Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Existência e Comportamento Assintótico de Soluções para um Sistema Magneto-Elástico com Dissipação Localizada

Maicon José Benvenutti
Orientador: Prof. Dr. Jáuber C. de Oliveira
Florianópolis
Fevereiro de 2010

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Existência e Comportamento Assintótico de Soluções para um Sistema Magneto-Elástico com Dissipação Localizada

Dissertação apresentada ao Curso de Pós- Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Maicon José Benvenutti

Florianópolis
Fevereiro de 2010

Existência e Comportamento Assintótico de Soluções para um Sistema Magneto-Elástico com Dissipação Localizada

por

Maicon José Benvenutti[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Prof. Dr. Clóvis Caesar Gonzaga - Coordenador

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira (Orientador-UFSC)

Prof. Dr. Jardel Morais Pereira (UFSC)

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC)

Prof. Dr. Gustavo Perla Menzala (LNCC e IM-UFRJ)

Florianópolis, Fevereiro de 2010.

[1] Bolsista do CNPQ

E não sede conformados com este mundo, mas sede transformados pela renovação do vosso entendimento, para que experimenteis qual seja a boa, agradável, e perfeita vontade de Deus. (Rm 12-2)

Agradecimentos

Agradeço ao Senhor Jesus, pois 'O SENHOR é a minha força e o meu escudo; nele confiou o meu coração, e fui socorrido; assim o meu coração salta de prazer, e com o meu canto o louvarei'.

Agradeço aos meus pais Sérgio Benvenutti e Lúcia Inês Benvenutti por toda assistência e apoio que me deram durante a graduação e o mestrado. De forma justa e com o muito prazer, divido com eles o título que esta monografia me confere.

Agradeço à Juliana Dias de Oliveira da Rocha por compartilhar sua vida comigo enquanto estive em Florianópolis. Caminhamos, caímos e levantamos. E, nesta trilha, crescemos em sabedoria que vem do alto.

Agradeço ao meu professor, orientador e amigo Jáuber Cavalcante de Oliveira, que, em todo o tempo, demonstrou acreditar em minha capacidade. Enormes e boas são suas influências em minha formação acadêmica e pessoal.

Agradeço a todos os amigos que fiz enquanto estudei na UFSC. Eles são fundamentais em minha vida.

Por fim, agradeço ao CNPQ por estes dois anos de apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência e unicidade de soluções globais fortes para um sistema magneto-elástico em um domínio limitado, conexo e de classe C^2 do $\mathbb{R}^3$, com a presença de uma dissipação mecânica não linear e localizada em uma vizinhança de uma parte da fronteira. Além disso, se o domínio for simplesmente conexo, então obtemos taxas algébricas e explícitas de decaimento da energia associada às soluções. Quando a dissipação mecânica tem um comportamento 'quase linear', o decaimento é exponencial. A existência e unicidade de soluções são obtidas através do método de Faedo-Galerkin. Para as estimativas da energia, usamos um Lema de M. Nakao, algumas identidades da energia e multiplicadores localizados.

Abstract

We study the existence and uniqueness of global strong solutions of a magneto-elastic system in a bounded, connected domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ of class C^2, under the presence of nonlinear mechanical dissipation localized in a neighborhood of part of the boundary. Furthermore, if the domain is simply connected, then we obtain explicit algebraic rates of decay of the total energy associated with the solutions. When the mechanical dissipation has a behavior 'almost linear', the decay rate is exponential. The existence and uniqueness of solutions are obtained through the method of Faedo-Galerkin. For the energy estimates, we use a Lemma due to M. Nakao, some energy identities and certain localized multipliers.

Sumário

Notações

Usamos as seguintes notações neste trabalho:

$\mathbb{N}$ conjunto dos números naturais e positivos;

$\mathbb{R}$ conjunto dos números reais;

E e F espaços de Banach reais;

E^n para $n \in \mathbb{N}$ espaço de Banach real $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ vezes}}$, equipado com as operações usuais e com a norma dada por

$$\|u\|_{E^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_E^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{se} \quad u = (u_1, \cdots, u_n) \in E^n,$$

ou alguma outra norma equivalente;

$\mathcal{L}(E, F)$ espaço de Banach das aplicações lineares e contínuas de E em F, com as operações usuais e norma dada por

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F;$$

$\mathcal{N}(T)$ núcleo de um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$;

$\mathcal{I}m(T)$ imagem de um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$;

E' dual topológico de E, isto é, $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$;

$\langle \quad , \quad \rangle_E$ produto interno em um espaço de Hilbert E;

span $[v_1, v_2, \cdots, v_n]$ espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$;

Ω aberto do $\mathbb{R}^3$;

Γ fronteira de Ω;

$\eta(x)$ normal unitária exterior à $x \in \Gamma$, se tal vetor existir;

I intervalo do $\mathbb{R}$;

$B(x,\epsilon)$ bola aberta centrada em x e com raio ϵ;

$B[x,\epsilon]$ bola fechada centrada em x e com raio ϵ;

$C^\infty(\Omega)$ espaço vetorial das funções reais, definidas em Ω e infinitamente diferenciáveis;

$D(\Omega)$ espaço vetorial das funções reais, definidas em Ω, com suporte compacto e infinitamente diferenciáveis;

$D(\overline{\Omega})$ conjunto das funções $D(\mathbb{R}^3)$ restritas à $\overline{\Omega}$;

$D(\Gamma)$ conjunto das funções $D(\overline{\Omega})$ restritas à Γ;

$S(\mathbb{R}^3)$ espaço vetorial das funções $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e que são rapidamente decrescentes no infinito;

$C_b(I,E)$ espaço vetorial das funções contínuas e limitadas de I em E;

$C^m(I,E)$ para $m \in \mathbb{N}$ espaço vetorial das funções contínuas de I em E e com derivadas contínuas até ordem m;

$D'(\Omega)$ espaço vetorial das distribuições sobre $D(\Omega)$;

$S'(\mathbb{R}^3)$ espaço vetorial das distribuições temperadas;

$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3})$ gradiente de uma distribuição $u \in D'(\Omega)$;

$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ divergente de uma distribuição $u = (u_1, u_2, u_3) \in D'(\Omega)^3$;

$\operatorname{rot} u = (\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2})$ rotacional de uma distribuição $u = (u_1, u_2, u_3) \in D'(\Omega)^3$;

$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ Laplaciano de uma distribuição $u \in D'(\Omega)$;

$\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$ Laplaciano vetorial de uma distribuição $u = (u_1, u_2, u_3) \in D'(\Omega)^3$;

$M_{n\times m}(\mathbb{R})$ para $n, m \in \mathbb{N}$ espaço vetorial das matrizes de dimensão $n \times m$, com entradas reais e o produto interno dado por

$$A.B = \sum_{i=1,j=1}^{i=n,j=m} a_{ij}b_{ij} \quad \text{se} \quad A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R});$$

$x \times y = (x_2y_3 - y_2x_3, x_3y_1 - y_3x_1, x_1y_2 - y_1x_2)$ produto vetorial usual para $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$;

$x : A = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{3} x_j a_{1j}, \sum_{j=1}^{3} x_j a_{2j}, \sum_{j=1}^{3} x_j a_{3j} \right)$ para $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{3} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$;

$E \hookrightarrow F$ existe uma aplicação linear, contínua e injetora de E em F;

$\omega \subset\subset \Omega$ $\overline{\omega} \subset \Omega$ e $\overline{\omega}$ é compacto;

$L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$ espaço de Banach das classes das funções u reais, mensuráveis, definidas em Ω e tais que $\|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, para

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{se} \quad 1 \leq p < \infty; \\ \operatorname{supess}_{x\in\Omega} |u(x)| & \text{se} \quad p = \infty; \end{cases}$$

$L^p_{loc}(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$ espaço vetorial das classes das funções u reais, mensuráveis, definidas em Ω e tais que $u \in L^p(\omega)$, $\forall\, w \subset\subset \Omega$ e w aberto;

$L^1_{loc}(\overline{\Omega})$ espaço vetorial das classes das funções u reais, mensuráveis, definidas em Ω e tais que $u \in L^1(\omega)$, $\forall\, w \subset \Omega$ e w aberto e limitado;

$W^{m,p}(\Omega)$ para $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$ espaço de Banach das classes das funções u reais, mensuráveis, definidas em Ω e tais que $D^{\alpha}u \in L^{p}(\Omega)$, no sentido das distribuições, $\forall\, \alpha$ multi-índice com $|\alpha| \leq m$, equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^{p}(\Omega)},$$

ou alguma outra norma equivalente;

$W_0^{m,p}(\Omega)$ fecho de $D(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$;

$H^{m}(\Omega)$ notação alternativa para $W^{m,2}(\Omega)$;

$H_0^{m}(\Omega)$ notação alternativa para $W_0^{m,2}(\Omega)$;

$H_{loc}^{m}(\Omega)$ espaço vetorial das classes das funções u reais, mensuráveis, definidas em Ω e tais que $u \in H^{m}(\omega)$, $\forall w \subset\subset \Omega$ e w aberto;

$H^{-m}(\Omega)$ dual topológico de $H_0^{m}(\Omega)$;

$\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^3) \longmapsto S'(\mathbb{R}^3)$ transformada de Fourier;

$H^{s}(\mathbb{R}^3)$ para $s \in \mathbb{R}$ espaço de Banach das distribuições temperadas $u \in S'(\mathbb{R}^3)$ e tais que $J_s\, \mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, para $J_s(x) = (1 + \|x\|)^{\frac{s}{2}}$, com a norma dada por

$$\|u\|_{H^{s}(\mathbb{R}^3)} = \|J_s \mathcal{F}(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)};$$

$L^2(\Gamma)$ espaço de Banach das classes das funções u reais, mensuráveis, definidas em Γ e tais que $\|u\|_{L^2(\Gamma)} < \infty$, para

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |u(x)|^2 \, d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}};$$

C e C_n para $n \in \mathbb{N}$ constantes reais, positivas e que podem assumir valores diferentes em lugares diferentes.

Introdução

Neste trabalho consideramos um sistema de evolução de equações diferenciais parciais com valores iniciais e de fronteira, cujo modelo está associado ao movimento de um sólido elástico, isotrópico, homogêneo, limitado do $\mathbb{R}^3$ e sob a ação de um campo magnético exterior, constante e conhecido $\widetilde{H}$. A seguinte semi-linearização do modelo é considerada (veja [19] e [38]):

$$\begin{aligned}
u_{tt} - L(u) - \alpha\,(\operatorname{rot} h) \times \widetilde{H} + \rho(x, u_t) &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Omega \quad (1)\\
h_t + \frac{1}{\beta}\operatorname{rot}\operatorname{rot} h - \operatorname{rot}\left(u_t \times \widetilde{H}\right) &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Omega \quad (2)\\
\operatorname{div} h &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Omega \quad (3)
\end{aligned}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad h(0,x) = h_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega \qquad (4)$$

$$u = 0, \quad h\,.\,\eta = 0, \quad (\operatorname{rot} h) \times \eta = 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Gamma \qquad (5)$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, com forteira Γ de classe C^2 e $L(u) = \mu\,\Delta u + (\lambda + \mu)\,\nabla \operatorname{div} u$. Temos também $\beta > 0$ constante proporcional à condutividade elétrica, μ e λ constantes de Lamé, $\alpha > 0$ constante proporcional à permeabilidade magnética. Além disso, $h(t,x) =$

$(h_1(t,x), h_2(t,x), h_3(t,x))$ é o campo magnético e $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$ é o vetor deslocamento a serem determinados. A função ρ representa uma dissipação localizada em uma parte de Γ, que satisfaz, entre outras, a desigualdade $\rho(x,s)\,.\,s \geq 0$.

O modelo acima tem a seguinte energia naturalmente decrescente:

$$\Xi(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u'(t)|^2 + \mu\,|\nabla u(t)|^2 + (\lambda+\mu)\,(\mathrm{div}\,u)^2 + \alpha\,|h(t)|^2\,dx. \tag{6}$$

De fato, fazendo o produto interno da equação dada em (1) por u_t e da equação dada em (2) por $\alpha\,h$, somando os resultados e integrando em $\Omega\times(0,t)$, formalmente obtemos:

$$\Xi(t) = \int_{\Omega\times(0,t)} -\frac{\alpha}{\beta}\,|\mathrm{rot}\,h|^2 - \rho(x,u_s)\,.\,u_s\,dx\,ds + \Xi(0). \tag{7}$$

O sistema magneto-elástico pode ser considerado como um acoplamento entre o sistema de Lamé:

$$\begin{aligned} v_{tt} - \mu\,\Delta v - (\lambda+\mu)\,\nabla\mathrm{div}\,v &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Omega & (8)\\ v &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Gamma & (9) \end{aligned}$$

que é conservativo, e o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} g_t - \frac{1}{\beta}\,\Delta g &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Omega & (10)\\ \mathrm{div}\,g &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Omega & (11)\\ g\,.\,\eta &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Gamma & (12)\\ (\mathrm{rot}\,g)\times\eta &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Gamma & (13) \end{aligned}$$

que é naturalmente dissipativo. Do ponto de vista de u, essa dissipação natural é causada pelos termos de acoplamento $\mathrm{rot}\left(u_t\times\widetilde{H}\right)$ e

$(\operatorname{rot} h) \times \widetilde{H}$. Notamos que a taxa de dissipação da energia não é influenciada pela amplitude das vibrações do corpo elástico, mas somente pelo campo magnético. Portanto, dizemos que o acoplamento é apenas parcialmente dissipativo.

O sistema magneto-elástico é similar ao sistema termo-elástico (veja [21]). Neste último caso, o sistema de Lamé está acoplado com uma equação escalar do calor e temos que a dissipação é dada pelo gradiente da temperatura. Desde que, em geral, não existe decaimento uniforme da energia associada ao acoplamento termo-elástico (veja [21]), é natural indagar se a dissipação dada pelo campo magnético é suficientemente forte para produzir boas taxas de decaimento da energia associada ao acoplamento magneto-elástico. Neste trabalho, seguindo [3] e [7], inserimos uma dissipação extra dada por ρ para obtermos tais taxas.

No que segue, sob a hipótese de Ω ser um conjunto conexo, mostramos a existência e unicidade de soluções globais fortes para o sistema magneto-elástico e, para Ω simplesmente conexo, obtemos taxas de decaimento da energia associada às soluções. No caso em que a dissipação ρ é não linear, temos um decaimento polinomial do tipo $(1+t)^{-\gamma}$, com γ dado explicitamente em função do 'crescimento' de ρ, e se ρ é 'quase linear', temos um decaimento exponencial. A prova de existência é feita via o método de Faedo-Galerkin e é original. Incluimos também a prova da existência dos espaços de aproximação de Galerkin para os espaços de soluções. Para as taxas de decaimento, seguimos as provas originais dadas em [7].

Vamos destacar alguns resultados importantes sobre o sistema magneto-elástico. Em 1998, Menzala e Zuazua [29] provaram a existência e unicidade de soluções globais fracas para o caso $\rho \equiv 0$ e, usando o princípio da invariância de La Salle's, provaram que a energia decai para zero, porém sem dar qualquer taxa de decaimento. Além disso, neste mesmo caso, Rivera e Santos [41], pelo método da energia, mostraram que a taxa de convergência é pelo menos polinomial para alguns tipos de domínios precisos. Como dito, Charão, Oliveira e Menzala [7] obteram a taxa de decaimento do tipo $(1+t)^{-\gamma}$ para o caso em que ρ é não linear e decaimento exponencial quando ρ é 'quase linear'. O problema de Cauchy para um sistema similar no $\mathbb{R}^3$ foi considerado por Andreou e Dassios [2], que provaram que soluções suaves que anulam-se quando $|x| \to \infty$, decaem a zero quando $t \to \infty$ com taxa de decaimento polinomial coincidente com a taxa do sistema termo-elástico.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 citamos resultados auxiliares importantes, definimos os espaços funcionais e demonstramos algumas propriedades relevantes destes espaços. No Capítulo 2 provamos a existência e unicidade de soluções globais fortes para o sistema de evolução apresentado. O Capítulo 3 é dedicado ao estudo das taxas de decaimento para as soluções obtidas no Capítulo anterior.

Capítulo 1

Definições e Resultados Preliminares

1.1 Resultados conhecidos

Nessa seção enunciamos alguns conceitos e resultados conhecidos na literatura e que são usados nos capítulos posteriores. Entre eles, destacam-se os Teoremas 1.1.50 e 1.1.51 de regularidade elíptica para o sistema magnético e elástico estáticos. Definimos também os espaços funcionais adequados para o tratamento matemático do acoplamento magneto-elástico. Citamos referências onde podem ser encontradas as demonstrações dos fatos enunciados. A seção está dividida na seguinte maneira: na subseção 1.1.1 enunciamos lemas e proposições de cálculo, com destaque para o conhecido Lema de Nakao, usado em muitos trabalhos para a obtenção da taxa de decaimento da energia associada a algum sistema de equações diferenciais parciais. Na subseção 1.1.2 expomos alguns teoremas clássicos de análise funcional, como o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, importante ferramenta no método de Faedo-Galerkin, que permite extrair subsequências convergentes à solução no sentido fraco-* de uma determinada sequência limitada e em um determinado espaço dual. Na subseção 1.1.3 enunciamos alguns resultados tradicionais dos espaços de Sobolev, empregados no tratamento de equações diferenciais parciais. Na subseção 1.1.4 usamos a noção de traço para tratarmos de forma conveniente as condições de fronteira do sistema em questão. Na subseção 1.1.5 definimos os espaços de soluções e, como dito, enunciamos alguns teoremas de regularidade elíptica. Na subseção 1.1.6 expomos a teoria básica dos espaços $L^P(0, T, E)$, que são usados nos problemas de evolução.

1.1.1 Cálculo e topologia

Proposição 1.1.1 (Valor Médio, [22], pg 138) *Sejam* $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ *um função continuamente diferenciável e* a *e* v *vetores fixos do* $\mathbb{R}^n$. *Então, existe* $0 \leq \theta \leq 1$ *tal que*

$$f(a+v) - f(a) = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{a+\theta v}(v).$$

Proposição 1.1.2 (Desigualdade de Young, [14], pg 622) *Sejam* $1 < p, q < \infty$, *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *e* $\epsilon > 0$. *Então, existe uma constante real e positiva* C *tal que*

$$a\,b \leq \epsilon\, a^p + C\, b^q, \ \forall\, a,\, b \geq 0.$$

Proposição 1.1.3 (Picard-Lindelöf, [11], pgs 384-385) *Sejam* $F : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ *uma função continuamente diferenciável e* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *um vetor fixo. Então, existem um intervalo aberto e maximal* $I \subset \mathbb{R}$, *com*

$0 \in I$, *e uma função* $\phi \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ *tais que*

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= F(\phi(t)), \ \forall\, t \in I \\ \phi(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Além disso, se $\sup_{t \in I; t>0} |\phi(t)| < \infty$, *então* $(0, \infty) \subset I$.

Lema 1.1.4 ([16], pgs 25 e 31) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, *aberto, limitado, conexo e com fronteira Lipschitz-contínua. Então, existe uma sequência* $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *crescente de subconjuntos de* $\mathbb{R}^3$ *de abertos, conexos e com fronteira Lipschitz-contínua tal que*

$$\overline{\Omega_n} \subset \Omega, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad e \qquad \Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n.$$

Além disso, se Ω *for simplesmente conexo, então cada conjunto* Ω_n *é simplesmente conexo.*

Proposição 1.1.5 ([22], pg 313) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *aberto, limitado e com fronteira de classe* C^2. *Dado* $p \in \Gamma$, *existem um conjunto aberto e limitado* $V_p \subset \mathbb{R}^3$, *com* $p \in V_p$, *e uma função* $f \in C^2(V_p)$ *tais que satisfazem as seguintes condições:*

1. $\Gamma \cap V_p = f^{-1}(0)$;

2. $\nabla f(x) \neq 0, \ \forall\, x \in V_p$;

3. $\eta(x) = \dfrac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}, \ \forall\, x \in \Gamma \cap V_p$.

Proposição 1.1.6 (Partição C^∞ da Unidade, [18], pg 5) *Seja* $(\Omega_i)_{i=1}^\infty$ *uma coleção de abertos do* $\mathbb{R}^3$. *Então, existe uma coleção de funções* $(\psi_i)_{i=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^3)$ *tal que satisfaz a seguintes condições:*

1. $0 \leq \psi_i(x) \leq 1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^3, \ \forall\, 1 \leq i \leq \infty$;

2. *supp* $\psi_i \subset\subset \Omega_j,\ \forall\, 1 \leq i \leq \infty$ *e com* $j = j(i)$;

3. $\{supp\, \psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *é localmente finito;*

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) = 1,\ \forall\, x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i.$

Usando a Proposição anterior, temos de imediato o seguinte Corolário:

Corolário 1.1.7 *Sejam* ω *e* Ω *abertos do* $\mathbb{R}^3$ *tais que* $w \subset\subset \Omega$. *Então, existe* $\psi \in D(\mathbb{R}^3)$ *tal que satisfaz as seguintes condições:*

1. $0 \leq \psi(x) \leq 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^3$;

2. $\psi \equiv 1$ *sobre* ω;

3. $\psi \equiv 0$ *sobre* $\mathbb{R}^3/\Omega$.

Lema 1.1.8 (Nakao, [33], pg 266 e [31], pg 259) *Considere* $\Phi : [0,\infty) \longmapsto [0,\infty)$. *Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *Se existem constantes reais e positivas* T *e* C *tais que*

$$\sup_{t\leq s\leq t+T} \Phi(s) \leq C\ (\Phi(t) - \Phi(t+T))\,,\ \forall\, t \geq 0,$$

então existem constantes reais e positivas C_1 *e* γ *tais que*

$$\Phi(t) \leq C_1\, e^{-\gamma t},\ \forall\, t \geq 0;$$

2. *Se existem constantes reais e positivas* T, C *e* $0 < k < 1$ *tais que*

$$\sup_{t\leq s\leq t+T} \Phi(s)^{\frac{1}{k}} \leq C\ (\Phi(t) - \Phi(t+T))\,,\ \forall\, t \geq 0,$$

então existe uma constante real e positiva C_1 tal que

$$\Phi(t) \leq C_1 \, \Phi(0) \, (1+t)^{\frac{k}{k-1}}\,, \; \forall \, t \geq 0.$$

Proposição 1.1.9 ([12], pg 529) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^1 e $u \in C^1(\overline{\Omega})^3$. Então, vale a seguinte identidade de Gauss:*

$$\int_\Omega div \, u \, dx = \int_\Gamma \, u|_\Gamma \, . \, \eta \, d\Gamma. \tag{1.1}$$

Proposição 1.1.10 ([12], pg 550) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto e simplesmente conexo. Se*

$$u \in C^1(\Omega)^3,$$

com

$$rot \, u \, (x) = 0, \; \forall \, x \in \Omega,$$

então existe $p \in C^2(\Omega)$ tal que p é uma função potencial para u, isto é,

$$\nabla p \, (x) = u \, (x), \; \forall \, x \in \Omega.$$

1.1.2 Análise funcional

Lema 1.1.11 ([20], pg 149) *Sejam E um espaço de Hilbert e F um subespaço vetorial de E. Então, F é denso em E se, e somente se, $F^\perp = \{0\}$.*

Proposição 1.1.12 (Gram-Schmidt, [20], pgs 157-158) *Sejam E um espaço de Hilbert e $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência linearmente independente de E. Então, existe uma sequência $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de E tal que satisfaz as seguintes condições:*

1. $\langle e_i, e_j \rangle_E = \delta_{i,j}, \; \forall \, i, \, j \in \mathbb{N}$;

2. $span\,[v_1, \cdots, v_i] = span\,[e_1, \cdots, e_i], \ \forall\, i \in \mathbb{N}$.

Lema 1.1.13 ([5], pgs 28 e 29) *Sejam E e F espaços de Banach, com E reflexivo, e $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Então, vale a seguinte igualdade:*

$$\overline{\mathcal{I}m(T')} = (\mathcal{N}(T))^0,$$

para $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ o operador adjunto de T e

$$(\mathcal{N}(T))^0 = \{f \in E';\ f(y) = 0,\ \forall\, y \in \mathcal{N}(T)\}.$$

Teorema 1.1.14 (Hahn-Banach, [20], pg 221) *Sejam E um espaço de Banach, F um subespaço vetorial de E e $g \in F'$. Então, existe $f \in E'$ tal que*

$$f|_F \equiv g.$$

Corolário 1.1.15 ([5], pg 7) *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então, F é denso em E se, e somente se, para todo elemento de E' que se anula em F também se anula em E.*

Definição 1.1.16 *Sejam E um espaço de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$. Dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um elemento $x \in E$ no sentido fraco, se $f(x_n)$ converge à $f(x)$ em $\mathbb{R}$, para todo $f \in E'$. Analogamente, dizemos que a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um elemento $u \in E'$ no sentido fraco-*, se $y_n(z)$ converge à $y(z)$ em $\mathbb{R}$, para todo $z \in E$.*

Proposição 1.1.17 ([39], pg 263) *Sejam E e F espaços de Banach e $f \in \mathcal{L}(E,F)$ compacto. Se u_m converge fraco para u em E, então $f(u_m)$ converge para $f(u)$ na norma de F.*

Teorema 1.1.18 (Banach-Alaoglu-Bourbaki, [5], pg 42) *Seja E*

um espaço de Banach. Então, toda bola fechada e limitada em E' com a topologia forte é sequencialmente compacta com a topologia fraca-.*

Teorema 1.1.19 (Lax-Milgram, [14], pg 297) *Sejam E um espaço de Hilbert,*

$$\begin{array}{rccc} B: & E \times E & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & B[u,v] \end{array}$$

uma forma bilinear, contínua e coerciva e $f \in E'$. Então, existe um único $u \in E$ tal que

$$B[u,v] = f(v), \ \forall\, v \in E. \tag{1.2}$$

1.1.3 Espaços de Sobolev

Lema 1.1.20 (Convergência Dominada de Lebesgue, [4], pg 44) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais, mensuráveis, definidas em Ω e tal que converge ponto a ponto em Ω q.s.. Se existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ em Ω q.s., então*

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx.$$

Lema 1.1.21 (Desigualdade de Hölder, [40], pg 18) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto. Considere um conjunto de números reais e positivos $(p_i)_{i=1}^n$ tal que $1 < p_i < \infty$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$. Se escolhermos $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$, então $\displaystyle\prod_{i=1}^n u_i \in L^1(\Omega)$ e*

$$\| \prod_{i=1}^n u_i \|_{L^1(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^n \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Lema 1.1.22 (Desigualdade de Interpolação, [5], pg 57) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto e $0 \leq p \leq 2$. Então, vale a seguinte desigualdade:*

$$\|u\|_{L^{p+2}(\Omega)} \leq \|u\|^{\Theta}_{L^6(\Omega)} \|u\|^{1-\Theta}_{L^2(\Omega)}, \ \forall\, u \in L^2(\Omega) \cap L^6(\Omega), \tag{1.3}$$

para $\Theta = \dfrac{3p}{2(p+2)}$.

Lema 1.1.23 (Lions, [23], pg 12) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto e limitado e $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções pertencentes a $L^2(\Omega)$. Se*

- $u_m \overset{m\to\infty}{\to} u$ *q.s. em* Ω;
- $\|u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq C$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$, *com C constante real, positiva e independente de m,*

então $u_m \overset{m\to\infty}{\to} u$ fraco em $L^2(\Omega)$.

Proposição 1.1.24 ([1], pg 60) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto e conexo. Se $u \in L^2(\Omega)$ e*

$$\nabla u = 0 \quad em \quad D'(\Omega)^3,$$

então u é constante em $D'(\Omega)$.

Lema 1.1.25 ([35], pgs 47-51) *Sejam $\epsilon > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto e limitado. Então, existe uma função $J_\epsilon \in D(\mathbb{R}^3)$ tal que*

- $J_\epsilon(x) = 0$ *se* $|x| > \epsilon$;
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} J_\epsilon(x)\, dx = 1.$

Além disso, dado $u \in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$, a função definida por

$$J_\epsilon * u(x) = \int_\Omega J_\epsilon\,(x-y)\, u(y)\, dy, \tag{1.4}$$

chamada suavizador de u, satisfaz as seguintes propriedades:

1. $J_\epsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, *com*

$$\frac{\partial^\alpha J_\epsilon * u}{\partial x^\alpha}(x) = \int_\Omega \frac{\partial^\alpha J_\epsilon(x-y)}{\partial x^\alpha}\, u(y)\, dy,\ \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \alpha \text{ multi-índice};$$

2. *Se* $supp\, u \subset\subset \Omega$ *e* $dist(supp\, u, \Gamma) > \epsilon$, *então* $J_\epsilon * u \in D(\Omega)$;

3. *Se* $u \in L^2(\Omega)$, *então* $J_\epsilon * u \in L^2(\Omega)$ *e* $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \|u - J_\epsilon * u\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Proposição 1.1.26 ([1], pg 47) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *aberto. Então,* $H^m(\Omega)$ *é separável,* $\forall\, m \geq 0$.

Proposição 1.1.27 ([18], pg 61) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *aberto e limitado. Se*

$$u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

e

$$u(x) = 0,\ \forall\, x \in \Gamma,$$

então $u \in H_0^1(\Omega)$.

Proposição 1.1.28 ([30], pg 25) *Sejam* Ω *e* ω *abertos do* $\mathbb{R}^3$ *tais que* $\omega \subset \Omega$ *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então, a aplicação*

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\cdot}: & W_0^{1,p}(\omega) & \longmapsto & W_0^{1,p}(\Omega) \\ & u & \longmapsto & \widetilde{u} \end{array}$$

dada por

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & se \quad x \in \omega; \\ 0 & se \quad x \in \Omega/\omega, \end{cases}$$

está bem definida e é contínua. Além disso, vale a seguinte identidade:

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_i}},\ \forall\, u \in W_0^{1,p}(\omega),\ \forall\, 1 \leq i \leq 3. \tag{1.5}$$

Proposição 1.1.29 (Desigualdade de Poincaré, [30], pg 36) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto e limitado. Então, existe uma constante real e positiva C tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^3}, \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Proposição 1.1.30 ([18], pgs 69, 78 e 84) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira classe C^1. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *$D(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$;*

2. *A inclusão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ é contínua;*

3. *A inclução $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta.*

Definição 1.1.31 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Consideramos $\{U_i, \psi_i\}_{i=1}^n$ um sistema de cartas locais (veja [30], pg 68) para Γ tal que*

- *$\psi_i : U_i \longmapsto]-1,1[^3$;*

- *$\psi_i(\Gamma \cap U_i) =]-1,1[^2 \times \{0\}$.*

Consideramos também uma Partição C^∞ da Unidade $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ subordinada a $\{U_i\}_{i=1}^n$. Definimos $H^s(\Gamma)$, para s um número real, como o espaço vetorial das classes das funções u reais, mensuráveis, definidas em Γ e tais que $w_i \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$, para

$$w_i(y) = \begin{cases} (\phi_i\, u)(\psi_i^{-1}(y,0)) & se \quad |y| < 1; \\ 0 & se \quad |y| \geq 1, \end{cases}$$

com a norma dada por

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{i=1}^n \|w_i\|^2_{H^s(\mathbb{R}^2)} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.6}$$

ou alguma outra norma equivalente.

Proposição 1.1.32 ([25], pgs 34-36 e [16], pg 8) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira classe C^2. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *$H^s(\Gamma)$ é um espaço de Banach;*

2. *$D(\Gamma)$ é denso em $H^s(\Gamma)$, $\forall\, s \geq 0$;*

3. *$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)' = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, com a dualidade dada por $\displaystyle\int_\Gamma u\, v\, d\Gamma$, $\forall\, u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $\forall\, v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.* [1]

Proposição 1.1.33 ([34] pgs 19 e 20 e [16] pg 13) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo e com fronteira Lipschitz-contínua. Então, o conjunto quociente $\dfrac{H^1(\Omega)}{\mathbb{R}}$ (identificamos aqui $\mathbb{R}$ com o espaço das funções constantes) é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por*

$$\langle u, v \rangle_{\frac{H^1(\Omega)}{\mathbb{R}}} = \int_\Omega \nabla u \,.\, \nabla v \, dx. \tag{1.7}$$

Proposição 1.1.34 ([16], pg 20) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira Lipschitz-contínua. Então, a imagem do operador*

$$\nabla \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega)^3) \tag{1.8}$$

é um subespaço fechado de $H^{-1}(\Omega)^3$.

Proposição 1.1.35 ([16], pg 21) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo e com fronteira Lipschitz-contínua. Se*

$$p \in L^2_{loc}(\Omega) \quad e \quad \nabla p \in H^{-1}(\Omega)^3,$$

[1] Aqui $\displaystyle\int_\Gamma u\, v\, d\Gamma$ denota uma aplicação dualidade e que toma o sentido clássico de integração de superfícies se $u \in L^2(\Gamma)$.

então

$$p \in L^2(\Omega).$$

1.1.4 Espaços $H(\mathbf{div}, \Omega)$, $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ e teoria do traço

Teorema 1.1.36 (Traço para $H^1(\Omega)$, [30], pg 100) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} |_\Gamma : D(\overline{\Omega}) & \longmapsto & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ v & \longmapsto & v|_\Gamma \end{array}$$

prolonga-se, por continuidade e densidade de $D(\overline{\Omega})$ em $H^1(\Omega)$, a uma única aplicação linear, contínua e sobrejetora, ainda denotada por $|_\Gamma$, de $H^1(\Omega)$ em $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Além disso, o núcleo de $|_\Gamma$ é igual ao conjunto $H_0^1(\Omega)$ e vale a seguinte fórmula de Green:

- *Se $u, v \in H^1(\Omega)$ e $1 \leq i \leq 3$, então*

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx + \int_\Gamma u|_\Gamma \; v|_\Gamma \; \eta_i \, d\Gamma. \tag{1.9}$$

A partir do item 1 da Proposição 1.1.30 e do Teorema 1.1.36, provamos o seguinte Corolário:

Corolário 1.1.37 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Se $u \in H^1(\Omega)$ e $w \in W^{1,\infty}(\Omega)$, então $u\,w \in H^1(\Omega)$ e vale a seguinte regra do produto:*

$$\frac{\partial(u\,w)}{\partial x_i} = u \frac{\partial w}{\partial x_i} + w \frac{\partial u}{\partial x_i}, \; \forall 1 \leq i \leq 3.$$

Além disso, se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $u\,w \in H_0^1(\Omega)$.

Usando convergência em $D'(\Omega)$, mostramos os seguintes Lemas:

Lema 1.1.38 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto. Então, o conjunto*

$$H(div, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^3; div\, u \in L^2(\Omega)\} \tag{1.10}$$

é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno:

$$\langle u, v \rangle_{H(div,\Omega)} := \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)^3} + \langle div\, u, div\, v \rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{1.11}$$

Lema 1.1.39 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto. Então, o conjunto*

$$H(rot, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^3; rot\, u \in L^2(\Omega)^3\} \tag{1.12}$$

é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno:

$$\langle u, v \rangle_{H(rot,\Omega)} := \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)^3} + \langle rot\, u, rot\, v \rangle_{L^2(\Omega)^3}. \tag{1.13}$$

Definição 1.1.40 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto. Definimos os seguintes conjuntos:*

$$H_0(rot, \Omega) := \overline{D(\Omega)}^{H(rot,\Omega)}; \tag{1.14}$$

$$H_0(div, \Omega) := \overline{D(\Omega)}^{H(div,\Omega)}. \tag{1.15}$$

Teorema 1.1.41 (Traço para $H(\mathbf{div}, \Omega)$, [10], pg 204) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} |_\Gamma .\eta : D(\overline{\Omega})^3 & \longmapsto & H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ v & \longmapsto & v|_\Gamma .\eta \end{array}$$

prolonga-se, por continuidade e densidade de $D(\overline{\Omega})^3$ em $H(div, \Omega)$, a uma única aplicação linear e contínua, ainda denotada por $|_\Gamma .\eta$, de $H(div, \Omega)$ em $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Além disso, o núcleo de $|_\Gamma .\eta$ é igual ao conjunto $H_0(div, \Omega)$ e vale a seguinte fórmula de Green:

- *Se* $u \in H^1(\Omega)$ *e* $v \in H(div, \Omega)$, *então*

$$\int_\Omega v \,.\, \nabla u \, dx = -\int_\Omega u \, div\, v \, dx + \int_\Gamma u|_\Gamma \; (v|_\Gamma \,.\eta) \; d\Gamma. \tag{1.16}$$

Teorema 1.1.42 (Traço para $H(\mathbf{rot}, \Omega)$, [10], pg 204) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *aberto, limitado e com fronteira de classe* C^2. *Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} |_\Gamma \times \eta : D(\overline{\Omega})^3 & \longmapsto & H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \\ v & \longmapsto & v|_\Gamma \times \eta \end{array}$$

prolonga-se, por continuidade e densidade de $D(\overline{\Omega})^3$ *em* $H(rot, \Omega)$, *a uma única aplicação linear e contínua, ainda denotada por* $|_\Gamma \times \eta$, *de* $H(rot, \Omega)$ *em* $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$. *Além disso, o núcleo de* $|_\Gamma \times \eta$ *é igual ao conjunto* $H_0(rot, \Omega)$ *e vale a seguinte fórmula de Green:*

- *Se* $u \in H^1(\Omega)^3$ *e* $v \in H(rot, \Omega)$, *então*

$$\int_\Omega v \,.\, rot\, u \, dx = \int_\Omega u \,.\, rot\, v \, dx + \int_\Gamma u|_\Gamma \,.\, (v|_\Gamma \times \eta) \; d\Gamma. \tag{1.17}$$

Teorema 1.1.43 ([13], pg 358) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *aberto, limitado e com fronteira de classe* C^2. *Então, o conjunto*

$$X = \{u \in L^2(\Omega)^3;\; div\, u \in L^2(\Omega),\; rot\, u \in L^2(\Omega)^3 \text{ e } u|_\Gamma \,.\eta = 0\} \tag{1.18}$$

é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno:

$$\langle u, v \rangle_X = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)^3} + \langle div\, u, div\, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle rot\, u, rot\, v \rangle_{L^2(\Omega)^3}. \tag{1.19}$$

Além disso, X *é algebricamente e topologicamente igual a* $H^1(\Omega)^3$.

1.1.5 Espaços $H(\Omega)$, $V(\Omega)$, $U(\Omega)$, $Z(\Omega)$ e regularidade elíptica

Usando a continuidade das aplicações traço dadas nos Teoremas 1.1.41 e 1.1.42, obtemos as seguintes Proposições:

Proposição 1.1.44 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Então, o conjunto*

$$H(\Omega) := \{v \in H_0(div, \Omega);\ div\, v = 0\} \tag{1.20}$$

é um subespaço linear e fechado de $H(div, \Omega)$.

Notamos que a norma em $H(\Omega)$ é $\|u\|_{L^2(\Omega)^3}$. Logo $H(\Omega)$ é um subespaço linear e fechado de $L^2(\Omega)^3$.

Proposição 1.1.45 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Então, o conjunto*

$$V(\Omega) := H(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)^3 \tag{1.21}$$

é um subespaço linear e fechado de $H_0^1(\Omega)^3$.

Notamos que

$$V(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega)^3;\ \mathrm{div}\, u = 0\}. \tag{1.22}$$

Quando $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ for apenas um conjunto aberto, escolhemos a definição de $V(\Omega)$ como em (1.22).

Proposição 1.1.46 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Então, o conjunto*

$$U(\Omega) := H(\Omega) \cap H^1(\Omega)^3 \tag{1.23}$$

é um subespaço linear e fechado de $H^1(\Omega)^3$.

Se Ω satisfaz as hipóteses dadas na Proposição 1.1.46, então, usando o Teorema 1.1.43, temos a seguinte igualdade:

$$U(\Omega) = \{u \in H(\Omega);\ \operatorname{rot} u \in L^2(\Omega)^3\}. \tag{1.24}$$

Além disso, temos a seguinte norma equivalente e usual em $U(\Omega)$:

$$\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|\operatorname{rot} u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.25}$$

Proposição 1.1.47 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Então, o conjunto*

$$Z(\Omega) := \{v \in H(\Omega) \cap H^2(\Omega)^3,\, (rot\, v)|_{\Gamma} \times \eta = 0\} \tag{1.26}$$

é um subespaço linear e fechado de $H^2(\Omega)^3$.

Se Ω satisfaz as hipóteses dadas na Proposição 1.1.47, pela separabilidade dos espaços $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ e $H^2(\Omega)$, temos que $H(\Omega)$, $U(\Omega)$, $V(\Omega)$ e $Z(\Omega)$ são espaços de Hilbert separáveis.

Lema 1.1.48 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, aberto e limitado e μ e λ contantes reais com $\lambda + 2\mu > 0$ e $\mu > 0$. Então,*

$$\mu \int_\Omega \nabla v \,.\, \nabla u \, dx + (\lambda + \mu) \int_\Omega (div\, v)\,(div\, u)\, dx \tag{1.27}$$

é um produto interno equivalente ao usual em $H^1_0(\Omega)^3$.

Prova

Usando a fórmula de Green dada em (1.9) para as funções $D(\Omega)$ e argumento de densidade obtemos a seguinte igualdade para u, $v \in$

$H_0^1(\Omega)^3$:

$$\int_\Omega \nabla u \,.\, \nabla v \, dx = \int_\Omega \operatorname{rot} u \,.\, \operatorname{rot} v \, dx + \int_\Omega (\operatorname{div} u)\,(\operatorname{div} v)\, dx,. \qquad (1.28)$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré, o resultado segue de imediato.

■

Se Ω, λ e μ satisfazem as hipóteses dadas no Lema 1.1.48, então escolhemos a fórmula dada em (1.27) como o produto interno usual em $H_0^1(\Omega)^3$.

Proposição 1.1.49 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Então, valem as seguintes identidades:*

1. $\displaystyle\int_\Omega v \,.\, \Delta u \, dx = -\int_\Omega \nabla v \,.\, \nabla u \, dx,\ \forall\, u \in H^2(\Omega)^3,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)^3;$
2. $\displaystyle\int_\Omega v \,.\, \nabla \mathit{div}\, u \, dx = -\int_\Omega (\mathit{div}\, v)\,(\mathit{div}\, u)\, dx,\ \forall\, u \in H^2(\Omega)^3,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)^3;$
3. $\displaystyle\int_\Omega z \,.\, \mathit{rot}\,\mathit{rot}\, h \, dx = \int_\Omega \mathit{rot}\, h \,.\, \mathit{rot}\, z \, dx,\ \forall\, h \in Z(\Omega),\ \forall\, z \in H^1(\Omega)^3;$
4. $\displaystyle\int_\Omega z \,.\, \mathit{rot}\,(u \times H)\, dx = -\int_\Omega u \,.\, ((\mathit{rot}\, z) \times H)\, dx,\ \forall\, z \in H^1(\Omega)^3,$ $\forall\, u \in H_0^1(\Omega)^3,\ \forall\, H \in \mathbb{R}^3.$

Prova

Os itens 1, 2 e 4 são provados usando a fórmula de Green dada em (1.9) e o item 3 é provado usando a fórmula de Green dada em (1.17).

■

Para o Teorema a seguir, lembramos que a norma em $U(\Omega)$ é como dado em (1.25).

Teorema 1.1.50 (Regularidade Elíptica, [15], pg 69) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe* C^2 *e* $f \in H(\Omega)$. *Se* $u \in U(\Omega)$ *é solução fraca do seguinte sistema magnético:*

$$\begin{aligned} rot\, rot\, u &= f \quad em \quad \Omega && (1.29)\\ div\, u &= 0 \quad em \quad \Omega && (1.30)\\ u|_{\Gamma}.\eta &= 0 \quad em \quad \Gamma && (1.31)\\ (rot\, u)\,|_{\Gamma} \times \eta &= 0 \quad em \quad \Gamma, && (1.32) \end{aligned}$$

isto é,

$$\langle rot\, u, rot\, v\rangle_{L^2(\Omega)^3} = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)^3}\,,\ \forall v \in U(\Omega), \tag{1.33}$$

então

$$u \in H^2(\Omega)^3 \tag{1.34}$$

e existe uma constante real e positiva C, *independente de* f *e* u, *tal que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)^3} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)^3}. \tag{1.35}$$

A prova do Teorema 1.1.50 também pode ser encontrada em [42]. Notamos que não fica evidente que u satisfaz a equação dada em (1.32). De fato, isto é provado na Proposição 1.2.9. Além disso, lembramos que, para os dois próximos resultados, a norma em $H_0^1(\Omega)^3$ é como dado em (1.27).

Teorema 1.1.51 (Regularidade Elíptica, [27], pg 128) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe* C^2, $f \in L^2(\Omega)^3$ *e* μ *e* λ *constantes reais com* $\lambda + 2\mu > 0$ *e* $\mu > 0$. *Se* $u \in H_0^1(\Omega)^3$ *é solução fraca do seguinte sistema elástico:*

$$
\begin{aligned}
u - \mu\,\Delta u - (\lambda + \mu)\,\nabla div\, u &= f \quad em \quad \Omega && (1.36)\\
u|_{\Gamma} &= 0 \quad em \quad \Gamma, && (1.37)
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)^3} + \langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)^3} = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)^3}\,,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)^3, \qquad (1.38)
$$

então

$$
u \in H^2(\Omega)^3 \qquad (1.39)
$$

e existe uma constante real e positiva C, independente de f e u, tal que

$$
\|u\|_{H^2(\Omega)^3} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)^3}. \qquad (1.40)
$$

Corolário 1.1.52 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe C^2, $f \in L^2(\Omega)^3$ e μ e λ constantes reais com $\lambda + 2\mu > 0$ e $\mu > 0$. Se $u \in H_0^1(\Omega)^3$ é solução fraca do seguinte sistema elástico:*

$$
\begin{aligned}
-\mu\,\Delta u - (\lambda + \mu)\,\nabla div\, u &= f \quad em \quad \Omega && (1.41)\\
u|_{\Gamma} &= 0 \quad em \quad \Gamma && (1.42)
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)^3} = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)^3}\,,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)^3, \qquad (1.43)
$$

então

$$
u \in H^2(\Omega)^3 \qquad (1.44)
$$

e existe uma constante real e positiva C, independente de f e u, tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)^3} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)^3}. \tag{1.45}$$

Prova

Usando o Teorema 1.1.51, verificamos a condição dada em (1.44). Além disso, vale a seguinte estimativa:

$$\|u\|_{H^2(\Omega)^3} \leq C\,\|f+u\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)^3} + C\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)^3}, \tag{1.46}$$

para alguma constante real e positiva C, independente de u e f. Por outro lado, escolhendo $v = u$ na equação dada em (1.43) e aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)^3} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)^3}\|f\|_{L^2(\Omega)^3}. \tag{1.47}$$

Pelas duas últimas desigualdades dadas acima, vale a desigualdade dada em (1.45).

■

1.1.6 Espaços $L^P(0,T;E)$

Definição 1.1.53 *Sejam E um espaço de Hilbert separável e $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto. Dizemos que uma função $u : I \longmapsto E$ é fortemente mensurável se existirem um subconjunto $N \subset I$, de medida de Lebesgue nula, e uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções de $C_b(I,E)$ tais que*

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t), \ \forall\, t \in I \backslash N.$$

Notamos que se $u : I \longmapsto E$ é uma função fortemente mensurável, então a função $\|u\|_E : I \longmapsto \mathbb{R}$ é Lebesgue mensurável.

Teorema 1.1.54 (Pettis, [6], pg A-9) *Sejam E um espaço de Hilbert separável e $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto. Então, uma função $u : I \longmapsto E$ é fortemente mensurável se, e somente se, $\forall\, f \in E'$, a função $f(u) : I \longmapsto \mathbb{R}$ é Lebesgue mensurável.*

Definição 1.1.55 *Sejam E um espaço de Hilbert separável e $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto. Dizemos que uma função $u : I \longmapsto E$ fortemente mensurável é integrável no sentido de Bochner se existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções de $C_b(I, E)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|f_n(t) - f(t)\|_E \, dt = 0.$$

Neste caso, definimos a integral de Bochner de f como o limite da integral de Riemann (veja [17], pg 142) das f_n, isto é,

$$\int_I f(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\, dt.$$

Teorema 1.1.56 (Bochner, [6], pg A-12) *Sejam E um espaço de Hilbert separável e $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto. Então, uma função $u : I \longmapsto E$ formentente mensurável é integrável no sentido de Bochner se e somente se a função $\|u\|_E : I \longmapsto \mathbb{R}$ é Lebesgue integrável.*

Lema 1.1.57 ([6], pg A-13) *Sejam E um espaço de Hilbert separável e $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto. Se $u : I \longmapsto E$ é integrável no sentido de Bochner, então*

$$\left\langle x, \int_I u(t)\, dt \right\rangle_E = \int_I \langle x, u(t)\rangle_E \, dt, \ \forall\, x \in E.$$

Definição 1.1.58 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, E um espaço de*

Hilbert separável e $1 \leq p \leq \infty$. *Designamos por*

$$\mathcal{L}^p(I, E)$$

o espaço vetorial das funções $u : I \longmapsto E$ *fortemente mensuráveis e tais que a função numérica* $\|u\|_E$ *pertence a* $L^p(I)$, *com a semi-norma dada por*

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(0,T;E)} = \begin{cases} \left(\int_I \|u(t)\|_E^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} & se \quad 1 \leq p < \infty; \\ \sup\limits_{t \in I} \|u(t)\|_E & se \qquad p = \infty. \end{cases}$$

Identificando funções iguais q.s. em I, *o respectivo espaço vetorial normado das classes de equivalência é denotado por*

$$L^p(I, E).$$

Notamos que se $p = 2$, então $L^2(I, E)$ é um espaço vetorial com o seguinte produto interno:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0,T;E)} = \int_I \langle u, v \rangle_E \; dt.$$

Lema 1.1.59 ([9], pg 59) *Sejam* E *um espaço de Hilbert separável e* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto. Se* $F \subset E$ *é um subespaço vetorial denso, então o espaço vetorial gerado pelo conjunto*

$$\mathcal{F} = \{\psi \, u; \; \psi \in D(I) \;\; e \; u \in F\} \tag{1.48}$$

é denso em $L^2(I, E)$.

Teorema 1.1.60 ([43], pgs 407 e 411) *Sejam* E *um espaço de Hil-*

bert separável e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Então, valem as seguintes afirmações:

1. *Se $1 \leq p \leq \infty$, então $L^p(I,E)$ é um espaço de Banach;*

2. *Se $1 \leq p < \infty$, $1 < q \leq \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ou $p = 1$ e $q = \infty$, então a aplicação*

$$\begin{array}{ccc} L^q(I,E) & \longmapsto & L^p(I,E)^* \\ v & \longmapsto & \displaystyle\int_I \langle v, . \rangle_E \, dx \end{array}$$

   é um isomorfismo linear isométrico.

Corolário 1.1.61 *Sejam E e F espaços de Hilbert separáveis, com $E \hookrightarrow F$, e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *Se $u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ fraco em $L^2(I,E)$, então $u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ fraco em $L^2(I,F)$;*

2. *Se $u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ fraco-* em $L^\infty(I,E)$, então $u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ fraco em $L^2(J,F)$, $\forall J \subset\subset I$ e J intervalo aberto.*

Lema 1.1.62 ([9], pg 64) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto e $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto. Então, os espaços $L^2(I \times \Omega)$ e $L^2(I, L^2(\Omega))$ são algebricamente e topológicamente isomorfos.*

Definição 1.1.63 *Sejam E e F espaços de Hilbert separáveis, com $E \hookrightarrow F$, e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Dizemos que $u : I \longmapsto E$ pertence a*

$$L^p_{loc}(I;E),$$

para $1 \leq p \leq \infty$, se $u \in L^p(J;E)$, $\forall\, J \subset\subset I$ e J intervalo aberto. Dado $u \in L^1_{loc}(I;E)$, dizemos que $v \in L^1_{loc}(I;F)$ é a derivada fraca de u, e *denotamos por u' (ou u_t), se*

$$\int_I \rho^{'}(t)\, u(t)\, dt = -\int_I \rho(t)\, v(t)\, dt,\ \forall\, \rho \in C_0^\infty(I).$$

Definimos a derivada fraca de ordem superior recursivamente.

Lema 1.1.64 ([43], pg 449) *Sejam E e F espaços de Hilbert separáveis, com $E \hookrightarrow F$, e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *Se $u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ fraco em $L^2(I,E)$ e $u_n' \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} v$ fraco em $L^2(I,F)$, então $u' = v$;*
2. *Se $u_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ fraco-* em $L^\infty(I,E)$ e $u_n' \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} v$ fraco-* em $L^\infty(I,F)$, então $u' = v$.*

Lema 1.1.65 ([40], pg 121) *Sejam E um espaço de Hilbert separável e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Então, o conjunto*

$$W(I,H) := \{u \in L^2(I;E);\ u' \in L^2(I;E)\} \tag{1.49}$$

é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno:

$$\langle u, v\rangle_{W(I,E)} := \langle u, v\rangle_{L^2(I;E)} + \langle u', v'\rangle_{L^2(I;E)}\,. \tag{1.50}$$

Proposição 1.1.66 ([6], pg A-19) *Sejam E um espaço de Hilbert separável e $0 < T < \infty$. Se $u \in W(0,T,H)$, então existe $x_0 \in E$ tal que*

$$u(t) = x_0 + \int_0^t u'(r)\, dr,\ \forall\, t \in (0,T) \text{ q.s..} \tag{1.51}$$

Além disso, se u' é contínua em [0,T], então temos o seguinte limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u'(r)\, dr = u'(t),\ \forall\, 0 \le t \le T. \tag{1.52}$$

Teorema 1.1.67 ([43], pg 422) *Sejam E um espaço de Hilbert separável e $0 < T < \infty$. Então, temos a seguinte inclusão:*

$$W(0, T, E) \hookrightarrow C([0, T], E). \tag{1.53}$$

Além disso, $\forall\, 0 \leq s \leq t \leq T$ e $\forall\, u,\, v \in W(0, T, E)$, temos a seguinte fórmula de integração por partes:

$$\langle u(t), v(t) \rangle_E - \langle u(s), v(s) \rangle_E = \int_s^t \langle u'(r), v(r) \rangle_E + \langle u(r), v'(r) \rangle_E \, dr. \tag{1.54}$$

Sob as hipóteses do teorema anterior obtemos:

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_E^2 - \frac{1}{2} \|u(s)\|_E^2 = \int_s^t \langle u'(r), u(r) \rangle_E \, dr. \tag{1.55}$$

Teorema 1.1.68 (Aubin-Lions, [40], pg 122) *Sejam E um espaço de Hilbert separável e $0 < T < \infty$. Então, a inclusão*

$$W(0, T, E) \hookrightarrow L^2(0, T; E) \tag{1.56}$$

é compacta.

1.2 Propriedade adicionais dos espaços $H(\Omega)$, $V(\Omega)$, $U(\Omega)$ e $Z(\Omega)$

Nesta seção obtemos dois Teoremas fundamentais para os Capítulos subsequentes. O primeiro é o Teorema 1.2.7, conhecido como desigualdade de Poincaré com rot para o espaço $U(\Omega)$. Como é visto no Capítulo 3, este resultado, que é válido para conjuntos simplesmente conexos, é importante para obtenção de estimativas da norma de h em

$L^2(\Omega\times(0,T))$, no estudo da taxa de decaimento da energia associada às soluções do sistema magneto-elástico. O segundo é o Teorema 1.2.11, que garante a existência dos espaços de aproximação de Galerkin e é usado no Capítulo 2 na projeção do sistema em espaços de dimensões finitas. Para demonstrarmos estes resultados, usamos de uma série de Lemas e Proposições como seguem.

Lema 1.2.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo e com fronteira Lipschitz-contínua e $f \in H^{-1}(\Omega)^3$. Então,*

$$f(v) = 0, \ \forall\, v \in V(\Omega)$$

se, e somente se, existe

$$p \in L^2(\Omega)$$

tal que

$$f = \nabla p \quad em \quad D'(\Omega)^3.$$

Prova

Consideramos o operador linear

$$\operatorname{div} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^3, L^2(\Omega)). \tag{1.57}$$

Temos que

$$-\nabla \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega)^3) \tag{1.58}$$

é o operador dual de div. De fato,

$$\langle \operatorname{div} u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = -\nabla v(u), \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega)^3, \ \forall\, v \in L^2(\Omega).$$

Usando o Lema 1.1.13 e a Proposição 1.1.34 temos que

$$\mathcal{I}m(\nabla) = \overline{\mathcal{I}m(\nabla)} = (\mathcal{N}(\text{div}))^0,$$

para

$$(\mathcal{N}(\text{div}))^0 = \{f \in H^{-1}(\Omega)^3;\ f(v) = 0,\ \forall\, v \in V(\Omega)\}.$$

O resultado segue de imediato.

■

Proposição 1.2.2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo e com fronteira Lipschitz-contínua e $f \in H^{-1}(\Omega)^3$. Se*

$$f(v) = 0,\ \forall\, v \in \mathcal{V}(\Omega),$$

para

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{u \in D(\Omega)^3;\ \textit{div}\, u = 0\}, \tag{1.59}$$

então existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$f = \nabla p \quad \textit{em} \quad D'(\Omega)^3.$$

Prova

Consideramos uma sequência de abertos $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como no Lema 1.1.4. Fixamos $m \in \mathbb{N}$. Seja $u_m = (u_{m1}, u_{m2}, u_{m3}) \in H_0^1(\Omega)^3$ tal que

$$\text{supp}\, u_m \subset \overline{\Omega_m} \quad \text{e} \quad \text{div}\, u_m = 0 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Escolhendo J_ϵ um suavizador como no Lema 1.1.25 e $\epsilon > 0$ tal que $\text{dist}\,(\overline{\Omega_m}, \Gamma) > \epsilon$, obtemos as seguintes propriedades:

- $(J_\epsilon * u_{m1}, J_\epsilon * u_{m2}, J_\epsilon * u_{m3}) \in D(\Omega)^3$;

- $\operatorname{div}\left(J_\epsilon * u_{m1}(x), J_\epsilon * u_{m2}(x), J_\epsilon * u_{m3}(x)\right) = J_\epsilon * \operatorname{div} u_m(x) = 0,\ \forall\, x \in \Omega$;

- $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} (J_\epsilon * u_{m1}, J_\epsilon * u_{m2}, J_\epsilon * u_{m3}) = u_m$ em $H_0^1(\Omega)^3$.

Pelas hipóteses de f, temos que

$$f(u_m) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f((J_\epsilon * u_{m1}, J_\epsilon * u_{m2}, J_\epsilon * u_{m3})) = 0.$$

Usando o operador extensão $\widetilde{\cdot}$ dado na Proposição 1.1.28 (caso $p = 2$), temos que

$$f((\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}, \widetilde{u_3})) = 0,\ \forall\, u = (u_1, u_2, u_3) \in V(\Omega_m).$$

Aplicando o Lema 1.2.1, obtemos um elemento

$$p_m \in L^2(\Omega_m) \tag{1.60}$$

tal que

$$f = \nabla p_m \quad \text{em} \quad D'(\Omega_m)^3. \tag{1.61}$$

Variando m no conjunto $\mathbb{N}$, extraimos uma sequência $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que, para cada m fixo, p_m satisfaz as condições dadas em (1.60) e (1.61). Pontanto, temos que

$$\nabla p_m = \nabla p_{m+1} \quad \text{em} \quad D'(\Omega_m)^3,\ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Como Ω_m é conexo, aplicando a Proposição 1.1.24, existe uma constante real C_m tal que

$$p_{m+1} = p_m + C_m \quad \text{em} \quad D'(\Omega_m),\ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

A partir desta, podemos obter uma nova sequência, ainda denotada por $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$p_m \in L^2(\Omega_m),\ \forall\, m \in \mathbb{N},$$

$$p_m = p_{m+1} \quad \text{em} \quad D'(\Omega_m) \quad \text{e} \quad f = \nabla p_m \quad \text{em} \quad D'(\Omega_m)^3,\ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Seja $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma Partição C^∞ da Unidade subordinada à $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos a seguinte função:

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i\, p_i.$$

Notamos que

$$p|_{\Omega_m} = p_m \quad \text{em} \quad D'(\Omega_m),\ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Portanto

$$p \in L^2_{loc}(\Omega) \quad \text{em} \quad D'(\Omega) \quad \text{e} \quad f = \nabla p \quad \text{em} \quad D'(\Omega)^3.$$

Como $f \in H^{-1}(\Omega)^3$, aplicando a Proposição 1.1.35, temos que

$$p \in L^2(\Omega).$$

■

Corolário 1.2.3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo e com fronteira Lipschitz-contínua. Então, $\mathcal{V}(\Omega)$ é denso em $V(\Omega)$.*

Prova

Seja

$$f \in V(\Omega)'$$

tal que

$$f(v) = 0, \ \forall \, v \in \mathcal{V}(\Omega).$$

Como $V(\Omega)$ é um subespaço vetorial de $H_0^1(\Omega)^3$, aplicando o Teorema de Hahn-Banach, podemos estender (não de forma única) f a um elemento de $H^{-1}(\Omega)^3$. Usando a Proposição 1.2.2, temos que

$$f = \nabla p \quad \text{em} \quad D'(\Omega)^3,$$

para algum $p \in L^2(\Omega)$. Dado $v \in V(\Omega)$, obtemos:

$$f(v) = \nabla p(v) = - \langle p, \operatorname{div} v \rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Pelo Corolário 1.1.15 o resultado segue de imediato.

■

Proposição 1.2.4 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe C^2 e $f \in H^1(\Omega)$, com*

$$\int_\Omega f(x) \, dx = 0.$$

Então, existe $u \in H^1(\Omega)$ solução fraca do seguinte problema de Neumann para o Laplaciano:

$$-\Delta u(x) = f(x), \ \forall \, x \in \Omega \tag{1.62}$$

$$(\nabla \, u(x))|_\Gamma . \eta(x) = 0, \ \forall \, x \in \Gamma, \tag{1.63}$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla u \, . \, \nabla v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx, \ \forall \, v \in H^1(\Omega). \tag{1.64}$$

Além disso

$$u \in H^2(\Omega)$$

e é a única solução fraca a menos de uma constante.

Prova

Definimos o seguinte operador bilinear :

$$\begin{array}{rccc} B: & \frac{H^1(\Omega)}{\mathbb{R}} \times \frac{H^1(\Omega)}{\mathbb{R}} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega \nabla u \,.\, \nabla v \, dx \,. \end{array}$$

Como $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \,.\, \nabla v \, dx$ é o produto interno em $\dfrac{H^1(\Omega)}{\mathbb{R}}$ (veja Proposição 1.1.33), concluimos que B contínuo e coercivo. Notamos que $\displaystyle\int_\Omega f\, v\, dx$ independe a escolha de representante para v. De fato,

$$\int_\Omega f\,(v+c)\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx + c\int_\Omega f\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx, \ \forall\, c \in \mathbb{R}.$$

Aplicando o Teorema de Lax-Milgram, existe único $u \in \dfrac{H^1(\Omega)}{\mathbb{R}}$ tal que

$$B[u,v] = \int_\Omega f\,v\,dx, \ \forall\, v \in \frac{H^1(\Omega)}{\mathbb{R}}.$$

Portanto, qualquer representante de u em $\dfrac{H^1(\Omega)}{\mathbb{R}}$ é solução fraca do problema original. Por regularidade elíptica (veja [16], pg 15), temos que $u \in H^2(\Omega)$.

Seja w outra solução fraca do problema de Neumann para o Laplaciano. Então, temos a seguinte igualdade:

$$\int_\Omega \nabla(u-w)\,.\,\nabla v\,dx = \int_\Omega (f-f)\,v\,dx = 0, \ \forall\, v \in H^1(\Omega). \quad (1.65)$$

Escolhendo $v = u - w$, temos

$$\nabla(u - w) = 0 \quad \text{em} \quad D'(\Omega)^3.$$

Como Ω é conexo, usando a Proposição 1.1.24, temos que $u - w$ é constante. O resultado segue de imediato.

$\blacksquare$

Se u satisfaz a tese da Proposição 1.2.4, vamos provar que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{em} \quad D'(\Omega) & (1.66)\\ (\nabla u)|_\Gamma . \eta &= 0 \quad \text{em} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). & (1.67) \end{aligned}$$

De fato, escolhendo $v \in D(\Omega)$ na equação dada em (1.64), obtemos:

$$\int_\Omega f\, v\, dx = \int_\Omega \nabla u\, .\, \nabla v\, dx = -\int_\Omega \Delta u\, v\, dx. \tag{1.68}$$

Aplicando o Lema de Du Bois Raymond (veja [30], pg 10), a igualdade dada em (1.66) segue de imediato. Além disso, usando a fórmula de Green dada em (1.16), a equação dada em (1.64) e a igualdade dada em (1.66), temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega v\, f\, dx &= \int_\Omega \nabla u\, .\, \nabla v\, dx = -\int_\Omega v\, \Delta u\, dx + \int_\Gamma \left((\nabla u)|_\Gamma . \eta \right)\, v|_\Gamma\, d\Gamma \\ &= \int_\Omega v\, f\, dx + \int_\Gamma \left((\nabla u)|_\Gamma . \eta \right)\, v|_\Gamma\, d\Gamma, \quad \forall\, v \in H^1(\Omega) \quad (1.69) \end{aligned}$$

Usando a sobrejetividade da aplicação traço dada pelo Teorema 1.1.36 e a dualidade dada pelo item 3 da Proposição 1.1.32, temos a igualdade dada em (1.67).

Corolário 1.2.5 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe C^2. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. $H(\Omega)^{\perp} = \{\nabla p\,;\ p \in H^1(\Omega)\}$ *em* $L^2(\Omega)^3$;
2. $H(\Omega) = \overline{\mathcal{V}(\Omega)}^{L^2(\Omega)^3}$.

Prova

Começamos provando 1. Sejam $p \in H^1(\Omega)$ e $u \in H(\Omega)$. Pela fórmula de Green dada em (1.16), temos que

$$\langle \nabla p, u \rangle_{L^2(\Omega)^3} = 0.$$

Por outro lado, se $u \in L^2(\Omega)^3$ é tal que $u \in H(\Omega)^{\perp}$, pela Proposição 1.2.2, existe $p \in H^1(\Omega)$ tal que

$$u = \nabla p \quad \text{em} \quad D'(\Omega)^3.$$

Vamos provar 2. Note que $\mathcal{V}(\Omega) \subset H(\Omega)$. Logo $\overline{\mathcal{V}(\Omega)}^{L^2(\Omega)^3} \subset H(\Omega)$. Seja $v \in (\mathcal{V}(\Omega))^{\perp}$ em $H(\Omega)$. Aplicando a Proposição 1.2.2, obtemos um elemento $p \in H^1(\Omega)$ tal que

$$v = \nabla p \quad \text{em} \quad D'(\Omega)^3.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta p = \operatorname{div} v \quad &= \quad 0 \quad \text{em} \quad D'(\Omega) \\ (\nabla p)|_{\Gamma} . \eta = v|_{\Gamma} . \eta \quad &= \quad 0 \quad \text{em} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.2.4, p é constante. Pontanto, $u = 0$. Usando o Lema 1.1.11, o resultado segue de imediato.

■

Usando o Corolário 1.2.5, obtemos que $Z(\Omega)$, $U(\Omega)$ e $V(\Omega)$ são densos em $H(\Omega)$, se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe C^2.

Proposição 1.2.6 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, simplesmente conexo e com fronteira Lipschitz-contínua e $u \in L^2(\Omega)^3$. Se*

$$rot\, u = 0 \quad em \quad D'(\Omega)^3,$$

então existe $p \in H^1(\Omega)$ tal que

$$u = \nabla p \quad em \quad D'(\Omega)^3.$$

Prova

Consideramos uma sequência de abertos $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como no Lema 1.1.4. Fixamos $m \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$ tais que

$$\bigcup_{x\in\Omega_m} B[x,\epsilon] \subset \Omega.$$

Seja $u = (u_1, u_2, u_3)$ como no enunciado. Escolhendo J_ϵ um suavizador como no Lema 1.1.25, obtemos as seguintes propriedades:

$$(J_\epsilon * u_1, J_\epsilon * u_2, J_\epsilon * u_3) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)^3;$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left(J_\epsilon * ((\operatorname{rot} u)_1)(x), J_\epsilon * ((\operatorname{rot} u)_2)(x), J_\epsilon * ((\operatorname{rot} u)_3)(x)\right) \\ &= \operatorname{rot}\left(J_\epsilon * u_1(x), J_\epsilon * u_2(x), J_\epsilon * u_3(x)\right), \ \forall\, x \in \Omega_m; \end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}(J_\epsilon * u_1, J_\epsilon * u_2, J_\epsilon * u_3) = u \text{ em } L^2(\Omega)^3.$$

Aplicando a Proposição 1.1.10, obtemos um elemento $p_{\epsilon,m} \in C^1(\Omega_m)$ tal que

$$(J_\epsilon * u_1\,(x), J_\epsilon * u_2\,(x), J_\epsilon * u_3\,(x)) = \nabla p_{\epsilon,m}(x),\ \ \forall\, x \in \Omega_m.$$

Usando a Proposição 1.1.35, concluimos que $p_{\epsilon,m} \in H^1(\Omega_m)$. Variando ϵ no conjunto $\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}$ e n grande$\}$, obtemos uma sequência $(p_{\frac{1}{n},m})_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $H^1(\Omega_m)$ tal que

$$(J_{\frac{1}{n}} * u_1\,(x), J_{\frac{1}{n}} * u_2\,(x), J_{\frac{1}{n}} * u_3\,(x)) = \nabla p_{\frac{1}{n},m} \quad \text{em} \quad D'(\Omega_m)^3,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Notamos que

$$\lim_{n\to\infty} \nabla p_{\frac{1}{n},m} = u \quad \text{em } L^2(\Omega_m)^3.$$

Usando a Proposição 1.1.33, obtemos um elemento $p_m \in H^1(\Omega_m)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} p_{\frac{1}{n},m} = p_m \quad \text{em} \quad \frac{H^1(\Omega_m)}{\mathbb{R}}.$$

Logo,

$$u = \nabla p_m \quad \text{em} \quad D'(\Omega_m)^3.$$

Variando m em $\mathbb{N}$, obtemos uma sequência $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$p_m \in H^1(\Omega_m),\ \forall\, m \in \mathbb{N},$$

$$u = \nabla p_m \quad \text{em} \quad D'(\Omega_m)^3,\ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\nabla p_m = \nabla p_{m+1} \quad \text{em} \quad D'(\Omega_m)^3,\ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Como Ω_m é conexo, aplicando Proposição 1.1.24, temos que existe uma constante real C_m tal que

$$p_{m+1} = p_m + C_m \quad \text{em} \quad D'(\Omega_m), \ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

A partir desta, podemos obter uma nova sequência, ainda denotada por $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$p_m \in L^2(\Omega_m), \ \forall\, m \in \mathbb{N},$$

$$p_m = p_{m+1} \ \text{ em } \ D'(\Omega_m), \ u = \nabla p_m \ \text{ em } \ D'(\Omega_m)^3, \ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Seja $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma Partição C^∞ da Unidade subordinada à $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos a seguinte função:

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \, p_i.$$

Notamos que

$$p|_{\Omega_m} = p_m \quad \text{em} \quad D'(\Omega_m), \ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$p \in L^2_{loc}(\Omega) \text{ e } u = \nabla p \quad \text{em} \quad D'(\Omega)^3.$$

Como $u \in L^2(\Omega)^3$, pela Proposição 1.1.35, temos que

$$p \in L^2(\Omega).$$

■

Teorema 1.2.7 (Poincaré com rot) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, simplesmente conexo e com fronteira de classe C^2. Então, existe uma* *constante real e positiva C tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C\,\|rot\, u\|_{L^2(\Omega)^3},\ \forall\, u \in U(\Omega). \tag{1.70}$$

Prova

Supomos, por absurdo, que a desigualdade é falsa. Então, existe uma sequência

$$\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U(\Omega)$$

tal que

$$\|\mathrm{rot}\, u^n\|_{L^2(\Omega)^3} < \frac{1}{n}, \quad \|u^n\|_{L^2(\Omega)^3} = 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.71}$$

Logo, $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $U(\Omega)$.

Como $U(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, usando o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, existe uma subsequência, que ainda denotamos por $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que converge fraco em $U(\Omega)$ para algum $u \in U(\Omega)$. Portanto, $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ também converge fraco para u em $H^1(\Omega)^3$. Aplicando a Proposição 1.1.17 e o item 3 da Proposição 1.1.30, temos que $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge forte em $L^2(\Omega)^3$ para u.

Portanto,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)^3} = 1. \tag{1.72}$$

Por outro lado, $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $U(\Omega)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|u^n - u^m\|_U &\leq \|u^n - u^m\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\mathrm{rot}\, u^n - \mathrm{rot}\, u^m\|_{L^2(\Omega)^3} \\
&\leq \|u^n - u^m\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\mathrm{rot}\, u^n\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\mathrm{rot}\, u^m\|_{L^2(\Omega)^3} \\
&\leq \epsilon,
\end{aligned}$$

para algum dado $\epsilon > 0$ e, m e n grandes suficientes.

Logo, $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u forte na norma de $U(\Omega)$. Pela desigualdade dada em (1.71), temos que

$$\operatorname{rot} u = 0 \quad \text{em} \quad D'(\Omega)^3.$$

Usando a Proposição 1.2.6, existe $p \in H^1(\Omega)$ tal que

$$u = \nabla p \quad \text{em} \quad D'(\Omega)^3.$$

Além disso, pelo item 1 do Corolário 1.2.5, concluimos que $u \in H(\Omega)^{\perp}$. Como $u \in H(\Omega)$, então

$$u = 0 \quad \text{em} \quad D'(\Omega)^3. \tag{1.73}$$

As igualdades dadas em (1.72) e (1.73) geram uma contradição.

■

Se Ω satisfaz as hipóteses do Teorema 1.2.7, então a norma usual em $U(\Omega)$ é dada por $\|\operatorname{rot} v\|_{L^2(\Omega)^3}$.

Proposição 1.2.8 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Se*

$$u \in H_0(rot, \Omega),$$

então

$$(rot\, u)|_{\Gamma} .\eta = 0 \quad em \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Prova

Notamos que

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} u = 0 \quad \text{em} \quad D'(\Omega).$$

Logo, $\operatorname{rot} u \in H(\operatorname{div}, \Omega)$. Seja $\rho \in D(\overline{\Omega})$. Usando a fórmula de Green dada em (1.16), temos que

$$\int_\Gamma \left((\operatorname{rot} u)|_\Gamma . \eta\right)\, \rho|_\Gamma \, d\Gamma = \int_\Omega (\operatorname{rot} u) \,.\, \nabla \rho \, dx.$$

Agora, usando a fórmula de Green dada em (1.17), obtemos:

$$\int_\Omega (\operatorname{rot} u) \,.\, \nabla \rho \, dx = \int_\Omega u \,.\, \operatorname{rot} \nabla \rho \, dx - \int_\Gamma \left(u|_\Gamma \times \eta\right) \,.\, (\nabla \rho)|_\Gamma \, d\Gamma = 0.$$

Portanto,

$$\int_\Gamma \left((\operatorname{rot} u)|_\Gamma . \eta\right)\, \rho|_\Gamma \, d\Gamma = 0, \; \forall\, \rho \in D(\overline{\Omega}).$$

Pela densidade de $D(\overline{\Omega})$ em $H^1(\Omega)$ dada pelo item 1 da Proposição 1.1.30, sobrejetividade e continuidade da aplicação $|_\Gamma$ dada no Teorema 1.1.36 e a dualidade $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)' = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dada pelo item 3 da Proposição 1.1.32, temos que

$$(\operatorname{rot} u)|_\Gamma . \eta = 0 \quad \text{em} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

■

Proposição 1.2.9 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe C^2. Então, $u \in Z(\Omega)$ se, e somente se, existe $f \in H(\Omega)$ tal que*

$$\langle rot\, u, rot\, v\rangle_{L^2(\Omega)^3} = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)^3}\,, \;\forall v \in U(\Omega). \tag{1.74}$$

Prova

Seja $u \in Z(\Omega)$. Notamos que

$$\operatorname{rot} u \in H_0(rot, \Omega).$$

Aplicando a Proposição 1.2.8, temos que

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u \in H(\Omega).$$

Usando a fórmula de Green dada em (1.17), obtemos:

$$\langle \mathrm{rot}\,u, \mathrm{rot}\,v\rangle_{L^2(\Omega)^3} = \langle \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u, v\rangle_{L^2(\Omega)^3}\,,\ \forall v \in U(\Omega).$$

Escolhendo $f = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u$, provamos que vale (1.74) para $f = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u$.

Consideramos $u \in U(\Omega)$ e $f \in H(\Omega)$ tais que

$$\langle \mathrm{rot}\,u, \mathrm{rot}\,v\rangle_{L^2(\Omega)^3} = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)^3}\,,\ \forall v \in U(\Omega). \tag{1.75}$$

Pela Regularidade Elíptica dada no Teorema 1.1.50, temos

$$u \in H^2(\Omega)^3. \tag{1.76}$$

Resta provarmos que

$$(\mathrm{rot}\,u)|_\Gamma \times \eta = 0 \quad \text{em} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3. \tag{1.77}$$

Vamos provar inicialmente a seguinte igualdade:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u = f \quad \text{em} \quad D'(\Omega)^3. \tag{1.78}$$

De fato, seja $\phi \in D(\Omega)^3$. Pela identidade de Gauss dada em (1.1) temos que

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\phi = \int_\Gamma \phi|_\Gamma \,.\, \eta\, d\Gamma = 0.$$

Consideramos $\varphi \in H^2(\Omega)$ solução fraca do seguinte sistema de Neumann para o Laplaciano:

$$
\begin{aligned}
-\Delta\varphi(x) &= \operatorname{div}\phi, \ \forall\, x \in \Omega && (1.79)\\
(\nabla\varphi(x))|_{\Gamma} .\eta &= 0, \ \forall\, x \in \Gamma. && (1.80)
\end{aligned}
$$

Definimos a seguinte função:

$$v = \phi + \nabla\varphi.$$

Então, facilmente vemos que

$$v \in U(\Omega).$$

Como $\operatorname{rot}\nabla = 0$ em $D'(\Omega)^3$, usando a equação dada em (1.75) e a fórmula de Green dada em (1.16), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\langle \operatorname{rot} u, \operatorname{rot}\phi\rangle_{L^2(\Omega)^3} &= \langle \operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v\rangle_{L^2(\Omega)^3} = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)^3} = \langle f, \phi\rangle_{L^2(\Omega)^3}\\
&- \langle \operatorname{div} f, \varphi\rangle_{L^2(\Omega)^3} + \int_{\Gamma} (f|_{\Gamma} .\eta)\ \varphi|_{\Gamma}\, d\Gamma\\
&= \langle f, \phi\rangle_{L^2(\Omega)^3}\,, \ \forall\, \phi \in D(\Omega)^3.
\end{aligned}
$$

Portanto, usando Lema de Du Bois Raymond (veja [30], pg 10), vale a igualdade dada em (1.78).

Seja $g \in H^1(\Omega)^3$. Pelo item 1 do Corolário 1.2.5, existem $w \in H(\Omega)$ e $p \in H^1(\Omega)$ tais que

$$g = w + \nabla p. \tag{1.81}$$

Temos a seguinte igualdade:

$$\operatorname{rot} w = \operatorname{rot} g \quad \text{em} \quad D'(\Omega)^3.$$

Logo, $w \in U(\Omega)$ e $p \in H^2(\Omega)$. Usando a fórmula de Green dada em (1.17), obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} u \,.\, g\, dx + \int_\Gamma (\operatorname{rot} u)|_\Gamma \times \eta \,.\; g|_\Gamma \; d\Gamma &= \int_\Omega \operatorname{rot} u \,.\operatorname{rot} w\, dx \\
&= \int_\Omega f \,.\, w\, dx \\
&= \int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} u \,.\, w\, dx
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela fórmula de Green dada em (1.16) e equação dada em (1.78), temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} u \,.\, \nabla p\, dx &= -\int_\Omega p\,(\operatorname{div}\operatorname{rot}\operatorname{rot} u) dx \\
&+ \int_\Gamma ((\operatorname{rot}\operatorname{rot} u)|_\Gamma .\eta)\; p|_\Gamma \; d\Gamma = 0. \quad (1.82)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_\Gamma (\operatorname{rot} u)|_\Gamma \times \eta \,.\; g|_\Gamma \; d\Gamma = 0, \; \forall\, g \in H^1(\Omega)^3.$$

Pela sobrejetividade da aplicação traço dada no Teorema 1.1.36 e a dualidade $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)' = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dada no item 3 da Proposição 1.1.32, o resultado segue de imediato.

■

Proposição 1.2.10 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe C^2. Então, $Z(\Omega)$ é denso em $U(\Omega)$.*

Prova

Seja

$$i : U(\Omega) \longmapsto H(\Omega) \qquad (1.83)$$

a inclusão. Então i é linear e contínua. Consideramos

$$i^* : H(\Omega) \longmapsto U(\Omega) \tag{1.84}$$

o operador adjunto de i. Vamos inicialmente provar que $i^*(H(\Omega)) \subset Z(\Omega)$. De fato, seja $x \in H(\Omega)$. Então, $\forall\, v \in U(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{rot} i^*(x), \operatorname{rot} v\rangle_{L^2(\Omega)^3} &= \langle i^*(x), v\rangle_{U(\Omega)} - \langle i^*(x), v\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&= \langle x, v\rangle_{L^2(\Omega)^3} - \langle i^*(x), v\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&= \langle x - i^*(x), v\rangle_{L^2(\Omega)^3}
\end{aligned}$$

Notamos que $x - i^*(x) \in H(\Omega)$. Aplicando a Proposição 1.2.9, temos que $i^*(x) \in Z(\Omega)$. Resta provar que $i^*(H(\Omega))$ é denso em $U(\Omega)$. De fato, seja $v \in U(\Omega)$ tal que $v \in i^*(H(\Omega))^{\perp}$. Logo,

$$0 = \langle i^*(x), v\rangle_{U(\Omega)} = \langle x, v\rangle_{L^2(\Omega)^3}\,,\ \forall\, x \in H(\Omega).$$

Portanto, $v = 0$. Pelo Lema 1.1.11, o resultado segue de imediato.

■

Usando separabilidade, densidade e o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtemos os seguinte Teorema:

Teorema 1.2.11 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe C^2. Então, existe uma conjunto*

$$\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset Z(\Omega) \tag{1.85}$$

tal que é base de Hilbert (i.e., o espaço vetorial gerado é denso) de

$Z(\Omega)$, $U(\Omega)$ e $H(\Omega)$. Além disso,

$$\langle z_i, z_j \rangle_{L^2(\Omega)^3} = \delta_{i,j}, \ \forall\, i,\, j \in \mathbb{N}. \tag{1.86}$$

Analogamente, obtemos um conjunto

$$\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)^3 \cap H^2(\Omega)^3 \tag{1.87}$$

tal que é base de Hilbert de $H_0^1(\Omega)^3 \cap H^2(\Omega)^3$, $H_0^1(\Omega)^3$ e $L^2(\Omega)^3$. Além disso,

$$\langle w_i, w_j \rangle_{L^2(\Omega)^3} = \delta_{i,j}, \ \forall\, i,\, j \in \mathbb{N}. \tag{1.88}$$

Se Ω satisfaz as hipóteses do Teorema 1.2.11, definimos os seguintes conjuntos:

$$S_m = [w_1, w_2, \cdots, w_m], \quad \widetilde{S}_m = [z_1, z_2, \cdots, z_m], \ \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{1.89}$$

Os espaços $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{\widetilde{S}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfazem as seguintes propriedades:

1. $\dim S_m,\ \dim \widetilde{S}_m < \infty,\ \forall\, m \in \mathbb{N}$;

2. Dados $u \in H(\Omega)$ $(\,U(\Omega)$ ou $Z(\Omega)\,)$ e $v \in L^2(\Omega)^3$ $(\,H_0^1(\Omega)^3$ ou $H_0^1(\Omega)^3 \cap H^2(\Omega)^3\,)$, existem sequências $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que satisfazem as seguintes condições:

   - $u_n \in S_n,\ v_n \in \widetilde{S}_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$;
   - $u_n \overset{n\to\infty}{\to} u$ em $H(\Omega)\,(\,U(\Omega)$ ou $Z(\Omega)\,)$;
   - $v_n \overset{n\to\infty}{\to} v$ em $L^2(\Omega)^3\,\left(\,H_0^1(\Omega)^3 \text{ ou } H_0^1(\Omega)^3 \cap H^2(\Omega)^3\,\right)$.

Os espaços com as propriedades 1 e 2 acima são chamados de espaços de aproximação de Galerkin.

Capítulo 2

Existência e Unicidade

2.1 Hipóteses adicionais

Nesta seção, seguindo [26], impomos algumas hipóteses sobre a função ρ que são suficientes para provarmos a existência e unicidade de soluções globais fortes para o sistema magneto-elástico. As hipóteses assumidas neste trabalho generalizam o caso $\rho(x,s) = a(x)\,|s|^p\,s$, para $0 \le p \le 2$ e $a : \overline{\Omega} \longmapsto [0,\infty)$ uma função contínua.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto e limitado. Daqui em diante consideramos uma função

$$\begin{array}{rcl} \rho : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ (x,s) & \longmapsto & \rho(x,s) \end{array}$$

tal que satisfaz as seguintes condições:

1. ρ é contínua em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3$;

2. $\dfrac{\partial \rho}{\partial s_i} : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ existe e é contínua em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3$, $\forall\, 1 \le i \le 3$;

3. $\rho(x,s)\,.\,s \ge 0$, $\forall\,(x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3$;

4. $\xi^T \cdot \dfrac{\partial \rho}{\partial s}(x,s) \cdot \xi \geq 0,\ \forall\,(x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^3$;

5. $|\rho(x,s)| \leq b_1\,|s|^3,\ \forall\,(x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3$, com $|s| > 1$ e b_1 uma constante real e não negativa;

6. $\left|\zeta^T \cdot \dfrac{\partial \rho}{\partial s}(x,s)\right| \leq b_2\,|s|^2\,|\zeta|,\ \forall\,(x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3,\ \forall\,\zeta \in \mathbb{R}^3$, com $|s| > 1$ e b_2 uma constante real e não negativa.

Usando os itens 1, 2 e 4 acima e a Proposição do Valor Médio, temos que $\forall\,(x,s,\widetilde{s}) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$
\begin{aligned}
(\rho(x,s) - \rho(x,\widetilde{s}))\ .\ (s-\widetilde{s}) \quad &= \quad (s-\widetilde{s})^T\ .\ \frac{\partial \rho}{\partial s}\,(x, \theta\, s + (1-\theta)\,\widetilde{s}) \\
&\quad\ .\ (s-\widetilde{s}) \geq 0,, \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

para algum $0 \leq \theta \leq 1$ e dependendo de s, $\widetilde{s}$ e x.

Aplicando o item 2 da Proposição 1.1.30, sabemos que existe uma constante real e positiva C tal que

$$
\|u\|_{L^6(\Omega)^3} \leq C\,\|u\|_{H^1(\Omega)^3},\ \forall\, u \in H^1(\Omega)^3. \qquad (2.2)
$$

Temos também que

$$
|\Omega| < \infty. \qquad (2.3)
$$

Portanto, pelos itens 1 e 5 das hipóteses dada sobre a função ρ, obtemos a seguinte desigualdade:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\rho(x,u(x))|^2\,dx \quad &\leq \quad |\Omega| \left(\sup_{\left((x,s)\in\overline{\Omega}\times B[0,1]\right)} |\rho(x,s)|^2 \right) \\
&+ \quad \int_\Omega \left(b_1\,|u(x)|^3\right)^2\,dx \\
&\leq \quad C_1 + C b_1^2\,\|u\|^6_{H^1(\Omega)^3},\ \forall\, u \in H^1(\Omega)^3, (2.4)
\end{aligned}
$$

com C e C_1 constante reais, positivas e independentes de u.

Além disso, usando os itens 2 e 6 das hipóteses dada sobre a função ρ e a desigualdade de Hölder, obtemos a seguinte estimativa $\forall\, u,\, v \in H^1(\Omega)^3$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| v(x)^T \cdot \frac{\partial \rho}{\partial s}(x, u(x)) \right|^2 dx &\leq \left(\sup_{((x,s)\in\overline{\Omega}\times B[0,1])} \left| \frac{\partial \rho}{\partial s}(x,s) \right|^2 \right) \\
&\quad \int_\Omega |v(x)|^2\, dx \\
&+ b_2^2 \int_\Omega |u(x)|^4\, |v(x)|^2\, dx \\
&\leq C_2 \int_\Omega |v(x)|^2\, dx \\
&+ b_2^2\, \|u(x)\|^4_{L^6(\Omega)^3}\, \|v(x)\|^2_{L^6(\Omega)^3} \\
&\leq C\, b_2^2\, \|u(x)\|^4_{H^1(\Omega)^3}\, \|v(x)\|^2_{H^1(\Omega)^3} \\
&+ C_2\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)^3}, \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

com C e C_2 constantes reais, positivas e independentes de u e v.

Lema 2.1.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe C^2 e $\{w_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ um conjunto como dado no Teorema 1.2.11. Fixe $m \in \mathbb{N}$, e $1 \leq i, l \leq m$. Então, temos as seguintes propriedades:*

$$(t_1, \cdots, t_m) \longmapsto \left\langle \rho\left(x, \sum_{j=1}^m t_j\, w_j\right), w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \in C^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}); \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_l} \left\langle \rho\left(., \sum_{j=1}^m t_j\, w_j\right), w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} = \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial s}\left(., \sum_{j=1}^m t_j\, w_j\right) . w_l\,,\, w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}. \qquad (2.7)$$

Prova

Usando a desigualdade dada em (2.4), vemos que a função dada em

(2.6) está bem definida. Se

$$(t_1^n, \cdots, t_m^n) \overset{n \to \infty}{\to} (t_1, \cdots, t_m) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^m,$$

então, aplicando os itens 1 e 5 das hipóteses dada sobre a função ρ, temos que

$$\begin{aligned}
\left| \rho\left(x, \sum_{j=1}^{m} t_j^n\, w_j(x)\right) . w_i(x) \right| \quad &\leq \quad \left(\sup_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times B[0,1]} |\rho(x,s)| \right) |w_i(x)| \\
&+ \quad b_1 \left| \sum_{j=1}^{m} t_j^n\, w_j(x) \right|^3 |w_i(x)| \\
&\leq \quad C_0 \left(1 + \left(\sum_{j=1}^{m} |w_j(x)| \right)^3 \right) \\
&\qquad |w_i(x)|, \ \forall\, x \in \Omega \ \text{ q.s.},
\end{aligned}$$

com

$$C_0 = \sup_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times B[0,1]} |\rho(x,s)| + b_1 \left(\sup_{1\leq j\leq m,\, n\in\mathbb{N}} |t_j^n| \right)^3.$$

Notamos que C_0 não depende de $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \Omega$. Além disso, usando a continuidade da função ρ, obtemos a seguinte convergência ponto a ponto q.s:

$$\rho\left(x, \sum_{j=1}^{m} t_j^n\, w_j(x)\right) . w_i(x) \overset{n \to \infty}{\to} \rho\left(x, \sum_{j=1}^{m} t_j\, w_j(x)\right) . w_i(x), \ \forall\, x \in \Omega.$$

Pelo Lema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que a função

$$(t_1, \cdots, t_m) \longmapsto \left\langle \rho\left(x, \sum_{j=1}^{m} t_j\, w_j\right), w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \tag{2.8}$$

é contínua. Se $(t_1, \cdots, t_l^n, \cdots, t_m) \overset{n\to\infty}{\to} (t_1, \cdots, t_l, \cdots, t_m)$ em $\mathbb{R}^m$, então, pela Proposição do Valor Médio, existe $\theta = \theta(t_1, \cdots, t_m, t_l^n, x)$ com $0 \leq \theta \leq 1$, tal que, se

$$\widetilde{t}_l^n = \theta t_l^n + (1-\theta) t_l$$

e

$$\begin{aligned} L(x,n) &= \frac{\left(\rho\left(x, t_l^m\, w_l(x) + \displaystyle\sum_{j=1, j\neq l}^{m} t_j\, w_j(x)\right)\right) . w_i(x)}{t_l^m - t_l} \\ &- \frac{\left(\rho\left(x, \displaystyle\sum_{j=1}^{m} t_j\, w_j(x)\right)\right) . w_i(x)}{t_l^m - t_l}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

temos que $\forall\, x \in \Omega$ q.s.

$$L(x,n) \;=\; w_i(x)^T . \frac{\partial \rho}{\partial s}\left(x, \widetilde{t}_l^n\, w_l(x) + \sum_{j=1, j\neq l}^{m} t_j\, w_j(x)\right) . w_l(x).$$

Usando a continuidade da função $\dfrac{\partial \rho}{\partial s}$, obtemos a seguinte convergência ponto a ponto:

$$L(x,n) \overset{n\to\infty}{\to} w_i(x)^T . \frac{\partial \rho}{\partial s}\left(x, \sum_{j=1}^{m} t_j w_j(x)\right) . w_l(x),\ \forall\, x \in \Omega \ \text{ q.s..}$$

Além disso, usando os itens 2 e 6 das hipóteses sobre a função ρ, temos que

$$
\begin{aligned}
|L(x,n)| &\leq \left(\sup_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times B[0,1]} \left| \frac{\partial \rho}{\partial s}(x,s) \right| \right) |w_l(x)|\,|w_i(x)| \\
&+ \; b_2 \left| \widetilde{t}_l^n \, w_l(x) + \sum_{j=1, j\neq l}^{m} t_j \, w_j(x) \right|^2 |w_l(x)|\,|w_i(x)| \\
&\leq \; C_1 \left(1 + \left(\sum_{j=1}^{m} |w_j(x)| \right)^2 \right) |w_l(x)|\,|w_i(x)|, \; \forall\, x \in \Omega \;\; \text{q.s.},
\end{aligned}
$$

com

$$
C_1 = \sup_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times B[0,1]} \left| \frac{\partial \rho}{\partial s}(x,s) \right| + b_2 \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \{t_1, \cdots, t_m, t_l^n\} \right)^2 .
$$

Notamos que C_1 não depende de $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \Omega$.

Aplicando a desigualdade de Hölder para o caso $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} = 1$ e observando que $|\Omega| < \infty$, obtemos facilmente que

$$
\left(1 + \left(\sum_{j=1}^{m} |w_j(x)| \right)^2 \right) |w_l(x)|\,|w_i(x)| \in L^1(\Omega). \tag{2.10}
$$

Pelo Lema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que a aplicação dada em (2.8) é derivável na variável t_l e vale a igualdade dada em (2.7). Resta provarmos que a aplicação

$$
(t_1, \cdots, t_m) \longmapsto \int_\Omega w_i(x)^T \cdot \frac{\partial \rho}{\partial s} \left(x, \sum_{j=1}^{m} t_j \, w_j(x) \right) . \, w_l(x) \, dx \tag{2.11}
$$

é contínua. De fato, se

$$
(t_1^n, \cdots, t_m^n) \overset{n\to\infty}{\to} (t_1, \cdots, t_m) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^m,
$$

então temos a seguinte estimativa $\forall\, x \in \Omega$ q.s.:

$$\left| w_i(x)^T \, . \, \frac{\partial \rho}{\partial s}\left(x, \sum_{j=1}^{m} t_j^n \, w_j(x)\right) \, . \, w_l(x) \right| \leq C_2 \left(1 + \left(\sum_{j=1}^{m} |w_j(x)|\right)^2\right)$$
$$|w_l(x)|\, |w_i(x)|,$$

com

$$C_2 = \sup_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times B[0,1]} \left|\frac{\partial \rho}{\partial s}(x,s)\right| + b_2 \left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\{t_1^n, \cdots, t_m^n\}\right)^2 .$$

Além disso, pela continuidade da função $\dfrac{\partial \rho}{\partial s}$, temos que

$w_i(x)^T \, . \, \frac{\partial \rho}{\partial s}\left(x, \sum_{j=1}^{m} t_j^n \, w_j(x)\right) . \, w_l(x)$ converge à

$w_i(x)^T \, . \, \frac{\partial \rho}{\partial s}\left(x, \sum_{j=1}^{m} t_j \, w_j(x)\right) . \, w_l(x)$, $\forall\, x \in \Omega$ q.s.. quando n tende ao infinito.

Pelo Lema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que a aplicação dada em (2.11) é contínua.

■

2.2 Teorema de existência e unicidade

Nesta seção enunciamos o Teorema de Existência e Unicidade de soluções globais fortes para o sistema magneto-elástico. A prova deste Teorema é feita na seção seguinte.

Teorema 2.2.1 (Existência e Unicidade) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe C^2 e μ, α e β constantes* *reais e positivas. Consideramos também uma constante real* λ *tal que* $\lambda + 2\,\mu > 0$ *e* $\widetilde{H} \in \mathbb{R}^3$ *um vetor constante. Então, dado*

$$(u_0, u_1, h) \in \left(H_0^1(\Omega)^3 \cap H^2(\Omega)^3\right) \times H_0^1(\Omega)^3 \times Z(\Omega), \tag{2.12}$$

existe um par

$$(u, h) \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)^3 \cap H^2(\Omega)^3) \times L^\infty(0, \infty; Z(\Omega)) \tag{2.13}$$

tal que

$$u \in \left(C([0, \infty); H_0^1(\Omega)^3) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)^3)\right), \tag{2.14}$$

$$h \in C([0, \infty); U(\Omega)), \tag{2.15}$$

$$(u', h') \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)^3) \times L^\infty(0, \infty; H(\Omega)), \tag{2.16}$$

$$h' \in L^2(0, T; U(\Omega)),\ \forall T > 0, \tag{2.17}$$

$$u'' \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)^3), \tag{2.18}$$

e que satisfaz as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} 0 &= u'' - \mu\,\Delta u - (\lambda + \mu)\,\nabla\,div\,u - \alpha\,(rot\,h) \times \widetilde{H} \\ &+ \rho(x, u')\ \ em\ L^1_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega)^3); \qquad (2.19) \\ 0 &= h' + \frac{1}{\beta}\,rot\,rot\,h - rot\left(u' \times \widetilde{H}\right) \\ &\quad em\ L^1_{loc}(0, \infty; H(\Omega)); \qquad (2.20) \end{aligned}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad h(0) = h_0. \tag{2.21}$$

Além disso, o par (u, h) *é único.*

Começamos provando que as expressões dadas no lado esquerdo das igualdades dadas em (2.19) e (2.20) estão nos espaços adequados.

Lema 2.2.2 *Suponha válida as hipóteses do Teorema 2.2.1. Se o par (u, h) satisfaz (2.13), (2.16) e (2.18), então temos as seguintes afirmações:*

$$u'',\ \Delta u,\ \nabla\, div\, u,\ (rot\, h) \times \widetilde{H},\ \rho(x, u') \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)^3); \quad (2.22)$$

$$h',\ rot\, rot\, h,\ rot\left(u' \times \widetilde{H}\right) \in L^\infty(0, \infty; H(\Omega)). \quad (2.23)$$

Prova

Como consequência das hipóteses, temos as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} & u'',\ \Delta u,\ \nabla \mathrm{div} u,\ (\mathrm{rot}\, h) \times \widetilde{H},\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h, \\ & \mathrm{rot}\left(u' \times \widetilde{H}\right) \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)^3), \qquad (2.24) \\ & h' \in L^\infty(0, \infty; H(\Omega)). \qquad (2.25) \end{aligned}$$

Usando a desigualdade dada em (2.4), temos que

$$\rho(x, u') \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)^3). \quad (2.26)$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h \quad \text{em} \quad D'(\Omega) \qquad (2.27) \\ 0 &= \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\left(u' \times \widetilde{H}\right) \quad \text{em} \quad D'(\Omega). \qquad (2.28) \end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 1.2.8, temos que

$$(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h)\big|_\Gamma .\eta = 0 \quad \text{em} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (2.29)$$

Resta provar que

$$\left(\mathrm{rot}\left(u' \times \widetilde{H}\right)\right)\Big|_\Gamma .\eta = 0 \quad \text{em} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (2.30)$$

De fato, seja $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $D(\Omega)^3$ que converge a u' em $H_0^1(\Omega)^3$. Então, $(\operatorname{rot}(u_m \times \widetilde{H}))_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $D(\Omega)^3$ que converge a $\operatorname{rot}(u' \times \widetilde{H})$ em $H(\operatorname{div},\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{rot}\left(u' \times \widetilde{H}\right)\right)\Big|_{\Gamma}.\eta &= \lim_{m\to\infty}\left(\operatorname{rot}\left(u_m \times \widetilde{H}\right)\right)\Big|_{\Gamma}.\eta \\
&= \lim_{m\to\infty} 0 = 0 \quad \text{em} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).
\end{aligned}$$

■

A seguir obtemos um sistema de equações equivalente às equações dadas em (2.19) e (2.20) e que são úteis na prova de existência. Lembramos que a norma em $H_0^1(\Omega)^3$ é dada pela expressão como em (1.27) e a norma em $U(\Omega)$ é dada pela expressão como em (1.25).

Lema 2.2.3 *Suponha válida as hipóteses do Teorema 2.2.1. Seja (u,h) um par que satisfaz (2.13), (2.16) e (2.18). Então, (u,h) satisfaz as equações dadas em (2.19) e (2.20) se, e somente se, valem as seguintes igualdades:*

$$\begin{aligned}
0 &= \langle u'', w\rangle_{L^2(\Omega)^3} + \langle u, w\rangle_{H_0^1(\Omega)^3} - \alpha\left\langle (rot\, h)\times \widetilde{H}, w\right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \langle \rho(x,u'), w\rangle_{L^2(\Omega)^3} \ \mathit{em} \quad D'(0,T),\ \forall\, w\in H_0^1(\Omega)^3,\ \forall\, T>0; \quad (2.31)\\
0 &= \langle h', z\rangle_{L^2(\Omega)^3} + \frac{1}{\beta}\langle rot\, h, rot\, z\rangle_{L^2(\Omega)^3} - \left\langle rot\left(u'\times\widetilde{H}\right), z\right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&\mathit{em} \quad D'(0,T),\ \forall\, z\in U(\Omega),\ \forall\, T>0. \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Prova

Começamos provando a necessidade. Fixamos $T>0$. Sejam $\psi \in D(0,T)$, $w\in H_0^1(\Omega)^3$ e $z\in U(\Omega)$. Então, facilmente verificamos que

$$w\,\psi \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^3) \quad \text{e} \quad z\,\psi\in L^2(0,T;H(\Omega)).$$

Fazendo o produto interno de $w\,\psi$ por ambos os lados da equação dada em (2.19) no espaço $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ e de $z\,\psi$ por ambos os lados da equação dada em (2.20) no espaço $L^2(0,T;H(\Omega))$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle u'', w\,\psi\rangle_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} - \mu\,\langle \Delta u, w\,\psi\rangle_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \\
&- (\lambda+\mu)\,\langle \nabla \mathrm{div}\, u, w\,\psi\rangle_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \\
&- \alpha\left\langle (\mathrm{rot}\, h)\times \widetilde{H}, w\,\psi\right\rangle_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \\
&+ \langle \rho(x,u'), w\,\psi\rangle_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}\,; \qquad (2.33) \\
0 &= \langle h', z\,\psi\rangle_{L^2(0,T;H(\Omega))} + \frac{1}{\beta}\,\langle \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h, z\,\psi\rangle_{L^2(0,T;H(\Omega))} \\
&- \left\langle \mathrm{rot}\,\left(u'\times \widetilde{H}\right), z\,\psi\right\rangle_{L^2(0,T;H(\Omega))} \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

Usando os itens 1, 2 e 3 da Proposição 1.1.49, obtemos facilmente as equações dadas em (2.31) e (2.32).

Vamos provar a suficiência. Novamente usando os itens 1, 2 e 3 da Proprosição 1.1.49, obtemos:

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle u'' - \mu\,\Delta u - (\lambda+\mu)\,\nabla \mathrm{div}\, u, \psi\, w\rangle_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \\
&+ \left\langle -\alpha\,(\mathrm{rot}\, h)\times \widetilde{H} + \rho(x,u'), \psi\, w\right\rangle_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}, \\
&\quad \forall\,\psi\in D(0,T), \quad \forall\, w\in H_0^1(\Omega)^3,\ \forall\, T>0; \qquad (2.35) \\
0 &= \langle h' + \frac{1}{\beta}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h - \mathrm{rot}\,\left(u'\times \widetilde{H}\right), \psi\, z\rangle_{L^2(0,T;H(\Omega))}, \\
&\quad \forall\,\psi\in D(0,T), \quad \forall\, z\in U(\Omega),\ \forall\, T>0. \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

Como vale a densidade de $U(\Omega)$ em $H(\Omega)$ e de $H_0^1(\Omega)^3$ em $L^2(\Omega)^3$, aplicando o Lema 1.1.59, o resultado segue de imediato.

■

2.3 Prova de existência e unicidade

2.3.1 Unicidade

Sejam (u, h) e $(\overline{u}, \overline{h})$ como no Teorema 2.2.1. Fixamos $T > 0$. Então, obtemos as seguintes igualdades:

$$
\begin{aligned}
0 &= (u'' - \overline{u}'') - \mu\,\Delta(u - \overline{u}) - (\lambda + \mu)\,\nabla \mathrm{div}\,(u - \overline{u}) \\
&- \alpha\,(\mathrm{rot}\,(h - \overline{h})) \times \widetilde{H} + (\rho(x, u') - \rho(x, \overline{u}')) \\
&\quad \text{em} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)^3); \qquad (2.37) \\
0 &= (h' - \overline{h}') + \frac{1}{\beta}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(h - \overline{h}) - \mathrm{rot}\,\Big((u' - \overline{u}') \times \widetilde{H}\Big) \\
&\quad \text{em} \quad L^2(0, T; H(\Omega)). \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

Fazendo o produto interno da equação em dada em (2.37) por $(u' - \overline{u}')$ no espaço $L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$ e da equação dada em (2.38) por $\alpha\,(h - \overline{h})$ no espaço $L^2(0, T; H(\Omega))$, somando os resultados, usando os itens 1, 2 e 4 da Proposição 1.1.49 e a desigualdade dada em (2.1), e escrevendo

$$
\begin{aligned}
I(T) &= \int_0^T \langle u'' - \overline{u}'', u' - \overline{u}' \rangle_{L^2(\Omega)^3}\, dt + \int_0^T \langle u - \overline{u}, u' - \overline{u}' \rangle_{H_0^1(\Omega)^3}\, dx \\
&+ \int_0^T \alpha\,\Big\langle h' - \overline{h}', h - \overline{h} \Big\rangle_{L^2(\Omega)^3}\, dt,
\end{aligned}
$$

obtemos a seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
I(T) &= -\int_0^T \langle \rho(x,u') - \rho(x,\overline{u}'), u' - \overline{u}' \rangle_{L^2(\Omega)^3}\, dt \\
&- \int_0^T \frac{\alpha}{\beta} \left\langle \mathrm{rot}\,(h - \overline{h}), \mathrm{rot}\,(h - \overline{h}) \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} dt \\
&+ \int_0^T \alpha \left\langle \mathrm{rot}\, \left((u' - \overline{u}') \times \widetilde{H} \right), h - \overline{h} \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} dt \\
&+ \int_0^T \alpha \left\langle (\mathrm{rot}\,(h - \overline{h})) \times \widetilde{H}, u' - \overline{u}' \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} dt \\
&= -\int_0^T \langle \rho(x,u') - \rho(x,\overline{u}'), u' - \overline{u}' \rangle_{L^2(\Omega)^3}\, dt \\
&- \frac{\alpha}{\beta} \int_0^T \left\langle \mathrm{rot}\, h - \mathrm{rot}\, \overline{h}, \mathrm{rot}\, h - \mathrm{rot}\, \overline{h} \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} dt \\
&\leq 0
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

Aplicando a fórmula de integração por partes dada no Teorema 1.1.67, obtemos:

$$
\begin{aligned}
0 &= \|u'(0) - \overline{u}'(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|u(0) - \overline{u}(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)^3} \\
&+ \alpha \|h(0) - \overline{h}(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\
&\geq \|u'(T) - \overline{u}'(T)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|u(T) - \overline{u}(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)^3} \\
&+ \alpha \|h(T) - \overline{h}(T)\|^2_{L^2(\Omega)^3}.
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

Pela arbitrariedade de T, temos que

$$u \equiv \overline{u} \qquad \text{e} \qquad h \equiv \overline{h}.$$

■

2.3.2 Existência

Na prova da existência no Teorema 2.2.1, seguimos o conhecido método de Faedo-Galerkin. Essa método é baseado na construção de problemas projetados sobre os espaços de aproximação de Galerkin. Usando teoria de equações diferenciais ordinárias, garantimos a existência e unicidade de soluções suaves para os problemas projetados, que são chamadas soluções aproximadas. Estabelecemos algumas estimativas para mostrar que a sequência de soluções aproximadas é limitada em algum espaço adequado. Atráves de compacidade, extraimos uma subsequência convergente. Mostramos que o limite desta subsequência é solução do problema original. Nesta subseção, dividimos o método nas seguintes etapas:

- Projeção do sistema magneto-elástico nos espaços de aproximação de Galerkin e obtenção de soluções aproximadas u_m e h_m;

- Estimativa à priori dos termos $u_m(t)$ e $h_m(t)$;

- Estimativa à priori dos termos $u''_m(0)$ e $h'_m(0)$;

- Estimativa à priori dos termos $u'_m(t)$, $u''_m(t)$ e $h'_m(t)$;

- Extração do uma subsequência convergente à um par (u, h) candidato a solução do sistema magneto-elástico;

- Passagem ao limite do sistema projetado;

- Regularidade da solução (u, h);

- Análise das condições iniciais.

Soluções aproximadas

Consideramos os seguintes espaços de aproximação de Galerkin como dados em (1.89):

$$S_n = [w_1, \ldots, w_n] \quad \text{e} \quad \widetilde{S}_n = [z_1, \ldots, z_n], \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.41}$$

Então, existe uma sequência $(u_{0,n}, u_{1,n}, h_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$(u_{0,n}, u_{1,n}, h_{0,n}) \in S_n \times S_n \times \widetilde{S}_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{2.42}$$

e

$$\begin{aligned} &(u_{0,n}, u_{1,n}, h_{0,n}) \overset{n\to\infty}{\to} (u_0, u_1, h_0) \\ &\text{em} \quad \big(H_0^1(\Omega)^3 \cap H^2(\Omega)^3\big) \times H_0^1(\Omega)^3 \times Z(\Omega). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Fixamos $m \in \mathbb{N}$. Vamos procurar alguma constante $t_m > 0$ e funções suaves

$$u_m : [0, t_m) \longmapsto S_m, \qquad \widetilde{u}_m : [0, t_m) \longmapsto \widetilde{S}_m \tag{2.44}$$

tais que satisfaçam o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_m'', w\rangle_{L^2(\Omega)^3} + \langle u_m, w\rangle_{H_0^1(\Omega)^3} \\ &- \alpha \left\langle (\operatorname{rot} h_m) \times \widetilde{H}, w \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\ &+ \langle \rho(x, u_m'), w\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \ \forall\, w \in S_m, \ \forall\, t \in [0, t_m); \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle h_m', z \rangle_{L^2(\Omega)^3} + \frac{1}{\beta} \langle \operatorname{rot} h_m, \operatorname{rot} z \rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&- \left\langle \operatorname{rot} \left(u_m' \times \widetilde{H} \right), z \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \\
&\quad \forall\, z \in \widetilde{S}_m,\ \forall\, t \in [0, t_m); \qquad (2.46)
\end{aligned}
$$

$$
u_m(0) = u_{0,m}, \quad u_m'(0) = u_{1,m}, \quad h_m(0) = h_{0,m}. \qquad (2.47)
$$

Utilizando as propriedades de base, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
u_m(t) &= \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\, w_j, \qquad (2.48) \\
h_m(t) &= \sum_{j=1}^{m} \widetilde{g}_{jm}(t)\, z_j, \qquad (2.49)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
u_{0,m} &= \sum_{j=1}^{m} c_j\, w_j, \qquad (2.50) \\
u_{1,m} &= \sum_{j=1}^{m} d_j\, w_j, \qquad (2.51) \\
h_{0,m} &= \sum_{j=1}^{m} e_j\, z_j. \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

Usando as igualdades dadas em (1.86) e (1.88), vemos que é necessário e suficiente acharmos funções suaves

$$
g_{jm} : [0, t_m) \longmapsto \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \widetilde{g}_{jm} : [0, t_m) \longmapsto \mathbb{R},\ \forall\, 1 \le j \le m, \qquad (2.53)
$$

tais que satisfaçam o seguinte problema de valor inicial:

$$
\begin{aligned}
0 &= g''_{im}(t) + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\ \langle w_j, w_i \rangle_{H_0^1(\Omega)^3} \\
&- \sum_{j=1}^{m} \widetilde{g}_{jm}(t)\, \alpha \left\langle (\operatorname{rot} z_j) \times \widetilde{H}, w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \left\langle \rho \left(x, \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\, w_j \right), w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \\
&\quad \forall\, 1 \leq i \leq m,\ \forall\, 0 \leq t < t_m; \qquad (2.54) \\
0 &= \widetilde{g}'_{im}(t) + \sum_{j=1}^{m} \widetilde{g}_{jm}(t)\, \frac{1}{\beta}\ \langle \operatorname{rot} z_j, \operatorname{rot} z_i \rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&- \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t) \left\langle \operatorname{rot}\ \left(w_j \times \widetilde{H} \right), z_i \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \\
&\quad \forall\, 1 \leq i \leq m,\ \forall\, 0 \leq t < t_m; \qquad (2.55) \\
g_{jm}(0) &= c_j,\ g'_{jm}(0) = d_j,\ \widetilde{g}_{jm}(0) = e_j,\ \forall\, 1 \leq j \leq m. \qquad (2.56)
\end{aligned}
$$

Definimos

$$A^m, \quad B^m, \quad C^m, \quad D^m \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$$

por

$$
\begin{aligned}
A^m_{ij} &= \langle w_j, w_i \rangle_{H_0^1(\Omega)^3}, \qquad (2.57) \\
B^m_{ij} &= -\alpha \left\langle (\operatorname{rot} z_j) \times \widetilde{H}, w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \qquad (2.58) \\
C^m_{ij} &= \frac{1}{\beta}\ \langle \operatorname{rot} z_j, \operatorname{rot} z_i \rangle_{L^2(\Omega)^3}, \qquad (2.59) \\
D^m_{ij} &= -\left\langle \operatorname{rot}\ \left(w_j \times \widetilde{H} \right), z_i \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}. \qquad (2.60)
\end{aligned}
$$

Definimos também

$$
\begin{aligned}
G_m : \mathbb{R}^{3m} \quad &\longmapsto \quad \mathbb{R}^{3m} \\
(t_1, \cdots, t_{3m}) \quad &\longmapsto \quad \Bigg(\underbrace{0, \cdots, 0}_{m \quad vezes}, G_m^2(t_{m+1}, \cdots, t_{2m}), \underbrace{0, \cdots, 0}_{m \quad vezes}\Bigg),
\end{aligned}
$$

com

$$
\begin{aligned}
G_m^2(b_1, \cdots, b_m) \quad = \quad & \left(\int_\Omega \rho\left(x, \sum_{j=1}^m b_j\, w_j(x)\right) . w_1(x)\, dx, \cdots,\right. \\
& \left.\int_\Omega \rho\left(x, \sum_{j=1}^m b_j\, w_j(x)\right) . w_m(x)\, dx\right). \quad (2.61)
\end{aligned}
$$

Aplicando o Lema 2.1.1, segue de imediato que a função G_m é continuamente diferenciável.

Além disso, escrevemos

$$
\begin{aligned}
\phi_m(t) \quad &= \quad (g_{1m}(t), \cdots, g_{mm}(t), g'_{1m}(t), \cdots, g'_{mm}(t), \\
& \qquad \widetilde{g}_{1m}(t), \cdots, \widetilde{g}_{mm}(t)), \qquad (2.62) \\
x_0 \quad &= \quad (c_1, \cdots, c_m, d_1, \cdots, d_m, e_1, \cdots, e_m). \qquad (2.63)
\end{aligned}
$$

Então, o probrema de valor inicial dado em (2.54), (2.55) e (2.56) é equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}
\phi'_m(t) &= \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m \\ -A_m & 0_m & -B_m \\ 0_m & -C_m & -D_m \end{bmatrix} . \, \phi_m(t) \\
&+ G_m(\phi_m(t)), \ \forall\, 0 \leq t < t_m; \qquad (2.64) \\
\phi_m(0) &= x_0. \qquad (2.65)
\end{aligned}$$

Aplicando a Proposição de Picard-Lindelöf, obtemos o resultado desejado para um t_m maximal e com as seguintes suavidades:

$$u_m \in C^3([0, t_m); S_m) \qquad \text{e} \qquad h_m \in C^2([0, t_m); \widetilde{S}_m). \qquad (2.66)$$

Além disso, derivando as equações dadas em (2.54) e (2.55) e usando o Lema 2.1.1, obtemos que o par de soluções (u_m, h_m) satisfaz o seguinte sistema derivado:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle u'''_m(t), w \rangle_{L^2(\Omega)^3} + \langle u'_m(t), w \rangle_{H_0^1(\Omega)^3} \\
&- \alpha \left\langle (\operatorname{rot} h'_m(t)) \times \widetilde{H}, w \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \left\langle \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}(x, u'_m(t)) \right) . \, u''_m(t), w \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \\
&\quad \forall\, w \in S_m, \ \forall\, t \in [0, t_m); \qquad (2.67) \\
0 &= \langle h''_m(t), z \rangle_{L^2(\Omega)^3} + \frac{1}{\beta} \langle \operatorname{rot} h'_m(t), \operatorname{rot} z \rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&- \left\langle \operatorname{rot} \left(u''_m(t) \times \widetilde{H} \right), z \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \\
&\quad \forall\, z \in \widetilde{S}_m, \ \forall\, t \in [0, t_m). \qquad (2.68)
\end{aligned}$$

Estimativa à priori I

Escolhendo $w = u'_m(t)$ na equação dada em (2.45) e $z = h_m(t)$ na equação dada em (2.46), temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|u_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)^3}\right) \\
&- \alpha\left\langle (\operatorname{rot} h_m(t)) \times \widetilde{H}, u'_m(t)\right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \langle \rho(x, u'_m(t)), u'_m(t)\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \ \forall\, t \in [0, t_m); \qquad (2.69) \\
0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|h_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{1}{\beta}\|\operatorname{rot} h_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\
&- \left\langle \operatorname{rot}\left(u'_m(t) \times \widetilde{H}\right), h_m(t)\right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \\
&\forall\, t \in [0, t_m). \qquad (2.70)
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação dada em (2.70) por α, somando com a equação dada em (2.69), aplicando o item 4 da Proposição 1.1.49 e a hipótese 3 dada sobre a função ρ, obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &\geq -\langle \rho(x, u'_m(t)), u'_m(t)\rangle_{L^2(\Omega)^3} = \frac{\alpha}{\beta}\|\operatorname{rot} h_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|u_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)^3}\right. \\
&+ \left.\alpha\|h_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right), \ \forall\, t \in [0, t_m). \qquad (2.71)
\end{aligned}$$

Integrando de 0 à t e usando as suavidades dada em (2.66), temos que

$$
\begin{aligned}
\|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} &+ \|u_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)^3} + \alpha\,\|h_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \frac{2\,\alpha}{\beta}\int_0^t \|\mathrm{rot}\, h_m(r)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, dr \\
&\leq \|u_{1,m}\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|u_{0,m}\|^2_{H^1_0(\Omega)^3} \\
&+ \alpha\,\|h_{0,m}\|^2_{L^2(\Omega)^3},\ \forall\, t \in [0, t_m).
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

Pela convergência da sequência $(u_{0,n}, u_{1,n}, h_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ dada em (2.43), existe uma constante real e positiva C tal que

$$
\|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq C,\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < t_m, \tag{2.73}
$$

$$
\|u_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)^3} \leq C,\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < t_m, \tag{2.74}
$$

$$
\|h_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq C,\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < t_m, \tag{2.75}
$$

$$
\int_0^t \|\mathrm{rot}\, h_m(r)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, dr \leq C,\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < t_m. \tag{2.76}
$$

Além disso, usando as igualdades dadas em (1.86) e (1.88), temos que

$$
\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)^2 = \|u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3},\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 1 \leq t < t_m, \tag{2.77}
$$

$$
\sum_{j=1}^m g_{jm}'(t)^2 = \|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3},\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 1 \leq t < t_m, \tag{2.78}
$$

$$
\sum_{j=1}^m \widetilde{g}_{jm}(t)^2 = \|h_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3},\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 1 \leq t < t_m. \tag{2.79}
$$

Pelas estimativas dadas em (2.73), (2.74) e (2.75), igualdades dadas em (2.77), (2.78) e (2.79) e a maximalidade de t_m, obtemos:

$$
t_m = \infty,\ \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{2.80}
$$

Estimativa à priori II

Escolhendo $w = u''_m(t)$ na equação dada em (2.45), $z = h'_m(t)$ na equação dada em (2.46), aplicando $t = 0$ e usando os itens 1, 2 e 3 da Proposição 1.1.49, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
0 &= \|u''_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} - \mu \left\langle \Delta u_{0,m}, u''_m(0) \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&- (\mu + \lambda) \left\langle \nabla \mathrm{div}\, u_{0,m}, u''_m(0) \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&- \alpha \left\langle (\mathrm{rot}\, h_{0,m}) \times \widetilde{H}, u''_m(0) \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \left\langle \rho(x, u_{1,m}), u''_m(0) \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}; \qquad (2.81) \\
0 &= \|h'_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{1}{\beta} \left\langle \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h_{0,m}, h'_m(0) \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&- \left\langle \mathrm{rot}\left(u_{1,m} \times \widetilde{H}\right), h'_m(0) \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}. \qquad (2.82)
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Bunyakovskii-Schwartz (veja [4], pg 57), temos que

$$\begin{aligned}
C_1 \|u''_m(0)\| &\leq \|\Delta u_{0,m}\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\nabla \mathrm{div}\, u_{0,m}\|_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \|(\mathrm{rot}\, h_{0,m}) \times \widetilde{H}\|_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \|\rho(x, u_{1,m})\|_{L^2(\Omega)^3}; \qquad (2.83) \\
C_2 \|h'_m(0)\|_{L^2(\Omega)^3} &\leq \|\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h_{0,m}\|_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \|\mathrm{rot}\left(u_{1,m} \times \widetilde{H}\right)\|_{L^2(\Omega)^3}, \qquad (2.84)
\end{aligned}$$

para

$$C_1 = \frac{1}{\max\{\mu, |\lambda + \mu|, \alpha, 1\}} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{1}{\max\{\frac{1}{\beta}, 1\}}.$$

Usando a desigualdade dada em (2.4) para estimar o termo $\|\rho(x, u_{1,m})\|_{L^2(\Omega)^3}$, mostramos que existe uma constante real e positiva

C tal que

$$
\begin{aligned}
\|u_m''(0)\|_{L^2(\Omega)^3} &\leq C, \ \forall\, m \in \mathbb{N}, & (2.85)\\
\|h_m'(0)\|_{L^2(\Omega)^3} &\leq C, \ \forall\, m \in \mathbb{N}. & (2.86)
\end{aligned}
$$

Estimativa à priori III

Escolhendo $w = u_m''(t)$ na equação dada em (2.67) e $h = h_m'(t)$ na equação dada em (2.68), temos as seguintes igualdades:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|u_m'(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)^3}\right)\\
&- \alpha\left\langle (\operatorname{rot} h_m'(t)) \times \widetilde{H}, u_m''(t)\right\rangle_{L^2(\Omega)^3}\\
&+ \left\langle \frac{\partial\rho}{\partial s}(x, u_m'(t))\, .\, u_m''(t), u_m''(t)\right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \ \forall\, 0 \leq t < \infty; \qquad (2.87)\\
0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|h_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{1}{\beta}\|\operatorname{rot} h_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\\
&- \left\langle \operatorname{rot}\left(u_m''(t) \times \widetilde{H}\right), h_m'(t)\right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \ \forall\, 0 \leq t < \infty. \qquad (2.88)
\end{aligned}
$$

Multiplicando a equação dada em (2.88) por α, somando com a equação dada em (2.87), aplicando o item 4 da Proposição 1.1.49 e a hipótese 4 sobre a função ρ, obtemos:

$$
\begin{aligned}
0 &\geq -\left\langle \frac{\partial\rho}{\partial s}(x, u_m'(t))\, .\, u_m''(t), u_m''(t)\right\rangle_{L^2(\Omega)^3}\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|u_m'(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)^3} + \alpha\,\|h_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right)\\
&+ \frac{\alpha}{\beta}\|\operatorname{rot} h_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3}, \ \forall\, 1 \leq t < \infty.
\end{aligned}
$$

Integrando de 0 à t e usando as suavidades dada em (2.66), temos que

$$\begin{aligned}
\|u_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} &+ \|u_m'(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)^3} + \alpha\,\|h_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \frac{2\alpha}{\beta}\int_0^t \|\mathrm{rot}\, h_m'(r)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, dr \\
&\leq \|u_m''(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|u_{1,m}\|^2_{H_0^1(\Omega)^3} \\
&+ \alpha\,\|h_m'(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3},\ \forall\, 1 \leq t < \infty.
\end{aligned}$$

Pela convergência da sequência $(u_{0,n}, u_{1,n}, h_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ dada em (2.43) e desigualdades dadas em (2.85) e (2.86), existe uma constante real e positiva C tal que

$$\begin{aligned}
\|u_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} &\leq C,\ \forall\, m\in\mathbb{N},\ \forall\, 0\leq t<\infty, && (2.89)\\
\|u_m'(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)^3} &\leq C,\ \forall\, m\in\mathbb{N},\ \forall\, 0\leq t<\infty, && (2.90)\\
\|h_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} &\leq C,\ \forall\, m\in\mathbb{N},\ \forall\, 0\leq t<\infty, && (2.91)\\
\int_0^t \|\mathrm{rot}\, h_m'(r)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, dr &\leq C,\ \forall\, m\in\mathbb{N},\ \forall\, 0\leq t<\infty. && (2.92)
\end{aligned}$$

Candidato a solução

Usando as estimativas à priori obtidas, temos a seguinte conclusão:

$(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)^3)$;

$(u_m')_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)^3)$;

$(u_m'')_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)^3)$;

$(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^\infty(0,\infty; H(\Omega))$;

$(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;U(\Omega))$, $\quad \forall\, 0<T<\infty$;

$(h'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^\infty(0,\infty;H(\Omega))$;

$(h'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;U(\Omega))$, $\quad \forall\, 0<T<\infty$.

Aplicando o Teorema 1.1.60, o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki e os Lemas 1.1.61 e 1.1.64, temos que existe um par

$$(u,h)\in L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)^3)\times L^\infty(0,\infty;H(\Omega)) \tag{2.93}$$

tal que

$$(u',h')\in L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)^3)\times L^\infty(0,\infty;H(\Omega)), \tag{2.94}$$

$$u''\in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)^3), \tag{2.95}$$

$$h,\ h'\in L^2(0,T;U(\Omega)),\ \forall\, T>0, \tag{2.96}$$

e, para cada $0<T<\infty$ fixo, existe uma subsequência de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, que é denotada por $(u_{m,T})_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$u_{m,T} \overset{m\to\infty}{\rightarrow} u$ fraco-* em $L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)^3)$;

$u'_{m,T} \overset{m\to\infty}{\rightarrow} u'$ fraco-* em $L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)^3)$;

$u''_{m,T} \overset{m\to\infty}{\rightarrow} u''$ fraco-* em $L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)^3)$;

$h_{m,T} \overset{m\to\infty}{\rightarrow} h$ fraco-* em $L^{\infty}(0,\infty;H(\Omega))$;

$h_{m,T} \overset{m\to\infty}{\rightarrow} h$ fraco em $L^{2}(0,T;U(\Omega))$;

$h'_{m,T} \overset{m\to\infty}{\rightarrow} h'$ fraco-* em $L^{\infty}(0,\infty;H(\Omega))$;

$h'_{m,T} \overset{m\to\infty}{\rightarrow} h'$ fraco em $L^{2}(0,T;U(\Omega))$.

Vamos provar que o par (u,h), satisfaz as hipóteses do Teorema.

Passagem ao limite

Fixamos $T>0$. Começamos provando a seguinte convergência:

$$\left\langle u''_{m,T}, v\right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \overset{m\to\infty}{\rightarrow} \langle u'', v\rangle_{L^2(\Omega)^3} \quad \text{em} \quad D'(0,T),\ \forall\, v\in H_0^1(\Omega)^3. \tag{2.97}$$

De fato, se $\phi\in D(0,T)$ e $v\in H_0^1(\Omega)^3$, então $v\,\phi\in L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$. Usando as convvergências dadas anteriormente e o Lema 1.1.61, temos que $u''_{m,T} \overset{m\to\infty}{\rightarrow} u''$ fraco em $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$. O resultado segue de imediato pelo Teorema 1.1.60.

Analogamente, temos as seguintes convergências em $D'(0,T)$:

$$\langle u_{m,T}, v\rangle_{H_0^1(\Omega)^3} \overset{m\to\infty}{\rightarrow} \langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)^3},\ \forall\, v\in H_0^1(\Omega)^3; \tag{2.98}$$

$$\left\langle h'_{m,T}, z\right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \overset{m\to\infty}{\rightarrow} \langle h', z\rangle_{L^2(\Omega)^3},\ \forall\, z\in U(\Omega); \tag{2.99}$$

$$\langle h_{m,T}, z\rangle_{L^2(\Omega)^3} \overset{m\to\infty}{\rightarrow} \langle h, z\rangle_{L^2(\Omega)^3},\ \forall\, z\in H(\Omega); \tag{2.100}$$

$$\langle h_{m,T}, z\rangle_{U(\Omega)} \overset{m\to\infty}{\rightarrow} \langle h, z\rangle_{U(\Omega)},\ \forall z\in U(\Omega). \tag{2.101}$$

Além disso, das convergências dadas em (2.100) e (2.101), temos a seguinte convergência em $D'(0,T)$:

$$\langle \operatorname{rot} h_{m,T}, \operatorname{rot} z\rangle_{L^2(\Omega)^3} \overset{m\to\infty}{\to} \langle \operatorname{rot} h, \operatorname{rot} z\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \ \forall z \in U(\Omega). \quad (2.102)$$

Vamos provar as seguintes convergências em $D'(0,T)$:

$$\left\langle (\operatorname{rot} h_{m,T}) \times \widetilde{H}, v \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \overset{m\to\infty}{\to} \left\langle (\operatorname{rot} h) \times \widetilde{H}, v \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \ \forall v \in H_0^1(\Omega)^3; \quad (2.103)$$

$$\left\langle \operatorname{rot} \left(u'_{m,T} \times \widetilde{H} \right), z \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \overset{m\to\infty}{\to} \left\langle \operatorname{rot} \left(u' \times \widetilde{H} \right), z \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \ \forall z \in U(\Omega). \quad (2.104)$$

De fato, usando o item 4 da Proposição 1.1.49 e o Lema 1.1.61, obtemos as seguintes convergências em $D'(0,T)$:

$$\begin{aligned} \left\langle (\operatorname{rot} h_{m,T}) \times \widetilde{H}, v \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} &= \left\langle h_{m,T}, \operatorname{rot} \left(v \times \widetilde{H} \right) \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\ &\overset{m\to\infty}{\to} \left\langle h, \operatorname{rot} \left(v \times \widetilde{H} \right) \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\ &= \left\langle (\operatorname{rot} h) \times \widetilde{H}, v \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \\ &\quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^3; \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \operatorname{rot} \left(u'_{m,T} \times \widetilde{H} \right), z \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} &= \left\langle u'_{m,T}, (\operatorname{rot} z) \times \widetilde{H} \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\ &\overset{m\to\infty}{\to} \left\langle u', (\operatorname{rot} z) \times \widetilde{H} \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\ &= \left\langle \operatorname{rot} \left(u' \times \widetilde{H} \right), z \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \\ &\quad \forall z \in U(\Omega). \end{aligned} \quad (2.106)$$

Finalmente vamos obter a seguinte convergência em $D'(0,T)$:

$$\langle \rho(., u'_{m,T}), v\rangle_{L^2(\Omega)^3} \overset{m\to\infty}{\to} \langle \rho(., u'), v\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \ \forall v \in H_0^1(\Omega)^3. \quad (2.107)$$

Como visto anteriormente, é suficiente provar que

$$\rho(.,u'_{m,T}) \overset{m\to\infty}{\to} \rho(.,u') \text{ fraco em } L^2(0,T;L^2(\Omega)^3).$$

Além disso, pelo Lema 1.1.62, basta provar que

$$\rho(.,u'_{m,T}) \overset{m\to\infty}{\to} \rho(.,u') \text{ fraco em } L^2(Q)^3,$$

para $Q=(0,T)\times\Omega$.

Aplicando a desigualdade dada em (2.4), temos que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega |\rho(x,u'_{m,T})|^2\,dx\,dt &\le \int_0^T |\Omega| \left(\sup_{((x,s)\in\overline{\Omega}\times B[0,1])} |\rho(x,s)|^2\right) dt \\ &+ \int_0^T C\,b_1^2\,\|u'_m\|^6_{H^1(\Omega)^3}\,dt \\ &\le C_1 T, \end{aligned} \tag{2.108}$$

para alguma constante real e positiva C_1, não dependendo de m e T.

Por outro lado, note que

$$u'_{m,T} \overset{m\to\infty}{\to} u' \text{ fraco em } W(0,T,L^2(\Omega)^3).$$

Usando o Teorema de Aubin-Lions e a Proposição 1.1.17, temos que

$$u'_{m,T} \overset{m\to\infty}{\to} u' \text{ na norma de } L^2(0,T;L^2(\Omega)^3). \tag{2.109}$$

Aplicando o Teorema de Tonelli (veja [28], pg 96), temos

$$u'_{m,T} \overset{m\to\infty}{\to} u' \;\text{ na norma de } L^2(Q)^3. \tag{2.110}$$

Portanto, existe uma subsequência, ainda denotada por $(u'_{m,T})_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$u'_{m,T} \overset{m\to\infty}{\to} u' \text{ q.s. em } Q. \tag{2.111}$$

Pela continuidade da função ρ, obtemos a seguinte convergência:

$$\rho(, u'_m) \overset{m\to\infty}{\to} \rho(, u') \text{ q.s. em } Q. \tag{2.112}$$

Usando o Lema 1.1.23, a convergência dada em (2.107) segue de imediato.

Aplicando o limite nas equações dadas em (2.45) e (2.46), temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle u'', w\rangle_{L^2(\Omega)^3} + \langle u, w\rangle_{H_0^1(\Omega)^3} - \alpha \left\langle (\mathrm{rot} h) \times \widetilde{H}, w\right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \langle \rho(., u'), w\rangle_{L^2(\Omega)^3} \text{ em } \quad D'(0,T),\ \forall\, w \in S_m,\ \forall\, T > 0,\ \forall\, m \in \mathbb{N}; \\
0 &= \langle h', z\rangle_{L^2(\Omega)^3} + \frac{1}{\beta}\, \langle \mathrm{rot}\, h, \mathrm{rot}\, z\rangle_{L^2(\Omega)^3} - \left\langle \mathrm{rot}\, \left(u' \times \widetilde{H}\right), z\right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&\text{em } \quad D'(0,T),\ \forall\, z \in \widetilde{S}_m,\ \forall\, T > 0,\ \forall\, m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Usando as densidades de $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(\Omega)^3$ e de $\{\widetilde{S}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ em $U(\Omega)$, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle u'', w\rangle_{L^2(\Omega)^3} + \langle u, w\rangle_{H_0^1(\Omega)^3} - \alpha \left\langle (\mathrm{rot}\, h) \times \widetilde{H}, w\right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \langle \rho(., u'), w\rangle_{L^2(\Omega)^3} \text{ em } \quad D'(0,T),\ \forall\, w \in H_0^1(\Omega)^3,\ \forall\, T > 0; \quad (2.113) \\
0 &= \langle h', z\rangle_{L^2(\Omega)^3} + \frac{1}{\beta}\, \langle \mathrm{rot}\, h, \mathrm{rot}\, z\rangle_{L^2(\Omega)^3} - \left\langle \mathrm{rot}\, \left(u' \times \widetilde{H}\right), z\right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&\text{em } \quad D'(0,T),\ \forall z\, \in U(\Omega),\ \forall\, T > 0. \quad (2.114)
\end{aligned}$$

Regularidade

Usando as equações dadas em (2.113) e (2.114) e esccrevendo $I = \langle u(t), w\rangle_{H_0^1(\Omega)^3}$ e $J = \langle \mathrm{rot}\, h(t), \mathrm{rot}\, z\rangle_{L^2(\Omega)^3}$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
I &= -\left\langle -\alpha\,(\operatorname{rot} h(t)) \times \widetilde{H} + \rho(x, u'(t)) + u''(t), w \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \\
&\quad \forall\, w \in H_0^1(\Omega)^3,\ \forall\, t > 0 \text{ q.s.}; \qquad (2.115) \\
J &= -\beta \left\langle -\operatorname{rot}\left(u'(t) \times \widetilde{H}\right) + h'(t), z \right\rangle_{L^2(\Omega)^3}, \\
&\quad \forall\, z \in U(\Omega),\ \forall\, t > 0 \text{ q.s.}. \qquad (2.116)
\end{aligned}
$$

Aplicando o Teorema 1.1.50 e o Corolário 1.1.52 de Regularidade Elíptica, segue que

$$
u(t),\, h(t) \in H^2(\Omega)^3,\ \forall\, t > 0 \text{ q.s.}. \qquad (2.117)
$$

Além disso, existe uma constante real e positiva C tal que satisfaz as seguintes desigualdades $\forall\, t > 0$ q.s.:

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^2(\Omega)^3} &\le C\,\| -\alpha\,(\operatorname{rot} h(t)) \times \widetilde{H} + \rho(x, u'(t)) + u''(t)\|_{L^2(\Omega)^3}, ; \\
\|h(t)\|_{H^2(\Omega)^3} &\le C\,\| -\operatorname{rot}\left(u'(t) \times \widetilde{H}\right) + h'(t)\|_{L^2(\Omega)^3}, .
\end{aligned}
$$

Usando a Proposição 1.2.9, temos

$$
h(t) \in Z(\Omega),\ \forall\, t > 0 \text{ q.s.}. \qquad (2.118)
$$

Também, usando estimativas à priori, segue de imediato que existe uma constante real e positiva C_1 tal que satisfaz as seguintes desigualdades:

$$
\begin{aligned}
\|h(t)\|_{H^2(\Omega)^3} &\leq C(\| -\mathrm{rot}\left(u'(t)\times \widetilde{H}\right)\|_{L^2(\Omega)^3} + \|h'(t)\|_{L^2(\Omega)^3}) \\
&\leq C_1,\ \forall\, t>0 \text{ q.s.}; \qquad (2.119)\\
\|u(t)\|_{H^2(\Omega)^3} &\leq C(\| -\alpha\,(\mathrm{rot}\, h(t))\times \widetilde{H}\|_{L^2(\Omega)^3}) \\
&+ C(\|\rho(x,u'(t))\|_{L^2(\Omega)^3} + \|u''(t)\|_{L^2(\Omega)^3}) \\
&\leq C_1,\ \forall\, t>0 \text{ q.s..} \qquad (2.120)
\end{aligned}
$$

Portanto, temos que

$$(u,h)\in L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)^3\cap H^2(\Omega)^3)\times L^\infty(0,\infty;Z(\Omega)). \qquad (2.121)$$

Usando a Proposição 1.1.66 e o Teorema 1.1.67, mostramos que

$$u\in C([0,\infty);H_0^1(\Omega)^3)\cap C^1([0,\infty);L^2(\Omega)^3), \qquad (2.122)$$

$$h\in C([0,\infty);U(\Omega)). \qquad (2.123)$$

Condições iniciais

Escolhemos $\phi\in C^1([0,T],\mathbb{R})$ tal que $\phi(T)=0$ e $\phi(0)=1$. Seja $\psi\in H_0^1(\Omega)^3$. Então, $\psi\,\phi\in W(0,T;H_0^1(\Omega)^3)$. Aplicando a fórmula de integração por partes dada no Teorema 1.1.67, temos que

$$
\begin{aligned}
\langle u_{0,m},\psi\rangle_{H_0^1(\Omega)^3} &= -\int_0^T \langle u_{m,T},\phi'\,\psi\rangle_{H_0^1(\Omega)^3}\,dt \\
&+ \int_0^T \left\langle u'_{m,T},\phi\,\psi\right\rangle_{H_0^1(\Omega)^3}\,dt \\
&\overset{m\to\infty}{\to} -\int_0^T \langle u,\phi'\,\psi\rangle_{H_0^1(\Omega)^3} + \langle u',\phi\,\psi\rangle_{H_0^1(\Omega)^3}\,dt \\
&= \langle u(0),\psi\rangle_{H_0^1(\Omega)^3}\,. \qquad (2.124)
\end{aligned}
$$

Logo,

$$u_{0,m} \overset{m\to\infty}{\to} u(0) \text{ fraco em } H_0^1(\Omega)^3. \tag{2.125}$$

Pela convergência dada em (2.43), temos

$$u(0) = u_0. \tag{2.126}$$

De forma análoga obtemos

$$\begin{aligned} u'(0) &= u_1, && (2.127) \\ h(0) &= h_0. && (2.128) \end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Comportamento Assintótico

3.1 Hipóteses adicionais

Seguindo [7], impomos algumas condições adicionais sobre a função ρ, além das já mencionadas na seção 2.1, para garantirmos as estimativas para a obtenção da taxa de decaimento da energia associada às soluções do sistema magneto-elástico. De fato, supomos que a dissipação dada por ρ seja efetiva numa vizinhança de uma parte da fronteira de Ω e tenha um comportamento do tipo 'polinomial' na segunda variável. Para o conjunto Ω e as constantes do sistema, supomos, em todo o capítulo, que satisfazem as condições dadas no Teorema 2.2.1. Além disso, supomos também que o par (u, h) é solução do acoplamento magneto-elástico no sentido do Teorema 2.2.1, para uma dada condição inicial (u_0, u_1, h_0).

Seja

$$a \in L^{\infty}(\overline{\Omega}) \tag{3.1}$$

tal que

$$a(x) \geq 0, \; \forall \, x \in \overline{\Omega} \text{ q.s..} \tag{3.2}$$

Além das hipóteses dadas na seção 2.1, supomos que ρ satisfaça as seguintes condições:

5'. Existem constantes reais e positivas c_0 e c_1 tais que, $\forall \, (x, s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3$ com $|s| \leq 1$, temos

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a(x)|s|^{r+2} & \leq & c_0 \, \rho(x,s) \, . \, s \\ |\rho(x,s)| & \leq & c_1 \, a(x) \, \left(|s|^{r+1} + |s|\right), \end{array} \right.$$

para algum

$$-1 < r < \infty$$

fixo, e existem constantes reais e positivas c_2 e c_3 tais que, $\forall \, (x, s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3$ com $|s| > 1$, temos

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a(x)|s|^{p+2} & \leq & c_2 \, \rho(x,s) \, . \, s \\ |\rho(x,s)| & \leq & c_3 \, a(x) \, \left(|s|^{p+1} + |s|\right), \end{array} \right.$$

para algum

$$-1 < p \leq 2$$

fixo;

7. Existem $w \subset \mathbb{R}^3$ aberto, a_o constante real e positiva e x_0 um vetor fixo do $\mathbb{R}^3$ tais que

$$a(x) \geq a_0, \; \forall \, x \in w \cap \overline{\Omega} \;\; \text{q.s.}$$

e

$$\Gamma(x_0) \subset w,$$

para

$$\Gamma(x_0) := \{x \in \Gamma;\ (x - x_0)\,.\,\eta(x) \geq 0\}.$$

Notamos que as condições dadas na hipótese 5' implicam na condição dada na hipótese 5.

Para o nosso propósito, podemos assumir, sem perda de generalidade, que existem $\widetilde{\epsilon} > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\{x^i\}_{i=1}^{n_0} \subset \Gamma(x_0)$ tais que

$$w = \bigcup_{i=1}^{n_0} B(x^i, \widetilde{\epsilon}). \tag{3.3}$$

As constantes C e C_n obtidas daqui em diante, dependem das hipóteses fixadas na seção 2.1 e nesta seção, isto é, podem depender dos coeficientes do sistema (μ, λ, α, β, $\widetilde{H}$), das condições iniciais fixadas (u_0, u_1, h_0), das hipóteses sobre a função ρ (r, p, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, c_3, a_0, x_0, w) e do conjunto Ω. Além disso, lembramos que a norma em $H_0^1(\Omega)^3$ é como dada em (1.27).

Definição 3.1.1 *Definimos a seguinte energia para o sistema magneto-elástico:*

$$\begin{array}{rcl} \Xi : [0,\infty) & \longmapsto & [0,\infty) \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left\|u'(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \dfrac{1}{2}\left\|u(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)^3} + \dfrac{\alpha}{2}\left\|h(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)^3}. \end{array}$$

Se $T \geq 0$, então definimos também a seguinte função:

$$\begin{array}{rcl} \Delta_T\Xi : [0,\infty) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \Xi(t) - \Xi(t+T). \end{array}$$

Fazendo o produto interno da equação dada em (2.19) por u' e da equação dada em (2.20) por $\alpha\, h$ em $L^2(0,t,L^2(\Omega)^3)$, somando os resultados, usando os itens 1, 2, 3 e 4 da Proposição 1.1.49 e aplicando a fórmula de integração por partes dada no Teorema 1.1.67, obtemos a seguinte igualdade:

$$\Xi(t) = -\int_0^t \left(\langle \rho(.,u_s), u_s \rangle_{L^2(\Omega)^3} + \frac{\alpha}{\beta} \, \|\mathrm{rot}\, h\|^2_{L^2(\Omega)^3} \right) ds + \Xi(0), \;\; \forall\, t \geq 0. \tag{3.4}$$

Logo, a função energia $\Xi(t)$ é não crescente e $\Delta_T \Xi(t) \geq 0$.

De forma análoga, obtemos a seguinte igualdade:

$$\Delta_T \Xi(t) = \int_t^{t+T} \left(\langle \rho(.,u_s), u_s \rangle_{L^2(\Omega)^3} + \frac{\alpha}{\beta} \, \|\mathrm{rot}\, h\|^2_{L^2(\Omega)^3} \right) ds, \;\; \forall\, T,\, t \geq 0. \tag{3.5}$$

Além disso, se Ω for um conjunto simplesmente conexo, então, aplicando o Teorema de Poincaré com rot, existe uma constante real e positiva C tal que

$$\int_t^{t+T} \|h\|^2_{L^2(\Omega)^3} \, ds \leq C \int_t^{t+T} \|\mathrm{rot}\, h\|^2_{L^2(\Omega)^3} \, ds, \;\; \forall\, T,\, t \geq 0. \tag{3.6}$$

Definição 3.1.2 *Definimos os seguintes conjuntos:*

$$\Omega_1(t) = \{x \in \Omega;\; |u_t(t,x)| \leq 1\}; \tag{3.7}$$

$$\Omega_2(t) = \{x \in \Omega;\; |u_t(t,x)| > 1\}. \tag{3.8}$$

Pela completude da medida de Lebesgue (veja [4], pg 152), os conjuntos $\Omega_1(t)$ e $\Omega_2(t)$, que estão definidos a menos de um conjunto de medida nula, são mensuráveis.

A seguir, provamos dois resultados que são obtidos a partir das hipóteses dadas.

Proposição 3.1.3 *Seja $T \geq 0$. Então, existe uma constante real e* *positiva C tal que satisfaz as seguintes desigualdades:*

1. $\displaystyle\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^2\,dx\,ds \le C\,(\Delta_T\Xi(t))^{\frac{2}{r+2}}$ *se* $r \ge 0$, $\forall\, t \ge 0$*;*

2. $\displaystyle\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^{p+2}\,dx\,ds \le C\,(\Delta_T\Xi(t))$ *se* $0 \le p \le 2$, $\forall\, t \ge 0$*;*

3. $\displaystyle\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^{r+2}\,dx\,ds \le C\,(\Delta_T\Xi(t))$ *se* $-1 < r < 0$, $\forall\, t \ge 0$*;*

4. $\displaystyle\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^2\,dx\,ds \le C\,(\Delta_T\Xi(t))^{\frac{4}{4-p}}$ *se* $-1 < p < 0$, $\forall\, t \ge 0$.

Prova

Vamos provar cada item separadamente.

Item 1: Notamos que

$$\frac{2}{r+2} + \frac{r}{r+2} = 1.$$

Usando a desigualdade de Hölder, a hipótese $5'$ sobre a função ρ, a igualdade dada em (3.5) e escrevendo

$$J(t) = \int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^2\,dx\,ds,$$

obtemos:

$$
\begin{aligned}
J(t) &\leq \int_t^{t+T} \left(\int_{\Omega_1(s)} \left(a(x)\,|u_s(s,x)|^2\right)^{\frac{r+2}{2}}\, dx \right)^{\frac{2}{r+2}} \left(|\Omega_1(s)|\right)^{\frac{r}{r+2}}\, ds \\
&\leq \left(|\Omega|\right)^{\frac{r}{r+2}} \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} \left(a(x)\,|u_s(s,x)|^2\right)^{\frac{r+2}{2}}\, dx\, ds \right)^{\frac{2}{r+2}} (T)^{\frac{r}{r+2}} \\
&\leq C \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^{r+2}\, dx\, ds \right)^{\frac{2}{r+2}} \\
&\leq C \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} c_0\, \rho(x,u_s)\,.\,u_s\, dx\, ds \right)^{\frac{2}{r+2}} \\
&\leq C_1 \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega} \rho(x,u_s)\,.\,u_s\, dx\, ds \right)^{\frac{2}{r+2}} \\
&\leq C_1 \left(\Delta_T \Xi(t)\right)^{\frac{2}{r+2}}, \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

para C_1 uma constante real, positiva e independente de t.

Itens 2 e 3 : Pela hipótese dada em $5'$ e igualdade dada em (3.5), temos que

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^{p+2}\, dx\, ds &\leq \int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} c_2\, \rho(x,u_s)\,.\,u_s\, dx\, ds \\
&\leq C\, \Delta_T \Xi(t), \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^{r+2}\, dx\, ds &\leq \int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} c_0\, \rho(x,u_s)\,.\,u_s\, dx\, ds \\
&\leq C\, \Delta_T \Xi(t), \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

para C uma constante real, positiva e independente de t.

Item 4: Notamos que

$$\frac{-p}{4-p}+\frac{4}{4-p}=1.$$

Definindo

$$\kappa=\frac{4(p+2)}{4-p},$$

temos as seguintes igualdades:

$$\frac{-p}{4-p}=\frac{2-\kappa}{6} \quad \text{e} \quad \frac{4}{4-p}=\frac{\kappa}{p+2}.$$

Usando a desigualdade de Hölder, hipótese $5'$ sobre a função ρ, o fato que

$$u'\in L^{\infty}(0,\infty;H_0^1(\Omega)^3),$$

o item 2 da Proposição 1.1.30 e escrevendo

$$J(t)=\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^2\,dx\,ds,$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
J(t) &= \int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a\,|u_s|^{2-\kappa}|u_s|^{\kappa}\,dx\,ds\\
&\le \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} \left(a\,|u_s|^{\kappa}\right)^{\frac{p+2}{\kappa}}\,dx\,ds\right)^{\frac{\kappa}{p+2}}\\
&\quad \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} \left(|u_s|^{2-\kappa}\right)^{\frac{6}{2-\kappa}}\,dx\,ds\right)^{\frac{2-\kappa}{6}}\\
&\le C_1\left(\Delta_T\Xi(t)\right)^{\frac{4}{4-p}}\left(\int_t^{t+T}\|u_s\|^6_{H_0^1(\Omega)^3}\,ds\right)^{\frac{2-\kappa}{6}}\\
&\le C_2\left(\Delta_T\Xi(t)\right)^{\frac{4}{4-p}}, \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

para C_2 uma constante real, positiva e independente de t.

$\blacksquare$

Proposição 3.1.4 *Seja $T \geq 0$. Então, existe uma constante real e positiva C tal que satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \int_\Omega |\rho(x, u_s)| \, (|\nabla u| + |u|) \, dx\, ds &\leq C\, \Xi(t)^{\frac{1}{2}} \, (\Delta_T \Xi(t))^{\frac{r'}{2}} \\ &+ C, \Xi(t)^{q'} \, (\Delta_T \Xi(t))^{s'} \, , \\ & \forall\, t \geq 0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

para

$$r' = \begin{cases} \frac{2}{r+2} & se \quad r \geq 0; \\ \frac{2(r+1)}{r+2} & se \quad -1 < r < 0; \end{cases}$$

$$q' = \begin{cases} \frac{4-p}{4(p+2)} & se \quad 0 \leq p \leq 2; \\ \frac{1}{2} & se \quad -1 < p < 0; \end{cases}$$

$$s' = \begin{cases} \frac{p+1}{p+2} & se \quad 0 \leq p \leq 2; \\ \frac{2}{4-p} & se \quad -1 < p < 0. \end{cases}$$

Prova

Escrevemos

$$J(t) = \int_t^{t+T} \int_\Omega |\rho(x, u_s)| \, (|\nabla u| + |u|) \, dx\, ds.$$

Pela hipótese $5'$ dada sobre a função ρ, temos que

$$J(t) \quad \leq \quad c_1\, J_1(t) + c_3\, J_2(t), \tag{3.14}$$

para

$$J_1(t) := \int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} a\left(|u_s|^{r+1} + |u_s|\right)\left(|\nabla u| + |u|\right)\, dx\, ds,$$

$$J_2(t) := \int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} a\left(|u_s|^{p+1} + |u_s|\right)\left(|\nabla u| + |u|\right)\, dx\, ds.$$

De fato, se $r \geq 0$, usando o item 1 da Proposição 3.1.3, as desigualdades de Hölder e Poincaré e o não crescimento de $\Xi(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
J_1(t) &\leq C\left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} \left(a\,\left(|u_s|^{r+1} + |u_s|\right)\right)^2 dx\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} |\nabla u|^2\, dx\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_1 \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} a\,|u_s|^2\, dx\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} |\nabla u|^2\, dx\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_2\, \left(\Delta_T \Xi(t)\right)^{\frac{1}{r+2}} \left(\int_t^{t+T} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)^3}\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_2\, \left(\Delta_T \Xi(t)\right)^{\frac{1}{r+2}} \left(\int_t^{t+T} \Xi(s)\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_2\, \left(\Delta_T \Xi(t)\right)^{\frac{1}{r+2}} \left(T\, \Xi(t)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C_3\, \left(\Delta_T \Xi(t)\right)^{\frac{1}{r+2}}\, \Xi(t)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

para C_3 uma constante real, positiva e independente de t.

Se $-1 < r < 0$, notamos que

$$\frac{r+1}{r+2} + \frac{1}{r+2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{r+2}{2} + \frac{-r}{2} = 1.$$

Usando a desigualdade de Hölder e Poincaré e o item 3 da Proposição 3.1.3, temos:

$$
\begin{aligned}
J_1(t) &\leq C \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} a(x)\, |u_s|^{r+2}\, dx\, ds \right)^{\frac{r+1}{r+2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} (|\nabla u| + |u|)^{r+2}\; dx\, ds \right)^{\frac{1}{r+2}} \\
&\leq C_1\, \left(\Delta_T \Xi(t)\right)^{\frac{r+1}{r+2}} \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} |\nabla u|^2\, dx\, ds \right)^{\frac{1}{2}} (|\Omega|\, T)^{\frac{-r}{2(r+2)}} \\
&\leq C_2\, \left(\Delta_T \Xi(t)\right)^{\frac{r+1}{r+2}}\; \Xi(t)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

para C_2 uma constante real, positiva e independente de t.

Se $0 \leq p \leq 2$, notamos que

$$
\frac{p+1}{p+2} + \frac{1}{p+2} = 1.
$$

Usando a desigualdade de Hölder e o item 2 da Proposição 3.1.3, obtemos:

$$
\begin{aligned}
J_2(t) &\leq C \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} a(x)\, |u_s|^{p+2}\, dx\, ds \right)^{\frac{p+1}{p+2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} (|\nabla u| + |u|)^{p+2}\; dx\, ds \right)^{\frac{1}{p+2}} \\
&\leq C\, \left(\Delta_T \Xi(t)\right)^{\frac{p+1}{p+2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} (|\nabla u| + |u|)^{p+2}\; dx\, ds \right)^{\frac{1}{p+2}}, \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

para C uma constante real, positiva e independente de t.

Aplicando a desigualdade de interpolação dada no Lema 1.1.22, o item 2 da Proposição 1.1.30, a desigualdade de Poincaré, o fato que

$$u \in L^{\infty}(0, \infty, H^2(\Omega)^3)$$

e escrevendo

$$g(s) = \int_{\Omega_2(s)} (|\nabla u(s,x)| + |u(s,x)|)^{p+2}\, dx,$$

temos que

$$\begin{aligned}
g(s) &\leq C \, \||u| + |\nabla u|\|_{L^6(\Omega)}^{\Theta(p+2)} \, \||u| + |\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}^{(1-\Theta)(p+2)} \\
&\leq C_1 \left(\|u\|_{L^6(\Omega)^3} + \||\nabla u|\|_{L^6(\Omega)}\right)^{\Theta(p+2)} \, \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}^{(1-\Theta)(p+2)} \\
&\leq C_2 \left(\|u\|_{H^1(\Omega)^3} + \|u\|_{H^2(\Omega)^3}\right)^{\Theta(p+2)} \, \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}^{(1-\Theta)(p+2)} \\
&\leq C_3 \, \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}^{(1-\Theta)(p+2)} \\
&\leq C_3 \, \Xi(s)^{\frac{(1-\Theta)(p+2)}{2}}, \ \forall\, s \geq 0, \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

para C_3 uma constante real, positiva e independente de s e $\Theta = \dfrac{3p}{2(p+2)}$.

Logo, temos que

$$J_2(t) \leq C_4(\Delta_T \Xi(t))^{\frac{p+1}{p+2}}\, \Xi(t)^{\frac{4-p}{4(p+2)}}, \qquad (3.19)$$

para C_4 uma constante real, positiva e independente de t.

Se $-1 < p < 0$, pelas desigualdades de Hölder e Poincaré e pelo item 4 da Proposição 3.1.3 temos:

$$
\begin{aligned}
J_2(t) &\leq C \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} \left(a \left(|u_s|^{p+1} + |u_s| \right) \right)^2 \, dx \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} |\nabla u|^2 \, dx \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} \left(a \, |u_s| \right)^2 \, dx \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} |\nabla u|^2 \, dx \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_1 \, \left(\Delta_T \Xi(t) \right)^{\frac{2}{4-p}} \, \Xi(t)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

para C_1 uma constante real, positiva e independente de t.

Com as estimativas acima, o resultado segue de imediato.

■

3.2 Multiplicador auxiliar

Nesta seção, seguindo [7] e [8], obtemos um multiplicador usado no tratamento das estimativas do termo u na norma $L^2((\Omega \cap w) \times (t, t+T))$, como é visto na Proposição 3.2.2. Também, podemos obter estimativas através de um argumento de contradição, usando continuação única para o sistema de Lamé (veja [24], pg 88). Tal argumento é usado, por exemplo, em [36] (pgs 345-351) e em [37] (pgs 716-721). O método utilizado neste trabalho, assim como em [7], além de simplificar a demonstração, elimina a condição de que os dados iniciais devem estar contidos em uma bola limitada para o caso $p = r = 0$.

Proposição 3.2.1 *Considere a função $\chi(w)$ dada por*

$$\chi(w)(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in w; \\ 0 & se\ x \notin w. \end{cases}$$

Então, existe uma função

$$v \in L^{\infty}(0, \infty; H_0^1(\Omega)^3 \cap H^2(\Omega)^3), \tag{3.21}$$

tal que, para cada $0 \leq t < \infty$, a função $v(t)$ é solução fraca do seguinte sistema elástico:

$$-\mu\, \Delta v - (\lambda + \mu)\, \nabla div\, v \;=\; \chi(w)\, u(t) \;\; em\ \Omega \tag{3.22}$$

$$v|_{\Gamma} \;=\; 0 \;\; em\ \Gamma \tag{3.23}$$

Além disso, temos que

$$v' \in L^{\infty}(0, \infty; H_0^1(\Omega)^3 \cap H^2(\Omega)^3) \tag{3.24}$$

e, para cada $0 \leq t < \infty$, a função $v'(t)$ é solução fraca do seguinte sistema elástico:

$$-\mu\, \Delta z - (\lambda + \mu)\, \nabla div\, z \;=\; \chi(w)\, u'(t) \;\; em\ \Omega \tag{3.25}$$

$$z|_{\Gamma} \;=\; 0 \;\; em\ \Gamma. \tag{3.26}$$

Prova

Usando o Teorema de Lax-Milgram e a Regularidade Elíptica dada no Corolário 1.1.52, obtemos uma função $v(t) \in \big(H_0^1(\Omega)^3 \cap H^2(\Omega)^3\big)$, $\forall t \leq 0$ e uma constante real e positiva C tais que, para cada $0 \leq t < \infty$, a função $v(t)$ é solução fraca do sistema dado em (3.22) e (3.23), com a seguinte estimativa:

$$\|v(\widetilde{t})\|_{H^2(\Omega)^3} \leq C\, \|\chi(w)\, u(\widetilde{t})\|_{L^2(\Omega)^3},\ \forall \widetilde{t} \geq 0.$$

Como $u \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)^3)$, existe uma constante real e positiva C_1 tal que

$$\|v(\widetilde{t})\|_{H^2(\Omega)^3} \leq C_1,\ \forall \widetilde{t} \geq 0. \tag{3.27}$$

Além disso, usando definição de solução fraca e de produto interno em $H_0^1(\Omega)^3$ dado em (1.27), obtemos:

$$\langle y, v(t)\rangle_{H_0^1(\Omega)^3} = \langle y\, \chi(w), u(t)\rangle_{L^2(\Omega)^3},\ \forall\, y \in H_0^1(\Omega)^3. \tag{3.28}$$

Aplicando o Teorema de Pettis, temos que v(t) é fortemente mensurável. Logo, v satisfaz a condição dada em (3.21).

Analogamente, obtemos uma função $z \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)^3 \cap H^2(\Omega)^3)$, tal que, para cada $0 \leq t < \infty$ fixo, a função $z(t)$ é solução fraca do sistema dado em (3.25) e (3.26).

Resta provar que $v' = z$. De fato, sejam $y \in H_0^1(\Omega)^3$ e $\phi \in C_0^\infty(0,\infty)$. Usando o Lema 1.1.57, temos as seguintes igualdades:

$$
\begin{aligned}
\left\langle y, \int_0^\infty v(t)\,\phi'(t)\,dt \right\rangle_{H_0^1(\Omega)^3} &= \int_0^\infty \langle y, v(t)\,\phi'(t)\rangle_{H_0^1(\Omega)^3}\ dt \\
&= \int_0^\infty \langle y\,\chi(w), u(t)\,\phi'(t)\rangle_{L^2(\Omega)^3}\ dt \\
&= \left\langle y\,\chi(w), -\int_0^\infty u'(t)\,\phi(t)\,dt \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \\
&= \int_0^\infty \langle y\,\chi(w), -u'(t)\,\phi(t)\rangle_{L^2(\Omega)^3}\ dt \\
&= \int_0^\infty \langle y, -z(t)\,\phi(t)\rangle_{H_0^1(\Omega)^3}\ dt \\
&= \left\langle y, -\int_0^\infty z(t)\,\phi(t)\,dt \right\rangle_{H_0^1(\Omega)^3} \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Aplicando Teorema de Hahn-Banach, o resultado segue de imediato.

■

Escolhendo $y = v(t)$ na equação dada (3.28) e $y = v'(t)$ na equação análoga, obtemos uma constante real e positiva λ_1 tal que satisfaz as seguintes desigualdades:

$$
\begin{aligned}
\|v(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)^3} &\leq \lambda_1 \int_{w\cap\Omega} |u(t)|^2 dx,\ \forall\, t \geq 0 \text{ q.s.}; \qquad (3.30) \\
\|v'(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)^3} &\leq \lambda_1 \int_{w\cap\Omega} |u'(t)|^2 dx,\ \forall\, t \geq 0 \text{ q.s..} \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Além disso, escolhendo $y = u(t)$, obtemos

$$
\langle v(t), u(t)\rangle_{H_0^1(\Omega)^3} = \int_{w\cap\Omega} |u(t)|^2\, dx,\ \forall\, t \geq 0 \text{ q.s..} \qquad (3.32)
$$

Proposição 3.2.2 *Sejam v como na Proposição 3.2.1 e $\epsilon > 0$. Então,* *existe uma constante real e positiva C tal que*

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega}|u|^2\,dx\,ds &\leq C\,\Xi(t)+C\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega}|u_s|^2\,dx\,ds\\
&+ C\int_t^{t+T}\int_{\Omega}|v|\,|\rho(x,u_s)|\,dx\,ds\\
&+ \epsilon\int_t^{t+T}\int_{\Omega}|u_s|^2\,dx\,ds,\ \forall t,T\geq 0. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Prova

Multiplicando a equação dada em (2.19) por v, integrando Ω, usando os itens 1 e 2 da Proposição 1.1.49 e a igualdade dada em (3.32), obtemos e seguinte equação:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle u_{tt},v\rangle_{L^2(\Omega)^3}+\langle u,u\rangle_{L^2(w\cap\Omega)^3}-\alpha\left\langle(\mathrm{rot}\,h)\times\widetilde{H},v\right\rangle_{L^2(\Omega)^3}\\
&+ \langle\rho(.,u_t),v\rangle_{L^2(\Omega)^3}\,. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Integrando de t à $t+T$ e aplicando a fórmula de integração por partes dada no Teorema 1.1.67, temos que

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega}|u|^2\,dx\,ds &= \int_t^{t+T}\langle u_s,v_s\rangle_{L^2(\Omega)^3}\,ds-\langle u_s,v\rangle_{L^2(\Omega)^3}\Big|_t^{t+T}\\
&- \int_t^{t+T}\langle\rho(.,u_s),v\rangle_{L^2(\Omega)^3}\,ds\\
&+ \alpha\int_t^{t+T}\left\langle(\mathrm{rot}\,h)\times\widetilde{H},v\right\rangle_{L^2(\Omega)^3}\,ds. \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Vamos estimar cada termo da igualdade dada em (3.35). De fato, usando as desigualdades de Hölder, Young e a desigualdade dada em (3.31), temos:

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \langle u_s, v_s \rangle_{L^2(\Omega)^3} \, ds \quad &\leq \quad C \left(\int_t^{t+T} \|u_s\|^2_{L^2(\Omega)^3} \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \qquad \left(\int_t^{t+T} \|v_s\|^2_{H_0^1(\Omega)^3} \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad C_1 \left(\int_t^{t+T} \|u_s\|^2_{L^2(\Omega)^3} \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \qquad \left(\int_t^{t+T} \|u_s\|^2_{L^2(w\cap\Omega)^3} \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad \frac{\epsilon}{2} \int_t^{t+T} \|u_s\|^2_{L^2(\Omega)^3} \, ds \\
&+ \quad C_2 \int_t^{t+T} \|u_s\|^2_{L^2(w\cap\Omega)^3} \, ds, \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

para C_2 uma constante real, positiva e independente de t e T.

Também, usando a desigualdade dada em (3.30), obtemos:

$$
\begin{aligned}
2 \left. \langle u_s, v \rangle_{L^2(\Omega)^3} \right|_t^{t+T} \quad &\leq \quad 2 \|u_{t+T}\|_{L^2(\Omega)^3} \|v(t+T)\|_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \quad 2 \|u_t\|_{L^2(\Omega)^3} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)^3} \\
&\leq \quad \|u_{t+T}\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|v(t+T)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \quad \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|v(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\
&\leq \quad \|u_{t+T}\|^2_{L^2(\Omega)^3} + C \|u(t+T)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\
&+ \quad \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)^3} + C \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\
&\leq \quad C_1 \left(\Xi(t+T)) + \Xi(t) \right), \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

para C_1 uma constante real, positiva e independente de t e T, e, escrevendo

$$
D(t,T) = \alpha \int_t^{t+T} \left\langle (\operatorname{rot} h) \times \widetilde{H}, v \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} \, ds,
$$

obtemos:

$$
\begin{aligned}
D(t,T) &\leq C\left(\int_t^{t+T} \|\mathrm{rot}\, h\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t+T} \|v\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\int_t^{t+T} \|\mathrm{rot}\, h\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t+T} \|u\|^2_{L^2(w\cap\Omega)^3}\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_1 \int_t^{t+T} \|\mathrm{rot}\, h\|^2_{L^2(\Omega)^3}\, ds + \frac{1}{2}\int_t^{t+T} \|u\|^2_{L^2(w\cap\Omega)^3}\, ds \\
&\leq C_2\, \Delta_T \Xi(t) + \frac{1}{2}\int_t^{t+T} \|u\|^2_{L^2(w\cap\Omega)^3}\, ds, \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

para C_2 uma constante real, positiva e independente de t e T. Pelas desigualdades acima, o resultado segue de imediato.

■

Proposição 3.2.3 *Seja $T \geq 0$. Então, existe uma constante real e positiva C tal que*

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,|v|\,dx\,ds &\leq C\,\Xi(t)^{\frac{1}{2}}\,(\Delta_T\Xi(t))^{\frac{r'}{2}} \\
&+ C\,\Xi(t)^{q'}\,(\Delta_T\Xi(t))^{s'},\ \forall\, t \geq 0,
\end{aligned}
$$

para r', q' e s' como na Proposição 3.1.4.

Prova

Escrevemos

$$
I(t) = \int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,|v|\,dx\,ds.
$$

Pela hipótese $5'$ dada sobre a função ρ, temos que

$$
\begin{aligned}
I(t) \quad &\leq \quad c_1 \int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} a \, \left(|u_s|^{r+1} + |u_s| \right) \, |v| \, dx \, ds \\
&+ \quad c_3 \int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} a \, \left(|u_s|^{p+1} + |u_s| \right) \, |v| \, dx \, ds. \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

Vamos estimar as seguinte integrais:

$$
I_1(t) := \int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} a \, \left(|u_s|^{r+1} + |u_s| \right) \, |v| \, dx \, ds;
$$

$$
I_2(t) := \int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} a \, \left(|u_s|^{p+1} + |u_s| \right) \, |v| \, dx \, ds.
$$

De fato, se $r \geq 0$, usando o item 1 da Proposição 3.1.3, as desigualdades (3.30), de Hölder e Poincaré e o não crescimento de $\Xi(t)$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
I_1(t) \quad &\leq \quad C \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} \left(a \left(|u_s|^{r+1} + |u_s| \right) \right)^2 \, dx \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \qquad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} |v|^2 \, dx \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad C_2 \left(\Delta_T \Xi(t) \right)^{\frac{1}{r+2}} \left(\int_t^{t+T} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)^3} \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad C_2 \left(\Delta_T \Xi(t) \right)^{\frac{1}{r+2}} \left(\int_t^{t+T} \Xi(s) \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad C_3 \, \left(\Delta_T \Xi(t) \right)^{\frac{1}{r+2}} \, \Xi(t)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

para C_3 uma constante real, positiva e independente de t.

Se $-1 < r < 0$, notamos que

$$\frac{r+1}{r+2} + \frac{1}{r+2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{r+2}{2} + \frac{-r}{2} = 1.$$

Usando a desigualdade de Hölder, o item 3 da Proposição 3.1.3 e desigualdade dada em (3.30), temos que

$$\begin{aligned}
I_1(t) &\leq C\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a\,|u_s|^{r+2}\,dx\,ds\right)^{\frac{r+1}{r+2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} |v|^{r+2}\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{r+2}} \\
&\leq C_1\,(\Delta_T\Xi(t))^{\frac{r+1}{r+2}}\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} |v|^2\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\,(|\Omega|\,T)^{\frac{-r}{2(r+2)}} \\
&\leq C_2\,(\Delta_T\Xi(t))^{\frac{r+1}{r+2}}\,\Xi(t)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

para C_2 uma constante real, positiva e independente de t.

Se $0 \leq p \leq 2$, notamos que

$$\frac{p+1}{p+2} + \frac{1}{p+2} = 1.$$

Usando a desigualdade de Hölder e o item 2 da Proposição 3.1.3, obtemos:

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leq C\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a\,|u_s|^{p+2}\,dx\,ds\right)^{\frac{p+1}{p+2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} |v|^{p+2}\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{p+2}} \\
&\leq C\,(\Delta_T\Xi(t))^{\frac{p+1}{p+2}}\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} |v|^{p+2}\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{p+2}}. \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

para C uma constante real, positiva e independente de t.

Aplicando a desigualdade de interpolação dada no Lema 1.1.22, o item 2 da Proposição 1.1.30, as desigualdades dada em (3.30) e de Poincaré, e o fato que

$$v \in L^{\infty}(0, \infty; H^1(\Omega)^3),$$

temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2(s)} |v|^{p+2}\, dx &\leq C\, |||v|||_{L^6(\Omega)}^{\Theta(p+2)}\, |||v|||_{L^2(\Omega)}^{(1-\Theta)(p+2)} \\
&\leq C\, \|v\|_{H^1(\Omega)^3}^{\Theta(p+2)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)^3}^{(1-\Theta)(p+2)} \\
&\leq C_1\, \|v\|_{L^2(\Omega)^3}^{(1-\Theta)(p+2)} \\
&\leq C_1\, \Xi(s)^{\frac{(1-\Theta)(p+2)}{2}}, \ \forall s \geq 0, \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

para C_1 uma constante real, positiva e independente de s e $\Theta = \dfrac{3p}{2(p+2)}$.

Logo, temos que

$$I_2(t) \leq C_2\, (\Delta_T \Xi(t))^{\frac{p+1}{p+2}}\, \Xi(t)^{\frac{4-p}{4(p+2)}}, \qquad (3.44)$$

para C_2 uma constante real, positiva e independente de t.

Se $-1 < p < 0$, pelas desigualdades dada em (3.30), de Hölder e o item 4 da Proposição 3.1.3, temos:

$$
\begin{aligned}
I_2(t) &\leq C\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)}\left(a\,|u_s|^{p+1}+|u_s|\right)^2\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)}|v|^2\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)}\left(a\,|u_s|\right)^2\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)}|v|^2\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_1\,\left(\Delta_T\Xi(t)\right)^{\frac{2}{4-p}}\,\Xi(t)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

para C_1 uma constante real, positiva e independente de t.

Com as estimativas acima, o resultado segue de imediato.

■

3.3 Lemas auxiliares

Nesta seção enunciamos três resultados conhecidos na literatura (veja [24]) e que são úteis nas estimativas da energia do sistema magneto-elástico na fronteira do conjunto Ω. Este resultados são usados posteriomente nos Lemas 3.4.4 e 3.4.6. Lembramos que w é o conjunto dado em (3.3).

Lema 3.3.1 *Existem um conjunto $\widetilde{w} \subset \mathbb{R}^3$ aberto e uma função $m \in$*

$W^{1,\infty}(\Omega)$ *tais que satisfazem as seguintes condições:*

$$\Gamma(x_0) \subset \widetilde{w} \subset\subset w; \tag{3.46}$$

$$0 \leq m(x) \leq 1, \ \forall x \in \Omega; \tag{3.47}$$

$$\frac{|\nabla m|^2}{m} \text{ é limitado em } \Omega \text{ q.s.}; \tag{3.48}$$

$$m(x) = 1, \ \forall x \in \Omega \cap \widetilde{w}; \tag{3.49}$$

$$m(x) = 0, \ \forall x \in \Omega / w. \tag{3.50}$$

Esboço da Prova

Seja $\widetilde{\epsilon}' > 0$ tal que $\widetilde{\epsilon}' < \widetilde{\epsilon}$ e

$$\Gamma(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} B(x^i, \widetilde{\epsilon}'),$$

para $\widetilde{\epsilon}$ e $\{x^i\}_{i=1}^{n_0}$ dados em (3.3).

Definimos o seguinte conjunto:

$$\widetilde{w} := \bigcup_{i=1}^{n_0} B(x^i, \widetilde{\epsilon}'). \tag{3.51}$$

Consideramos a seguinte função:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \widetilde{w}; \\ \dfrac{(\widetilde{\epsilon} - \widetilde{\epsilon}' - d(x, \partial\widetilde{w}))^2}{(\widetilde{\epsilon} - \widetilde{\epsilon}')^2} & \text{se} \quad x \in \overline{w}/\widetilde{w}, \end{cases}$$

Notamos que $\phi \in C(\overline{w})$ e $\phi \equiv 0$ sobre a fronteira de w.

Além disso, para quase todo $y \in w/\widetilde{w}$ fixo, existe $1 \leq i_0 \leq n_0$ (i_0 depende de y) tal que

$$|y - x^{i_0}| < \min_{1 \leq i \leq n_0,\, i \neq i^0} |y - x^i|. \tag{3.52}$$

Então, neste caso, temos a seguinte igualdade numa vizinhança de y:

$$\phi(x) = \frac{\left(\widetilde{\epsilon} - |x^{i_0} - x|\right)^2}{\left(\widetilde{\epsilon} - \widetilde{\epsilon}'\right)^2}.$$

Portanto, temos que

$$\frac{\partial\, \phi(y)}{\partial\, y_i} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad y \in \widetilde{w}; \\ \dfrac{2\,\left(x_i^{i_0} - y_i\right)\,\left(\widetilde{\epsilon} - |x^{i_0} - y|\right)}{\left(\widetilde{\epsilon} - \widetilde{\epsilon}'\right)^2\,|x^{i_0} - x|} & \text{se} \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in w/\widetilde{w} \ \text{q.s.}, \end{cases}$$

com $x^{i_0} = (x_1^{i_0}, x_2^{i_0}, x_3^{i_0})$ como dado em (3.52). Logo,

$$\frac{\partial\, \phi(x)}{\partial\, x_i} \in L^\infty(w),\ \forall\, 1 \leq i \leq 3 \quad \text{e} \quad \text{supess}_{x\in w} \frac{|\nabla\phi(x)|^2}{\phi(x)} < \infty.$$

Usando a Proposição 1.1.27, obtemos:

$$\phi \in W^{1,\infty}(w) \cap H_0^1(w).$$

Aplicando a Proposição 1.1.28 (caso $p = 2$), segue que a seguinte função

$$m(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{se} \quad x \in w; \\ 0 & \text{se} \quad x \in \Omega/w, \end{cases}$$

satisfaz as conclusões do Lema.

■

Lema 3.3.2 *Considere $\widetilde{w}$ como no Lema 3.3.1. Então, existe uma* *função* $\psi \in C^1(\overline{\Omega})^3$ *tal que satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\psi(x) = \eta(x), \ \forall\, x \in \Gamma(x_0); \tag{3.53}$$

$$\psi(x)\,.\,\eta(x) \geq 0, \ \forall\, x \in \Gamma; \tag{3.54}$$

$$\psi(x) = 0, \ \forall\, x \in \Omega/\widetilde{w}. \tag{3.55}$$

Prova

Seja $x \in \Gamma(x_0)$. Consideramos o par (V_x, f) como dado na Proposição 1.1.5. Como Γ é compacto, existem $n \in \mathbb{N}$ e $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \Gamma(x_0)$ tais que $\Gamma(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Definimos o seguinte conjunto:

$$V := \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}. \tag{3.56}$$

Seja $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ uma Partição C^∞ da Unidade relativo à $\{V_{x_i}\}_{i=1}^n$. Definimos também a seguinte função:

$$\xi = \sum_{i=1}^n \frac{\nabla f_{x_i}}{|\nabla f_{x_i}|}\,\varphi_i. \tag{3.57}$$

Note que $\xi \in C^1(V)^3$ e $\xi \equiv \eta$ sobre $\Gamma(x_0)$. Escolhemos $\widetilde{\widetilde{w}} \subset \mathbb{R}^3$ aberto com

$$\Gamma(x_0) \subset\subset \widetilde{\widetilde{w}} \subset\subset (V \cap \widetilde{w})$$

e $\sigma \in C_0^\infty\,(V \cap \widetilde{w})$ uma função real e não negativa tal que

$$\sigma \equiv 1 \text{ sobre } \widetilde{\widetilde{w}}.$$

Então, a função $\psi := \xi\,\sigma$ satisfaz as conclusões do Lema.

■

Lema 3.3.3 *Se* $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$*, então*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_\Gamma \eta_i = \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_\Gamma \eta_j \text{ em } L^2(\Gamma),\ \forall\, 1 \leq i, j \leq 3. \tag{3.58}$$

Prova

Seja $\phi \in D(\mathbb{R}^3)$. Aplicando a fórmula de Green dada em (1.9), obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \phi|_\Gamma \left.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_\Gamma \eta_i \, d\Gamma &= \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \, dx \\
&= \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx + \int_\Omega \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \, dx \\
&= \int_\Omega -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} u + \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \, dx \\
&+ \int_\Gamma \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right|_\Gamma u|_\Gamma \, \eta_j \, d\Gamma \\
&= \int_\Omega -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} u + \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \, dx \\
&= \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \, dx \\
&- \int_\Gamma \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right|_\Gamma u|_\Gamma \, \eta_i \, d\Gamma \\
&= \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \, dx \\
&= \int_\Gamma \phi|_\Gamma \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_\Gamma \eta_j \, d\Gamma.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Usando a densidade de $D(\Gamma)$ em $L^2(\Gamma)$ dada pelo item 2 da Proposição 1.1.32 (caso $s = 0$), o resultado segue de imediato.

■

3.4 Teorema de comportamento assintótico

Nesta seção, enunciamos um Teorema que descreve a taxa de decaimento da energia associada ao sistema magneto-elástico. A demonstração completa, que é feita em [7], está dividida em uma série de Lemas e Proposições, e basea-se no Lema de Nakao (veja [32], [31] e [33]). Algumas estimativas são obtidas através de identidades da energia dadas no Lema 3.4.4.

Teorema 3.4.1 *Suponha que Ω seja simplesmente conexo e $\lambda+\mu > 0$. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *Se $r = p = 0$, existem $\gamma_1 > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\Xi(t) \leq C\,\Xi(0)\,e^{-\gamma_1 t},\ \forall\, t \geq 0; \tag{3.60}$$

2. *Se $-1 < r < \infty$ e $-1 < p \leq 2$, com $(p, z) \neq (0, 0)$, existem $\gamma > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\Xi(t) \leq C\,(1+t)^{-\gamma},\ \forall\, t \geq 0, \tag{3.61}$$

para

- $\gamma = \min\{\frac{2}{r}, \frac{4\,(p+1)}{p}\}$ *se* $r > 0$ *e* $0 < p \leq 2$;
- $\gamma = \frac{4\,(p+1)}{p}$ *se* $r = 0$ *e* $0 < p \leq 2$;
- $\gamma = \frac{2}{r}$ *se* $r > 0$ *e* $p = 0$;
- $\gamma = \min\{\frac{2}{r}, \frac{-4}{p}\}$ *se* $r > 0$ *e* $-1 < p < 0$;
- $\gamma = \min\{\frac{-2\,(r+1)}{r}, \frac{4\,(p+1)}{p}\}$ *se* $-1 < r < 0$ *e* $0 < p \leq 2$;
- $\gamma = \frac{-2\,(r+1)}{r}$ *se* $-1 < r < 0$ *e* $p = 0$;

- $\gamma = \min\{\dfrac{-2\,(r+1)}{r}, \dfrac{-4}{p}\}$ *se* $-1 < r < 0$ *e* $-1 < p < 0$;
- $\gamma = \dfrac{-4}{p}$ *se* $r = 0$ *e* $-1 < p < 0$.

Para demonstramos o Teorema 3.4.1, é suficiente provarmos a seguinte Proposição:

Proposição 3.4.2 *Suponha que* Ω *seja simplesmente conexo e* $\lambda+\mu > 0$. *Então, existem constantes reais e positivas* T *e* C *tais que satisfazem a seguinte desigualdade:*

$$\begin{aligned} \Xi(t) &\leq C\,\Delta_T\Xi(t) + C\,\Delta_T\Xi(t)^{r'} + C, \Delta_T\Xi(t)^{p'} \\ &+ C\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega}|u_s|^2 dxds, \ \forall\, t \geq 0, \end{aligned} \tag{3.62}$$

com

$$r' = \begin{cases} \frac{2}{r+2} & se \quad r \geq 0; \\ \frac{2(r+1)}{r+2} & se \quad -1 < r < 0; \end{cases}$$

$$p' = \begin{cases} \frac{4(p+1)}{4+5p} & se \quad 0 \leq p \leq 2; \\ \frac{4}{4-p} & se \quad -1 < p < 0. \end{cases}$$

Prova do Teorema 3.4.1

Seja T como na Proposição 3.4.2. Usando a Proposição 3.1.3, temos

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega}|u_s|^2\,dx\,ds &\leq \frac{1}{a_0}\int_t^{t+T}\int_{\Omega} a\,|u_s|^2\,dx\,ds \\ &= \frac{1}{a_0}\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a\,|u_s|^2\,dx\,ds \\ &+ \frac{1}{a_0}\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a\,|u_s|^2\,dx\,ds \\ &\leq C\,\Delta_T\Xi(t) + C\,\Delta_T\Xi(t)^{r'} \\ &+ C\,\Delta_T\Xi(t)^{p'}, \ \forall\, t \geq 0, \end{aligned} \tag{3.63}$$

para C uma constante real, positiva e independente de t.

Pela Proposição 3.4.2, temos

$$\Xi(t) \leq C \left(\Delta_T \Xi(t) + \Delta_T \Xi(t)^{r'} + \Delta_T \Xi(t)^{p'} \right), \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.64}$$

Notamos que $0 < r', p' \leq 1$. Como $\Delta_T \Xi(t)$ é uma função não negativa e limitada, existe uma constante real e positiva C_1, independente de t, tal que

$$\Xi(t) \leq C_1 \left(\Delta_T \Xi(t) \right)^k, \ \forall\, t \geq 0, \ \text{para } k = \min\{r', p'\}. \tag{3.65}$$

Além disso, como $\Xi(t)$ é descrescente, então

$$\sup_{t \leq s \leq t+T} \Xi(s)^{\frac{1}{k}} \leq \Xi(t)^{\frac{1}{k}} \leq C_1\, \Delta_T \Xi(t). \tag{3.66}$$

Aplicando o Lema de Nakao, o resultado segue de imediato.

■

Observamos que na estimativa dada em (3.63), usamos o fato que $a_0 > 0$. Portanto este trabalho não contempla o caso em que a função ρ é identicamente nula. O objetivo daqui em diante é provar a Proposição 3.4.2. Para tal, provaremos antes uma série de resultados auxiliares. De fato, é suficiente provarmos a seguinte Proposição:

Proposição 3.4.3 *Suponha que Ω seja simplesmente conexo e $\lambda + \mu >$*

0. *Então, existe uma constante real e positiva $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \Xi(s)\,ds &\leq C \int_t^{t+T} \int_\Omega |rot\, h| \ (|\nabla u| + |u|) \ dx\,ds \\
&+ C \int_t^{t+T} \int_\Omega |\rho(x,u_s)| \ (|\nabla u| + |u|) \ dx\,ds \\
&+ C \int_t^{t+T} \int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds \\
&+ C \int_t^{t+T} \int_{w\cap\Omega} |u|^2\,dx\,ds + C\,\Xi(T), \ \forall\, T,\, t > 0.
\end{aligned}$$

Prova da Proposição 3.4.2

Seja $\delta > 0$. Usando as desigualdades de Poincaré e Hölder, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|\,(|\nabla u| + |u|)\,dx\,ds &\leq \delta \int_t^{t+T} \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,ds \\
&+ C \int_t^{t+T} \int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2\,dx\,ds \\
&\leq C_1\,\delta \int_t^{t+T} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)^3}\,ds \\
&+ C\,\Delta_T \Xi(t), \ \forall\, T,\, t \geq 0. \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

para C e C_1 constantes reais, positivas e independentes de t e T. Além disso, C_1 independe de δ.

Usando as Proposições 3.2.2 e 3.4.3 e escolhendo δ e ϵ suficientemente pequenos, obtemos que existe uma constante real e positiva C, idependente de T e t, tal que

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \Xi(s)\,ds &\leq C \int_t^{t+T} \int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,|v|\,dx\,ds + C\,\Xi(t) \\
&+ C \int_t^{t+T} \int_\Omega |\rho(x,u_s)| \ (|\nabla u| + |u|) \ dx\,ds \\
&+ C \int_t^{t+T} \int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds, \ \forall\, T,\, t \geq 0. \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

Como Ξ é não negativa e decrescente, temos

$$
\begin{aligned}
T\,\Xi(t+T) &\leq \int_t^{t+T} \Xi(s)\,ds \leq C \int_t^{t+T} \int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds \\
&+ C \int_t^{t+T} \int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,\left(|\nabla u| + |u|\right)\,dx\,ds \\
&+ C \int_t^{t+T} \int_\Omega |\,\rho(x,u_s)|\,|v|\,dx\,ds + C\,\Xi(t), \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

para C uma constante real, positiva e independente de t e T.

Somando $\Xi(t)$ em ambos os lados da equação dada em (3.69), temos

$$
\begin{aligned}
T\,\Xi(t+T) + \Xi(t) &\leq C \int_t^{t+T} \int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds + (1+C)\,\Xi(t) \\
&+ C \int_t^{t+T} \int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,\left(|\nabla u| + |u|\right)\,dx\,ds \\
&+ C \int_t^{t+T} \int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,|v|\,dx\,ds. \qquad (3.70)
\end{aligned}
$$

Escolhendo $T > C+1$ e lembrando que $\Xi(t)$ é uma função não negativa, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\Xi(t) &\leq C \int_t^{t+T} \int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds + T\,\Delta_T\Xi(t) \\
&+ C \int_t^{t+T} \int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,\left(|\nabla u| + |u|\right)\,dx\,ds \\
&+ C \int_t^{t+T} \int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,|v|\,dx\,ds. \qquad (3.71)
\end{aligned}
$$

Aplicando as Proposições 3.1.4 e 3.2.3, temos que

$$
\begin{aligned}
\Xi(t) &\leq C\left(\Delta_T\Xi(t) + \Xi(t)^{\frac{1}{2}}\left(\Delta_T\Xi(t)\right)^{\frac{r'}{2}} + \Xi(t)^{q'}\left(\Delta_T\Xi(t)\right)^{s'}\right) \\
&+ \int_t^{t+T} \int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds. \qquad (3.72)
\end{aligned}
$$

Considere novamente $\delta > 0$. Então, temos a seguinte desigualdade:

$$\Xi(t)^{\frac{1}{2}} \left(\Delta_T \Xi(t)\right)^{\frac{r'}{2}} \leq \frac{\delta}{2}\, \Xi(t) + \frac{1}{2\delta} \left(\Delta_T \Xi(t)\right)^{r'}. \tag{3.73}$$

Notamos que $0 < q' < 1$. Definindo $q'' = 1 - q'$ e usando a desigualdade de Young, temos a seguinte desigualdade:

$$\Xi(t)^{q'} \left(\Delta_T \Xi(t)\right)^{s'} \leq q'\, \delta^{\frac{1}{q'}}\, \Xi(t) + \frac{q''}{\delta^{\frac{1}{q''}}} \left(\Delta_T \Xi(t)\right)^{\frac{s'}{q''}}. \tag{3.74}$$

É fácil verificar que $\frac{s'}{q''} = p'$. Escolhendo δ suficientemente pequeno, o resultado segue de imediato.

■

Resta provar a Proposição 3.4.3. Esta prova é dividida em três Lemas como seguem:

Lema 3.4.4 *Se $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$, $m \in W^{1,\infty}(\Omega)$, então valem as seguintes igualdades $\forall\, T,\ t \geq 0$:*

$$\begin{aligned}
\left.\int_\Omega m\,(u_s\,.\,u)\,dx\right|_t^{t+T} &= -(\lambda+\mu)\int_t^{t+T}\int_\Omega m\,(div\,u)^2\,dx\,ds \\
&- (\lambda+\mu)\int_t^{t+T}\int_\Omega (u\,.\,\nabla m)\,div\,u\,dx\,ds \\
&- \int_t^{t+T}\int_\Omega m\,\left(-|u_s|^2 + \mu\,|\nabla u|^2\right)\,dx\,ds \\
&+ \int_t^{t+T}\int_\Omega m\,\left(\left(\alpha\,(rot\,h)\times \widetilde{H}\right)\,.\,u\right)\,dx\,ds \\
&- \mu\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial m}{\partial x_j}\,u_i\,dxds \\
&- \int_t^{t+T}\int_\Omega m\,(\rho(x,u_s)\,.\,u)\,dx\,ds;
\end{aligned} \tag{3.75}$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u_s \,.\, u\, dx\Big|_t^{t+T} &= \int_t^{t+T}\int_\Omega |u_s|^2\, dx\, ds \\
&- \int_t^{t+T}\int_\Omega \left(\mu\,|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)\,(div\, u)^2\right)\, dx\, ds \\
&+ \int_t^{t+T}\int_\Omega \left(\alpha\,(rot\, h)\times \widetilde{H}\right)\,.\, u\, dx\, ds \\
&- \int_t^{t+T}\int_\Omega \rho(x,u_s)\,.\, u\, dx\, ds; \qquad (3.76)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J(t,T) &= \int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{3} \mu\,\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\, dx\, ds \\
&+ \int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{3} (\lambda+\mu)\,\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\, dx\, ds \\
&- \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma (\psi\,.\,\eta)\,\left(\mu\,|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)\,(div\, u)^2\right)\, d\Gamma\, ds \\
&- \alpha\int_t^{t+T}\int_\Omega (\psi:\nabla u)\,.\,\left((rot\, h)\times \widetilde{H}\right)\, dx\, ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (div\,\psi)\,\left(|u_s|^2\right)\, dx\, ds \\
&- \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (div\,\psi)\,\left(\mu\,|\nabla u|^2 - (\lambda+\mu)\,(div\, u)^2\right)\, dx\, ds \\
&+ \int_t^{t+T}\int_\Omega (\psi:\nabla u)\,.\,\rho(x,u_s)\, dx\, ds, \qquad (3.77)
\end{aligned}
$$

para

$$
J(t,T) = -\int_\Omega (\psi:\nabla u)\,.\, u_s\, dx\Big|_t^{t+T},
$$

Prova

Vamos provar a igualdade dada em (3.77). De fato, multiplicando a equação dada em (2.19) por $\psi:\nabla u$, integrando em $\Omega\times(t,t+T)$,

obtemos:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_t^{t+T} \langle u_{ss}, \psi : \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)^3}\, ds \\
&+ \int_t^{t+T} \langle -\mu\, \Delta u - (\lambda+\mu)\,\mathrm{div}\, \nabla u, \psi : \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)^3}\, ds \\
&+ \int_t^{t+T} \left\langle -\alpha\,(\mathrm{rot}\, h) \times \widetilde{H} + \rho(.,u_s), \psi : \nabla u \right\rangle_{L^2(\Omega)^3} ds. \quad (3.78)
\end{aligned}
$$

Vamos calcular cada termo da igualdade dada em (3.78) separadamente. De fato, aplicando o Lema 1.1.57 e o Teorema de Tonelli (veja [28], pg 96), obtemos que

$$\psi : \nabla u \in W(0,\infty; L^2(\Omega)^3), \quad \text{com} \quad (\psi : \nabla u)_t = (\psi : \nabla u_t).$$

Usando a fórmula de integração por partes dada no Teorema 1.1.67, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \langle u_{ss}, \psi : \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)^3}\, ds &= -\int_t^{t+T} \langle u_s, (\psi : \nabla u_s) \rangle_{L^2(\Omega)^3}\, ds \\
&+ \left. \langle u_s, \psi : \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)^3} \right|_t^{t+T}. \quad (3.79)
\end{aligned}
$$

Aplicando a fórmula de Green dada em (1.9) e a regra do produto dada no Corolário 1.1.37, temos que

$$\langle u_s, \psi : \nabla u_s \rangle_{L^2(\Omega)^3} = -\langle u_s, \psi : \nabla u_s \rangle_{L^2(\Omega)^3} - \int_\Omega (\mathrm{div}\, \psi)\, |u_s|^2 dx. \quad (3.80)$$

Usando novamente a fórmula de Green dada em (1.9) e a regra do produto dada no Corolário 1.1.37, obtemos as seguintes igualdades:

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla \mathrm{div}\, u, \psi : \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)^3} &= +\frac{1}{2} \int_\Omega (\mathrm{div}\, \psi)\, (\mathrm{div}\, u)^2 \, dx \\
&- \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \, dx \\
&- \frac{1}{2} \int_\Gamma (\psi \,.\, \eta)\, (\mathrm{div}\, u)^2 \, d\Gamma \\
&+ \int_\Gamma \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \psi_k \, \eta_j \, d\Gamma; \quad (3.81) \\
\langle \Delta u, \psi : \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)^3} &= \frac{1}{2} \int_\Omega (\mathrm{div}\, \psi)\, |\nabla u|^2 \, dx \\
&- \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \, dx \\
&- \frac{1}{2} \int_\Gamma (\psi \,.\, \eta)\, |\nabla u|^2 \, d\Gamma \\
&+ \int_\Gamma \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \psi_k \, \eta_j \, d\Gamma. \quad (3.82)
\end{aligned}
$$

Além disso, aplicando o Lema 3.3.3, temos que

$$
\int_\Gamma \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \psi_k \, \eta_j \, d\Gamma = \int_\Gamma (\psi \,.\, \eta)\, (\mathrm{div}\, u)^2 \, d\Gamma; \quad (3.83)
$$

$$
\int_\Gamma \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \psi_k \, \eta_j \, d\Gamma = \int_\Gamma (\psi \,.\, \eta)\, |\nabla u|^2 \, d\Gamma. \quad (3.84)
$$

Pelas igualdades dada acima, a equação dada em (3.77) segue de imediato. As igualdades dadas em (3.75) e (3.76) são obtidas de forma análogas multiplicando a equação dada em (2.19) por $m\, u$ e u respectivamente.

■

Lema 3.4.5 *Sejam* $\lambda+\mu > 0$ *e* $K(t,T) = \displaystyle\int_t^{t+T} \|u_s\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)^3}\, ds$. *Então, existe uma constante real e positiva* C *tal que satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$
\begin{aligned}
K(t,T) \;&\leq\; C\,\mu \int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} |\nabla u|^2\, d\Gamma\, ds \\
&+\; C\,(\lambda+\mu)\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} (div\, u)^2\, d\Gamma\, ds \\
&+\; C\int_t^{t+T}\int_{\Omega} (|\nabla u| + |u|)\; |\rho(x,u_s)|\, dx\, ds \\
&+\; C\int_t^{t+T}\int_{\Omega} (|\nabla u| + |u|)\; |rot\, h|\, dx\, ds \\
&+\; C\,\Xi(t),\ \forall T,\, t \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.85}
$$

Prova

Escolha $\psi = (x - x_0)$ na equação dada em (3.77). Escrevendo

$$
J(t,T) = -\int_{\Omega} ((x-x_0) : \nabla u)\,.\, u_s\, dx \bigg|_t^{t+T},
$$

obtemos as seguintes igualdades:

$$
\begin{aligned}
J(t,T) \;&=\; -\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma} ((x-x_0)\,.\,\eta)\,\left(\mu\,|\nabla u|^2\right)\, d\Gamma\, ds \\
&-\; \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{\Gamma} ((x-x_0)\,.\,\eta)\,\left((\lambda+\mu)\,(\mathrm{div}\, u)^2\right)\, d\Gamma\, ds \\
&+\; \int_t^{t+T}\int_{\Omega} ((x-x_0) : \nabla u)\,.\,(\rho(x,u_s))\, dx\, ds \\
&-\; \int_t^{t+T}\int_{\Omega} ((x-x_0) : \nabla u)\,.\,\left(\alpha\,(\mathrm{rot}\, h)\times \widetilde{H}\right)\, dx\, ds \\
&+\; \int_t^{t+T} \frac{3}{2}\,\|u_s\|^2_{L^2(\Omega)^3} - \frac{1}{2}\,\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)^3}\, ds.
\end{aligned} \tag{3.86}
$$

Usando a igualdade dada em (3.76), temos

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega u_s \,.\, u\,dx\Big|_t^{t+T} &= \int_t^{t+T} \left(-\|u_s\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)^3}\right) ds \\
&- \int_t^{t+T}\int_\Omega u\,.\,\left(\alpha\,(\operatorname{rot} h)\times \widetilde{H}\right) dx\,ds \\
&+ \int_t^{t+T}\int_\Omega u\,.\,\left(\rho(x,u_s)\right) dx\,ds. \qquad (3.87)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}K(t,T) &= -\int_\Omega u_s\,.\,u\,dx\Big|_t^{t+T} \\
&+ \alpha\int_t^{t+T}\int_\Omega u\,.\,((\operatorname{rot} h)\times\widetilde{H})\,dx\,ds \\
&- \int_t^{t+T}\int_\Omega u\,.\,\rho(x,u_s)\,dx\,ds \\
&- \int_\Omega ((x-x_0):\nabla u)\,.\,u_s\,dx\Big|_t^{t+T} \\
&+ \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma (((x-x_0)\,.\,\eta))\,\left((\lambda+\mu)\,(\operatorname{div} u)^2\right) d\Gamma\,ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma (((x-x_0)\,.\,\eta))\,\left(\mu\,|\nabla u|^2\right) d\Gamma\,ds \\
&+ \alpha\int_t^{t+T}\int_\Omega ((x-x_0):\nabla u)\,.\,\left((\operatorname{rot} h)\times\widetilde{H}\right) dx\,ds \\
&- \int_t^{t+T}\int_\Omega ((x-x_0):\nabla u)\,.\,\rho(x,u_s)\,dx\,ds. \qquad (3.88)
\end{aligned}
$$

Usando a definição de $\Gamma(x_0)$ e o fato que $\mu > 0$ e $\lambda+\mu > 0$, existe uma constante real e positiva C, independente de T e t, tal que

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma ((x-x_0)\,.\,\eta)\,\left(\mu\,|\nabla u|^2\right) d\Gamma &\leq C\int_{\Gamma(x_0)} \mu\,|\nabla u|^2\,d\Gamma; \\
\int_\Gamma ((x-x_0)\,.\,\eta)\,\left((\lambda+\mu)\,(\operatorname{div} u)^2\right) d\Gamma &\leq C\int_{\Gamma(x_0)} (\lambda+\mu)\,(\operatorname{div} u)^2\,d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Temos também a seguinte estimativa:

$$|(x-x_0):\nabla u(t,x)| \le \left(\sup_{y\in\Omega}|y-x_0|\right)\,|\nabla u(t,x)| \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Omega \quad \text{q.s..}$$

Além disso, pelas desigualdades de Cauchy-Bunyakovskii-Schwartz (veja [2], pg 57) e de Young, existe uma constante real e positiva C, independente de T e t, tal que

$$\int_\Omega u_s\,.\,u\,dx\bigg|_t^{t+T} \le C\,\left(\Xi(t+T)+\Xi(t)\right),$$

$$\int_\Omega ((x-x_0):\nabla u)\,.\,u_s\,dx\bigg|_t^{t+T} \le C\,\left(\Xi(t+T)+\Xi(t)\right).$$

A partir da desigualdades acima, o resultado segue de imediato.

■

Lema 3.4.6 *Sejam $\lambda+\mu>0$ e $M(t,T)=\int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)}\mu\,|\nabla u|^2+(\lambda+\mu)\,(div\,u)^2\,d\Gamma\,ds$. Então, existe uma constante real e positiva C tal que satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\begin{aligned} M(t,T) \;\le\; & C\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega}\left(|u_s|^2+|u|^2\right)\,dx\,ds \\ +\; & C\int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,|\nabla u|\,dx\,ds \\ +\; & C\int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,|u|\,dx\,ds \\ +\; & C\int_t^{t+T}\int_\Omega |rot\,h|\,|\nabla u|\,dx\,ds \\ +\; & C\int_t^{t+T}\int_\Omega |rot\,h|\,|u|\,dx\,ds \\ +\; & C\,\Xi(t),\ \forall T,\, t\ge 0. \end{aligned} \tag{3.89}$$

Prova

Consideramos funções ψ e m e um conjunto $\widetilde{w}$ como dados nos Lemas 3.3.2 e 3.3.1. Usando a equação dada em (3.77), a definição de $\Gamma(x_0)$, as propriedades (3.53) e (3.54) da função ψ, o fato que $\mu > 0$ e $\lambda + \mu > 0$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} M(t,T) \quad &\leq \quad \frac{1}{2} \int_t^{t+T} \int_\Gamma (\psi \,.\, \eta) \left(\mu \, |\nabla u|^2 \right) \, d\Gamma \, ds \\
&+ \quad \frac{1}{2} \int_t^{t+T} \int_\Gamma (\psi \,.\, \eta) \left((\lambda + \mu) \, (\operatorname{div} u)^2 \right) \, d\Gamma \, ds \\
&= \quad \int_\Omega (\psi : \nabla u) \,.\, u_s \, dx \Big|_t^{t+T} \\
&+ \quad \int_t^{t+T} \int_\Omega (\psi : \nabla u) \,.\, \rho(x, u_s) \, dx \, ds \\
&- \quad \alpha \int_t^{t+T} \int_\Omega (\psi : \nabla u) \,.\, \left((\operatorname{rot} h) \times \widetilde{H} \right) \, dx \, ds \\
&+ \quad \frac{1}{2} \int_t^{t+T} \int_\Omega (\operatorname{div} \psi) \left(|u_s|^2 \right) \, dx \, ds \\
&- \quad \frac{1}{2} \int_t^{t+T} \int_\Omega (\operatorname{div} \psi) \left(\mu \, |\nabla u|^2 + (\lambda + \mu) \, (\operatorname{div} u)^2 \right) \, dx \, ds \\
&+ \quad \int_t^{t+T} \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{3} \left(\mu \, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \, \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \, dx \, ds \\
&+ \quad \int_t^{t+T} \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{3} \left((\lambda + \mu) \, \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \, \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \, \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \, dx \, ds. \qquad (3.90)
\end{aligned}
$$

Notamos que

$$
|(\psi(x) : \nabla u(t,x))| \leq \left(\sup_{y \in \overline{\Omega}} (\psi(y)) \right) |\nabla u(t,x)| \quad \text{em} \quad (0, \infty) \times \Omega \quad \text{q.s..}
$$

Além disso, existe uma contante real e positiva C, independente de t e T, tal que

$$\int_\Omega (\psi : \nabla u) \, . \, u_s \, dx \Big|_t^{t+T} \leq C \, \left(\Xi(t) + \Xi(t+T)\right).$$

Escrevemos

$$\begin{aligned} J_1(t,T) &= \frac{1}{2}\int_t^{t+T} \int_\Omega (\operatorname{div}\psi) \, \left(|u_s|^2\right) \, dx \, ds \\ &- \frac{1}{2}\int_t^{t+T} \int_\Omega (\operatorname{div}\psi) \, \left(\mu \, |\nabla u|^2 + (\lambda+\mu) \, (\operatorname{div} u)^2\right) \, dx \, ds \\ &+ \int_t^{t+T} \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{3} \left(\mu \, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \, \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) dx \, ds \\ &+ \int_t^{t+T} \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{3} \left((\lambda+\mu) \, \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \, \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \, \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) dx \, ds. \quad (3.91) \end{aligned}$$

Usando as propriedades (3.55) da função ψ e as propriedades (3.47) e (3.49) da função m, obtemos a existência de uma constante real e positiva C, independente de T e t, tal que

$$\begin{aligned} J_1(t,T) &\leq C \int_t^{t+T} \int_{w \cap \Omega} |u_s|^2 \, dx \, ds \\ &+ C \int_t^{t+T} \int_\Omega m \, \left(\mu \, |\nabla u|^2 + (\lambda+\mu) \, (\operatorname{div} u)^2\right) \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Resta estimar a seguinte integral:

$$J_2(t,T) = \int_t^{t+T} \int_\Omega m \, \left(\mu |\nabla u|^2 + (\lambda+\mu) \, (\operatorname{div} u)^2\right) \, dx \, ds. \quad (3.92)$$

Pela equação dada em (3.75) e propriedade (3.50) de m, obtemos:

$$
\begin{aligned}
J_2(t,T) &= -\int_\Omega m\, u_s\, .\, u\, dx\Big|_t^{t+T} + \int_t^{t+T}\int_\Omega m\,|u_s|^2\, dx\, ds \\
&- \int_t^{t+T}\int_\Omega m\,(\rho(x,u_s)\,.\,u)\, dx\, ds \\
&- \mu\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial m}{\partial x_j}\, u_i\, dx\, ds \\
&+ \alpha\int_t^{t+T}\int_\Omega m\,\left((\operatorname{rot} h)\times \widetilde{H}\right)\,.\,u\, dx\, ds \\
&- (\lambda+\mu)\int_t^{t+T}\int_\Omega (\operatorname{div} u)\,(u\,.\,\nabla m)\, dx\, ds \\
&\leq C\,\Xi(t) + C\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\, dx\, ds \\
&+ C\int_t^{t+T}\int_\Omega (|\rho(x,u_s)| + |\operatorname{rot} h|)\; |u|\, dx\, ds \\
&- \mu\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial m}{\partial x_j}\, u_i\, dx\, ds \\
&- (\lambda+\mu)\int_t^{t+T}\int_\Omega (\operatorname{div} u)\,(u\,.\,\nabla m)\, dx\, ds. \qquad (3.93)
\end{aligned}
$$

Devemos estimar os dois últimos termos da desigualdade dada em (3.93). De fato, seja $\epsilon > 0$. Então, pelas propriedades (3.48) e (3.50) de m, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial m}{\partial x_j}\, u_i\, dx\, ds &\leq \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} m\,\epsilon\,|\nabla u|^2\, dx\, ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} \frac{|\nabla m|^2}{m\,\epsilon}\,|u|^2\, dx\, ds \\
&\leq \frac{C}{\epsilon}\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} |u|^2\, dx\, ds \\
&+ C\,\epsilon\int_t^{t+T}\int_\Omega m\,|\nabla u|^2\, dx\, ds;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T}\int_\Omega (\operatorname{div} u)\,(u\,.\,\nabla m)\,dx\,ds \quad &\le \quad \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} m\,\epsilon\,(\operatorname{div} u)^2\,dx\,ds \\
&+ \quad \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} \frac{|\nabla m|^2}{m\,\epsilon}\,|u|^2\,dx\,ds \\
&\le \quad \frac{\epsilon}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega m\,(\operatorname{div} u)^2\,dx\,ds \\
&+ \quad C\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} |u|^2\,dx\,ds.
\end{aligned}
$$

para alguma constante real e positiva C independente de t e T.

Escolhendo ϵ suficientemente pequeno, o resultado segue de imediato.

■

Prova da Proposição 3.4.3

Usando os Lemas 3.4.5 e 3.4.6, temos a seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T}\left(\|u_s\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)^3}\right)ds \quad &\le \quad C\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla u|\,|\rho(x,u_s)|\,dx\,ds \\
&+ \quad C\int_t^{t+T}\int_\Omega |u|\,|\rho(x,u_s)|\,dx\,ds \\
&+ \quad C\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla u|\,|\operatorname{rot} h|\,dx\,ds \\
&+ \quad C\int_t^{t+T}\int_\Omega |u|\,|\operatorname{rot} h|\,dx\,ds \\
&+ \quad C\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds \\
&+ \quad C\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} |u|^2\,dx\,ds \\
&+ \quad \Xi(t),\ \forall\, T,\, t\ge 0, \qquad (3.94)
\end{aligned}
$$

para uma constante real e positiva C independente de t e T.

Como Ω é um conjunto simplesmente conexo, aplicando a desigualdade dada em (3.6) e a igualdade dada em (3.5), o resultado segue de imediato.

$\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] R. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, (1975).

[2] E. Andreou e G. Dassios. *Dissipation of energy for magnetoelastic waves in a conductive medium.* Quart. Appl. Math. LV(1) (1997), pgs 23-29.

[3] M. A. Astaburuaga e R. C. Charão. *Stabilization of the total energy for a system of elasticity with localized dissipation.* Differential and Integral Equations, vol 15, nº 11, (2002), pgs 1357-1376.

[4] R. G. Bartle. *Elements of integration.* John Wiley Sons, (1966).

[5] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, (1983).

[6] H. Brezis e T. Cazenave. *Nonlinear evolution equations.* Technical report, (1994).

[7] R. C. Charão, J. C. Oliveira e G. P. Menzala. *Energy decay rates of magnetoelastic waves in a bounded conductive medium.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, series A, vol. 25 (2009), pgs 797-821.

[8] Bisognin E., Bisognin V. e R. C. Charão. *Uniform stabilization for elastic waves system with highly nonlinear localized dissipation.* Portugaliae Mathematica, Vol. 60, Fasc. 1 (2003), pgs 99-124.

[9] R. Chill e E. Fašangová. *Gradient systems.* 13th International Internet Seminar, (2009).

[10] R. Dautray e J. L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology vol 3. Spectral theory and applications.* Spriger-Verlag, (1990).

[11] C. I. Doering e A. O. Lopes. *Equações diferenciais ordinárias.* IMPA, (2005).

[12] J. J. Duistermaat e J. A. C. Kolk. *Multidimensional real analysis II.* Cambridge, (2004).

[13] G. Duvaut e J. L. Lions. *Inequalities in mechanics and physics.* Springer-Verlag, (1976).

[14] L. C. Evans. *Partial differential equations.* American Mathematical Society, (1997).

[15] J. F. Gerbeau, C. L. Bris e T. Lelièvre. *Mathematical methods for the magnetohydrodynamics of liquid metals.* Oxford Science Publications, (2006).

[16] V. Girault e P. A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations.* Springer-Verlag, (1986).

[17] A. M. Gomes. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução.* UFRJ, (2005).

[18] S. Kesavan. *Topics in functional analysis and applications.* John Wiley Sons, (1989).

[19] L. Knopoff. *The interaction between elastic wave motions and a magnetic field in electrical conductors.* Journal of Geophysical Research, vol. 60, issue 4 (1955), pgs 441-456.

[20] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley Sons, (1989).

[21] G. Lebeau e E. Zuazua. *Decay rates for the three-dimensional linear system of thermoelasticity.* Arch. Rational Mech. Anal, vol. 148, nº 3 (1999), pgs 179-231.

[22] E. L. Lima. *Curso de análise vol. 2.* IMPA, (2009).

[23] J. L. Lions. *Quelquer méthodes de résolution des problèmes aux limites non lineáries.* Gauthier - Villars, (1969).

[24] J. L. Lions. *Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribuès. Tome 1. Contrôlabilité exacte.* Masson, (1988).

[25] J. L. Lions e E. Magenes. *Non-homogeneous boundary valeu problems and applications I.* Springer-Verlag, (1972).

[26] J. L. Lions e W. A. Strauss. *Some non-linear evolution equation.* Technical report, Soc. Math. France, (1965).

[27] C. R. Luz. *Propriedades assintóticas de sistemas eletromagneticos/elásticos anisotrópicos.* PhD thesis, UFRJ, (2009).

[28] L. A. Medeiros e A. E. Mello. *A integral de Lebesgue.* UFRJ, (2004).

[29] G. P. Menzala e E. Zuazua. *Energy decay of magnetoelastic waves in a bounded conductive medium.* Asymptotic Analysis, vol. 18 (1998), pgs 349-362.

[30] M. M. Miranda e L. A. Medeiros. *Espaços de Sobolev.* UFRJ, (2008).

[31] M. Nakao. *Convergence of solutions of the wave equation with a nonlinear dissipative term to the steady state.* Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University, Ser. A, vol. 30 (1976), pgs 257-265.

[32] M. Nakao. *Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation.* Mathematische Annalen, vol. 305, nº 1 (1995), pgs 403-417.

[33] M. Nakao. *Remarks on the existence and uniqueness of global decaying solutions of the nonlinear dissipative wave equations.* Mathematische Zeitschrift, vol. 206, nº 1 (1991), pgs 265-276.

[34] J. Necas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson, (1967).

[35] J. T. Oden e J. N. Reddy. *An introduction to the mathematical theory of finite elements.* John Wiley Sons, (1976).

[36] J. C. Oliveira e R. C. Charão. *Stabilization of a locally damped thermoelastic system.* Journal of Computational e Applied Mathematics, vol. 27 (2008), pgs 319-357.

[37] J. C. Oliveira e R. C. Charão. *Stabilization of a locally damped incompressible wave equation.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 303 (2005), pgs 699-725.

[38] V. Priimenko e M. Vishnevskii. *Mathematical problems of electromagnetoelastic interactions.* Bol. Soc. Paran. Mat., vol. 25 (2007), pgs 55-66.

[39] M. Renardy e R. C. Rogers. *An introduction to partial differential equations.* Springer-Verlag, (1992).

[40] J. M. Rivera. *Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais.* LNCC, (1999).

[41] J. M. Rivera e M. L. Santos. *Polynomial stability to three-dimensional magnetoelastic waves.* Acta Applicandae Mathematicae, vol. 76, nº 3 (2003), pgs 265-281.

[42] M. Sermange e R. Temam. *Some mathematical questions related to the mhd equations.* Comm. Pure Appl. Math., vol. 36 (1983), pgs 635-664.

[43] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications II/A: Linear monotone operators.* Springer-Verlag, (1990).