

André Vanderlinde da Silva

Homologia de Morse para Variedades com Bordo

Dissertação apresentada ao Curso de Pós- Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Celso Melchiades Doria

**Florianópolis – SC
Fevereiro 2010**

Homologia de Morse para Variedades com Bordo
por
André Vanderlinde da Silva

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção, do Título de “Mestre” em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Área de Concentração em Geometria e Topologia, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica em (data).

Clóvis Caesar Gonzaga

Coordenador da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria (UFSC - Orientador)

Prof. Dr. Pedro Antonio Santoro Saloão (IME-USP)

Prof. Dr. Umberto Leone Hryniewicz(UFRJ)

Agradecimentos

Quero registrar meus agradecimentos à CAPES pelo auxílio financeiro e a todos que contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, aos Professores, Celso Melchiades Doria, pelo apoio e incentivo na orientação, e Ivan Pontual Costa e Silva, pelas importantes críticas e sugestões na revisão desta dissertação. Lembro ainda dos Professores Jáuber Cavalcante de Oliveira, Fermín Sinforiano Viloche Bazán, Antonio Carlos Gardel Leitão, Eliezer Batista e Ruy Exel Filho, cuja convivência me foi enriquecedora. E, por fim, agradeço àqueles que sempre estão dispostos a me apoiar, Antonio Waldoir Rodrigues da Silva, Ede Lordis Vanderlinde e Ariana Correa, e os meus amigos (e colegas de departamento) Fabiano Carlos Cidral, Anelise Salvi, Leandro Augusto Lichtenfelz e Carla Morschbacher.

Resumo

Dada uma variedade Riemanniana M e uma função de Morse f definida em M , definimos os espaços modulares dos fluxos do campo vetorial gradiente negativo de f e investigamos a colagem de trajetórias desses espaços. Além disso, estudamos a orientação e uma compactificação trivial para os espaços modulares. Associamos à função de Morse f um complexo que consiste dos grupos livres gerados pelos pontos críticos de f e um operador de bordo contando linhas de fluxo orientadas. A homologia deste complexo, chamada Homologia de Morse, coincide com a Homologia Singular de M .

Abstract

Given a Riemannian manifold M with boundary and a Morse function f defined on M , we define the moduli spaces of flow lines of the negative gradient flow and gluing for the moduli spaces. We study the orientation and a canonical compactification to the moduli spaces. We associate to a Morse function f a Morse complex that consists of chain groups generated by the critical points of f and a boundary operator counting oriented flow lines. The homology of this complex, called Morse Homology, is isomorphic to Singular Homology of M .

Lista de Figuras

Toro e a Função Altura	26
M^{ab} e M^a para a Função Altura no Toro	29
Deformação de S^2 mergulhada em \mathbb{R}^3	32
Toro Morse-Smale	33
Variedade M com uma orientação fixada	39
Variedade M com bordo e a função altura	54

Sumário

Introdução	xv
1 Definições e Resultados Básicos	1
1.1 Variedades Diferenciáveis	1
1.1.1 Vetores Tangentes e Derivadas	4
1.1.2 Transversalidade	7
1.1.3 Campos Vetoriais e Curvas Integrais	8
1.1.4 Métrica Riemanniana	10
1.1.5 Conexão Afim e Derivada Covariante	12
1.1.6 Formas Diferenciais	15
1.1.7 Orientação de Variedades	17
1.2 Homologia	19
1.2.1 Operador Bordo	20
1.2.2 Homomorfismo Induzido	21
1.2.3 Homologia Relativa	24
1.3 Teoria de Morse	25
2 Homologia de Morse	35
2.1 Colagem de Trajetórias	36
2.2 Orientação de $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$	37
2.3 Homologia de Floer	45
3 Homologia de Morse em Variedades com Bordo	53
3.1 Espaços Modulares $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$	54
3.1.1 Orientação para $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$	55
3.1.2 Compactificação de $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$	56
3.2 Os Complexos $(\overline{C}, \overline{\partial})$, $(\check{C}, \check{\partial})$ e $(\hat{C}, \hat{\partial})$	58
3.3 Sequência Exata para os Grupos de Homologia $\overline{H}_*(M)$, $\hat{H}_*(M)$ e $\check{H}_*(M)$	64
Considerações Finais	67
Bibliografia	69

A	Teoremas de Existência e Unicidade	71
A.1	Condição de Lipschitz	71
A.2	Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções	72
B	Forma Local das Aplicações de Fredholm	73
B.1	Orientação de Subvariedades de Nível de uma Aplicação de Fredholm	74

Introdução

A idéia central da Teoria de Morse é relacionar a topologia de uma variedade diferenciável M com a estrutura de pontos críticos de uma função real diferenciável definida em M . Podemos perceber isso ao estudar a *desigualdade de Morse* a seguir que faz uma ligação entre topologia e análise

$$c_k - c_{k-1} + c_{k-2} - \cdots + (-1)^k c_0 \geq b_k - b_{k-1} + b_{k-2} - \cdots + (-1)^k b_0, \quad \forall k \quad (1)$$

no qual b_k denota o k -ésimo número de Betti, ou seja, $b_k = \dim H^k(M, \mathbb{R})$ e c_k denota o número de pontos críticos de índice k de uma função de Morse.

Uma questão clássica sobre essa desigualdade e que contribui para o desenvolvimento da teoria de Morse é a famosa *conjectura de Poincaré*. "*Se uma variedade n -dimensional M tem os mesmos números de Betti que uma n -esfera, então M pode ter uma função de Morse com exatamente dois pontos críticos e ser, portanto, homeomorfa a \mathbb{S}^n ?*". Isso foi provado para $n = 4$ por Freedmann e para $n \geq 5$ por Smale usando o famoso *Teorema do h-cobordismo*¹. Na prova deste teorema, precisamos da garantia de existência de uma função de Morse definida em M e este é um dos motivos da sua importância no desenvolvimento da teoria de Morse.

Durante a década de 1990, várias abordagens para a Teoria de Morse surgiram. A abordagem de Floer e Salamon é via a Teoria do Índice de Conley. Schwarz considerou o negativo da equação do gradiente (motivado pela Teoria de Floer) como a seção de um fibrado de Banach apropriado sobre o conjunto das curvas em M . É ainda possível estudar a homologia via sistemas dinâmicos, estudando as Interseções de variedades instáveis e estáveis, como faremos adiante.

Se uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse está definida em M , ao considerarmos o fluxo do gradiente negativo associado a f , podemos definir as *variedades instáveis e estáveis*. Thom primeiro reconheceu que a decomposição de M em variedades instáveis produz uma decomposição em

¹ (**Teorema do h-Cobordismo de Smale**) Seja M^{n+1} uma variedade compacta com bordo. Se $\partial M = M_1^n \cup M_2^n$ tal que M_i é simplesmente conexa e um retrato de deformação de M , então M é difeomorfa a $M_i \times [0, 1]$ e M_1 é difeomorfa a M_2 .

célula que é homologicamente equivalente a união de finitas alças da forma $H_\lambda^n = B^\lambda \times B^{n-\lambda}$, na qual B^m denota a bola fechada em \mathbb{R}^{m+1} . Contudo, em geral, esta decomposição pode não ser um *CW-complexo* para o qual podemos computar grupos de homologia. Na década de 1950, Smale percebeu que podemos impor uma condição à métrica Riemanniana a fim de obter a *CW-estrutura* desejada. A hipótese sobre a métrica é chamada *condição de Morse-Smale* e diz que se f é uma função de Morse, então as variedades instáveis U_α e estáveis S_β são transversais para todo par de pontos críticos α e β da função f . Isso justifica o fato de assumirmos por toda a dissertação que o campo gradiente é *Morse-Smale*.

A definição dos Complexos de Morse considera as cadeias como os grupos abelianos livres C_* gerados pelos pontos críticos de uma função de Morse f cujo campo gradiente satisfaz a condição de Morse-Smale. A *Homologia de Morse* é a homologia dos complexos (C_*, ∂) , no qual ∂ é o operador de bordo. Essa formulação é devida a Thom, Smale e Milnor. O mais importante teorema da Teoria de Morse é que a Homologia de Morse é isomorfa à Homologia Singular para M variedade compacta.

Com o objetivo de construir os grupos de homologia acima citados, organizamos esta dissertação em três capítulos, tais que no capítulo 1 discutimos as idéias básicas da Teoria de Morse, passando antes pela teoria de variedades e homologia singular. No capítulo 2, estudaremos inicialmente os espaços modulares dos fluxos em variedade sem bordo, buscando compactificá-los além de orientá-los. Definiremos os complexos de Morse para variedades sem bordo e um operador ∂ que provaremos satisfazer $\partial\partial = 0$. Esse operador, que chamaremos *operador de bordo*, permitirá definir os Grupos de Homologia de Morse para variedades sem bordo e concluiremos que $H_*(M, f) \simeq H_*(M)$. No capítulo 3, generalizaremos para variedades com bordo o trabalho feito em variedades sem bordo. Poderemos calcular usando a homologia de Morse a homologia singular absoluta $H_*(M)$, relativa $H_*(M, \partial M)$ e absoluta $H_*(\partial M)$ para o bordo de M .

1 Definições e Resultados Básicos

Neste capítulo, fixaremos notação e terminologia além de apresentarmos rapidamente resultados fundamentais a respeito de Variedades Diferenciáveis, Grupos de Homologia e Teoria de Morse. Para os leitores interessados, as referências [7], [8], [10], [11], [13] e [14] apresentam uma discussão mais detalhada dos conceitos aqui referidos.

1.1 Variedades Diferenciáveis

Considere $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$ um subconjunto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . O bordo de \mathbb{H}^n é $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, denotado por $\partial\mathbb{H}^n$. Um conjunto M será dito **localmente euclidiano com bordo** se para todo $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ homeomorfa a um aberto de \mathbb{H}^n . Ao homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \tilde{U} \subseteq \mathbb{H}^n$ chamaremos **sistema de coordenadas**, designado abreviadamente por (U, φ) e às funções $\{x_1, \dots, x_n\}$ tais que $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$, com $p \in U$ denominaremos **funções coordenadas**.

Definição 1.1: Uma **estrutura diferenciável** num espaço localmente euclidiano com bordo M de dimensão n , é uma coleção de sistemas de coordenadas $\mathcal{C} = \{(U_i, \phi_i); i \in I\}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- D1** $\{U_i : i \in I\}$ é uma cobertura aberta de M , ou seja, $M = \cup_{i \in I} U_i$;
- D2** As funções de transição $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ são difeomorfismos entre abertos de \mathbb{H}^n ;
- D3** A coleção \mathcal{C} é maximal: se (U, ϕ) é um sistema de coordenadas tal que $\phi \circ \phi_i^{-1}$ e $\phi_i \circ \phi^{-1}$ são difeomorfismos entre abertos de \mathbb{H}^n , então $(U, \phi) \in \mathcal{C}$.

Uma **variedade diferenciável n-dimensional com bordo** é o par (M, \mathcal{C}) consistindo de um espaço topológico M , segundo contável e localmente euclidiano com bordo juntamente com uma estrutura diferenciável \mathcal{C} . O **bordo de M** consiste dos pontos $p \in M$ tais que $p \in \varphi^{-1}(\partial\mathbb{H}^n)$ e o **interior de M** é definido como $\text{int}(M) = M \setminus \partial M$.

Observação 1.1: Chamaremos apenas **variedade diferenciável sem bordo** (ou apenas variedade diferenciável), às variedades diferenciáveis com bordo M tais que $\partial M = \emptyset$.

Observação 1.2: O segundo axioma da enumerabilidade garante importantes propriedades para variedades, por exemplo, a **paracompacidade** que implica na existência de partições da unidades, como veremos adiante.

Chamaremos de *atlas (diferenciável)* uma coleção de sistemas de coordenadas satisfazendo as condições $D1$ e $D2$ acima. A existência de um atlas maximal, isto é, satisfazendo $D3$, pode ser demonstrada uma vez que se tenha encontrado uma coleção sistema de coordenadas satisfazendo as duas primeiras condições. A estrutura diferenciável \mathcal{C} da variedade M induz de maneira natural uma topologia no conjunto M . Basta dizer que $A \subseteq M$ é aberto em M se $\phi_i(A \cap U_i)$ é um aberto de \mathbb{R}^n para todo $i \in I$. Essa topologia coincide com a topologia subjacente de M .

Exemplo 1.1: Seguem alguns exemplos de variedades diferenciáveis importantes.

1. O intervalo real $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ e o disco unitário $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1\}$ são variedades diferenciáveis com bordo tais que $\partial([0, 1]) = \{0, 1\}$ e $\partial D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = 1\}$;
2. A **k-esfera** é o conjunto

$$\mathbb{S}^k = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

Sejam $n = (0, \dots, 0, 1)$ e $s = (0, \dots, 0, -1)$. Uma estrutura diferenciável trivial para \mathbb{S}^k é obtida considerando \mathcal{C} a coleção contendo $(\mathbb{S}^k - n, p_n)$ e $(\mathbb{S}^k - s, p_s)$, tal que p_n e p_s são as projeções estereográficas para n e s , respectivamente.

3. Sejam M^m e N^n variedade diferenciáveis com estruturas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ e $\mathcal{B} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$, respectivamente. Então, o produto cartesiano $M \times N$ tem estrutura natural de variedade diferenciável $m + n$ -dimensional gerada pela coleção $\mathcal{C} = \{(U_i \times V_j, (\varphi_i, \psi_j))\}_{(i,j) \in I \times J}$.
4. O cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ é uma variedade com bordo.

5. O **2-toro** é tal que $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, portanto uma variedade diferenciável, pelos exemplos acima.
6. Considere o conjunto $X = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ e a relação de equivalência em X tal que $p \sim q \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ e } q = \lambda p$. O conjunto quociente (munido da topologia quociente) tem uma estrutura diferenciável gerada pela coleção $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ dada por

$$\varphi : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\varphi_i([x_1, \dots, x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

no qual U_i é a imagem de $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in X; x_i \neq 0\}$ pela aplicação quociente $\pi : X \rightarrow X/\sim$. Chamaremos o conjunto quociente com essa estrutura diferenciável de **espaço projetivo** de dimensão n e denotaremos por \mathbb{P}^n .

Convém notar que se M é uma variedade diferenciável com bordo, então $\text{int}(M)$ é uma variedade sem bordo tal que $\dim(M) = \dim(\text{int}(M))$, uma vez que todos os pontos interiores de M possuem vizinhanças homeomorfas a pontos interiores de H^n e, portanto, homeomorfas a abertos de \mathbb{R}^n . E, além disso,

Teorema 1.1: Se M é uma variedade diferenciável com bordo k -dimensional, então ∂M é uma variedade diferenciável $(k-1)$ -dimensional sem bordo.

Demonstração. Ver referência [11]. ■

Aplicações Diferenciáveis

Podemos estender várias noções naturais do Cálculo Diferencial e Integral para variedades diferenciáveis k -dimensionais. A noção de diferenciabilidade é um exemplo.

Definição 1.2: Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão m e n , respectivamente. Diremos que $\Psi : M \rightarrow N$ é uma **aplicação diferenciável** se, existem sistemas de coordenadas (U, ϕ) de M e (W, φ) de N tais que $p \in U$, $\Psi(p) \in W$ e $\varphi \circ \Psi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \varphi(W)$ é uma aplicação diferenciável¹ entre os abertos $\phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ e $\varphi(W) \subset \mathbb{R}^n$.

¹ Nesta dissertação, a menos de menção explícita em contrário, suave e diferenciável são sinônimos de classe C^∞

Exemplo 1.2: Considere M como o elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e seja \mathbb{S}^2 a esfera. Segue $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ tal que

$$f(x, y, z) = (ax, by, cz)$$

é uma aplicação diferenciável entre as variedades.

A definição acima não depende da escolha dos sistemas de coordenadas envolvidos. Sejam dados outros sistemas de coordenadas (U_1, ϕ) e (W_1, φ_1) para M e N , respectivamente, então

$$\varphi_1 \circ \Psi \circ \phi_1^{-1} = (\varphi_1 \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \Psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \phi_1^{-1})$$

Cada um dos fatores entre parenteses à direita é um difeomorfismo de classe C^∞ , portanto, a composição $\varphi_1 \circ \Psi \circ \phi_1^{-1}$ também é C^∞ .

1.1.1 Vetores Tangentes e Derivadas

Defina o conjunto $\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ diferenciável em } M\}$. Observe que se $f, g \in \mathcal{F}(M)$ segue que $f + g \in \mathcal{F}(M)$ e $fg \in \mathcal{F}(M)$, donde $\mathcal{F}(M)$ é um anel comutativo.

Definição 1.3: Seja M uma variedade diferenciável e seja $p \in M$. Um **vetor tangente** a M em p é uma função real $v : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- $v(af+bg) = av(f) + bv(g)$;
- $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$;

para todos $f, g \in \mathcal{F}(M)$ e e para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

O conjunto de todos os vetores tangentes a M em p será denotado por T_pM . Segue que T_pM é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} que chamaremos de *espaço tangente a M em p* , considerando as seguintes operações definidas para todos os vetores $v, w \in T_pM$ e $\forall a \in \mathbb{R}$

$$(v + w)(f) = v(f) + w(f)$$

$$(av)(f) = av(f)$$

Exemplo 1.3: Seja (U, φ) um sistema de coordenadas com funções coordenadas x_1, \dots, x_n . Em cada ponto $p = \varphi(x)$, com $x \in U$ segue que os vetores $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x$ dados por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x (f) := \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} (p)$$

$\forall f \in \mathcal{F}(M)$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, são elementos de $T_p M$. Além disso, se $v \in T_p M$ então

$$v(p) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} (x)$$

no qual $a_1, \dots, a_n : U \rightarrow \mathbb{R}$. de fato, $\{\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x\}_{\{i=1, \dots, n\}}$ é base de $T_p M$ e, portanto,

$$\dim(T_p M) = \dim(M)$$

Definição 1.4: Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. A **derivada** de f em $p \in M$ é a aplicação $v \in T_p M \mapsto df_p(v) \in T_{f(p)} N$ tal que

$$df_p(v)(g) = v(g \circ f), \quad \forall g \in \mathcal{F}(N)$$

Definição 1.5: Uma função suave $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ é chamada uma **curva suave** em M . O **vetor tangente à curva** γ em $t \in (a, b)$ é o vetor

$$d\gamma \left(\frac{d}{dr} \Big|_t \right) \in T_{\gamma(t)} M$$

no qual $\frac{d}{dr} \Big|_t \in T_t(a, b)$ é dado por $\frac{d}{dr} \Big|_t (f) := f'(t)$, $\forall f \in \mathcal{F}(a, b)$. Denotaremos o vetor tangente a γ em t por $\gamma'(t)$.

Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre as variedade diferenciáveis M e N , e $p \in M$. Para calcular a derivada df_p considere uma curva suave $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ tal que $\gamma(t_o) = p$ para algum $t_o \in (a, b)$. Segue que $f \circ \gamma : (a, b) \rightarrow N$ é diferenciável e

$$df_{\gamma(t_o)}(\gamma'(t_o)) = (f \circ \gamma)'(t_o), \quad t_o \in (a, b)$$

ver referência [8].

O conceito de subvariedade advém de considerar alguns tipos especiais de aplicações diferenciáveis. De fato, sejam M e N variedades

diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ aplicação diferenciável, diremos que f é uma *imersão* quando a derivada $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} M$ é injetiva para cada $p \in M$, ou seja, p é *regular* para todo $p \in M$. Se $f : M \rightarrow N$ for uma imersão e um homeomorfismo de M sobre o subespaço $f(M) \subset N$ (com a topologia induzida), f será dita um *mergulho*. Uma *subvariedade* M de uma variedade N é um subconjunto $M \subset N$ com a topologia induzida pela de N e dotado de uma estrutura diferenciável² tal que a aplicação de inclusão $i : M \rightarrow N$ é um mergulho.

Fibrados Tangente e Cotangente

Seja M uma variedade diferenciável, e $p \in M$. Seja $T_p^* M$ o conjunto dos funcionais lineares definidos em $T_p M$. Chamaremos $T_p^* M$ de *espaço cotangente* a p de M . Considere a coleção de todos os vetores tangentes a M , isto é,

$$TM = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M$$

considere também a coleção de todos os funcionais lineares nos espaços tangentes a M , isto é,

$$T^* M = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p^* M;$$

no qual ambas as uniões são disjuntas, e as seguintes projeções

$$\begin{aligned} \pi : TM &\rightarrow M, & \pi(v) &= p \quad \text{se } v \in T_p M, \\ \pi^* : T^* M &\rightarrow M, & \pi^*(\tau) &= p \quad \text{se } \tau \in T_p^* M. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Sejam $(U, \varphi) \in \mathcal{C}$ um sistema de coordenadas com funções coordenadas x_1, \dots, x_n . Defina $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ e $\tilde{\varphi}^* : (\pi^*)^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(v) &= (x_1(\pi(v)), \dots, x_n(\pi(v)), dx_1(v), \dots, dx_n(v)), \\ \tilde{\varphi}^*(\tau) &= \left(x_1(\pi^*(\tau)), \dots, x_n(\pi^*(\tau)), \tau \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right), \dots, \tau \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right). \end{aligned}$$

Considere as seguintes coleções maximais

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}) : (U, \varphi) \in \mathcal{C}\}$$

²Essa é a única estrutura diferenciável com essas propriedades, ver referência [8]

$$\tilde{\mathcal{C}}^* = \{((\pi^*)^{-1}(U), \tilde{\varphi}^*) : (U, \varphi) \in \mathcal{C}\}$$

Segue que $\tilde{\mathcal{C}}$ e $\tilde{\mathcal{C}}^*$ são estruturas diferenciáveis sobre TM e T^*M , respectivamente. Ver referência [14].

Definição 1.6: Seja M uma variedade diferenciável. Diremos que os conjuntos TM e T^*M com as estruturas diferenciáveis acima são os **fibrados tangente** e **cotangente**, respectivamente, associados a M .

Por fim, se $\psi : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável entre M e N , então as derivadas de ψ nos pontos de M definem uma aplicação diferenciável entre os fibrados tangentes,

$$d\psi : TM \rightarrow TN$$

dados por $d\psi(v) = d\psi_{\pi(v)}(v)$, $\forall v \in TM$

1.1.2 Transversalidade

Sejam M, N variedade diferenciáveis e $S \subset N$ uma subvariedade. Dada $f : M \rightarrow N$ uma função diferenciável, estudaremos condições sob as quais a imagem inversa $f^{-1}(S)$ é uma subvariedade de M .

Definição 1.7: Diremos que f é **transversal** a S no ponto $p \in f^{-1}(S)$ quando

$$df_p(T_pM) + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N$$

Se f for transversal a S para todo $p \in f^{-1}(S)$, f será dita **transversal** a S .

Proposição 1.1: Seja $f : M \rightarrow N$ uma função diferenciável, transversal a uma subvariedade $S \subset N$. Então, ou $f^{-1}(S) = \emptyset$ ou $f^{-1}(S)$ é uma subvariedade de M , cuja codimensão em M é igual à codimensão de S em N . Neste caso,

$$T_p\{f^{-1}(S)\} = df_p^{-1}.T_{f(p)}S, \quad \forall p \in f^{-1}(S)$$

Demonstração. Ver referência [7] ■

Definição 1.8: Se $N, S \subset M$ são subvariedades de M tais que $T_pN + T_pS = T_pM$ para todo $p \in N \cap S$, diremos que N e S são **transversais**.

Proposição 1.2: Sejam $N, S \subset M$ subvariedades de M . Se N e S são transversais e $N \cap S \neq \emptyset$, então $N \cap S$ é uma subvariedade de M cuja dimensão é

$$\dim(N \cap S) = \dim N + \dim S - \dim M.$$

Demonstração. Segue da Proposição 1.1, uma vez que N e S são transversais se, e somente se, $i : N \hookrightarrow M$ é transversal a S para todo $p \in i^{-1}(S) \equiv N \cap S$, no qual i é a inclusão. ■

1.1.3 Campos Vetoriais e Curvas Integrais

Seja M uma variedade diferenciável, considere TM o fibrado tangente de M e $\pi : TM \rightarrow M$ a aplicação projeção.

Definição 1.9: Um **campo vetorial** ξ sobre uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma aplicação $\xi : [a, b] \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ \xi = \gamma$. Um **campo vetorial** X em M é uma aplicação $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = I_M$.

Denote por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais suaves definidos em M . Note que $\mathfrak{X}(M)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e um módulo sobre o anel $\mathcal{F}(M)$. Se X é um campo vetorial em M e $p \in M$, então $X(p)$ (que será denotado simplificadaamente por X_p) é um elemento de T_pM . Se $f \in \mathcal{F}(M)$, então Xf denotará uma função real em M dada por

$$(Xf)(p) = X_p(f), \quad \forall p \in M$$

Definição 1.10: Sejam X e Y campos vetoriais suaves em M . Então, o campo vetorial $[X, Y]$ tal que

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

é chamado **Colchete de Lie** de X e Y .

Lema 1.1: O colchete de Lie tem as seguintes propriedades:

- (i) $[X, Y]$ é um campo vetorial suave em M ;
- (ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], \forall a, b \in \mathbb{R}$;
- (iii) Se $f, g \in C^\infty(M)$, então $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$
- (iv) $[X, Y] = -[Y, X]$.

Demonstração. Ver referência [16]. ■

Definição 1.11: Seja X um campo vetorial suave em M . A curva suave $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ é uma **curva integral** de X se

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \tag{1.2}$$

para todo $t \in (a, b)$.

Teorema 1.2: Seja X um campo vetorial de classe C^∞ na variedade diferenciável M . Para cada $p \in M$ existem $a(p), b(p) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ com $a(p) < b(p)$, e uma curva suave

$$\gamma_p : (a(p), b(p)) \rightarrow M$$

tal que

1. $0 \in (a(p), b(p))$ e $\gamma_p(0) = p$;
2. γ_p é uma curva integral de X ;
3. Se $\mu : (c, d) \rightarrow M$ é uma curva suave satisfazendo as condições (1) e (2), então $(c, d) \subset (a(p), b(p))$ e $\mu = \gamma_p|_{(c,d)}$.

Demonstração. Segue dos teoremas de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais do apêndice A. ■

Dado um campo vetorial X , para cada $t \in \mathbb{R}$, defina o conjunto

$$\mathcal{D}_t = \{p \in M; t \in (a(p), b(p))\} \subseteq M$$

e a aplicação $\Phi_t : \mathcal{D}_t \rightarrow M$ tal que $\Phi_t(p) = \gamma_p(t)$. O próximo teorema resume algumas propriedades da aplicação Φ_t .

Teorema 1.3: Seja X um campo vetorial na variedade diferenciável M .

1. Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança aberta $V \subseteq M$ de p e um $\epsilon > 0$ tal que a função $(t, q) \mapsto \Phi_t(q)$ de $(-\epsilon, \epsilon) \times V$ em M está definida e é C^∞ ;
2. \mathcal{D}_t é aberto para cada t ;
3. $\bigcup_{t>0} \mathcal{D}_t = M$;
4. Sejam $s, t \in \mathbb{R}$. Então, o domínio de $\Phi_s \circ \Phi_t$ está contido em (mas, em geral, não igual) \mathcal{D}_{s+t} . Contudo, o domínio de $\Phi_s \circ \Phi_t$ é \mathcal{D}_{s+t} no caso em que s e t possuem o mesmo sinal. Além disso, no domínio de $\Phi_s \circ \Phi_t$ teremos

$$\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$$

Demonstração. Ver referência [14]. ■

Definição 1.12: Seja X um campo vetorial em M . Diremos que X é **completo** quando $\mathcal{D}_t = M$, $t \in \mathbb{R}$.

Segue que se X é completo, as aplicações $\Phi_t : M \rightarrow M$ formam um grupo cuja operação é a composição de funções chamado *grupo a 1-parâmetro de X* que é tal que $\Phi_0(p) = p$ e $\Phi_s(\Phi_t(p)) = \Phi_{s+t}(p)$.

Proposição 1.3: Seja M uma variedade diferenciável compacta e $X \in \mathcal{X}(M)$, então X é completo.

Demonstração. Ver referência [14]. ■

1.1.4 Métrica Riemanniana

Definição 1.13: Uma **métrica Riemanniana** na variedade diferenciável M é a uma função que associa a cada $p \in M$ um produto interno positivo-definido g_p no espaço tangente $T_p M$. Uma **métrica Riemanniana**³ é suave se para todo campo suave de vetores $X : M \rightarrow TM$ a função de valores reais $p \mapsto g_p(u_p, u_p)$ é uma função suave em M .

As funções $g_{ij} : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_p = g_{ji}(p)$, $\forall p \in M$ são chamadas *representações locais* da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tais funções são suaves (ver referência [7]). Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana será chamada uma **variedade Riemanniana**.

Exemplo 1.4: Considere $S \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superfície e seja $\phi : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subseteq S$ uma parametrização local. Defina

$$E(p) = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\rangle, \quad F(p) = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle, \quad G(p) = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle$$

A matriz definida por

$$\mathcal{F}_p = \begin{pmatrix} E(p) & F(p) \\ F(p) & G(p) \end{pmatrix}$$

é chamada **primeira forma fundamental** para ϕ e define uma forma bilinear simétrica positiva-definida. Segue que a primeira forma fundamental define uma métrica em S (ver referência [16]).

³Trabalharemos nesta dissertação apenas com métrica Riemannianas suaves as quais, por simplicidade, serão chamadas métricas Riemannianas

A fim de provar que toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana, precisaremos inicialmente recordar alguns fatos a respeito de *partições da unidade*. Considere a coleção $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \lambda}$ de subconjuntos de M ; então $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \lambda}$ será dita *localmente finita* quando dado $p \in M$, existir um aberto W_p da variedade tal que $p \in W_p$ e $W_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ somente para um número finito de α . Dada uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, definimos o *suporte de f* como o conjunto $\text{supp } f = \overline{\{x \in M; f(x) \neq 0\}}$. Dado $x \notin \text{supp } f$, f se anula em todos os pontos de uma vizinhança aberta de x .

Definição 1.14: Seja M uma variedade diferenciável. Uma **partição da unidade sobre M** é uma coleção $\{f_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ de funções $f_\alpha \in \mathcal{F}(M)$ tais que

- (i) $0 \leq f_\alpha(x) \leq 1, \forall x \in M$ e $\forall \alpha \in \Lambda$;
- (ii) A coleção de subconjuntos $\{\text{supp } f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é localmente finita;
- (iii) $\sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(p) = 1, \forall p \in M$.

Uma partição da unidade $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é dita *subordinada a uma cobertura* $\{U_i\}_{i \in I}$ de M se para cada $i \in I$ existe um $\alpha \in \Lambda$ tal que $\text{supp } f_\alpha \subset U_i$.

Lema 1.2(Existência de Partições da Unidade): Seja M uma variedade diferenciável e $\mathcal{C} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de M . Então existe uma partição da unidade $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ subordinada à cobertura \mathcal{C} .

Observação 1.3: A existência de Partições da Unidade só é possível uma vez que a variedade diferenciável M é um espaço topológico segundo contável.

Proposição 1.4: Toda variedade diferenciável tem uma métrica Riemanniana.

Demonstração. Pelo lema anterior, existe $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma partição da unidade em M subordinada à cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ das vizinhanças coordenadas. Segue que $\{U_i\}_{i \in I}$ tem um refinamento localmente finita e $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é uma família de funções que satisfaz

- (i) $f_\alpha \geq 0, \forall p \in M$;
- (ii) $f_\alpha(p) = 0, \forall p \in M \setminus \overline{U_\alpha}$;
- (iii) $\sum_{\alpha \in \lambda} f_\alpha(p) = 1, \forall p \in M$

Em cada $U_\alpha \subseteq M$, defina uma métrica riemanniana g_α induzida pela métrica do \mathbb{R}^n pondo que

$$g_i(p; u, v) = \langle x'_i(p).u, x'_i(p).v \rangle$$

Obtemos uma métrica riemanniana g em M tal que

$$g(p; u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(p).g_i(p; u, v)$$

uma vez que, por exemplo,

$$g(p; u, u) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(p).g_i(p; u, u) > 0$$

pois $f_i(p) > 0$ e $g_i(p; u, u) > 0$ para todo α tal que $p \in V_\alpha$ ■

1.1.5 Conexão Afim e Derivada Covariante

Definição 1.15: Uma aplicação $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

- (i) $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z, \forall a, b \in \mathbb{R};$
- (ii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y, \forall f \in \mathcal{F}(M).$
- (iii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \forall f, g \in \mathcal{F}(M);$

é chamada uma **conexão afim** da variedade diferenciável M .

Teorema 1.4: Dada uma variedade diferenciável M , existe uma conexão afim ∇ definida em M .

Demonstração. Ver referência [16] ■

Denote por $\mathfrak{X}(\gamma)$ o conjunto dos campos vetoriais suaves ao longo de uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$. Seja M uma variedade diferenciável munida com a conexão afim ∇ . Para cada curva $\gamma : I \rightarrow M$, a conexão ∇ determina um único operador

$$\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$$

denominado **derivada covariante** (ver referência [16]) ao longo de γ tal que

- (i) $\frac{D}{dt}(aX + bY) = a\frac{D}{dt}X + b\frac{D}{dt}Y, \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$;
- (ii) $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f\frac{D}{dt}X, \forall f \in \mathcal{F}(I), \forall X \in \mathfrak{X}(\gamma)$;
- (iii) se $X \in \mathfrak{X}(M)$, então a restrição $X_\gamma := X \circ \gamma$ de X ao longo de γ satisfaz $\frac{d}{dt}X_\gamma = \nabla_{\gamma'(t)}X$.

Definição 1.16: Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial U sobre uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ é dito **paralelo** se $\frac{DU}{dt}(t) = 0$ para todo $t \in I$.

Teorema 1.5: Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva em M e $v_o \in T_{\gamma(t_o)}M$. Então, existe um único campo de vetores paralelo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ tal que $V(t_o) = v_o$. Chamaremos V de **transporte paralelo de v_o sobre γ** .

Demonstração. Ver referência [16] ■

Uma conexão afim ∇ na variedade Riemanniana (M, g) é dita *compatível com a métrica* quando

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

e *simétrica* se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Teorema 1.6 (Levi-Civita): Dada uma variedade Riemanniana (M, g) , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as seguintes condições:

- (i) ∇ é simétrica;
- (ii) ∇ é compatível com a métrica g .

Demonstração. Ver referências [16] ■

Observação 1.4: A conexão afim dada pelo teorema anterior é chamada *conexão de Levi-Civita* em M . Doravante, se M é uma variedade diferenciável Riemanniana, ∇ sempre denotará a conexão de *Levi-Civita* associada.

Definição 1.17: Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave na variedade Riemanniana M . O **gradiente** de f , denotado por ∇f , é o único campo vetorial suave tal que

$$\langle \nabla f, X \rangle = Xf \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

Exemplo 1.5: Considere $S \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superfície e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. Se E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental para uma parametrização $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, então o ∇f em $\phi(\tilde{U})$ é dado por

$$\nabla f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \phi_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} \phi_v.$$

Em particular, se $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ com coordenadas x, y , temos

$$\nabla f = f_x e_1 + f_y e_2$$

tal que $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^2 .

Definição 1.18: Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave na variedade Riemanniana M . A **Hessiana** de f é a forma bilinear $H^f = \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$H^f(X, Y) = Y(Xf) - (\nabla_Y X)f.$$

Segue que H^f é simétrica, uma vez que

$$\begin{aligned} H^f(X, Y) &= YXf - (\nabla_Y X)f \\ &= YXf - (\nabla_X Y - XY + YX)f \\ &= XYf - (\nabla_X Y)f \\ &= H^f(Y, X) \end{aligned}$$

Lema 1.3: A Hessiana H^f de f é tal que

$$H^f(X, Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle$$

Demonstração. É consequência da definição do gradiente de f e do fato de H^f ser simétrica, ou seja,

$$\begin{aligned} H^f(Y, X) &= YXf - (\nabla_Y X)f \\ &= X\langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle \end{aligned}$$

tal que da penúltima para a última linha usamos a compatibilidade da conexão de Levi-Civita com a métrica Riemanniana M . ■

1.1.6 Formas Diferenciais

Definição 1.19: Seja V um espaço vetorial real n -dimensional. Diremos que uma aplicação k – *multilinear* $\omega : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é **alternada** quando

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k), \\ \forall i, j \in \{1, \dots, k\}, \quad i \neq j$$

Denotaremos o conjunto das aplicações k – *multilineares* alternadas por $\Lambda^k(V)$ e convencionaremos que $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$. Note que $\Lambda^1(V) \equiv V^*$, o espaço dual de V , uma vez que todo funcional linear em V é uma aplicação alternada por vacuidade. Segue que $\Lambda^k(V)$ é um espaço vetorial real com as operações usuais de soma de funções e de produto escalar por funções. Se $\omega \in \Lambda^k(V)$, chamaremos ω de *k-tensor alternado*.

Definição 1.20: O **produto exterior** entre os elementos $\omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_k} \in \Lambda^1(V)$ é

$$\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k}(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \omega^{i_1}(v_1) & \cdots & \omega^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{i_k}(v_1) & \cdots & \omega^{i_k}(v_k) \end{pmatrix}$$

Proposição 1.5: Seja V um espaço vetorial real n -dimensional tal que $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base para V e $B^* = \{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ é a base dual de B do espaço V^* , então

$$B = \{\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k}; 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

é uma base para o espaço vetorial $\Lambda^k(V)$, cuja dimensão é portanto $\binom{n}{k}$ (se $k > n$, $\Lambda^k(V) = 0$).

Demonstração. Vemos que $\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k} \in \Lambda^k(V)$, para $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ uma vez que a função determinante é uma função alternada. Suponha

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k} = 0, \quad a_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$$

Para $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \in V \times \dots \times V$ segue da definição de produto exterior, já que $\omega^i(e_j) = \delta_{ij}$, que

$$0 = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = a_{j_1 \dots j_k}$$

Logo, os elementos de \mathcal{B} são linearmente independentes. Dado $\alpha \in \Lambda^k(V)$. Defina

$$\eta := \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k}$$

Portanto, $\eta \in \Lambda^k(V)$ e $\eta(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ tal que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, ou seja, $\eta = \alpha$ tendo em vista que α e η são k -multilineares. ■

Definição 1.21: Sejam $\alpha = \sum \alpha_{i_1 \dots i_k} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} \in \Lambda^k(V)$ e $\eta = \sum \eta_{j_1 \dots j_l} \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_l} \in \Lambda^l(V)$. O **produto exterior** $\alpha \wedge \eta$ é

$$\alpha \wedge \eta = \sum_{i_1 \dots i_k} \sum_{j_1 \dots j_l} \alpha_{i_1 \dots i_k} \eta_{j_1 \dots j_l} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} \wedge \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_l} \in \Lambda^{k+l}(V)$$

tal que $\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} \wedge \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_l}$ é a $(k+l)$ -forma dada por

$$\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k} \wedge \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_l}(v_1, \dots, v_{k+l}) = \det \begin{pmatrix} \omega^{i_1}(v_1) & \dots & \omega^{i_1}(v_{k+l}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{i_k}(v_1) & \dots & \omega^{i_k}(v_{k+l}) \\ \omega^{j_1}(v_1) & \dots & \omega^{j_1}(v_{k+l}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^{j_l}(v_1) & \dots & \omega^{j_l}(v_{k+l}) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Considere o conjunto de todos os tensores alternados de um espaço vetorial V

$$\Lambda(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V)$$

com produto exterior para $\Lambda(V)$ definido acima. Segue que $\Lambda(V)$ tem estrutura de \mathbb{R} -álgebra chamada *álgebra exterior* de V .

Sejam M uma variedade diferenciável n -dimensional e $T_p M$ os espaços tangentes, $\forall p \in M$. Podemos definir o conjunto $\Lambda^k(T_p M)$ dos

k -tensores alternados em T_pM e o *fibrado exterior* k -dimensional $\Lambda_k(M)$ por

$$\Lambda_k(M) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_pM)$$

Seja (U, φ) um sistema de coordenadas de M . Temos que $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$ é uma base para T_pM para cada $p \in U$. Seja $\{dx_1|_p, \dots, dx_n|_p\}$ a base dual correspondente para T_p^*M . Segue que $\Lambda^k(T_pM)$ tem uma base dada por $\{dx_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{i_k}|_p\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$. Decorre que, para $\omega_p \in \Lambda^k(T_pM)$, devemos ter

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k}(p) dx_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{i_k}|_p$$

Definição 1.22: Diremos que uma aplicação $\alpha : M \rightarrow \Lambda_k^*(M)$ cuja composição com a projeção canônica de $\Lambda_k^*(M)$ em M é a identidade é uma **k-forma diferenciável** se as funções $\omega_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis para cada sistema de coordenadas (U, φ)

Denotaremos o conjunto das k -formas diferenciais de uma variedade diferenciável M por $\Omega^k(M)$. Em outras palavras, como uma forma diferencial é uma seção do fibrado $\Lambda_k(M)$, consequentemente $\Omega^k(M)$ é o espaço das seções do fibrado $\Lambda_k(M)$.

1.1.7 Orientação de Variedades

Seja M uma variedade diferenciável conexa n -dimensional. Uma vez que $\Lambda_n(T_pM)$ é 1-dimensional, $\forall p \in M$, segue que $\Lambda_n(T_pM) - 0$ tem duas componentes conexas. Uma *orientação* em T_pM é a escolha de uma componente conexa de $\Lambda_n(T_pM) - 0$. Seja \mathbf{O} a θ -seção do fibrado exterior n -dimensional $\Lambda_n^*(M)$, isto é,

$$\mathbf{O} = \bigcup_{p \in M} \{0 \in \Lambda_n(T_p^*M)\}$$

Como $\Lambda_n(T_p^*M) - 0$ tem duas componentes conexas, resulta que $\Lambda_n^*(M) - \mathbf{O}$ tem, no máximo, duas componentes (ver referência [14]).

Definição 1.23: Seja M uma variedade diferenciável n -dimensional. Diremos que M é **orientável** quando $\Lambda_n^*(M) - \mathbf{O}$ tem duas componentes. Uma **orientação** de uma variedade orientável M é a escolha de uma das

duas componentes de $\Lambda_n^*(M) - \mathbf{0}$. Se uma orientação é fixada em uma variedade orientável, está é dita orientada.

Considere M uma variedade diferenciável orientada e seja v_1, \dots, v_n base de $T_p M$ com base dual $\delta_1, \dots, \delta_n$. Diremos que a base v_1, \dots, v_n é *orientada* ou *positiva* se $\delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_n$ pertence à orientação de M . Sejam M e N variedades diferenciáveis n -dimensional orientável, e $\psi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Diremos que ψ preserva a orientação se $d\psi$ manda bases positivas dos espaços tangentes de M em bases positivas dos espaços tangentes de N .

Numa variedade diferenciável n -dimensional M a orientabilidade é equivalente a existência de uma coleção $\mathcal{C} = \{(U_i, \phi_i); i \in I\}$ de sistemas de coleção em M tal que

$$M = \bigcup_{(U_i, \phi_i) \in \mathcal{C}} V \quad e \quad \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right) > 0 \quad em \quad U \cap V \quad (1.4)$$

tal que $(U; x_1, \dots, x_n), (V; y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{C}$. Além disso, existe $\omega \in \Omega^n(M)$ tal que $\omega_p \neq 0, \forall p \in M$ (ver referência [14]).

Variedades Unidimensionais Orientadas

Começemos observando um importante fato a respeito da natureza das variedades diferenciáveis 1-dimensionais.

Teorema 1.7: Toda variedade diferenciável compacta, conexa 1-dimensional é difeomorfa ou a $[0, 1]$ ou S^1 .

Demonstração. Ver referência [4]. ■

Se M é uma variedade diferenciável 1-dimensional com bordo, como $\dim \partial M = 0$, segue que o bordo ∂M é constituído por pontos isolados. Se M , além disso, for compacta, $\dim \partial M = 0$ possui um número finito de pontos isolados. Visto que M contém uma união difeomorfa a uma união disjunta de segmentos $[0, 1]$, então ∂M deve conter um número par de pontos. Considere o caso particular do intervalo compacto $M = [0, 1]$ com a orientação usual de \mathbb{R}^1 . Em $x = 1$, o vetor normal apontando para fora é $1 \in \mathbb{R}^1 = T_1(M)$, enquanto que em $x = 0$, o vetor normal apontando para fora é $-1 \in \mathbb{R}^1 = T_0(M)$. Consequentemente, diremos que a orientação de $T_1(\partial M)$ é $+1$ e a orientação de $T_0(\partial M)$ é -1 . Logo,

$T_1(\partial M) + T_0(\partial M) = 0$. Isso é um fato geral e está resumido na proposição a seguir.

Proposição 1.6: A soma dos números de orientação dos pontos de bordo de qualquer variedade diferenciável 1-dimensional compacta com bordo é zero.

Demonstração. Ver referência [11]. ■

Número de Interseção

Sejam M , N e S variedades diferenciáveis orientadas sem bordo tais que M é compacta, S é subvariedade fechada de N e $\dim X + \dim S = \dim Y$. Se $f : M \rightarrow N$ é transversal a S , então $f^{-1}(S)$ possui um número finito de pontos, cada um dos quais com um número de orientação ± 1 induzido pela orientação de M .

Definição 1.24: O número de interseção $I(f, S)$ é a soma dos números de orientação de $f^{-1}(S)$.

Se M é uma subvariedade compacta de N transversal a S tal que $\dim X + \dim S = \dim Y$, podemos definir $I(M, S) = I(i, S)$, no qual $i : M \hookrightarrow N$ é a inclusão. Neste caso, $I(M, S)$ é calculado contando os pontos de $X \cap S$ com sinal, positivo quando a orientação de M e S está de acordo com a de N , negativo caso contrário.

1.2 Homologia

Nesta seção discutiremos brevemente conceitos a respeito de Homologia Singular. Muitas das afirmações são enunciadas sem demonstração, ao leitor interessado é sugerida a referência [13], na qual são encontradas as provas dos teoremas.

Considere $I = [0, 1]$, o intervalo unitário fechado e $I^n = I \times \cdots \times I$ o produto cartesiano de n fatores I chamado *n-cubo unitário*. Por definição, I^0 será o espaço constituído de um único ponto.

Definição 1.25: Um **n-cubo singular** no espaço topológico X é uma função contínua $T : I^n \rightarrow X$.

Denotemos por $Q_n(X)$ o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto de todos os n-cubos singulares em X . Se $\alpha \in Q_n(X)$, então existe uma

única representação de α como combinação linear finita com coeficientes inteiros de n -cubos singulares em X .

Definição 1.26: Um n -cubo singular $T : I^n \rightarrow X$ é **degenerado** se existe um inteiro i , $1 \leq i \leq n$, tal que $T(x_1, \dots, x_n)$ não depende de x_i .

Seja $D_n(X)$ o subgrupo de $Q_n(X)$ gerado pelos n -cubos singulares degenerados e defina $C_n(X) = Q_n(X) \setminus D_n(X)$, o grupo das n -cadeias em X . Segue que $C_n(X)$ é um grupo livre abeliano gerado pelo conjunto dos n -cubos singulares não-degenerados. Como consequência, consideraremos apenas os n -cubos singulares não-degenerados.

1.2.1 Operador Bordo

Dado $I^n \rightarrow X$ um n -cubo singular, para todo $i = 1, \dots, n$ defina os seguintes $(n-1)$ -cubos

$$A_i T : I^{n-1} \rightarrow X$$

$$B_i T : I^{n-1} \rightarrow X$$

tais que

$$A_i T(x_1, \dots, x_{n-1}) = T(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

$$B_i T(x_1, \dots, x_{n-1}) = T(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1})$$

Como dissemos acima, $C_n(X)$ é o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto dos n -cubos singulares não-degenerados, portanto para definir um homomorfismo em $C_n(X)$ é suficiente defini-lo numa base de $C_n(X)$, por exemplo, no conjunto dos n -cubos singulares não-degenerados.

Definição 1.27: Seja $T : I^n \rightarrow X$ um n -cubo singular não-degenerado $n > 0$. O operador definido tal que

$$\partial_n(T) = \sum_{i=1}^n (-1)^i [A_i T - B_i T]$$

é chamado **operador bordo**.

Observação 1.5: O operador bordo pode ser estendido para um homomorfismo.

Proposição 1.7: O homomorfismo $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ satisfaz a seguinte equação

$$\partial_{n-1}\partial_n = 0 \quad (1.5)$$

Como ∂ é um homomorfismo, estão bem definidos os seguintes subgrupos de $C_n(X)$

$$Z_n(X) = \ker \partial_n = \{u \in C_n(X); \partial_n(u) = 0\}, \quad (n > 0)$$

chamado *grupo dos n -ciclos singulares*

$$B_n(X) = \text{im} \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(C_{n+1}(X)), \quad (n \geq 0)$$

chamado *grupo dos n -bordos*.

Note que da equação $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ segue a seguinte inclusão $B_n(X) \subset Z_n(X)$. Logo, podemos definir

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X),$$

Definição 1.28: Seja X um espaço topológico. O grupo abeliano $H_n(X)$ é denominado **grupo de homologia singular n -dimensional** de X .

1.2.2 Homomorfismo Induzido

Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função entre espaços topológicos. Dado um n -cubo singular $T : I^n \rightarrow X$, defina $f_{\#}(T) = f \circ T$ que induz naturalmente um homomorfismo

$$f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

Do fato que $f_{\#}(A_i T) = A_i(f_{\#}T)$ e $f_{\#}(B_i T) = B_i(f_{\#}T)$ segue que $f_{\#}$ comuta com o operador bordo⁴, ou seja,

$$\partial_n \circ f_{\#} = f_{\#} \circ \partial_n$$

Consequentemente, $f_{\#}$ leva $Z_n(X)$ em $Z_n(Y)$ e $B_n(X)$ em $B_n(Y)$ e induz um homomorfismo entre os grupos quocientes

$$f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

⁴quando isso ocorre, dizemos que f é uma função (aplicação) de cadeias

Definição 1.29: Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas entre os espaços topológicos X e Y . Diremos que f e g são **homotópicas** e denotamos por $f \simeq g$ se existe uma função contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Teorema 1.8: Sejam f e g funções contínuas de X em Y . Se f e g são homotópicas, então os homomorfismos induzidos f_* e g_* , de $H_n(X)$ em $H_n(Y)$ são iguais.

Teorema 1.9: O número de interseção é invariante por homotopia, ou seja, sejam f e g funções homotópicas, então $I(f) = I(g)$.

Função de Cadeia e Homotopia de Cadeia

Definição 1.30: Uma **complexo cadeia** $K = \{K_n, \partial_n\}$ é uma sequência de grupos abelianos K_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e uma sequência de homomorfismos $\partial_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$ tal que

$$\partial_{n-1}\partial_n = 0$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Dado um complexo cadeia $K = \{K_n, \partial_n\}$, podemos definir

$$Z_n(K) = \ker \partial_n$$

$$B_n(K) = \text{im} \partial_{n+1}$$

Logo, $B_n(K) \subset Z_n(K) \subset K_n$, e, naturalmente, definimos

$$H_n(K) = Z_n(K) / B_n(K)$$

chamado o *grupo de homologia n -dimensional* de K .

Definição 1.31: Sejam $K = \{K_n, \partial_n\}$ e $K' = \{K'_n, \partial'_n\}$ complexos cadeias. Uma **função cadeia** $f : K \rightarrow K'$ consiste de uma sequência de homomorfismos $f_n : K_n \rightarrow K'_n$ tal que

$$f_{n-1}\partial_n = \partial'_n f_n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.10: Se $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta de complexos cadeia e funções cadeia. Então, a seguinte sequência longa

$$\dots \xrightarrow{f_*} H_n(Y) \xrightarrow{g_*} H_n(Z) \xrightarrow{\Lambda} H_{n-1}(X) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(Y) \xrightarrow{g_*} \dots$$

é exata.

Definição 1.32: Sejam $f, g : K \rightarrow K'$ funções cadeia. Uma **homotopia de cadeia** $D : K \rightarrow K'$ entre f e g é a sequência de homomorfismos

$$D_n : K_n \rightarrow K'_{n+1}$$

tal que

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} D_n + D_{n-1} \partial_n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Diremos que duas funções cadeia f e g são **homotópicas em cadeia** se existe uma homotopia de cadeia entre f e g .

Proposição 1.8: Sejam $f, g : K \rightarrow K'$ são funções cadeia. Se f e g são homotópicas em cadeia, então

$$f_* = g_* : H_n(K) \rightarrow H_n(K')$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Tipo de Homotopia

Definição 1.33: Sejam X e Y espaços topológicos. Diremos que X e Y possuem o mesmo **tipo de homotopia** se existem duas funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que gf é homotópica a $I_X : X \rightarrow X$ e fg é homotópica a $I_Y : Y \rightarrow Y$. As funções f e g são ditas **equivalências homotópicas**.

Teorema 1.11: Se $f : X \rightarrow Y$ é uma equivalência homotópica, então $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, $n = 1, 2, \dots$ é um isomorfismo.

Definição 1.34: Um espaço topológico X é **contráctil a um ponto** se existe uma função contínua $F : X \times I \rightarrow X$ tal que $F(x, 0) = x$ e $F(x, 1) = x_o$ para todo $x \in X$ e x_o é um ponto fixo de X .

Definição 1.35: Uma subconjunto A de um espaço topológico X é **retrato de deformação** de X se existe uma função contínua $r : X \rightarrow A$ com $r|_A = id_A$ e uma função contínua $F : X \times I \rightarrow X$ tal que $F(x, 0) = x$ e $F(x, 1) = r(x)$ para todo $x \in X$.

Se A é retrato de deformação de X , segue que a função inclusão $i : A \rightarrow X$ é uma equivalência homotópica. Além disso, o homomorfismo induzido $i_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$ é um isomorfismo.

1.2.3 Homologia Relativa

Considere um espaço topológico X e seja A um subespaço de X . Se $i : A \rightarrow X$ denota a inclusão de A em X , decorre que o homomorfismo induzido $i_{\#} : C_n(A) \rightarrow C_n(X)$ é um monomorfismo. Logo, $C_n(A)$ é o subgrupo de $C_n(X)$ gerado pelos n -cubos singulares não-degenerados em A . Defina o seguinte grupo

$$C_n(X, A) = C_n(X) / C_n(A)$$

denominado o *grupo das cadeias n -dimensionais do par (X, A)* . Uma vez que $\partial_n(C_n(A)) \subset \partial_{n-1}(A)$, podemos induzir um homomorfismo no quociente

$$\partial'_n : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$$

De forma semelhante à definição dos grupos de homologia, definiremos o grupo dos n -ciclos de (X, A) para $n > 0$ por

$$Z_n(X, A) = \ker \partial_n = \{u \in C_n(X, A); \partial_n(u) \in C_n(A)\}$$

e para $n \geq 0$ o grupo dos n -bordos

$$B_n(X, A) = \text{im} \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(C_{n+1}(X, A))$$

Pode-se verificar que $\partial_n \partial_{n+1} = 0$, segue que $B_n(X, A) \subset Z_n(X, A)$ e, portanto, podemos definir o *grupo de homologia relativa n -dimensional* tal que

$$H_n(X, A) = Z_n(X, A) / B_n(X, A)$$

Sequência Homológica Exata do Par (X, A)

Começemos indicando os homomorfismos $i_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$ induzido pela inclusão $i : A \rightarrow X$ e $j_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X, A)$ induzido pelo epimorfismo $j_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(X, A)$ que associa a cada $u \in C_n(X)$ a classe $[u] \in C_n(X, A)$.

Definiremos um homomorfismo entre $H_n(X, A)$ e $H_{n-1}(A)$. Dado $u \in H_n(X, A)$, escolha $v \in C_n(X, A)$ tal que v é um representante da classe de homologia u . Segue que existe $v' \in C_n(X)$ tal que $j_{\#}(v') = v$, já que $j_{\#}$ é epimorfismo. Considere $\partial_n(v') \in C_{n-1}(X)$, decorre que $\partial(v') \in C_{n-1}(A)$ e, além disso, $\partial(v')$ é um ciclo. Defina o operador ∂_* tal que

$\partial_*(u)$ é a classe de homologia de $\partial(v')$. De fato, ∂_* está bem definido e não depende da escolha dos representantes v e v' . O homomorfismo $\partial(v')$ será chamado *operador bordo do par* (X, A) .

Dispondo dos homomorfismos indicados acima, podemos considerar a seguinte sequência infinita de grupos e homomorfismos para o par (X, A)

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

chamada *sequência homológica do par* (X, A) . Consequentemente, sempre que houver uma sequência de espaços

$$A \rightarrow X \rightarrow (X, A)$$

induzindo uma sequência exata de cadeias

$$0 \rightarrow C_n(A) \rightarrow C_n(X) \rightarrow C_n(X, A) \rightarrow 0$$

resulta numa sequência exata homológica.

Teorema 1.12: A sequência homológica de qualquer par (X, A) é exata.

Demonstração. Ver referência [13]. ■

1.3 Teoria de Morse

Ao tratar da Teoria de Morse, a observação fundamental a ser feita diz respeito à íntima relação entre os pontos críticos de uma função definida numa variedade M e a topologia de M . Em outras palavras, cada ponto crítico corresponde a alças adicionadas à variedade.

Considere M uma variedade Riemanniana e seja g a métrica Riemanniana. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real suave definida em M . Definimos o conjunto

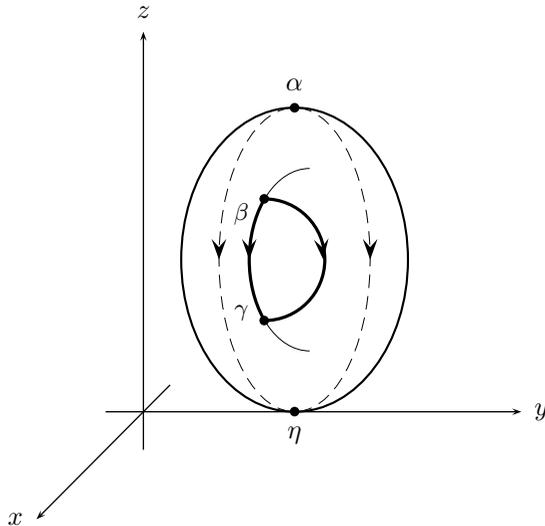
$$Cr(M, f) = \{\alpha \in M; df(\alpha) = 0\}$$

Diremos que $\alpha \in M$ é um *ponto crítico* de f quando $\alpha \in Cr(M, f)$.

Definição 1.36: Um ponto crítico $\alpha \in M$ é dito ser **não-degenerado** se a hessiana $H_\alpha^f : T_\alpha M \times T_\alpha M \rightarrow \mathbb{R}$ é não-singular.

Definição 1.37: Sejam M uma variedade diferenciável e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Diz-se que f é uma **função de Morse** se todos os pontos críticos de f são não-degenerados.

Exemplo 1.6: Na figura abaixo, temos a função altura f definida no toro \mathbb{T}^1 . Segue que os pontos α , β , γ e η são os pontos críticos de f .



Exemplo 1.7: Seja \mathbb{P}^2 o plano projetivo. Sejam $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ distintos entre si e não-nulos. Defina $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$[x_0, x_1, x_2] \mapsto \frac{\sum_{j=0}^2 a_j x_j^2}{\sum_{j=0}^2 x_j^2}$$

Portanto, f é uma função de Morse com pontos críticos $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$ e $z = (-1, 0)$.

Teorema 1.13: Dada uma variedade diferenciável M , existe uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida em M .

Demonstração. Ver referências [3] ■

Lema 1.4 (Lema de Morse): Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse definida em $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $\alpha \in M$ um ponto crítico não-degenerado de f . Então, existem abertos $V, W \subset \mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo

$C^\infty \xi : V_o \rightarrow W$ com $\alpha \in W \subset U$, $0 \in V$ e $\xi(0) = \alpha$ tal que

$$f(\xi(y)) - f(\alpha) = -y_1^2 - \cdots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \cdots + y_n^2$$

$\forall y = (y_1, \dots, y_n) \in V$.

Demonstração. Seja $\alpha = 0$ e $f(\alpha) = 0$. Escolha $W \subseteq U$ bola aberta tal que $0 \in W$. Podemos escrever

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)x_i x_j$$

tal que $a_{ij}(x) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) dt$. Então, $\forall x \in W$, $A(x) = [a_{ij}]$ é simétrica e $f(x) = \langle A(x).x, x \rangle$ e $A_o = A(0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right]$.

Como 0 é um ponto crítico não-degenerado, A_o é simétrica inversível $\Rightarrow M(x) = A_o^{-1}A(x) \Rightarrow A(x) = A_o M(x)$ e $M(0) = I$. Podemos escolher o raio de W tão pequeno que $\forall x \in W \Rightarrow A(x) = A_o B^2(x)$, $B : W \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$. Uma vez que A_o e $A(x)$ são simétricas

$$\begin{aligned} A(x) &= A_o B^2(x) = (B^*)^2 A_o \Rightarrow \\ \Rightarrow B^2(x) &= A_o^{-1} (B^*(x))^2 A_o = A_o^{-1} B^*(x) A_o A_o^{-1} B^*(x) A_o = \\ &= (A_o^{-1} B^*(x) A_o) \end{aligned}$$

Se o raio de W for suficientemente pequeno, temos que $B(x) = A_o^{-1} B^*(x) A_o \Rightarrow A_o B(x) = B^*(x) A_o$, logo

$$\begin{aligned} A(x) &= A_o B^2(x) = A_o B(x) B(x) = B^*(x) A_o B(x) \Rightarrow \\ f(x) &= \langle A(x).x, x \rangle = \langle B^*(x) A_o B(x)x, x \rangle = \langle A_o B(x)x, B(x)x \rangle \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned} \varphi : W &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto B(x).x \end{aligned}$$

Derivando φ temos que

$$\varphi'(x).\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial B}{\partial \nu}(x) + B(x)\nu$$

Se $x = 0 \Rightarrow \varphi'(0).v = B(0).v = v \Rightarrow \varphi'(0) = I$. Pelo *Teorema da Função Inversa*, podemos escolher W tal que $\varphi : W \rightarrow V = \varphi(W)$ é difeomorfismo.

Seja $\xi = \varphi^{-1} : V \rightarrow W$, segue que

$$f(\xi(y)) = \langle A_o y, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j$$

Como A_o é simétrica, A_o é diagonalizável. Além disso, desde que A_o é inversível, os autovalores $\lambda_j \neq 0$. Decorre que existe uma base $\{v_j\}$ de \mathbb{R}^n tal que

$$\langle A_o v_j, v_k \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k; \\ \pm 1, & \text{respectivamente se } \lambda_j > 0 \text{ ou } \lambda_j < 0; \end{cases} \quad (1.6)$$

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned} f(\xi(y)) &= \langle A_o y, y \rangle = \langle A_o \cdot \sum_{i=1}^n y_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \langle A_o v_i, v_j \rangle \\ &= -y_1^2 - \cdots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \cdots + y_n^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

■

Observação 1.6: O índice de Morse do ponto α é definido como $\mu(\alpha) := k$ que aparece no lema anterior.

Exemplo 1.8: Os índices de Morse no exemplo 1.6 são $\mu(\alpha) = 2$, $\mu(\beta) = \mu(\gamma) = 1$ e $\mu(\eta) = 0$, e para o exemplo 1.7, temos $\mu(z) = 0$, $\mu(y) = 1$ e $\mu(x) = 2$.

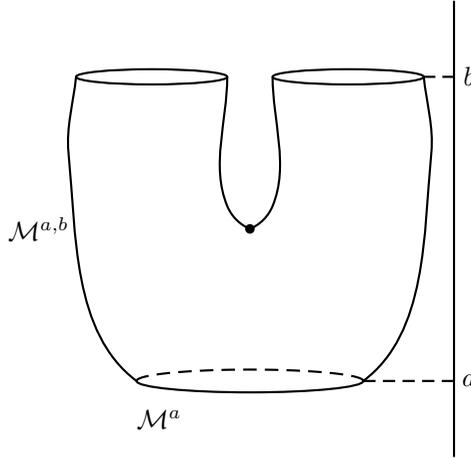
Corolário 1.1: Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse definida em M variedade Riemanniana. Então, $Cr(M, f)$ é um conjunto de pontos isolados. Se M é compacta, então $Cr(M, f)$ é um conjunto finito.

Considere a função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida na variedade diferenciável compacta M . Definiremos os seguintes conjuntos de M ,

$\forall a, b \in M, a < b:$

$$M^{a,b} = \{p \in M; p \in f^{-1}([a, b])\}$$

$$M^a = \{p \in M; p \in f^{-1}(a)\}$$



Lema 1.5 (Lema da Deformação): Seja M uma variedade Riemanniana compacta e sejam a, b valores regulares de $f : M \rightarrow [a, b]$ tal que $a < b$. Considere que não existe valor crítico c tal que $a \leq c \leq b$, então:

$$M^{a,b} \cong M^a \times [a, b].$$

Demonstração. Seja U uma vizinhança de $f^{-1}([a, b])$. Considere o seguinte campo \mathcal{V} definido em M :

$$\mathcal{V}(p) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \in X \setminus U; \\ \alpha(p) \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|^2}, & \text{se } p \in U; \end{cases} \quad (1.8)$$

tal que α é \mathcal{C}^∞ , $0 \leq \alpha(p) \leq 1$ e

$$\alpha(p) = \begin{cases} 1, & \forall p \in M^{a,b} \\ 0, & \forall p \in M \setminus U \end{cases} \quad (1.9)$$

Perceba que ∇f é o gradiente de f com respeito à métrica Riemanniana g e

$$\|\nabla f(p)\|^2 = g(\nabla f(p), \nabla f(p)) = \langle \nabla f(p), \nabla f(p) \rangle_p$$

Então, $\exists \varphi_t : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ (C^∞) tal que $\varphi_{t_0} : M \rightarrow M$ é difeomorfismo, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, uma vez que M é compacta. Defina $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta(t) = f(\varphi_t(p))$, $p \in M$. Logo,

$$\beta'(t) = \langle \nabla f(\varphi_t(p)), \mathcal{V}(\varphi_t(p)) \rangle = \alpha(\varphi_t(p)) \implies \beta'(t) = 1$$

quando $\varphi_t(p) \in M^{a,b}$, ou seja, $\beta(t) = t + k$ e se $p \in M^a$

$$\beta(0) = f(\varphi_0(p)) = f(p) = a \implies \beta(t) = t + a$$

Como $\varphi_{b-a} : M \rightarrow M$ é difeomorfismo e

$$f(\varphi_{b-a}(p)) = \beta(b-a) = (b-a) + a = b,$$

verificamos que $\varphi_{b-a}|_{M^a} : M^a \rightarrow M^b$ é difeomorfismo.

Defina as seguintes funções

$$\begin{aligned} \Phi : M^{a,b} &\rightarrow M^a \times [a, b] \\ p &\rightarrow \Phi(p) = (\varphi_{a-f(p)}(p), f(p)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi : M^a \times [a, b] &\rightarrow M^{a,b} \\ (p, t) &\rightarrow \Psi(p, t) = \varphi_{t-a}(p) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Psi(p, t) &= \Phi(\varphi_{t-a}(p)) \\ &= (\varphi_{a-f(\varphi_{t-a}(p))}(\varphi_{t-a}(p)), f(\varphi_{t-a}(p))) \\ &= (\varphi_{a-t}(\varphi_{t-a}(p)), t) \\ &= (p, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(p) &= \Psi(\varphi_{a-f(p)}(p), f(p)) \\ &= \varphi_{f(p)-a}(\varphi_{a-f(p)}(p)) \\ &= p \end{aligned}$$



Teorema 1.14: Seja M uma variedade diferenciável compacta e $f : M \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse. Suponha que exista um único valor crítico c , $a < c < b$, tal que $\mu(f^{-1}(c)) = \lambda$. Então, existe uma λ -célula, ou seja, um mergulho de um disco D^λ em M com $e^\lambda \subset M - f^{-1}(a)$ tal que $e^\lambda \cap f^{-1}(a) = \partial e^\lambda$, e existe um retrato de deformação de M sobre $f^{-1}(a) \cap e^\lambda$.

Demonstração. Ver referências [10] ■

O k -ésimo número de pontos críticos de uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é o número $\nu_k = \nu_k(f)$ de pontos críticos de índice k , $0 \leq k \leq n \dim M$. Diremos que f tem tipo (ν_0, \dots, ν_n) .

Teorema 1.15: Seja M uma variedade diferenciável compacta n -dimensional e $f : M \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse do tipo (ν_1, \dots, ν_n) . Então, M tem tipo homotópico de um CW-complexo⁵ finito com exatamente ν_λ λ -células.

Demonstração. Ver referências [10] ■

Agora, seja g uma métrica Riemanniana em M . Considere o fluxo do gradiente negativo ϕ de uma função de Morse f

$$\mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

tal que

$$\phi : \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, x) = -\nabla f(\phi(t, x)), \quad \phi(0, \cdot) = id_M$$

Definição 1.38: Sejam M uma variedade diferenciável compacta e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e $\alpha \in M$ um ponto crítico de f . Definimos o **conjunto estável**:

$$S_\alpha = \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = \alpha\}$$

e o **conjunto instável**:

$$U_\alpha = \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = \alpha\}$$

no qual $\phi_t(x) := \phi(t, x)$.

⁵ver referência [13] e [10]

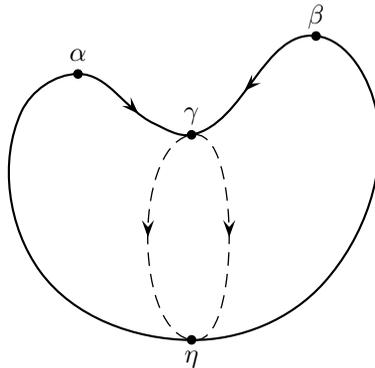
Observação 1.7: De fato, prova-se que U_α e S_α são subvariedades de M , chamadas variedades instável e estável, respectivamente. Além disso, o índice de Morse de f é tal que $\mu(\alpha) = \dim T_\alpha U_\alpha$ (ver referência [6]).

Definição 1.39: Se $\alpha, \beta \in M$ são pontos críticos de uma função de Morse, defina $M(\alpha, \beta) = U_\alpha \cap S_\beta$, o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = \alpha \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = \beta$$

Definição 1.40: Diremos que um campo vetorial gradiente ∇f satisfaz a **condição de Morse-Smale** se as variedades U_α e S_β se intersectam transversalmente, para todo $\alpha, \beta \in Cr(M, f)$.

Exemplo 1.9: Sejam M (na figura a seguir) difeomorfa à esfera e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função altura. Então f admite quatro pontos críticos α, β, γ e η , tais que $\mu(\alpha) = \mu(\beta) = 2$, $\mu(\gamma) = 1$ e $\mu(\eta) = 0$. Segue que o campo vetorial gradiente $-\nabla f$ é Morse-Smale, uma vez que as variedades instáveis e estáveis se intersectam transversalmente

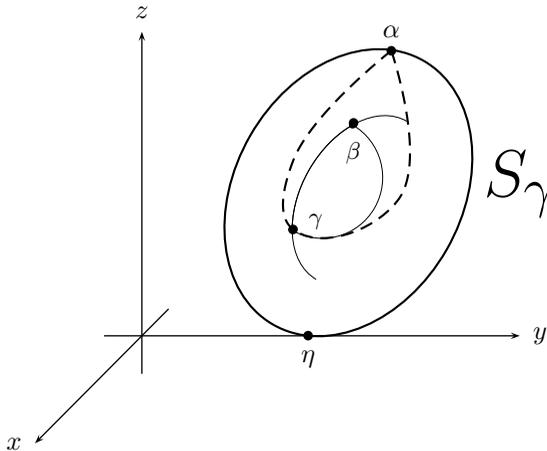
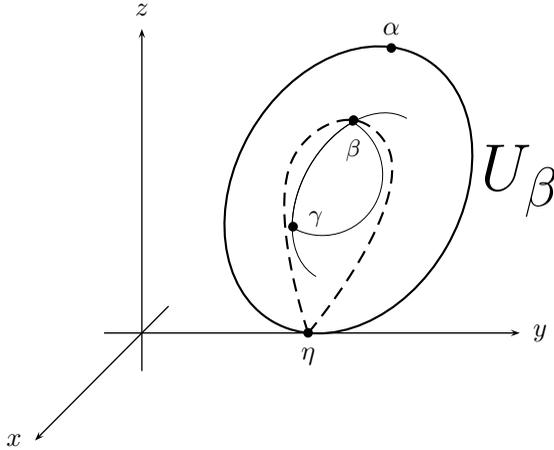


Teorema 1.16: Seja f uma função de Morse e g uma métrica Riemanniana na variedade fechada M . Então $\nabla^g f$ pode ser aproximado por um campo vetorial gradiente $X = \nabla^g \tilde{f}$ satisfazendo a condição de Morse Smale.

Demonstração. Ver referência [5].

■

Exemplo 1.10: Considere o 2-toro \mathbb{T}^2 no \mathbb{R}^3 como indicado na figura abaixo com métrica induzida pela métrica de \mathbb{R}^3 e seja $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função altura. Sabemos que f possui quatro pontos críticos tais que $\mu(\alpha) = 2$, $\mu(\beta) = \mu(\gamma) = 1$ e $\mu(\eta) = 0$. Vemos que o campo vetorial gradiente $-\nabla f$ não é Morse-Smale, pois \mathcal{U}_γ e \mathcal{S}_β não se intersectam transversalmente. Contudo, uma pequena perturbação, indicada na figura abaixo, elimina os fluxos entre β e γ , donde o campo $-\nabla f$ é agora Morse-Smale.



No caso de um fluxo de Morse-Smale, $M(\alpha, \beta)$ é uma subvariedade de M . Se $M(\alpha, \beta) \neq \emptyset$, vem da teoria de transversalidade:

$$\begin{aligned}\dim M(\alpha, \beta) &= \dim U_\alpha + \dim S_\beta - \dim M \\ &= \mu(\alpha) + (n - \mu(\beta)) - n \\ &= \mu(\alpha) - \mu(\beta)\end{aligned}\tag{1.10}$$

2 Homologia de Morse

Neste capítulo estaremos interessados em definir grupos de homologia de Morse para variedades compactas e sem bordo. Estudaremos inicialmente os espaços quociente de espaços de fluxos, os chamados espaços modulares buscando técnicas para orientá-los, uma vez que tal orientação será peça chave na definição do operador de bordo ∂ .

Começemos lembrando que, dada uma $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ função de Morse, podemos considerar o fluxo ϕ do gradiente negativo da função de Morse f

$$\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, x) = -\nabla f(\phi(t, x))$$

Sejam $\alpha, \beta \in Cr(M, f)$, definimos também as linhas de fluxo ou trajetórias $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ partindo de α e chegando em β tais que $\gamma'(t) = -\nabla f(\gamma(t))$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = \alpha$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \beta$. Perceba que existe uma ação livre natural de \mathbb{R} sobre as linhas de fluxo. Como $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ é o conjunto de linhas de fluxo entre α e β , existe uma ação livre de \mathbb{R} sobre $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$. Além disso, assumindo M compacta, temos que o espaço quociente pela ação tem estrutura de variedade diferenciável cuja dimensão é $\mu(\alpha) - \mu(\beta) - 1$ ¹.

Definição 2.1: O **Espaço Modular** dos fluxos de α para β é

$$\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta) = \mathcal{M}(\alpha, \beta) / \mathbb{R}$$

Cada $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ é chamada **trajetória não-parametrizada**

Definição 2.2: Uma **Trajетória Quebrada Não-Parametrizada** ligando α e β consiste do seguinte:

- um $n \geq 0$, o número de componentes;
- uma $(n+1)$ -upla de pontos críticos $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que $\alpha = \alpha_0$ e $\beta = \alpha_n$ são os pontos extremos;
- para cada i com $1 \leq i \leq n$, uma trajetória não-parametrizada $\tilde{x}_i \in \tilde{\mathcal{M}}(\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ é a i -ésima componente da trajetória quebrada.

¹ Toda esta discussão pode ser encontrada em [12]

2.1 Colagem de Trajetórias

Seja M uma variedade Riemanniana fechada, assuma que o campo $-\nabla f$ é de Morse-Smale e sejam $\alpha, \beta \in Cr(M, f)$. Em geral, o espaço modular $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ não é compacto. Contudo, podemos investigar uma compactificação canônica para $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$, considerando as trajetórias quebradas entre α e β . Convém notar que para $\mu(\alpha) - \mu(\beta) = 1$, $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ é compacta, pois trata-se de um conjunto finito de pontos. Comecemos o seguinte conceito de compacidade.

Definição 2.3: Um subconjunto $K \subseteq \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ é dito **compacto até trajetórias quebradas**, se \forall sequência $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$, \exists pontos críticos $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l = \beta$, \exists trajetórias $\tilde{x}^j \in \mathcal{M}(\alpha_{j-1}, \alpha_j)$, $j = 1, \dots, l$, tal que $p_k \rightarrow (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^l)$ quando $k \rightarrow \infty$.

A convergência aqui significa, por definição, a convergência com relação a distância d induzida pela métrica Riemanniana em M em M das trajetórias p_k para a união das trajetórias \tilde{x}^j , ou seja,

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_o \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_o : p_k \subset U_\epsilon(\tilde{x}^1 \cup \dots \cup \tilde{x}^l)$$

no qual $U_\epsilon(A)$ a ϵ -vizinhança de uma conjunto A . Diremos que a sequência p_k converge para uma trajetória quebrada $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^l)$ de ordem l .

Teorema 2.1 (Compacidade): Se a condição de Morse-Smale é satisfeita, então o espaço modular dos fluxos $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ é compactificável e as trajetórias quebradas possuem ordem no máximo $\mu(\alpha) - \mu(\beta)$.

Demonstração. Ver referência [5]. ■

Dadas trajetórias $a(t)$ e $b(t)$ nas variedades estável e instável, respectivamente, de um ponto crítico $\alpha \in Cr(M, f)$, podemos, sob certas hipóteses, colar $a(t)$ e $b(t)$ e obter uma trajetória que não passa por α . Disso trata o próximo teorema.

Teorema 2.2: Assuma que a condição de Morse-Smale está satisfeita e escolha pontos $\alpha, \beta, \gamma \in Cr(M, f)$ cujos índices são, $k+1, k, k-1$, respectivamente. Então existe uma número real positivo T_o e uma função

$$\# : \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta) \times [T_o, \infty) \times \tilde{\mathcal{M}}(\beta, \gamma) \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \gamma), \quad (u, T, v) \mapsto u\#_T v$$

tal que

$$u\#_T v \rightarrow (u, v) \quad \text{se} \quad T \rightarrow \infty$$

Consequentemente, nenhuma sequência em $\tilde{\mathcal{M}}(\beta, \gamma) \setminus u\#_{[T_0, \infty)}v$ converge para (u, v) .

Demonstração. Ver referência [5]. ■

Como consequência dos últimos dois teoremas, podemos explicitar a compactificação para o espaço modular dos fluxos $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$, que é feita adicionando a $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ as trajetórias quebradas de ordem $2, \dots, \mu(\alpha) - \mu(\beta)$.

Corolário 2.1: Seja M uma variedade diferenciável fechada e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ função de Morse tal que o campo gradiente negativo satisfaz a condição de Morse-Smale. Denote por $\overline{\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)_k}$ o conjunto das trajetórias quebradas de ordem k , ou seja,

$$\overline{\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)_k} = \bigcup_{r_1, \dots, r_k \in Cr(M, f)} \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, r_1) \times \tilde{\mathcal{M}}(r_1, r_2) \times \dots \times \tilde{\mathcal{M}}(r_k, \beta)$$

tal que $\alpha, r_1, r_2, \dots, r_k, \beta$ são distintos. Então, a compactificação de $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ é dada por

$$\overline{\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)} = \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta) \bigcup_{k=1, \dots, \mu(\alpha) - \mu(\beta)} \overline{\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)_k}$$

Para os propósitos adiante, convém destacar o caso em que α e β são tais que os índices de Morse são $k+1$ e $k-1$, respectivamente. Segue que o bordo de $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ é dado por

$$\partial \overline{\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)} = \bigcup_{r \in Cr_k(M, f)} \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, r) \times \tilde{\mathcal{M}}(r, \beta)$$

Será interessante trabalhar com este bordo orientado, uma vez que o mesmo permitirá definir operadores nos grupos livres gerados pelos pontos críticos de f .

2.2 Orientação de $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$

Como trabalhamos em dimensão finita, a orientação de $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ pode ser induzida pelas orientações das variedades instável e estável. Seja $\alpha \in M$ um ponto crítico de uma função de Morse-Smale definida numa

variedade diferenciável M compacta e orientável. Então, a variedade instável \mathcal{U}_α é orientável. Fixe uma orientação no espaço $T_\alpha\mathcal{U}_\alpha$. Uma vez que a variedade instável é contrátil, a orientação de $T_\alpha\mathcal{U}_\alpha$ induz uma orientação em \mathcal{U}_α . Por outro lado, o espaço $T_\alpha\mathcal{U}_\alpha$ é uma fibra do fibrado normal da variedade estável \mathcal{S}_α que é também contrátil. Em suma, a orientação de $T_\alpha\mathcal{U}_\alpha$ induz uma orientação no fibrado normal de \mathcal{S}_α que pode ser fixada de tal forma que o número de interseção de $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{S}_\alpha$ é $+1$. Dizemos que \mathcal{S}_α é coorientável.

Escolha uma orientação $[T_\alpha\mathcal{U}_\alpha]$ para $T_\alpha\mathcal{U}_\alpha$ em todo ponto crítico α . Então, todas as variedades instáveis estão orientadas e as variedades estáveis estão coorientadas. Se o fluxo é de Morse-Smale, é possível orientar o espaço $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ como a interseção de \mathcal{U}_α e \mathcal{S}_β . Com efeito, para cada $x \in \mathcal{M}(\alpha, \beta)$ temos a seguinte sequência exata

$$0 \rightarrow T_x\mathcal{M}(a, b) \xrightarrow{i} T_xU_a \xrightarrow{\pi} N_xS_b \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

O espaço $T_x\mathcal{M}(a, b)$ é orientado como segue: seja $\omega_1, \dots, \omega_l$ em T_xU_a tal que suas imagens $\pi(\omega_i)$ é uma base orientada de N_xS_b e seja v_1, \dots, v_d base qualquer de $T_x\mathcal{M}(a, b)$. Então, os v_1, \dots, v_d foram uma base orientada de $T_x\mathcal{M}(a, b)$ se

$$i(v_1), \dots, i(v_d), \omega_1, \dots, \omega_l$$

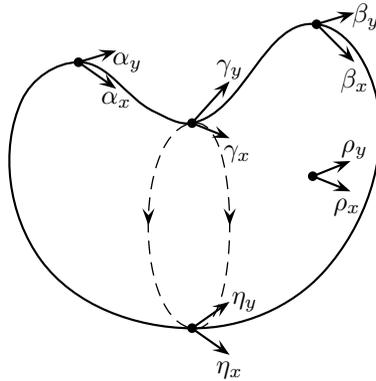
é uma base orientada de T_xU_a .

Visto que $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ está orientado e seja $[\mathcal{M}(\alpha, \beta)]$ uma orientação, podemos orientar o espaço modular dos fluxos declarando que $[\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)]$ é uma orientação para $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ quando

$$[\mathcal{M}(\alpha, \beta)] = [\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)] [\nabla f] \quad (2.2)$$

ou seja, para orientar $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ basta considerar uma base positiva de $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ e ignorar o sentido de ∇f .

Exemplo 2.1: Considere M a variedade mostrada na figura a seguir juntamente com a orientação nela fixada. Sabemos que $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ são os pontos críticos da função altura definida em M . Pela sequência 2.1, temos que a orientação de $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ coincide com ∇f e $\tilde{\mathcal{M}}(\gamma, \beta)$ é $-\nabla f$. Então, a equação 2.2 nos dá que $[\mathcal{M}(\alpha, \beta)] = +1$ e $[\mathcal{M}(\gamma, \beta)] = -1$. Para $\mathcal{M}(\beta, \gamma)$ temos duas componentes conexas, uma cuja orientação coincidindo com ∇f e a outra igual a $-\nabla f$.



Alternativamente, para α e β pontos críticos de uma função de Morse-Smale, podemos orientar $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ usando técnicas que não dependam de argumentos baseados no fato que a dimensão de $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ é finita. É importante ressaltar que uma abordagem mais criteriosa exigiria um cuidado maior com as afirmações relacionadas às variedades definidas a seguir bem como os espaços de Banach considerados. Faremos apenas uma discussão, em linhas gerais, dos principais resultados envolvidos objetivando garantir uma orientação para a variedade $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$.

Definição 2.4: (i) Dada uma curva $\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow M$ tal que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) &= \alpha \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) &= \beta \end{aligned}$$

defina o operador

$$\tilde{E}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} (|\dot{\gamma}| + |\nabla f(\gamma)|^2) dt$$

(ii) Seja $P(\alpha, \beta)$ o conjunto curvas tais que

$$P(\alpha, \beta) = \left\{ \gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow M; \right. \\ \left. \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = \alpha, \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = \beta \text{ e } \tilde{E}(\gamma) < \infty \right\}$$

(iii) Seja

$$T_\gamma P(\alpha, \beta) = \left\{ \xi : (-\infty, \infty) \rightarrow TM; \right. \\ \left. \xi(s) \in T_{\gamma(s)}M, \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \xi(s) = 0 \right\}$$

o espaço tangente a $P(\alpha, \beta)$ no ponto γ e $TP(\alpha, \beta) = \bigcup_\gamma T_\gamma P(\alpha, \beta)$ o fibrado tangente.

Defina o campo

$$\mathcal{X} : P(\alpha, \beta) \longrightarrow TP(\alpha, \beta)$$

dado por

$$\mathcal{X}(\gamma) = \dot{\gamma} + \nabla f(\gamma)$$

Desejamos provar que $\mathbf{0}$ é um valor regular de \mathcal{X} , donde segue que $\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{0}) = \mathcal{M}(\alpha, \beta)$ é uma subvariedade diferenciável de M com dimensão $\mu(\alpha) - \mu(\beta)$. Além disso, estaremos interessados em provar que $\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{0}) = \mathcal{M}(\alpha, \beta)$ é orientável.

Antes de atacar o problema, considere a derivada do campo \mathcal{X} em cada $\gamma \in P(\alpha, \beta)$:

$$\nabla_\xi \mathcal{X}(\gamma) = \nabla_\xi \sum_{j=1}^n (\gamma'_j + \nabla f_j) \partial_j = \nabla_\xi \left(\sum_{j=1}^n \gamma'_j \partial_j \right) + D_\xi \left(\sum_{j=1}^n \nabla f_j \partial_j \right),$$

ou seja,

$$\nabla_\xi \mathcal{X}(\gamma) = \nabla_\xi \dot{\gamma} + \nabla_\xi \nabla f(\gamma) = \nabla_{\dot{\gamma}} \xi + \nabla_\xi \nabla f(\gamma)$$

Para fixar notação, ponha

$$F_\gamma = \nabla \mathcal{X}(\gamma) : T_\gamma P(\alpha, \beta) \longrightarrow T_\gamma P(\alpha, \beta)$$

tal que

$$F_\gamma(\xi) = \nabla_{\dot{\gamma}} \xi + \nabla_\xi \nabla f(\gamma)$$

Agora considere os seguintes espaços

$$L^2(\gamma) = \left\{ \xi : \mathbb{R} \rightarrow M; \xi(s) \in T_{\gamma(s)}M, \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(s)|^2 ds < \infty \right\}$$

$$W^{1,2}(\gamma) = \left\{ \xi \in L^2(\gamma); \nabla_{\dot{\gamma}(s)} \xi \in L^2(\gamma) \right\}$$

Desta forma, consideraremos o operador linear F_γ definido em

$$F_\gamma : W^{1,2} \rightarrow L^2(\gamma)$$

Convém observar que tanto $W^{1,2}$ quanto $L^2(\gamma)$ são espaços de Banach com as normas $\|\xi\| = \int_{-\infty}^{\infty} (|\xi|^2 + |\nabla\xi|^2) ds$ e $\|\xi\| = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(s)|^2 ds$, respectivamente.

Teorema 2.3: Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse com pontos críticos $\alpha, \beta \in M$ e $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma curva suave tal que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = \alpha \text{ e } \lim_{s \rightarrow -\infty} \gamma(s) = \beta,$$

então F_γ é um operador de Fredholm e

$$\text{ind}(F_\gamma) = \mu(\alpha) - \mu(\beta).$$

Se, além disso, o fluxo do gradiente é Morse-Smale e γ satisfaz $\gamma' = -\nabla f(\gamma)$, então F_γ é sobrejetor.

Lema 2.1: Seja $\xi \in \mathcal{X}(\gamma)$ um campo vetorial sobre uma curva γ . Existem constantes finitas $c > 0$ e $T > 0$ tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|\xi|^2 + |\nabla\xi|^2) ds \leq c \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_\gamma \xi|^2 ds + \int_{-T}^T |\xi|^2 ds \right)$$

Demonstração. Seja $X_1(s), \dots, X_n(s)$ uma base ortonormal de $T_{\gamma(s)}M$, $\forall s \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla X_\nu(s) \equiv 0$, tal base existe e pode ser definida pelo transporte paralelo de uma base $X_1(t_o), \dots, X_n(t_o)$ para algum $t_o \in \mathbb{R}$. Seja $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}$ as coordenadas de ξ nesta base. Então:

$$\begin{aligned} F_\gamma(\xi) &= F_\gamma \sum_{\nu=1}^n (\xi_\nu X_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^n [\nabla_s (\xi_\nu X_\nu) + \xi_\nu \nabla_{X_\nu} \nabla f(\gamma)] \\ &= \sum_{\nu=1}^n \left[\left(\nabla_s X_\nu + \frac{d\xi_\nu}{ds} \right) + \sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu} \xi_\mu \right] X_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{d\xi_\nu}{ds} + \sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu} \xi_\mu \right) X_\nu \end{aligned} \tag{2.3}$$

no qual $a_{\nu\mu} = \langle X_\nu(s), \nabla_{X_\mu(s)} \nabla f(\gamma(s)) \rangle$. Logo, $a_{\nu\mu} = H^f(X_\mu(s), X_\nu(s))$

Na base $X_n(s)$ podemos escrever o operador F_γ como

$$F_\gamma \xi(s) = \frac{d\xi(s)}{ds} + A(s)\xi(s)$$

tal que $A(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz simétrica cujas entradas são $a_{\nu\mu}$. Perceba que

$$A_\alpha = \lim_{s \rightarrow \infty} A(s) \quad A_\beta = \lim_{s \rightarrow -\infty} A(s)$$

representam a Hessiana de f nos pontos $x, y \in M$. Como f é função de Morse, A_α e A_β são não-singulares.

Dado $\xi \in \mathcal{X}(\gamma)$, considere a sua Transformada de Fourier:

$$\hat{\xi}(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} \xi(s) ds$$

Definimos o operador

$$F_\alpha \xi = \frac{d\xi}{ds} + A_\alpha \xi : W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),$$

donde vem

$$F_\alpha \xi = \eta \iff (i\omega I + A_\alpha) \hat{\xi}(i\omega) = \hat{\eta}(i\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Consequentemente, $(1 + |\omega|^2) |\hat{\xi}(i\omega)|^2 \leq k |\hat{\eta}(i\omega)|^2$. De fato,

$$\begin{aligned} |\eta|^2 &= \langle i\omega + A_\alpha \xi, i\omega + A_\alpha \xi \rangle \\ &= \omega^2 |\xi|^2 + i\omega \langle \xi, A_\alpha \xi \rangle - i\omega \langle A_\alpha \xi, \xi \rangle + |A_\alpha \xi|^2 \\ &= \omega^2 |\xi|^2 + |A_\alpha \xi|^2 \end{aligned}$$

Pois, A_α é simétrica. Assim, $|\eta|^2 = \omega^2 |\xi|^2 + |A_\alpha \xi|^2 > (\omega^2 + \lambda^2) |\xi|^2$, para $\lambda = \inf \lambda_i$. Logo, $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $(1 + |\omega|^2) |\hat{\xi}(i\omega)|^2 \leq k |\hat{\eta}(i\omega)|^2$. Como a transformada de Fourier é uma isometria, segue da desigualdade anterior

$$\|\xi\|_{W^{1,2}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\omega|^2) |\hat{\xi}|^2 d\omega \leq k \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\eta}|^2 d\omega = c \|\eta\|_{L^2}^2,$$

ou seja,

$$\|\xi\|_{W^{1,2}}^2 \leq c \|F_\gamma(\xi)\|_{L^2}^2.$$

Seja $\xi \in \mathcal{X}(\gamma)$ tal que $\xi(s) = 0$ para $-T \leq s \leq T$. Para T grande, teremos que a estimativa acima será preservada, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{d\xi}{ds} \right|^2 \right) ds \leq k \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\xi}{ds} + A\xi \right|^2 ds,$$

se $\xi(s) = 0$ para $-T \leq s \leq T$

Considere agora a estimativa para F_γ em $[-T, T]$

$$\begin{aligned} \|F_\gamma(\xi)\| &= \int_{-T}^T \left| \frac{d\xi}{ds} + A\xi \right|^2 ds = \int_{-T}^T \left(\left| \frac{d\xi}{ds} \right|^2 + 2 \left\langle \frac{d\xi}{ds}, A\xi \right\rangle + |A\xi|^2 \right) ds \\ &\geq \int_{-T}^T \left(\frac{1}{2} \left| \frac{d\xi}{ds} \right|^2 - |A\xi|^2 \right) ds \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{-T}^T \left| \frac{d\xi}{ds} \right|^2 ds - k \int_{-T}^T |\xi|^2 ds \end{aligned} \tag{2.4}$$

e portanto,

$$\int_{-T}^T \left(|\xi|^2 + \left| \frac{d\xi}{ds} \right|^2 \right) ds \leq k \int_{-T}^T \left(|\xi|^2 + \left| \frac{d\xi}{ds} + A\xi \right|^2 \right) ds$$

Escolha uma função $\beta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que $\beta(t) = 1$ para $|t| \leq T$ e $\beta(t) = 0$ para $|t| \geq T + 1$. Então com a constante c suficientemente grande, tem-se:

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{W^{1,2}} &\leq \|\beta\xi\|_{W^{1,2}} + \|(1 - \beta)\xi\|_{W^{1,2}} \\ &\leq k \left[\|\beta\xi\|_{L^2} + \|F_\gamma(\beta\xi)\|_{L^2} + \|F_\gamma[(1 - \beta)\xi]\|_{L^2} \right] \\ &\leq k \left[\|\beta\xi\|_{L^2} + 2 \left\| \frac{d\beta}{ds} \xi \right\|_{L^2} + \|\beta F_\gamma \xi\|_{L^2} + \|(1 - \beta)F_\gamma \xi\|_{L^2} \right] \\ &\leq 3k \left[\|\xi\|_{L^2([-T-1, T+1])} + \|F_\gamma \xi\|_{L^2(\mathbb{R})} \right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

ou seja,

$$\|\xi\|_{W^{1,2}} \leq c(\|F_\gamma(\xi)\|_{L^2} + \|\xi\|_{L^2[-T,T]})$$

tal que $c = 3k$. ■

Lema 2.2: Sejam X , Y e Z espaços de Banach e suponha que o operador linear limitado $F \in L(X, Y)$ e o operador compacto $K \in L(X, Z)$ satisfazem a seguinte estimativa:

$$\|x\|_X \leq c(\|F(x)\|_Y + \|K(x)\|_Z)$$

para todo $x \in X$. Então F tem imagem fechada e $\dim \ker F < \infty$.

Demonstração. Ver referência [1]. ■

Logo, pelo lema anterior, F_γ tem imagem fechada e $\dim \ker(F_\gamma) < \infty$. Resta provar que $\text{im}(F_\gamma)$ tem codimensão finita e que $\text{ind}(F_\gamma) = \text{ind}(y) - \text{ind}(x)$. Para tanto, denote por:

$$\Phi(s, t) : T_{\gamma(t)}M \longrightarrow T_{\gamma(s)}M$$

como a solução do operador diferencial linear $\nabla_s \xi + \nabla_\xi \nabla F(\gamma) = 0$. Vale dizer que se γ satisfaz $\gamma' = -\nabla f(\gamma)$, então $\Phi(s, t) = d\phi^{(s-t)}(\gamma(t))$. Então $\xi \in \ker F_\gamma \iff \xi(s) = \Phi(s, t)\xi(t)$ para $s, t \in \mathbb{R}$ e $\xi \in L^2(\gamma)$. Com base nisso, defina:

$$E^u(s) = \{\xi \in T_{\gamma(s)}M; \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t, s)\xi(s) = 0\}$$

e

$$E^s(s) = \{\xi \in T_{\gamma(s)}M; \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, s)\xi(s) = 0\}$$

Logo $\xi(s)$ converge para zero quando $s \rightarrow \infty$ se $\xi(s) \in E^s(s) \cap E^u(s)$, donde conclui-se que $\xi \in \ker F_\gamma \iff \xi(s) = \Phi(s, t)\xi(t)$ e $\xi(s) \in E^s(s) \cap E^u(s)$ de maneira que

$$\dim \ker(F_\gamma) = \dim(E^s \cap E^u)$$

Igualmente procedemos com o kernel do operador adjunto de F_γ

$$F_\gamma^* : W_\gamma^{1,2} \longrightarrow L_\gamma^2, \quad F_\gamma^* \eta = -\nabla_s \eta + \nabla_\eta \nabla F(\gamma)$$

considerando o operador

$$\Psi(s, t) = \Phi(t, s)^* : T_{\gamma(t)}M \longrightarrow T_{\gamma(s)}M$$

Segue que

$$\dim \ker F_\gamma^* = \dim(E^s + E^u)^\perp$$

Assuma que $\gamma(s)$ satisfaz a *equação do fluxo* fora do intervalo $[-T, T]$. Neste caso,

$$\begin{aligned} E^u(s) &= T_{\gamma(s)}\mathcal{U}_\alpha, & \forall s \leq -T \\ E^s(s) &= T_{\gamma(s)}\mathcal{S}_\beta, & \forall s \geq T \end{aligned}$$

e como $\Phi(s, t)E^{u,s}(t) = E^{u,s}(s)$ segue

$$\dim E^u(s) = \mu(\alpha), \quad \dim E^s(s) = n - \mu(\beta)$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Concluimos que

$$\begin{aligned} \text{ind}(F_\gamma) &= \dim(\ker F_\gamma) - \dim(\ker F_\gamma^*) \\ &= \dim(E^s \cap E^u) + \dim(E^s + E^u) - n \\ &= \dim E^u + \dim E^s - n \\ &= \mu(\alpha) - \mu(\beta) \end{aligned}$$

Por fim, se o fluxo do gradiente de f é de Morse-Smale e $\gamma(s)$ satisfaz a *equação do fluxo*, então $E^u(s) + E^s(s) = T_{\gamma(s)}M$ para todo $s \in \mathbb{R}$ donde, neste caso, F_γ é sobrejetivo e fica assim provado o teorema.

Logo, temos que $\mathbf{0}$ é um valor regular para \mathcal{X} , consequentemente o conjunto $\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{0})$ é a imagem inversa de uma submersão, portanto, é uma variedade diferenciável. Além disso, a aplicação $\mathcal{X} : L^2(\gamma) \rightarrow L^2(\gamma)$ é uma aplicação de Fredholm, uma vez que $\nabla_\gamma = F_\gamma$ é um operador de Fredholm para toda $\gamma \in P(\alpha, \beta)$. Da teoria para aplicações de Fredholm desenvolvida no *apêndice B*, segue que $\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{0}) = \mathcal{M}(\alpha, \beta)$ é variedade diferenciável orientável. Por fim, $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ é novamente orientada tal que $[\mathcal{M}(\alpha, \beta)] = [\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)][\nabla f]$.

2.3 Homologia de Floer

Seja $Cr(M, f)$ o conjunto de pontos críticos de uma função de Morse f e seja $Cr_k(M, f)$ o conjunto dos pontos críticos de f com índice

k . Defina C_* o grupo abeliano livre sobre os geradores $\alpha \in Cr(M, f)$, pontos críticos de f :

$$C_* = \bigoplus_{\alpha \in Cr(M, f)} \mathbb{Z}\alpha$$

é possível escrever $C_* = \bigoplus C_k$, no qual

$$C_k = \bigoplus_{\alpha \in Cr_k(M, f)} \mathbb{Z}\alpha$$

Já vimos que os espaços modulares são orientáveis. Além disso, para $\mu(\alpha) = k$ e $\mu(\beta) = k - 1$, $U_\alpha \cap S_\beta$ é uma variedade diferenciável orientada e 1-dimensional. Consequentemente, $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ é um conjunto de pontos orientados.

O operado bordo $\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}$ é descrito por

$$\partial(\alpha) = \sum_{\beta_i \in Cr_{k-1}(M, f)} m_i \beta_i$$

no qual $\alpha \in Cr_k(M, f)$, $\beta_i \in Cr_{k-1}(M, f)$ e

$$m_i = \#(U_\alpha \cap S_\beta) / \mathbb{R} = \sum_{\tilde{x} \in \mathcal{M}(\alpha, \beta)} n_{\tilde{x}}$$

tal que $m_i \in \mathbb{Z}$ e $\#$ denota a soma algébrica dos pontos orientados de $U_\alpha \cap S_\beta / \mathbb{R}$ e $n_{\tilde{x}}$ denota o sinal de \tilde{x} . Esta soma está bem definida devido à compacidade da variedade M .

Proposição 2.1: Seja $\alpha \in Cr_k(M, f)$ e $\beta \in Cr_{k-2}(M, f)$, então vale o seguinte:

(i) O conjunto

$$\mathcal{B}_{\alpha\beta} := \{(u, v); u \in \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \gamma), v \in \tilde{\mathcal{M}}(\gamma, \beta), \gamma \in Cr_k(m, f)\}$$

de trajetórias de ordem dois entre α e β correspondem precisamente aos fins de componentes conexas não-compactas de $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$;

(ii) Duas trajetórias quebradas (u, v) e (\tilde{u}, \tilde{v}) correspondendo à mesma componente conexa $\tilde{\mathcal{M}}^i(\alpha, \beta)$ são chamadas **cobordantes**. Temos que os sinais satisfazem

$$n_u n_v + n_{\tilde{u}} n_{\tilde{v}} = 0$$

Demonstração. Ver referência [5]. ■

Teorema 2.4 (Operador de Bordo): $\partial_{k-1}\partial_k = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Pela definição do operador de Bordo e do conjunto $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$ e pela proposição anterior, segue que

$$\begin{aligned} \partial_{k-1}\partial_k(\alpha) &= \sum_{\beta \in Cr_{k-2}(M,f)} \left(\sum_{\gamma \in Cr_{k-1}(M,f)} \sum_{u \in \tilde{\mathcal{M}}(\alpha,\gamma)} \sum_{v \in \tilde{\mathcal{M}}(\gamma,\beta)} n_u n_v \right) \beta \\ &= \sum_{\beta \in Cr_{k-2}(M,f)} \left(\sum_{(u,v) \in \mathcal{B}} (\alpha, \beta) n_u n_v \right) \beta \\ &= \sum_{\beta \in Cr_{k-2}(M,f)} \left(\sum_{\mathcal{M}(\tilde{\alpha},\beta)} n_{u_i} n_{v_i} + n_{\tilde{u}_i} n_{\tilde{v}_i} \right) \beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.2: Para o exemplo 2.1, temos que $\partial_2(\alpha) = \gamma$ e $\partial_1(\gamma) = \eta - \eta = 0$, donde $\partial_1\partial_2(\alpha) = 0$.

Alternativamente, podemos provar que $\partial^2 = 0$ investigando a homologia de M . Com efeito, considere os valores críticos $c_1 < \dots < c_\lambda < \dots < c_n$ e escolha $a_1 < \dots < a_{n-1}$ valores regulares de f tais que $a_\lambda \in (c_{\lambda-1}, c_\lambda)$. Defina os seguintes conjuntos

$$M^\lambda = f^{-1}(a_\lambda), \quad W^\lambda = f^{-1}((a_{\lambda-1}, a_\lambda))$$

Fixe as vizinhanças de p_o, p_n de V_o, V_n , respectivamente. Segue que a variedade diferenciável M admite a seguinte decomposição $M = V_o \cup W^1 \cup \dots \cup W^\lambda \cup \dots \cup W^n$ tal que $W^\lambda \cap W^{\lambda-1} = M^\lambda$. Consequentemente, existe o cobordismo $(W^\lambda; M^\lambda, M^{\lambda-1})$

A fim de calcular a homologia de M usando a decomposição em alças, é particularmente interessante analisar a homologia do cobordismo $(W^{\lambda+1} \cup W^{\lambda-1}; M^{\lambda+1}, M^{\lambda-1})$. Sejam $c_\lambda, c_{\lambda+1}$ níveis críticos e assuma que $f^{-1}(c_\lambda) = \{q_1, \dots, q_r\}$ e $f^{-1}(c_{\lambda+1}) = \{p_1, \dots, p_s\}$. Logo, pela

equivalência homotópica,

$$(W^\lambda, M^{\lambda-1}) \simeq \bigcup_{i=1}^r (D_a^\lambda(q_i) \times D_b^{n-\lambda}(q_i), \partial D_a^\lambda(q_i) \times D_b^{n-\lambda}(q_i)) \simeq \bigcup_{i=1}^r S_i^\lambda \quad (2.6)$$

logo os grupos de homologia $H_*(W^\lambda, M^{\lambda-1})$ são não-triviais somente nas dimensões $* = 0, \lambda$. Para cada $q_i \in Cr_\lambda(M, f)$ existe uma classe $[D_a^\lambda(q_i)] \in H_\lambda(W^\lambda, M^{\lambda-1})$ e o conjunto $\{[D_a^\lambda(q_1)], \dots, [D_a^\lambda(q_r)]\}$ gera $H_\lambda(W^\lambda, M^{\lambda-1})$. A função **exercício**

$$e : (W^\lambda \cup W^{\lambda-1}, W^{\lambda-1}) \rightarrow (W^\lambda, M^{\lambda-1})$$

induz um isomorfismo

$$e_* = H_\lambda(W^\lambda \cup W^{\lambda-1}, W^{\lambda-1}) \rightarrow H_\lambda(W^\lambda, M^{\lambda-1})$$

Definição 2.5: Para cada valor crítico c_λ , defina os grupos livres

$$\mathcal{C}_\lambda(M, f) = H_\lambda(W^\lambda \cup W^{\lambda-1}, W^{\lambda-1})$$

e considere $\mathcal{C}(M, f) = \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{C}_i(M, f)$.

A sequência exata associada à sequência de espaços

$$W^\lambda \rightarrow W^{\lambda+1} \cup W^\lambda \rightarrow (W^{\lambda+1} \cup W^\lambda, W^\lambda),$$

$$M^{\lambda-1} \rightarrow W^\lambda \xrightarrow{j} (W^\lambda, W^{\lambda-1})$$

induz um operador bordo

$$\partial : H_{\lambda+1}(W^{\lambda+1} \cup W^\lambda, W^\lambda) \rightarrow H_\lambda(W^\lambda \cup W^{\lambda-1}, W^{\lambda-1})$$

tal que

$$\begin{aligned} H_{\lambda+1}(W^{\lambda+1} \cup W^\lambda, W^\lambda) &\xrightarrow{\partial} H_\lambda(W^\lambda) \\ &\downarrow j_* \\ H_\lambda(W^\lambda, M^{\lambda-1}) &\xrightarrow{e_*} H_\lambda(W^\lambda \cup W^{\lambda-1}, W^{\lambda-1}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Como $H_{\lambda+1}(W^{\lambda+1} \cup W^\lambda, W^\lambda)$ e $H_\lambda(W^\lambda \cup W^{\lambda-1}, W^{\lambda-1})$ é gerado por $\{[D_a^{\lambda+1}(p_1)], \dots, [D_a^{\lambda+1}(p_s)]\}$ e $\{[D_a^\lambda(q_1)], \dots, [D_a^\lambda(q_r)]\}$ por

$\{[D_a^\lambda(q_1)], \dots, [D_a^\lambda(q_r)]\}$, o operador bordo pode ser explicitamente calculado. Uma vez que $\partial[D_a^{\lambda+1}(p_i)] = [S_a^\lambda(p_i)]$, e $[S_a^\lambda(p_i)] \subset M^\lambda$, as funções $i : M^\lambda \rightarrow W^\lambda$ e $j : W^\lambda \rightarrow (W^\lambda, M^{\lambda-1})$ induzem o seguinte diagrama comutativo que descreve a imagem do operador bordo

$$\begin{array}{ccc}
 & & [S_a^\lambda(p_i)] \\
 & & \downarrow \\
 H_{\lambda+1}(W^{\lambda+1} \cup W^\lambda, W^\lambda) & \xrightarrow{e_*} & H_{\lambda+1}(W^{\lambda+1}, M^\lambda) \xrightarrow{\partial} H_\lambda(M^\lambda) \\
 & & \downarrow i_* \quad (2.8) \\
 \partial \searrow & & H_\lambda(W^\lambda) \\
 & & \downarrow j_* \\
 H_\lambda(W^\lambda \cup W^{\lambda-1}, W^{\lambda-1}) & \xrightarrow{e_*} & H_\lambda(W^\lambda, M^{\lambda-1})
 \end{array}$$

Com o objetivo de calcular o operador bordo, provaremos o seguinte lema

Lema 2.3: Considere $i : N \hookrightarrow M^\lambda$ uma subvariedade diferenciável fechada λ -dimensional com $[N] \in H_\lambda(N)$ uma orientação para N . Seja $h : N \rightarrow (W^\lambda, M^{\lambda-1})$ a função induzida por i . Então, o homomorfismo $h_* : H_\lambda(N) \rightarrow H_\lambda(W^\lambda, M^{\lambda-1})$ é tal que

$$h([N]) = \sum_{i=1}^r I(S_b(q_i), N) [D_a^\lambda(q_i)]$$

Demonstração. Assuma $r = 1$ e $q_1 = q$. Uma vez que $H_\lambda(W^\lambda, M^{\lambda-1})$ é gerado por $[D_a^\lambda(q)]$, logo $h_*([N]) = k \cdot [D_a^\lambda(q)]$, $k \in \mathbb{Z}$. Se $N \cdot S_b(q) = 0$, note que $k = 0$ porque N pode ser retirado da alça h_λ . Considere o retrato de deformação

$$r : (M^\lambda, M^\lambda - S_b(q)) \rightarrow (M^{\lambda-1} \cup D_a^\lambda(q), M^{\lambda-1} \cup D_a^\lambda(q) - \{q\})$$

induzida pela colagem da alça h_λ a $W^{\lambda-1}$ e a inclusão

$$f : (M^{\lambda-1} \cup D_a^\lambda(q), M^{\lambda-1} \cup D_a^\lambda(q) - \{q\}) \simeq H_\lambda(S^\lambda) \rightarrow (W^\lambda, M^{\lambda-1})$$

, segue das propriedades homológicas o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
H_\lambda(N) & & \\
i_* \downarrow h_* & \searrow & \\
H_\lambda(M^\lambda) & \xrightarrow{\tau_*} & H_\lambda(M^\lambda, M^\lambda - S_b(q)) \\
j_* \downarrow & & \downarrow r_* \\
H^\lambda(W^\lambda) & \rightarrow & H_\lambda(M^{\lambda-1} \cup D_a^\lambda(q), M^{\lambda-1} \cup D_a^\lambda(q) - \{q\}) \\
\downarrow & \swarrow f_* & \simeq \\
H_\lambda(W^\lambda, M^{\lambda-1}) & & H_\lambda(S^\lambda) = \langle [D_a^\lambda(q), \partial D_a^\lambda(q)] \rangle
\end{array}$$

O espaço $(M^\lambda, M^\lambda - S_b(q))$ é homotópico ao fibrado normal ν de $S_b(q)$ em M^λ . Temos que existe um isomorfismo $t_* : H_o(S_b(q)) \rightarrow H_\lambda(M^\lambda, M^\lambda - S_b(q))$, logo $H_\lambda(M^\lambda, M^\lambda - S_b(q))$ é gerado por $t_*(1)$. Além disso, $\tau_*([N]) = I(S_b(q).N)t_*(1)$. A imagem $t_*(1)$ é uma classe $(D, \partial D)$ no qual o disco D é uma λ -disco tal que $S_b(q).D = 1$ em M^λ . Consequentemente, para $D = D_a^\lambda(q)$ segue que $(f \circ r)_*(t_*(1)) = [D_a^\lambda(q)]$ ■

Corolário 2.2: Fixe as bases $\{[D_a^{\lambda+1}(p_1)], \dots, [D_a^{\lambda+1}(p_s)]\}$ e $\{[D_a^\lambda(q_1)], \dots, [D_a^\lambda(q_r)]\}$ para os grupos $H_{\lambda+1}(W^{\lambda+1} \cup W^\lambda, W^\lambda)$ e $H_{\lambda+1}(W^\lambda \cup W^{\lambda-1}, W^{\lambda-1})$, respectivamente. Portanto, o bordo $\partial : H_{\lambda+1}(W^{\lambda+1} \cup W^\lambda, W^\lambda) \rightarrow H_{\lambda+1}(W^{\lambda+1} \cup W^\lambda, W^\lambda)$ é dado pela matriz

$$a_{ij} = S_b(q_j)S_a(p_i)$$

Demonstração. Como $\partial[D_a^{\lambda+1}(p_i)] = [S_a^\lambda(p_i)] \in H_\lambda(M^\lambda)$ segue do diagrama 2.8 que sua imagem é

$$(j \circ i)_*(\partial[D_a^{\lambda+1}(p_i)]) = (f \circ r)_*([S_a^\lambda(p_i)]) = \sum_{j=1}^r I(S_b(q_j).S_a(p_i))[D_a^\lambda(q_j)] \quad (2.9)$$

Teorema 2.5: $\mathcal{C}_*(M, f) = \{\mathcal{C}, \partial\}$ é um complexo de cadeia e, para todo λ , existe um isomorfismo de grupo

$$H_\lambda(\mathcal{C}_*) \simeq H_\lambda(W^\lambda \cup W^{\lambda-1}, W^{\lambda-1})$$

Demonstração. A identidade $\partial^2 = 0$ segue do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{\lambda+1}(W^{\lambda+1}, M^\lambda) & \xrightarrow{\partial} & H_\lambda(M^\lambda) & & \\
 \downarrow e_* & & & \downarrow i_1 & \\
 H_\lambda(W^\lambda \cup W^{\lambda-1}, W^{\lambda-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_\lambda(W^\lambda) & & \\
 & & \downarrow j_1 & & \\
 & & H_\lambda(W^\lambda, M^{\lambda-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{\lambda-1}(M^{\lambda-1}) \\
 & & \downarrow e_* & & \downarrow i_0 \\
 H_\lambda(W^\lambda \cup W^{\lambda-1}, W^{\lambda-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{\lambda-1}(W^{\lambda-1}) & & \\
 & & & & \downarrow j_0 \\
 & & & & H_{\lambda-1}(W^{\lambda-1} \cup W^{\lambda-2}, W^{\lambda-2}) \\
 & & & & (2.10)
 \end{array}$$

O isomorfismo segue do fato que os λ -ciclos estão em $(W^\lambda \cup W^{\lambda-1}, W^{\lambda-1})$, assim $C_\lambda = H_\lambda(W^\lambda \cup W^{\lambda-2}, W^{\lambda-2})$. ■

Definição 2.6: Seja M uma variedade Riemanniana e f uma função de Morse-Smale. Então, o *Complexo de Morse* é dado por $(C_k(M, f), \partial)$. Neste caso, definem-se os grupos $Z_k(M, f) = \{z \in C_k(M, f); \partial z = 0\}$ e $B_k(M, f) = \{z \in C_k(M, f); z = \partial\omega, \omega \in C_{k+1}\}$. Desta maneira, defina os grupos de Homologia de Morse:

$$H_k(M, f) = H_k((M, f), \mathbb{Z}) = \frac{Z_k(M, f)}{B_{k+1}(M, f)}$$

Exemplo 2.3: Ainda no exemplo 2.1, veja que

$$\begin{array}{ll}
 \ker \partial_2 = \mathbb{Z}(\alpha + \beta), & im(\partial_3) = 0 \\
 \ker \partial_1 = \mathbb{Z}\gamma, & im(\partial_2) = \mathbb{Z}\gamma \\
 \ker \partial_0 = \mathbb{Z}\eta, & im(\partial_1) = 0
 \end{array}$$

donde

$$H_k(M, f) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } k = 0, 2; \\ 0, & \text{se } k = 1 \text{ ou } k > 2 \end{cases}$$

Exemplo 2.4: Considere o espaço projetivo \mathbb{P}^2 com a função de Morse definida no exemplo 1.7 cujos pontos críticos são x, y e z . Temos que

$$\begin{array}{l}
 \partial_2(x) = 2y \\
 \partial_1(y) = 0 \\
 \partial_0(z) = 0
 \end{array}$$

donde

$$H_k(M, f) = \begin{cases} 0, & \text{se } k > 2; \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } k = 1; \\ \mathbb{Z}, & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Os exemplos anteriores ilustram um fato geral bastante relevante da Homologia de Morse. Temos que a Homologia de Morse coincide com a Homologia Singular, como nos sugere o próximo teorema.

Teorema 2.6: $H_k(M, f) \simeq H_k(M, \mathbb{Z}), \forall k \in \mathbb{N}$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [12]. Daremos aqui uma motivação geométrica. Considere uma triangulação (M, h) de M . Construimos uma função de Morse f cujos pontos críticos são os baricentros dos simplexes e uma métrica g tal que o campo gradiente negativo é Morse-Smale. Saindo de cada baricentro na k -face existe uma linha de fluxo para o baricentro em cada $(k-1)$ -face no bordo da k -face. As orientações das variedade estáveis são escolhidas tais que a orientação das linhas de fluxo coincida com o sinal na definição do operador simplicial de bordo. Então, as cadeias simpliciais e de Morse são idênticas e o teorema segue imediatamente.

3 Homologia de Morse em Variedades com Bordo

Consideraremos M uma variedade diferenciável com bordo. Desejamos construir complexos de Morse que computem a Homologia Relativa $H_*(M, \partial M)$, a Homologia Absoluta $H_*(M)$ e a Homologia Absoluta $H_*(\partial M)$ para o bordo ∂M . Estes complexos serão formados pelos pontos críticos interiores de uma função de Morse f juntamente com os pontos críticos de bordo dessa mesma função. Inicialmente estudaremos a natureza dos pontos críticos de bordo bem como a dimensão do espaço $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ uma vez que poderemos ter $\dim \mathcal{M}(\alpha, \beta) \neq \mu(\alpha) - \mu(\beta)$. Além disso, investigaremos a compactificação para $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$. Por fim, definiremos os operadores de bordo a fim de construir grupos de homologia de Morse para a variedade M .

Considere M uma variedade diferenciável compacta orientável tal que $\partial M \neq \emptyset$ e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse cujo campo vetorial gradiente ∇f é tangente ao bordo ∂M . Podemos dividir o conjunto $Cr(M, f)$ dos pontos críticos da função f em pontos críticos interiores e pontos críticos de bordo, isto é,

$$Cr(M^o, f) = \{\alpha \in Cr(M, f); \alpha \in M^o\}$$

$$Cr(\partial M, f) = \{\alpha \in Cr(M, f); \alpha \in \partial M\}$$

Os pontos críticos de bordo podem ainda ser divididos em dois tipos. Se $\alpha \in Cr(\partial M, f)$, o vetor normal η a ∂M é um autovetor de H^f que pertence a $T_\alpha \mathcal{U}_\alpha$ ou $T_\alpha \mathcal{S}_\alpha$.

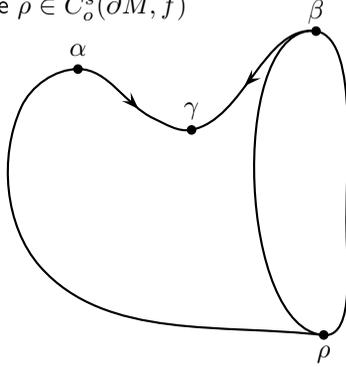
Definição 3.1: Seja $\alpha \in Cr(\partial M, f)$ um ponto crítico de bordo. Diremos que α é **instável de bordo** se o vetor normal η tem um autovalor negativo associado. Do contrário, diremos que α é **estável de bordo**.

Denotaremos por $Cr^u(\partial M, f)$ o conjunto dos pontos estáveis de bordo e $Cr^s(\partial M, f)$ os pontos instáveis de bordo. Consequentemente, o conjunto $Cr(M, f)$ dos pontos críticos de f é tal que

$$Cr(M, f) = Cr(M^o, f) \cup Cr^u(\partial M, f) \cup Cr^s(\partial M, f)$$

Exemplo 3.1: Considere a variedade diferenciável com bordo M ilustrada pela figura abaixo. Identificamos em M quatro pontos críticos, a saber,

α, β, γ e ρ . Temos que $\mu(\alpha) = \mu(\beta) = 2$, $\mu(\gamma) = 1$ e $\mu(\rho) = 0$. Veja que $\beta \in C_2^u(\partial M, f)$ e $\rho \in C_0^s(\partial M, f)$



3.1 Espaços Modulares $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$

Perceba que se $\alpha \in C^s(\partial M, f)$ e $\beta \in C^u(\partial M, f)$, teremos $\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{S}_\beta \subset \partial M$, ou seja, $\mathcal{M}(\alpha, \beta) \subset \partial M$. Neste caso, assumiremos que $\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{S}_\beta$ são transversais como interseção em ∂M

Nessas condições, os conceitos de espaços modulares e trajetórias quebradas são naturalmente estendidos para o caso em que a variedade diferenciável M considerada possui bordo não vazio. Portanto, dados pontos críticos $\alpha, \beta \in M$ quaisquer, defina $\mathcal{M}(\alpha, \beta) = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{S}_\beta$ e o espaço quociente

$$\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta) = \mathcal{M}(\alpha, \beta) / \mathbb{R}$$

Além disso, seja $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta) = \mathcal{M}(\alpha, \beta) / \mathbb{R}$, diremos que \tilde{x} é uma trajetória não-parametrizada. E, a n -upla

$$(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \tilde{\mathcal{M}}(\alpha_0, \alpha_1) \times \dots \times \tilde{\mathcal{M}}(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$$

é denominada uma trajetória quebrada.

Observação 3.1 (Dimensão de $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$): Visto que a dimensão de $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ não é em geral igual a $\mu(\alpha) - \mu(\beta)$, é conveniente explorar alguns espaços importantes obtidos pela interseção $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{S}_\beta$. Evidentemente, se $\alpha, \beta \in C(M^o, f)$, então $\dim \mathcal{M}(\alpha, \beta) = \mu(\alpha) - \mu(\beta)$. Igualmente, se $\alpha \in C(M^o, f)$ e $\beta \in C^s(\partial M, f)$, teremos $\mathcal{U}_\alpha \subset M^o$ e $\mathcal{S}_\beta \subset M \Rightarrow$

$\mathcal{M}(\alpha, \beta) \subset M$, e

$$\dim \mathcal{M}(\alpha, \beta) = \mu(\alpha) + [n - \mu(\beta)] - n = \mu(\alpha) - \mu(\beta)$$

Quando $\alpha \in C^u(\partial M, f)$, $\beta \in C^s(\partial M, f)$, as variedades \mathcal{U}_α , $\mathcal{S}_\beta \in M$ implica que $\mathcal{M}(\alpha, \beta) \subset M$, donde

$$\dim \mathcal{M}(\alpha, \beta) = \mu(\alpha) + [n - \mu(\beta)] - n = \mu(\alpha) - \mu(\beta)$$

Considere também os fluxos em ∂M e defina $\overline{\mathcal{M}}(\alpha, \beta) = \mathcal{M}(\alpha, \beta) \cap \partial M$.

$$\dim \mathcal{M}(\alpha, \beta) = (\mu(\alpha) - \mu(\beta)) + (n - 1) - n = \mu(\alpha) - \mu(\beta) - 1$$

Por fim, se $\alpha \in C^s(\partial M, f)$, $\beta \in C^s(\partial M, f)$, teremos $\mathcal{U}_\alpha \subset \partial M$ e $\mathcal{S}_\beta \subset M \implies \mathcal{M}(a, b) \subset M$

$$\dim \mathcal{M}(a, b) = \mu(a) + [n - \mu(b)] - n = \mu(a) - \mu(b)$$

E, para $\alpha \in C^u(\partial M, f)$, $\beta \in C^u(\partial M, f)$, segue $\mathcal{U}_\alpha \subset M$ e $\mathcal{S}_\beta \subset \partial M \implies \mathcal{M}(\alpha, \beta) \subset \partial M$, então

$$\dim \mathcal{M}(\alpha, \beta) = (\mu(\alpha) - 1) + (n - \mu(\beta)) - (n - 1) = \mu(\alpha) - \mu(\beta)$$

Se $\alpha \in C^s(\partial M, f)$, $\beta \in C^u(\partial M, f)$ já sabemos que $\mathcal{M}(\alpha, \beta) \subset \partial M$. Portanto, a dimensão de $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ fica:

$$\dim \mathcal{M}(\alpha, \beta) = \mu(\alpha) + (n - \mu(\beta)) - (n - 1) = \mu(\alpha) - \mu(\beta) + 1$$

Atente para um importante detalhe, podem existir espaços $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ tais que $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$. Em outras palavras, no bordo de M , no caso em que α seja estável de bordo e β instável de bordo, podem existir trajetórias ligando pontos críticos de mesmo índice.

3.1.1 Orientação para $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$

Para definir os complexos de Morse precisamos orientar a variedade $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$, e para tanto, devemos supor M orientada, donde segue (como no capítulo anterior) que \mathcal{U}_α está orientada e \mathcal{S}_β está coorientada. Igualmente, temos o espaço dos fluxos $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ orientado, exceto no caso em que $\alpha \in Cr^s(\partial M, f)$ e $\beta \in Cr^u(\partial M, f)$, no qual perdemos a transversalidade

em M . Se $\alpha \in Cr^s(\partial M, f)$ e $\beta \in Cr^u(\partial M, f)$, consideraremos a seguinte seqüência:

$$0 \rightarrow T_x \mathcal{M}(\alpha, \beta) \xrightarrow{i} T_x \mathcal{U}_\alpha \xrightarrow{\pi} N_x \mathcal{S}_\beta \xrightarrow{q} \mathbb{R} \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

no qual \mathbb{R} é identificado com a direção normal ao ∂M em $x \in \partial M$. Escolha $j+1$ vetores em $N_x \mathcal{S}_\beta$ tais que $\omega_1, \dots, \omega_j, \omega_{j+1}$ fomem uma base orientada para $N_x \mathcal{S}_\beta$ na qual os j primeiros são imagens de π e $q(\omega_{j+1}) = 1$. Então, uma base v_1, \dots, v_d para $T_x \mathcal{M}(\alpha, \beta)$ será dita positiva se a seguinte base

$$i(v_1), \dots, i(v_d), \omega_1, \dots, \omega_j$$

é uma base para $T_x \mathcal{U}_\alpha$.

Exemplo 3.2:

Estamos interessados também em orientar as variedades instáveis contidas no bordo ∂M , isto é, seja $\alpha \in Cr(\partial M, f)$ e $T_\alpha \mathcal{U}_\alpha$, defina

$$\overline{T_\alpha \mathcal{U}_\alpha} = T_\alpha \mathcal{U}_\alpha \cap T_\alpha(\partial M)$$

Logo, se $\alpha \in Cr^s(\partial M, f)$, então $\overline{T_\alpha \mathcal{U}_\alpha} = T_\alpha \mathcal{U}_\alpha$ e a orientação para $\overline{T_\alpha \mathcal{U}_\alpha}$ é escolhida como antes. Se, em vez disso, $\alpha \in Cr^u(\partial M, f)$, orientamos $\overline{T_\alpha \mathcal{U}_\alpha}$ usando a convenção da direção para fora na orientação do bordo. Consequentemente, nos dois casos temos que $\overline{T_\alpha \mathcal{U}_\alpha}$ está orientada, donde segue que \mathcal{U}_α no bordo ∂M está orientada.

3.1.2 Compactificação de $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$

Devemos inicialmente observar que se M tem bordo, podem existir trajetórias quebradas que não são limite de seqüências de trajetórias não-quebradas. Por exemplo, se $\alpha \in Cr(M^\circ, f)$, $\beta \in Cr^s(\partial M, f)$ e $\gamma \in Cr^u(\partial M, f)$, e $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ é uma trajetória quebrada entre α e γ passando por β , vemos que não pode existir uma seqüência de trajetórias não-quebradas ligando α e γ convergindo para β , uma vez que $\alpha \in Cr(M^\circ, f)$ donde $\mathcal{U}_\alpha \subset M^\circ$ e $\gamma \in Cr^u(\partial M, f)$ donde $\mathcal{S}_\beta \subset \partial M$. Além disso, como estamos interessados no caso em $\mu(\alpha) - \mu(\beta) = 2$, convém notar que as trajetórias quebradas entre α e γ podem possuir mais do que duas componentes, como mostra o lema a seguir.

Lema 3.1: Suponha que α e γ são pontos críticos com índice k e $k-2$, respectivamente. Então uma trajetória quebrada em $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \gamma)$ tem ou 2

ou 3 componentes, ou seja, assume uma entre as seguintes formas:

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta) \times \tilde{\mathcal{M}}(\beta, \gamma)$$

ou

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta_1) \times \tilde{\mathcal{M}}(\beta_1, \beta_2) \times \tilde{\mathcal{M}}(\beta_2, \gamma).$$

No primeiro caso, β deve ser um ponto crítico interior tal que $\mu(\beta) = k - 1$. No segundo caso, β_1 e β_2 devem ambos ser pontos críticos de bordo tais que $\beta_1 \in Cr^s(\partial M, f)$, $\beta_2 \in Cr^u(\partial M, f)$ e $\mu(\beta_1) = \mu(\beta_2) = k - 1$.

Demonstração. Se uma trajetória quebrada tem duas componentes, o ponto crítico intermediário deve ser interior, pois não existe ponto crítico de bordo β tal que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(\alpha) = \beta \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\gamma) = \beta$$

para trajetórias interiores pela discussão dos casos acima. Se existem mais de duas componentes, então alguma componente é tal que $\alpha \in C^s(\partial M, f)$, $\beta \in C^u(\partial M, f)$, pois somente uma tal componente pode unir pontos críticos de mesmo índice. Contudo, não pode haver mais de três componentes porque duas componentes adjacentes de uma trajetória quebrada não podem ambas partirem de pontos críticos em $C^s(\partial M, f)$. ■

Embora possamos observar algumas mudanças se M é uma variedade com bordo, permanece verdade que $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ é variedade 1-dimensional com bordo e o número de trajetórias quebradas entre α e β ainda é par. O próximo teorema garante uma compactificação para o espaço $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$.

Proposição 3.1 (Compacidade): Seja M uma variedade com bordo e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Se a condição de Morse-Smale é satisfeita, então o espaço modular dos fluxos $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ é compactificável para $\alpha, \beta \in Cr(M, f)$.

Demonstração. Ver referência [12] ■

Observação 3.2: Para o caso em que $\mu(\alpha) = k + 1$ e $\mu(\beta) = k - 1$, temos que se $\{\tilde{y}_i\}$ é uma sequência em $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \gamma)$, então, ou $\{\tilde{y}_i\}$ converge para uma trajetória em $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \gamma)$ ou converge para uma trajetória quebrada

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta) \times \tilde{\mathcal{M}}(\beta, \gamma)$$

tal que $\beta \in Cr_k(M^\circ, f)$ ou

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta_1) \times \tilde{\mathcal{M}}(\beta_1, \beta_2) \times \tilde{\mathcal{M}}(\beta_2, \gamma)$$

tal que $\beta_1 \in Cr_k^s(\partial M, f)$, $\beta_2 \in Cr_k^u(M, f)$.

Consequentemente, temos provado que $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ tem a seguinte compactificação

$$\overline{\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)} = \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta) \cup \left(\bigcup_{\beta \in Cr_k(M^\circ, f)} \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta) \times \tilde{\mathcal{M}}(\beta, \gamma) \bigcup \bigcup_{\beta_1 \in Cr_k^s(\partial M, f), \beta_2 \in Cr_k^u(M, f)} \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta_1) \times \tilde{\mathcal{M}}(\beta_1, \beta_2) \times \tilde{\mathcal{M}}(\beta_2, \gamma) \right)$$

que é uma variedade com bordo (ver referência [12]).

3.2 Os Complexos $(\bar{C}, \bar{\partial})$, $(\check{C}, \check{\partial})$ e $(\hat{C}, \hat{\partial})$

Temos por objetivo definir os Complexos de Morse, a fim de construir a Homologia de Morse para variedades com bordo. Como existem três tipos diferentes de pontos críticos, podemos formar três grupos abelianos livres gerados pelos pontos críticos de f , ou seja,

$$\begin{aligned} C_k^o(M, f) &= \bigoplus_{\alpha \in Cr(M^\circ, f), \mu(\alpha)=k} \mathbb{Z}\alpha \\ C_k^u(M, f) &= \bigoplus_{\alpha \in Cr^u(\partial M, f), \mu(\alpha)=k} \mathbb{Z}\alpha \\ C_k^s(M, f) &= \bigoplus_{\alpha \in Cr^s(\partial M, f), \mu(\alpha)=k} \mathbb{Z}\alpha \end{aligned}$$

Exemplo 3.3: Baseado no exemplo 3.1, temos os seguintes grupos:

$$\begin{array}{lll} C_2^o(M, f) = \mathbb{Z}\alpha & C_1^o(M, f) = \mathbb{Z}\gamma & C_0^o(M, f) = 0 \\ C_2^u(\partial M, f) = \mathbb{Z}\beta & C_1^u(\partial M, f) = 0 & C_0^u(\partial M, f) = 0 \\ C_2^s(\partial M, f) = 0 & C_1^s(\partial M, f) = 0 & C_0^s(\partial M, f) = \mathbb{Z}\rho \end{array}$$

Observe que se $\alpha \in Cr^u(\partial M, f)$ e $\mu(\alpha) = k$, resulta que \mathcal{U}_α é k -dimensional e $\mathcal{U}_\alpha \cap \partial M$ é $(k-1)$ -dimensional. Se estivermos interessados

em definir complexos de Morse no bordo ∂M , precisamos ignorar a linha de fluxo partindo de α para o interior de M , ou seja, para o fluxo no bordo, $\mu(\alpha) = k - 1$. Consequentemente, para construir o complexo \bar{C}_* de ∂M , colocamos

$$\bar{C}_k(M, f) = C_k^s(M, f) \oplus C_{k+1}^u(M, f)$$

Exemplo 3.4: Para a variedade M considerada, temos

$$\bar{C}_2 = 0 \quad \bar{C}_1 = \mathbb{Z}\beta \quad \bar{C}_0 = \mathbb{Z}\rho$$

Uma vez que discutimos a orientação das variedades instáveis no bordo, podemos associar sinais às trajetórias pertencentes ao espaço 0 -dimensional $\tilde{\mathcal{M}}^\partial(\alpha, \beta)$ das trajetórias no bordo. Defina

$$\#\tilde{\mathcal{M}}^\partial(\alpha, \beta) = \sum_{\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{M}}^\partial(\alpha, \beta)} \text{sgn}(\tilde{x})$$

isto é, a soma algébrica dos sinais das \tilde{x} trajetórias em $\tilde{\mathcal{M}}^\partial(\alpha, \beta)$. Visto isso, estamos prontos para definir o operador $\bar{\partial} : \bar{C}_k \rightarrow \bar{C}_{k-1}$ tal que

$$\bar{\partial}\alpha = \sum_{\beta_i \in \bar{C}_k} \#\tilde{\mathcal{M}}^\partial(\alpha, \beta_i)\beta_i$$

Interpretando a decomposição de \bar{C} como a soma direta entre C^u e C^s , podemos escrever $\bar{\partial}$ com a seguinte matriz 2×2

$$\bar{\partial} = \begin{bmatrix} \partial_s^s & \partial_s^u \\ \partial_u^s & \partial_u^u \end{bmatrix}$$

Veja que a matriz acima tem como entradas homomorfismos $\bar{\partial}_x^y : C^y \rightarrow C^x$, $x, y = u, s$. A definição destes operadores é trivial como vemos nos seguintes exemplos:

Exemplo 3.5: Considere os complexos de Morse definidos anteriormente. Se $\mu(\alpha) - \mu(\beta) = 1$, então os espaços $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ são 0 -dimensionais, donde podemos definir a soma algébrica $\#\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ dos sinais associados às trajetórias. Logo, ficam bem definidos os seguintes operadores:

$$\begin{aligned} \partial_o^o &: C_k^o(M, f) \longrightarrow C_{k-1}^o(M, f) \\ \partial_s^o &: C_k^o(M, f) \longrightarrow C_{k-1}^s(M, f) \\ \partial_o^u &: C_k^u(M, f) \longrightarrow C_{k-1}^o(M, f) \\ \partial_s^u &: C_k^u(M, f) \longrightarrow C_{k-1}^s(M, f) \end{aligned}$$

tais que

$$\begin{aligned}\partial_o^\circ \alpha &= \sum_{\beta_i \in Cr_{k-1}(M^\circ, f)} \# \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta_i) \beta_i \\ \partial_s^\circ \alpha &= \sum_{\beta_i \in Cr_{k-1}^s(\partial M, f)} \# \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta_i) \beta_i \\ \partial_o^u \alpha &= \sum_{\beta_i \in Cr_{k-1}(M^\circ, f)} \# \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta_i) \beta_i \\ \partial_s^u \alpha &= \sum_{\beta_i \in Cr_{k-1}^s(\partial M, f)} \# \tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta_i) \beta_i\end{aligned}$$

Observação 3.3: Consideraremos duas aplicações diferentes entre $C_k^u(M, f) \rightarrow C_k^s(M, f)$, por exemplo, a saber $\bar{\partial}_s^u$ e ∂_s^u , de maneira que a primeira conta trajetórias no bordo ∂M e a segunda conta trajetórias em M .

Igualmente, é possível construir as somas $C_k^\circ(M, f) \oplus C_k^s(M, f)$, $C_k^\circ(M, f) \oplus C_k^u(M, f)$, definir, respectivamente, os seguintes operadores $\check{\partial}_k, \hat{\partial}_k$ a partir de matrizes associadas a cada soma.

Definição 3.2: Em $\check{C}_k = \check{C}_k(M, f) = C_k^\circ(M, f) \oplus C_k^s(M, f)$, defina $\check{\partial} : \check{C}_k \rightarrow \check{C}_{k-1}$ tal que:

$$\check{\partial} = \begin{bmatrix} \partial_o^\circ & -\partial_o^u \bar{\partial}_u^s \\ \partial_s^\circ & \bar{\partial}_s^s - \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \end{bmatrix}$$

Em $\hat{C}_k = \hat{C}_k(M, f) = C_k^\circ(M, f) \oplus C_k^u(M, f)$, defina $\hat{\partial} : \hat{C}_k \rightarrow \hat{C}_{k-1}$ tal que:

$$\hat{\partial} = \begin{bmatrix} \partial_o^\circ & \partial_o^u \\ -\bar{\partial}_u^s \partial_s^\circ & -\bar{\partial}_u^u - \bar{\partial}_s^u \partial_s^u \end{bmatrix}$$

Observação 3.4: Veja que os operadores envolvidos nas definições de $\bar{\partial}$, $\check{\partial}$ e $\hat{\partial}$ levam em conta a dimensão dos espaços modulares em questão. Por exemplo, o operador $\bar{\partial}_u^s$ considera trajetórias no bordo de M ligando pontos críticos cujos índices são iguais. Logo, a composição $\partial_s^u \bar{\partial}_u^s$ considera trajetórias cuja diferença entre os índices dos pontos críticos é 1. Por isso, é possível compor $\bar{\partial}_s^u \bar{\partial}_u^s$ na definição de um operador entre os grupos livres $C_k^s(M, f)$ e $C_{k-1}^s(M, f)$.

Exemplo 3.6: Considerando a variedade M do exemplo 3.1, temos seguintes grupos:

$$\begin{array}{lll} \check{C}_2 = \mathbb{Z}\alpha & \check{C}_1 = \mathbb{Z}\gamma & \check{C}_0 = \mathbb{Z}\rho \\ \hat{C}_2 = \mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\beta & \hat{C}_1 = \mathbb{Z}\gamma & \hat{C}_0 = 0 \end{array}$$

Queremos provar que os pares $(\bar{C}_k, \bar{\partial}_k)$, $(\hat{C}_k, \hat{\partial}_k)$ e $(\check{C}_k, \check{\partial}_k)$ são complexos. Para tanto, considere os seguintes lemas:

Lema 3.2: Para os operadores ∂ e $\bar{\partial}$ definidos acima, temos:

- (i) $-\partial_o^\circ \partial_o^\circ + \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^\circ = 0$
- (ii) $-\partial_s^\circ \partial_o^\circ - \bar{\partial}_s^s \partial_s^\circ + \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^\circ = 0$
- (iii) $-\partial_o^\circ \partial_o^u + \partial_o^u \bar{\partial}_u^u + \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u = 0$
- (iv) $-\bar{\partial}_u^s - \partial_o^s \partial_o^u - \bar{\partial}_s^s \partial_s^u + \partial_s^u \bar{\partial}_u^u + \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u = 0$

Demonstração. Ver referência [12] ■

Lema 3.3: O operador $\bar{\partial}$ tem quadrado nulo. Logo, em termos das suas componentes, valem as seguintes identidades:

- (i) $\bar{\partial}_s^s \bar{\partial}_s^s + \bar{\partial}_s^u \bar{\partial}_u^s = 0$
- (ii) $\bar{\partial}_s^s \bar{\partial}_s^u + \bar{\partial}_s^u \bar{\partial}_u^u = 0$
- (iii) $\bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_s^s + \bar{\partial}_u^u \bar{\partial}_u^s = 0$
- (iv) $\bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_s^u + \bar{\partial}_u^u \bar{\partial}_u^u = 0$

Demonstração. Ver referência [12] ■

Proposição 3.2: Os pares $(\bar{C}_k, \bar{\partial}_k)$, $(\hat{C}_k, \hat{\partial}_k)$ e $(\check{C}_k, \check{\partial}_k)$ são complexos, ou seja,

- (i) $\bar{\partial}^2 = 0$
- (ii) $\hat{\partial}^2 = 0$
- (iii) $\check{\partial}^2 = 0$

Demonstração. Já sabemos que $\bar{\partial}^2 = 0$ pelo lema anterior. Computando $\tilde{\partial}^2$ temos,

$$\begin{bmatrix} \partial_o^o & -\partial_o^u \bar{\partial}_u^s \\ \partial_s^o & \bar{\partial}_s^s - \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_o^o & -\partial_o^u \bar{\partial}_u^s \\ \partial_s^o & \bar{\partial}_s^s - \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \end{bmatrix} = \\ \left[\begin{array}{cc} \partial_o^o \partial_o^o - \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^o & -\partial_o^o \partial_o^u \bar{\partial}_u^s - \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_s^s + \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \\ -\partial_s^o \partial_o^o \partial_s^o + \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^o & -\partial_s^o \partial_o^u \bar{\partial}_u^s + \partial_s^s \bar{\partial}_s^s - \partial_s^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^s - \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^s + \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \end{array} \right]$$

Mas $\partial_o^o \partial_o^o - \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^o = 0$ pela primeira das identidades do *Lema 3.2*. Para a entrada

$$\begin{aligned} -\partial_o^o \partial_o^u \bar{\partial}_u^s - \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_s^s + \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^s &= -\partial_o^o \partial_o^u \bar{\partial}_u^s + \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_u^s + \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \\ &= (-\partial_o^o \partial_o^u + \partial_o^u \bar{\partial}_u^s + \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u) \bar{\partial}_u^s = 0 \end{aligned}$$

tal que para primeira linha usamos $\bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_u^u + \bar{\partial}_u^u \bar{\partial}_u^s = 0$, consequência de $\bar{\partial}^2 = 0$ e na última usamos a terceira identidade do *Lema 3.2*. Temos ainda que $\partial_s^o \partial_o^o + \partial_s^u \bar{\partial}_u^s - \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^o = 0$ pela segunda identidade do *Lema 3.2*.

Por fim,

$$\begin{aligned} -\partial_s^o \partial_o^u \bar{\partial}_u^s + \bar{\partial}_s^s \bar{\partial}_s^s - \bar{\partial}_s^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^s - \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_s^s + \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^s &= \\ -\partial_s^o \partial_o^u \bar{\partial}_u^s - \bar{\partial}_s^u \bar{\partial}_u^s + \bar{\partial}_s^u \partial_u^s \bar{\partial}_u^s - \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_s^s + \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^s &= \\ (-\partial_s^o \partial_o^u - \bar{\partial}_s^u + \bar{\partial}_s^u \partial_u^s - \partial_s^u \bar{\partial}_u^s + \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u) \bar{\partial}_u^s &= 0 \end{aligned}$$

usando as identidades $\bar{\partial}_s^s \bar{\partial}_s^s = -\bar{\partial}_s^u \bar{\partial}_u^s$ e $\bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_u^s = -\bar{\partial}_u^u \bar{\partial}_u^s$, além da última identidade do *Lema 3.2*. Consequentemente, todas as entradas da matriz de $\tilde{\partial}^2$ são nulas, ou seja, $\tilde{\partial}^2 = 0$

Computamos agora $\hat{\partial}^2$,

$$\begin{bmatrix} \partial_o^o & \partial_o^u \\ -\bar{\partial}_u^s \partial_s^o & -\bar{\partial}_u^u - \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_o^o & \partial_o^u \\ -\bar{\partial}_s^s \partial_s^o & -\bar{\partial}_u^u - \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \end{bmatrix} = \\ \left[\begin{array}{cc} \partial_o^o \partial_o^o - \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^o & \partial_o^o \partial_o^u - \partial_o^u \bar{\partial}_u^u - \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \\ -\bar{\partial}_u^s \partial_s^o \partial_s^o + \bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_u^s \partial_s^o & -\bar{\partial}_u^s \partial_s^o \partial_s^u + \bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_u^u + \bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_u^s \partial_s^u + \bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \partial_s^u \end{array} \right]$$

No entanto,

$$\partial_o^o \partial_o^o - \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^o = 0$$

pois é uma entrada de $\tilde{\partial}^2 = 0$. A outra entrada da primeira linha é

$$\partial_o^o \partial_o^u - \partial_o^u \bar{\partial}_u^u - \partial_o^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u$$

que é zero pelo *Lema 3.2*. A primeira entrada da segunda linha

$$\begin{aligned} & -\bar{\partial}_u^s \partial_s^o \partial_o^o + \bar{\partial}_u^u \bar{\partial}_s^o \partial_s^o + \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^o \\ & = -\bar{\partial}_u^s \partial_s^o \partial_o^o - \bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_s^s \partial_s^o + \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^o \\ & = \bar{\partial}_u^s (-\partial_s^o \partial_o^o - \bar{\partial}_s^s \partial_s^o + \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^o) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

pela segunda identidade do *Lema 3.2*. Por fim, a última entrada,

$$\begin{aligned} & -\bar{\partial}_u^s \partial_s^o \partial_o^u + \bar{\partial}_u^u \bar{\partial}_u^u + \bar{\partial}_u^u \bar{\partial}_s^s \partial_s^u + \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^u + \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u = \\ & -\bar{\partial}_u^s \partial_s^o \partial_o^u - \bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_s^u - \bar{\partial}_u^s \bar{\partial}_s^s \partial_s^u + \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^u + \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \\ & = \bar{\partial}_u^s (-\partial_s^o \partial_o^u - \bar{\partial}_s^u - \bar{\partial}_s^s \partial_s^u \partial_s^u \bar{\partial}_u^u + \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \partial_s^u) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

pelo última identidade do *Lema 3.2* ■

Definição 3.3: Sejam os pares $(\bar{C}_k, \bar{\partial}_k)$, $(\hat{C}_k, \hat{\partial}_k)$ e $(\check{C}_k, \check{\partial}_k)$ complexos-cadeia como definido acima. Defina os seguintes grupos de homologia de Morse para variedades com bordo:

- (i) $\bar{H}_*(M) = H(\bar{C}, \bar{\partial}) = \ker(\bar{\partial})/\text{im}(\bar{\partial})$
- (ii) $\hat{H}_*(M) = H(\hat{C}, \hat{\partial}) = \ker(\hat{\partial})/\text{im}(\hat{\partial})$
- (iii) $\check{H}_*(M) = H(\check{C}, \check{\partial}) = \ker(\check{\partial})/\text{im}(\check{\partial})$

Exemplo 3.7: É fácil verificar que a definição acima nos leva aos seguintes grupos de Homologia de Morse para a variedade M do exemplo 3.1:

$$\begin{array}{lll} \bar{H}_2(M) = 0 & \check{H}_2(M) = 0 & \hat{H}_2(M) = \mathbb{Z} \\ \bar{H}_1(M) = \mathbb{Z} & \check{H}_1(M) = 0 & \hat{H}_1(M) = 0 \\ \bar{H}_0(M) = \mathbb{Z} & \check{H}_0(M) = \mathbb{Z} & \hat{H}_0(M) = 0 \end{array}$$

De forma semelhante ao que aconteceu com a Homologia de Morse para variedades sem bordo, a Homologia de Morse para variedades com bordo coincide com a Homologia Singular, como nos mostra o próximo teorema.

Teorema 3.1: Os complexos $(\hat{C}_k, \hat{\partial}_k)$ e $(\check{C}_k, \check{\partial}_k)$ determinam, respectivamente, as homologias absoluta e relativa, isto é, a menos de isomorfismos temos

$$\begin{aligned} \check{H}_*(M) &= H_*(M) \\ \hat{H}_*(M) &= H_*(M, \partial M) \end{aligned}$$

A demonstração pode ser encontrada em [12]. Em linhas gerais, por exemplo, para calcular $\check{H}_*(M)$, escolhemos f cujos pontos críticos de bordo são todos instáveis e assumimos ainda que exista uma vizinhança V de ∂M tal que nenhuma trajetória partindo de $M \setminus V$ que entre em V . Logo, o complexo \check{C} é o complexo de Morse dos pontos críticos interiores de f e a situação é análoga aquela do capítulo anterior.

3.3 Sequência Exata para os Grupos de Homologia $\bar{H}_*(M)$, $\hat{H}_*(M)$ e $\check{H}_*(M)$

Podemos associar aos grupos de homologia definidos acima uma sequência exata. Começemos por definir as seguintes aplicações

$$i: \bar{C} \longrightarrow \check{C}, \quad j: \check{C} \longrightarrow \hat{C} \quad \text{e} \quad p: \hat{C} \longrightarrow \bar{C}$$

dadas por

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -\partial_o^u \\ 1 & -\partial_s^u \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\partial_u^s \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad p = \begin{bmatrix} \partial_s^o & \partial_s^u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue dos lemas 3.2 e 3.3 que i e j são funções cadeia, enquanto p satisfaz $p\hat{\partial} = -\bar{\partial}p$.

Proposição 3.3: Para toda variedade M , existe uma sequência exata

$$\dots \xrightarrow{i_*} \check{H}_*(M) \xrightarrow{j_*} \hat{H}_*(M) \xrightarrow{p_*} \bar{H}_*(M) \xrightarrow{i_*} \check{H}_*(M) \xrightarrow{j_*} \dots$$

no qual as funções i_* , j_* e p_* são induzidas pelas funções i , j e p .

Demonstração. Para verificar a exatidão, introduza o seguinte grupo \check{E}

$$\check{E} = \hat{C} \bigoplus \bar{C} = (C^o \oplus C^u) \bigoplus (C^s \oplus C^u)$$

e a função \check{e}

$$\check{e} = \begin{bmatrix} \hat{\partial} & 0 \\ p & \bar{\partial} \end{bmatrix}$$

Segue que $\check{e}^2 = 0$ visto que $p\hat{\partial} = -\bar{\partial}p$. Consequentemente, a seguinte sequência exata longa

$$\dots \xrightarrow{i_*} H(\check{E}) \xrightarrow{j_*} \hat{H}(M) \xrightarrow{p_*} \bar{H}(M) \xrightarrow{i_*} H(\check{E}) \xrightarrow{j_*} \dots,$$

resulta da sequência exata curta

$$\check{C} \xrightarrow{\bar{i}} \check{E} \xrightarrow{\bar{j}} \check{C}$$

no qual \bar{i} é a inclusão e \bar{j} é a projeção. O operador bordo na sequência exata longa é p_* . Resta agora identificar $H(\check{E})$ com $\check{H}_*(M)$ para concluirmos a demonstração.

Defina

$$k : \check{C} \longrightarrow \check{E} \quad l : \check{E} \longrightarrow \check{C}$$

por

$$k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -\bar{\partial}_u^s y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad l \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e - \partial_o^u h \\ g - \partial_s^u h \end{bmatrix}$$

As funções k e l são funções de cadeia. A composição $lk : \check{C} \longrightarrow \check{C}$ é a identidade e a composição $kl : \check{E} \longrightarrow \check{E}$ é cadeia-homotópica à identidade, ou seja,

$$kl - I = \begin{bmatrix} -\partial_o^u h \\ -f - \bar{\partial}_u^s g + \bar{\partial}_u^s \partial_o^u h \\ -\partial_s^u h \\ -h \end{bmatrix} = \check{e}D + D\check{e}$$

no qual

$$D \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Segue que k_* e l_* são isomorfismos mutuamente inversos entre $\check{H}(M)$ e $H(\check{E})$.

Finalmente, é necessário verificar que $j_* = \bar{j}_* k_*$ e $\bar{i}_* = k_* i_*$. A primeira das identidades é verdade porque é verdade no nível de cadeias, ou seja,

$$\bar{j}k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \bar{j} \begin{bmatrix} x \\ -\bar{\partial}_u^s y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -\bar{\partial}_u^s y \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

E a segunda porque as correspondentes funções cadeias \bar{i} e ki são cadeia-homotópicas, ou seja,

$$\begin{aligned}
 (ki - \bar{i}) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\partial_o^u y \\ \bar{\partial}_u^s x + \bar{\partial}_u^s \partial_s^u y \\ -\partial_s^u y \\ -y \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\partial_o^u y \\ \bar{\partial}_u^u y + \bar{\partial}_u^s \partial_s^u y \\ -\partial_s^u y \\ -y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{\partial}_u^s x - \bar{\partial}_u^u y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= (\check{e}\bar{D} + \bar{D}\bar{\partial}) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

em que $\bar{D} = Di$, donde segue $ki - \bar{i} = \check{e}\bar{D} + \bar{D}\bar{\partial}$. ■

Considerações Finais

Começamos destacando a importância da hipótese de compacidade sobre M . Isto nos permitiu, por exemplo, garantir a existência de linhas de fluxo do campo gradiente negativo convergindo para singularidades do campo, fundamental para a definição dos espaços modulares. Tais espaços foram responsáveis por assegurar que os operadores de bordo ∂ estavam bem definidos, já que estes consideravam a soma algébrica dos sinais associados às trajetórias em $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$. Por fim, a identidade $\partial^2 = 0$ no oportunizou definir os grupos de homologia de Morse $H_*(M, f)$, $\bar{H}_*(M, f)$, $\check{H}_*(M, f)$ e $\hat{H}_*(M, f)$, cada um em seu contexto.

Durante este trabalho, tivemos a oportunidade de passear pela topologia e análise. Por exemplo, quando provamos o *lema da deformação* assumimos a existência de uma $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ função de Morse tal que não existe valor crítico c satisfazendo $a \leq c \leq b$ e concluímos que os conjuntos $M^{a,b}$ e $M^a \times [a, b]$ possuem a mesma topologia. Percebemos também que os grupos de homologia de Morse $H_*(M, f)$, $\bar{H}_*(M, f)$, $\check{H}_*(M, f)$ e $\hat{H}_*(M, f)$ independem da escolha da métrica Riemanniana e da função de Morse em M , o que garantiu a validade dos seguintes teoremas:

Teorema 3.2: $H_k(M, f) \simeq H_k(M, \mathbb{Z}), \forall k \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.3: Os complexos $(\hat{C}_k, \hat{\partial}_k)$ e $(\check{C}_k, \check{\partial}_k)$ determinam, respectivamente, as homologias absoluta e relativa, isto é, a menos de isomorfismos temos

$$\bar{H}_*(M, f) = H_*(\partial M)$$

$$\check{H}_*(M, f) = H_*(M)$$

$$\hat{H}_*(M, f) = H_*(M, \partial M)$$

Além disso, convém observar que enquanto investigávamos uma orientação para o espaço dos fluxos $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$, lidamos na prova do *Teorema 2.3* com técnicas nas quais a hipótese de dimensão finita é desnecessária.

Podemos encontrar em [12], o conteúdo do capítulo 3 revisitado sob o contexto da Homologia de Floer. Neste ponto de vista, as provas dos lemas 3.2 e 3.3 consideram os espaços modulares como produtos fibrados e os teoremas de colagem são provados com técnicas mais sofisticadas.

Ainda a respeito dos teoremas de colagem, vemos em [9], provas da compacidade do espaço $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$ e da independência de função e métrica com técnicas cuja generalização para dimensão infinita é imediata. Em [5], o teorema de compactificação é consequência do fato que $-\nabla f$ e $-\nabla \bar{\nabla} f$ são localmente conjugados¹. Em [1], a identidade $\partial^2 = 0$ para variedades sem bordo é provada via Índice de Conley sem explorar a compacidade de $\tilde{\mathcal{M}}(\alpha, \beta)$.

¹Teorema de Grobman-Hartman

Referências Bibliográficas

- [1] SALAMON. **Morse Theory, The Conley Index and Floer Homology**. Bull. London Math. Soc., Londres, v.22, n.2, p.113-140, Nov. 1990.
- [2] MILNOR, John. **Morse Theory**. 2.ed. Princeton: Princeton University Press, 1963. 153p.
- [3] MILNOR, John; SIEBENMANN, L; SONDOW, J. **Lectures on the h-Cobordism Theorem**. Princeton: Princeton University Press, 1965. 113p
- [4] MILNOR, John; WEAVER, David W. **Topology from the Differentiable Viewpoint**. Charlottesville: University Press of Virginia, 1965. 64p.
- [5] WEBER, Joa. **The Morse-Witten Complex via Dynamical Systems**. disponível em <<http://arxiv.org/PS-cache/math/pdf/0411/0411465v2.pdf>>. Acesso em: 27 janeiro 2010.
- [6] BANYAGA, Augustin; HURTUBISE, David. **Lectures on Morse Homology**. Londres: Kluwer Academic Publishers, 2004. 325p.
- [7] LIMA, Elon Lages. **Curso de Analise**. 6.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2000. 547p. v.2.
- [8] LIMA, Elon Lages. **Variiedades Diferenciáveis**. Rio de Janeiro: IMPA, 1973. 369p.
- [9] AUSTIN, David M.; BRAAM, Peter J. **Morse-Bott theory and equivariant cohomology, The Floer memorial volume**. Basel: Birkhäuser, p.123-183. 1995.
- [10] HIRSCH, Morris W. **Differential Topology**. New York: Springer, 1976. 220p.
- [11] GUILLEMIN, V.; POLLACK, Alan. **Differential Topology**. New Jersey: Prentice-Hall, 1974. 222p.

-
- [12] KRONHEIMER, P. B.; MROWKA, T. S. **Monopoles and Three Manifolds**. New York: Cambridge University Press, 2007.
- [13] MASSEY, William S. **Algebraic Topology: An Introduction**. New York: Springer, 1967. 261p.
- [14] WARNER, Frank W. **Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups**. New York: Springer, 1983. 272p.
- [15] HUREWICZ, Witold. **Lectures on Ordinary Differential Equations**. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1958. 122p.
- [16] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Riemanniana**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- [17] KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. New York: J. Wiley, 1978. 688p.

A Teoremas de Existência e Unicidade

Fixe $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Dadas $f_1, \dots, f_n : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, considere o seguinte *sistema de equações diferenciais*:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t) \end{aligned} \tag{A.1}$$

no qual $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \Omega$ são funções desconhecidas da variável t . Escreva $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t), t \in I$ e $F(X, t) = \{f_1(X, t), f_2(X, t), \dots, f_n(X, t)\}$, suponha $F : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua tanto em X quanto em t definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Então o sistema (A.1) pode ser escrito na forma de uma equação vetorial

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t) \tag{A.2}$$

Seja $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}; t_0) \in \Omega \times I$, dada uma equação diferencial $\frac{dX}{dt} = F(X, t)$, o *problema de valor inicial* para $\frac{dX}{dt} = F(X, t)$ consiste em determinar um conjunto de funções $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \Omega$ satisfazendo (A.1) para algum intervalo I tal que $x_i(t_0) = x_{i0}$.

A.1 Condição de Lipschitz

Definição A.1: Uma função vetorial $F : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita satisfazer a **condição de Lipschitz** em X para uma constante k se

$$|F(X_1, t) - F(X_2, t)| \leq k|X_1 - X_2|$$

$\forall t \in I, \forall X_1, X_2 \in \Omega$.

Lema A.1: Uma função vetorial $F : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição de Lipschitz em X se e somente se suas componentes $f_i : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ também satisfazem, ou seja, existe k_i tal que

$$|f_i(X_1, t) - f_i(X_2, t)| \leq k_i |X_1 - X_2|$$

$\forall t \in I, \forall X_1, X_2 \in \Omega$.

A.2 Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções

Enunciaremos agora, referenciando a demonstração, os teoremas de existência e unicidades de soluções para equações diferenciais. Seja $(X_o, t_o) \in \Omega \times I$ fixado, defina a região $(n+1)$ -dimensional R tal que $|X - X_o| \leq b$ e $|t - t_o| \leq a$.

Teorema A.1(Unicidade): Seja $F : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e satisfazendo a condição de Lipschitz em X em alguma vizinhança do ponto (X_o, t_o) . Então, pode existir no máximo uma solução de

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t)$$

tal que $X(t_o) = X_o$.

Demonstração. Ver referência [15] ■

Teorema A.2(Existência): Seja $F : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e satisfazendo a condição de Lipschitz em X na região $(n+1)$ -dimensional R . Seja M um limitante superior de $|F|$ em R . Então existe uma solução $X(t)$ de (A.1) definida no intervalo

$$|t - t_o| \leq h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$$

Demonstração. Ver referência [15] ■

B Forma Local das Aplicações de Fredholm

Uma aplicação linear limitada $L : U \rightarrow V$ entre espaços de Banach¹ é Fredholm, se os subespaços vetoriais $\ker(L) \subset U$ e $\text{Coker}(L) \subset V$ são de dimensão finita. Consequentemente, os conjuntos $\text{im}(L)$ e $\ker(L)$ são fechados e admitem complementamentos topológicos de modo que valem as seguintes decomposições:

$$U = U_o \oplus F \quad , \quad V = V_o \oplus G$$

no qual $F = \ker(L)$ e $V_o = \text{Im}(L)$. Observe que $L|_{U_o} : U_o \rightarrow V_o$ é um isomorfismo.

Definição B.1: O índice de um operador de Fredholm $L : U \rightarrow V$ é dado por

$$\begin{aligned} \text{ind}(L) &= \dim(\ker(L)) - \dim(\text{coker}(L)) \\ &= \dim F - \dim G. \end{aligned} \tag{B.1}$$

É de particular interesse o caso em que $d\varphi_o$ é um operador de Fredholm, com $\varphi : U \rightarrow V$.

Definição B.2: Seja $N \subset U$ uma vizinhança de 0. uma aplicação diferenciável $\varphi : N \rightarrow V$ é denominada aplicação de Fredholm se para todo ponto $x \in N$, o mapa diferencial $d\varphi_x : U \rightarrow V$ é um operador de Fredholm.

Um fato digno de menção na teoria de Fredholm é que o índice de um operador de Fredholm é um invariante homotópico no espaço de operadores de Fredholm: $\mathcal{F}(U, V) = \{L : U \rightarrow V; L \text{ é Fredholm}\}$ com a topologia induzida pela norma. Segue disso que $\text{ind}(d\varphi_x)$ independe de $x \in N$ (desde que N seja conexa), e por isso denota-se $\text{ind}(\varphi)$.

Suponha que $\varphi : N \rightarrow V$ é uma aplicação de Fredholm tal que $d\varphi_o : U \rightarrow V$ não é sobrejetiva, isto é, $\text{coker}(d\varphi_o) \neq \emptyset$. Denote por $\varphi' : N \rightarrow V_o$ a composição de φ com a projeção sobre o primeiro fator de

¹Neste apêndice, alguns conceitos de Análise Funcional serão assumidos sem menção, indicamos a referência [17] para o leitor interessado em revisá-los.

$V = V_o \oplus G$, $V_o = \text{Im}(\varphi_o)$. Neste caso, $d\varphi'_o : U \rightarrow V_o$ é sobrejetiva. Mas então, pelo teorema da função implícita em espaços de Banach, existe um difeomorfismo $f : Z_o \rightarrow f(Z_o) \subset N$, $Z_o \subset U$ vizinhança de 0, que tal $\varphi' \circ f = d\varphi_o$. Dizemos então que φ' é equivalente à direita a $d\varphi_o$.

Temos então o seguinte:

Proposição B.1: Uma aplicação de Fredholm $\varphi : U \rightarrow L$ é localmente equivalente à direita a uma aplicação da forma

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : U_o \times F &\longrightarrow V_o \times G \\ (x, y) &\longmapsto (d\varphi_o(x), h(x, y)) \end{aligned}$$

tal que $h = \pi_G \circ \varphi$, π_G é a projeção $V \rightarrow G$ e $dh_o = 0$ (uma vez que $d\tilde{\varphi}_o = d\varphi_o$).

Corolário B.1: Seja $Z(\varphi) = \varphi^{-1}(0) \subset U$. Então, $Z(\varphi) = h_z^{-1}$, sendo o mapa $h_z : F \rightarrow G$ definido por $h_z(y) = h(0, y)$.

B.1 Orientação de Subvariedades de Nível de uma Aplicação de Fredholm

Sejam V e W espaços de Banach e $\varphi : V \rightarrow W$ uma aplicação de Fredholm. Se $c \in W$ é um valor regular da aplicação φ , diz-se que o conjunto $M_c = \varphi^{-1}(c)$ é uma subvariedade de nível da aplicação φ . Sejam U_1 e U_2 espaços vetoriais de dimensão finitas n_1 e n_2 , respectivamente, e $T : U_1 \rightarrow U_2$ uma aplicação linear não-sobrejetiva. Então, T induz uma aplicação linear $\sigma_T : \Lambda^{n_1}U_1 \rightarrow \Lambda^{n_2}U_2$. Se $n_1 = n_2$, então $\sigma_T(x) = \det(T)x$, $\forall x \in \Lambda^{n_1}U_1$. Alternativamente, podemos definir orientação sobre um espaço vetorial U de dimensão n fixando uma base para o subespaço $\Lambda^n(U)$ (isomorfo como espaço vetorial a \mathbb{R}). Se $\det(T) \neq 0$, diz-se que as orientações de U_1 e U_2 são T -compatíveis. Para fixar uma orientação em U_1 é suficiente fixar uma U_2 . Observe que $\sigma_T \in (\Lambda^{n_1}U_1)^* \otimes \Lambda^{n_2}U_2 \cong \mathbb{R}$.

Vejamos agora o caso em que tem-se uma aplicação diferenciável $f : U_1 \rightarrow U_2$. Se $c \in U_2$ é um valor regular, é possível discutir a orientabilidade da variedade diferenciável $M_c = f^{-1}(c)$ com base no que foi dito acima. Para cada $p \in U_1$, tem-se o elemento

$\sigma_{df_p} \in (\Lambda^{n_1} U_1)^* \otimes \Lambda^{n_2} U_2 \cong \mathbb{R}$. Ao definir o fibrado de linha real $\xi = (\Lambda^{n_1} U_1)^* \otimes \Lambda^{n_2} U_2 \cong \mathbb{R}$ sobre U_1 , fica claro que ξ é trivial se, e somente se, existe uma seção $s : U_1 \rightarrow \xi$ tal que $s(p) \neq 0$, para todo $p \in U_1$. Se isto ocorrer, então M_c é orientável e uma orientação é determinada por uma seção não-nula de ξ .

Se V, W são espaços de Banach e $f : V \rightarrow W$ é uma aplicação de Fredholm, como visto na seção 1, a imagem inversa, $M_c = f^{-1}(c)$, de um valor regular $c \in W$ de f admite um modelo de dimensão finita

$$h : \ker(df) \longrightarrow \operatorname{coker}(df)$$

Isto significa que $M_c = h^{-1}(0)$, com $\dim \ker(df)$ e $\dim \operatorname{coker}(df)$ finitos.

Assim, temos o seguinte:

Proposição B.2: Sejam V e W espaços de Banach e $f : V \rightarrow W$ uma aplicação de Fredholm. Sejam $n = \dim \ker(df)$ e $m = \dim \operatorname{coker}(df)$. Então, dado um valor regular $c \in W$ de f , temos que $M_c = f^{-1}(c)$ é uma variedade orientável se, e somente se, o fibrado $\xi = (\Lambda^n(\ker(df)))^* \otimes \Lambda^m(\operatorname{coker}(df))$ sobre V é trivial.

S