese é razoável sempre que se considera que a casca está sujeita a esforços de flexão como resultado de uma ação exterior normal à superfície média.

As componentes do tensor das tensões estão representadas na figura 50 e são:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A4.4.1})$$

No plano  $x1x2$  podem surgir forças que resultam de tensões uniformemente distribuídas ao longo da espessura e que são as chamadas forças de membrana. A resultante das tensões  $\sigma_{11}$  ao longo da espessura é  $N_{11}$ , ver figura 4.2.3. A resultante destes esforços unitários ao longo do arco  $dS_2$  é  $N_{11}dS_2$ . A resultante das tensões  $\sigma_{11}$  no elemento de área  $dS_2 dx_3$  é  $\sigma_{11}dS_2 dx_3$ , sendo o comprimento  $dS_2 = (R_2 + x_3) d\theta$  ou seja  $dS_2 = (R_2 + x_3) * dS_2 / R_2$ . Note-se que  $R_2 d\theta = dS_2$  ou seja  $d\theta = dS_2 / R_2$  pelo que a resultante  $N_{11}$ , força de membrana referida à superfície média é: [67][26]

$$N_{11}dS_2 = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{11} \frac{R_2 + x_3}{R_2} dS_2 dx_3 \quad (\text{A4.4.2})$$

Ou seja:

$$N_{11} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{11} \frac{R_2 + x_3}{R_2} dx_3 \quad (\text{A4.4.3})$$

De modo análogo se define o esforço unitário  $N_{12}$  que corresponde à resultante das tensões  $\sigma_{12}$  ao longo da espessura, ou seja: [67] [26]

$$N_{12} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{12} \frac{R_2 + x_3}{R_2} dx_3 \quad (\text{A4.4.4})$$

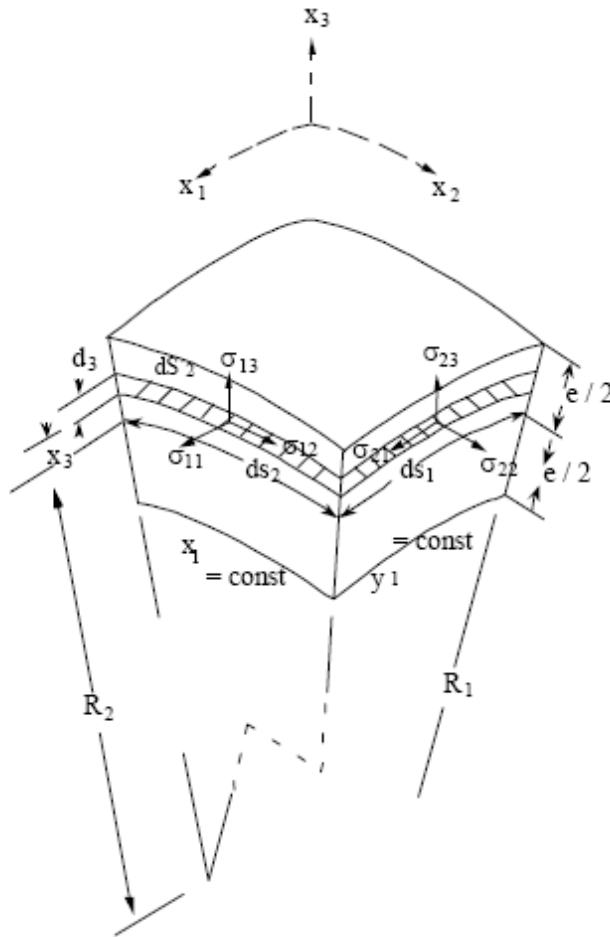


Figura 55: Tensor das tensões [67].

Os esforços de membrana  $N_{11}$  e  $N_{12}$  foram definidos na seção  $X1 = \text{constante}$ , no caso de se considerar a seção,  $X2 = \text{constante}$ , obtém-se os esforços unitários de membrana  $N_{22}$  e  $N_{21}$  que são resultantes das tensões  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{21}$  e que são:

$$N_{22} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{22} \frac{R_1 + x_3}{R_1} dx_3 \text{ e } N_{21} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{21} \frac{R_1 + x_3}{R_1} dx_3 \tag{A4.4.5}$$

Nestas condições a simetria do tensor das tensões  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  não implica a simetria do tensor dos esforços,  $N_{12} \neq N_{21}$ . No caso de se tratar de uma casca esférica existe simetria do tensor dos esforços por ser  $R1 = R2$ . No caso de ser possível considerar que  $x3/R1$  e  $x3/R2$  são muito pequenos quando comparados com a unidade, a variação do comprimento do arco ao longo da espessura não precisa ser considerada.

Tendo em conta este tipo de aproximação é possível considerar a simetria dos esforços.



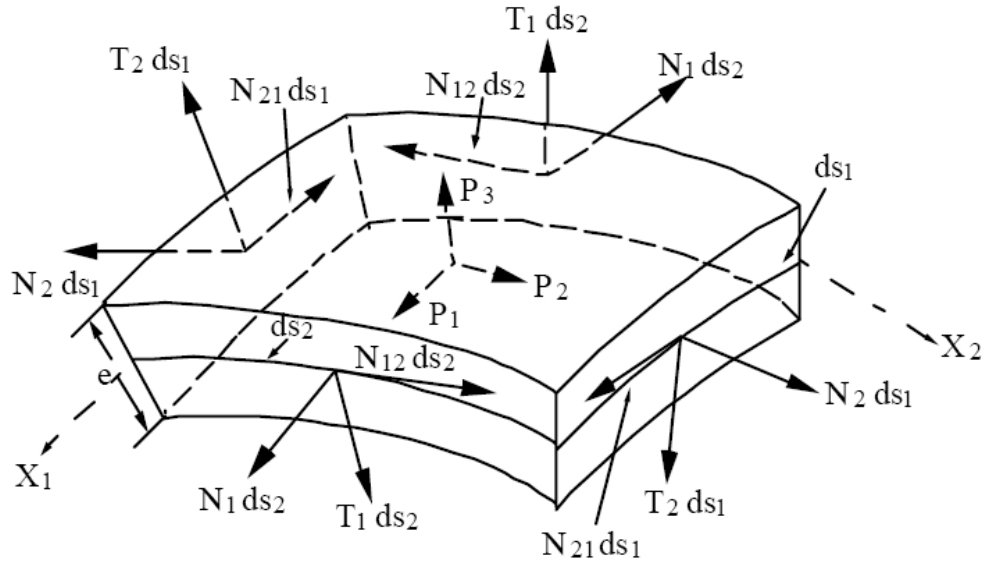


Figura 56: Esforços de membrana e transversos.

As tensões de cisalhamento distribuídas ao longo da espessura produzem esforços transversos unitários que são definidos do seguinte modo: [67][26]

$$T_1 = \int_{\frac{-e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{13} \frac{R_2 + x_3}{R_2} dx_3 \text{ e } T_2 = \int_{\frac{-e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{23} \frac{R_1 + x_3}{R_1} dx_3 \quad (\text{A4.4.6})$$

No caso das tensões  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{12}$  não serem uniformemente distribuídas ao longo da espessura surgem momentos em relação à superfície média que são os esforços de flexão. O momento unitário da tensão  $\sigma_{11}$  na secção  $x_1 = \text{constante}$  em relação ao elemento linear  $dS_1$  é:[67][26]

$$M_{11} = \int_{\frac{-e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{11} \frac{R_2 + x_3}{R_2} x_3 dx_3 ; M_{12} = \int_{\frac{-e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{12} \frac{R_2 + x_3}{R_2} x_3 dx_3 \quad (\text{A4.4.7})$$

$$M_{22} = \int_{\frac{-e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{22} \frac{R_1 + x_3}{R_1} x_3 dx_3 ; M_{21} = \int_{\frac{-e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{21} \frac{R_1 + x_3}{R_1} x_3 dx_3 \quad (\text{A4.4.8})$$

Estes esforços estão representados na figura 57.

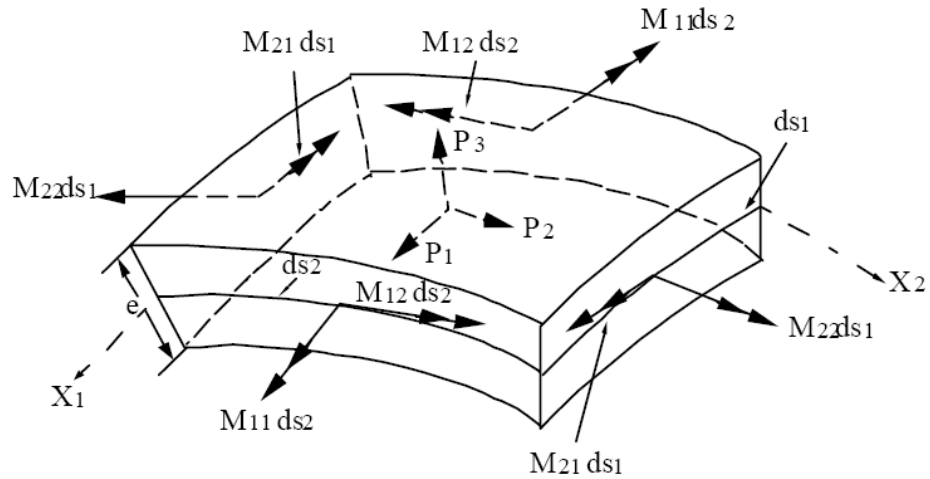


Figura 57: Esforços de flexão [67].

No caso de se tratar de uma casca fina de um material isotrópico e homogêneo e considerando que  $x_3/R_1$  e  $x_3/R_2$  são muito menores que a unidade, os esforços podem ser definidos do seguinte modo:

$$N_{11} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{11} dx_3 ; N_{12} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{12} dx_3 ; N_{22} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{22} dx_3$$

$$T_1 = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{13} dx_3 ; T_2 = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{23} dx_3$$

$$M_{11} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{11} x_3 dx_3 ; M_{12} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{12} x_3 dx_3 ; M_{22} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{22} x_3 dx_3 \tag{A4.4.9}$$

Admitindo que é possível considerar estas expressões para as deformações e que,  $\sigma_{33} \ll \sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$ , obtém-se, atendendo à lei de Hooke, as expressões seguintes para as tensões:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon'_{11} - \nu \varepsilon'_{22} - x_3 (\chi_{11} - \nu \chi_{22})] \tag{A4.4.10}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon'_{22} - \nu \varepsilon'_{11} - x_3 (\chi_{22} - \nu \chi_{11})] \tag{A4.4.11}$$

Substituindo estas expressões nas equações A4.4.9, tendo em conta que  $x_3/R_1 \approx 0$ , constata-se que as extensões só contribuem para os esforços de membrana e que curvaturas só contribuem para os esforços de flexão, obtendo-se por integração as expressões seguintes:

$$\begin{aligned} N_{11} &= \frac{E e}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon'_{11} + \nu \varepsilon'_{22}); N_{22} = \frac{E e}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon'_{22} + \nu \varepsilon'_{11}) \\ M_{11} &= -D (\chi_{11} + \nu \chi_{22}) \text{ e } M_{22} = -D (\chi_{22} + \nu \chi_{11}) \end{aligned} \quad (\text{A4.4.12})$$

Onde  $D$  é o módulo de rigidez à flexão e é tal que:

$$D = \frac{E e^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (\text{A4.4.13})$$

No caso mais geral de deformação têm de se considerar os efeitos das tensões de cisalhamento  $\sigma_{12}$  que provocam a existência de esforço de membrana  $N_{12}$  na superfície média que tendem a produzir uma distorção que pode ser medida em termos de  $\varepsilon'_{12}$  e de um momento torsor  $M_{12}$  que tende a provocar uma mudança de curvatura de torção  $\chi_{12}$ .

#### A4.5. Definições

Da referencia [25] transcrevemos as seguintes definições:

**a. Tensão nominal** (*nominal stress*), (ou de engenharia): é a razão entre uma força ( $F$ ) por unidade de área nominal ( $A_0$ ), ou em outras palavras, a área original do corpo de prova – CP;

$$S = \frac{F}{A_0} \quad (\text{A4.5.1})$$

**b. Deformação nominal** (*nominal strain*), (ou de engenharia): é a razão entre o alongamento uniforme sobre o comprimento original sobre o qual a elongação ocorreu;

$$n = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_f - l_0}{l_0}, \quad \text{ou} \quad n = \frac{\Delta A}{A_f} = \frac{A_0 - A_f}{A_f} \quad (\text{A4.5.2})$$

**c. Limite de proporcionalidade** (*proportional limit*): é a maior tensão que o material pode ser submetido sem nenhum desvio da relação de proporcionalidade tensão – deformação. Ponto  $P$  na figura 58.

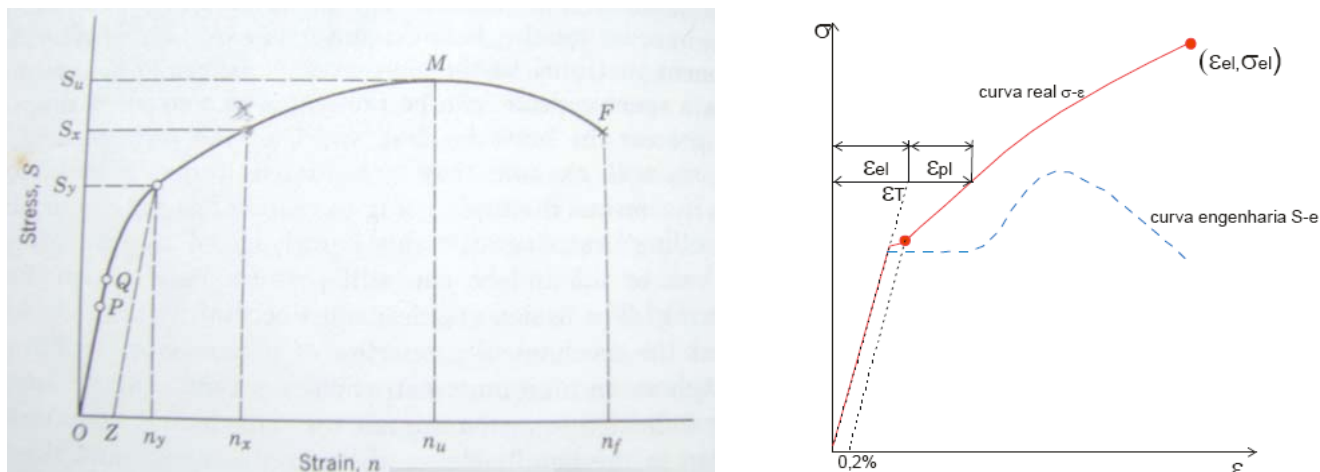


Figura 58: Curva tensão-deformação nominais (de engenharia), traçada em coordenadas cartesianas [25][32].

**d. Limite elástico** (*elastic limit*): é a maior tensão a que se pode submeter o material sem que se desenvolva deformação permanente, uma vez retirada a força que a produz. Ponto **Q** na figura 58.

**e. Modulo de elasticidade** (*modulus of elasticity*): é a relação tensão e deformação correspondente, abaixo do limite elástico. É conhecido como lei de Hooke.

$$E = \frac{S}{n} \quad (\text{A4.5.3})$$

**f. Tensão de escoamento** (*yield strength*): é a tensão aplicada ao material que produz uma deformação específica ligeiramente superior à que seria produzida dentro do limite elástico. Por exemplo, quando se considera o conhecido off set de 0,2%, o ponto **Z** na figura 4.4.1 representa uma deformação de 0,002  $\mu\text{m}/\text{m}$ .

**g. Ponto de escoamento** (*yield point*): é a primeira tensão, abaixo da máxima carga, na qual ocorre um incremento de deformação sem um correspondente incremento de tensão. Seria um trecho horizontal na figura 58 –  $S_y$ .

**h. Tensão última** (*ultimate strength*): é o valor da tensão obtida quando a máxima carga sustentada pela pelo CP é dividida pela área original do CP. Ponto **M** na figura 58.

**i. Tensão de ruptura ou de fratura** (*breaking strength ou rupture strength*): razão entre a carga no momento da ruptura pela área original do CP. Ponto **F** na figura 58.

**j. Redução de área percentual** (*percent area reduction*): é definida como a máxima variação de área vezes 100, dividida pela área original.

Em tensão:

$$A_r = \frac{A_0 - A_f}{A_0} \times 100 \quad (\text{A4.5.4.a})$$

Em compressão:

$$A_e = \frac{A_f - A_0}{A_0} \times 100 \quad (\text{A4.5.4.b})$$

Como se vê, pode haver confusão com sinais ou decidir quando usar a equação (4.4.4.a ou b). Para evitar este impasse, sugere-se a utilização simplesmente da relação “área inicial sobre área final” ou  $R = \frac{A_0}{A_f}$ . Por exemplo, se durante um teste de um material encontramos  $A_0 = 129,0 \text{ mm}^2$  e  $A_f = 96,8 \text{ mm}^2$ , então  $R$  é simplesmente igual a  $\frac{A_0}{A_f} = \frac{129,0}{96,8} = 1,33$ . Para se obter  $A_r$ :

$$A_r = \frac{A_0 - A_f}{A_0} \times 100 = \frac{129,0 - 96,8}{129,0} \times 100 = 0,25 = 25\%$$

Assim, um valor de  $R = 1,33$  e um valor de  $A_r = 25\%$ , ambos expressam igualmente a ductilidade do material.

Entretanto, se se deseja obter agora o valor equivalente da deformação verdadeira (*true strain*) na fratura, como será visto a diante, pode-se proceder imediatamente com  $R$ , como segue:

$$\varepsilon_f = \ln R = \ln 1,33 = 0,29 \mu\text{m} / \text{m}$$

Por outro lado, para fazer uso de  $A_r$ , ter-se-ia que aplicar a seguinte expressão:

$$\varepsilon_f = \ln R = \ln \frac{100}{100 - A_r} = \ln \frac{100}{100 - 25} = \ln \frac{100}{75} = \ln 1,33 = 0,29 \mu\text{m} / \text{m}$$

**k. Tensão verdadeira** (*natural* ou *true stress*):- é a força por unidade área medida instantaneamente a cada incremento de deslocamento.

$$\sigma = \frac{F}{A_i} \quad (\text{A4.5.5})$$

**l. Deformação verdadeira** (*natural* ou *true strain*):- é o valor de deformação obtido através da soma de todas as razões incrementais de deslocamento infinitesimal ao longo de todo o comprimento do CP em que ocorreu a alteração de forma.

Para tensão:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_1}{l_0} + \frac{\Delta l_2}{l_0 + \Delta l_1} + \frac{\Delta l_3}{l_0 + \Delta l_1 + \Delta l_2}, \quad \text{ou}$$

$$\varepsilon = \sum_{l_0}^{l_f} \frac{\Delta l}{l}$$

E, por integração:

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l_f} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_f}{l_0} \quad (\text{A4.5.6})$$

Para compressão:

$$-\varepsilon = \int_{l_0}^{l_f} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_f}{l_0}, \quad \text{ou}$$

$$\varepsilon = \ln \frac{l_0}{l_f}$$

Em deformação plástica o volume permanece constante. Assim:

$$V_0 = A_0 l_0 = A_f l_f, \quad \text{ou} \quad \frac{l_f}{l_0} = \frac{A_0}{A_f}$$

Assim sendo:

$$\varepsilon = \ln \frac{l_f}{l_0} = \ln \frac{A_0}{A_f} \quad (\text{A4.5.7})$$

**m. Equação geral de encruamento** (*strain-hardening equation*):- Se colocarmos os dados de tensão-deformação numa escala logarítmica, observa-se que ambas as regiões, no regime elástico e plástico, se ajustam perfeitamente a linhas retas, como se vê na figura 59,  $\log y = m \log x + \log b$ , que é idêntico a,  $y = mx + b$  traçado em coordenadas cartesianas. Adotando  $\sigma$  e  $\varepsilon$  como símbolos consagrados para tensão e deformação verdadeiras:

$$\sigma = \sigma_0 \varepsilon^m \quad (\text{A4.5.8})$$

À seleção de  $\sigma_0$  como constante de proporcionalidade segue duas importantes considerações. A primeira é que, sendo  $\varepsilon$  adimensional,  $\sigma_0$  deve ter unidades de tensão. A segunda é que  $\sigma_0$  é uma importante propriedade característica do material, em estado , recozido, isto é, sem tensões residuais.

Para um dado material, os valores de  $\sigma_0$  e  $m$  são os mesmos seja para tração ou compressão.

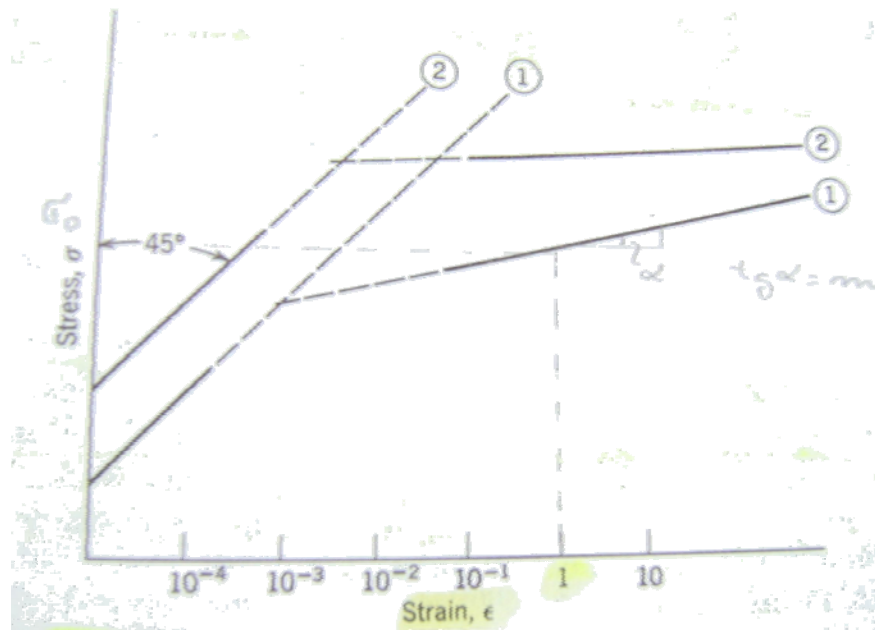


Figura 59: Característica tensão x deformação verdadeiras, em escala logarítmica. [25]

Uma questão bastante comum com respeito à equação de encruamento é se a deformação verdadeira, ali representada, compreende a deformação total  $\varepsilon_t$ , isto é, elástica + plástica, ou se é somente a deformação plástica  $\varepsilon_p$ ? Na verdade ambas as curvas podem ser determinadas experimentalmente – e o são – mas raramente é declarado qual deformação verdadeira está sendo considerada. Embora, à primeira vista, possa parecer uma prática descuidada, na realidade a diferença entre valores de cada deformação verdadeira é menor que a diferença entre duas curvas obtidas usando-se o mesmo conceito de deformação verdadeira, a partir de duas amostras do mesmo material.

Ao traçar uma curva de deformações verdadeiras, a parte elástica é dada por

$$\sigma = E\varepsilon_e \quad (\text{A4.5.9})$$

e, a parte plástica dada por:

$$\sigma = \sigma_0 \varepsilon_t^m = \sigma_0 (\varepsilon_e + \varepsilon_p)^m \quad (\text{A4.5.10})$$

Assim,

$$\varepsilon_t = (\varepsilon_e + \varepsilon_p) = \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{1/m} \quad (\text{A4.5.11})$$

Se desejarmos obter apenas a porção da deformação verdadeira apenas devido à parcela plástica, basta subtrairmos da equação (4.4.11) a porção elástica dada pela equação (4.4.9):

$$\epsilon_p = \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{1/m} - \frac{\sigma}{E} \tag{A4.5.12}$$

Na figura 60 temos uma comparação entre deformações com base na deformação total plástica + elástica e, com base na deformação plástica somente.

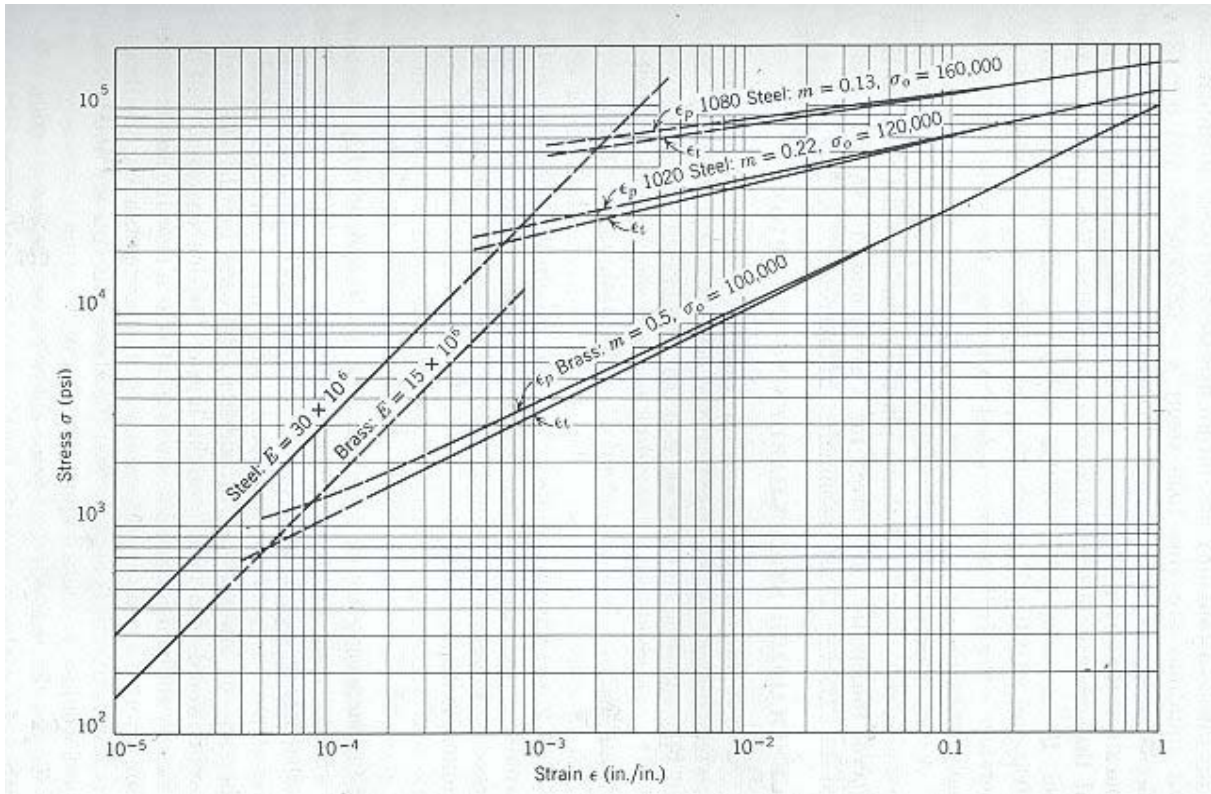


Figura 60: Comparação de curvas de encruamento na base  $\epsilon_t = \epsilon_e + \epsilon_p$  e  $\epsilon_t = \epsilon_p$  somente. [25]

**n. Trabalho a frio (previous cold work):** A prática atual é representar os dados obtidos de encruamento por deformação a frio para um dado material, isento de tensões residuais, como:

$$\sigma = K \epsilon^n \tag{A4.5.13}$$

Se este mesmo material for *deformado a frio (cold worked)* de certo percentual  $x$  (leia-se “redução de área de  $x\%$ ”) e, sua relação tensão-deformação verdadeira for obtida, seria representada por:

$$\sigma = K_x \epsilon^{n_x} \tag{A4.5.14}$$

onde,  $K_x > K$  e  $n_x < n$ .

Para um aumento da quantidade de trabalho a frio, a constante de proporcionalidade  $K_x$  se torna cada vez maior, enquanto o expoente  $n_x$  se torna cada vez menor. Em outras palavras,



comparativamente ao material original (com alívio de tensões), a curva tensão-deformação do material trabalhado a frio, se torna mais elevada e de inclinação menor.

Para se ver melhor o efeito do trabalho a frio prévio na relação tensão-deformação de um material, considere o caso simples da extensão de um cilindro de comprimento inicial  $l_0$  até um comprimento  $l_x$ . Por definição (4.4.6), a deformação verdadeira total é:

$$\varepsilon_t = \int_{l_0}^{l_x} \frac{dl}{l} \quad (\text{A4.5.15})$$

Se considerarmos que esta extensão se deu em um primeiro movimento de  $l_0$  a  $l_1$  e, de  $l_1$  a  $l_x$ , temos:

$$\varepsilon_t = \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} + \int_{l_1}^{l_x} \frac{dl}{l}, \text{ ou} \quad (\text{A4.5.16})$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_w + \varepsilon_x.$$

onde,  $\varepsilon_w$  é a deformação do prévio trabalho a frio durante a extensão de  $l_0$  a  $l_1$  e,  $\varepsilon_x$  é o valor da deformação do trabalho a frio adicional para ir de  $l_1$  a  $l_x$ . Assim, por substituição na equação (4.4.10), temos:

$$\sigma = \sigma_0 (\varepsilon_w + \varepsilon_x)^m \quad (\text{A4.5.17})$$

Que é a expressão generalizada da equação de encruamento. Assim, para um dado material,  $\sigma_0$  e  $m$  são valores fixos e não variam com o trabalho a frio. O eventual trabalho a frio, simplesmente entra na deformação total no termo entre parêntesis como  $\varepsilon_w$ .

**o. Real significado de  $\sigma_0$ :** segundo a equação (4.4.8),  $\sigma_0$  é o valor da tensão quando o material é deformado plasticamente a uma deformação verdadeira igual a 1. Uma questão que surge de imediato é:- “É possível deformar um material até uma deformação verdadeira igual a 1?”. De fato não se trata de um alongamento uniforme de 100% mas sim de 271,8 %. Na verdade, segundo a referencia [25], a resposta é definitivamente sim!

Fica mais claro conciliar esta questão quando colocamos a deformação em termos do já mencionado conceito de redução de área,  $A_r$ . Embora dito ser necessário um alongamento uniforme de 271,8 % para se atingir uma deformação verdadeira igual a 1, basta uma redução percentual equivalente de área de 63,2 %, que pode ser confirmado como segue:

$$\varepsilon = \ln \frac{100}{100 - A_r} = \ln \frac{100}{100 - 63,2} = \ln \frac{100}{36,8} = \ln 2,718 = 1$$

Assim, um material pode ser submetido a uma deformação verdadeira igual a 1 se ele sofrer uma redução de área percentual maior ou igual a 63 %.

**p. Algumas relações tensão-deformação úteis:**

a. Deformação verdadeira e deformação nominal:

$$n = \frac{(l_f - l_0)}{l_0}, \text{ ou}$$

$$\frac{l_f}{l_0} = 1 + n$$

e, como:

$$\varepsilon = \ln \frac{l_f}{l_0}, \text{ então,}$$

$$\varepsilon = \ln(1 + n), \text{ ou} \tag{A4.5.18}$$

$$e^\varepsilon = 1 + n$$

Assim, para uma extensão uniforme de 20 %,  $n = 0,2$  e,  $\varepsilon = 0,182$ . Para uma extensão de 0,2 %,  $n = 0,002$  e,  $\varepsilon = 0,002$ .

b. Tensão verdadeira e tensão nominal:

A definição matemática de tensão verdadeira é  $\sigma = L/A$ . Agora, considerando a invariabilidade do volume durante a deformação plástica, temos:  $A_i l_i = A_0 l_0$ .

Assim,

$$A_i = A_0 \frac{l_0}{l_i}$$

e

$$\sigma = \frac{L}{A_0} \frac{l_i}{l_0} \tag{A4.5.19}$$

Mas, como  $L/A_0 = S e l_i/l_0 = 1 + n$ , temos:

$$\sigma = S(1 + n) \tag{A4.5.20}$$

Na máxima carga, a equação (4.4.20), pode ser escrita como:

$$\sigma_u = S_u (1 + n_u) = S_u e^m \tag{A4.5.21}$$

(“e” base do logaritmo *neperiano*)

Como exemplo, uma amostra do aço *ASTM A 1020*, recozido (isento de tensões residuais), possui uma tensão última  $S_u = 60.000 \text{ (psi)} = 413 \text{ MPa}$  e, um valor de  $n_u = 0,25$ ; desta forma, ele tem uma tensão última verdadeira  $\sigma_u$  de  $60.000 \times 1,25 = 75.000 \text{ (psi)} = 517 \text{ MPa}$ .

c. Deformação linear e deformação de área:

Como visto em (a):

$$n = \frac{(l_x - l_0)}{l_0}, \text{ ou}$$

$$\frac{l_x}{l_0} = 1 + n$$

$$A_x l_x = A_0 l_0, \text{ ou}$$

$$\frac{l_x}{l_0} = \frac{A_0}{A_x} = R.$$

Assim:

$$\frac{A_0}{A_x} = 1 + n, \text{ ou } n = R - 1. \quad (\text{A4.5.22})$$

e, na fratura completa do corpo, sob tensão trativa:

$$\frac{A_0}{A_f} = 1 + n_f, \text{ ou} \quad (\text{A4.5.23})$$

$$n_f = R_f - 1.$$

d. Trabalho a frio percentual e redução de área:

Por definição, trabalho a frio (*cold work*) é:

$$W = \frac{A_0 - A_x}{A_0} \times 100, \text{ ou}$$

$$\frac{A_0}{A_x} = \frac{100}{100 - W}.$$

Como,

$$\frac{A_0}{A_x} = 1 + n,$$

Temos:

$$n = \frac{100}{100 - W} - 1, \text{ ou} \quad (A4.5.24)$$

$$n_f = \frac{100}{100 - W_f} - 1$$

e, para deformação na fratura, temos:

$$n_f = \frac{100}{100 - A_r} - 1, \text{ e} \quad (A4.5.25)$$

$$A_r = 100 - \frac{100}{n_f + 1}$$

e. Tensão de escoamento e trabalho a frio percentual:

$$S_y = \sigma_0 (\varepsilon_y)^m = \sigma_0 (\ln R)^m = \sigma_0 \left( \ln \frac{100}{100 - W} \right)^m \quad (A4.5.26)$$

f. Resistência à tração e trabalho a frio percentual:

$$(S_u)_w = S_u \frac{100}{100 - W} \quad (A4.5.27)$$

Em outras palavras, um material que tenha sido trabalhado à frio em 10 % terá uma tensão última após este trabalho a frio igual à sua tensão última no estado recozido vezes 1/0,9. Assim, um material que tenha uma tensão última no estado de alívio completo de tensões de 60.000 (psi) = 413 MPa terá uma tensão última após 10 % de trabalho a frio de:

$$(S_u)_{10} = 60,000 \frac{100}{100 - 90} = 60,000 \frac{1}{0,9} = 60,000 \cdot 1,111 = 66,600 \text{ (psi)} = 468 \text{ MPa}$$

Deve ser lembrado que, estes cálculos tem significado somente se o material do exemplo tenha deformação no estado da tensão última,  $n_u$ , maior do que 0,10.

g. Relação entre  $m$  e  $\varepsilon_u$ :

Consideremos agora uma curva Carga-deformação conforme figura 61.

O corpo de prova se alonga uniformemente, primeiro elasticamente depois plasticamente até que uma carga máxima é atingida. Neste ponto ocorre um estrangulamento local numa pequena porção do corpo de prova, fenômeno conhecido como “empescoamento” (*necking*). Quando este fenômeno ocorre, a carga cai do valor máximo continuamente na medida em que a área da região “empescoada” se trona cada vez menor, até que a fratura ocorra.

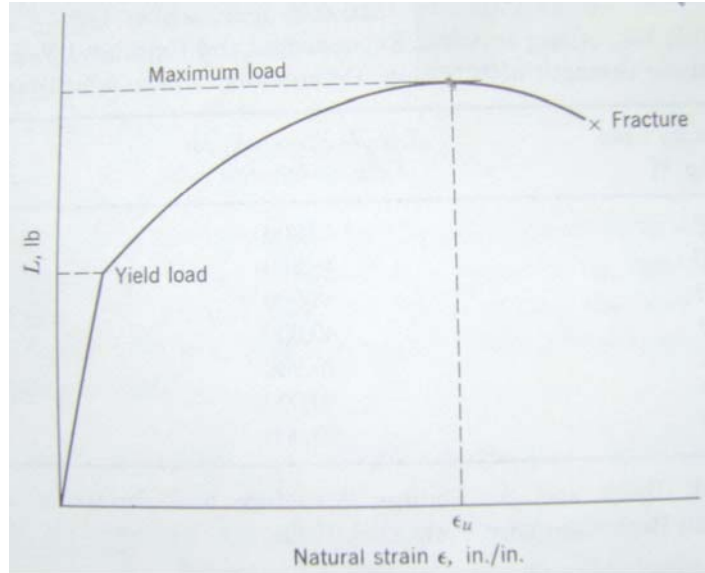


Figura 61: Curva carga – deformação verdadeira [25].

Esta análise pode ser iniciada lembrando que, a carga instantânea é igual ao produto da tensão local pela área instantânea:

$$L = \sigma_i A_i, \quad (\text{A4.5.28})$$

e, desde que  $\sigma = \sigma_0 \varepsilon^m$ , podemos reescrever (A4.4.28) como;

$$L = \sigma_0 \varepsilon^m \times A_i \quad (\text{A4.5.29})$$

Também, pela equação (4.4.7);

$$\varepsilon = \ln \frac{A_0}{A_i}, \text{ ou}$$

$$e^\varepsilon = \frac{A_0}{A_i}, \text{ assim,} \quad (\text{A4.5.30})$$

$$A_i = \frac{A_0}{e^\varepsilon}$$

Assim,

$$L = \sigma_0 A_0 \varepsilon^m e^{-\varepsilon} \quad (\text{A4.5.31})$$

Nós podemos agora diferenciar  $L$  com relação à deformação e igualar a zero uma vez que, na carga máxima, a derivada da curva carga-deformação é zero (figura 61). Assim, temos:

$$\frac{dL}{d\varepsilon} = -\sigma_0 A_0 (\varepsilon^m) (e^{-\varepsilon}) + \sigma_0 A_0 (\varepsilon^m) (e^{-\varepsilon}) m (\varepsilon^{m-1}) = 0$$

Cancelando os termos  $\sigma_0 A_0 e^{-\varepsilon}$ , a equação se reduz a  $\varepsilon^m = m(\varepsilon)^{m-1}$ . Uma vez que a deformação na carga máxima é  $\varepsilon_u$ , temos:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_u)^m &= m(\varepsilon_u)^{m-1}, \\ \div (\varepsilon_u)^m, \text{ nos dá,} \\ 1 &= m(\varepsilon_u)^{-1} \end{aligned}$$

e, finalmente;

$$m = \varepsilon_u \quad (\text{A4.5.32})$$

Desta forma, o expoente da equação de *encruamento* é numericamente igual ao valor da deformação verdadeira na carga máxima.

#### h. Relação entre $\sigma_0$ e propriedades elásticas do material:

Escrevendo a equação *tensão verdadeira – deformação verdadeira* como  $\sigma_0 = \sigma / \varepsilon^m$ , e usando para  $\sigma$  e  $\varepsilon$  os valores específicos de tensão e deformação com a resistência ao escoamento, obtemos:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_y}{(\varepsilon_y)^m} = \frac{\sigma_y}{(\sigma_y / E)^m} = \sigma_y^{1-m} E^m \quad (\text{A4.5.33})$$

Em geral, a região elástica se estende a deformações da ordem de  $10^{-3}$   $\mu\text{m}/\text{m}$ ; a região elástico-plástica reside na região de deformações entre  $10^{-3}$  e  $10^{-2}$   $\mu\text{m}/\text{m}$  e, a região de plasticidade e encruamento reside no intervalo  $10^{-2}$  a 1  $\mu\text{m}/\text{m}$ .

Uma vez que não muitos materiais reais têm curvas tensão-deformação “ideais” e, desde que a equação (4.4.33) foi derivada para um material “ideal”, ela não deve ser usada na determinação de  $\sigma_0$  para um material real a menos que nenhuma outra informação esteja disponibilizada além de  $S_y$ ,  $E$ ,  $m$  para o material em tela. Por outro lado, caso em que  $\mu_0$ ,  $S_y$ ,  $m$  e  $n_u$ , sejam conhecidos, então, calculando-se  $\sigma_y$  através de  $\sigma_y = \sigma_0 (\varepsilon_y)^m$  e comparando o valor calculado com o valor obtido experimentalmente para  $S_y$ , é possível determinar o quanto o material se aproxima do comportamento “ideal”.

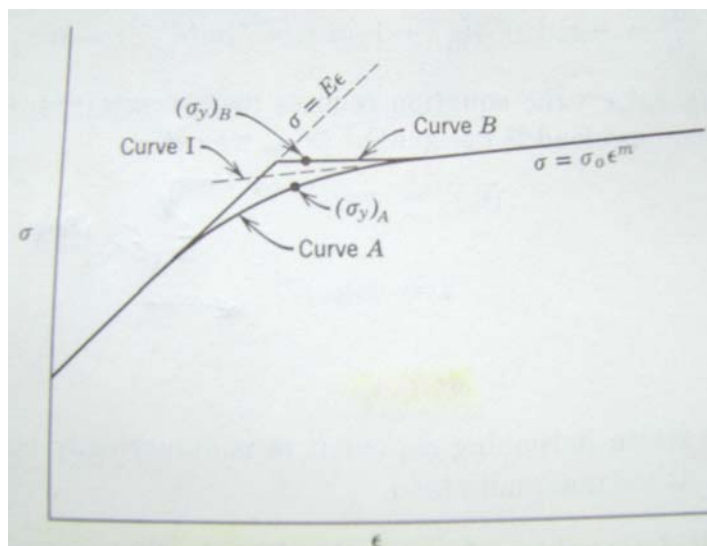


Figura 62: Representação esquemática de dois tipos extremos de curvas tensão-deformação verdadeiras em escala *log-log*. A curva A é o tipo menos comum, enquanto que a curva B é o tipo associado aos materiais que não tem tendência a apresentar o fenômeno “ponto de escoamento” (ver seção 4.4.1-g) [25].

i. Tensão última e tensão de escoamento ( $S_u/S_y$ ):

É fato bem conhecido que a relação  $S_u/S_y$  gira em torno de 1/2 a 5/8 para aços doces em geral. Para aços mais duros e frágeis pode chegar próximo de 1 enquanto que para os dúteis e doces esta razão se aproxima de 1/2.

Para os aços *API* de graus X 60 e X70 (os mais usados atualmente) estes valores giram em torno de 1,15 a 1,22.

Segundo a referência [25], os dados experimentais para aços tratados termicamente e isentos de tensões residuais, quando traçados juntos num mesmo sistema de coordenadas, apresentam um excelente ajuste de curva linear como segue:

$$S_y = (1.05S_u - 22.000) \cdot 6,89E - 3 \text{ MPa} \quad (\text{A4.5.33})$$

Este ajuste de curva pode ser encarado de outra maneira, ou seja, como sendo a linha reta que une os aços “mais fracos” aos “mais resistentes”.

O aço “mais fraco” seria um aço de muito baixo carbono com uma microestrutura essencialmente 100 % Ferrítica. Ele tem uma tensão última de 40.000 (*psi*)=276 MPa e uma tensão de escoamento de aproximadamente 20.000 (*psi*)=138 MPa. O “mais resistente” seria um aço de alto carbono, martensítico, com alívio de tensões, o qual tem uma tensão última de cerca de 400.000 (*psi*)=2760 MPa. Para um aço de tal resistência, tendo praticamente nenhuma ductilidade, sua tensão de escoamento é praticamente idêntica à sua tensão última.

Ainda estudando a equação geral do encruamento e substituindo  $\epsilon_u$ , obtemos o valor da tensão última verdadeira:

$$\sigma_u = \sigma_0 \varepsilon_u^m = \sigma_0 m^m \quad (\text{A4.5.34})$$

e, também;

$$\sigma_u = S_u (1 + n_u) = S_u e^m \quad (\text{A4.5.35})$$

combinando estas duas equações, temos:

$$S_u = \sigma_0 \left( \frac{m}{e} \right)^m \quad (\text{A4.5.36})$$

onde  $e$  é a base do logaritmo neperiano.

Se definirmos o limite de escoamento pela tensão resultante obtida quando o material é submetido a uma deformação plástica de 0,2 % (isto é, o limite elástico do material após ser submetido a um trabalho a frio de 0,2 % de deformação plástica), nós temos:

$$S_y = \sigma_0 (0,002)^m$$

e, desta forma;

$$\frac{S_u}{S_y} = \frac{\sigma_0 \left( \frac{m}{e} \right)^m}{\sigma_0 (0,002)^m} = \left( \frac{m}{0,002} \right)^m, \text{ ou} \quad (\text{A4.5.34})$$

$$\frac{S_u}{S_y} = (184m)^m$$

válida para  $m > 0,005$ . A tabela 3 apresenta valores da relação  $S_u/S_y$  para vários valores de  $m$ .

Tabela 3: Relação  $S_u/S_y$  para vários valores de  $m$ .

$m$	0,005	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60
$S_u/S_y$	1,000	1,12	1,34	1,64	2,05	2,60	3,33	5,55	9,60	16,80

j. Obtendo  $S_y$ ,  $m$ , e  $\sigma_0$  a partir de  $S_u$ ,  $n_u$ , e  $n_f$ :

Consideramos neste trabalho ser de vital importância o conhecimento das propriedades mecânicas dos materiais – especificamente dos aços carbono - em geral, uma vez que este conhecimento é requerido como requisito para uma avaliação de integridade uma vez determinada sua condição de trabalho. Por exemplo, o aço *ASTM A 1020* pode ser recozido, normalizado, tratado termicamente pelos diversos métodos disponíveis e trabalhado a frio numa variedade de percentuais. Tratar estes dados e suas combinações possíveis, mesmo que tabulados cuidadosamente, seria uma tarefa quase impossível de se executar de sorte a obtermos informações desejadas de determinados estados e grandezas intermediárias.



Outra maneira de se lidar com esta tarefa é determinarmos certas “propriedades fundamentais” e, através de relações analíticas e empíricas, obtermos outras grandezas derivadas. No tocante a propriedades tensométricas, segundo a referência [25], as grandezas  $S_u$ ,  $n_u$  e  $\varepsilon_f$  (tensão última, deformação nominal última e deformação verdadeira na fratura) são as propriedades fundamentais, a partir das quais todas as demais propriedades tensométricas podem ser obtidas.

Primeiramente, para se obter o expoente de encruamento, basta simplesmente converter a convencional deformação última para a deformação verdadeira na carga máxima, como segue:

$$m = \varepsilon_u = \ln(1 + n_u) \quad (\text{A4.5.35})$$

O valor numérico de  $\sigma_0$ , uma vez obtido  $m$ , pode ser obtido através da substituição da tensão última na equação do encruamento. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{\sigma_u}{(\varepsilon_u)^m} = \frac{\sigma_u}{(m)^m} = \frac{S_u(1+n_u)}{(m)^m}, \text{ ou, como} \\ e^m &= (1+n_u), \text{ temos :} \\ \sigma_0 &= S_u \left( \frac{e}{m} \right)^m, \end{aligned} \quad (\text{A4.5.36})$$

A tensão de escoamento “idealizada” com base no critério de 0,2 % de deformação plástica pode ser obtido facilmente pela substituição do valor 0,002 por  $\varepsilon$  na equação geral de encruamento:

$$S_y = \sigma_y = \sigma_0 (0,002)^m \quad (\text{A4.5.37})$$

## Anexo A.5

### A5.1. Representação de Curvas

A representação de uma curva como uma sucessão de trechos retos pode ser suficiente para várias aplicações. No entanto, curvas e superfícies complexas normalmente demandam uma maneira mais eficiente de representação. Tal representação é normalmente mais compacta que as formas discretas. Definir uma curva que passe por um conjunto determinado de pontos é um problema de *interpolação*, enquanto a definição de uma curva que passe próximo a um conjunto determinado de pontos é um problema de *aproximação*. Neste item o termo *ajustamento* de curva será usado para ambos os casos, pois freqüentemente, os dois problemas acontecem de forma combinada.

O número de pontos providos para a determinação de uma curva normalmente não é alto. O problema de ajustamento se resume a conectar estes pontos com curvas e exibi-los em uma densidade adequada ao meio de representação. Outra aplicação comum envolve a representação de dados experimentais, para exibição ou para reconhecimento automático de padrões. No reconhecimento de padrões, a descrição matemática do contorno de um objeto pode prover informação sobre uma classe à qual o objeto pertence. Uma primeira escolha para funções de ajuste de curva recai sobre funções polinomiais.

Seja  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  uma sucessão de pontos no plano. O polinômio de grau  $(n-1)$  que gera uma curva que passa por todos os pontos pode ser facilmente obtido por:

$$f(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_3 - x_n)}$$

A principal desvantagem dos polinômios reside na sua globalidade, ou seja, no fato de que alterações em qualquer um dos pontos afetam toda a curva bem como sua grande tendência a oscilações. A figura 63 ilustra este efeito oscilatório no ajuste de uma curva gerada por polinômio para 5 pontos definidos por:  $(0,0)$ ,  $(1,3)$ ,  $(2,0)$ ,  $(3,0)$ , e  $(4,0)$ .

Polinômios têm geralmente uma aplicação bastante específica, sendo o seu uso prático restrito a pequenos intervalos e a um número relativamente baixo de pontos de controle.

Funções de ajuste de curva com atuação local são mais práticas, uma vez que alterações em pontos de controle não se propagam por toda a curva. Ajustadores locais são também conhecidos como **curvas paramétricas**. Curvas paramétricas de segunda ordem apresentam geralmente pouca utilidade, pois as tangentes nos pontos de entrada e saída da

função devem ser obrigatoriamente iguais. Curvas paramétricas de terceira ordem, ou cúbicas são, no entanto, largamente utilizadas resultando em vários nomes familiares aos usuários de computação gráfica, tais como: *Splines*, *Bézier*, *B-Spline*, *Hermite* e *Catmull*. Neste item abordaremos algumas destas funções de ajuste de curva de maior interesse.

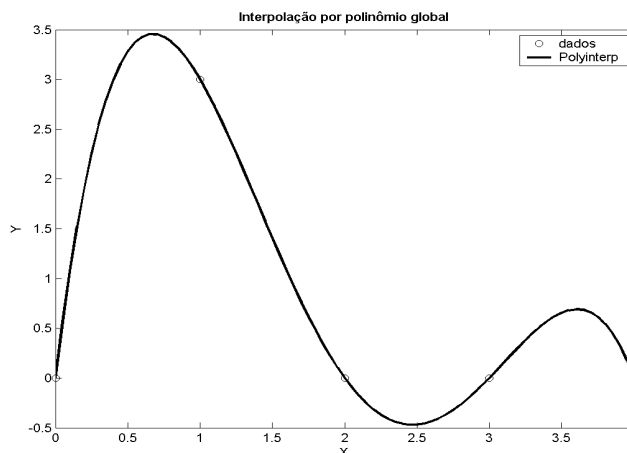


Figura 63: Efeito oscilatório no ajuste de curvas através de polinômios globais.

Interpolação então é o processo de determinar uma função que apresenta valores específicos em pontos especificados intercalados aos pontos medidos. Este item irá se concentrar em dois interpolantes semelhantes: O interpolante por partes baseado em *Splines* cúbicas (*piecewise cubic spline*), e o interpolante cúbico por partes denominado “formas preservadas” (*shape preserving*) de Hermite, denominado no ambiente Matlab® de *pchip*. [11] [12]

#### A5.1.1. Polinômio interpolador

Todos sabem que dois pontos determinam uma linha reta. Mais precisamente, dois pontos quaisquer no plano,  $(x_1; y_1)$  e  $(x_2; y_2)$ , com  $x_1 \neq x_2$ , determinam um único polinômio do 1º grau em  $x$  cujo gráfico passa através dos dois pontos. Há muitas fórmulas diferentes para o polinômio, mas todos conduzem à mesma linha reta. Generalizando para mais de dois pontos, isto é, dado  $n$  pontos no plano,  $(x_k; y_k); k = 1; n$ , com  $x_k$  distintos, há um único polinômio em  $x$ , de grau menor do que  $n$ , cujo gráfico passa através dos pontos. É mais fácil recordar que esse  $n$ , o número de pontos de dados, é também o número dos coeficientes, embora alguns dos coeficientes principais possam ser zero, da mesma forma que o seu grau pode também ser menor do que  $n-1$ . Novamente, há muitas fórmulas diferentes para o polinômio, mas todos eles definem a mesma função. Este polinômio é chamado o polinômio de interpolação porque ele reproduz exatamente os pontos dados:

$$P(x_k) = y_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Outros Polinômios, de menor grau, que apenas aproximam os pontos dados, não podem ser considerados polinômios interpoladores, mas somente polinômios de ajuste.

A forma mais compacta de representação de polinômios é a forma de *Lagrange*:

$$P(x) = \sum_k \left( \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k.$$

Há  $n$  termos na soma e  $n-1$  termos em cada produto, assim esta expressão define um polinômio de grau  $n-1$  no máximo. Se  $P(x)$  for avaliado em  $x = x_k$ , todos os produtos a não ser o  $k$ ésimo são iguais a zero. Além disso, o produto do  $k$ ésimo é igual a um, assim a soma é igual a  $y_k$  e as condições do interpolador são satisfeitas.

Por exemplo, considere a seguinte série de dados.

$$x = 0:3;$$

$$y = [-5 -6 -1 16];$$

O comando do *Matlab*<sup>®</sup>:

$$\text{disp}([x; y])$$

mostra

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & -6 & -1 & 16 \end{array}$$

A forma Lagrangeana do polinômio interpolador que trata estes dados é:

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-6)}(-5) + \frac{x(x-2)(x-3)}{(2)}(-6) \\ + \frac{x(x-1)(x-3)}{(-2)}(-1) + \frac{x(x-1)(x-2)}{(6)}(16).$$

Nós podemos ver que cada termo é do grau três, assim como a soma inteira tem o grau no máximo igual a três. Porque o termo principal não desaparece, o grau é realmente três. Além disso, se nós substituirmos os valores de  $x$  tais como  $x = 0; 1; 2$ , ou  $3$ , três dos termos desaparecem e o quarto produz o valor correspondente da série de valores dados. Os Polinômios não são usualmente representados sua forma Lagrangeana. Mais frequentemente, são escritos como:

$$x^3 - 2x - 5.$$

As potências simples de  $x$  são chamados monômios, e esta forma de apresentação de polinômios é chamada de forma de potencia.

Os coeficientes de um polinômio interpolador usando sua forma potencial,

$$P(x) = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + c_{n-1}x + c_n,$$

podem, em princípio, ser computados resolvendo um sistema de equações lineares simultâneas por qualquer método conhecido.

$$\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Nesta seção nós iremos descrever algumas rotinas do Matlab® que são implementações de vários algoritmos de interpolação. Todos seguem a seguinte sintaxe:

$$v = \text{interp}(x,y,u)$$

Os primeiros dois argumentos,  $x$  e  $y$ , são vetores de mesmo comprimento e definem os pontos de interpolação. O terceiro argumento,  $u$ , é um vetor dos pontos onde a função será interpolada. A saída  $v$  tem a mesma dimensão que  $u$  e seus elementos são:

$$v(k) = \text{interp}(x,y,u(k))$$

Nossa primeira função de interpolação, ***polyinterp***, é baseada na forma *Lagrangeana*. O código utiliza operações matriciais do Matlab® para avaliar os valores do polinômio nos valores de  $u$  simultaneamente.

Considere os seguintes pontos:

```
x=[0 1 2 3];
y=[-5 -6 -1 16];
u=(-.25:0.01:3.25);
```

```
%Polyinterp.m
function v = polyinterp(x,y,u)
x=input('entre valores do intervalo de X :');
y=input('entre valores do intervalo de Y :');
u=input('entre valores do intervalo u a interpolar:');
n = length(x);
v = zeros(size(u));
for k = 1:n
```

```

w = ones(size(u));
for j = [1:k-1 k+1:n]
w = (u-x(j))./(x(k)-x(j)).*w;
end
v = v + w*y(k);
end
plot(x,y,'o',u,v,'-')
> polyinterp

```

Produz o seguinte resultado:

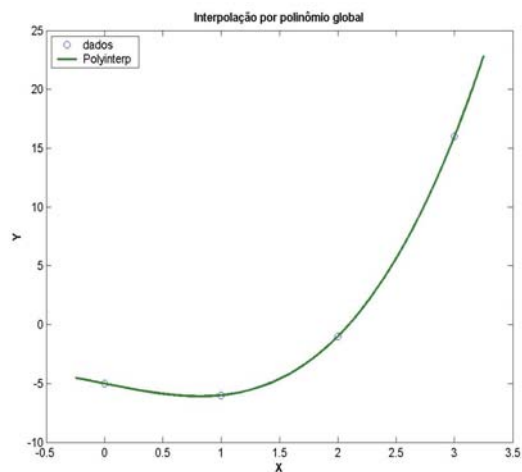


Figura 64: Interpolação por polinômio global. A rotina *Polyinterp*.

A função *Polyinterp* também funciona corretamente com variáveis simbólicas. Por exemplo, crie o seguinte comando:

$$\text{symx} = \text{sym}('x')$$

Então avalie e apresente graficamente a forma simbólica do polinômio interpolador com o seguinte comando:

$$P = \text{polyinterp}(x,y,\text{symx})$$

$$\text{pretty}(P)$$

A qual produz:

$$-5 \left(-\frac{1}{3}x + 1\right)\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)(-x + 1) - 6 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)(-x + 2)x$$

$$- \frac{1}{2}(-x + 3)(x - 1)x + \frac{16}{3}(x - 2)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)x$$

Esta expressão é um rearranjo da forma Lagrangeana do polinômio interpolador. A forma *Lagrangeana* pode ser simplificada usando o seguinte comando:

$$P = \text{simplify}(P)$$

Modifica  $P$  para a forma de potencia:

$$P = x^3 - 2x - 5$$

Aqui está outro exemplo, com um conjunto de dados que será doravante utilizado em outros métodos neste capítulo. A seqüência de comandos:

```
x = 1:6;
y = [16 18 21 17 15 12];

disp([x; y])

u = (.75:.05:6.25);

v = polyinterp(x,y,u);

plot(x,y,'o',u,v,'-');
```

produz o seguinte resultado:

1	2	3	4	5	6
16	18	21	17	15	12

e a figura 65 mostra o resultado gráfico desta interpolação.

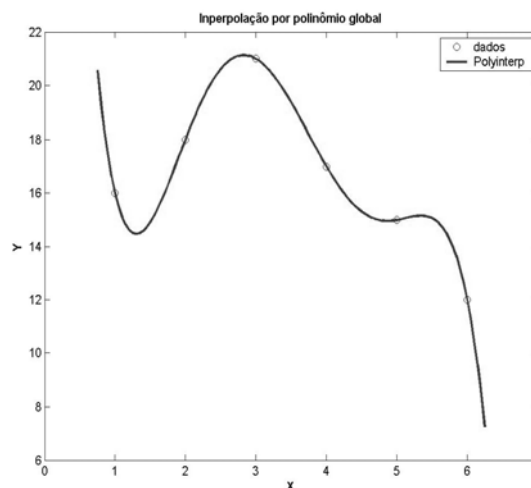


Figura 65: Interpolação por polinômio de grau pleno.

Já neste exemplo, com apenas seis pontos regularmente espaçados, nós podemos começar a ver as dificuldades básicas com a utilização de polinômios de interpolação. Nos intervalos intermediários, especialmente no primeiro e último subintervalo, a função apresenta excessiva variação. Ela ultrapassa as variações dos valores dados. Como resultado,

polinômios interpoladores de grau pleno são usados raramente para adequação de curvas. Sua aplicação reside basicamente na derivação de outros métodos numéricos.

### A5.1.2. Interpolação Linear por partes

Você pode criar um gráfico simples do conjunto de dados usados na seção anterior desenhando os dados duas vezes, a primeira com círculos em cada ponto dado e uma vez mais com linhas retas conectando estes pontos. Os seguintes comandos produzem a figura 66:

```
x = 1:6;
y = [16 18 21 17 15 12];
>plot(x,y,'o',x,y,'-')
```

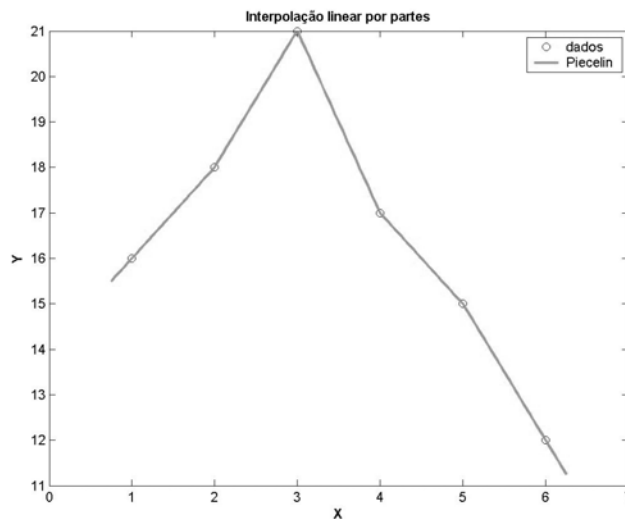


Figura 66: Interpolação linear por partes.

Para gerar as linhas, as rotinas gráficas do *Matlab*® usam interpolação linear por partes. O algoritmo apresenta o cenário para algoritmos mais sofisticados, como será visto adiante no desenvolvimento de dois interpolantes importantes. Três grandezas são requeridas. O índice interno  $k$  precisa ser determinado de forma que:

$$x_k \leq x < x_{k+1}.$$

A variável local,  $s$ , é dada por

$$s = x - x_k.$$

A primeira diferença dividida é:

$$\delta_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}.$$



Com estas quantidades em mãos, o interpolante é:

$$\begin{aligned} L(x) &= y_k + (x - x_k) \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \\ &= y_k + s\delta_k. \end{aligned}$$

Esta é claramente uma função linear que passa completamente através de  $(x_k; y_k)$  e  $(x_{k+1}; y_{k+1})$ . Os pontos  $x_k$  são chamados às vezes **breakpoints** ou simplesmente **breaks**. O interpolante linear por partes  $L(x)$  é uma função contínua de  $x$ , mas sua derivada primeira,  $L_0(x)$ , não é contínua. A derivada tem um valor constante,  $\delta_k$ , em cada subintervalo, porém dá saltos nos **breakpoints**. O interpolador linear por partes é executado em [piecelin.m](#). A entrada  $u$  pode ser um vetor dos pontos onde o interpolante deve ser avaliado, assim como o índice  $k$  é na verdade um vetor dos índices.

```
%Piecelin.m
function v = piecelin(x,y,u)
%PIECELIN Piecewise linear interpolation.
% v = piecelin(x,y,u) finds the piecewise linear L(x)
% with L(x(j)) = y(j) and returns v(k) = L(u(k)).
x=input('entre valores do intervalo de X :');
y=input('entre valores do intervalo de Y :');
u=input('entre valores do intervalo u a interpolar:');
% First divided difference
delta = diff(y)./diff(x);
% Find subinterval indices k so that x(k) <= u < x(k+1)
n = length(x);
k = ones(size(u));
for j = 2:n-1
k(x(j) <= u) = j;
end
% Evaluate interpolant
s = u - x(k);
v = y(k) + s.*delta(k);
plot(x,y,'o',u,v,'-')
```

### A5.1.3. Interpolação por polinômios cúbicos por parte de *Hermite*

A maioria das técnicas de interpolação mais efetivas são baseadas em polinômios cúbicos por partes [11] [12]. Seja  $h_k$  o comprimento do  $K_{ésimo}$  subintervalo:

$$h_k = x_{k+1} - x_k.$$

Então a primeira diferença dividida é:

$$\delta_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}.$$

Seja  $d_k$  a inclinação da derivada no ponto  $x_k$ :

$$d_k = P'(x_k).$$

Para o interpolante linear por partes,  $d_k = \square_{k-1}$  ou  $\square_k$ . Entretanto, isto não é necessariamente verdadeiro para interpolantes de maior ordem.

Considere a seguinte função no intervalo  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ , expressa em termos das variáveis locais  $s = x - x_k$  e  $h = h_k$ :

$$P(x) = \frac{3hs^2 - 2s^3}{h^3}y_{k+1} + \frac{h^3 - 3hs^2 + 2s^3}{h^3}y_k \\ + \frac{s^2(s-h)}{h^2}d_{k+1} + \frac{s(s-h)^2}{h^2}d_k.$$

Este é um polinômio cúbico em  $s$ , e por sua vez em  $x$ , que satisfaz quatro condições da interpolação, duas em função dos valores conhecidos e duas nos valores, possivelmente desconhecidos, das derivadas primeiras:

$$P(x_k) = y_k, \quad P(x_{k+1}) = y_{k+1}, \\ P'(x_k) = d_k, \quad P'(x_{k+1}) = d_{k+1}.$$

Funções que satisfazem estas condições de interpolação nas derivadas primeira são conhecidas como interpolantes *Hermitianos* ou interpolantes osculatórios, porque os interpolantes tocam nos pontos de interpolação (*osculari* significa *beijar* em Latim).

Caso em que ambos os valores sejam conhecidos, isto é, da função e de suas derivadas primeiras, num conjunto de **breakpoints**, então a interpolação por partes de *Hermite* pode reproduzir imediatamente aqueles dados.

Entretanto, se não se dispõe dos valores das suas derivadas nos breakpoints, as inclinações  $d_k$  deverão ser definidas de alguma maneira.

Das muitas possíveis maneiras de se determinar estes valores, nós iremos descrever dois, que são chamados no ambiente *Matlab*® de **pchip** e **spline**.

#### ***A5.1.4. Polinômio cúbico por partes com preservação de forma de Hermite (Shape-Preserving Piecewise Cubic)***

O acrônimo ***pchip*** consiste na abreviação de polinômio interpolador por partes de Hermite (do inglês “*piecewise cubic Hermite interpolating polynomial.*”). Embora possa parecer contraditório de se dizer, esta denominação não especifica qual dos inúmeros interpolantes está realmente sendo utilizado. De fato, interpolantes spline também são interpoladores cúbicos por partes de Hermite, porém com diferente definição das derivadas nos ***breaks***.

Nosso ‘***pchip***’ é um interpolante denominado ***shape-preserving***, por ser ‘visualmente agradável’ e foi incorporado no ambiente *Matlab*® recentemente.

A figura 67 mostra como ***pchip*** interpola nossos dados do exemplo.

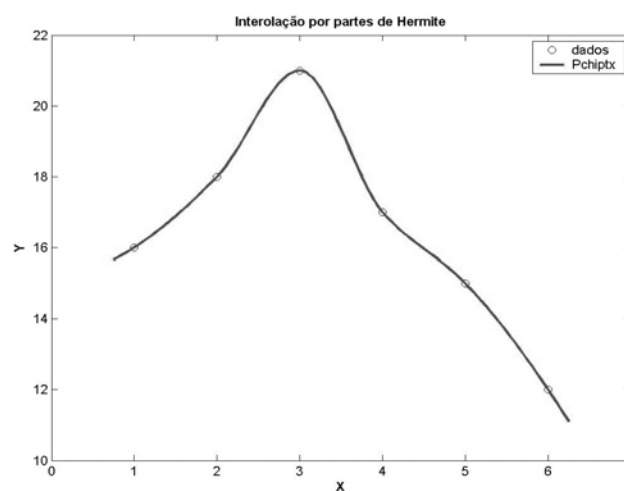


Figura 67: Interpolação com preservação de forma de *Hermite*.

A idéia chave é determinar as derivadas primeira (tangentes)  $d_k$  de tal maneira que os valores da função não ultrapassem os breakpoints, pelo menos localmente. Se  $\square_k$  e  $\square_{k-1}$  tem sinais opostos ou se qualquer um dos dois é igual a zero, então  $x_k$  é um mínimo ou máximo local e, desta forma, se fixa:

$$d_k = 0.$$

Isto é mostrado na primeira parte da figura 68. A linha sólida representa nosso interpolante linear definido anteriormente. Suas derivadas primeiras de ambos os lados do breakpoint possuem sinais opostos. Conseqüentemente, a linha tracejada possui inclinação

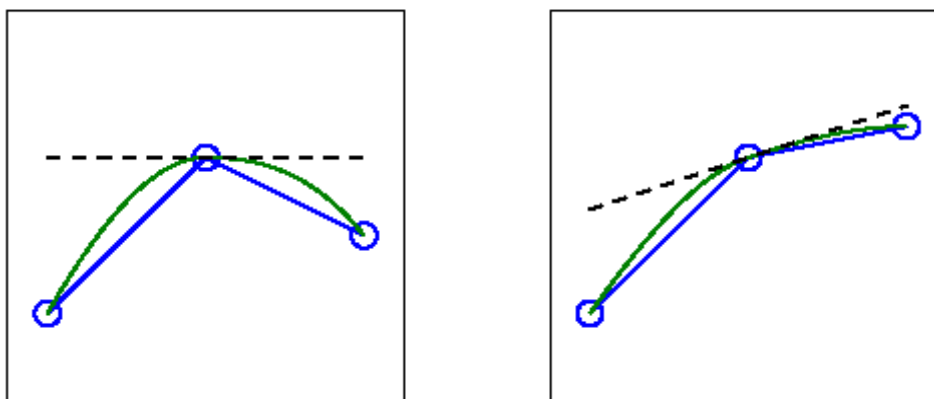
zero. A linha curva é o interpolante “*shape preserving*”, formado por dois diferentes polinômios cúbicos. Os dois polinômios cúbicos interpolam o valor central e ambas derivadas no ponto central são iguais a zero. Contudo há um salto nas segundas derivadas no ponto central.

Se  $\delta_k$  e  $\delta_{k-1}$  tem o mesmo sinal e, os dois subintervalos têm o mesmo comprimento, então  $d_k$  é tomado como a média harmônica das duas derivadas discretas.

$$\frac{1}{d_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\delta_{k-1}} + \frac{1}{\delta_k} \right)$$

Em outras palavras, no breakpoint, o recíproco da derivada do interpolante *Hermitiano* é a média dos recíprocos das inclinações – derivadas – do interpolante linear por partes em ambos os lados do ponto central.

Isto é mostrado na segunda parte da figura 68.



(a)  $\delta_k$  e  $\delta_{k-1}$  com sinais contrários

(b)  $\delta_k$  e  $\delta_{k-1}$  com mesmo sinal

Figura 68: Exemplos de tangentes para Pchip.

Considere que, no ponto central, o recíproco da inclinação do interpolante linear varia de 1 para 5. O recíproco da inclinação da linha tracejada é igual a 3, a média de 1 e 5. O interpolante “*shape-preserving*” é formado por dois polinômios cúbicos que interpolam o valor central e que apresenta inclinação igual a 1/3 no local. Uma vez mais, há um salto na segunda derivada no ponto central. Mais tarde esta característica irá determinar a escolha pelos interpoladores *Splines* cúbicos que, por não serem sensíveis a estes ‘saltos’, são mais bem indicados para o cálculo das curvaturas em cada ponto.

Se  $\delta_k$  e  $\delta_{k-1}$  tiverem o mesmo sinal, mas os subintervalos têm comprimentos diferentes, então  $d_k$  é determinada como a média harmônica ponderada, cujos pesos são determinados pelos comprimentos dos subintervalos a montante e a jusante do ponto central, como segue:

$$\frac{w_1 + w_2}{d_k} = \frac{w_1}{\delta_{k-1}} + \frac{w_2}{\delta_k},$$

Onde:

$$w_1 = 2h_k + h_{k-1}, \quad w_2 = h_k + 2h_{k-1}.$$

Isto define os valores das derivadas nos *breakpoints* intermediários, mas as derivadas em  $d_1$  e  $d_n$  nos pontos inicial e final respectivamente são determinadas por uma análise unilateral um pouco diferente. Os detalhes se encontram na rotina *pchiptx.m* mais adiante.

### A5.1.5. Splines cúbicas

Outra função interpolante cúbica por partes é a “*spline* cúbica”. O termo ‘*spline*’ refere-se a um antigo instrumento utilizado em desenho e em traçado naval. Trata-se de uma esbelta tira de madeira, plástico, ou outro material flexível, que é alinhada com pontos dados – *breakpoints* – e define uma suave curva entre seus subintervalos. Fisicamente, a ‘*spline*’ minimiza a energia potencial sujeitada pelos pontos de restrição dados ou, em outras palavras, “*traça o caminho de menor impedância entre os pontos dados*”. [wickpaedia]

A correspondente *spline* matemática tem obrigatoriamente que ter as segundas derivadas contínuas e satisfazer as restrições determinadas pelos pontos de controle ou breakpoints. Alguns autores também se referem aos breakpoints como ‘*nós*’.

O mundo ‘*splines*’ estende-se muito além do básico interpolante unidimensional, cúbico, ‘*spline*’ que se está descrevendo aqui. Existem interpolantes multidimensionais, de ordem mais alta, com *breaks* variáveis e também ‘*splines*’ para ajuste de curvas. Uma referencia importante para, tanto o tratamento matemático como para o desenvolvimento de programação, é o livro “*A practical guide to splines*” de Carl de Boor. De Boor é também o autor da função ‘*spline*’ e do ‘*spline tool box*’ para o ambiente Matlab®.

A figura 69 mostra um conjunto de dados interpolados por uma *spline* interpolando os dados de nosso exemplo.

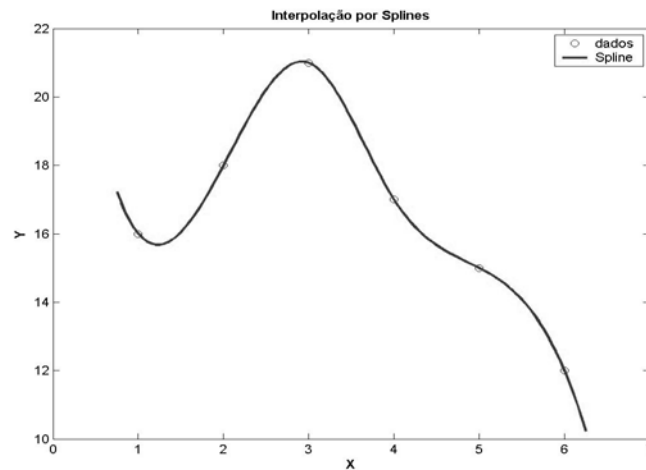


Figura 69: Exemplo de interpolação por Splines.

A primeira derivada  $P'(x)$  da função cúbica por partes é definida por diferentes formulações de cada lado do nó  $x_k$ . Ambas fornecem o mesmo resultado numérico para  $d_k$  no nó, assim  $P'(x)$  é contínua.

No  $k$ ésimo subintervalo, é uma função linear de  $s = x - x_k$ .

$$P''(x) = \frac{(6h - 12s)\delta_k + (6s - 2h)d_{k+1} + (6s - 4h)d_k}{h^2}.$$

Se  $x = x_k$ ,  $s = 0$  e:

$$P''(x_{k+}) = \frac{6\delta_k - 2d_{k+1} - 4d_k}{h_k}.$$

O sinal + em  $x_{k+}$  indica que esta é uma derivada pela direita. Se  $x = x_{k+1}$ ,  $s = h_k$  e:

$$P''(x_{k+1}-) = \frac{-6\delta_k + 4d_{k+1} + 2d_k}{h_k}.$$

No  $(k-1)$ ésimo subintervalo,  $P''(x)$  é dado por uma formulação similar envolvendo  $\square_{k-1}$ ,  $d_k$  e  $d_{k-1}$ . No nó  $x_k$ , se obtém :

$$P''(x_{k-}) = \frac{-6\delta_{k-1} + 4d_k + 2d_{k-1}}{h_{k-1}}.$$

Como foi requerido que  $P''(x)$  fosse contínua nos breakpoints  $x = x_k$ , significa que:

$$P''(x_{k+}) = P''(x_{k-}).$$

Isto conduz à seguinte condição:

$$h_k d_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k) d_k + h_{k-1} d_{k+1} = 3(h_k \delta_{k-1} + h_{k-1} \delta_k).$$

Se os nós são espaçados igualmente, de forma que  $h_k$  não depende de  $k$ , a expressão acima se torna, colocando  $h_k = h_{k-1} = h$  em evidência:

$$d_{k-1} + 4d_k + d_{k+1} = 3\delta_{k-1} + 3\delta_k.$$

Como nossos outros interpolantes, as inclinações  $d_k$  das ‘spline’ são intimamente relacionadas com as diferenças  $\delta_k$ . no caso das ‘spline’, eles são uma espécie de média móvel dos  $\delta_k$ ’s.

A abordagem precedente pode ser aplicada a cada nó intermediário  $x_k$ ,  $k = 2 : n-1$ , para dar  $n-2$  equações envolvendo os ‘ $n$ ’  $d_k$  desconhecidos. Da mesma forma que no caso do *pchip*, uma abordagem diferente deve ser utilizada nos extremos do intervalo. Uma eficaz estratégia é conhecida como “nó-a-nó”. A idéia é utilizar um polinômio cúbico somente nos primeiros dois subintervalos  $x_1 \leq x \leq x_3$ , e nos últimos dois subintervalos  $x_{n-2} \leq x \leq x_n$ . Neste caso,  $x_2$  e  $x_{n-1}$  não são considerados como nós. Se os nós são igualmente espaçados com todos os  $h_k = 1$ , conduz a:

$$d_1 + 2d_2 = \frac{5}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2$$

e também:

$$2d_{n-1} + d_n = \frac{1}{2}\delta_{n-2} + \frac{5}{2}\delta_{n-1}.$$

Os detalhes do tratamento dos  $d_k$  no caso de espaçamento não uniforme será visto na rotina *splinetx.m* mais adiante. Com as condições de contorno dos extremos do intervalo consideradas, se tem um sistema de  $n$  equações lineares e  $n$  incógnitas.

$$Ad = r.$$

O vetor das inclinações desconhecidas é:

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

A matriz dos coeficientes  $A$  é tridiagonal:





Uma vez que a maioria dos elementos da matriz  $A$  é igual a zero, é apropriado armazenar a mesma como uma estrutura esparsa (*sparse*). O operador ‘*barra invertida*’ pode então tirar vantagem da estrutura *tridiagonal* e resolver o sistema de equações lineares com economia de tempo e computacional.

A figura 70 compara o interpolante ‘*spline*’  $s(x)$  com o interpolante *pchip*  $p(x)$ . A diferença entre as funções é quase imperceptível. A primeira derivada *spline*,  $s'(x)$ , é suave, enquanto a primeira derivada do *pchip*,  $p'(x)$ , é contínua, porém apresenta ‘*vincos*’ ou ‘*ângulos agudos*’ (*kinks*) em alguns nós. A segunda derivada *spline*  $s''(x)$  é contínua, enquanto a segunda derivada *pchip*  $p''(x)$  apresenta saltos nos nós. Por serem ambas as funções polinômios cúbicos por partes, suas terceiras derivadas,  $s'''(x)$  e  $p'''(x)$ , são constantes por partes. O fato da  $s'''(x)$  apresentar o mesmo valor nos dois primeiros intervalos e nos dois últimos reflete a condição ‘*nó-a-nó*’ imposta nas extremidades do intervalo, como falado anteriormente.

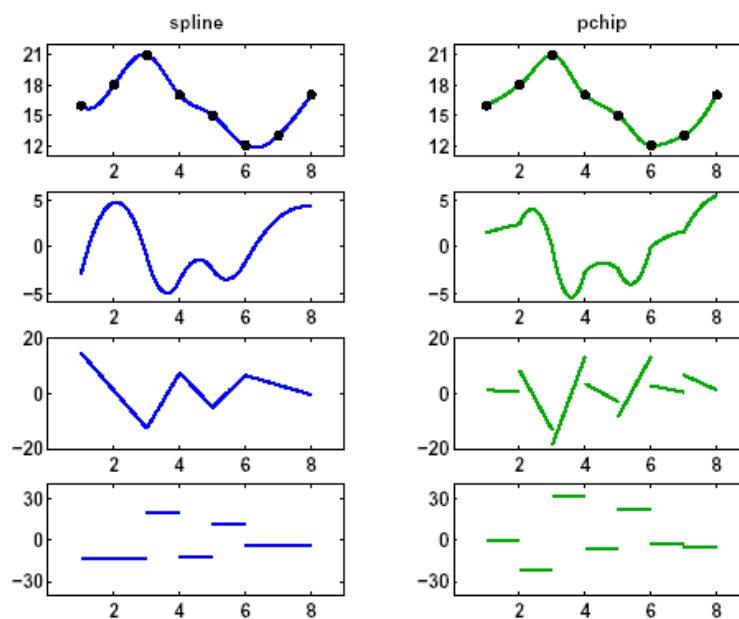


Figura 70: Interpolantes *Spline* e *Pchip* e suas três primeiras derivadas.

#### A5.1.6. As rotinas *pchiptx*, *splinetx*

As rotinas *pchiptx* e *splinetx* são ambas baseadas no interpolador cúbico por partes de *Hermite*. No  $k$ ésimo subintervalo, o interpolador é dado pela seguinte expressão:

$$P(x) = \frac{3hs^2 - 2s^3}{h^3}y_{k+1} + \frac{h^3 - 3hs^2 + 2s^3}{h^3}y_k + \frac{s^2(s-h)}{h^2}d_{k+1} + \frac{s(s-h)^2}{h^2}d_k,$$

Onde  $s=x-x_k$  e  $h=h_k$ . As duas funções diferem na maneira pela qual avaliam as derivadas  $d_k$ . Uma vez computadas estas derivadas, o interpolante pode ser eficientemente avaliado usando a forma de potencia da variável local  $s$ .

$$P(x) = y_k + sd_k + s^2 c_k + s^3 b_k,$$

Onde os coeficientes dos termos quadrático e cúbico são:

$$c_k = \frac{3\delta_k - 2d_k - d_{k+1}}{h},$$

$$b_k = \frac{d_k - 2\delta_k + d_{k+1}}{h^2}.$$

A seguir apresentamos a primeira parte da rotina *pchiptx*. Ela chama uma subfunção interna para computar os valores das derivadas primeiras. Então computa os demais coeficientes, encontra um vetor dos índices do intervalo, e avalia os interpolantes. Após o preâmbulo, esta parte do código de programação é a mesma para a rotina *splinetx*.

```
function v = pchiptx(x,y,u)
%PCHIPTX Piecewise cubic Hermite interpolation.
% v = pchiptx(x,y,u) finds the shape-preserving piecewise
% P(x), with P(x(j)) = y(j), and returns v(k) = P(u(k)).
%
% See PCHIP, SPLINETX.
% First derivatives
x=input('entre valores do intervalo de X :');
y=input('entre valores do intervalo de Y :');
u=input('entre valores do intervalo u a interpolar:');
h = diff(x);
delta = diff(y)./h;
d = pchipslopes(h,delta);
% Piecewise polynomial coefficients
n = length(x);
c = (3*delta - 2*d(1:n-1) - d(2:n))./h;
b = (d(1:n-1) - 2*delta + d(2:n))./h.^2;
% Find subinterval indices k so that x(k) <= u < x(k+1)
k = ones(size(u));
for j = 2:n-1
k(x(j) <= u) = j;
end
```

```

% Evaluate interpolant
s = u - x(k);
v = y(k) + s.*(d(k) + s.*(c(k) + s.*b(k)));
plot(x,y,'o',u,v,'-');

```

O código para computar as inclinações das derivadas de pchip utiliza uma média harmônica ponderada nos breakpoints interiores e uma formulação unilateral nos pontos inicial e final, como já mencionado anteriormente.

```

function d = pchipslopes(h,delta)
% PCHIPSLOPES Slopes for shape-preserving Hermite cubic
% pchipslopes(h,delta) computes d(k) = P'(x(k)).
% Slopes at interior points
% delta = diff(y)./diff(x).
% d(k) = 0 if delta(k-1) and delta(k) have opposites
% signs or either is zero.
% d(k) = weighted harmonic mean of delta(k-1) and
% delta(k) if they have the same sign.
n = length(h)+1;
d = zeros(size(h));
k = find(sign(delta(1:n-2)).*sign(delta(2:n-1))>0)+1;
w1 = 2*h(k)+h(k-1);
w2 = h(k)+2*h(k-1);
d(k) = (w1+w2)./(w1./delta(k-1) + w2./delta(k));
% Slopes at endpoints
d(1) = pchipend(h(1),h(2),delta(1),delta(2));
d(n) = pchipend(h(n-1),h(n-2),delta(n-1),delta(n-2));

```

```

function d = pchipend(h1,h2,dell1,dell2)
% Noncentered, shape-preserving, three-point formula.
d = ((2*h1+h2)*dell1 - h1*dell2)/(h1+h2);
if sign(d) ~= sign(dell1)
d = 0;
elseif (sign(dell1)~=sign(dell2))&(abs(d)>abs(3*dell1))
d = 3*dell1;
end

```

A rotina *splinetx* computa as inclinações das derivadas primeiras através da resolução de um sistema tridiagonal de equações lineares simultâneas, como falado anteriormente.

```

function v = splinetx(x,y,u)
%SPLINEX Piecewise cubic Hermite interpolation.
% v = splinetx(x,y,u) finds the cubic spline piecewise
% S(x), with S(x(j)) = y(j), and returns v(k) = S(u(k)).
%
% See PCHIP, SPLINETX.
% First derivatives
x=input('entre valores do intervalo de X :');
y=input('entre valores do intervalo de Y :');
u=input('entre valores do intervalo u a interpolar:');
h = diff(x);
delta = diff(y)./h;
d = splineslopes(h,delta);
% Piecewise polynomial coefficients
n = length(x);
c = (3*delta - 2*d(1:n-1) - d(2:n))./h;
b = (d(1:n-1) - 2*delta + d(2:n))./h.^2;
% Find subinterval indices k so that x(k) <= u < x(k+1)
k = ones(size(u));
for j = 2:n-1
k(x(j) <= u) = j;
end
% Evaluate interpolant
s = u - x(k);
v = y(k) + s.*(d(k) + s.*(c(k) + s.*b(k)));
plot(x,y,'o',u,v,'r-');

```

```

function d = splineslopes(h,delta);
% SPLINESLOPES Slopes for cubic spline interpolation.
% splineslopes(h,delta) computes d(k) = S'(x(k)).
% Uses not-a-knot end conditions.
% Diagonals of tridiagonal system
n = length(h)+1;
a = zeros(size(h)); b = a; c = a; r = a;
a(1:n-2) = h(2:n-1);
a(n-1) = h(n-2)+h(n-1);

```

```

b(1) = h(2);
b(2:n-1) = 2*(h(2:n-1)+h(1:n-2));
b(n) = h(n-2);
c(1) = h(1)+h(2);
c(2:n-1) = h(1:n-2);
% Right-hand side
r(1) = ((h(1)+2*c(1))*h(2)*delta(1)+ ...
h(1)^2*delta(2))/c(1);
r(2:n-1) = 3*(h(2:n-1).*delta(1:n-2)+ ...
h(1:n-2).*delta(2:n-1));
r(n) = (h(n-1)^2*delta(n-2)+ ...
(2*a(n-1)+h(n-1))*h(n-2)*delta(n-1))/a(n-1);
% Solve tridiagonal linear system
d = a\r;

```

### A5.1.7. Conclusões

Na figura 71 é mostrado o resultado dos interpolantes analisando o mesmo conjunto de dados do exemplo

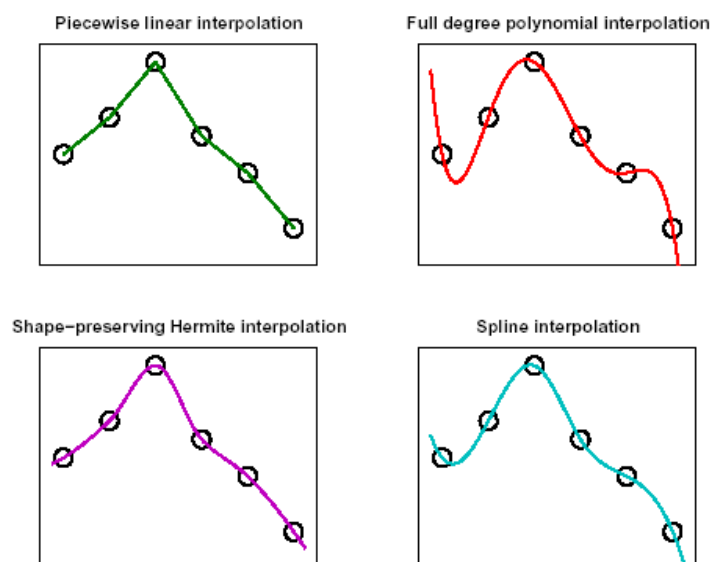


Figura 71: Comparação dos quatro interpolantes.

A figura 71 também ilustra comparativamente características tais como a suavidade do interpolante e uma propriedade, algo subjetiva, que poderia ser chamada como *monotonicidade local* ou ‘*preservação da forma*’ (*shape preservation*).

O interpolador por partes linear está num outro extremo. Ele não apresenta qualquer suavidade. Ele é contínuo, porém apresenta saltos em sua derivada primeira. Por outro lado, ele preserva a monotonicidade local dos pontos dados. Ela nunca os ultrapassa (*overshoots*) e, permanece crescendo ou decrescendo ou mesmo constante nos mesmos subintervalos em que os pontos dados assim o fazem.

O interpolante polinomial de grau pleno ou global, está em outro extremo. Ele é diferenciável indefinidamente segundo seu grau, contudo, ele frequentemente falha em preservar a forma, particularmente próximo às extremidades do intervalo de dados.

Os interpolantes *pchip* e *spline* situam-se de forma intermediária entre estes dois extremos. *Spline* é mais suave que *pchip*. O *spline* tem duas derivadas contínuas, enquanto *pchip* tem somente uma. Descontinuidades na segunda derivada implicam em descontinuidades de curvaturas – e curvaturas são a espinha dorsal do presente trabalho. O olho humano é capaz de detectar grandes saltos em curvaturas em gravuras ou peças mecânicas feitas em máquinas ferramentas programadas por controle numérico. Por outro lado, *pchip* garante esta característica de “*monotonicidade local*”, enquanto *spline* não pode garantir.

Finalmente, a figura 72 mostra os quatro interpolantes analisados neste capítulo num mesmo *frame* para, de forma pictórica, auxiliar a consolidar as observações acima.

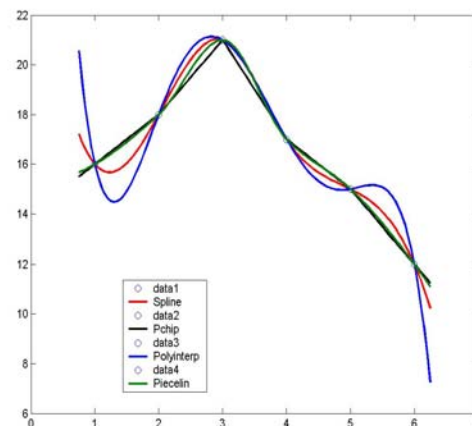


Figura 72: Os quatro interpolantes num mesmo frame para comparação.

## A5.2. Determinação da interpolação biquadrática.

### A5.2.1. Pressupostos:

- São conhecidos os valores  $Z_{ij}$  dispostos em uma malha regular em  $X$  e  $Y$ , conforme figura 73.
- Os passos  $px$  e  $py$  são iguais e constantes em toda a malha.

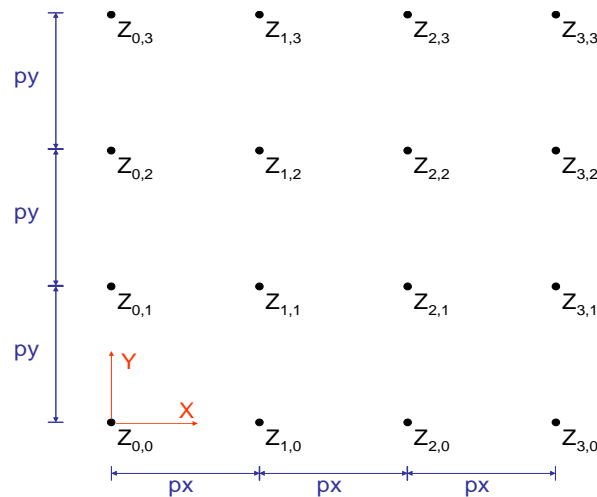


Figura 73: Levantamento planialtimétrico  $Z_{ij}(x,y)$ .

### A5.2.2. Interpolante 1 D

Como passo intermediário para desenvolver a equação de interpolação 2D, será desenvolvida a equação para interpolação quadrática 1D a partir de três pontos regularmente espaçados, representados na figura A5.2.1  $(X_{i-1}, Z_{i-1})$ ,  $(X_i, Z_i)$  e  $(X_{i+1}, Z_{i+1})$ . Procura-se a função  $Z(X)$  que interpola  $Z$  a partir de um valor dado de  $X$  de forma que  $X_{i-1} \leq X \leq X_{i+1}$ .

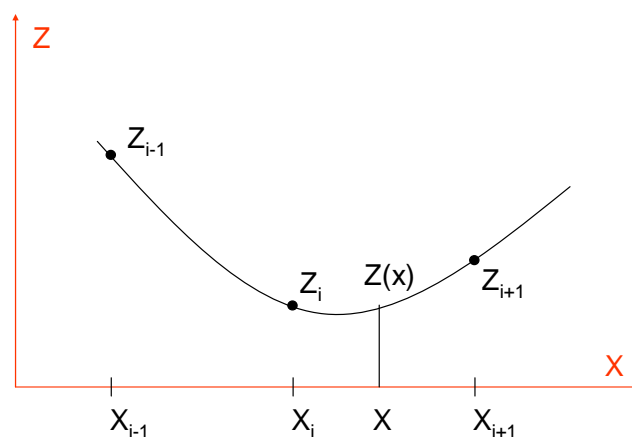


Figura 74: Interpolação 1D.

Para interpolar o valor de  $Z$ , defina antes a coordenada normalizada  $x$  como:

$$x = \frac{X - X_i}{px} \quad (\text{A5.2.1})$$

Note que para os pontos  $X_{i-1}$ ,  $X_i$  e  $X_{i+1}$  os valores de  $x$  são respectivamente  $-1$ ,  $0$  e  $1$ .

Os valores de  $Z$  são interpolados por:

$$Z(x) = \frac{(x-1)x}{2} Z_{i-1} - (x-1)(x+1) Z_i + \frac{(x+1)x}{2} Z_{i+1} \quad (\text{A5.2.2})$$

Exemplo A5.2.1:

$$Z_{i-1} = 4 \quad Z_i = 1 \quad Z_{i+1} = 2$$

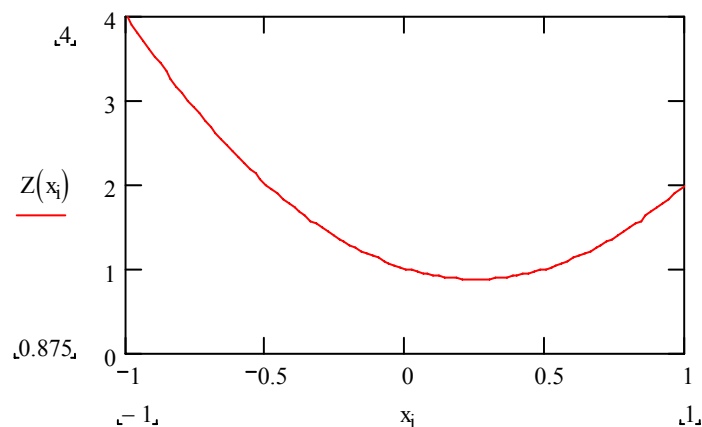


Figura 75: : Resultado da Interpolação 1D.

### A5.2.3. Interpolação 2D

Serão usadas as seguintes coordenadas normalizadas:

$$x = \frac{X - X_i}{px} \quad \text{e} \quad y = \frac{Y - Y_i}{py} \quad (\text{A5.2.3})$$

Considerando que os valores de  $Z$  estão disponíveis para o ponto “ $Z_{ij}$  e seus oito vizinhos”:



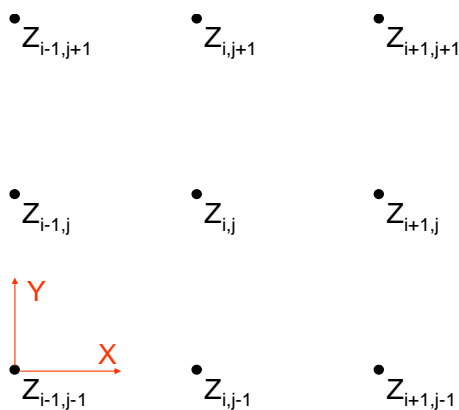


Figura 76: A matriz “pivô  $Z_{ij}$  e seus 8 vizinhos”.

A equação de interpolação **2D** é:

$$\begin{aligned}
 Z(x, y) = & \frac{(x-1)x(y-1)y}{4} Z_{i-1,j-1} + \frac{(x-1)(x+1)(y-1)y}{-2} Z_{i,j-1} + \frac{(x+1)x(y-1)y}{4} Z_{i+1,j-1} + \\
 & + \frac{(x-1)x(y-1)(y+1)}{-2} Z_{i-1,j} + \frac{(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)}{1} Z_{i,j} + \frac{(x+1)x(y-1)(y+1)}{-2} Z_{i+1,j} \quad (A5.2.4) \\
 & + \frac{(x-1)x(y+1)y}{4} Z_{i-1,j+1} + \frac{(x-1)(x+1)(y+1)y}{-2} Z_{i,j+1} + \frac{(x+1)x(y+1)y}{4} Z_{i+1,j+1}
 \end{aligned}$$

**Exemplo A5.2.2:** Para os seguintes pontos, usar a expressão (A5.2.4) para determinação dos traços de plano e reconstrução da superfície:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

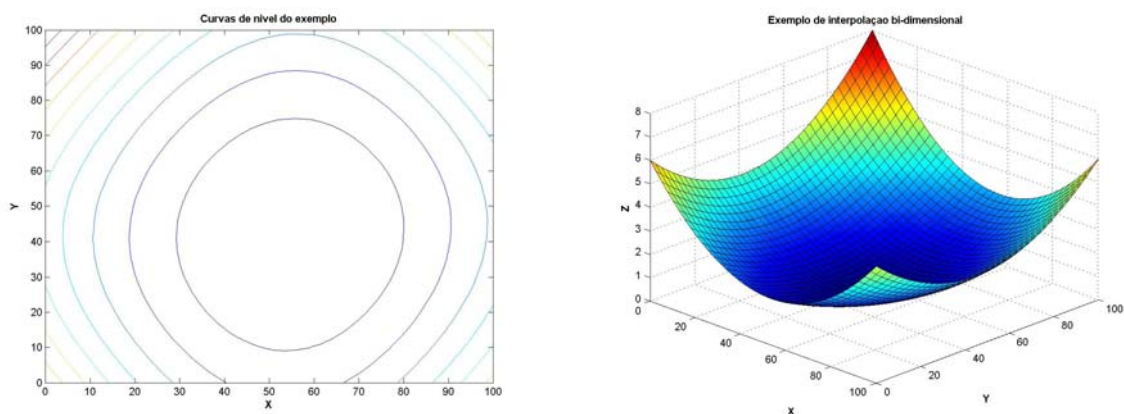


Figura 77: Curvas de nível e superfície reconstruída através do método AIMCODE.

**A5.2.4. Determinação do perfil da função em uma dada direção:**

Este ponto é uma das partes principais da metodologia desenvolvida neste trabalho. Para maior clareza, como enfatizado na introdução, *mossas lisas* e *“bem comportadas”* são raramente encontradas na prática. Não é muito difícil de imaginar que, sendo a maioria

esmagadora das mossas decorrentes do assentamento da tubulação sobre rochas ou terreno mais rígido do que seu entorno, e que rochas, não são necessariamente um ‘domo esférico’, nem se encontram alinhadas com o duto a tal ponto de produzir mossas conforme os modelos usualmente utilizados.

Para determinação do perfil da função em uma dada direção  $\square$  se deve por conveniência criar uma notação paramétrica, como segue:

Seja a direção dada por  $\theta$  (radianos). Defina a variável  $t$  no domínio  $-1 \leq t \leq 1$ . O perfil na direção dada por  $\theta$  é calculado por:

$$Pz(t, \theta) = Z(t \cdot \cos \theta, t \cdot \sin \theta) \quad (\text{A5.2.5})$$

**Exemplo A5.2.3:** Usando os mesmos dados do exemplo anterior, traçar os traços de plano a  $0^\circ$  e a  $30^\circ$ .

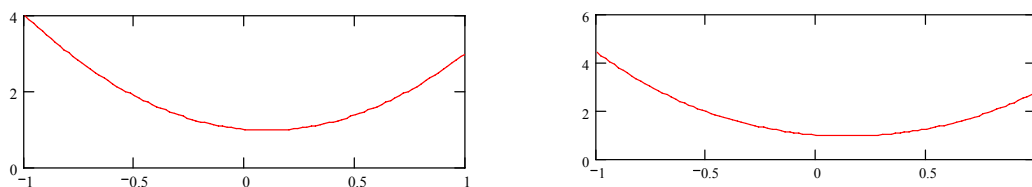


Figura 78: (a) cisalhamento a  $0$  rad. (b) cisalhamento a  $(\pi/6)$   $30^\circ$ .

#### A5.2.5. Derivada segunda direcional: [7]

Como visto no capítulo 3, a metodologia proposta neste trabalho se baseia, em parte, na determinação das **curvaturas principais** com base nas técnicas da **Geometria Diferencial**, no caso, para estimativa das componentes das deformações de flexão.

Antes de prosseguirmos, vamos relembrar o conceito numérico de derivadas primeira e segunda pela diferença central, com dois pontos. [7]

A definição formal da derivada da função  $f(x)$  é:

$$f'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x - \Delta)}{2\Delta} \quad (\text{A5.2.6})$$

A derivada também pode ser calculada numericamente de forma aproximada pelas diferenças finitas centrais com dois pontos, como segue: [7]

$$f'(x) \cong \frac{f(x + \Delta/2) - f(x - \Delta/2)}{\Delta} \quad (\text{A5.2.7})$$

Neste caso  $\Delta$  é um valor pequeno, não nulo. Quanto menor  $\Delta$ , melhor é a aproximação.

A segunda derivada também pode ser calculada numericamente de forma aproximada a partir de valores da primeira derivada. É usada a seguinte expressão:

$$f''(x) \cong \frac{f'(x + \Delta/2) - f'(x - \Delta/2)}{\Delta} \quad (\text{A5.2.8})$$

O primeiro termo do numerador da equação (A5.2.8) é a primeira derivada calculada no ponto  $x + \Delta/2$ , que também pode ser calculada numericamente de forma aproximada. Para isso, aplica-se a equação (2) no ponto  $x + \Delta/2$ :

$$f'(x + \Delta/2) \cong \frac{f(x + \Delta/2 + \Delta/2) - f(x + \Delta/2 - \Delta/2)}{\Delta} = \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta} \quad (\text{A.5.2.9})$$

De forma análoga:

$$f'(x - \Delta/2) \cong \frac{f(x - \Delta/2 + \Delta/2) - f(x - \Delta/2 - \Delta/2)}{\Delta} = \frac{f(x) - f(x - \Delta)}{\Delta} \quad (\text{A5.2.10})$$

Substituindo as equações (A5.2.10) e (A5.2.9) na (A5.2.8):

$$f''(x) \cong \frac{\frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta} - \frac{f(x) - f(x - \Delta)}{\Delta}}{\Delta} = \frac{f(x + \Delta) - 2f(x) + f(x - \Delta)}{\Delta^2} \quad (\text{A5.2.11})$$

A equação (A5.211) calcula o valor aproximado para a segunda derivada a partir de valores discretos de  $f(x)$ . Também aqui, do ponto de vista matemático, quanto menor  $\Delta$ , melhor será a aproximação. Do ponto de vista numérico não é conveniente usar valores muito pequenos porque os erros de arredondamento numérico passam a crescer de importância.

#### A5.2.6. Cálculo da derivada segunda direcional

Pode ser calculada numericamente na direção  $\theta$  a partir da seguinte expressão:

$$Dz(\theta) = \frac{Pz(\Delta, \theta) - 2Pz(0, \theta) + Pz(-\Delta, \theta)}{\Delta^2} \quad (\text{A5.2.12})$$

sendo  $\Delta$  o incremento para o cálculo da segunda derivada. ( $\Delta = 0,1$  é um valor típico)

A equação acima calcula a segunda derivada direcional de  $Z$  em termos das variáveis normalizadas ( $x$  e  $y$ ). Quando o espaçamento da malha não for simétrico e regular, é necessário corrigi-la aplicando uma constante multiplicativa:

$$DZ(\theta) = \frac{1}{p^2} \frac{Pz(\Delta, \theta) - 2Pz(0, \theta) + Pz(-\Delta, \theta)}{\Delta^2} \quad (\text{A5.2.13})$$

$$p = px / py$$

sendo  $p = p_x / p_y$  que são os intervalos de espaçamento ou “passos” da grade.  $P$  é um fator de escala para que se compense espaçamentos não regulares.

Para encontrar os ângulos com mínima e máxima curvatura,  $\theta$  pode, por exemplo, ser varrido entre 0 e  $\pi$  com um incremento não maior que a incerteza aceitável para  $\theta$ .

**Exemplo A5.2.3:** Ainda tomando como referencia nosso exemplo inicial, a figura abaixo representa a segunda derivada direcional para ângulos entre 0 e 180 graus.

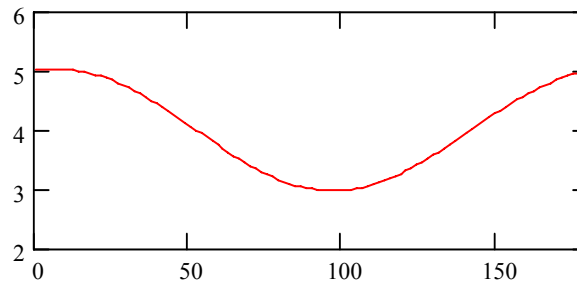


Figura 79: Segunda derivada direcional.

A segunda derivada é máxima e igual a 5,0311 para 7,10° e mínima e igual a 2,9696 para 96,94°.