Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Propriedades Assintóticas do Sistema Termoelástico com Dissipação Não Linear Localizada

Darlyn Walter Huamán Vargas

Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis

Fevereiro de 2011

Universidade Federal de Santa Catarina Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Propriedades Assintóticas do Sistema Termoelástico com Dissipação Não Linear Localizada

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Darlyn Walter Huamán Vargas

Florianópolis

Fevereiro de 2011

Propriedades Assintóticas do Sistema Termoelástico com Dissipação Não Linear Localizada

por

Darlyn Walter Huamán Vargas[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Prof. Dr. Ruy Exel Filho - Coordenador

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (Orientador-UFSC)

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz (Co-orientador-UFSC)

Prof. Dr. Gustavo Perla Menzala (LNCC-CNPq e UFRJ)

Prof. Dr. Luciano Bedin (UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2011.

[1]Bolsista da CAPES

E não sede conformados com este mundo, mas sede transformados pela renovação do vosso entendimento, para que experimenteis qual seja a boa, agradável, e perfeita vontade de Deus(Rm 12-2).

Agradecimentos

Agradeço ao Senhor Jesus, pois 'O SENHOR é a minha força e o meu escudo; nele confiou o meu coração, e fui socorrido; assim o meu coração salta de prazer, e com o meu canto o louvarei'.

Agradeço aos meus pais Carlos Walter Huamán Arana e María Esther Vargas Vásquez por toda assistência e apoio que me deram durante a graduação e o mestrado. De forma justa e com o muito prazer, divido com eles o título que esta monografia me confere.

Agradeço ao meu professor, orientador e amigo Ruy Coimbra Charão, que, em todo o tempo, demonstrou acreditar em minha capacidade. Enormes e boas são suas influências em minha formação acadêmica e pessoal.

Também agradeço a todos os professores da Pós-Graduação pela contribuição na minha formação e, em especial, ao Professor Fermin S. V. Bazán por seu apoio e amizade.

Agradeço a todos os amigos e colegas que fiz enquanto estudei na UFSC. Eles são fundamentais em minha vida.

Por fim, agradeço ao CAPES por estes dois anos de apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência e unicidade de soluções globais fortes para o sistema termoelástico em um domínio limitado,conexo, de classe C^2 em $\mathbb{R}^n$, sob efeitos de uma dissipação mecânica não linear e localizada em uma vizinhança de parte da fronteira do domínio. São obtidas taxas algébricas explícitas de decaimento da energia associada à solução de tal sistema. Quando a dissipação mecânica tem um comportamento 'quase linear', o decaimento é exponencial. A existência e unicidade de soluções são obtidas através do método de Faedo-Galerkin. Para as estimativas da energia, usamos o Método de Nakao, certas identidades da energia e multiplicadores localizados.

Abstract

We study the existence and uniqueness of global strong solutions of a thermo-elastic system in a bounded, connected domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ of class C^2, under the presence of nonlinear mechanism of dissipation localized in a neighborhood of part of the boundary. We obtain explicit algebraic decay rates of the total energy associated with the solution of the system. When the dissipation has a 'almost linear' behavior, the decay rate is exponential. The existence and uniqueness of solutions are obtained through the method of Faedo-Galerkin. For the energy estimates, we use a Nakao's Method, some energy identities and some localized multipliers.

Sumário

Notações

Usamos as seguintes notações neste trabalho:

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais e positivos;

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais;

X e H : espaços de Banach e Hilbert respetivamente.

X^n para $n \in \mathbb{N}$: espaço de Banach real $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n \text{ vezes}}$, equipado com as operações usuais e com a norma dada por

$$\|u\|_{X^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_X^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{se} \quad u = (u_1, \cdots, u_n) \in X^n,$$

$[v_1, v_2, \cdots, v_n]$: espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$;

Ω : aberto do $\mathbb{R}^n$;

Γ : fronteira de Ω;

$\eta(x)$: normal unitária exterior à $x \in \Gamma$, se tal vetor existir;

I : intervalo do $\mathbb{R}$;

$B(x, \varepsilon)$: bola aberta centrada em x e com raio ε;

$B[x, \varepsilon]$: bola fechada centrada em x e com raio ε;

$C^\infty(\Omega)$: espaço das funções reais, definidas em Ω e infinitamente diferenciáveis;

$\mathcal{D}(\Omega)$: espaço das funções reais, definidas em Ω, com suporte compacto e infinitamente diferenciáveis;

$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$: conjunto das funções $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ restritas à $\overline{\Omega}$;

$\mathcal{D}(\Gamma)$: conjunto das funções $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ restritas à Γ;

$S(\mathbb{R}^n)$: espaço das funções $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que são rapidamente decrescentes no infinito;

$\mathcal{D}'(\Omega)$: espaço vetorial das distribuições sobre $\mathcal{D}(\Omega)$;

$S'(\mathbb{R}^n)$: espaço vetorial das distribuições temperadas;

$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$: gradiente, no sentido distribuicional, para $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$;

$\operatorname{div} u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$: divergente, no sentido distribuicional, para $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathcal{D}'(\Omega)^n$;

$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$: Laplaciano, no sentido distribuicional, para $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$;

$\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \cdots, \Delta u_n)$: Laplaciano vetorial, no sentido distribuicional, $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathcal{D}'(\Omega)^n$;

$M_{n\times m}(\mathbb{R})$ para $n, m \in \mathbb{N}$: espaço das matrizes de dimensão $n \times m$, com entradas reais e o produto interno dado por

$$A.B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ij} \quad \text{se} \quad A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R});$$

$$x : A = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{1j}, \sum_{j=1}^{n} x_j a_{2j}, \cdots, \sum_{j=1}^{n} x_j a_{nj} \right)$$

para $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$;

$X \hookrightarrow Y$: existe uma aplicação linear, contínua e injetora de X em Y;

$\omega \subset\subset \Omega$: $\omega \subset \Omega$ e ω é compacto;

$W_0^{m,p}(\Omega)$: fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$;

$H^m(\Omega)$: notação alternativa para $W^{m,2}(\Omega)$;

$H_0^m(\Omega)$: notação alternativa para $W_0^{m,2}(\Omega)$;

$H_{loc}^m(\Omega)$: espaço das classes das funções u reais, mensuráveis, definidas em Ω e tais que $u \in H^m(\omega)$, $\forall w \subset\subset \Omega$ e w aberto;

$H^{-m}(\Omega)$: dual topológico de $H_0^m(\Omega)$;

$\mathbb{F} : S'(\mathbb{R}^n) \longmapsto S'(\mathbb{R}^n)$: transformada de Fourier;

$H^s(\mathbb{R}^n)$ para $s \in \mathbb{R}$: espaço das distribuições temperadas tais que $J_s\,\mathbb{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, para $J_s(x) = (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}}$, com a norma dada por

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|J_s\mathbb{F}(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)};$$

$L^2(\Gamma)$: espaço das classes das funções u reais, mensuráveis, definidas em Γ e tais que $\|u\|_{L^2(\Gamma)} < \infty$, para

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |u(x)|^2\, d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}};$$

C e C_n para $n \in \mathbb{N}$: constantes reais e positivas.

Introdução

Neste trabalho consideramos um sistema de evolução de equações diferenciais parciais com valores iniciais e de fronteira, cujo modelo está associado ao movimento de um sólido elástico, isotrópico, homogêneo, limitado e com fronteira suave sob a ação de efeitos térmicos. A seguinte semilinearização do modelo é considerada (veja [36], pg. 47):

$$\begin{aligned} u'' - L(u) + \nabla\theta + \rho(x, u') &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Omega, && (1)\\ \theta' + \Delta\theta + \operatorname{div} u' &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Omega, && (2) \end{aligned}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad (3)$$

$$u = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times\Gamma, \qquad (4)$$

$$L(u) = a^2\,\Delta u + (b^2 - a^2)\,\nabla\text{div}\, u.$$

onde $u = u(x,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_n(x,t))$ é o vetor deslocamento e $\theta = \theta(x,t)$ é o valor real de diferença de temperatura definidos em $\Omega\times(0,\infty)$, com Ω domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; o laplaciano de u é dado por

$\Delta u = (\Delta u_1(x,t), \cdots, \Delta u_n(x,t))$, div$u$ é o divergente de u e $\nabla\theta$ é o gradiente, θ. A função vetorial ρ é uma termo dissipativo, localizado numa vizinhança de parte da fronteira de Ω. Os coeficientes a e b estão relacionados com os coeficientes de Lamé na Teoria de elasticidade e $b^2 > a^2 > 0$.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 citamos resultados auxiliares importantes, definimos os espaços funcionais e demonstramos algumas propriedades relevantes destes espaços. No capítulo 2 provamos a existência e unicidade de soluções globais fortes para o sistema de evolução apresentado. O capítulo 3 é dedicado ao estudo das taxas de decaimento para as soluções obtidas no capítulo anterior.

A prova de existência e unicidade, diferente do trabalho [25] que utiliza teoria de semigrupos, é feita via o método de Faedo-Galerkin como em [33]. Incluimos também a prova da existência dos espaços de aproximação de Galerkin para os espaços de soluções. Para as taxas de decaimento, seguimos as ideias dadas em [7].

A energia associada ao sistema termoelástico (1-2), a qual é a soma das energias elástica (que envolve a variavel deslocamento u) e térmica (que envolve a variavel de temperatura θ), é dada pela seguinte fórmula:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ |u_t(t)|^2 + a^2\,|\nabla u(t)|^2 + (b^2 - a^2)\,|\operatorname{div} u(t)|^2 + |\theta(t)|^2 \right\} dx,$$

que é uma função decrescente no tempo, mais precisamente,

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int_\Omega |\nabla\theta(x,t)|^2\,dx - \int_\Omega \rho(x,u_t)\cdot u_t dx \le 0, \quad t \ge 0.$$

No sistema termoelástico estudado em [30], o sistema de Lamé está acoplado com uma equação escalar do calor sem o termo dissipativo

$\rho(x,t)$. Assim, a dissipação é dada somente pelo gradiente da temperatura ($\rho \equiv 0$). Desde que, nesse caso; em geral, não existe decaimento uniforme da energia associada ao acoplamento termoelástico [30], é natural indagar que tipo de dissipação deve ser incluída no modelo termoélastico para produzir boas taxas de decaimento da energia associada. Neste trabalho, seguindo [3] e [7], inserimos uma dissipação extra dada por ρ para obtermos tais taxas.

Vamos mostrar a estabilização uniforme da energia total para o sistema (1) - (4) com taxas algébricas, onde o termo dissipativo $\rho\,(x, u')$ é fortemente não linear e aplicado somente numa vizinhança sobre parte da fronteira. Nossos resultados generalizam outros obtidos anteriormente para o sistema linear termoelástico. Quando o termo não linear dissipativo $\rho\,(x, s)$ comporta-se linearmente para pequenos valores de s e em dimensão dois, obtemos uma taxa de decaimento exponencial para a energia total do sistema. Se $n \geq 3$ e $\rho\,(x, s)$ comporta-se linearmente para todo s, então a taxa de decaimento também é exponencial. Para demonstrar estes resultados usamos idéias de [34], [29] e [43] e obtemos algumas identidades de energia associadas com multiplicadores localizados a fim de construir desigualdades de diferenças especiais para a energia associada. As principais estimativas neste trabalho são obtidas através do Teorema de o Lema de Nakao.

Quanto ao trabalho sobre estabilização do sistema termoelástico Dafermos [10] investigou a existência, unicidade, regularidade e estabilidade (sem taxas) da solução para o sistema linear em dimensão um. Racke [51] considerou as equações de termoelasticas não linear para o caso tridimensional como um problema de Cauchy e provou a existência global de soluções suficientemente suaves para dados iniciais suficientemente pequenos e suaves. Foi necessário assumir que certos termos não lineares são quasilineares e sem linearidade cúbica.

Pereira-Perla Menzala [48] provaram que a energia total do sistema termoelástico linear num meio isotrópico, não homogêneo (limitado, n-dimensional), com um termo dissipativo linear aplicado em todo o domínio, decai para zero em uma taxa exponencial. Rivera [60] posteriormente provou que a energia do sistema termoelástico em dimen cão um decai para zero com taxas exponenciais. Além disso, Henry-Lopes-Perisinotto [21] mostraram usando análise espectral, que as três partes da energia do sistema decaem exponencialmente para zero no caso unidimensional, mas tal decaimento não ocorre em dimensões maiores.

Racke ([52]) utilizou o método da energia para provar o decaimento exponencial para zero do deslocamento e a temperatura para equações tridimensionais de termoelasticidade linear em domínios limitados para meios heterogêneos e anisotrópicos, assumindo uma força de amortecimento linear. Racke-Shibata-Zheng [53] consideraram sistemas termoelásticos não lineares para o caso de dimensão como um problema de valor inicial e de fronteira com condições de tipo Dirichlet, para provar que se os dados iniciais são fechado para o equilíbrio, então o problema admite uma única solução global suave. Eles provaram que quando o tempo tende ao infinito, a solução é exponencialmente estável. Eles também usaram técnicas baseadas no trabalho de Rivera [60] para melhorar os resultados anteriores de Racke-Shibata [54], que foram baseados em análise espectral, para obter taxas de decaimento de soluções de equações não lineares de termoelasticidade em dimensão um. Rivera-Barreto [58] melhoraram o resultado de existência e unicidade global no tempo com decaimento exponencial da energia obtida por Racke-Shibata-Zheng [53], assumindo hipóteses suavemente mais gerais nos dados iniciais.

Rivera [56] considerou equações de termoelasticidade heterogêneas lineares de dimensão um com domínio limitado e diversas condições de fronteira e provou que a solução (u, θ) tem algumas derivadas parciais com decaimento exponencial para zero na norma L^2. Rivera [57] investigou as equações de termoelasticidade homogêneas isotrópicas e lineares com condições de fronteira de tipo Dirichlet homogêneas num domínio n-dimensional geral. O autor mostra que a parte do rotacional livre $(\nabla\times)$ do deslocamento e a diferença térmica decai algumas vezes exponencialmente para zero. Também provou que a parte da divergência livre $(\nabla\cdot)$ do deslocamento conserva a sua energia, o que implica que, se a parte divergência livre dos dados iniciais não é zero, então a energia total não decai uniformemente para zero.

Jiang, Rivera e Racke [23] provaram o decaimento exponencial para a solução do sistema isotrópico linear de termoelasticidade com fronteira em duas e três dimensões.

Lebeau-Zuazua [30] estudaram o sistema linear de termoelasticidade em domínio suave e limitado em duas e três dimensões. Eles analisaram se a energia decai exponencialmente para zero. Eles também provam que quando o domínio é convexo, a taxa de decaimento nunca é uniforme. Liu-Zuazua [31] conseguiram estabelecer fórmulas explícitas para a taxa de decaimento da energia de um corpo no campo da termoelasticidade linear quando alguma parte da fronteira do corpo é furado e sobre o resto não existe algum argumento de velocidade não linear. Para isso, utilizaram a teoria de semigrupos, métodos e técnicas de multiplicadores de Lyapunov . Qin-Rivera [50] estabeleceram a existência e unicidade global e estabilidade exponencial de soluções para equações de termoelasticidade não linear em dimensão um com relaxamento do núcleo e sujeitas a condições de fronteira de tipo Dirichlet para o deslocamento e condições de fronteira de tipo Neumann para a diferença de temperatura. Irmscher-Racke [22] obtiveram taxas de decaimento fortes explícitas para soluções do sistema de termoelasticidade em dimensão um. Eles também consideraram outros modelos físicos em termoelasticidade e comparou os resultados de ambos os modelos no que diz respeito ao comportamento assintótico das soluções.

Neste trabalho obtemos os mesmos resultados de [25] mas usando um outro método, o qual foi usado no trabalho [7]. Com esse método não é preciso usar a propiedade da continuação única. Uma das vantagens que se obtém com isso é que as constantes obtidas nas taxas de decaimento podem ser calculadas explicitamente. No capítulo 3 obtemos as taxas de decaimento da energia associada à solução. No caso em que a dissipação ρ é não linear, se tem decaimento polinomial do tipo $(1+t)^{-\gamma}$, com γ dado explicitamente em função do 'crescimento' polinomial do termo dissipativo ρ e, se ρ é 'quase linear', se tem decaimento exponencial.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definições e Resultados Conhecidos

1.1.1 Espaço de Hilbert

Definição 1.1.1 *Um produto interno num espaço vetorial X sobre $\mathbb{R}$, é uma aplicação de valor real*

$$(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $(x, x) \geq 0, \qquad \forall x \in X,\ (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $(x, y) = (y, x),\ \forall x, y \in X$;

3. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z),\ \forall x, y, z \in X,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

O par $(X, (\cdot,\cdot))$ é chamado de espaço produto interno.

Definição 1.1.2 *Uma norma sobre um espaço vetorial X é uma função, representada por $\|\cdot\|$,*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & X & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

De modo que

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $x \in X$;

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad \forall x, y \in X$.

O par $(X, \|\cdot\|)$ *é chamado espaço normado.*

Dado um produto interno, pode-se definir a norma $\|\cdot\|_X$, denotado nesta seção por $\|\cdot\|$, definida como segue

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall x \in X. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1.3 (Cauchy-Schwartz [28], pg. 136) *Num espaço produto interno* X *a seguinte desigualdade é verdadeira*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|, \qquad \forall x, y \in X. \tag{1.2}$$

a igualdade é obtida se $y = \alpha x$ *ou* $y = 0$.

Lema 1.1.4 ([28], pg. 138) *Se* $(X, (\cdot, \cdot))$ *é um espaço produto interno então, para cada componente fixa, as funções:*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x, y) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & (x, y) \end{array}$$

são lineares e contínuas.

Lema 1.1.5 ([28], pg. 72) *Sejam* $\{x_1, \cdots, x_n\}$ *um conjunto de vetores linearmente independentes de um espaço normado* X*, então existe um número* $c > 0$ *tal que para qualquer escolha de escalares* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ *temos*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \quad \geq \quad c\,(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|). \tag{1.3}$$

Definição 1.1.6 *Sejam* X *um espaço vetorial e* $f : X \to \mathbb{R}$*. Dizemos que* f *é um funcional linear se:*

1. $f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in X$
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $x \in X$*.*
   E dizemos que f *é uma funcional linear limitada se*
3. $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} |f(x)| < +\infty$ *é chamada funcional linear limitada.*

Definição 1.1.7 *Seja* X *um espaço normado, o conjunto*

$$X' = \{f : X \to \mathbb{R}; \quad f \text{ é linear e limitado}\}$$

é chamado de dual topológico de X*.*

Definição 1.1.8 *Seja* $(X, (\cdot, \cdot))$ *um espaço produto interno e sejam* $x, y \in X$*. Diz-se que* x, y *são ortogonais se* $(x, y) = 0$*.*

Definição 1.1.9 *Um espaço normado* $(X, \|\cdot\|)$ *é chamado espaço de Banach se e somente se* X *é completo, isto é toda sequência de Cauchy é convergente para algum elemento de* X*.*

Teorema 1.1.10 ([28], pg. 118) *Seja* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço normado, então* $(X', \|\cdot\|_{X'})$*, sempre é um espaço de Banach, com a norma:*

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Definição 1.1.11 *Um espaço produto interno* $(H, (\cdot, \cdot))$ *é chamado espaço de Hilbert se e somente se* H *é completo respeito à norma dada em (1.1).*

Proposição 1.1.12 ([28], pg. 175) *Seja* H *um espaço de Hilbert então e* $u, v \in H$*. Se*

$$(x, u) = (x, v), \qquad \forall x \in H \quad \textit{então} \quad u = v.$$

Teorema 1.1.13 (Representação de Riesz [5], pg. 81) *Dado uma* $\varphi \in H'$*, existe um único* $f \in H$ *tal que*

$$\langle \varphi, \nu \rangle \quad = \quad (f, \nu), \qquad \forall \nu \in H.$$

E ainda

$$\|f\|_H \quad = \quad \|\varphi\|_{H'}.$$

Observação O teorema anterior mostra que toda aplicação linear e contínua sobre H, pode ser representada por meio do produto escalar, isto é, a aplicação

$$\begin{aligned} H' &\to H \\ \varphi &\mapsto f \end{aligned} \tag{1.4}$$

é uma isomorfismo isométrico, que permite identificar H e H'.

Definição 1.1.14 *Seja* H *um espaço de Hilbert real. Um funcional* $B : H \times H \to \mathbb{R}$ *é chamado uma forma bilinear se* $B(x, \cdot)$ *é linear para cada* $x \in H$ *e* $B(\cdot, y)$ *é linear para cada* $y \in H$*.* B *é chamado de limitado* *(contínuo) se existe uma constante K tal que*

$$|B(x,y)| \leq K\,\|x\|\,\|y\|, \qquad \forall x,y \in H.$$

B é chamado coercivo se existe uma constante $\delta > 0$ tal que

$$B(x,x) \geq \delta \|x\|^2, \qquad \forall x \in H.$$

Teorema 1.1.15 (Lax-Milgram [5], pg. 84) *Sejam H um espaço de Hilbert,*

$$\begin{array}{rccc} B: & H \times H & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & B(u,v) \end{array}$$

uma forma bilinear, contínua e coerciva e $f \in H'$. Então, existe um único $u \in H$ tal que

$$B(u,v) = f(v),\ \forall\, v \in H. \tag{1.5}$$

Definição 1.1.16 *Seja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de subespaços fechados de um espaço de Hilbert H. Dizemos que H é soma Hilbertiana dos E_n e escrevemos $H = \bigoplus_n E_n$ se:*

1. *Os E_n são dois a dois ortogonais, isto é, $(u,v) = 0$, $\forall u \in E_m$ e $\forall v \in E_n$ tal que $m \neq n$;*

2. *O subespaço gerado pelos E_n é denso em H.*

Teorema 1.1.17 ([5], pg. 85) *Sejam $H = \bigoplus_n E_n$ e $P_{En}v$ a projeção do elemento $v \in H$ sobre E_n. Se $u \in H$ e $u_n = P_{E_n}u$, então:*

1. *$u = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, isto é, $u = \displaystyle\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} u_n$;*

2. $|u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2$ *(igualdade de Bessel-Parseval).*

Reciprocamente, dada uma sucessão (u_n) *de* H*, com* $u_n \in E_n$*,* $\forall n$*, e* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$*; então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *é converge em* H *e* $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *verifica* $u_n = P_{E_n} u$*.*

Definição 1.1.18 *Uma sequência* (w_ν) *de vetores de* H *é chamada base Hilbertiana se:*

1. $(w_\nu, w_\mu) = \delta_{\nu\,\mu} = \begin{cases} 1 & se \quad \nu = \mu \\ 0 & se \quad \nu \neq \mu. \end{cases}$

2. *As combinações lineares finitas dos* w_ν *são densas em* H*.*

Resulta do Teorema 1.1.17 que se $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *é uma base Hilbertiana de* H*, então para todo* $u \in H$ *tem-se:*

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} (u, w_\nu) w_\nu \qquad e \qquad |u|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |(u, w_\nu)|^2.$$

Teorema 1.1.19 ([5], pg. 86) *Todo espaço de Hilbert separável admite uma base Hilbertiana.*

1.1.2 Topologias Fraca e Fraca-$*$

Definição 1.1.20 *Seja* X *um espaço normado, dizemos que a sequência* $x_n \in X$ *converge fraco para* $x \in X$ *se* $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$*,* $\forall f \in X'$*. Denota-se* $x_n \rightharpoonup x$*.*

Teorema 1.1.21 ([5], pg. 35) *Seja* X *um espaço normado e* $x_n \in X$*,*

1. *Se* $x_n \to x$ *então* $x_n \rightharpoonup x$*;*

2. *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *e* $f_n \to f$ *então* $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$*.*

Definição 1.1.22 *Sejam X um espaço normado e $f_n, f \in X'$, dizemos que sequência $f_n \in X'$ converge fraco-$*$ para $f \in X'$ se $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in X$. Denote-se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*

Teorema 1.1.23 ([5], pg. 40) *Sejam X espaço normado e $f_n \in X'$*

1. *Se $f_n \to f$ então $f_n \rightharpoonup f$;*

2. *Se $f_n \rightharpoonup f$ então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;*

3. *Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ e $x_n \to x$ então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$;*

4. *Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitada então f é limitada e*

$$\|f\| \leq \liminf \|f_n\|_{X'}.$$

Teorema 1.1.24 ([5], pg. 42) *Seja X um espaço de Banach. Então, o conjunto*

$$B_{X'} = \{f \in X'; \|f\|_{X'} \leq 1\}$$

é compacta na topologia fraco-$*$.

Corolário 1.1.25 ([5], pg. 50) *Seja X um espaço de Banach separável e $f_n \in X'$ é uma sequência limitada em X'. Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e f em X' tais que $f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*

Definição 1.1.26 *Sejam u uma função numérica definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, u mensurável, e $(K_i)_{i\in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos K_i de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em K_i. Considere o subconjunto aberto $K = \cup_{i\in I} K_i$. Então*

$$u = 0, \qquad q.s. \;\; em \quad K.$$

Como consequência, defina-se o suporte de u, que será denotado por $supp\,(u)$, como sendo o subconjunto fechado de Ω

$$supp\,(u) = \Omega \setminus K.$$

Definição 1.1.27 *Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto de Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções testes.*

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais de soma de funções e multiplicação de função por escalar.

1.1.3 Noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.1.28 *Sejam $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_k \to \varphi$ se:*

1. *$\exists K \subset \Omega, K$ compacto, tal que $supp(\varphi_k) \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$;*

2. *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_k(x) \to D^\alpha \varphi(x)$ uniformemente em Ω.*

Definição 1.1.29 *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e é chamado de espaço das funções testes.*

Lema 1.1.30 ([19], pg. 25 e 31) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, conexo e com fronteira Lipschitz contínua. Então, existe uma sequência $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ crescente de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ abertos, conexos e com fronteira Lipschitz contínua tais que*

$$\overline{\Omega_i} \subset \Omega,\ \forall\, i \in \mathbb{N} \qquad e \qquad \Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i.$$

Além disso, se Ω for simplesmente conexo, então cada conjunto Ω_n é simplesmente conexo.

Proposição 1.1.31 ([32], pg. 313) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Dado $p \in \Gamma$, existem um conjunto aberto e limitado $V_p \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in V_p$, e uma função $f \in C^2(V_p)$ que satisfazem as seguintes condições:*

1. $\Gamma \cap V_p = f^{-1}(0)$;
2. $\nabla f(x) \neq 0, \ \forall\, x \in V_p$;
3. $\eta(x) = \dfrac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}, \ \forall\, x \in \Gamma \cap V_p$.

Proposição 1.1.32 (Partição C^∞ da Unidade [27], pg. 5) *Seja a coleção de abertos $(\Omega_i)_{i=1}^{\infty}$ em $\mathbb{R}^n$. Então, existe uma coleção de funções $(\psi_i)_{i=1}^{\infty} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que satisfazem as seguintes condições:*

1. $0 \leq \psi_i(x) \leq 1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \ \forall\, 1 \leq i \leq \infty$;
2. $supp\,(\psi_i) \subset\subset \Omega_j, \ \forall\, 1 \leq i \leq \infty$ *para algum* $j = j(i)$;
3. $\{supp\,(\psi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ *é localmente finito;*
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) = 1, \ \forall\, x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$.

Usando a Proposição anterior, temos o seguinte Corolário:

Corolário 1.1.33 ([27], pg. 5) *Sejam ω e Ω abertos do $\mathbb{R}^n$ tais que $w \subset\subset \Omega$. Então, existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. $0 \leq \psi(x) \leq 1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$;
2. $\psi \equiv 1$ *sobre* ω;
3. $\psi \equiv 0$ *sobre* $\mathbb{R}^n/\Omega$.

Lema 1.1.34 (Nakao [44], pg. 266) *Considere* $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$. *Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *Se existem constantes reais e positivas* T *e* C *tais que*

$$\sup_{t \leq s \leq t+T} \Phi(s) \leq C \, (\Phi(t) - \Phi(t+T)) \, , \; \forall \, t \geq 0,$$

então existem constantes reais e positivas C_1 *e* γ *tais que*

$$\Phi(t) \leq C_1 \, e^{-\gamma t}, \; \forall \, t \geq 0;$$

2. *Se existem constantes reais e positivas* T*,* C *e* $0 < k < 1$ *tais que*

$$\sup_{t \leq s \leq t+T} \Phi(s)^{\frac{1}{k}} \leq C \, (\Phi(t) - \Phi(t+T)) \, , \; \forall \, t \geq 0,$$

então existe uma constante real e positiva C_1 *tal que*

$$\Phi(t) \leq C_1 \, \Phi(0) \, (1+t)^{\frac{k}{k-1}} \, , \; \forall \, t \geq 0.$$

1.1.4 Distribuições

Definição 1.1.35 *Uma distribuição sobre* Ω *é um funcional linear definido em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *e contínuo em relação a noção de convergência definida em* $\mathcal{D}(\Omega)$*. O conjunto de todas as distribuições sobre* Ω *é denotado por*

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}, \, T \, \textit{é linear e contínuo}\}.$$

Observações

1. $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

2. $\langle T, \varphi \rangle$ é o valor de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

1.1.5 Noção de convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definição 1.1.36 *Dizemos que $T_k \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se*

$$\langle T_k, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação A convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$ é a convergência fraco-$*$.

1.1.6 Espaços $L^p(\Omega)$

Daqui em diante a mensurabilidade e a integrabilidade sobre o conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ são no sentido de Lebesgue e denotaremos por μ esta medida de Lebesgue.

Definição 1.1.37 *Sejam Ω um conjunto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Imdicamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ onde:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} & se \quad 1 \leq p < \infty; \\ \sup ess_{x\in\Omega}|u(x)| & se \qquad p = \infty. \end{cases}$$

Observações:

1. As funções $\|.\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+$, $1 \leq p \leq \infty$, são normas.

2. $L^p(\Omega)^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$, é o espaço das funções vetoriais $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $u(x) = (u_1(x), \cdots, u_n(x))$ tais que $u_i \in L^p(\Omega)$ para cada $1 \leq i \leq n$. Este espaço munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)^n} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.6}$$

é um espaço de Banach. Note que esta definição pode ser generalizada para qualquer espaço de Banach.

3. $L^2(\Omega)^n$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i\rangle \qquad \text{tal que} \qquad \langle\langle u, u\rangle\rangle = \|u\|^2_{L^2(\Omega)^n}, \quad (1.7)$$

onde

$$\langle u_i, v_i\rangle = \int_\Omega u_i(x)v_i(x)dx.$$

4. Se $1 \leq p < +\infty$, então

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^p(\Omega), \qquad \overline{\mathcal{D}(\Omega)} = L^p(\Omega). \qquad (1.8)$$

Definição 1.1.38 *Sejam Ω um cojunto mensuravel e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p_{loc}(\Omega)$, o conjunto das funções $u : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ mensuráveis e tais que a função $u\chi_K \in L^p(\Omega)$, $\forall K \subset\subset \Omega$, onde χ_K é a função característica de K.*

Observações

1. Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ consideremos o funcional $T = T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx.$$

É fácil verificar que T define uma distribuição sobre Ω.

2. Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ sempre podemos definir sua derivada distribucional da f, isto é

$$\int_\Omega D_i f\, \varphi dx = -\int_\Omega f\, D_i\varphi dx, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \qquad (1.9)$$

Teorema 1.1.39 ([5], pg. 61) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se e somente se $u = 0$ quase sempre em Ω.*

A aplicação

$$L^1_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega),$$
$$u \mapsto T_u$$

é linear, contínua e, debido ao Teorema 1.1.39, é injetiva (Ver [66], pg. 8). Em decorrência disso é comum identificaramos a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Nesse sentido tem-se que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Logo pela inclusão imediata, $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, temos que toda função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω, isto é

$$L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty. \tag{1.10}$$

Definição 1.1.40 *Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, denotada por $D^\alpha T$, é definida por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta definição tem-se que se $u \in C^k(\Omega)$ então $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $|\alpha| \leq k$, onde $D^\alpha u$ indica a derivada clássica de u . E, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Proposição 1.1.41 ([15], pg. 622) *Sejam $1 < p, q < \infty$, com $\varepsilon > 0$ e*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Então, existe uma constante real positiva $C = C(p, q, \varepsilon)$ tal que

$$a\, b \leq \epsilon a^p + C\, b^q, \qquad \forall a, b \geq 0.$$

Lema 1.1.42 (Desigualdade de Hölder [59], pg. 18) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto. Considere um conjunto de números reais e positivos* $(p_i)_{i=1}^m$ *tal que* $1 < p_i < \infty$, $\forall\, 1 \leq i \leq m$ *e* $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1$. *Se escolhermos* $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $\forall\, 1 \leq i \leq m$, *então* $\displaystyle\prod_{i=1}^{m} u_i \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\left\| \prod_{i=1}^{m} u_i \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{m} \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Lema 1.1.43 ([16], pg. 186) *Se* $\mu(\Omega) < \infty$ *e* $0 < p < q < \infty$, *então* $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *e*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Lema 1.1.44 ([33], pg. 12) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e limitado e uma sequência* $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ *em* $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$. *tal que*

- $u_m \to u$ *q.s. em* Ω*;*
- $\|u_m\|_{L^q(\Omega)} \leq C$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$, *com* C *constante real, positiva e independente de* m*,*

então $u_m \rightharpoonup u$ *em* $L^q(\Omega)$.

1.1.7 Espaços de Sobolev

Nesta seção vamos estudar algumas das propriedades importantes de uma classe de espaços funcionais, conhecido como espaços de Sobolev, o que irá proporcionar o ambiente adequado para o estudo funcional das equações diferenciais parciais das seções seguintes

Definição 1.1.45 *Sejam* $m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Indicaremos por* $W^{m,p}(\Omega)$ *o conjunto de todas as funções* u *de* $L^p(\Omega)$ *tais que para todo*

$|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de ordem α e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ de u. $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$. Então

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad |\alpha| \leq m\}.$$

1.1.8 Norma em $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tem-se que

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{se} \quad 1 \leq p < \infty; \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{se} \qquad p = \infty \end{cases}$$

define uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observações:

1. $(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{m,p}\ )$ é um espaço de Banach.

2. Seja $u \in W^{m,p}(\Omega)$, então

$$\|u\|_{L^p(\Omega} \leq \|u\|_{m,p},$$

   isto é,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega). \tag{1.11}$$

3. Quando $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega) \overset{\text{not}}{=} H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle.$$

4. De forma análoga para $u, v \in H^1(\Omega)^n$ define-se

$$\langle\langle\langle \nabla u, \nabla v\rangle\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle\langle \nabla u_i, \nabla v_i\rangle\rangle. \qquad \text{tal que}$$

$$\langle\langle\langle \nabla u, \nabla u\rangle\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n} \|\nabla u_i\|^2_{L^2(\Omega)^n}. \tag{1.12}$$

5. Sejam $u \in H^2(\Omega)^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $\theta \in H^1(\Omega)$, então

$$\|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)^n} \leq \|\theta\|_{H^1(\Omega)} \tag{1.13}$$

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)^n} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)^n} \tag{1.14}$$

$$\|\nabla \operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)^n} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)^n} \tag{1.15}$$

6. Dado $u \in W^{1,p}(\Omega)^n$ e $1 \leq p \leq \infty$, usando (1.6) e (1.12) temos

$$|||\nabla u|||^2_{L^p(\Omega)^n} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\|^2_{L^p(\Omega)} \tag{1.16}$$

Lema 1.1.46 (Gagliardo-Nirenberg [43], pg. 406) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq r < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq p$ *e* $0 \leq k \leq m$. *então,*

$$\|u\|_{k,p} \leq C\, \|u\|^{\theta}_{m,q}\, \|u\|^{1-\theta}_{L^r(\Omega)} \quad \textit{para} \quad u \in W^{m,q}(\Omega) \cap L^r(\Omega).$$

onde C *é uma constante positiva e*

$$\theta = \left(\frac{k}{n} + \frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{m}{n} + \frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)^{-1}$$

desde que $0 < \theta \leq 1$ *(* $0 < \theta < 1$ *se* $p = \infty$ *e* $mq = n$ *).*

1.1.9 O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.1.47 *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Observações:

1. $W_0^{m,p}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{m,p}(\Omega)$.

2. Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, então $\mu(\mathbb{R}^n \backslash \Omega) = 0$.

3. Vale $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

4. Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Proposição 1.1.48 ([27], pg. 61) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Se*

$$u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \qquad e \qquad u(x) = 0, \ \forall\, x \in \Gamma,$$

então $u \in H_0^1(\Omega)$.

Proposição 1.1.49 ([41], pg. 25) *Sejam Ω e ω abertos do $\mathbb{R}^n$ tais que $\omega \subset \Omega$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\cdot}: & W_0^{1,p}(\omega) & \longmapsto & W_0^{1,p}(\Omega) \\ & u & \longmapsto & \widetilde{u} \end{array}$$

dada por

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & se \quad x \in \omega; \\ 0 & se \quad x \in \Omega \backslash \omega, \end{cases}$$

está bem definida e é contínua. Além disso, vale a seguinte identidade:

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \ \forall\, u \in W_0^{1,p}(\omega), \quad com \quad 1 \leq i \leq n. \tag{1.17}$$

Proposição 1.1.50 (Desigualdade de Poincaré [5], pg. 134) *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, limitado ao menos numa direção, e $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante real e positiva $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$\|u\|_{1,p} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n},\ \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Proposição 1.1.51 (Desigualdade de Sobolev [66], pg. 46) *Seja um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo com $\mu(\Omega) < \infty$. Então*

$$\begin{aligned} W_0^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega) \qquad se \qquad p < n \\ W_0^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \qquad se \qquad p > n \end{aligned}$$

Além disso, existe uma constante $C = C(n,p)$, tal que $\forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} &\leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)} \qquad se \qquad p < n \\ \sup_{\Omega} |u| &\leq C\mu(\Omega)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|Du\|_{L^p(\Omega)} \qquad se \qquad p > n \end{aligned}$$

Usando (1.13) e a Proposição (1.1.50) obtemos o seguinte Lema:

Lema 1.1.52 *A função*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_0 : H_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R}^+ \\ u &\mapsto \|u\|_0 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \end{aligned}$$

Define uma norma em $H_0^1(\Omega)$ que é equivalente a $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$. Além disso, $H_0^1(\Omega)$ com o seguinte produto interno

$$(u,v)_0 = \langle\langle \nabla u, \nabla v \rangle\rangle,$$

que induz a norma $\|\cdot\|_0$, é um espaço de Hilbert.

O Lema anterior induz a seguinte Proposição:

Proposição 1.1.53 *A função*

$$
\begin{aligned}
&|||\cdot|||_0 : H_0^1(\Omega)^n \to \mathbb{R}^+ \\
&u = (u_1, \cdots, u_n) \mapsto |||u|||_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \|\nabla u_i\|^2_{L^2(\Omega)^n} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Define uma norma em $H_0^1(\Omega)^n$ que é equivalente a $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)^n}$. Além disso, $H_0^1(\Omega)^n$ com o seguinte produto interno

$$((u, v))_0 = \sum_{i=1}^{n} (u_i, v_i), \tag{1.18}$$

que induz a norma $|||\cdot|||_0$, é um espaço de Hilbert.

Observação

1. Usando (1.8), se $n \in \mathbb{N}$ obtemos

$$H_0^m(\Omega)^n \subset L^2(\Omega)^n, \qquad \overline{H_0^m(\Omega)^n}^{L^2(\Omega)^n} = L^2(\Omega)^n \tag{1.19}$$

2. Pela fórmula (1.12) temos

$$\langle\langle\langle \nabla u, \nabla u \rangle\rangle\rangle = |||u|||_0^2. \tag{1.20}$$

3. Sejam $u \in H_0^1(\Omega)^n$ e $n \in \mathbb{N}$, usando (1.20) obtemos

$$\|\operatorname{div} u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq |||u|||_0^2. \tag{1.21}$$

4. Usando (1.12) obtemos

$$\langle\langle\langle\nabla u, \nabla v\rangle\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\rangle. \tag{1.22}$$

Lema 1.1.54 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado e a, b constantes reais tais que $b^2 > a^2 > 0$. Então,*

$$((u,v))_1 = a^2\langle\langle\langle\nabla u, \nabla v\rangle\rangle\rangle + (b^2 - a^2)\langle div\ u, div\ v\rangle$$

é um produto interno equivalente ao usual em $H_0^1(\Omega)^n$ definido em (1.18).

Prova

Seja $|||u|||_1^2 = ((u,u))_1$, então usando (1.21) e (1.20) temos

$$|||u|||_1 \leq b|||u|||_0.$$

Por outro lado, segue da hipótese $b^2 > a^2 > 0$ que

$$|||u|||_1 \geq a|||u|||_0.$$

■

Teorema 1.1.55 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe C^2. Então, existe um conjunto*

$$\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n \tag{1.23}$$

que é um base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n$, $H_0^1(\Omega)^n$ e $L^2(\Omega)^n$. Além disso,

$$\langle w_i, w_j\rangle_{L^2(\Omega)^n} = \delta_{i,j},\ \forall\, i,\, j \in \mathbb{N}. \tag{1.24}$$

Se Ω satisfaz as hipóteses do Teorema 1.1.55, definimos os seguintes conjuntos:

$$V_m = [v_1, v_2, \cdots, v_m], \quad W_m = [w_1, w_2, \cdots, w_m] \; \forall\, m \in \mathbb{N}. \qquad (1.25)$$

Os espaços $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{W_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfazem as seguintes propriedades:

1. $\dim V_m,\ \dim W_m < \infty,\ \forall\, m \in \mathbb{N};$

2. Dados $u \in H_0^1(\Omega)^n$ (ou $H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n$) e $\theta \in L^2(\Omega)^n$ existem sequências $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que satisfazem as seguintes condições:

   - $u_n \in V_n,\ \theta_n \in W_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N};$
   - $u_n \overset{n\to\infty}{\to} u$ em $H_0^1(\Omega)^n$ (ou $H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n$);
   - $\theta_n \overset{n\to\infty}{\to} \theta$ em $L^2(\Omega)^n$.

Os espaços com as propriedades 1 e 2 acima são chamados de espaços de aproximação de Galerkin.

1.1.10 O espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Definição 1.1.56 *Suponha $1 \leq p < \infty$ e $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ representa-se por $H_0^{-m}(\Omega)$.

Definição 1.1.57 (Operador de Prolongamento) *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ e Ω aberto do $\mathbb{R}^n$. Se $P : W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ é um operador linear contínuo, tal que, $Pu|_\Omega = u$ q.s. em Ω, para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Então é chamado de operador de m-prolongamento relativo a Ω e p.*

Quando tal operador P existe diz-se que Ω tem a propriedade do m-prolongamento.

1.1.11 Os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$

Definição 1.1.58 *Uma função u, definida em $\mathbb{R}^n$ é dita ser rapidamente decrescente no infinito se é infinitamente diferenciável e*

$$p_k(u) = \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k |(D^\alpha u)(x)| < \infty, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Denotamos por $S(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções rapidamente decrescentes no infinito.

Considere o espaço vetorial $S(\mathbb{R}^n)$, no qual definimos a seguinte noção de convergência: uma sucessão $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções de $S(\mathbb{R}^n)$ converge para zero, quando para todo $k \in \mathbb{N}$ a sucessão $\{p_k(u_\nu)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathbb{R}$. A sucessão $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para u em $S(\mathbb{R}^n)$ se $\{p_k(u_\nu - u)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

As formas lineares definidas em $S(\mathbb{R}^n)$, contínuas no sentido da convêrgencia definida em $S(\mathbb{R}^n)$ são denominadas *distribuições* temperadas. O espaço vetorial de todas as distribuições temperadas com a convergência pontual de sucessões será representado por $S'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.1.59 *Se $u \in S(\mathbb{R}^n)$ ou $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então denotamos por $\mathbb{F}u$ a transformada de Fourier de u dada por*

$$\mathbb{F}u(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x.y)} u(y)dy.$$

Definição 1.1.60 *Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $u_\nu = u\chi_{B_\nu(0)}$ onde $\chi_{B_\nu(0)}$ é a função característica da bola de raio ν e centro na origem, e $\mathbb{F}u_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$,* *as funções*

$$\mathbb{F}u_\nu(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\|y\|\leq\nu} e^{-i(x.y)} u_\nu(y)dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. *Mostra-se que* $\mathbb{F}u_\nu \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *e que* $\{\mathbb{F}u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão de Cauchy no espaço de Hilbert* $L^2(\mathbb{R}^n)$. *O limite em* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *da sucessão* $\{\mathbb{F}u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ *denotado por* $\mathcal{F}u$.

Teorema 1.1.61 ([27], pg. 42) *Para toda função* $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *tem-se que*

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Teorema 1.1.62 ([27], pg. 52) *O espaço* $H^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$ *coincide com o conjunto*

$$\{u \in S'(\mathbb{R}^n); \quad J_m\mathbb{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

onde J_m *é a função dada por* $J_m(x) = (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Além disso, a função* $|||\cdot|||_m : H^m(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$ *definida por*

$$|||u|||_m = \|J_m\mathbb{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

é uma norma equivalente à norma de Sobolev.

Definição 1.1.63 *Para* $s \in \mathbb{R}^+$, *indicaremos por* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *o conjunto*

$$\{u \in S'(\mathbb{R}^n); \quad J_s\mathbb{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

onde $J_s(x) = (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.64 ([17], pg. 192) $H^s(\mathbb{R}^n)$ *é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por:*

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = (J_s\mathbb{F}u, J_s\mathbb{F}v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

1.1.12 Os espaços $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$

Definição 1.1.65 *Um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ é dito ser bem regular se a fronteira de Ω é uma variedade C^∞ de dimensão $n-1$ e Ω estando localmente de um mesmo lado da fronteira.*

Observação: Se $R > 0$, o interior de um círculo de raio R em $\mathbb{R}^2$ é um exemplo de aberto bem regular. Já o interior de um quadrado de lado R em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto, mas, não um aberto bem regular.

Definição 1.1.66 *Sejam $s \geq 0$ e Ω um conjunto aberto limitado bem regular. O espaço de Sobolev $H^s(\Omega)$ é definido por*

$$H^s(\Omega) = \{u = v|_\Omega; \quad v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

onde $v|_\Omega$ indica a restrição de v ao aberto Ω.

Para cada $u \in H^s(\Omega)$ tem-se que

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = inf\{\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \quad v \in H^s(\mathbb{R}^n) \ e \ v|_\Omega = u\}$$

define uma norma em $H^s(\Omega)$.

Observações:

1. Se $s \geq r \geq 0$,

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow H^r(\Omega) \quad \text{onde} \quad H^0(\Omega) = L^2(\Omega). \tag{1.26}$$

2. $H^s(\Omega)$, $s > 0$, é um espaço de Hilbert.

3. $H^s(\Omega)$ coincide com o espaço usual de Sobolev $H^m(\Omega)$, definido anteriormente, se $s = m \in \mathbb{N}$ e se Γ for regular. Tal resultado é provado usando a teoria do prolongamento.

4. $H_0^s(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^s(\Omega)$. Além disso, $H_0^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$.

5. $H^{-s}(\Omega)$ é definido como sendo o dual de $H_0^s(\Omega)$, $s > 0$.

1.1.13 Os espaços $H^s(\Gamma)$, $s \in \mathbb{R}$

Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.67 *Seja $\overline{\Omega}$ o fecho de Ω em $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ o seguinte conjunto:*

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{\varphi|_{\overline{\Omega}}; \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Observação: Se $s \geq 0.$,

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \text{ é denso em } H^s(\Omega). \tag{1.27}$$

Definição 1.1.68 *Denotaremos por $\mathcal{D}(\Gamma)$ o seguinte conjunto:*

$$\mathcal{D}(\Gamma) = \{u : \Gamma \to \mathbb{R}; u \in C^\infty(\Gamma) \textit{ e tem suporte compacto em } \Gamma\}$$

onde Γ denota a fronteira de Ω.

Seja $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Então $\gamma_0 u = u|_\Gamma$ está bem definida como uma função de Γ em $\mathbb{R}$. Com isto tem-se que se $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ então $\gamma_0 u \in \mathcal{D}(\Gamma)$.

Definição 1.1.69 *Um sistema de cartas locais para Ω é uma família $(\varphi_j, U_j)_{i\in\mathcal{J}}$ tal que $\mathcal{J}$ é um um sistema de indices e U_j é um aberto limitado e,*

1) para todo $j \in \mathcal{J}$:

$$\varphi : \overline{U}_j \to \overline{Q}.$$

onde $Q = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ 0 < x_i < 1,\ i = 1, \cdots, n-1 \ \ e \ -1 < x_n < 1\}$ *é um difeomorfismo de classe* C^∞ *tal que*

- $\varphi_j(U_j \cap \Omega) = Q^+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ 0 < x_i < 1,\ i = 1, \cdots, n\}$;
- $\varphi_j(\overline{U}_j \cap \Gamma) = \Gamma_0 = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; 0 < x_i < 1,\ i = 1, \cdots, n-1 \ \ e \ \ x_n = 0\}$;
- $\varphi_j(\partial(U_j \cap \Omega)) = \partial Q^+, \quad \forall j \in \mathcal{J}$.

2) $\partial\Omega \subset U = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} U_j$;

3) Se $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ *e se* $W_j = \varphi_j(U_j \cap U_k)$ *e* $W_k = \varphi_k(U_j \cap U_k)$ *então* $\varphi_k(\varphi_j^{-1}) : W_j \to W_k$ *e* $\varphi_j(\varphi_k^{-1}) : W_k \to W_j$ *são de classe* C^∞.

Sejam $(\psi_1, U_1), \cdots, (\psi_N, U_N)$ um sistema de cartas locais e $\sigma_1, \cdots, \sigma_N$ funções testes do $\mathbb{R}^n$ tais que $\sum_{i=1}^{N} \sigma_i(x) = 1$, $\forall\, x \in \Gamma$ e $supp\,(\sigma_i) \subset U_i$, dada uma função $w : \Gamma \to \mathbb{R}$, será construído as funções $w_j : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, N$ definidas por:

$$w_j(x') = \begin{cases} (\sigma_j w)(\psi_j^{-1}(x', 0)), & \text{se} \quad x' \in \Omega_0 = (0,1)^{n-1}; \\ 0 & \text{se} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

Definição 1.1.70 *Denotaremos por* $H^s(\Gamma)$ *o conjunto das funções* $w : \Gamma \to \mathbb{R}$ *tal que* $w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 1, \cdots, N$, *onde* w_j *são definidas acima.*

$$H^s(\Gamma) = \{w : \Gamma \to \mathbb{K}; \quad w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}), \quad j = 1, \cdots, N\}.$$

Observações:

1. Para $u, v \in H^s(\Gamma)$, a função

$$(u,v)_{H^s(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{N} (u_j, v_j)_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}$$

define um produto interno sobre $H^s(\Gamma)$.

2. $H^s(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert.

3. Seja $s \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}(\Gamma) \quad \text{é denso em} \quad H^s(\Gamma). \tag{1.28}$$

Teorema 1.1.71 ([27], pg. 101) *A aplicação*

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

definida por $\gamma_0 u = u|_\Gamma$, é contínua na topologia de $H^1(\Gamma)$, isto é, existe uma constante positiva C tal que

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}}(\Gamma) \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Como $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$, segue do teorema acima que existe uma aplicação, que continuaremos denotando por γ_0 de $H^1(\Omega)$ em $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ linear e contínua que extende Γ_0, isto é, tal que $\gamma_0 u = u|_\Gamma$ para toda $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Esta aplicação $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é chamada de função traço e seu valor em um dado $u \in H^1(\Omega)$ é chamado o traço de u sobre Γ.

Teorema 1.1.72 ([27], pg. 102) *Seja Ω um conjunto aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. A função traço*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

é sobrejetiva e $Ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$.

Observação:

Quando dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ anula na fronteira de Ω, isto é, que $u = 0$ sobre Γ, na verdade significa que $\gamma_0 u = 0$ sobre Γ.

Teorema 1.1.73 ([59], pg. 153) *Existe uma aplicação linear e contínua:*

$$\gamma : H^m(\Omega) \to \Pi_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

tal que é sobrejetora e $Ker(\gamma) = H_0^m$ e γ possui inversa à direita linear e contínua, mais:

$$\begin{aligned} \gamma u &= (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \cdots, \gamma_{m-1} u) \\ &= \left(u|_\Omega, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Omega, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial \nu^m}|_\Omega \right), \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \end{aligned} \tag{1.29}$$

onde $x \in \overline{\Omega}$

$$(\gamma_j u)(x) = u|_\Gamma(x).$$

1.1.14 Teorema da Divergência e fórmulas de Green

Teorema 1.1.74 ([62], pg. 170) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e com fronteira regular (de classe C^1) e $F \in [C^1(\overline{\Omega})]^n$. Então, vale a seguinte identidade de Gauss:*

$$\int_\Omega div\, F\, dx = \int_\Gamma F|_\Gamma \cdot \eta\, d\Gamma. \tag{1.30}$$

A partir deste teorema obtém-se a seguintes fórmulas

$$\int_\Gamma (f\,F)|_\Gamma \cdot \eta d\Gamma = \int_\Omega \nabla f \cdot F dx + \int_\Omega f \operatorname{div} F dx \qquad F \in [C^1(\overline{\Omega})]^n;\ f \in C^1(\overline{\Omega})$$

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma \qquad u \in C^2(\overline{\Omega});\ v \in C^1(\overline{\Omega})$$

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = \int_\Omega u \Delta v dx + \int_\Gamma (\frac{\partial u}{\partial \eta} v - u \frac{\partial v}{\partial \eta}) d\Gamma \qquad u, v \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Claro que estas fórmulas são válidas para $u, v, f \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ e $F \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^n$, com Ω conjunto aberto limitado bem regular. Então as fórmulas podem ser reescrever da seguinte forma

$$\int_\Gamma \gamma_0(f\,F) \cdot \eta d\Gamma = \int_\Omega \nabla f \cdot F dx + \int_\Omega f \operatorname{div} F dx$$

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Gamma (\gamma_1 u)(\gamma_0 v) d\Gamma$$

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = \int_\Omega u \Delta v dx + \int_\Gamma \{(\gamma_1 u)(\gamma_0 v) - (\gamma_0 u)(\gamma_1 v)\} d\Gamma$$

A aplicação

$$\gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$
$$u \mapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$$

é linear e contínua e por (1.27) se extende a $H^2(\Omega)$. Logo $\gamma_0 u,\ \gamma_0 v,\ \gamma_1 u,\ \gamma_1 v \in L^2(\Gamma)$ e $\gamma_0(f\,F) \in [L^2(\Gamma)]^n$. Assim $\forall u, v \in H^2(\Omega)$, $f \in H^1(\Omega)$ e $F \in [H^1(\Omega)]^n$ temos a seguintes expressões

$$\langle \gamma_0(f\,F), \eta \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle\langle \nabla f, F \rangle\rangle + \langle \operatorname{div} F, f \rangle$$

$$\langle \Delta u, v \rangle = -\langle\langle \nabla u, \nabla v \rangle\rangle + \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{L^2(\Gamma)}$$

$$\langle \Delta u, v \rangle = \langle u, \Delta v \rangle + \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{L^2(\Gamma)} - \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle_{L^2(\Gamma)}.$$

Usando o Teorema 1.1.72 obtemos o seguinte resultado importante

Proposição 1.1.75 (Fórmulas de Green [27], pg. 102)

$$\int_\Omega \nabla f \cdot F dx + \int_\Omega f \, div F dx = 0 \quad f \in H_0^1(\Omega);\ F \in [H_0^1(\Omega)]^n, \tag{1.31}$$

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \qquad u \in H^2(\Omega);\ v \in H_0^1(\Omega), \tag{1.32}$$

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = \int_\Omega u \Delta v dx \qquad u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \tag{1.33}$$

Corolário 1.1.76 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e com fronteira de classe C^2. Se $u \in H^1(\Omega)$ e $w \in W^{1,\infty}(\Omega)$, então $uw \in H^1(\Omega)$ e vale a seguinte regra do produto:*

$$\frac{\partial (uw)}{\partial x_i} = u \frac{\partial w}{\partial x_i} + w \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\} \tag{1.34}$$

Além disso, se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $uw \in H_0^1(\Omega)$.

Teorema 1.1.77 ([27], pg. 84) *Sejam Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $m \in \mathbb{N}$. Então $H_0^{m+1}(\Omega)$ está imerso compactamente em $H_0^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{R}^n$. Além disso, se Ω for aberto, limitado e com a propriedade do m-prolongamento então a imersão de $H^{m+1}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ é compacta.*

Teorema 1.1.78 ([15], pg. 317) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe C^2, $f \in L^2(\Omega)$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do seguinte sistema:*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad em \quad \Omega \qquad (1.35) \\ u|_\Gamma &= 0 \quad em \quad \Gamma, \qquad (1.36) \end{aligned}$$

isto é,

$$\langle\langle \nabla u, \nabla v \rangle\rangle = \langle f, v \rangle,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \tag{1.37}$$

então

$$u \in H^2(\Omega) \tag{1.38}$$

e existe uma constante real e positiva C, independente de f e u, tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \quad \leq \quad C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

e se $u \in H_0^1(\Omega)$ é a única solução fraca temos

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.39}$$

Teorema 1.1.79 ([37], pg. 128) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe C^2, $f \in L^2(\Omega)^n$ e a e b constantes reais com $b^2 > a^2 > 0$. Se $u \in H_0^1(\Omega)^n$ é solução fraca do seguinte sistema elástico:*

$$\begin{aligned} u - a^2\,\Delta u - (b^2 - a^2)\,\nabla\, div\, u &= f \quad em \quad \Omega && (1.40)\\ u|_{\Gamma} &= 0 \quad em \quad \Gamma, && (1.41) \end{aligned}$$

isto é,

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle + ((u, v))_1 = \langle\langle f, v\rangle\rangle,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)^n, \tag{1.42}$$

então

$$u \in H^2(\Omega)^n \tag{1.43}$$

e existe uma constante real e positiva C, independente de f e u, tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)^n} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)^n}. \tag{1.44}$$

Corolário 1.1.80 ([37], pg. 128) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe* C^2*,* $f \in L^2(\Omega)^n$ *e* a *e* b *constantes reais com* $b^2 > a^2 > 0$*. Se* $u \in H_0^1(\Omega)^n$ *é solução fraca do sistema elástico:*

$$
\begin{aligned}
-a^2\,\Delta u - (b^2 - a^2)\,\nabla div\, u &= f \quad em \quad \Omega && (1.45)\\
u|_\Gamma &= 0 \quad em \quad \Gamma && (1.46)
\end{aligned}
$$

isto é,

$$((u,v))_0 = \langle\langle f, v\rangle\rangle,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)^n, \tag{1.47}$$

então

$$u \in H^2(\Omega)^n$$

e existe uma constante real e positiva C*, independente de* f *e* u*, tal que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)^n} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)^n}. \tag{1.48}$$

1.1.15 Espaços $L^p(I, X)$ e Distribuições Vetoriais

Nesta seção apresentamos alguns resultados sobre a integral de funções vetoriais definidas no intervalo $I = (0, T)$, $0 < T < \infty$, tomando valores num espaço de Banach X.

Definição 1.1.81 $\phi : I \to X$*, é dita simples se existerem* $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ *escalares e* $I_1, \cdots, I_m$*, subconjuntos mensuráveis de* I *com* $I_i \cap I_j = \emptyset$*,* $\forall i \neq j$*,* $I = \cup_{k=1}^m I_k$*, tais que*

$$\phi(t) = \Sigma_{k=1}^m \alpha_k \chi_k(t). \tag{1.49}$$

Onde χ_k, é a função característica do conjunto $I_k = \{t \in I : \phi(t) = \alpha_k\}$.

Definição 1.1.82 *Dizemos que uma função $u : I \longmapsto X$ é fortemente mensurável se existirem um subconjunto $N \subset I$, de medida de Lebesgue nula, e uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples tais que*

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t), \ \forall\, t \in I \backslash N.$$

Notamos que se $u : I \longmapsto X$ é uma função fortemente mensurável, então a função $\|u(\cdot)\|_X : I \longmapsto \mathbb{R}$ é Lebesgue mensurável.

Teorema 1.1.83 ([38], pg. V-8) *Sejam X um espaço de Banach separável. Então, uma função $u : I \longmapsto X$ é fortemente mensurável se, e somente se, $\forall\, f \in X'$, a função $f(u) : I \longmapsto \mathbb{R}$ é Lebesgue mensurável.*

Definição 1.1.84 *Se $\phi : I \to X$, é simples com representação (1.49), então a integral de Bochner de ϕ, é definida por*

$$\int_I \phi(s)ds = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k |I_k|. \tag{1.50}$$

Definição 1.1.85 *Dizemos que uma função $u : I \longmapsto X$ fortemente mensurável é integrável no sentido de Bochner se existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : I \to X$ de funções simples tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|u_n(t) - u(t)\|_X \, dt = 0.$$

Neste caso, definimos a integral de Bochner de u

$$\int_I u(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_I u_n(t)\, dt.$$

Teorema 1.1.86 ([38], pg. V-8) *Seja $u : I \longmapsto X$ uma função fortemente mensurável, então u é integrável no sentido de Bochner ($u \in L^1(I, X)$) se e somente se a função $\|u(\cdot)\|_X : I \longmapsto \mathbb{R}$ está em $L^1(I)$.*

Lema 1.1.87 ([38], pg. V-8) *Sejam X, Y espaços de Banach e $A : X \to Y$ um operador linear limitado. Se $u : I \longmapsto X$ está em $L^1(I, X)$, então*

$$\left\langle A, \int_I u(t)\, dt \right\rangle = \int_I \langle A, u(t) \rangle\ dt.$$

Corolário 1.1.88 ([38], pg. V-9) *Sejam H um espaço de Hilbert. Se $u : I \longmapsto H$ é integrável no sentido de Bochner, então*

$$\left\langle x, \int_I u(t)\, dt \right\rangle_H = \int_I \langle x, u(t) \rangle_H\ dt, \qquad \forall x \in H.$$

Teorema 1.1.89 ([38], pg. V-10) *$L^1(I, X)$ é um espaço de Banach com a norma definida por*

$$\|u\|_{L^1(I,X)} = \int_I \|u(t)\| dt.$$

Definição 1.1.90 *Designamos por $L^p(I, X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço vetorial das (classes de) funções vetoriais $u : I \longmapsto X$ fortemente mensuráveis e tais que a função numérica $\|u(t)\|_X$ está em $L^p(I)$.*

Teorema 1.1.91 ([38], pg. V-10) *$L^p(I, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, munido da norma dada por*

$$\|u\|_{L^p(I,X)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_I \|u(t)\|_X^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} & se \quad 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{sup} ess_{t \in I} \|u(t)\|_X & se \qquad p = \infty \end{cases}$$

é um espaço de Banach.

Observações:

1. $L^p_{loc}(I,X)$, $1 \leq p \leq \infty$, é dado pelas (classes de) funções vetoriais $u : I \longmapsto X$ fortemente mensuráveis e tais que a função numérica $\|u(t)\|_X$ está em $L^p(J)$, $\forall J \subset I$, com J intevalo aberto.

2. Das definições anteriores é evidente

$$L^p(I,X) \subset L^1_{loc}(I,X). \tag{1.51}$$

3. Notamos que se $p = 2$ e $X = H^n$ é um espaço de Hilbert então $L^2(I,H^n)$ é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno:

$$\langle u,v\rangle_n \quad = \quad \int_I \langle u,v\rangle_{H^n}\, dt. \tag{1.52}$$

Teorema 1.1.92 ([38], pg. V-10) *Sejam X e Y dois espaços de Banach e suponhamos que $X \hookrightarrow Y$; isto é, $X \subset Y$ com imersão contínua. Se $1 \leq r \leq s \leq \infty$; então $L^s(I,X) \hookrightarrow L^r(I,Y)$.*

Teorema 1.1.93 ([38], pg. V-11) *Sejam X um espaço de Banach. Então, valem as seguintes afirmações.*

1. *Se X reflexivo, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então*

$$[L^p(I,X)]' \cong L^q(I,X'). \tag{1.53}$$

2. *Se $p = 1$ e X é reflexivo ou X' é separável, então*

$$[L^1(I,X)]' \cong L^\infty(I,X') \tag{1.54}$$

3. A dualidade entre estes espaços vem dada na forma integral por

$$\langle u, v\rangle_{L^q(I,X'),L^p(I,X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_{X',X} dt. \tag{1.55}$$

4. Se $1 < p < \infty$, $1 < r < \infty$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto, então*

$$[L^p(I, L^r(\Omega))]' \cong L^q(I, L^s(\Omega)). \tag{1.56}$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *e* $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{r} = 1.$

5. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e limitado,* $1 \leq p \leq \infty$. *Então*

$$L^p(I, L^p(\Omega)) \cong L^p(I \times \Omega). \tag{1.57}$$

Lema 1.1.94 ([9], pg. 59) *Sejam* H *um espaço de Hilbert separável. Se* $E \subset H$ *é um subespaço vetorial denso,*

$$\mathcal{E} = \{\psi\, u;\ \psi \in \mathcal{D}(I) \text{ e } u \in E\} \tag{1.58}$$

é um conjunto denso em $L^2(I, H)$.

Teorema 1.1.95 ([33], pg. 58) *Sejam* $1 < p_0, p_1 < \infty$, $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$, B_0 *imerso compactamente em* B, *com* B_0, B *e* B_1 *espaços de Banach,* B_0 *e* B_1, *espaços reflexivos. Considere*

$$W^{p_0,p_1}(I; B_0, B_1) = \{v \in L^{p_0}(I, B_0),\ v' \in L^{p_1}(I, B_1)\}$$

com a norma

$$\|u\|_W := \|u\|_{L^{p_0}(I,B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(I,B_1)}.$$

Então $W^{p_0,p_1}(I;B_0,B_1)$ é um espaço de Banach e está imerso continuamente e compactamente em $L^{p_0}(I,B)$

Proposição 1.1.96 ([6], pg. A-19) *Sejam E um espaço de Hilbert separável. Se $u \in W^1(I;H)$, então existe $x_0 \in E$ tal que*

$$u(t) = x_0 + \int_0^t u'(r)\,dr, \quad \textit{para quase todo} \quad t \in I. \tag{1.59}$$

Além disso, se u' é contínua em $\overline{I}$, então temos o seguinte limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u'(r)\,dr = u'(t), \ \forall\, t \in \overline{I}. \tag{1.60}$$

Definição 1.1.97 *Denotamos por $C_0(I,X)$, o espaço vetorial das funções $\varphi : I \to X$ tais que $\lim\limits_{s\to s_0} \|\varphi(s)-\varphi(s_0)\|_X = 0$, $\forall s_0 \in I$ e $supp\,\varphi \subset\subset I$.*

Teorema 1.1.98 ([65], pg. 249) *$C_0(I;X)$ munido com a norma dada por*

$$\|\varphi\|_{C(I,X)} = \max_{t\in supp\,(\varphi)} \|\varphi(t)\|$$

é um espaço de Banach.

Definição 1.1.99 *Denotamos por $\mathcal{D}(I,X)$, o espaço vetorial das funções $\varphi : I \to X$ tais que $\frac{d^i\varphi}{dt^j} \in C_0(I,X)$, $\forall j \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1.1.100 *Seja $1 \le p \le \infty$. Então vale a inclusão*

$$\mathcal{D}(I,X) \subset L^p(I,X). \tag{1.61}$$

Teorema 1.1.101 *Seja $1 \le p < +\infty$. Então $\mathcal{D}(I,X)$ é denso em $L^p(I,X)$.*

Teorema 1.1.102 ([67], pg. 422) *Sejam E um espaço de Hilbert separável e $0 < T < \infty$. Então, temos a seguinte inclusão:*

$$W^1(I, E) \hookrightarrow C(\overline{I}, E). \tag{1.62}$$

Além disso, $\forall\, s, t \in \overline{I}$, tal que $s \leq t$ e $\forall\, u, v \in W^1(I; E)$, temos a seguinte fórmula de integração por partes:

$$\langle u(t), v(t)\rangle_E - \langle u(s), v(s)\rangle_E = \int_s^t \langle u'(r), v(r)\rangle_E + \langle u(r), v'(r)\rangle_E \, dr. \tag{1.63}$$

Sob as hipóteses do teorema anterior obtemos:

$$\frac{1}{2}\,\|u(t)\|_E^2 - \frac{1}{2}\,\|u(s)\|_E^2 = \int_s^t \langle u'(r), u(r)\rangle_E \, dr. \tag{1.64}$$

Teorema 1.1.103 (Aubin-Lions, [59], pg. 122) *Sejam E um espaço de Hilbert separável. Então, a inclusão*

$$W^1(I; E) \hookrightarrow L^2(I, E). \tag{1.65}$$

Definição 1.1.104 *O espaço das transformações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(I)$ em X, ou seja, $\mathcal{L}(\mathcal{D}(I), X)$ é denominado espaço das distribuições vetoriais de I em X e denotado por $\mathcal{D}'(I, X)$.*

Dado $u \in L^p(I, X),\ 1 \leq p \leq \infty$, definimos

$$\begin{aligned} T_u : \mathcal{D}(I) &\to X \\ \varphi &\mapsto \int_0^T u(t)\varphi(t)dt, \end{aligned} \tag{1.66}$$

onde a integral é no sentido de Bochner em X. A aplicação T_u é linear e contínua de $\mathcal{D}(I)$ em X e por esta razão é uma distribuição vetorial.

Teorema 1.1.105 *Seja* $1 \leq p \leq \infty$, *então* $L^p(I,X) \subset \mathcal{D}'(I,X)$.

Prova

Usar a definição anterior e a prova da inclusão 1.10.

■

Lema 1.1.106 *Se* $w \in L^p(I,X)$ *e* $\int_I w(s)\varphi(s)ds = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, *então* $w(s) = 0$ *quase sempre em* I.

Prova

Usando o Teorema 1.1.92, $w \in L^1(I,X)$. Logo, aplicando o Lema 1.1.87 para $A \in X'$ e a hipotese obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \varphi(s)A(w(s))\,ds &= \int_0^T A(\varphi(s)w(s))\,ds \\ &= A(\int_0^T \varphi(s)w(s))\,ds = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).\end{aligned}$$

Como $|A(w(s))| \leq \|A\|_{X'}\|w(s)\|_X < \infty$, temos $A(w(s)) \in L^1(I)$. Usando o Teorema 1.1.39, temos $A(w(s)) = 0$, q.s. em I. Finalmente usando o Corolario de Hanh-Banach(Ver [5], pg. 4), $w(s) = 0$, q.s. em I.

■

1.1.16 Existência e unicidade de uma equação ordinária autônoma

Teorema 1.1.107 ([12], pg. 146) *Seja* $f : U \longmapsto \mathbb{R}^n$. *Uma função continuamente diferenciável no aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$. *Então dados* $t_0 \in \mathbb{R}$ *e*

$x_0 \in U$ quaisquer, existe uma única solução do problema de valor inicial

$$(PVI)\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0)$ positivo.

Observação A solução $x : (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^2.

Definição 1.1.108 *Dizemos que I é um intervalo máximo da solução de (PVI) por x_0 se, dada qualquer solução $x : J \to \mathbb{R}^n$ de (PVI) temos $J \subset I$.*

Existem dois motivos básicos para um intervalo máximo ser finito: ou a solução em E tende ao infinito de $\mathbb{R}^n$ ou à fronteira do domínio E.

Teorema 1.1.109 ([12], pg. 149) *Seja $x : I(x_0) \to \mathbb{R}^n$ a solução máxima de (PVI), definida no intervalo máximo $I(x_0) = (\alpha, \beta)$. Se $\beta \in (0, +\infty)$ então, dado qualquer compacto $K \subset U$, existe $t \in (0, \beta)$ tal que $x(t) \in U \setminus K$. Analogamente, se $\alpha < 0$ então, dado qualquer compacto $K \subset U$, existe $t \in (\alpha, 0)$ tal que $x(t) \in U \setminus K$.*

Uma consequência bastante útil é a que segue

Corolário 1.1.110 ([12], pg. 149) *Se f tem domínio $\mathbb{R}^n$ e se $x : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de (PVI) tal que $|x(t)|$ é limitado para todo $t \in I$, então $I = \mathbb{R}$.*

Capítulo 2

Existência e Unicidade

2.1 Hipóteses adicionais

Nesta seção, seguindo [63], impomos algumas hipóteses sobre a função ρ que são suficientes para provarmos a existência e unicidade de soluções globais fortes para o sistema termoelástico. As hipóteses assumidas neste trabalho generalizam o caso $\rho(x,s) = a(x)\,|s|^p\,s$, para $0 \leq p < \infty$ e $a : \overline{\Omega} \longmapsto [0,\infty)$ uma função contínua.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Daqui em diante consideramos uma função

$$\begin{array}{rcl} \rho : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R}^n \\ (x,s) & \longmapsto & \rho(x,s) \end{array}$$

tal que satisfaz as seguintes condições:

1. ρ e $\dfrac{\partial \rho}{\partial s_i}$ são contínuas em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$;

2. $\rho(x,s)\,.\,s \geq 0$, $\forall\,(x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$;

3. $\xi^T\,.\,\dfrac{\partial \rho}{\partial s}(x,s)\,.\,\xi \geq 0$, $\forall\,(x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$, $\forall\,\xi \in \mathbb{R}^n$;

4. Existem constantes positivas K_0, K_1, K_2 e K_3, e números reais p, r, $-1 < r < +\infty$, $-1 < p \leq \dfrac{2}{n-2}$ se $n \geq 3$ e $-1 < p < +\infty$ se $n = 2$, tais que:

   (a) $K_2 a(x)|s|^{r+2} \leq \rho(x,s) \,.\, s$ e $|\rho(x,s)| \leq K_0 a(x)(|s|^{r+1} + |s|)$, para $|s| \leq 1$.

   (b) $K_3 a(x)|s|^{p+2} \leq \rho(x,s) \,.\, s$ e $|\rho(x,s)| \leq K_1 a(x)(|s|^{p+1} + |s|)$, para $|s| \geq 1$.

   com $a : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^+$, uma função em $L^\infty(\Omega)$.

Usando os itens 1 e 3 acima e a Proposição do Valor Médio, temos que $\forall\, (x, s, \widetilde{s}) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$(\rho(x,s) - \rho(x,\widetilde{s}))\ .\ (s - \widetilde{s}) \quad = \quad (s - \widetilde{s})^T\ .\ \frac{\partial \rho}{\partial s}\,(x, \theta\, s + (1-\theta)\,\widetilde{s})\ (s - \widetilde{s}) \geq 0, \tag{2.1}$$

para algum $0 \leq \theta \leq 1$ e dependendo de s, $\widetilde{s}$ e x.

Definição 2.1.1 *Definimos a seguinte energia para o sistema termoelástico:*

$$\begin{array}{rcl} E : [0,\infty) & \longmapsto & [0,\infty) \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left[\|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + |||u(t)|||^2_1 + \|\theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\right]. \end{array}$$

Se $T \geq 0$, então definimos também a seguinte função:

$$\begin{array}{rcl} \Delta E : [0,\infty) & \longmapsto & \mathbb{R}^+_0 \\ t & \longmapsto & E(t) - E(t+T). \end{array}$$

Um resultado imediato desta definição é

$$\frac{dE(t)}{dt} = \langle\langle u'', u' \rangle\rangle + ((u, u'))_1 + \langle \theta', \theta \rangle.$$

Seja $I = (0, T)$, fazendo o produto interno da equação dada em (2.11) por u' e da equação dada em (2.12) por θ em $L^2(I, L^2(\Omega)^n)$, somando os resultados, usando (1.31) e aplicando a fórmula de integração por partes dada no Teorema 1.1.102, obtemos a seguinte igualdade:

$$E(t) = -\int_0^t \left(\langle\langle \rho(\cdot, u'(s)), u'(s) \rangle\rangle + \|\nabla \theta(s)\|^2_{L^2(\Omega)^n} \right) ds + E(0), \ \forall\, t \geq 0. \tag{2.2}$$

Logo, usando as hipótese dada na seção 2.1, temos $\Delta E(t) = E(0) - E(t) \geq 0$ deste modo, temos que a função energia $E(t)$ é não crescente.

De forma análoga, obtemos a seguinte igualdade:

$$\Delta E(t) = \int_t^{t+T} \left(\langle\langle \rho(\cdot, u'(s)), u'(s) \rangle\rangle + \|\nabla \theta(s)\|^2_{L^2(\Omega)^n} \right) ds, \ \forall\, T,\, t \geq 0. \tag{2.3}$$

Além disso, se Ω for um conjunto aberto e limitado ao menos numa direção, então, aplicando a Proposição(1.1.50), existe uma constante real e positiva C tal que

$$\int_t^{t+T} \|\theta(s)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\, ds \leq C \int_t^{t+T} \|\nabla \theta(s)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\, ds, \ \forall\, T,\, t \geq 0. \tag{2.4}$$

2.2 Teorema de existência e unicidade

Nesta seção enunciamos o Teorema de Existência e Unicidade de soluções globais fortes para o sistema termoelástico. A prova deste teorema é feita na seção seguinte.

Teorema 2.2.1 (Existência e Unicidade) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado, conexo e com fronteira de classe C^2 e $b^2 > a^2 > 0$. Então, dado*

$$(u_0, u_1, \theta) \in \big(H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n\big) \times H_0^1(\Omega)^n \times (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \tag{2.5}$$

existe, para um intervalo $I = (0, T)$ com $T > 0$ arbitrário, um único par

$$(u, \theta) \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n) \times L^\infty(I, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \tag{2.6}$$

$$u \in C([0,T), H_0^1(\Omega)^n) \cap C^1([0,T), L^2(\Omega)^n), \tag{2.7}$$

$$\theta \in C([0,T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \tag{2.8}$$

$$(u', \theta') \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega)^n) \times L^\infty(I, L^2(\Omega)), \tag{2.9}$$

$$u'' \in L^\infty(I, L^2(\Omega)^n), \tag{2.10}$$

e que satisfaz as seguintes igualdades:

$$u'' - a^2\,\Delta u - (b^2 - a^2)\,\nabla\, div\, u + \nabla\theta + \rho(x, u') = 0 \quad em\ L^2(I, L^2(\Omega)^n); \tag{2.11}$$

$$\theta' - \Delta\theta + div\, u' = 0 \ em\ L^2(I, L^2(\Omega)); \tag{2.12}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \theta(0) = \theta_0.$$

Começamos provando que as expressões dadas no lado esquerdo de (2.11) e (2.12) estão nos espaços adequados.

Lema 2.2.2 *Suponha válida as hipóteses do Teorema 2.2.1. Se o par (u,θ) satisfaz (2.6), (2.9) e (2.10), então temos as seguintes afirmações:*

$$u'',\ \Delta u,\ \nabla div\, u, \nabla\theta,\ \rho(x,u') \in L^\infty(I, L^2(\Omega)^n); \tag{2.13}$$

$$\theta',\ \Delta\theta,\ div\, u' \in L^\infty(I, L^2(\Omega)). \tag{2.14}$$

Prova Como consequência das hipóteses, do Teorema 1.1.92 e das desigualdades em (1.13) e (1.14), temos

$$u'',\ \Delta u,\ \nabla \mathrm{div}\, u, \nabla\theta \in L^\infty(I, L^2(\Omega)^n);$$
$$\theta',\ \Delta\theta,\ \mathrm{div}\, u' \in L^\infty(I, L^2(\Omega)).$$

Seja $B = \{x \in \Omega : |u'(x)| \leq 1\}$, então pelo item 4 das hipóteses sobre a função ρ, obtemos

$$\int_\Omega |\rho(x,u'(x))|^2\, dx = \int_B |\rho(x,u'(x))|^2\, dx + \int_{\Omega\setminus B} |\rho(x,u'(x))|^2\, dx$$

$$\int_\Omega |\rho(x,u'(x))|^2\, dx \leq \overbrace{\int_B 2\, K_0^2 a(x)^2 (|u'(x)|^{2r+2} + |u'(x)|^2)\, dx}^{I_1} + \underbrace{\int_{\Omega\setminus B} 2\, K_1^2 a(x)^2 (|u'(x)|^{2p+2} + |u'(x)|^2)\, dx}_{I_2}$$

Se $r \geq 0$ então, $I_1 \leq 4K_0^2 \|a\|_\infty^2 \|u'\|^2_{L^2(\Omega)^n}$.
Se $-1 < r < 0$, então $I_1 \leq 4K_0^2\|a\|_\infty^2 \int_B |u'(x)|^{2r+2} dx \leq 4K_0^2 \|a\|^2_\infty |\Omega| \|u'\|^{2r+2}_{L^2(\Omega)^n}$.
Se $n \geq 3$ e $-1 < p \leq \frac{2}{n-2}$ então, $-1 < p \leq 2$ logo

- Se $-1 < p \leq 0$ então, $I_2 \leq 4K_1^2 \|a\|^2_\infty |\Omega| \|u'\|^2_{L^2(\Omega)^n}$.
- Se $0 < p \leq 2$ então, $I_2 \leq 4K_1^2 \|a\|^2_\infty |\Omega| \|u'\|^{2p+2}_{L^2(\Omega)^n}$.

Se $n = 2$ ou 1 e $-1 < p < +\infty$ a prova é similar. Logo, como I_1, I_2 são finitos então a função $\rho(x, u') \in L^2(\Omega)^n$.

$\blacksquare$

A seguir obtemos a formulação variacional; um sistema de equações equivalente às equações dadas em (2.11) e (2.12) e que são úteis na prova de existência.

Lema 2.2.3 *Suponha válida as hipóteses do Teorema 2.2.1. Seja (u, θ) um par que satisfaz (2.6), (2.9) e (2.10). Então, (u, θ) satisfaz as equações dadas em (2.11) e (2.12) se, e somente se, valem as seguintes igualdades:*

$$\langle\langle u'', w\rangle\rangle + ((u, w))_1 + \langle\langle \nabla\theta, w\rangle\rangle + \langle\langle \rho(\cdot, u'), w\rangle\rangle = 0 \quad \text{em} \quad D'(I),\ \forall\, w \in H_0^1(\Omega)^n,\ \forall\, T > 0; \tag{2.15}$$

$$\langle \theta', z\rangle + \langle\langle \nabla\theta, \nabla z\rangle\rangle - \langle\langle u', \nabla z\rangle\rangle = 0 \ \text{em}\ D'(I), \forall\, z \in H_0^1(\Omega), \forall\, T > 0. \tag{2.16}$$

Prova

Começamos provando a necessidade. Fixamos $T > 0$. Sejam $\psi \in \mathcal{D}(I)$, $w \in H_0^1(\Omega)^n$ e $z \in H_0^1(\Omega)$. Então, usando (1.8) e (1.19) temos

$$\int_0^T \|w(x)\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} dt = \|w(x)\|^2_{L^2(\Omega)^n} \|\psi(t)\|^2_{L^2(I)} < +\infty,$$

assim,

$$w\,\psi \in L^2(I, L^2(\Omega)^n).$$

De igual forma, para $z \in H_0^1(\Omega)^n$ obtemos

$$z\,\psi \in L^2(I, L^2(\Omega)).$$

Tomando o produto interno de $w\,\psi$ em ambos os lados da equação dada em (2.11) no espaço $L^2(I, L^2(\Omega)^n)$ e de $z\,\psi$ em ambos os lados da equação dada em (2.12) no espaço $L^2(I, L^2(\Omega))$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle\langle u'', w\,\psi\rangle\rangle - a^2 \langle\langle \Delta u, w\,\psi\rangle\rangle - (b^2 - a^2)\langle\langle \nabla \mathrm{div}\, u, w\,\psi\rangle\rangle \\ + \langle\langle \nabla\theta, w\,\psi\rangle\rangle \langle\langle \rho(\cdot, u'), w\,\psi\rangle\rangle = 0; \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\langle \theta', z\psi\rangle + \langle \Delta\theta, z\psi\rangle + \langle \mathrm{div}\, u', z\psi\rangle = 0. \tag{2.18}$$

Aplicando a definção (1.52), as fórmulas (1.30), (1.32) e (1.33) e usando o fato de que $u(t), \theta(t) \in H^2(\Omega)^n$ e $u'(t) \in H_0^1(\Omega)^n$, obtemos

$$\int_0^T \psi(t)[\langle\langle u''(t), w\rangle\rangle + ((u(t), w))_1 + \langle\langle \nabla\theta(t), w\rangle\rangle + \langle\langle \rho(\cdot, u'(t)), w\rangle\rangle]dt = 0$$
$$\int_0^T \psi(t)[\langle \theta'(t), z\rangle + \langle\langle \nabla\theta(t), \nabla z\rangle\rangle - \langle\langle u'(t), \nabla z\rangle\rangle] = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(I).$$

Logo usando as hipóteses e o Teorema 1.1.39 obtemos facilmente as equações dadas em (2.15) e (2.16).

Vamos provar a suficiência. A partir da hipóteses, aplicando uma argumento parecido como na prova da necessidade, pode-se obter:

$$\begin{aligned} \langle\langle u'' - a^2\,\Delta u - (b^2 - a^2)\,\nabla \mathrm{div}\, u + \nabla\theta + \rho(\cdot, u'), w\psi\rangle\rangle = 0, \\ \forall\, w \in H_0^1(\Omega)^n\ \forall\, \psi \in D(I),\ \forall\, T > 0; \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\langle \theta' - \Delta\theta + \mathrm{div}\, u', z\psi\rangle = 0, \quad \forall\, z \in H_0^1(\Omega),\ \forall\, \psi \in D(I),\ \forall\, T > 0. \tag{2.20}$$

Aplicando (1.19), Lema 1.1.94 e a continuidade do produto interno temos $\forall T > 0$

$$\begin{aligned} \langle\langle u'' - a^2\,\Delta u - (b^2 - a^2)\,\nabla \mathrm{div}\, u + \nabla\theta + \rho(\cdot, u'), v_1\rangle\rangle = 0,& \\ \forall\, v_1 \in L^2(I, L^2(\Omega)^n);& \\ \langle \theta' - \Delta\theta + \mathrm{div}\, u', v_2\rangle = 0, \quad \forall\, v_2 \in L^2(I, L^2(\Omega)).& \end{aligned}$$

Logo, usando (1.51) o resultado segue.

■

2.3 Prova de existência e unicidade

2.3.1 Unicidade

Sejam (u, θ) e $(\overline{u}, \overline{\theta})$ como no Teorema 2.2.1. Fixamos $T > 0$. Então, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} (u'' - \overline{u}'') - a^2\,\Delta(u - \overline{u}) - (b^2 - a^2)\,\nabla \mathrm{div}\,(u - \overline{u}) + \nabla(\theta - \overline{\theta})& \\ + (\rho(\cdot, u') - \rho(\cdot, \overline{u}')) = 0 \text{ em } L^2(I, L^2(\Omega)^n);& \quad (2.21) \\ (\theta' - \overline{\theta}') - \Delta(\overline{\theta} - \theta) + \mathrm{div}\,(u' - \overline{u}') = 0 \text{ em } L^2(I, L^2(\Omega)).& \quad (2.22) \end{aligned}$$

Somando o produto interno da equação dada em (2.21) por $(u' - \overline{u}')$ no espaço $L^2(I, L^2(\Omega)^n)$ com o produto interno da equação dada em (2.22) por $(\theta - \overline{\theta})$ no espaço $L^2(I, L^2(\Omega))$, logo usando a definição (1.52), as fórmulas (1.30), (1.32), (1.33) também $u(t), \overline{u}(t) \in H^2(\Omega)^n$,

$u'(t), \overline{u}'(t) \in H_0^1(\Omega)^n$ e $\theta \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$I(T) + \int_0^T [\langle\langle(\rho(\cdot, u'(t)) - \rho(\cdot, \overline{u}'(t))), (u' - \overline{u}')(t)\rangle\rangle$$
$$+ \langle\langle \Delta(\overline{\theta} - \theta)(t), (\overline{\theta} - \theta)(t)\rangle\rangle] dt = 0, \qquad (2.23)$$

onde

$$I(T) = \int_0^T [\langle\langle(u'' - \overline{u}'')(t), (u' - \overline{u}')(t)\rangle\rangle$$
$$+ (((u - \overline{u})(t), (u' - \overline{u}')(t)))_1 + \langle\langle(\theta' - \overline{\theta}')(t), (\theta - \overline{\theta})\rangle\rangle] dt. \qquad (2.24)$$

Usando (2.23) e a desigualdade (2.1) obtemos $I(T) \leq 0$. Por outro lado aplicando (2.24), a fórmula de integração por partes dada pela fórmula (1.64) e as condições iniciais do problema para (u, θ) e $(\overline{u}, \overline{\theta})$, obtemos:

$$\|u'(T) - \overline{u}'(T)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + |||u(T) - \overline{u}(T)|||_1^2$$
$$+ \|\theta(T) - \overline{\theta}(T)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u'(0) - \overline{u}'(0)\|^2_{L^2(\Omega)^n}$$
$$+ |||u(0) - \overline{u}(0)|||_1^2 + \|\theta(0) - \overline{\theta}(0)\|^2_{L^2(\Omega)^n} = 0. \qquad (2.25)$$

Finalmente pela arbitrariedade de T, temos que

$$u \equiv \overline{u} \qquad \text{e} \qquad \theta \equiv \overline{\theta}.$$

■

2.3.2 Existência

Na prova da existência no Teorema 2.2.1, seguimos o conhecido método de Faedo-Galerkin. Esse método é baseado na construção de problemas projetados sobre os espaços de aproximação de Galerkin. Usando teoria de equações diferenciais ordinárias, garantimos a existência de soluções suaves para os problemas projetados, que são chamadas soluções aproximadas. Estabelecemos algumas estimativas para mostrar que a sequência de soluções aproximadas é limitada em algúm espaço adequado. Atráves de compacidade, extraímos uma subsequência convergente. Mostramos que o limite desta subsequência é solução do problema original. Nesta subseção, dividimos o método nas seguintes etapas:

1. Problema aproximado em espaço de dimensão finita;

2. Estimativas à priori;

3. Extração de uma subsequência convergente à um par (u, θ) candidato a solução do sistema termo-elástico;

4. Passagem ao limite no primero item;

5. Regularidade da solução (u, θ);

6. Análise das condições iniciais.

Problema aproximado

Consideramos $\{v_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ e $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ bases Hilbertianas para os espaços $H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n$ e $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ respectivamente.

Resolve-se inicialmente, um problema aproximado num subespaço de dimensão finita, isto é, projetar as equações (2.15) e (2.16) sobre o subespaço $V_m \times W_m$ de dimensão finita, para um $m \in \mathbb{N}$ fixo, onde V_m

é o subespaço gerado por $\{v_1, \cdots, v_m\}$ e W_m é o subespaço gerado por $\{w_1, \cdots, w_m\}$,

$$V_m = [v_1, \ldots, v_m] \quad \text{e} \quad W_m = [w_1, \ldots, w_m], \ \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{2.26}$$

Procura-se algum tempo t_m, o maior possível, num intervalo $[0, T]$, para um $T > 0$ arbitrário fixo e funções

$$u_m : [0, t_m) \longmapsto V_m \quad \text{e} \quad \theta_m : [0, t_m) \longmapsto W_m \tag{2.27}$$

que satisfaçam o seguinte problema de valor inicial:

$$P_m \begin{cases} \langle\langle u_m'', v\rangle\rangle + ((u_m, v))_1 + \langle\langle \nabla\theta_m, v\rangle\rangle + \langle\langle \rho(\cdot, u_m'), v\rangle\rangle = 0, \ \forall v \in V_m \\ \langle \theta_m', w\rangle + \langle\langle \nabla\theta_m, \nabla w\rangle\rangle - \langle\langle u_m', \nabla w\rangle\rangle = 0. \ \forall w \in W_m \\ u_m(0) = u_{0\,m} \in V_m \\ u_m'(0) = u_{1\,m} \in V_m \\ \theta_m(0) = \theta_{0\,m} \in W_m, \end{cases}$$

onde

$$u_{0\,m} = \sum_{k=1}^{m} a_{k\,m} v_k, \qquad u_{1\,m} = \sum_{k=1}^{m} b_{k\,m} v_k \qquad \text{e} \qquad \theta_{0\,m} = \sum_{k=1}^{m} c_{k\,m} w_k$$

são as projeções de

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k\,m} v_k, \qquad u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k\,m} v_k \qquad \text{e} \qquad \theta_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k\,m} w_k$$

Assim é imediato ver a convergência forte

$$\begin{array}{lcc} u_{0\,m} \to u_0, & \text{em} & H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n \\ u_{1\,m} \to u_1 & \text{em} & H_0^1(\Omega)^n \\ \theta_{0\,m} \to \theta_0 & \text{em} & H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \end{array} \tag{2.28}$$

Observação Pelo fato da convergência (2.28) e usando as desigualdades (1.13), (1.14), (1.15) e (1.21), pode-se garantir que os termos

$$\begin{array}{ccc} \|\Delta u_{0,m}\|_{L^2(\Omega)^n}, & & \|\nabla \mathrm{div}\, u_{0,m}\|_{L^2(\Omega)^n}, \\ \|\Delta \theta_{0,m}\|_{L^2(\Omega)^n} & \text{e} & \|\mathrm{div}\, u_{1,m}\|_{L^2(\Omega)^n} \end{array} \tag{2.29}$$

são limitados para todo $m \in \mathbb{N}$.

Utilizando as propriedades de base Hilbertiana, podemos garantir que existiram um sistema contínuo de escalares, isto é, funções suaves

$$g_{k\,m} : [0,T) \longmapsto \mathbb{R} \quad \text{e} \quad h_{k\,m} : [0,T) \longmapsto \mathbb{R}, \ \forall\, 1 \leq k \leq m,$$

tal que podemos escrever

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} g_{k\,m}(t)\, v_k, \tag{2.30}$$

$$\theta_m(t) = \sum_{k=1}^{m} h_{k\,m}(t)\, w_k. \tag{2.31}$$

Substituindo estes valores no problema (P_m) e tomando $v = v_j$ e $w = w_j$

para $j = 1 \cdots m$, tem-se

$$\sum_{k=1}^{m} [A_{k\,j} g''_{k\,m}(t) + B_{k\,j} g_{jm}(t) + C_{k\,j} h_{k\,m}(t)] = -\langle\langle \rho(\cdot, \sum_{k=1}^{m} g'_{k\,m}(t) v_k), v_j \rangle\rangle$$

$$\forall\, 1 \leq j \leq m,\ \forall\, 0 \leq t < t_m; \quad (2.32)$$

$$\sum_{k=1}^{m} [D_{k\,j} h'_{k\,m}(t) + E_{k\,j} h_{k\,m}(t) - F_{k\,j} g'_{k\,m}(t) = 0$$

$$\forall\, 1 \leq j \leq m,\ \forall\, 0 \leq t < t_m \quad (2.33)$$

$$g_{k\,m}(0) = a_{k\,m} \qquad g'_{k\,m}(0) = b_{k\,m} \qquad h_{k\,m}(0) = c_{k\,m} \qquad \forall\, 1 \leq k \leq m. \quad (2.34)$$

Definimos

$$A_m, \quad B_m, \quad C_m, \quad D_m, \quad E_m \quad \text{e} \quad F_m \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$$

cujas componentes são

$$A^m_{k\,j} = \langle\langle v_k, v_j \rangle\rangle \quad B^m_{k\,j} = ((v_k, v_j))_1 \quad C^m_{k\,j} = \langle\langle \nabla w_k, v_j \rangle\rangle$$
$$D^m_{k\,j} = \langle w_k, w_j \rangle \quad E^m_{k\,j} = \langle\langle \nabla w_k, \nabla w_j \rangle\rangle \quad F^m_{k\,j} = \langle\langle v_k, \nabla w_j \rangle\rangle.$$

Vamos introduzir a seguinte mudança de variável

$$y = y(t) = (y_1, \cdots, y_m) \quad \text{onde} \quad y_k(t) = g_{k\,m}(t), \quad k = 1, \cdots, m,$$
$$x = x(t) = (x_1, \cdots, x_m) \quad \text{onde} \quad x_k(t) = h_{k\,m}(t), \quad k = 1, \cdots, m.$$

Podemos reescrever as equações (2.32) e (2.33) da seguinte forma matricial

$$
\begin{aligned}
A_m y'' + B_m y + C_m x &= G_1^m(y') \\
D_m x' + E_m x - F_m y' &= \bar{0},
\end{aligned}
$$

onde

$$
G_1^m(y') = \begin{bmatrix} -\langle\langle \rho(\cdot, \sum_{k=1}^{m} y'_k v_k), v_1 \rangle\rangle \\ \vdots \\ -\langle\langle \rho(\cdot, \sum_{k=1}^{m} y'_k v_k), v_m \rangle\rangle \end{bmatrix}.
$$

Introduzimos a variável auxiliar

$$
\begin{aligned}
\phi_m(t) &= (y(t), y'(t), x(t)), \\
\phi_0 &= (a_{1m}, \cdots, a_{mm}, b_{1m}, \cdots, b_{mm}, c_{1m}, \cdots, c_{mm}).
\end{aligned}
$$

e também a função

$$
\begin{aligned}
G^m : \mathbb{R}^{3m} &\longmapsto \mathbb{R}^{3m} \\
(s_1, \cdots, s_{3m}) &\longmapsto \left(\underbrace{0, \cdots, 0}_{m \quad vezes}, G_1^m(s_{m+1}, \cdots, s_{2m}), \underbrace{0, \cdots, 0}_{m \quad vezes} \right),
\end{aligned}
$$

Observações

1. É claro que a função G^m é continuamente diferenciável.

2. As matrizes A_m e D_m são inversíveis.

Então, o problema de valor inicial dado em (2.32), (2.33) e (2.34) é equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\phi'_m(t) = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m \\ -A_m^{-1}B_m & 0_m & -A_m^{-1}C_m \\ 0_m & +D_m^{-1}F_m & -D_m^{-1}E_m \end{bmatrix} .\phi_m(t) + G^m(\phi_m(t)),$$

$$\forall t \quad \text{tal que} \quad 0 \leq t < T,$$

$$\phi_m(0) = \phi_0. \tag{2.35}$$

Aplicando o Teorema 1.1.109, obtemos o resultado desejado para $0 \leq t_m < T$ maximal e com as seguintes suavidades:

$$u_m \in C^3([0, t_m), V_m) \qquad \text{e} \qquad \theta_m \in C^2([0, t_m), W_m). \tag{2.36}$$

Estimativa à priori I

Escolhendo $v = u'_m(t)$ na primeira equação e $w = \theta_m(t)$ na segunda equação de (P_m), e aplicando (1.7), o Lema 1.1.54 e (1.22) temos as seguintes igualdades:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + |||u_m(t)|||^2_1) + \langle\langle \nabla\theta_m, u'_m\rangle\rangle + \langle\langle \rho(\cdot, u'_m), u'_m\rangle\rangle = 0,$$

$$\forall t \in [0, t_m);$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\theta_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} - \langle\langle u'_m, \nabla\theta_m\rangle\rangle = 0, \quad \forall t \in [0, t_m).$$

Somando ambas equações:

$$\langle\langle \rho(x, u'_m(t)), u'_m(t)\rangle\rangle + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + |||u_m(t)|||^2_1 + \|\theta_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \|\nabla\theta_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} = 0. \quad \forall t \in [0, t_m). \tag{2.37}$$

Também

$$\|\nabla\theta_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + \langle\langle\rho(\cdot, u'_m(t)), u'_m(t)\rangle\rangle = -\frac{dE(t)}{dt}, \quad \forall\, t \in [0, t_m). \tag{2.38}$$

Usando (2.1) em (2.37) e (2.38) obtemos:

$$\|\nabla\theta_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} \quad \leq \quad |\frac{dE(t)}{dt}|, \qquad \forall\, t \in [0, t_m), \tag{2.39}$$

e

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}(\|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + |||u_m(t)|||^2_1 + \|\theta_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) \\ &\qquad\qquad + \|\nabla\theta_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} \leq 0, \quad \forall\, t \in [0, t_m). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Usando o Teorema 1.1.3 em (2.40) e o Lema 1.1.54 e Proposição 1.1.41 obtemos:

$$\begin{aligned} \|\nabla\theta_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} \quad \leq \quad & \frac{1}{2}\,[\|u'_m\|^2_{L^2(\Omega)^n} + \|u''_m\|^2_{L^2(\Omega)^n} \\ & + a^2\left(|||u_m|||^2_0 + |||u'_m|||^2_0\right) \\ & + (b^2 - a^2)\left(\|\operatorname{div} u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} u'_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ & + \|\theta_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\theta'_m\|^2_{L^2(\Omega)}]. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Integrando (2.40) de 0 à t e usando as suavidades dada em (2.36), temos que

$$\begin{aligned} \|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} \quad + \quad & |||u_m(t)|||^2_1 + \|\theta_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_0^t \|\nabla\theta_m(r)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\, dr \\ \leq \quad & \|u_{1,m}\|^2_{L^2(\Omega)^n} + |||u_{0,m}|||^2_1 + \|\theta_{0,m}\|^2_{L^2(\Omega)},\ \forall\, t \in [0, t_m). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Pela convergência dada em (2.28), existe uma constante real e positiva C tal que

$$
\begin{aligned}
\|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} &\leq C, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < t_m, && (2.43)\\
|||u_m(t)|||_1^2 &\leq C, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < t_m, && (2.44)\\
\|\theta_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < t_m, && (2.45)\\
\int_0^t \|\nabla\theta_m(r)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\, dr &\leq C, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < t_m. && (2.46)
\end{aligned}
$$

Além disso, usando (1.3), temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m g_{j\,m}(t)^2 &\leq C_1\, |||u_m(t)|||_1^2,\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < t_m, && (2.47)\\
\sum_{j=1}^m g_{j\,m}'(t)^2 &\leq C_1\, \|u_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n},\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < t_m, && (2.48)\\
\sum_{j=1}^m h_{j\,m}(t)^2 &\leq C_1\, \|\theta_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)},\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < t_m. && (2.49)
\end{aligned}
$$

Pelas estimativas dadas em (2.43), (2.44) e (2.45), as desigualdade dadas em (2.47), (2.48) e (2.49) e o Corolário 1.1.110 podemos prolongar a solução, ou seja, podemos tomar

$$t_m = T, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{2.50}$$

Estimativa à priori II

Escolhendo $v = u_m''(t)$ na primeira equação e $w = \theta_m'(t)$ na segunda equação de (P_m), aplicando o Lema 1.1.54, (1.12), (1.32) e (1.31) na primeira equação depois aplicando (1.31) na segunda, para finalmente aplicar em $t = 0$, temos as seguintes igualdades:

$$\|u''_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^n} - a^2 \langle\langle \Delta u_{0,m}, u''_m(0)\rangle\rangle - (b^2 - a^2) \langle\langle \nabla \mathrm{div}\, u_{0,m}, u''_m(0)\rangle\rangle$$
$$+\langle\langle \rho(\cdot, u_{1,m}), u''_m(0)\rangle\rangle = 0; \quad (2.51)$$
$$\|\theta'_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)^n} - \langle \Delta\theta_{0,m}, \theta'_m(0)\rangle + \langle \mathrm{div}\, u'_m, \theta'_m\rangle = 0. \quad (2.52)$$

Pela desigualdade de Cauchy-Bunyakovskii-Schwartz (veja [4], pg. 57), temos que

$$C_1 \|u''_m(0)\|_{L^2(\Omega)^n} \leq \|\Delta u_{0,m}\|_{L^2(\Omega)^n} + \|\nabla \mathrm{div}\, u_{0,m}\|_{L^2(\Omega)^n}$$
$$+\|\rho(\cdot, u_{1,m})\|_{L^2(\Omega)^n}; \quad (2.53)$$
$$\|\theta'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta\theta_{0,m}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{div}\, u_{1,m}\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.54)$$

para

$$C_1 = \frac{1}{\max\{a^2, |b^2 - a^2|, 1\}}.$$

Usando a desigualdade dada no Lema 2.2.2 para estimar $\|\rho(\cdot, u_{1,m})\|_{L^2(\Omega)^n}$, e (2.29) mostramos que existe uma constante real e positiva C tal que

$$\|u''_m(0)\|_{L^2(\Omega)^n} \leq C, \ \forall\, m \in \mathbb{N}, \quad (2.55)$$
$$\|\theta'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \ \forall\, m \in \mathbb{N}. \quad (2.56)$$

Estimativa à priori III

Derivando as duas primerias equações dadas em (P_m) com respeito a t, obtemos que o par de soluções (u_m, θ_m) satisfaz:

$$
\begin{aligned}
&\langle\langle u_m'''(t), v\rangle\rangle + \langle\langle\langle u_m'(t), v\rangle\rangle\rangle_1 + \langle\langle\nabla\theta_m'(t), v\rangle\rangle \\
&+\langle\langle(\frac{\partial\rho}{\partial s}(\cdot, u_m'(t))) \cdot u_m''(t), v\rangle\rangle = 0, \quad \forall\, v \in V_m,\ \forall\, t \in [0,T), \qquad (2.57) \\
&\langle\theta_m''(t), w\rangle + \langle\langle\nabla\theta_m'(t), \nabla v\rangle\rangle\rangle + \langle\langle \operatorname{div} u_m''(t), w\rangle\rangle = 0, \\
&\qquad \forall\, w \in W_m,\ \forall\, t \in [0,T). \qquad (2.58)
\end{aligned}
$$

Escolhendo $w = u_m''(t)$ na equação dada em (2.57) e $\theta = \theta_m'(t)$ na equação dada em (2.58), temos as seguintes igualdades:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}(\|u_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + |||u_m'(t)|||_1^2) + \langle\langle\nabla\theta_m'(t), u_m''(t)\rangle\rangle \\
&+\langle\langle\frac{\partial\rho}{\partial s}(\cdot, u_m'(t)) \cdot u_m''(t), u_m''(t)\rangle\rangle = 0, \qquad \forall\, 0 \le t < T; \\
&\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\theta_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\theta_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + \langle\langle \operatorname{div} u_m''(t), \theta_m'(t)\rangle\rangle = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, 0 \le t < T.
\end{aligned}
$$

Somando as equações anteriores, aplicando a fórmula (1.31), e a propriedade (3) sobre a função ρ, obtemos:

$$
\begin{aligned}
0 \quad &\ge \quad -\langle\langle\frac{\partial\rho}{\partial s}(\cdot, u_m'(t))\,.\,u_m''(t), u_m''(t)\rangle\rangle \\
&= \quad (\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}(\|u_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + |||u_m'(t)|||_1^2 + \|\theta_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) \\
&\qquad +\|\nabla\theta_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n}, \qquad \forall\, 0 \le t < T.
\end{aligned}
$$

Integrando de 0 à t e usando as suavidades dada em (2.36), temos que

$$
\begin{aligned}
&\|u_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + |||u_m'(t)|||_1^2 + \|\theta_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\nabla\theta_m'(r)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\, dr \\
&\qquad\qquad \le \|u_m''(0)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + |||u_m'(0)|||_1^2 + \|\theta_m'(0)\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Pela convergência em (2.28), que independe de t, e desigualdades dadas em (2.43), (2.55) e (2.56), existe uma constante real e positiva C tal que

$$\|u''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} \leq \quad C, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < T, \tag{2.59}$$

$$|||u'_m(t)|||^2_1 \leq \quad C, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < T, \tag{2.60}$$

$$\|\theta'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \quad C, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < T, \tag{2.61}$$

$$\int_0^t \|\nabla \theta'_m(r)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\, dr \leq \quad C, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leq t < T. \tag{2.62}$$

Finalmente usando (1.21), o Lema 1.1.54 e as estimativas (2.43), (2.44), (2.45) , (2.59), (2.60) e (2.61)

$$\|\nabla \theta_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} \quad \leq \quad C, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}, \quad \forall\, 0 \leq t < T. \tag{2.63}$$

Candidato à solução

Sem abuso de notação, sejam $I = (0,T)$ $K_n = H^1_0(\Omega)^n$ e $L_n = L^2(\Omega)^n$ onde K'_n e L'_n são seus respectivos espaços duais.

Assim pelas estimativas à priori obtidas, (1.4), o Teorema 1.1.92 e (1.54) temos a seguinte conclusão:

$(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(I, K_n) \hookrightarrow L^\infty(I, K'_n) \cong [L^1(I, K_n)]'$;

$(u'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(I, K_n) \hookrightarrow L^\infty(I, K'_n) \cong [L^1(I, K_n)]'$;

$(u''_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(I, L_n) \hookrightarrow L^\infty(I, L'_n) \cong [L^1(I, L_n)]'$;

$(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(I, L_1) \hookrightarrow L^\infty(I, L'_1) \cong [L^1(I, L_1)]'$;

$(\theta'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(I, L_1) \hookrightarrow L^\infty(I, L'_1) \cong [L^1(I, L_1)]'$;

Aplicando o Corolario 1.1.25, temos que $u_{m_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u_1$ em $L^\infty(I, K_n)$, mas como u'_m é limitada em $L^\infty(I, K_n)$ então a subsequência u'_{m_k} é limitada $L^\infty(I, K_n)$. Por outro lado, pelo Corolario 1.1.25, temos $u'_{m_{k'}} \overset{*}{\rightharpoonup} u_2$ em $L^\infty(I, K_n)$, assim obtemos

$$\begin{aligned} u_{m_{k'}} &\overset{*}{\rightharpoonup} u_1 \qquad \text{em} \qquad L^\infty(I, K_n); \\ u'_{m_{k'}} &\overset{*}{\rightharpoonup} u_2 \qquad \text{em} \qquad L^\infty(I, K_n). \end{aligned} \tag{2.64}$$

Logo, pelo Teorema 1.1.105, $u_{m_{k'}}, u'_{m_{k'}} \in \mathcal{D}'(I, K_n)$. Como sonsequêcia, usando (1.66), temos

$$\begin{aligned} \int_0^T u_{m_{k'}}(t)\varphi(t)dt \to \int_0^T u_1(t)\varphi(t)dt, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I); \\ \int_0^T u'_{m_{k'}}(t)\varphi(t)dt \to \int_0^T u_2(t)\varphi(t)dt, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I). \end{aligned} \tag{2.65}$$

Logo, por definição de derivada distribuicional temos

$$\begin{aligned} \int_0^T u'_{m_{k'}}(t)\,\varphi(t)dt &= \\ -\int_0^T u_{m_{k'}}(t)\,\varphi'(t)dt &\to -\int_0^T u_1(t)\,\varphi'(t)dt \\ &= \int_0^T u'_1(t)\,\varphi(t)dt, \end{aligned}$$

e assim $u'_{m_{k'}} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_1$ em $\mathcal{D}'(I, K_n)$, Pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(I, K_n)$ e (2.65), temos $u_2 = u'_1$ em $\mathcal{D}'(I, K_n)$, o que implica em

$$\int_0^T (u_2 - u'_1)(t)\varphi(t)dt = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

finalmente usando o Lema 1.1.106 temos que $u_2(t) = u'_1(t)$ quase sempre no intervalo I. Portanto existe $u \in L^\infty(I, K_n)$ tal que

$$u_{m_{k'}} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(I, K_n); \tag{2.66}$$

$$u'_{m_{k'}} \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{em} \quad L^\infty(I, K_n). \tag{2.67}$$

Usando (1.19), o Teorema 1.1.92 e o mesmo argumento anterior, obtemos

$$u''_{m_{k'}} \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \quad \text{em} \quad L^\infty(I, L_n). \tag{2.68}$$

Também consegue-se a existência de $\theta \in L^\infty(I, L_1)$ satisfazendo

$$\theta_{m_{k'}} \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \quad \text{em} \quad L^\infty(I, L_1); \tag{2.69}$$

$$\theta'_{m_{k'}} \overset{*}{\rightharpoonup} \theta' \quad \text{em} \quad L^\infty(I, L_1). \tag{2.70}$$

Passagem ao limite

Vamos denotar as subsequências $\{u_{m_{k'}}\}_{m_{k'} \in \mathbb{N}}$ e $\{\theta_{m_{k'}}\}_{m_{k'} \in \mathbb{N}}$ por $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ e $\{\theta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$.

Lema 2.3.1 *Sejam $v \in K_n$, $I = (0, T)$ e $\phi \in \mathcal{D}(I)$, então*

$$\int_0^T \langle\langle u''_m(t), v \rangle\rangle \, \phi(t) dt \to \int_0^T \langle\langle u''(t), v \rangle\rangle \, \phi(t) dt.$$

Prova

De fato, usando (2.68) e (1.55) temos que para cada $z \in L^1(I, L'_n)$

$$\int_0^T \langle z(t), u''_m(t) \rangle_{L'_n, L_n} dt \to \int_0^T \langle z(t), u''(t) \rangle_{L'_n, L_n} dt.$$

Em particular, pelo Teorema 1.1.92 a covêrgencia acima é válida para cada $z \in L^2(I, L'_n)$. Logo, pela Definição 1.1.20, $u''_{m_{k'}} \rightharpoonup u''$ em $L^2(I, L_n)$, Isto é, para todo $\xi \in L^2(I, L'_n)$ temos

$$\langle \xi, u''_m \rangle_{L^2(I,L'_n),L^2(I,L_n)} \to \langle \xi, u'' \rangle_{L^2(I,L'_n),L^2(I,L_n)}. \tag{2.71}$$

Em particular para $\xi = h\phi$, $\phi \in \mathcal{D}(I)$ e $h \in L'_n$, obtemos

$$\int_0^T \langle h, u''_m(t) \rangle_{L'_n,L_n} \phi(t)dt \to \int_0^T \langle h, u''(t) \rangle_{L'_n,L_n} \phi(t)dt.$$

Aplicando o isomorfismo (1.4) em $h \mapsto v$, tem-se

$$\int_0^T \langle\langle u''_m(t), v \rangle\rangle \, \phi(t)dt \to \int_0^T \langle\langle u''(t), v \rangle\rangle \, \phi(t)dt.$$

para $v \in L_n$ e $\phi \in \mathcal{D}(I)$.

■

Usando as convergências (2.66), (2.67) e (2.70), as fórmulas (1.31), (1.32), a limitação (2.63) e o procedimento feito no Lema 2.3.1, temos as seguintes convergências

$$\begin{aligned}
\int_0^T ((u_m(t), v))_1 \, \phi(t)dt &\to \int_0^T ((u(t), v))_1 \, \phi(t)dt, \quad \forall v \in K_n \\
\int_0^T \langle\langle u'_m(t), \nabla w \rangle\rangle \, \phi(t)dt &\to \int_0^T \langle\langle u'(t), \nabla w \rangle\rangle \, \phi(t)dt, \quad \forall w \in K_1 \\
\int_0^T \langle \theta'_m(t), w \rangle \, \phi(t)dt &\to \int_0^T \langle \theta'(t), w \rangle \, \phi(t)dt, \quad \forall w \in L_1 \\
\int_0^T \langle\langle \nabla\theta_m(t), v \rangle\rangle \, \phi(t)dt &\to \int_0^T \langle\langle \nabla\theta(t), v \rangle\rangle \, \phi(t)dt, \quad \forall v \in K_n \\
\int_0^T \langle\langle \nabla\theta_m(t), \nabla w \rangle\rangle \, \phi(t)dt &\to \int_0^T \langle\langle \nabla\theta(t), \nabla w \rangle\rangle \, \phi(t)dt, \quad \forall w \in K_1
\end{aligned}$$

para $\phi \in \mathcal{D}(I)$.

Finalmente vamos obter a seguinte convergência

Lema 2.3.2 *Sejam $v \in K_n$, $I = (0,T)$ e $\phi \in \mathcal{D}(I)$, então*

$$\int_0^T \langle\langle \rho(.,u_m'(t)), v\rangle\rangle\, \phi(t)dt \to \int_0^T \langle\langle \rho(.,u'(t)), v\rangle\rangle\, \phi(t)dt. \tag{2.72}$$

Prova

Como visto no Lema 2.3.1, é suficiente provar que

$$\rho(\cdot, u_m') \rightharpoonup \rho(\cdot, u') \text{ em } L^2(I, L_n).$$

Além disso, pelo Teorema 1.1.87, basta provar que

$$\rho(\cdot, u_m'(t)) \rightharpoonup \rho(\cdot, u'(t)) \text{ em } L^2(I \times \Omega)^n.$$

Aplicando a estimativa para $\rho(x, u_m'(t))$ obtida no Lema (2.2.2), temos que

$$\|\rho(\cdot, u_m')\|_{L^2(I\times\Omega)^n} < C_1\, T \tag{2.73}$$

para alguma constante real e positiva C_1, não dependendo de m e T. Também das convergência (2.67) e (2.68) obtemos que $u_m' \rightharpoonup u'$ em $L^2(I, K_n)$ e $u_m'' \rightharpoonup u''$ em $L^2(I, L_n)$. Logo, u_m' é limitado no espaço

$$W(I) = \{v \in L^2(I, K_n);\ v' \in L^2(I, L_n)\}.$$

Usando os Teoremas de 1.1.77 e 1.1.95, temos que $W(I)$ está imerso compactamente em $L^2(I, L_n) \cong L^2(I \times \Omega)$, então existe uma subsequência de u_m', ainda denotada por u_m', tal que

$$u_m' \to u' \qquad \text{em} \qquad L^2(I \times \Omega).$$

Logo,

$$u'_m \to u' \qquad \text{q.s. em} \qquad I \times \Omega.$$

Pela continuidade da função ρ, obtemos a seguinte convergência:

$$\rho(\cdot, u'_m) \to \rho(\cdot, u') \;\; \text{q.s. em } I \times \Omega. \tag{2.74}$$

Usando o Lema 1.1.44, a limitação dada em (2.73) e a convergência dada em (2.74) concluímos o resultado.

■

Multiplicando o sistema aproximado (P_m) por $\phi \in \mathcal{D}(I)$, e integrando em $\overline{I}$ para um m fixo e aplicando as convergências acima temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle\langle u''(t), v_j\rangle\rangle \, \phi(t)dt + \int_0^T ((u(t), v_j))_1 \, \phi(t)dt \\
&+ \int_0^T \langle\langle \nabla\theta(t), v_j\rangle\rangle \phi(t)\, dt + \int_0^T \langle\langle \rho(\cdot, u'(t)), v_j\rangle\rangle \phi(t) = 0, \qquad \forall v_j \in V_m, \\
&\int_0^T \langle \theta'_m(t), w_j\rangle \, \phi(t)dt + \int_0^T \langle\langle \nabla\theta(t), \nabla w_j\rangle\rangle \, \phi(t)dt \\
&- \int_0^T \langle\langle u'(t), \nabla w_j\rangle\rangle \, \phi(t)dt = 0, \qquad \forall w_j \in W_m.
\end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
&\langle\langle u'', v\rangle\rangle + ((u, v))_1 + \langle\langle \nabla\theta, v\rangle\rangle + \langle\langle \rho(\cdot, u'), v\rangle\rangle = 0, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{em} \quad \mathcal{D}'(I), \quad \forall v \in V_m \\
&\langle \theta', w\rangle + \langle\langle \nabla\theta, \nabla w\rangle\rangle - \langle\langle u', \nabla w\rangle\rangle = 0. \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(I), \quad \forall w \in W_m.
\end{aligned}$$

Usando as densidades de $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{W_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n$ e $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, respeitivamente, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} &\langle\langle u'', v\rangle\rangle + ((u,v))_1 + \langle\langle \nabla\theta, v\rangle\rangle + \langle\langle \rho(\cdot, u'), v\rangle\rangle = 0, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(I), \\ &\hspace{12em} \forall v \in H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n, \quad T>0 \end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned} &\langle \theta', w\rangle + \langle\langle \nabla\theta, \nabla w\rangle\rangle - \langle\langle u', \nabla w\rangle\rangle = 0, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(I), \\ &\hspace{12em} \forall w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad T>0. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Regularidade

Usando as equações dadas em (2.75) e (2.76) e escrevendo

$$M = ((u(t), v))_1 \quad \text{e} \quad N = \langle\langle \nabla\theta(t), \nabla w\rangle\rangle$$

obtemos:

$$\begin{aligned} M &= -\langle\langle \nabla\theta(t) + \rho(\cdot, u'(t)) + u''(t), v\rangle\rangle, \\ &\quad\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)^n, \end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned} N &= \langle -\operatorname{div} u'(t) - \theta'(t), w\rangle, \\ &\quad\ \forall\, w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.78}$$

Aplicando os Teoremas 1.1.80 e 1.1.78 de Regularidade Elíptica, segue que

$$u(t) \in H^2(\Omega)^n \quad \text{e} \quad \theta(t) \in H^2(\Omega). \tag{2.79}$$

Além disso, existe uma constante real e positiva C tal que satisfaz as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^2(\Omega)^n} &\leq C\,\|\nabla\theta(t) + \rho(\cdot, u'(t)) + u''(t)\|_{L^2(\Omega)^n}; \\ \|\theta(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C\,\|\theta'(t) + \operatorname{div} u'(t)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Finalmente usando (2.63), as estimativas para a função ρ dadas no Lema 2.2.2, as limitações (2.43), (2.59), (2.60) (2.61), para as sequências dado no problema aproximado (P_m), e o item 4 do Teorema 1.1.23 temos que existe uma constante real e positiva C_1 tal que satisfaz as seguintes desigualdades, são satisfeitas

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^2(\Omega)^n} &\leq C(\|\nabla\theta(t)\|_{L^2(\Omega)^n} + \|\rho(\cdot, u'(t))\|_{L^2(\Omega)^n} \\
&+ \|u''(t)\|_{L^2(\Omega)^n}) \\
&\leq C_1, \qquad (2.80) \\
\|\theta(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C(\|\theta'(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} u'(t)\|_{L^2(\Omega)}) \\
&\leq C_1. \qquad (2.81)
\end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$(u,\theta) \in L^\infty((0,\infty), H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n) \times L^\infty((0,\infty), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)). \qquad (2.82)$$

Condições iniciais

Sejam $I = (0,T)$, escolhemos $\phi \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R})$ tal que $\phi(T) = 0$ e $\phi(0) = 1$. Se $v \in H_0^1(\Omega)^n$. Então, $v\,\phi \in W(I, H_0^1(\Omega)^n)$. Aplicando a fórmula de integração por partes dada no Teorema 1.1.102 e $u_m \rightharpoonup u$ $u'_m \rightharpoonup u'$ em $L^2(I, K_n)$ provadas anteriormente temos

$$\begin{aligned}
((u_{0\,m}, v))_1 &= -\int_0^T ((u_m, \phi'\,v))_1 + ((u'_m, \phi\,v))_1\,dt \\
&\to -\int_0^T ((u, \phi'\,v))_1 + ((u', \phi\,v))_1\,dt = ((u(0), v))_1.
\end{aligned}$$

Isto implica que

$$u_{0\,m} \stackrel{*}{\rightharpoonup} u(0) \text{ em } H_0^1(\Omega)^n.$$

Pela convergência dada em (2.28) e o Teorema 1.1.23 temos

$$u_{0\,m} \stackrel{*}{\rightharpoonup} u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega)^n.$$

Logo, pela unicidade do limite, temos

$$u(0) = u_0.$$

Usando os Teoremas 1.1.77 e 1.1.92 obtemos convergências em $L^2(I, L_n)$ e de forma análoga, obtemos

$$\begin{aligned} u'(0) &= u_1, \\ \theta(0) &= \theta_0. \end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Comportamento Assintótico

3.1 Introdução

Nesta seção seguimos as idéias encontradas em [7] e usamos as hipóteses para ρ, já mencionadas na seção 2.1, para obtermos taxas de decaimento da energia associada às soluções do sistema termoelástico. De fato, supomos que a dissipação dada por ρ seja efetiva numa vizinhança de uma parte da fronteira de Ω e tenha um comportamento do tipo "polinomial" na segunda variável. Para o conjunto Ω e as constantes do sistema, supomos, em todo o capítulo, que satisfazem as condições dadas no Teorema 2.2.1. Além disso, supomos também que o par (u, θ) é solução do sistema termoelástico no sentido do Teorema 2.2.1, para uma dada condição inicial (u_0, u_1, θ_0).

3.2 Hipóteses adicionais

A seguir especificamos a região onde a dissipação do sistema é efetiva. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$\Gamma(x_o) = \{x \in \partial\Omega : \ (x - x_o) \cdot \nu(x) \geq 0\},$$

onde $\nu(x)$ denota o vetor normal unitário exterior em $x \in \partial\Omega$.

Além das hipóteses dadas na seção 2.1, supomos que ρ satisfaz a seguinte condição:

5. Seja $w \subset \overline{\Omega}$ uma vizinhança de $\Gamma(x_0)$, então

$$a(x) \geq a_0 > 0, \ \forall\, x \in w.$$

Logo, para nosso propósito, vamos assumir que existem $\widetilde{\epsilon} > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\{x^i\}_{i=1}^{n_0} \subset \Gamma(x_0)$ tais que

$$w = \bigcup_{i=1}^{n_0} B(x^i, \widetilde{\epsilon}). \tag{3.1}$$

As constantes C e C_n obtidas daqui em diante, podem depender das hipóteses fixadas na seção 2.1 e nesta seção, isto é, podem depender dos coeficientes a e b do sistema, das condições iniciais fixadas (u_0, u_1, θ_0), das hipóteses sobre a função ρ (r, p, K_0, K_1 K_2, K_3, a_0, x_0, ω) e do conjunto Ω. Também a mesma letra C pode identificar diferentes constantes numa mesma sequência de estimativas.

Definição 3.2.1 *Definimos os seguintes conjuntos:*

$$\Omega_1(s) = \{x \in \Omega; \ |u_s(s,x)| \leq 1\}; \tag{3.2}$$

$$\Omega_2(s) = \{x \in \Omega; \ |u_s(s,x)| \geq 1\}. \tag{3.3}$$

Claro que os conjuntos $\Omega_1(s)$ e $\Omega_2(s)$, que estão definidos a menos de um conjunto de medida nula, são mensuráveis.

A seguir, provamos dois resultados que são obtidos a partir das hipóteses dadas na seção 2.1.

Proposição 3.2.2 *Seja $T \geq 0$ fixo. Então, existe uma constante real e positiva C tal que satisfaz as seguintes desigualdades:*

1. $$\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^2\,dx\,ds \leq C\,\left(\Delta E(t)\right)^{\frac{2}{r+2}}$$
   se $\quad r \geq 0, \quad \forall\, t \geq 0$;

2. $$\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^{r+2}\,dx\,ds \leq C\,\left(\Delta E(t)\right)$$
   se $\quad -1 < r < 0, \quad \forall\, t \geq 0$;

3. $$\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^2\,dx\,ds \leq C\,\left(\Delta E(t)\right)^{\frac{2(r+1)}{r+2}}$$
   se $\quad -1 < r < 0, \quad \forall\, t \geq 0$;

4. $$\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^{p+2}\,dx\,ds \leq C\,\Delta E(t)$$
   se $\quad -1 < p < \infty, \quad n = 2 \quad$ *e*
   se $\quad -1 < p < \dfrac{2}{n-2}, \quad n \geq 3 \quad \forall\, t \geq 0$;

5. $$\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^2\,dx\,ds \leq C\,\Delta E(t)$$
   se $\quad 0 \leq p < \infty, \quad n = 2 \quad$ *e*
   se $\quad 0 \leq p < \dfrac{2}{n-2}, \quad n \geq 3 \quad \forall\, t \geq 0$;

6. $$\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^2\,dx\,ds \leq C\,\left(\Delta E(t)\right)^{\frac{p+1}{p+2}}\,\left(E(t)\right)^{\frac{1}{p+2}}$$
   se $\quad -1 < p < 0, \quad n = 2 \quad \forall\, t \geq 0$;

7. $$\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^2\,dx\,ds \leq C\,\left(\Delta E(t)\right)^{\frac{2}{4+p(2-n)}}$$
   se $\quad -1 < p < 0, \quad n \geq 3 \quad \forall\, t \geq 0$.

Prova

Vamos provar cada item separadamente.

Item 1: Usando o Lema 1.1.42 para $\dfrac{2}{r+2}+\dfrac{r}{r+2}=1$, e escrevendo

$$J_1(t)=\int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega_1(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^2\,dx\,ds,$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
J_1(t) &\leq \int_t^{t+T}\left(\int_{\Omega_1(s)} \left(a(x)\,|u_s(s,x)|^2\right)^{\frac{r+2}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{r+2}} (\mu(\Omega_1))^{\frac{r}{r+2}}\,ds \\
&\leq (\mu(\Omega))^{\frac{r}{r+2}}\left(\int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega_1(s)} a(x)^{\frac{r+2}{2}}\,|u_s(s,x)|^{r+2}\,dx\,ds\right)^{\frac{2}{r+2}} (T)^{\frac{r}{r+2}} \\
&\leq C\left(\int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega_1(s)} a(x)^{\frac{r+2}{2}}\,|u_s(s,x)|^{r+2}\,dx\,ds\right)^{\frac{2}{r+2}} \\
&\leq C\left(\int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega_1(s)} a(x)\,\|a(\,\cdot\,)\|_\infty^{\frac{r}{2}}\,|u_s(s,x)|^{r+2}\,dx\,ds\right)^{\frac{2}{r+2}},
\end{aligned}$$

onde a constante C depende de $\mu(\Omega)$, e T. Pela hipótese 4 (a) da seção 2.1 e a igualdade 2.3 temos que

$$\begin{aligned}
J_1(t) &\leq C_0\left(\int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega_1(s)} K_0\,\rho(x,u_s)\,\cdot\,u_s\,dx\,ds\right)^{\frac{2}{r+2}} \\
&\leq C_1\left(\int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega} \rho(x,u_s)\,\cdot\,u_s\,dx\,ds\right)^{\frac{2}{r+2}} \\
&\leq C_1\,(\Delta E(t))^{\frac{2}{r+2}}, \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

para C_1 uma constante real, positiva, independente de t, que depende de $\mu(\Omega)$, $\|a\|_\infty$, r, T e K_0.

Itens 2 e 4: Pela hipótese 4 e igualdade dada em (2.3), temos que

$$\begin{aligned}\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^{r+2}\,dx\,ds &\leq \frac{1}{K_2}\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} \rho(x,u_s)\cdot u_s\,dx\,ds \\ &\leq C\,\Delta E(t), \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^{p+2}\,dx\,ds &\leq \frac{1}{K_3}\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} \rho(x,u_s)\cdot u_s\,dx\,ds \\ &\leq C\,\Delta E(t), \end{aligned} \tag{3.6}$$

para C uma constante real, positiva e independente de t.

Item 3: Se $-1 < r < 0$ então $|u_s|^2 \leq |u_s|^{2(r+1)}$ em $\Omega_1(s)$. Logo temos

$$J_1(t) \leq \int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^{2(r+1)}\,dx\,ds,$$

Usando o Lema 1.1.42 com $\dfrac{2(r+1)}{r+2} + \dfrac{-r}{r+2} = 1$ e o item 2 anterior temos

$$\begin{aligned} J_1(t) &\leq (\mu(\Omega)\,T)^{\frac{-r}{r+2}}\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a(x)|u_s(s,x)|^{r+2}\,dx\,ds\right)^{\frac{2(r+1)}{r+2}} \\ &\leq C\,(\Delta E(t))^{\frac{2(r+1)}{r+2}}, \end{aligned}$$

para C uma constante real, positiva e independente de t.

Item 5: Se $p \geq 0$ então $|u_s|^2 < |u_s|^{p+2}$ em $\Omega_2(s)$ e usando o item 4 anterior temos

$$\begin{aligned}\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^2\,dx\,ds &\leq C\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^{p+2}\,dx\,ds \\ &\leq C\,\Delta E(t), \end{aligned}$$

para C uma constante real, positiva e independente de t.

Item 6 : Se $-1 < p < 0$ então $|u_s|^2 < |u_s|^{p+3}$ logo temos

$$J_2(t) \leq \int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s(s,x)|^{p+1}\,|u_s(s,x)|^2\,dx\,ds$$

Usando o Lema 1.1.42 com $\dfrac{p+1}{p+2} + \dfrac{1}{p+2} = 1$ temos

$$\begin{aligned} J_2(t) &\leq \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} [a(x)^{\frac{p+2}{p+1}}|u_s(s,x)|]^{p+2}\,dx\,ds\right)^{\frac{p+1}{p+2}} \\ &\quad \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} |u_s(s,x)|^{2(p+2)}\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{p+2}}. \end{aligned}$$

Usando o Lema 1.1.46 e $u_s \in L^\infty((0,\infty), H_0^1(\Omega)^n)$

$$\begin{aligned} \|u_s\|_{L^{2(p+2)}(\Omega)^n} &\leq C\,\|u_s\|^{\theta}_{H^1(\Omega)^n}\,\|u_s\|^{1-\theta}_{L^2(\Omega)^n} \\ &\leq C_1\,(E(t))^{\frac{1-\theta}{2}} \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $\theta = \dfrac{p+1}{p+2}$.

Portanto de (3.7) e do item 4 obtém-se

$$J_2(t) \leq C_2\,(\Delta E(t))^{\frac{p+1}{p+2}}\,(E(t))^{\frac{1}{p+2}},$$

para C_2 uma constante real, positiva e independente de t.

Item 7: Usando o Lema 1.1.42, temos

$$\begin{aligned} J_2(x) &\leq \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} (a(x)\, |u_s|^{\lambda})^{l'} \, dx \, ds \right)^{\frac{1}{2l'}} \\ &\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} |u_s|^{(2-\lambda)l} \, dx \, ds \right)^{\frac{1}{2l}} \end{aligned}$$

onde l' é o exponente conjugado de l. Logo escolhe-se

$$\lambda = \frac{4(p+2)}{4+p(2-n)} \quad e \quad l = \frac{2n}{(n-2)(2-\lambda)}$$

portanto $l' = \dfrac{p+2}{\lambda}$.

Se $u_s \in L^{\infty}((t, t+T), H_0^1(\Omega)^n)$, aplicando os Teoremas 1.1.51 e 1.1.92 temos $u_s \in L^{\infty}((t, t+T), L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)^n)$. Por outro lado, usando o item 2, (1.11) com a equivalência entre normas no espaço $H_0^1(\Omega)^n$ obtemos:

$$\begin{aligned} J_2(t) &= C \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} a(x)\, |u_s|^{p+2} \, dx \, ds \right)^{\frac{2}{4+p(2-n)}} \\ &\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} |u_s|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{p(2-n)}{2(4+p(2-n))}} \\ &\leq C \, (\Delta E)^{\frac{2}{4+p(2-n)}} \left(\int_t^{t+T} |||u_s|||_1^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{p(2-n)}{2(4+p(2-n))}} \\ &\leq C_1 \, (\Delta E)^{\frac{2}{4+p(2-n)}} \,, \end{aligned}$$

onde a constante C_1 depende de $\|a\|_{\infty}$ e $|||u_s|||_{L^{\infty}((t,t+T),H_0^1(\Omega)^n)}$.

$\blacksquare$

Proposição 3.2.3 *Seja $T \geq 0$. Então, existe uma constante real e positiva C que satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,(|\nabla u|+|u|)\,dx\,ds \quad &\leq \quad C\,E(t)^{\frac{1}{2}}\,(\Delta E(t))^{\frac{r'}{2}} \\
&+ \quad C\,E(t)^{q'}\,(\Delta E(t))^{s'}, \\
& \qquad \forall\, t \geq 0, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

para

$$r' = \begin{cases} \frac{2}{r+2} & se \quad r \geq 0 \\ \frac{2(r+1)}{r+2} & se \quad -1 < r < 0; \end{cases}$$

$$q' = \begin{cases} \frac{4-(n-2)p}{4(p+2)} & se \quad 0 \leq p \leq \frac{2}{n-2}, \quad se \quad n \geq 3 \quad ou \\ & \qquad p \geq 0, \quad se \quad n = 2; \\ \frac{p+1}{p+2} & se \qquad -1 < p < 0,\ n = 2; \\ \frac{1}{2} & se \qquad -1 < p < 0,\ n \geq 3; \end{cases}$$

$$s' = \begin{cases} \frac{p+1}{p+2} & se \quad 0 \leq p \leq \frac{2}{n-2} \quad se \quad n \geq 3 \quad ou \\ & \qquad p \geq 0 \quad se \quad n = 2; \\ \frac{1}{p+2} & se \qquad -1 < p < 0, \quad n = 2; \\ \frac{1}{4+p(2-n)} & se \qquad -1 < p < 0, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Prova

Escrevemos

$$J(t) = \int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,(|\nabla u|+|u|)\,dx\,ds.$$

Pela hipótese 4, da seção 2.1, dada sobre a função ρ, temos que

$$J(t) \quad \leq \quad K_0\,J_1(t) + K_1\,J_2(t), \tag{3.9}$$

para

$$J_1(t) := \int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a(x)\,(|u_s|^{r+1} + |u_s|)\;(|\nabla u| + |u|)\;dx\,ds,$$

$$J_2(t) := \int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)\,(|u_s|^{p+1} + |u_s|)\;(|\nabla u| + |u|)\;dx\,ds.$$

Se $r \geq 0$, usando o item 1 da Proposição 3.2.2, o Lema 1.1.42 e a Proposição 1.1.50 e o não crescimento de $E(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
J_1(t) &\leq C\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} \left(a(x)\,\left(|u_s|^{r+1} + |u_s|\right)\right)^2\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} |\nabla u|^2\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_1\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a(x)\,|u_s|^2\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} |\nabla u|^2\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_2\,(\Delta E(t))^{\frac{1}{r+2}}\left(\int_t^{t+T} |||u(t)|||_1^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_2\,(\Delta E(t))^{\frac{1}{r+2}}\left(\int_t^{t+T} E(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_3\,(\Delta E(t))^{\frac{1}{r+2}}\,(\,E(t))^{\frac{1}{2}} \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

para C_3 uma constante real, positiva e independente de t.

Se $-1 < r < 0$, notamos que

$$\frac{r+1}{r+2} + \frac{1}{r+2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{r+2}{2} + \frac{-r}{2} = 1.$$

Usando o Lema 1.1.42 a Proposição 1.1.50 e o item 2 da Proposição 3.2.2, temos:

$$\begin{aligned}
J_1(t) &\leq C \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} a(x) \, |u_s|^{r+2} \, dx \, ds \right)^{\frac{r+1}{r+2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega} \left(|\nabla u| + |u| \right)^{r+2} \, dx \, ds \right)^{\frac{1}{r+2}} \\
&\leq C_1 \, (\Delta E(t))^{\frac{r+1}{r+2}} \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega} |\nabla u|^{r+2} \, dx \, ds \right)^{\frac{1}{r+2}} \\
&\leq C_1 \, (\Delta E(t))^{\frac{r+1}{r+2}} \left(\int_t^{t+T} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{r+2}{2}} |\Omega|^{\frac{-r}{2}} \, ds \right)^{\frac{1}{r+2}} \\
&\leq C_1 \, (\Delta E(t))^{\frac{r+1}{r+2}} \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(|\Omega| \, T \right)^{\frac{-r}{2(r+2)}} \\
&\leq C_2 \, (\Delta E(t))^{\frac{r+1}{r+2}} \, E(t)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

para C_2 uma constante real, positiva e independente de t.

Se $p \geq 0$, notamos que

$$\frac{p+1}{p+2} + \frac{1}{p+2} = 1.$$

Usando o Lema 1.1.42, o item 4 da Proposição 3.2.2 e a Proposição 1.1.50 em $W_0^{1,p+2}(\Omega)$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
J_2(t) &\leq C \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} a(x)\, |u_s|^{p+2}\, dx\, ds \right)^{\frac{p+1}{p+2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} \left(|\nabla u|^{p+2} + |u|^{p+2} \right)\, dx\, ds \right)^{\frac{1}{p+2}} \\
&\leq C_1\, (\Delta E(t))^{\frac{p+1}{p+2}} \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} |\nabla u|^{p+2}\, dx\, ds \right)^{\frac{1}{p+2}} \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

para C_1 uma constante real, positiva e independente de t.

Usando o Lema 1.1.46, (1.16) e o fato que $u \in L^\infty((0,\infty), H^2(\Omega)^n \cap H_0^1(\Omega)^n)$, temos

$$
\begin{aligned}
|||\nabla u|||_{L^{p+2}(\Omega)^n} &\leq C\, |||\nabla u|||_{H^1(\Omega)^n}^{\theta}\, |||\nabla u|||_{L^2(\Omega)^n}^{1-\theta} \\
&\leq C\, \|u\|_{H^2(\Omega)^n \cap H_0^1(\Omega)^n}^{\theta}\, |||u|||_1^{1-\theta} \\
&\leq C_1\, (E(t))^{\frac{1-\theta}{2}},
\end{aligned}
$$

onde $\theta = \frac{np}{2(p+2)}$.

Logo, usando este resultado em (3.12) temos

$$
J_2(t) \leq C_2\, (\Delta E(t))^{\frac{p+1}{p+2}}\, E(t)^{\frac{4-(n-2)p}{4(p+2)}}. \qquad (3.13)
$$

Se $-1 < p < 0$ consideramos os seguintes casos:

Caso 1: $\mathbb{R}^2$

$$
J_2(t) \leq C \int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} a(x)\, |u_s| (|\nabla u| + |u|)\, dx\, ds
$$

Logo usando a Proposição 1.1.50 para $u \in W_0^{1,\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)$ e o item 4 da Proposição 3.2.2, temos

$$
\begin{aligned}
J_2(t) &\leq C \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)|u_s|^{p+2}dx\,ds \right)^{\frac{1}{p+2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{\frac{p+2}{p+1}} + |u|^{\frac{p+2}{p+1}} \right) dx\,ds \right)^{\frac{p+1}{p+2}} \\
&\leq C\,(\Delta E)^{\frac{1}{p+2}} \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega} |\nabla u|^{\frac{p+2}{p+1}}\,dx\,ds \right)^{\frac{p+1}{p+2}},
\end{aligned}
$$

Agora, usando o Lema 1.1.46 com $\theta = \dfrac{-p}{p+2}$ temos

$$
|||\nabla u|||_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)^n} \leq C|||\nabla u|||^{\theta}_{H^1(\Omega)^n}|||\nabla u|||^{1-\theta}_{L^2(\Omega)^n} \leq C\,E(t)^{\frac{1-\theta}{2}}.
$$

onde foi usado que $u \in L^\infty((0,\infty), H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n)$, assim

$$
J_2(t) \quad \leq \quad C\,(\Delta E)^{\frac{1}{p+2}}\;E(t)^{\frac{p+1}{p+2}}.
$$

Caso 2: $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$

Usando o Lema 1.1.42, a Proposição 1.1.50 temos

$$
\begin{aligned}
J_2(t) &\leq C \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} \left(a(x)\left(|u_s|^{p+1} + |u_s|\right)\right)^2\,dx\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx\,ds \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

Logo, pelo item 7 da Proposição 3.2.2 temos

$$
\begin{aligned}
J_2(t) &\leq C_1 \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} a(x) \, |u_s|^2 \, dx \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_1 \, (\Delta E)^{\frac{1}{4+p(2-n)}} \, E(t)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

para C_1 uma constante real, positiva e independente de t.

Com as estimativas acima, o resultado segue de imediato.

■

3.3 Multiplicador auxiliar

Nesta seção, seguindo [7] e [8], obtemos um multiplicador usado no tratamento das estimativas do termo u na norma $L^2((t, t+T) \times (\Omega \cap w))$, como é visto na Proposição 3.3.2. Assim também, podemos obter estimativas através de um argumento de contradição, usando continuação única para o sistema de Lamé (veja [35], pg. 88). Tal argumento é usado, em [47] (pgs. 345-351) e em [24] (pgs. 716-721). O método utilizado neste trabalho, assim como em [7], além de simplificar a demonstração, elimina a condição de que os dados iniciais devem estar contidos em uma bola limitada para o caso $p = r = 0$.

Proposição 3.3.1 *Seja $T \geq 0$, $u \in L^\infty((t, t+T), L^2(\Omega)^n)$ para cada $t \geq 0$ e a função $\chi(w)$ dada por*

$$
\chi(w)(x) = \begin{cases} 1 & se \ x \in w; \\ 0 & se \ x \notin w. \end{cases}
$$

Então, existe uma função

$$v \in L^{\infty}(t, t+T; H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n), \tag{3.14}$$

tal que, para cada $t \geq 0$, a função $v(t)$ é solução fraca do seguinte sistema elástico:

$$\begin{aligned} -a^2\,\Delta v - (b^2 - a^2)\,\nabla div\, v &= \chi(w)\,u(t) \;\; em\ \Omega && (3.15)\\ v|_{\Gamma} &= 0 \;\; em\ \Gamma. && (3.16)\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$v' \in L^{\infty}(t, t+T; H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n) \tag{3.17}$$

e, para cada $t \geq 0$, a função $v'(t)$ é solução fraca do seguinte sistema elástico:

$$\begin{aligned} -a^2\,\Delta z - (b^2 - a^2)\,\nabla div\, z &= \chi(w)\,u'(t) \;\; em\ \Omega && (3.18)\\ z|_{\Gamma} &= 0 \;\; em\ \Gamma. && (3.19)\end{aligned}$$

Prova

Usando o Teorema 1.1.15 e a regularidade elíptica dada no Corolário 1.1.80, obtemos uma função $v(t) \in H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n$, $\forall t \geq 0$ e uma constante real e positiva C tal que a função $v(t)$ é solução fraca do sistema dado em (3.15) e (3.16), também de (1.48) temos a estimativa:

$$\|v(\widetilde{t}\,)\|_{H^2(\Omega)^n} \leq C\,\|\chi(w)\,u(\widetilde{t}\,)\|_{L^2(\Omega)^n}, \;\; \forall \widetilde{t} \geq 0. \tag{3.20}$$

Como $u \in L^\infty((t,t+T),L^2(\Omega)^n)$, existe uma constante real e positiva C_1 tal que

$$\|v(\widetilde{t})\|_{H^2(\Omega)^n} \leq C_1, \ \forall \widetilde{t} \geq 0.$$

Além disso, usando (1.47) e o Lema 1.1.54, obtemos:

$$((g,v(t)))_1 = \langle\langle g\,\chi(w), u(t)\rangle\rangle, \qquad \forall\, g \in H_0^1(\Omega)^n. \tag{3.21}$$

Aplicando o Teorema 1.1.83, temos que $v(t)$ é fortemente mensurável. Logo, v satisfaz a condição dada em (3.14).
Analogamente, existe uma função $z \in L^\infty((t,t+T),H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n)$, $\forall\, t \geq 0$ fixo, tal que z é solução fraca do sistema dado em (3.18), (3.19) e satisfaz

$$((g,z(t)))_1 = \langle\langle g\,\chi(w), u'(t)\rangle\rangle, \qquad \forall\, g \in H_0^1(\Omega)^n. \tag{3.22}$$

Resta provar que $v' = z$. De fato. Sejam $g \in H_0^1(\Omega)^n$ e $\phi \in \mathcal{D}(t,t+T)$, $t \geq 0$, usando o Corolario 1.1.88, (3.21), (3.22) e o Teorema 1.1.39 temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
((g,\int_t^{t+T} v(t)\,\phi'(t)\,dt))_1 &= \int_t^{t+T} ((g,v(t)\,\phi'(t)))_1\,dt \\
&= \int_t^{t+T} \langle\langle g\,\chi(w), u(t)\,\phi'(t)\rangle\rangle\,dt \\
&= \langle\langle g\,\chi(w), -\int_t^{t+T} u'(t)\,\phi(t)\,dt\rangle\rangle \\
&= \int_t^{t+T} \langle\langle g\,\chi(w), -u'(t)\,\phi(t)\rangle\rangle\,dt \\
&= ((g,-\int_t^{t+T} z(t)\,\phi(t)\,dt))_1, \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 1.1.12 temos

$$\int_t^{t+T} v(t)\,\phi'(t)\,dt \;=\; -\int_t^{t+T} z(t)\,\phi(t)\,dt, \quad \phi\in\mathcal{D}(t,t+T).$$

De aplicar o Teorema 1.1.105 resulta $v, z \in \mathcal{D}'((t,t+T), H_0^1(\Omega)^n)$, e usando a definição (1.66) obtemos

$$\int_t^{t+T} (v'(t)-z(t))\,\phi(t)dt \;=\; 0, \quad \phi\in\mathcal{D}(t,t+T).$$

Finalmente usando (1.1.106) temos

$$v'(t) = z(t), \quad \text{q.s. em} \quad [t,t+T], \quad \forall\, t\geq 0.$$

■

Escolhendo $g = v(t)$ na equação dada (3.21) e $g = v'(t)$ na equação (3.22), aplicando (1.2), (1.11) e (3.20) obtemos uma constante real e positiva λ_1, tal que para cada $t\geq 0$ se satisfaz:

$$|||v(t)|||_1^2 \;\leq\; \lambda_1\int_{w\cap\Omega}|u(t)|^2dx, \quad \text{q.s.} \quad \text{em} \quad [t,t+T]; \tag{3.24}$$

$$|||v'(t)|||_1^2 \;\leq\; \lambda_1\int_{w\cap\Omega}|u'(t)|^2dx, \quad \text{q.s.} \quad \text{em} \quad [t,t+T]. \tag{3.25}$$

Além disso, escolhendo $g = u(t)$, na equação (3.21) obtemos

$$((v(t),u(t)))_1 = \int_{w\cap\Omega}|u(t)|^2\,dx, \quad \text{q.s.} \quad \text{em} \quad [t,t+T]. \tag{3.26}$$

Proposição 3.3.2 *Sejam $T\geq 0$, v como na Proposição 3.3.1 e $\varepsilon>0$. Então, existe uma constante real e positiva C tal que*

$$\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} |u|^2\,dx\,ds \leq C\,[\,E(t)+E(t+T)+\Delta E(t)\,] + C\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega}|u_s|^2\,dx\,ds + C\int_t^{t+T}\int_{\Omega}|v|\,|\rho(x,u_s)|\,dx\,ds + \varepsilon\int_t^{t+T} E\,ds,\ \forall t\geq 0. \tag{3.27}$$

Prova

Usando a equação dada em (2.75) para v e a igualdade dada (3.26), obtemos e seguinte equação:

$$\langle\langle u_{tt}, v\rangle\rangle + \int_{w\cap\Omega}|u(t)|^2\,dx + \langle\langle\nabla\theta, v\rangle\rangle + \langle\langle\rho(.,u_t),v\rangle\rangle = 0. \tag{3.28}$$

Integrando de t à $t+T$ e aplicando a fórmula de integração por partes dada no Teorema 1.1.102, temos que

$$\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega}|u|^2\,dx\,ds = \int_t^{t+T}\langle\langle u_s, v_s\rangle\rangle\,ds - \langle\langle u_s, v\rangle\rangle\Big|_t^{t+T} - \int_t^{t+T}\langle\langle\rho(.,u_s),v\rangle\rangle\,ds - \int_t^{t+T}\langle\langle\nabla\theta, v\rangle\rangle\,ds. \tag{3.29}$$

Vamos estimar cada termo da igualdade dada em (3.29)

Sejam

$$L(t,T) = \int_t^{t+T}\langle\langle u_s, v_s\rangle\rangle\,ds, \quad \text{e} \quad D(t,T) = \int_t^{t+T}\langle\langle\nabla\theta, v\rangle\rangle\,ds.$$

Dado $\varepsilon > 0$ e usando o Lema 1.1.42, (1.19), a Proposição 1.1.41 e a desigualdade (3.25), temos

$$\begin{aligned} L(t,T) &\leq C\left(\int_t^{t+T} \|u_s\|^2_{L^2(\Omega)^n}\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t+T} |||v_s|||_1^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1\left(\int_t^{t+T} \|u_s\|^2_{L^2(\Omega)^n}\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t+T} \|u_s\|^2_{L^2(w\cap\Omega)^n}\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4}\int_t^{t+T} \|u_s\|^2_{L^2(\Omega)^n}\,ds + C_\varepsilon \int_t^{t+T} \|u_s\|^2_{L^2(w\cap\Omega)^n}\,ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_t^{t+T} E(s)\,ds + C_\varepsilon \int_t^{t+T} \|u_s\|^2_{L^2(w\cap\Omega)^n}\,ds. \end{aligned} \tag{3.30}$$

para C_ε uma constante real, positiva e independente de t e T.

Também, usando o Lema 1.1.42, (1.19), a Proposição 1.1.41 e (2.3) obtemos

$$\begin{aligned} D(t,T) &\leq C\left(\int_t^{t+T} \|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)^n}\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t+T} \|v\|^2_{L^2(\Omega)^n}\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\left(\int_t^{t+T} \|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)^n}\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t+T} |||v|||_1^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\left(\int_t^{t+T} \|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)^n}\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t+T} \|u\|^2_{L^2(w\cap\Omega)^n}\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1\,\Delta E(t) + \frac{\varepsilon}{4}\int_t^{t+T} \|\nabla u\|^2_{L^2(w\cap\Omega)^n}\,ds, \\ &\leq C_\varepsilon\,\Delta E(t) + \frac{\varepsilon}{2}\int_t^{t+T} E(s)\,ds, \end{aligned} \tag{3.31}$$

para C uma constante real, positiva e independente de t e T.

Finalmente, usando a desigualdade dada em (3.24), obtemos:

$$
\begin{aligned}
2\ \langle\langle u_s, v\rangle\rangle\big|_t^{t+T} &\leq 2\,\|u_s(t+T)\|_{L^2(\Omega)^n}\,\|v(t+T)\|_{L^2(\Omega)^n}\\
&+ 2\,\|u_s(t)\|_{L^2(\Omega)^n}\,\|v(t)\|_{L^2(\Omega)^n}\\
&\leq \|u_s(t+T)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + \|v(t+T)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\\
&+ \|u_s(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + \|v(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\\
&\leq \|u_s(t+T)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + C\,\|u(t+T)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\\
&+ \|u_s(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} + C\,\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)^n}\\
&\leq C_1\ (E(t+T)) + E(t))\,, \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

para C uma constante real, positiva e independente de t e T.

Pelas estimativas acima, o resultado segue de imediato.

■

Proposição 3.3.3 *Seja $T \geq 0$. Então, existe uma constante real e positiva C tal que*

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,|v|\,dx\,ds &\leq C\,E(t)^{\frac{1}{2}}\ (\Delta E(t))^{\frac{r'}{2}}\\
&+ C\,E(t)^{q'}\ (\Delta E(t))^{s'}\,,\ \forall\, t \geq 0,
\end{aligned}
$$

para r', q' e s' como na Proposição 3.2.3.

Prova Escrevemos

$$
I(t) = \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,|v|\,dx\,ds.
$$

Pela hipótese sobre a função ρ, temos que

$$\begin{aligned} I(t) &\leq K_0 \int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a(x) \left(|u_s|^{r+1} + |u_s|\right) |v| \, dx \, ds \\ &+ K_1 \int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x) \left(|u_s|^{p+1} + |u_s|\right) |v| \, dx \, ds. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Vamos estimar as seguinte integrais:

$$I_1(t) := \int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} a(x) \left(|u_s|^{r+1} + |u_s|\right) |v| \, dx \, ds;$$

$$I_2(t) := \int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x) \left(|u_s|^{p+1} + |u_s|\right) |v| \, dx \, ds.$$

De fato, se $r \geq 0$, usando o item 1 da Proposição 3.2.2, as desigualdades (3.24), o Lema 1.1.42 e a Proposição 1.1.50 e o não crescimento de $E(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leq C \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} \left(a(x)\left(|u_s|^{r+1} + |u_s|\right)\right)^2 \, dx \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_1(s)} |v|^2 \, dx \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1 \left(\Delta E(t)\right)^{\frac{1}{r+2}} \left(\int_t^{t+T} |||u|||_1 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_2 \left(\Delta E(t)\right)^{\frac{1}{r+2}} \left(\int_t^{t+T} E(s) \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_3 \left(\Delta E(t)\right)^{\frac{1}{r+2}} E(t)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

para C_3 uma constante real, positiva e independente de t.

Se $-1 < r < 0$, notamos que

$$\frac{r+1}{r+2} + \frac{1}{r+2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{r+2}{2} + \frac{-r}{2} = 1.$$

Usando o Lema 1.1.42, o item 2 da Proposição 3.2.2 e desigualdade dada em (3.24), temos que

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leq C \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} a(x)\, |u_s|^{r+2}\, dx\, ds \right)^{\frac{r+1}{r+2}} \\ &\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} |v|^{r+2}\, dx\, ds \right)^{\frac{1}{r+2}} \\ &\leq C_1 \, (\Delta E(t))^{\frac{r+1}{r+2}} \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_1(s)} |v|^2\, dx\, ds \right)^{\frac{1}{2}} (\mu(\Omega)\, T)^{\frac{-r}{2(r+2)}} \\ &\leq C_2 \, (\Delta E(t))^{\frac{r+1}{r+2}} \, E(t)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

para C_2 uma constante real, positiva e independente de t.

Se $p \geq 0$, notamos que

$$\frac{p+1}{p+2} + \frac{1}{p+2} = 1.$$

Usando o Lema 1.1.42 e o item 4 da Proposição 3.2.2, obtemos:

$$\begin{aligned} I_2(t) &\leq C \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} a(x)\, |u_s|^{p+2}\, dx\, ds \right)^{\frac{p+1}{p+2}} \\ &\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} |v|^{p+2}\, dx\, ds \right)^{\frac{1}{p+2}} \\ &\leq C \, (\Delta E(t))^{\frac{p+1}{p+2}} \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} |v|^{p+2}\, dx\, ds \right)^{\frac{1}{p+2}} \end{aligned} \tag{3.36}$$

para C uma constante real, positiva e independente de t.

Assim, usando $v \in L^\infty((t,t+T), H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n)$, o Lema 1.1.46 e (1.16), temos

$$\begin{aligned}
|||v|||_{L^{p+2}(\Omega)^n} &\leq C\,|||v|||^{\theta}_{H^1(\Omega)^n}\,|||v|||^{1-\theta}_{L^2(\Omega)^n}\\
&\leq C_1\,(E(t))^{\frac{1-\theta}{2}},
\end{aligned}$$

onde $\theta = \frac{np}{2(p+2)}$.

Logo, usando este resultado em (3.36) temos

$$I_2(t) \leq C\,(\Delta E(t))^{\frac{p+1}{p+2}}\,E(t)^{\frac{4-(n-2)p}{4(p+2)}}. \tag{3.37}$$

Se $-1 < p < 0$, consideramos os seguintes casos:

Caso 1: $\mathbb{R}^2$

$$I_2(t) \leq C \int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s|\,|v| dx\,ds.$$

Logo, usando a Proposição 1.1.50 para $v \in W_0^{1,\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)^n$ e o item 4 da Proposição 3.2.2.

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leq C\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} a(x)|u_s|^{p+2}dx\,ds\right)^{\frac{1}{p+2}}\\
&\quad\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega_2(s)} |v|^{\frac{p+2}{p+1}}\,dx\,ds\right)^{\frac{p+1}{p+2}}\\
&\leq C_1\,(\Delta E)^{\frac{1}{p+2}}\left(\int_t^{t+T}\int_{\Omega} |\nabla v|^{\frac{p+2}{p+1}}\,dx\,ds\right)^{\frac{p+1}{p+2}}.
\end{aligned}$$

Agora, usando o Lema 1.1.46 com $\theta = \dfrac{-p}{p+2}$, temos

$$\|\nabla v\|_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)^n} \leq C\|\nabla v\|^{\theta}_{H^1(\Omega)^n}\|\nabla u\|^{1-\theta}_{L^2(\Omega)^n} \leq C\,\|\Delta u\|^{\theta}_{L^2(\Omega)^n}\,E(t)^{\frac{1-\theta}{2}}.$$

Por tanto se $v \in L^\infty((t,t+T), H_0^1(\Omega)^n \cap H^2(\Omega)^n)$, então

$$I_2(t) \quad \leq \quad C\ (\Delta E)^{\frac{1}{p+2}}\ E(t)^{\frac{p+1}{p+2}}.$$

Caso 2: $\mathbb{R}^n$**,** $n \geq 3$

Usando o Lema 1.1.42, a Proposição 1.1.50 e pelo item 7 da Proposição 3.2.2, temos:

$$\begin{aligned}
I_2(t) \quad &\leq \quad C \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} \big(a(x)\,(|u_s|^{p+1} + |u_s|)\big)^2\ dx\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad C_1 \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s|^2\, dx\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_t^{t+T} \int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad C_1\,(\Delta E)^{\frac{1}{4+p(2-n)}}\ E(t)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

para C_1 uma constante real, positiva e independente de t.

Com as estimativas acima, o resultado segue de imediato.

■

3.4 Lemas auxiliares

Nesta seção enunciamos três resultados conhecidos na literatura (veja [35]) e que são úteis nas estimativas da energia do sistema magneto-elástico na fronteira do conjunto Ω. Este resultados são usados posteriomente nos Lemas 3.4.4 e 3.4.6. Lembramos que w é o conjunto dado em (3.1).

Lema 3.4.1 *Existem um conjunto* $\widetilde{w} \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e uma função* $m \in W^{1,\infty}(\Omega)$ *tais que satisfazem as seguintes condições:*

$$\Gamma(x_0) \subset \widetilde{w} \subset\subset w; \tag{3.38}$$

$$0 \leq m(x) \leq 1, \ \forall x \in \Omega; \tag{3.39}$$

$$\frac{|\nabla m|^2}{m} \ \textit{é limitado em } \Omega \ \textit{q.s.}; \tag{3.40}$$

$$m(x) = 1, \ \forall x \in \Omega \cap \widetilde{w}; \tag{3.41}$$

$$m(x) = 0, \ \forall x \in \Omega \setminus w. \tag{3.42}$$

Esboço da Prova

Seja $\widetilde{\epsilon}' > 0$ tal que $\widetilde{\epsilon}' < \widetilde{\epsilon}$ e

$$\Gamma(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} B(x^i, \widetilde{\epsilon}'),$$

para $\widetilde{\epsilon}$ e $\{x^i\}_{i=1}^{n_0}$ dados em (3.1).

Definimos o seguinte conjunto:

$$\widetilde{w} := \bigcup_{i=1}^{n_0} B(x^i, \widetilde{\epsilon}'). \tag{3.43}$$

Consideramos a seguinte função:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \widetilde{w}; \\ \dfrac{(\widetilde{\epsilon} - \widetilde{\epsilon}' - d(x, \partial\widetilde{w}))^2}{(\widetilde{\epsilon} - \widetilde{\epsilon}')^2} & \text{se} \quad x \in \overline{w} \setminus \widetilde{w}. \end{cases}$$

Notamos que $\phi \in C(\overline{w})$ e $\phi \equiv 0$ sobre a fronteira de w.

Além disso, para quase todo $y \in w \setminus \widetilde{w}$ fixo, existe $1 \leq i_0 \leq n_0$ (i_0 depende de y) tal que

$$|y - x^{i_0}| < \min_{1 \leq i \leq n_0,\, i \neq i^0} |y - x^i|. \tag{3.44}$$

Então, neste caso, temos a seguinte igualdade numa vizinhança de y:

$$\phi(x) = \frac{\left(\widetilde{\epsilon} - |x^{i_0} - x|\right)^2}{\left(\widetilde{\epsilon} - \widetilde{\epsilon}'\right)^2}.$$

Portanto, para cada $y = (y_1, \cdots, y_n)$ temos que

$$\frac{\partial\, \phi(y)}{\partial\, y_i} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad y \in \widetilde{w}; \\ \dfrac{2\,\left(x_i^{i_0} - y_i\right)\,\left(\widetilde{\epsilon} - |x^{i_0} - y|\right)}{\left(\widetilde{\epsilon} - \widetilde{\epsilon}'\right)^2\,|x^{i_0} - x|} & \text{se} \quad y \in w \setminus \widetilde{w} \ \text{ q.s.}, \end{cases}$$

com $x^{i_0} = (x_1^{i_0}, \cdots, x_n^{i_0})$ como dado em (3.44). Logo,

$$\frac{\partial\, \phi(x)}{\partial\, x_i} \in L^\infty(w),\ \forall\, 1 \leq i \leq n \quad \text{e} \quad \sup_{x \in w} ess \frac{|\nabla \phi(x)|^2}{\phi(x)} < \infty.$$

Usando a Proposição 1.1.48, obtemos:

$$\phi \in W^{1,\infty}(w) \cap H_0^1(w).$$

Aplicando a Proposição 1.1.49 (caso $p = 2$), segue que a seguinte função

$$m(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{se} \quad x \in w; \\ 0 & \text{se} \quad x \in \Omega \setminus w, \end{cases}$$

satisfaz as conclusões do Lema.

■

Lema 3.4.2 *Considere $\widetilde{w}$ como no Lema 3.4.1. Então, existe uma* *função* $\psi \in C^1(\overline{\Omega})^n$ *tal que satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\psi(x) = \eta(x), \ \forall\, x \in \Gamma(x_0); \tag{3.45}$$

$$\psi(x) \cdot \eta(x) \geq 0, \ \forall\, x \in \Gamma; \tag{3.46}$$

$$\psi(x) = 0, \ \forall\, x \in \Omega \setminus \widetilde{w}. \tag{3.47}$$

Prova

Seja $x \in \Gamma(x_0)$. Consideramos o par (V_x, f) como dado na Proposição 1.1.31. Como Γ é compacto, existem $n \in \mathbb{N}$ e $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \Gamma(x_0)$ tais que $\Gamma(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Definimos o seguinte conjunto:

$$V := \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}. \tag{3.48}$$

Seja $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ uma partição C^∞ da unidade relativo à $\{V_{x_i}\}_{i=1}^n$. Definimos também a seguinte função:

$$\xi = \sum_{i=1}^n \frac{\nabla f_i}{\|\nabla f_i\|}\, \varphi_i. \tag{3.49}$$

Note que $\xi \in C^1(V)^n$ e $\xi \equiv \eta$ sobre $\Gamma(x_0)$. Escolhemos $\widetilde{\widetilde{w}} \subset \mathbb{R}^n$ aberto com

$$\Gamma(x_0) \subset\subset \widetilde{\widetilde{w}} \subset\subset (V \cap \widetilde{w})$$

e $\sigma \in C_0^\infty\,(V \cap \widetilde{w})$ uma função real e não negativa tal que

$$\sigma \equiv 1 \text{ sobre } \widetilde{\widetilde{w}}.$$

Então, a função $\psi := \xi\, \sigma$ satisfaz as conclusões do Lema.

■

Lema 3.4.3 *Se $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, então*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_\Gamma \eta_i = \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_\Gamma \eta_j \text{ em } L^2(\Gamma),\ \forall\, 1 \le i, j \le n. \tag{3.50}$$

Prova

Aplicando (1.31) para o caso particular $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \phi|_\Gamma \left.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_\Gamma \eta_i \, d\Gamma &= \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\, dx \\
&= \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx + \int_\Omega \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\, dx \\
&= \int_\Omega \left(- \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} u + \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx \\
&- \int_\Gamma \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right|_\Gamma u|_\Gamma \, \eta_j \, d\Gamma \\
&= \int_\Omega \left(- \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} u + \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx \\
&= \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\, dx \\
&- \int_\Gamma \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right|_\Gamma u|_\Gamma \, \eta_i \, d\Gamma \\
&= \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \phi \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\, dx \\
&= \int_\Gamma \phi|_\Gamma \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_\Gamma \eta_j \, d\Gamma. \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

Usando a densidade de $D(\Gamma)$ em $L^2(\Gamma)$ dada em (1.28) (caso $s = 0$), o resultado segue de imediato.

■

Lema 3.4.4 *Se $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$, $m \in W^{1,\infty}(\Omega)$, então valem as seguintes* *igualdades* $\forall\, T,\ t \geq 0$*:*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega m\,(u_s\,\cdot\,u)\,dx\Big|_t^{t+T} &= -(b^2-a^2)\int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega m\,(div\,u)^2\,dx\,ds \\
&- (b^2-a^2)\int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega (u\,\cdot\,\nabla m)\,div\,u\,dx\,ds \\
&- \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega m\,\left(-|u_s|^2+a^2\,|\nabla u|^2\right)\,dx\,ds \\
&+ \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega m\,(\nabla\theta\cdot u)\,dx\,ds \\
&- a^2\int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial m}{\partial x_j}\,u_i\,dxds \\
&- \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega m\,(\rho(x,u_s)\cdot u)\,dx\,ds; \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_s\,\cdot\,u\,dx\Big|_t^{t+T} &= \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega |u_s|^2\,dx\,ds \\
&- \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega \left(a^2\,|\nabla u|^2+(b^2-a^2)\,(div\,u)^2\right)\,dx\,ds \\
&+ \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega \nabla\theta\cdot u\,dx\,ds \\
&- \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega \rho(x,u_s)\cdot u\,dx\,ds; \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

Seja

$$J(t,T) = -\int_\Omega (\psi:\nabla u)\,\cdot\,u_s\,dx\Big|_t^{t+T}$$

então

$$
\begin{aligned}
J(t,T) \;&=\; \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} a^2\,\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\,dx\,ds \\
&+\; \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} (b^2-a^2)\,\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\,dx\,ds \\
&-\; \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\!\!\int_\Gamma (\psi\cdot\eta)\,\left(a^2\,|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)\,(div\,u)^2\right)\,d\Gamma\,ds \\
&-\; \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega (\psi:\nabla u)\cdot\nabla\theta\,dx\,ds \\
&+\; \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega (div\,\psi)\,\left(|u_s|^2\right)\,dx\,ds \\
&-\; \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega (div\,\psi)\,\left(a^2\,|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)\,(div\,u)^2\right)\,dx\,ds \\
&+\; \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega (\psi:\nabla u)\cdot\rho(x,u_s)\,dx\,ds. \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

Prova

Vamos provar a igualdade dada em (3.54). De fato, multiplicando a equação dada em (2.11) por $\psi : \nabla u$, integrando em $\Omega \times (t, t+T)$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
0 \;&=\; \int_t^{t+T} \langle\langle u_{ss}, \psi:\nabla u\rangle\rangle\,ds \\
&+\; \int_t^{t+T} \langle\langle -a^2\,\Delta u - (b^2-a^2)\,\nabla\,\mathrm{div} u, \psi:\nabla u\rangle\rangle\,ds \\
&+\; \int_t^{t+T} \langle\langle -\nabla\theta + \rho(.,u_s), \psi:\nabla u\rangle\rangle\,ds. \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

Vamos calcular cada termo da igualdade dada em (3.55) separadamente. De fato, Como $u, u_s \in L^\infty((t,t+T), H_0^1(\Omega)^n)$, a propriedade da ψ no

Lema 3.4.2 e aplicando o Teorema 1.1.92, obtemos que

$$\psi : \nabla u \in W((t, t+T), L^2(\Omega)^n), \quad \text{com} \quad (\psi : \nabla u)_t = (\psi : \nabla u_t).$$

Usando a fórmula de integração por partes dada no Teorema 1.1.102, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \langle u_{ss}, \psi : \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)^n} \, ds &= -\int_t^{t+T} \langle u_s, (\psi : \nabla u_s) \rangle_{L^2(\Omega)^n} \, ds \\ &+ \left. \langle u_s, \psi : \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)^n} \right|_t^{t+T}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Aplicando (1.31) e (1.34), temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \langle\langle \Delta u, \psi : \nabla u \rangle\rangle &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \psi_k \, \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\ &= -\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \, \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \, dx \\ &- \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} \psi_k \, \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\ &+ \int_\Gamma \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \, \psi_k \, \eta_j \, d\Gamma \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega (\operatorname{div} \psi) \, |\nabla u|^2 \, dx \\ &- \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \, \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \, dx \\ &- \frac{1}{2} \int_\Gamma (\psi \, . \, \eta) \, |\nabla u|^2 \, d\Gamma \\ &+ \int_\Gamma \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \, \psi_k \, \eta_j \, d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\langle\langle \nabla \mathrm{div}\, u, \psi : \nabla u \rangle\rangle &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) \psi_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\
&= -\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\, dx \\
&- \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} \psi_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) \\
&+ \int_\Gamma \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \psi_k\, \eta_j\, d\Gamma \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathrm{div}\, \psi)\, (\mathrm{div}\, u)^2\, dx \\
&- \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\, dx \\
&- \frac{1}{2}\int_\Gamma (\psi \,.\, \eta)\, (\mathrm{div}\, u)^2\, d\Gamma \\
&+ \int_\Gamma \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \psi_k\, \eta_j\, d\Gamma; \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\langle u_s, \psi : \nabla u_s \rangle\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (u_s)_i\, \psi_j \frac{\partial (u_s)_i}{\partial x_j}\, dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}[(u_s)_i\, \psi_j]\, (u_s)_i\, dx \\
&= -\langle\langle u_s, \psi : \nabla u_s \rangle\rangle \\
&\quad -\int_\Omega (\mathrm{div}\, \psi)\, |u_s|^2\, dx. \qquad (3.59)
\end{aligned}$$

Além disso, aplicando o Lema 3.4.3, temos que

$$\int_\Gamma \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \psi_k\, \eta_j\, d\Gamma = \int_\Gamma (\psi \,.\, \eta)\, (\mathrm{div}\, u)^2\, d\Gamma; \qquad (3.60)$$

$$\int_\Gamma \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \psi_k\, \eta_j\, d\Gamma = \int_\Gamma (\psi \,.\, \eta)\, |\nabla u|^2\, d\Gamma. \qquad (3.61)$$

Pelas igualdades dada acima, a equação dada em (3.54) segue de imediato. As igualdades dadas em (3.52) e (3.53) são obtidas de forma análoga multiplicando a equação dada em (2.11) por $m\,u$ e u respectivamente.

■

Lema 3.4.5 *Sejam* $b^2 - a^2 > 0$ *e*

$$K(t,T) = \int_t^{t+T} \left(\|u_s\|^2_{L^2(\Omega)^n} + |||u|||_1^2 \right) ds.$$

Então, existe uma constante real e positiva C *tal que* $K(t,T)$ *satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\begin{aligned} K(t,T) \quad &\leq \quad C\ \{\ E(t) + E(t+T) \\ &+ \quad \int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} \left(a^2\,|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)(div\,u)^2\right)\,d\Gamma\,ds \\ &+ \quad \int_t^{t+T}\int_{\Omega} (|\nabla u| + |u|)\ (|\rho(x,u_s)| + |\nabla\theta|)\ dx\,ds\},\ \ \forall\,T,\ t\geq 0. \end{aligned}$$

Prova

Escolha $\psi = (x - x_0)$ na equação dada em (3.54). Escrevendo

$$J(t,T) = -\int_{\Omega} ((x-x_0) : \nabla u)\,\cdot\,u_s\,dx\Big|_t^{t+T},$$

obtemos as seguintes igualdades:

$$
\begin{aligned}
J(t,T) &= -\frac{1}{2}\int_t^{t+T}\!\!\int_\Gamma ((x-x_0)\cdot\eta)\,\left(a^2\,|\nabla u|^2\right)\,d\Gamma\,ds \\
&- \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\!\!\int_\Gamma ((x-x_0)\cdot\eta)\,\left((b^2-a^2)\,(\operatorname{div} u)^2\right)\,d\Gamma\,ds \\
&+ \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega ((x-x_0):\nabla u)\cdot(\rho(x,u_s))\,dx\,ds \\
&- \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega ((x-x_0):\nabla u)\cdot\nabla\theta\,dx\,ds \\
&+ \int_t^{t+T} \frac{n}{2}\,\|u_s\|^2_{L^2(\Omega)^n} + (1-\frac{n}{2})\,|||u|||_1^2\,ds. \qquad (3.62)
\end{aligned}
$$

Usando a igualdade dada em (3.53), temos

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega u_s\cdot u\,dx\bigg|_t^{t+T} &= \int_t^{t+T}\left(-\|u_s\|^2_{L^2(\Omega)^n} + |||u|||_1^2\right)\,ds \\
&- \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega u\cdot\nabla\theta\,dx\,ds \\
&+ \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega u\cdot(\rho(x,u_s))\,dx\,ds. \qquad (3.63)
\end{aligned}
$$

Somando (3.62) com (3.63), e isolando o termo $K(t,T)$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}K(t,T) &= -\int_\Omega u_s\cdot u\,dx\bigg|_t^{t+T} + \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega u\cdot\nabla\theta\,dx\,ds \\
&- \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega u\cdot\rho(x,u_s)\,dx\,ds + J(t,T) \\
&+ \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\!\!\int_\Gamma ((x-x_0)\cdot\eta)\,\left((b^2-a^2)\,(\operatorname{div} u)^2\right)\,d\Gamma\,ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\!\!\int_\Gamma ((x-x_0)\cdot\eta)\,\left(a^2\,|\nabla u|^2\right)\,d\Gamma\,ds \\
&+ \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega ((x-x_0):\nabla u)\cdot[\,\nabla\theta-\rho(x,u_s)]\,dx\,ds.
\end{aligned}
$$

Usando a definição de $\Gamma(x_0)$ e o fato que $a^2 > 0$ e $b^2 - a^2 > 0$, existe uma constante real e positiva C, independente de T e t, tal que

$$\int_\Gamma ((x - x_0) \cdot \eta) \left(a^2 \, |\nabla u|^2\right) \, d\Gamma \leq C \int_{\Gamma(x_0)} a^2 \, |\nabla u|^2 \, d\Gamma;$$

$$\int_\Gamma ((x - x_0) \cdot \eta) \left((b^2 - a^2) \, (\operatorname{div} u)^2\right) \, d\Gamma \leq C \int_{\Gamma(x_0)} (b^2 - a^2) \, (\operatorname{div} u)^2 \, d\Gamma.$$

Temos também a seguinte estimativa:

$$|(x - x_0) : \nabla u(t, x)| \leq \left(\sup_{y \in \Omega} |y - x_0|\right) \, |\nabla u(t, x)| \quad \text{em} \quad (t, t + T) \times \Omega \tag{3.64}$$

Além disso, pela desigualdade (1.2), as Proposições 1.1.50, 1.1.41 e a definição de energia, existe uma constante real e positiva C_1, independente de T e t, tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_s \, . \, u \, dx \Big|_t^{t+T} & \leq \|u_s\|_{L^2(\Omega)^n} \|u\|_{L^2(\Omega)^n} \Big|_t^{t+T} \\ & \leq C_1 \, \|u_s\|_{L^2(\Omega)^n} |||u|||_1 \Big|_t^{t+T} \\ & \leq C_1 \, [\, \|u_s\|_{L^2(\Omega)^n} |||u|||_1 \Big|_{t+T} + \|u_s\|_{L^2(\Omega)^n} |||u|||_1 \Big|_t \,] \\ & \leq C_1 \, \left(E(t + T) + E(t)\right). \end{aligned} \tag{3.65}$$

Da mesma forma anterior e ainda usando (3.64), temos

$$J(t, T) \quad \leq \quad C_1 \, \left(E(t + T) + E(t)\right).$$

A partir das desigualdades acima e tomando o valor absoluto da expressão (3.64) o resultado segue de imediato.

∎

Lema 3.4.6 *Sejam* $b^2 - a^2 > 0$ *e* $M(t,T) = \int_t^{t+T}\int_{\Gamma(x_0)} (a^2\,|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)\,(div\, u)^2)\, d\Gamma\, ds$. *Então, existe uma constante real e positiva* C *tal que satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\begin{aligned} M(t,T) \quad &\leq \quad C\,\{E(t) + E(t+T) + \int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} \left(|u_s|^2 + |u|^2\right)\,dx\,ds \\ &+ \quad \int_t^{t+T}\int_\Omega (|\rho(x,u_s)| + |\nabla\theta|)\,(|\nabla u| + |u|)\,dx\,ds\} \end{aligned}$$

Prova

Consideramos funções ψ e m e um conjunto $\widetilde{w}$ como dados nos Lemas 3.4.2 e 3.4.1. Usando a equação dada em (3.54), a definição de $\Gamma(x_0)$, as propriedades (3.45) e (3.46) da função ψ, o fato que $a^2 > 0$ e $b^2 - a^2 > 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M(t,T) \quad &\leq \quad \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Gamma (\psi\,.\,\eta)\,\left(a^2\,|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)\,(\operatorname{div} u)^2\right)\,d\Gamma \\ &= \quad \int_\Omega (\psi : \nabla u)\,.\,u_s\,dx\Big|_t^{t+T} \\ &+ \quad \int_t^{t+T}\int_\Omega (\psi : \nabla u)\cdot[\,\rho(x,u_s) - \nabla\theta\,]\,dx\,ds \\ &+ \quad \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (\operatorname{div}\psi)\,\left(|u_s|^2\right)\,dx\,ds \\ &- \quad \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\int_\Omega (\operatorname{div}\psi)\,\left(a^2\,|\nabla u|^2 + (b^2 - a^2)\,(\operatorname{div} u)^2\right)\,dx\,ds \\ &+ \quad \int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n \left(a^2\,\frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\,dx\,ds \\ &+ \quad \int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n \left((b^2 - a^2)\,\frac{\partial\psi_k}{\partial x_j}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\,dx\,ds. \quad (3.66) \end{aligned}$$

Notamos que

$$|(\psi(x) : \nabla u(t,x))| \leq \left(\sup_{y\in\overline{\Omega}}(\psi(y))\right) |\nabla u(t,x)| \quad \text{em} \quad (t, t+T)\times\Omega. \tag{3.67}$$

Usando o mesmo argumento como (3.65), existe uma constante real e positiva C_1, independente de t e T, tal que

$$\int_\Omega (\psi : \nabla u)\ \cdot\ u_s\, dx\Big|_t^{t+T} \leq C_1\ (E(t) + E(t+T))\,.$$

Escrevemos

$$\begin{aligned}
J_1(t,T) \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega (\operatorname{div}\psi)\ \left(|u_s|^2\right)\, dx\, ds \\
&- \quad \frac{1}{2}\int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega (\operatorname{div}\psi)\ \left(a^2\,|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)\,(\operatorname{div} u)^2\right)\, dx\, ds \\
&+ \quad \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n \left(a^2\,\frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) dx\, ds \\
&+ \quad \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n \left((b^2-a^2)\,\frac{\partial\psi_k}{\partial x_j}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) dx\, ds.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Usando a propriedade (3.47) da função ψ, temos

$$\begin{aligned}
|J_1(t,T)| \quad \leq \quad C\Bigg\{ &\int_t^{t+T}\!\!\int_{\overline{\Omega}\cap\widetilde{w}} \left(|u_s|^2 + a^2\,|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)\,(\operatorname{div} u)^2\right)\, dx\, ds \\
+ \quad &\int_t^{t+T}\!\!\int_{\overline{\Omega}\cap\widetilde{w}} a^2 \sum_{i,j,k=1}^n \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right| dx\, ds \\
+ \quad &\int_t^{t+T}\!\!\int_{\overline{\Omega}\cap\widetilde{w}} (b^2-a^2) \sum_{i,j,k=1}^n \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right| dx\, ds\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Usando as propriedades (3.39) e (3.41) da função m, obtemos a existência de uma constante real e positiva C, independente de T e t, tal que

$$\begin{aligned} |J_1(t,T)| &\leq C\ \{\int_t^{t+T}\int_\Omega m\ \left(a^2\,|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)\,(\operatorname{div} u)^2\right)\ dx\,ds \\ &+ \int_t^{t+T}\int_{\widetilde{w}\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds\}. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Resta estimar a seguinte integral:

$$J_2(t,T) = \int_t^{t+T}\int_\Omega m\ \left(a^2|\nabla u|^2 + (b^2-a^2)\,(\operatorname{div} u)^2\right)\ dx\,ds.$$

Pela equação dada em (3.52) e a propriedade (3.42) de m, obtemos:

$$\begin{aligned} J_2(t,T) &= -\int_\Omega m\,u_s\cdot u\,dx\Big|_t^{t+T} + \int_t^{t+T}\int_\Omega m\,|u_s|^2\,dx\,ds \\ &- \int_t^{t+T}\int_\Omega m\,(\rho(x,u_s)\cdot u)\,dx\,ds \\ &- a^2\int_t^{t+T}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial m}{\partial x_j}\,u_i\,dx\,ds \\ &+ \int_t^{t+T}\int_\Omega m\ (\nabla\theta\cdot u)\ dx\,ds \\ &- (b^2-a^2)\int_t^{t+T}\int_\Omega (\operatorname{div} u)\,(\nabla m\cdot u)\,dx\,ds. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Notamos que, pela Proposição 1.1.50, temos

$$\left|\int_\Omega m\,u_s\cdot u\,dx\Big|_t^{t+T}\right| \leq C_1[E(t+T)+E(t)]. \tag{3.72}$$

Usando a Proposição 1.1.41 com $0 < \varepsilon < 1$ e pelas propriedades (3.40) e (3.42) de m, temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial m}{\partial x_j} u_i \, dx \, ds \right| &\leq \frac{1}{2} \int_t^{t+T}\!\!\int_{w\cap\Omega} \sum_{i=1}^n \{ |u_i|^2 \frac{|\nabla m|^2}{m\varepsilon} \\
&+ m\,\varepsilon \, |\nabla u_i|^2 \} \, dx \, ds \\
&\leq C_\varepsilon \int_t^{t+T}\!\!\int_{w\cap\Omega} |u|^2 \, dx \, ds \\
&+ \frac{\varepsilon}{2} \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega m \, |\nabla u|^2 \, dx \, ds \qquad (3.73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega (\operatorname{div} u) \, (u \,.\, \nabla m) \, dx \, ds \right| &\leq \frac{1}{2} \int_t^{t+T}\!\!\int_{w\cap\Omega} m \, \varepsilon \, (\operatorname{div} u)^2 \, dx \, ds \\
&+ \frac{1}{2} \int_t^{t+T}\!\!\int_{w\cap\Omega} \frac{|\nabla m|^2}{m\,\varepsilon} |u|^2 \, dx \, ds \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega m \, (\operatorname{div} u)^2 \, dx \, ds \\
&+ C_\varepsilon \int_t^{t+T}\!\!\int_{w\cap\Omega} |u|^2 \, dx \, ds. \qquad (3.74)
\end{aligned}$$

Finalmente considerando (3.72), (3.73) e (3.74) em (3.71) temos que existe uma constante real e positiva C independente de t e T tal que

$$\begin{aligned}
|J_2(t,T)| &\leq C \, \{ \, E(t) + E(t+T) + \int_t^{t+T}\!\!\int_{w\cap\Omega} \left(|u_s|^2 + |u|^2 \right) \, dx \, ds \\
&+ \int_t^{t+T}\!\!\int_\Omega \left(|\rho(x,u_s)| + |\nabla\theta| \right) \, |u| \, dx \, ds \}.
\end{aligned}$$

Finalmente tomando o valor absoluto em (3.66) e usando a desigualdade (3.70) e a desigualdade acima o resultado segue de imediato.

■

Proposição 3.4.7 *Suponha que* Ω *seja simplesmente conexo e* $b^2 - a^2 > 0$*. Então, existe uma constante real e positiva* $C > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} E(s)\, ds \quad &\leq \quad C \; \{ \int_t^{t+T}\!\!\int_{w\cap\Omega} \left(|u|^2 + |u_s|^2\right)\, dx\, ds \\ &+ \quad \int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega} \left(|\rho(x,u_s)| + |\nabla\theta|\right)\, \left(|\nabla u| + |u|\right)\, dx\, ds \\ &+ \quad E(t) + E(t+T) + \Delta E(t)\} \qquad \forall\, T,\, t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Prova

Usando os Lemas 3.4.5 e 3.4.6, temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} K(t,T) \quad &\leq \quad C \int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega} [\, |\nabla u| + |u|\,]\, |\rho(x,u_s)|\, dx\, ds \\ &+ \quad C \int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega} [\, |\nabla u| + |u|\,]\, |\nabla\theta|\, dx\, ds \\ &+ \quad C \int_t^{t+T}\!\!\int_{w\cap\Omega} \left(|u_s|^2 + |u|^2\right)\, dx\, ds \\ &+ \quad C\, E(t) + C\, E(t+T),\ \forall\, T,\, t \geq 0, \end{aligned} \tag{3.76}$$

para uma constante real e positiva C independente de t e T, onde $K(t,T)$ foi definido no Lema 3.4.5

Aplicando a desigualdade dada em (2.4) e a igualdade dada em (2.3), o resultado segue de imediato.

■

Proposição 3.4.8 *Suponha que* Ω *seja limitado e de classe* C^2 *e* $b^2 - a^2 > 0$*. Então, existem constantes reais e positivas* T *e* C *tal que a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$\begin{aligned} E(t) &\leq C\left\{\Delta E(t) + \Delta E(t)^{r'} + \Delta E(t)^{p'}\right\} \\ &+ C\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} |u_s|^2 dx ds, \ \forall\, t \geq 0, \end{aligned} \tag{3.77}$$

com

$$r' = \begin{cases} \frac{2}{r+2} & se \quad r \geq 0; \\ \frac{2(r+1)}{r+2} & se \quad -1 < r < 0; \end{cases}$$

$$p' = \begin{cases} \frac{4(p+1)}{4+(n+2)p} & se \quad 0 \leq p \leq \frac{2}{n-2} \quad n \geq 3 \quad ou \\ & \qquad p \geq 0; \quad n = 2; \\ 1 & se \quad -1 < p < 0, \quad n = 2 \\ \frac{2}{4+p(2-n)} & se \quad -1 < p < 0, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Prova

Seja $0 < \delta < 1$. Usando as Proposições 1.1.41 e 1.1.50, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla\theta|\,(|\nabla u| + |u|)\,dx\,ds &\leq \delta(1+C_1)\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,ds \\ &+ \frac{1}{2\delta}\int_t^{t+T}\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\,ds. \end{aligned}$$

Usando (1.16), a Proposição 1.1.53 e (2.3) temos

$$\begin{aligned} &\leq \delta(1+C_1)\int_t^{t+T} |||u|||_0^2\,ds + \frac{C}{2\delta}\Delta E(t) \\ &\leq 2\delta(1+C_1)\int_t^{t+T} E(s)\,ds + \frac{1}{2\delta}\Delta E(t), \ \forall\, T,\, t \geq 0 \end{aligned}$$

para C_1 constante de Poincaré independente de t e T. Logo usando Proposiação 3.4.7 com este último resultado temos

$$\begin{aligned}
[1-2C\delta(1+C_1)]\int_t^{t+T} E(s)\,ds &\leq C\,[E(t)+E(t+T)+\frac{1}{2\delta}\Delta E(t)] \\
&+ C\int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,(|\nabla u|+|u|)\,dx\,ds \\
&+ C\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} [|u_s|^2+|u|^2]\,dx\,ds. \quad (3.78)
\end{aligned}$$

Escolhendo um δ fixo tal que $0<\delta<[2C(1+C_1)]^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} E(s)\,ds &\leq C\,[E(t)+E(t+T)+\Delta E(t)] \\
&+ C\int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,(|\nabla u|+|u|)\,dx\,ds \\
&+ C\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} [|u_s|^2+|u|^2]\,dx\,ds. \qquad (3.79)
\end{aligned}$$

Usando as Proposições 3.3.2 e 3.4.7, temos

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} E(s)\,ds &\leq C\,\{E(t)+E(t+T)+\Delta E+\int_t^{t+T}\int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds\} \\
&+ C\int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,|v|\,dx\,ds \\
&+ C\int_t^{t+T}\int_\Omega |\rho(x,u_s)|\,(|\nabla u|+|u|)\,dx\,ds \\
&+ C\,\varepsilon\int_t^{t+T} E(s)\,ds,\ \forall T,\, t\geq 0. \qquad (3.80)
\end{aligned}$$

Escolhendo ε tal que $0 < \varepsilon < C^{-1}$, obtemos que existe uma constante real e positiva C, independente de T e t, tal que

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+T} E(s)\,ds &\leq C\,\{E(t) + E(t+T) + \Delta E + \int_t^{t+T}\!\!\int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds\} \\
&+ C \int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega} |\rho(x,u_s)|\,\left(|\nabla u| + |u|\right)\,dx\,ds \\
&+ C \int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega} |\rho(x,u_s)|\,|v|\,dx\,ds \quad \forall\, T,\, t \geq 0. \qquad (3.81)
\end{aligned}
$$

Como $E(t)$ é não negativa e decrescente, temos

$$
\begin{aligned}
T\,E(t+T) &\leq \int_t^{t+T} E(s)\,ds \leq C \int_t^{t+T}\!\!\int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds \\
&+ C \int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega} |\rho(x,u_s)|\,\left(|\nabla u| + |u|\right)\,dx\,ds \\
&+ C \int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega} |\,\rho(x,u_s)|\,|v|\,dx\,ds \\
&+ C\,[\,E(t) + E(t+T) + \Delta E(t)\,], \qquad (3.82)
\end{aligned}
$$

para C uma constante real, positiva e independente de t e T.

Somando $E(t)$ em ambos os lados da equação dada em (3.82), temos

$$
\begin{aligned}
T\,E(t+T) + E(t) &\leq (2C+1)\,E(t) + C\,\{\Delta E(t) \\
&+ \int_t^{t+T}\!\!\int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds\} \\
&+ C \int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega} |\rho(x,u_s)|\,\left(|\nabla u| + |u| + |v|\right)\,dx\,ds.
\end{aligned}
$$

Escolhendo $T > 2C+1$ e lembrando que $E(t)$ é uma função não negativa, obtemos:

$$
\begin{aligned}
E(t) &\leq C\,\{\,\Delta E(t) + \int_t^{t+T}\!\!\int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds\} \\
&+ C\int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega} |\rho(x,u_s)|\,\left(|\nabla u| + |u| + |v|\right)\,dx\,ds.
\end{aligned}
$$

Aplicando as Proposições 3.2.3 e 3.3.3, temos que

$$
\begin{aligned}
E(t) &\leq C\left(\Delta E(t) + E(t)^{\frac{1}{2}}\,(\Delta E(t))^{\frac{r'}{2}} + E(t)^{q'}\,(\Delta E(t))^{s'}\right) \\
&+ C\int_t^{t+T}\!\!\int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds. \qquad (3.83)
\end{aligned}
$$

Considere novamente $\delta > 0$. Então, temos a seguinte desigualdade:

$$
E(t)^{\frac{1}{2}}\,(\Delta E(t))^{\frac{r'}{2}} \leq \frac{\delta}{2}\,E(t) + \frac{1}{2\delta}\,(\Delta E(t))^{r'}. \qquad (3.84)
$$

Notamos que $0 < q' < 1$. Definindo $q'' = 1-q'$ e usando a Proposição 1.1.41, temos a seguinte desigualdade:

$$
E(t)^{q'}(\Delta E(t))^{s'} \leq q'\,\delta^{\frac{1}{q'}}\,E(t) + \frac{q''}{\delta^{\frac{1}{q''}}}\,(\Delta E(t))^{\frac{s'}{q''}}. \qquad (3.85)
$$

É fácil verificar que $\frac{s'}{q''} = p'$. Escolhendo δ suficientemente pequeno, o resultado segue de imediato.

$\blacksquare$

Teorema 3.4.9 *Suponha que Ω seja conexo e $b^2 - a^2 > 0$. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. *Se $n = 2$, $r = 0$ e $-1 < p < \infty$ ou se $n \geq 3$ e $r = p = 0$, existem*

$\gamma_1 > 0$ e $C > 0$ tais que

$$E(t) \leq C\, E(0)\, e^{-\gamma_1 t}, \ \forall\, t \geq 0; \tag{3.86}$$

2. *Se $n = 2$, $-1 < r < \infty$, $-1 < p \leq \infty$ e $(p, r) \neq 0$, existem $\gamma > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$E(t) \leq C\, (1 + t)^{-\gamma}, \ \forall\, t \geq 0, \tag{3.87}$$

para

- $\gamma = \dfrac{-2(r+1)}{r}$ *se* $-1 < r < 0$ *e* $-1 < p \leq \infty$;
- $\gamma = \dfrac{2}{r}$ *se* $r > 0$ *e* $-1 < p \leq \infty$;

3. *Se $n \geq 3$, $-1 < r < \infty$, $-1 < p \leq \frac{2}{n-2}$ e $(p, r) \neq 0$, existem $\gamma > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$E(t) \leq C\, (1 + t)^{-\gamma}, \ \forall\, t \geq 0, \tag{3.88}$$

para

- $\gamma = \min\{\dfrac{2}{r}, \dfrac{4\,(p+1)}{p(n-2)}\}$ *se* $r > 0$ *e* $0 < p \leq \frac{2}{n-2}$;
- $\gamma = \dfrac{4(p+1)}{p(n-2)}$ *se* $r = 0$ *e* $0 < p \leq \frac{2}{n-2}$;
- $\gamma = \dfrac{2}{r}$ *se* $r > 0$ *e* $p = 0$;
- $\gamma = \min\{\dfrac{2}{r}, \dfrac{4}{p(2-n)}\}$ *se* $r > 0$ *e* $-1 < p < 0$;
- $\gamma = \dfrac{4}{p(2-n)}$ *se* $r = 0$ *e* $-1 < p < 0$.
- $\gamma = \min\{\dfrac{-2\,(r+1)}{r}, \dfrac{4\,(p+1)}{p(n-2)}\}$ *se* $-1 < r < 0$ *e* $0 < p \leq \frac{2}{n-2}$;

- $\gamma = \dfrac{-2\,(r+1)}{r}$ *se* $-1 < r < 0$ *e* $p = 0$;

- $\gamma = \min\{\dfrac{-2\,(r+1)}{r}, \dfrac{4}{p(2-n)}\}$ *se* $-1 < r < 0$ *e* $-1 < p < 0$;

Prova

Seja $T > 0$, usando a Proposição 3.4.8, e o fato que $a_0 > 0$ e os itens 1,3, 5 e 7 da Proposição (3.2.2), temos a seguinte estimativa

$$I(t) \;=\; \int_t^{t+T}\!\!\int_{w\cap\Omega} |u_s|^2\,dx\,ds$$

$$\begin{aligned}
I(t) &\leq \frac{1}{a_0}\int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega} a(x)\,|u_s|^2\,dx\,ds \\
&= \frac{1}{a_0}\{\int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega_1(s)} a(x)\,|u_s|^2\,dx\,ds + \int_t^{t+T}\!\!\int_{\Omega_2(s)} a(x)\,|u_s|^2\,dx\,ds\} \\
&\leq C\,\{\,\Delta E(t) + \Delta E(t)^{r'} + \Delta E(t)^{p'}\},\ \forall\, t \geq 0
\end{aligned}$$

para C uma constante real, positiva e independente de t. Pela Proposição 3.4.8 temos

$$E(t) \leq C\,\left(\Delta E(t) + \Delta E(t)^{r'} + \Delta E(t)^{p'}\right),\ \forall\, t \geq 0. \tag{3.89}$$

No caso $n \geq 3$ para $0 \leq p < \frac{2}{n-2}$ usando o item 5 da Proposição 3.2.2, a Proposição 3.4.8 e $\Delta E(t) \geq 0$ resulta

$$\begin{aligned}
I(t) &\leq C\left(\,\Delta E(t) + \Delta E(t)^{r'}\right) \\
&\leq C\left(\,\Delta E(t) + \Delta E(t)^{r'} + \Delta E(t)^{p'}\right), \quad \forall\, t \geq 0.
\end{aligned}$$

No caso $n=2$ com $-1<p<0$ usando o item 6 da Proposição 3.2.2 e a Proposição 3.4.8 resulta

$$I(t) \quad \leq \quad C\,\{\ \Delta E(t) + \Delta E(t)^{r'}\} + C\ (\Delta E(t))^{\frac{p+1}{p+2}}\ (E(t))^{\frac{1}{p+2}}\ .$$

Dado um $0<\delta<1$ pela Preposição 1.1.41 temos

$$I(t) \quad \leq \quad C\,\{\ \Delta E(t) + \Delta E(t)^{r'}\} + C_1 \Delta E(t) + \delta\, C\, E(t)$$

Escolhendo δ tal que $0<\delta<\ C^{-1}$ e pela Proposição 3.4.8, temos

$$(1 - C\,\delta)\, E(t) \leq C\, \left(\Delta E(t) + \Delta E(t)^{r'}\right),\ \forall\, t \geq 0.$$

Assim para $p'=1$ a expresão anterior pode-se escrever

$$E(t) \leq C\, \left(\Delta E(t) + \Delta E(t)^{r'} + \Delta E(t)^{p'}\right),\ \forall\, t \geq 0. \qquad (3.90)$$

Notamos que $0<r',p'\leq 1$. Como $\Delta E(t)$ é uma função não negativa e limitada, existe uma constante real e positiva C_1, independente de t, tal que

$$E(t) \leq C_1\, (\Delta E(t))^k,\ \forall\, t \geq 0,\ \text{para} k = \min\{r', p'\}. \qquad (3.91)$$

Além disso, como $E(t)$ é descrescente, então

$$\sup_{t \leq s \leq t+T} E(s)^{\frac{1}{k}} \leq E(t)^{\frac{1}{k}} \leq C_1\, \Delta E(t). \qquad (3.92)$$

Aplicando o Lema de Nakao, o resultado segue de imediato.

■

Referências Bibliográficas

[1] R. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, (1975).

[2] E. Andreou e G. Dassios. *Dissipation of energy for magnetoelastic waves in a conductive medium.* Quart. Appl. Math. LV(1) (1997), pgs 23-29.

[3] M. A. Astaburuaga e R. C. Charão. *Stabilization of the total energy for a system of elasticity with localized dissipation.* Differential and Integral Equations, vol 15, nº 11, (2002), pgs 1357-1376.

[4] R. G. Bartle. *Elements of integration.* John Wiley Sons, (1966).

[5] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, (1983).

[6] H. Brezis e T. Cazenave. *Nonlinear evolution equations.* Technical report, (1994).

[7] R. C. Charão, J. C. Oliveira e G. P. Menzala. *Energy decay rates of magnetoelastic waves in a bounded conductive medium.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, series A, vol. 25 (2009), pgs 797-821.

[8] Bisognin E., Bisognin V. e R. C. Charão. *Uniform stabilization for elastic waves system with highly nonlinear localized dissipation.* Portugaliae Mathematica, Vol. 60, Fasc. 1 (2003), pgs 99-124.

[9] R. Chill e E. Fašangová. *Gradient systems.* 13th International Internet Seminar, (2009).

[10] Dafermos, C. M. *On the existence and asymptotic stability of solution to the equation of linear thermoelasticity.* Arch. Rat. Mech. Anal., 29 (1968), 241-247.

[11] R. Dautray e J. L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology vol 1. Spectral theory and applications.* Spriger-Verlag, (1990).

[12] C. I. Doering e A. O. Lopes. *Equações diferenciais ordinárias.* IMPA, (2005).

[13] J. J. Duistermaat e J. A. C. Kolk. *Multidimensional real analysis II.* Cambridge, (2004).

[14] G. Duvaut e J. L. Lions. *Inequalities in mechanics and physics.* Springer-Verlag, (1976).

[15] L. C. Evans. *Partial differential equations.* American Mathematical Society, (1997).

[16] G. B. Folland. *Real Analysis.* John Wiley Sons (1999).

[17] G. B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations.* Princeton University Press (1995).

[18] J. F. Gerbeau, C. L. Bris e T. Leliävre. *Mathematical methods for the magnetohydrodynamics of liquid metals.* Oxford Science Publications, (2006).

[19] V. Girault e P. A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations.* Springer-Verlag, (1986).

[20] A. M. Gomes. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução.* UFRJ, (2005).

[21] Henry, D., Lopes, O., Perisinotto, A. *Linear thermoelasticity asymptotic stability and essential spectrum* Nonlinear Analysis, Theory and Applications, 21 (1) (1993), 65-75.

[22] Irmscher, T., Racke, R. *Sharp decay rates in parabolic and hyperbolic thermoelasticity* IMA Journal of Applied Mathematics 71 (2006),459-478.

[23] S. Jiang, J.E. Muñoz Rivera and R. Racke. *Asymptotic stability and global existence in thermoelasticity with symmetry* , Quart. Appl. Math., 56(2)(1998),259-275.

[24] J. C. Oliveira e R. C. Charão. *Stabilization of a locally damped incompressible wave equation.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 303 (2005), pgs 699-725.

[25] J. C. Oliveira e R. C. Charão. *Stabilization of a locally damped thermoelastic system.* Journal of Computational e Applied Mathematics, vol. 27 (2008), pgs 319-357.

[26] L. Knopoff. *The interaction between elastic wave motions and a magnetic field in electrical conductors.* Journal of Geophysical Research, vol. 60, issue 4 (1955), pgs 441-456.

[27] S. Kesavan. *Topics in functional analysis and applications.* John Wiley Sons, (1989).

[28] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley Sons, (1989).

[29] Komornik, V., *Exact controllability and stabilization, the multiplier method.* John Wiley & Sons - Masson, (1994), Paris.

[30] G. Lebeau e E. Zuazua. *Decay rates for the three-dimensional linear system of thermoelasticity.* Arch. Rational Mech. Anal, vol. 148, nº 3 (1999), pgs 179-231.

[31] Liu, W. J., Zuazua, E. *Uniform stabilization of the higher-dimentional system of thermoelasticity with nonlinear boundary feedback* Quart. Appl. Math., 59(2) (2001), 269-314.

[32] E. L. Lima. *Curso de análise vol. 2.* IMPA, (2009).

[33] J. L. Lions. *Quelquer méthodes de résolution des problemes aux limites non lineáries.* Gauthier - Villars, (1969).

[34] J. L. Lions. *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems.* SIAM Rev., 30 (1988), 1-68.

[35] J. L. Lions. *Controlabilité exacte perturbations et stabilisation de systemes distribues. Tome 1. Contrálabilité exacte.* Masson, (1988).

[36] J. L. Lions e E. Magenes. *Non-homogeneous boundary valeu problems and applications I.* Springer-Verlag, (1972).

[37] C. R. Luz. *Propriedades Assintoticas de Sistemas Eletromagneticas / Elásticos Anisotrópicos.* Tese de Doutorado, UFRJ, (2009).

[38] M. P. Matos *Integral de Bochner e Espaços* $L^p(0,T;X)$. Notas de Aulas do Curso de Verão, UFPR,(1998).

[39] L. A. Medeiros e A. E. Mello. *A integral de Lebesgue.* UFRJ, (2004).

[40] G. P. Menzala e E. Zuazua. *Energy decay of magnetoelastic waves in a bounded conductive medium.* Asymptotic Analysis, vol. 18 (1998), pgs 349-362.

[41] M. M. Miranda e L. A. Medeiros. *Espaços de Sobolev.* UFRJ, (2008).

[42] M. Nakao. *Convergence of solutions of the wave equation with a nonlinear dissipative term to the steady state.* Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University, Ser. A, vol. 30 (1976), pgs 257-265.

[43] M. Nakao. *Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation.* Mathematische Annalen, vol. 305, nº 1 (1995), pgs 403-417.

[44] M. Nakao. *Remarks on the existence and uniqueness of global decaying solutions of the nonlinear dissipative wave equations.* Mathematische Zeitschrift, vol. 206, nº 1 (1991), pgs 265-276.

[45] J. Necas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson, (1967).

[46] J. T. Oden e J. N. Reddy. *An introduction to the mathematical theory of finite elements.* John Wiley Sons, (1976).

[47] J. C. Oliveira e R. C. Charão. *Stabilization of a locally damped thermoelastic system.* Journal of Computational e Applied Mathematics, vol. 27 (2008), pgs 319-357.

[48] D. C. Pereira, G. P. Menzala. *Exponential decay of solutions to a coupled system of equations of linear thermoelasticity* Mat. Aplic., 8(3) (1989), 193-204.

[49] V. Priimenko e M. Vishnevskii. *Mathematical problems of electromagnetoelastic interactions.* Bol. Soc. Paran. Mat., vol. 25 (2007), pgs 55-66.

[50] Y. Qin, J. E. M. Rivera. *Global existence and exponential stability of solutions to thermoelastic equations of hyperbolic type* J. Elasticity, 75 (2004), n^o 2, 125-145.

[51] Racke, R., *On the Cauchy problem in nonlinear 3-d thermoelasticity* Math. Z. 203(4) (1990), 649-682.

[52] Racke, R. *Exponential decay for a class of initial-boundary value problems in thermoelasticity* Mat. Apl. Comput. 12(1) (1993),67-80.

[53] Racke, R., Shibata, Y., Zheng, S. M. *Global solvability and exponential stability on one-dimensional nonlinear thermoelasticity* Quart. Appl. Math. 51(4) (1993), 751-763.

[54] Racke, R., Shibata, Y. *Global smooth solutions and asymptotic stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity* Arch. Rational Mech. Anal. 116(1) (1991),1-34.

[55] M. Renardy e R. C. Rogers. *An introduction to partial differential equations.* Springer-Verlag, (1992).

[56] Rivera, J. E. M., *Asymptotic behaviour in inhomogeneous linear thermoelasticity* Appl. Anal. 53(1-2) (1994), 55-65.

[57] Rivera, J. E. M. *Asymptotic behaviour in n-dimensional thermoelasticity* Appl. Math. Lett. 10(5) (1997), 47-53.

[58] Rivera, J. E. M., Barreto, R. K. *Existence and exponential decay in nonlinear thermoelasticity* Nonlinear Anal. 31(1) (1998), 149-162.

[59] J. M. Rivera. *Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais.* LNCC, (1999).

[60] Rivera, J. E. M., *Energy decay rates in linear thermoelasticity* Funkcialaj Ekvacioj, 35 (1) (1992), 19-30.

[61] J. M. Rivera e M. L. Santos. *Polynomial stability to three-dimensional magnetoelastic waves.* Acta Applicandae Mathematicae, vol. 76, nº 3 (2003), pgs 265-281.

[62] W. A. Strauss *Partial Differential Equations.* John Wiley Sons (1992).

[63] J. L. Lions e W. A. Strauss. *Some non-linear evolution equation.* Technical report, Soc. Math. France, (1965).

[64] M. Sermange e R. Temam. *Some mathematical questions related to the mhd equations.* Comm. Pure Appl. Math., vol. 36 (1983), pgs 635-664.

[65] R. Teman. *Navier-Stokes Equations.* Elesiever Science Publisher BV,(1984).

[66] T. Tortato. *Estimativas A-Priori em Equações Diferenciais Elípticas e Aplicações.* Tese de Mestrado , UFPR,(2006).

[67] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications II/A: Linear monotone operators.* Springer-Verlag, (1990).