Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Ações parciais: sobre a associatividade do *skew* anel de grupo parcial, ação envolvente e contexto de Morita

Edson Ribeiro dos Santos
Orientadora: Prof.ª Dra. Virgínia Silva Rodrigues

Florianópolis
Fevereiro de 2010

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Ações parciais: sobre a associatividade do *skew* anel de grupo parcial, ação envolvente e contexto de Morita

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Edson Ribeiro dos Santos
Florianópolis
Fevereiro de 2010

Ações parciais: sobre a associatividade do *skew* anel de grupo parcial, ação envolvente e contexto de Morita

por

Edson Ribeiro dos Santos[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre”, Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Prof. Dr. Clóvis Caesar Gonzaga
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof.ª Dra. Virgínia Silva Rodrigues
(Orientadora - UFSC)

Prof. Dr. Antonio Paques
(Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS)

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Prof. Dr. Danilo Royer
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2010.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao nosso Senhor Jesus Cristo, para ele toda honra e glória.

Aos meus pais, que amo do fundo do meu coração. Se hoje sou o que sou é tudo pela eduação que me deram.

Agradeço à minha estimada orientadora, professora e amiga Virgínia que aceitou orientar-me com muita dedicação e cuidado. Muito obrigado por me passar o conhecimento que hoje tenho. Nunca esquecerei desses quatro anos em que você sempre me ajudou e incentivou.

Aos meus dois amigos Maicon e Monique que me ajudaram, em várias situações, durante as disciplinas da mestrado. Maicon você é um amigo e tanto sentirei falta de nossos estudinhos e de suas dúvidas pertinentes que sempre deixava o pessoal pensando, obrigado por tudo. Monique, obrigado por me ajudar inúmeras vezes nos estudos sobre assuntos envolvendo álgebra e durante o mestrado. Monique, saiba que admiro você pela pessoa que você é e pelo seu caráter, sempre que precisar de alguém pode contar com um amigo.

Agradeço ao professor Ruy Exel, por ter nos ajudado em uma dúvida fundamental para o teorema mais importante deste trabalho.

Agradeço aos professores Antonio Paques, Daniel Gonçalves e Danilo Royer por terem aceitado a participar como banca deste trabalho, apontando-me várias sugestões e críticas para o melhoramento deste trabalho em sua forma final.

À CAPES que me ajudou pela realização dessa dissertação fornecendo a bolsa de mestrado.

E por fim, agradeço a todos os colegas, professores e amigos que participaram de minha vida até hoje e ainda estão comigo.

Resumo

O conceito de ações parciais vem sendo muito utilizado na teoria de C^*-álgebras bem como em sistemas dinâmicos, veja [3]. Em 2005, Dokuchaev e Exel obtiveram resultados a respeito de ações parciais num contexto puramente algébrico onde mostraram, sob certas condições, a existência e a unicidade de uma ação envolvente, veja [2].

Nosso principal objetivo neste trabalho é, baseado em [2], mostrar a existência e a unicidade mencionadas acima. Para isso, desenvolvemos a teoria de álgebra dos multiplicadores e de ações parciais no contexto algébrico. Apresentamos alguns pré-requisitos que são de grande utilidade para o último capítulo, no qual construímos um contexto de Morita para os anéis $A *_\alpha G$ e $B *_\beta G$ e mostramos que, sob certas hipóteses, tais anéis são Morita equivalentes, em que A e B são $\mathbb{K}$-álgebras com unidade.

Abstract

The concept of partial actions has been widely used in the theory of C^*-algebras as well as in dynamical systems, see [3]. In 2005, Dokuchaev and Exel have achieved results about partial actions in a purely algebraic context which showed, under certain conditions, the existence and uniqueness of an enveloped action, see [2].

Our main goal in this work is to, based on [2], show the existence and the uniqueness mentioned above. For this, we developed the theory of multipliers algebra and partial actions on algebraic context. We present some prerequisites that are of great use to the last chapter, in which we build a Morita context for the rings $A *_\alpha G$ and $B *_\beta G$ and show that, under certain hypotheses, such rings are Morita equivalent, where A and B are $\mathbb{K}$-algebras with unit.

Sumário

Introdução

Estudos envolvendo ações parciais vêm crescendo e estão aparecendo em várias áreas da matemática, como na teoria de sistemas dinâmicos e, principalmente, na teoria de C^*-álgebras, onde mostrou ser uma poderosa ferramenta, veja ([3] e [5]). Por exemplo, Exel (1998) mostrou que dado um grupo G é possível construir, de maneira canônica, um semigrupo inverso $S(G)$ associado à G e que as ações de $S(G)$ estão em correspondência biunívoca com as ações parciais de G. Em outras palavras, Exel mostrou que G e $S(G)$ têm a mesma teoria de representação, veja [4].

O nosso principal objetivo neste trabalho é mostrarmos que dada uma ação parcial é possível, sob certas condições, garantir a existência e a unicidade de uma ação global que chamamos *envolvente*. Dessa forma, fizemos um estudo puramente algébrico sobre ações parciais, mostrando algumas propriedades envolvendo tal conceito, até chegarmos ao teorema que fornece a condição necessária e suficiente para este resultado. Finalizamos o trabalho estudando um pouco sobre contexto de Morita e construímos um tal contexto para os anéis $A *_\alpha G$ e $B *_\beta G$, em que A e B são $\mathbb{K}$-álgebras, além de mostrarmos que os mesmos são Morita equivalentes.

No primeiro capítulo, colocamos uma série de pré-requisitos para lembrar o leitor sobre algumas definições e teoremas envolvendo a teoria de módulos e produto tensorial. Sendo tais assuntos básicos, algumas demonstrações são omitidas, mas colocamos as devidas referências, caso o leitor necessite de maiores informações. Além disso, escrevemos um pouco sobre álgebra dos multiplicadores de uma $\mathbb{K}$-álgebra A, sendo que um dos resultados importantes deste assunto nos diz quando um ideal de uma $\mathbb{K}$-álgebra é (L,R)-associativo. Terminamos a mesma com uma proposição de grande utilidade para um teorema do capítulo posterior, que diz respeito à comutatividade do *skew* anel de grupo parcial.

No segundo capítulo, definimos uma ação parcial α. Como o próprio nome sugere, veremos que ações parciais generalizam a noção de ações globais. Além disso, nossa meta é definir o *skew* anel de grupo parcial que denotamos por $A *_\alpha G$ e mostrar, mediante certa hipótese, que o mesmo é uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa. O capítulo termina com um exemplo de que $A *_\alpha G$ nem sempre é associativo.

No terceiro capítulo, iniciamos com um exemplo mostrando que dada uma ação global é sempre possível construir uma ação parcial. Sendo assim, a pergunta natural que podemos nos fazer é: dada uma ação parcial, é sempre possível obtermos uma única ação global? Se for esse o caso, dizemos que a ação global é a envolvente para a ação parcial. A resposta para esta pergunta é o "coração" desta dissertação e será feita em um teorema que se encontra no final deste mesmo capítulo.

No quarto capítulo, temos por objetivo principal construir um contexto de Morita para os anéis $A *_\alpha G$ e $B *_\beta G$ e mostrar que os mesmos são Morita equivalentes. Para obtermos estes dois resultados, estudamos um pouco sobre contexto de Morita, apresentamos alguns exemplos e provamos um dos teoremas de Morita.

Neste trabalho, consideramos conhecidas as teorias de grupos, anéis, módulos e algumas noções básicas de categoria.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo, prezamos por alguns resultados que são importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Nas duas primeiras seções, que abordam temas básicos, optamos por relembrar algumas definições e resultados relevantes como o Lema da base dual - que nos dá uma condição necessária e suficiente para que um módulo seja projetivo - e algumas propriedades específicas do produto tensorial. O leitor vai constatar que os resultados destas seções são "requisitados"pelo Capítulo 4. A última seção é dedicada à álgebra dos multiplicadores, assunto este não muito conhecido pelo estudante, por isso tal seção é feita de maneira mais detalhada e obviamente, os resultados envolvendo estas álgebras são direcionados para um dos objetivos do trabalho, que é mostrar a associatividade do *skew* anel de grupo parcial, mediante certa hipótese.

Agora, fixamos algumas notações. Neste trabalho, R é um anel não necessariamente comutativo, com unidade. Dados dois R-módulos M e N, um R-homomorfismo de M em N é chamado, simplesmente, um R-homomorfismo. Denotamos por I_M o R-homomorfismo identidade de M em M. Quando M é um R-módulo à esquerda e um S-módulo à direita dizemos que M é um (R, S)-bimódulo. Lembramos que, além das estruturas de módulo à esquerda e à direita, M satisfaz a propriedade de compatibilidade de ambas estruturas, isto é, $rms = (rm)s = r(ms)$, para quaisquer $r \in R$, $s \in S$ e $m \in M$.

Dada uma família $\{M_i\}_{i \in I}$ de R-submódulos de M, denotamos por $\bigoplus_{i \in I} M_i$, a soma direta dos submódulos $M_i's$ de M. Alertamos o leitor para o fato de que ao invés de escrevermos um elemento qualquer $m \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ como $m = \sum_{k=1}^{n} m_{i_k}$, com $m_{i_k} \in M_{i_k}$, escrevemos simplesmente, $m = \sum_{i \in I} m_i$, com $m_i \in M_i$, mas onde apenas um número finito de $m_i's$ são não-nulos. É fato que tal representação é única para cada elemento. Para o caso particular em que $M_i = M$, $\forall i \in I$, escrevemos $M^{(I)}$ para denotar $\bigoplus_{i \in I} M_i$, a soma direta do R-módulo M.

Este capítulo tem como base as referências [2], [8] e [14].

1.1 Módulos projetivos

Como foi dito acima, queremos mostrar o Lema da base dual que será utilizado somente no Capítulo 4. Para isso, faremos uma série de definições e resultados. Trabalhamos com R-módulos à esquerda e portanto, na maioria das vezes, escrevemos apenas R-módulos. Além disso, os resultados aqui obtidos valem também para R-módulos à direita.

Uma sequência finita de R-módulos $M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n$ é dita *exata*, se é exata em cada M_i, para $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, isto é, $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$, para $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, em que $f_i : M_{i-1} \to M_i$ são homomorfismos de R-módulos, para $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Uma sequência exata da forma $0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \xrightarrow{g_0} 0$ é dita *uma sequência exata curta*. Obviamente, f_0 e g_0 são os homomorfismos nulos e, pela definição de exatidão, notamos que f é um R-homomorfismo injetor (ou monomorfismo) e g é um R-homomorfismo sobrejetor (ou epimorfismo).

Definição 1.1 *Sejam M, N e P R-módulos. Dizemos que a sequência exata curta $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ cinde, se $Im(f)$ é um somando direto de N.*

Caso necessário, a demonstração dos fatos abaixo encontra-se em ([8], p.177).

Proposição 1.2 *Seja* $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g}, P \to 0$ *uma sequência exata curta de* R*-módulos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *a sequência cinde;*

ii) *existe um* R*-homomorfismo* $\Psi : N \to M$ *tal que* $\Psi \circ f = I_M$*;*

iii) *existe um* R*-homomorfismo* $\varphi : P \to N$ *tal que* $g \circ \varphi = I_P$*.*

Corolário 1.3 *Se a sequência exata curta* $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ *cinde então* $N \simeq M \oplus P$*.*

Definição 1.4 *Seja* M *um* R*-módulo. O subconjunto* $\{m_\lambda\}_{\lambda \in I}$ *de* M *é dito uma base de* M *se qualquer elemento* $m \in M$ *escreve-se unicamente como* $m = \sum_{k=1}^{n} r_{\lambda_k} m_{\lambda_k}$ *com* $r_{\lambda_k} \in R$*, para todo* $k \in \{1, 2 \cdots, n\}$*.*

Se M possui uma base então M é dito um *R-módulo livre*. Assim, como na soma direta, escrevemos um elemento qualquer m de um módulo livre M com base $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ simplesmente como $m = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda m_\lambda$, mas apenas um número finito de $r_\lambda' s$ são não-nulos.

Exemplo 1.5 Seja Λ um conjunto não vazio. Então $R^{(\Lambda)}$ denota o R-módulo livre com base $\beta = \{e_k\}_{k \in \Lambda}$ (base canônica), em que $e_k = (r_i)_{i \in \Lambda}$, onde $r_k = 1$ e $r_i = 0$, para todo $i \neq k$.

Proposição 1.6 *Seja* M *um* R*-módulo livre com base* X*. Para qualquer* R*-módulo* N*, dada uma função* $f : X \to N$ *é possível estendê-la a um* R*-homomorfismo* $\overline{f} : M \to N$*, isto é, construir um* R*-homomorfismo* $\overline{f} : M \to N$ *tal que* $\overline{f}$ *restrito à* X *coincida com* f*. Além disso,* $\overline{f}$ *é única.*

Demonstração: Seja $X = \{x_i\}_{i \in \Lambda}$ uma base de M. Então, dado $m \in M$, temos que $m = \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i x_i$ com $\alpha_i \in R$, para $i \in \Lambda$. Definimos $\overline{f} : M \to N$ por $\overline{f}(m) = \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i f(x_i)$.

Mostremos que $\overline{f}$ é um homomorfismo de R-módulos. Sejam $m_1, m_2 \in M$ e $r \in R$. Então $m_1 = \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i x_i$ e $m_2 = \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i' x_i$ com $\alpha_i, \alpha_i' \in R$, para $i \in \Lambda$. Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{f}(m_1+m_2) &= \overline{f}(\sum_{i\in\Lambda}(\alpha_i+\alpha_i')x_i) = \sum_{i\in\Lambda}(\alpha_i+\alpha_i')f(x_i) \\
&= \sum_{i\in\Lambda}\alpha_i f(x_i) + \sum_{i\in\Lambda}\alpha_i' f(x_i) = \overline{f}(m_1)+\overline{f}(m_2) \text{ e} \\
\overline{f}(rm_1) &= \overline{f}(r\sum_{i\in\Lambda}\alpha_i x_i) = \overline{f}(\sum_{i\in\Lambda}(r\alpha_i)x_i) = \sum_{i\in\Lambda}(r\alpha_i)f(x_i) \\
&= r\sum_{i\in\Lambda}\alpha_i f(x_i) = r\overline{f}(m_1).
\end{aligned}$$

Obviamente, $\overline{f}(x_i) = f(x_i)$, para todo $i \in \Lambda$. Além disso, suponhamos que exista $f' : M \to N$ um R-homomorfismo tal que $f'|_X = f$. Então, para todo $m \in M$, temos

$$f'(m) = f'(\textstyle\sum_{i\in\Lambda}\alpha_i x_i) = \sum_{i\in\Lambda}\alpha_i f'(x_i) = \sum_{i\in\Lambda}\alpha_i f(x_i) = \overline{f}(m).$$

Portanto, $\overline{f}$ é única. ■

Corolário 1.7 *Se M é um R-módulo livre com base $X = \{x_i\}_{i\in\Lambda}$ então M é isomorfo a $R^{(\Lambda)}$.*

Demonstração: Basta definirmos $f : X \to R^{(\Lambda)}$ por $f(x_i) = e_i$, em que $\beta = \{e_i\}_{i\in\Lambda}$ é a base canônica de $R^{(\Lambda)}$ e usarmos a proposição anterior. ■

Mostramos agora mais dois corolários da proposição acima. Um deles é o isomorfismo de R-módulos entre $R^{(\Lambda)}$ e $A(R) = \{f : \Lambda \to R : f(\lambda) \neq 0$ apenas para um número finito de $\lambda's$ em $\Lambda\}$. Embora este resultado seja óbvio, o mesmo é usado na prova do Lema da base dual e portanto, vamos mostrá-lo.

Não é difícil ver que $A(R)$ é um R-módulo à esquerda livre com as operações definidas por $(f+g)(\lambda) = f(\lambda)+g(\lambda)$ e $(rf)(\lambda) = r(f(\lambda))$, para quaisquer $f, g \in A(R)$, $r \in R$ e $\lambda \in \Lambda$. A base canônica de $A(R)$ é dada por $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tal que $f_\lambda(k) = \delta_{\lambda,k}$ (delta de Kronecker).

Corolário 1.8 *Seja R um anel. Então $A(R)$ e $R^{(\Lambda)}$ são R-módulos isomorfos.*

Demonstração: Sejam $\gamma : \Lambda \to R^{(\Lambda)}$ e $\alpha : \Lambda \to A(R)$ funções definidas por $\gamma(\lambda) = e_\lambda$ e $\alpha(\lambda) = f_\lambda$, em que $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ são as bases canônicas de $R^{(\Lambda)}$ e $A(R)$, respectivamente. Como $R^{(\Lambda)}$ é livre, pela Proposição 1.6, existe um único R-homomorfismo $g : R^{(\Lambda)} \to A(R)$ tal que $g \circ \gamma = \alpha$.

Mostremos que g é bijetora. Seja $x \in Ker(g)$. Então $x = \sum_{i\in\Lambda} a_i e_i$ com $a_i \in R$, para $i \in \Lambda$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= g(x) = g(\sum_{i\in\Lambda} a_i e_i) = \sum_{i\in\Lambda} a_i g(e_i) = \sum_{i\in\Lambda} a_i g(\gamma(i)) = \sum_{i\in\Lambda} a_i (g\circ\gamma)(i) \\ &= \sum_{i\in\Lambda} a_i \alpha(i) = \sum_{i\in\Lambda} a_i f_i. \end{aligned}$$

Como $\{f_i\}_{i\in\Lambda}$ é base de $A(R)$, segue que $a_i = 0$, para $i \in \Lambda$. Logo, $x = 0$ e portanto, g é injetora.

Seja $h = \sum_{i\in\Lambda} r_i f_i \in A(R)$ com $r_i \in R$, para $i \in \Lambda$. Claramente, $x = \sum_{i\in\Lambda} r_i e_i \in R^{(\Lambda)}$ e $g(x) = g(\sum_{i\in\Lambda} r_i e_i) = \sum_{i\in\Lambda} r_i f_i = h$. Portanto, g é sobrejetora. ■

Corolário 1.9 *Todo módulo é imagem homomórfica de um módulo livre.*

Demonstração: Seja M um R-módulo e $X = \{x_i\}_{i\in\Lambda}$ uma família de geradores de M. Definimos, para todo $i \in \Lambda$, $f : \beta \to M$ por $f(e_i) = x_i$, lembrando que $\beta = \{e_i\}_{i\in\Lambda}$ - base canônica de $R^{(\Lambda)}$. Logo, pela Proposição 1.6, existe um único R-homomorfismo $\overline{f} : R^{(\Lambda)} \to M$ tal que $\overline{f}|_\beta = f$ e claramente $\overline{f}$ é sobrejetora. ■

Definição 1.10 *Sejam U e M dois R-módulos. O módulo M é dito U-projetivo se para qualquer R-módulo N e quaisquer R-homomorfismo $f : M \to N$ e R-epimorfismo $\pi : U \to N$, existe um R-homomorfismo $g : M \to U$ tal que $\pi \circ g = f$. O módulo M é dito projetivo se M é U-projetivo para todo R-módulo U. O diagrama abaixo ilustra esta situação*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ U \arrow[r, "\pi"'] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Proposição 1.11 *Todo módulo livre é projetivo.*

Demonstração: Sejam M um R-módulo livre, U e N dois R-módulos, $f : M \to N$ um R-homomorfismo e $\pi : U \to N$ um R-epimorfismo. Mostremos que existe um R-homomorfismo $g : M \to U$ tal que $\pi \circ g = f$. Vejamos o diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ U \arrow[r, "\pi"'] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Sejam $E = \{m_i\}_{i \in I}$ uma base de M e, para todo $i \in I$, $f(m_i) = y_i \in N$. Como π é um epimorfismo existe $u_i \in U$ tal que $\pi(u_i) = y_i$, para todo $i \in I$. Assim, podemos definir $g' : E \to U$ por $g'(m_i) = u_i$, para todo $i \in I$. Pela Proposição 1.6, existe um único R-homomorfismo $g : M \to U$ definido por $g(m) = \sum_{i \in I} \lambda_i g'(m_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$, para cada $m = \sum_{i \in I} \lambda_i m_i \in M$ e daí,

$$\begin{aligned} (\pi \circ g)(m) &= \pi(g(m)) = \pi(\sum_{i \in I} \lambda_i u_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i \pi(u_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i y_i \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i f(m_i) = f(\sum_{i \in I} \lambda_i m_i) = f(m) \end{aligned}$$

para todo $m \in M$. Portanto, M é projetivo. ■

Proposição 1.12 *Seja M um R-módulo. Então as condições abaixo são equivalentes:*

i) *M é projetivo;*

ii) *M é isomorfo a um somando direto de todo o módulo do qual ele é uma imagem homomórfica;*

iii) *M é isomorfo a um somando direto de um módulo livre.*

Demonstração: i) $\Rightarrow$ ii) Seja N um R-módulo tal que $g : N \to M$ seja um R-epimorfismo. Consideremos a identidade $I_M : M \to M$. Como M é projetivo existe $\varphi : M \to N$, tal que $g \circ \varphi = I_M$. Assim, pela Proposição 1.2, a sequência exata curta abaixo cinde e, pelo Corolário 1.3, $N = Ker(g) \oplus Im(\varphi)$, porém, $M \simeq N/Ker(g) \simeq Im(\varphi)$ e isso nos diz que M é isomorfo a um somando direto de N.

$$\begin{tikzcd}
 & & & M \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] \arrow[d, "I_M"] & \\
0 \arrow[r] & Ker(g) \arrow[r, hook, "i"] & N \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Pelo Corolário 1.9, existe um módulo livre L e um R-epimorfismo $\varphi : L \to M$. Por ii), M é isomorfo a um somando direto de L.

iii) $\Rightarrow$ i) Para facilitar a escrita, consideramos M um somando direto de um módulo livre. Seja L um módulo livre tal que $L = M \oplus N$, para algum submódulo N de L. Sejam P e S dois R-módulos, $f : P \to S$ um R-epimorfismo e $g : M \to S$ um R-homomorfismo. Mostremos que existe $\varphi : M \to P$ tal que $f \circ \varphi = g$.

De fato, como $L = M \oplus N$, então cada elemento $l \in L$ é escrito de forma única como $l = m + n$, em que $m \in M$ e $n \in N$ e assim, definimos $g' : L \to S$ por $g'(l) = g'(m + n) = g(m)$. Mostremos que g' é um homomorfismo de R-módulos. Sejam $l_1, l_2 \in L$ e $r \in R$. Então $l_1 = m_1 + n_1$ e $l_2 = m_2 + n_2$. Logo,

$$\begin{aligned}
g'(l_1 + l_2) &= g'((m_1 + n_1) + (m_2 + n_2)) = g'((m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)) \\
&= g(m_1 + m_2) = g(m_1) + g(m_2) \\
&= g'(m_1 + n_1) + g'(m_2 + n_2) = g'(l_1) + g'(l_2) \text{ e}
\end{aligned}$$

$$g'(rl_1) = g'(r(m_1 + n_1)) = g'(rm_1 + rn_1) = g(rm_1) = rg(m_1) = rg'(l_1).$$

Como L é livre segue, da Proposição 1.11, que L é projetivo. Daí existe um R-homomorfismo $\overline{g'} : L \to P$ tal que $f \circ \overline{g'} = g'$, olhemos o diagrama abaixo que ilustra esta situação

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[d, dashed, "\overline{g}'"'] \arrow[dr, "g'"] & M \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d, "g"] & \\
P \arrow[r, "f"'] & S \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
$$

Tomando $\varphi = \overline{g'} \circ i$, i é a inclusão canônica, temos que $(f \circ \varphi)(m) = (f \circ \overline{g'} \circ i)(m) = (g' \circ i)(m) = g'(m) = g(m)$, para todo $m \in M$. Logo, M é projetivo. ■

Definição 1.13 *Sejam P um R-módulo, $\{p_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq P$ e $\{g_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq P^* = \{f : P \to R : f$ é R-homomorfismo $\}$. Dizemos que a família $\{p_i, g_i\}_{i\in\Lambda}$ é uma base dual para P se as seguintes condições são satisfeitas:*

i) *para todo $p \in P$, $g_i(p) \neq 0$ para uma quantidade finita de $i's$ em Λ;*

ii) *para todo $p \in P$, temos que $p = \sum_{i\in I} g_i(p)p_i$.*

O fato de um módulo possuir uma base dual nos garante que o mesmo seja projetivo e reciprocamente. Enunciamos e provamos agora o Lema da base dual, o qual prova este fato.

Lema 1.14 *(Lema da base dual) Seja P um R-módulo. Então P é projetivo se, e somente se, existem $\{p_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq P$ e $\{g_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq P^*$ tais que a família $\{p_i, g_i\}_{i\in\Lambda}$ é uma base dual para P.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja P um R-módulo projetivo. Então, pela Proposição 1.12, P é isomorfo a um somando direto de um módulo livre e, pelo Corolário 1.7, podemos considerar P isomorfo a um somando direto de $R^{(\Lambda)}$. Logo, a sequência exata curta $0 \to P \xrightarrow{\varphi} R^{(\Lambda)} \to R^{(\Lambda)}/Im(\varphi) \to 0$ cinde e, pela Proposição 1.2, existe um homomorfismo de R-módulos $\Psi : R^{(\Lambda)} \to P$ tal que $\Psi \circ \varphi = I_P$.

Para cada $i \in \Lambda$, consideramos o R-homomorfismo $\psi_i : R^{(\Lambda)} \to R$ dada por $\psi_i(f) = f(i)$, onde estamos enxergando $R^{(\Lambda)}$ como sendo o R-módulo $A(R)$, veja Corolário 1.8.

Além disso, dados $g \in R^{(\Lambda)}$ e $j \in \Lambda$, temos

$$g(j) = \psi_j(g) \overset{(*)}{=} \sum_{i\in\Lambda} \psi_i(g) f_i(j) = (\sum_{i\in\Lambda} \psi_i(g) f_i)(j)$$

a igualdade $(*)$ vem do fato de que $f_k(l) = \delta_{k,l}$, isto é, $\delta_{k,l} = 0$ se $l \neq k$ e 1 caso contrário. Logo, $g = \sum_{i\in\Lambda} \psi_i(g) f_i$.

Portanto, $\{f_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq R^{(\Lambda)}$ e $\{\psi_i\}_{i\in\Lambda} \subseteq (R^{(\Lambda)})^*$ satisfazem as condições i) e ii) da definição anterior e daí, $\{f_i, \psi_i\}_{i\in\Lambda}$ é uma base dual para $R^{(\Lambda)}$.

Para cada $i \in \Lambda$, sejam $p_i = \Psi(f_i) \in P$ e $g_i = \psi_i \circ \varphi \in P^*$. Então, para todo $p \in P$, $g_i(p) = (\psi_i \circ \varphi)(p) = \psi_i(\varphi(p)) = (\varphi(p))(i) \neq 0$, para um número finito de $i's$ em Λ e

$$\sum_{i\in\Lambda} g_i(p) p_i = \sum_{i\in\Lambda} \psi_i(\varphi(p)) \Psi(f_i) = \Psi(\sum_{i\in\Lambda} \psi_i(\varphi(p)) f_i) \overset{(*)}{=} (\psi \circ \varphi)(p) = p,$$

para todo $p \in P$, a igualdade $(*)$ segue do fato de que $\{f_i, \psi_i\}_{i\in\Lambda}$ é uma base dual para $R^{(\Lambda)}$. Portanto, $\{p_i, g_i\}_{i\in\Lambda}$ é uma base dual para P.

$(\Leftarrow)$ Sejam P um R-módulo e $\{p_i, g_i\}_{i\in\Lambda}$ uma base dual para P. Queremos mostrar que P é projetivo. Definimos $\psi : R^{(\Lambda)} \to P$ por $\psi(f) = \sum_{i\in\Lambda} f(i) p_i$ e

$$\begin{array}{rccccl} \varphi : & P & \to & R^{(\Lambda)} & & \\ & p & \mapsto & \varphi(p) : & \Lambda & \to & R \\ & & & & i & \mapsto & (\varphi(p))(i) = g_i(p). \end{array}$$

Mostremos que φ e ψ são R-homomorfismos. De fato, sejam $p, q \in P$, $f, g \in R^{(\Lambda)}$ e $r \in R$. Então, para todo $i \in \Lambda$, temos que

$$\begin{aligned} (\varphi(p+q))(i) &= g_i(p+q) = g_i(p) + g_i(q) = \varphi(p)(i) + \varphi(q)(i) \\ &= (\varphi(p) + \varphi(q))(i), \end{aligned}$$

$$(\varphi(rp))(i) = g_i(rp) = r g_i(p) = r(\varphi(p))(i) = (r\varphi(p))(i),$$

$$\begin{aligned} \psi(f+g) &= \sum_{i\in\Lambda} (f+g)(i) p_i = \sum_{i\in\Lambda} (f(i) + g(i)) p_i = \sum_{i\in\Lambda} f(i) p_i + g(i) p_i \\ &= \psi(f) + \psi(g) \text{ e} \end{aligned}$$

$$\psi(rf) = \sum_{i\in\Lambda} (rf)(i) p_i = \sum_{i\in\Lambda} r(f(i)) p_i = r \sum_{i\in\Lambda} f(i) p_i = r\psi(f).$$

Como $(\psi \circ \varphi)(p) = \psi(\varphi(p)) = \sum_{i\in\Lambda}(\varphi(p))(i)p_i = \sum_{i\in\Lambda} g_i(p)p_i = p$, para todo $p \in P$, isto é, $\psi \circ \varphi = I_P$ e portanto, φ é injetora. Assim, pela Proposição 1.2, a sequência $0 \to P \overset{\varphi}{\to} R^{(\Lambda)} \to R^{(\Lambda)}/Im(\varphi) \to 0$ cinde e, pelo Corolário 1.3, P é um somando direto de um módulo livre. Logo, pela Proposição 1.12, P é projetivo. ■

1.2 Produto tensorial

Esta seção tem por principal objetivo relembrar alguns conceitos envolvendo produto tensorial. Lembramos que todo grupo pode ser visto como um $\mathbb{Z}$-módulo e, desta forma, continuamos mergulhados em teoria de módulos. Tendo em mente este fato, um grupo abeliano livre é um $\mathbb{Z}$-módulo livre e portanto, vale a Proposição 1.6 para o caso em que $R = \mathbb{Z}$. Posteriormente, definimos uma função R-balanceada, em que R é um anel não necessariamente comutativo, funções estas necessárias para que possamos demonstrar a existência e a unicidade do produto tensorial de dois módulos. Esta seção é básica para o Capítulo 4, onde estudamos contexto de Morita. Todos os resultados e definições colocados nesta seção podem ser encontrados em [8].

A seguinte definição encontra-se em ([8], p.207).

Definição 1.15 *Sejam M um R-módulo à direita, N um R-módulo à esquerda e G um grupo abeliano. Dizemos que $f : M \times N \to G$ é uma função R-balanceada se as seguintes propriedades são satisfeitas para todo $r \in R$ e quaisquer $m, m' \in M$ e $n, n' \in N$:*

i) $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$;

ii) $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$;

iii) $f(mr, n) = f(m, rn)$.

Para a definição a seguir, dados M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda, consideramos a soma direta de uma família de $\mathbb{Z}$-módulos $\{\mathbb{Z}_{(m,n)}\}_{(m,n)\in M\times N}$ com $\mathbb{Z}_{(m,n)} = \mathbb{Z}$, assim $F = \bigoplus_{M\times N} \mathbb{Z}_{(m,n)} = \mathbb{Z}^{(M\times N)}$ é um grupo abeliano livre com base canônica $\{f_{(m,n)}\}_{(m,n)\in M\times N}$, em que cada

$f_{(m,n)} : M \times N \to \mathbb{Z}$ é dada por $f_{(m,n)}(x,y) = \delta_{(m,n),(x,y)}$.

Denotando cada elemento da base canônica $f_{(m,n)}$ por (m,n), vamos "enxergar" $M \times N$ em F e assim, um elemento $x \in F$ é da forma $x = \sum_{i=1}^{k} z_i(x_i, y_i)$ com $z_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in M$ e $y_i \in N$.

Definição 1.16 *Sejam M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. Consideremos F o grupo abeliano sobre o conjunto $M \times N$, como acima, e K um subgrupo de F gerado por elementos da forma:*

i) $(m + m', n) - (m, n) - (m', n)$;

ii) $(m, n + n') - (m, n) - (m, n')$;

iii) $(mr, n) - (m, rn)$, *em que* $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ *e* $r \in R$.

O grupo quociente de F por K, denotado por $F/K = M \otimes_R N$, é chamado produto tensorial de M e N.

Sendo $M \otimes_R N$ um quociente, representamos por $m \otimes n$ a classe do elemento $(m,n) + K$. Seguem algumas propriedades básicas do produto tensorial.

Observação 1.17 i) Um elemento $\overline{z} \in M \otimes_R N$ é da forma $\overline{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i(x_i \otimes y_i)$ com $x_i \in M$, $y_i \in N$ e $z_i \in \mathbb{Z}$. Isto é claro, uma vez que um elemento $z \in F$ é da forma $z = \sum_{i=1}^{n} z_i(x_i, y_i)$ com $z_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in M$ e $y_i \in N$ e agora basta considerarmos a congruência módulo K.

Esclarecemos ao leitor que, embora um elemento de $M \otimes_R N$ seja escrito como $\sum_{i=1}^{n}(x_i \otimes y_i)$ com $x_i \in M$, $y_i \in N$, para facilitar as contas feitas no Capítulo 4, trabalhamos com elementos da forma $x \otimes y$ com $x \in M$ e $y \in N$.

ii) Devido à definição de K acima, temos que $(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$, $m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'$ e $mr \otimes n = m \otimes rn$, para todo $r \in R$ e quaisquer $m, m' \in M$ e $n, n' \in N$.

iii) $M \otimes_R N$ é um grupo abeliano, pois é o quociente de um grupo abeliano.

É fácil ver que a função $\iota : M \times N \to M \otimes N$ dada por $\iota((m,n)) = m \otimes n$ é R-balanceada e a chamamos *balanceada canônica.*

Teorema 1.18 *Sejam M um R-módulo à direita, N um R-módulo à esquerda e G um grupo abeliano. Se $g : M \times N \to G$ é uma função R-balanceada, então existe um único homomorfismo de grupos $\overline{g} : M \otimes_R N \to G$ tal que $\overline{g} \circ \iota = g$, em que ι é a balanceada canônica. Além disso, $M \otimes_R N$ é único, a menos de isomorfismo, com essa propriedade.*

Demonstração: Sejam F o grupo abeliano livre sobre o conjunto $M \times N$, K o subgrupo de F gerado por elementos conforme visto na Definição 1.16 e a inclusão $i : M \times N \to F$. Então, pelo Teorema **??** iii), existe um único homomorfismo de grupos $g_1 : F \to G$ tal que $g_1|_{M \times N} = g$. Vejamos o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "g"'] & F \arrow[dl, "g_1"] \\ G. & \end{tikzcd}$$

Calculando g_1 nos geradores de K, temos, para quaisquer $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $r \in R$, que

$$g_1((m, n+n') - (m, n) - (m, n')) = g_1(m, n+n') - g_1(m, n) - g_1(m, n') =$$

$$g(m, n+n') - g(m, n) - g(m, n') \overset{(*)}{=} g(m, n) + g(m, n') - g(m, n) - g(m, n')$$

$= 0$

Analogamente, $g_1((m + m', n) - (m, n) - (m', n)) = 0$ e $g_1((mr, n) - (m, rn)) = 0$. A igualdade $(*)$ segue do fato de que g é R-balanceada. Portanto, que $K \subset Ker(g_1)$ e desta maneira, podemos definir a função $\overline{g} : F/K \to G$, vejamos o diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g_1"'] & F/K \arrow[dl, "\overline{g}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

por $\overline{g}(m \otimes n) = (\overline{g} \circ \pi)(m, n) = g_1(m, n)$, em que π é projeção canônica de um grupo em seu grupo quociente. Claramente, $\overline{g}$ é um homomorfismo de grupos e sendo $F/K = M \otimes_R N$ temos que $\overline{g} : M \otimes_R N \to G$. Além disso, para todo $(m, n) \in M \times N$, temos

$$(\overline{g} \circ \iota)(m, n) = \overline{g}(m \otimes n) = g_1(m, n) = g(m, n).$$

Daí, $\overline{g} \circ \iota = g$. Suponhamos que exista $h : M \otimes_R N \to G$ tal que $h \circ \iota = g$. Mostremos que $h = \overline{g}$. De fato, para quaisquer $m \in M$ e $n \in N$, temos

$$h(m \otimes n) = (h \circ \iota)(m, n) = g(m, n) = (\overline{g} \circ \iota)(m, n) = \overline{g}(m \otimes n).$$

Mostremos que $M \otimes_R N$ é único a menos de isomorfismo. De fato, suponhamos que exista um grupo abeliano D e uma função R-balanceada $f : M \times N \to D$ tal que para qualquer função R-balanceada $g : M \times N \to G$, em que G é um grupo abeliano qualquer, exista um único homomorfismo de grupos $\overline{f} : D \to G$ com $\overline{f} \circ f = g$.

Assim, existe um único homomorfismo de grupos $h : D \to M \otimes_R N$ tal que $h \circ f = \iota$ e também um único homomorfismo de grupos $h' : M \otimes_R N \to D$ tal que $h' \circ \iota = f$.

Mas, $f = h' \circ \iota = h' \circ (h \circ f) = (h' \circ h) \circ f$ e $\iota = h \circ f = h \circ (h' \circ \iota) = (h \circ h') \circ \iota$ e tanto I_D quanto $I_{M \otimes_R N}$ são homomorfismos de grupos tais que $I_D \circ f = f$ e que $I_{M \otimes_R N} \circ \iota = \iota$. Pela unicidade dos homomorfismos, obrigatoriamente $h' \circ h = I_D$ e $h \circ h' = I_{M \otimes_R N}$, ou seja, $M \otimes_R N$ e D são grupos isomorfos. ■

Observação 1.19 i) Sejam R e S anéis, M um R-módulo à direita, N um (R, S)-bimódulo e P um S-módulo à esquerda. Então $M \otimes_R N$ é um S-módulo à direita e $N \otimes_S P$ é um R-módulo à esquerda com as ações dadas por $(m \otimes n)s = m \otimes ns$ e $r(n \otimes x) = rn \otimes x$, respectivamente.

ii) Seja $f : M \to M'$ um homomorfismo de (S, R)-bimódulos e $g : N \to N'$ um homomorfismo de R-módulos à esquerda. Então a aplicação definida por $f \otimes g : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ é um homomorfismo de S-módulos à esquerda.

iii) Sejam R um anel, M um R-módulo à esquerda e N um R-módulo à direita. Então $\varphi : R \otimes_R M \to M$ e $\varphi' : N \otimes_R R \to N$ dados por $\varphi(r \otimes m) = rm$ e $\varphi'(n \otimes r) = nr$ são isomorfismos de R-módulos à esquerda e à direita, respectivamente.

O motivo de termos colocado estas observações acima é que estas são usadas naturalmente no Capítulo 4 e o leitor, se necessário, pode remeter-se diretamente a elas aqui. Os próximos exemplos servem para ilustrar alguns isormorfismos envolvendo produto tensorial e são encontrados em ([8] p.216,217).

Exemplo 1.20 *$\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$ e $\mathbb{Z}_c$ são $\mathbb{Z}$-módulos isomorfos, em que $c = MDC(m, n)$.*

Exemplo 1.21 *Sejam R um anel comutativo, I e J ideais de R. Então $R/I \otimes_R R/J$ e $R/(I + J)$ são R-módulos isomorfos.*

Teorema 1.22 *Sejam R e S anéis, M um R-módulo à direita, N um (R, S)-bimódulo e P um S-módulo à esquerda. Então $(M \otimes_R N) \otimes_S P$ e $M \otimes_R (N \otimes_S P)$ são grupos abelianos isomorfos, cujo isomorfismo é dado por*

$$(m \otimes n) \otimes x \mapsto m \otimes (n \otimes x), \text{ para } m \in M, n \in N \text{ e } x \in P.$$

1.3 Álgebra dos multiplicadores

Iniciamos esta seção definindo uma $\mathbb{K}$-álgebra, em que $\mathbb{K}$ é um anel comutativo com unidade. Apresentamos algumas propriedades e resultados envolvendo uma $\mathbb{K}$-álgebra particular, chamada *álgebra dos multiplicadores*. A referência usada aqui para tal assunto é [6]. Um dos principais resultados desta seção nos diz quando um ideal de uma $\mathbb{K}$-álgebra é (L,R)-associativo.

Terminamos a mesma com uma proposição de grande utilidade para o Teorema 2.7, o qual diz respeito à comutatividade do *skew* anel de grupo parcial.

Definição 1.23 *Seja $\mathbb{K}$ um anel comutativo. Uma $\mathbb{K}$-álgebra A é um anel tal que A é um $\mathbb{K}$-módulo à esquerda (e à direita) e $k(ab) = (ka)b = a(kb)$ para quaisquer $k \in \mathbb{K}$ e $a, b \in A$.*

Caso o anel $\mathbb{K}$ possua unidade, a $\mathbb{K}$-álgebra A é um $\mathbb{K}$-módulo unitário. Um subanel B de A é dito uma $\mathbb{K}$-*subálgebra* de A se B é uma

$\mathbb{K}$-álgebra. Lembramos que um *homomorfismo de* $\mathbb{K}$*-álgebras* $f : A \to B$ é um homomorfismo de anéis e de $\mathbb{K}$-módulos tal que $f(1_A) = 1_B$, se A e B possuem unidade.

Para a maior parte dos resultados mostrados nesta seção, a $\mathbb{K}$-álgebra A não possui unidade e quando necessária a unidade, somos explícitos no(s) enunciado(s).

Observação 1.24 Sejam A uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade e I um ideal de A. Então I é uma $\mathbb{K}$-subálgebra de A. De fato, I é claramente um subanel de A e notemos que $kx = k(1_A x) = (k1_A)x \in I$, para quaisquer $k \in \mathbb{K}$ e $x \in I$. Facilmente, verificamos as propriedades para que I seja um $\mathbb{K}$-módulo e que $k(ab) = (ka)b = a(kb)$ para quaisquer $k \in \mathbb{K}$ e $a, b \in I$, pois as mesmas são herdadas de A.

Dado $x \in A$, consideramos as multiplicações à esquerda e à direita de I por x, $L_x : I \to I$ e $R_x : I \to I$ definidas por $L_x(a) = xa$ e $R_x(a) = ax$, para todo $a \in I$. Claramente, L_x e R_x são $\mathbb{K}$-homomorfismos que satisfazem $L_x(ab) = L_x(a)b$, $R_x(ab) = aR_x(b)$ e $R_x(a)b = aL_x(b)$, para quaisquer $a, b \in I$. As três igualdades acima seguem diretamente da associatividade da $\mathbb{K}$-álgebra A.

Definição 1.25 *A álgebra dos multiplicadores de uma* $\mathbb{K}$*-álgebra* A *é o conjunto dos pares ordenados*

$$M(A) = \{(L, R) : L, R \text{ são } \mathbb{K}\text{-homomorfismos de } A\},$$

que satisfazem às propriedades $L(ab) = L(a)b$, $R(ab) = aR(b)$ *e* $R(a)b = aL(b)$, *para quaisquer* $a, b \in A$. *As operações em* $M(A)$ *são dadas abaixo:*

i) $(L, R) + (L', R') = (L + L', R + R')$;

ii) $\alpha(L, R) = (\alpha L, \alpha R)$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$;

iii) $(L, R)(L', R') = (L \circ L', R' \circ R)$.

Proposição 1.26 $M(A)$ *é uma* $\mathbb{K}$*-álgebra com unidade* $1_{M(A)} = (I_A, I_A)$, I_A *é identidade em* A.

Demonstração: A associatividade é clara, uma vez que a composição de funções é associativa. Para garantirmos que $M(A)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra, é suficiente mostrarmos as seguintes propriedades. Para quaisquer $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}(k_1k_2)[(L,R)] &= ((k_1k_2)L,(k_1k_2)R) \overset{(*)}{=} (k_1(k_2L),k_1(k_2R)) \\ &= k_1(k_2L,k_2R) = k_1[k_2(L,R)] \text{ e também}\end{aligned}$$

$$k_1[(L,R)(L',R')] = [k_1(L,R)](L',R') = (L,R)[k_1(L',R')].$$

De fato,

$$\begin{aligned}k_1[(L,R)(L',R')] &= k_1(L\circ L', R'\circ R) = (k_1(L\circ L'), k_1(R'\circ R)) \\ &\overset{(**)}{=} ((k_1L)\circ L', R'\circ(k_1R)) = (k_1L,k_1R)(L',R') \\ &= [k_1(L,R)](L',R') \text{ e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_1[(L,R)(L',R')] &= k_1(L\circ L', R'\circ R) \overset{(***)}{=} (L\circ(k_1L'),(k_1R')\circ R) \\ &= (L,R)(k_1L',k_1R') = (L,R)[k_1(L',R')],\end{aligned}$$

em que as igualdades em $(*)$, $(**)$ e $(***)$ são devidas aos fatos de que L, L', R, e R' são $\mathbb{K}$-homomorfismos. É claro que $(I_A,I_A)(L,R) = (L,R)$ e $(L,R)(I_A,I_A) = (L,R)$. Portanto, $M(A)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade. ∎

A fim de enunciarmos o próximo resultado, notemos que, para todo $x \in A$, o par $(L_x,R_x) \in M(A)$, veja a Observação 1.24, fazendo $I = A$.

Proposição 1.27 *A aplicação $\Phi : A \to M(A)$ dada por $\Phi(x) = (L_x,R_x)$ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras.*

Demonstração: De fato, usando que A é uma $\mathbb{K}$-álgebra, para quaisquer $x,y,z \in A$ e $k \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}L_{x+y}(z) &= (x+y)z = xz+yz = L_x(z)+L_y(z) = (L_x+L_y)(z) \\ L_{xy}(z) &= (xy)z = x(yz) = x(L_y(z)) = L_x(L_y(z)) = (L_x\circ L_y)(z) \text{ e} \\ L_{kx}(z) &= (kx)z = k(xz) = k(L_x(z)) = (kL_x)(z).\end{aligned}$$

Logo, $L_{x+y} = L_x + L_y$ $L_{xy} = L_x \circ L_y$ e $L_{kx} = kL_x$. Analogamente, $R_{x+y} = R_x + R_y$, $R_{xy} = R_y \circ R_x$ e $R_{kx} = kR_x$. Portanto, para todo

$k \in \mathbb{K}$ e quaisquer $x, y \in A$, temos

$$\begin{aligned}
\Phi(x+y) &= (L_{x+y}, R_{x+y}) = (L_x + L_y, R_x + R_y) = (L_x, R_x) + (L_y, R_y) \\
&= \Phi(x) + \Phi(y), \\
\Phi(xy) &= (L_{xy}, R_{xy}) = (L_x \circ L_y, R_y \circ R_x) = (L_x, R_x)(L_y, R_y) \\
&= \Phi(x)\Phi(y) \\
\Phi(kx) &= (L_{kx}, R_{kx}) = (kL_x, kR_x) = k(L_x, R_x) = k\Phi(x)
\end{aligned}$$

e se A possui unidade, então $\Phi(1_A) = (L_1, R_1) = (I_A, I_A) = 1_{M(A)}$. Logo, Φ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. ■

Definição 1.28 *Dizemos que uma $\mathbb{K}$-álgebra A é não-degenerada se $\Phi : A \to M(A)$, definida acima, é injetora.*

Notemos que

$$\begin{aligned}
Ker(\Phi) &= \{x \in A : \Phi(x) = 0\} = \{x \in A : L_x = R_x = 0\} \\
&= \{x \in A : L_x(a) = R_x(a) = 0, \ \forall\, a \in A\} \\
&= \{x \in A : xa = 0 \text{ e } ax = 0, \ \forall\, a \in A\} \\
&= Ann_A^L(A) \cap Ann_A^R(A),
\end{aligned}$$

em que $Ann_A^L(A)$ é o anulador à esquerda de A em A e $Ann_A^R(A)$ é o anulador à direita.

Portanto, pelo que foi desenvolvido acima, uma $\mathbb{K}$-álgebra A é não-degenerada se, e somente se, $Ker(\Phi) = Ann_A^L(A) \cap Ann_A^R(A) = 0$ se, e somente se, para todo $0 \neq a \in A$, $\Phi(a) = (L_a, R_a) \neq 0$.

Equivalentemente, uma $\mathbb{K}$-álgebra A é não-degenerada se, e somente se, para todo $0 \neq a \in A$, existe $0 \neq b \in A$ tal que $L_a(b) = ab \neq 0$ ou $R_a(b) = ba \neq 0$.

Mais geralmente, se I é um ideal de A então podemos considerar o homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras, $\psi : A \to M(I)$ dado por $\psi(x) = (L_x, R_x)$ e daí,

$$
\begin{aligned}
Ker(\psi) &= \{x \in A : \psi(x) = 0\} = \{x \in A : L_x = R_x = 0\} \\
&= \{x \in A : xa = ax = 0,\ \forall\, a \in I\} \\
&= \{x \in A : xa = 0 \text{ e } ax = 0, \forall\, a \in I\} \\
&= Ann_A^L(I) \cap Ann_A^R(I),
\end{aligned}
$$

como acima $Ann_A^L(I)$ é o anulador à esquerda de I em A e $Ann_A^R(I)$ é o anulador à direita de I em A.

Proposição 1.29 *Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Então são verdadeiras as afirmações.*

i) *$\Phi(A)$ é um ideal de $M(A)$.*

ii) *$\Phi : A \to M(A)$ é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras se, e somente se, A é uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade.*

Demonstração: i) Sejam $x, y \in A$ e $(L, R) \in M(A)$. Então $\Phi(x) - \Phi(y) = \Phi(x - y) \in \Phi(A)$. Além disso, para todo $a \in A$, temos

$$
\begin{aligned}
&(L_x \circ L)(a) = L_x(L(a)) = xL(a) \stackrel{(*)}{=} R(x)a = L_{R(x)}(a) \text{ e} \\
&(R \circ R_x)(a) = R(R_x(a)) = R(ax) \stackrel{(*)}{=} aR(x) = R_{R(x)}(a),
\end{aligned}
$$

as igualdades $(*)$ são devidas às propriedades que os multiplicadores satisfazem, veja Definição 1.25. Logo, $\Phi(x)(L, R) = (L_x, R_x)(L, R) = (L_x \circ L, R \circ R_x) = (L_{R(x)}, R_{R(x)}) \in \Phi(A)$. Analogamente, podemos mostrar que $(L, R)\Phi(x) \in \Phi(A)$.

ii) Suponhamos que $\Phi : A \to M(A)$ seja um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras e por ser $M(A)$ uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade, segue que A é uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade.

Reciprocamente, para mostrarmos que $\Phi : A \to M(A)$ é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras, basta provarmos que Φ é uma bijeção, pois Φ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras, devido à Proposição 1.27.

Seja $(L, R) \in M(A)$. Como A possui unidade ($1_A = 1$), então para todo $x \in A$, temos que $L(x) = L(1x) = L(1)x = L_{L(1)}(x)$ e que $R(x) = R(x1) = xR(1) = R_{R(1)}(x)$. Logo, $L = L_{L(1)}$ e $R = R_{R(1)}$. Além disso, $R(1) = R(1)1 = 1L(1) = L(1)$.

Considerando $a = L(1) = R(1)$, segue que $\Phi(a) = (L_a, R_a) = (L, R)$ e daí, Φ é sobrejetora.

Sejam $x \in Ker(\Phi)$. Então $\Phi(x) = 0$ e portanto, $(L_x, R_x) = 0$. Logo, $L_x(a) = R_x(a) = 0$, para todo $a \in A$. Em particular, para $a = 1_A$, temos que $L_x(1_A) = R_x(1_A) = 0$ e isso nos diz que $x = 0$ e daí, Φ é injetora. ■

Definição 1.30 *Uma $\mathbb{K}$-álgebra A é dita* (L,R)*-associativa se, dados quaisquer dois multiplicadores $(L, R), (L', R') \in M(A)$, vale a igualdade $R' \circ L = L \circ R'$.*

A proposição que enunciamos a seguir mostra duas condições suficientes para a (L,R)-associatividade.

Proposição 1.31 *Uma $\mathbb{K}$-álgebra A é* (L,R)*-associativa sempre que uma das condições abaixo é satisfeita.*

i) *A é não-degenerada ou*

ii) *A é idempotente.*

Demonstração: i) Sejam $(L, R), (L', R') \in M(A)$ e $a, b \in A$. Então

$$R(L'(a))b = L'(a)L(b) = L'(aL(b)) = L'(R(a)b) = L'(R(a))b,$$

as igualdades acima seguem das propriedades dadas na Definição 1.25. Assim, para todo $b \in A$, $(R(L'(a)) - L'(R(a)))b = 0$, isto é, $R(L'(a)) - L'(R(a)) \in Ann_A^L(A)$. Analogamente, podemos provar que $R(L'(a)) - L'(R(a)) \in Ann_A^R(A)$ e isso nos diz que $R(L'(a)) - L'(R(a)) \in Ann_A^L(A) \cap Ann_A^R(A)$.

Como A é não-degenerada, segue que $Ker(\Phi) = Ann_A^L(A) \cap Ann_A^R(A) = 0$. Logo, $R(L'(a)) = L'(R(a))$, para todo $a \in A$. Portanto, $R \circ L' = L' \circ R$, isto é, A é (L,R)-associativa.

ii) Sejam $a_1, a_2 \in A$. Chamamos $a = a_1 a_2 \in A$. Então

$$\begin{aligned} R(L'(a)) &= R(L'(a_1 a_2)) = R(L'(a_1)a_2) = L'(a_1)R(a_2) = L'(a_1 R(a_2)) \\ &= L'(R(a_1 a_2)) = L'(R(a)), \ (*) \end{aligned}$$

novamente as igualdades acima seguem das propriedades dadas na Definição 1.25.

Como A é idempotente então, para qualquer $c \in A$, temos que $c = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, em que $a_i, b_i \in A$. Com o auxílio do que acabamos de provar em $(*)$, temos que

$$\begin{aligned}(R \circ L')(c) &= \sum_{i=1}^{n} R(L'(a_i b_i)) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} L'(R(a_i b_i)) = (L' \circ R)(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)\\ &= (L' \circ R)(c).\end{aligned}$$

Portanto, $R \circ L' = L' \circ R$ e daí, A é (L,R)-associativa. ■

No próximo capítulo será muito importante decidirmos quando os ideais de uma $\mathbb{K}$-álgebra A são (L,R)-associativos. A proposição que enunciamos abaixo caminha nesta direção. Antes, lembremos a definição de uma álgebra semiprima.

Definição 1.32 *Uma $\mathbb{K}$-álgebra A é dita semiprima se A não possui ideais nilpotentes não-nulos, isto é, se I é um ideal de A tal que $I^n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então $I = 0$.*

Proposição 1.33 *Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade. Então são equivalentes:*

i) *todo ideal não-nulo de A é não-degenerado;*

ii) *todo ideal não-nulo de A ou é idempotente ou é não-degenerado;*

iii) *todo ideal não-nulo de A é não-degenerado à direita (dizemos que I é não-degenerado à direita se, para qualquer elemento não-nulo $a \in I$, $aI \neq 0$);*

iv) *todo ideal não-nulo de A é não-degenerado à esquerda (definimos de modo similar com $Ia \neq 0$);*

v) *A é semiprima.*

Neste caso, todo ideal de A é (L,R)-associativo.

Demonstração: Para demonstrarmos esta proposição faremos apenas as implicações ii) $\Rightarrow$ v) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i), pois o item iii) pode ser substituído pelo item iv) por simetria e a implicação i) $\Rightarrow$ ii) é óbvia.

ii) $\Rightarrow$ v) Suponhamos que A não seja semiprima. Então A possui um ideal J não- nulo tal que $J^n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Claramente, $(J^{n-1})^2 = J^{2n-2} \subseteq J^n = 0$ e isto implica que A possui um ideal não-nulo $I = J^{n-1}$ tal que $I^2 = 0$. Portanto, I não é nem idempotente e nem não-degenerado, o que é absurdo. Logo, A é semiprima.

v) $\Rightarrow$ iii) Suponhamos que exista $0 \neq a \in I$ tal que $aI = 0$. Então o ideal $J = AaA$ é não-nulo, pois A possui unidade. Entretanto, $J^2 = (AaA)(AaA) = Aa(AAa)A \subseteq AaIA = 0$. Assim, encontramos um ideal J de A não-nulo tal que $J^2 = 0$, o que contradiz o fato de A ser semiprima.

iii) $\Rightarrow$ i) Seja I um ideal não-nulo de A. Então, por hipótese, para qualquer $0 \neq a \in I$ temos que $aI \neq 0$, ou seja, existe $b \in I$ tal que $ab \neq 0$ e isto é equivalente a dizermos que I é não-degenerado. ■

Proposição 1.34 *Seja $\pi : I \to J$ um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Então a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & M(I) & \to & M(J) \\ & (L,R) & \mapsto & (\pi \circ L \circ \pi^{-1}, \pi \circ R \circ \pi^{-1}) \end{array}$$

é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras.

Demonstração: Inicialmente, mostremos que φ está bem definida. Seja $(L,R) \in M(I)$. Claramente, $\pi \circ L \circ \pi^{-1} : J \to J$ e $\pi \circ R \circ \pi^{-1} : J \to J$ são $\mathbb{K}$-homomorfismos de J, pois são a composição de $\mathbb{K}$-homomorfismos.

É necessário mostrarmos que o par $(\pi \circ L \circ \pi^{-1}, \pi \circ R \circ \pi^{-1})$ satisfaz às propriedades dadas na Definição 1.25. De fato, sejam $x, y \in J$. Então

$$\begin{aligned} (\pi \circ L \circ \pi^{-1})(xy) &= \pi(L(\pi^{-1}(x)\pi^{-1}(y))) = \pi(L(\pi^{-1}(x))\pi^{-1}(y)) \\ &= \pi(L(\pi^{-1}(x)))\, y = (\pi \circ L \circ \pi^{-1})(x)\, y \ \text{ e} \end{aligned}$$

analogamente, mostramos que $(\pi \circ R \circ \pi^{-1})(xy) = x\,(\pi \circ R \circ \pi^{-1})(y)$. Para $y \in J$, existe $z \in I$ tal que $\pi(z) = y$, então

$$
\begin{aligned}
(\pi\circ R\circ \pi^{-1})(x)\, y &= (\pi\circ R\circ\pi^{-1})(x)\pi(z) = \pi(R(\pi^{-1}(x))z)\\
&= \pi(\pi^{-1}(x)L(z)) = x\,\pi(L(z)) = x\,\pi(L(\pi^{-1}(y)))\\
&= x\,(\pi\circ L\circ\pi^{-1})(y).
\end{aligned}
$$

Portanto, $(\pi\circ L\circ\pi^{-1}, \pi\circ R\circ\pi^{-1}) \in M(J)$. Sejam $(L, R), (L', R') \in M(I)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então, para todo $a \in J$, temos que

$$
\begin{aligned}
(\pi\circ(L+\alpha L')\circ\pi^{-1})(a) &= (\pi\circ(L+\alpha L'))(\pi^{-1}(a)))\\
&= \pi(L(\pi^{-1}(a)) + \alpha L'(\pi{-}1(a)))\\
&= \pi(L(\pi^{-1}(a))) + \alpha\pi(L'(\pi^{-1}(a)))\\
&= (\pi\circ L\circ\pi^{-1} + \alpha(\pi\circ L'\circ\pi^{-1}))(a).
\end{aligned}
$$

Logo, $\pi\circ(L+\alpha L')\circ\pi^{-1} = (\pi\circ L\circ\pi^{-1}) + \alpha(\pi\circ L'\circ\pi^{-1})$. Analogamente, $\pi\circ(R+\alpha R')\circ\pi^{-1} = (\pi\circ R\circ\pi^{-1}) + \alpha(\pi\circ R'\circ\pi^{-1})$. Portanto, $\varphi((L, R) + \alpha(L', R')) = \varphi(L, R) + \alpha\varphi(L', R')$.

Falta mostrarmos que $\varphi((L, R)(L', R')) = \varphi(L, R)\varphi(L', R')$. De fato,

$$\varphi((L, R)(L', R')) = \varphi(L\circ L', R'\circ R) = (\pi\circ(L\circ L')\circ\pi^{-1}, \pi\circ(R'\circ R)\circ\pi^{-1})$$

$$= (\pi\circ(L\circ\pi^{-1}\circ\pi\circ L')\circ\pi^{-1}, \pi\circ(R'\circ\pi^{-1}\circ\pi\circ R)\circ\pi^{-1})$$

$$= (\pi\circ L\circ\pi^{-1}, \pi\circ R\circ\pi^{-1})(\pi\circ L'\circ\pi^{-1}, \pi\circ R'\circ\pi^{-1}) = \varphi(L, R)\varphi(L', R').$$

Finalmente, mostremos que φ é uma bijeção. De fato, seja $(L, R) \in M(J)$. Não é difícil ver que $(\pi^{-1}\circ L\circ\pi, \pi^{-1}\circ R\circ\pi) \in M(I)$ e claramente, $\varphi(\pi^{-1}\circ L\circ\pi, \pi^{-1}\circ R\circ\pi) = (L, R)$.

Seja $(L, R) \in Ker(\varphi)$. Então $0 = \varphi((L, R)) = (\pi\circ L\circ\pi^{-1}, \pi\circ R\circ\pi^{-1})$. Logo, $\pi\circ L\circ\pi^{-1} = 0 = \pi\circ R\circ\pi^{-1}$ e como π e π^{-1} são isomorfismos, segue imediatamente que $L = R = 0$. Logo, $Ker(\varphi) = 0$ e φ é injetora.

■

Capítulo 2

O *skew* anel de grupo parcial e a questão da associatividade

Dados um conjunto X e um grupo G é bem conhecida a definição de ação parcial de G em X. Tal definição apareceu em várias áreas da matemática como, em particular, na teoria de álgebra de operadores, onde mostrou ser uma poderosa ferramenta veja ([1], [3], [4], [5], [10], [11]). Como o leitor irá perceber, a definição de ação parcial dada neste trabalho, que é a definição apresentada em [2], é muito geral, uma vez que temos a ação de G em um conjunto qualquer. Nosso objetivo aqui é trabalhar com o conceito algébrico de ações parciais, isto é, ao invés de um conjunto qualquer, consideramos uma $\mathbb{K}$-álgebra A em que $\mathbb{K}$ é um anel comutativo com unidade.

Ao considerarmos uma $\mathbb{K}$-álgebra A com o grupo G agindo "parcialmente" em A, formamos a $\mathbb{K}$-álgebra $A *_\alpha G$, onde α é uma ação parcial de G em A, chamada *skew* anel de grupo parcial.

Nosso principal objetivo neste capítulo é mostrar que, mediante certas hipóteses, $A *_\alpha G$ é associativo e portanto é uma $\mathbb{K}$-álgebra como dissemos acima.

No que segue, definimos ações parciais de um grupo G em um conjunto X. Apresentamos formalmente a definição do *skew* anel de grupo parcial e no Teorema 2.7, provamos a associatividade de $A*_\alpha G$ mediante a (L,R)-associatividade dos ideais D_g, $g \in G$.

Definimos agora ação global de um grupo G em uma álgebra com o intuito de que o leitor possa perceber que a definição de ação parcial é, de fato, uma generalização da definição de ação global.

Definição 2.1 *Sejam G um grupo, $\mathbb{K}$ um anel com unidade e A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Dizemos que G age globalmente em A se existe um homomorfismo de grupos $\beta : G \to Aut_{\mathbb{K}}(A)$, em que $Aut_{\mathbb{K}}(A)$ é o grupo dos $\mathbb{K}$-automorfismos de A.*

Definição 2.2 *Sejam G um grupo com elemento neutro 1 e X um conjunto. Uma ação parcial de G em X é uma coleção de subconjuntos D_g de X, com $g \in G$, e bijeções $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ tais que:*

i) *$D_1 = X$ e α_1 é a aplicação identidade de X;*

ii) *$D_{(gh)^{-1}} \supseteq \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$, para quaisquer $g, h \in G$;*

iii) *$(\alpha_g \circ \alpha_h)(x) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$ e quaisquer $g, h \in G$.*

Notemos que se $D_g = X$ para todo $g \in G$, então α é uma ação global de G em X. Desta forma, podemos dizer que a definição de ação parcial é uma generalização da definição de ação global.

Observação 2.3 1) A condição iii) nos diz que $(\alpha_h \circ \alpha_{h^{-1}})(x) = x$ para todo $x \in D_h$ e que $(\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_h)(y) = y$, $\forall y \in D_{h^{-1}}$. Assim, $\alpha_h^{-1} = \alpha_{h^{-1}}$.

2) As condições ii) e iii) nos dão que α_{gh} é uma extensão de $\alpha_g \circ \alpha_h$, isto é, $\alpha_{gh}|_{\mathscr{D}(\alpha_g \circ \alpha_h)} = \alpha_g \circ \alpha_h$, em que $\mathscr{D}(\alpha_g \circ \alpha_h)$ é o domínio da função $\alpha_g \circ \alpha_h$. Denotando por $\mathscr{D}(\alpha_{gh})$ o domínio da função α_{gh}, temos que

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(\alpha_g \circ \alpha_h) &= \left\{x \in D_{h^{-1}} : \alpha_h(x) \in D_h \cap D_{g^{-1}}\right\} \\ &= \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}} = \mathscr{D}(\alpha_{gh}), \end{aligned}$$

a inclusão acima segue de ii) e por iii), concluímos que α_{gh} é uma extensão de $\alpha_g \circ \alpha_h$.

A seguir, mostramos uma definição equivalente de ação parcial e que, de fato, acaba por tornar-se mais utilizada no trabalho do que a primeira.

Proposição 2.4 *As condições* i), ii) *e* iii) *da Definição* 2.2 *são equivalentes às condições:*

i) $D_1 = X$ *e* α_1 *é a aplicação identidade de* X*;*

ii') $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$*, para quaisquer* $g, h \in G$*;*

iii') $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$*, para todo* $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$ *e quaisqer* $g, h \in G$*.*

Demonstração: Primeiramente, mostremos que a condição ii) pode ser trocada pela igualdade $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$ $(*)$, isto é, mostremos que ii) e iii) implicam $(*)$. Por outro lado, a igualdade $(*)$ implica obviamente ii).

Temos que $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}}$ e por ii), $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$. Logo, $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$. Trocando h por h^{-1} e g por gh, segue que $\alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}) \subseteq D_h \cap D_{g^{-1}}$ e portanto, $D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}} \subseteq \alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}})$, mas iii) nos diz que $\alpha_{h^{-1}} = \alpha_h^{-1}$, veja Observação 2.3 e assim, $D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}} \subseteq \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$ e segue a igualdade $(*)$.

É claro que i), $(*)$ e iii) implicam i), ii') e iii'), pois trocando h por g^{-1} e g por h^{-1} em $(*)$, temos que $\alpha_{g^{-1}}^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$, mas $\alpha_{g^{-1}}^{-1} = \alpha_g$ por iii) e daí, $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$. Além disso, valendo $(*)$ e iii), segue iii').

Agora, vejamos que i), ii') e iii') implicam i), $(*)$ e iii). Em ii') troquemos g por h e h por $(gh)^{-1}$ e daí, $\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}) = D_h \cap D_{g^{-1}}$ e consequentemente, temos que $D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}} = \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$. Assim, valendo $(*)$ e iii') segue iii). ■

No que segue, $X = A$ em que A é uma $\mathbb{K}$-álgebra e para todo $g \in G$, D_g é um ideal de A e $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ é um isomorfismo de anéis.

No caso em que a $\mathbb{K}$-álgebra A possua unidade, os ideais $D_g{}'s$ são $\mathbb{K}$-subálgebras de A e os $\alpha_g{}'s$ são isomorfismos de $\mathbb{K}$-álgebras.

Definição 2.5 *Dada uma ação parcial α de um grupo G em uma $\mathbb{K}$-álgebra A, o skew anel de grupo parcial $A *_\alpha G$, correspondente à ação parcial α é o conjunto de todas as somas formais finitas*

$$A *_\alpha G = \left\{ \sum_{g \in G} a_g \delta_g : a_g \in D_g \right\},$$

em que $\delta_g{}'s$ são símbolos que indicam a "posição" dos elementos na soma. A adição é a usual e a multiplicação é dada por $(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$.

Proposição 2.6 *O skew anel de grupo parcial $A *_\alpha G$ é um $\mathbb{K}$-módulo cuja a ação é dada por $k(\sum_{g \in G} a_g\delta_g) = \sum_{g \in G}(ka_g)\delta_g$, para todo $k \in \mathbb{K}$ e $\sum_{g \in G} a_g\delta_g \in A *_\alpha G$. Além disso, para quaisquer $x, y \in A *_\alpha G$ e $k \in \mathbb{K}$, vale que $k(xy) = (kx)y = x(ky)$.*

Demonstração: Sejam $x, y \in A *_\alpha G$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Então $x = \sum_{g \in G} a_g\delta_g$ e $y = \sum_{g \in G} b_g\delta_g$. Portanto,

$$\begin{aligned}
(k_1 + k_2)x &= (k_1 + k_2)(\sum_{g \in G} a_g\delta_g) = \sum_{g \in G}((k_1 + k_2)a_g)\delta_g \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{g \in G}(k_1a_g + k_2a_g)\delta_g = k_1 \sum_{g \in G} a_g\delta_g + k_2 \sum_{g \in G} a_g\delta_g \\
&= k_1x + k_2x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_1(x + y) &= k_1(\sum_{g \in G} a_g\delta_g + \sum_{g \in G} b_g\delta_g) = k_1(\sum_{g \in G}(a_g + b_g)\delta_g) \\
&= \sum_{g \in G}(k_1(a_g + b_g))\delta_g \overset{(**)}{=} \sum_{g \in G}(k_1a_g + k_1b_g)\delta_g \\
&= k_1 \sum_{g \in G} a_g\delta_g + k_1 \sum_{g \in G} b_g\delta_g = k_1x + k_1y,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(k_1k_2)x &= (k_1k_2)(\sum_{g\in G} a_g\delta_g) = \sum_{g\in G}((k_1k_2)a_g)\delta_g \\
&\overset{(***)}{=} \sum_{g\in G}(k_1(k_2a_g))\delta_g = k_1\sum_{g\in G}(k_2a_g)\delta_g = k_1(k_2\sum_{g\in G} a_g\delta_g) \\
&= k_1(k_2x),
\end{aligned}
$$

em que as igualdades em $(*)$, $(**)$ e $(***)$ são devidas ao fato de que D_g $(\forall\, g \in G)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra e portanto, um $\mathbb{K}$-módulo.

Suponhamos que $x = a_g\delta_g$ e $y = b_h\delta_h$ em $A *_\alpha G$. Então

$$
\begin{aligned}
k((a_g\delta_g)(b_h\delta_h)) &= k(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}) = (k\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))\delta_{gh} \\
&= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(ka_g)b_h)\delta_{gh} = ((ka_g)\delta_g)(b_h\delta_h) \\
&= (k(a_g\delta_g))(b_h\delta_h),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k((a_g\delta_g)(b_h\delta_h)) &= k(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}) = (k\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))\delta_{gh} \\
&= (\alpha_g(k(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)))\delta_{gh} \overset{(*)}{=} (\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)(kb_h)))\delta_{gh} \\
&= (a_g\delta_g)((kb_h)\delta_h) = (a_g\delta_g)(k(b_h\delta_h)).
\end{aligned}
$$

Usando a linearidade segue que $k(xy) = (kx)y = x(ky)$ para todo $k \in \mathbb{K}$ e quaisquer $x, y \in A *_\alpha G$. As igualdades acima são devidas aos fatos de que os $D_g{}'s$ são $\mathbb{K}$-álgebras e os $\alpha_g{}'s$ são $\mathbb{K}$-isomorfismos. A igualdade $(*)$ segue do fato de que A é uma $\mathbb{K}$-álgebra. ■

O *skew* anel de grupo parcial $A *_\alpha G$ nem sempre é associativo. Mais a frente exibimos um exemplo que mostra este fato. No entanto, sob certa condição é possível mostrar que $A *_\alpha G$ é associativo, isto é o que veremos no próximo teorema.

Teorema 2.7 *Se A é uma $\mathbb{K}$-álgebra e α uma ação parcial de um grupo G em A tal que cada D_g é* (L, R)*-associativo, então o skew anel de grupo parcial $A *_\alpha G$ é associativo.*

Demonstração: Claramente, $A *_\alpha G$ é associativo se, e somente se, $(a\delta_h b\delta_g)c\delta_f = a\delta_h(b\delta_g c\delta_f)$ $(*)$, para quaisquer $h, g, f \in G$, $a \in D_h$,

$b \in D_g$ e $c \in D_f$. Temos que

$$\begin{aligned}(a\delta_h b\delta_g)c\delta_f &= (\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b)\delta_{hg})(c\delta_f)\\ &= \alpha_{hg}(\alpha_{(hg)^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b))c)\delta_{(hg)f}.\end{aligned}$$

Como $\alpha_{h^{-1}}(a) \in D_{h^{-1}}$ e $b \in D_g$, segue que $\alpha_{h^{-1}}(a)b \in D_{h^{-1}} \cap D_g$, pois $D_{h^{-1}}$ e D_g são ideais de A. Portanto, $\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b) \in \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_g) = D_h \cap D_{hg}$, esta última igualdade é decorrente da condição ii'). Usando iii'), segue que

$$\begin{aligned}\alpha_{(hg)^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b)) &= \alpha_{g^{-1}h^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b))\\ &= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b)))\\ &= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}h}(\alpha_{h^{-1}}(a)b))\\ &= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b).\end{aligned}$$

Logo, $(a\delta_h b\delta_g)c\delta_f = \alpha_{hg}(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c)\delta_{(hg)f}$. Aplicando iii') a esta última igualdade, temos que $\alpha_{(hg)^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b)) = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)$ e assim, $\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b) \in D_{g^{-1}} \cap D_{(hg)^{-1}}$. Usando este fato, segue de iii') que

$$\begin{aligned}(a\delta_h b\delta_g)c\delta_f &= \alpha_{hg}(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c)\delta_{(hg)f}\\ &= \alpha_h(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c))\delta_{(hg)f}.\end{aligned}$$

O lado direito da igualdade $(*)$ é

$$a\delta_h(b\delta_g c\delta_f) = (a\delta_h)(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c)\delta_{gf}) = \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c))\delta_{h(gf)}.$$

Portanto, $A *_\alpha G$ é associativo se, e somente se,

$$\alpha_h(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c))\delta_{(hg)f} = \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c))\delta_{h(gf)}.$$

Como G é um grupo, é óbvio que $h(gf) = (hg)f$ e por ser α_h injetora, segue que $A *_\alpha G$ é associativo se, e somente se,

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c) = \alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c), \ \forall\ a \in D_h,\ b \in D_g \text{ e}$$

$c \in D_f$.

Sendo $\alpha_{h^{-1}} : D_h \to D_{h^{-1}}$ um isomorfismo, $\alpha_{h^{-1}}(a)$ "percorre" todo $D_{h^{-1}}$ e assim a condição acima é equivalente à

$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(ab)c) = a\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c)$, para quaisquer $a \in D_{h^{-1}}$, $b \in D_g$ e

$c \in D_f$. $(**)$

Se $h = f = 1$ então $D_h = D_f = A$ e $A *_\alpha G$ é associativo se, e somente se, $(**)$ vale para quaisquer $g \in G$, $a, c \in A$ e $b \in D_g$. Claramente, $(**)$ é equivalente à

$$((\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}) \circ L_a)(b) = (L_a \circ (\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}))(b)$$

para todo $b \in D_g$, $g \in G$ e quaisquer $a, c \in A$.

Consideremos R_c um multiplicador à direita de $D_{g^{-1}}$ e L_a um multiplicador à esquerda de D_g. Como $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras segue, da Proposição 1.34, que $\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}} : D_g \to D_g$ é um multiplicador à direita de D_g. Sendo cada D_g $(g \in G)$ um ideal (L, R)-associativo temos que $(\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}) \circ L_a = L_a \circ (\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}})$ e daí, $A *_\alpha G$ é associativo. ■

Em vista da Proposição 2.6 e do teorema acima, segue que $A *_\alpha G$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade $1_A\delta_1$ em que 1_A é a unidade de A.

Corolário 2.8 *Se α é uma ação parcial de um grupo G em uma $\mathbb{K}$-álgebra A tal que cada D_g $(g \in G)$ ou é idempotente ou é não-degenerado, então o skew anel de grupo parcial $A *_\alpha G$ é associativo.*

Demonstração: Como cada D_g ou é idempotente ou é não-degenerado então, pela Proposição 1.31, cada D_g é (L, R)-associativo. Pelo Teorema 2.7, temos que $A *_\alpha G$ é associativo. ■

Definição 2.9 *Uma $\mathbb{K}$-álgebra A é dita fortemente associativa se, para qualquer grupo G e para qualquer ação parcial α de G em A, o skew anel de grupo parcial $A *_\alpha G$ é associativo.*

Corolário 2.10 *Uma $\mathbb{K}$-álgebra semiprima é fortemente associativa.*

Demonstração: Sejam A uma $\mathbb{K}$-álgebra semiprima, G um grupo e α uma ação parcial de G em A. Então, pela Proposição 1.33, cada ideal D_g ($g \in G$) da álgebra A ou é idempotente ou é não-degenerado. Pelo Corolário 2.8, $A *_\alpha G$ é associativo e portanto, A é fortemente associativa. ■

O exemplo que segue nos mostra que nem sempre o *skew* anel de grupo parcial é associativo.

Exemplo 2.11 Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e A um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão quatro com base $\{1, u, t, v\}$. Definimos a multiplicação em A da seguinte forma $u^2 = v^2 = t^2 = uv = vu = tu = ut = 0$, $tv = vt = u$ e $1a = a1 = a$, $\forall\ a \in A$.

Claramente, A é uma $\mathbb{K}$-álgebra de dimensão quatro. Sejam $G = \langle g : g^2 = 1 \rangle$ e I o ideal de A gerado por v, isto é, $I = AvA = Av$, pois A é comutativa.

Agora, notemos que I é um $\mathbb{K}$-subespaço de A gerado por u e v. De fato, seja $x \in I$. Então $x = (a_1 + a_2u + a_3t + a_4v)v = a_1v + a_3u \in \mathbb{K}v + \mathbb{K}u$. Por outro lado, dado $x \in \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$ temos que $x = k_1u + k_2v$ com $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Obviamente, $k_2v \in I$ e como $u = tv \in Av = I$ e daí, $x \in I$. Logo, $I = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$.

Definimos $D_1 = A$, $\alpha_1 : A \to A$ a aplicação identidade em A, $D_g = I = D_{g^{-1}}$ e $\alpha_g : I \to I$ por $\alpha_g(x) = \alpha_g(k_1u + k_2v) = k_1v + k_2u$. Como G é um grupo de ordem 2 e $\{1, u, t, v\}$ é base de A, as condições para que $\alpha = (\{A, I\}, \{\alpha_1, \alpha_g\})$ seja uma ação parcial são facilmente verificadas.

Mostremos que $A *_\alpha G = A\delta_1 \oplus I\delta_g$ não é associativo. De fato, basta considerarmos $x = t\delta_1 + u\delta_g$. Logo,

$$\begin{aligned}
(xx)x &= ((t\delta_1 + u\delta_g)(t\delta_1 + u\delta_g))\,(t\delta_1 + u\delta_g) \\
&= (t\delta_1 t\delta_1 + t\delta_1 u\delta_g + u\delta_g t\delta_1 + u\delta_g u\delta_g)\,(t\delta_1 + u\delta_g) \\
&= \left(t^2\delta_1 + tu\delta_g + \alpha_g(vt)\delta_g + \alpha_g(vu)\delta_1\right)(t\delta_1 + u\delta_g) \\
&= (\alpha_g(u)\delta_g)\,(t\delta_1 + u\delta_g) = (v\delta_g)\,(t\delta_1 + u\delta_g) \\
&= v\delta_g t\delta_1 + v\delta_g u\delta_g = \alpha_g(ut)\delta_g + \alpha_g(u^2)\delta_1 = 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
x\left(xx\right) &= \left(t\delta_1 + u\delta_g\right)\left(\left(t\delta_1 + u\delta_g\right)\left(t\delta_1 + u\delta_g\right)\right) \\
&= \left(t\delta_1 + u\delta_g\right)\left(t\delta_1 t\delta_1 + t\delta_1 u\delta_g + u\delta_g t\delta_1 + u\delta_g u\delta_g\right) \\
&= \left(t\delta_1 + u\delta_g\right)\left(v\delta_g\right) = t\delta_1 v\delta_g + u\delta_g v\delta_g \\
&= u\delta_g.
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Ações envolventes

Iniciamos este capítulo com um exemplo, o qual mostra que, dada uma ação β (global) de um grupo G em uma $\mathbb{K}$-álgebra B, é sempre possível construir uma ação parcial α e, neste caso, dizemos que α é uma restrição de β. Sendo assim, uma pergunta que naturalmente ocorre é: dada uma ação parcial α é sempre possível construir uma única ação (global) β tal que $\beta_g|_{D_{g^{-1}}} = \alpha_g$? Se isso ocorre, dizemos que β é a envolvente para a ação parcial α.

A fim de enunciarmos o teorema que fornece uma resposta sobre a existência e a unicidade para β, precisamos desenvolver alguns conceitos que são muito utilizados em sua demonstração, ou seja, precisamos dizer quando uma ação parcial α é uma restrição admissível de β, definir o que significa duas ações parciais α e α' serem equivalentes.

Exemplo 3.1 Sejam G um grupo, B uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade e A um ideal de B. Suponhamos que G age em B por $\mathbb{K}$-automorfismos

$$\begin{array}{rccc} \beta: & G & \to & Aut_{\mathbb{K}}(B) \\ & g & \mapsto & \beta_g : B \to B. \end{array}$$

Devido à Observação 1.24, concluímos que A é uma $\mathbb{K}$-álgebra. Consideremos $D_g = A \cap \beta_g(A)$ para todo $g \in G$ e α_g a restrição de β_g a

$D_{g^{-1}}$. Então $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g\}_{g\in G})$ é uma ação parcial de G em A.

De fato, como A é um ideal de B e β_g é um $\mathbb{K}$-automorfismo de B segue que, para cada $g \in G$, $\beta_g(A)$ é um ideal de B. Portanto, $D_g = A \cap \beta_g(A)$ é um ideal de A.

Além disso, para cada $g \in G$, D_g é de fato uma $\mathbb{K}$-álgebra. Para cada $x \in D_g$ e $k \in \mathbb{K}$, temos que $kx \in A$, pois $x \in A$ e A é uma $\mathbb{K}$-álgebra e $kx \in \beta_g(A)$, pois $x \in \beta_g(A)$ e β_g é $\mathbb{K}$-automorfismo. Logo, $kx \in A \cap \beta_g(A) = D_g$.

Mostremos que $\alpha_g(D_{g^{-1}}) \subset D_g$. Seja $x \in D_{g^{-1}}$. Então $x \in A$ e $x \in \beta_{g^{-1}}(A)$. Como $\alpha_g = \beta_g|_{D_{g^{-1}}}$ segue que $\beta_g(x) \in \beta_g(A)$ e que $\beta_g(x) \in \beta_g(\beta_{g^{-1}}(A)) = A$. Assim, $\alpha_g(x) = \beta_g(x) \in A \cap \beta_g(A) = D_g$.

Agora, provemos que para cada $g \in G$, $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. É claro que α_g é um $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras injetor.

Dado $y \in D_g = A\cap\beta_g(A)$, segue que existe $x \in A$ tal que $y = \beta_g(x)$. Daí, $\beta_{g^{-1}}(y) = x \in A\cap\beta_{g^{-1}}(A) = D_{g^{-1}}$ e $\alpha_g(x) = \beta_g(x) = y$. Portanto, α_g é sobrejetora. Concluímos que α_g é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras.

Vamos mostrar que α satisfaz as condições i), ii') e iii') da definição de ação parcial.

De fato, a condição i) é claramente satisfeita pela forma como α está definida. Para a condição ii'), vejamos que $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$ para quaisquer $g, h \in G$. Seja $y \in D_g \cap D_{gh}$. Então $y \in D_g$ e $y \in D_{gh}$. Como $y \in D_g$ e α_g é um isomorfismo existe $x \in D_{g^{-1}}$ tal que $\alpha_g(x) = y$. Mas $y \in D_{gh} = A \cap \beta_{gh}(A)$ e isso implica que $y = \alpha_g(x) \in \beta_{gh}(A) = \beta_g(\beta_h(A))$. Sendo α_g a restrição de β_g a $D_{g^{-1}}$, concluímos que $x \in \beta_h(A)$ e como $x \in A$, segue que $x \in A \cap \beta_h(A) = D_h$. Logo, $y = \alpha_g(x)$ com $x \in D_{g^{-1}} \cap D_h$ e portanto, $D_g \cap D_{gh} \subset \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h)$.

Seja $y \in \alpha_g(D_{g^{-1}}\cap D_h)$. Então existe $x \in D_{g^{-1}}\cap D_h$ tal que $\alpha_g(x) = y$. Como $y = \alpha_g(x) \in D_g = A \cap \beta_g(A)$ segue que $y \in A$. Além disso, como $x \in D_h$ e α_h é um isomorfismo, existe $z \in D_{h^{-1}} = A\cap\beta_{h^{-1}}(A)$ tal que $\alpha_h(z) = x$. Como $y = \alpha_g(x) = \alpha_g(\alpha_h(z)) = \beta_g(\beta_h(z)) = \beta_{gh}(z) \in \beta_{gh}(A)$. Logo, $y \in D_{gh}$ e como $y \in D_g$ segue que $y \in D_g \cap D_{gh}$. Donde,

$\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subset D_g \cap D_{hg}$.

Para a condição iii'), é necessário mostrarmos que $(\alpha_g \circ \alpha_h)(x) = \alpha_{gh}(x)$ para todo $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$. Seja $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$. Então $x \in D_{h^{-1}}$ e $x \in D_{(gh)^{-1}}$. Afirmamos que $\alpha_h(x) \in D_{g^{-1}}$. De fato, como $x \in D_{(gh)^{-1}}$ e $\alpha_{(gh)^{-1}}$ é um isomorfismo, existe $z \in D_{gh}$ tal que $x = \alpha_{(gh)^{-1}}(z) = \beta_{(gh)^{-1}}(z) = \beta_{h^{-1}}(\beta_{g^{-1}}(z))$. Logo, $\beta_h(x) = \beta_{g^{-1}}(z) \in \beta_{g^{-1}}(A)$. Sendo que $x \in D_{h^{-1}}$ e $\alpha_h = \beta_h|_{D_{h^{-1}}}$, segue que $\alpha_h(x) = \beta_h(x) \in \beta_{g^{-1}}(A)$. É claro que $\alpha_h(x) \in A$. Assim, $\alpha_h(x) \in A \cap \beta_{g^{-1}}(A) = D_{g^{-1}}$. Portanto, para todo $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$, podemos escrever $\alpha_{gh}(x) = \beta_{gh}(x) = \beta_g(\beta_h(x)) = \beta_g(\alpha_h(x)) = \alpha_g(\alpha_h(x)) = (\alpha_g \circ \alpha_h)(x)$.

A ação α construída no exemplo acima é dita uma restrição de β a A. A partir de agora, temos interesse em saber sob quais circunstâncias uma dada ação parcial pode ser obtida, a menos de equivalência, como uma restrição de uma ação global.

Seja B_1 a subálgebra de B gerada por $\bigcup\limits_{g\in G} \beta_g(A)$. Pode ocorrer que B_1 seja diferente de B e, como B_1 é invariante com relação a β, isto é, $\beta_g(B_1) \subset B_1$ para todo $g \in G$, podemos construir uma ação parcial α que é a restrição de β a B_1.

Seria razoável pedirmos que B fosse igual a B_1 e, neste caso, dizemos que α é uma restrição admissível de β. Definimos abaixo ações parciais equivalentes.

Definição 3.2 *Dizemos que uma ação parcial* $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g\}_{g\in G})$ *de um grupo* G *em uma* $\mathbb{K}$*-álgebra* A *é equivalente a uma ação parcial* $\alpha' = (\{D'_g\}_{g\in G}, \{\alpha'_g : D'_{g^{-1}} \to D'_g\}_{g\in G})$ *de um grupo* G *em uma* $\mathbb{K}$*-álgebra* A' *se existe um isomorfismo de* $\mathbb{K}$*-álgebras* $\varphi : A \to A'$ *tal que, para cada* $g \in G$*, as seguintes condições são satisfeitas:*

i) $\varphi(D_g) = D'_g$;

ii) $(\alpha'_g \circ \varphi)(x) = (\varphi \circ \alpha_g)(x)$ *para todo* $x \in D_{g^{-1}}$.

Definição 3.3 *Uma ação* β *de um grupo* G *em uma* $\mathbb{K}$*-álgebra* B *é dita* *ser uma ação envolvente para a ação parcial α de G em uma $\mathbb{K}$-álgebra A se α é equivalente a uma restrição admissível de β a um ideal de B.*

Em outras palavras, uma ação β de um grupo G em uma $\mathbb{K}$-álgebra B é dita uma ação envolvente da ação parcial α de G em uma $\mathbb{K}$-álgebra A se existe φ um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras de A em um ideal de B tal que, para todo $g \in G$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

i') $\varphi(D_g) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A)) = D'_g$;

ii') $(\beta_g \circ \varphi)(x) = (\varphi \circ \alpha_g)(x)$ para todo $x \in D_{g^{-1}}$;

iii') B é gerada por $\bigcup\limits_{g\in G} \beta_g(\varphi(A))$.

O problema é decidir quando ou não uma ação parcial α possui uma ação (global) envolvente β.

Proposição 3.4 *Se β é uma ação de um grupo G em uma $\mathbb{K}$-álgebra B a qual é uma ação envolvente para a ação parcial α de G em uma $\mathbb{K}$-álgebra A então $A *_\alpha G$ pode ser mergulhado em $B *_\beta G$. Em particular, $A *_\alpha G$ é associativo.*

Demonstração: Como β é ação envolvente para α então existe um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras φ de A em um ideal de B. Vamos denotar a ação parcial equivalente a α por β_g que é a restrição admissível de β. Para todo $x \in D_{g^{-1}}$, temos que $(\beta_g \circ \varphi)(x) = (\varphi \circ \alpha_g)(x)$.

Definimos $\psi : A *_\alpha G \to B *_\beta G$ por $\psi(\sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g) = \sum\limits_{g\in G} \varphi(a_g)\delta_g$. Vamos mostrar que ψ é um homomorfismo de anéis e de $\mathbb{K}$-módulos.

De fato, sejam $x, y \in A *_\alpha G$ e $k \in \mathbb{K}$. Então $x = \sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g$ e $y = \sum\limits_{g\in G} b_g\delta_g$ e daí,

$$\begin{aligned}\psi(x+y) &= \psi(\sum_{g\in G} a_g\delta_g + \sum_{g\in G} b_g\delta_g) = \psi(\sum_{g\in G}(a_g+b_g)\delta_g)\\ &= \sum_{g\in G}\varphi(a_g+b_g)\delta_g = \sum_{g\in G}(\varphi(a_g)+\varphi(b_g))\delta_g\\ &= \sum_{g\in G}\varphi(a_g)\delta_g + \sum_{g\in G}\varphi(b_g)\delta_g = \psi(x)+\psi(y).\end{aligned}$$

Para mostrarmos que ψ é multiplicativa, basta verificarmos que $\psi(a_g\delta_g b_h\delta_h) = \psi(a_g\delta_g)\psi(b_h\delta_h)$ para quaisquer $g, h \in G$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\psi(a_g\delta_g b_h\delta_h) &= \psi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}) = \varphi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))\delta_{gh}\\
&= (\varphi\circ\alpha_g)(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh} = (\beta_g\circ\varphi)(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}\\
&= \beta_g(\varphi(\alpha_{g^{-1}}(a_g))\varphi(b_h))\delta_{gh} = \beta_g((\beta_{g^{-1}}\circ\varphi)(a_g)\varphi(b_h))\delta_{gh}\\
&= \beta_g(\beta_{g^{-1}}(\varphi(a_g))\varphi(b_h))\delta_{gh} = \varphi(a_g)\delta_g\varphi(b_h)\delta_h\\
&= \psi(a_g\delta_g)\psi(b_h\delta_h)
\end{aligned}
$$

e finalmente,

$$
\begin{aligned}
\psi(kx) &= \psi(k(\sum_{g\in G} a_g\delta_g)) = \psi(\sum_{g\in G}(ka_g)\delta_g) = \sum_{g\in G}\varphi(ka_g)\delta_g\\
&= k\sum_{g\in G}\varphi(a_g)\delta_g = k\psi(x).
\end{aligned}
$$

Mostremos que ψ é injetora. De fato, seja $x\in Ker(\psi)$. Então $x=\sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g$ e $\psi(x)=\sum\limits_{g\in G}\varphi(a_g)\delta_g=0$. Como $B*_\beta G=\bigoplus\limits_{g\in G} D'_g\delta_g$, segue que cada elemento de $B*_\beta G$ é escrito de forma única. Portanto, $\varphi(a_g)=0$ para todo $g\in G$ e isso nos diz que $a_g=0$ para todo $g\in G$, pois φ é injetora. Logo, $x=\sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g=0$.

Finalmente, provemos que $\varphi(1_A)\delta_1=1_{\psi(A*_\alpha G)}$. De fato, seja $x\in\psi(A*_\alpha G)$. Então $x=\sum\limits_{g\in G}\varphi(a_g)\delta_g$ e portanto,

$$
\begin{aligned}
\varphi(1_A)\delta_1 x &= \varphi(1_A)\delta_1(\sum_{g\in G}\varphi(a_g)\delta_g) = \sum_{g\in G}(\varphi(1_A)\delta_1)(\varphi(a_g)\delta_g)\\
&= \sum_{g\in G}\beta_1(\beta_1(\varphi(1_A))\varphi(a_g))\delta_g = \sum_{g\in G}\varphi(1_A)\varphi(a_g)\delta_g\\
&= \sum_{g\in G}\varphi(a_g)\delta_g\\
x\varphi(1_A)\delta_1 &= (\sum_{g\in G}\varphi(a_g)\delta_g)\varphi(1_A)\delta_1 = \sum_{g\in G}(\varphi(a_g)\delta_g)(\varphi(1_A)\delta_1)\\
&= \sum_{g\in G}\beta_g(\beta_{g^{-1}}(\varphi(a_g))\varphi(1_A))\delta_g = \sum_{g\in G}\varphi(a_g)\beta_g(\varphi(1_A))\delta_g\\
&\overset{(*)}{=} \sum_{g\in G}\beta_g(\varphi(b_g))\beta_g(\varphi(1_A))\delta_g = \sum_{g\in G}\beta_g(\varphi(b_g)\varphi(1_A))\delta_g
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \sum_{g\in G} \beta_g(\varphi(b_g 1_A))\delta_g \quad &= \quad \sum_{g\in G} \beta_g(\varphi(b_g))\delta_g = \sum_{g\in G} \varphi(a_g)\delta_g \\
&= \quad x.
\end{aligned}
$$

A igualdade $(*)$ é devido ao fato de que $\varphi(D_g) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$, isso significa que, para cada $g \in G$, $\varphi(a_g) = \beta_g(\varphi(b_g))$ para algum $b_g \in A$.

Logo, $\psi(1_A\delta_1) = \varphi(1_A)\delta_1 = 1_{\psi(A*_\alpha G)}$. Assim, $\psi : A *_\alpha G \to \psi(A *_\alpha G)$ é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Para mostrarmos que $A *_\alpha G$ é associativo é suficiente mostrarmos que $B *_\beta G$ é associativo. De fato, sejam $a_g\delta_g, b_h\delta_h, c_z\delta_z \in B *_\beta G$. Então

$$
\begin{aligned}
(a_g\delta_g b_h\delta_h)c_z\delta_z &= \beta_g(\beta_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}c_z\delta_z \\
&= \beta_{gh}(\beta_{(gh)^{-1}}(\beta_g(\beta_{g^{-1}}(a_g)b_h))c_z)\delta_{(gh)z} \\
&= \beta_g(\beta_{g^{-1}}(a_g)b_h)\beta_{gh}(c_z)\delta_{g(hz)} \\
&= \beta_g(\beta_{g^{-1}}(a_g)b_h\beta_h(c_z))\delta_{g(hz)} \\
&= a_g\delta_g(b_h\beta_h(c_z)\delta_{hz}) \\
&= a_g\delta_g(\beta_h(\beta_{h^{-1}}(b_h)c_z)\delta_{hz}) \\
&= a_g\delta_g(b_h\delta_h c_z\delta_z).
\end{aligned}
$$

Assim, completamos a prova. ■

Pelo Exemplo 2.11 nem todo skew anel de grupo $A *_\alpha G$ é associativo e portanto podemos concluir que nem toda ação parcial α admite uma ação envolvente β.

Observação 3.5 Sejam A uma $\mathbb{K}$-álgebra e I um ideal de A com unidade 1_I de I. Então 1_I é um idempotente central de A e $I = 1_I A = A 1_I$.

De fato, 1_I é claramente um idempotente e, para qualquer $a \in A$, $a1_I$ e $1_I a$ estão ambos em I. Além disso, $a1_I = 1_I(a1_I) = (1_I a)1_I = 1_I a$, para todo $a \in A$ e isso nos diz que 1_I é central em A.

Lema 3.6 *Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra que é uma soma (não necessariamente direta) de um número finito de ideais em que cada ideal é uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária. Então A é uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária.*

Demonstração: Usando o processo de indução no número de somandos, é suficiente mostrarmos para o caso em que $A = I + J$ em que I e J são ideais de A com unidades 1_I e 1_J respectivamente. Seja $a \in A$. Então $a = x + y$ com $x \in I$ e $y \in J$. Portanto

$$\begin{aligned}
a(1_I + 1_J - 1_I 1_J) &= (x+y)(1_I + 1_J - 1_I 1_J) \\
&= x1_I + x1_J - x(1_I 1_J) + y1_I + y1_J - y(1_I 1_J) \\
&= x + x1_J - x1_J + y1_I + y - y1_I \\
&= x + y = a.
\end{aligned}$$

Analogamente, $(1_I + 1_J - 1_I 1_J)a = a$, para todo $a \in A$, e isso nos diz que $1_A = 1_I + 1_J - 1_I 1_J$. ■

Enunciamos agora o teorema que fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de uma ação envolvente.

Teorema 3.7 *Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária. Então a ação parcial α do grupo G em A possui uma ação envolvente β se, e somente se, cada ideal D_g $(g \in G)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária. Além disso, β (se existir) é única, a menos de equivalência.*

Demonstração: Suponhamos que exista β a ação envolvente de α e φ de A em um ideal de B um $\mathbb{K}$-isomorfismo de álgebras que nos dá a equivalência correspondente. Pela definição de uma ação envolvente temos, para cada $g \in G$, que $\varphi(D_g) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$ é um ideal de B, pois $\varphi(A)$ e $\beta_g(\varphi(A))$ são ideais de B. É claro que $\varphi(D_g)$ é uma $\mathbb{K}$-subálgebra de B, pois φ e β_g são $\mathbb{K}$-homomorfismos de álgebras e A é uma $\mathbb{K}$-álgebra.

Afirmamos que $\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A)) \in \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$ é a unidade de $\varphi(D_g)$. De fato, seja $y \in \varphi(D_g)$. Então $y = \varphi(a) = \beta_g(\varphi(b))$ para alguns $a, b \in A$. Portanto,

$$\begin{aligned}
(\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A)))y &= (\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A)))\beta_g(\varphi(b)) \\
&= \varphi(1_A)(\beta_g(\varphi(1_A))\beta_g(\varphi(b))) \\
&= \varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A)\varphi(b)) \\
&= \varphi(1_A)\beta_g(\varphi(b)) = \varphi(1_A)\varphi(a) = \varphi(a) = y.
\end{aligned}$$

Analogamente, $y(\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A))) = y$. Logo, $\varphi(D_g)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária e isso nos diz que D_g é uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária.

Agora, façamos a recíproca. Sendo D_g uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária, segue pela Observação 3.5 que, para cada $g \in G$, existe 1_g um idempotente central em A tal que $D_g = 1_g A = A 1_g$.

Consideremos $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G, A)$ a $\mathbb{K}$-álgebra das funções de G em A com as operações dadas por $(f+h)(x) = f(x) + h(x)$ e $(fh)(x) = f(x)h(x)$, $\forall x \in G$. Além disso, para todo $k \in \mathbb{K}$ e para qualquer $f \in \mathcal{F}$, $(kf)(x) = kf(x)$, $\forall x \in G$ e $1_{\mathcal{F}} : G \to A$ dada por $1_{\mathcal{F}}(x) = 1_A$, $\forall x \in G$, é a unidade de $\mathcal{F}$. Definimos

$$\begin{array}{rcccccl}
\beta : & G & \to & Aut_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}) & & & \\
& g & \mapsto & \beta(g) = \beta_g : & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \\
& & & & f & \mapsto & (\beta_g(f))(h) = f(g^{-1}h), \ h \in G.
\end{array}$$

Mostremos que β está bem definida, ou seja, $\beta_g \in Aut_{\mathbb{K}}(\mathcal{F})$. De fato, para quaisquer $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ e para todo $k \in \mathbb{K}$ temos

$$\begin{aligned}
(\beta_g(f_1 + f_2)))(h) &= (f_1 + f_2)(g^{-1}h) = f_1(g^{-1}h) + f_2(g^{-1}h) \\
&= (\beta_g(f_1))(h) + (\beta_g(f_2))(h) = (\beta_g(f_1) + \beta_g(f_2))(h)
\end{aligned}$$

e isso nos diz que $\beta_g(f_1 + f_2) = \beta_g(f_1) + \beta_g(f_2)$, também

$$\begin{aligned}
(\beta_g(f_1 f_2))(h) &= (f_1 f_2)(g^{-1}h) = f_1(g^{-1}h) f_2(g^{-1}h) \\
&= (\beta_g(f_1))(h)(\beta_g(f_2))(h) = (\beta_g(f_1)\beta_g(f_2))(h)
\end{aligned}$$

e portanto, $\beta_g(f_1 f_2) = \beta_g(f_1)\beta_g(f_2)$. Finalmente, para todo $k \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}(\beta_g(kf_1))(h) &= (kf_1)(g^{-1}h) = kf_1(g^{-1}h) \\ &= k(\beta_g(f_1)(h)) = (k\beta_g(f_1))(h)\end{aligned}$$

para todo $h \in G$ e daí, $\beta_g(kf_1) = k\beta_g(f_1)$ e claramente, $\beta_g(1_{\mathcal{F}}) = 1_{\mathcal{F}}$.

Mostremos que β é uma ação de G em $\mathcal{F}$. De fato, sejam $f \in \mathcal{F}$ e $h \in G$. Então para quaisquer $g_1, g_2 \in G$, temos

$$\begin{aligned}((\beta(g_1g_2))(f))(h) &= (\beta_{g_1g_2}(f))(h) = f(g_2^{-1}(g_1^{-1}h)) = (\beta_{g_2}(f))(g^{-1}h) \\ &= (\beta_{g_1}(\beta_{g_2}(f)))(h) = ((\beta_{g_1} \circ \beta_{g_2})(f))(h) \\ &= ((\beta(g_1) \circ \beta(g_2))(f))(h),\end{aligned}$$

e portanto, $\beta(g_1g_2) = \beta(g_1) \circ \beta(g_2)$.

Claramente, para cada $g, h \in G$, o idempotente central 1_g1_h de A é a unidade da $\mathbb{K}$-álgebra $D_g \cap D_h$ e portanto, $D_g \cap D_h = 1_g1_hA$. Sendo α uma ação parcial, a igualdade $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$ implica que

$$\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = 1_g1_{gh}. \tag{3.1}$$

Para cada $a \in A$, obviamente $a1_g \in D_g$ e podemos definir

$$\begin{array}{rcccccl}\varphi: & A & \to & \mathcal{F} & & & \\ & a & \mapsto & \varphi(a): & G & \to & A \\ & & & & g & \mapsto & (\varphi(a))(g) = \alpha_{g^{-1}}(a1_g).\end{array}$$

Afirmamos que φ é um monomorfismo de anéis. Sejam $a, b \in A$ e $h \in G$. Então

$$\begin{aligned}(\varphi(a+b))(h) &= \alpha_{h^{-1}}((a+b)1_h) = \alpha_{h^{-1}}(a1_h + b1_h) \\ &= \alpha_{h^{-1}}(a1_h) + \alpha_{h^{-1}}(b1_h) = \varphi(a))(h) + (\varphi(b))(h) \\ &= (\varphi(a) + \varphi(b))(h).\end{aligned}$$

Logo, $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Também,

$$\begin{aligned}(\varphi(a)\varphi(b))(h) &= (\varphi(a))(h)(\varphi(b))(h) = \alpha_{h^{-1}}(a1_h)\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\ &= \alpha_{h^{-1}}(a1_h b1_h) = \alpha_{h^{-1}}(ab1_h^2) = \alpha_{h^{-1}}(ab1_h) \\ &= (\varphi(ab))(h).\end{aligned}$$

Assim, $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$.

Seja $a \in Ker(\varphi)$. Então $\varphi(a) = 0$. Logo, $(\varphi(a))(g) = 0$ para todo $g \in G$, em particular, para $g = 1$ (neutro de G). Assim, $0 = (\varphi(a))(1) = \alpha_1(a1_A) = a$ e isso implica que $Ker(\varphi) = \{0\}$. Donde, φ é injetora.

Claramente, $\varphi : A \to \varphi(A)$ é um isomorfismo de anéis. Além disso, observemos que $\varphi(1_A) = 1_{\varphi(A)}$ e que φ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-módulos. De fato, $\forall\, k \in \mathbb{K}$, temos que $((k\varphi(a))(h) = k((\varphi(a))(h)) = k(\alpha_{h^{-1}}(a1_h)) = \alpha_{h^{-1}}(k(a1_h)) = \alpha_{h^{-1}}((ka)1_h) = \varphi(ka)(h)$ e isso implica que $k\varphi(a) = \varphi(ka)$.

Consideremos B a subálgebra de $\mathcal{F}$ gerada por $\bigcup\limits_{g \in G} \beta_g(\varphi(A))$. Provemos que a restrição de β à B é uma ação envolvente para α. Denotamos tal restrição por β.

Primeiramente, verifiquemos a condição ii') da Definição 3.3, isto é, para todo $x \in D_{g^{-1}}$, $(\beta_g \circ \varphi)(x) = (\varphi \circ \alpha_g)(x)$.

De fato, para quaisquer $g, h \in G$ e qualquer $a \in D_{g^{-1}}$, temos

$$((\beta_g \circ \varphi)(a))(h) = (\varphi(a))(g^{-1}h) = \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) \text{ e}$$

$$((\varphi \circ \alpha_g)(a))(h) = (\varphi(\alpha_g(a)))(h) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_h).$$

Portanto, a condição ii') é satisfeita se, e somente se,

$$\alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_h). \tag{3.2}$$

Como $a1_{g^{-1}h} \in D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h}$ ($a \in D_{g^{-1}}$), podemos separar $\alpha_{h^{-1}g}$

no lado esquerdo da igualdade acima e obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) &= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}h})) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h}))\\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h})) \overset{(*)}{=} \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_g1_h)\\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_h),
\end{aligned}$$

em que $(*)$ segue da igualdade (3.1).

Agora mostremos que $\varphi(D_g) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$ para todo $g \in G$, que é a condição i').

Seja $y \in \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$. Então $y = \varphi(a) = \beta_g(\varphi(b))$ para alguns $a, b \in A$. Temos que $(\varphi(a))(1) = (\beta_g(\varphi(b)))(1)$ que é equivalente à $a = (\varphi(b))(g^{-1}) = \alpha_g(b1_{g^{-1}}) \in D_g$. Portanto, $y = \varphi(a) \in \varphi(D_g)$ e $\varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A)) \subset \varphi(D_g)$.

Seja $y \in \varphi(D_g)$. Então $y = \varphi(a)$ para algum $a \in D_g$. É claro que $y = \varphi(a) \in \varphi(A)$. Consideremos $b = \alpha_{g^{-1}}(a)$ e para qualquer $h \in G$ temos que

$$\begin{aligned}
(\beta_g(\varphi(b)))(h) &= (\varphi(b))(g^{-1}h) = (\varphi(\alpha_{g^{-1}}(a)))(g^{-1}h)\\
&= \alpha_{h^{-1}g}(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}h}) = \alpha_{h^{-1}g}(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h})\\
&\overset{(*)}{=} \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h}))\\
&= \alpha_{h^{-1}}(a\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h})) \overset{(**)}{=} \alpha_{h^{-1}}(a1_g1_h)\\
&= \alpha_{h^{-1}}(a1_h) = (\varphi(a))(h),
\end{aligned}$$

em que $(*)$ e $(**)$ são devidas, respectivamente, às igualdades em (3.2) e (3.1).

Logo, $y = \varphi(a) = \beta_g(\varphi(b)) \in \beta_g(\varphi(A))$ e portanto, $\varphi(D_g) \subset \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A)$. A condição iii') é claramente satisfeita.

Com o objetivo de provarmos que β é uma ação envolvente para α, mostremos a seguir que $\varphi(A)$ é um ideal de B. É claro que $\varphi(A)$ é subanel de B e portanto, devemos provar que, para quaisquer $y \in \varphi(A)$ e $z \in B$, temos que yz e zy pertencem à $\varphi(A)$.

Sendo B a subálgebra de $\mathcal{F}$ gerada por $\bigcup\limits_{g \in G} \beta_g(\varphi(A))$, podemos escrever $z = \sum\limits_{g_i \in G} \beta_{g_i}(\varphi(a_i))$ em que $a_i \in A$ e $y = \varphi(b)$ para algum $b \in A$. Assim, $zy = \sum\limits_{g_i \in G} \beta_{g_i}(\varphi(a_i))\varphi(b)$ e $yz = \sum\limits_{g_i \in G} \varphi(b)\beta_{g_i}(\varphi(a_i))$ e desta forma, é suficiente provarmos que, para quaisquer $g \in G$ e $a, b \in A$, $\beta_g(\varphi(a))\varphi(b)$ e $\varphi(b)\beta_g(\varphi(a))$ pertencem à $\varphi(A)$.

Para todo $h \in G$, temos

$$\begin{aligned}
(\beta_g(\varphi(a))\varphi(b))(h) &= (\beta_g(\varphi(a))(h)(\varphi(b))(h) \\
&= (\varphi(a))(g^{-1}h)(\varphi(b))(h) \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})1_{h^{-1}g}1_{h^{-1}}\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\
&\stackrel{(*)}{=} \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}1_{g^{-1}})\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}1_{g^{-1}})\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\
&\stackrel{(**)}{=} \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_h)\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_h b1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})b1_h) \\
&= (\varphi(\alpha_g(a1_{g^{-1}})b))(h),
\end{aligned}$$

em que $(*)$ e $(**)$ são devidas às igualdades (3.1) e (3.2) respectivamente. Portanto, $\beta_g(\varphi(a))\varphi(b)) = \varphi(\alpha_g(a1_{g^{-1}})b)) \in \varphi(A)$. Analogamente, mostramos que $yz \in \varphi(A)$. Logo, $\varphi(A)$ é um ideal de B.

Vamos mostrar que β é única, a menos de equivalência, ou seja, se β' é ação de G em uma $\mathbb{K}$-álgebra B' e, além disso, é uma envolvente para α, então existe um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\phi : B' \to B$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

i) $\phi(\varphi'(A) \cap \beta'_g(\varphi'(A))) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$ para cada $g \in G$ em que $\varphi' : A \to B'$ é o monomorfismo correspondente à β';

ii) $(\phi \circ \beta'_g)(x) = (\beta_g \circ \phi)(x)$ para todo $x \in \varphi'(A) \cap \beta'_g(\varphi'(A))$.

Denotaremos a restrição de β' que é equivalente à α por β' mesmo.

Sendo β' a envolvente para α, segue que B' é gerada por $\bigcup\limits_{g\in G}\beta'_g(\varphi'(A))$ e isso nos diz que dado $x \in B'$, então $x = \sum\limits_{i=1}^{s}\beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))$ com $g_i \in G$ e $a_i \in A$.

Definimos $\phi : B' \to B$ por $\phi(\beta'_g(\varphi'(a))) = \beta_g(\varphi(a))$ e estendemos linearmente, isto é, $\phi(\sum\limits_{i=1}^{r}\beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))) = \sum\limits_{i=1}^{r}\beta_{g_i}(\varphi(a_i))$. Vejamos que ϕ está bem definida, ou seja, se $\sum\limits_{i=1}^{s}\beta'_{g_i}(\varphi'(a_i)) = 0$ então $\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_{g_i}(\varphi(a_i)) = 0$.

Temos, para todo $h \in G$, que $\sum\limits_{i=1}^{s}\beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))\beta'_h(\varphi'(a)) = 0$. Aplicando $\beta'_{h^{-1}}$ segue que $\sum\limits_{i=1}^{s}\beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a) = 0$. Como $\varphi'(A)$ é um ideal de B', então $\beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a) \in \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(A))\cap\varphi'(A) = \varphi'(D_{h^{-1}g_i}) = \varphi'(A1_{h^{-1}g_i})$.

Claramente, $\varphi'(1_{h^{-1}g_i})$ é a unidade de $\varphi'(A1_{h^{-1}g_i})$. Assim,

$$\begin{aligned}
\beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a) &= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a)\varphi'(1_{h^{-1}gi}) \\
&= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(1_{h^{-1}gi})\varphi'(a) \\
&= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))(\varphi'\circ\alpha_{h^{-1}g_i})(1_{g_i^{-1}h})\varphi'(a) \\
&\overset{(*)}{=} \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))(\beta'_{h^{-1}g_i}\circ\varphi')(1_{g_i^{-1}h})\varphi'(a) \\
&= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i)\varphi'(1_{g_i^{-1}h}))\varphi'(a) \\
&= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i1_{g_i^{-1}h}))\varphi'(a) \\
&= (\beta'_{h^{-1}g_i}\circ\varphi')(a_i1_{g_i^{-1}h})\varphi'(a) \\
&\overset{(**)}{=} (\varphi'\circ\alpha_{h^{-1}g_i})(a_i1_{g_i^{-1}h})\varphi'(a) \\
&= \varphi'(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i1_{g_i^{-1}h})a),
\end{aligned}$$

em que as igualdades $(*)$ e $(**)$ são devidas à condição ii') da definição de ação envolvente. De maneira similar, mostramos que $\beta_{h^{-1}g_i}(\varphi(a_i))\varphi(a) = \varphi(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i1_{g_i^{-1}h})a)$. Assim,

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{s} \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a) = \sum_{i=1}^{s} \varphi'(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a) \\
&= \varphi'(\sum_{i=1}^{s} \alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a).
\end{aligned}
$$

Como φ' é injetora, então $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a = 0$. Aplicando φ em ambos os lados da igualdade temos

$$
\begin{aligned}
0 &= \varphi(\sum_{i=1}^{s} \alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a) = \sum_{i=1}^{s} \varphi(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \beta_{h^{-1}g_i}(\varphi(a_i))(\varphi(a)).
\end{aligned}
$$

Aplicando β_h na igualdade acima, vem que $0 = \sum\limits_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(a_i))\beta_h(\varphi(a))$, para quaisquer $a \in A$ e $h \in G$. Concluímos que o elemento $\sum\limits_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(a_i))$ anula cada $\beta_h(\varphi(A))$.

Seja B_1 a subálgebra de B gerada por $\bigcup\limits_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(A))$. Então $\sum\limits_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) \in B_1$ e, pelo Lema 3.6, B_1 tem unidade 1_{B_1}. Logo, $\sum\limits_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) = \sum\limits_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(a_i))1_{B_1} = 0$, pois 1_{B_1} é escrito como uma soma (finita) de elementos que são anulados por $\sum\limits_{i=1}^{s} \beta_{g_i}(\varphi(a_i))$.

Portanto, $\phi : B' \to B$ está bem definida. De maneira similar, é possível mostrar que $\phi' : B \to B'$ dada por $\phi'(\beta_g(\varphi(a))) = \beta'_g(\varphi'(a))$ está bem definida.

Claramente, ϕ é linear. Para $k \in \mathbb{K}$ e $x \in B'$, escrevemos $x = \sum\limits_{i=1}^{t} \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))$ e daí,

$$
\phi(kx) = \phi(k\sum_{i=1}^{t} \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))) = \phi(\sum_{i=1}^{t} k\beta'_{g_i}(\varphi'(a_i)))
$$

$$
\begin{aligned}
= \phi(\sum_{i=1}^{t} \beta'_{g_i}(\varphi'(ka_i)) &= \sum_{i=1}^{t} \beta_{g_i}(\varphi(ka_i)) = k \sum_{i=1}^{t} \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) \\
&= k\phi(\sum_{i=1}^{t} \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))) = k\phi(x).
\end{aligned}
$$

Donde, ϕ é $\mathbb{K}$-linear e obviamente é sobrejetora. Assim, $\phi(1_{B'}) = 1_B$, pois para todo $y \in B$, $\phi(1_{B'})y \overset{(*)}{=} \phi(1_{B'})\phi(x) \overset{(**)}{=} \phi(1_{B'}x) = \phi(x) = y$ e da mesma forma, $y\phi(1_{B'}) = y$; a igualdade $(*)$ se deve ao fato de que sendo ϕ sobrejetora, $y = \phi(x)$ para algum $x \in B'$ e $(**)$ se deve o fato de que ϕ é multiplicativa, abaixo mostramos este fato.

Para concluirmos que ϕ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras, resta provarmos que $\phi(\beta'_g(\varphi'(a))\beta'_h(\varphi'(b))) = \phi(\beta'_g(\varphi'(a)))\phi(\beta'_h(\varphi'(b)))$. Vamos identificar A com sua imagem em B e em B' omitindo desta forma φ e φ'. Mostremos que $\phi(\beta'_g(a)\beta'_h(b)) = \beta_g(a)\beta_h(b)$.

De fato, como A é um ideal de B, então para qualquer $z \in G$, temos que $\beta_z(A)$ é também um ideal de B. Portanto, para quaisquer $a, b \in A$, $a\beta_z(b) \in A \cap \beta_z(A) = D_z$. Como D_z tem unidade 1_z, temos

$$
a\beta_z(b) = 1_z a\beta_z(b) = \beta_z(\beta_{z^{-1}}(1_z a)b) = \beta_z(\alpha_{z^{-1}}(1_z a)b).
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\beta_g(a)\beta_h(b) &= \beta_g(a\beta_{g^{-1}h}(b)) = \beta_g(\beta_{g^{-1}h}(\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}a)b)) \\
&= \beta_h(\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}a)b)\,(*).
\end{aligned}
$$

Analogamente, $\beta'_g(a)\beta'_h(b) = \beta'_h(\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}a)b)\,(**)$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\phi(\beta'_g(a)\beta'_h(b)) &\overset{(**)}{=} \phi(\beta'_h(\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}a)b)) = \beta_h(\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}a)b) \\
&\overset{(*)}{=} \beta_g(a)\beta_h(b) = \phi(\beta'_g(a))\phi(\beta'_h(b)).
\end{aligned}
$$

Finalmente, é imediato que $\phi \circ \phi' = Id_B$ e $\phi' \circ \phi = Id_{B'}$ e daí, ϕ é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras. Devemos verificar as condições i) e ii) da definição de ações parciais equivalentes. A condição i), isto é,

$\phi(\varphi'(A) \cap \beta'_g(\varphi'(A))) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$, $\forall g \in G$ é imediata, pois sendo ϕ injetora segue que $\phi(\varphi'(A) \cap \beta'_g(\varphi'(A))) = \phi(\varphi'(A)) \cap \phi(\beta'_g(\varphi'(A)))$ e cálculos simples mostram que $\phi(\varphi'(A)) = \varphi(A)$ e que $\phi(\beta'_g(\varphi'(A))) = \beta_g(\varphi(A))$, para todo $g \in G$.

Agora, a condição ii). Seja $x \in \varphi'(A) \cap \beta'_{g^{-1}}(\varphi'(A))$. Então $x = \beta'_{g^{-1}}(\varphi'(a))$ para algum $a \in A$ e assim,

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \beta'_g)(x) &= (\phi \circ \beta'_g)(\beta'_{g^{-1}}(\varphi'(a))) = \phi(\beta'_g(\beta'_{g^{-1}}(\varphi'(a))) \\
&= \phi(\varphi'(a)) = \varphi(a) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(\varphi(a))) \\
&= \beta_g(\phi(\beta'_{g^{-1}}(\varphi'(a)))) = (\beta_g \circ \phi)(\beta'_{g^{-1}}(\varphi'(a))) \\
&= (\beta_g \circ \phi)(x). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Capítulo 4

O contexto de Morita para ações parciais

O principal objetivo deste capítulo é construir, explicitamente, o contexto de Morita para os anéis $A *_\alpha G$ e $B *_\beta G$, em que α é uma ação parcial de um grupo G em uma $\mathbb{K}$-álgebra A e (β, B) é a ação envolvente para tal ação parcial α. Além disso, mostraremos que os anéis $A *_\alpha G$ e $B *_\beta G$ são Morita equivalentes.

A fim de mostrarmos os resultados acima, faremos um estudo sobre o contexto de Morita. Apresentamos exemplos onde construímos tal contexto para familiarizar não somente o leitor, mas principalmente, o próprio autor deste trabalho sobre este assunto.

Mostramos um teorema importante de Morita tal que para seu desenvolvimento, são apresentados uma série de definições e resultados que aparecem ao longo das duas primeiras seções deste capítulo, justificando assim a existência das mesmas.

Neste capítulo, M é um R-módulo à esquerda, por isso escrevemos apenas M um R-módulo ficando subentendido que é à esquerda. Denotamos por R-Mod a categoria dos R-módulos à esquerda e naturalmente, Mod-R a categoria dos R-módulos à direita. Para quaisquer R-módulos à esquerda M e N, denotamos o grupo abeliano dos R-homomorfismos de M em N por $Hom(M,N)$.

As definições e resultados deste capítulo são baseados principalmente em [2] e [12], mas são bibliografias auxiliares importantes [7], [8], [13] e [14].

4.1 Geradores em R-Mod

Iniciamos esta seção definindo um R-módulo gerador da categoria R-Mod e fazemos observações decorrentes de tal definição. Apresentamos o *ideal traço* de um R-módulo M, cuja utilidade é caracterizar quando um R-módulo é um gerador de R-Mod.

Definição 4.1 *Seja M um R-módulo. Dizemos que M é um gerador de um R-módulo N se existe um conjunto de índices I e um epimorfismo de R-módulos $\psi : M^{(I)} \to N$. M é dito um gerador de* R-Mod*, se M gera qualquer módulo em* R-Mod.

Observação 4.2 i) O anel R é um gerador de R-Mod, pois todo módulo é imagem homomórfica de um módulo livre, veja Corolário 1.9.

ii) Seja $f : M' \to M$ um epimorfismo de R-módulos. Se M é um gerador de R-Mod então M' também o é. De fato, seja N um R-módulo. Como M é um gerador, existe um conjunto de índices I e um epimorfismo de R-módulos $\psi : M^{(I)} \to N$. Definimos $\varphi : M'^{(I)} \to M^{(I)}$ por $\varphi(\sum_{i \in I} x_i) = \sum_{i \in I} f(x_i)$ e como f é um epimorfismo, segue que φ também o é. Logo, $\psi \circ \varphi : M'^{(I)} \to N$ é um epimorfismo de R-módulos e isso nos diz que M' é um gerador de R-Mod.

iii) Seja M um gerador de R-Mod. Se N é um gerador de M, então N é também um gerador de R-Mod, veja ([14], p.109).

O próximo lema é útil no sentido que o mesmo nos diz quando um módulo é um gerador de R-Mod, além de ser importante para a demonstração do Teorema 4.14. Para fazê-lo, definimos o *ideal traço* de um R-módulo M e precisamos da seguinte observação. No que segue, $M^* = Hom(M,R)$.

Observação 4.3 Seja M um R-módulo. Então M^* é um R-módulo à direita com a ação dada por $(fr)(x) = f(x)r$, para quaisquer $f \in M^*$, $r \in R$ e $x \in M$. Mostremos que $fr \in M^*$, para quaisquer $f \in M^*$ e $r \in R$. Sejam $x_1, x_2 \in M$ e $r' \in R$. Então

$$\begin{aligned}(fr)(x_1 + x_2) &= f(x_1 + x_2)r = (f(x_1) + f(x_2))r = f(x_1)r + f(x_2)r \\ &= (fr)(x_1) + (fr)(x_2) \text{ e}\end{aligned}$$

$$(fr)(r'x_1) = f(r'x_1)r = (r'f(x_1))r = r'(f(x_1)r) = r'((fr)(x_1)).$$

Finalmente, para quaisquer $r_1, r_2 \in R$ e $f \in M^*$, temos

$$(f(r_1r_2))(x) = f(x)(r_1r_2) = (f(x)r_1)r_2 = ((fr_1)(x))r_2 = ((fr_1)r_2)(x),$$

para todo $x \in M$. Logo, $f(r_1r_2) = (fr_1)r_2$. As demais condições para que M^* seja um R-módulo à direita são facilmente verificadas.

Definição 4.4 *Seja M um R-módulo. O ideal traço de M em R é definido como*

$$Tr(M,R) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) : k \in \mathbb{N},\, x_i \in M \,\text{e}\, f_i \in M^* \right\}.$$

Na verdade, $Tr(M,R)$ é um ideal de R. Sejam $x \in Tr(M,R)$ e $r \in R$. Então $x = \sum_{i=1}^{s} f_i(x_i)$ com $x_i \in M$ e $f_i \in M^*$. Daí,

$$rx = r(\sum_{i=1}^{s} f_i(x_i)) = \sum_{i=1}^{s} rf_i(x_i) = \sum_{i=1}^{s} f_i(rx_i) \in Tr(M,R).$$

Também,

$$xr = (\sum_{i=1}^{s} f_i(x_i))r = \sum_{i=1}^{s} f_i(x_i)r = \sum_{i=1}^{s}(f_ir)(x_i) \in Tr(M,R),$$

pois $f_ir \in M^*$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, s\}$.

Lema 4.5 *Seja M um R-módulo. São equivalentes:*

i) M *é um gerador de* R-Mod*;*

ii) $Tr(M,R)=R$*;*

iii) R *é imagem homomórfica de* $M^{(n)}$*, para algum* $n\in\mathbb{N}$.

Demonstração: i) $\Rightarrow$ ii) Basta mostrarmos que $R\subseteq Tr(M,R)$, pois $Tr(M,R)$ é um ideal de R. De fato, como M é um gerador, existe um epimorfismo $\psi : M^{(I)}\to R$, para algum conjunto de índices I. Assim, existe $\sum_{i\in I}x_i\in M^{(I)}$ tal que $\psi(\sum_{i\in I}x_i)=1$. Consideremos, para cada $i\in I$, a inclusão canônica $\mu_i : M\to M^{(I)}$ e daí, $\psi\circ\mu_i : M\to R$ é um elemento de M^*. Portanto, dado $r\in R$, temos que

$$\begin{aligned} r &= r1 = r\psi(\sum_{i\in I}x_i) = r\psi(\sum_{i\in I}\mu_i(x_i)) = r(\sum_{i\in I}(\psi\circ\mu_i)(x_i)) \\ &= \sum_{i\in I}(\psi\circ\mu_i)(rx_i)\in Tr(M,R). \end{aligned}$$

Logo, $R\subseteq Tr(M,R)$ e daí, $R=Tr(M,R)$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Como $Tr(M,R)=R$, existem $n\in\mathbb{N}$, $f_i\in M^*$ e $m_i\in M$ tais que $\sum_{i=1}^n f_i(m_i)=1$. Seja $g : M^{(n)}\to R$ dada por $g(\sum_{i=1}^n y_i)=\sum_{i=1}^n f_i(y_i)$. Mostremos que g é um epimorfismo de R-módulos. Claramente, g é um homomorfismo de R-módulos, pois cada f_i o é.

Agora, seja $r\in R$. Então $x=\sum_{i=1}^n rm_i\in M^{(n)}$ e portanto,

$$g(x)=g(\sum_{i=1}^n rm_i)=rg(\sum_{i=1}^n m_i)=r\sum_{i=1}^n f_i(m_i)=r1=r.$$

iii) $\Rightarrow$ i) Sendo R imagem homomórfica de $M^{(n)}$, para algum $n\in\mathbb{N}$, segue que existe um epimorfismo de R-módulos $\psi : M^{(n)}\to R$ e isso significa que M gera o R-módulo R. Como R é um gerador de R-Mod, então M também o é, veja Observação 4.2 iii). ■

4.2 Contexto de Morita

Agora, apresentamos a definição de um contexto de Morita. Na próxima seção, é construído um tal contexto para os anéis $A*_\alpha G$ e

$B *_\beta G$. Entretanto, antes do contexto parcial, apresentamos exemplos como os anéis de matrizes cujas entradas não são necessariamente anéis e um outro exemplo no qual trabalhamos um pouco mais com o anel de endomorfismos de M e com o R-módulo à direita M^*, para ambos é construído um contexto de Morita.

Definição 4.6 *Um contexto de Morita é uma sêxtupla* $(R, R', M, M', \tau, \tau')$ *em que* R *e* R' *são anéis,* M *é um* (R, R')*-bimódulo,* M' *é um* (R', R)*-bimódulo e as funções* $\tau : M \otimes_{R'} M' \to R$ *e* $\tau' : M' \otimes_R M \to R'$ *são homomorfismos de bimódulos tais que os seguintes diagramas comutam*

$$\begin{tikzcd} M \otimes_{R'} M' \otimes_R M \arrow[r, "I_M \otimes \tau'"] \arrow[d, "\tau \otimes I_M"] & M \otimes_{R'} R' \arrow[d, "\psi_1"] \\ R \otimes_R M \arrow[r, "\psi_2"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M' \otimes_R M \otimes_{R'} M' \arrow[r, "I_{M'} \otimes \tau"] \arrow[d, "\tau' \otimes I_{M'}"] & M' \otimes_R R \arrow[d, "\psi_1'"] \\ R' \otimes_{R'} M' \arrow[r, "\psi_2'"] & M'. \end{tikzcd}$$

A comutatividade dos diagramas é equivalente às igualdades $\psi_1 \circ (I_M \otimes \tau') = \psi_2 \circ (\tau \otimes I_M)$ e $\psi_1' \circ (I_{M'} \otimes \tau) = \psi_2' \circ (\tau' \otimes I_{M'})$, em que ψ_1, ψ_2, ψ_1' e ψ_2' são os isomorfismos canônicos.

No exemplo a seguir, temos por objetivo a construção de um contexto de Morita. Para isso, consideramos R e T anéis, M um (R, T)-bimódulo e M' um (T, R)-bimódulo.

Exemplo 4.7 Definimos o conjunto

$$A = \begin{pmatrix} R & M \\ M' & T \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ m' & t \end{pmatrix} : r \in R, m \in M, t \in T \text{ e } m' \in M' \right\}.$$

Primeiramente, queremos introduzir em A uma estrutura de anel. Definimos a soma de dois elementos de A como a soma componente a componente. Já para o produto, são necessárias a existência de duas aplicações $f : M \times M' \to R$ e $g : M' \times M \to T$ tais que para quaisquer dois elementos de A tenhamos

$$\begin{pmatrix} r_1 & m_1 \\ m_1' & t_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_2 & m_2 \\ m_2' & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1r_2 + f(m_1, m_2') & r_1m_2 + m_1t_2 \\ m_1'r_2 + t_1m_2' & g(m_1', m_2) + t_1t_2 \end{pmatrix}.$$

Para que A seja um anel, é necessária a verificação das propriedades distributiva (à direita e à esquerda) e a associativa. Veremos, no entanto, que tais propriedades são válidas se as funções f e g satisfazem determinadas condições que serão dadas a seguir. As demais propriedades para que tenhamos um anel são facilmente verificadas. Sejam $x, y, z \in A$. Então

$$x = \begin{pmatrix} r_1 & m_1 \\ m_1' & t_1 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} r_2 & m_2 \\ m_2' & t_2 \end{pmatrix} \text{ e } z = \begin{pmatrix} r_3 & m_3 \\ m_3' & t_3 \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo os cálculos para $x(y+z)$ e $xy + xz$, obtemos

$$x(y+z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

em que $a = r_1(r_2+r_3)+f(m_1, m_2'+m_3')$, $b = r_1(m_2+m_3)+m_1(t_2+t_3)$, $c = m_1'(r_2+r_3) + t_1(m_2' + m_3')$ e $d = g(m_1', m_2+m_3) + t_1(t_2+t_3)$ e

$$xy + xz = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

em que $a' = r_1(r_2+r_3) + f(m_1, m_2') + f(m_1, m_3')$, $b' = r_1(m_2+m_3) + m_1(t_2+t_3)$, $c' = m_1'(r_2+r_3) + t_1(m_2'+m_3')$ e $d' = g(m_1', m_2) + t_1(t_2 + t_3) + g(m_1', m_3)$. Assim, concluímos que $x(y+z) = xy+xz$ se, e somente se,

$$f(m_1, m_2' + m_3') = f(m_1, m_2') + f(m_1, m_3') \text{ e}$$

$$g(m_1', m_2 + m_3) = g(m_1', m_2) + g(m_1', m_3).$$

Analogamente, concluímos que $(x+y)z = xz + yz$ se, e somente se,

$$f(m_1 + m_2, m_3') = f(m_1, m_3') + f(m_2, m_3') \text{ e}$$

$$g(m_1' + m_2', m_3) = g(m_1', m_3) + g(m_2', m_3).$$

Logo, f e g são funções aditivas em cada componente e mediante esta propriedade de f e g, temos que $x(yz) = (xy)z$ se, e somente se,

$$r_1 f(m_2, m_3') + f(m_1, m_2' r_3) + f(m_1, t_2 m_3')$$

$$= f(m_1, m_2')r_3 + f(r_1 m_2, m_3') + f(m_1 t_2, m_3'),$$

$$g(m_1', r_2 m_3) + g(m_1', m_2 t_3) + t_1 g(m_2', m_3)$$

$$= g(m_1' r_2, m_3) + g(t_1 m_2', m_3) + g(m_1', m_2)t_3,$$

$$m_1 g(m_2', m_3) = f(m_1, m_2')m_3 \text{ e } m_1' f(m_2, m_3') = g(m_1', m_2)m_3',$$

para quaisquer $m_i \in M$, $m_i' \in M'$, $r_i \in R$ e $t_i \in T$, para $i = 1, 2, 3$.

Tendo em mente as quatro igualdades acima, podemos dizer que se as funções f e g satisfazem às condições abaixo, para quaisquer $m \in M$, $m' \in M'$, $r \in R$ e $t \in T$, então vale a associatividade. As condições são as seguintes:

$$f(m, tm') = f(mt, m'), rf(m, m') = f(rm, m') \text{ e } f(m, m')r = f(m, m'r),$$

$$g(m', rm) = g(m'r, m),\ tg(m', m) = g(tm', m) \text{ e } g(m', m)t = g(m', mt),$$

$$xg(m', m) = f(x, m')m \text{ e } yf(m, m') = g(y, m)m',\ \forall x \in M \text{ e } \forall y \in M'.$$

Claramente, f e g são T-balanceada e R-balanceada, respectivamente. Assim, definimos os homomorfismos de grupos $\tau : M \otimes_T M' \to R$ e $\tau' : M' \otimes_R M \to T$ tais que $\tau \circ \iota = f$ e $\tau' \circ \iota' = g$, em que $\iota : M \times M' \to M \otimes_T M'$ e $\iota' : M' \times M \to M' \otimes_R M$ são as balanceadas canônicas.

Nestas condições, $M \otimes_T M'$ é um R-bimódulo com as ações dadas por $r(m \otimes m') = rm \otimes m'$ e $(m \otimes m')r = m \otimes m'r$, para todo $r \in R$. Também, $M' \otimes_R M$ é um T-bimódulo com as ações $t(m' \otimes m) = tm' \otimes m$ e $(m' \otimes m)t = m' \otimes mt$, para todo $t \in T$.

Agora, mostremos que τ e τ' são homomorfismos de R-bimódulos e T-bimódulos, respectivamente. Sejam $m \in M$, $m' \in M'$, $r \in R$ e $t \in T$.

Então

$$\begin{aligned}
\tau(r(m \otimes m')) &= \tau(rm \otimes m') = \tau(\iota(rm, m')) = f(rm, m') \\
&= rf(m, m') = r((\tau \circ \iota)(m, m')) = r\tau(m \otimes m'),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau((m \otimes m')r) &= \tau(m \otimes m'r) = \tau(\iota'(m, m'r)) = f(m, m'r) \\
&= f(m, m')r = ((\tau \circ \iota)(m, m'))r = \tau(m \otimes m')r,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau'(t(m' \otimes m)) &= \tau'(tm' \otimes m) = \tau'(\iota'(tm', m)) = (\tau' \circ \iota)(tm', m) \\
&= g(tm', m) = tg(m', m) = t((\tau' \circ \iota')(m', m)) \\
&= t\tau'(m \otimes m') \text{ e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau'((m' \otimes m)t) &= \tau'(m' \otimes mt) = \tau'(\iota'(m', mt)) = (\tau' \circ \iota')(m', mt) \\
&= g(m', mt) = g(m', m)t = ((\tau' \circ \iota')(m', m))t \\
&= \tau'(m' \otimes m)t.
\end{aligned}$$

Agora, verifiquemos a comutatividade dos diagramas da Definição 4.6. De fato, sejam $m_1, m_2 \in M$ e $m' \in M'$. Então

$$\begin{aligned}
(\psi_1 \circ (I_M \otimes \tau'))(m_1 \otimes m' \otimes m_2) &= \psi_1(m_1 \otimes \tau'(m' \otimes m_2)) \\
&= m_1\tau'(m' \otimes m_2) = m_1 g(m', m_2) \\
&= f(m_1, m')m_2 = \tau(m_1 \otimes m')m_2 \\
&= (\psi_2 \circ (\tau \otimes I_M))(m_1 \otimes m' \otimes m_2).
\end{aligned}$$

Logo, o primeiro diagrama da Definição 4.6 comuta. Analogamente, mostramos a comutatividade do segundo diagrama. Portanto, concluímos que $(R, T, M, M', \tau, \tau')$ é um contexto de Morita.

A proposição que enunciamos a seguir é útil para provarmos o próximo lema.

Proposição 4.8 *Sejam R, S e T anéis, M um (R,S)-bimódulo e N um (R,T)-bimódulo. Então $Hom(M,N)$ é um (S,T)-bimódulo com as* *ações dadas, respectivamente, por* $(sf)(x) = f(xs)$ *e* $(ft)(x) = f(x)t$, *para quaisquer* $s \in S$, $t \in T$, $x \in M$ *e* $f \in Hom(M, N)$.

Demonstração: Primeiramente, verifiquemos que sf e ft estão em $Hom(M, N)$, para quaisquer $f \in Hom(M, N)$, $s \in S$ e $t \in T$. De fato, dados $x, x' \in M$ e $r \in R$, temos que

$$\begin{aligned} (sf)(x + x') &= f((x + x')s) = f(xs + x's) = f(xs) + f(x's) \\ &= (sf)(x) + (sf)(x'), \end{aligned}$$

$$(sf)(rx) = f((rx)s) = f(r(xs)) = rf(xs) = r((sf)(x)),$$

$$\begin{aligned} (ft)(x + x') &= f(x + x')t = (f(x) + f(x'))t = f(x)t + f(x')t \\ &= (ft)(x) + (ft)(x') \text{ e} \end{aligned}$$

$$(ft)(rx) = f(rx)t = (rf(x))t = r(f(x)t) = r((ft)(x)).$$

Agora, sejam $s_1, s_2 \in S$, $t_1, t_2 \in T$ e $f \in Hom(M, N)$. Então, para todo $x \in M$,

$$((s_1 s_2)f)(x) = f(x(s_1 s_2)) = f((xs_1)s_2) = (s_2 f)(xs_1) = (s_1(s_2 f))(x).$$

Logo, $(s_1 s_2)f = s_1(s_2 f)$. Também,

$$(f(t_1 t_2))(x) = (f(x))(t_1 t_2) = (f(x)t_1)t_2 = ((ft_1)(x))t_2 = ((ft_1)t_2)(x)$$

e assim, $f(t_1 t_2) = (ft_1)t_2$. Além disso,

$$(s_1(ft_1))(x) = (ft_1)(xs_1) = f(xs_1)t_1 = ((s_1 f)(x))t_1 = ((s_1 f)t_1)(x).$$

Donde, $s_1(ft_1) = (s_1 f)t_1$. É imediato que $1_S f = f$ e $f 1_T = f$, para qualquer $f \in Hom(M, N)$, assim como as demais propriedades para que $Hom(M, N)$ seja um (S, T)-bimódulo. ∎

Como foi dito na introdução deste capítulo, para quaisquer R-módulos à esquerda M e N, $Hom(M, N)$ é um grupo abeliano. No caso em que $N = M$, $Hom(M, M)$ é um anel, chamado *anel dos endomorfismos de*

M, que denotamos por $End(M)$. A soma é definida pontualmente e a multiplicação é a composição de funções.

Dado um R-módulo à esquerda M, é possível introduzir em M uma estrutura de $End(M)$-módulo à direita, definindo para quaisquer $x \in M$ e $f \in End(M)$, a ação $xf = (x)f$, isto é, escrevemos $(x)f$ ao invés de $f(x)$.

Portanto, a composta de quaisquer duas funções $f, g \in End(M)$ é escrita como $(x)(f \circ g) = ((x)f)g$.

Lema 4.9 *Sejam R um anel, M um R-módulo à esquerda, $R' = End(M)$ e $M^* = Hom(M, R)$. Então M é um (R, R')-bimódulo e M^* é um (R', R)-bimódulo.*

Demonstração: Mostremos que M é um R'-módulo à direita com a ação dada acima. De fato, sejam $x \in M$, $r \in R$ e $f_1, f_2 \in R'$. Então

$$x(f_1 \circ f_2) = (x)(f_1 \circ f_2) = ((x)f_1)f_2 = (xf_1)f_2,$$
$$x1_{R'} = (x)1_{R'} = (x)I_M = x \text{ e}$$
$$(rx)f_1 = r((x)f_1) = r(xf_1).$$

Logo, M é um (R, R')-bimódulo e como R é um R-bimódulo segue, da proposição acima, que M^* é um (R', R)-bimódulo cujas ações são dadas como na referida proposição, fazendo $S = R'$ e $T = R$. ■

No próximo exemplo, construímos um contexto de Morita para os anéis R e $R' = End(M)$.

Exemplo 4.10 Sejam M um R-módulo, $R' = End(M)$ e $M^* = Hom(M, R)$. Pelo lema anterior, M é um (R, R')-bimódulo e M^* é um (R', R)-bimódulo.

Definimos $\varphi : M \times M^* \to R$ por $\varphi(x, f) = f(x)$. Afirmamos que φ é R'-balanceada. Claramente, φ é aditiva em ambas componentes e, para quaisquer $x \in M, f \in M^*$ e $r' \in R'$, temos que

$$\varphi(xr', f) = f(xr') \overset{(*)}{=} (r'f)(x) = \varphi(x, r'f),$$

a igualdade $(*)$ segue do fato de que M^* é um R'-módulo à esquerda. Portanto, existe um único homomorfismo de grupos $\tau : M \otimes_{R'} M^* \to R$ tal que $\tau(m \otimes f) = \varphi(m, f) = f(m)$, para quaisquer $m \in M$ e $f \in M^*$. É fácil ver que $M \otimes_{R'} M^*$ é um R-bimódulo cujas ações à esquerda e à direita são, respectivamente, $r(m \otimes f) = rm \otimes f$ e $(m \otimes f)r = m \otimes fr$, para quaisquer $r \in R$, $m \in M$ e $f \in M^*$.

Mostremos que τ é um homomorfismo de R-bimódulos.

$$\begin{aligned}\tau(r(m \otimes f)) &= \tau(rm \otimes f) = \varphi(rm, f) = f(rm) = rf(m) = r\varphi(m, f)\\ &= r\tau(m \otimes f) \text{ e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau((m \otimes f)r) &= \tau(m \otimes fr) = \varphi(m, fr) = (fr)(m) = f(m)r = \varphi(m, f)r\\ &= \tau(m \otimes f)r.\end{aligned}$$

Definimos $\varphi' : M^* \times M \to R'$ tal que a ação de $\varphi'(f, x)$ em M satisfaz a seguinte igualdade

$$y\varphi'(f, x) = (y)(\varphi'(f, x)) = \tau(y \otimes f)x, \text{ para todo } y \in M.$$

Mostremos que, com esta igualdade, φ' é R-balanceada. De fato, sejam $f \in M^*$, $m \in M$ e $r \in R$. Então, para todo $y \in M$, temos

$$\begin{aligned}(y)(\varphi'(fr, m)) &= \tau(y \otimes fr)m \overset{(*)}{=} (\tau(y \otimes f)r)m \overset{(**)}{=} \tau(y \otimes f)(rm)\\ &= (y)(\varphi'(f, rm)),\end{aligned}$$

e assim, $\varphi'(fr, m) = \varphi'(f, rm)$. A igualdade $(*)$ é justificada pelo fato de τ ser um homomorfismo de R-bimódulos e $(**)$ segue do fato de que M é um R- módulo. Assim, existe um único homomorfismo de grupos $\tau' : M^* \otimes_R M \to R'$ tal que $\tau'(f \otimes m) = \varphi'(f, m)$, para quaisquer $f \in M^*$ e $m \in M$. É fácil ver que $M^* \otimes_R M$ é um R'-bimódulo com as ações à esquerda e à direita dadas, respectivamente, por $r'(f \otimes m) = r'f \otimes m$ e $(f \otimes m)r' = f \otimes mr'$, para quaisquer $r' \in R'$, $m \in M$ e $f \in M^*$.

Mostremos que τ' é um homomorfismo de R'-bimódulos. De fato, sejam $f \in M^*$, $x \in M$ e $\alpha \in R'$. Então, para todo $y \in M$, temos

$$\begin{aligned}(y)(\tau'(\alpha(f \otimes x))) &= (y)(\tau'(\alpha f \otimes x)) = (y)(\varphi'(\alpha f, x)) = \tau(y \otimes \alpha f)x \\ &= \tau(y\alpha \otimes f)x = (y\alpha)(\varphi'(f,x)) = ((y)\alpha)(\tau'(f \otimes x)) \\ &= (y)(\alpha \circ (\tau'(f \otimes x))).\end{aligned}$$

Logo, $\tau'(\alpha(f \otimes x)) = \alpha \circ (\tau'(f \otimes x))$. Também,

$$\begin{aligned}(y)(\tau'((f \otimes x)\alpha)) &= (y)(\tau'(f \otimes x\alpha)) = (y)(\varphi'(f, x\alpha)) \\ &= \tau(y \otimes f)(x\alpha) \overset{(*)}{=} (\tau(y \otimes f)x)\alpha \\ &= ((y)(\varphi'(f,x)))\alpha = ((y)(\tau'(f \otimes x)))\alpha \\ &= (y)(\tau'(f \otimes x) \circ \alpha),\end{aligned}$$

a igualdade $(*)$ vem do fato de que M é um (R, R')-bimódulo.

Portanto, $\tau'((f \otimes x)\alpha) = \tau'(f \otimes x) \circ \alpha$. Agora, mostremos a comutatividade dos diagramas da Definição 4.6. De fato, sejam $x, y \in M$ e $f, g \in M^*$. Então

$$\begin{aligned}(\psi_1 \circ (I_M \otimes \tau'))(y \otimes f \otimes x) &= \psi_1(y \otimes \tau'(f \otimes x)) = y\tau'(f \otimes x) \\ &= (y)(\tau'(f \otimes x)) = (y)(\varphi'(f,x)) \\ &= \tau(y \otimes f)x = \psi_2(\tau(y \otimes f) \otimes x) \\ &= (\psi_2 \circ (\tau \otimes I_M))(y \otimes f \otimes x) \ \text{ e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((\psi_1' \circ (I_{M^*} \otimes \tau))(f \otimes x \otimes g))(y) &= (\psi_1'(f \otimes \tau(x \otimes g)))(y) \\ &= (f\tau(x \otimes g))(y) = f(y)\tau(x \otimes g) \\ &= f(y)g(x) = \tau(y \otimes f)g(x) \\ &= g(\tau(y \otimes f)x) = g(y\varphi'(f,x)) \\ &= g(y\tau'(f \otimes x)) \overset{(*)}{=} (\tau'(f \otimes x)g)(y) \\ &= ((\psi_2' \circ (\tau' \otimes I_{M^*}))(f \otimes x \otimes g))(y),\end{aligned}$$

em que $(*)$ segue do fato de que M^* é um R'-módulo à esquerda, veja Proposição 4.8. Daí, $(R, R', M, M^*, \tau, \tau')$ é um contexto de Morita.

4.2.1 Um teorema de Morita

Como dissemos no início deste capítulo, além de construir um contexto de Morita para os anéis $A *_\alpha G$ e $B *_\beta G$, gostaríamos de mostrar que tais anéis são Morita equivalentes. Para esta última afirmação, é necessário apresentarmos mais algumas definições e resultados, um deles é um resultado fundamental de Morita.

O teorema de Morita apresentado nesta subseção pode ser encontrado em ([12], Theorem 4.1.17, p.472-474) e aqui esclarecemos ao leitor que, embora apenas a afirmação v) deste teorema seja usada em nossa próxima seção para a questão da equivalência de Morita para anéis, fazemos cinco de suas seis afirmações, devido à importância de tal resultado e também por interesse do aluno em entender sua demonstração.

Para o que segue, $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são categorias, o leitor interessado pode consultar ([7], p.12; [8], p.468 e [13], p.423).

Definição 4.11 *Sejam F e G funtores de $\mathscr{C}$ em $\mathscr{D}$. Uma transformação natural $\eta : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é uma função que associa a cada objeto C em $\mathscr{C}$ um morfismo $\eta_C : F(C) \to G(C)$ em $\mathscr{D}$ de maneira que para todo morfismo $f : C \to C'$ em $\mathscr{C}$ o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_C"] & F(C') \arrow[d, "\eta_{C'}"] \\ G(C) \arrow[r, "G(f)"] & G(C'). \end{tikzcd}$$

Se, para cada objeto C em $\mathscr{C}$, η_C é um isomorfismo, dizemos η é um *isomorfismo natural* ou uma *equivalência natural*. Se existe uma equivalência natural entre os funtores F e G, os mesmos são ditos *naturalmente equivalentes* e escrevemos $F \cong G$.

Definição 4.12 *Duas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são ditas equivalentes se existem funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tais que $I_{\mathscr{C}} \cong G \circ F$ e $I_{\mathscr{D}} \cong F \circ G$, em que $I_{\mathscr{C}}$ e $I_{\mathscr{D}}$ são os funtores identidade nas respectivas categorias, isto é, $I_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ é tal que $I_{\mathscr{C}}(C) = C$, para qualquer objeto C em $\mathscr{C}$*

e, para qualquer morfismo $f : C \to C'$ em $\mathscr{C}$, $I_{\mathscr{C}}(f) = f$ e da mesma forma tem-se $I_{\mathscr{D}}$.

Na demonstração do item v) do teorema a seguir, usaremos fortemente as definições acima. Como o leitor poderá constatar, trabalhamos com categorias bem conhecidas, como a categoria de R-módulos à esquerda e, neste caso, seus objetos são os R-módulos à esquerda e seus morfismos são os homomorfismos de R-módulos à esquerda ou simplesmente, os R-homomorfismos.

Agora, definimos módulos progeradores. Antes, lembramos que um módulo (à esquerda) M é finitamente gerado se existem $m_1, m_2, \cdots, m_s$ em M tais que $M = \sum_{i=1}^{s} Rm_i$, isto é, para cada $m \in M$, existem $r_1, r_2, \cdots, r_s \in R$, que dependem obviamente de m, tais que $m = r_1m_1 + r_2m_2 + \cdots + r_sm_s$.

Definição 4.13 *Um progerador é um R-módulo projetivo finitamente gerado que é um gerador de R-*Mod.

Teorema 4.14 *Suponhamos que $(R, R', M, M', \tau, \tau')$ seja um contexto de Morita com τ e τ' sobrejetoras. Então são verdadeiras as afirmações.*

i) *M é um progerador em R-*Mod *e em* Mod-R'.

i') *M' é um progerador em* Mod-R *e em R'-*Mod.

ii) *τ e τ' são isomorfismos (de bimódulos).*

iii) *M' e $Hom(M, R) = M^*$ são isomorfos como R-módulos à direita.*

iv) *R' e $End(M)$ são anéis isomorfos.*

v) *As categorias R-*Mod *e R'-*Mod *são equivalentes via os funtores $M \otimes_{R'}$ e $M' \otimes_R$.*

Demonstração: Inicialmente, observamos que, por serem τ e τ' sobrejetoras, existem $x_i \in M$ e $x'_i \in M'$ para $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e $y_j \in M$ e $y'_j \in M'$ para $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ tais que

$$\tau(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x'_i) = \sum_{i=1}^{n} \tau(x_i \otimes x'_i) = 1_R \text{ e } \tau'(\sum_{j=1}^{m} y'_j \otimes y_j) = \sum_{j=1}^{m} \tau'(y'_j \otimes y_j) = 1_{R'}.$$

i) Devido ao que notamos acima, podemos definir $f : M^{(n)} \to R$ por $f(\sum_{i=1}^{n} m_i) = \sum_{i=1}^{n} \tau(m_i \otimes x'_i)$. Claramente, f é um homomorfismo de R-módulos à esquerda, pois τ é um homomorfismo de R-bimódulos.

Mostremos que f é sobrejetora. Seja $r \in R$. Então $x = \sum_{i=1}^{n} rx_i \in M^{(n)}$ e $f(x) = f(\sum\limits_{i=1}^{n} rx_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \tau(rx_i \otimes x'_i) = r\sum\limits_{i=1}^{n} \tau(x_i \otimes x'_i) = r1_R = r$.

Portanto, R é imagem homomórfica de $M^{(n)}$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e, pelo Lema 4.5, M é um gerador de R-Mod.

Provemos que $\beta = \{(y_j, f_j); 1 \leq j \leq m\}$, em que $f_j(x) = \tau(x \otimes y'_j)$, para todo $x \in M$, é uma base dual do módulo M. De fato, para todo $x \in M$, temos

$$\begin{aligned} x &= x1_{R'} = x\sum_{j=1}^{m} \tau'(y'_j \otimes y_j) = \sum_{j=1}^{m} x\tau'(y'_j \otimes y_j) \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{m} \tau(x \otimes y'_j)y_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} f_j(x)y_j, \end{aligned}$$

a igualdade $(*)$ segue da comutatividade do primeiro diagrama da Definição 4.6. Do que foi mostrado acima, claramente M é finitamente gerado e a projetividade segue do Lema 1.14, uma vez que β é uma base dual de M.

ii) Para mostrarmos que τ e τ' são isomorfismos basta verificarmos a injetividade. Seja $x \in Ker(\tau)$. Então $x = \sum_{k=1}^{l}(z_k \otimes z'_k)$ com $z_k \in M$ e $z'_k \in M'$, para todo $k \in \{1, 2, \cdots, l\}$ e $\tau(x) = \sum_{k=1}^{l} \tau(z_k \otimes z'_k) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{l}(z_k \otimes (z'_k 1_R)) = \sum_{k=1}^{l}(z_k \otimes z'_k(\sum_{i=1}^{n} \tau(x_i \otimes x'_i))) \\ &= \sum_{k=1}^{l}(z_k \otimes \sum_{i=1}^{n} z'_k\tau(x_i \otimes x'_i)) = \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}(z_k \otimes z'_k\tau(x_i \otimes x'_i)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}(z_k \otimes \tau'(z'_k \otimes x_i)x'_i) &= \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}(z_k\tau'(z'_k \otimes x_i) \otimes x'_i) \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}(\tau(z_k \otimes z'_k)x_i \otimes x'_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{l}\tau(z_k \otimes z'_k))x_i \otimes x'_i = 0,
\end{aligned}
$$

em que as igualdades $(*)$ e $(**)$ seguem da comutatividade dos diagramas da Definição 4.6. Analogamente, mostramos que τ' é injetora.

iii) Definimos

$$
\begin{array}{rcccccl}
\psi: & M' & \rightarrow & & M^* & & \\
 & x & \mapsto & \psi(x) = \psi_x : & M & \rightarrow & R \\
 & & & & m & \mapsto & \psi_x(m) = \tau(m \otimes x).
\end{array}
$$

Obviamente, ψ está bem definida, isto é, $\psi_x \in M^*$, $\forall x \in M'$, pois τ é um homomorfismo de R-bimódulos (e portanto, de R-módulos à esquerda).

Mostremos que ψ é um isomorfismo de R-módulos à direita. De fato, sejam $x_1, x_2 \in M'$ e $r \in R$. Então, para todo $m \in M$, temos

$$
\begin{aligned}
(\psi(x_1 + x_2))(m) &= \psi_{x_1+x_2}(m) = \tau(m \otimes (x_1 + x_2)) \\
&= \tau(m \otimes x_1 + m \otimes x_2) = \tau(m \otimes x_1) + \tau(m \otimes x_2) \\
&= \psi_{x_1}(m) + \psi_{x_2}(m)\psi(x_1)(m) + \psi(x_2)(m) \\
&= (\psi(x_1) + \psi(x_2))(m)
\end{aligned}
$$

portanto, $\psi(x_1 + x_2) = \psi(x_1) + \psi(x_2)$ e além disso,

$$
\begin{aligned}
(\psi(xr))(m) &= \psi_{xr}(m) = \tau(m \otimes xr) = \tau(m \otimes x)r = \psi_x(m)r \\
&\overset{(*)}{=} (\psi_x\, r)(m) = (\psi(x)r)(m).
\end{aligned}
$$

Logo, $\psi(xr) = \psi(x)r$ e a igualdade $(*)$ vem do fato de que M^* é um R-módulo à direita, veja a ação dada na Proposição 4.8.

Seja $x \in Ker(\psi)$. Então $\psi(x) = 0$, ou seja, $(\psi(x))(m) = \psi_x(m) = \tau(m \otimes x) = 0$, para todo $m \in M$. Logo,

$$x = 1_{R'}x = (\sum_{j=1}^{m} \tau'(y'_j \otimes y_j))x = \sum_{j=1}^{m} \tau'(y'_j \otimes y_j)x \stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^{m} y'_j \tau(y_j \otimes x) = 0,$$

a igualdade $(*)$ segue da comutatividade do segundo diagrama da Definição 4.6. Portanto, ψ é injetora.

Seja $f \in M^*$. É óbvio que $x = \sum_{j=1}^{m} y'_j f(y_j) \in M'$ e, para todo $z \in M$, temos

$$\begin{aligned}
(\psi(x))(z) &= \psi_x(z) = \tau(z \otimes x) = \tau(z \otimes \sum_{j=1}^{m} y'_j f(y_j)) \\
&= \tau(\sum_{j=1}^{m}(z \otimes y'_j f(y_j))) = \sum_{j=1}^{m} \tau(z \otimes y'_j f(y_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \tau(z \otimes y'_j) f(y_j) = \sum_{j=1}^{m} f(\tau(z \otimes y'_j) y_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} f(z\tau'(y'_j \otimes y_j)) = f(\sum_{j=1}^{m} z\tau'(y'_j \otimes y_j)) \\
&= f(z \sum_{j=1}^{m} \tau'(y'_j \otimes y_j)) = f(z1_{R'}) = f(z).
\end{aligned}$$

Daí, $\psi(x) = f$ e ψ é sobrejetora. No que foi desenvolvido acima, usamos o fato de que $f \in M^*$ e a comutatividade do primeiro diagrama da Definição 4.6.

iv) Definimos a aplicação

$$\begin{array}{rrcl}
\rho : & R' & \to & End(M) \\
& r' & \mapsto & \rho(r') = \rho_{r'} : \begin{array}{rcl} M & \to & M \\ m & \mapsto & (m)\rho_{r'} = mr' \end{array}
\end{array}$$

O fato de que M é um (R, R')-bimódulo, nos garante que ρ está bem definida, isto é, que $\rho_{r'} \in End(M)$, para todo $r' \in R'$.

Mostremos que ρ é um isomorfismo de anéis. Primeiramente, verifiquemos que ρ é um homomorfismo. De fato, sejam $r'_1, r'_2 \in R'$. Então, para todo $m \in M$, temos

$$\begin{aligned}
(m)(\rho(r'_1 + r'_2)) &= (m)\rho_{r'_1+r'_2} = m(r'_1 + r'_2) = mr'_1 + mr'_2 \\
&= (m)\rho_{r'_1} + (m)\rho_{r'_2} = (m)(\rho_{r'_1} + \rho_{r'_2}) \\
&= (m)(\rho(r'_1) + \rho(r'_2)) \text{ e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(m)(\rho(r'_1 r'_2)) &= (m)\rho_{r'_1 r'_2} = m(r'_1 r'_2) = (mr'_1)r'_2 = (mr'_1)\rho_{r'_2} \\
&= ((m)\rho_{r'_1})\rho_{r'_2}) = (m)(\rho(r'_1) \circ \rho(r'_2)).
\end{aligned}$$

Seja $r' \in Ker(\rho)$. Então $\rho(r') = \rho_{r'} = 0$, ou seja, $(m)\rho_{r'} = mr' = 0$, para todo $m \in M$. Portanto,

$$r' = 1_{R'}r' = (\sum_{j=1}^{m} \tau'(y'_j \otimes y_j))r' = \sum_{j=1}^{m} \tau'(y'_j \otimes y_j)r' = \sum_{j=1}^{m} \tau'(y'_j \otimes y_j r') = 0$$

e isto nos diz que ρ é injetora.

Seja $f \in End(M)$. Claramente, $r' = \sum_{j=1}^{m} \tau'(y'_j \otimes f(y_j)) \in R'$ e, para todo $z \in M$, temos

$$\begin{aligned}
(z)(\rho(r')) &= (z)\rho_{r'} = zr' = z\sum_{j=1}^{m} \tau'(y'_j \otimes f(y_j)) = \sum_{j=1}^{m} z\tau'(y'_j \otimes f(y_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \tau(z \otimes y'_j)f(y_j) = \sum_{j=1}^{m} f(\tau(z \otimes y'_j)y_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} f(z\tau'(y'_j \otimes y_j)) = f(\sum_{j=1}^{m} z\tau'(y'_j \otimes y_j)) \\
&= f(z\sum_{j=1}^{m} \tau'(y'_j \otimes y_j)) = f(z1_{R'}) = f(z),
\end{aligned}$$

sendo, no que foi feito acima, usados o fato de que $f \in End(M)$ e a comutatividade do primeiro diagrama da Definição 4.6.

v) Agora, consideremos as categorias $\mathscr{C} = R$-Mod e $\mathscr{D} = R'$-Mod. Para quaisquer N em $\mathscr{C}$ e N' em $\mathscr{D}$ segue, da Observação 1.19 i), que

$M' \otimes_R N$ e $M \otimes_{R'} N'$ são objetos de $\mathscr{D}$ e de $\mathscr{C}$, respectivamente. Daí, podemos definir os funtores

$$F = M' \otimes_R : \mathscr{C} \to \mathscr{D} \text{ e } G = M \otimes_{R'} : \mathscr{D} \to \mathscr{C},$$

tais que $F(N) = M' \otimes_R N$ e $G(N') = M \otimes_{R'} N'$ e, para quaisquer R-homomorfismo $f : N_1 \to N_2$ e R'-homomorfismo $f' : N_1' \to N_2'$ tem-se que $F(f) : M' \otimes_R N_1 \xrightarrow{I_{M'} \otimes f} M' \otimes_R N_2$ é um R'-homomorfismo e $G(f') : M \otimes_{R'} N_1' \xrightarrow{I_M \otimes f'} M \otimes_{R'} N_2'$ é um R-homomorfismo. Podemos visualizar tal situação através dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"] & N_2 \arrow[d, "F"] \\
M' \otimes_R N_1 \arrow[r, "F(f)"] & M' \otimes_R N_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N_1' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "G"] & N_2' \arrow[d, "G"] \\
M \otimes_{R'} N_1' \arrow[r, "G(f')"] & M \otimes_{R'} N_2'.
\end{tikzcd}$$

Com as notações já estabelecidas, para concluirmos a prova, basta mostrarmos que $I_{\mathscr{C}} \cong G \circ F$ e que $I_{\mathscr{D}} \cong F \circ G$, em que os funtores $I_{\mathscr{C}}$ e $I_{\mathscr{D}}$ são como na Definição 4.12.

Para cada N em $\mathscr{C}$, temos que $I_{\mathscr{C}}(N) = N$ e $(G \circ F)(N) = M \otimes_{R'} (M' \otimes_R N)$. Definimos

$$\eta_N : N \to M \otimes_{R'} (M' \otimes_R N)$$

pela composta $\psi \circ (\tau^{-1} \otimes I_N) \circ \varphi$, em que $\psi : (M \otimes_{R'} M') \otimes_R N \to M \otimes_{R'} (M' \otimes_R N)$ é o isomorfismo de R-módulos à esquerda dado no Teorema 1.22, $\varphi : N \to R \otimes_R N$ é o isomorfismo de R-módulos à esquerda dado por $\varphi(n) = 1_R \otimes n$, $\forall n \in N$ e τ^{-1} é o isomorfismo inverso de τ, veja ii) acima. Logo, η_N é um isomorfismo de R-módulos à esquerda. Além disso, para qualquer R-homomorfismo $f : N_1 \to N_2$, o diagrama abaixo

$$
\begin{array}{ccc}
N_1 & \xrightarrow{I_{\mathscr{C}}(f)=f} & N_2 \\
\downarrow \eta_{N_1} & & \downarrow \eta_{N_2} \\
M \otimes_{R'} (M' \otimes_R N_1) & \xrightarrow[(G\circ F)(f)]{} & M \otimes_{R'} (M' \otimes_R N_2)
\end{array}
$$

é comutativo. Chamamos a atenção para o fato de que

$$(G \circ F)(f) = G(F(f)) = G(I_{M'} \otimes f) = I_M \otimes (I_{M'} \otimes f).$$

Agora, provemos a comutatividade do diagrama. Seja $n \in N_1$. Então

$$
\begin{aligned}
(\eta_{N_2} \circ f)(n) &= \eta_{N_2}(f(n)) = (\psi \circ (\tau^{-1} \otimes I_{N_2}) \circ \varphi)(f(n)) \\
&= \psi(\tau^{-1}(1_R) \otimes f(n)) = \psi((\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x'_i) \otimes f(n)) \\
&= \psi(\sum_{i=1}^{n}((x_i \otimes x'_i) \otimes f(n))) \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes (x'_i \otimes f(n)),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
((I_M \otimes (I_{M'} \otimes f)) \circ \eta_{N_1})(n) &= (I_M \otimes (I_{M'} \otimes f))(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes (x'_i \otimes n)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes (x'_i \otimes f(n)).
\end{aligned}
$$

Portanto, $I_{\mathscr{C}} \cong G \circ F$. De maneira análoga, mostramos que $I_{\mathscr{D}} \cong F \circ G$. ■

4.3 Contexto de Morita e ações parciais

Nosso principal objetivo nesta seção é retornar aos conceitos e definições que foram vistos nos Capítulos 2 e 3, para construir um contexto de Morita utilizando os anéis $A *_\alpha G$ e $B *_\beta G$. Para tal, consideramos dois $\mathbb{K}$-submódulos de $B *_\beta G$ que chamamos M e N, construímos $\tau : M \otimes_{B*_\beta G} N \to A *_\alpha G$ e $\tau' : N \otimes_{A*_\alpha G} M \to B *_\beta G$ e mostramos que a sêxtupla $(A *_\alpha G, B *_\beta G, M, N, \tau, \tau')$ é um contexto de Morita.

Consideramos α uma ação parcial de um grupo G em uma $\mathbb{K}$-álgebra A com unidade e (β, B) a ação envolvente para (α, A) tal que B também tenha unidade. O leitor irá constatar que, por construção, τ e τ' são sobrejetoras e usando o Teorema 4.14 é mostrado que as categorias $A *_\alpha G$-Mod e $B *_\beta G$-Mod são equivalentes.

Além disso, daqui para frente omitimos o isomorfismo φ de A em um ideal de B, conforme foi visto no capítulo anterior e assim, A é visto como um ideal de B.

Podemos verificar facilmente que M e N dados por

$$M = \left\{ \sum_{g\in G} c_g\delta_g : c_g \in A,\ \forall g \in G \right\} \text{ e } N = \left\{ \sum_{g\in G} d_g\delta_g : d_g \in \beta_g(A),\ \forall g \in G \right\}$$

são $\mathbb{K}$-submódulos de $B *_\beta G$.

Proposição 4.15 *Com as definições acima, M é um ideal à direita e N é um ideal à esquerda de $B *_\beta G$.*

Demonstração: Sejam $c\delta_g \in M$ e $b\delta_h \in B *_\beta G$. Então

$$(c\delta_g)(b\delta_h) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(c)b)\delta_{gh} = c\beta_g(b)\delta_{gh} \in M,$$

pois $c \in A$ e como A é um ideal de B, segue que $c\beta_g(b) \in A$. Portanto, M é um ideal à direta de $B *_\beta G$.

Sejam $c\delta_g \in N$ e $b\delta_h \in B *_\beta G$. Então existe $x \in A$ tal que $c = \beta_g(x)$. Assim,

$$(b\delta_h)(c\delta_g) = (b\delta_h)(\beta_g(x)\delta_g) = \beta_h(\beta_{h^{-1}}(b)\beta_g(x))\delta_{hg} = b\beta_{hg}(x)\delta_{hg} \in N,$$

pois $\beta_{hg}(x) \in \beta_{hg}(A)$ e como $\beta_{hg}(A)$ é um ideal de B, segue que $c\beta_{hg}(x) \in \beta_{hg}(A)$. Portanto, N é um ideal à esquerda de $B *_\beta G$. ■

Do resultado acima, M e N podem ser vistos como $B *_\beta G$-módulos à direita e à esquerda, respectivamente. Na proposição abaixo, consideramos $A *_\alpha G$ como uma subálgebra de $B *_\beta G$, conforme Proposição 3.4.

Proposição 4.16 *Com as definições acima,* $(A *_\alpha G)M \subseteq M$ *e* $N(A *_\alpha G) \subseteq N$*, isto é,* M *e* N *podem ser considerados como* $A *_\alpha G$*-módulos à esquerda e à direita, respectivamente.*

Demonstração: Sejam $b\delta_g \in A *_\alpha G$ $(b \in D_g)$ e $c\delta_h \in M$. Então

$$(b\delta_g)(c\delta_h) = b\beta_g(c)\delta_{gh}.$$

Como $b \in D_g \subseteq A$ e A é um ideal de B, segue que $b\beta_g(c) \in A$. Portanto, $(b\delta_g)(c\delta_h) \in M$.

Sejam $c\delta_h \in N$ e $b\delta_g \in A *_\alpha G$ $(b \in D_g)$. Então existe $c' \in A$ tal que $c = \beta_h(c')$. Portanto,

$$\begin{aligned}(c\delta_h)(b\delta_g) &= c\beta_h(b)\delta_{hg} = \beta_h(c')\beta_h(b)\delta_{hg} = \beta_h(c'b)\delta_{hg} \overset{(*)}{=} \beta_h(\alpha_g(x))\delta_{hg} \\ &= \beta_h(\beta_g(x)) = \beta_{hg}(x)\delta_{hg} \in N,\end{aligned}$$

a igualdade $(*)$ segue do fato de que $c'b \in D_g$ (pois $b \in D_g$ que é um ideal de A) e como α_g é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras, existe $x \in D_{g^{-1}} \subseteq A$ tal que $\alpha_g(x) = c'b$. Assim, $x \in A$ e $\beta_{hg}(x) \in \beta_{hg}(A)$, nos dando que, de fato, $\beta_{hg}(x)\delta_{hg} \in N$. ■

Devido às Proposições 4.15 e 4.16, concluímos que M é um $(A *_\alpha G, B *_\beta G)$- bimódulo e N é um $(B *_\beta G, A *_\alpha G)$-bimódulo. Desta forma, temos a terceira e a quarta componentes do contexto de Morita.

Proposição 4.17 *Seguindo as definições acima,* $MN = A *_\alpha G$ *e* $NM = B *_\beta G$*.*

Demonstração: Sejam $b\delta_g \in M$ e $c\delta_h \in N$. Então existe $x \in A$ tal que $c = \beta_h(x)$. Logo,

$$(b\delta_g)(c\delta_h) = b\beta_g(c)\delta_{gh} = b\beta_{gh}(x)\delta_{gh} \in A *_\alpha G,$$

pois A e $\beta_{gh}(A)$ são ideais de B e isso nos diz que $b\beta_{gh}(x) \in A \cap \beta_{gh}(A) = D_{gh}$. Portanto, $MN \subseteq A *_\alpha G$.

Seja $c \in D_h$. Então $c \in \alpha_h(D_{h^{-1}}) = \beta_h(D_{h^{-1}}) \subseteq \beta_h(A)$ e daí, $c\delta_h \in N$. Claramente, $1_A\delta_e \in M$ e $(1_A\delta_e)(c\delta_h) = 1_A c\delta_h = c\delta_h \in MN$. Como c é arbitrário, segue que $A *_\alpha G \subseteq MN$.

Obviamente, $NM \subseteq B *_\beta G$. Resta provarmos a outra inclusão. Sejam $g, h \in G$ e $c \in A$. Então $\beta_g(c)\delta_g \in N$ e $1_A\delta_{g^{-1}h} \in M$ e além disso,

$$(\beta_g(c)\delta_g)(1_A\delta_{g^{-1}h}) = \beta_g(c1_A)\delta_h = \beta_g(c)\delta_h.$$

Como B é gerada por $\cup_{g\in G}\beta_g(A)$, segue que $B\delta_h \subseteq NM$ e portanto, $NM = B *_\beta G$. ■

Motivados pela proposição acima, definimos as aplicações $\psi : M \times N \to A*_\alpha G$ por $\psi(m, n) = mn$ e $\varphi : N \times M \to B*_\beta G$ por $\varphi(n, m) = nm$ que são, respectivamente, $B *_\beta G$ e $A *_\alpha G$ balanceadas. Portanto, existem homomorfismos de grupos

$$\tau : M \otimes_{B*_\beta G} N \to A *_\alpha G \text{ e } \tau' : N \otimes_{A*_\alpha G} M \to B *_\beta G$$

dados, respectivamente, por $\tau(m \otimes n) = mn$ e $\tau'(n \otimes m) = nm$.

Como M é um $(A*_\alpha G, B*_\beta G)$-bimódulo e N é um $(B*_\beta G, A*_\alpha G)$-bimódulo, então $M \otimes_{B*_\beta G} N$ é um $A *_\alpha G$-bimódulo e $N \otimes_{A*_\alpha G} M$ é um $B *_\beta G$-bimódulo.

Mostremos que τ é um homomorfismo de $A*_\alpha G$-bimódulos. De fato, sejam $m \in M$, $n \in N$ e $r \in A *_\alpha G$. Logo,

$$\tau(r(m \otimes n)) = \tau(rm \otimes n) = (rm)n \overset{(*)}{=} r(mn) = r\tau(m \otimes n) \text{ e}$$

$$\tau((m \otimes n)r) = \tau(m \otimes nr) = m(nr) \overset{(**)}{=} (mn)r = \tau(m \otimes n)r,$$

as igualdades $(*)$ e $(**)$ seguem da associatividade de $B *_\beta G$. Analogamente, mostramos que τ' é um homomorfismo de $B *_\beta G$-bimódulos.

Para finalizar, mostremos a comutatividade dos diagramas da Definição

4.6. De fato, sejam $m_1, m_1' \in M$ e $n_1, n_1' \in N$. Logo,

$$\begin{aligned}
(\psi_1 \circ (I_M \otimes \tau'))(m_1 \otimes n_1 \otimes m_1') &= \psi_1(m_1 \otimes \tau'(n_1 \otimes m_1')) \\
&= m_1\tau'(n_1 \otimes m_1') = m_1(n_1 m_1') \\
&\overset{(*)}{=} (m_1 n_1)m_1' = \tau(m_1 \otimes n_1)m_1' \\
&= \psi_2(\tau(m_1 \otimes n_1) \otimes m_1') \\
&= (\psi_2 \circ (\tau \otimes I_M))(m_1 \otimes n_1 \otimes m_1'), \\
(\psi_1' \circ (I_N \otimes \tau))(n_1 \otimes m_1 \otimes n_1') &= \psi_1'(n_1 \otimes \tau(m_1 \otimes n_1')) \\
&= n_1\tau(m_1 \otimes n_1') = n_1(m_1 n_1') \\
&\overset{(**)}{=} (n_1 m_1)n_1' = \tau'(n_1 \otimes m_1)n_1' \\
&= \psi_2'(\tau'(n_1 \otimes m_1) \otimes n_1') \\
&= (\psi_2' \circ (\tau' \otimes I_N))(n_1 \otimes m_1 \otimes n_1'),
\end{aligned}$$

em que $(*)$ e $(**)$ seguem da associatividade de $B *_\beta G$.

Logo, a sêxtupla $(A *_\alpha G, B *_\beta G, M, N, \tau, \tau')$ é um contexto de Morita. A fim de enunciarmos o último teorema deste trabalho, lembramos a definição de anéis Morita equivalentes.

Definição 4.18 *Dizemos que os anéis R e R' são Morita equivalentes se as categorias R-*Mod *e R'-*Mod *são equivalentes.*

Teorema 4.19 *Seja α uma ação parcial de um grupo G em uma $\mathbb{K}$-álgebra A com unidade e suponhamos que (β, B) seja ação envolvente para (α, A) tal que B também tenha unidade. Então os anéis $A *_\alpha G$ e $B *_\beta G$ são Morita equivalentes.*

Demonstração: Basta mostrarmos que as categorias $A *_\alpha G$-Mod e $B *_\beta G$-Mod são equivalentes. Pela Proposição 4.17,

$$\tau : M \otimes_{B *_\beta G} N \to A *_\alpha G \text{ e } \tau' : N \otimes_{A *_\alpha G} M \to B *_\beta G$$

são sobrejetoras e o resultado segue do Teorema 4.14 v). ■

Referências Bibliográficas

[1] ABADIE, F.. Enveloping actions and Takei duality for partial action. **J. Funct. Anal.**, 197, p. 14-67, 2003.

[2] DOKUCHAEV, M.; EXEL, R.. Associativity of crossed produtcs by partial actions, enveloping actions and partial representations. **Trans. Amer. Math. Soc.**, 357, p. 1931-1952, 2005.

[3] EXEL, R.. Twisted parcial action: a classification of regular C^*-algebraic bundles. **Proc. London. Math. Soc.**, 74(3), p. 417-443, 1997.

[4] EXEL, R.. Parcial actions of groups and actions of semigroups. **Proc. Amer. Math. Soc.**, 126(12), p. 3481-3494, 1998.

[5] EXEL, R.; LACA, M.; QUIGG. J. C.. Partial dynamical systems and C^*-algebras generated by partial isometries. **J. Operator Theory**, 47(1), p. 169-186, 2002.

[6] FILLMORE, P. A.; **A User's Guide to Operator Algebras**, New York: John Wiley & Sons, INC., 1996. 223 p..

[7] GOODEARL, K. R.. **RING THEORY - Nonsingular Rings and Modules**, New York and Basel: Marcel Dekker, INC., 1976. 206 p..

[8] HUNGERFORD, T. W.. **Algebra**, New York: Springer-Verlag, 1996. 502 p..

[9] LAM, T.Y.. **A first course in noncommutative rings**, New York: Springer-Verlag, 1991. 397 p..

[10] McCLANAHAM, K.. K-theory for partial crossed products by discrete groups. **J. Funct. Anal.**, 130 (1), p. 77-117, 1995.

[11] QUIGG, J.C.; RAEBURN, I.. Characterizations of crossed Produts by Partial Actions. **J. Operator Theory**, 37, p. 311-340, 1997.

[12] ROWEN, L.H.. **Ring Theory**, vol. 1, London: Academy Press INC., 1988. 538 p..

[13] WEIBEL, C. A.. **An introduction to homological algebra**, Cambridge: Cambridge studies in advanced mathematics, 38, 1994. 450 p..

[14] WISBAUER, Robert. **Foundations of Module and Ring Theory**, Philadelphia: Gordon and Breach Science Publishers, 1991. 606 p..