

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Espaço admissível para os parâmetros do modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade aditivo

Rodrigo Gabriel de Miranda

Orientador: Robert Wayne Samohyl, *Ph.D.*

Florianópolis, Março de 2009

Rodrigo Gabriel de Miranda

Espaço admissível para os parâmetros do modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade aditivo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção.

Orientador: Robert Wayne Samohyl, *Ph.D.*

Florianópolis, Março de 2009

FICHA CATALOGRÁFICA

MIRANDA, Rodrigo Gabriel de.

Espaço admissível para os parâmetros do modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade aditivo./Rodrigo Gabriel de Miranda. Florianópolis; orientador Robert Wayne Samohyl. - Florianópolis, 2009.

94f. : Il. ;figs. ; tabs.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, 2009.

Inclui bibliografia.

1. Suavização Exponencial com Dupla Sazonalidade. 2. Modelos de Espaço de Estado. 3. Teste de Jury para Estabilidade. I. Samohyl, Robert Wayne. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. III. Título.

RODRIGO GABRIEL DE MIRANDA

Espaço admissível para os parâmetros do modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade aditivo

Esta tese foi julgada e aprovada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, 06 de Março de 2009.

Prof. Antônio Sérgio Coelho, Dr.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Prof. Robert Wayne Samohyl, *Ph. D.*
Universidade Federal de Santa Catarina
(Orientador)

BANCA EXAMINADORA

Prof. Pedro Alberto Barbeta, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina
(Presidente)

Prof. Adriano Ferreti Borgatto, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina
(Membro)

Prof. Werner Kraus Junior, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina
(Membro)

Prof. Adriano Mendonça Souza, Dr.
Universidade Federal de Santa Maria
(Membro)

Prof. Gutemberg Hespanha Brasil, Dr.
Universidade Federal do Espírito Santo
(Membro)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus familiares, pai, irmãos e em especial a minha mãe.

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível com a ajuda e colaboração das pessoas que venho a agradecer:

ao professor e orientador Robert Wayne Samohyl, pela grande orientação e confiança;

à Universidade Federal de Santa Catarina e o Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, pelas oportunidades oferecidas e condições de estudo;

ao CNPQ, pela bolsa concedida;

aos membros da banca examinadora, pelas sugestões feitas para a melhoria do trabalho;

aos colegas do NNQ pelo apoio e incentivo.

Resumo

O modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade foi desenvolvido recentemente e aplicado principalmente na previsão de consumo horário de energia elétrica, apresentando resultados melhores quando comparado a outros modelos. Porém a estabilidade deste modelo ainda não tinha sido estudada até o presente trabalho. Para estudar a estabilidade e encontrar o espaço admissível dos parâmetros de suavização foi utilizado o teste de Jury. Este é um teste clássico aplicado a estabilidade de sistemas dinâmicos, que também pode ser utilizado em modelos de suavização exponencial. Os resultados obtidos com o teste no modelo com dupla sazonalidade mostram que quando os dados são horários, o modelo só pode ser utilizado em séries sem crescimento ou com crescimento constante. Pequenas variações no parâmetro de suavização do crescimento tornam o modelo instável, com conseqüente aumento dos erros de previsão.

Palavras-chave: suavização exponencial com dupla sazonalidade, modelos de espaço de estado, teste de Jury para estabilidade

Abstract

The exponential smoothing model with double seasonality was developed recently and applied primarily in the forecast of hourly electric consumption, presenting better results when compared with other models. However the stability of this model had not been studied until this work. To study the stability and to find the admissible parameter space the test of Jury was used. This is a classic test applied to the stability of discrete systems, which can also be applied in the exponential smoothing models. The results obtained with the application of the test in the model with double seasonality shows that when the data are hourly, it can be applied only in series without growth or with constant growth. Small variations in the growth smoothing parameter make the model unstable, with consequent increase of the forecast errors.

Keywords: exponential smoothing with double seasonality, state space models, Jury's stability test

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - História do desenvolvimento dos modelos de suavização exponencial	21
Figura 2 - Consumo de energia horária em Santa Catarina (8 semanas)	38
Figura 3 - Observado e modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade ajustado para os dados de consumo de energia elétrica.....	39
Figura 4 - Nível da série de consumo horário de energia elétrica	40
Figura 5 - Sazonalidade semanal para os dados de energia elétrica	40
Figura 6- Sazonalidade diária para os dados de energia elétrica	41
Figura 7 - Consumo diário de energia.....	41
Figura 8 - Parâmetros de espaço para o modelo AA_dN	51
Figura 9 – Região de α e β * para a previsibilidade dos modelos de suavização exponencial com um ciclo sazonal ($m = 4$).....	53
Figura 10 - Erro nas estimativas das componentes.....	54
Figura 11 - Soma acumulada dos índices sazonais (para $m = 4$)	54
Figura 12- Vendas de Gol 1000	56
Figura 13 - Região de estabilidade para o modelo AAA, quando $\gamma = 0,1$ e $m = 12$	63
Figura 14 – Espaço dos parâmetros para o modelo com dupla sazonalidade com sazonalidade $m_1 = 24$ e $m_2 = 168$	73
Figura 15 – Autocorrelação para os resíduos de 2003	74
Figura 16 – MAPE para 24 horas a frente de previsão	76
Figura 17 – Consumo horário de energia elétrica em Santa Catarina (8 semanas em 2003)...	77
Figura 18 – Região de estabilidade para o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade para γ (eixo y) e ω (eixo x) com sazonalidade $m_1 = 24$ e $m_2 = 168$	79
Figura 19 - Soma acumulada para os índices sazonais ($m_2 = 168$)	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classificação dos modelos de suavização exponencial	20
Tabela 2 - Representação gráfica para os modelos de suavização exponencial.....	21
Tabela 3 - Símbolos utilizados na formulação dos modelos de suavização exponencial	22
Tabela 4 - Forma padrão dos modelos de suavização exponencial	23
Tabela 5 - Representação dos modelos de suavização exponencial na forma de correção de erro	25
Tabela 6 - Formulação do método de Holt através de modelos de espaço de estado.....	27
Tabela 7 - Representação dos modelos de suavização exponencial através de modelos de espaço de estado.....	28
Tabela 8 - Equivalência entre suavização exponencial e ARIMA.	30
Tabela 9 - Número de parâmetros estimados para os métodos exponenciais com sazonalidade mensal	33
Tabela 10 – Média e variância para as previsões k períodos à frente. μt é uma aproximação nos modelos da classe 3.	34
Tabela 11 - Valores de μk , μk e c_j para os 15 modelos.	34
Tabela 12 - Parâmetros estimados e erros de previsão dentro da amostra para o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade para a série de dados do consumo horário de Santa Catarina.....	38
Tabela 13 - Condições de estabilidade para modelos sem sazonalidade	50
Tabela 14 - Condições de previsibilidade para os modelos ANA e AA _d A. Condições para AAA (Holt-Winters aditivo) fazer $\phi = 1$	52
Tabela 15– Vendas mensais de Gol 1000	56
Tabela 16– Parâmetros estimados e erros de previsão dentro da amostra para o modelo de Holt-Winters para a série de dados de vendas do Gol 1000.....	57
Tabela 17- Componentes estimadas para os modelos, padrão e normalizado, de Holt-Winters para a série de dados de vendas do Gol 1000.....	57
Tabela 18 - Tabela de Raible para o modelo ANN.....	59
Tabela 19 - Tabela de Raible para o modelo AAN.....	59
Tabela 20 - Tabela de Raible para o modelo AA _d N	60
Tabela 21 - Tabela de Raible para o modelo ANA.....	60
Tabela 22 - Tabela de Raible para o modelo AAA com $\alpha = 0,5$, $\beta^* = 0,23$ e $\gamma = 0,1$	63

Tabela 23 - Tabela de Raible para o modelo AAA com $\alpha = 0,5$, $\beta^* = 0,1$ e $\gamma = 0,1$	64
Tabela 24 – Parâmetros estimados aplicando o modelo de suavização exponencial aos dados de consumo de energia elétrica em Santa Catarina.....	75

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Justificativa e importância.....	15
1.2	Objetivos	16
1.2.1	Objetivo Geral	16
1.2.2	Objetivos específicos	16
1.3	Fronteira da literatura.....	17
1.4	Delimitações do trabalho.....	17
1.5	Estrutura da tese.....	18
2	REVISÃO DA LITERATURA	19
2.1	História dos modelos de suavização exponencial.....	19
2.2	Formulação dos modelos de suavização exponencial.....	22
2.2.1	Forma padrão.....	22
2.2.2	Forma de correção de erro.....	24
2.3	Relação com os modelos de espaço de estado com uma única fonte de erro	26
2.4	Relação com os modelos ARIMA.	29
2.5	Estimação dos parâmetros de suavização	31
2.6	Intervalo de confiança para as previsões.....	33
2.7	Suavização exponencial com dupla sazonalidade	35
2.8	Exemplo de aplicação da suavização exponencial com dupla sazonalidade	38
2.9	Considerações finais	42
3	ESTABILIDADE PARA OS MODELOS DE SUAVIZAÇÃO EXPONENCIAL	43
3.1	Modelo de espaço de estado linear	43
3.2	Propriedades para os modelos de espaço de estado lineares	44
3.3	Estabilidade para seis modelos de suavização exponencial	50
3.3.1	Modelos não sazonais	50
3.3.2	Modelos sazonais.....	51

3.3.3	Modelo sazonal normalizado.....	53
3.4	Teste de Jury para estabilidade.....	58
3.4.1	Modelo ANN.....	59
3.4.2	Modelo AAN.....	59
3.4.3	Modelo AA _d N.....	60
3.4.4	Modelo ANA.....	60
3.4.5	Modelo AAA.....	61
3.5	Considerações finais	64
4	ESTABILIDADE PARA SUAVIZAÇÃO EXPONENCIAL COM DUPLA SAZONALIDADE	66
4.1	Modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade	66
4.2	Propriedades do modelo.....	68
4.3	Teste de Jury para estabilidade.....	72
4.4	Exemplo de aplicação do modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade 74	
4.5	Modelo sem crescimento.....	77
4.6	Modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade normalizado	80
5	Conclusões.....	84
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	85
	Apêndice A - Funções em VBA para o teste de Jury	88
	Apêndice B - Tabela de Raible para o modelo AAA com sazonalidade trimestral	91
	Apêndice C - Tabela de Raible para o modelo com dupla sazonalidade sem crescimento	93

1 INTRODUÇÃO

A previsão é uma função empresarial essencial nos dias atuais. Esta permite que as empresas possam organizar melhor a operação de suas atividades, assim como planejar a capacidade de seus sistemas produtivos. Em particular neste trabalho serão abordados os casos de previsão para séries temporais que apresentam dupla sazonalidade. Estes dados são muito comuns onde o sistema produtivo deve responder rapidamente a mudanças no comportamento do consumo. Um exemplo disto é o caso da distribuição de energia elétrica, onde o sistema de operação da empresa deve comprar e distribuir a energia entre os consumidores de forma que todos sejam atendidos sem que haja falta na distribuição. Uma previsão incorreta do consumo pode acarretar em perdas financeiras para a empresa, assim como o comprometimento físico de seus equipamentos de transmissão. Os dados de energia elétrica podem apresentar dois ciclos sazonais, um deles é o efeito das horas do dia (determinada principalmente pelos hábitos das pessoas e empresas), e o outro é o efeito do dia da semana no consumo. Se o consumo de energia for medido no intervalo de uma hora, o ciclo sazonal do dia é de 24, e o ciclo sazonal da semana é de 168 (número de horas em uma semana). A sazonalidade da semana existe porque o comportamento do consumo pode mudar em cada dia da semana. Por exemplo, espera-se que o comportamento do consumo de domingo seja diferente da segunda.

Além do exemplo citado acima, podem ocorrer diversos casos que apresentam dois ciclos sazonais, como por exemplo, dados sobre tráfego urbano, chegada de pacientes em hospitais, chegada de vôos em aeroportos, hóspedes em hotéis. Para estudar o comportamento destas séries temporais, existem vários modelos de previsões descritos na literatura, onde os mais utilizados são os conhecidos como univariados, pois se utilizam apenas de dados da própria série de dados para fazer as previsões, sem que seja necessária a utilização de informação externa a empresa. Isto é muito conveniente já que em muitos casos os processos de previsão precisam ser automáticos e rápidos, sem a intervenção humana, além de ser na prática difícil encontrar e coletar variáveis externas que se correlacionem com a variável em estudo.

Dentre os modelos de previsão univariados utilizados nesta situação, os mais citados são: redes neurais, ARIMA com dupla sazonalidade e suavização exponencial com dupla sazonalidade. Este último modelo foi desenvolvido por Taylor (2003a) e resultou em uma

nova abordagem descrita em Gould *et al* (2008). Em ambos os artigos o modelo proposto é uma ampliação do modelo clássico de Winters (1960) (conhecido também como modelo de Holt-Winters), só que ao invés de um único ciclo sazonal na formulação, existem dois. O modelo de Holt-Winters se tornou, desde sua criação em 1960, um dos principais métodos de previsão univariados existentes, tanto por sua simplicidade de aplicação (Souza *et al* (2008)) como pelos bons resultados obtidos empiricamente com diversas séries temporais. Mas o fato de se considerar um segundo ciclo sazonal é recente, e o modelo que aparenta ser promissor para aplicação em diversas áreas necessita ainda de estudos e aperfeiçoamentos.

1.1 Justificativa e importância

O estudo das propriedades estatísticas dos modelos de suavização exponencial, formulados através de equações de espaço de estado, tem tido muita atenção dos pesquisadores (Ord et al (1997), Chatfield et al (2001), Koehler et al (2001), Hyndman et al (2002), Hyndman et al (2005), Billah et al (2006), Hyndman et al (2008a), Hyndman et al (2008b)). Isto ocorre porque durante muito tempo estes modelos foram criticados por não terem uma base estatística (apesar dos bons resultados obtidos empiricamente descritos na literatura - um resumo com todos os artigos publicados a partir de 1985 pode ser visto em Gardner (2006)), isto é, não era possível calcular o intervalo de confiança para as previsões e os parâmetros de suavização eram “escolhidos” intuitivamente pelos práticos. Com a utilização de modelos de espaço de estado foram encontrados valores ótimos para os parâmetros de suavização (estimados a partir de uma função de verossimilhança), média e variância para as previsões e também as restrições de quanto esses parâmetros podem variar através do estudo da estabilidade para modelos lineares aditivos.

O estudo da estabilidade que define o quanto estes parâmetros podem variar, na prática, impõe que os pesos das observações passadas decaiam exponencialmente com o tempo. Uma observação mais antiga não dever ter um peso maior que uma mais nova como informação para a previsão dos próximos períodos.

Em estudos realizados para os casos com um ciclo sazonal já se mostrou tanto através de simulação quanto em estudo empírico (Hyndman et al (2008b)), que os erros de previsão podem ser menores quando é adotado o espaço admissível para a variação dos parâmetros de

suavização ao invés das restrições “tradicionais” variando entre 0 e 1. Isto também ocorre na suavização exponencial com dupla sazonalidade.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Encontrar o espaço admissível para os parâmetros do modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade aditivo.

1.2.2 Objetivos específicos

Para o desenvolvimento do objetivo geral é necessário o estudo dos objetivos específicos citados a seguir:

- Encontrar o polinômio característico da matriz de desconto que represente o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade;
- Verificar se o modelo é observável, controlável, estável e previsível;
- Verificar se o modelo possui viés nas estimativas das componentes, nível e sazonalidade.
- Utilizar o teste de Jury para a estabilidade no modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade.

1.3 Fronteira da literatura

O estudo da estabilidade e previsibilidade (o conceito de previsibilidade com modelo estocástico foi introduzido em Hyndman et al (2008b)) foi realizado até o momento para 6 modelos de suavização exponencial aditivos (lineares), dentre eles, três não sazonais e três sazonais. Neste estudo verificou-se que a faixa de valores de variação para os parâmetros de suavização é diferente em relação às utilizadas tradicionalmente. Esta diferença pode afetar o valor das previsões, aumentando o erro.

Já para o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade, introduzido em Taylor (2003a), ainda não se sabe qual é o espaço dos parâmetros admissíveis. Nas aplicações mais recentes foram utilizadas as restrições tradicionais (0 a 1) para a estimação dos parâmetros (Taylor (2003a), Taylor et al (2006), Morzuch e Allen (2006), Gould et al (2008), Taylor (2008)), porém como será apresentado no capítulo 4, estas restrições são diferentes desta faixa de valores tradicionais, e dependem do tamanho dos dois ciclos sazonais. O espaço admissível dos parâmetros é bem diferente quando se está trabalhando com dados mensais em relação a dados horários. Para o cálculo do espaço admissível destes parâmetros será utilizado o teste de Jury para a estabilidade, com a vantagem de fácil aplicação computacional.

Além do estudo da estabilidade, o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade apresenta o mesmo problema que o modelo de Holt-Winters, viés nas estimativas das componentes, nível e sazonalidade. Será apresentado no capítulo 4 um modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade normalizado desenvolvido neste trabalho que corrige este problema de viés. Tanto o modelo de Holt-Winters quanto o com dupla sazonalidade são casos particulares deste modelo normalizado.

1.4 Delimitações do trabalho

As delimitações do trabalho estão relacionadas às restrições de aplicação do modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade para a previsão em séries temporais. O modelo deve ser aplicado em séries univariadas que possuam dupla sazonalidade, isto é, séries com nível e dois ciclos sazonais. No capítulo 4 será apresentado que se os dados forem

horários ou com uma frequência maior (meia hora por exemplo) o modelo deve ser empregado sem a equação de crescimento ou com o parâmetro de suavização do crescimento igual a zero.

Outra delimitação é em relação a aplicação do teste de Jury de estabilidade (capítulo 3) para o modelo com crescimento, onde a estabilidade só pode ser testada numericamente, isto é, é inviável encontrar equações algébricas para a restrição dos parâmetros.

1.5 Estrutura da tese

A tese está estruturada nos seguintes capítulos, que são descritos a seguir:

- capítulo 1 – apresenta o tema abordado, as justificativas e importância do tema escolhido, os objetivos a serem alcançados, a fronteira da literatura e as limitações;
- capítulo 2 – apresenta a revisão teórica referente aos modelos de suavização exponencial com os seguintes assuntos: a relação da suavização exponencial com os modelos de espaço de estado com uma única fonte de erro, intervalo de confiança de previsão para as previsões, e o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade;
- capítulo 3 – apresenta a revisão teórica sobre a estabilidade em 6 modelos de suavização exponencial aditivos e o teste de Jury para a estabilidade;
- capítulo 4 – apresenta a região de estabilidade para os parâmetros da suavização exponencial com dupla sazonalidade e um estudo empírico para a previsão de energia elétrica no estado de Santa Catarina;
- capítulo 5 – apresenta as conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

O objetivo deste capítulo é apresentar a revisão da literatura sobre os modelos de suavização exponencial. Será apresentada a formulação dos modelos, tanto sazonais quanto não sazonais, e a equivalência destes modelos com modelos de espaço de estado. Esta equivalência permitiu o estudo de várias propriedades estatísticas, como a estimação dos parâmetros de suavização através de uma função de verossimilhança e o cálculo de intervalos de confiança para as previsões, além do estudo do espaço dos parâmetros admissíveis, que será apresentado no capítulo 3.

Posteriormente será apresentado o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade. Este modelo foi aplicado principalmente na previsão do consumo de energia elétrica horária, e como descrito no capítulo 1 é o objeto de estudo desta tese. O capítulo está dividido nas seguintes seções. Na seção 2.1 a história do desenvolvimento da formulação dos modelos. Na seção 2.2 a formulação dos modelos, tanto na sua forma padrão quanto na de correção de erro. Na seção 2.3 a equivalência entre modelos de espaço de estado e a suavização exponencial. Na seção 2.4 a equivalência entre os modelos ARIMA e a suavização exponencial. Por fim nas seções 2.5 e 2.6 a estimação dos parâmetros de suavização e o cálculo do intervalo de confiança para as previsões respectivamente e na seção 2.7 o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade.

2.1 História dos modelos de suavização exponencial

Os modelos de suavização exponencial tiveram sua origem em um trabalho desenvolvido por Robert G. Brown em 1944 durante a segunda guerra mundial (Gardner, 2006). A idéia inicial foi desenvolver uma técnica para o controle de disparos de mísseis de submarino, e posteriormente, no início da década de 50, foi aplicada a previsão de inventário da marinha americana. Paralelamente, na década de 50, outro pesquisador, Charles C. Holt desenvolveu um modelo de suavização exponencial similar, que levava em consideração uma tendência aditiva nas séries, e seu trabalho ficou conhecido posteriormente como método de Holt. Seu trabalho só foi publicado recentemente em Holt (2004), mas seu modelo ficou

conhecido quando Winters em 1960 testou seus dados em um modelo ampliado que considerava além da tendência a sazonalidade nos dados (Winters, 1960). O modelo ficou conhecido como Holt-Winters (HW) e é até hoje utilizado largamente tanto no meio acadêmico, como no mundo empresarial, como uma importante ferramenta de previsão.

Os três modelos citados acima são considerados a base da suavização exponencial, que teve e tem avanços até os dias atuais. Pegels (1969) classificou em nove os modelos de suavização exponencial, segundo a tendência e sazonalidade (aditiva ou multiplicativa). A principal modificação de Pegels foi a introdução dos modelos com tendência multiplicativa. Gardner & McKenzie (1985) desenvolveram um modelo com tendência aditiva amortecida, com a principal função de corrigir a previsão, que em muitas situações não é linear. O último avanço significativo em termos de modelagem foi realizado em Taylor (2003b), quando ele propôs modelos com tendência multiplicativa amortecida.

Todos estes modelos foram classificados em Hyndman et al (2002) quanto à tendência e sazonalidade e depois adaptado em Taylor (2003b) para incluir tendência multiplicativa amortecida. A Tabela 1 apresenta esta classificação.

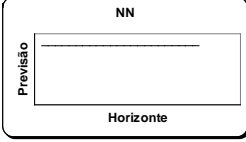
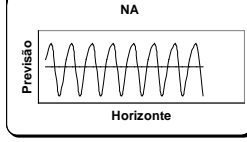
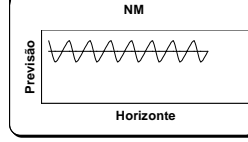
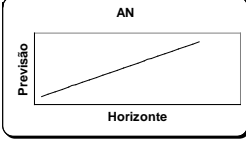
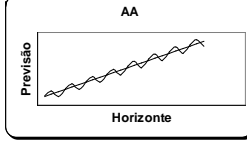
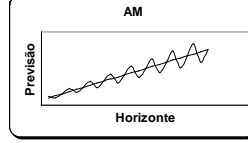
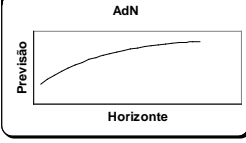
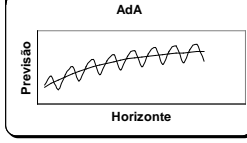
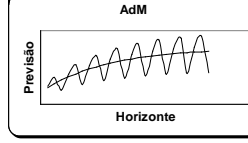
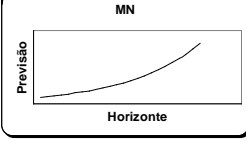
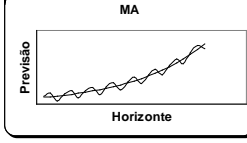
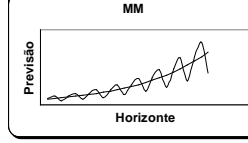
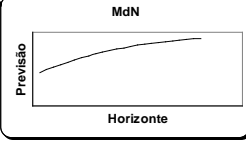
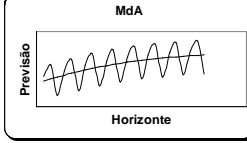
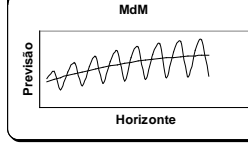
Tabela 1 – Classificação dos modelos de suavização exponencial

Tendência	Sazonalidade		
	Nenhuma (N)	Aditiva (A)	Multiplicativa (M)
Nenhuma (N)	NN	NA	NM
Aditiva (A)	AN	AA	AM
Aditiva Amortecida (A_d)	A_dN	A_dA	A_dM
Multiplicativa (M)	MN	AM	MM
Multiplicativa Amortecida (M_d)	M_dN	M_dA	M_dM

Fonte: Taylor (2003b)

O modelo NN representa uma série sem tendência e sem sazonalidade e é a suavização exponencial simples (SES). O modelo a AN representa uma série com tendência aditiva (linear) e sem sazonalidade, conhecido como modelo de Holt. E os modelos AA e AM representam os modelos de Holt-Winters na forma aditiva e multiplicativa respectivamente. A representação gráfica de todos os modelos pode ser vista na Tabela 2 e serve de base para a identificação de qual o modelo mais indicado para uma determinada situação.

Tabela 2 - Representação gráfica para os modelos de suavização exponencial

Tendência	Sazonalidade		
	Nenhuma (N)	Aditiva (A)	Multiplicativa (M)
Nenhuma (N)	<p>SES</p> 		
Aditiva (A)	<p>Holt</p> 	<p>HWA</p> 	<p>HWM</p> 
Aditiva Amortecida (A_d)			
Multiplicativa (M)			
Multiplicativa Amortecida (M_d)			

Fonte: adaptado de Gardner (1985)

Percebe-se, observando a Tabela 2, que a principal diferença entre os modelos com sazonalidade aditiva e multiplicativa, é que no segundo caso a amplitude da sazonalidade aumenta ou diminui dependendo do crescimento ou decrescimento da tendência da série, enquanto que no caso aditivo ela é independente da tendência. Como escolher o modelo que mais se ajusta a série de dados é apresentado na seção 2.5.

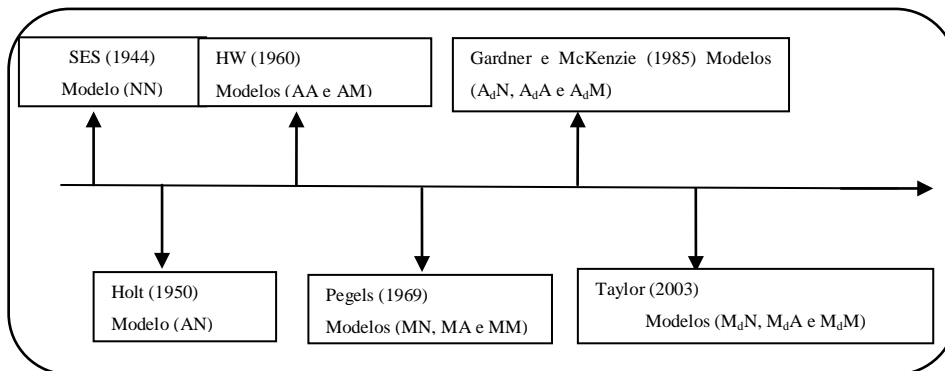


Figura 1 - História do desenvolvimento dos modelos de suavização exponencial

Um resumo com o desenvolvimento dos modelos de suavização exponencial pode ser visto na Figura 1. Ao todo são quinze modelos, sua formulação tanto padrão quanto a de correção de erro serão apresentados na seção seguinte.

2.2 Formulação dos modelos de suavização exponencial

Os modelos de suavização exponencial se caracterizam por decompor uma série temporal em componentes, suavizar seus valores passados (dar pesos diferenciados que decaem exponencialmente com o tempo) e depois recompor as componentes para fazer as previsões. As três componentes na suavização exponencial são: nível, crescimento e sazonalidade.

O nível é o valor médio da observação no período t (valor observado retirando a sazonalidade, se houver, e o erro aleatório), o crescimento é diferença seqüencial de dois níveis consecutivos e a sazonalidade é um evento que se repete com uma periodicidade constante. O modelo de suavização exponencial simples, por exemplo, só apresenta a componente de nível, o modelo de Holt o nível e crescimento e o modelo de Holt-Winters o nível, crescimento e sazonalidade. A formulação com as respectivas componentes dos quinze modelos são apresentadas nas seções 2.2.1 e 2.2.2 tanto na forma padrão como na forma de correção de erro.

2.2.1 Forma padrão

Antes de apresentar a formulação dos quinze modelos representados nos gráficos da Tabela 2, é importante definir os símbolos adotados. Esta definição se encontra na Tabela 3.

Tabela 3 - Símbolos utilizados na formulação dos modelos de suavização exponencial

Símbolo	Definição
y_t	Dado observado no período t
α	Parâmetro de suavização para o nível

Tabela 3 - Símbolos utilizados na formulação dos modelos de suavização exponencial

Símbolo	Definição
β	Parâmetro de suavização para o crescimento
γ	Parâmetro de suavização para a sazonalidade
ϕ	Parâmetro de amortecimento do crescimento
β^*	$\alpha\beta$
l_t	Nível da série no período t
b_t	Crescimento da série no período t
s_t	Sazonalidade da série no período t
F_{t+k}	Previsão feita no período t , k períodos à frente
m	Tamanho do ciclo sazonal
e_t	Erro de previsão um passo a frente

Estes símbolos da Tabela 3 representam as componentes, os parâmetros de suavização e a função de previsão dos modelos formulados na Tabela 4. Esta formulação é denominada padrão (ou recursiva).

Tabela 4 - Forma padrão dos modelos de suavização exponencial

Tendência	Sazonalidade		
	N	A	M
N	$l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)l_{t-1}$ $F_{t+k} = l_t$	$l_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)l_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - l_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $F_{t+k} = l_t + s_{t-m+k}$	$l_t = \alpha(y_t/s_{t-m}) + (1 - \alpha)l_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t/l_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $F_{t+k} = l_t s_{t-m+k}$
A	$l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}$ $F_{t+k} = l_t + kb_t$	$l_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)(l_{t-1} - b_{t-1})$ $b_t = \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $F_{t+k} = l_t + kb_t + s_{t-m+k}$	$l_t = \alpha(y_t/s_{t-m}) + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t/(l_{t-1} + b_{t-1})) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $F_{t+k} = (l_t + kb_t)s_{t-m+k}$
A _d	$l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(l_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)\phi b_{t-1}$ $F_{t+k} = l_t + \sum_{i=1}^k \phi^i b_t$	$l_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)(l_{t-1} - \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)\phi b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - l_{t-1} - \phi b_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $F_{t+k} = l_t + \sum_{i=1}^k \phi^i b_t + s_{t-m+k}$	$l_t = \alpha(y_t/s_{t-m}) + (1 - \alpha)(l_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)\phi b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t/(l_{t-1} + \phi b_{t-1})) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $F_{t+k} = \left(l_t + \sum_{i=1}^k \phi^i b_t \right) s_{t-m+k}$
M	$l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)l_{t-1}b_{t-1}$ $b_t = \beta(l_t/l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}$ $F_{t+k} = l_t b_t^k$	$l_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)l_{t-1}b_{t-1}$ $b_t = \beta(l_t/l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - l_{t-1}b_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $F_{t+k} = l_t b_t^k + s_{t-m+k}$	$l_t = \alpha(y_t/s_{t-m}) + (1 - \alpha)l_{t-1}b_{t-1}$ $b_t = \beta(l_t/l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t/(l_{t-1}b_{t-1})) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $F_{t+k} = l_t b_t^k s_{t-m+k}$
M _d	$l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)l_{t-1}b_{t-1}^\phi$ $b_t = \beta(l_t/l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}^\phi$ $F_{t+k} = l_t b_t^{\sum_{i=1}^k \phi^i}$	$l_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)l_{t-1}b_{t-1}^\phi$ $b_t = \beta(l_t/l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}^\phi$ $s_t = \gamma(y_t - l_{t-1}b_{t-1}^\phi) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $F_{t+k} = l_t b_t^{\sum_{i=1}^k \phi^i} + s_{t-m+k}$	$l_t = \alpha(y_t/s_{t-m}) + (1 - \alpha)l_{t-1}b_{t-1}^\phi$ $b_t = \beta(l_t/l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}^\phi$ $s_t = \gamma(y_t/(l_{t-1}b_{t-1}^\phi)) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $F_{t+k} = l_t b_t^{\sum_{i=1}^k \phi^i} s_{t-m+k}$

Fonte: adaptado de Gardner (2006)

A Tabela 4 mostra cinco tipos de tendência (T):

- Nenhuma (N) - $T = l$;
- Aditiva (A) - $T = l + kb$;
- Aditiva amortecida (A_d) - $T = l + (\phi + \phi^2 + \dots + \phi^k)b$;
- Multiplicativa (M) - $T = lb^k$;
- Multiplicativa amortecida (M_d) - $T = lb^{(\phi + \phi^2 + \dots + \phi^k)}$.

E três tipos de sazonalidade (S). São possíveis três tipos de combinação entre tendência e sazonalidade para formar a previsão (F):

- Modelo sem sazonalidade - $F = T$;
- Modelo com sazonalidade aditiva - $F = T + S$;
- Modelo com sazonalidade multiplicativa - $F = T \times S$.

Conseqüentemente são possíveis quinze modelos diferentes, os mesmos da Tabela 2. Outra observação em relação à Tabela 4 é o cálculo do crescimento dos modelos com tendência aditiva, que é feito pela diferença de dois níveis seqüenciais $l_t - l_{t-1}$, já nos com tendência multiplicativa o crescimento é calculado pela razão l_t/l_{t-1} . O nível dos modelos com sazonalidade aditiva é calculado subtraindo-se a sazonalidade do observado $y_t - s_{t-m}$, já quando a sazonalidade é multiplicativa y_t/s_{t-m} .

Os parâmetros de suavização α , β , γ e ϕ usualmente são restringidos para variar entre 0 e 1. No capítulo 3 será demonstrado que, na verdade, para que os modelos sejam estáveis, estes parâmetros de suavização podem assumir valores diferentes que o intervalo de 0 a 1. Observa-se ainda na Tabela 4 que nas equações de previsão para os modelos sazonais as previsões são feitas para $k = 1, 2, \dots, m$, onde m é o tamanho do ciclo sazonal.

2.2.2 Forma de correção de erro

Outra maneira de se representar os modelos de suavização exponencial é a de correção de erro, onde todas as componentes (nível, crescimento e sazonalidade) são expressas em função do erro de previsão $e_t = y_t - F_t$. Um exemplo disto pode ser visto a seguir, podendo ser estendido para os outros modelos. Para o caso do modelo de HW aditivo:

$$l_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1})$$

$$-s_{t-m} = l_{t-1} + b_{t-1} - F_t$$

$$l_t = \alpha \left(\underbrace{y_t - F_t}_{e_t} + l_{t-1} + b_{t-1} \right) + l_{t-1} + b_{t-1} - \alpha l_{t-1} - \alpha b_{t-1}$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha e_t$$

$$b_t = \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} = \beta(l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha e_t - l_{t-1}) + b_{t-1} - \beta b_{t-1}$$

$$b_t = b_{t-1} + \alpha \beta e_t$$

$$s_t = \gamma(y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m} = \gamma \left(\underbrace{y_t - F_t}_{e_t} + s_{t-m} \right) + s_{t-m} - \gamma s_{t-m}$$

$$s_t = s_{t-m} + \gamma e_t$$

Esta representação foi apresentada pela primeira vez em Gardner (1985) e além de ser uma forma mais compacta dos modelos de suavização exponencial, também vai coincidir com a representação dos modelos de espaço de estado com uma única fonte de erro (seção 2.3). A Tabela 5 apresenta os quinze modelos na forma de correção de erro, (equivalentes aos da Tabela 4).

Tabela 5 - Representação dos modelos de suavização exponencial na forma de correção de erro

Tendência	Sazonalidade		
	N	A	M
N	$l_t = l_{t-1} + \alpha e_t$ $F_{t+k} = l_t$	$l_t = l_{t-1} + \alpha e_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma e_t$ $F_{t+k} = l_t + s_{t-m+k}$	$l_t = l_{t-1} + \alpha e_t / s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma e_t / l_{t-1}$ $F_{t+k} = l_t s_{t-m+k}$
A	$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha e_t$ $b_t = b_{t-1} + \alpha \beta e_t$ $F_{t+k} = l_t + k b_t$	$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha e_t$ $b_t = b_{t-1} + \alpha \beta e_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma e_t$ $F_{t+k} = l_t + k b_t + s_{t-m+k}$	$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha e_t / s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \alpha \beta e_t / s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma e_t / (l_{t-1} + b_{t-1})$ $F_{t+k} = (l_t + k b_t) s_{t-m+k}$
A _d	$l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha e_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \alpha \beta e_t$ $F_{t+k} = l_t + \sum_{i=1}^k \phi^i b_t$	$l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha e_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \alpha \beta e_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma e_t$ $F_{t+k} = l_t + \sum_{i=1}^k \phi^i b_t + s_{t-m+k}$	$l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha e_t / s_{t-m}$ $b_t = \phi b_{t-1} + \alpha \beta e_t / s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma e_t / (l_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $F_{t+k} = \left(l_t + \sum_{i=1}^k \phi^i b_t \right) s_{t-m+k}$
M	$l_t = l_{t-1} b_{t-1} + \alpha e_t$ $b_t = b_{t-1} + \alpha \beta e_t / l_{t-1}$ $F_{t+k} = l_t b_t^k$	$l_t = l_{t-1} b_{t-1} + \alpha e_t$ $b_t = b_{t-1} + \alpha \beta e_t / l_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma e_t$ $F_{t+k} = l_t b_t^k + s_{t-m+k}$	$l_t = l_{t-1} b_{t-1} + \alpha e_t / s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \alpha \beta e_t / (s_{t-m} l_{t-1})$ $s_t = s_{t-m} + \gamma e_t / (l_{t-1} b_{t-1})$ $F_{t+k} = l_t b_t^k s_{t-m+k}$
M _d	$l_t = l_{t-1} b_{t-1}^\phi + \alpha e_t$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \alpha \beta e_t / l_{t-1}$ $F_{t+k} = l_t b_t^{\sum_{i=1}^k \phi^i}$	$l_t = l_{t-1} b_{t-1}^\phi + \alpha e_t$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \alpha \beta e_t / l_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma e_t$ $F_{t+k} = l_t b_t^{\sum_{i=1}^k \phi^i} + s_{t-m+k}$	$l_t = l_{t-1} b_{t-1}^\phi + \alpha e_t / s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \alpha \beta e_t / (s_{t-m} l_{t-1})$ $s_t = s_{t-m} + \gamma e_t / (l_{t-1} b_{t-1})$ $F_{t+k} = l_t b_t^{\sum_{i=1}^k \phi^i} s_{t-m+k}$

Fonte: adaptado de Hyndman et al (2008a).

2.3 Relação com os modelos de espaço de estado com uma única fonte de erro

Em Ord et al (1997) foi proposta a representação dos modelos de suavização exponencial através de modelos de espaço de estado com uma única fonte de erro. A vantagem desta representação é que várias propriedades estatísticas podem ser estudadas, como a estimativa da média e da variância das previsões (seção 2.6) (antes os modelos eram tratados como determinísticos) e a estabilidade (capítulo 3).

A escolha de uma única fonte de erro permitiu formular com simplicidade os modelos de suavização exponencial, lineares e não lineares (uma comparação entre modelos com única e múltipla fontes de erro podem ser vistos em Hyndman et al (2008a)). Os modelos não lineares são os todos que possuem a tendência ou a sazonalidade multiplicativa. As duas equações que representam um modelo de espaço de estado são definidas abaixo:

$$y_t = w(x_{t-1}) + r(x_{t-1})e_t \quad (2.1)$$

$$x_t = f(x_{t-1}) + g(x_{t-1})e_t \quad (2.2)$$

A equação (2.1) é conhecida como equação mensurável (ou observável), onde descreve a relação entre o vetor de estado (não observado) x_t e o valor observado y_t . A equação (2.2) chamada de transição (ou estado) representa como o vetor de estado $x_t = (l_t, b_t, s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-m+1})'$ se modifica ao longo do tempo, sendo que l_t é o nível, b_t o crescimento e s_t a sazonalidade da série no período t . O erro e_t é aleatório com variância σ^2 .

Em Hyndman et al (2002) é proposto a representação dos modelos de suavização sob duas condições de erro, aditivo e multiplicativo. São casos já vistos em Ord et al (1997) onde se considera as situações com erro homocedástico (variância constante) e erro heterocedástico (variância não constante), situação que ocorre com frequência em séries econômicas e deram origem aos modelos ARCH (introduzido por Engle (1982)). Utilizando estes dois tipos de erro nas equações (2.1) e (2.2) pode-se representar, por exemplo, o modelo de Holt (modelo AN – segundo a classificação da Tabela 1). Quando o tipo de erro é selecionado a classificação do modelo é feita com três letras, sendo a primeira o erro, aditivo(A) ou multiplicativo (M). Na Tabela 6 um exemplo da formulação através de equações de espaço de estado do método de Holt (AN) com os dois tipos de erro.

Tabela 6 - Formulação do método de Holt através de modelos de espaço de estado

	Modelo com erro aditivo (AAN)	Modelo com erro multiplicativo (MAN)
$w(x_{t-1}) =$	$l_{t-1} + b_{t-1}$	$l_{t-1} + b_{t-1}$
$r(x_{t-1}) =$	1	$l_{t-1} + b_{t-1}$
$x(t) =$	$\begin{bmatrix} l_t \\ b_t \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} l_t \\ b_t \end{bmatrix}$
$f(x_{t-1}) =$	$\begin{bmatrix} l_{t-1} + b_{t-1} \\ b_{t-1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} l_{t-1} + b_{t-1} \\ b_{t-1} \end{bmatrix}$
$g(x_{t-1}) =$	$\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha\beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \alpha(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ \alpha\beta(l_{t-1} + b_{t-1}) \end{bmatrix}$
$y_t =$	$l_{t-1} + b_{t-1} + e_t$	$(l_{t-1} + b_{t-1})(1 + e_t)$
$\begin{bmatrix} l_t \\ b_t \end{bmatrix} =$	$\begin{bmatrix} l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha e_t \\ b_{t-1} + \alpha\beta e_t \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} (l_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha e_t) \\ b_{t-1} + \alpha\beta(l_{t-1} + b_{t-1})e_t \end{bmatrix}$

Para generalizar os resultados da Tabela 6 para os outros modelos, pode-se definir que $w(x_{t-1}) = \mu_t$, onde μ_t é o valor esperado de y_t , $r(x_{t-1}) = 1$ para o caso de erro aditivo e $r(x_{t-1}) = \mu_t$ para o erro multiplicativo. Portanto $y_t = \mu_t + e_t$ quando o erro for aditivo e $y_t = \mu_t(1 + e_t)$ quando o erro for multiplicativo (Hyndman et al (2002)). Na Tabela 7 são apresentados os modelos de espaço de estado para os quinze modelos definidos na Tabela 5, tanto para o erro aditivo quanto multiplicativo, com uma mudança de parametrização, agora $\alpha\beta = \beta^*$ (esta mudança não modifica os modelos e permite encontrar limites para os parâmetros de suavização, garantindo a estabilidade dos modelos (Hyndman et al (2008b)).

Tabela 7 - Representação dos modelos de suavização exponencial através de modelos de espaço de estado.

Tendência	Sazonalidade						
	N		A		M		
	Erro		Erro		Erro		
	A	M	A	M	A	M	
$e_t = y_t - \mu_t$		$e_t = (y_t - \mu_t)/\mu_t$		$e_t = y_t - \mu_t$		$e_t = (y_t - \mu_t)/\mu_t$	
N	$\mu_t = l_{t-1}$ $l_t = \mu_t + \alpha e_t$	$\mu_t = l_{t-1}$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t)$	$\mu_t = l_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = (\mu_t + \alpha e_t) - s_{t-m}$ $s_t = (\mu_t + \gamma e_t) - l_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t) - s_{t-m}$ $s_t = \mu_t(1 + \gamma e_t) - l_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1}s_{t-m}$ $l_t = (\mu_t + \alpha e_t)/s_{t-m}$ $s_t = (\mu_t + \gamma e_t)/l_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1}s_{t-m}$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t)/s_{t-m}$ $s_t = \mu_t(1 + \gamma e_t)/l_{t-1}$	
A	$\mu_t = l_{t-1} + b_{t-1}$ $l_t = \mu_t + \alpha e_t$ $b_t = (\mu_t + \beta^* e_t) - l_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1} + b_{t-1}$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t)$ $b_t = \mu_t(1 + \beta^* e_t) - l_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = (\mu_t + \alpha e_t) - s_{t-m}$ $b_t = (\mu_t + \beta^* e_t) - (l_{t-1} + s_{t-m})$ $s_t = (\mu_t + \gamma e_t) - (l_{t-1} + b_{t-1})$	$\mu_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t) - s_{t-m}$ $b_t = \mu_t(1 + \beta^* e_t) - (l_{t-1} + s_{t-m})$ $s_t = \mu_t(1 + \gamma e_t) - (l_{t-1} + b_{t-1})$	$\mu_t = (l_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m}$ $l_t = (\mu_t + \alpha e_t)/s_{t-m}$ $b_t = (\mu_t + \beta^* e_t)/s_{t-m} - l_{t-1}$ $s_t = (\mu_t + \gamma e_t)/(l_{t-1} + b_{t-1})$	$\mu_t = (l_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m}$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t)/s_{t-m}$ $b_t = \mu_t(1 + \beta^* e_t)/s_{t-m} - l_{t-1}$ $s_t = \mu_t(1 + \gamma e_t)/(l_{t-1} + b_{t-1})$	
A _d	$\mu_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1}$ $l_t = \mu_t + \alpha e_t$ $b_t = (\mu_t + \beta^* e_t) - l_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1}$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t)$ $b_t = \mu_t(1 + \beta^* e_t) - l_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = (\mu_t + \alpha e_t) - s_{t-m}$ $b_t = (\mu_t + \beta^* e_t) - (l_{t-1} + s_{t-m})$ $s_t = (\mu_t + \gamma e_t) - (l_{t-1} + \phi b_{t-1})$	$\mu_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t) - s_{t-m}$ $b_t = \mu_t(1 + \beta^* e_t) - (l_{t-1} + s_{t-m})$ $s_t = \mu_t(1 + \gamma e_t) - (l_{t-1} + \phi b_{t-1})$	$\mu_t = (l_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m}$ $l_t = (\mu_t + \alpha e_t)/s_{t-m}$ $b_t = (\mu_t + \beta^* e_t)/s_{t-m} - l_{t-1}$ $s_t = (\mu_t + \gamma e_t)/(l_{t-1} + \phi b_{t-1})$	$\mu_t = (l_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m}$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t)/s_{t-m}$ $b_t = \mu_t(1 + \beta^* e_t)/s_{t-m} - l_{t-1}$ $s_t = \mu_t(1 + \gamma e_t)/(l_{t-1} + \phi b_{t-1})$	
M	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}$ $l_t = \mu_t + \alpha e_t$ $b_t = (\mu_t + \beta^* e_t)/l_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t)$ $b_t = \mu_t(1 + \beta^* e_t)/l_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = (\mu_t + \alpha e_t) - s_{t-m}$ $b_t = [(\mu_t + \beta^* e_t) - s_{t-m}]/l_{t-1}$ $s_t = (\mu_t + \gamma e_t) - l_{t-1}b_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t) - s_{t-m}$ $b_t = [\mu_t(1 + \beta^* e_t) - s_{t-m}]/l_{t-1}$ $s_t = \mu_t(1 + \gamma e_t) - l_{t-1}b_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}s_{t-m}$ $l_t = (\mu_t + \alpha e_t)/s_{t-m}$ $b_t = (\mu_t + \beta^* e_t)/(l_{t-1}s_{t-m})$ $s_t = (\mu_t + \gamma e_t)/(l_{t-1}b_{t-1})$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}s_{t-m}$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t)/s_{t-m}$ $b_t = \mu_t(1 + \beta^* e_t)/(l_{t-1}s_{t-m})$ $s_t = \mu_t(1 + \gamma e_t)/(l_{t-1}b_{t-1})$	
M _d	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi$ $l_t = \mu_t + \alpha e_t$ $b_t = (\mu_t + \beta^* e_t)/l_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t)$ $b_t = \mu_t(1 + \beta^* e_t)/l_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m}$ $l_t = (\mu_t + \alpha e_t) - s_{t-m}$ $b_t = [(\mu_t + \beta^* e_t) - s_{t-m}]/l_{t-1}$ $s_t = (\mu_t + \gamma e_t) - l_{t-1}b_{t-1}^\phi$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m}$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t) - s_{t-m}$ $b_t = [\mu_t(1 + \beta^* e_t) - s_{t-m}]/l_{t-1}$ $s_t = \mu_t(1 + \gamma e_t) - l_{t-1}b_{t-1}^\phi$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi s_{t-m}$ $l_t = (\mu_t + \alpha e_t)/s_{t-m}$ $b_t = (\mu_t + \beta^* e_t)/(l_{t-1}s_{t-m})$ $s_t = (\mu_t + \gamma e_t)/(l_{t-1}b_{t-1}^\phi)$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi s_{t-m}$ $l_t = \mu_t(1 + \alpha e_t)/s_{t-m}$ $b_t = \mu_t(1 + \beta^* e_t)/(l_{t-1}s_{t-m})$ $s_t = \mu_t(1 + \gamma e_t)/(l_{t-1}b_{t-1}^\phi)$	

2.4 Relação com os modelos ARIMA.

Modelos ARIMA são conhecidos como auto-regressivos (AR) integrados (I) de média móvel (MA). A parte AR do modelo representa a auto-correlação das observações, isto é, o quanto o valor de uma observação passada influencia no valor da próxima. A integração I é o número de diferenças necessário para se estacionar a média da série (média constante ao longo do tempo). Por fim, a média móvel (MA) é conhecida como inovações ou choques no modelo, isto é, são fatores que não são possíveis de serem previstos (gerando um erro) que vão influenciar o valor das observações futuras. A forma geral de um modelo ARIMA pode ser vista na equação (2.3):

$$y_t = c + \underbrace{a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p}}_{\text{auto-regressão}} + \underbrace{h_1 e_{t-1} + h_2 e_{t-2} + \dots + h_q e_{t-q}}_{\text{média móvel}} + e_t \quad (2.3)$$

onde c é uma constante, (a_1, a_2, \dots, a_p) são coeficientes da auto-regressão, p é a ordem auto-regressiva do modelo, (h_1, h_2, \dots, h_p) são coeficientes da média móvel, q é a ordem da média móvel e e_t é um erro com média zero, variância σ^2 e distribuição normal. Uma maneira simplificada de denominar um modelo ARIMA é representá-lo por três valores p , d e q (ARIMA(p,d,q)) (mais detalhes sobre ARIMA procurar em Box et al (1994) ou Makridalis et al (1998)). Por exemplo, um modelo ARIMA (2,0,3) tem a seguinte expressão:

$$y_t = c + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + h_1 e_{t-1} + h_2 e_{t-2} + h_3 e_{t-3} + e_t$$

Outra maneira de representação é utilizando o operador de atraso L , onde $Ly_t = y_{t-1}$, $L^2 y_t = y_{t-2}$. Reescrevendo o exemplo acima:

$$\begin{aligned} y_t - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} &= c + h_1 e_{t-1} + h_2 e_{t-2} + h_3 e_{t-3} + e_t \\ (1 - a_1 L - a_2 L^2) y_t &= c + (1 + h_1 L + h_2 L^2 + h_3 L^3) \end{aligned}$$

A forma geral de um modelo ARIMA pode se escrita como na equação (2.4):

$$a(L)y_t = c + h(L)e_t \quad (2.4)$$

onde $a(L)$ e $h(L)$ são polinômios em L . É esta forma que será utilizada para demonstrar a equivalência de modelos ARIMA e suavização exponencial, destacando que apenas modelos lineares de suavização exponencial possuem equivalência (ANN, AAN, AA_dN, ANA, AAA e

AA_dA). Como exemplo será desenvolvido a equivalência do modelo AAN Hyndman et al (2008a):

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + e_t$$

$$l_{t-1} = l_{t-2} + b_{t-2} + \alpha e_{t-1} \rightarrow \boxed{(1-L)l_{t-1} = b_{t-2} + \alpha L e_t}$$

$$b_{t-1} = b_{t-2} + \beta^* e_{t-1} \rightarrow \boxed{(1-L)b_{t-1} = \beta^* L e_t}$$

$$(1-L)y_t = (1-L)l_{t-1} + (1-L)b_{t-1} + (1-L)e_t$$

$$(1-L)y_t = b_{t-2} + \alpha L e_t + \beta^* L e_t + (1-L)e_t$$

$$b_{t-2} = b_{t-3} + \beta^* e_{t-2} \rightarrow \boxed{(1-L)b_{t-2} = \beta^* L^2 e_t}$$

$$(1-L)(1-L)y_t = (1-L)b_{t-2} + (1-L)\alpha L e_t + (1-L)\beta^* L e_t + (1-L)(1-L)e_t$$

$$(1-L)^2 y_t = \beta^* L^2 e_t + (1-L)\alpha L e_t + (1-L)\beta^* L e_t + (1-L)^2 e_t$$

$$\boxed{(1-L)^2 y_t = [1 - (2 - \alpha - \beta^*)L - (\alpha - 1)L^2] e_t}$$

Na Tabela 8 é apresentado o resultado dos outros cinco modelos.

Tabela 8 - Equivalência entre suavização exponencial e ARIMA.

Suavização Exponencial	ARIMA	ARMA $(p,d,q)/(P,D,Q)_m$
(ANN) $y_t = l_{t-1} + e_t$ $l_t = l_{t-1} + \alpha e_t$	$(1-L)y_t = (1-\phi L)e_t$ $\phi = 1 - \alpha$	ARIMA(0,1,1)
(AAN) $y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + e_t$ $l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha e_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta^* e_t$	$(1-L)^2 y_t = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)e_t$ $\phi_1 = 2 - \alpha - \beta^*$ $\phi_2 = \alpha - 1$	ARIMA(0,2,2)
(AA _d N) $y_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + e_t$ $l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha e_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta^* e_t$	$(1-L)(1-\phi L)y_t = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)e_t$ $\phi_1 = 1 - \alpha + \phi(1 - \beta^*)$ $\phi_2 = \phi(\alpha - 1)$	ARIMA(1,1,2)
(ANA) $y_t = l_{t-1} + s_{t-m} + e_t$ $l_t = l_{t-1} + \alpha e_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma e_t$	$(1-L^m)y_t = (1 + \phi_1 L + \dots + \phi_{m-1} L^{m-1} + \phi_m L^m)e_t$ $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{m-1} = \alpha$ $\phi_m = \alpha + \gamma - 1$	ARIMA(0,0,m)(0,1,0) _m
(AAA) $y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} + e_t$ $l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha e_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta^* e_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma e_t$	$(1-L)(1-L^m)y_t = (1 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \dots + \phi_{m-1} L^{m-1} + \phi_m L^m + \phi_{m+1} L^{m+1})e_t$ $\phi_1 = \alpha + \beta - 1$ $\phi_2, \dots, \phi_{m-1} = \beta$ $\phi_m = \beta + \gamma - 1$ $\phi_{m+1} = 1 - \alpha - \gamma$	ARIMA(0,1,m+I)(0,1,0) _m
(AA _d A) $y_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m} + e_t$ $l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha e_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta^* e_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma e_t$	$(1-\phi L)(1-L^m)y_t = (1 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \dots + \phi_{m-1} L^{m-1} + \phi_m L^m + \phi_{m+1} L^{m+1})e_t$ $\phi_1 = \alpha + \phi(\beta - 1)$ $\phi_2, \dots, \phi_{m-1} = \phi\beta - \alpha(\phi - 1)$ $\phi_m = \phi\beta + \gamma - 1 - \alpha(\phi - 1)$ $\phi_{m+1} = \phi(1 - \alpha - \gamma)$	ARIMA(1,0,m+I)(0,1,0) _m

A equivalência entre os modelos de suavização exponencial e ARIMA é importante, pois permitiu o cálculo de intervalo de confiança para as previsões na suavização exponencial (para os seis modelos da Tabela 8) e a encontrar a faixa de valores para a restrição dos parâmetros de suavização, já que a invertibilidade dos modelos ARIMA é equivalente a estabilidade nos modelos de espaço de estado (Snyder et al, 2001).

2.5 Estimação dos parâmetros de suavização

A estimação dos parâmetros de suavização $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \phi)$ e do vetor de estado inicial $x_0 = (l_0, b_0, s_{-m+1}, \dots, s_0)$ do modelo de espaço de estado apresentado na seção 2.3 (Tabela 7) é feita pela função de verossimilhança desenvolvida em Ord et al (1997). Minimizando a equação (2.5) tem-se a estimação dos parâmetros do modelo:

$$L^*(\theta, x_0) = n \log \left(\sum_{t=1}^n e_t^2 \right) + 2 \sum_{t=1}^n \log |r(x_{t-1})| \quad (2.5)$$

lembrando que $e_t = y_t - \mu_t$ e $r(x_{t-1}) = 1$ para erro aditivo e $e_t = (y_t - \mu_t)/\mu_t$ e $r(x_{t-1}) = \mu_t$ para erro multiplicativo e n é o tamanho da amostra. Por exemplo, as funções para os modelos AAN e MAN da Tabela 7 são respectivamente:

$$\text{AAN: } L^*(\theta, x_0) = n \log \left(\sum_{t=1}^n (y_t - l_{t-1} - b_{t-1})^2 \right) + 2 \sum_{t=1}^n \log |1|$$

$$\boxed{\text{AAN: } L^*(\theta, x_0) = n \log \left(\sum_{t=1}^n (y_t - l_{t-1} - b_{t-1})^2 \right)}$$

onde $\theta = (\alpha, \beta)$; $x_0 = (l_0, b_0)$; $l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha e_t$; $b_t = b_{t-1} + \beta^* e_t$.

$$\boxed{\text{MAN: } L^*(\theta, x_0) = n \log \left(\sum_{t=1}^n \left(\frac{y_t - l_{t-1} - b_{t-1}}{l_{t-1} + b_{t-1}} \right)^2 \right) + 2 \sum_{t=1}^n \log |l_{t-1} + b_{t-1}|}$$

onde $\theta = (\alpha, \beta)$; $x_0 = (l_0, b_0)$; $l_t = (l_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha e_t)$; $b_t = b_{t-1} + \beta^*(l_{t-1} + b_{t-1})e_t$

Note que o vetor x_0 é necessário para iniciar o modelo, já que é indispensável para a previsão do período um. Os valores iniciais (semente) que serão otimizados na equação (2.5)

podem ser calculados segundo a heurística proposta em Hyndman et al (2002) ou Makridakis et al (1998). De forma resumida a heurística em Hyndman et al (2002) e Hyndman et al (2008a) é:

- Valores iniciais para $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,1$, $\gamma = 0,01$ e $\phi = 0,99$;
- Para os dados sazonais fazer uma decomposição clássica (pode ser visto em Makridakis et al(1998) ou Souza et al (2008)) nos primeiros anos da série (4 anos se tiver);
- Normalizar os índices encontrados. Média zero para sazonalidade aditiva e um para a multiplicativa. Para dados sazonais fazer uma tendência linear com as dez primeiras observações sazonalmente ajustadas (usando os índices encontrados anteriormente) contra a variável tempo $t = 1, \dots, 10$;
- Para dados não sazonais fazer uma tendência linear das dez primeiras observações contra a variável tempo $t = 1, \dots, 10$;
- l_0 é o intercepto da tendência;
- Para tendência aditiva, b_0 é a inclinação da tendência;
- Para tendência multiplicativa, $b_0 = 1 + b/a$ onde a é o intercepto e b a inclinação da reta de tendência.

Além de um método para estimar os parâmetros de suavização é importante também uma metodologia para escolha do “melhor” modelo (dentre os 30 disponíveis). Esta metodologia foi desenvolvida em Hyndman et al (2002) e se utiliza do critério de Akaike (1973), conhecido como AIC (equação(2.6)).

$$AIC = L^*(\theta, x_0) + 2p \quad (2.6)$$

Onde p é o número de parâmetros estimados do modelo. Por exemplo, para uma série mensal e modelo M_dM os parâmetros estimados são: $\alpha, \beta, \gamma, \phi, l_0, b_0, s_{-11}, \dots, s_{-1}$. Portanto são os quatro parâmetros de suavização, o nível, crescimento e onze índices sazonais (o décimo segundo índice sazonal pode ser calculado a partir dos outros onze) iniciais. O número de parâmetros para os demais modelos podem ser vistos na Tabela 9.

Tabela 9 - Número de parâmetros estimados para os métodos exponenciais com sazonalidade mensal

Tendência	Sazonalidade					
	Nenhuma		Aditiva		Multiplicativa	
	Parâmetros		Parâmetros		Parâmetros	
Nenhuma	NN	2	NA	14	NM	14
Aditiva	AN	4	AA	16	AM	16
Aditiva Amortecida	A _d N	5	A _d A	17	A _d M	17
Multiplicativa	MN	4	MA	16	MM	16
Multiplicativa Amortecida	M _d N	5	M _d A	17	M _d M	17

Fonte: Souza et al (2008)

O modelo que apresentar o menor AIC é escolhido como “melhor”. Esta metodologia foi implementada como suplemento (Add-in) de Excel no software nnq-estatística. (Seu download pode ser feito www.qualimetria.ufsc.br)

2.6 Intervalo de confiança para as previsões

Em Hyndman et al (2005) foram definidos intervalos de confiança analíticos para as previsões para três classes de modelos de espaço de estado (Ord et al (1997) já havia sugerido intervalos calculados por simulação). Quinze modelos da Tabela 7 pertencem as estas classes, para os demais deve-se utilizar simulação (Hyndman et al (2008a)).

- Classe 1: ANN, AAN, AA_dN, ANA, AAA e AA_dA (modelos lineares com erro aditivo)
- Classe 2: MNN, MAN, MA_dN, MNA, MAA e MA_dA (modelos lineares com erro multiplicativo)
- Classe 3: MNM, MAM e MA_dM (modelos não lineares – sazonalidade multiplicativa – com erro multiplicativo)
- Demais modelos (simulação)

As expressões para a média e a variância das previsões são descritas nas Tabelas 10 e 11 respectivamente.

Tabela 10 – Média e variância para as previsões k períodos à frente. $\tilde{\mu}_t$ é uma aproximação nos modelos da classe 3.

	Média	Variância
Classe 1	μ_t	$v_1 = \sigma^2$ e $v_k = \sigma^2(1 + \sum_{j=1}^{k-1} c_j^2)$
Classe 2	μ_t	$v_k = (1 + \sigma^2)\theta_k - \mu_k^2$ onde $\theta_k = \mu_k^2 + \sigma^2 \sum_{j=1}^{k-1} c_j^2 \theta_{k-j}$
Classe 3	$\tilde{\mu}_k$	$v_k = s_{n-m+k}^2 [\theta_k(1 + \sigma^2)(1 + \gamma^2 \sigma^2)^k - \tilde{\mu}_k^2]$ onde $\theta_1 = \tilde{\mu}_1^2$, $\theta_k = \tilde{\mu}_k^2 + \sigma^2 \sum_{j=1}^{k-1} c_j^2 \theta_{k-j}$

Fonte: adaptado de Hyndman et al (2005)

Lembrando que para os modelos com erro aditivo e multiplicativo as variâncias σ^2 são estimadas de forma diferente:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{t=1}^n e_t^2 / n \quad e_t = \begin{cases} y_t - \mu_t & \text{para classe 1} \\ (y_t - \mu_t) / \mu_t & \text{para classe 2 e 3} \end{cases}$$

Na Tabela 11 $\phi_j = 1 + \phi + \dots + \phi^j = (1 - \phi^{j+1}) / (1 - \phi)$, $d_{j,m} = 1$ se $j = m \bmod m$ e 0 qualquer outra situação, onde $i \bmod j$ é igual ao resto da divisão de i por j .

Tabela 11 - Valores de μ_k , $\tilde{\mu}_k$ e c_j para os 15 modelos.

	μ_k	$\tilde{\mu}_k$	c_j
Classe1/Classe2			
ANN/MNN	l_n		α
AAN/MAN	$l_n + kb_n$		$\alpha(1 + j\beta)$
AA _d N/MA _d N	$l_n + \phi_{k-1}b_n$		$\alpha(1 + \phi_{j-1}\beta)$
ANA/MNA	$l_n + s_{n-m+k}$		$\alpha + \gamma d_{j,m}$
AAA/MAA	$l_n + kb_n + s_{n-m+k}$		$\alpha(1 + j\beta) + \gamma d_{j,m}$
AA _d A/MA _d A	$l_n + \phi_{k-1}b_n + s_{n-m+k}$		$\alpha(1 + \phi_{j-1}\beta) + \gamma d_{j,m}$
Classe 3			
MNM	$l_n s_{n-m+k}$	l_n	α
MAM	$(l_n + kb_n)s_{n-m+k}$	$l_n + kb_n$	$\alpha(1 + j\beta)$
MA _d M	$(l_n + \phi_{k-1}b_n)s_{n-m+k}$	$l_n + \phi_{k-1}b_n$	$\alpha(1 + \phi_{j-1}\beta)$

Fonte: Hyndman et al (2005).

Observando as Tabelas 10 e 11 percebe-se que a variância para os modelos da classe um só dependem de σ^2 , dos parâmetros de suavização e do horizonte de previsão. Quanto maior for o valor dos parâmetros (como estimar na seção 2.5) maior é a variabilidade da série e conseqüentemente maior é a variância das previsões. Assim quanto maior for o horizonte de previsão maior é a variância.

Já nos modelos das classes dois e três a variância da previsão além de depender σ^2 , dos parâmetros de suavização, do horizonte de previsão, também depende da média (por isso estes modelos são heterocedásticos) . A média é o valor das componentes dos modelos, nível, crescimento e sazonalidade.

O intervalo de confiança para a previsão é calculado da seguinte forma: $\mu_k \pm z_{\alpha/2} \sqrt{v_k}$. Onde z_q é o q ésimo quantil da distribuição normal padronizada. Para os modelos das classes 2 e 3 a distribuição não é normal, mas segundo Hyndman et al (2005) o intervalo pode ser aproximado pela equação acima.

2.7 Suavização exponencial com dupla sazonalidade

O primeiro modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade foi proposto por Taylor (2003a) para fazer previsões da demanda de energia elétrica com horizontes de previsão de meia-hora a um dia à frente. Para este problema em específico existem dois ciclos sazonais, um para as 48 meias horas do dia e um para 336 meias horas da semana, ou seja, um ciclo maior que compreende os 7 dias da semana e outro menor das horas de um dia. Não só neste trabalho como em outros publicados posteriormente (Taylor et al (2006), Morzuch e Allen (2006), Gould et al (2008), Taylor (2008)) verificou-se que a suavização exponencial com dupla sazonalidade apresenta bons resultados quando comparados com outros modelos, como o Holt-Winters tradicional, redes neurais e ARIMA com dupla sazonalidade. A formulação é a mesma que a do Holt-Winters tradicional, mas possui uma equação a mais para acomodar o outro ciclo sazonal. Os modelos podem ser com sazonalidade aditiva ou multiplicativa, como mostram as equações abaixo.

Para o caso aditivo:

$$l_t = \alpha(y_t - s_{t-m_1} - u_{t-m_2}) + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \quad (2.7)$$

$$b_t = \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \quad (2.8)$$

$$s_t = \gamma(y_t - l_t - u_{t-m_2}) + (1 - \gamma)s_{t-m_1} \quad (2.9)$$

$$u_t = \omega(y_t - l_t - s_{t-m_1}) + (1 - \omega)u_{t-m_2} \quad (2.10)$$

$$F_{t+k} = l_t + kb_t + s_{t-m_1+k} + u_{t-m_2+k} \quad (2.11)$$

Para o caso multiplicativo:

$$l_t = \alpha \left(\frac{y_t}{s_{t-m_1} u_{t-m_2}} \right) + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \quad (2.12)$$

$$b_t = \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \quad (2.13)$$

$$s_t = \gamma \left(\frac{y_t}{l_t u_{t-m_2}} \right) + (1 - \gamma)s_{t-m_1} \quad (2.14)$$

$$u_t = \omega \left(\frac{y_t}{l_t s_{t-m_1}} \right) + (1 - \omega)u_{t-m_2} \quad (2.15)$$

$$F_{t+k} = (l_t + kb_t)s_{t-m_1+k}u_{t-m_2+k} \quad (2.16)$$

Nestes dois modelos a sazonalidade 1 (s_t) representa o ciclo sazonal menor (sazonalidade do dia para o exemplo de energia elétrica) e a sazonalidade 2 (u_t) o ciclo sazonal maior (dia da semana para o exemplo de energia elétrica), sendo m_1 o tamanho do ciclo sazonal menor e m_2 é o tamanho do ciclo sazonal maior.

Para a representação na forma de correção de erro e que coincida com a dos modelos de espaço de estado é feita uma modificação nas equações substituindo l_t por $l_{t-1} + b_{t-1}$ em (2.9), (2.10), (2.14) e (2.15).

Modelo aditivo:

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha e_t \quad (2.17)$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta^* e_t \quad (2.18)$$

$$s_t = s_{t-m_1} + \gamma e_t \quad (2.19)$$

$$u_t = u_{t-m_2} + \omega e_t \quad (2.20)$$

Modelo multiplicativo:

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \frac{e_t}{s_{t-m_1} u_{t-m_2}} \quad (2.21)$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta^* \frac{e_t}{s_{t-m_1} u_{t-m_2}} \quad (2.22)$$

$$s_t = s_{t-m_1} + \gamma \frac{e_t}{(l_{t-1} + b_{t-1}) u_{t-m_2}} \quad (2.23)$$

$$u_t = u_{t-m_2} + \omega \frac{e_t}{(l_{t-1} + b_{t-1}) s_{t-m_1}} \quad (2.24)$$

Os valores iniciais de nível, crescimento e dos índices sazonais podem ser encontrados seguindo a heurística de Hyndman et al (2002) com algumas adaptações:

1. para os dados sazonais fazer uma decomposição clássica utilizando m_2 como sazonalidade, nos primeiros ciclos da série (4 se tiverem);
2. normalizar os índices encontrados. Média zero para sazonalidade aditiva e um para a multiplicativa;
3. fazer a média dos índices sazonais correspondentes a m_1 (encontram-se os índices sazonais do ciclo sazonal menor s_t);
4. subtrair os índices sazonais encontrados em 2 de 3 (encontram-se os índices sazonais do ciclo sazonal maior u_t).
5. fazer uma tendência linear com as primeiras observações da série (um ciclo sazonal maior) sazonalmente ajustadas (usando os índices encontrados em 3 e 4) contra a variável tempo $t = 1, \dots, m_2$;
6. l_0 é o intercepto da tendência;
7. Para tendência aditiva, b_0 é a inclinação da tendência. Para tendência multiplicativa, $b_0 = 1 + b/a$ onde a é o intercepto e b a inclinação da reta de tendência.

Os valores de α , β , γ (parâmetro do ciclo sazonal menor) e ω (parâmetro de suavização do ciclo sazonal maior) são restritos para variar entre 0 e 1 (Taylor (2003a), Taylor et al (2006), Morzuch e Allen (2006), Gould et al (2008), Taylor (2008)). Embora seja apresentado no capítulo 4 que as restrições para os parâmetros são diferentes quando se garante a estabilidade do modelo. Mas na próxima seção será apresentado um exemplo de aplicação deste modelo com os parâmetros de suavização podendo variar entre 0 e 1 a uma série com dupla sazonalidade.

2.8 Exemplo de aplicação da suavização exponencial com dupla sazonalidade

O exemplo a seguir é uma aplicação da suavização exponencial com dupla sazonalidade aos dados horários de energia elétrica de Santa Catarina. Os dados de consumo são do período de 29/06/2003 a 23/08/2003 (8 semanas de dados) (Figura 2).

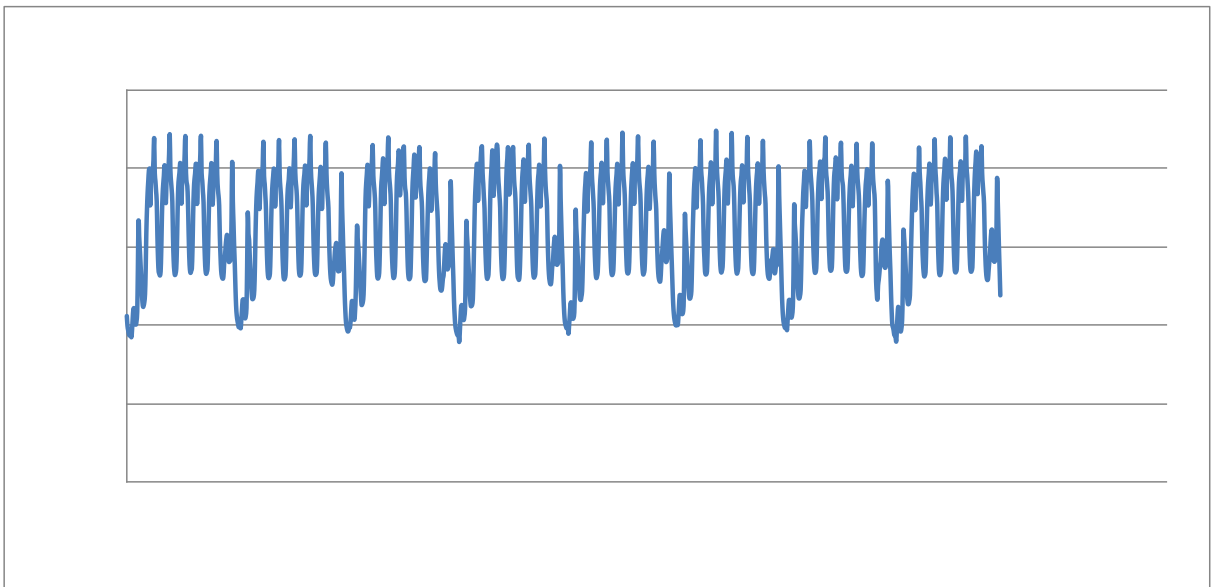


Figura 2 - Consumo de energia horária em Santa Catarina (8 semanas)

Aplicando as equações (2.17) a (2.20) e os procedimentos para calcular os valores iniciais das componentes de nível, crescimento e sazonalidade descritos na seção anterior, obteve-se os resultados para o valor dos parâmetros do modelo apresentados na Tabela 12.

Tabela 12 - Parâmetros estimados e erros de previsão dentro da amostra para o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade para a série de dados do consumo horário de Santa Catarina

Modelo	α	β	γ	ω	MSE	MAPE
Suavização exponencial com dupla sazonalidade	0,8399	0	0,1215	0,0389	347,95	0,75%

Na Tabela 12, MSE significa soma dos erros quadrados médio e MAPE é o erro percentual absoluto médio. Aplicando o valor dos parâmetros as equações do modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade obtêm-se as equações apresentadas a seguir:

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-24} + u_{t-168} + e_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + 0,8399e_t$$

$$b_t = b_{t-1} = b_0$$

$$s_t = s_{t-24} + 0,1215e_t$$

$$u_t = u_{t-168} + 0,0389e_t$$

Uma das vantagens em se utilizar a suavização exponencial é que a série de dados é decomposta em componentes, podendo ser evidenciada as características de tendência e sazonalidade. Observando as equações acima é possível perceber que o nível da série está variando bastante (valor do coeficiente alfa perto de um), o crescimento da série é constante (beta igual a zero), a sazonalidade das horas do dia se modificam pouco e a sazonalidade das horas da semana praticamente é constante.

Na Figura 3 é apresentado o valor observado e o valor do modelo ajustado para as duas últimas semanas de dados. Percebe-se que o modelo se ajusta bem aos dados ocorridos, mostrando que este modelo é adequado para se fazer previsões

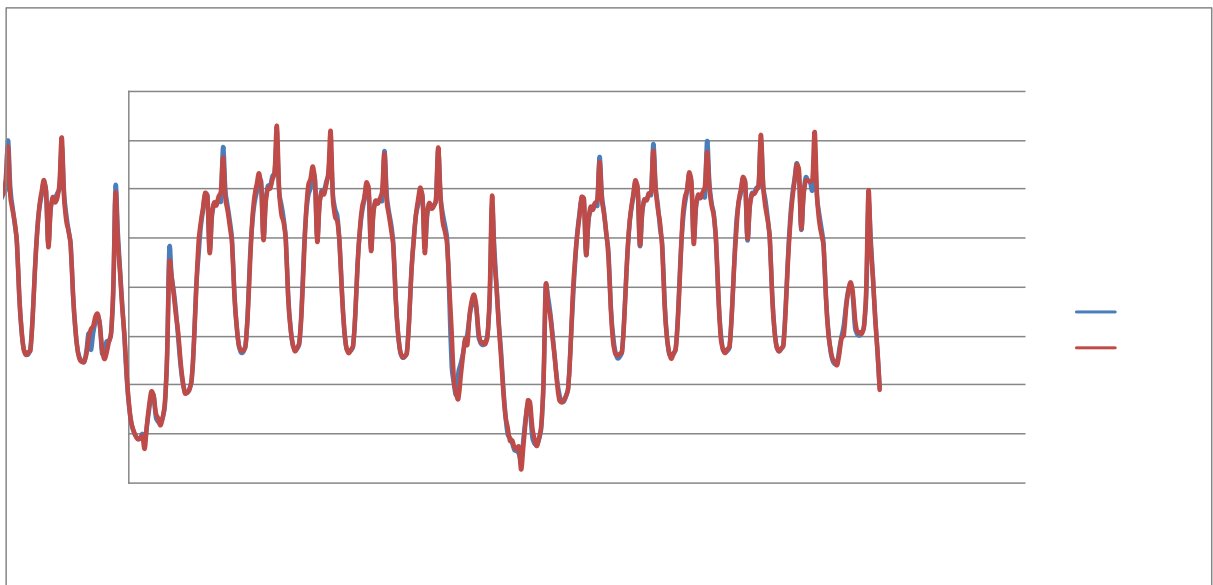


Figura 3 - Observado e modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade ajustado para os dados de consumo de energia elétrica

Já na Figura 4 é possível ver a variabilidade do nível da série. Esta variabilidade fez com que o parâmetro estimado para alfa seja 0,8399, mostrando a dificuldade em se prever o nível da série.

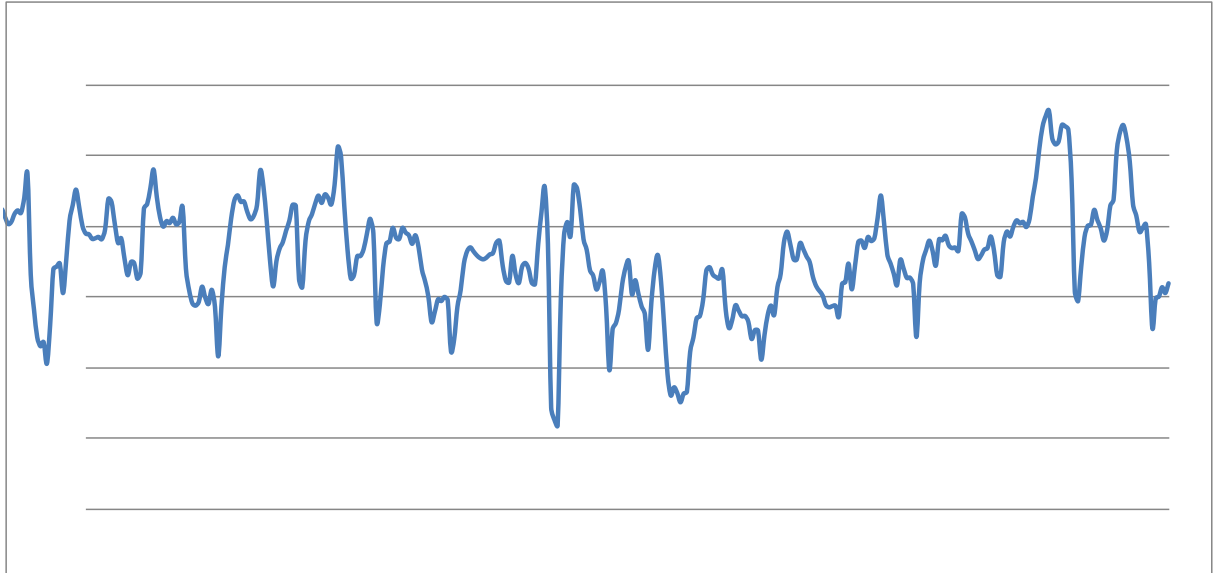


Figura 4 - Nível da série de consumo horário de energia elétrica

A Figura 5 mostra a componente sazonal semanal calculada das duas últimas semanas de dados e verifica-se um padrão estável, fato que justifica o valor baixo de ω . Basicamente de terça a sexta os dados tem o mesmo comportamento. Os dias atípicos são segunda, sábado e domingo com um comportamento próprio.

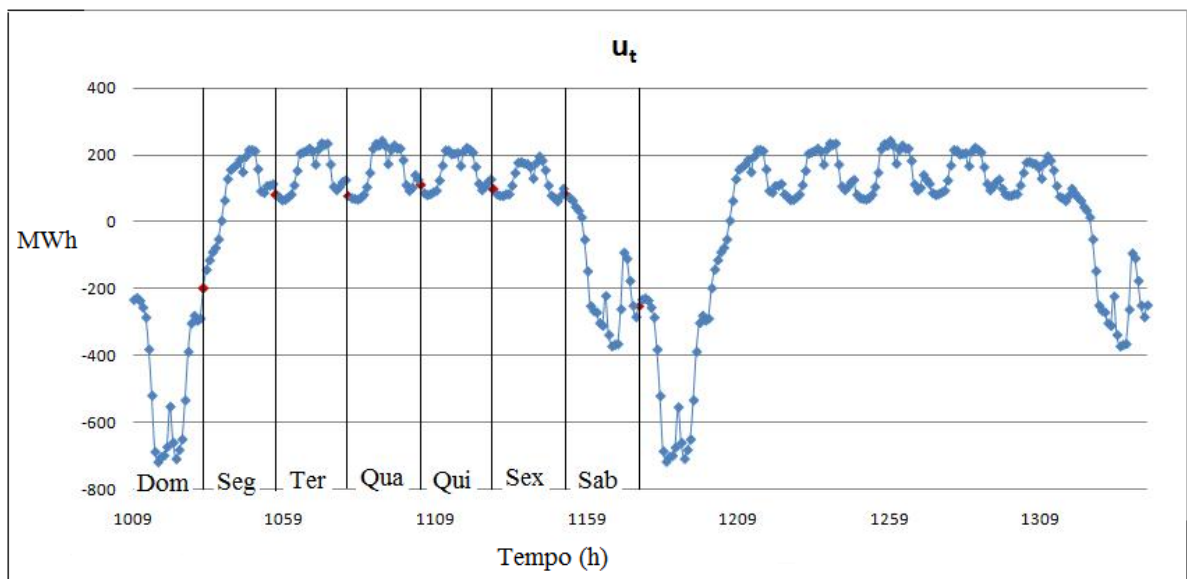


Figura 5 - Sazonalidade semanal para os dados de energia elétrica

Já o padrão sazonal para as horas do dia mostra que da 01:00 às 08:00 da manhã o consumo de energia é inferior a média do dia, das 08:00 às 12:00 o consumo aumenta com uma queda as 13:00 horas. O pico de consumo é as 19:00 horas com uma redução gradual até as 24:00. Este padrão é apresentado na Figura 6.

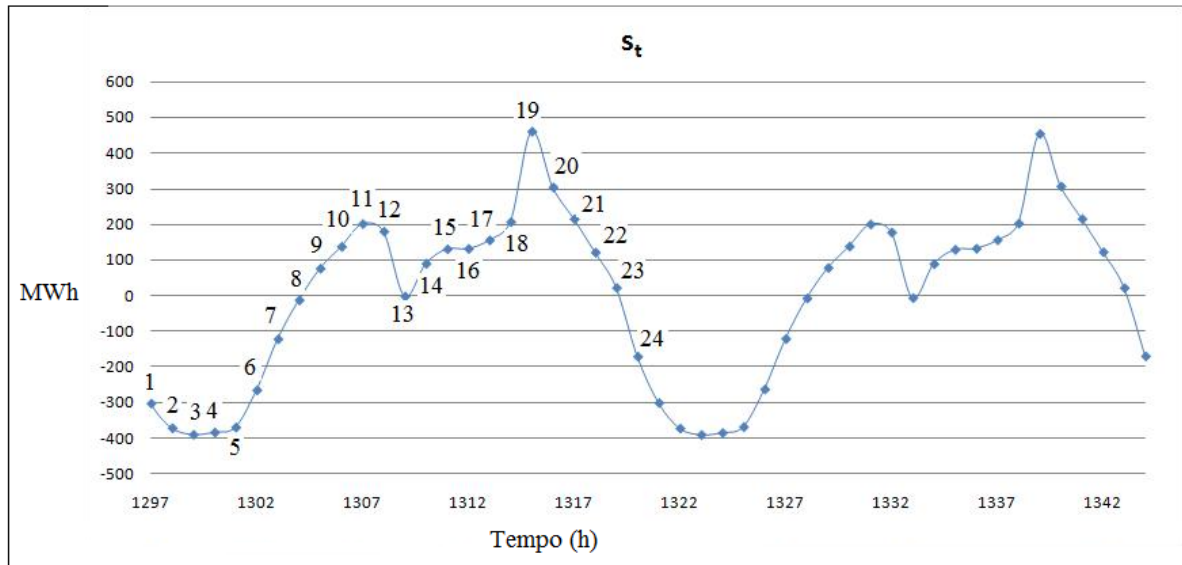


Figura 6– Sazonalidade diária para os dados de energia elétrica

Observado a Figura 7 fica claro que os dias de semana são semelhantes, enquanto que sábado e domingo apresentam um padrão diferente. O consumo de sábado e domingo é inferior aos demais dias da semana, principalmente porque algumas fábricas não funcionam ou têm seu horário de trabalho reduzido.

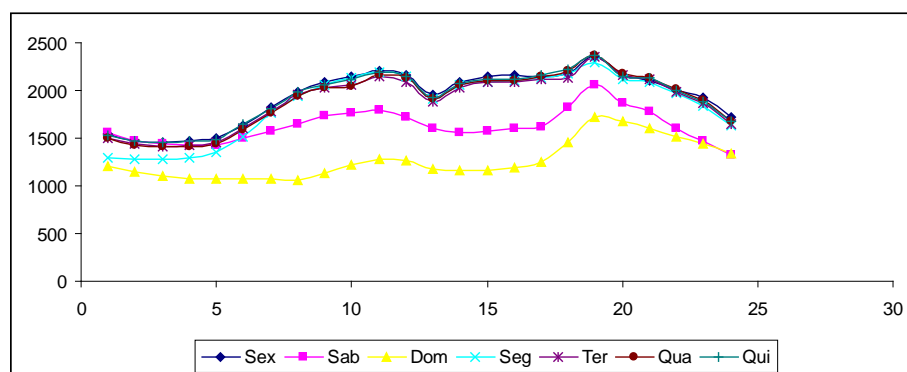


Figura 7 - Consumo diário de energia

Uma das vantagens em se utilizar a suavização exponencial em relação aos outros métodos de previsão univariados, como ARIMA e redes neurais, é a possibilidade de se

analisar cada componente da série separadamente. No caso do consumo de energia elétrica é possível identificar quais são as horas do dia e da semana com maior consumo.

2.9 Considerações finais

Neste capítulo foi apresentada a revisão teórica sobre a formulação e as propriedades estatísticas dos modelos de suavização exponencial. Os principais avanços na área de modelos de suavização exponencial foi um método de estimação através de uma função de verossimilhança e a utilização de um critério para a seleção automática dos diversos modelos. Além disso, foram desenvolvidos intervalos de confiança analíticos para maioria dos modelos, isto é um grande avanço, já que estes modelos sempre foram criticados (pelos acadêmicos) por não terem uma base estatística e serem determinísticos (mesmo apresentando bons resultados em relação a outros modelos).

Além das propriedades estatísticas existe outra importantíssima para a utilização destes modelos, é a estabilidade. Mas neste capítulo não se analisou a estabilidade (equivalente a invertibilidade dos modelos ARIMA). A revisão teórica para estabilidade será apresentada no próximo capítulo para 6 modelos lineares. São 3 modelo não sazonais e 3 modelos sazonais. Já no capítulo 4 são apresentados os resultados encontrados nesta tese para a estabilidade do modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade, tanto com crescimento quanto sem.

3 ESTABILIDADE PARA OS MODELOS DE SUAVIZAÇÃO EXPONENCIAL

No capítulo anterior foi apresentada a equivalência entre os modelos de suavização exponencial e modelos de espaço de estado. Esta equivalência permite utilizar algumas técnicas advindas da área de controle digital (sinal discreto), como o teste de Jury para a estabilidade de sistemas discretos. Este teste permite encontrar o espaço admissível dos parâmetros do modelo, isto é, até onde os parâmetros podem ser modificados e ao mesmo tempo se garanta a estabilidade do sistema. No caso dos modelos de suavização exponencial, quando o modelo é estável (ou previsível), se garante que a previsão vai ser formada pela soma das observações anteriores, com pesos que decaem exponencialmente com o tempo.

Para descrever o conceito de estabilidade em modelos de suavização exponencial o capítulo está dividido nas seguintes seções. Na seção 3.1 é apresentado o modelo de espaço de estado linear, na seção 3.2 as quatro propriedades para garantir que os modelos façam previsões estáveis, na seção 3.3 a estabilidade para os seis modelos de suavização exponencial lineares. Já na seção 3.4 discute-se o teste de Jury para a estabilidade.

3.1 Modelo de espaço de estado linear

O modelo de espaço de estado apresentado na seção 2.3 representa tanto modelos lineares quanto não lineares de suavização exponencial (Ord et al, 1997). Nesta seção é apresentado o modelo de espaço de estado linear, que foi utilizado pela primeira vez em Snyder (1985). O modelo linear é representado pelas equações (3.1) e (3.2).

$$y_t = w'x_{t-1} + e_t \quad (3.1)$$

$$x_t = Fx_{t-1} + ge_t \quad (3.2)$$

A equação (3.1) é conhecida como equação mensurável (ou observável), onde descreve a relação entre o vetor de estado (não observado) x_t e o valor observado y_t . A equação (3.2), chamada de transição (ou estado), representa como o vetor de estado $x_t = (l_t, b_t, s_t, \dots, s_{t-m+1})$ se modifica do estado $t - 1$ para t , sendo que l_t é o nível, b_t o crescimento e s_t a sazonalidade da série no período t . O erro e_t é independente, aleatório com

média zero, variância σ^2 e distribuição normal. Os vetores w , g e a matriz F são definidas para os 6 modelos de suavização exponencial lineares em Hyndman et al (2008b):

$$\begin{array}{llll}
 \text{ANN:} & x_t = l_t & w = 1 & F = 1 & g = \alpha \\
 \text{AAN:} & x_t = \begin{bmatrix} l_t \\ b_t \end{bmatrix} & w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & g = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta^* \end{bmatrix} \\
 \text{AA}_d\text{N:} & x_t = \begin{bmatrix} l_t \\ b_t \end{bmatrix} & w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} & g = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta^* \end{bmatrix} \\
 \text{ANA:} & x_t = \begin{bmatrix} l_t \\ s_t \\ s_{t-1} \\ \vdots \\ s_{t-m+1} \end{bmatrix} & w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix} & F = \begin{bmatrix} 1 & 0'_{m-1} & 0 \\ 0 & 0'_{m-1} & 1 \\ 0_{m-1} & I_{m-1} & 0_{m-1} \end{bmatrix} & g = \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \\ 0_{m-1} \end{bmatrix} \\
 \text{AAA:} & x_t = \begin{bmatrix} l_t \\ b_t \\ s_t \\ s_{t-1} \\ \vdots \\ s_{t-m+1} \end{bmatrix} & w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix} & F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0'_{m-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0'_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0'_{m-1} & 1 \\ 0_{m-1} & 0_{m-1} & I_{m-1} & 0_{m-1} \end{bmatrix} & g = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta^* \\ \gamma \\ 0_{m-1} \end{bmatrix} \\
 \text{AA}_d\text{A:} & x_t = \begin{bmatrix} l_t \\ b_t \\ s_t \\ s_{t-1} \\ \vdots \\ s_{t-m+1} \end{bmatrix} & w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0_{m-1} \\ 1 \end{bmatrix} & F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0'_{m-1} & 0 \\ 0 & \phi & 0'_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0'_{m-1} & 1 \\ 0_{m-1} & 0_{m-1} & I_{m-1} & 0_{m-1} \end{bmatrix} & g = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta^* \\ \gamma \\ 0_{m-1} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

onde 0_k é um vetor de zeros de tamanho k e I_k é uma matriz identidade de ordem $k \times k$. A definição destas matrizes é importante para o estudo das propriedades que serão apresentados na próxima seção.

3.2 Propriedades para os modelos de espaço de estado lineares

Os modelos de espaço de estado possuem quatro propriedades descritas em Hyndman et al (2008b) e Hyndman et al (2008a). As duas primeiras verificam se o modelo é observável e controlável (prova para estas duas propriedades podem ser encontradas em Ogata (1995)), e as duas últimas se o modelo é estável e previsível.

Propriedade 1: o modelo de espaço de estado (equações (3.1) e (3.2)) é controlável se for possível calcular o valor de todas as variáveis de estado a partir do erro de previsão. Esta

propriedade está relacionada apenas à equação (3.2). O modelo é controlável se $\text{Rank}(C) = p$, onde $C = [g, Fg, F^2g, \dots, F^{p-1}g]$ e p é o tamanho do vetor x_t .

Aplicando esta propriedade aos 6 modelos de suavização exponencial da seção 3.1 são obtidos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \text{Modelo ANN:} \quad p = 1 \quad \text{Rank}(C) = 1 \quad C &= [\alpha] \\ \text{Modelo AAN:} \quad p = 2 \quad \text{Rank}(C) = 2 \quad C &= \begin{bmatrix} \alpha & \alpha + \beta^* \\ \beta^* & \beta^* \end{bmatrix} \\ \text{Modelo AA}_d\text{N:} \quad p = 2 \quad \text{Rank}(C) = 2 \quad C &= \begin{bmatrix} \alpha & \alpha + \beta^* \\ \beta^* & \phi\beta^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para os modelos sazonais será considerado o ciclo sazonal $m = 4$ como exemplo.

$$\begin{aligned} \text{Modelo ANA:} \quad p = 4 + 1 \quad \text{Rank}(C) = 4 \quad C &= \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Modelo AAA:} \quad p = 4 + 2 \quad \text{Rank}(C) = 5 \quad C &= \begin{bmatrix} \alpha & \alpha + \beta^* & \alpha + 2\beta^* & \alpha + 3\beta^* & \alpha + 4\beta^* & \alpha + 5\beta^* \\ \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Modelo AA}_d\text{A:} \quad p = 4 + 2 \quad \text{Rank}(C) = 5 \quad C &= \begin{bmatrix} \alpha & \alpha + \beta^* & \alpha + \sum_{i=0}^1 \phi^i \beta^* & \alpha + \sum_{i=0}^2 \phi^i \beta^* & \alpha + \sum_{i=0}^3 \phi^i \beta^* & \alpha + \sum_{i=0}^4 \phi^i \beta^* \\ \beta^* & \phi\beta^* & \phi^2\beta^* & \phi^3\beta^* & \phi^4\beta^* & \phi^5\beta^* \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Os três modelos não sazonais são controláveis, isto é, as variáveis de estado são atualizadas a cada novo erro de previsão. Já os três modelos sazonais não são controláveis, pois apenas um índice sazonal é atualizado a cada período de tempo t , quando todos deveriam ser atualizados simultaneamente. Por exemplo, para o modelo ANA a equação de estado é:

$$\begin{bmatrix} l_t \\ s_t \\ s_{t-1} \\ s_{t-2} \\ s_{t-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{t-1} \\ s_{t-1} \\ s_{t-2} \\ s_{t-3} \\ s_{t-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_t = \begin{bmatrix} l_{t-1} + \alpha e_t \\ s_{t-4} + \gamma e_t \\ s_{t-1} \\ s_{t-2} \\ s_{t-3} \end{bmatrix}$$

Apenas o índice sazonal s_t é atualizado a cada período de tempo t , portanto o modelo não é controlável.

Propriedade 2: o modelo (equações (3.1) e (3.2)) é observável se for possível determinar o estado inicial x_0 a partir de y_t para qualquer período t . Esta propriedade está relacionada tanto com a equação (3.1) quanto a (3.2). O modelo é observável se $Rank(O) = p$, onde $O = [w, F'w, (F')^2w, \dots, (F')^{p-1}w]$ e p é o tamanho do vetor x_t .

Aplicando esta propriedade aos 6 modelos de suavização exponencial da seção 3.1 são obtidos os seguintes resultados:

$$\text{Modelo ANN: } p = 1 \quad Rank(O) = 1 \quad O = [1]$$

$$\text{Modelo AAN: } p = 2 \quad Rank(O) = 2 \quad O = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Modelo AA}_d\text{N: } p = 2 \quad Rank(O) = 2 \quad O = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \phi \end{bmatrix}$$

Para os modelos sazonais será considerado o ciclo sazonal $m = 4$ como exemplo.

$$\text{Modelo ANA: } p = 4 + 1 \quad Rank(O) = 4 \quad O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Modelo AAA: } p = 4 + 2 \quad Rank(O) = 5 \quad O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Modelo AA}_d\text{A: } p = 4 + 2 \quad Rank(O) = 5 \quad O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sum_{i=0}^1 \phi^i & \sum_{i=0}^2 \phi^i & \sum_{i=0}^3 \phi^i & \sum_{i=0}^4 \phi^i & \sum_{i=0}^5 \phi^i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Os três modelos não sazonais são observáveis, isto é, é possível determinar o vetor de estado x_0 a partir de y_t . Já os três modelos sazonais não são observáveis, pois é possível determinar apenas um índice sazonal (e não todos) do estado inicial x_0 a partir de y_t . Este resultado pode ser demonstrado escrevendo as equações para os 6 modelos de y_t em função de x_0 .

Modelo ANN

$$y_t = l_0 + \alpha \sum_{i=1}^{t-1} e_i + e_t$$

Modelo AAN

$$y_t = l_0 + tb_0 + \alpha \sum_{i=1}^{t-1} e_i + \beta^* \sum_{i=1}^{t-1} (t-i)e_i + e_t$$

Modelo AA_dN

$$y_t = l_0 + \left(\sum_{i=0}^{t-1} \phi^i \right) b_0 + \alpha \sum_{i=1}^{t-1} e_i + \beta^* \left(\sum_{i=1}^{t-1} \left(\sum_{j=0}^{t-1-i} \phi^j \right) e_i \right) + e_t$$

Modelo ANA

$$y_t = l_0 + \alpha \sum_{i=1}^{t-1} e_i + \sum_{i=0}^{m-1} a_{i,m} s_{i-m+1} + \gamma \sum_{i=m+1}^t c_{i,m} e_{i-m} + e_t$$

Modelo AAA

$$y_t = l_0 + tb_0 + \alpha \sum_{i=1}^{t-1} e_i + \beta^* \sum_{i=1}^{t-1} (t-1)e_i + \sum_{i=0}^{m-1} a_{i,m} s_{i-m+1} + \gamma \sum_{i=m+1}^t c_{i,m} e_{i-m} + e_t$$

Modelo AA_dA

$$y_t = l_0 + \left(\sum_{i=0}^{t-1} \phi^i \right) b_0 + \alpha \sum_{i=1}^{t-1} e_i + \beta^* \left(\sum_{i=1}^{t-1} \left(\sum_{j=0}^{t-1-i} \phi^j \right) e_i \right) + \sum_{i=0}^{m-1} a_{i,m} s_{i-m+1} + \gamma \sum_{i=m+1}^t c_{i,m} e_{i-m} + e_t$$

onde $a_{i,m} = 1$ se $i = (t-1) \bmod m$ e 0 qualquer outra situação e $c_{i,m} = 1$ se $(i-1) \bmod m = (t-1) \bmod m$ e 0 qualquer outra situação.

Note que para os modelos sazonais a cada período t é possível determinar apenas um índice sazonal. Este problema vai ser corrigido na seção 3.3.2 com o modelo normalizado desenvolvido por Roberts (1982) e McKenzie (1986). Além deste problema existem outros dois nos modelos sazonais, um deles é que a soma dos índices sazonais dentro de um ciclo sazonal não está restringida a zero e o outro é que são estimados m índices sazonais, quando só são necessários $m-1$, pois o cálculo do último índice é redundante. Mas estes dois problemas não influenciaram na utilização do modelo ao longo do tempo, pois como será apresentado nas próximas duas propriedades, não afeta as previsões, apenas o valor correto das componentes nível e sazonalidade.

Antes de apresentar as próximas duas propriedades é necessário definir a matriz de desconto D . Esta matriz em conjunto com os vetores w' e g representa o peso dado a cada observação passada quando se está fazendo previsões com os modelos de suavização exponencial. A demonstração abaixo para a definição de D é descrita em Hyndman et al (2008a).

$$\hat{y}_t = w'x_{t-1}$$

$$e_t = y_t - \hat{y}_t = \boxed{y_t - w'x_{t-1}}$$

$$x_t = Fx_{t-1} + ge_t = Fx_{t-1} + g(y_t - w'x_{t-1})$$

$$x_t = \underbrace{(F - gw')}_{D} x_{t-1} + gy_t$$

$$\boxed{x_t = Dx_{t-1} + gy_t} \quad (3.3)$$

Se t for substituído recursivamente na equação (3.3) é obtida a equação (3.4).

$$t = 1 \quad x_1 = Dx_0 + gy_1$$

$$t = 2 \quad x_2 = Dx_1 + gy_2 = D^2x_0 + Dgy_1 + gy_2$$

$$t = 3 \quad x_3 = Dx_2 + gy_3 = D^3x_0 + D^2gy_1 + Dgy_2 + gy_3$$

$$\boxed{x_t = D^t x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} D^j g y_{t-j}} \quad (3.4)$$

A equação (3.4) mostra que o vetor x_t depende do vetor x_0 e de todas as observações passadas. Se for substituído a equação (3.4) em $\hat{y}_t = w'x_{t-1}$ percebe-se que $w'D^{t-1}$ é o peso atribuído ao vetor de estado x_0 e $w'D^{j-1}g$ é o peso dado as observações passadas, que decai exponencialmente.

$$\hat{y}_t = a_t + \sum_{j=1}^{t-1} c_j y_{t-j} \quad (3.5)$$

Onde $a_t = w'D^{t-1}x_0$ e $c_j = w'D^{j-1}g$. Com a equação (3.5) pode-se definir as próximas duas propriedades, se o modelo é estável e previsível.

Propriedade 3: o modelo (equações (3.1) e (3.2)) é estável se todos os autovalores de D estiverem dentro do círculo unitário. A matriz D para os 6 modelos é apresentada abaixo:

$$\text{Modelo ANN: } D = 1 - \alpha$$

$$\text{Modelo AAN: } D = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 1 - \alpha \\ -\beta^* & 1 - \beta^* \end{bmatrix}$$

$$\text{Modelo AA}_d\text{N: } D = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 1 - \alpha \\ -\beta^* & \phi - \beta^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Modelo ANA: } D &= \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 0'_{m-1} & -\alpha \\ -\gamma & 0'_{m-1} & 1 - \gamma \\ 0_{m-1} & I_{m-1} & 0_{m-1} \end{bmatrix} \\ \text{Modelo AAA: } D &= \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 1 - \alpha & 0'_{m-1} & -\alpha \\ -\beta^* & 1 - \beta^* & 0'_{m-1} & -\beta^* \\ -\gamma & -\gamma & 0'_{m-1} & 1 - \gamma \\ 0_{m-1} & 0_{m-1} & I_{m-1} & 0_{m-1} \end{bmatrix} \\ \text{Modelo AA}_d\text{A: } D &= \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 1 - \alpha & 0'_{m-1} & -\alpha \\ -\beta^* & \phi - \beta^* & 0'_{m-1} & -\beta^* \\ -\gamma & -\gamma & 0'_{m-1} & 1 - \gamma \\ 0_{m-1} & 0_{m-1} & I_{m-1} & 0_{m-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se todos os autovalores de D estiverem dentro do círculo unitário, então D^j converge para uma matriz nula com o aumento de j . Este resultado é mais claro se a matriz D for decomposta em $D = U\Lambda V$ onde as colunas de U são os autovetores a direita (u_i) de D , Λ é uma matriz diagonal com os autovalores (λ_i) de D , as linhas de V são os autovetores a esquerda (v_i) de D e $V = U^{-1}$ (este resultado só é válido se todos os autovalores forem distintos). Se for substituída esta decomposição em (3.5) é obtido o resultado para a próxima propriedade.

Propriedade 4: o modelo (equações (3.1) e (3.2)) é previsível se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| < \infty \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} a_t = a \quad (3.6)$$

onde

$$\begin{aligned} a_t &= w'U\Lambda^{j-1}Vx_0 = \sum_i \lambda_i^{t-1} (w'u_i)(v'_i x_0) \\ &\text{e} \\ c_j &= w'U\Lambda^{j-1}Vg = \sum_i \lambda_i^{j-1} (w'u_i)(v'_i g) \end{aligned}$$

Para que as duas condições em (3.6) sejam verdadeiras, pelo menos uma das quatro condições abaixo devem ser satisfeitas:

1. $|\lambda_i| < 1$
2. $w'u_i = 0$
3. $|\lambda_i| = 1$ e $v'_i g = 0$
4. $v'_i x_0 = 0$ e $v'_i g = 0$

Esta propriedade é importante, pois mesmo modelos não estáveis ainda podem produzir previsões estáveis, desde que os autovalores que causam a instabilidade não tenham

efeito nos pontos de previsão. As propriedades 3 e 4 serão analisadas para cada modelo na próxima seção.

3.3 Estabilidade para seis modelos de suavização exponencial

Nesta seção será apresentada a revisão teórica para a estabilidade de 6 modelos de suavização exponencial. Os resultados apresentados aqui são referentes ao trabalho de Hyndman et al (2008b). Neste artigo é apresentado o espaço admissível dos parâmetros de suavização para 3 modelos não sazonais e 3 modelos sazonais.

3.3.1 Modelos não sazonais

Os três modelos não sazonais são o ANN, AAN e o AA_dN, que correspondem respectivamente à suavização exponencial simples, método de Holt e método de Holt com tendência amortecida. Os três modelos são estáveis desde que as condições da Tabela 13 sejam respeitadas.

Tabela 13 - Condições de estabilidade para modelos sem sazonalidade

Modelo	Restrições
ANN	$0 < \alpha < 2$
AAN	$0 < \alpha < 2$ $0 < \beta^* < 4 - 2\alpha$
AA _d N	$1 - 1/\phi < \alpha < 1 + 1/\phi$ $\alpha(\phi - 1) < \beta^* < (1 + \phi)(2 - \alpha)$ $0 < \phi \leq 1$

Fonte: Hyndman et al (2008a)

Os resultados da Tabela 13 podem ser encontrados quando se garante que a propriedade 3 seja satisfeita, isto é, $|\lambda_i| < 1$. Na Figura 8 a área clara é o espaço admissível

dos parâmetros α e β^* do modelo AA_dN , enquanto que a área escura é a região utilizada usualmente.

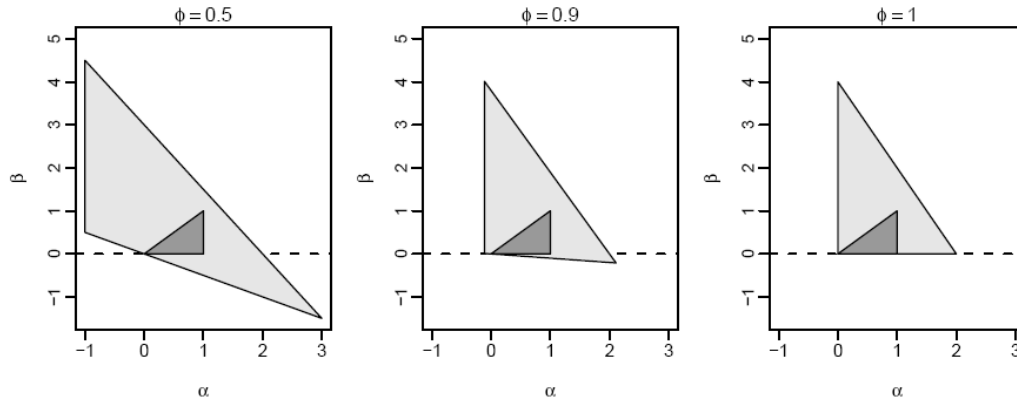


Figura 8 - Parâmetros de espaço para o modelo AA_dN

Fonte: Hyndman et al (2008a)

Para alguns valores dos parâmetros estes três modelos não são estáveis, mas são previsíveis. Por exemplo, no modelo ANN se $\alpha = 0$, então $\lambda_1 = 1$, $w = 1$, $g = 1$, $u_1 = -1$ e $v_1 = -1$. Mesmo tendo uma raiz unitária o modelo é previsível, pois $v_i'g = 0$. Já se $\alpha = 2$, então $\lambda_1 = -1$, $w = 1$, $g = 2$, $u_1 = -1$ e $v_1 = -1$. Neste caso o modelo não é estável, nem previsível.

3.3.2 Modelos sazonais

Os três modelos sazonais são instáveis, independente do valor dos parâmetros α , β , γ e ϕ . Isto pode ser visto quando é calculado o polinômio característico da matriz D . Os polinômios dos três modelos são:

Modelo ANA:

$$f(\lambda) = (1 - \lambda)P(\lambda); P(\lambda) = \lambda^m + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha \lambda^i + \alpha + \gamma - 1$$

Modelo AAA:

$$f(\lambda) = (1 - \lambda)P(\lambda); P(\lambda) = \lambda^{m+1} + (\alpha + \beta^* - 1)\lambda^m + \sum_{i=2}^{m-1} \beta^* \lambda^i + (\beta^* + \gamma - 1)\lambda + \phi(1 - \alpha - \gamma)$$

Modelo AA_dA:

$$f(\lambda) = (1 - \lambda)P(\lambda); P(\lambda) = \lambda^{m+1} + (\alpha + \beta^* - \phi)\lambda^m + \sum_{i=2}^{m-1} (\alpha + \beta^* - \alpha\phi)\lambda^i + (\alpha + \beta^* - \alpha\phi + \gamma - 1)\lambda + \phi(1 - \alpha - \gamma)$$

Para o modelo AAA, por exemplo, o autovetor associado a $\lambda = 1$ é $u = [-1, 0, 1, \dots, 1]$, onde o produto de $w'u = 0$, satisfazendo a condição 2 da propriedade 4. Basta garantir que as outras raízes tenham o módulo menor que um para o modelo ser previsível. Estas condições foram encontradas em Hyndman et al (2008b) e podem ser vistas na Tabela 14.

Tabela 14 - Condições de previsibilidade para os modelos ANA e AA_dA. Condições para AAA (Holt-Winters aditivo) fazer $\phi = 1$.

Modelo	Restrição
ANA:	$\max(-m\alpha, 0) < \gamma < 2 - \alpha$ $-2/(m - 1) < \alpha < 2 - \gamma$
AA _d A:	$0 < \phi \leq 1$ $\max(1 - 1/\phi - \alpha, 0) < \gamma < 1 + 1/\phi - \alpha$ $1 - 1/\phi - \gamma(1 - m + \phi + \phi/m)/(2\phi m) < \alpha < (B + C)/4\phi$ $-(1 - \phi)(\gamma/m + \alpha) < \beta^* < D + (\phi - 1)\alpha$ onde $B = \phi(4 - 3\gamma) + \gamma(1 - \phi)/m$ $C = \sqrt{B^2 - 8[\phi^2(1 - \gamma)^2 + 2(\phi - 1)(1 - \gamma) - 1] + 8\gamma^2(1 - \phi)/m}$ $D = \min_{\theta} \left\{ (\phi - \phi\alpha + 1)(1 - \cos \theta) \right.$ $\left. - \gamma \left[\frac{(1 + \phi)(1 - \cos \theta - \cos m\theta) + \cos(m - 1)\theta + \phi \cos(m + 1)\theta}{2(1 - \cos m\theta)} \right] \right\}$ E θ é solução de $\frac{\phi\alpha - \phi + 1}{\gamma} + \frac{(\phi - 1)(1 + \cos \theta - \cos m\theta) + \cos(m - 1)\theta - \phi \cos(m + 1)\theta}{2(1 + \cos \theta)(1 - \cos m\theta)} = 0$

Fonte: Hyndman et al (2008b)

Em Hyndman et al (2008b) é recomendado utilizar as restrições α e γ e calcular as raízes do polinômio característico $P(\lambda)$ para verificar se existe alguma raiz fora do círculo unitário, já que é mais simples do que aplicar a restrição de β^* . Este problema pode ser resolvido utilizando a tabela do teste de Jury, que é apresentada na seção 3.4, onde não é

necessário calcular as raízes do polinômio e podem-se estimar os parâmetros, garantido as condições de previsibilidade.

A Figura 9 mostra na área em escuro as restrições usuais $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta^* < 1$ para alguns valores de γ e a área clara a região de previsibilidade dos modelos. Percebe-se que para casos com γ acima de 0,5, as restrições usuais não garantem que os modelos sejam previsíveis. Esta situação pode ocorrer quando existe uma grande variação no padrão sazonal da série.

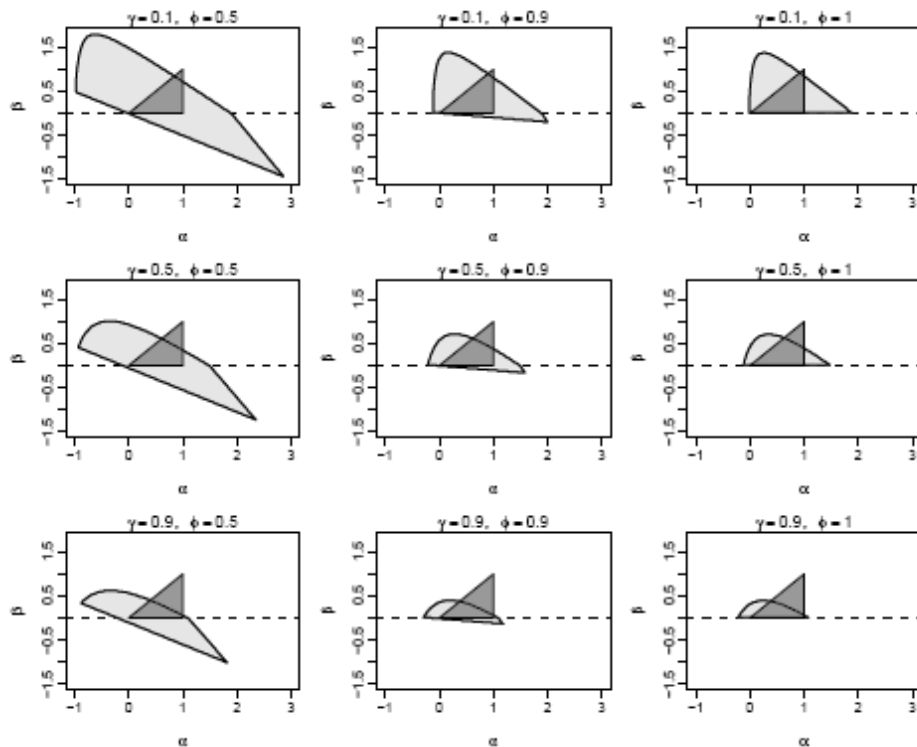


Figura 9 – Região de α e β^* para a previsibilidade dos modelos de suavização exponencial com um ciclo sazonal ($m = 4$).

Fonte: Hyndman et al (2008b)

3.3.3 Modelo sazonal normalizado

Os modelos sazonais da seção anterior são instáveis, independente do valor dos parâmetros de suavização, porém são previsíveis. Apesar da instabilidade não afetar as previsões ela causa viés nas estimativas das componentes, ou seja, parte da informação do nível da série é incorporada pela sazonalidade (a mesma quantidade que é adicionada a sazonalidade é subtraída do nível), podendo afetar o julgamento das previsões quando se está analisando as componentes individualmente. Este problema já havia sido observado em

Lawton (1998) quando demonstrou que o nível da série (para o caso de Holt-Winters aditivo) é superestimado em $\frac{\gamma(1-\alpha)(b_n b_0)}{\alpha\beta m}$ e a sazonalidade é subestimada pela mesma quantidade (a parametrização utilizada no artigo é diferente da utilizada nesta tese).

Em Lawton (1998) é apresentado um exemplo (que pode ser visto a seguir) para o modelo de Holt-Winters aditivo: uma série trimestral ($m = 4$) em que o nível inicial é igual a 5 e cresce de 5 em 5 até chegar a 100 e depois permanece constante. A sazonalidade é 5 no primeiro período, 10 no segundo, -10 no terceiro e -5 no quarto período. Os valores para α , β e γ são 0,4, 0,1 e 0,4 respectivamente. Os erros de estimativas de cada componente podem ser vistos na Figura 10.

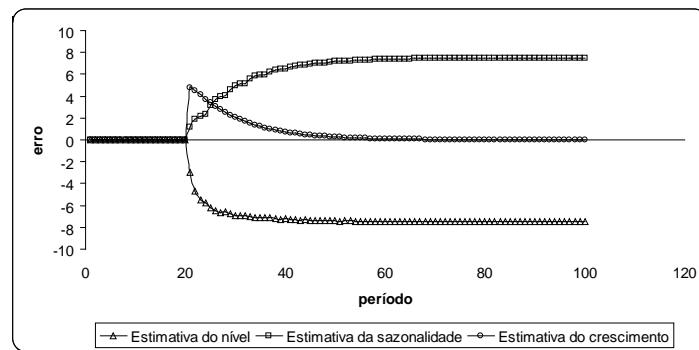


Figura 10 - Erro nas estimativas das componentes

Fonte: Lawton (1998)

A correção deste problema pode ser feita normalizando-se os índices sazonais para que $\sum_i^m s_{i,t} = 0$, isto é, a soma de todos os índices sazonais (no ciclo sazonal) em qualquer período t deve ser igual a zero. Isto não acontece na equação padrão de Holt-Winters pelo fato de um único índice sazonal ser atualizado a cada período t ao invés dos m índices. A Figura 11 mostra a soma acumulada (para $m = 4$) dos índices sazonais do exemplo anterior.

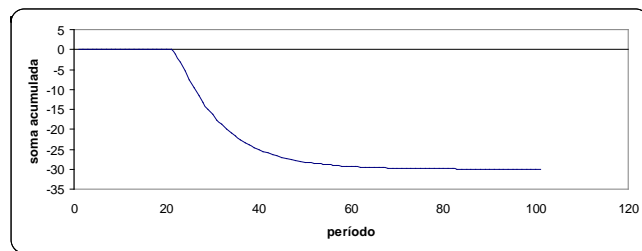


Figura 11 - Soma acumulada dos índices sazonais (para $m = 4$)

A soma dos índices sazonais do exemplo acima deveria ser zero para todos os ciclos sazonais, mas por causa do viés isto não acontece. Mas em Roberts (1982) e McKenzie (1986) foram desenvolvidas equações que renormalizam os índices sazonais e este estudo foi abordado em Lawton (1998), evidenciando o viés nas estimativas das componentes. Também em Archibald e Koehler (2003) foi desenvolvida uma forma de normalização para o Holt-Winters multiplicativo. As equações recursivas desenvolvidas em Robert/MacKenzie são apresentadas abaixo:

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \left(\alpha + \frac{\gamma}{m}\right) e_t$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta^* e_t$$

$$s_{i,t} = s_{i+1,t-1} - \frac{\gamma}{m} e_t \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$s_{m,t} = s_{1,t-1} + \gamma \left(1 - \frac{1}{m}\right) e_t$$

Com estas equações os índices sazonais são atualizados todos no período t ao invés de apenas um como é o caso das equações originais de Holt-Winters. Os vetores x_t , w , g e a matriz F para o modelo normalizado de Holt-Winter são:

$$x_t = \begin{bmatrix} l_t \\ b_t \\ s_{1,t} \\ \vdots \\ s_{m-1,t} \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0_{m-2} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0'_{m-2} \\ 0 & 1 & 0 & 0'_{m-2} \\ 0_{m-2} & 0_{m-2} & 0_{m-2} & I_{m-2} \\ 0 & 0 & -1 & -1_{m-2} \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} \alpha + \frac{\gamma}{m} \\ \beta^* \\ -\left(\frac{\gamma}{m}\right) 1_{m-1} \end{bmatrix}$$

Pode-se verificar que o modelo agora é controlável e observável (exemplo com $m = 4$).

$$\text{Rank}(C) = \begin{bmatrix} \alpha + 0,25\gamma & \alpha + 0,25\gamma & \alpha + 0,25\gamma & \alpha + 0,25\gamma & \alpha + 0,25\gamma \\ \beta^* & \alpha + \beta^* + 0,25\gamma & 0,5(4\alpha + 2\beta^* + \gamma) & 0,25(12\alpha + 4\beta^* + 3\gamma) & 4\alpha + \beta^* + \gamma \\ -0,25\gamma & 0,25\gamma & 0 & 0 & -0,25\gamma \\ -0,25\gamma & 0 & 0,25\gamma & 0 & -0,25\gamma \\ -0,25\gamma & 0 & 0 & 0,25\gamma & -0,25\gamma \end{bmatrix} = 5$$

$$\text{Rank}(O) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 5$$

A matriz D para o modelo normalizado é:

$$D = \begin{bmatrix} 1 - \alpha - \frac{\gamma}{m} & 1 - \alpha - \frac{\gamma}{m} & -\alpha - \frac{\gamma}{m} & 0'_{m-2} \\ -\beta^* & 1 - \beta^* & -\beta^* & 0'_{m-2} \\ (\gamma/m)1_{m-2} & (\gamma/m)1_{m-2} & (\gamma/m)1_{m-2} & I_{m-2} \\ \gamma/m & \gamma/m & \gamma/m - 1 & -1_{m-2} \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de D é o mesmo do modelo de Holt-Winters (AAA) $P(\lambda) = \lambda^{m+1} + (\alpha + \beta - 1)\lambda^m + \sum_{i=2}^{m-1} \beta^* \lambda^i + (\beta^* + \gamma - 1)\lambda + \alpha + \gamma - 1$, mas agora não possui uma raiz unitária.

Uma aplicação prática será apresentada a seguir para demonstrar a diferença entre se utilizar os o modelo normalizado e o não normalizado. Neste exemplo será utilizada a série de vendas mensal do carro Gol 1000 de janeiro de 1996 a abril de 2005. A série e o gráfico podem ser vistos na Tabela 15 e Figura 12, respectivamente.

Tabela 15– Vendas mensais de Gol 1000

	jan	fev	mar	abr	mai	jun	jul	ago	set	out	nov	dez
1996	10715	14816	14405	13286	16242	14726	19526	18483	16775	18342	16195	16757
1997	20062	18026	21012	23123	22666	22845	23760	23915	24217	23337	12278	14453
1998	18221	17281	20371	18946	19308	16570	17124	23179	16606	14257	9705	13637
1999	13721	6716	24171	18754	17665	17281	17782	19120	16343	13350	14969	13342
2000	13836	17900	18769	18465	20987	22234	22445	22993	19316	20056	15657	18874
2001	18546	21175	30131	25054	26756	20921	21436	23312	14580	17944	18382	21134
2002	19544	18244	20694	21462	17746	15634	13872	14301	13433	10209	8022	12930
2003	6520	8973	9475	9981	10073	10506	12793	12159	16408	14411	10311	16194
2004	14239	12035	13010	11615	10635	9859	11544	12617	11714	10953	12914	12732
2005	9626	9269	13383	11995								

Fonte: Anfavea - Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores

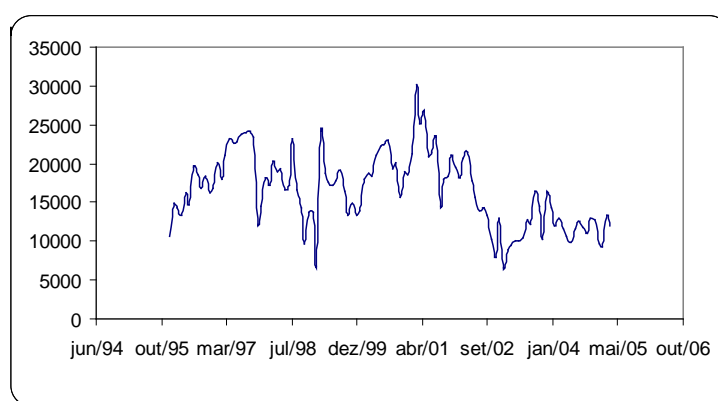


Figura 12– Vendas de Gol 1000

Aplicando o modelo AAA (correspondente ao método de Holt-Winters aditivo) e as equações para o modelo normalizado, pode-se fazer uma comparação de resultados entre os dois modelos, padrão e normalizado, quanto ao valor das componentes: nível, crescimento e sazonalidade.

O critério utilizado para se encontrar os parâmetros α , β e γ foi a minimização da soma dos erros quadrático (SQE) para ambos os casos, sendo a minimização feita utilizando o SOLVER do Excel. Os valores iniciais de l_0 , b_0 e s_0, \dots, s_{-11} foram calculados segundos os procedimentos descritos na seção 2.5. Os resultados encontrados são resumidos na Tabela 16.

Tabela 16– Parâmetros estimados e erros de previsão dentro da amostra para o modelo de Holt-Winters para a série de dados de vendas do Gol 1000

α	β^*	γ	SQE	MAPE
0,4561	0,0043	0,1910	1,070E+09	15,97%

Os resultados da Tabela 17 apresentam a diferença entre o modelo normalizado (sem viés) e o modelo padrão de Holt-Winters, para as estimativas de cada uma das componentes no período n (Abril de 2005).

Tabela 17- Componentes estimadas para os modelos, padrão e normalizado, de Holt-Winters para a série de dados de vendas do Gol 1000

Componentes	HW padrão	HW normalizado	Diferença (HW padrão – HW normalizado)
l_n	11903	13192	-1289
b_n	242	242	0
$s_{n,1}$	-298	991	1289
$s_{n,2}$	-1135	155	1289
$s_{n,3}$	52	1341	1289
$s_{n,4}$	1291	2580	1289
$s_{n,5}$	-105	1184	1289
$s_{n,6}$	-1182	108	1289
$s_{n,7}$	-3575	-2286	1289
$s_{n,8}$	-1902	-613	1289
$s_{n,9}$	-3936	-2647	1289
$s_{n,10}$	-4061	-2772	1289
$s_{n,11}$	17	1307	1289
$s_{n,12}$	-636	653	1289
$\sum_{i=1}^{12} s_{n,i}$	-15469	0	-15469

Observando a Tabela 17 fica claro o viés que existe no modelo padrão de Holt-Winters, a soma dos índices sazonais para os últimos doze meses é -15469, enquanto que a soma do modelo padronizado é igual a 0. Mas se for analisada a diferença do nível e dos índices sazonais do HW padrão e o normalizado se percebe que existe uma subestimação do nível e uma superestimação dos índices sazonais na mesma quantidade, resultado este que não afeta as previsões, mas pode levar a decisões incorretas quando se está analisando as componentes da série.

3.4 Teste de Jury para estabilidade

O teste de Jury (mais detalhes sobre o método podem ser encontrados em Jury (1964) e Ogata (1995)) foi desenvolvido para medir a estabilidade de sistemas discretos no tempo e consiste em analisar o polinômio característico $P(\lambda)$ da matriz de desconto D . Aqui será utilizada uma simplificação do teste desenvolvida em Raible (1974). Seja o polinômio característico de grau n definido por:

$$P(\lambda) = a_{0,0}\lambda^n + a_{0,1}\lambda^{n-1} + a_{0,2}\lambda^{n-2} + \dots + a_{0,n-1}\lambda + a_{0,n}$$

O teste é realizado construindo-se a tabela de Raible, que é calculada da seguinte forma:

$$\begin{array}{llllll} a_{1,0} = a_{0,0} - k_0 a_{0,n} & a_{1,1} = a_{0,1} - k_0 a_{0,n-1} & \dots & a_{1,n-1} = a_{0,n-1} - k_0 a_{0,1} & k_0 = \frac{a_{0,n}}{a_{0,0}} \\ a_{2,0} = a_{1,0} - k_1 a_{1,n-1} & a_{2,1} = a_{1,1} - k_1 a_{1,n-2} & \dots & a_{2,n-2} = a_{1,n-2} - k_1 a_{1,1} & k_1 = \frac{a_{1,n-1}}{a_{1,0}} \\ \vdots & & & & \\ a_{n-1,0} = a_{n-2,0} - k_{n-2} a_{n-2,2} & a_{n-1,1} = a_{n-2,1} - k_{n-2} a_{n-2,1} & & k_{n-2} = \frac{a_{n-2,2}}{a_{n-2,0}} \\ a_{n,0} = a_{n-1,0} - k_{n-1} a_{n-1,1} & k_{n-1} = \frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,0}} & & & \end{array}$$

As raízes estão dentro do círculo unitário se $a_{i,0} > 0$, onde $i = 1, 2, \dots, n$. Portanto, o número de restrições a serem testadas é igual a n . O número de troca de sinais dos valores de $a_{i,0}$ indica o número de raízes fora do círculo unitário. A seguir é apresentado o teste para os seis modelos lineares de suavização exponencial.

3.4.1 Modelo ANN

O polinômio característico para o modelo ANN é:

$$P(\lambda) = \lambda + \alpha - 1$$

$$a_{0,0} = 1, a_{0,1} = \alpha - 1$$

$$a_{1,0} = 1 - k_0(\alpha - 1) = \alpha(2 - \alpha) \quad k_0 = \alpha - 1$$

Tabela 18 - Tabela de Raible para o modelo ANN

$a_{i,j}$	0	1
0	1	$\alpha - 1$
1	$\alpha(2 - \alpha)$	

O grau do polinômio é 1, portanto existe uma restrição:

- $\alpha(2 - \alpha) > 0 \rightarrow 0 < \alpha < 2$

3.4.2 Modelo AAN

O polinômio característico para o modelo AAN é:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (\alpha + \beta^* - 2)\lambda + 1 - \alpha$$

$$a_{0,0} = 1, a_{0,1} = \alpha + \beta^* - 2, a_{0,2} = 1 - \alpha$$

Tabela 19 - Tabela de Raible para o modelo AAN

$a_{i,j}$	0	1	2
0	1	$\alpha + \beta^* - 2$	$1 - \alpha$
1	$\alpha(2 - \alpha)$	$\alpha(\alpha + \beta^* - 2)$	
2	$\frac{\alpha\beta^*(2\alpha + \beta^* - 4)}{\alpha - 2}$		

O grau do polinômio é 2, portanto existem duas restrições:

- $\alpha(2 - \alpha) > 0 \rightarrow 0 < \alpha < 2$
- $\frac{\alpha\beta^*(2\alpha + \beta^* - 4)}{\alpha - 2} > 0 \rightarrow 0 < \beta^* < 4 - 2\alpha$

onde $c = \alpha + \gamma - 2$.

O grau do polinômio é m , portanto existem m restrições:

$$-(\alpha + \gamma)(\alpha + \gamma - 2) > 0$$

$$-\frac{\gamma(\alpha + \gamma - 2)(2\alpha + \gamma)}{\alpha + \gamma} > 0$$

$$-\frac{\gamma(\alpha + \gamma - 2)(3\alpha + \gamma)}{2\alpha + \gamma} > 0$$

⋮

$$-\frac{\gamma(\alpha + \gamma - 2)[m\alpha + \gamma]}{(m - 1)\alpha + \gamma} > 0$$

É possível verificar que se $a_{i,0} > 0$ (condição de estabilidade) para $i = 1, 2, \dots, m$ então $a_{1,0} < a_{2,0} < \dots < a_{m,0}$. Basta garantir que a última restrição seja maior que zero para satisfazer todas as outras. A primeira restrição só é verdadeira se:

$$\alpha + \gamma > 0 \text{ e } \alpha + \gamma - 2 < 0$$

Então:

1. $\gamma > 0$
2. $\alpha + \gamma - 2 < 0$
3. $m\alpha + \gamma > 0$
4. $(m - 1)\alpha + \gamma > 0$

3.4.5 Modelo AAA

O polinômio característico para o modelo AAA é:

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)P(\lambda)$$

$$P(\lambda) = \lambda^{m+1} + (\alpha + \beta^* - 1)\lambda^m + \sum_{i=2}^{m-1} \beta^* \lambda^i + (\beta^* + \gamma - 1)\lambda + 1 - \alpha - \gamma$$

$$a_{0,0} = 1, a_{0,1} = \alpha + \beta^* - 1, a_{0,i} = \beta^*, a_{0,m} = \beta^* + \gamma - 1 \text{ e } a_{0,m+1} = 1 - \alpha - \gamma \quad i = 1, 2, 3, \dots, m - 1$$

O cálculo dos coeficientes para a tabela de Raible são:

$$\begin{aligned}
a_{1,0} &= a_{0,0} - k_0 a_{0,m+1} & a_{1,1} &= a_{0,1} - k_0 a_{0,m} & \cdots & & a_{1,m} &= a_{0,m} - k_0 a_{0,1} & & k_0 &= \frac{a_{0,m+1}}{a_{0,0}} \\
a_{2,0} &= a_{1,0} - k_1 a_{1,m} & a_{2,1} &= a_{1,1} - k_1 a_{1,m-1} & \cdots & & a_{2,m-1} &= a_{1,m-1} - k_1 a_{1,1} & & k_1 &= \frac{a_{1,m}}{a_{1,0}} \\
&\vdots & & & & & & & & & \\
a_{m,0} &= a_{m-1,0} - k_{m-1} a_{m-1,2} & a_{m,1} &= a_{m-1,1} - k_{m-1} a_{m-1,1} & & & k_{m-1} &= \frac{a_{m-1,2}}{a_{m-1,0}} \\
a_{m+1,0} &= a_{m,0} - k_m a_{m,1} & k_m &= \frac{a_{m,1}}{a_{m,0}}
\end{aligned}$$

Percebe-se que o número de cálculos para construir a tabela de Raible, depende do tamanho do ciclo sazonal. Quanto maior o tamanho do ciclo sazonal maior é o número de cálculos necessário. Aplicando o teste ao modelo com sazonalidade trimestral, é possível definir as equações de restrição para os parâmetros α , β e γ e garantir a estabilidade do modelo. Estas equações são apresentadas a seguir.

$$-\frac{2}{3} < \alpha \leq 0$$

$$-4\alpha < \gamma < 2 - \alpha$$

$$0 < \beta^* < \frac{(2 - \alpha - \gamma)}{2(\alpha + \gamma)} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\alpha + \gamma - 2)^2(\alpha^2 + 2\alpha\gamma + 2\gamma^2)}{(\alpha + \gamma)^2}}$$

ou

$$0 < \alpha < 2$$

$$0 < \gamma < 2 - \alpha$$

$$0 < \beta^* < \frac{(2 - \alpha - \gamma)}{2(\alpha + \gamma)} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\alpha + \gamma - 2)^2(\alpha^2 + 2\alpha\gamma + 2\gamma^2)}{(\alpha + \gamma)^2}}$$

Para encontrar as equações de restrição acima foi necessário calcular os valores dos coeficientes $a_{1,0}$, $a_{2,0}$, $a_{3,0}$, $a_{4,0}$ e $a_{5,0}$ e garantir que todos sejam maiores que zero. O cálculo destes coeficientes é apresentado no apêndice B. Porém, para calcular os coeficientes do modelo com ciclo sazonal mensal percebe-se que as equações são muito complexas e a melhor solução é a aplicação da tabela de Raible na forma numérica.

Geralmente o método de Holt-Winters é aplicado a séries trimestrais e mensais, nestas situações é possível otimizar os parâmetros de suavização (minimizando os erros de previsão) e garantir que estejam dentro da região de estabilidade. Basta fazer com que todas as restrições da coluna zero da tabela sejam maiores que zero. Esta é uma vantagem em relação a proposta em Hyndman et al (2008b), que sugere otimizar os parâmetros apenas com as

Percebe-se que as restrições 11 e 13 são menores que zero, indicando instabilidade no modelo (o ponto está fora da região de estabilidade do gráfico da Figura 13). Já a tabela abaixo testa o modelo para os parâmetros de suavização iguais a $\alpha = 0,5$, $\beta^* = 0,1$ e $\gamma = 0,1$ (gráfico da direita da Figura 13).

Tabela 23 - Tabela de Raible para o modelo AAA com $\alpha = 0,5$, $\beta^* = 0,1$ e $\gamma = 0,1$

$a_{i,j}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1.000	-0.400	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	-0.800	0.400
1	0.840	-0.080	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	0.060	-0.640	
2	0.352	-0.034	0.106	0.106	0.106	0.106	0.106	0.106	0.106	0.106	0.106	-0.001		
3	0.352	-0.034	0.106	0.106	0.106	0.106	0.106	0.106	0.106	0.106	0.106			
4	0.321	-0.066	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.074	0.116				
5	0.279	-0.093	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047	0.098					
6	0.244	-0.109	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.080						
7	0.218	-0.119	0.021	0.021	0.021	0.021	0.066							
8	0.198	-0.126	0.014	0.014	0.014	0.057								
9	0.181	-0.130	0.010	0.010	0.051									
10	0.167	-0.133	0.007	0.046										
11	0.154	-0.135	0.044											
12	0.141	-0.096												
13	0.076													

Observando a tabela acima se percebe que o modelo é estável, todas as restrições são maiores que zero (o ponto está dentro da região de estabilidade do gráfico da Figura 13).

3.5 Considerações finais

Neste capítulo foi feita a revisão teórica sobre a estabilidade em 6 modelos lineares de suavização exponencial, 3 não sazonais e 3 sazonais. Nos três modelos não sazonais verificou-se que todos são estáveis desde que os parâmetros de suavização estejam dentro de certos limites. Já os modelos sazonais são sempre instáveis, independente do valor dos parâmetros de suavização, mas com o conceito de previsibilidade introduzido em Hyndman et al (2008b), percebe-se que as previsões são estáveis, isto é, a previsão é uma função da soma dos pesos das observações passadas que decaem exponencialmente com o tempo.

A instabilidade se deve a uma falha na formulação, onde apenas um índice sazonal é atualizado em cada período de tempo t , ao invés de todos. Isto não modifica as previsões, mas causa viés nas estimativas das componentes. Para corrigir este problema foi apresentado o modelo normalizado de Roberts (1982) e McKenzie (1986).

Outro assunto abordado foi o uso do teste de Jury para a estabilidade, que se mostra de fácil aplicação e será utilizado para o estudo da estabilidade do modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade.

4 ESTABILIDADE PARA SUAVIZAÇÃO EXPONENCIAL COM DUPLA SAZONALIDADE

O modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade obteve resultados melhores em relação a outros modelos (ARIMA e redes neurais) para a previsão do consumo horário de energia elétrica. Porém a utilização deste modelo foi feita de forma apenas empírica, sem que suas propriedades fossem estudadas. Neste capítulo serão verificadas quatro propriedades deste modelo. Se o modelo é controlável, observável, estável e previsível.

Serão apresentados os resultados obtidos referente a estabilidade dos modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade. Na seção 4.1 é apresentado o modelo de suavização exponencial na forma de modelo de espaço de estado. Na seção 4.2 as propriedades do modelo com crescimento e na seção 4.3 o teste de Jury para a estabilidade. Na seção 4.5 o espaço admissível dos parâmetros para o modelo sem crescimento e na seção 4.6 o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade normalizado.

4.1 Modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade

O modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade desenvolvido em Taylor (2003a) possui quatro equações para as componentes:

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha e_t$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta^* e_t$$

$$s_t = s_{t-m_1} + \gamma e_t$$

$$u_t = u_{t-m_2} + \omega e_t$$

Considerando o modelo de espaço de estado com erro aditivo:

$$y_t = \mu_t + e_t$$

$$\mu_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m_1} + u_{t-m_2}$$

Se o modelo for apresentado na forma matricial como na seção 3.1, podem-se definir os vetores x_t , w , g e a matriz F . Lembrado que em forma matricial o modelo de espaço de estado é:

$$y_t = w'x_{t-1} + e_t \quad (4.1)$$

$$x_t = Fx_{t-1} + ge_t \quad (4.2)$$

Portanto, os vetores x_t , w , g e a matriz F para o modelo com dupla sazonalidade são:

$$x_t = \begin{bmatrix} l_t \\ b_t \\ s_t \\ \vdots \\ s_{t-m_1+1} \\ u_t \\ \vdots \\ u_{t-m_2+1} \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0_{m_1-1} \\ 1 \\ 0_{m_2-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta^* \\ \gamma \\ 0_{m_1-1} \\ \omega \\ 0_{m_2-1} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0'_{m_1-1} & 0 & 0'_{m_2-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0'_{m_1-1} & 0 & 0'_{m_2-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0'_{m_1-1} & 1 & 0'_{m_2-1} & 0 \\ 0_{m_1-1} & 0_{m_1-1} & I_{m_1-1} & 0_{m_1-1} & 0_{m_1-1 \times m_2-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0'_{m_1-1} & 0 & 0'_{m_2-1} & 1 \\ 0_{m_2-1} & 0_{m_2-1} & 0_{m_2-1 \times m_1-1} & 0_{m_2-1} & I_{m_2-1} & 0_{m_2-1} \end{bmatrix}$$

onde $0'_d$ é um vetor de zeros de dimensão d e $I_{d \times d}$ é uma matriz identidade de tamanho d .

É fácil verificar que para séries com dupla sazonalidade o tamanho dos vetores w , g , x_t e da matriz F são maiores que para a situação com um ciclo sazonal. Por exemplo, para o consumo horário de energia elétrica, existem dois ciclos sazonais, um para as horas do dia, e outro para as horas da semana. O tamanho do ciclo das horas do dia é igual a 24, e das horas da semana é igual a 168. Portanto, $w_{194 \times 1}$, $g_{194 \times 1}$, $x_{t_{194 \times 1}}$ e $F_{194 \times 194}$.

Com a definição dos vetores w , g , x_t e a matriz F é possível estudar a estabilidade deste modelo e definir o espaço dos parâmetros admissíveis, como descrito no capítulo 3.

4.2 Propriedades do modelo

Nesta seção são apresentadas quatro propriedades para verificar se o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade possui dimensões mínimas e é estável. Em um modelo de dimensões mínimas a variável observada y_t é estimada a partir de todas as variáveis de estado (modelo observável), além disso, todas as variáveis de estado são afetadas por e_t (modelo controlável). Estas duas propriedades são descritas a seguir (revisão teórica sobre estas propriedades para os modelos não sazonais e com um ciclo sazonal é descrita na seção 3.2).

Propriedade 1: o modelo representado pelas equações (4.1) e (4.2) é *controlável* se $\text{Rank}(C) = p$, onde $C = [g, Fg, F^2g, \dots, F^{p-1}g]$ e p é o tamanho do vetor x_t . Por exemplo, se os dados tiverem sazonalidade trimestral e anual o $\text{Rank}(C) = 13$ e $p = 17$.

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + \beta^* & \alpha + 2\beta^* & \alpha + 3\beta^* & \alpha + 4\beta^* & \alpha + 5\beta^* & \alpha + 6\beta^* & \alpha + 7\beta^* & \alpha + 8\beta^* & \alpha + 9\beta^* & \alpha + 10\beta^* & \alpha + 11\beta^* & \alpha + 12\beta^* & \alpha + 13\beta^* & \alpha + 14\beta^* & \alpha + 15\beta^* & \alpha + 16\beta^* \\ \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* & \beta^* \\ \gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 13 < 17$$

Generalizando, o $\text{Rank}[g, Fg, F^2g, \dots, F^{p-1}g] = m_2 + 1 < p$, sendo $p = m_1 + m_2 + 2$. Portanto, o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade apresentado acima nunca é controlável. Para o modelo de previsão em estudo, significa que algumas componentes não são estimadas a partir do erro de previsão. As componentes, neste caso, são os índices sazonais. Apenas um índice sazonal do ciclo sazonal menor e outro do ciclo sazonal maior são afetados pelo erro e_t . Lembrando que o modelo é:

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha e_t$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta^* e_t$$

$$s_t = s_{t-m_1} + \gamma e_t$$

$$s_{t-1} = s_{t-1}$$

$$s_{t-2} = s_{t-2}$$

⋮

$$s_{t-m_1+1} = s_{t-m_1+1}$$

$$u_t = u_{t-m_2} + \omega e_t$$

$$u_{t-1} = u_{t-1}$$

$$u_{t-2} = u_{t-2}$$

⋮

$$u_{t-m_2+1} = u_{t-m_2+1}$$

Percebe-se nas equações anteriores que as variáveis de estado $s_{t-1}, \dots, s_{t-m_1+1}$ e $u_{t-1}, \dots, u_{t-m_2+1}$ não dependem do erro e_t , portanto o modelo não é controlável.

Propriedade 2: o modelo representado pelas equações (4.1) e (4.2) é *observável* se $\text{Rank}(O) = p$, onde $O = [w, F'g, (F')^2w, \dots, (F')^{p-1}w]$ e p é o tamanho do vetor x_t . Por exemplo, se os dados tiverem sazonalidade trimestral (ciclo sazonal igual a três) e anual (ciclo sazonal igual a doze) e o modelo com dupla sazonalidade for utilizado o $\text{Rank}(O) = 13$ e $p = 17$.

$$\text{Rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 13 < 17$$

Generalizando o $\text{Rank}[w, F'g, (F')^2w, \dots, (F')^{p-1}w] = m_2 + 1 < p$, sendo $p = m_1 + m_2 + 2$. Portanto o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade apresentado acima nunca é observável. Isto significa que não é possível determinar todas as variáveis de estado do vetor x_0 a partir de y_t .

Esta explicação fica mais clara se a variável observada y_t for expressa em função dos valores iniciais das variáveis de estado e dos parâmetros de suavização. Para o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade a equação é:

$$y_t = l_0 + t b_0 + \alpha \sum_{i=1}^{t-1} e_i + \beta^* \sum_{i=1}^{t-1} (t-1) e_i + \sum_{i=0}^{m_1-1} d_{i,m_1} s_{i-m_1+1} + \sum_{i=0}^{m_2-1} f_{i,m_2} u_{i-m_2+1} + \gamma \sum_{i=m_1+1}^t n_{i,m_1} e_{i-m_1} + \omega \sum_{i=m_2+1}^t o_{i,m_2} e_{i-m_2} + e_t$$

onde $d_{i,m_1} = 1$ se $i = (t-1) \bmod m_1$ e $d_{i,m_1} = 0$ em qualquer outra situação; $f_{i,m_2} = 1$ se $i = (t-1) \bmod m_2$ e $f_{i,m_2} = 0$ qualquer outra situação; $n_{i,m_1} = 1$ se $(i-1) \bmod m_1 = (t-1) \bmod m_1$ e $n_{i,m_1} = 0$ qualquer outra situação; $o_{i,m_2} = 1$ se $(i-1) \bmod m_2 = (t-1) \bmod m_2$ e $o_{i,m_2} = 0$ qualquer outra situação (as variáveis d , f , n e o são variáveis *dummy*).

Percebe-se, nas equações anteriores, que a variável observada y_t não pode ser estimada a partir de todas as variáveis de estado iniciais. Portanto o modelo não é observável.

Propriedade 3: o modelo representado pelas equações (4.1) e (4.2) é *estável* se todos os autovalores de $D = F - gw'$ estiverem dentro do círculo unitário, onde D é a matriz de desconto. Para a suavização exponencial com dupla sazonalidade a matriz de desconto é:

$$D = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 1 - \alpha & 0'_{m_1-1} & -\alpha & 0'_{m_2-1} & -\alpha \\ -\beta^* & 1 - \beta^* & 0'_{m_1-1} & -\beta^* & 0'_{m_2-1} & -\beta^* \\ -\gamma & -\gamma & 0'_{m_1-1} & 1 - \gamma & 0'_{m_2-1} & -\gamma \\ 0_{m_1-1} & 0_{m_1-1} & I_{m_1-1} & 0_{m_1-1} & 0_{m_1-1 \times m_2-1} & 0_{m_1-1} \\ -\omega & -\omega & 0'_{m_1-1} & -\omega & 0'_{m_2-1} & 1 - \omega \\ 0_{m_2-1} & 0_{m_2-1} & 0_{m_2-1 \times m_1-1} & 0_{m_2-1} & I_{m_2-1} & 0_{m_2-1} \end{bmatrix}$$

Para verificar se os autovalores de D estão dentro do círculo unitário é necessário encontrar o polinômio característico de D . O polinômio característico de D é apresentado na equação (4.3) quando $m_1 + m_2$ for par, ou em (4.4) quando $m_1 + m_2$ for ímpar.

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^{m_1} - 1)P(\lambda) \quad (4.3)$$

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(1 - \lambda^{m_1})P(\lambda) \quad (4.4)$$

onde

$$P(\lambda) = \lambda^{m_2+1} + (\alpha + \beta^* - 1)\lambda^{m_2} + \sum_{i=2}^{m_2-1} [o_i(\beta^* - \gamma)\lambda^i + p_i(\beta^* + \gamma)\lambda^i + q_i\beta^*\lambda^i] + (\beta^* + \gamma + \omega - 1)\lambda + 1 - \alpha - \gamma - \omega \quad (4.5)$$

e

$$\begin{cases} o_i = 1 & \text{se } i \bmod m_1 = 0 \\ o_i = 0 & \text{se } i \bmod m_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_i = 1 & \text{se } i \bmod m_1 = 1 \\ p_i = 0 & \text{se } i \bmod m_1 \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_i = 1 & \text{se } i \bmod m_1 \neq 1 \\ q_i = 0 & \text{se } i \bmod m_1 = 0 \end{cases}$$

Observado as equações (4.3) e (4.4), percebe-se que o modelo sempre terá raízes unitárias com número igual a $m_1 + 1$. Portanto, o modelo é sempre instável independente do valor dos parâmetros de suavização α , β^* , γ e ω . Mas, como apresentado na seção 3.2, um modelo instável ainda pode produzir previsões estáveis (propriedade 4).

Propriedade 4: seja (λ_i, v_i) os autovalores-autovetores de D . Então o modelo representado pelas equações (4.1) e (4.2) é *previsível* se, para todo i , uma das 4 propriedade apresentadas em 3.2 sejam satisfeitas. Assim como nos modelos descritos na seção 3.3.2, o modelo com dupla sazonalidade, apesar de não ser estável, é previsível, já que os autovalores (λ_i) com módulo igual a um possuem autovetores (v_i) ortogonais a w' (condição 2 da propriedade 4). Por exemplo, se os ciclos sazonais forem $m_1 = 4$ e $m_2 = 12$ o polinômio característico vai ser:

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^4 - 1)P(\lambda)$$

$$P(\lambda) = \lambda^{13} + (\alpha + \beta^* - 1)\lambda^{12} + \beta^*\lambda^{11} + \beta^*\lambda^{10} + (\beta^* + \gamma)\lambda^9 + (\beta^* - \gamma)\lambda^8 + \beta^*\lambda^7 + \beta^*\lambda^6 + (\beta^* + \gamma)\lambda^5 + (\beta^* - \gamma)\lambda^4 + \beta^*\lambda^3 + \beta^*\lambda^2 + (\beta^* + \gamma + \omega - 1)\lambda + 1 - \alpha - \gamma - \omega$$

Existem cinco autovalores com módulo igual 1. Os autovetores associados aos autovalores são apresentados abaixo.

$$\lambda_1 = -1, v_1 = [0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1]$$

$$\lambda_2 = i, v_2 = [0 \ 0 \ i \ 1 \ -i \ -1 \ -i \ -1 \ i \ 1 \ -i \ -1 \ i \ 1 \ -i \ -1 \ i \ 1]$$

$$\lambda_3 = -i, v_3 = [0 \ 0 \ -i \ 1 \ i \ -1 \ i \ -1 \ -i \ 1 \ i \ -1 \ -i \ 1 \ i \ -1 \ -i \ 1]$$

$$\lambda_4 = 1, v_4 = [-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$\lambda_5 = 1, v_5 = [-1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Estes cinco vetores são ortogonais a w' . Uma vez que estes autovalores com módulo igual a 1 não afetam as previsões, basta garantir que os outros autovalores (que dependem de α , β^* , γ e ω) estejam dentro do círculo unitário. Para isto será aplicado o teste de Jury, apresentado na próxima seção.

4.3 Teste de Jury para estabilidade

Aplicando o teste de Jury ao modelo de Taylor (2003a) com dupla sazonalidade (representado pelo polinômio característico descrito pela equação (4.5)).

$$a_{0,0} = 1$$

$$a_{0,1} = \alpha + \beta^* - 1$$

$$a_{0,i} = o_i(\beta^* - \gamma) + p_i(\beta^* + \gamma) + q_i\beta^* \quad i = 2, 3, \dots, m_2 - 1$$

$$a_{0,m_2} = \beta^* + \gamma + \omega - 1$$

$$a_{0,m_2+1} = 1 - \alpha - \gamma - \omega$$

onde o_i , p_i e q_i são os mesmos definidos para a equação(4.5).

$$a_{1,0} = a_{0,0} - k_0 a_{0,m_2+1} \quad a_{1,1} = a_{0,1} - k_0 a_{0,m_2} \quad \dots \quad a_{1,m_2} = a_{0,m_2} - k_0 a_{0,1} \quad k_0 = \frac{a_{0,m_2+1}}{a_{0,0}}$$

$$a_{2,0} = a_{1,0} - k_1 a_{1,m_2} \quad a_{2,1} = a_{1,1} - k_1 a_{1,m_2-1} \quad \dots \quad a_{2,m_2-1} = a_{1,m_2-1} - k_1 a_{1,1} \quad k_1 = \frac{a_{1,m_2}}{a_{1,0}}$$

⋮

$$a_{m_2,0} = a_{m_2-1,0} - k_{m_2-1} a_{m_2-1,2} \quad a_{m_2,1} = a_{m_2-1,1} - k_{m_2-1} a_{m_2-1,1} \quad k_{m_2-1} = \frac{a_{m_2-1,2}}{a_{m_2-1,0}}$$

$$a_{m_2+1,0} = a_{m_2,0} - k_m a_{m_2,1} \quad k_m = \frac{a_{m_2,1}}{a_{m_2,0}}$$

O número de restrições vai depender do tamanho do ciclo sazonal maior (m_2). Portanto para um dado horário com sazonalidade diária e semanal, o número de restrições é igual a 169. O modelo é estável se $a_{i,0} > 0$, onde $i = 1, 2, \dots, m_2 + 1$. Na Figura 14 é apresentado o espaço dos parâmetros para o ciclo sazonal $m_1 = 24$ e $m_2 = 168$.



Figura 14 – Espaço dos parâmetros para o modelo com dupla sazonalidade com sazonalidade $m_1 = 24$ e $m_2 = 168$.

Observa-se na, Figura 14, que o parâmetro β^* associado ao crescimento da série possui uma faixa de variação muito restrita, bem menor do que foi utilizado nos artigos com aplicações deste modelo (Taylor (2003a), Taylor et al (2006), Morzuch e Allen (2006), Gould et al (2008) e Taylor (2008)). Nestes artigos, os parâmetros estão limitados para variar entre 0 e 1, e quando $\gamma = 0,2$ e $\omega = 0,2$, por exemplo, α pode variar entre 0 e 1,5 e β^* entre 0 e 0,001 aproximadamente. Quanto maiores forem os valores de γ e ω , menor é a variação de α e β^* .

Pode-se concluir que o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade, quando aplicado a séries horárias, só produzirá previsões estáveis quando a série não tiver crescimento (retira-se a equação de crescimento do modelo) ou tiver um crescimento constate ao longo do tempo ($\beta = 0$). Outro problema para a aplicação do modelo com crescimento é que, mesmo utilizando o método de Jury (quando os dados são horários), não é possível otimizar os parâmetros de suavização e garantir que estes fiquem na região de estabilidade. O problema se torna muito complexo (polinômio com grau 169, por exemplo) com grande número de restrições.

A seguir é apresentado um exemplo de aplicação em dados de consumo de energia elétrica em Santa Catarina nos anos de 2002, 2003 e 2004.

4.4 Exemplo de aplicação do modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade

Neste exemplo foram utilizados 8 semanas de dados horários para a estimação dos parâmetros e 4 semanas de dados fora da amostra para avaliação do desempenho do modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade, sob quatro condições de restrição dos parâmetros de suavização. A previsão fora da amostra foi de um dia a frente, isto é, 24 horas.

O objetivo deste estudo é verificar se pequenas variações nas restrições dos parâmetros de suavização podem comprometer as previsões. Para a aplicação do modelo foi realizada uma modificação na equação de previsão. Esta modificação deve-se ao fato da autocorrelação de ordem um que aparece nos resíduos do modelo, fato já identificado em Taylor (2003a) e Taylor et al (2006). A equação para previsão modificada é:

$$\hat{y}_{t+k} = l_t + kb_t + s_{t-m_1+k} + u_{t-m_2+k} + \varphi^k e_t$$

Por exemplo, para os dados de 2003 o gráfico de autocorrelação é da Figura 15.

Figura 15 – Autocorrelação para os resíduos de 2003

Os parâmetros foram otimizados utilizando o Solver do Excel com a minimização da soma do quadrado dos erros, sob quatro condições de restrições. Na Tabela 24 são apresentados os valores dos parâmetros estimados e se eles estão ou não dentro da região de estabilidade (calculados através da tabela de Raible).

Tabela 24 – Parâmetros estimados aplicando o modelo de suavização exponencial aos dados de consumo de energia elétrica em Santa Catarina

2002 - Amostra (2/06/2002 - 27/07/2002)									
Situação	φ	α	β	γ	ω	β^*	Restrição dos parâmetros de suavização	SQE	Região de estabilidade
1	0,3673	0,6519	0	0,0852	0,0875	0	[0, 1]	1187681	Fora
2	0,3674	0,6519	0,0001	0,0852	0,0875	0,0001	[0,0001, 0,9999]	1187815	Dentro
3	0,3672	0,6523	0,001	0,0852	0,0874	0,0006	[0,001, 0,999]	1189026	Dentro
4	0,3660	0,6550	0,01	0,0846	0,0869	0,0065	[0,01;0,99]	1201020	Fora
2003 – Amostra (29/06/2003 - 23/08/2003)									
Situação	φ	α	β	γ	ω	β^*	Restrição dos parâmetros	SQE	Região de estabilidade
1	0,2253	0,6370	0	0,1324	0,0317	0	[0, 1]	441116	Fora
2	0,2253	0,6371	0,0001	0,1323	0,0317	0,0001	[0,0001, 0,9999]	441173	Dentro
3	0,2251	0,6377	0,001	0,1321	0,0317	0,0006	[0,001, 0,999]	441685	Dentro
4	0,2237	0,6429	0,01	0,1294	0,0312	0,0064	[0,01;0,99]	446662	Fora
2004 – Amostra (13/06/2004 - 07/08/2004)									
Situação	φ	α	β	γ	ω	β^*	Restrição dos parâmetros	SQE	Região de estabilidade
1	0,1756	0,7111	0	0,1245	0,0390	0	[0, 1]	655128	Fora
2	0,1757	0,7114	0,0001	0,1245	0,0390	0,0001	[0,0001, 0,9999]	655214	Dentro
3	0,1754	0,7118	0,001	0,1242	0,0390	0,0007	[0,001, 0,999]	655975	Dentro
4	0,1745	0,7166	0,01	0,1216	0,0385	0,0071	[0,01;0,99]	663337	Fora

Os resultados da Tabela 24 avaliam apenas o ajuste do modelo aos dados. Percebe-se que duas restrições dos parâmetros estão dentro da região de estabilidade e duas fora. O resultado que apresentou o menor SQE nos três anos foi justamente um valor que está fora da região de estabilidade, é quando $\beta = 0$. Quando $\beta = 0$ o polinômio característico $P(\lambda)$ é igual a:

$$P(\lambda) = (\lambda - 1) \left(\lambda^{m_2} + \sum_{i=1}^{m_2-1} [o_i \alpha \lambda^i + p_i (\alpha + \gamma) \lambda^i] + \alpha + \gamma + \omega - 1 \right)$$

$$\begin{cases} o_i = 1 & \text{se } i \bmod m_1 \neq 0 \\ o_i = 0 & \text{se } i \bmod m_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_i = 1 & \text{se } i \bmod m_1 = 0 \\ p_i = 0 & \text{se } i \bmod m_1 \neq 0 \end{cases}$$

Existe uma raiz unitária no polinômio $P(\lambda)$, o polinômio restante é o mesmo do modelo sem crescimento que será apresentado na próxima seção. O produto do autovetor associado a raiz unitária $\lambda = 1$ com w' é igual a zero (propriedade 4 da seção 3.2), então o modelo é instável mas produz previsões estáveis. Este resultado é confirmado com a Figura 16, onde o MAPE (erro percentual absoluto médio) é semelhante para as situações 1, 2 e 3 da Tabela 24, mas quando as restrições para os parâmetros estão entre 0,01 e 0,99 o modelo aumenta o erro de previsão a partir de 5 a 6 horas a frente.

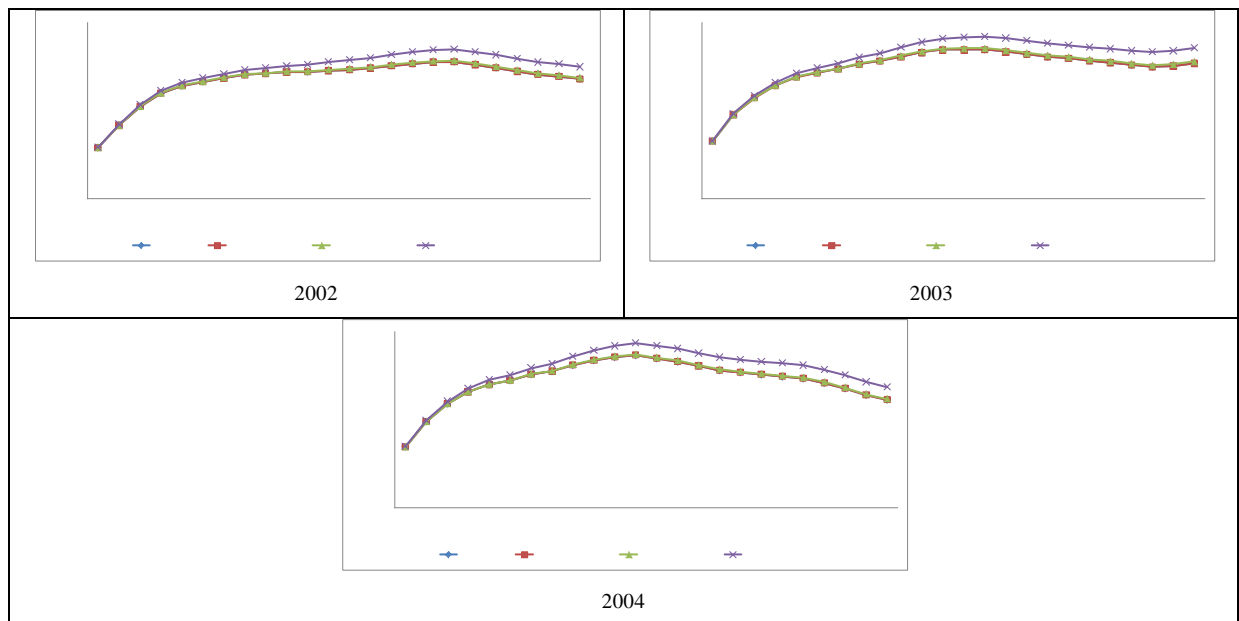


Figura 16 – MAPE para 24 horas a frente de previsão

Pode-se concluir que para a utilização do modelo de suavização exponencial o parâmetro β deve ser entre 0 e 0,001 no máximo, para este exemplo, mas os resultados encontrados aqui são semelhantes aos estudos anteriores de aplicação ((Taylor (2003a), Taylor et al (2006), Morzuch e Allen (2006), Gould et al (2008) e Taylor (2008)). Até agora não foi publicado nenhum artigo mostrando que seja vantajoso o uso da equação de crescimento no

modelo. Por isso, será analisado na próxima seção o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade sem crescimento.

4.5 Modelo sem crescimento

Nos casos de aplicação da suavização exponencial com dupla sazonalidade (Taylor (2003a), Taylor et al (2006), Morzuch e Allen (2006), Gould et al (2008) e Taylor (2008)), o crescimento da série é desprezível, isto é, a série é gerada por um processo que possui apenas um nível com flutuação aleatória em torno de uma média constante e dois ciclos sazonais. Portanto, é possível eliminar a equação do crescimento do modelo. No exemplo da seção anterior foram utilizadas séries de consumo horário de energia elétrica (Figura 17), onde também não existe crescimento. Por isso será desenvolvido nesta seção o cálculo das restrições dos parâmetros de suavização que garantam a estabilidade do modelo sem crescimento.

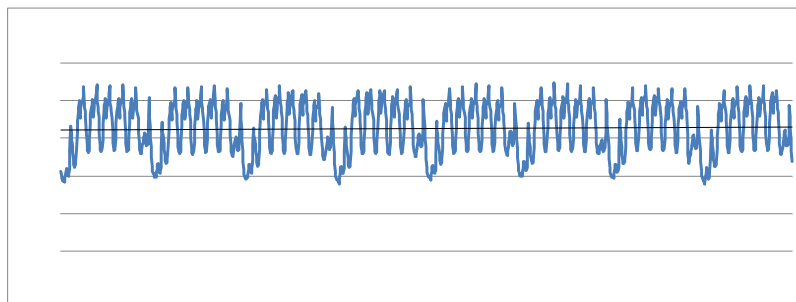


Figura 17 – Consumo horário de energia elétrica em Santa Catarina (8 semanas em 2003)

Para encontrar as restrições dos parâmetros do modelo é necessário primeiro encontrar o polinômio característico $P(\lambda)$. O número de raízes unitárias neste modelo é o mesmo que no modelo com crescimento, pois elas ocorrem devido aos índices sazonais e não dependem da variável de estado crescimento. Porém agora:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\lambda - 1)(1 - \lambda^{m_1})P(\lambda) & \text{se } m_1 + m_2 &= \text{par} \\ f(\lambda) &= (\lambda - 1)(\lambda^{m_1} - 1)P(\lambda) & \text{se } m_1 + m_2 &= \text{ímpar} \end{aligned}$$

$$P(\lambda) = \lambda^{m_2} + \sum_{i=1}^{m_2-1} [o_i \alpha \lambda^i + p_i (\alpha + \gamma) \lambda^i] + \alpha + \gamma + \omega - 1$$

$$\begin{cases} o_i = 1 & \text{se } i \bmod m_1 \neq 0 \\ o_i = 0 & \text{se } i \bmod m_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_i = 1 & \text{se } i \bmod m_1 = 0 \\ p_i = 0 & \text{se } i \bmod m_1 \neq 0 \end{cases}$$

Para encontrar as restrições de $P(\lambda)$ que garantem que o modelo seja previsível será aplicado o teste de Jury novamente. Será apresentado apenas o resultado da coluna zero, já que é esta que deve ser testada para encontrar a região de estabilidade (no apêndice C é apresentado um exemplo com sazonalidade $m_1 = 3$ e $m_2 = 12$). Substituindo o valor dos coeficientes de $P(\lambda)$ foi obtido o seguinte resultado:

$$a_{1,0} = -(\alpha + \gamma + \omega - 2)(\alpha + \gamma + \omega)$$

$$a_{i,0} = -\frac{(\gamma + \omega)(\alpha + \gamma + \omega - 2)(i\alpha + \gamma + \omega)}{(i-1)\alpha + \gamma + \omega} \quad i = 2, 3, \dots, m_1$$

$$a_{i,0} = b_i E_i + c_i F_i + d_i G_i \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2$$

onde

$$\begin{cases} b_i = 1 & \text{se } i \bmod m_1 = 1 \\ b_i = 0 & \text{se } i \bmod m_1 \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_i = 1 & \text{se } i \bmod m_1 \neq 0 \text{ ou } i \bmod m_1 = 1 \\ c_i = 0 & \text{se } i \bmod m_1 = 0 \text{ ou } i \bmod m_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_i = 1 & \text{se } i \bmod m_1 = 0 \\ d_i = 0 & \text{se } i \bmod m_1 \neq 0 \end{cases}$$

e

$$E_i = -\frac{\omega[\alpha + \gamma + \omega - 2] \left[\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor + 1 \right) m_1 \alpha \gamma + \left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor + 1 \right) \gamma^2 + i \alpha \omega + \left(3 + 2 \left(\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor - 1 \right) \right) \gamma \omega + \omega^2 \right]}{\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor \gamma + \omega \left[(i-1)\alpha + \left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor \gamma + \omega \right]}$$

$$F_i = -\frac{\omega[\alpha + \gamma + \omega - 2] \left[\left(\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor + 1 \right) \gamma + \omega \right] \left[\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor + 1 \right) m_1 \alpha \gamma + \left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor + 1 \right) \gamma^2 + i \alpha \omega + \left(3 + 2 \left(\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor - 1 \right) \right) \gamma \omega + \omega^2 \right]}{\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor \gamma + \omega \left[\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor + 1 \right) m_1 \alpha \gamma + \left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor + 1 \right) \gamma^2 + (i-1)\alpha \omega + \left(3 + 2 \left(\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor - 1 \right) \right) \gamma \omega + \omega^2 \right]}$$

$$G_i = -\frac{\omega[\alpha + \gamma + \omega - 2] \left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor \gamma + \omega \left[i \alpha + \left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor \gamma + \omega \right]}{\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor - 1 \left[\left(\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor - 1 \right) + 1 \right] m_1 \alpha \gamma + \left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor - 1 \left[\left(\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor - 1 \right) + 1 \right] \gamma^2 + (i-1)\alpha \omega + \left(3 + 2 \left(\left\lfloor \frac{i}{m_1} \right\rfloor - 1 \right) - 1 \right) \gamma \omega + \omega^2}$$

onde $\lfloor u \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a u .

É possível verificar que se $a_{1,0} > 0, a_{2,0} > 0, a_{3,0} > 0, \dots, a_{m_2-1} > 0, a_{m_2} > 0$ então $a_{1,0} < a_{2,0} < a_{3,0} < \dots < a_{m_2-1} < a_{m_2}$ (assim como no modelo ANA). Portanto basta garantir que $a_{m_2} > 0$ para que as outras restrições sejam satisfeitas. A restrição $a_{m_2,0}$ é dada pela equação (4.6).

$$a_{m_2,0} = -\frac{\omega[\alpha + \gamma + \omega - 2] \left[\frac{m_2}{m_1} \gamma + \omega \right] \left[m_2 \alpha + \frac{m_2}{m_1} \gamma + \omega \right]}{(m_2 - m_1) \frac{m_2}{m_1} \alpha \gamma + \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{m_2}{m_1} - 1 \right) \gamma^2 + (m_2 - 1) \alpha \omega + \left(3 + 2 \left(\frac{m_2}{m_1} - 2 \right) \right) \gamma \omega + \omega^2} > 0 \quad (4.6)$$

Para que a equação (4.6) seja verdadeira é necessário que:

Restrição 1: $\omega > 0$

Restrição 2: $2 - \alpha - \gamma - \omega > 0$

Restrição 3: $\frac{m_2}{m_1} \gamma + \omega > 0$

Restrição 4: $m_2 \alpha + \frac{m_2}{m_1} \gamma + \omega > 0$

Restrição 5: $(m_2 - m_1) \frac{m_2}{m_1} \alpha \gamma + \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{m_2}{m_1} - 1 \right) \gamma^2 + (m_2 - 1) \alpha \omega + \left(3 + 2 \left(\frac{m_2}{m_1} - 2 \right) \right) \gamma \omega + \omega^2 > 0$

Utilizando estas cinco restrições garante-se que o modelo seja previsível. Na Figura 18 é apresentada a região de estabilidade para γ e ω dependendo do valor de α . Esta região é a mesma para o modelo com crescimento.

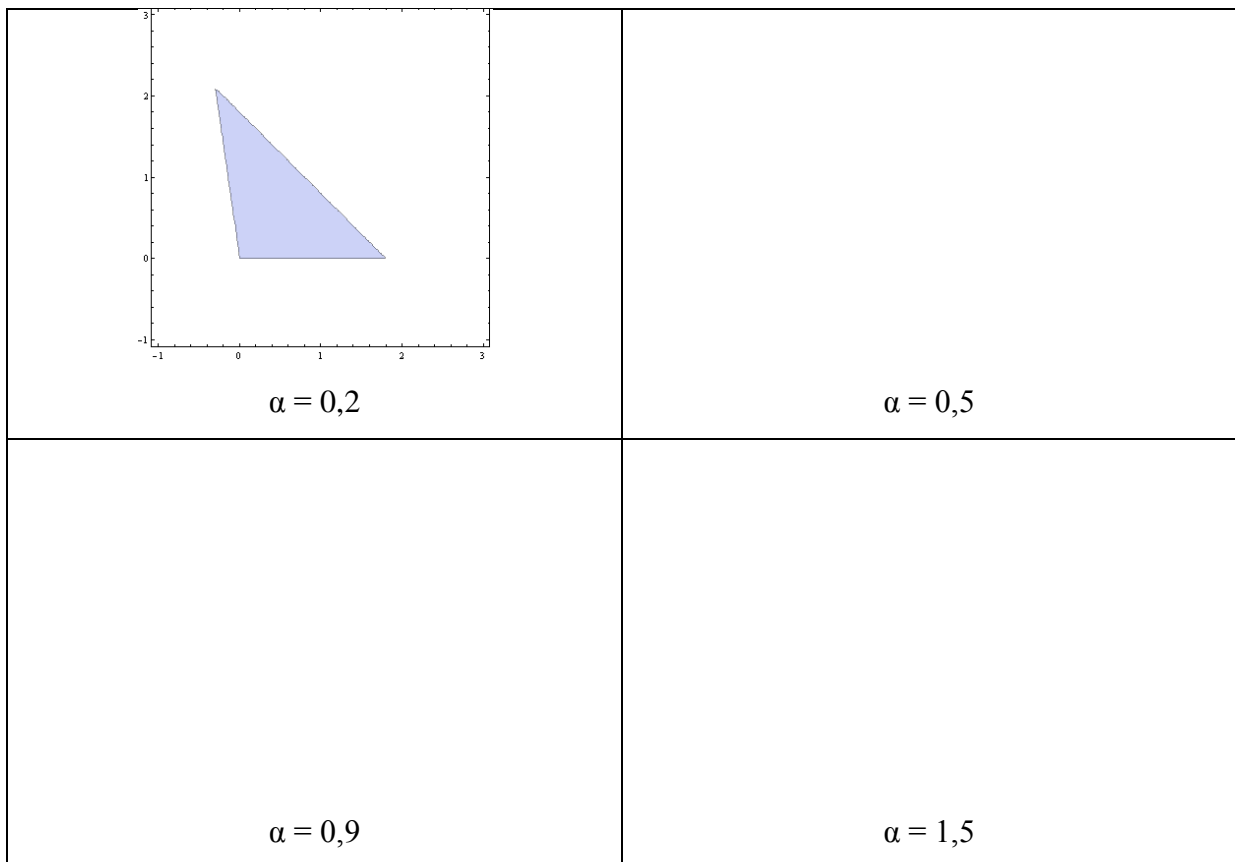


Figura 18 – Região de estabilidade para o modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade para γ (eixo y) e ω (eixo x) com sazonalidade $m_1 = 24$ e $m_2 = 168$.

4.6 Modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade normalizado

Como apresentado nas seções 4.3 e 4.5, os modelos com dupla sazonalidade tanto com crescimento quanto sem crescimento não são observáveis nem controláveis, mas são previsíveis. A instabilidade nos modelos não afeta as previsões, mas afeta o valor das componentes de estado. Existe uma superestimação no valor dos índices sazonais e uma subestimação na mesma quantidade no nível da série.

Considerando o modelo normalizado de Roberts (1982) e McKenzie (1986), pode-se aplicar a normalização nas duas equações dos índices sazonais com as seguintes adaptações:

$$s_{i,t} = c_i \left(s_{i+1,t-1} - \frac{\gamma}{m_1} e_t \right) + d_i \left(s_{i+1,t-1} + \gamma \left(1 - \frac{1}{m_1} \right) e_t \right) \quad i = 1, 2, \dots, m_2 - 1$$

$$s_{i,t} = s_{i+1,t-1} + \left[-c_i \frac{\gamma}{m_1} + d_i \gamma \left(1 - \frac{1}{m_1} \right) \right] e_t$$

$$s_{m_2,t} = s_{1,t-1} + \gamma \left(1 - \frac{1}{m_1} \right) e_t$$

e

$$u_{i,t} = u_{i+1,t-1} - \frac{\omega}{m_2} e_t \quad i = 1, 2, \dots, m_2 - 1$$

$$u_{m_2,t} = u_{1,t-1} + \omega \left(1 - \frac{1}{m_2} \right) e_t$$

Onde

$$\begin{cases} c_i = 1 & \text{se } i \bmod m_1 \neq 0 \\ c_i = 0 & \text{se } i \bmod m_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_i = 1 & \text{se } i \bmod m_1 = 0 \\ d_i = 0 & \text{se } i \bmod m_1 \neq 0 \end{cases}$$

Pode-se criar um novo índice sazonal $z_{i,t}$ (este índice também pode ser criado para o modelo não normalizado) tal que:

$$z_{i,t} = s_{i,t} + u_{i,t}$$

$$z_{i,t} = s_{i+1,t-1} + \left[-c_i \frac{\gamma}{m_1} + d_i \gamma \left(1 - \frac{1}{m_1} \right) \right] e_t + u_{i+1,t-1} - \frac{\omega}{m_2} e_t$$

$$z_{i,t} = s_{i+1,t-1} + u_{i+1,t-1} + \left[-c_i \frac{\gamma}{m_1} + d_i \gamma \left(1 - \frac{1}{m_1} \right) - \frac{\omega}{m_2} \right] e_t$$

$$\boxed{z_{i,t} = z_{i+1,t-1} + \left[-c_i \frac{\gamma}{m_1} + d_i \gamma \left(1 - \frac{1}{m_1} \right) - \frac{\omega}{m_2} \right] e_t} \quad i = 1, 2, \dots, m_2 - 1$$

$$z_{m_2,t} = s_{m_2,t} + u_{m_2,t} = s_{1,t-1} + \gamma \left(1 - \frac{1}{m_1}\right) e_t + u_{1,t-1} + \omega \left(1 - \frac{1}{m_2}\right) e_t$$

$$z_{m_2,t} = s_{1,t-1} + u_{1,t-1} + \left[\gamma \left(1 - \frac{1}{m_1}\right) + \omega \left(1 - \frac{1}{m_2}\right) \right] e_t$$

$$\boxed{z_{m_2,t} = z_{1,t-1} + \left[\gamma \left(1 - \frac{1}{m_1}\right) + \omega \left(1 - \frac{1}{m_2}\right) \right] e_t}$$

Assim como no caso de um ciclo sazonal, deve-se corrigir também o nível da série, para que a previsão deste modelo tenha o mesmo valor do modelo de dupla sazonalidade de Taylor (2003a). Portanto, a equação do nível para o modelo sem crescimento será:

$$\boxed{l_t = l_{t-1} + \left(\alpha + \frac{\gamma}{m_1} + \frac{\omega}{m_2} \right) e_t}$$

Percebe-se que na formulação este modelo pode acomodar mais ciclos sazonais. O índice $z_{i,t}$ pode ser a soma de mais ciclos sazonais. Por exemplo, supondo que existam três ciclos sazonais $s_{i,t}$, $u_{i,t}$ e $v_{i,t}$ com ciclos de tamanhos m_1 , m_2 e m_3 , sendo $m_1 < m_2 < m_3$ e m_3/m_2 e m_2/m_1 igual a um número inteiro, pode-se definir $z_{i,t} = s_{i,t} + u_{i,t} + v_{i,t}$. O tamanho do ciclo $z_{i,t}$ vai ser igual ao do ciclo sazonal maior m_3 . Portanto o modelo de Holt-Winters e o de suavização exponencial com dupla sazonalidade vão ser casos particulares deste modelo geral.

O modelo normalizado possui várias vantagens em relação ao modelo padrão com dupla sazonalidade. Pode-se elencar:

- o modelo é observável e controlável, pois todos os índices sazonais são atualizados no período t , e é possível determinar todas as variáveis de estado do vetor de estado x_0 a partir de y_t . Os vetores x_t , w , g e a matriz F são (ex. $m_1 = 4$ e $m_2 = 12$):

- Não existe mais viés nas estimativas das componentes. Na Figura 19 é apresentada a soma acumulada dos índices sazonais $z_{i,t} = s_{i,t} + u_{i,t}$ para o modelo não normalizado nos dados de consumo de energia elétrica de Santa Catarina, em 2003 (consumo horário de energia - 12 semanas de dados)

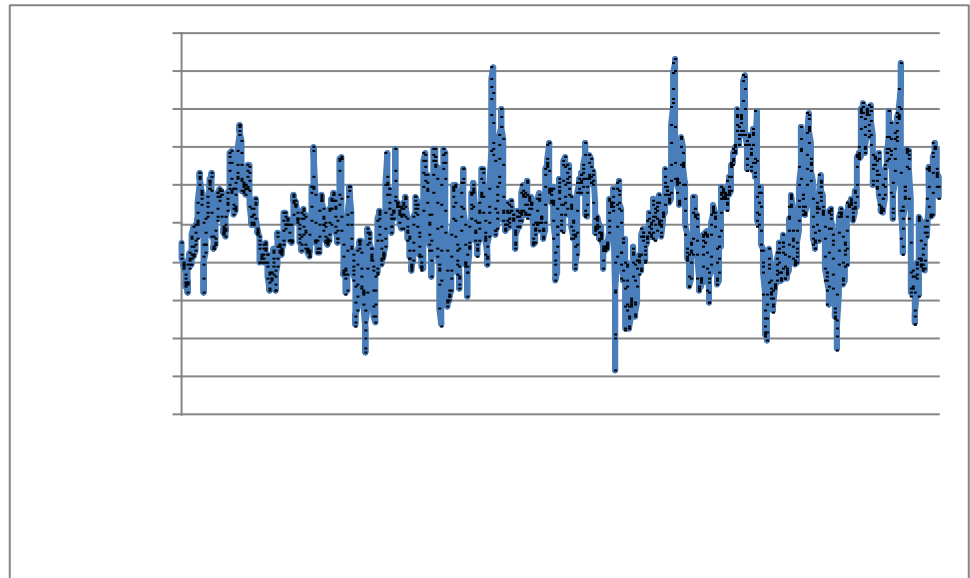


Figura 19 - Soma acumulada para os índices sazonais ($m_2 = 168$)

Percebe-se que a soma acumula dentro de um ciclo sazonal não é igual a zero. Em alguns períodos chega a, aproximadamente, 800 MWh.

- Foram eliminadas todas as equações do ciclo sazonal menor;
- Só é necessário calcular m_2 índices sazonais para o vetor x_0 .

Os resultados apresentados neste capítulo podem ser vistos resumidamente no próximo capítulo, onde são apresentadas as conclusões desta tese.

5 Conclusões

O espaço admissível dos parâmetros do modelo de suavização exponencial com dupla sazonalidade é diferente do que se utiliza tradicionalmente. Para o parâmetro do crescimento o espaço é muito restrito, quando aplicado o modelo a séries horárias. Para poder aplicar o modelo a estas séries deve-se utilizar um modelo sem crescimento ou com crescimento constante ao longo do tempo. Já os outros parâmetros associados ao nível e a sazonalidade podem variar mais do que se utiliza usualmente.

Em um exemplo empírico verificou-se que se beta for igual 0,01 o modelo já não é estável, e o erro das previsões aumenta, em relação ao modelo com beta igual a zero, com previsões de cinco horas a frente. Como tanto neste estudo quanto em outros publicados, o crescimento é desprezível, se utilizou o modelo sem crescimento para encontrar algebricamente o espaço admissível dos parâmetros de suavização. São cinco restrições de fácil implementação em um algoritmo de otimização para a estimação dos parâmetros.

Além do estudo da estabilidade do modelo com dupla sazonalidade, verificou-se que o modelo de Taylor possui viés nas estimativas das componentes, nível e sazonalidade. O nível é subestimado na mesma quantidade que a sazonalidade é superestimada (assim como acontece no modelo de Holt-Winters). Isto faz com que a soma dos índices sazonais dentro de um ciclo sazonal não seja zero, levando a interpretações erradas sobre as componentes.

Para corrigir este problema foi desenvolvido um modelo normalizado (como o de Roberts e McKenzie) que faz com que a soma dos índices dentro de um ciclo sazonal seja zero. Este modelo não muda as previsões do modelo de Taylor, mas corrige o problema de viés nas estimativas das componentes. Além disto, o modelo elimina os índices sazonais do ciclo sazonal menor, reduzindo o número de equações.

Como sugestão para trabalhos futuros pode se destacar o cálculo da estabilidade para modelos não lineares, já que em muitas situações estes são mais adequados a séries de dados. Estabelecer o tamanho da amostra para se fazer o ajuste do modelo aos dados, estabelecer o efeito de *outliers* na estimação dos parâmetros de suavização e solucionar o problema de dados faltantes e zeros na série de dados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Akaike, H. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. *Second international symposium on information theory*, (pp. 267– 281). Budapest, 1973.
- Archibald, B., & Koehler, A. B. Normalization of seasonal factors in Winters' methods. *International Journal of Forecasting* , 19, pp. 143–148, 2003.
- Billah, B., King, M. L., Snyder, R. D., & Koehler, A. B. Exponential smoothing model selection for forecasting. *International Journal of Forecasting* , 22, pp. 239– 247, 2006.
- Box, G. E., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. *Time series analysis: forecasting and control* (3rd ed ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1994.
- Chatfield, C., Koehler, A. B., Ord, J. K., & Snyder, R. D. A new look at models for exponential smoothing. *Royal Statistical Society. Series D* , 50, pp. 147–159, 2001.
- Engle, R. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation. *Econometrica* , 50, pp. 987-1008, 1982.
- Gardner, E. S. Exponential smoothing: the state of the art – part II. *International Journal of Forecasting* , 22 (4), pp. 637-666, 2006.
- Gardner, E. S. Exponential smoothing: The state of the art. *Journal of Forecasting* , 4, pp. 1 – 28, 1985
- Gardner, E. S., & McKenzie, E. Forecasting trends in time series. *Management Science* , 31, pp. 1237–1246, 1985.
- Gould, P., Koehler, A. B., Vahid-Araghi, F., Snyder, R. D., Ord, J. K., & Hyndman, R. J. Forecasting time series with multiple seasonal patterns. *European Journal of Operational Research* , 1991 (1), pp. 205–220, 2008.
- Holt, C. C. Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages. *International Journal of Forecasting* , 20, pp. 5-10, 2004.
- Hyndman, R. J., Akram, M., & Archibald, B. C. The admissible parameter space for exponential smoothing models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* , 60 (2), pp. 407–426, 2008b.
- Hyndman, R. J., Koehler, A. B., Ord, J. K., & Snyder, R. D. *Forecasting with exponential smoothing: the state space approach*. Berlin: Springer-Verlag, 2008a.
- Hyndman, R. J., Koehler, A. B., Ord, J. K., & Snyder, R. D. Prediction intervals for exponential smoothing using two new classes of state space models. *Journal of Forecasting* , 24, pp. 17– 37, 2005.

- Hyndman, R. J., Koehler, A. B., Snyder, R. D., & Grose, S. A state space framework for automatic forecasting using exponential smoothing methods. *International Journal of Forecasting* , 18, pp. 439–454, 2002.
- Jury, E. I. *Theory and application of the z-transform method*. New York: Wiley, 1964.
- Koehler, A. B., Snyder, R. D., & Ord, J. K. Forecasting models and prediction intervals for the multiplicative Holt–Winters method. *International Journal of Forecasting* , 17, pp. 269–286, 2001.
- Lawton, R. How should additive Holt–Winters estimates be corrected? *International Journal of Forecasting* , 14, pp. 393–403, 1998.
- Makridakis, S., Wheelwright, S. C., & Hyndman, R. J. *Forecasting: methods and applications* (3rd ed ed.). New York: Wiley, 1998.
- McKenzie, E. Renormalization of seasonals in Winters' forecasting systems: is it necessary? *Operations Research* , 34, pp. 174–176, 1986.
- Morzuch, B. J., & Allen, P. G. Forecasting Hospital Emergency Department Arrivals. *26th Annual Symposium on Forecasting*. Santander, 2006.
- Ogata, K. *Discrete-Time Control Systems* (2ª Edição ed.). Prentice-Hall International, 1995.
- Ord, J. K., Koehler, A. B., & Snyder, R. D. Estimation and prediction for a class of dynamic nonlinear statistical models. *Journal of the American Statistical Association* , 92, pp. 1621–1629, 1997.
- Pegels, C. Exponential forecasting: Some new variations. *Management Science* , 15, pp. 311–315, 1969.
- Raible, R. H. A simplification of Jury's tabular form. *IEEE Trans. Automat. Control* , 19, pp. 248–250, 1974.
- Roberts, S. A. A general class of Holt–Winters type forecasting models. *Management Science* , 28, pp. 808–820, 1982.
- Snyder, R. D. Recursive estimation of dynamic linear statistical models. *Journal of the Royal Statistical Society. Ser B* , 47, pp. 272–276, 1985.
- Snyder, R. D., Ord, J. K., & Koehler, A. B. Prediction intervals for ARIMA models. *Journal of Business and Economics Statistics* , 19 (2), pp. 217–225, 2001.
- Souza, G. P., Samohyl, R. W., & Miranda, R. G. *Métodos Simplificados de Previsão Empresarial* (1ª ed.). Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.
- Taylor, J. W. A Comparison of Univariate Time Series Methods for Forecasting Intraday Arrivals at a Call Center. *MANAGEMENT SCIENCE* , 54 (2), pp. 253–265, 2008.

Taylor, J. W. Exponential smoothing with a damped multiplicative trend. *International Journal of Forecasting* , 19, pp. 715– 725, 2003b

Taylor, J. W. Short-term electricity demand forecasting using double seasonal exponential smoothing. *Journal of the Operational Research Society* , 54, pp. 799– 805, 2003a.

Taylor, J. W., Menezes, L. M., & McSharry, P. E. A comparison of univariate methods for forecasting electricity demand up to a day ahead. *International Journal of Forecasting* , 22, pp. 1– 16, 2006.

Winters, P. R. Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. *Management Science* , 6, pp. 324-342, 1960.

Apêndice A - Funções em VBA para o teste de Jury

```
Function juryTabela(coef As Range)
```

```
'Função para o calculo de tabela de Raible
```

```
'-----
```

```
' gp = grau do polinomio
```

```
'tabela = tabela de Raible
```

```
'coef = coeficientes do polinomio característico
```

```
'coefs = coeficientes da tabela
```

```
'-----
```

```
Dim i As Integer
```

```
Dim j As Integer
```

```
Dim l As Integer
```

```
Dim tabela() As Double
```

```
Dim coefs() As Double
```

```
Dim gp As Integer
```

```
Dim k As Integer
```

```
gp = UBound(coef(), 2)
```

```
ReDim tabela(1 To gp, 1 To gp)
```

```
ReDim coefs(0 To gp)
```

```
For j = 1 To gp
```

```
    tabela(1, j) = coef(j)
```

```
Next
```

```
k = gp - 1
```

```
For i = 2 To gp
```

```
    For j = 1 To k
```

```
        tabela(i, j) = (1 / tabela(i - 1, 1)) * (tabela(i - 1, 1) * tabela(i - 1, j) - tabela(i - 1, k + 1)
```

```
* tabela(i - 1, k + 2 - j))
```

```
    Next
```

```
    k = k - 1
```

```
Next
```

```
juryTabela = tabela
```

```
End Function
```

```
Function coef(m1 As Integer, m2 As Integer, alfa As Double, beta As Double, gama As Double, omega As Double, modelo As Integer)
```

```
'Função que calcula os coeficientes dos modelos AAA, AAAA, ANAA
```

```
'-----
```

```
'm1 - ciclo sazonal m se modelo = 1
```

```
'm1 - ciclo sazonal m1 se modelo = 2 ou 3
```

```
'm2 - ciclo sazonal m2 se modelo = 2 ou 3
```

```
'alfa, beta, gama e omega - parametros de suavizacao
```

```
'modelo = 1 - AAA
```

```
'modelo = 2 - AAAA - Dupla sazonalidade com crescimento
```

```
'modelo = 3 - ANAA - Dupla sazonalidade sem crescimento
```



```

Dim vetorCoefs() As Double
Dim vetorcoefs1() As Double
Dim a As Integer
Dim b As Integer
Dim c As Integer

Dim i As Integer

Select Case True
  Case modelo = 1
    ReDim vetorCoefs(0 To m1 + 1)
    ReDim vetorcoefs1(0 To m1 + 1)
    vetorCoefs(0) = 1 - alfa - gama
    vetorCoefs(1) = beta + gama - 1
    For i = 2 To m1 - 1
      vetorCoefs(i) = beta
    Next
    vetorCoefs(m1) = alfa + beta - 1
    vetorCoefs(m1 + 1) = 1
    For i = 0 To m1 + 1
      vetorcoefs1(i) = vetorCoefs(m1 + 1 - i)
    Next
  Case modelo = 2
    ReDim vetorCoefs(0 To m2 + 1)
    ReDim vetorcoefs1(0 To m2 + 1)
    vetorCoefs(0) = 1 - alfa - gama - omega
    vetorCoefs(1) = beta + gama + omega - 1
    For i = 2 To m2 - 1
      Select Case True
        Case i Mod m1 = 0
          a = 1
          b = 0
          c = 0
        Case i Mod m1 = 1
          a = 0
          b = 1
          c = 0
        Case i Mod m1 <> 1 Or i Mod m1 <> 0
          a = 0
          b = 0
          c = 1
      End Select
      vetorCoefs(i) = a * (beta - gama) + b * (beta + gama) + c * beta
    Next
    vetorCoefs(m2) = alfa + beta - 1
    vetorCoefs(m2 + 1) = 1
    For i = 0 To m2 + 1
      vetorcoefs1(i) = vetorCoefs(m2 + 1 - i)
    Next
  Case modelo = 3

```

```

ReDim vetorCoefs(0 To m2)
ReDim vetorcoefs1(0 To m2)
vetorCoefs(0) = alfa + gama + omega - 1
For i = 1 To m2 - 1
  Select Case True
    Case i Mod m1 = 0
      a = 1
      b = 0
    Case i Mod m1 <> 0
      a = 0
      b = 1
  End Select
  vetorCoefs(i) = b * alfa + a * (alfa + gama)
Next
vetorCoefs(m2) = 1
For i = 0 To m2
  vetorcoefs1(i) = vetorCoefs(m2 - i)
Next
End Select
coef = vetorcoefs1
End Function

```

```
Function juryTeste(coefs As Range) As Boolean
```

'Teste para verificar se todos os coeficientes da
'primeira coluna são maiores que zero

'-----
'coefs - coeficientes da tabela de Raible
'-----

```

Dim gp As Integer
Dim teste1 As Boolean
Dim i As Integer
gp = UBound(coefs(), 2)
For i = 1 To gp
  If coefs(i, 1) > 0 Then
    juryTeste = True
  Else
    juryTeste = False
    Exit Function
  End If
Next
End Function

```

Apêndice B - Tabela de Raible para o modelo AAA com sazonalidade trimestral

Coeficientes da tabela de Raible para o modelo AAA com sazonalidade trimestral.

Linha 0

Linha 1

Linha 2

Linha 3

Linha 4

Linha 5

Apêndice C - Tabela de Raible para o modelo com dupla sazonalidade sem crescimento

Coefficientes da tabela de Raible para o modelo com dupla sazonalidade sem crescimento com sazonalidade $m_1 = 3$ e $m_2 = 12$. Serão apresentados apenas os coeficientes da coluna zero.

Fazendo com que todos os coeficientes apresentados acima sejam maiores que zero as equações de restrições dos parâmetros de suavização são:

Restrição 1: $\omega > 0$

Restrição 2: $2 - \alpha - \gamma - \omega > 0$

Restrição 3: $4\gamma + \omega > 0$

Restrição 4: $12\alpha + 4\gamma + \omega > 0$

Restrição 5: $36\alpha\gamma + 12\gamma^2 + 11\alpha\omega + 7\gamma\omega + \omega^2 > 0$