

MICHAEL KLUG

**REALIMENTAÇÃO DINÂMICA
DE SAÍDAS COM
PARÂMETROS VARIANTES E
APLICAÇÃO AOS SISTEMAS
FUZZY TAKAGI-SUGENO**

FLORIANÓPOLIS

2010

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO E
SISTEMAS**

**REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDAS
COM PARÂMETROS VARIANTES E
APLICAÇÃO AOS SISTEMAS FUZZY
TAKAGI-SUGENO**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas

MICHAEL KLUG

Florianópolis, Dezembro de 2010

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária
da
Universidade Federal de Santa Catarina

K66r Klug, Michael
Realimentação dinâmica de saídas com parâmetros variantes
e aplicação aos sistemas fuzzy Takagi-Sugeno [dissertação] /
Michael Klug ; orientador, Eugênio de Bona Castelan Neto. -
Florianópolis, SC, 2010.
118 p.: il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de sistemas. 2. Controle robusto. 3.
Algoritmos. I. Castelan Neto, Eugenio de Bona. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. III. Título.

CDU 621.3-231.2(021)

**REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDAS
COM PARÂMETROS VARIANTES E
APLICAÇÃO AOS SISTEMAS FUZZY
TAKAGI-SUGENO**

MICHAEL KLUG

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas, Área de concentração Controle, Automação e Sistemas, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina.

Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.
Orientador

José Eduardo Ribeiro Cury, Dr.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de
Automação e Sistemas

Banca Examinadora:

Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.

Daniel Ferreira Coutinho, Dr.

Edson Roberto de Pieri, Dr.

Martín Jorge Pomar Garcia, Dr.

Pedro Luis Dias Peres, Dr.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDAS COM PARÂMETROS VARIANTES E APLICAÇÃO AOS SISTEMAS FUZZY TAKAGI-SUGENO

Michael Klug

Dezembro / 2010

Orientador: Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr..

Área de Concentração: Controle, Automação e Sistemas.

Palavras-chave: Sistema Fuzzy TS, Controle Não Linear, Controle Robusto, Realimentação Dinâmica de Saídas, Saturação.

Número de Páginas: 118

Apresenta-se uma metodologia sistemática visando estudar e computar leis de controle para determinadas classes de sistemas não lineares em tempo discreto. Para modelar o sistema não linear utiliza-se do método fuzzy Takagi-Sugeno, descrevendo a planta como a combinação de um certo número de modelos lineares locais. Uma nova técnica de construção exata é proposta, empregando não linearidades contidas em um setor tipo cone limitado, e posteriormente tratando como um problema de estabilidade absoluta.

De forma geral, para a planta modelada via fuzzy Takagi-Sugeno são desenvolvidos controladores dinâmicos de ordem completa por realimentação de saídas, com dependência parcial ou total de parâmetros. Uma extensão considerando os efeitos da saturação nas entradas de controle também é tratada.

Para os problemas de controle considerados ao longo deste trabalho, são propostos problemas de otimização convexa com restrições descritas em termos de desigualdades matriciais lineares. O objetivo é determinar a maximização da região de estabilidade ou o melhoramento de desempenho com a garantia de estabilidade, dentro da região de validade do modelo fuzzy TS. Exemplos numéricos foram desenvolvidos para ilustrar as potencialidades dos algoritmos propostos.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Automation and Systems Engineering.

OUTPUT DYNAMIC FEEDBACK WITH VARYING PARAMETERS AND APPLICATION TO FUZZY TAKAGI-SUGENO SYSTEMS

Michael Klug

Dez / 2010

Advisor: Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr..

Area of Concentration: Control, Automation and Systems.

Keywords: Fuzz TS System, Nonlinear Control, Robust Control, Dynamic Output Feedback, Saturation.

Number of pages: 118

This work presents a systematic methodology for studying and computing control laws for some classes of nonlinear discrete time systems. To model the nonlinear system, the fuzzy Takagi-Sugeno method is used, describing the plant as the combination of a number of local linear models. An alternative modeling technique, employing sector bounded nonlinearities, is proposed, leading to less complex controller computation and implementation.

Thus, full-order dynamic output feedback controllers are developed. An extension considering the effects of saturation in the control inputs is also addressed.

For the control problems considered in this work, convex optimization problems are proposed, with constraints described in terms of linear matrix inequalities. The objective is to determine the maximization of an stability region or improving performance with a guarantee of stability, inside the domain of validity for the TS model. Numerical examples are developed to illustrate the potential of the proposed algorithms.

SUMÁRIO

Introdução	21
1.1 Proposta de Trabalho	24
1.2 Organização do Documento	26
Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno	29
2.1 Representação de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno	29
2.2 Construção do Modelo Fuzzy	31
2.2.1 Construção Aproximada	32
2.2.2 Construção Exata	33
2.2.2.1 Construção Exata para uma Classe Especial de Sistemas Não Lineares	36
2.3 Exemplo - Pêndulo Invertido	38
2.3.1 Construção Aproximada - Pêndulo	39
2.3.2 Construção Exata - Pêndulo	41
2.4 Conclusão	46
CDRS Aplicado a Sistemas LPV	49
3.1 Apresentação do Problema	49
3.1.1 CASO 1: CDRS-PDP para Sistemas LPV	50
3.1.2 CASO 2: CDRS-TDP para Sistemas LPV	51
3.2 Condições de Estabilidade	52
3.3 Condições de Estabilização	55
3.3.1 Estabilização com CDRS-PDP-LPV	56
3.3.2 Estabilização com CDRS-TDP-LPV	57
3.4 Complexidade	60
3.4.1 Complexidade Numérica	60
3.4.2 Complexidade de Implementação	61
3.5 Estabilização Local num Domínio de Validade do Sistema	62
3.6 Conclusão	65
CDNRS Aplicado a uma Classe de Sistemas NLPV	67
4.1 Apresentação do Problema	67
4.1.1 CASO 3: CDNRS-PDP para uma Classe de Sistemas NLPV	68
4.1.2 CASO 4: CDNRS-TDP para uma Classe de Sistemas NLPV	69

4.2	Condições de Estabilidade	70
4.3	Condições de Estabilização	74
4.3.1	Estabilização com CDNRS-PDP-NLPV	74
4.3.2	Estabilização com CDNRS-TDP-NLPV	75
4.4	Condições Adicionais para Modelos Locais	76
4.5	Extensão para o caso com Saturação nos Atuadores	78
4.6	Conclusão	83
Resultados Numéricos e Simulações		85
5.1	Ferramentas Computacionais	85
5.2	Exemplo Numérico	86
5.3	Resultados Numéricos e Simulações	89
5.3.1	Simulação para os Algoritmos Aplicáveis ao Modelo (5.1)	89
5.3.2	Simulação para os Algoritmos Aplicáveis ao Modelo (5.2)	94
5.4	Conclusão	99
Conclusão		101
Apêndice A – LMIs e Ferramentas de Tratamento		103
A.1	Inequações Matriciais Lineares	103
A.2	Ferramentas de Tratamento	103
A.2.1	Complemento de Schur	103
A.2.2	S-Procedure	104
Apêndice B – Projecção		105
B.1	Projecção no Espaço Coluna	105
Apêndice C – Aproximação de Sistemas Não Lineares		107
C.1	Método de Aproximação	107
Apêndice D – Transformação de Malha		111
D.1	Transformação $\bar{\varphi} \in [\Omega_1, \Omega_2]$ em $\varphi \in [0, \Omega]$	111

LISTA DE FIGURAS

1	Modelo fuzzy TS para sistemas não lineares.	22
2	Não linearidade de saturação.	24
3	Esquema de controle proposto.	25
4	Não linearidade de setor.	26
5	Não linearidade φ_1 pertencente ao setor $[\Omega_{21} \ \Omega_{11}]$	37
6	Superfícies não lineares (g_{21} e φ_2).	39
7	Aproximações Fuzzy e Erro para 2 Regras.	39
8	Aproximações Fuzzy e Erro para 4 Regras.	40
9	Aproximações Fuzzy e Erro para 6 Regras.	40
10	Superfície não linear (\bar{f}_{22}) e sua aproximação Fuzzy.	41
11	Não linearidade de setor φ_2	43
12	Funções Peso do Modelo Fuzzy TS.	48
13	Complexidade Relativa Teorema 4 por Teorema 3.	61
14	Região de setor para a não linearidade $\bar{\varphi}(\cdot)$	88
15	Regiões de Estabilização e Confinamento para $\lambda = 1$ - CASOS 1 e 2.	91
16	Regiões de Estabilização e Confinamento para $\lambda = 0.7$ - CA- SOS 1 e 2.	92
17	Evolução Temporal de x_1 para $\lambda = 1$ para os CASOS 1 e 2.	93
18	Evolução Temporal de x_2 para $\lambda = 1$ para os CASOS 1 e 2.	93
19	Esforço de Controle para $\lambda = 1$ - CASOS 1 e 2.	94
20	Regiões de Estabilização e Confinamento para $\lambda = 1$ - CASOS 3 e 4.	96
21	Regiões de Estabilização e Confinamento para $\lambda = 0.7$ - CA- SOS 3 e 4.	96
22	Evolução Temporal de x_1 para $\lambda = 1$ para os CASOS 3 e 4.	97
23	Evolução Temporal de x_2 para $\lambda = 1$ para os CASOS 3 e 4.	98
24	Esforço de Controle para $\lambda = 1$ - CASOS 3 e 4.	98
25	Projeção no Espaço Coluna.	105

LISTA DE TABELAS

1	Número de variáveis escalares das LMIs.	60
2	Número de linhas das LMIs.	60
3	Número de Operações para o CASO 1.	61
4	Número de Operações para o CASO 2.	62
5	Número de variáveis escalares e linhas das LMIs - CA- SOS 1 e 2.	90
6	Número de operações - CASOS 1 e 2.	90
7	Factibilidade dos Algoritmos de Controle - CASOS 1 e 2.	90
8	Tempo Computacional - CASOS 1 e 2.	91
9	Número de variáveis escalares e linhas das LMIs - CA- SOS 3 e 4.	94
10	Número de Operações - CASOS 3 e 4.	95
11	Factibilidade dos Algoritmos de Controle - CASOS 3 e 4.	95
12	Tempo Computacional - CASOS 3 e 4.	95

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CDNRS	Controlador Dinâmico Não Linear por Realimentação de Saída.
CDRS	Controladores Dinâmicos por Realimentação de Saída.
CL	Conjuntos de tipo Lyapunov.
CPD	Compensação Paralela Distribuída.
FL	Fuzzy-L'ure.
FLDP	Função de Lyapunov Dependente de Parâmetros.
LMI	Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês Linear Matrix Inequalities).
LPV	Linear com Parâmetro Variante (do inglês Linear Parameter Varying).
PDP	Parcialmente Dependente de Parâmetros.
RC	Região de Confinamento.
RE	Região de Estabilidade.
RV	Região de Validade.
TDP	Totalmente Dependente de Parâmetros.
TS	Takagi-Sugeno.

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathfrak{R}	Conjunto dos números reais
\mathfrak{R}^n	Espaço vetorial real n -dimensional
$\mathfrak{R}^{n \times m}$	Espaço das matrizes com elementos de dimensão $n \times m$
A'	Transposta da matriz A
A^{-1}	Inversa da matriz A
I	Matriz identidade de dimensão apropriada
$*$	Bloco simétrico com relação à diagonal principal de uma matriz simétrica
\bullet	Representa um termo sem influência no desenvolvimento
$A_{(i)}$	Representa a i -ésima linha da matriz A
$P > (\geq 0)$	Matriz definida positiva (ou semi-definida positiva)
$diag[a_{11}, a_{22}]$	Matriz diagonal, isto é, $a_{ij} = 0, i$

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, o crescente uso da tecnologia trouxe comodidade, segurança, informação, entretenimento e comunicação aos seres humanos. Para que haja continuidade a este desenvolvimento, procura-se a melhoria das tecnologias já desenvolvidas, com a busca por melhores rendimentos e confiabilidade dos sistemas. Para atingir este objetivo, faz-se necessário o aperfeiçoamento e desenvolvimento de técnicas de controle que levem em consideração as principais particularidades da planta física envolvida, de forma que a dinâmica do sistema evolua da forma desejada. Neste escopo, o estudo de modelos que representem adequadamente o comportamento do sistema sob investigação e o controle não linear são de grande importância.

O controle não linear pode ser definido como o conjunto de procedimentos destinados a fazer com que as variáveis de saída de um sistema não linear aproximem-se de uma determinada referência e se estabilizem numa vizinhança do seu valor [34]. Diversas técnicas têm sido dedicadas ao controle de tais sistemas (veja, por exemplo, [23]), não havendo, porém, uma técnica universal que possibilite o controle dos mais variados sistemas não lineares. Desta forma, técnicas diferenciadas foram desenvolvidas para determinadas classes particulares de sistemas, como por exemplo, linearização, realimentação linearizante, controle por modos deslizantes, *backstepping*, controle baseado em passividade, entre outras [33], existindo a necessidade de conhecimento da metodologia de projeto de controle para cada técnica em especial, dificultando e limitando o trabalho do projetista e/ou engenheiro de controle. Neste contexto, atualmente tem-se um crescente interesse em pesquisas de teoria e aplicações de controle com lógica fuzzy, e em especial, modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS) para sistemas não lineares.

Os modelos fuzzy TS consistem basicamente da descrição de um sistema não linear como a combinação de certo número de modelos lineares (ou afins) locais invariantes no tempo [37], também chamados de regras, que descrevem o comportamento deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Tal combinação de regras é controlada por funções peso-normalizadas, denominadas de funções de pertinência. Este conceito é mais amplo do que a linearização da planta em um único ponto de interesse, pois possibilita a descrição em regiões mais distantes, formando uma região de operação para o sistema. É importante destacar que o modelo fuzzy pode descrever o sistema ori-

ginal de forma aproximada ou exata, dependendo do número de regras e metodologia de construção do modelo. Tal representação possibilita estender de forma natural e elegante alguns resultados e ferramentas utilizadas na teoria de controle para sistemas lineares. A figura 1 representa a descrição fuzzy de uma certa classe de sistemas não lineares.

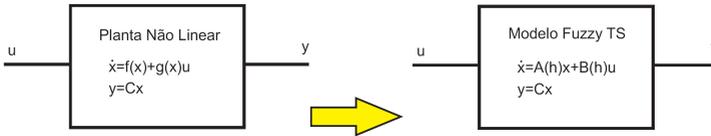


Figura 1: Modelo fuzzy TS para sistemas não lineares.

Uma ferramenta matemática denominada LMI (*Linear Matrix Inequality*, no português, Desigualdade Linear Matricial) tem sido amplamente difundida em sistemas de controle [2]. Problemas como análise de estabilidade e projeto de controladores podem ser reduzidos a problemas descritos por LMIs e numericamente solucionados de forma eficiente e em tempo polinomial, por meio de algumas ferramentas poderosas disponíveis na literatura de programação matemática convexa, tais como os *SDP solvers* (*semiDefinite Programming Solver*). Outra vantagem é a facilidade de adicionar vários critérios e/ou restrições para o projeto, denominado controle multiobjetivo. Desta forma, a solução encontrada para tais problemas descritos por LMIs é equivalente a encontrar soluções para o problema original.

Grande parte dos estudos encontrados na literatura relacionados a projetos de controladores fuzzy tratam de um procedimento denominado compensação distribuída paralela (CDP) [47]. Para aplicar a CDP, o sistema não linear deve ser antes representado por um modelo fuzzy Takagi-Sugeno (TS). Desta forma, cada regra de controle é projetada a partir das regras correspondentes do modelo fuzzy, utilizando-se técnicas de projeto de controle linear. O controlador fuzzy global, que é não linear em geral, é a combinação dos controladores lineares locais. Entretanto, tais técnicas encontradas na literatura não consideram na etapa de projeto o domínio de validade do modelo, sendo a análise realizada a posteriori por simulação.

Para sistemas em tempo contínuo e cada regra (sistema local) controlada por realimentação de estados citam-se os trabalhos [47] e

[15], sendo os ganhos de realimentação obtidos a partir de condições de projeto globais. Para o último são elaboradas condições LMIs relaxadas baseadas em critérios não quadráticos, como forma de redução de conservadorismo das soluções. Com a adição de critério H_∞ e utilização de CDP tem-se o trabalho de [51]. Outros trabalhos que utilizam estratégias como adição de integrador ou controle proporcional integral para sistemas fuzzy podem ser encontrados em [50] e [24].

O artigo [30] fornece condições convexas com convergência garantida para o projeto de controladores por realimentação de estados que estabilizam quadraticamente e também asseguram desempenhos ótimos H_2 e H_∞ sob estabilidade quadrática para sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno contínuos no tempo. As condições são formuladas como LMIs dependentes de parâmetros com variáveis de folga. Na mesma linha para sistemas discretos cita-se [43].

Em [1], trata-se do caso de compensadores dinâmicos por realimentação de saída para sistemas representados por modelo fuzzy TS. Tal proposição é tratada em tempo contínuo com a utilização de critério de rejeição H_∞ e seguimento de trajetória. Para tratamento do problema são descritas LMIs de estabilização baseadas na utilização de critérios quadráticos de estabilidade.

Outros estudos abordam o problema de sistemas com atraso de tempo, como em [46], onde funções de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetros são utilizadas para obter as condições de análise e síntese dos controladores. Em [14] e [48] tratam-se dos casos com atrasos variantes no tempo, sendo que para o último são considerados sistemas fuzzy incertos.

Recentemente, além das não linearidades tratadas pelo modelo fuzzy TS, tem-se dado destaque a sistemas não lineares sujeitos a saturação dos sinais dos atuadores [11, 7]. A saturação é uma das não linearidades mais comuns na prática da engenharia de controle e automação, e normalmente decorre dos limites físicos impostos pelos dispositivos de atuação. A presença da saturação pode causar efeitos indesejados, como o surgimento de ciclos limites e instabilidade do sistema em malha fechada. Desta forma, a consideração da saturação na análise e projeto de sistemas de controle é um tema de importância teórica e prática. Na figura 2 mostra-se a descrição gráfica de uma não linearidade tipo saturação simétrica.

Para a inclusão da saturação na fase de projeto de controladores, duas abordagens principais são encontradas na literatura: a abordagem

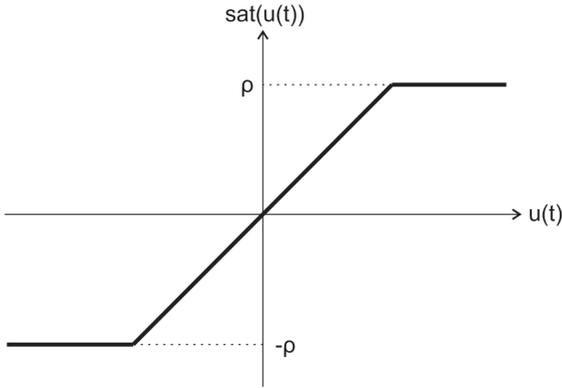


Figura 2: Não linearidade de saturação.

politópica proposta em [16] e [18], e a abordagem por condição de setor modificada proposta em [19] e [20]. Com a primeira, os trabalhos de [22] e [49] tratam o caso de realimentação de estados para sistemas fuzzy TS contínuos no tempo, com critério H_∞ e custo garantido, respectivamente. Em [12] utilizam-se de condições de setor modificadas para análise de estabilidade e projeto de controladores aplicados a sistemas com parâmetros variantes no tempo, também podendo ser visualizados como modelos fuzzy TS de sistemas não lineares. Para tratamento é utilizada uma função de Lyapunov Dependente de Parâmetros (FLDP), à qual é associado um Conjunto de tipo Lyapunov (CL), de modo a reduzir o conservadorismo das soluções. Nesta dissertação utilizar-se-á o tratamento por condição de setor modificada, não sendo tratados os demais casos. Comparativamente, tal abordagem permite reduzir a complexidade dos algoritmos em relação à alternativa de modelo politópico da saturação.

1.1 Proposta de Trabalho

O principal objetivo deste trabalho é propor um método para síntese de controladores dinâmicos por realimentação de saída em tempo discreto com dependência parcial ou total de parâmetros, aplicados a sistemas que possam ser modelados via fuzzy TS. O problema é tratado a partir de uma função de Lyapunov dependente de parâmetro, na

qual é adicionado um fator relacionado a desempenho temporal. A construção do modelo é feita de forma exata, garantindo que soluções encontradas para o mesmo sejam diretamente aplicadas as equações do sistema não linear original.

Em sistemas fuzzy TS, a análise de estabilidade e síntese de controladores geralmente requerem que um número elevado de LMIs sejam satisfeitas, proporcionais ao número de modelos locais. Para redução da complexidade numérica dos algoritmos é proposto um método de construção exata composto de um sistema tradicional fuzzy TS adicionado de uma não linearidade pertencente a um setor, como representado nas figuras 3 e 4. Tal problema é tratado com conceitos de estabilidade absoluta [11], ou também chamado de problema de Lur'e.

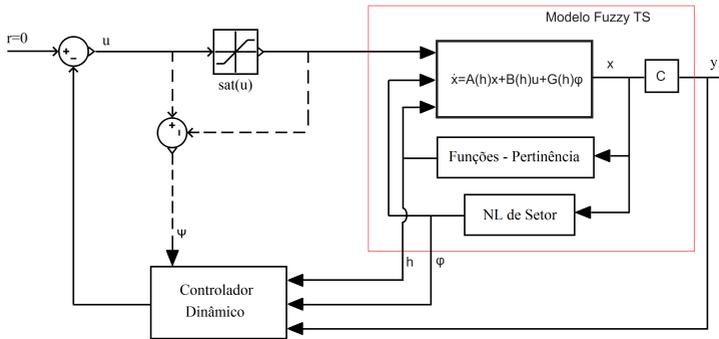


Figura 3: Esquema de controle proposto.

São abordados também os casos contendo limitação dos atuadores, adotando a técnica anti-windup como tentativa de mitigar os efeitos indesejáveis da saturação.

Considera-se o caso prático onde o modelo é válido apenas localmente, adicionando-se condições auxiliares na fase de projeto, com objetivo de confinar as trajetórias na região de validade considerada para o modelo.

O desenvolvimento deste trabalho segue uma linha similar à apresentada em [12]. Os resultados são descritos em termos de LMIs e podem ser resolvidos com a utilização de *SDP solvers*.

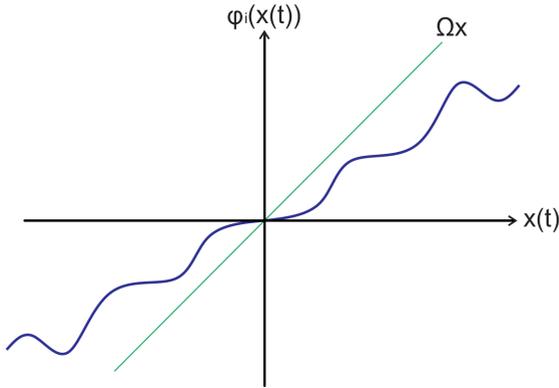


Figura 4: Não linearidade de setor.

1.2 Organização do Documento

- no capítulo 2 é apresentada a estrutura de um modelo Fuzzy TS de determinadas classes de sistemas não lineares, assim como os procedimentos de construção para o método aproximado e exato. Um exemplo de modelo fuzzy para um pêndulo invertido sobre um carro é exposto com duas alternativas de construção: inserção da não linearidade de setor na matriz de estados ou tratamento posterior com estabilidade absoluta.
- no capítulo 3 aborda-se a análise de estabilidade e o projeto de controladores para realimentações dinâmicas de saída do tipo parcialmente e totalmente dependente de parâmetros, aplicados a sistemas lineares discretos com parâmetros variantes. Para tratamento de estabilização utilizam-se de Funções de Lyapunov Dependentes de Parâmetros (FLDP), assim como condições adicionais de inclusão para o caso de modelos válidos localmente, ou numa região de operação.
- no capítulo 4 são tratados os sistemas discretos variantes no tempo pertencentes a uma classe de sistemas não lineares. Controladores por realimentação de saída com dependência parcial e total são propostos, de modo análogo ao capítulo anterior. Para o segundo caso considera-se uma extensão onde a entrada de con-

trole é limitada em amplitude, sendo esta tratada com condições de setor modificadas e termos anti-windup, objetivando mitigar os efeitos indesejáveis da saturação.

- no capítulo 5 são mostrados exemplos numéricos para comparação dos diversos controladores desenvolvidos durante a dissertação. Fatores como complexidade numérica de solução dos algoritmos, complexidade de implementação e aproximação de regiões de estabilização e confinamento de trajetórias são os principais fatores confrontados entre as técnicas.
- Por fim, no capítulo 6 são apresentadas algumas considerações finais relacionadas à realização deste trabalho, bem como propostas para trabalhos futuros.

2 MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

A idéia dos modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS) consiste da descrição de um sistema não-linear como a combinação de um certo número de modelos lineares (ou afins) locais invariantes no tempo, também chamados de regras, que descrevem o comportamento deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Tal combinação é inferida por funções de pertinência, que controlam a lei de interpolação entre as regras locais [26]. Observa-se que com esta visão pode-se considerar a técnica tradicional de linearização como um caso particular dos modelos fuzzy TS, constituído de apenas um modelo local.

O modelo fuzzy pode descrever o sistema original de forma exata ou aproximada, dependendo do número de modelos locais utilizados na representação. Um método de representação exata de sistemas não lineares para uma determinada região de operação pode ser encontrado em [37] ou [38], sendo para tal necessário, a utilização de 2^s modelos lineares locais, onde “ s ” representa o número de funções não lineares presentes no sistema. Portanto, a precisão na qual os sistemas fuzzy podem aproximar sistemas reais está relacionada ao número de modelos locais utilizados na representação, sendo um fator a ser considerado pelo projetista. Tal escolha deve levar em consideração a relação custo-benefício, pois um grande número de modelos locais pode exigir um grande esforço computacional no projeto e/ou dificultar a implementação do controlador.

É importante ressaltar que a forma de representação dos modelos fuzzy TS possibilita estender de forma natural e elegante os resultados estabelecidos na teoria de controle para plantas lineares e, mais particularmente, técnicas de controle robusto. Isto permite a elaboração rigorosa de reguladores e/ou observadores de estado, reduzidos a problemas descritos por desigualdades matriciais lineares, também conhecidas por LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*).

2.1 Representação de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno

Uma dada planta não linear é representada pelo modelo fuzzy TS através da descrição de regras fuzzy SE-ENTÃO, que expressam dinâmicas locais de cada regra por um modelo linear [47, 37]. Tem-se

os seguintes modelos lineares locais:

$$\begin{cases} \delta[x(t)] &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= C_i x(t) \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, r$$

em que: $\delta[x(t)] = \frac{dx(t)}{dt}$, com $t \in \mathfrak{R}^+$ no caso de sistemas contínuos no tempo, e $\delta[x(t)] = x(t+1)$, com $t \in \mathbb{Z}^+$ no caso de sistemas em tempo discreto, sendo também r o número de modelos lineares, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ o vetor de entrada, $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ o vetor de saída e A_i , B_i e C_i são matrizes constantes, reais e de dimensões apropriadas. Os modelos em questão relacionam-se com as regras SE-ENTÃO disponíveis, sendo que a i -ésima regra tem a forma:

$$\begin{array}{l} \text{SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_p^i \\ \text{ENTÃO } \begin{cases} \delta[x(t)] = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \end{array}$$

com M_j^i , $j = 1, \dots, p$ sendo o conjunto fuzzy j da regra i , e $z_1(t), \dots, z_p(t)$ são variáveis de premissa conhecidas. Neste trabalho trata-se o caso em que as variáveis de premissa podem ser função das variáveis de estado e/ou distúrbios externos.

Seja $\mu_j^i(z_j(t))$ o “peso” do conjunto fuzzy M_j^i associado à variável de premissa $z_j(t)$, e

$$w^i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_j^i(z_j(t)), \quad z(t) = [z_1(t) \quad z_2(t) \quad \dots \quad z_p(t)]$$

Como $\mu_j^i(z_j(t)) \geq 0$ tem-se,

$$w^i(z(t)) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, r \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^r w^i(z(t)) > 0$$

Desta forma, dados $(x(t), u(t), z(t))$, o sistema fuzzy resultante é obtido como a média ponderada dos modelos locais, também conhecida como defuzzificação por método de centro de gravidade [27]. Portanto

$$\delta[x(t)] = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))}$$

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))}$$

Definindo $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$, $i = 1, \dots, r$ como o peso normalizado de cada regra, também chamado de função de pertinência do i -ésimo modelo local, tem-se

$$\delta[x(t)] = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} = A(h(z(t)))x(t) + B(h(z(t)))u(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t) = C(h(z(t)))x(t) \quad (2.2)$$

com

$$A(h(z(t))) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i, \quad B(h(z(t))) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))B_i$$

e

$$C(h(z(t))) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i$$

É importante observar que (2.1) e (2.2) representam a combinação linear convexa dos modelos, ou seja,

$$h_i(z(t)) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, r \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$$

Nota-se também que o modelo fuzzy é equivalente à tradicional representação de um sistema linear a parâmetros variantes (sistema LPV, do inglês *Linear Parameter Varying*), com incertezas de forma politópica [4]. Tal fato possibilita que técnicas de análise de estabilidade e projeto de controladores definidas inicialmente para sistemas LPV sejam utilizadas para qualquer classe de sistemas não lineares que possam ser modeladas via fuzzy TS.

2.2 Construção do Modelo Fuzzy

Uma forma de controlar sistemas não lineares é obter o modelo fuzzy Takagi-Sugeno e aplicar técnicas compatíveis com sua representação. Portanto, a construção do modelo fuzzy representa um procedimento essencial para esta abordagem. Em geral existem duas alterna-

tivas para a construção de modelos fuzzy:

1. Identificação usando dados de entrada e saída e
2. Derivação a partir das equações do sistema não linear dado.

A construção por identificação é utilizada onde não se pode obter, ou é muito difícil, uma representação por modelo analítico e/ou físico. Nos demais casos, onde as equações analíticas não lineares são bem definidas, cita-se por exemplo o caso de sistemas mecânicos obtidos por método de Lagrange ou Newton-Euler, utiliza-se a segunda abordagem. Então, para o caso 2 empregam-se as idéias de não-linearidade de setor, aproximação local, ou uma combinação das duas, como ferramentas para construção do modelo. Neste trabalho apenas será considerado o segundo caso, onde duas vertentes serão analisadas: Modelo Aproximado ou Exato. Para ambas resulta-se em modelos locais do sistema original.

2.2.1 *Construção Aproximada*

Seja a planta não linear descrita pela seguinte equação ¹

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad x \in \mathfrak{X}^n \quad \text{e} \quad u \in \mathfrak{X}^m \quad (2.3)$$

Deseja-se obter um modelo fuzzy local representado por (2.1) e (2.2) que aproxime o comportamento do sistema original em determinada região do espaço de estados. Para tal, a critério do projetista, determinam-se r pontos de operação aos quais associam-se modelos locais lineares que representem o comportamento aproximado da planta não-linear.

Para os casos onde o ponto de operação é também um ponto de equilíbrio do sistema, pode-se obter o modelo local linear através de linearização por série de Taylor. Para os demais casos considera-se uma abordagem alternativa, conforme segue.

Considere x_0 um ponto de operação escolhido para o sistema que não coincida com um ponto de equilíbrio da planta, tem-se o seguinte problema para obtenção do modelo linear local:

$$f(x) + G(x)u \approx Ax + Bu \quad \text{para todo } u, x \approx x_0$$

¹Em benefício à leitura, a partir deste ponto, não será representada a dependência temporal e entre variáveis dos elementos onde for conveniente.

e

$$f(x_0) + G(x_0)u = Ax_0 + Bu \quad \text{para todo } u, x = x_0$$

ou seja, o modelo local linear deve representar aproximadamente a planta descrita em (2.3) para $x \approx x_0$, e no ponto de operação o comportamento deve ser idêntico. A solução ótima que minimiza o erro, descrita em [40], é:

$$B = G(x_0) \quad (2.4)$$

e, considerando-se a'_i igual à i -ésima linha de A , então (vide Apêndice C)

$$a_i = \nabla f_i(x_0) + \frac{f_i(x_0) - x_0^T \nabla f_i(x_0)}{\|x_0\|_2^2} x_0, \quad x_0 \neq 0 \quad (2.5)$$

sendo $\|x_0\|_2^2 = x_0^T x_0$ e $\nabla f_i(x) = [\partial f_i(x)/\partial x_1 \quad \dots \quad \partial f_i(x)/\partial x_n]'$. Desta forma obtém-se o seguinte modelo fuzzy TS:

$$\delta[x] = \sum_{i=1}^r h_i \{A_i x + B_i u\}$$

sendo as principais funções de pertinência h_i , $\forall i = 1, \dots, r$ utilizadas as triangulares, trapezoidais e em forma de sino (gaussiana).

Nota-se que os modelos locais ótimos, em pontos diferentes do ponto de equilíbrio, não podem ser obtidos através da linearização por série de Taylor no ponto considerado. Isto deve-se ao fato que Taylor lineariza o modelo em termos das variações das variáveis, e não em seus valores originais, obtendo-se assim um modelo afim para cada ponto distinto do ponto de equilíbrio.

2.2.2 Construção Exata

É possível modelar exatamente certas classes de sistemas não lineares com modelos fuzzy TS, com um número finito de modelos locais, ver por exemplo [37]. Neste método os modelos locais são obtidos em função da região de operação considerada, utilizando-se dos valores máximos e mínimos das funções não lineares que constituem o sistema. Desta forma, o número de regras está diretamente relacionado ao número de não linearidades da planta, sendo um fator inconveniente à medida que este número cresce. Seja a seguinte classe de sistemas

não lineares [6]:

$$\delta[x_i(t)] = \sum_{j=1}^n \bar{f}_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^m g_{ik}(x(t))u_k(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

com $\bar{f}_{ij}(x(t))$ e $g_{ik}(x(t))$ funções de $x(t)$, sendo $x(t) = [x_1(t) \ \cdots \ x_n(t)]'$, n o número de estados e m o número de entradas. Os termos lineares não precisam ser tratados e portanto não serão representados nas equações. Para obter a forma generalizada deste método, considere as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} a_{ij1} &= \max_{x(t) \in \mathcal{Y}_0} \{\bar{f}_{ij}(x(t))\} \\ a_{ij2} &= \min_{x(t) \in \mathcal{Y}_0} \{\bar{f}_{ij}(x(t))\} \\ b_{ik1} &= \max_{x(t) \in \mathcal{Y}_0} \{g_{ik}(x(t))\} \\ b_{ik2} &= \min_{x(t) \in \mathcal{Y}_0} \{g_{ik}(x(t))\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

sendo \mathcal{Y}_0 a região de operação considerada. Observa-se que os valores máximos e mínimos de cada função não linear devem ser computados para a região \mathcal{Y}_0 . É possível demonstrar que através de (2.7) pode-se representar $\bar{f}_{ij}(x(t))$ e $g_{ik}(x(t))$ como

$$\bar{f}_{ij}(x(t)) = \sum_{\ell^a=1}^2 \alpha_{ij\ell^a}(x(t))a_{ij\ell^a} \quad (2.8)$$

$$g_{ik}(x(t)) = \sum_{\ell^b=1}^2 \beta_{ik\ell^b}(x(t))b_{ik\ell^b} \quad (2.9)$$

com

$$\alpha_{ij1}(x(t)) = \frac{\bar{f}_{ij}(x(t)) - a_{ij2}}{a_{ij1} - a_{ij2}}, \quad \alpha_{ij2}(x(t)) = \frac{a_{ij1} - \bar{f}_{ij}(x(t))}{a_{ij1} - a_{ij2}}, \quad (2.10)$$

e

$$\beta_{ik1}(x(t)) = \frac{g_{ik}(x(t)) - b_{ik2}}{b_{ik1} - b_{ik2}}, \quad \beta_{ik2}(x(t)) = \frac{b_{ik1} - g_{ik}(x(t))}{b_{ik1} - b_{ik2}}, \quad (2.11)$$

Nota-se que $\sum_{\ell^a=1}^2 \alpha_{ij\ell^a}(x(t)) = \sum_{\ell^b=1}^2 \beta_{ik\ell^b}(x(t)) = 1$. Também

observa-se que ℓ^a e ℓ^b estão associados com os valores extremos das funções não lineares no intervalo de operação. Substituindo (2.8) e (2.9) em (2.6), tem-se

$$\delta[x_i(t)] = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell^a=1}^2 \alpha_{ij\ell^a}(x(t)) a_{ij\ell^a} x_j(t) + \sum_{k=1}^m \sum_{\ell^b=1}^2 \beta_{ij\ell^b}(x(t)) b_{ij\ell^b} u_k(t)$$

ou, matricialmente

$$\delta[x] = \begin{bmatrix} \sum_{\ell^a=1}^2 \alpha_{11\ell^a} a_{11\ell^a} & \cdots & \sum_{\ell^a=1}^2 \alpha_{1n\ell^a} a_{1n\ell^a} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{\ell^a=1}^2 \alpha_{n1\ell^a} a_{n1\ell^a} & \cdots & \sum_{\ell^a=1}^2 \alpha_{nn\ell^a} a_{nn\ell^a} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \sum_{\ell^b=1}^2 \beta_{11\ell^b} b_{11\ell^b} & \cdots & \sum_{\ell^b=1}^2 \beta_{1m\ell^b} b_{1m\ell^b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{\ell^b=1}^2 \beta_{n1\ell^b} b_{n1\ell^b} & \cdots & \sum_{\ell^b=1}^2 \beta_{nm\ell^b} b_{nm\ell^b} \end{bmatrix} u \quad (2.12)$$

Do fato que $\sum_{\ell^a=1}^2 \alpha_{ij\ell^a}(x(t)) = \sum_{\ell^b=1}^2 \beta_{ij\ell^b}(x(t)) = 1$ permite reescrever (2.12), alterando-se convenientemente os índices dos somatórios, como

$$\delta[x] = \sum_{p_{11}=1}^2 \cdots \sum_{p_{nm}=1}^2 \sum_{q_{11}=1}^2 \cdots \sum_{q_{nm}=1}^2 (\alpha_{11p_{11}} \cdots \alpha_{nmp_{nm}} \beta_{11q_{11}} \cdots \beta_{nmq_{nm}}) \left\{ \begin{bmatrix} a_{11p_{11}} & \cdots & a_{1np_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1p_{n1}} & \cdots & a_{nnp_{nn}} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_{11q_{11}} & \cdots & b_{1mq_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1q_{n1}} & \cdots & b_{nmq_{nm}} \end{bmatrix} u \right\} \quad (2.13)$$

Então, agregando os somatórios obtém-se

$$\delta[x] = \sum_{i=1}^{2^s} h_i \{A_i x + B_i u\} \quad (2.14)$$

sendo

$$i = q_{nm} + 2^1(q_{n(m-1)} - 1) + \cdots + 2^{nm-1}(q_{11} - 1) + 2^{nm}(p_{nm} - 1) + \cdots + 2^{s-1}(p_{11} - 1)$$

$$h_i = \alpha_{11p_{11}} \dots \alpha_{nnp_{nm}} \beta_{11q_{11}} \dots \beta_{nmq_{nm}} \quad \text{e} \quad s = nn + nm$$

Esta equação é equivalente ao modelo fuzzy TS apresentado em (2.1), com A_i e B_i dependentes dos valores extremos $a_{ij\ell^a}$ e $b_{ij\ell^b}$ das não linearidades do sistema. Já a função de pertinência $h_i(z(t))$ depende das funções $\alpha_{ij\ell^a}(x(t))$ e $\beta_{ij\ell^b}(x(t))$ definidas em (2.10) e (2.11), análoga ao parâmetro variante para um sistema LPV politópico.

Observa-se que “s” representa o número de não linearidades da planta, sendo importante destacar que não existe necessariamente uma não linearidade para cada posição da matriz de estados e de entrada do sistema, como representado em (2.6) ou (2.12). Nestes casos a presença de termos lineares ou termos nulos não implica em um somatório em (2.13), diminuindo a quantidade de sistemas locais para o modelo fuzzy TS.

2.2.2.1 Construção Exata para uma Classe Especial de Sistemas Não Lineares

Seja a seguinte classe especial de sistemas não lineares:

$$\delta[x_i(t)] = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^m g_{ik}(x(t))u_k(t) + \delta_i(x(t))\varphi_i(x(t)), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

com as não linearidades $\varphi_i, i = 1, \dots, n$ pertencentes à condição de setor limitada $\varphi_i \in [\Omega_{2i} \ \Omega_{1i}]$, ou seja, contidas entre as retas (ou hiperplanos) $\Omega_{1i}x(t)$ e $\Omega_{2i}x(t)$. Tal condição deve ser satisfeita ao menos localmente na região de operação \mathcal{V}_0 . A figura 5 demonstra um exemplo de não linearidade φ_i contida localmente num setor, considerando $\mathcal{V}_0 = \{x(t) \in \mathfrak{R}^n; |x(t)| \leq d\}$.

Para tratamento das não linearidades contidas no setor consideram-se duas alternativas descritas a seguir:

1. *Inserção das Não Linearidades de Setor na Matriz de Estados:*

Da condição de setor limitado é possível reescrever φ_i como [37]

$$\varphi_i(x(t)) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{\ell^s=1}^2 \gamma_{j\ell^s}(x(t))\Omega_{\ell^s} \right) x_j \quad (2.16)$$

sendo $\gamma_{j1}(x(t))$ e $\gamma_{j2}(x(t))$ funções quaisquer que validem (2.16) e

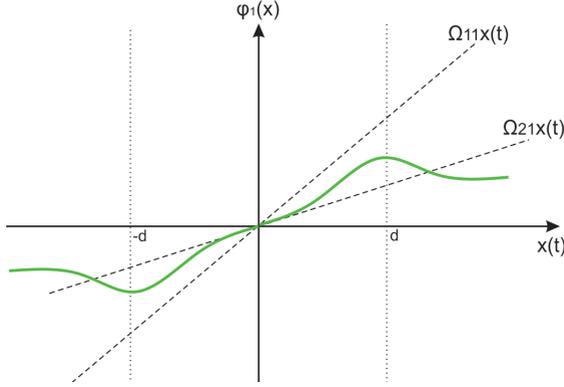


Figura 5: Não linearidade φ_1 pertencente ao setor $[\Omega_{21} \ \Omega_{11}]$.

respeitem as propriedades

$$\begin{aligned} \gamma_{j1}(x(t)) + \gamma_{j2}(x(t)) &= 1 \quad \text{e} \\ \gamma_{j\ell^s}(x(t)) &\geq 0, \quad \ell^s = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Substituindo (2.16) em (2.15) obtém-se

$$\begin{aligned} \delta[x_i(t)] &= \sum_{j=1}^n \tilde{f}_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^m g_{ik}(x(t))u_k(t) + \\ &\delta_i(x(t)) \sum_{j=1}^n \sum_{\ell^s=1}^2 \gamma_{j\ell^s}(x(t))\Omega_{\ell^s}x_j = \\ &\sum_{j=1}^n \left(\tilde{f}_{ij}(x(t)) + \delta_i(x(t)) \sum_{\ell^s=1}^2 \gamma_{j\ell^s}(x(t))\Omega_{\ell^s} \right) x_j(t) + \sum_{k=1}^m g_{ik}(x(t))u_k(t) \end{aligned}$$

Definindo $\tilde{f}_{ij}(x(t)) = \tilde{f}_{ij}(x(t)) + \delta_i(x(t)) \sum_{\ell^s=1}^2 \gamma_{j\ell^s}(x(t))\Omega_{\ell^s}$, tem-se

$$\delta[x_i(t)] = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^m g_{ik}(x(t))u_k(t) \quad (2.18)$$

A equação (2.18) possui a mesma estrutura de (2.6), e portanto podem ser utilizados os mesmos métodos de construção emprega-

dos anteriormente.

2. *Modelo Híbrido “Fuzzy-Lur’e”*: Para esta alternativa modela-se o sistema (2.15) via fuzzy TS tratando as não linearidade $\tilde{f}_{ij}(x(t))$ e g_{ik} tal como abordado na classe descrita em (2.6), adotando o mesmo procedimento para $\delta_i(x(t))$. Nenhum tratamento para as não linearidades de setor $\varphi_i(x(t))$ é dado a priori, sendo estas tratadas posteriormente com ferramentas de estabilidade absoluta. O modelo fuzzy resultante é da forma

$$\delta[x] = \sum_{i=1}^r h_i \{A_i x + B_i u + G_i \varphi\} = A(h)x + B(h)u + G(h)\varphi \quad (2.19)$$

Este modelo pode ser representado como a interconexão em realimentação de um sistema linear a parâmetros variantes com alguma não linearidade de tipo setor limitado, também conhecido como sistema tipo Lur’e. Desta maneira denomina-se (2.19) de modelo híbrido “Fuzzy-Lur’e”(FL).

O modelo FL permite utilizar menos regras mantendo a dinâmica exata do sistema não linear original, tratando-se este de uma contribuição dessa dissertação.

2.3 Exemplo - Pêndulo Invertido

Sejam as equações de movimento descritas em [5], representando o problema de equilibrar um pêndulo invertido em um carro

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - a m l x_2^2 \sin(2x_1) / 2 - a \cos(x_1) u}{4l/3 - a m l \cos^2(x_1)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

sendo: x_1 o ângulo (rad) do pêndulo em relação a vertical; x_2 a velocidade angular (rad/s); $g = 9.8(m/s^2)$ a aceleração da gravidade; m a massa do pêndulo (kg); M a massa do carro (kg); $2l$ o comprimento do pêndulo (m) e u a força aplicada ao carro (N). Define-se $a = 1/(m + M)$.

Para a construção do modelo fuzzy considera-se a região de operação $x_1 \in [-x_{1max}, x_{1max}]$ e $x_2 \in [-x_{2max}, x_{2max}]$, sendo para este caso $x_{1max} = \pi/3$ e $x_{2max} = 5$.

2.3.1 Construção Aproximada - Pêndulo

Para a construção aproximada utilizam-se as soluções ótimas descritas em (2.4) e (2.5).

Na figura 6 observa-se a representação gráfica das superfícies não lineares da planta g_{21} e φ_2 no seu domínio de validade. Já nas figuras 7, 8 e 9 são apresentadas as aproximações fuzzy das mesmas superfícies não lineares para 2, 4 e 6 regras, assim como o erro em relação a superfície original. Nota-se que o aumento do número de regras proporciona uma melhor aproximação das funções não lineares do sistema dentro da região de operação \mathcal{V}_0 .

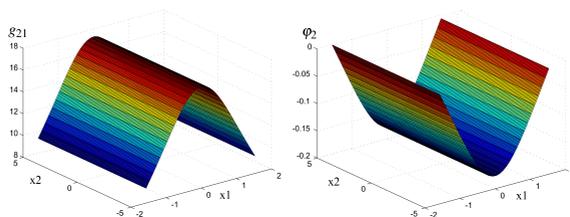


Figura 6: Superfícies não lineares (g_{21} e φ_2).

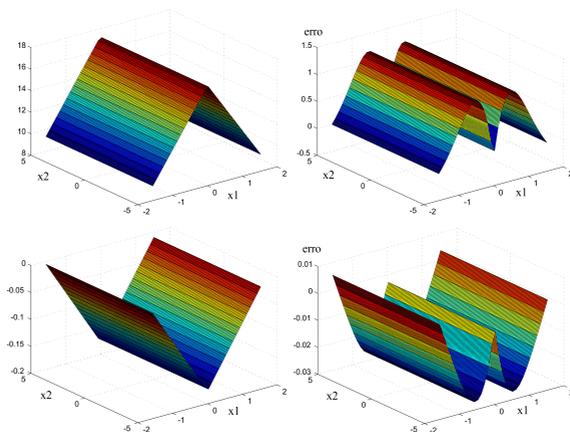


Figura 7: Aproximações Fuzzy e Erro para 2 Regras.

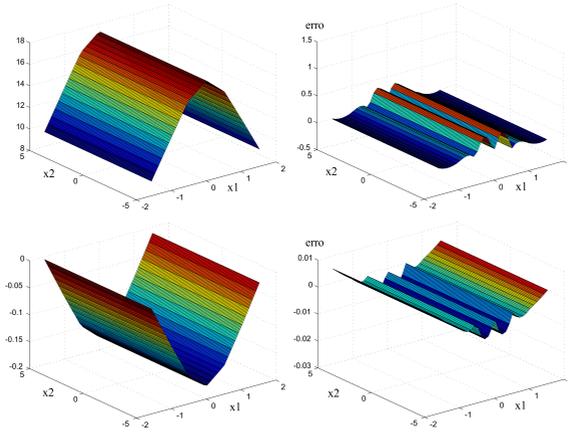


Figura 8: Aproximações Fuzzy e Erro para 4 Regras.

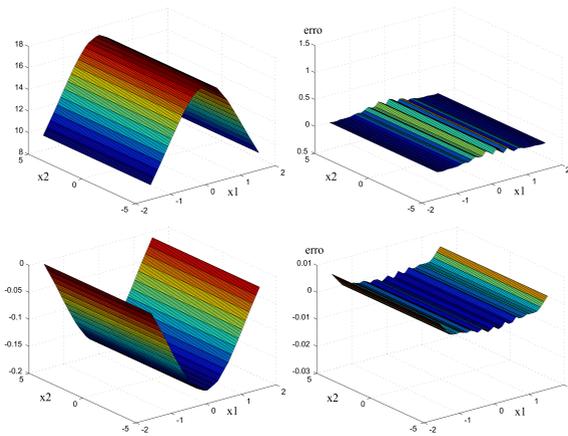


Figura 9: Aproximações Fuzzy e Erro para 6 Regras.

Os pontos de operação considerados foram do tipo $x_0 = (\bar{x}_1, 0)$, ou seja, apenas posições angulares com velocidade nula. Esta escolha explica o fato de \bar{f}_{22} não possuir aproximação, independente do número de modelos locais adotado, conforme observado na figura 10. Para uma aproximação coerente deve-se atribuir pontos mais espaçados dentro da região de operação \mathcal{V}_0 , sem um critério específico de escolha, baseando-se na experiência do projetista.

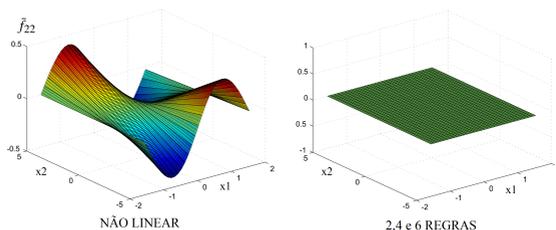


Figura 10: Superfície não linear (\bar{f}_{22}) e sua aproximação Fuzzy.

É importante destacar que neste trabalho objetiva-se a modelagem exata do sistema, enfatizando-se apenas qualitativamente os modelos aproximados.

2.3.2 Construção Exata - Pêndulo

Para a construção exata, reescreve-se (2.20) sob a forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{aml}{2} \bar{f}_{22_1} \bar{f}_{22_2} x_2 - ag_{21_1} g_{21_2} u + g\varphi_{2_1} \varphi_{2_2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

com

$$\begin{aligned} \bar{f}_{22_1} &= g_{21_1} = \varphi_{2_1} = \frac{1}{\frac{4l}{3} - aml \cos^2(x_1)}, \\ \bar{f}_{22_2} &= x_2 \sin(2x_1), \\ g_{21_2} &= \cos(x_1), \\ \varphi_{2_2} &= \sin(x_1). \end{aligned}$$

A representação (2.21) é equivalente à (2.15) com as decomposições $\bar{f}_{22} = \bar{f}_{22_1} \bar{f}_{22_2}$, $g_{21} = g_{21_1} g_{21_2}$ e $\varphi_2 = \varphi_{2_1} \varphi_{2_2}$. Tal decomposição é efetuada visando aproveitar os termos não lineares comuns entre as funções.

Duas alternativas de modelo serão consideradas seguindo os mesmos procedimentos de modelagem adotados para a classe especial de

sistemas não lineares definida em (2.15).

1. *Inserção da não linearidade de setor na matriz de estados:*
Determinam-se os valores máximos e mínimos das funções não lineares para a região considerada

$$\begin{aligned}
 a_{22,1} = b_{21,1} = c_{2,1} &= \max_{x(t) \in \mathcal{Y}_0} \{ \bar{f}_{22_1}, g_{21_1}, \varphi_{2_1} \} = \frac{1}{4l/3 - aml} \equiv q_1 \\
 a_{22,2} = b_{21,2} = c_{2,2} &= \min_{x(t) \in \mathcal{Y}_0} \{ \bar{f}_{22_1}, g_{21_1}, \varphi_{2_1} \} = \frac{1}{4l/3 - aml\beta^2} \equiv q_2 \\
 a_{22,2} &= \max_{x(t) \in \mathcal{Y}_0} \{ \bar{f}_{22_2} \} = 5 \equiv c_1 \\
 a_{22,2} &= \min_{x(t) \in \mathcal{Y}_0} \{ \bar{f}_{22_2} \} = -5 \equiv c_2 \\
 b_{21,2} &= \max_{x(t) \in \mathcal{Y}_0} \{ g_{21_2} \} = 1 \equiv d_1 \\
 b_{21,2} &= \min_{x(t) \in \mathcal{Y}_0} \{ g_{21_2} \} = \beta \equiv d_2
 \end{aligned}$$

sendo $\beta = \cos(\pi/3)$. Portanto, pode-se reescrever tais funções como

$$\begin{aligned}
 \bar{f}_{22_1} &= g_{21_1} = \varphi_{2_1} = \sum_{i=1}^2 \alpha_{22,i} q_i \\
 \bar{f}_{22_2} &= \sum_{i=1}^2 \alpha_{22,i} c_i \\
 g_{21_2} &= \sum_{i=1}^2 \beta_{21,i} d_i
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

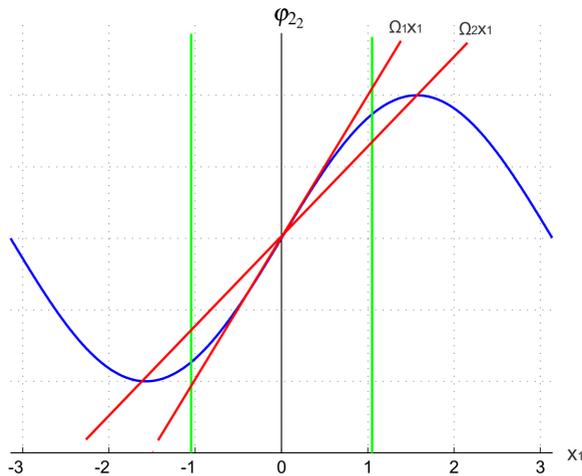
com

$$\begin{aligned}
 \alpha_{22,1} &= \frac{\bar{f}_{22_1} - a_{22,2}}{a_{22,1} - a_{22,2}}, & \alpha_{22,2} &= \frac{a_{22,1} - \bar{f}_{22_1}}{a_{22,1} - a_{22,2}}, \\
 \alpha_{22,1} &= \frac{\bar{f}_{22_2} - a_{22,2}}{a_{22,1} - a_{22,2}}, & \alpha_{22,2} &= \frac{a_{22,1} - \bar{f}_{22_2}}{a_{22,1} - a_{22,2}},
 \end{aligned}$$

e

$$\beta_{21,1} = \frac{g_{21_2} - b_{21,2}}{b_{21,1} - b_{21,2}}, \quad \beta_{21,2} = \frac{b_{21,1} - g_{21_2}}{b_{21,1} - b_{21,2}}.$$

Para a não linearidade φ_{2_2} observa-se que a mesma pertence localmente ao setor limitado $\varphi_{2_2} \in [\Omega_2 \ \Omega_1]$, com $\Omega_2 = 2/\pi$ e $\Omega_1 = 1$, conforme exposto na figura 11. O fato da escolha da validade local do setor ao qual pertence a não linearidade ser maior do que os limites da região de operação visa um futuro aumento de \mathcal{Y}_0 , sem a necessidade de alteração deste tratamento. Portanto, de

Figura 11: Não linearidade de setor φ_{22} .

(2.16) e das propriedades (2.17) pode-se reescrever

$$\varphi_{22} = \left(\sum_{i=1}^2 \gamma_{22i} \Omega_i \right) x_1 \quad (2.23)$$

com

$$\gamma_{221} = \begin{cases} \frac{\varphi_{22} - (2/\pi) \sin^{-1}(\varphi_{22})}{(1-2/\pi) \sin^{-1}(\varphi_{22})}, & \varphi_{22} \neq 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\gamma_{222} = \begin{cases} \frac{\sin^{-1}(\varphi_{22}) - \varphi_{22}}{(1-2/\pi) \sin^{-1}(\varphi_{22})}, & \varphi_{22} \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Substituindo (2.22) e (2.23) em (2.21), e da propriedade que $\sum_{i=1}^2 \alpha_{221i} = \sum_{i=1}^2 \alpha_{222i} = \sum_{i=1}^2 \beta_{212i} = \sum_{i=1}^2 \gamma_{22i} = 1$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{221j} \alpha_{222k} \beta_{212l} \gamma_{22m}$$

$$\times \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_j\Omega_m & -\frac{aml}{2}q_jc_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_jd_l \end{bmatrix} u \right\} =$$

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \alpha_{22_1j} \alpha_{22_2k} \beta_{21_2l} \gamma_{2_2m} \{A_{jklm}x + B_{jklm}u\}$$

com

$$A_{jklm} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_j\Omega_m & -\frac{aml}{2}q_jc_k \end{bmatrix} \text{ e } B_{jklm} = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_jd_l \end{bmatrix}$$

Então, agregando os somatórios obtém-se

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{16} h_i \{A_i x + B_i u\} \quad (2.24)$$

sendo

$$i = m + 2(l - 1) + 4(k - 1) + 8(j - 1)$$

$$h_i = \alpha_{22_1j} \alpha_{22_2k} \beta_{21_2l} \gamma_{2_2m}$$

e as matrizes que compõem os modelos locais

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_1\Omega_1 & -\frac{aml}{2}q_1c_1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_1d_1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_1\Omega_2 & -\frac{aml}{2}q_1c_1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_1d_1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_1\Omega_1 & -\frac{aml}{2}q_1c_1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_1d_2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_1\Omega_2 & -\frac{aml}{2}q_1c_1 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_1d_2 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_1\Omega_1 & -\frac{aml}{2}q_1c_2 \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_1d_1 \end{bmatrix},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_1\Omega_2 & -\frac{aml}{2}q_1c_2 \end{bmatrix}, \quad B_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_1d_1 \end{bmatrix},$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_1\Omega_1 & -\frac{aml}{2}q_1c_2 \end{bmatrix}, \quad B_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_1d_2 \end{bmatrix},$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_1\Omega_2 & -\frac{aml}{2}q_1c_2 \end{bmatrix}, \quad B_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_1d_2 \end{bmatrix},$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_2\Omega_1 & -\frac{aml}{2}q_2c_1 \end{bmatrix}, \quad B_9 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_2d_1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
A_{10} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_2\Omega_2 & -\frac{aml}{2}q_2c_1 \end{bmatrix}, & B_{10} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_2d_1 \end{bmatrix}, \\
A_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_2\Omega_1 & -\frac{aml}{2}q_2c_1 \end{bmatrix}, & B_{11} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_2d_2 \end{bmatrix}, \\
A_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_2\Omega_2 & -\frac{aml}{2}q_2c_1 \end{bmatrix}, & B_{12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_2d_2 \end{bmatrix}, \\
A_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_2\Omega_1 & -\frac{aml}{2}q_2c_2 \end{bmatrix}, & B_{13} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_2d_1 \end{bmatrix}, \\
A_{14} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_2\Omega_2 & -\frac{aml}{2}q_2c_2 \end{bmatrix}, & B_{14} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_2d_1 \end{bmatrix}, \\
A_{15} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_2\Omega_1 & -\frac{aml}{2}q_2c_2 \end{bmatrix}, & B_{15} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_2d_2 \end{bmatrix}, \\
A_{16} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gq_2\Omega_2 & -\frac{aml}{2}q_2c_2 \end{bmatrix}, & B_{16} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_2d_2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

e

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na figura 12 observam-se as funções peso que compõem as funções de pertinência h_i .

2. *Tratamento por estabilidade absoluta:* Para este caso a não linearidade φ_{2_2} não é tratada a priori. Quanto as demais não linearidades segue-se o mesmo procedimento do caso anterior. Portanto, de (2.21), (2.22) e da propriedade que $\sum_{i=1}^2 \alpha_{22_1i} = \sum_{i=1}^2 \alpha_{22_2i} = \sum_{i=1}^2 \beta_{21_2i} = 1$, pode-se reescrever o sistema (2.20) como

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \alpha_{22_1j} \alpha_{22_2k} \beta_{21_2l} \\
&\times \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{aml}{2}q_jc_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_jd_l \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ gq_j \end{bmatrix} \varphi_{2_2} \right\} = \\
&\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \alpha_{22_1j} \alpha_{22_2k} \beta_{21_2l} \{A_{jkl}x + B_{jkl}u + G_{jkl}\varphi\}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
A_{jkl} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{aml}{2}q_jc_k \end{bmatrix}, & B_{jkl} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_jd_l \end{bmatrix}, \\
G_{jkl} &= \begin{bmatrix} 0 \\ gq_j \end{bmatrix} & \text{e } \varphi &= \varphi_{2_2}
\end{aligned}$$

Então, agregando os somatórios obtém-se

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^8 h_i \{A_i x + B_i u + G_i \varphi\} \quad (2.25)$$

sendo

$$i = l + 2(k - 1) + 4(j - 1)$$

$$h_i = \alpha_{22_1j} \alpha_{22_2k} \beta_{21_2l}$$

e as matrizes que compõem os modelos locais

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{aml}{2} q_1 c_1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_1 d_1 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ gq_1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{aml}{2} q_1 c_1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_1 d_2 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ gq_1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{aml}{2} q_1 c_2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_1 d_1 \end{bmatrix}, \quad G_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ gq_1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{aml}{2} q_1 c_2 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_1 d_2 \end{bmatrix}, \quad G_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ gq_1 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{aml}{2} q_2 c_1 \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_2 d_1 \end{bmatrix}, \quad G_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ gq_2 \end{bmatrix},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{aml}{2} q_2 c_1 \end{bmatrix}, \quad B_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_2 d_2 \end{bmatrix}, \quad G_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ gq_2 \end{bmatrix},$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{aml}{2} q_2 c_2 \end{bmatrix}, \quad B_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_2 d_1 \end{bmatrix}, \quad G_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ gq_2 \end{bmatrix},$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{aml}{2} q_2 c_2 \end{bmatrix}, \quad B_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aq_2 d_2 \end{bmatrix}, \quad G_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ gq_2 \end{bmatrix},$$

e

$$C = [1 \quad 0].$$

Nota-se que os modelos (2.24) e (2.25) são contínuos no tempo. É possível discretizar cada regra (modelo local) utilizando-se, por exemplo, de transformação bilinear [9] ou o tradicional segurador de ordem zero, obtendo-se assim versões discretizadas dos modelos contínuos apresentados.

2.4 Conclusão

Neste capítulo procurou-se revisar alguns fundamentos da modelagem Fuzzy TS para sistemas não lineares. Três tipos foram abordados: modelos aproximados, e modelos exatos utilizando-se de duas

técnicas diferenciadas, incluindo as não lineares de setor na matriz de estados ou tratando-as posteriormente como um caso de estabilidade absoluta. Para o último denominou-se de modelo Fuzzy-Lur'e.

Como o objetivo posterior é a síntese de controladores, com garantia de que a fase de projeto considere o modelo não linear o mais próximo possível, utilizaremos e compararemos as abordagens exatas nos próximos capítulos.

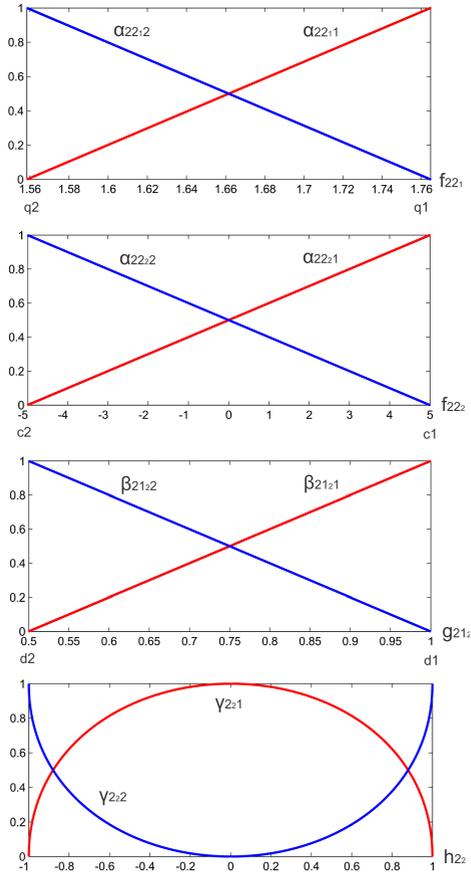


Figura 12: Funções Peso do Modelo Fuzzy TS.

3 CDRS APLICADO A SISTEMAS LPV

Neste capítulo apresenta-se a análise de estabilidade e projeto de controladores dinâmicos por realimentação de saída (CDRS) de ordem completa aplicados a sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV) em tempo discreto, sendo dois casos considerados: controlador com dependência parcial de parâmetros (CDRS-PDP) e controlador com dependência total de parâmetros (CDRS-TDP). Para tal, considera-se que os parâmetros variantes possam ser medidos em tempo real, ou calculados on-line no caso de plantas provenientes de modelos Takagi-Sugeno.

Para resolver o problema de estabilização utiliza-se uma Função de Lyapunov Dependente de Parâmetros (FLDP), visando reduzir o conservadorismo inerente à utilização de Funções de Lyapunov constantes ou independentes de parâmetros. A convergência das trajetórias são asseguradas mediante condições do tipo LMI, garantindo a propriedade de λ -contratividade como fator de desempenho. Também são incluídas condições adicionais para tratar de sistemas válidos localmente, essenciais à aplicação aos modelos fuzzy. Estes modelos podem ser obtidos pela modelagem exata da classe (2.6) ou da classe (2.15) utilizando o método de inserção na matriz de estados.

3.1 Apresentação do Problema

Considere um sistema linear em tempo discreto com parâmetros variantes no tempo, representado por:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A(h_k)x_k + B(h_k)u_k \\ y_k &= Cx_k \end{cases} \quad (3.1)$$

em que $x_k \in \mathfrak{R}^n$, $u_k \in \mathfrak{R}^m$ e $y_k \in \mathfrak{R}^p$ são, respectivamente, os estados do sistema, o vetor de entrada e o vetor de saída do sistema. Além disso, $h_k \subset \mathfrak{R}^r$ é um vetor de parâmetros mensurável, variante no tempo e limitado no simplex unitário $\Xi = \{h_k \in \mathfrak{R}^r; \sum_{i=1}^r h_{k(i)} = 1, h_{k(i)} \geq 0, i = 1, \dots, r\}$.

A estrutura das matrizes do sistema possui a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A(h_k) & B(h_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_{k(i)} \begin{bmatrix} A_i & B_i \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

e $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, sendo A_i e B_i matrizes contantes, reais e de dimensões apropriadas.

O problema de controle a ser estudado consiste da síntese de um controlador dinâmico por realimentação de saída (CDRS) que garanta a estabilidade para o sistema correspondente em malha fechada, obedecendo um certo requisito de desempenho.

Para o CDRS aplicado ao sistema (3.1), admitem-se dois casos:

3.1.1 CASO 1: CDRS-PDP para Sistemas LPV

Seja o controlador dinâmico

$$\begin{cases} x_{c,k+1} &= A_c(h_k)x_{c,k} + B_c(h_k)u_{c,k} \\ y_{c,k} &= C_c x_{c,k} + D_c u_{c,k} \end{cases} \quad (3.3)$$

em que $x_c \in \mathfrak{R}^n$, $y_{c,k} \in \mathfrak{R}^m$ e $u_{c,k} \in \mathfrak{R}^p$. Considera-se a seguinte estrutura das matrizes do controlador

$$\begin{bmatrix} A_c(h_k) & B_c(h_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_{k(i)} \begin{bmatrix} A_{ci} & B_{ci} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

e $C_c \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $D_c \in \mathfrak{R}^{m \times p}$, na qual $A_{ci} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $B_{ci} \in \mathfrak{R}^{n \times p}$. Como as matrizes da equação de saída, C_c e D_c , não dependem do parâmetro variante, nomeia-se de CDRS parcialmente dependente de parâmetros, ou simplesmente CDRS-PDP.

Considerando a interconexão $u_{c,k} = y_k$ e $y_{c,k} = u_k$, tem-se o seguinte sistema em malha fechada

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A(h_k)x_k + B(h_k)C_c x_{c,k} + B(h_k)D_c C x_k \\ x_{c,k+1} &= A_c(h_k)x_{c,k} + B_c(h_k)C x_k \end{cases}$$

Então, definindo o vetor de estados aumentado $\zeta_k = [x'_k \ x'_{c,k}]'$, o sistema em malha fechada pode ser representado por:

$$\zeta_{k+1} = (\mathbb{A}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)\mathbb{K})\zeta_k \quad (3.5)$$

com

$$\mathbb{A}(h_k) = \begin{bmatrix} A(h_k) & 0 \\ B_c(h_k)C & A_c(h_k) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}(h_k) = \begin{bmatrix} B(h_k) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e \quad \mathbb{K} = \begin{bmatrix} D_c C & C_c \end{bmatrix}$$

Observa-se de (3.5) que a matriz \mathbb{K} pode ser vista como uma realimentação constante dos estados do sistema aumentado.

3.1.2 CASO 2: CDRS-TDP para Sistemas LPV

Seja o controlador dinâmico

$$\begin{cases} x_{c,k+1} &= A_c(h_k)x_{c,k} + B_c(h_k)u_{c,k} \\ y_{c,k} &= C_c(h_k)x_{c,k} + D_c(h_k)u_{c,k} \end{cases} \quad (3.6)$$

com a seguinte estrutura das matrizes do controlador

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_c(h_k) & B_c(h_k) \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^r h_{k(i)}^2 \begin{bmatrix} A_{ci} & B_{ci} \end{bmatrix} + \\ &\quad \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{q=i+1}^r h_{k(i)} h_{k(q)} \begin{bmatrix} A_{ciq} & B_{ciq} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} C_c(h_k) & D_c(h_k) \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^r h_{k(i)} \begin{bmatrix} C_{ci} & D_{ci} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

sendo $(A_{ci}, A_{ciq}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $(B_{ci}, B_{ciq}) \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, $C_{ci} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $D_{ci} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$.

Considerando a interconexão $u_{c,k} = y_k$ e $y_{c,k} = u_k$, tem-se o seguinte sistema em malha fechada

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A(h_k)x_k + B(h_k)C_c(h_k)x_{c,k} + B(h_k)D_c(h_k)Cx_k \\ x_{c,k+1} &= A_c(h_k)x_{c,k} + B_c(h_k)Cx_k \end{cases}$$

Como anteriormente, tem-se

$$\zeta_{k+1} = (\mathbb{A}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)\mathbb{K}(h_k))\zeta_k \quad (3.8)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(h_k) &= \begin{bmatrix} A(h_k) & 0 \\ B_c(h_k)C & A_c(h_k) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}(h_k) = \begin{bmatrix} B(h_k) \\ 0 \end{bmatrix} \\ e \quad \mathbb{K}(h_k) &= \begin{bmatrix} D_c(h_k)C & C_c(h_k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observa-se de (3.8) que a matriz $\mathbb{K}(h_k)$ pode ser vista como uma realimentação dependente de parâmetros dos estados do sistema aumentado.

3.2 Condições de Estabilidade

Para o estudo de estabilidade e a garantia de um certo desempenho temporal para o sistema em malha fechada, considera-se uma Função de Lyapunov Dependente de Parâmetro (FLDP) tal que $V(\zeta_k, h_k) : \mathfrak{R}^{2n} \times \Xi \rightarrow \mathfrak{R}^+$, visando reduzir o conservadorismo inerente à utilização de Funções de Lyapunov constantes ou independentes de parâmetros.

Definição 1 *Considere um escalar não negativo $\lambda \in (0, 1]$. A origem do sistema descrito em (3.5) ou (3.8) é robustamente assintoticamente estável, com coeficiente de contração λ , se*

$$\Delta V_\lambda(\zeta_k, h_k) \triangleq V(\zeta_{k+1}, h_{k+1}) - \lambda V(\zeta_k, h_k) < 0 \quad (3.9)$$

$$\forall \zeta_k \in \mathfrak{R}^n \text{ e } \forall h_k \in \Xi$$

Na sequência, assume-se a FLDP da seguinte forma [17, 21]

$$V(\zeta_k, h_k) = \zeta_k' \mathbb{Q}^{-1}(h_k) \zeta_k \quad (3.10)$$

com $\mathbb{Q}(h_k) = \sum_{i=1}^r h_{k(i)} \mathbb{Q}_i$, $\mathbb{Q}_i = \mathbb{Q}_i' > 0$, $h_k \in \Xi$

Então, considerando que (3.5) e (3.8) podem ser escritos sob a forma

$$\zeta_{k+1} = \mathbb{A}_{MF}(h_k) \zeta_k \quad (3.11)$$

com $\mathbb{A}_{MF}(h_k) = \mathbb{A}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)\mathbb{K}$ ou $\mathbb{A}_{MF}(h_k) = \mathbb{A}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)\mathbb{K}(h_k)$, respectivamente, obtém-se

$$\Delta V_\lambda(\zeta_k, h_k) = \zeta_k' \mathcal{M}_{cs_1}(h_k) \zeta_k < 0 \quad (3.12)$$

sendo

$$\mathcal{M}_{cs_1}(h_k) = \mathbb{A}_{MF}(h_k)' \mathbb{Q}^{-1}(h_{k+1}) \mathbb{A}_{MF}(h_k) - \lambda \mathbb{Q}^{-1}(h_k)$$

Note que (3.12) é verificada se e somente se $\mathcal{M}_{cs_1}(h_k) < 0$, ou, de forma equivalente [2] (por complemento de Schur)

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{Q}(h_{k+1}) & \mathbb{A}_{MF}(h_k) \\ * & -\lambda \mathbb{Q}^{-1}(h_k) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.13)$$

Com o objetivo de obter condições que permitam a síntese dos controladores dinâmicos com as estruturas desejadas, pode-se utilizar o fato que, para qualquer matriz $\mathbb{U} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, tem-se [13]

$$(\mathbb{U} - \mathbb{Q}(h_k))' \mathbb{Q}(h_k)^{-1} (\mathbb{U} - \mathbb{Q}(h_k)) \geq 0 \Leftrightarrow -\mathbb{U}' \mathbb{Q}(h_k)^{-1} \mathbb{U} \leq \mathbb{Q}(h_k) - \mathbb{U} - \mathbb{U}'$$

Portanto, uma condição suficiente para a verificação de (3.13) pode ser formulada como a desigualdade matricial dependente de parâmetros

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{Q}(h_{k+1}) & \mathbb{A}_{MF}(h_k)\mathbb{U} \\ * & \lambda(\mathbb{Q}(h_k) - \mathbb{U} - \mathbb{U}') \end{bmatrix} < 0 \quad (3.14)$$

A partir de (3.14) podemos então estabelecer as condições para análise de estabilidade, descritas em função dos vértices dos polítopos de matrizes, associadas às duas estruturas de controladores dinâmicos sob investigação.

Lema 1 (*Condição de Estabilidade - CASO 1*). *Sejam A_{ci} , B_{ci} , C_c e D_c matrizes conhecidas que formam o controlador (3.3). Para um dado escalar real $\lambda \in (0, 1]$, considere a existência de matrizes simétricas definidas positivas $\mathbb{Q}_i \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ e da matriz $\mathbb{U} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, satisfazendo:*

$$\mathbb{M}_{1ji}^+ = \begin{bmatrix} -\mathbb{Q}_j & \mathbb{A}_i\mathbb{U} + \mathbb{B}_i\mathbb{K}\mathbb{U} \\ * & \lambda(\mathbb{Q}_i - \mathbb{U} - \mathbb{U}') \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, r \quad (3.15)$$

Então, a origem do sistema em malha fechada (3.5) é robustamente assintoticamente estável, para qualquer condição inicial $\zeta_0 \in \mathfrak{R}^n$, com coeficiente de contratividade λ .

Prova: Para a demonstração considere:

$$V(\zeta_{k+1}, h_{k+1}) = \zeta_{k+1}' \mathbb{Q}^{-1}(h_{k+1}) \zeta_{k+1}$$

A partir de (3.15), para cada i , multiplica-se a desigualdade correspondente $j = 1, \dots, r$ por $h_{k+1(j)}$ e soma-se. Na sequência multiplicam-se as desigualdades resultantes $i = 1, \dots, r$ por $h_{k(i)}$ e somam-se, obtendo-se

$$\sum_{i=1}^r h_{k(i)} \left(\sum_{j=1}^r h_{k+1(j)} \mathbb{M}_{1ji}^+ \right) < 0$$

Com base nas estruturas definidas em (3.2) e (3.4), e dos valores admissíveis aos parâmetros ($\sum_{i=1}^r h_{k(i)} = 1, h_{k(i)} \geq 0$), pode-se reescrever

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{Q}(h_{k+1}) & (\mathbb{A}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)\mathbb{K})\mathbb{U} \\ * & \lambda(\mathbb{Q}(h_k) - \mathbb{U} - \mathbb{U}') \end{bmatrix} < 0$$

que corresponde à condição de estabilidade apresentada em (3.14). \square

Lema 2 (*Condição de Estabilidade - CASO 2*). *Sejam $A_{ci}, A_{ciq}, B_{ci}, B_{ciq}, C_{ci}$ e D_{ci} matrizes conhecidas que formam o controlador (3.6). Para um dado escalar real $\lambda \in (0, 1]$, considere a existência de matrizes simétricas definidas positivas $\mathbb{Q}_i \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ e da matriz $\mathbb{U} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, satisfazendo:*

$$\mathbb{M}_{2ji}^+ = \begin{bmatrix} -\mathbb{Q}_j & (\mathbb{A}_i + \mathbb{B}_i\mathbb{K}_i)\mathbb{U} \\ * & \lambda(\mathbb{Q}_i - \mathbb{U} - \mathbb{U}') \end{bmatrix} < 0 \quad (3.16)$$

$\forall i, j = 1, \dots, r$

$$\mathbb{M}_{2jiq}^+ = \begin{bmatrix} -2\mathbb{Q}_j & (\mathbb{A}_{iq} + \mathbb{B}_i\mathbb{K}_q + \mathbb{B}_q\mathbb{K}_i)\mathbb{U} \\ * & \lambda(\mathbb{Q}_i + \mathbb{Q}_q - 2\mathbb{U} - 2\mathbb{U}') \end{bmatrix} < 0 \quad (3.17)$$

$\forall j = 1, \dots, r, \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \quad e \quad \forall q = i+1, \dots, r$

Então, a origem do sistema em malha fechada (3.8) é robustamente assintoticamente estável, para qualquer condição inicial $\zeta_0 \in \mathfrak{R}^n$, com coeficiente de contratividade λ .

Prova: Para o caso totalmente dependente de parâmetros, considera-se a condição (3.14) com

$$\mathbb{A}_{MF}(h_k) = \mathbb{A}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)\mathbb{K}(h_k)$$

Das estruturas matriciais definidas em (3.2) e (3.7) pode-se reescrever a parcela $\mathbb{A}_{MF}(h_k)$ como

$$\mathbb{A}_{MF}(h_k) = \mathbb{A}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)\mathbb{K} = \sum_{i=1}^r h_{k(i)}^2 \underbrace{\begin{bmatrix} A_i + B_i D_{ci} C & B_i C_{ci} \\ B_{ci} C & A_{ci} \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_i + \mathbb{B}_i \mathbb{K}_i} +$$

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{q=i+1}^r h_{k(i)} h_{k(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} (A_i + A_q) + (B_i D_{cq} + B_q D_{ci}) C & B_i C_{cq} + B_q C_{ci} \\ B_{ciq} C & A_{ciq} \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_{iq} + \mathbb{B}_i \mathbb{K}_q + \mathbb{B}_q \mathbb{K}_i}$$

sendo

$$\mathbb{A}_{iq} = \begin{bmatrix} A_i + A_q & 0 \\ B_{ciq}C & A_{ciq} \end{bmatrix}$$

De maneira análoga para os demais termos, pode-se reescrever (3.14) como

$$\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r h_{k(j)} h_{k(i)}^2 \mathbb{M}_{2,ji}^+ + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{q=i+1}^r h_{k(j)} h_{k(i)} h_{k(q)} \mathbb{M}_{2,jiq}^+ < 0 \quad (3.18)$$

Então, considerando-se os valores admissíveis dos parâmetros ($\sum_{i=1}^r h_{k(i)} = 1, h_{k(i)} \geq 0$), as condições estabelecidas pelo lema garantem que (3.18) é verificada. \square

Observa-se de (3.15), (3.16) e (3.17), que a matriz \mathbb{U} é obrigatoriamente invertível [12]. Além disso, à FLDP (3.10) utilizada para o estabelecimento da estabilidade e desempenho do sistema em MF, pode-se associar conjuntos de tipo Lyapunov, dados por [16, 8]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V(\gamma) &= \{ \zeta_k \in \mathfrak{R}^{2n}; \zeta_k' \mathbb{Q}^{-1}(h_k) \zeta_k \leq \gamma, \gamma \in \mathfrak{R}^+ \} \triangleq \\ &\bigcap_{h_k \in \Xi} \{ \mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(h_k), \gamma) \} = \bigcap_{i \in \{1, \dots, r\}} \mathcal{E}(\mathbb{Q}_i^{-1}, \gamma) \end{aligned} \quad (3.19)$$

em que $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_i^{-1}, \gamma) = \{ \zeta_k \in \mathfrak{R}^{2n}; \zeta_k' \mathbb{Q}_i^{-1} \zeta_k \leq \gamma \}$ são conjuntos elipsoidais.

Como consequência do lema 1 e do lema 2, $\mathcal{L}_V(\gamma) = \bigcap_i \mathcal{E}(\mathbb{Q}_i^{-1}, \gamma)$ é um conjunto robustamente λ -contrativo (com respeito as trajetórias do sistema (3.5) ou (3.8)); para maiores detalhes, veja por exemplo, [11]. Esta noção de conjunto contrativo, que garante que toda trajetória que inicia em $\mathcal{L}_V(\gamma)$ permanece neste domínio e converge assintoticamente para a origem, será utilizada mais adiante, na aplicação dos resultados de estabilização robusta aos sistemas fuzzy.

3.3 Condições de Estabilização

Para obtenção das condições de síntese dos controladores em estudo, definem-se, da mesma forma que em [8], as seguintes matrizes

adaptadas de [31]:

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} X & N \\ Z & \bullet \end{bmatrix}, \quad \mathbb{U}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & M \\ W & \bullet \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta = \begin{bmatrix} Y & I \\ W & 0 \end{bmatrix}.$$

Para estas matrizes, tem-se

$$\mathbb{U}\Theta = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & Z \end{bmatrix} \Rightarrow \Theta' \mathbb{U}\Theta = \begin{bmatrix} Y' & T' \\ I & X \end{bmatrix}$$

em que, por construção:

$$T' = Y'X + W'Z$$

Ainda, de $\mathbb{U}\mathbb{U}^{-1} = I$ e $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{U} = I$, tem-se $XY + NW = YX + MZ = I$.

Além disso, particionando $\mathbb{Q}_i = \begin{bmatrix} Q_{11i} & Q_{12i} \\ * & Q_{22i} \end{bmatrix}$ pode-se definir

$$\Theta' \mathbb{Q}_i \Theta = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11i} & \bar{Q}_{12i} \\ * & \bar{Q}_{22i} \end{bmatrix}.$$

Os teoremas descritos a seguir são condições de estabilização no tempo discreto, sob a forma de LMIs. Estas são obtidas a partir das condições (3.15), (3.16) e (3.17).

3.3.1 Estabilização com CDRS-PDP-LPV

Teorema 3 Dado $\lambda \in (0, 1]$, considere que existem as matrizes simétricas definidas positivas $(\bar{Q}_{11i}, \bar{Q}_{22i}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, e as matrizes $(\bar{Q}_{12i}, \hat{A}_i, X, Y, T) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $\hat{B}_i \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, $\hat{C} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $\hat{D} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$, satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -\bar{Q}_{11j} & -\bar{Q}_{12j} & Y'A_i + \hat{B}_i C & \hat{A}_i \\ * & -\bar{Q}_{22j} & A_i + B_i \hat{D} C & A_i X + B_i \hat{C} \\ * & * & \lambda(\bar{Q}_{11i} - Y' - Y) & \lambda(\bar{Q}_{12i} - T' - I) \\ * & * & * & \lambda(\bar{Q}_{22i} - X' - X) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.20)$$

$\forall i, j = 1, \dots, r$

Seja $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ uma matriz não singular qualquer, determine:

$$Z = (W')^{-1}(T' - Y'X)$$

Então, as matrizes do controlador CDRS (3.3) obtidas por

$$\begin{aligned} D_c &= \hat{D} \\ C_c &= (\hat{C} - D_c C X) Z^{-1} \\ B_{ci} &= (W')^{-1} (\hat{B}_i - Y' B_i D_c) \\ A_{ci} &= (W')^{-1} (\hat{A}_i - Y' A_i X - Y' B_i D_c C X - Y' B_i C_c Z - W' B_{ci} C X) Z^{-1} \end{aligned}$$

são tais que a origem do sistema em malha fechada é robustamente assintoticamente estável com coeficiente de contratividade λ .

Prova: Da condição de estabilidade do lema 1 multiplica-se a esquerda por $\text{diag}[\Theta' \ \Theta']$ e a direita pela sua transposta, conforme abaixo exposto

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Theta' & 0 \\ 0 & \Theta' \end{bmatrix} \mathbb{M}_{1ji}^+ \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Theta \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} -\Theta' Q_j \Theta & \Theta' (A_i + B_i K) U \Theta \\ * & \lambda (\Theta' Q_i \Theta - \Theta' U \Theta - \Theta' U' \Theta') \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

Desenvolvendo os produtos e efetuando a substituição de variáveis

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= W' A_{ci} Z + W' B_{ci} C X + Y' B_i C_c Z + Y' (A_i + B_i D_c C) X \\ \hat{B}_i &= Y' B_i D_c + W' B_{ci} \\ \hat{C} &= D_c C X + C_c Z \\ \hat{D} &= D_c \end{aligned}$$

verifica-se a equivalência das desigualdades (3.20) e (3.15). \square

A proposição do teorema acima permite formular problemas de programação convexa, podendo-se adicionar outras restrições e/ou reformular o problema para tratar critérios como custo garantido e controle H_∞ .

3.3.2 Estabilização com CDRS-TDP-LPV

Teorema 4 Dado $\lambda \in (0, 1]$, considere que existem as matrizes simétricas definidas positivas $(\bar{Q}_{11i}, \bar{Q}_{22i}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, e as matrizes

$(\bar{Q}_{12i}, \hat{A}_i, \hat{A}_{iq}, X, Y, T) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $(\hat{B}_i, \hat{B}_{iq}) \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, $\hat{C}_i \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $\hat{D}_i \in \mathfrak{R}^{m \times p}$, satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -\bar{Q}_{11j} & -\bar{Q}_{12j} & Y' A_i + \hat{B}_i C & \hat{A}_i \\ * & -\bar{Q}_{22j} & A_i + B_i \hat{D}_i C & M_{a1i} \\ * & * & \lambda(\bar{Q}_{11i} - Y' - Y) & M_{a2i} \\ * & * & * & M_{a3i} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.21)$$

$\forall i, j = 1, \dots, r$

$$\begin{bmatrix} -2\bar{Q}_{11j} & -2\bar{Q}_{12j} & M_{a7iq} & \hat{A}_{iq} \\ * & -2\bar{Q}_{22j} & M_{a8iq} & M_{a4iq} \\ * & * & M_{a9iq} & M_{a5iq} \\ * & * & * & M_{a6iq} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.22)$$

$\forall j = 1, \dots, r, \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \quad e \quad \forall q = i+1, \dots, r$

nas quais:

$$\begin{aligned} M_{a1i} &= A_i X + B_i \hat{C}_i, \\ M_{a2i} &= \lambda(\bar{Q}_{12i} - T' - I), \\ M_{a3i} &= \lambda(\bar{Q}_{22i} - X' - X), \\ M_{a4i} &= (A_i + A_q)X + B_i \hat{C}_q + B_q \hat{C}_i, \\ M_{a5i} &= \lambda(\bar{Q}_{12i} + \bar{Q}_{12q} - 2T' - 2I), \\ M_{a6i} &= \lambda(\bar{Q}_{22i} + \bar{Q}_{22q} - 2X' - 2X), \\ M_{a7i} &= Y'(A_i + A_q) + \hat{B}_{iq} C, \\ M_{a8i} &= A_i + A_q + (B_i \hat{D}_q + B_q \hat{D}_i) C, \\ M_{a9i} &= \lambda(\bar{Q}_{11i} + \bar{Q}_{11q} - 2Y' - 2Y). \end{aligned}$$

Seja $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ uma matriz não singular qualquer, determine:

$$Z = (W')^{-1}(T' - Y'X)$$

Então, as matrizes do controlador CDRS (3.6) obtidas por

$$\begin{aligned} D_{ci} &= \hat{D}_i \\ B_{ci} &= (W')^{-1}(\hat{B}_i - Y' B_i D_{ci}) \\ C_{ci} &= (\hat{C}_i - D_{ci} C X) Z^{-1} \\ A_{ci} &= (W')^{-1}(\hat{A}_i - Y' A_i X - Y' B_i D_{ci} C X - Y' B_i C_{ci} Z - W' B_{ci} C X) Z^{-1} \\ B_{ciq} &= (W')^{-1}[\hat{B}_{iq} - Y'(B_i D_{cq} + B_q D_{ci})] \\ A_{ciq} &= (W')^{-1}[\hat{A}_{iq} - Y'(A_i + A_q)X - Y'(B_i D_{cq} + B_q D_{ci})C X] \end{aligned}$$

$$-Y'(B_i C_{cq} + B_q C_{ci})Z - W' B_{ciq} CX \Big] Z^{-1}$$

são tais que a origem do sistema em malha fechada é robustamente assintoticamente estável com coeficiente de contratividade λ .

Prova: Das condições de estabilidade do lema 2 multiplica-se a esquerda por $\text{diag}[\Theta' \quad \Theta']$ e a direita pela sua transposta, conforme abaixo exposto

$$\begin{bmatrix} \Theta' & 0 \\ 0 & \Theta' \end{bmatrix} \mathbb{M}_{2ji}^+ \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Theta \end{bmatrix} = \\ \left[\begin{array}{cc} -\Theta' Q_j \Theta & \Theta' (A_i + B_i K_i) U \Theta \\ * & \lambda (\Theta' Q_i \Theta - \Theta' U \Theta - \Theta' U' \Theta') \end{array} \right] < 0$$

e

$$\begin{bmatrix} \Theta' & 0 \\ 0 & \Theta' \end{bmatrix} \mathbb{M}_{2jiq}^+ \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Theta \end{bmatrix} = \\ \left[\begin{array}{cc} -2\Theta' Q_j \Theta & \Theta' (A_{iq} + B_i K_q + B_q K_i) U \Theta \\ * & \lambda (\Theta' Q_i \Theta + \Theta' Q_q \Theta - 2\Theta' U \Theta - 2\Theta' U' \Theta) \end{array} \right] < 0$$

Desenvolvendo os produtos e efetuando a substituição de variáveis

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= W' A_{ci} Z + W' B_{ci} CX + Y' B_i C_{ci} Z + Y' (A_i + B_i D_{ci} C) X \\ \hat{A}_{iq} &= Y' (A_i + A_q) X + Y' (B_i D_{cq} + B_q D_{ci}) CX + W' B_{ciq} CX + \\ &\quad Y' (B_i C_{cq} + B_q C_{ci}) Z + W' A_{ciq} Z \\ \hat{B}_i &= Y' B_i D_{ci} + W' B_{ci} \\ \hat{B}_{iq} &= Y' (B_i D_{cq} + B_q D_{ci}) + W' B_{ciq} \\ \hat{C}_i &= D_{ci} CX + C_{ci} Z \\ \hat{D}_i &= D_{ci} \end{aligned}$$

verifica-se a equivalência das desigualdades (3.21) e (3.22) com (3.16) e (3.17). \square

A proposição deste teorema permite, tal como o teorema 3, a formulação de problemas de programação convexa. É importante destacar também que o CDRS-PDP pode ser visto como um caso particular do CDRS-TDP, eliminando-se a condição (3.22) do teorema 4, fazendo

$\hat{C}_i = \hat{C}$ e $\hat{D}_i = \hat{D}$ para a condição (3.21), e utilizando a mesma estrutura matricial representada em (3.4).

3.4 Complexidade

3.4.1 Complexidade Numérica

A complexidade de problemas formulados em termos de LMIs está associada ao número \mathcal{K} de variáveis escalares de decisão e também com o número \mathcal{L} de linhas das LMIs a serem resolvidas. O número de operações em ponto flutuante ou o tempo necessário para se resolver um problema, utilizando-se métodos de pontos interiores, é proporcional a $\mathcal{K}^3 \mathcal{L}$ [28].

As tabelas 1 e 2 mostram, respectivamente, os valores de \mathcal{K} e \mathcal{L} para os teoremas 3 e 4 apresentados neste capítulo, sendo n o número de estados do sistema, m o número de entradas, p o número de saídas e r o número de vértices do politopo.

	\mathcal{K} (variáveis escalares)
Teor. 1	$nr(3n + p + 1) + 3n^2 + m(n + p)$
Teor. 2	$\mathcal{K}_{\text{teor.1}} + (r - 1)(n + p) \left(\frac{2m + nr}{2} \right)$

Tabela 1: Número de variáveis escalares das LMIs.

	\mathcal{L} (linhas)
Teor. 1	$4nr^2$
Teor. 2	$\mathcal{L}_{\text{teor.1}} + 2nr^2(r - 1)$

Tabela 2: Número de linhas das LMIs.

Na figura 13 observa-se a complexidade relativa do Teorema 4 em relação ao Teorema 3, em função do número de vértices do politopo, considerando para este caso um sistema com $m = 1$ e $p = 1$.

Verifica-se que o Teorema 4 apresenta uma maior complexidade numérica com relação ao Teorema 3, sendo que a relação aumenta com o aumento de r .

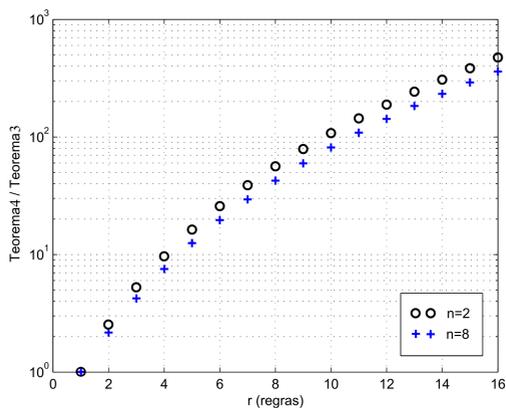


Figura 13: Complexidade Relativa Teorema 4 por Teorema 3.

3.4.2 Complexidade de Implementação

A complexidade de implementação está diretamente relacionada à quantidade \mathcal{Q} de operações por unidade de tempo que devem ser executadas na implementação do sistema de controle pelo hardware do controlador. O hardware deve ser capaz de efetuar todas as operações necessárias para computar a lei de controle no intervalo entre as amostras do sistema discretizado. Nas tabelas 3 e 4 verifica-se a quantidade de operações (entre escalares) necessárias para a aplicação dos CDRS's CASOS 1 e 2.

	\mathcal{Q} (entre escalares)
Multiplicação	$rn(n+p) + (n+m)(n+p)$
Adição	$rn(n+p) + (n+m)(n+p-1)$

Tabela 3: Número de Operações para o CASO 1.

Observa-se que a complexidade de implementação para o CDRS-TDP CASO 2 é maior em relação ao CDRS-PDP CASO 1, devido à própria estrutura do controlador TDP implicar em um número adicional de operações.

	\mathcal{Q} (entre escalares)
Multiplicação	$\mathcal{Q}_{\text{caso1}} + rm(n+p) + 2r + r(n^2 + np + 2) \frac{(r-1)}{2}$
Adição	$\mathcal{Q}_{\text{caso1}} + r(n+p) \left(\frac{2m+n(r-1)}{2} \right)$

Tabela 4: Número de Operações para o CASO 2.

3.5 Estabilização Local num Domínio de Validade do Sistema

Os resultados apresentados anteriormente consideram que o sistema com parâmetros variantes (3.1) é válido para todo \mathfrak{R}^n , e, desta forma, que a estabilidade e o desempenho serão válidos em todo o espaço de estados do sistema em malha fechada (3.11).

Entretanto, em vários problemas práticos o modelo (3.1) é válido apenas localmente (regionalmente), e descreve o comportamento do sistema somente num subconjunto do espaço de estados, $\mathcal{V}_0 \subset \mathfrak{R}^n$, denominado de domínio de validade do modelo. Nestes casos, para garantir a estabilidade e o desempenho do sistema controlado via uma das estruturas de CDRS apresentadas, pode-se incluir uma condição adicional às condições de estabilidade dos lemas 1 e 2, com o objetivo de garantir a inclusão de um domínio λ -contrativo $\mathcal{L}_V = \mathcal{L}_V(1) = \bigcap_i \mathcal{E}(\mathbb{Q}_i^{-1}, 1)$ na região de validade do sistema em malha fechada, i.e.,

$$\mathcal{L}_V \subseteq \mathcal{X}_0, \quad \mathcal{X}_0 \triangleq \left\{ \mathfrak{z}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{c,k} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2n}; \quad x \in \mathcal{V}_0, \quad \forall x_c \in \mathfrak{R}^n \right\}.$$

Desta forma, garante-se que para qualquer condição inicial $\mathfrak{z}_0 \in \mathcal{L}_V$, a trajetória correspondente evolui no interior de \mathcal{L}_V e tende assintoticamente à origem. Portanto, a evolução das trajetórias dos estados da planta é confinada no interior do domínio de validade \mathcal{V}_0 .

Seja, por exemplo, o domínio de validade definido por um conjunto poliedral

$$\mathcal{V}_0 = \text{Co}\{v_\tau \in \mathfrak{R}^n, \quad \tau = 1, \dots, n_\tau\} = \{x_k \in \mathfrak{R}^n; \quad |Lx_k| \leq \Lambda\},$$

em que $L \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $\Lambda \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$. A extensão de \mathcal{V}_0 ao espaço de estados

do sistema aumentado é dada por

$$\chi_0 = Co \left\{ v_\sigma \in \mathfrak{R}^{2n}; v_\sigma = \begin{bmatrix} v_\tau \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma = \tau = 1, \dots, n_\tau \right\} = \\ \{ \zeta_k \in \mathfrak{R}^{2n}; |L_a \zeta_k| \leq \Lambda \}$$

com $L_a = [L \ 0]$. A inclusão $\mathcal{L}_V \subseteq \chi_0$ pode ser descrita pela seguinte restrição convexa [7]

$$\begin{bmatrix} -Q_i + U' + U & U' L'_{a(l)} \\ * & \Lambda_{(l)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.23) \\ \forall i = 1, \dots, r \text{ e } \forall l = 1, \dots, 2n$$

equivalente a

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\bar{Q}_{11i} + Y' + Y & -\bar{Q}_{12i} + T' + I & [L \ X]'_{(l)} \\ -\bar{Q}'_{12i} + T + I & -\bar{Q}_{22i} + X' + X & \Lambda_{(l)}^2 \\ \hline * & & \end{array} \right] \geq 0 \quad (3.24) \\ \forall i = 1, \dots, r \text{ e } \forall l = 1, \dots, n$$

Portanto, com base nas condições dos lemas 1 e 2, e na condição estabelecida em (3.23), é possível apresentar os seguintes resultados de estabilidade e desempenho locais.

Corolário 1 *Sejam A_{ci} , B_{ci} , C_c e D_c matrizes conhecidas que formam o controlador (3.3). Para um dado escalar real $\lambda \in (0, 1]$, considere a existência de matrizes simétricas definidas positivas $Q_i \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ e da matriz $U \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, satisfazendo as condições definidas em (3.15) e (3.23).*

Então, o conjunto $\mathcal{L}_V \triangleq \bigcap_i \{ \mathcal{E}(Q_i^{-1}) \} = \mathcal{E}(Q^{-1}(h_k))$ é robustamente absolutamente λ -contrativo e tal que $\mathcal{L}_V \subseteq \chi_0$. Portanto, a origem do sistema em malha fechada (3.5) é assintoticamente estável para qualquer condição inicial $\zeta_0 \in \mathcal{L}_V$, e, seguramente, as trajetórias que emanam de ζ_0 permanecem em χ_0 .

Corolário 2 *Sejam A_{ci} , A_{ciq} , B_{ci} , B_{ciq} , C_{ci} e D_{ci} matrizes conhecidas que formam o controlador (3.6). Para um dado escalar real $\lambda \in (0, 1]$, considere a existência de matrizes simétricas definidas positivas $Q_i \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ e da matriz $U \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, satisfazendo as condições definidas em (3.16), (3.17) e (3.23).*

Então, o conjunto $\mathcal{L}_V \triangleq \bigcap_i \{\mathcal{E}(\mathbb{Q}_i^{-1})\} = \mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(h_k))$ é robustamente absolutamente λ -contrativo e tal que $\mathcal{L}_V \subseteq \mathcal{X}_0$. Portanto, a origem do sistema em malha fechada (3.8) é assintoticamente estável para qualquer condição inicial $\zeta_0 \in \mathcal{L}_V$, e, seguramente, as trajetórias que emanam de ζ_0 permanecem em \mathcal{X}_0 .

Como consequência dos corolários 1 e 2, pode-se utilizar as condições dos teoremas 3 e 4, conjuntamente com a condição de inclusão (3.24) para estabelecer os resultados de estabilização local.

Assim, para a otimização do domínio contrativo \mathcal{L}_V , é possível adotar, como em [11], um conjunto modelo para síntese. Tal conjunto pode ser adotado com a forma da própria região de validade. O objetivo consiste em maximizar o fator escalar β tal que a inclusão $\beta\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{L}_V$ também seja verificada. Considerando $\mu = 1/\beta^2$, a condição pode ser descrita por

$$\begin{bmatrix} \mu & v'_\sigma \\ * & \mathbb{Q}_i \end{bmatrix} \geq 0 \\ \forall i = 1, \dots, r \text{ e } \forall \sigma = 1, \dots, n_\tau$$

equivalente a

$$\begin{bmatrix} \mu & v'_\tau Y & v'_\tau \\ * & \bar{Q}_{11i} & \bar{Q}_{12i} \\ * & * & \bar{Q}_{22i} \end{bmatrix} \geq 0 \\ \forall i = 1, \dots, r \text{ e } \forall \tau = 1, \dots, n_\tau \quad (3.25)$$

Desta forma, para síntese do CDRS-PDP aplicado a sistemas lineares a parâmetros variantes, considerando um domínio de validade \mathcal{V}_0 , tem-se o seguinte problema de programação convexa

$$\begin{aligned} & \min \quad \mu \\ & \quad \bar{Q}_{11i}, \bar{Q}_{12i}, \bar{Q}_{22i}, \hat{A}_i, \\ & \quad X, Y, T, \hat{B}_i, \hat{C}, \hat{D} \\ & \text{sujeito a} \\ & \text{LMIs (3.20), (3.24) e (3.25)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

e, para o CDRS-TDP,

$$\begin{aligned} & \min \quad \mu \\ & \quad \bar{Q}_{11i}, \bar{Q}_{12i}, \bar{Q}_{22i}, \hat{A}_i, \hat{A}_{iq}, \\ & \quad X, Y, T, \hat{B}_i, \hat{B}_{iq}, \hat{C}_i, \hat{D}_i \\ & \text{sujeito a} \\ & \text{LMIs (3.21), (3.22), (3.24) e (3.25)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Nota-se que as condições adicionais não implicam em maior complexidade de implementação, apenas alteram a complexidade numérica de solução do algoritmo.

3.6 Conclusão

Neste capítulo foi estudado o problema de estabilidade para compensadores dinâmicos por realimentação de saída aplicados a sistemas lineares a parâmetros variantes, sendo demonstradas condições para análise de estabilidade robusta baseadas na utilização de uma Função de Lyapunov Dependente de Parâmetros. A partir destas condições foram propostos métodos de projeto de controladores parcialmente e totalmente dependentes de parâmetros.

A obtenção dos valores numéricos dos ganhos das leis de controle pode ser facilmente realizada com a utilização de ferramentas algorítmicas baseadas em métodos de pontos interiores, cuja complexidade numérica, referente à metodologia de projeto proposta, também foi apresentada neste artigo.

Para tratamento de sistemas com validade local e/ou modelos provenientes de metodologia fuzzy Takagi-Sugeno, incluem-se condições adicionais de forma a garantir que os resultados obtidos para o modelo sejam válidos também para o sistema original.

4 CDNRS APLICADO A UMA CLASSE DE SISTEMAS NLPV

Neste capítulo apresenta-se a análise de estabilidade e projeto de controladores dinâmicos não lineares por realimentação de saída (CDNRS) de ordem completa aplicados a uma classe de sistemas não lineares em tempo discreto com parâmetros variantes. Tal classe pode ser representada como a interconexão em realimentação de um sistema linear a parâmetros variantes com alguma não linearidade de tipo setor limitado. Dois casos são considerados: controlador com dependência parcial de parâmetros (CDNRS-PDP) e controlador com dependência total de parâmetros (CDNRS-TDP). Para o segundo caso, considera-se ainda que os atuadores podem ser limitados em amplitude, fator este tratado por uma condição de setor modificada e inclusão de termo anti-windup, com o objetivo de mitigar os efeitos da saturação.

Também são incluídas condições adicionais para tratamento de sistemas válidos localmente, permitindo para este caso considerar não linearidades de tipo setor globalmente e localmente verificadas. Os modelos em análise podem ser obtidos pela modelagem exata da classe (2.15) utilizando o método Fuzzy-Lur'e proposto no Capítulo 2.

4.1 Apresentação do Problema

Considere a classe de sistemas não lineares tipo Lur'e em tempo discreto com parâmetros variantes no tempo, representada por:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A(h_k)x_k + B(h_k)u_k + G(h_k)\varphi(z_k) \\ z_k &= L(h_k)x_k \\ y_k &= Cx_k \end{cases} \quad (4.1)$$

em que $x_k \in \mathfrak{R}^n$, $u_k \in \mathfrak{R}^m$ e $y_k \in \mathfrak{R}^q$ são, respectivamente, os estados do sistema, a entrada de controle e a saída do sistema. Além disso, $z_k \in \mathfrak{R}^p$, $\varphi(\cdot) : \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}^p$ e $h_k \subset \mathfrak{R}^r$ é um vetor de parâmetros mensurável, variante no tempo e limitado no simplex unitário $\Xi = \{h_k \in \mathfrak{R}^r; \sum_{i=1}^r h_{k(i)} = 1, h_{k(i)} \geq 0, i = 1, \dots, r\}$.

A estrutura das matrizes do sistema possui a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A(h_k) & B(h_k) & G(h_k) & L(h_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_{k(i)} \begin{bmatrix} A_i & B_i & G_i & L_i \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

e $C \in \mathfrak{R}^{q \times n}$, sendo A_i , B_i , G_i e L_i matrizes contantes, reais e de dimensões apropriadas. Considera-se inicialmente que a não linearidade $\varphi(\cdot)$ verifica globalmente a condição de setor tipo cone limitado $\varphi(\cdot) \in [0, \Omega]$, $\forall z \in \mathfrak{R}^p$, i.e. existe uma matriz simétrica definida positiva $\Omega = \Omega' \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ tal que

$$\varphi'(z_k)\Delta^{-1}[\varphi(z_k) - \Omega z_k] \leq 0, \quad \forall z_k \in \mathfrak{R}^p, \quad \varphi(0) = 0 \quad (4.3)$$

sendo $\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ qualquer matriz diagonal positiva:

$$\Delta \triangleq \text{diag}\{\delta_l\}, \quad \delta_l > 0, \quad \forall l = 1, \dots, p.$$

O problema de controle a ser estudado consiste da síntese de um controlador dinâmico não linear por realimentação de saída (CDNRS) que garanta a estabilidade para o sistema correspondente em malha fechada, obedecendo um certo requisito de desempenho.

Para o CDNRS aplicado a classe de sistemas não lineares (4.1), admitem-se dois casos:

4.1.1 CASO 3: CDNRS-PDP para uma Classe de Sistemas NLPV

Seja o controlador dinâmico

$$\begin{cases} x_{c,k+1} &= A_c(h_k)x_{c,k} + B_c(h_k)u_{c,k} + G_c(h_k)\varphi(z_k) \\ y_{c,k} &= C_c x_{c,k} + D_c u_{c,k} + F_c \varphi(z_k) \end{cases} \quad (4.4)$$

em que $x_c \in \mathfrak{R}^n$, $y_{c,k} \in \mathfrak{R}^m$ e $u_{c,k} \in \mathfrak{R}^q$. Considera-se a seguinte estrutura das matrizes do controlador

$$\begin{bmatrix} A_c(h_k) & B_c(h_k) & G_c(h_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_{k(i)} \begin{bmatrix} A_{ci} & B_{ci} & G_{ci} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

e $C_c \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $D_c \in \mathfrak{R}^{m \times q}$, $F_c \in \mathfrak{R}^{m \times p}$, onde $A_{ci} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_{ci} \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ e $G_{ci} \in \mathfrak{R}^{n \times p}$. Como as matrizes da equação de saída, C_c , D_c e F_c , não dependem do parâmetro variante, nomeia-se de CDNRS parcialmente dependente de parâmetros, ou simplesmente CDNRS-PDP.

Considerando a interconexão $u_{c,k} = y_k$ e $y_{c,k} = u_k$, tem-se o

seguinte sistema em malha fechada

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A(h_k)x_k + B(h_k)C_c x_{c,k} + B(h_k)D_c C x_k + \\ & (G(h_k) + B(h_k)F_c)\varphi(z_k) \\ x_{c,k+1} &= A_c(h_k)x_{c,k} + B_c(h_k)C x_k + G_c(h_k)\varphi(z_k) \end{cases}$$

Então, definindo o vetor de estados aumentado $\varsigma_k = [x'_k \ x'_{c,k}]'$, o sistema em malha fechada pode ser representado por:

$$\begin{cases} \varsigma_{k+1} &= (\mathbb{A}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)\mathbb{K})\varsigma_k + (\mathbb{G}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)F_c)\varphi(z_k) \\ z_k &= \mathbb{L}(h_k)\varsigma_k \\ u_k &= \mathbb{K}\varsigma_k + F_c\varphi(z_k) \end{cases} \quad (4.6)$$

com

$$\mathbb{A}(h_k) = \begin{bmatrix} A(h_k) & 0 \\ B_c(h_k)C & A_c(h_k) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}(h_k) = \begin{bmatrix} B(h_k) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{K} = [D_c C \quad C_c],$$

$$\mathbb{L}(h_k) = [L(h_k) \quad 0] \quad e \quad \mathbb{G}(h_k) = \begin{bmatrix} G(h_k) \\ G_c(h_k) \end{bmatrix}$$

Observa-se de (4.6) que as matrizes \mathbb{K} e F_c podem ser vistas como uma realimentação constante dos estados e da não linearidade do sistema aumentado, respectivamente [8, 12].

4.1.2 CASO 4: CDNRS-TDP para uma Classe de Sistemas NLPV

Seja o controlador dinâmico

$$\begin{cases} x_{c,k+1} &= A_c(h_k)x_{c,k} + B_c(h_k)u_{c,k} + G_c(h_k)\varphi(z_k) \\ y_{c,k} &= C_c(h_k)x_{c,k} + D_c(h_k)u_{c,k} + F_c(h_k)\varphi(z_k) \end{cases} \quad (4.7)$$

em que $x_c \in \mathfrak{R}^n$, $y_{c,k} \in \mathfrak{R}^m$ e $u_{c,k} \in \mathfrak{R}^q$. As matrizes do controlador são estruturadas como

$$\begin{bmatrix} A_c(h_k) & B_c(h_k) & G_c(h_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_{k(i)}^2 [A_{ci} \quad B_{ci} \quad G_{ci}] + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{q=i+1}^r h_{k(i)} h_{k(q)} [A_{ciq} \quad B_{ciq} \quad G_{ciq}],$$

$$\begin{bmatrix} C_c(h_k) & D_c(h_k) & F_c(h_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_{k(i)} \begin{bmatrix} C_{ci} & D_{ci} & F_{ci} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

sendo $(A_{ci}, A_{ciq}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $(B_{ci}, B_{ciq}) \in \mathfrak{R}^{n \times q}$, $(G_{ci}, G_{ciq}) \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, $C_{ci} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $D_{ci} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ e $F_{ci} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$.

Considerando a interconexão $u_{c,k} = y_k$ e $y_{c,k} = u_k$, tem-se o seguinte sistema em malha fechada

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A(h_k)x_k + B(h_k)C_c(h_k)x_{c,k} + (G(h_k) + B(h_k)F_c(h_k))\varphi(z_k) + \\ & B(h_k)D_c(h_k)Cx_k \\ x_{c,k+1} &= A_c(h_k)x_{c,k} + B_c(h_k)Cx_k + G_c(h_k)\varphi(z_k) \end{cases}$$

Como anteriormente, tem-se

$$\begin{cases} \zeta_{k+1} &= (\mathbb{A}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)\mathbb{K}(h_k))\zeta_k + (\mathbb{G}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)F_c(h_k))\varphi(z_k) \\ z_k &= \mathbb{L}(h_k)\zeta_k \\ u_k &= \mathbb{K}(h_k)\zeta_k + F_c(h_k)\varphi(z_k) \end{cases} \quad (4.9)$$

com

$$\mathbb{A}(h_k) = \begin{bmatrix} A(h_k) & 0 \\ B_c(h_k)C & A_c(h_k) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}(h_k) = \begin{bmatrix} B(h_k) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{G}(h_k) = \begin{bmatrix} G(h_k) \\ G_c(h_k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L}(h_k) = \begin{bmatrix} L(h_k) & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbb{K}(h_k) = \begin{bmatrix} D_c(h_k)C & C_c(h_k) \end{bmatrix}$$

Observa-se de (4.9) que as matrizes $\mathbb{K}(h_k)$ e $F_c(h_k)$ podem ser vistas como uma realimentação dependente dos parâmetros dos estados do sistema aumentado e da não linearidade, respectivamente.

4.2 Condições de Estabilidade

Para o estudo de estabilidade e a garantia de um certo desempenho temporal para o sistema em malha fechada, considera-se a FLDP (3.10) apresentada no Capítulo 3 e a seguinte definição:

Definição 2 *Considere um escalar não negativo $\lambda \in (0, 1]$. A origem do sistema descrito em (4.6) ou (4.9) é robustamente absolutamente estável, com coeficiente de contração λ , se*

$$\begin{aligned} \Delta V_\lambda(\zeta_k, h_k) &\stackrel{\Delta}{=} V(\zeta_{k+1}, h_{k+1}) - \lambda V(\zeta_k, h_k) < 0 \\ \forall \zeta_k \in \mathfrak{R}^n, \quad \varphi(\cdot) &\in [0, \Omega] \quad e \quad \forall h_k \in \Xi \end{aligned} \quad (4.10)$$

Considerando que (4.6) e (4.9) podem ser escritas sob a forma

$$\zeta_{k+1} = \mathbb{A}_{MF}(h_k)\zeta_k + \mathbb{G}_{MF}(h_k)\varphi(z_k) \quad (4.11)$$

com $\mathbb{A}_{MF}(h_k) = \mathbb{A}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)\mathbb{K}$ e $\mathbb{G}_{MF}(h_k) = \mathbb{G}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)F_c$, ou, $\mathbb{A}_{MF}(h_k) = \mathbb{A}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)\mathbb{K}(h_k)$ e $\mathbb{G}_{MF}(h_k) = \mathbb{G}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)F_c(h_k)$, respectivamente para os CASOS 3 e 4.

Portanto, para obter as condições de estabilidade, considera-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\lambda(\zeta_k, h_k) &= \Delta V_\lambda(\zeta_k, h_k) - 2\varphi'(z_k)\Delta^{-1}(\varphi(z_k) - \Omega\mathbb{L}(h_k)\zeta_k) = \\ & \left[\begin{array}{cc} \zeta_k' & \varphi'(z_k) \end{array} \right] \mathcal{M}_{cs34}(h_k) \left[\begin{array}{c} \zeta_k \\ \varphi(z_k) \end{array} \right] < 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{cs34}(h_k) &= \left[\begin{array}{c} \mathbb{A}_{MF}(h_k)' \\ \mathbb{G}'_{MF}(h_k) \end{array} \right] \mathbb{Q}^{-1}(h_{k+1}) \left[\begin{array}{cc} \mathbb{A}_{MF}(h_k) & \mathbb{G}_{MF}(h_k) \end{array} \right] + \\ & \left[\begin{array}{cc} -\lambda\mathbb{Q}^{-1}(h_k) & \mathbb{L}'(h_k)\Omega\Delta^{-1} \\ * & -2\Delta^{-1} \end{array} \right] < 0 \end{aligned}$$

De forma análoga as condições de estabilidade apresentadas na seção 3.2, garante-se (4.12) de forma suficiente por

$$\left[\begin{array}{ccc} -\mathbb{Q}(h_{k+1}) & \mathbb{A}_{MF}(h_k)\mathbb{U} & \mathbb{G}_{MF}(h_k)\Delta \\ * & \lambda(\mathbb{Q}(h_k) - \mathbb{U} - \mathbb{U}') & \mathbb{U}'\mathbb{L}'(h_k)\Omega \\ * & * & -2\Delta \end{array} \right] < 0 \quad (4.13)$$

Através de (4.13) garante-se que $\mathcal{M}_{cs34}(h_k) < 0$ e, de (4.12), que $\mathcal{V}_\lambda(\zeta_k, h_k) < 0$, desde que a condição de setor $\varphi'(z_k)\Delta^{-1}[\varphi(z_k) - \Omega z_k] \leq 0$ seja globalmente verificada. Também constata-se que $\Delta V_\lambda(\zeta_k, h_k) < 0$ e, portanto, garante-se a estabilidade absoluta robusta. Desta forma, com procedimento semelhante ao utilizado nas provas dos Lemas 1 e 2, pode-se estabelecer os seguintes resultados de estabilidade.

Para o caso do CDNRS-PDP para uma classe de sistemas NLPV tem-se o lema a seguir.

Lema 5 (Condição de Estabilidade - CASO 3). *Sejam A_{ci} , B_{ci} , G_{ci} , C_c , D_c e F_c matrizes conhecidas que formam o controlador (4.4). Para um dado escalar real $\lambda \in (0, 1]$, considere a existência de matrizes simétricas definidas positivas $\mathbb{Q}_i \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, da matriz diagonal positiva $\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ e*

da matriz $\mathbb{U} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, satisfazendo:

$$\mathbb{M}_{3ji}^+ = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{M}_{1ji}^+ & (\mathbb{G}_i + \mathbb{B}_i F_c)\Delta \\ \hline * & \mathbb{U}' \mathbb{L}'_i \Omega \\ * & -2\Delta \end{array} \right] < 0 \quad (4.14)$$

$\forall i, j = 1, \dots, r$

na qual \mathbb{M}_{1ji}^+ é definida em (3.15).

Então, a origem do sistema em malha fechada (4.6) é robustamente absolutamente estável para qualquer condição inicial $\zeta_0 \in \mathfrak{R}^n$ e para qualquer $\varphi(\cdot)$ pertencente ao setor (4.3), com coeficiente de contratividade λ .

Para o caso do CDNRS-TDP para uma classe de sistemas NLPV tem-se o lema a seguir.

Lema 6 (Condição de Estabilidade - CASO 4). *Sejam A_{ci} , A_{ciq} , B_{ci} , B_{ciq} , G_{ci} , G_{ciq} , C_{ci} , D_{ci} e F_{ci} matrizes conhecidas que formam o controlador (4.7). Para um dado escalar real $\lambda \in (0, 1]$, considere a existência das matrizes simétricas definidas positivas $\mathbb{Q}_i \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, da matriz diagonal positiva $\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ e da matriz $\mathbb{U} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, satisfazendo:*

$$\mathbb{M}_{4ji}^+ = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{M}_{2ji}^+ & (\mathbb{G}_i + \mathbb{B}_i F_{ci})\Delta \\ \hline * & \mathbb{U}' \mathbb{L}'_i \Omega \\ * & -2\Delta \end{array} \right] < 0 \quad (4.15)$$

$\forall i, j = 1, \dots, r$

$$\mathbb{M}_{4jiq}^+ = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{M}_{2jiq}^+ & (\mathbb{G}_{iq} + \mathbb{B}_i F_{cq} + \mathbb{B}_q F_{ci})\Delta \\ \hline * & \mathbb{U}' (\mathbb{L}'_i + \mathbb{L}'_q) \Omega \\ * & -4\Delta \end{array} \right] < 0 \quad (4.16)$$

$\forall j = 1, \dots, r, \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \quad e \quad \forall q = i+1, \dots, r$

na qual \mathbb{M}_{2ji}^+ e \mathbb{M}_{2jiq}^+ são definidas em (3.16) e (3.17), respectivamente.

Então, a origem do sistema em malha fechada (4.9) é robustamente absolutamente estável para qualquer condição inicial $\zeta_0 \in \mathfrak{R}^n$ e para qualquer $\varphi(\cdot)$ pertencente ao setor (4.3), com coeficiente de contratividade λ .

Prova: Das estruturas matriciais definidas em (4.2) e (4.8) pode-se reescrever as parcelas $\mathbb{A}_{MF}(h_k)$ e $\mathbb{G}_{MF}(h_k)$ de (4.13) como

$$\mathbb{A}_{MF}(h_k) = \mathbb{A}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)\mathbb{K}(h_k) = \sum_{i=1}^r h_{k(i)}^2 \underbrace{\begin{bmatrix} A_i + B_i D_{ci} C & B_i C_{ci} \\ B_{ci} C & A_{ci} \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_i + \mathbb{B}_i \mathbb{K}_i} +$$

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{q=i+1}^r h_{k(i)} h_{k(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} (A_i + A_q) + (B_i D_{cq} + B_q D_{ci}) C & B_i C_{cq} + B_q C_{ci} \\ B_{ciq} C & A_{ciq} \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_{iq} + \mathbb{B}_i \mathbb{K}_q + \mathbb{B}_q \mathbb{K}_i}$$

e

$$\mathbb{G}_{MF}(h_k) = \mathbb{G}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)F_c(h_k) = \sum_{i=1}^r h_{k(i)}^2 \underbrace{\begin{bmatrix} G_i + B_i F_{ci} \\ G_{ci} \end{bmatrix}}_{\mathbb{G}_i + \mathbb{B}_i F_{ci}} +$$

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{q=i+1}^r h_{k(i)} h_{k(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} G_i + G_q + B_i F_{cq} + B_q F_{ci} \\ G_{ciq} \end{bmatrix}}_{\mathbb{G}_{iq} + \mathbb{B}_i F_{cq} + \mathbb{B}_q F_{ci}}$$

sendo $\mathbb{A}_{iq} = \begin{bmatrix} A_i + A_q & 0 \\ B_{ciq} C & A_{ciq} \end{bmatrix}$ e $\mathbb{G}_{iq} = \begin{bmatrix} G_i + G_q \\ G_{ciq} \end{bmatrix}$.

De maneira análoga para os demais termos, pode-se reescrever (4.13) como

$$\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r h_{k(j)} h_{k(i)}^2 \mathbb{M}_{4ji}^+ + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{q=i+1}^r h_{k(j)} h_{k(i)} h_{k(q)} \mathbb{M}_{4jiq}^+ < 0 \quad (4.17)$$

Então, com base nos valores admissíveis dos parâmetros ($\sum_{i=1}^r h_{k(i)} = 1, h_{k(i)} \geq 0$), as condições estabelecidas pelo lema garantem que (4.17) é verificada. \square

Observa-se de (4.14), (4.15) e (4.16), que a matriz \mathbb{U} é obrigatoriamente invertível.

Além disso, pode-se associar os conjuntos de tipo Lyapunov em (3.19) à FLDP definida em (3.10). Desta maneira, como consequência dos lemas 5 e 6, $\mathcal{L}_V(\gamma) = \bigcap_i \mathcal{E}(\mathbb{Q}_i^{-1}, \gamma)$ é um conjunto robustamente λ -contrativo (com respeito as trajetórias do sistema (4.6) ou (4.9)). Esta noção, já exposta no capítulo anterior, será novamente utilizada na aplicação dos resultados de estabilização robusta aos sistemas fuzzy.

4.3 Condições de Estabilização

Para as condições de estabilização dos Casos 3 e 4 utilizam-se das mesmas matrizes definidas na seção 3.3.

4.3.1 Estabilização com CDNRS-PDP-NLPV

Teorema 7 Dado $\lambda \in (0, 1]$, considere que existem as matrizes simétricas definidas positivas $(\bar{Q}_{11i}, \bar{Q}_{22i}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, a matriz diagonal positiva $\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ e as matrizes $(\bar{Q}_{12i}, \hat{A}_i, X, Y, T) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $\hat{B}_i \in \mathfrak{R}^{n \times q}$, $\hat{G}_i \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, $\hat{C} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $\hat{D} \in \mathfrak{R}^{m \times q}$ e $\hat{F} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$, satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{bmatrix} -\bar{Q}_{11j} & -\bar{Q}_{12j} & Y' A_i + \hat{B}_i C & \hat{A}_i & \hat{G}_i \\ * & -\bar{Q}_{22j} & A_i + B_i \hat{D} C & M_{b1i} & G_i \Delta + B_i \hat{F} \\ * & * & \lambda(\bar{Q}_{11i} - Y' - Y) & M_{b2i} & L'_i \Omega \\ * & * & * & M_{b3i} & X' L'_i \Omega \\ * & * & * & * & -2\Delta \end{bmatrix} < 0 \quad (4.18)$$

$\forall i, j = 1, \dots, r$

nas quais:

$$\begin{aligned} M_{b1i} &= A_i X + B_i \hat{C}, \\ M_{b2i} &= \lambda(\bar{Q}_{12i} - T' - I), \\ M_{b3i} &= \lambda(\bar{Q}_{22i} - X' - X). \end{aligned}$$

Seja $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ uma matriz não singular qualquer, determine:

$$Z = (W')^{-1}(T' - Y'X)$$

Então, as matrizes do controlador CDNRS (4.4) obtidas por

$$\begin{aligned} D_c &= \hat{D} \\ C_c &= (\hat{C} - D_c C X) Z^{-1} \\ F_c &= \hat{F} \Delta^{-1} \\ B_{ci} &= (W')^{-1}(\hat{B}_i - Y' B_i D_c) \\ A_{ci} &= (W')^{-1}(\hat{A}_i - Y' A_i X - Y' B_i D_c C X - Y' B_i C_c Z - W' B_{ci} C X) Z^{-1} \\ G_{ci} &= (W')^{-1}(\hat{G}_i - Y'(G_i \Delta + B_i \hat{F})) \Delta^{-1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

são tais que a origem do sistema em malha fechada é robustamente

assintoticamente estável com coeficiente de contratividade λ .

Prova: Pré e pós multiplicando (4.14) por $\text{diag}[\Theta' \quad \Theta' \quad I]$ e sua transposta, e definindo a troca de variáveis $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{G}_i, \hat{C}, \hat{D}, \hat{F}$ de acordo com (4.19), tem-se que (4.14) é equivalente a (4.18). \square

4.3.2 Estabilização com CDNRS-TDP-NLPV

Teorema 8 Dado $\lambda \in (0, 1]$, considere que existem as matrizes simétricas definidas positivas $(\bar{Q}_{11i}, \bar{Q}_{22i}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, a matrizes diagonal positiva $\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$, e as matrizes $(\bar{Q}_{12i}, \hat{A}_i, \hat{A}_{iq}, X, Y, T) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $(\hat{B}_i, \hat{B}_{iq}) \in \mathfrak{R}^{n \times q}$, $(\hat{G}_i, \hat{G}_{iq}) \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, $\hat{C}_i \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $\hat{D}_i \in \mathfrak{R}^{m \times q}$ e $\hat{F}_i \in \mathfrak{R}^{m \times p}$, satisfazendo as seguintes condições:

$$\left[\begin{array}{ccccc} -\bar{Q}_{11j} & -\bar{Q}_{12j} & Y' A_i + \hat{B}_i C & \hat{A}_i & \hat{G}_i \\ * & -\bar{Q}_{22j} & A_i + B_i \hat{D}_i C & M_{c1i} & G_i \Delta + B_i \hat{F}_i \\ * & * & \lambda(\bar{Q}_{11i} - Y' - Y) & M_{c2i} & L'_i \Omega \\ * & * & * & M_{c3i} & X' L'_i \Omega \\ * & * & * & * & -2\Delta \end{array} \right] < 0 \quad (4.20)$$

$\forall i, j = 1, \dots, r$

$$\left[\begin{array}{ccccc} -2\bar{Q}_{11j} & -2\bar{Q}_{12j} & M_{c7i} & \hat{A}_{iq} & \hat{G}_{iq} \\ * & -2\bar{Q}_{22j} & M_{c8i} & M_{c4i} & M_{c10i} \\ * & * & M_{c9i} & M_{c5i} & (L'_i + L'_q) \Omega \\ * & * & * & M_{c6i} & X' (L'_i + L'_q) \Omega \\ * & * & * & * & -4\Delta \end{array} \right] < 0 \quad (4.21)$$

$\forall j = 1, \dots, r, \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \quad e \quad \forall q = i+1, \dots, r$

nas quais

$$\begin{aligned} M_{c1i} &= A_i X + B_i \hat{C}_i \\ M_{c2i} &= \lambda(\bar{Q}_{12i} - T' - I) \\ M_{c3i} &= \lambda(\bar{Q}_{22i} - X' - X) \\ M_{c4i} &= (A_i + A_q) X + B_i \hat{C}_q + B_q \hat{C}_i \\ M_{c5i} &= \lambda(\bar{Q}_{12i} + \bar{Q}_{12q} - 2T' - 2I) \\ M_{c6i} &= \lambda(\bar{Q}_{22i} + \bar{Q}_{22q} - 2X' - 2X) \\ M_{c7i} &= Y' (A_i + A_q) + \hat{B}_{iq} C \\ M_{c8i} &= A_i + A_q + (B_i \hat{D}_q + B_q \hat{D}_i) C \\ M_{c9i} &= \lambda(\bar{Q}_{11i} + \bar{Q}_{11q} - 2Y' - 2Y) \\ M_{c10i} &= (G_i + G_q) \Delta + B_i \hat{F}_q + B_q \hat{F}_i \end{aligned}$$

(4.22)

Seja $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ uma matriz não singular qualquer, determine:

$$Z = (W')^{-1}(T' - Y'X)$$

Então, as matrizes do controlador CDNRS (4.7) obtidas por

$$\begin{aligned} D_{ci} &= \hat{D}_i \\ B_{ci} &= (W')^{-1}(\hat{B}_i - Y' B_i D_{ci}) \\ F_{ci} &= \hat{F}_i \Delta^{-1} \\ C_{ci} &= (\hat{C}_i - D_{ci} C X) Z^{-1} \\ A_{ci} &= (W')^{-1}(\hat{A}_i - Y' A_i X - Y' B_i D_{ci} C X - Y' B_i C_{ci} Z - W' B_{ci} C X) Z^{-1} \\ G_{ci} &= (W')^{-1}(\hat{G}_i - Y'(G_i \Delta + B_i \hat{F}_i)) \Delta^{-1} \\ B_{ciq} &= (W')^{-1} \left[\hat{B}_{iq} - Y'(B_i D_{cq} + B_q D_{ci}) \right] \\ A_{ciq} &= (W')^{-1} \left[\hat{A}_{iq} - Y'(A_i + A_q) X - Y'(B_i D_{cq} + B_q D_{ci}) C X - \right. \\ &\quad \left. Y'(B_i C_{cq} + B_q C_{ci}) Z - W' B_{ciq} C X \right] Z^{-1} \\ G_{ciq} &= (W')^{-1} \left[\hat{G}_{iq} - Y'(G_i + G_q) \Delta - Y'(B_i \hat{F}_q + B_q \hat{F}_i) \right] \Delta^{-1} \end{aligned} \quad (4.23)$$

são tais que a origem do sistema em malha fechada é robustamente assintoticamente estável com coeficiente de contratividade λ .

Prova: Pré e pós multiplicando (4.15) e (4.16) por $\text{diag}[\Theta' \quad \Theta' \quad I]$ e sua transposta, e definindo a troca de variáveis $\hat{A}_i, \hat{A}_{iq}, \hat{B}_i, \hat{B}_{iq}, \hat{G}_i, \hat{G}_{iq}, \hat{C}_i, \hat{D}_i, \hat{F}_i$ de acordo com (4.23), tem-se que (4.15) é equivalente a (4.20) e (4.16) é equivalente a (4.21). \square

Com relação à complexidade numérica dos teoremas 7 e 8, estes diferem apenas da quarta linha e coluna em relação a complexidade apresentada nas tabelas 1 e 2.

4.4 Condições Adicionais para Modelos Locais

Em vários problemas práticos, o modelo a parâmetros variantes (4.1) descreve o comportamento do sistema apenas numa subregião do espaço de estado $\mathcal{Y}_0 \subset \mathfrak{R}^n$. Neste caso é necessário garantir que a evolução das trajetórias estejam confinadas no domínio de validade do

modelo utilizado. Para tal, consideram-se as mesmas condições adicionais apresentadas na seção 3.5.

Portanto, com base nas condições dos lemas 5 e 6, e no desenvolvimento descrito na seção 3.5, é possível apresentar os seguintes resultados para sistemas locais.

Corolário 3 *Sejam A_{ci} , B_{ci} , G_{ci} , C_c , D_c e F_c matrizes conhecidas que formam o controlador (4.4). Para um dado escalar real $\lambda \in (0, 1]$, considere a existência de matrizes simétricas definidas positivas $\mathbb{Q}_i \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, da matriz diagonal positiva $\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ e da matriz $\mathbb{U} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, satisfazendo as condições definidas em (4.14) e (3.23).*

Então, o conjunto $\mathcal{L}_V \triangleq \bigcap_i \{\mathcal{E}(\mathbb{Q}_i^{-1})\} = \mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(h_k))$ é robustamente absolutamente λ -contrativo e tal que $\mathcal{L}_V \subseteq \chi_0$. Portanto, a origem do sistema em malha fechada (4.6) é assintoticamente estável para qualquer condição inicial $\zeta_0 \in \mathcal{L}_V$ e para qualquer $\varphi(\cdot)$ verificando a condição $\varphi'(z_k)\Delta^{-1}[\varphi(z_k) - \Omega z_k] \leq 0$, $\forall z_k \in Z \supset \mathcal{V}_0$, e, seguramente, as trajetórias que emanam de ζ_0 permanecem em χ_0 .

Corolário 4 *Sejam A_{ci} , A_{ciq} , B_{ci} , B_{ciq} , G_{ci} , G_{ciq} , C_{ci} , D_{ci} e F_{ci} matrizes conhecidas que formam o controlador (4.7). Para um dado escalar real $\lambda \in (0, 1]$, considere a existência das matrizes simétricas definidas positivas $\mathbb{Q}_i \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, da matriz diagonal positiva $\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ e da matriz $\mathbb{U} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, satisfazendo as condições definidas em (4.15), (4.16) e (3.23).*

Então, o conjunto $\mathcal{L}_V \triangleq \bigcap_i \{\mathcal{E}(\mathbb{Q}_i^{-1})\} = \mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(h_k))$ é robustamente absolutamente λ -contrativo e tal que $\mathcal{L}_V \subseteq \chi_0$. Portanto, a origem do sistema em malha fechada (4.9) é assintoticamente estável para qualquer condição inicial $\zeta_0 \in \mathcal{L}_V$ e para qualquer $\varphi(\cdot)$ verificando a condição $\varphi'(z_k)\Delta^{-1}[\varphi(z_k) - \Omega z_k] \leq 0$, $\forall z_k \in Z \supset \mathcal{V}_0$, e, seguramente, as trajetórias que emanam de ζ_0 permanecem em χ_0 .

É importante destacar que os resultados acima permitem que a não linearidade de setor $\varphi(\cdot)$ seja válida apenas na região \mathcal{V}_0 , não sendo mais necessário sua garantia global.

Desta forma, para síntese do CDNRS-PDP aplicado a uma classe de sistemas não lineares a parâmetros variantes, considerando um domínio de validade \mathcal{V}_0 , tem-se o seguinte problema de programação

convexa

$$\begin{aligned} & \min_{\substack{\bar{Q}_{11i}, \bar{Q}_{12i}, \bar{Q}_{22i}, \hat{A}_i, \hat{G}_i, \\ X, Y, T, \hat{B}_i, \hat{C}, \hat{D}, \hat{F}, \Delta}} \mu \\ & \text{sujeito a} \\ & \text{LMIs (4.18), (3.25) e (3.24)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

e, para o CDNRS-TDP,

$$\begin{aligned} & \min_{\substack{\bar{Q}_{11i}, \bar{Q}_{12i}, \bar{Q}_{22i}, \hat{A}_i, \hat{A}_{iq}, \hat{G}_i, \hat{G}_{iq}, \\ X, Y, T, \Delta, \hat{B}_i, \hat{B}_{iq}, \hat{C}_i, \hat{D}_i, \hat{F}_i}} \mu \\ & \text{sujeito a} \\ & \text{LMIs (4.20), (4.21), (3.25) e (3.24)}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

É possível verificar também que as condições adicionais para os sistemas locais não implicam em maior complexidade de implementação, apenas alteram a complexidade numérica de solução do algoritmo.

4.5 Extensão para o caso com Saturação nos Atuadores

Nesta seção apresentar-se-ão de maneira breve alguns resultados obtidos no período de execução dessa dissertação e descritos no artigo [25].

Considera-se o sistema (4.1) com saturação dos atuadores, sendo representado por

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A(h_k)x_k + B(h_k)sat(u_k) + G(h_k)\varphi(z_k) \\ z_k &= L(h_k)x_k \\ y_k &= Cx_k \end{cases} \quad (4.26)$$

As entradas de controle são limitadas em amplitude, com a função padrão de saturação

$$sat(u_{(l)}(k)) = sign(u_{(l)}(k))min(\rho_{(l)}, |u_{(l)}(k)|)$$

$\forall l = 1, \dots, m$, sendo $\rho_{(l)} > 0$ o limite simétrico de amplitude relativo a l -ésima ação de controle.

Propõe-se o seguinte controlador dinâmico

$$\begin{cases} x_{c,k+1} &= A_c(h_k)x_{c,k} + B_c(h_k)u_{c,k} + G_c(h_k)\varphi(z_k) - E_c(h_k)\Psi(u_k) \\ y_{c,k} &= C_c(h_k)x_{c,k} + D_c(h_k)u_{c,k} + F_c(h_k)\varphi(z_k) \end{cases} \quad (4.27)$$

com $x_{c,k} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $\Psi(\cdot) : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m$ a não linearidade de zona morta descentralizada, definida por

$$\Psi(u_k) = u_k - \text{sat}(u_k).$$

As matrizes do controlador são estruturadas como em (4.8), adicionando-se $E_c(h_k) = \sum_{i=1}^r h_{k(i)} E_{ci}$. Observa-se que $E_c(h_k)$ é uma matriz de ganhos anti-windup dependente de parâmetros que ajuda a atenuar os efeitos da saturação nas entradas de controle. É importante notar que o termo anti-windup só atua na ocorrência de saturação (i.e. $\Psi(u_k) \neq 0$).

Considerando a interconexão $u_{c,k} = y_k$ e $y_{c,k} = u_k$, tem-se o seguinte sistema em malha fechada

$$\begin{cases} \zeta_{k+1} &= (\mathbb{A}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)\mathbb{K}(h_k))\zeta_k + (\mathbb{G}(h_k) + \mathbb{B}(h_k)F_c(h_k))\varphi(z_k) \\ &\quad - \mathbb{B}(h_k)\Psi(u_k) \\ z_k &= \mathbb{L}(h_k)\zeta_k \\ u_k &= \mathbb{K}(h_k)\zeta_k + F_c(h_k)\varphi(z_k) \end{cases} \quad (4.28)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(h_k) &= \begin{bmatrix} A(h_k) & 0 \\ B_c(h_k)C & A_c(h_k) \end{bmatrix}, & \mathbb{B}(h_k) &= \begin{bmatrix} B(h_k) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{G}(h_k) &= \begin{bmatrix} G(h_k) \\ G_c(h_k) \end{bmatrix}, & \mathbb{B}(h_k) &= \begin{bmatrix} B(h_k) \\ E_c(h_k) \end{bmatrix}, \\ e \quad \mathbb{K}(h_k) &= [D_c(h_k)C \quad C_c(h_k)] \end{aligned}$$

Também considera-se um conjunto poliedral (dependente de parâmetros) dado por:

$$S(\rho, h_k) = \{ \zeta_k \in \mathfrak{R}^{2n}; |\Gamma_1(h_k)\zeta_k + \Gamma_2(h_k)\varphi(z_k)| \leq \rho, \quad \forall h_k \in \Xi \}$$

onde por definição: $\Gamma_1(h_k) = \sum_{i=1}^r h_{k(i)}\Gamma_{1i}$ e $\Gamma_2(h_k) = \sum_{i=1}^r h_{k(i)}\Gamma_{2i}$, com $\Gamma_{1i}, \Gamma_{2i} \in \mathfrak{R}^{m \times 2n}$.

Uma condição de inclusão de fundamental importância para aplicação da condição de setor modificada associada à não linearidade de

zona morta, com propósito de obter as condições LMI desejadas para estabilidade e estabilização, é apresentada no seguinte resultado:

Lema 9 *Dados os conjuntos $\mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(h_k))$ e $S(\rho, h_k)$, a inclusão $\mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(h_k)) \subset S(\rho, h_k)$ é obtida, se existir $\mathbb{U} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, por [8]:*

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{Q}_i + \mathbb{U} + \mathbb{U}' & -\mathbb{U}' \mathbb{L}'_i \Omega & \mathbb{U}' \Gamma'_{1i(l)} \\ * & 2\Delta & \Delta \Gamma'_{2i(l)} \\ * & * & \rho_{(l)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.29)$$

$\forall i = 1, \dots, r \quad e \quad \forall l = 1, \dots, m$

Prova: O elipsóide $\mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(h_k))$ está contido em $S(\rho, h_k)$, isto é, $|\Gamma_1(h_k)\zeta_k + \Gamma_2(h_k)\varphi(z_k)| \leq \rho \quad \forall \zeta_k \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(h_k))$ se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \zeta'_k & \varphi'(z_k) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbb{Q}^{-1}(h_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} \Gamma'_{1(l)}(h_k) \\ \Gamma'_{2(l)}(h_k) \end{bmatrix} \frac{1}{\rho_{(l)}^2} \begin{bmatrix} \Gamma_{1(l)}(h_k) & \Gamma_{2(l)}(h_k) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \zeta_k \\ \varphi(z_k) \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \forall l = 1, \dots, m \quad e \quad \forall \zeta_k, \varphi(z_k) \quad \text{tal que} \quad 2\varphi'(z_k)\Delta^{-1}[\varphi(z_k) - \Omega z_k] \leq 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Fazendo uso da *S-procedure* e do complemento de Schur (ver Apêndice A) demonstra-se a equivalência entre (4.30) e (4.29). \square

Além disso, fazendo $\mathbb{Y}_1(h_k) = \mathbb{K}(h_k) - \Gamma_1(h_k)$ e $\mathbb{Y}_2(h_k) = F_c(h_k) - \Gamma_2(h_k)$, esta inclusão implica em (ver [12, 25])

$$\Psi'(u_k)S^{-1}(\Psi(u_k) - \mathbb{Y}_1(h_k)\zeta_k - \mathbb{Y}_2(h_k)\varphi(z_k)) \leq 0 \quad (4.31)$$

para todo $\zeta_k \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(h_k))$ e para toda matriz diagonal definida positiva $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$.

Portanto, para obter a λ -contratividade robusta absoluta de $\mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(h_k))$, considera-se:

$$\begin{aligned} \gamma'_\lambda(\zeta_k, h_k) &= \Delta V_\lambda(\zeta_k, h_k) - 2\varphi'(z_k)\Delta^{-1}(\varphi(z_k) - \Omega \mathbb{L}(h_k)\zeta_k) - \\ & 2\Psi'(u_k)S^{-1}(\Psi(u_k) - \mathbb{Y}_1(h_k)\zeta_k - \mathbb{Y}_2(h_k)\varphi(z_k)) = \\ & \begin{bmatrix} \zeta'_k & \varphi'(z_k) & \Psi'(u_k) \end{bmatrix} \mathcal{M}_{cs5}(h_k) \begin{bmatrix} \zeta_k \\ \varphi'(z_k) \\ \Psi(u_k) \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

com

$$\mathcal{M}_{cs_5}(h_k) = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{MF}(h_k)' \\ \mathbb{G}_{MF}(h_k)' \\ -\tilde{\mathbb{B}}'(h_k) \end{bmatrix} \mathbb{Q}^{-1}(h_{k+1}) \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{MF}(h_k) & \mathbb{G}_{MF}(h_k) & -\tilde{\mathbb{B}}(h_k) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda \mathbb{Q}^{-1}(h_k) & \mathbb{L}'(h_k) \Omega \Delta^{-1} & \mathbb{Y}'_1(h_k) S^{-1} \\ * & -2\Delta^{-1} & \mathbb{Y}'_2(h_k) S^{-1} \\ * & * & -2S^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

Através de (4.32), e desde que as não linearidades $\varphi(z_k)$ e $\Psi(u_k)$ verifiquem, respectivamente, a condição de setor (4.3) e a condição de setor modificada (4.31), pode-se estabelecer as seguintes condições de estabilidade, também descritas em [25].

$$\mathbb{M}_{5ji}^+ = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{M}_{4ji}^+ & \begin{array}{c} -\tilde{\mathbb{B}}_i S \\ \mathbb{H}'_{1i} \\ \mathbb{H}'_{2i} \end{array} \\ \hline * & * & * \\ \hline \end{array} \right] < 0$$

$\forall i, j = 1, \dots, r$

$$\mathbb{M}_{5ji}^+ = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{M}_{4jiq}^+ & \begin{array}{c} -(\tilde{\mathbb{B}}_i + \tilde{\mathbb{B}}_q) S \\ \mathbb{H}'_{1i} + \mathbb{H}'_{1q} \\ \mathbb{H}'_{2i} + \mathbb{H}'_{2q} \end{array} \\ \hline * & * & * \\ \hline \end{array} \right] < 0$$

$\forall j = 1, \dots, r, \forall i = 1, \dots, r-1 \text{ e } \forall q = i+1, \dots, r$

Tais condições permitem a elaboração do seguinte teorema de estabilização.

Teorema 10 *Dado $\lambda \in (0, 1]$, considere que existem as matrizes simétricas definidas positivas $(\tilde{\mathcal{Q}}_{11i}, \tilde{\mathcal{Q}}_{22i}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, as matrizes diagonal positiva $\Delta \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ e $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, e as matrizes $(\tilde{\mathcal{Q}}_{12i}, \hat{\mathcal{A}}_i, \hat{\mathcal{A}}_{iq}, X, Y, T) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $(\hat{\mathcal{B}}_i, \hat{\mathcal{B}}_{iq}) \in \mathfrak{R}^{n \times q}$, $(\hat{\mathcal{G}}_i, \hat{\mathcal{G}}_{iq}) \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, $(\hat{\mathcal{C}}_i, \hat{\mathcal{H}}_{11i}, \hat{\mathcal{H}}_{12i}) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $\hat{\mathcal{D}}_i \in \mathfrak{R}^{m \times q}$,*

$\hat{E}_i \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ e $(\hat{F}_i, \hat{H}_{2i}) \in \mathfrak{R}^{m \times p}$, satisfazendo as seguintes condições:

$$\left[\begin{array}{cccccc} -\bar{Q}_{11j} & -\bar{Q}_{12j} & Y'A_i + \hat{B}_i C & \hat{A}_i & \hat{G}_i & \hat{E}_i \\ * & -\bar{Q}_{22j} & A_i + B_i \hat{D}_i C & M_{c1i} & G_i \Delta + B_i \hat{F}_i & -B_i S \\ * & * & \lambda(\bar{Q}_{11i} - Y' - Y) & M_{c2i} & L'_i \Omega & \hat{H}'_{11i} \\ * & * & * & M_{c3i} & X' L'_i \Omega & \hat{H}'_{12i} \\ * & * & * & * & -2\Delta & \hat{H}'_{2i} \\ * & * & * & * & * & -2S \end{array} \right] < 0$$

$\forall i, j = 1, \dots, r$

(4.33)

$$\left[\begin{array}{cccccc} -2\bar{Q}_{11j} & -2\bar{Q}_{12j} & M_{c7i} & \hat{A}_{iq} & \hat{G}_{iq} & \hat{E}_i + \hat{E}_q \\ * & -2\bar{Q}_{22j} & M_{c8i} & M_{c4i} & M_{c10i} & -(B_i + B_q) S \\ * & * & M_{c9i} & M_{c5i} & (L'_i + L'_q) \Omega & \hat{H}'_{11i} + \hat{H}'_{11q} \\ * & * & * & M_{c6i} & X' (L'_i + L'_q) \Omega & \hat{H}'_{12i} + \hat{H}'_{12q} \\ * & * & * & * & -4\Delta & \hat{H}'_{2i} + \hat{H}'_{2q} \\ * & * & * & * & * & -4S \end{array} \right] < 0$$

$\forall j = 1, \dots, r, \forall i = 1, \dots, r-1$ e $\forall q = i+1, \dots, r$

(4.34)

$$\left[\begin{array}{cccccc} -\bar{Q}_{11i} + Y + Y' & -\bar{Q}_{12i} + T' + I & -L'_i \Omega & (\hat{D}_{i(l)} C)' - \hat{H}'_{11i(l)} \\ * & -\bar{Q}_{22i} + X' + X & -X' L'_i \Omega & \hat{C}'_{i(l)} - \hat{H}'_{12i(l)} \\ * & * & 2\Delta & \hat{F}'_{i(l)} - \hat{H}'_{2i(l)} \\ * & * & * & \rho_{(l)}^2 \end{array} \right] \geq 0$$

$\forall i = 1, \dots, r$ e $\forall l = 1, \dots, m$

(4.35)

nas quais $M_{c1i} \dots M_{c10i}$ são definidas em (4.22).

Seja $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ uma matriz não singular qualquer, determine:

$$Z = (W')^{-1} (T' - Y' X)$$

Então, as matrizes do controlador CDNRS-TDP-NLPV considerando a saturação dos atuadores, obtidas por (4.23) e por $E_{ci} = (W')^{-1} (\hat{E}_i S^{-1} - Y' B_i)$, e o conjunto $\mathcal{L}_V \triangleq \bigcap_i \{ \mathcal{E}(\mathbb{Q}_i^{-1}) \} = \mathcal{E}(\mathbb{Q}^{-1}(h_k))$ formam a solução do problema de estabilização.

Observação 1 O CDRS-TDP-NLPV CASO 4 sem limitação dos atuadores, pode ser visto como um caso particular do Teorema 8 eliminando-se a condição (4.35) e a quarta linha e coluna das condições (4.33) e (4.34).

Desta forma, através do Teorema 10 e das condições (3.24) e (3.25), tem-se para a síntese do CDNRS-TDP sujeito a saturação dos atuadores o seguinte problema de programação convexa

$$\begin{aligned}
 & \min_{\substack{\bar{Q}_{11i}, \bar{Q}_{12i}, \bar{Q}_{22i}, \hat{A}_i, \hat{A}_{iq}, \hat{G}_i, \hat{G}_{iq}, X, Y, T, \Delta, S, \\ \hat{B}_i, \hat{B}_{iq}, \hat{C}_i, \hat{D}_i, \hat{E}_i, \hat{F}_i, \hat{H}_{11i}, \hat{H}_{12i}, \hat{H}_{2i}}} \mu \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \text{LMIs (4.33), (4.34), (4.35), (3.24) e (3.25)}.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

4.6 Conclusão

Neste capítulo foi tratado o problema de estabilidade para compensadores dinâmicos por realimentação de saída aplicados a uma classe de sistemas não lineares a parâmetros variantes, sendo demonstradas condições para análise de estabilidade robusta baseadas na utilização de uma Função de Lyapunov Dependente de Parâmetros. A partir destas condições foram propostos métodos de projeto de controladores parcialmente e totalmente dependentes de parâmetros.

Para o caso totalmente considerou-se uma extensão em que os sinais dos atuadores são limitados em amplitude (saturação), com tratamento baseado numa condição de setor modificada, com adição de ganhos anti-windup visando mitigar os efeitos da saturação.

Para tratamento de sistemas com validade local e/ou modelos provenientes de metodologia fuzzy Takagi-Sugeno, incluem-se condições adicionais de forma a garantir que os resultados obtidos para o modelo sejam válidos também para o sistema original. Neste caso permite-se que a não linearidade de setor da planta seja válida apenas localmente.

A obtenção dos valores numéricos dos ganhos das leis de controle pode ser facilmente realizada com a utilização de ferramentas algorítmicas baseadas em métodos de pontos interiores.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS E SIMULAÇÕES

No presente capítulo são apresentados resultados numéricos obtidos a partir da aplicação dos algoritmos de projeto de controladores apresentados neste trabalho. Várias configurações e condições de funcionamento são consideradas e comparadas entre os algoritmos, objetivando a análise de custo-benefício de cada técnica.

Resultados de simulações, realizadas para algumas dessas condições, são mostrados, considerando principalmente como fatores de comparação os seguintes itens: complexidade numérica e de implementação, estimativa de regiões de confinamento e estabilização, e factibilidade dos algoritmos. Também são apresentadas as respostas temporais dos estados, demonstrando que a adição das condições de inclusão para sistemas válidos localmente faz com que as trajetórias não ultrapassem os limites do domínio de validade, assim como a evolução da entrada de controle.

Inicialmente as ferramentas computacionais utilizadas para cálculo e simulação são brevemente descritas, sendo seguidas da apresentação das características do processo a ser controlado. Após, apresentam-se os resultados numéricos e simulações, com respectivas considerações sobre as soluções obtidas.

5.1 Ferramentas Computacionais

Para obtenção dos resultados deste capítulo foram utilizadas as seguintes ferramentas computacionais:

1. Yalmip [29]: interface para descrição do problema matemático considerado e chamada do *SDP-solver* a ser utilizado;
2. SeDuMi [36]: um dos *SDP-solvers* utilizado para busca de soluções factíveis para as LMIs;
3. SDPT3 [44]: um dos *SDP-solvers* utilizado para busca de soluções factíveis para as LMIs;
4. Simulink: ferramenta para modelamento, simulação e análise de sistemas dinâmicos.

5.2 Exemplo Numérico

Para ilustrar os métodos propostos neste trabalho, é utilizado como exemplo o sistema de um pêndulo invertido sobre um carro, apresentado na seção 2.3, com as duas metodologias de modelamento exato abordadas.

Para o exemplo elege-se: $m = 2.0\text{kg}$, $M = 8.00\text{kg}$ e $2l = 1.0\text{m}$. Discretizando cada regra em (2.24) e (2.25) para um tempo de amostragem fixo $T_s = 0.1\text{s}$, utilizando segurador de ordem zero, obtêm-se as matrizes que compõem os modelos para simulação. Desta maneira, com a utilização da metodologia de inserção da não linearidade de setor na matriz de estados, tem-se o seguinte sistema linear discreto com parâmetros variantes:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \sum_{i=1}^{16} h_i \{A_i x_k + B_i u_k\} \\ y_k &= C x_k \end{cases} \quad (5.1)$$

com

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1.0864 & 0.1007 \\ 1.7410 & 1.0420 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} -0.0009 \\ -0.0178 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1.0864 & 0.1007 \\ 1.7410 & 1.0420 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} -0.0004 \\ -0.0089 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 1.0890 & 0.1052 \\ 1.8195 & 1.1354 \end{bmatrix}, & B_3 &= \begin{bmatrix} -0.0009 \\ -0.0186 \end{bmatrix}, \\ A_4 &= \begin{bmatrix} 1.0890 & 0.1052 \\ 1.8195 & 1.1354 \end{bmatrix}, & B_4 &= \begin{bmatrix} -0.0005 \\ -0.0093 \end{bmatrix}, \\ A_5 &= \begin{bmatrix} 1.0547 & 0.0996 \\ 1.0969 & 1.0108 \end{bmatrix}, & B_5 &= \begin{bmatrix} -0.0009 \\ -0.0176 \end{bmatrix}, \\ A_6 &= \begin{bmatrix} 1.0547 & 0.0996 \\ 1.0969 & 1.0108 \end{bmatrix}, & B_6 &= \begin{bmatrix} -0.0004 \\ -0.0088 \end{bmatrix}, \\ A_7 &= \begin{bmatrix} 1.0564 & 0.1041 \\ 1.1464 & 1.1023 \end{bmatrix}, & B_7 &= \begin{bmatrix} -0.0009 \\ -0.0184 \end{bmatrix}, \\ A_8 &= \begin{bmatrix} 1.0564 & 0.1041 \\ 1.1464 & 1.1023 \end{bmatrix}, & B_8 &= \begin{bmatrix} -0.0005 \\ -0.0092 \end{bmatrix}, \\ A_9 &= \begin{bmatrix} 1.0763 & 0.1006 \\ 1.5363 & 1.0372 \end{bmatrix}, & B_9 &= \begin{bmatrix} -0.0008 \\ -0.0157 \end{bmatrix}, \\ A_{10} &= \begin{bmatrix} 1.0763 & 0.1006 \\ 1.5363 & 1.0372 \end{bmatrix}, & B_{10} &= \begin{bmatrix} -0.0004 \\ -0.0078 \end{bmatrix}, \\ A_{11} &= \begin{bmatrix} 1.0784 & 0.1046 \\ 1.5974 & 1.1191 \end{bmatrix}, & B_{11} &= \begin{bmatrix} -0.0008 \\ -0.0163 \end{bmatrix}, \\ A_{12} &= \begin{bmatrix} 1.0784 & 0.1046 \\ 1.5974 & 1.1191 \end{bmatrix}, & B_{12} &= \begin{bmatrix} -0.0004 \\ -0.0081 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} &= \begin{bmatrix} 1.0484 & 0.0997 \\ 0.9691 & 1.0095 \end{bmatrix}, & B_{13} &= \begin{bmatrix} -0.0008 \\ -0.0155 \end{bmatrix}, \\
A_{14} &= \begin{bmatrix} 1.0484 & 0.0997 \\ 0.9691 & 1.0095 \end{bmatrix}, & B_{14} &= \begin{bmatrix} -0.0004 \\ -0.0078 \end{bmatrix}, \\
A_{15} &= \begin{bmatrix} 1.0497 & 0.1036 \\ 1.0076 & 1.0900 \end{bmatrix}, & B_{15} &= \begin{bmatrix} -0.0008 \\ -0.0162 \end{bmatrix}, \\
A_{16} &= \begin{bmatrix} 1.0497 & 0.1036 \\ 1.0076 & 1.0900 \end{bmatrix}, & B_{16} &= \begin{bmatrix} -0.0004 \\ -0.0081 \end{bmatrix}, \\
&& e \ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

e para a metodologia usando estabilidade absoluta, denominada de modelo híbrido Fuzzy-Lur'e, tem-se o seguinte sistema não linear discreto com parâmetros variantes:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \sum_{i=1}^8 h_i \{ \bar{A}_i x_k + B_i u_k + G_i \bar{\varphi}(z_k) \} \\ z_k &= \sum_{i=1}^8 h_i L_i x_k \\ y_k &= C x_k \end{cases} \quad (5.2)$$

com

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.0978 \\ 0 & 0.9568 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} -0.0009 \\ -0.0173 \end{bmatrix}, & G_1 &= \begin{bmatrix} 0.0852 \\ 1.6918 \end{bmatrix}, \\
\bar{A}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.0978 \\ 0 & 0.9568 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} -0.0004 \\ -0.0086 \end{bmatrix}, & G_2 &= \begin{bmatrix} 0.0852 \\ 1.6918 \end{bmatrix}, \\
\bar{A}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1022 \\ 0 & 1.0451 \end{bmatrix}, & B_3 &= \begin{bmatrix} -0.0009 \\ -0.0180 \end{bmatrix}, & G_3 &= \begin{bmatrix} 0.0878 \\ 1.7681 \end{bmatrix}, \\
\bar{A}_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1022 \\ 0 & 1.0451 \end{bmatrix}, & B_4 &= \begin{bmatrix} -0.0004 \\ -0.0090 \end{bmatrix}, & G_4 &= \begin{bmatrix} 0.0878 \\ 1.7681 \end{bmatrix}, \\
\bar{A}_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.0981 \\ 0 & 0.9618 \end{bmatrix}, & B_5 &= \begin{bmatrix} -0.0008 \\ -0.0153 \end{bmatrix}, & G_5 &= \begin{bmatrix} 0.0754 \\ 1.4979 \end{bmatrix}, \\
\bar{A}_6 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.0981 \\ 0 & 0.9618 \end{bmatrix}, & B_6 &= \begin{bmatrix} -0.0004 \\ -0.0076 \end{bmatrix}, & G_6 &= \begin{bmatrix} 0.0754 \\ 1.4979 \end{bmatrix}, \\
\bar{A}_7 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1020 \\ 0 & 1.0397 \end{bmatrix}, & B_7 &= \begin{bmatrix} -0.0008 \\ -0.0159 \end{bmatrix}, & G_7 &= \begin{bmatrix} 0.0774 \\ 1.5574 \end{bmatrix}, \\
\bar{A}_8 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1020 \\ 0 & 1.0397 \end{bmatrix}, & B_8 &= \begin{bmatrix} -0.0004 \\ -0.0079 \end{bmatrix}, & G_8 &= \begin{bmatrix} 0.0774 \\ 1.5574 \end{bmatrix}, \\
C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L_1 \dots L_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \bar{\varphi}(z_k) = \sin(z_k).
\end{aligned}$$

Observa-se que a não linearidade de setor $\bar{\varphi}(\cdot)$ verifica a condição de setor cone limitada $\bar{\varphi}(\cdot) \in [0, 1]$, para $z \in [-\pi, \pi]$. Porém, como o modelo é válido apenas para $x_1 \in [-\pi/3, \pi/3]$, é possível diminuir o conservadorismo utilizando uma região de setor mais estreita, ou seja,

a não linearidade $\bar{\varphi}(\cdot)$ verifica a condição de setor $\bar{\varphi}(\cdot) \in [\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}, 1]$, para $z \in [-\pi/3, \pi/3]$, conforme exposto na figura 14.

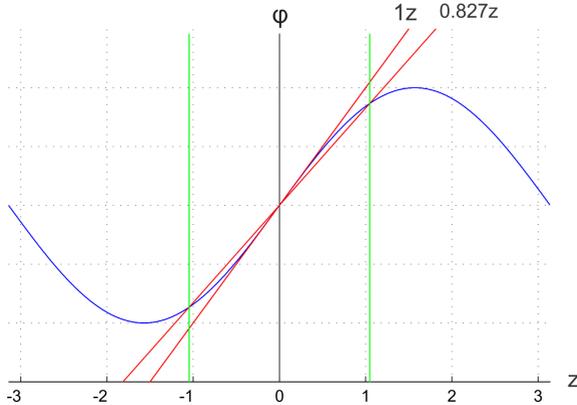


Figura 14: Região de setor para a não linearidade $\bar{\varphi}(\cdot)$.

Desta forma, é necessário fazer uma transformação de malha ($\bar{\varphi} \in [\Omega_1, \Omega_2]$ em $\varphi \in [0, \Omega]$) (ver Apêndice D) [23], obtendo-se o seguinte sistema para simulação:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \sum_{i=1}^8 h_i \{A_i x_k + B_i u_k + G_i \varphi(z_k)\} \\ z_k &= \sum_{i=1}^8 h_i L_i x_k \\ y_k &= C x_k \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\text{com } A_i = \left(\bar{A}_i + G_i \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} L_i \right) \text{ e } \varphi(z_k) = \bar{\varphi}(z_k) - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} z_k$$

Como os modelos fuzzy (5.1) e fuzzy-Lur'e (5.2) são válidos apenas localmente, utilizam-se das condições de inclusão adicionais apresentadas na seção 3.5, com

$$v_\sigma = \left\{ \left[\begin{array}{c} x_{1max} \\ x_{2max} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} x_{1max} \\ -x_{2max} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -x_{1max} \\ x_{2max} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -x_{1max} \\ -x_{2max} \end{array} \right] \right\},$$

$$\Lambda = \left[\begin{array}{c} x_{1max} \\ x_{2max} \end{array} \right] \text{ e } L = I_2.$$

5.3 Resultados Numéricos e Simulações

Os resultados apresentados nesta seção correspondem à possibilidade de encontrar uma resposta factível para os ganhos dos controladores propostos nos algoritmos (3.26) e (3.27), para o pêndulo modelado na forma (5.1), e (4.24) e (4.25), para o pêndulo modelado na forma (5.2).

É importante reforçar a nomenclatura usada para os controladores propostos, exposta abaixo:

- CASO 1 - CDRS-PDP aplicado a sistemas lineares com parâmetros variantes - Algoritmo (3.26)
- CASO 2 - CDRS-TDP aplicado a sistemas lineares com parâmetros variantes - Algoritmo (3.27)
- CASO 3 - CDNRS-PDP aplicado a uma classe de sistemas não lineares com parâmetros variantes - Algoritmo (4.24)
- CASO 4 - CDNRS-TDP aplicado a uma classe de sistemas não lineares com parâmetros variantes - Algoritmo (4.25)

Todas as simulações foram efetuadas utilizando a interface Yalmip e o *solver* SDPT3, em um computador Intel Core2Duo T5670, 3 GB RAM.

5.3.1 Simulação para os Algoritmos Aplicáveis ao Modelo (5.1)

Inicialmente, apresentam-se nas tabelas 5 e 6 a quantidade de variáveis escalares e linhas das LMIs para os algoritmos dos CASOS 1 e 2, sem as condições adicionais para sistemas locais, relacionadas à complexidade numérica (proporcional a $\mathcal{H}^3\mathcal{L}$), e a quantidade de operações de adição e multiplicação, relacionadas à complexidade de implementação.

Nota-se que as complexidades para o CASO 2 são superiores aos valores para o CASO 1, com valor de complexidade numérica relativa de 475.

Na tabela 7 observam-se os valores mínimos de contratividade nos quais os algoritmos dos CASOS 1 e 2 permanecem factíveis. Nota-se que para o CDRS totalmente dependente de parâmetros (algoritmo

	\mathcal{K} (variáveis escalares)	\mathcal{L} (linhas)
Algo. (3.26)	271	2048
Algo. (3.27)	1036	17408

Tabela 5: Número de variáveis escalares e linhas das LMIs - CASOS 1 e 2.

	Adição	Multiplicação
Algo. (3.26)	102	105
Algo. (3.27)	870	1145

Tabela 6: Número de operações - CASOS 1 e 2.

(3.27)) obtém-se um menor valor do fator de contratividade, possibilitando uma maior gama de ajuste de desempenho.

	Fator λ
Algoritmo (3.26)	0,494
Algoritmo (3.27)	0,226

Tabela 7: Factibilidade dos Algoritmos de Controle - CASOS 1 e 2.

Na tabela 8 são expostos os tempos computacionais para solução dos algoritmos de síntese dos controladores. Nota-se que as versões que dependem totalmente dos parâmetros apresentam tempos maiores de solução, fato que já era esperado visto o maior número de LMIs para este caso.

Nas figuras 15 ($\lambda = 1$) e 16 ($\lambda = 0.7$) observam-se as regiões de estabilidade (RE), representadas por “x”, para o CASO 1, e “+”, para o CASO 2, e as regiões de confinamento das trajetórias (RC) no espaço de estados da planta, representadas por uma linha contínua para o CASO 1, e uma linha tracejada para o CASO 2. A RE é dada por

$$S_{0r} \triangleq \bigcap \{ \mathcal{E}_r(\mathbb{Q}_i^{-1}) \} \quad \text{em que}$$

$$\mathcal{E}_r(\mathbb{Q}_i^{-1}) = \left\{ x \in \mathfrak{R}^2; \left[\begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right]' \mathbb{Q}_i^{-1} \left[\begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right] \leq 1 \right\},$$

	tempo(s) $\rightarrow (\lambda = 1)$	tempo(s) $\rightarrow (\lambda = 0.7)$
Algoritmo (3.26)	8.9540	8.9700
Algoritmo (3.27)	128.6380	151.8970

Tabela 8: Tempo Computacional - CASOS 1 e 2.

e define o conjunto de condições iniciais $\zeta_0 = [x'_0 \ 0]'$, para os quais as trajetórias do sistema ficam confinadas em RC. A região RC é a projeção ortogonal (ver Apêndice B) de $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_i^{-1})$ sobre o plano formado pelos estados da planta, definida como

$$S_{0p} = \{ \zeta_{kproj} = P_{proj} \zeta_k \mid \zeta_k \in L_V(1) \triangleq \bigcap_i \mathcal{E}(\mathbb{Q}_i^{-1}, 1) \}$$

com

$$P_{proj} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

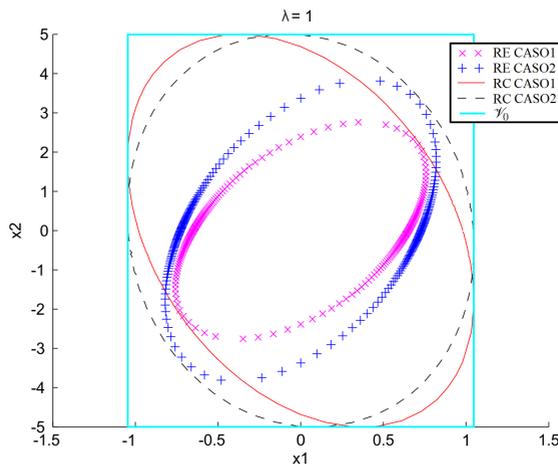


Figura 15: Regiões de Estabilização e Confinamento para $\lambda = 1$ - CASOS 1 e 2.

Nota-se que a exigência de um melhor desempenho (menor fator

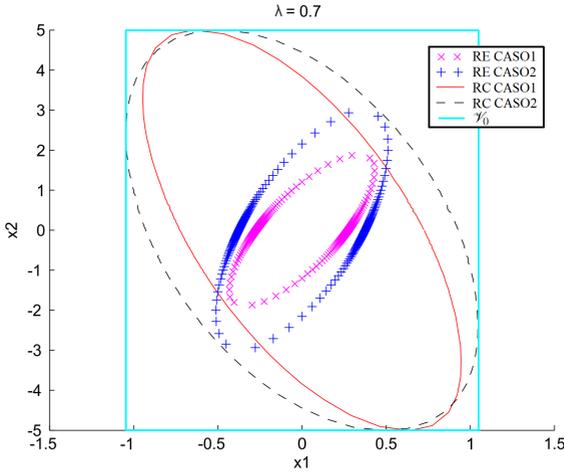


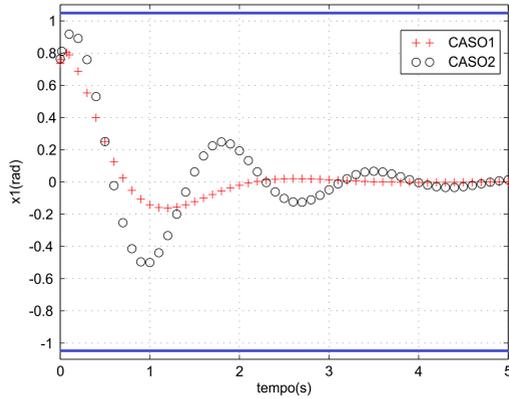
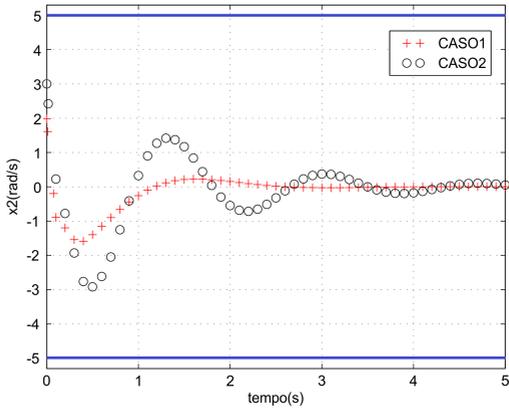
Figura 16: Regiões de Estabilização e Confinamento para $\lambda = 0.7$ - CASOS 1 e 2.

contrativo) provoca uma diminuição nas estimativas das regiões RE e RC, ou seja, o compromisso entre desempenho e tamanho das regiões de estabilidade e confinamento. Tal fator deve ser considerado pelo projetista. Verifica-se também um menor conservadorismo para o CDRS-TDP CASO 2 (algoritmo (3.27)), devido ao maior número de graus de liberdade para este controlador.

Para simulação da evolução temporal dos estados e do esforço de controle, são consideradas as condições iniciais $\zeta_0 = [x'_0 \ 0]'$, com $x'_0 = [0.7293 \ 2]$ e $x'_0 = [0.7569 \ 3]$, para o CASO 1 e CASO 2, respectivamente.

Nas figuras 17 e 18 observa-se a evolução temporal dos estados da planta para $\lambda = 1$, sendo que “+” representa os estados para o CASO 1 e “o” para o CASO 2. Nota-se que os estados, para todo tempo, permanecem dentro região de validade \mathcal{V}_0 . Tal fato é verificado devido as condições adicionais inseridas aos algoritmos de síntese dos controladores.

Na figura 19 observam-se os esforços de controle para a mesma condição de simulação anterior.

Figura 17: Evolução Temporal de x_1 para $\lambda = 1$ para os CASOS 1 e 2.Figura 18: Evolução Temporal de x_2 para $\lambda = 1$ para os CASOS 1 e 2.

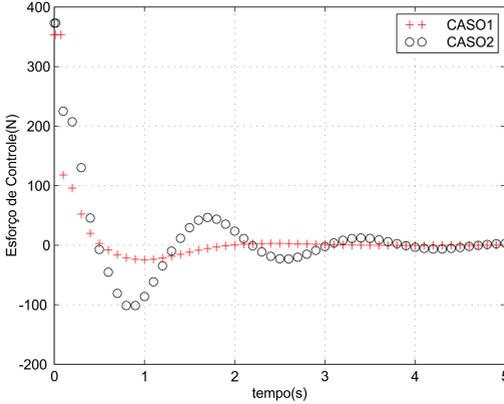


Figura 19: Esforço de Controle para $\lambda = 1$ - CASOS 1 e 2.

5.3.2 Simulação para os Algoritmos Aplicáveis ao Modelo (5.2)

Inicialmente, apresentam-se nas tabelas 9 e 10 a quantidade de variáveis escalares e linhas das LMIs para os algoritmos dos CASOS 3 e 4, sem as condições adicionais para sistemas locais, relacionadas à complexidade numérica (proporcional a $\mathcal{H}^3\mathcal{L}$), e à quantidade de operações de adição e multiplicação, relacionadas à complexidade de implementação.

	\mathcal{H} (variáveis escalares)	\mathcal{L} (linhas)
Algo. (4.24)	161	576
Algo. (4.25)	413	2592

Tabela 9: Número de variáveis escalares e linhas das LMIs - CASOS 3 e 4.

Observam-se valores maiores de complexidade do CASO 4 em relação ao CASO 3, com complexidade numérica relativa de 76. Entretanto, é importante enfatizar que comparado às complexidades dos CASOS 1 e 2, os valores obtidos de números de variáveis, de linhas, e de operações são extremamente reduzidos, mostrando uma melhor eficácia de implementação utilizando o modelo Fuzzy-Lur'e.

	Adição	Multiplicação
Algo. (4.24)	70	76
Algo. (4.25)	326	440

Tabela 10: Número de Operações - CASOS 3 e 4.

Na tabela 11 observam-se os valores mínimos de contratividade nos quais os algoritmos dos CASOS 3 e 4 permanecem factíveis. Nota-se que para o CDRS totalmente dependente de parâmetros (algoritmo (4.25)) obtém-se um menor valor do fator de contratividade, possibilitando a obtenção de um maior ajuste de desempenho.

	Fator λ
Algoritmo (3.26)	0,476
Algoritmo (3.27)	0,179

Tabela 11: Factibilidade dos Algoritmos de Controle - CASOS 3 e 4.

Na tabela 12 são expostos os tempos computacionais para solução dos algoritmos de síntese dos controladores. Nota-se uma redução significativa em relação aos tempos obtidos para os CASOS 1 e 2, demonstrando uma melhor eficácia computacional no uso do modelo Fuzzy-Lur'e.

	tempo(s) $\rightarrow (\lambda = 1)$	tempo(s) $\rightarrow (\lambda = 0.7)$
Algoritmo (3.26)	2.9800	3.3860
Algoritmo (3.27)	11.5750	13.4470

Tabela 12: Tempo Computacional - CASOS 3 e 4.

Nas figuras 20 ($\lambda = 1$) e 21 ($\lambda = 0.7$) observam-se as regiões de estabilidade (RE), representadas por “x”, para o CASO 3, e “+”, para o CASO 4, e as regiões de confinamento das trajetórias (RC) no espaço de estados da planta, representadas por uma linha contínua para o CASO 3, e uma linha tracejada para o CASO 4.

Nota-se que a exigência de um maior desempenho (menor fator contrativo) provoca uma diminuição nas estimativas das regiões RE

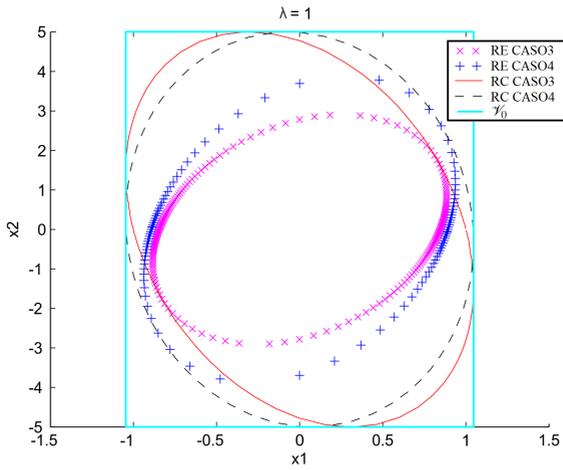


Figura 20: Regiões de Estabilização e Confinamento para $\lambda = 1$ - CASOS 3 e 4.

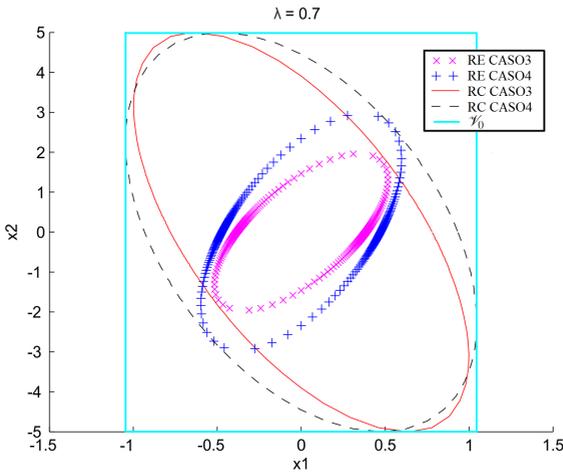


Figura 21: Regiões de Estabilização e Confinamento para $\lambda = 0.7$ - CASOS 3 e 4.

e RC, ou seja, o compromisso entre desempenho e tamanho das regiões de estabilidade e confinamento. Tal fator deve ser considerado pelo projetista.

É importante notar também que as regiões obtidas possuem tamanho e forma semelhantes às obtidas nos CASOS 1 e 2, porém a um custo computacional e de implementação reduzido.

Para simulação da evolução temporal dos estados e do esforço de controle, são consideradas as condições iniciais $\zeta_0 = [x'_0 \ 0]'$, com $x'_0 = [0.3629 \ 2.8509]$ e $x'_0 = [0.4809 \ 3.7281]$, para o CASO 3 e CASO 4, respectivamente.

Nas figuras 22 e 23 observa-se a evolução temporal dos estados da planta para $\lambda = 1$, sendo que “+” representa os estados para o CASO 3 e “o” para o CASO 4. Nota-se que os estados, para todo tempo, permanecem dentro região de validade \mathcal{V}_0 . Tal fato é verificado devido às condições adicionais inseridas aos algoritmos de síntese dos controladores.

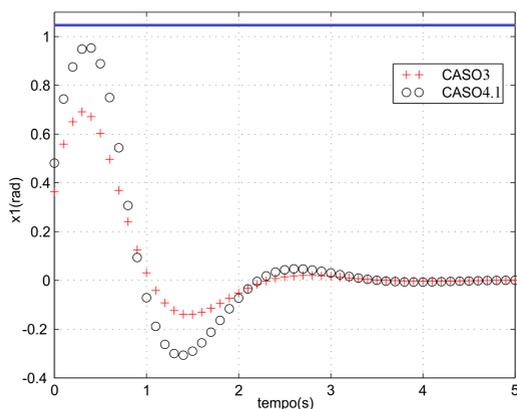


Figura 22: Evolução Temporal de x_1 para $\lambda = 1$ para os CASOS 3 e 4.

Na figura 24 observam-se os esforços de controle para a mesma condição de simulação anterior.

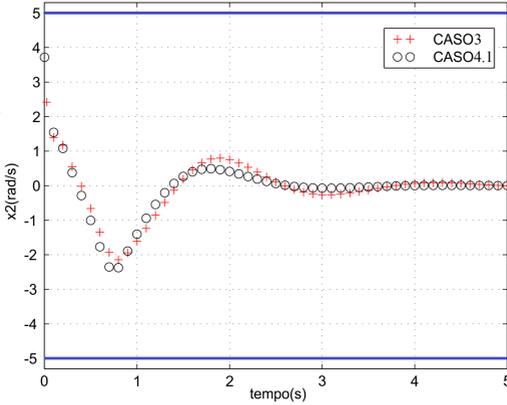


Figura 23: Evolução Temporal de x_2 para $\lambda = 1$ para os CASOS 3 e 4.

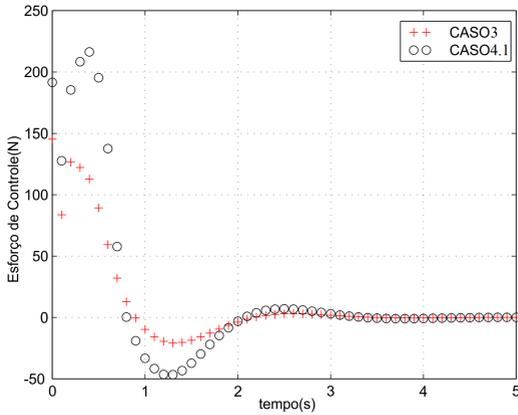


Figura 24: Esforço de Controle para $\lambda = 1$ - CASOS 3 e 4.

5.4 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados resultados numéricos para o cálculo das matrizes dos controladores dinâmicos por realimentação de saída utilizando os métodos propostos neste documento. Comparações entre os controladores foram feitas levando em conta as duas formas de modelo abordadas. Como era esperado, os sistemas que utilizaram controladores com dependência total de parâmetros possuem um menor conservadorismo e uma maior gama de ajuste de desempenho em relação aos controladores com dependência parcial de parâmetros, porém a um custo computacional e de implementação mais elevado.

Também foi mostrado que a utilização do modelo Fuzzy-Lur'e consegue diminuir a complexidade numérica e de implementação e obter resultados semelhantes, em termos de desempenho e de estimativas de região de estabilização e confinamento, aos do modelo fuzzy tradicional, explicitado em [37].

Por fim, foram apresentadas simulações temporais da evolução dos estados e da entrada de controle, demonstrando que a trajetória dos estados não escapa do domínio de validade do sistema. Tal fato foi garantido pela adição das condições para sistemas locais, garantindo que os resultados obtidos para o modelo fuzzy também sejam aplicáveis ao modelo não linear original.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado um estudo da estabilidade aplicado a duas vertentes de sistemas: os lineares com parâmetros variantes e uma determinada classe não linear com parâmetros variantes, ambos em tempo discreto. Para a segunda pode-se visualizar como um sistema de tipo Lur'e, composto de um sistema linear a parâmetros variantes realimentado por uma não linearidade de tipo setor limitado. Condições para análise de estabilidade robusta baseadas em uma Função de Lyapunov Dependente de Parâmetros foram demonstradas, e, a partir destas condições, foram apresentados métodos para projeto de controladores dinâmicos por realimentação de saída. É importante destacar que sempre dois casos de controladores são tratados, os parcialmente dependentes de parâmetros (CDRS-PDP) e os totalmente dependentes de parâmetros (CDRS-TDP).

Dentro do contexto descrito acima, o Capítulo 2 visou a obtenção dos modelos de simulação a partir das plantas não lineares originais. Para tal, utilizou-se da representação Fuzzy Takagi-Sugeno, formalizando os resultados de [37]. Também foi proposto um novo método, denominado modelo híbrido Fuzzy-Lur'e, cujo modelo resultante é da forma de um sistema LPV realimentado por uma não linearidade de setor limitado. Nesta dissertação utilizou-se do modelamento exato da planta, garantindo que os resultados obtidos para o modelo fuzzy sejam igualmente válidos para o modelo não linear original da planta.

Os capítulos seguintes foram dedicados à apresentação dos resultados propostos no contexto desta dissertação. As contribuições do trabalho estão principalmente relacionadas à utilização de leis de controle com dependência total de parâmetros, à formalização da obtenção dos modelos para simulação, incluindo o método denominado de modelo híbrido Fuzzy-Lur'e, e à inclusão de condições para tratamento de sistemas válidos apenas localmente. Também é analisado um caso no qual considera-se a presença de limites impostos sobre a amplitude das entradas de controle, tratado por uma condição de setor modificada com adição de malha anti-windup [39].

A validade dos métodos apresentados foi demonstrada por exemplos numéricos e simulações. Para os resultados numéricos foram consideradas diversas condições, analisando e comparando principalmente os seguintes fatores: complexidade numérica e de implementação, estimativa de regiões de confinamento e estabilização, e factibili-

dade dos algoritmos. As principais observações são relativas ao menor conservadorismo das técnicas totalmente dependentes de parâmetros, obtendo-se estimativas de regiões maiores em relação ao caso parcialmente dependente de parâmetros, assim como a obtenção de valores menores para o coeficiente de contração, ou seja, uma melhor performance temporal. Porém, a complexidade segue o processo inverso, sendo necessário, portanto, analisar o custo-benefício de cada método. Em parte, este problema é sensivelmente reduzido com a utilização do modelo Fuzzy-Lur'e, onde é possível obter desempenho similar aos obtidos com o modelo fuzzy tradicional a um custo de complexidade menor.

Uma dificuldade encontrada no trabalho está relacionada à complexidade dos algoritmos propostos, podendo ser um fator limitante à aplicação dos mesmos, principalmente para os totalmente dependentes de parâmetros e em casos com número de não linearidades elevado, mesmo quando se utiliza o modelo Fuzzy-Lur'e. Assim, com o intuito de aprofundar e melhorar os resultados obtidos até o presente momento, propõem-se os seguintes trabalhos futuros:

- aprofundar os estudos sobre os efeitos do processo de discretização dos modelos locais;
- verificar a possibilidade do uso de modelos fuzzy aproximados considerando uma representação do sistema na forma politópica adicionada de uma incerteza limitada por norma;
- aprimoramento dos algoritmos visando à obtenção de resultados menos conservadores no que se refere à região de estabilidade garantida;
- incluir critérios de melhoramento de desempenho, como por exemplo mínima energia ou rejeição de perturbação através de H_∞ , estudos já inicializados.

APÊNDICE A – LMIS E FERRAMENTAS DE TRATAMENTO

A.1 Inequações Matriciais Lineares

Uma LMI é uma desigualdade matricial do tipo $F(g) > 0$, no qual $F(g) : \Re^m \rightarrow \Re^{q \times q}$ é simétrica e afim nas variáveis de busca, que são representadas pelo vetor g . Genericamente pode-se representar uma LMI da seguinte forma

$$F(g) = F_0 + \sum_{i=1}^m g_i F_i > 0, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}$$

na qual $F_i = F_i' \in \Re^{q \times q}$ são matrizes dadas e g_i são variáveis escalares a serem determinadas de forma a satisfazer a desigualdade. Quando existe uma solução g para $F(g) > 0$ diz-se que a LMI é factível.

Inúmeros problemas em diferentes áreas do conhecimento podem ser reformulados via LMIs e numericamente resolvidos através de eficientes pacotes computacionais (ver [32]).

A.2 Ferramentas de Tratamento

A.2.1 Complemento de Schur

O complemento de Schur [2] é a ferramenta utilizada para converter inequações não-lineares convexas em LMIs. Considere a seguinte não linearidade convexa

$$Q(x) - S'(x)R^{-1}(x)S(x) > 0, \quad Q(x) = Q'(x), \quad R(x) = R'(x) > 0 \quad (\text{A.1})$$

Através da aplicação deste complemento, é possível converter a inequação (A.1) na LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S'(x) \\ S(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.2})$$

Note que para satisfazer (A.1) e (A.2) deve-se ter $Q(x) > 0$ e $R(x) > 0$ como condições necessárias, porém não suficientes.

A.2.2 S-Procedure

A técnica conhecida como S-procedure, ou Procedimento S, permite concatenar várias restrições escalares de desigualdade em uma única. Para reduzir o conservadorismo, a técnica introduz multiplicadores como fatores de ponderação a serem determinados.

Sejam $T_1, \dots, T_p \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ matrizes simétricas dadas e $F(g) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ uma função afim em g . Considere o seguinte problema: encontre g , se possível, tal que

$$\xi' F(g) \xi > 0 \quad \forall \xi \neq 0 : \xi' T_i \xi \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{A.3})$$

Pode-se demonstrar que, se existem escalares $\tau_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$ e algum g tais que

$$F(g) - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0 \quad (\text{A.4})$$

então (A.3) está satisfeita. Existem variantes do procedimento S (ver [2]).

APÊNDICE B – PROJEÇÃO

B.1 Projeção no Espaço Coluna

O cálculo de \bar{x} e sua projeção no espaço coluna $p = A\bar{x}$, representados na figura 25, pode ser efetuado basicamente de duas maneiras (ver [35]):

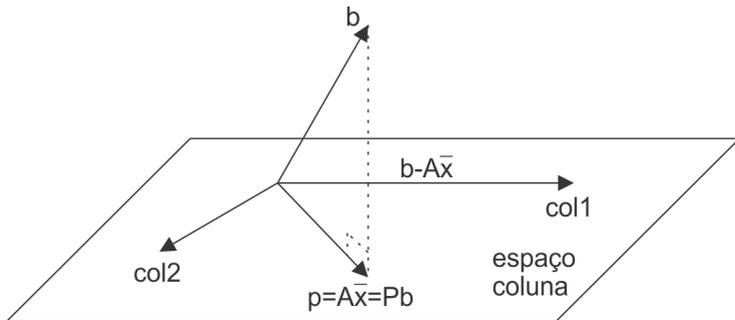


Figura 25: Projeção no Espaço Coluna.

1. Os vetores perpendiculares ao espaço coluna pertencem ao espaço nulo esquerdo. Portanto, o vetor de erro $b - A\bar{x}$ deve estar no espaço nulo de A^T :

$$A^T(b - A\bar{x}) = 0 \quad \text{ou} \quad A^T A\bar{x} = A^T b. \quad (\text{B.1})$$

2. O vetor de erro deve ser perpendicular a cada coluna de A :

$$\begin{aligned} a_1^T(b - A\bar{x}) &= 0 \\ &\vdots \\ a_n^T(b - A\bar{x}) &= 0 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} [b - A\bar{x}] = 0.$$

Esta é novamente a equação (B.1). Uma terceira maneira é tomar as derivadas parciais de $E^2 = (Ax - b)^T(Ax - b)$, porém, o modo mais rápido, dado um conjunto de equações não solucionáveis $Ax = b$, é simplesmente multiplicar por A^T . Todos estes métodos equivalentes produzem a matriz quadrada de coeficientes $A^T A$.

Se as colunas de A são linearmente independentes, então $A^T A$ é invertível e pode-se obter $\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$, portanto, a projeção no espaço coluna é definida por

$$p = A\bar{x} = A(A^T A)^{-1} A^T b$$

sendo $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ definida como a matriz projeção. Tal matriz projeta qualquer vetor b sobre o espaço coluna de A .

Propriedades de P :

- (i) é igual ao seu quadrado: $P^2 = P$
- (ii) é igual a sua transposta: $P^T = P$

De certa maneira pode-se dizer que qualquer matriz simétrica com $P^2 = P$ representa uma projeção.

APÊNDICE C – APROXIMAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

C.1 Método de Aproximação

Seja o sistema não linear:

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u = F(x, u)$$

com

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & \cdots & g_{1m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(x) & \cdots & g_{nm}(x) \end{bmatrix}$$

O objetivo é construir um modelo linear em x e u que aproxime o comportamento do sistema não linear nas proximidades do ponto de operação x_0 ([41]; [42]), ou seja, encontrar as matrizes constantes A e B tal que:

$$f(x) + G(x)u \approx Ax + Bu \quad \text{para qualquer } u$$

e

$$f(x_0) + G(x_0)u = Ax_0 + Bu \quad \text{para qualquer } u$$

Do fato de u ser arbitrário, tem-se

$$G(x_0) = B$$

Portanto, a problemática se resume a achar uma matriz constante A , tal que na vizinhança de x_0

$$f(x) \approx Ax \tag{C.1}$$

e

$$f(x_0) = Ax_0 \tag{C.2}$$

Seja a_i^T a i -ésima linha da matriz A , reescreve-se (C.1) e (C.2) como

$$f_i(x) \approx a_i^T x, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{C.3}$$

e

$$f_i(x_0) = a_i^T x_0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{C.4})$$

onde o i -ésimo componente de f é $f_i : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$. Expandindo o lado esquerdo de (C.3) em x_0 e eliminando os termos de segunda e mais altas ordens, obtém-se

$$f_i(x_0) + \nabla^T f_i(x_0)(x - x_0) \approx a_i^T x$$

sendo $\nabla f_i(x_0) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ a função gradiente (um vetor coluna). Substituindo em (C.4)

$$\nabla^T f_i(x_0)(x - x_0) \approx a_i^T (x - x_0)$$

com x arbitrário, porém, próximo de x_0 . O objetivo agora é determinar os vetores constantes a_i , tais que estejam tão próximos quanto possível de $\nabla f_i(x_0)$ e satisfaçam a restrição $a_i^T x_0 = f_i(x_0)$. Define-se

$$E = \frac{1}{2} \|\nabla f_i(x_0) - a_i\|_2^2$$

Então, pode-se formular o seguinte problema de otimização com restrição

$$\begin{aligned} & \min E \\ & \text{sujeito a } a_i^T x_0 = f_i(x_0) \end{aligned}$$

Nota-se que o problema de otimização acima é convexo, e como tal significa que a condição necessária para um mínimo de E é também suficiente ([3]; [10]). As condições de primeira ordem para otimização do problema são:

$$\nabla_{a_i} E + \lambda \nabla_{a_i} (a_i^T x_0 - f_i(x_0)) = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$a_i^T x_0 = f_i(x_0) \quad (\text{C.6})$$

Solucionando (C.5) resulta em

$$a_i - \nabla f_i(x_0) - \lambda x_0 = 0 \quad (\text{C.7})$$

É importante destacar que para este caso considera-se $x_0 \neq 0$. Pré

multiplicando (C.7) por x_o^T e substituindo (C.6) no resultado, tem-se

$$\lambda = \frac{x_o^T \nabla f_i(x_0) - f_i(x_0)}{\|x_0\|_2^2}$$

Substituindo em (C.7), obtém-se

$$a_i = \nabla f_i(x_0) + \frac{f_i(x_0) - x_o^T \nabla f_i(x_0)}{\|x_0\|_2^2} x_0, \quad x_0 \neq 0$$

Desta forma pode-se obter a composição da matriz A , que em conjunto com a matriz B obtida anteriormente formam o modelo linear local para os pontos de operação do sistema.

APÊNDICE D – TRANSFORMAÇÃO DE MALHA

D.1 Transformação $\bar{\varphi} \in [\Omega_1, \Omega_2]$ em $\varphi \in [0, \Omega]$

Seja a seguinte condição de setor

$$[\bar{\varphi}'(z_k) - \Omega_1 z_k] \Delta^{-1} [\bar{\varphi}(z_k) - \Omega_2 z_k] \leq 0, \quad \forall z_k \in \mathfrak{R}^p, \quad \bar{\varphi}(0) = 0 \quad (\text{D.1})$$

Definindo

$$\varphi'(z_k) = \bar{\varphi}'(z_k) - \Omega_1 z_k \Rightarrow \bar{\varphi}(z_k) = \varphi(z_k) + \Omega_1 z_k \quad (\text{D.2})$$

e substituindo em (D.1), obtém-se a transformação de malha

$$\varphi'(z_k) \Delta^{-1} [\varphi(z_k) - (1 - \Omega_1) z_k], \quad \varphi(\cdot) \in [0, 1 - \Omega_1]$$

Portanto, para o sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} = \bar{A}(h_k)x_k + G(h_k)\bar{\varphi}(z_k) + B(h_k)\text{sat}(u_k), & \bar{\varphi}(\cdot) \in [\Omega_1, \Omega_2] \\ z_k = L(h_k)x_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

pode-se aplicar a transformação de malha substituindo (D.2) na equação do sistema. Desta forma, tem-se

$$x_{k+1} = (\bar{A}(h_k) + G(h_k)\Omega_1 L(h_k))x_k + G(h_k)\varphi(z_k) + B(h_k)\text{sat}(u_k)$$

Definindo $A(h_k) = (\bar{A}(h_k) + G(h_k)\Omega_1 L(h_k))$ chega-se a forma necessária à aplicação do algoritmo de controle, sendo esta

$$\begin{cases} x_{k+1} = A(h_k)x_k + G(h_k)\varphi(z_k) + B(h_k)\text{sat}(u_k), & \varphi(\cdot) \in [0, 1 - \Omega_1] \\ z_k = L(h_k)x_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \quad \text{com } \varphi(z_k) = \bar{\varphi}(z_k) - \Omega_1 z_k$$

REFERÊNCIAS

- [1] Andrea, C. Q., J. O. P. Pinto, E. Assunção, M. C. M. Teixeira and L. G. Junior (2008). Controle Ótimo H_∞ de Sistemas Não Lineares com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno. *Revista Controle & Automação*, Vol.19, No.3.
- [2] Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics.
- [3] Boyd, S. and L. Vanderberghe (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
- [4] Briat, C. (2008). *Commande et Observation Robustes des Systèmes LPV Retardés*. Tese de Doutorado, Grenoble INP, França.
- [5] Cannon, R. H. (1967). *Dynamics of Physical Systems*. McGraw-Hill, New York.
- [6] Cardim, R. (2009). *Projeto de Controladores Baseados em LMIs: Realimentação Derivativa e Sistemas Chaveados Utilizando Estrutura Variável*. Tese de Doutorado, FEIS/UNESP.
- [7] Castelan, E. B., J. Corso, U. F. Moreno and E. R. de Pieri (2007). Stability and Stabilization of a Class of Uncertain Nonlinear Discrete-Time Systems With Saturating Actuators. *IFAC Symposium on System, Structure and Control*, SSSC2007 Foz do Iguaçu.
- [8] Castelan, E. B., V. J. S. Leite, M. F. Miranda and V. M. Moraes (2010). Synthesis of Output Feedback Controllers for a Class of Nonlinear Parameter-Varying Discrete-Time Systems Subject to Actuator Limitations. *American Control Conference*, Baltimore, pp.4235-4240.
- [9] Choi, D. J. and P. Park (2003). H_∞ State-Feedback Controller Design for Discrete-Time Fuzzy Systems Using Fuzzy Weighting-Dependent Lyapunov Functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(2):271-278.
- [10] Chong, E. K. P. and S. H. Zak (2001). *An Introduction to Optimization*. John Wiley & Sons.

-
- [11] Corso, J., E. B. Castelan, U. F. Moreno and E. R. de Pieri (2009). Controle Dependente de Parametros para uma Classe de Sistemas Não Lineares Incertos com Atuadores Saturantes. *Revista Controle & Automação*, Vol.20, No.2.
- [12] Corso, J. (2009). *Sobre o Controle para uma Classe de Sistemas Não Lineares com Atuadores Saturantes*. Tese de Doutorado, UFSC.
- [13] Daafouz, J. and J. Bernussou (2001). Parameter Dependent Lyapunov Functions for Discrete Time Systems With Time Varying Parametric Uncertainties. *Systems & Control Letters*, pp.355-359(5).
- [14] Gao, H., X. Liu and J. Lam (2009). Stability Analysis and Stabilization for Discrete-Time Fuzzy Systems with Time-Varying Delay. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol.39, No.2.
- [15] Guerra, T. M. and Vermeiren, L. (2004). LMI-based Relaxed Conditions Nonquadratic Stabilization Conditions for Nonlinear Systems in the Takagi-Sugeno's Form. *Automatica*, Vol.40, No.5, pp.823-829.
- [16] Hu, T., Z. Lin and B. M. Chen (2002). An Analysis and Design Method for Linear Systems Subject to Actuator Saturation and Disturbance. *Automatica*, 38:351-359.
- [17] Hu, T. and Z. Lin (2003). Composite Quadratic Lyapunov Functions for Constrained Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3):440-450.
- [18] Gomes da Silva Jr., J. M., Reginatto, R. and Tarbouriech, S. (2004). Application of Hybrid and Polytopic Modeling to the Stability Analysis of Linear Systems with Saturating Inputs. *Revista Controle & Automação*, 14(4):401-412.
- [19] Gomes da Silva Jr., J. M., Reginatto, R. and Tarbouriech, S. (2004). Anti-windup Desing with Guaranteed Regions of Stability for Discrete-time Linear Systems with Saturating Control. *Revista Controle & Automação*, 14(1),3-9.

- [20] Gomes da Silva Jr., J. M. and Tarbouriech, S. (2005). Anti-windup Desing with Guaranteed Regions of Stability: an LMI-based Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1):106-111.
- [21] Jungers, M. and E. B. Castelan (2008). Gain-scheduled Control Design for a Class of Discrete-time Nonlinear Systems with Saturating Actuators. *Relatório Interno PPGEAS-DAS/UFSC, submetido à Systems & Control Letters*.
- [22] Kim, S. H., P. Park and C. H. Lee (2007). H_∞ State-Feedback Controller Design for Discrete-Time Fuzzy Systems with Input Saturating Using Fuzzy Weighting-Dependent Lyapunov Functions. *IEEE Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, Vol.4, pp.177-181.
- [23] Khalil, H. K. (2003). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Third Edition.
- [24] Khlar, D., J. Lauber, T. Floquet, G. Colin, T. M. Guerra and Y. Chamaillard (2007). Robust Takagi-Sugeno Fuzzy Control of a Spark Ignition Engine. *Control Engineering Practice*, 15(12):1446-1456.
- [25] Klug, M., E. B. Castelan and V. J. S. Leite (2010). A Dynamic Compensator for Parameter Varying Systems Subject to Actuator Limitations Applied to a T-S Fuzzy System. *Submetido ao IFAC World Congress*.
- [26] Kosko, B. (1997). *Fuzzy Engineering*. Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice-Hall, USA.
- [27] Leekwijck, W. V. and E. Kerre (1999). Defuzzification: Criteria and Classification *Fuzzy Sets and Systems*, 159-178.
- [28] Leite, V. J. S., V. F. Montagner, P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres (2004). Estabilidade Robusta de Sistemas Lineares Através de Desigualdades Matriciais Lineares. *Revista Controle & Automação*, Vol.15, No.1.
- [29] Löfberg, J. (2004.) A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. *In Proceedings of CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, pp.284-289 .

- [30] Montagner, V. F., R. C. Oliveira and P. L. D. Peres (2010). Relaxações Convexas de Convergência Garantida para o Projeto de Controladores para Sistemas Nebulosos de Takagi Sugeno. *Revista Controle & Automação*, Vol.21, No.1.
- [31] Scherer, C., P. Gahinet and M. Chilali (1997). Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7):896-911.
- [32] Skogestad, S. and I. Postlethwaite (2001). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. John Wiley & Sons, Second Edition.
- [33] Slotine, J. E. and W. Li (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, New Jersey.
- [34] Silva, G. V. M. (2003). *Controlo Não Linear*. Escola Superior de Tecnologia Setúbal.
- [35] Strang, G. (1988). *Linear Algebra and its Applications*. Brooks Cole, Third Edition.
- [36] Sturm, J.F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB Toolbox for Optimization over Symmetric Cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12:625-653.
- [37] Tanaka, K. and H. O. Wang (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons, New York.
- [38] Taniguchi, T., K. Tanaka, H. Ohtake and H. O. Wang (2001). Model Construction, Rule Reduction and Robust Compensation for Generalized Form of Takagi-Sugeno Fuzzy Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(4):525-538.
- [39] Tarbouriech, S. and M. Turner (2009). Anti-windup Design: an Overview of Some Recent Advances and Open Problems. *IET Control Theory & Applications*, Vol.3, No.1, pp.1-19.
- [40] Teixeira, M. C. M. and H. Zak (1999). Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(2):133-142.

-
- [41] Teixeira, M. C. M., E. Assunção and R. G. Avellar (2003). On Relaxed LMI-Based Designs for Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(5):613-623.
- [42] Teixeira, M. C. M. and E. Assunção (2007). *Extensões para sistemas não lineares*, em Enciclopédia de Automática: Controle & Automação, Volume 1, Cap. 9, pp.218-243.
- [43] Tognetti, E. S., R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres (2009). LMI Relaxations for Nonquadratic Stabilization of Discrete-Time Takagi-Sugeno Systems Based on Polynomial Fuzzy Lyapunov Functions. *17th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pp.7-12.
- [44] Toh, K.C., R. H., Tutuncu and M. J. Todd (2004). On the Implementation of SDPT3 (version 3.1) - a MATLAB Software Package for Semidefinite-Quadratic-Linear Programming. *IEEE International Symposium on CACSD*, 290-296.
- [45] Tseng, C. and B. Chen (2006). H_∞ Fuzzy Control Design for Nonlinear Subject to Actuator Saturation. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp.783-788.
- [46] Viana, D. C., V. J. S. Leite and M. F. Miranda (2010). Fuzzy Control of Delayed Systems: Less Conservative Convex Conditions. *American Control Conference*, Baltimore, pp.6480-6485.
- [47] Wang, H. O., K. Tanaka and M. F. Griffin (1996). An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1):14-23.
- [48] Yoneyama, J. (2009). Robust Stability and Stabilization for Uncertain Discrete-Time Fuzzy Systems with Time-Varying Delay. *Asian Control Conference*, ASCC, pp.1022-1027.
- [49] Yun, S. W., Y. J. Choi, G. Lee and G. Park (2008). Guaranteed Cost Fuzzy Controller Design for Nonlinear Systems with Input Saturating. *IEEE Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, Vol.5, pp.80-84.
- [50] Zheng, F., Q. Wang, T. H. Lee and X. Huang (2001). Robust PI Controller Design for Nonlinear Systems via Fuzzy Modeling

Approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol.5, pp.4346-4351.

- [51] Zhou, S., J. Lam and W. X. Zheng (2007). Control Design for Fuzzy Systems Based on Relaxed Nonquadratic Stability and H_∞ Performance Conditions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(2):188-199.