Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Álgebras Associadas às Relações de Equivalência

Viviane Maria Beuter
Orientador: Prof. Dr. Daniel Gonçalves

Florianópolis
Fevereiro 2011

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Álgebras Associadas às Relações de Equivalência

Dissertação apresentada ao Curso de Pós - Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Viviane Maria Beuter

Florianópolis

Fevereiro de 2011

Álgebras Associadas às Relações de Equivalência

por

Viviane Maria Beuter

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre"
Área de Concentração em Análise e aprovada em sua forma final
pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.

Prof. Dr. Ruy Exel Filho
Coordenador da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Orientador – UFSC

Prof. Dr. Ruy Exel Filho (UFSC)

Prof^{a}. Dra. Virgínia Silva Rodrigues (UFSC)

Prof. Dr. Thierry Giordano (University of Ottawa)

Florianópolis, 7 de fevereiro de 2011.

À minha mãe

Ao meu irmão

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus por toda a proteção que tenho recebido.

Em especial, agradeço à minha mãe por tudo o que já fez por mim! Tudo o que aprendi, tudo o que sei, tudo o que conquistei, devo a ela. É uma mulher guerreira, humilde e serena. E é com certeza a pessoa mais importante na minha vida, e sou infinitamente grata pela educação, amor e preces. Mãe, esse mestrado e esta dissertação são dedicados a você!

Ao meu irmão Edilson, por muitas vezes ser meu “saco de pancadas". Sou eternamente grata pela confiança, paciência, amor, críticas, sugestões e apoio. E principalmente muito obrigada, que quando necessário, você de alguma forma ou outra conseguiu tapar o buraco feito pela falta de pai.

Agradeço a toda a minha família que sempre torceu e torce por mim. Em especial aos meus padrinhos, Olivia e Osni, pelo apoio e carinho. E agora padrinho, após a nossa convivência mais intensa aqui em Florianópolis, meu carinho e admiração só aumentaram, e sei que quando eu precisar de um pai, o senhor está apostos.

Quero agradeçer ao meu orientador professor Daniel Gonçalves, por ter me aceito como sua orientanda, sem ao menos me conhecer direito. Obrigada por toda paciência, dedicação, incentivo, ensinamento, sugestões, tempo despendido e compreensão. Gostei muito do tema escolhido e de termos trabalhado juntos.

Ao Professor Ruy Exel, obrigada pelo convite para fazer as disciplinas de tópicos, com certeza este convite e o seu trabalho de professor e pesquisador fizeram com que eu escolhesse a área de operadores de álgebra. Tenho grande respeito e admiração por você.

Também não poderia deixar de agradecer aos professores Oscar Janesch, Ruy Charão, Eliezer Batista, Rubens Starke, Aldrovando Luíz e os demais professores que contribuíram com a minha formação acadêmica.

Agradeço aos meus amigos que conquistei na graduação e ao longo dos anos aqui em Floripa, Fabiana, Patricia, Fábio, Ricardo, Paôla, Tiago, Andréia, Adriano Né, Eliandra, Fantin, Renato, Elaine, Guilherme, Rony, Leoncio, Suelen e Rafael (Rafa obrigada pela ajuda técnica), pela compreensão, ajuda e amizade. Aos meus amigos que agora estão longe, Romelânia, Cintia, Gilberto, Lucas, Thiago e demais amigos da matemática obrigada pelos momentos que passamos juntos. Também agradeço aos meus colegas da pós-graduação, João Nilton, Fabiano e Allysson, valeu pela parceria. Às minhas queridas e eternas amigas de São Bento do Sul, Juliana e Simone, obrigada por sempre se lembrarem de mim. E as minhas amigas de apartamento, Gabriela e Anaelka, por entenderem e respeitarem minhas muitas horas de isolamento.

Agradeço à Elisa e ao Airton, que estão sempre dispostos a ajudar com respeito e carinho.

Agradeço, ao CNPq, pelo suporte financeiro que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

No que segue estudaremos a construção de C^* - álgebras a partir de uma relação de equivalência. Definiremos a noção de uma relação de equivalência étale em um espaço de Hausdorff localmente compacto. Uma vez dada uma relação de equivalência étale R, sob certas condições, pode-se construir duas C^*- álgebras a partir de R (a C^*- álgebra $C^*(R)$, e a C^*- álgebra reduzida, $C^*_r(R)$) aplicando a teoria de J. Renault para C^*- álgebras de um grupóide [11]. De fato, pode-se aplicar a teoria de Renault para uma classe mais ampla do que relações de equivalência, no entanto, se assumirmos a estrutura de uma relação étale às C^*- álgebras de um grupóide tornam-se muito mais tratáveis. Aplicaremos estes resultados para alguns exemplos. Por último, faremos um estudo puramente algébrico de uma relação de equivalência dada a partir de uma ação livre de um grupo enumerável G em um espaço vetorial X.

Abstract

On the following we will study the construction of C^*-algebras from an equivalence relation. We will define the notion of an étale equivalence relation on a locally compact Hausdorff space. Given an étale equivalence relation R, under some mild conditions, one can construct two C^*- algebras from R (the C^*- algebra $C^*(R)$, and the reduced C^*- algebra, $C_r^*(R)$) by applying J. Renault's theory of groupoid C^*- algebras [11]. In fact one can apply the theory of Renault to a class larger than the class of equivalence relations, however, if we assume the structure of an étale relation the groupoid C^*- algebras becomes much more tractable. We will apply these results to some examples. Finally, we will do a purely algebraic study of an equivalence relation arising from a free action of a countable group G on a vector space X.

Sumário

Introdução

Em termos de álgebra, um grupóide intuitivamente pode ser considerado como um conjunto com uma multiplicação parcialmente definida para a qual as propriedades usuais de um grupo mantenham-se sempre que elas fazem sentido.

Lembrando que uma relação de equivalência R em um conjunto X qualquer é um subconjunto de $X \times X$ que satisfaz o seguinte: $(x, x) \in R$ para todo $x \in X$ (reflexividade); se $(x, y) \in R$ então $(y, x) \in R$ (simetria); se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ então $(x, z) \in R$ (transitividade). Se $(x, y) \in R$ dizemos que x é equivalente a y, e a classe de equivalência de x, denotada por $[x]$, é o conjunto de todos os y tais que $(x, y) \in R$.

Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Seja $R \subseteq X \times X$ uma relação de equivalência em X. Podemos considerar R como um objeto algébrico, ou seja, um grupóide, considerando o produto definido parcialmente por: $(x, y)(y', z) = (x, z)$ se $y = y'$; e o inverso por: $(x, y)^{-1} = (y, x)$, para $(x, y), (y', z) \in R$. Usaremos r e s (*range* e *source*) para denotar as duas projeções canônicas de R em X, isto é, $r(x,y) = x$, $s(x,y) = y$.

A hipótese chave em R é que ele deverá ser equipado com sua própria topologia satisfazendo algumas condições. Primeiro R deverá ser σ- compacto nesta topologia. Em segundo lugar, $\triangle = \{(x,x) \in X \ : \ x \in X\}$ deverá ser um subconjunto aberto de R. Em terceiro, requeremos que, para qualquer $(x,y) \in R$, existe uma vizinhança aberta U de $(x,y) \in R$ tal que $r|_U$ e $s|_U$ são homeomorfismos locais. Isto conecta a topologia de R com a de X, em particular, $\triangle$ e X são homeomorfos, e também R é Hausdorff localmente compacto. Finalmente, requeremos que as aplicações produto e inverso deverão ser contínuas nesta topologia.

Queremos construir uma C^* - álgebra de R. Começaremos com o espaço linear das funções $f : R \to \mathbb{C}$, contínuas com suporte compacto em R, $C_c(R)$. Definiremos o produto de convolução, a involução e uma norma, $\|\cdot\|_*$, por

$$f * g(x,z) = \sum_{y \in [x]} f(x,y)g(y,z),$$

$$f^*(x,y) = \overline{f(x,y)},$$

$$\|f\|_* = \max\{\sup_{x \in X} \sum_{(x,y) \in r^{-1}\{x\}} |f(x,y)|, \sup_{y \in X} \sum_{(x,y) \in s^{-1}\{y\}} |f(x,y)|\},$$

para $f, g \in C_c(R)$ e $(x,y) \in R$. Para obtermos uma C^*-álgebra, precisaremos de uma C^*- norma em $C_c(R)$ (pois $\|\cdot\|_*$ não é).

A primeira opção será considerar todas as representações $\pi : C_c(R) \to B(H)$, onde H é um espaço de Hilbert. Definiremos uma C^*- norma em $C_c(R)$ por $\|f\|_{C^*} = \sup_\pi\{\|\pi(f)\|\}$. O completamento de $C_c(R)$ nesta norma, $C^*(R)$, será uma C^*- álgebra.

A segunda opção será restringir a atenção para uma pequena classe de representações. Fixe um ponto $x \in X$. Consideraremos $H = \ell^2([x])$ e definiremos $\lambda_x : C_c(R) \to B(H)$ por

$$(\lambda_x(f)\xi)(y) = \sum_{z\in[x]} f(y,z)\xi(z),$$

para $f \in C_c(R)$, $\xi \in \ell^2[(x)]$, $y \in [x]$. Podemos então definir uma (diferente) C^*- norma em $C_c(R)$ por $\|f\|_{red} = \sup_{x\in X}\{\|\lambda_x(f)\|_{op}\}$. Agora, o completamento de $C_c(R)$ nesta norma, $C^*_r(R)$, será chamada a C^*- álgebra reduzida de R.

Nosso trabalho tem como base as seções 2, 3 e 4 de [10] I. F. Putnam, *A Survey of Recent K-theoretic Invariants for Dynamical Systems*, onde I. Putnam passa uma idéia rápida de uma relação de equivalência étale R, as C^*- álgebras de R e vários exemplos.

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No primeiro capítulo, faremos a apresentação de alguns resultados sobre C^*- álgebras, C^*- álgebras envolvente, core subalgebras e topologia, os quais serão utilizados no decorrer do trabalho.

No segundo capítulo, o principal objetivo é definir a topologia étale para uma relação de equivalência com uma estrutura de grupóide e estudar suas propriedades. Na última seção deste capítulo, apresentaremos alguns exemplos de relações de equivalência étale.

Dedicaremos o capítulo 3 a tarefa de construir as C^*-álgebras associadas a relação de equivalência étale R e apresentarmos as C^*- álgebras dos exemplos do final do capítulo anterior.

Apresentaremos no capítulo três exemplos de relações étale mais complexas com suas C^*-álgebras associadas, onde precisaremos de conhecimentos extras, como produto cruzado (global e parcial), limite indutivo e diagrama de Bratteli.

No último capítulo faremos um estudo algébrico. Dado uma ação livre h de um grupo G em um conjunto qualquer X, mostraremos que existe uma ação associada α de G em um conjunto de funções adequado. A partir daí, definiremos uma relação de equivalência em um conjunto X com esta ação h, e construíremos um álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$.

1 Pré-Requisitos

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados que vamos explorar nos capítulos que se seguem. Esta exposição resumida tem apenas o propósito de referência usada neste trabalho. Na primeira seção, enunciamos definições, exemplos e proposições da teoria básica de C^* - álgebra. Mais detalhes podem ser encontrados em textos clássicos como G.J. Murphy [7] e V.S. Sunder [15]. Na seção seguinte, passamos uma idéia rápida de uma C* - álgebra envolvente. Além disso, introduzimos a noção de core subalgebras, a qual é definida por R. Exel, T. Giordano e D. Gonçalves em [2]. Na última seção, abordamos propriedades básicas de espaços topológicos conhecidas na literatura, usamos como referências J.R. Munkres [6] e E.L. Lima [5]. Presume-se que o leitor tenha um pouco de familiaridade com a teoria de C^*- álgebras e Topologia.

1.1 C^*- álgebras

Um estudo sistemático de operadores em espaços de Hilbert teve início com trabalhos de John von Neumann no final da década de 20. Motivado por obter uma formalização matemática mais precisa de teorias emergentes na época, sobretudo a mecânica quântica, von Neumann percebeu a necessidade do estudo de operadores de um ponto de vista mais amplo. Assim em 1929, von Neumann em *Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren*, iniciou seu estudo da teoria dos anéis de operadores, que hoje conhecemos como "Álgebras de von Neumann". Mais tarde surge a necessidade e o interesse no estudo de subalgebras autoadjuntas do espaço dos operadores limitados em um espaço de Hilbert, fechadas na topologia da norma: as C^*-álgebras.

Considera-se que a teoria de C^* - álgebras teve origem em 1943, com o trabalho de Israel M. Gelfand e Mark Naimark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*, onde estes provaram que tais objetos podem ser definidos por meio de poucos e simples axiomas. É também de I.M. Gelfand a prova de que uma C^*- álgebra comutativa é a álgebra das funções contínuas num espaço topológico localmente compacto, que se anulam no infinito.

Definição 1.1.1. *Uma álgebra é um espaço vetorial A sobre o corpo dos números complexo $\mathbb{C}$, munida com uma multiplicação que satisfaz:*

- $a(bc) = (ab)c$
- $(a+b)c = ac + bc, \quad a(b+c) = ab + ac$
- $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Observação 1.1.2. *Se A é um espaço de Banach com relação a uma norma, $\|\cdot\|$, tal que*

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

para quaisquer $a, b \in A$, então A é uma álgebra de Banach.

Dada uma álgebra A, dizemos que $B \subseteq A$ é uma *subálgebra* de A se B for um subespaço vetorial de A fechado para a multiplicação.

Dizemos também que um subconjunto não vazio $I \subseteq A$ é um *ideal* de A se sempre que $a, b \in A, c \in I$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, tivermos que $\lambda a + b, ac, ca \in I$.

Definição 1.1.3. *Uma involução em uma álgebra A é uma aplicação $* : A \to A$ que satisfaz:*

- $(a+b)^* = a^* + b^*$

- $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$
- $(ab)^* = b^* a^*$
- $a^{**} = a$

para quaisquer $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Uma álgebra A munida de uma involução é chamada de $*$ - álgebra.

Se $a \in A$ e $a^* = a$, a é dito *autoadjunto*. Se A possui elemento unidade e, um elemento $u \in A$ é *unitário* se $u^*u = uu^* = e$. Seja S um subconjunto de A, definimos $S^* := \{a^* : a \in S\}$, e se $S^* = S$ dizemos que S é *autoadjunto*.

Definição 1.1.4. *Dizemos que A é uma C^*- álgebra se A é uma $*$ - álgebra de Banach tal que*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

para todo $a \in A$.

Observação 1.1.5. *Se A possui elemento unidade e, tal que*

$$ae = ea = a \ \ \forall\, a \in A \quad e \quad \|e\| = 1$$

então A é dita uma C^*- álgebra com unidade.

Exemplo 1.1. Existem dois exemplos particularmente importantes de C^*- álgebras. O primeiro é $C_0(X)$, o conjunto das funções contínuas $f : X \to \mathbb{C}$ que se anulam no infinito, onde X é um espaço localmente compacto Hausdorff,

com a soma e produto pontuais, involução dada por conjugação $f^*(x) := \overline{f(x)}$, e a norma do supremo $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X}\{|f(x)|\}$.
Como caso particular, quando X é compacto, $C_0(X) = C(X)$, o conjunto das funções contínuas $f : X \to \mathbb{C}$ com as mesmas operações algébricas, involução e norma.

O segundo exemplo importante de C^*- álgebras consiste na álgebra dos operadores limitados num espaço de Hilbert H, com a involução de um operador sendo dada pelo operador adjunto, e cuja norma é a norma usual de operadores, $\|T\| := \sup_{\|\xi\|\leq 1}\{\|T\xi\|\}$. Essa C^*- álgebra será sempre denotada por $B(H)$.

Observação 1.1.6. *É possível provar que toda C^*- álgebra é uma subálgebra fechada de $B(H)$, para algum espaço de Hilbert H apropriado. Ver W. Rudin [13], pg 338, teorema 12.41.*

Definição 1.1.7. *Sejam A e B $*$ - álgebras. Uma aplicação $\phi : A \to B$ é um homomorfismo se satisfazer*

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \;\; \textit{para todo} \;\; x, y \in A.$$

Além disso, se ϕ satisfizer $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ então ϕ é chamado de $*$ - homomorfismo. Seu núcleo, $Ker\,\phi$, é um ideal autoadjunto em A e sua imagem, $\phi(A)$, é uma $*$ - subálgebra de B. Um $*$ - homomorfismo bijetivo é chamado de $*$ - isomorfismo.

Unitização: Seja A uma álgebra. Definimos $\widetilde{A} := A \oplus \mathbb{C}$ como um espaço vetorial. Para tornarmos $\widetilde{A}$ uma álgebra unital definimos uma multiplicação em $\widetilde{A}$ por:

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu).$$

A unidade é $(0, 1)$. A álgebra $\widetilde{A}$ é chamada a *unitização* de A. Note que a aplicação

$$A \to \widetilde{A}, \;\; a \mapsto (a, 0),$$

é um homomorfismo injetivo, que usamos para identificar A como um ideal de $\widetilde{A}$.

Se A é uma álgebra normada, tornamos $\widetilde{A}$ em uma álgebra normada, definindo

$$\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|.$$

Observe que A é uma subálgebra fechada de $\widetilde{A}$, e que $\widetilde{A}$ é uma álgebra de Banach se A é uma.

Agora, se A é uma $*$ - álgebra, definimos a involução em $\widetilde{A}$ por

$$(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda}).$$

Então, $\widetilde{A}$ é uma $*$ - álgebra, e A é um ideal autoadjunto em $\widetilde{A}$.

No entanto, se A é uma C^*- álgebra, existe um problema aqui, uma vez que a norma não torna $\widetilde{A}$ uma C^*- álgebra em geral. Por um instante, se $A = \mathbb{C}$ e $(a, \lambda) = (-4, 2)$, temos que $\|(a, \lambda)\|^2 = 36$, mas $\|(a, \lambda)^*(a, \lambda)\| = \|(0, 4)\| = 4$.

Na verdade, se A é uma C^*-algebra sem unidade, então existe uma única norma em $\widetilde{A}$, definida por $\|(a, \lambda)\| = \sup\{\|ax + \lambda x\| \ : x \in A \,\mathrm{e}\, \|x\| \leq 1\}$, tornando-a uma C^*-álgebra com unidade e estendendo a norma de A. Ver [7], pg 39.

Se $\phi : A \to B$ é um $*$ - homomorfismo entre as $*$ - álgebras A e B, então ϕ estende-se unicamente para um $*$ - homomorfismo unital $\widetilde{\phi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$, definindo-se $\widetilde{\phi}(a, \lambda) = \phi(a) + \lambda$.

Proposição 1.1.8. *Sejam A uma $*$ - álgebra de Banach e B uma C^*- álgebra. Então todo $*$ - homomorfismo $\phi : A \to B$ é contrativo, ou seja, $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$.*

Demonstração: Ver [7], pg 40.

Proposição 1.1.9. *Se A e B são C^*- álgebras e ϕ é um $*$ - homomorfismo injetivo de A em B, então $\|\phi(x)\| = \|x\|$.*

Demonstração: Ver [7], pg 80.

Proposição 1.1.10. *Seja $\phi : A \to B$ um $*$ - homomorfismo entre as C^*- álgebras A e B. Então $\phi(A)$ é fechado em B*

Demonstração: Seja $I = ker(\phi)$. Considere a decomposição canônica de $\phi : A \to \dfrac{A}{I} \xrightarrow{\psi} \phi(A) \to B$.

Como ϕ é um $*$ - homomorfismo de C^*- álgebras, ϕ é contínuo e portanto I é fechado. Logo, $\dfrac{A}{I}$ com a norma quociente é uma C^*- álgebra.

Agora, note que o homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \psi : \dfrac{A}{I} & \to & B \\ \overline{a} & \mapsto & \phi(a);\ a \in \overline{a} \end{array},$$

obtido de ϕ passando-se o quociente, é injetivo e portanto, pela proposição 1.1.10, ψ é isométrico.

Logo, $\phi(A)$ é completo e portanto fechado em B. ■

Definição 1.1.11. *Seja A uma $*$ - álgebra. Uma representação de A em H, onde H é um espaço de Hilbert, é um $*$ - homomorfismo $\pi : A \to B(H)$.*

Lema 1.1.12. *Seja π uma representação de uma $*$ - álgebra A sobre um espaço de Hilbert H. São equivalentes:*

(a) $M := span\{\pi(a)\xi \ : \ a \in A, \xi \in H\}$ *é denso em* H.

(b) Seja $\eta \in H$ fixo. Se $\langle \pi(a)\xi, \eta\rangle = 0$ para todo $a \in A, \xi \in H$ então $\eta = 0$.

Demonstração:

$(a) \Rightarrow (b)$ Seja $\eta \in H$ fixo. Se $\langle \pi(a)\xi, \eta\rangle = 0$ para todo $a \in A, \xi \in H$ então $\eta \in M^{\perp}$. Mas M é denso em H, e portanto $M^{\perp} = \{0\}$. Logo $\eta = 0$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Seja $\eta \in M^{\perp}$ fixo. Então $\langle \pi(a)\xi, \eta \rangle = 0$ para todo $a \in A$ e $\xi \in H$, o que implica que $\eta = 0$. Isto mostra que $M^{\perp} = \{0\}$ e portanto M é denso em H. ■

Definição 1.1.13. *Uma representação de uma $*$ - álgebra é dita não-degenerada se satisfaz alguma das condições equivalentes do lema anterior.*

Definição 1.1.14. *Seja $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de operadores lineares num espaço de Hilbert H. Dizemos que $T_n\xi \to T\xi$ na topologia operador fraco de H se $f(T_n\xi) \to f(T\xi)$ para todo funcional linear f sobre H.*

1.2 C^*- álgebra Envolvente

Definição 1.2.1. *(a) Uma seminorma sobre um espaço vetorial X é uma função $p : X \to \mathbb{R}_+$ tal que*

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
- $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

para todo $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) Uma C^*- seminorma p sobre uma $*$ -álgebra A é uma seminorma que satisfaz, para todo $x, y \in A$,

- $p(xy) \leq p(x)p(y)$
- $p(x^*) = p(x)$

- $p(x^*x) = p(x)^2$.

Observação 1.2.2. *Note que uma seminorma será uma norma se satisfizer $p(x) \neq 0$ quando $x \neq 0$. Na definição acima, item (b), se p for uma norma, então p é chamada de C^*- norma.*

Seja A uma $*$ - álgebra normada (não necessariamente de Banach). Então $|||\cdot|||$, definida por

$$|||a||| := \sup\{\|\pi(a)\| \ : \ \pi \text{ é representação contrativa de } A\},$$

é uma C^*- seminorma sobre A. Isto segue do fato de cada π ser uma representação num espaço de Hilbert H e do fato de $B(H)$ ser uma C^*- álgebra e assim $|||\cdot|||$ satisfaz as propriedades de C^* - seminorma. Seja

$$I = \{a \in A \ : \ |||a||| = 0\}.$$

Tem-se que I é um ideal fechado e autoadjunto de A. Obtemos uma C^*- norma sobre o espaço quociente $\dfrac{A}{I}$ definida por, $|||a + I||| = |||a|||$ independente do representante da classe $a + I$. Portanto $\left(\dfrac{A}{I}, |||\cdot|||\right)$ é também uma $*$ - álgebra normada.

Definição 1.2.3. *Seja A uma $*$ - álgebra normada. A C^* - álgebra envolvente de A é o completamento de $\dfrac{A}{I}$ na norma $|||\cdot|||$.*

Denotamos por $C^*(A)$ a C^*- álgebra envolvente de uma $*$ - álgebra normada A. A aplicação quociente $q : A \to \left(\dfrac{A}{I}, |||\cdot|||\right)$ é um $*$ - homomorfismo contínuo. Estendendo a aplicação quociente para $C^*(A)$ temos o $*$ - homomorfismo canônico $\imath : A \to C^*(A)$ contínuo com imagem densa.

Sejam A_1 e A_2 C^* - álgebras e B_1 e B_2 $*$ - subálgebras densas de A_1 e A_2, respectivamente. Se B_1 e B_2 são $*$ - isomorfas, o que podemos afirmar sobre as C^* - álgebras A_1 e A_2? Elas também são $*$ - isomorfas? A Proposição 1.2.7 nos dará uma condição suficiente para que A_1 e A_2 sejam isometricamente $*$ - isomorfas. Esta proposição e a Definição 1.2.4 são introduzidas em [2].

Definição 1.2.4. *Seja A uma C^*- álgebra e seja $B \subseteq A$ uma $*$ - subálgebra (não necessariamente fechada). Dizemos que B é uma core subálgebra de A quando toda representação de B é contínua em relação a norma induzida de A.*

Assumindo que B é uma core subálgebra de A, e dado uma representação π de B, podemos portanto estender π para uma representação $\overline{\pi}$ de $\overline{B}$ (o fecho de B em A). Uma vez que $\overline{B}$ é uma C^*- álgebra temos, pela Proposição 1.1.8, que $\overline{\pi}$ é necessariamente contrativa. Portanto temos:

Proposição 1.2.5. *B é uma core subálgebra de A se e somente se todo representação de B é contrativa.*

Lema 1.2.6. *Sejam B uma $*$ - álgebra e A uma C^*- álgebra. Se B é uma core subálgebra densa de A então A é isometricamente isomorfa com a C^*- álgebra envolvente $C^*(B)$.*

Demonstração: Seja $\jmath : B \to A$ a inclusão de B em A. Como A é uma C^*- álgebra, pela Observação 1.1.6, existe um isomorfismo isométrico de A em uma subálgebra fechada de $B(H)$, para algum espaço de Hilbert H. Vamos então considerar $A \subseteq B(H)$. Assim, $\jmath$ é uma representação isométrica de B.

É evidente que $|||b||| = \sup_\pi\{\|\pi(b)\|\} \leq \|b\|_A$, onde o lado direito refere-se a norma de b calculada como um elemento de A, e do lado esquerdo como um elemento de $C^*(B)$. Além do mais, $\|b\|_A = \|\jmath(b)\| \leq \sup_\pi\{\|\pi(b)\|\} = |||b|||$, e então $|||b||| = \|b\|_A$.

Agora, tomando o $*$ - homomorfismo canônico $\imath : B \to C^*(B)$ temos que $|||\imath(b)||| = |||b||| = \|b\|_A$, para todo $b \in B$. Assim podemos estender $\imath$ para um $*$ - homomorfismo isométrico $\widetilde{\imath} : A \to C^*(B)$. Mas, como a imagem de uma C^*- álgebra por um $*$ - homomorfismo é fechada temos que,

$$\widetilde{\imath}(A) \subseteq C^*(B) = \overline{\imath(B)} \subseteq \overline{\widetilde{\imath}(A)} = \widetilde{\imath}(A),$$

e então $\widetilde{\imath}(A) = C^*(B)$. Portanto $\widetilde{\imath}$ é um $*$ - isomorfismo isométrico. ■

Deste lema segue imediatamente a seguinte proposição.

Proposição 1.2.7. *Suponha que A_1 e A_2 são C^*- álgebras, e que B_i é uma core subálgebra densa de A_i, para $i = 1, 2$. Se B_1 e B_2 são isomorfos como $*$ - álgebras, então A_1 e A_2 são isometricamente $*$ - isomorfas.*

1.3 Fatos Topológicos

Definição 1.3.1. *Uma base num espaço topológico X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos abertos de X, chamados abertos básicos, com a seguinte propriedade:*

Todo subconjunto aberto $A \subseteq X$ se exprime como reunião $A = \cup B_\lambda$ de abertos B_λ pertencentes a $\mathcal{B}$.

Proposição 1.3.2. *Seja $\mathcal{B}$ um coleção de subconjuntos de um conjunto X. Para que $\mathcal{B}$ seja base de uma topologia em X é necessário que se cumpram as condições abaixo:*

1. *para cada $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;*

2. *se $x \in B_1 \cap B_2$, onde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B}$ uma coleção com as propriedades acima. Consideremos a coleção τ de todas as partes $A = \cup B_\lambda$ de X, que se exprimem como uma reunião de conjuntos $B_\lambda \in \mathcal{B}$, e mais o conjunto vazio $\varnothing$. Em virtude do item 1, a reunião de todos os $B \in \mathcal{B}$ é X, logo, $X \in \tau$. Pela própria definição de τ, é claro que a reunião de uma família qualquer de elementos de τ ainda pertence a τ. Finalmente, se $A = \cup B_\lambda$ e $A' = \cup B_\mu$ pertencem a τ, então $A \cap A' = \cup(B_\lambda \cap B_\mu)$. Ora, a propriedade 2 diz que cada $B_\lambda \cap B_\mu$ é reunião de conjuntos pertencentes a $\mathcal{B}$. Logo, $A \cap A'$ é reunião de conjuntos pertencentes a $\mathcal{B}$, assim, verifica-se que τ é uma topologia em X, que admite $\mathcal{B}$ como base. ■

Seja L um conjunto de índices e $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de espaço topológicos com índices em L. Consideremos o conjunto $X = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$, produto cartesiano dos X_λ. Os elementos de X são todas as sequências $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ tais que, para cada $\lambda \in L$, $x_\lambda \in X_\lambda$.

No produto cartesiano $X = \prod X_\lambda$, destamcam-se as projeções canônicas. Cada projeção é uma aplicação de X sobre X_λ, $p_\lambda : X \to X_\lambda$, definida por $p_\lambda(x) = x_\lambda = \lambda$-ésima coordenade de x.

É natural tentar introduzir uma topologia no produto cartesiano $X = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$. O mínimo que se pode esperar de uma tal topologia é que ela torne as projeções $p_\lambda : X \to X_\lambda$ contínuas.

Definição 1.3.3. *Seja $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de espaço topológicos. A topologia menos fina no produto cartesiano $X = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ que torna contínuas todas as projeções $p_\lambda : X \to X_\lambda$ é a que tem uma base formada pelos abertos ele-*

mentares

$$p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_k}^{-1}(U_{\lambda_k}) = U_{\lambda_1} \times \cdots \times U_{\lambda_k} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda$$

onde cada $U_{\lambda_i} \subseteq X_{\lambda_i}$ *é aberto. Esta é a chamanda topologia produto.*

Proposição 1.3.4. *(Teorema de Tychonoff). O produto cartesiano arbitrário de espaços compactos é compacto na topologia produto.*

Demonstração: Ver [6], pg 234.

Definição 1.3.5. *Seja* X *um espaço topológico compacto. Se os conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados formarem uma base para a topologia então* X *é totalmente desconexo.*

Definição 1.3.6. *Um espaço topológico* X *é dito ser* σ *-compacto se* X *é a união enumerável de subconjuntos compactos de* X*.*

Definição 1.3.7. *Seja* X *um espaço topológico. Dizemos que* X *é:*

1. *Hausdorff se para todos* $x, y \in X$, $x \neq y$, *existem* $U, V \subseteq X$ *abertos tais que* $U \cap V = \varnothing$ *e* $x \in U$ *e* $y \in V$.

2. *Normal se para todos F, G fechados disjuntos em X, existem U, V abertos disjuntos em X, tais que $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$.*

Proposição 1.3.8. *Todo espaço de Hausdorff compacto é normal.*

Demonstração: Ver [6], pg 202.

Teorema 1.3.9. *(Teorema da Metrização de Urysohn). Todo espaço normal X com uma base enumerável é metrizável.*

Demonstração: Ver [5], pg 233.

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função definida em um espaço topológico X, definimos o suporte como:

$$supp(f) = \overline{\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}}.$$

Observe que o suporte, por definição, é sempre um subconjunto fechado.

Definição 1.3.10. *Seja $\{U_1, \cdots, U_n\}$ uma família finita de abertos cobrindo o espaço topológico X. Uma família de funções contínuas*

$$\phi_i : X \to [0,1], \quad para\ i = 1, \cdots, n,$$

é dita ser uma partição da unidade subordinada por $\{U_i\}_{i=1}^n$ se:

(i) $supp(\phi_i) \subseteq U_i$ *para cada* i.

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ *para cada* x.

Teorema 1.3.11. *(Existência da partição da unidade finita). Seja* $\{U_1, \cdots, U_n\}$ *uma família finita de abertos cobrindo o espaço normal* X. *Então existe uma partição da unidade subordinada por* $\{U_i\}_{i=1}^{n}$.

Demonstração: Ver [6], pg 225.

2 *Relação Étale*

No início deste capítulo vamos definir grupóides, e vamos ver, em especial, de que maneira cada relação de equivalência define automaticamente um grupóide. O principal objetivo é determinar quando uma topologia em uma relação de equivalência em um espaço de Hausdorff localmente compacto é uma *topologia étale*. E para finalizar, na seção 2.3, apresentamos alguns exemplos simples de relações de equivalência étale.

2.1 Grupóides

A noção de um grupóide foi introduzida pela primeira vez e nomeada por H. Brandt em 1927. Uma maneira elegante de especificar um grupóide é defini-lo como a menor categoria com inversos. Em termos de álgebra, um grupóide intuitivamente pode ser considerado como um conjunto com uma multiplicação parcialmente definida para a qual as propriedades usuais de um grupo mantenham-se sempre que elas fazem sentido. Naturalmente, cada grupo é um grupóide, mas há uma grande variedade de grupóides que não são grupos. Por exemplo, uma relação de equivalência R em um conjunto X definida no Exemplo 2.2.

Definição 2.1.1. *Um grupóide é um conjunto G com uma aplicação produto*

$$(x, y) \mapsto xy \ : \ G^{(2)} \to G$$

onde G^2 é um subconjunto de $G \times G$, chamado o conjunto dos pares combináveis, e uma aplicação inverso

$$x \mapsto x^{-1} \ : \ G \to G$$

que satisfazem as seguintes condições:

(i) $(x^{-1})^{-1} = x$;

(ii) se (x, y) e (y, z) pertencem a G^2, então (xy, z) e (x, yz) pertencem a G^2 com $(xy)z = x(yz)$;

(iii) (x, x^{-1}) e (x^{-1}, x) pertencem sempre a G^2 para todo $x \in G$, com $x^{-1}(xy) = y$ e $(zx)x^{-1} = z$ sempre que (x, y) e (z, x) pertencem a G^2.

Note que se (x, y) pertence a G^2 não é necessariamente verdade que (y, x) pertence a G^2. Basicamente um grupóide é um conjunto com inverso e um produto associativo parcialmente definido.

Definição 2.1.2. *Dado um grupóide G podemos definir duas aplicações, chamadas as aplicações range e source, dadas respectivamente por:*

$$r : G \to G \text{ definida por } r(x) = xx^{-1}$$

$$s : G \to G \text{ definida por } s(x) = x^{-1}x.$$

Segue facilmente da definição que r e s tem imagem comum, chamado o *espaço unitário* de G, que é denotado por G^0. Seus elementos são unitários no sentido que $xs(x) = r(x)x = x$.

Um grupóide G é dito ser *principal* se a aplicação (r, s) de G em $G^0 \times G^0$, definida por $x \mapsto (r(x), s(x))$, é injetiva, e é dito ser *transitivo* se a aplicação (r, s) é sobrejetiva.

Lema 2.1.3. *Seja G um grupóide.*

1. $G^0 = \{x \in G \ : \ x = x^{-1}\}$.

2. $G^2 = \{(x, y) \in G \times G \ : \ s(x) = r(y)\}$.

Demonstração:

1. $(\subseteq)$ Se $x \in G^0$ então existe $y \in G$ tal que $x = yy^{-1}$, logo $x^{-1} = (yy^{-1})^{-1} = yy^{-1} = x$.

   $(\supseteq)$ Seja $x \in G$ tal que $x = x^{-1}$. Suponha que não existe $y \in G$ tal que $x = yy^{-1}$, ou seja, $x \neq yy^{-1}$

para todo $y \in G$. Então $x^{-1} \neq (yy^{-1})^{-1} = yy^{-1} = x$, implica que $x^{-1} \neq x$. Absurdo! Portanto existe $y \in G$ tal que $x = yy^{-1}$ e $x \in G^0$.

2. $(\subseteq)$ Se $(x, y) \in G^2$ então (x^{-1}, x) e $(y, y^{-1}) \in G^2$ por (iii). Segue por (ii) que $(x^{-1}, xy), (xy, y^{-1}) \in G^2$ e que $(x^{-1}(xy))y^{-1} = x^{-1}((xy)y^{-1})$. Portanto por (iii), $yy^{-1} = x^{-1}x$, ou seja, $r(y) = s(x)$.

3. $(\supseteq)$ Seja $(x, y) \in G \times G$ tal que $s(x) = r(y)$. Então $(x^{-1}x)^{-1} = yy^{-1}$ e $(x^{-1}x, yy^{-1}) \in G^2$ por (iii). Além disso, por (ii)

$$\begin{cases} (x, x^{-1}), (x^{-1}, x) \in G^2 \\ (y, y^{-1}), (y^{-1}, y) \in G^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x, x^{-1}x) \in G^2 \\ (yy^{-1}, y) \in G^2. \end{cases}$$

Segue que,

$$\begin{cases} (x, x^{-1}x), (x^{-1}x, yy^{-1}) \in G^2 \\ (x^{-1}x, yy^{-1}), (yy^{-1}, y) \in G^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x, x^{-1}xyy^{-1}) \in G^2 \\ (x^{-1}xyy^{-1}, y) \in G^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (x, (x^{-1}xyy^{-1})y) \in G^2.$$

Mas, $(x, (x^{-1}xyy^{-1})y) = (x, (x^{-1}x(yy^{-1})y) = (x, y)$. Portanto $(x, y) \in G^2$. ■

Exemplo 2.1. Se G é um grupo então G satisfaz as condições de um grupóide e o conjunto dos pares combináveis G^2 é $G \times G$. O espaço unitário G^0, é justamente $\{e\}$, onde $e \in G$ é a unidade do grupo.

O próximo exemplo é o nosso objeto de estudo.

Exemplo 2.2. Seja X um conjunto qualquer. Então uma relação de equivalência R sobre X tem uma estrutura de um grupóide principal.

Demonstração: Note que $R \subseteq X \times X$. Denotamos um elemento de R por (x, y). Definimos o conjunto R^2 dos pares combináveis por

$$R^2 = \{((x, y), (y', z)) \in R \times R \ : \ y = y'\}.$$

E definimos a aplicação produto por

$$(x, y)(y, z) := (x, z),$$

e a aplicação inverso por

$$(x, y)^{-1} := (y, x).$$

Note que as aplicações produto e inverso estão bem definidas devido à transitividade e simetria da relação de equivalência, respectivamente. Temos o seguinte:

(i) $((x, y)^{-1})^{-1} = (y, x)^{-1} = (x, y)$;

(ii) Se $((x, y), (y, z)), ((y, z), (z, w)) \in R^2$ então $((x, z), (z, w))$, $((x, y), (y, w)) \in R^2$ e $((x, y)(y, z))(z, w) = (x, w) = (x, y)((y, z)(z, w))$;

(iii) $((x,y),(x,y)^{-1}),((x,y)^{-1},(x,y)) \in R^2$ pois $(x,y)^{-1} = (y,x)$. Além disso, se $((x,y),(y,z)),((w,x),(x,y)) \in R^2$ então $(x,y)^{-1}((x,y)(y,z)) = (y,z)$ e $((w,x)(x,y))(x,y)^{-1} = (w,x)$.

Portanto R tem estrutura de grupóide.

Agora, pode-se ver que $r(x,y) = (x,x)$ e $s(x,y) = (y,y)$. Então o espaço unitário R^0 é a diagonal $\triangle_X = \{(x,x) : x \in X\}$, que pode ser identificada com X.

Em seguida, mostramos que R é um grupóide principal: Sejam $(x,y),(z,w) \in R$ tal que $(r,s)(x,y) = (r,s)(z,w)$. Isto significa que $((x,x),(y,y)) = ((z,z),(w,w)) \in R^0 \times R^0$, ou $(x,y) = (z,w)$ em $X \times X$, o que implica que $(x,y) = (z,w)$ em R, pois R é um subconjunto de $X \times X$. Portanto (r,s) é injetiva e assim R é um grupóide principal. ∎

Definição 2.1.4. *Um grupóide topológico consiste de um grupóide G e uma topologia compatível com a estrutura do grupóide, isto é:*

(i) a aplicação $x \mapsto x^{-1} : G \to G$ é contínua

(ii) a aplicação $(x,y) \mapsto xy : G^2 \to G$ é contínua, onde G^2 tem a topologia induzida de $G \times G$.

Proposição 2.1.5. *Seja G um grupóide topológico.*

1. A aplicação $x \mapsto x^{-1}$ é um homeomorfismo.

2. *As aplicações range e source são contínuas.*

3. *Se G é Hausdorff então G^0 é fechado.*

4. *Se G^0 é Hausdorff então G^2 é fechado em $G \times G$.*

Demonstração:

1. Consequência direta da definição.

2. A aplicação *range* é contínua uma vez que é a composição, $x \mapsto (x, x^{-1}) \mapsto xx^{-1}$, de aplicações contínuas. Analogamente para a aplicação *source*.

3. É conhecido que se G é Hausdorff então a diagonal $\triangle_G$ é fechada em $G \times G$. Definimos a aplicação $\psi : G \to G \times G$ por $\psi(x) = (x, x^{-1})$. Segue que $\psi^{-1}(\triangle_G) = \{x \in G \ : \ x = x^{-1}\}$ é fechado em G pela continuidade de ψ. Mas $\psi^{-1}(\triangle_G)$ é justamente G^0, e então G^0 é fechado em G.

4. Se G^0 é Hausdorff então a diagonal $\triangle_{G^0} = \{(u, u) \ : \ u \in G^0\}$ é fechada em $G^0 \times G^0$. Como a aplicação $(s \times r) : G \times G \to G^0 \times G^0$, $(x, y) \mapsto (s(x), r(y))$ é contínua e $\triangle_{G^0}$ é fechado em $G^0 \times G^0$, segue que $(s \times r)^{-1}(\triangle_{G^0}) = \{(x, y) \in G \times G \ : \ s(x) = r(y)\} = G^2$ é fechado em $G \times G$. ∎

Definição 2.1.6. *Um grupóide localmente compacto G é étale se seu espaço unitário G^0 é um subconjunto aberto.*

2.2 Relação de Equivalência Étale

Nesta seção vamos definir quando uma topologia é étale. Para isto fixamos algumas notações. Denotamos por X um espaço de Hausdorff localmente compacto e por R uma relação de equivalência em X com a estrutura de grupóide do Exemplo 2.2. Além disso, se U e V são subconjuntos de R, definimos:

$$UV = \{(x, z) \,:\, \text{existem } y \in X \text{ tal que } (x, y) \in U, (y, z) \in V\}$$

$$\text{e } U^{-1} = \{(x, y) \;:\; (y, x) \in U\}.$$

Uma vez que podemos identificar o espaço unitário R^0 com X, simplificamos as aplicações *range* e *source* para $r(x, y) = x$ e $s(x, y) = y$. Vamos ver que estas aplicações têm um papel fundamental na topologia étale, podemos até dizer que elas “andam de mãos dadas com a relação de equivalência étale".

Definição 2.2.1. *Seja R uma relação de equivalência em um espaço Hausdorff localmente compacto X. Dizemos que a topologia τ em R é uma topologia étale para R se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) (R, τ) é σ - compacto;

(ii) todo ponto (x_0, y_0) em R tem uma vizinhança aberta

U em (R, τ) tal que $r(U)$ e $s(U)$ são abertos em X e $r : U \to r(U)$ e $s : U \to s(U)$ são homeomorfismos, ou seja, r e s são homeomorfismos locais;

(iii) se U e V são conjuntos abertos em (R, τ), então UV é aberto em (R, τ);

(iv) se U é um conjunto aberto em (R, τ), então U^{-1} é aberto em (R, τ).

Neste caso dizemos que (R, τ) é uma relação de equivalência étale em X.

Note que os itens (iii) e (iv) asseguram que R seja um grupóide topológico, ou seja, o produto $((x, y)(y, z)) \mapsto (x, z) : R^2 \to R$ e a inversão $(x, y) \mapsto (y, x) : R \to R$ são aplicações contínuas. Destas continuidades segue que se U e V são conjuntos compactos em (R, τ) então UV, U^{-1} são compactos em (R, τ).

Agora, se (R, τ) já é um grupóide topológico então os itens (iii) e (iv) são redundantes na Definição 2.2.1. Realmente, temos que a aplicação inverso vai de R em R. Seja U um subconjunto aberto no contra-domínio da aplicação inverso, então U^{-1} é a pré-imagem de U pela aplicação inverso. Por hipótese esta aplicação é contínua, portanto U^{-1} é aberto em (R, τ).

Seja $((x, y), (y, z)) \in (U \times V) \cap R^2$. Então $(x, z) \in UV$. Pela Definição 2.2.1 item (ii), existe um subconjunto $W \subseteq R$

tal que W é uma vizinhança aberta de (x, z), $r(W)$ é uma vizinhança aberta de x e $r : W \to r(W)$ é um homeomorfismo.
Pela continuidade do produto em R, existem vizinhanças aberta A de (x, y) e B de (y, z) tal que $AB \subseteq W$. Podemos supor que $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$ (tal que r e s são homeomorfismo em A e B). Também podemos supor que $A \subseteq s^{-1}(r(B))$. Então $r(AB) = r(A)$ é uma vizinhança de $r((x, z)) \subseteq r(W)$. Uma vez que $r : W \to r(W)$ é um homeomorfismo, temos que $AB = r^{-1}(r(AB)) \cap W$ é uma vizinhança aberta de (x, z) em UV. Então UV é aberto.

Como redefinimos as aplicações *range* e *source* simplesmente como as projeções na primeira e segunda coordenada, respectivamente, não podemos concluir diretamente que estas aplicações são contínuas pelo item (ii) da Proposição 2.1.5. A próxima proposição prova isto.

Proposição 2.2.2. *Seja R uma relação étale então as aplicações range e source são contínuas.*

Demonstração: Vamos provar que a aplicação r é contínua, analogamente prova-se que s é contínua. Podemos cobrir R por conjuntos satisfazendo o item (ii) da Definição 2.2.1, digamos $R = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Seja $V \subseteq X$ aberto. Então

$$r^{-1}(V) \cap U_\lambda = \left(r|_{U_\lambda}\right)^{-1}(V) = \left(r|_{U_\lambda}\right)^{-1}(V \cap r(U_\lambda)),$$

ambas as expressões representam o conjuntos dos pontos (x, y) contidos em U_λ para qual $r(x, y) \in V$. Uma vez que $r|_{U_\lambda}$ é contínua, este conjunto é aberto em U_λ, e assim aberto em X. Mas

$$r^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (r^{-1}(V) \cap U_\lambda),$$

e então $r^{-1}(V)$ é também aberto em X. Portanto r é contínua. ■

Notação: Para uma relação de equivalência R e $x \in X$, a classe de equivalência de x, denotada por $[x]$, é definida por

$$[x] = \{y \in X \ : \ (x, y) \in R\}.$$

Proposição 2.2.3. *Seja R uma relação de equivalência étale. Então:*

1. *R é Hausdorff localmente compacto.*

2. *A diagonal $\triangle = \{(x, x) \ : \ x \in X\}$ é aberta e fechada em (R, τ).*

3. *A diagonal $\triangle$ e X são homeomorfos.*

4. *Se K é um subconjunto compacto de R e $x \in X$, então $r^{-1}\{x\} \cap K$ e $s^{-1}\{x\} \cap K$ são ambos finitos.*

5. *$r^{-1}\{x\}$ e $s^{-1}\{x\}$, e portanto a classe de equivalência de x, $[x]$, são enumeráveis para todo $x \in X$.*

Demonstração:

1. Sejam $(x,y), (z,w) \in R$ com $(x,y) \neq (z,w)$. Então $x \neq z$ ou $y \neq w$. Suponha que $x \neq z$. Então existem vizinhanças abertas U e V de x e z, respectivamente, tal que $U, V \subseteq X$ e $U \cap V = \varnothing$. Segue que $r^{-1}(U)$ e $r^{-1}(V)$ são vizinhanças abertas de (x,y) e (z,w), respectivamente, e $r^{-1}(U) \cap r^{-1}(V) = \varnothing$. De fato, se existe $(a,b) \in r^{-1}(U) \cap r^{-1}(V)$ então $a \in U$ e $a \in V$, ou seja, $a \in U \cap V$, absurdo. Portanto R é Hausdorff.

   Agora, seja $(x,y) \in R$. Uma vez que R é étale, existe uma vizinhança U de (x,y) tal que a aplicação range $r : U \to r(U)$ é um homeomorfismo. Como $r(x,y) = x$ e X é localmente compacto existe um conjunto aberto $A \subseteq X$ tal que $x \in A$ e $\overline{A}$ é compacto. Então $r(U) \cap A$ é aberto e $\overline{r(U) \cap A}$ é compacto e implica que $r^{-1}(r(U) \cap A)$ é a vizinhança de (x,y) como queríamos.

2. Pela Proposição 2.2.2, temos que r é uma aplicação contínua, então $r|_{\triangle}$ também é uma aplicação contínua. Portanto $\triangle = (r|_{\triangle})^{-1}(X)$ é aberta em (R, τ).

   Se $(x,y) \in R \setminus \triangle$ então $x \neq y$. Pelo item 1, existem vizinhanças abertas U e V de x e y, respectivamente, tais que $U \cap V = \varnothing$. Então $(U \times V) \cap \triangle = \varnothing$, ou seja, $U \times V \subseteq R \setminus \triangle$ e assim $R \setminus \triangle$ é aberto e portanto $\triangle$ é fechado.

3. O homeomorfismo entre a diagonal $\triangle$ e X se dá via a aplicação *range* (ou *source*).

4. Podemos cobrir K por conjuntos abertos em torno de cada ponto $(x, y) \in K$ de maneira que r é um homeomorfismo (pela Definição 2.2.1 item (ii)). Como K é compacto existe uma subcobertura finita, digamos $U_1, \cdots, U_n$. Seja $x \in X$. Se $(x, y) \in K \cap r^{-1}\{x\}$ para algum y, então $(x, y) \in U_i$ para algum i e $r(x, y) = x$. Uma vez que r é um homeomorfismo em U_i, em particular r é injetiva, e (x, y) é o único ponto de $U_i \cap r^{-1}\{x\}$. Então $K \cap r^{-1}\{x\}$ tem no máximo n elementos e portanto é finito.

5. Como R é σ- compacto, existe uma sequência enumerável de conjuntos compactos K_n tal que $R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Então

   $$r^{-1}\{x\} = r^{-1}\{x\} \cap R = \bigcup_{n\in N} r^{-1}\{x\} \cap K_n.$$

   Pelo item 4, $r^{-1}\{x\} \cap K_n$ é finito, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $r^{-1}\{x\}$ é enumerável.

   De forma análoga prova-se que $s^{-1}\{x\}$ é enumerável. E para $[x]$, basta observar que $[x] = s(r^{-1}(x))$. ■

Observe que se $(x, y) \in R$ então existem vizinhanças V_x de x e V_y de y em X, e um homeomorfismo $\gamma : V_x \to V_y$

tal que $\gamma(x) = y$ e

$$\{(z, \gamma(z)) \ : \ z \in V_x\} \subseteq R$$

é pré-compacto, isto é, seu fecho é compacto. De fato, se $(x, y) \in R$, existe uma vizinhança U de (x, y) tal que as aplicações $r : U \to r(U)$ e $s : U \to s(U)$ são homeomorfismos. Então basta tomar $V_x = r(U)$, $V_y = s(U)$ com $\gamma = s|_U \circ (r|_U)^{-1}$. Além do mais, o γ acima é único. Isso significa que R é composto por gráficos de "homeomorfismos locais" de X.

2.3 Exemplos

Exemplo 2.3. Seja X um conjunto enumerável com a topologia discreta. Então $R = X \times X$ com a topologia discreta é a relação de equivalência étale "trivial".

Se $(x, y) \in R$ então $\{(x, y)\}$ é um subconjunto aberto e compacto em R. Segue que:

$R = \bigcup_{x,y \in X} \{(x, y)\}$ é σ - compacto;

As aplicações *range* $r : \{(x, y)\} \to \{x\}$ e *source* $s : \{(x, y)\} \to \{y\}$ são homeomorfismos.

Exemplo 2.4. Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto e σ - compacto. Então $R = \triangle$ com a topologia relativa de $X \times X$ é a relação de equivalência étale "co-trivial".

É imediato, uma vez que $\triangle$ e X são homeomorfos.

Exemplo 2.5. Sejam R e S relações de equivalência étale em X e Y, respectivamente. Então a união disjunta $R\dot{\cup}S$ determina um relação de equivalência étale na união disjunta $X\dot{\cup}Y$.

Sejam $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{L_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ famílias enumeráveis de subconjuntos compactos de R e S, respectivamente, tais que $R = \bigcup_n K_n$ e $S = \bigcup_m L_m$. Segue que $\{K_n, L_m\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ é uma família enumerável de subconjuntos compactos de $R\dot{\cup}S$ tal que $R\dot{\cup}S = (\bigcup_n K_n)\dot{\bigcup}(\bigcup_m L_m)$, ou seja, $R\dot{\cup}S$ é σ - compacto.

Se $(x, y) \in R\dot{\cup}S$ então $(x, y) \in R$ ou $(x, y) \in S$. Suponhamos que $(x, y) \in R$. Então existe uma vizinhança aberta U de (x, y) contida em R tal que $r(U)$ e $s(U)$ são abertos em R e as aplicações $r : U \to r(U)$ e $s : U \to s(U)$ são homeomorfismos. Mas, note que U é aberto em $R\dot{\cup}S$ e $r(U)$ e $s(U)$ são abertos em $X\dot{\cup}Y$, portanto r e s são também homeomorfismo locais de $R\dot{\cup}S$. Procedemos de forma análoga se $(x, y) \in S$.

Exemplo 2.6. Seja $X = [0, 1] \cup [2, 3] \subseteq \mathbb{R}$. Então $R = \triangle \cup \{(x, x + 2), (x + 2, x) \ : \ 0 \leq x < 1\}$ com a topologia relativa de $X \times X$ é uma relação étale.

Para cada $n \geq 2$ inteiro, denotamos por $D_n((\frac{1}{2}, \frac{5}{2}), \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n})$, uma bola fechada em $\mathbb{R}^2$ de centro $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ e raio $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n}$. Observe que, para cada $n \geq 2$ inteiro, $D_n((\frac{1}{2}, \frac{5}{2}), \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n}) \cap R$ é um subconjunto compacto de R, e que $D((\frac{1}{2}, \frac{5}{2}), \frac{1}{\sqrt{2}}) \cap R =$

$\bigcup_{n=2}^{\infty} D_n((\frac{1}{2}, \frac{5}{2}), \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n}) \cap R$. Logo, $D((\frac{1}{2}, \frac{5}{2}), \frac{1}{\sqrt{2}}) \cap R$ é σ - compacto. Procedendo da mesma forma, para $n \geq 2$, os subconjuntos $D_n((\frac{5}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n}) \cap R$ são compactos em R e $D((\frac{5}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{\sqrt{2}}) \cap R = \bigcup_{n=2}^{\infty} D_n((\frac{5}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n}) \cap R$ é σ - compacto. Além do mais, a diagonal $\triangle = (([0,1] \times [2,3]) \cup ([2,3] \times [2,3])) \cap R$ é compacta em R. Portanto
$R = \triangle \cup \Big(D((\frac{1}{2}, \frac{5}{2}), \frac{1}{\sqrt{2}}) \cap R\Big) \cup \Big(D((\frac{5}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{\sqrt{2}}) \cap R\Big)$ é σ - compacto.

Denotamos uma bola aberta em $\mathbb{R}^2$ de centro (x, y) e raio r por $B((x, y), r)$. Seja $(x, y) \in R$. Então $U = B((x, y), \frac{1}{2}) \cap R$ é um conjunto aberto de R que contém (x, y) e tal que a aplicação *range* r é um homeomorfismo de U sobre $r(U) = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) \cap X$, que é aberto em X. E a aplicação *source* s é um homeomorfismo de U sobre $s(U) = (y - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}) \cap X$, que é aberto em X.

Exemplo 2.7. Nem toda relação de equivalência é uma relação étale. Por exemplo, seja $X = [0, 1] \cup [2, 3] \subseteq \mathbb{R}$. Então $R = \triangle \cup \{(1, 3), (3, 1)\}$ com a topologia relativa de $X \times X$ não é uma relação étale.

Temos que o conjunto $\{(1, 3)\}$ é a menor vizinhaça aberta que contém $(1, 3) \in R$. Mas $r\{(1, 3)\} = \{1\}$ que é uma vizinhança não aberta de $1 \in X$.

Exemplo 2.8. Sejam X um espaço de Hausdorff compacto e Y um conjunto finito e discreto. Então a relação de equivalência R definida por

$$R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in X \times Y \times X \times Y \,:\, x_1 = x_2\}$$

com a topologia produto é uma relação étale.

Para qualquer $y_i, y_j \in Y$ o conjunto $\{((x, y_i), (x, y_j)) \,:\, x \in X\}$ é compacto em R e assim $R = \bigcup_{y_i, y_j} \{(x, y_i), (x, y_j) \,:\, x \in X\}$ e assim σ - compacto.

E para finalizar, se $((x, y_1), (x, y_2)) \in R$ então $U = \{((x, y_1), (x, y_2)) \,:\, x \in X\}$ é um subconjunto aberto em R que contém $((x, y_1), (x, y_2))$ e a aplicação s de U em $s(U) = \{(x, y_2) \,:\, x \in X\}$, que é aberto em $X \times Y$, é um homeomorfismo. Analogamente, r de U em $r(U) = \{(x, y_1) \,:\, x \in X\}$ é um homeomorfismo.

3 C^*- álgebras de uma Relação Étale

O objetivo deste capítulo é construir duas C^*- álgebras associadas a uma relação de equivalência étale R, a C^*-álgebra cheia, $C^*(R)$, e a C^*- álgebra reduzida, $C_r^*(R)$. A construção é uma aplicação da teoria introduzida por J. Renault em [11], *A Groupoid Approach to C*-Algebras.* Para isto, dotaremos o espaço $C_c(R)$, das funções contínuas com suporte compacto em R, com a topologia limite indutivo, com a multiplicação de convolução, com uma involução e uma norma, tornando-o uma $*$ - álgebra. A partir daí, na segunda seção, definiremos a C^* - norma cheia em $C_c(R)$ e na terceira seção, a C^* - norma reduzida.

Seja $f : X \to \mathbb{C}$ uma função definida em um espaço topológico X, definimos o suporte como:

$$supp(f) = \overline{\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}}.$$

Uma função é dita ter suporte compacto se o suporte for compacto.

Dada uma relação étale R, pode-se definir o espaço $C_c(R)$ das funções contínuas em R com suporte compacto, isto é: $C_c(R) = \{f \in C(R) : \exists K \subseteq R, K \text{ compacto, tal que } f \equiv 0 \text{ fora de } K\}$. Então, $C_c(R)$ é um espaço vetorial com operações definidas por:

$$(kf+g)(x,y) = kf(x,y) + g(x,y)$$

para todo $f, g \in C_c(R)$, $(x,y) \in R$, $k \in \mathbb{C}$.

Agora, definimos o produto de convolução $*$ e a involução * em $C_c(R)$ por:

$$f * g(x,z) = \sum_{y \in [x]} f(x,y)g(y,z), \tag{3.1}$$

$$f^*(x,y) = \overline{f(x,y)}. \tag{3.2}$$

Observação 3.0.1. *A soma definida no produto é realmente uma soma finita. Uma vez que f tem suporte compacto, digamos K, pela Proposição 2.2.3 item 4, $r^{-1}\{x\} \cap K$ é finito. Então*

$$\begin{aligned}\infty > \#\{(x,y) \in R \,:\, y \in [x]\} \cap K &= \#\{(x,y) \in K \,:\, y \in [x]\} \\ &\geq \#\{f(x,y) \neq 0 \,:\, y \in [x]\}.\end{aligned}$$

Com estas operações, $C_c(R)$ torna-se uma $*$ - álgebra. Para isto precisamos verificar o seguinte: $(\forall f, g, h \in C_c(R))$

1. A álgebra é fechada para o produto, i.e., $f*g \in C_c(R)$.

2. A equação (3.1) define realmente um produto.

3. A álgebra é fechada para a involução, i.e., $f^* \in C_c(R)$.

4. A equação (3.2) define realmente uma involução.

Vamos ao trabalho!

1. Note que $supp\,(f*g) \subseteq KL$, onde K e L são suportes compactos de f e g, respectivamente. Portanto $f*g$ tem suporte compacto.

Vamos provar que $f*g$ é contínua. Começamos assumindo que $supp\,(f) \subseteq U$ e $supp\,(g) \subseteq V$, onde U e V são conjuntos abertos satisfazendo o item (ii) da Definição 2.2.1. Então para qualquer ponto $(x,z) \in R$,

$$\begin{aligned} f*g(x,z) &= \sum_{y\in[x]} f(x,y)g(y,z) \\ &= \begin{cases} \sum_{y\in[x]} f(x,y)g(y,z) & \text{se}\, x \in r(U) \text{ e } z \in s(V) \\ 0 & \text{se}\, x \notin r(U) \text{ ou } z \notin s(V). \end{cases} \end{aligned}$$

Se $x \in r(U)$ então existe um único y tal que $(x,y) \in U$. De fato, suponha que existem y, z tal que (x,y) e $(x,z) \in U$. Então $r(x,y) = x = r(x,z)$, mas r é injetiva em U, logo $y = z$. Da mesma forma, se $z \in s(V)$ existe um único y' tal que $(y',z) \in V$. Além do mais, pela definição do produto acima, se $y \neq y'$ então $f * g(x,z) = 0$. Portanto, se o produto é não-zero podemos assumir que existe um único y tal que

$$f * g(x,z) = f(x,y)g(y,z).$$

Podemos escrever, $(x,y) = r^{-1}|_U \circ s(z,x)$ e $(y,z) = s^{-1}|_V \circ r(z,x)$, assim

$$\begin{aligned} f * g(x,z) &= f(r^{-1}|_U \circ s(z,x))g(s^{-1}|_V \circ r(z,x)) \\ &= (f \circ r^{-1}|_U \circ s)(z,x)(g \circ s^{-1}|_V \circ r)(z,x) \end{aligned}$$

que é contínua uma vez que é o produto pontual e uma composição de funções contínuas num mesmo elemento (z,x).

Para o caso geral, temos que f e g têm suporte compacto, suponha K_f e K_g. Podemos cobrir seus respectivos suportes com conjuntos abertos satisfazendo o item (ii) da Definição 2.2.1. Além disso, podemos extrair uma subcobertura finita desses conjuntos, digamos $K_f \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} U_i$ e $K_g \subseteq \bigcup_{j=1}^{M} V_j$. Pelo Teorema 1.3.11 existe uma partição da unidade subordinada por $\{U_i\}_{i=1}^{N}$, ou seja, uma família de funções contínuas $\phi_i : K_f \to [0,1]$, para $i = 1, \cdots, N$, tal que $supp\,(\phi_i) \subseteq U_i$ para todo i e $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \phi_i(x,y) = 1$ para todo $(x,y) \in K_f$.

Para cada $(x,y) \in R$, $f(x,y) = f(x,y)\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \phi_i(x,y) = \sum_{i=1}^{N} f(x,y)\phi_i(x,y)$. Definindo $f_i(x,y) := f(x,y)\phi_i(x,y)$, podemos escrever $f(x,y) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x,y)$ para cada $(x,y) \in R$, com $supp\,(f_i) \subseteq U_i$ para cada i. Da mesma maneira, podemos escrever $g(y,z) = \sum_{j=1}^{M} g_j(y,z)$ para cada $(y,z) \in R$ com $supp\,(g_j) \subseteq V_j$ para cada j.

Pela parte inicial, $f_i * g_j$ é continua para cada i e j, e segue que $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f_i * g_j$ também é contínua. Temos que,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f_i * g_j(x,z) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(\sum_{y\in[x]} f_i(x,y)g_j(y,z)\right)\\ &= \sum_{y\in[x]}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f_i(x,y)g_j(y,z), \qquad (3.3)\end{aligned}$$

a troca de ordem é justificada pela Observação 3.0.1. Por outro lado,

$$\begin{aligned}f * g(x,z) &= \sum_{y\in[x]} f(x,y)g(y,z)\\ &= \sum_{y\in[x]}\left(\left(\sum_{i=1}^{N} f_i(x,y)\right)\left(\sum_{j=1}^{M} g_j(y,z)\right)\right)\\ &= \sum_{y\in[x]}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f_i(x,y)g_j(y,z) \overset{(3.3)}{=} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f_i * g_j(x,z),\end{aligned}$$

que é contínua. Portanto $f * g \in C_c(R)$.

2. A equação (3.1) define um produto.
Dados $f, g, h \in C_c(R)$ e $k \in \mathbb{C}$ temos que,

$$
\begin{aligned}
((f*g)*h)(x,z) &= \sum_{y\in[x]} f*g(x,y)h(y,z)\\
&= \sum_{y\in[x]}\left(\sum_{z'\in[x]} f(x,z')g(z',y)\right)h(y,z)\\
&= \sum_{y\in[x]}\sum_{z'\in[x]} f(x,z')g(z',y)h(y,z)\\
&\overset{(\star)}{=} \sum_{z'\in[x]} f(x,z')\left(\sum_{y\in[x]} g(z',y)h(y,z)\right)\\
&= \sum_{z'\in[x]} f(x,z')(g*h)(z',z) = f*(g*h(x,z)),
\end{aligned}
$$

pela Observação 3.0.1 as somas são finitas, assim a troca da ordem em $(\star)$ é justificada. Então $(f*g)*h) = f*(g*h)$.

$$
\begin{aligned}
((f+g)*h)(x,z) &= \sum_{y\in[x]} (f+g)(x,y)h(y,z)\\
&= \sum_{y\in[x]} (f(x,y)+g(x,y))h(y,z)\\
&= \sum_{y\in[x]} f(x,y)h(y,z)+g(x,y)h(y,z)\\
&\overset{(\star)}{=} \sum_{y\in[x]} f(x,y)h(y,z)+\sum_{y\in[x]} g(x,y)h(y,z))\\
&= (f*h)(x,z)+(g*h)(x,z)\\
&= (f*h+g*h)(x,z),
\end{aligned}
$$

a igualdade $(\star)$ é justificada pela Observação 3.0.1. Logo $(f+g)*h) = (f*h+g*h)$.

$$\begin{aligned}k(f*g)(x,z) &= k\sum_{y\in[x]} f(x,y)g(y,z) = \sum_{y\in[x]} k(f(x,y)g(y,z))\\ &= \sum_{y\in[x]}(kf)(x,y)g(y,z) = (kf)*g(x,z).\end{aligned}$$

Então $k(f*g) = (kf)*g$. Analogamente mostra-se que $k(f*g) = f*(kg)$.

3. A continuidade da "inversão" em R, da aplicação f e da "conjugação" em $\mathbb{C}$ implicam que f^* é contínua. E se K é o suporte compacto de f então o conjunto compacto K^{-1} é o suporte de f^*. Portanto $f^* \in C_c(R)$.

4. A equação (3.2) define realmente uma involução. Dados $f, g \in C_c(R)$ e $k \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned}(kf+g)^*(x,y) &= \overline{(kf+g)(y,x)} = \overline{k}\,\overline{f(y,x)} + \overline{g(y,x)}\\ &= \overline{k}f^*(x,y) + g^*(x,y).\end{aligned}$$

Logo $(kf+g)^* = \overline{k}f^* + g^*$.

$$f^{**}(x,y) = \overline{f^*(y,x)} = \overline{\overline{f(x,y)}} = f(x,y).$$

Logo $f^{**} = f$.

$$(f*g)^*(x,y) = \overline{f*g(y,x)} = \overline{\sum_{z\in[y]} f(y,z)g(z,x)}$$

$$= \sum_{z\in[y]} \overline{f(y,z)}\,\overline{g(z,x)} = \sum_{z\in[y]} f^*(z,y)g^*(x,z)$$

$$= \sum_{z\in[y]} g^*(x,z)f^*(z,y) = g^* * f^*(x,y)$$

Logo $(f * g)^* = g^* * f^*$.

Portanto $C_c(R)$ é uma $*$ - álgebra como queríamos. ■

Definição 3.0.2. *Dado um espaço de Hausdorff localmente compacto X, a topologia limite indutivo pode ser definida em $C_c(X)$ como segue. Uma sequência $\{f_n\}$ converge para f em $C_c(X)$ se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de X tal que supp$(f) \subseteq K$, supp$(\{f_n\})$ está eventualmente em K, e para N suficientemente grande, $\{f_n\}_{n\geq\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em K.*

Definição 3.0.3. *A topologia limite indutivo é definida originalmente em conjuntos Y que são limites indutivos, i.e., existe uma sequência $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de espaços topológicos, tal que $Y_n \subseteq Y_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$, e tal que $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Então um subconjunto U é definido como aberto em Y se e somente se $U \cap Y_n$ é aberto em Y_n para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Uma vez que X é localmente compacto, X pode ser aproximado por subconjuntos compactos K_n, $n \in \mathbb{N}$. Seja $Y_n = \{f \in C_c(X) \;:\; supp(f) \subseteq K_n\}$ com a norma do *sup*. Então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n = C_c(X)$.

Proposição 3.0.4. *O produto $*$ e a involução * são contínuos na topologia limite indutivo.*

Demonstração: Sejam $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sequências em $C_c(R)$. Se $f_n \to f$ e $g_m \to g$ na topologia limite indutivo, existem conjuntos compactos K e L tais que, eventualmente, $supp\,(f_n) \subseteq K$ e $supp\,(g_m) \subseteq L$. Então, eventualmente, $supp\,(f_n * g_m) \subseteq KL$. Também,

$$\begin{aligned}
&|f * g(x,y) - f_n * g_m(x,y)| \\
&\leq \sum_{z\in[x]} |f(x,z)g(z,y) - f_n(x,z)g_m(z,y)| \\
&\leq \sum_{z\in[x]} |f(x,z) - f_n(x,z)||g(z,y)| \\
&+ \sum_{z\in[x]} |f_n(x,z)||g(z,y) - g_m(z,y)| \ = (\bullet).
\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.2.3 item 4, os conjuntos $\{(x,z) \in K \, : \, z \in [x]\}$ e $\{(z,y) \in L \, : \, z \in [y]\}$ são finitos. Assim,

$$\begin{aligned}
(\bullet) = \sum_{i=1}^{M} &|f(x,z) - f_n(x,z_i)||g(z_i,y)| \\
&+ \sum_{j=1}^{N} |f_n(x,z_j)||g(z_j,y) - g_m(z_j,y)| \ = (\star).
\end{aligned}$$

Também existem $M_0, N_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|g(z_i,y)| \leq M_0$ para todo i e $|f_n(x,z_j)| \leq N_0$ para todo j e n. Então,

$$\begin{aligned}
(\star) \leq M_0 \sum_{i=1}^{M} &|f(x,z) - f_n(x,z_i)| \\
&+ N_0 \sum_{j=1}^{N} |g(z_j,y) - g_m(z_j,y)| = \ (*).
\end{aligned}$$

E por fim, dado $\varepsilon > 0$ existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que: para todo $n > N_1$, $|f(x,z_i) - f_n(x,z_i)| < \frac{\varepsilon}{2MM_0}$ e para todo $n > N_2$, $|g(z_j,y) - g_m(z_j,y)| < \frac{\varepsilon}{2NN_0}$. Logo, para todo $n > \max\{N_1, N_2\}$,

$$(*) \leq M_0 \frac{\varepsilon M}{2MM_0} + N_0 \frac{\varepsilon N}{2NN_0} = \varepsilon.$$

Portanto $f_n * g_m$ converge uniformemente para $f * g$ em KL.

Além disso, eventualmente $supp\,(f_n^*) \subseteq K^{-1}$ e

$$|f_n^*(x,y) - f^*(x,y)| = |\overline{f_n(y,x)} - \overline{f(y,x)}| = |f_n(y,x) - f(y,x)|$$

que converge uniformemente para zero em K^{-1}. ■

3.1 A C^*- álgebra cheia

A fim de obter uma C^*- álgebra associada a relação de equivalência R precisamos definir uma norma em $C_c(R)$.

Definição 3.1.1. *Para $f \in C_c(R)$ definimos:*

$$\|f\|_* = \max\{\, \|f\|_r,\ \|f\|_s \,\}.$$

onde

$$\|f\|_r = \sup_{x\in X} \sum_{(x,y)\in r^{-1}\{x\}} |f(x,y)| \ e$$

$$\|f\|_s = \sup_{y\in X} \sum_{(x,y)\in s^{-1}\{y\}} |f(x,y)|.$$

Observe que a soma usada na norma $\|\cdot\|_r$ é finita. Seja K o suporte compacto de f. Pela Proposição 2.2.3

item 4, $r^{-1}\{x\} \cap K$ é finito, digamos $\{(x, y_1), \cdots, (x, y_N)\}$ (é importante notar que N não depende de x, N é o número de subconjuntos da subcobertura finita de K de abertos que satisfazem o item (ii) da Definição 2.2.1). Então,

$$\|f\|_r = \sup_{x\in X} \sum_{(x,y)\in r^{-1}\{x\}} |f(x,y)| = \sup_{x\in X} \sum_{i=1}^{N} |f(x,y_i)|.$$

Além disso, o supremo também é finito. Sabemos que toda função contínua definida num conjunto compacto é limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $|f(x, y_i)| \leq M$ para todo $(x, y_i) \in K$. Assim,

$$\|f\|_r = \sup_{x\in X} \sum_{i=1}^{N} |f(x,y_i)| \leq \sup_{x\in X} \sum_{i=1}^{N} M \leq \sup_{x\in X} NM = NM.$$

Então $\|\cdot\|_r$ está bem definida, analogamente para $\|\cdot\|_s$ e consequentemente $\|\cdot\|_*$ está bem definida.

Proposição 3.1.2.

1. *$\|\cdot\|_*$ é uma norma em $C_c(R)$ com $\|f * g\|_* \leq \|f\|_* \|g\|_*$ para todo $f, g \in C_c(R)$.*

2. *$\|\cdot\|_*$ define uma topologia "menos fina" que a topologia limite indutivo, isto é, se uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_c(R)$ converge no limite indutivo para f então $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f na norma $\|\cdot\|_*$.*

Demonstração:

1. Não é difícil ver que $\|\cdot\|_r$, $\|\cdot\|_s$ e $\|\cdot\|_*$ são normas. Agora, dados $f, g \in C_c(R)$ temos que,

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_r &= \sup_{x\in X} \sum_{(x,y)\in r^{-1}\{x\}} |f * g(x,y)| \\
&= \sup_{x\in X} \sum_{(x,y)\in r^{-1}\{x\}} \left| \sum_{z\in[x]} f(x,z)g(z,y) \right| \\
&\leq \sup_{x\in X} \sum_{(x,y)\in r^{-1}\{x\}} \left(\sum_{z\in[x]} |f(x,z)||g(z,y)| \right) \\
&= \sup_{x\in X} \sum_{y\in[x]} \left(\sum_{z\in[x]} |f(x,z)||g(z,y)| \right) \\
&\overset{(\star)}{=} \sup_{x\in X} \left(\sum_{z\in[x]} \sum_{y\in[x]} |f(x,z)||g(x,y)| \right) \\
&= \sup_{x\in X} \left(\sum_{z\in[x]} |f(x,z)| \sum_{y\in[x]=[z]} |g(x,y)| \right) \\
&\leq \sup_{x\in X} \left(\sum_{z\in[x]} |f(x,z)| \sup_{z\in X} \sum_{y\in[z]} |g(z,y)| \right) \\
&= \left(\sup_{x\in X} \sum_{z\in[x]} |f(x,z)| \right) \left(\sup_{z\in X} \sum_{y\in[z]} |g(z,y)| \right) \\
&= \|f\|_r \|g\|_r
\end{aligned}$$

a troca de ordem em $(\star)$ é possível pois as somas são finitas pela Observação 3.0.1. Da mesma maneira, $\|f * g\|_s \leq \|f\|_s \|g\|_s$. Assim,

$$\begin{aligned}\|f*g\|_* &= \max\{\|f*g\|_r, \|f*g\|_s\} \\ &\leq \max\{\|f\|_r\|g\|_r, \|f\|_s\|g\|_s\} \\ &\leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\} \max\{\|g\|_s, \|f\|_s\} = \|f\|_*\|g\|_*.\end{aligned}$$

2. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C_c(R)$. Uma vez que $C_c(R)$ tem a topologia limite indutivo, $f_n \to f$ se e somente se:

   - existe um inteiro N_1 tal que *supp* $\{f_n\}_{n\geq N_1} \subseteq K$ para algum conjunto compacto K em R, e
   - existe um inteiro N_2 tal que $\{f_n\}_{n\geq N_2}$ converge uniformemente para f em K.

   Como K é compacto em R, pela Proposição 2.2.3 item 4, temos que para qualquer x fixo em X o conjunto $\{(x,y) \in K : y \in [x]\}$ contém uma quantidade finita de elementos, o qual denotamos por $\{(x,y_1),\cdots,(x,y_M)\}$. Agora dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $N \geq \max\{N_1,N_2\}$ suficientemente grande tal que para todo $(x,y) \in K$ temos $|f_n(x,y) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ para todo $n \geq N$. Portanto, como *supp*$\{f_n\}_{n\geq N}$ e *supp* (f) estão contidos em K temos para todo $x \in X$

$$\begin{aligned}\sum_{y\in[x]} |f_n(x,y) - f(x,y)| &= \sum_{i=1}^{M} |f_n(x,y_i) - f(x,y_i)| \\ &\leq M\frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } n \leq N.\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_r &= \sup_{x\in X} \sum_{y\in[x]} |f_n(x,y) - f(x,y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ para todo } n \leq N.\end{aligned}$$

Então, f_n converge para f em $\|\cdot\|_r$. Similarmente f_n converge para f em $\|\cdot\|_s$. Agora, como $\|f\|_* = \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$, também temos que f_n converge para f em $\|\cdot\|_*$. ■

Observe que a norma $\|\cdot\|_*$ não é uma C^* - norma.

Definição 3.1.3. *Uma representação em $C_c(R)$ é um $*$- homomorfismo não-degenerado $\pi : C_c(R) \to B(H)$ que é contínuo na topologia limite indutivo de $C_c(R)$ para a topologia operador fraco de $B(H)$. Chamamos uma representação π de $C_c(R)$ limitada se $\|\pi(f)\|_{op} \leq \|f\|_*$ para todo f em $C_c(R)$.*

Definição 3.1.4. *Seja $f \in C_c(R)$. Definimos*

$$\|f\|_{C^*} = \sup_{\pi}\{\|\pi(f)\|_{op}\}$$

onde $\pi : C_c(R) \to B(H)$ é representação não-degenerada e limitada.

Proposição 3.1.5. *Para uma relação de equivalência étale R a norma $\|\cdot\|_{C^*}$ é uma C^*- norma e é limitada superiormente e inferiormente como segue. Dada uma representação*

$\pi : C_c(R) \to B(H)$ limitada temos que

$$\|\pi(f)\|_{op} \leq \|f\|_{C^*} \leq \|f\|_* \text{ para todo } f \in C_c(R).$$

Demonstração: $\|\cdot\|_{C^*}$ é uma C^*- norma pois cada π é uma representação num espaço de Hilbert H e $B(H)$ é uma C^*- álgebra. Portanto dados $f, g \in C_c(R)$ e $k \in \mathbb{C}$, temos que

- Se $f = 0$ então $\pi(f) = 0$ para qualquer representação π. Portanto $\|f\|_{C^*} = \sup_\pi\{\|\pi(f)\|_{op}\} = 0$.

  Agora, se $\|f\|_{C^*} = 0$ então $\|\pi(f)\|_{op} = 0$ para toda representação π de $C_c(R)$, o que implica que $\pi(f) = 0$ para toda representação π de $C_c(R)$. Para cada $(x, y) \in R$, tomamos a representação λ_x (que será definida logo a frente na Definição 3.2.2) e $\xi = \delta_y \in \ell^2([x])$. Então $0 = \lambda_x(f)\xi(x) = \sum_{z\in[x]} f(x, z)\xi(z) = f(x, y)$. Segue que $f(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in R$, ou seja, $f = 0$.

- $\|f + g\|_{C^*} = \sup_\pi\{\|\pi(f + g)\|_{op}\}$
  $\leq \sup_\pi\{\|\pi(f)\|_{op} + \|\pi(g)\|_{op}\}$
  $\leq \sup_\pi\{\|\pi(f)\|_{op}\} + \sup_\pi\{\|\pi(g)\|_{op}\} = \|f\|_{C^*} + \|g\|_{C^*}$.

- $\|kf\|_{C^*} = \sup_\pi\{\|\pi(kf)\|_{op}\} = \sup_\pi\{\|k\pi(f)\|_{op}\}$
  $= \sup_\pi\{\overline{k}\|\pi(f)\|_{op}\} = \overline{k}\sup_\pi\{\|\pi(f)\|_{op}\} = \overline{k}\|f\|_{C^*}$.

- $\|f * g\|_{C^*} = \sup_\pi\{\|\pi(f * g)\|_{op}\}$
  $\leq \sup_\pi\{\|\pi(f)\|_{op}\|\pi(g)\|_{op}\}$

$\leq \sup_\pi\{\|\pi(f)\|_{op}\} \sup_\pi\{\|\pi(g)\|_{op}\} = \|f\|_{C^*}\|g\|_{C^*}$.

- $\|f^*f\|_{C^*} = \sup_\pi\{\|\pi(f^*f)\|_{op}\} = \sup_\pi\{\|\pi(f)^*\pi(f)\|_{op}\}$
  $= \sup_\pi\{\|\pi(f)\|_{op}^2\} = \|f\|_{C^*}^2$.

Portanto $\|\cdot\|_{C^*}$ é uma C^*- norma em $C_c(R)$. E dado uma representação $\pi : C_c(R) \to B(H)$ limitada segue que:

$$\|\pi(f)\|_{op} \leq \sup_\pi\{\|\pi(f)\|_{op}\} = \|f\|_{C^*} = \sup_\pi\{\|\pi(f)\|_{op}\} \leq \|f\|_*,$$

para todo $f \in C_c(R)$. ■

Observação 3.1.6. *Seja R uma relação de equivalência étale. Então toda representação de $C_c(R)$ em um espaço de Hilbert separável é limitada. Ver J.Renault [11], Corolário 1.22, pg 72.*

Definição 3.1.7. *A C^*- álgebra cheia de uma relação étale R, denotada por $C^*(R)$, é o completamento de $C_c(R)$ na topologia induzida pela norma $\|\cdot\|_{C^*}$*

3.2 A C^*- álgebra reduzida

Há outra norma em $C_c(R)$, chamada norma reduzida, que pode produzir uma C^*- álgebra diferente. A definição desta norma tem a vantagem de ser menos abstrata do que a anterior.

Para introduzir a norma reduzida, olhamos para um conjunto particular de representações que são indexados pelo espaço unitário. Lembre-se que o espaço unitário de uma relação de equivalência é o conjunto $R^0 = \triangle = \{(x,x) : x \in X\}$, que pode ser identificado com o espaço X.

Definição 3.2.1. *Para todo x em X, o espaço de Hilbert $\ell^2([x])$ é definido como segue:*

$$\ell^2([x]) = \{\, \xi : [x] \to \mathbb{C} \ : \ \sum_{y \in [x]} |\xi(y)|^2 < \infty \,\}.$$

Definição 3.2.2. *Dado uma relação étale R, para todo x em X, a representação induzida do espaço unitário $\lambda_x : C_c(R) \to B(\ell^2([x]))$ é dada por*

$$(\lambda_x(f)\xi)(y) = \sum_{z \in [x]} f(y,z)\xi(z),$$

onde $y \in [x]$ e $\xi \in \ell^2([x])$.

Proposição 3.2.3. *Para uma relação étale R e $x \in X$ a representação λ_x definida acima é uma representação não-degenerada e limitada de $C_c(R)$.*

Demonstração:

- $\lambda_x(f)$ está bem definida.

  Dados $f \in C_c(R)$ e $\xi \in \ell^2([x])$, temos que

$$\sum_{y \in [x]} |(\lambda_x(f)\xi)(y)|^2 = \sum_{y \in [x]} \left| \sum_{z \in [x]} f(y,z)\xi(z) \right|^2.$$

Pela Proposição 2.2.3, o conjunto $\{(y,z) \in K : z \in [y] = [x]\}$ é finito, digamos $\{(y,z_1),\cdots,(y,z_N)\}$. Segue da mesma proposição que o conjunto $\{(y,z_i) : y \in [z_i] = [x]\}$ é finito, suponhamos $\{(y_1,z_i),\cdots,(y_M,z_i)\}$. Então

$$\begin{aligned}\sum_{y\in[x]} |(\lambda_x(f)\xi)(y)|^2 &= \sum_{y\in[x]} \left|\sum_{i=1}^{N} f(y,z_i)\xi(z_i)\right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{M} \left|\sum_{i=1}^{N} f(y_j,z_i)\xi(z_i)\right|^2 .\end{aligned}$$

Esta soma dupla é simplesmente uma soma finita de números complexos, e assim finita. Então, para todo $\xi \in \ell^2([x])$, temos que $\lambda_x(f)\xi \in \ell^2([x])$ e portanto está bem definida.

- λ_x é um $*$ - homomorfismo.
  Dados f e $g \in C_c(R)$, temos que

$$\begin{aligned}(\lambda_x(f * g)\xi)(y) &= \sum_{z\in[x]} f * g\ (y,z)\xi(z) \\ &= \sum_{z\in[x]} \sum_{z'\in[x]} f(y,z')g(z',z)\xi(z) \\ &= \sum_{z'\in[x]} \sum_{z\in[x]} f(y,z')g(z',z)\xi(z).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(\lambda_x(f) \circ \lambda_x(g)\xi)(y) = \sum_{z'\in[x]} f(y,z')\lambda_x(g)\xi(z')$$

$$= \sum_{z' \in [x]} f(y,z') \sum_{z \in [x]} g(z',z)\xi(z)$$
$$= \sum_{z' \in [x]} \sum_{z \in [x]} f(y,z')g(z',z)\xi(z).$$

As somas são finitas devido à Observação 3.0.1, o que implica que qualquer troca de ordem é justificada. Logo $\lambda_x(f * g) = \lambda_x(f) \circ \lambda_x(g)$.

Para mostrar que $\lambda_x(f^*) = \lambda_x(f)^*$, sejam $f \in C_c(R)$ e $\xi, \eta \in \ell^2([x])$. Note que

$$\langle \lambda_x(f^*)\xi, \eta \rangle = \sum_{y \in [x]} \overline{(\lambda_x(f^*)\xi)(y)}\eta(y)$$
$$= \sum_{y \in [x]} \sum_{z \in [x]} \overline{f^*(y,z)\xi(z)}\eta(y)$$
$$= \sum_{y \in [x]} \sum_{z \in [x]} f(z,y)\overline{\xi(z)}\eta(y)$$
$$= \sum_{z \in [x]} \overline{\xi(z)} \sum_{y \in [x]} f(z,y)\eta(y)$$
$$= \sum_{z \in [x]} \overline{\xi(z)}(\lambda_x(f)\eta)(z) = \langle \xi, \lambda_x(f)\eta \rangle.$$

Novamente a troca de ordem das somas é justificada pela Observação 3.0.1. Logo $\lambda_x(f^*) = \lambda_x(f)^*$.
Portanto λ_x é um $*$ - homomorfismo.

- $\|\lambda_x(f)\|_{op}$ é limitada por $\|f\|_*$.
  Dados $f \in C_c(R)$ e $\xi, \eta \in \ell^2([x])$, temos que

$$
\begin{aligned}
|\langle \lambda_x(f)\xi,\eta\rangle| &= \left|\sum_{y\in[x]} \overline{(\lambda_x(f)\xi)(y)}\eta(y)\right| \\
&= \left|\sum_{y\in[x]}\sum_{z\in[x]} \overline{f(y,z)\xi(z)}\eta(y)\right| \\
&\overset{(\star)}{=} \left|\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} \overline{f(y_i,z_j)}\,\overline{\xi(z_j)}\eta(y_i)\right| \\
&\leq \left|\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} \|f\|_*\overline{\xi(z_j)}\eta(y_i)\right| \\
&\leq \|f\|_*\left|\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} \overline{\xi(z_j)}\eta(y_i)\right| \\
&= \|f\|_*\left|\left\langle \sum_{j=1}^{N}\xi(z_j), \sum_{i=1}^{M}\eta(y_i)\right\rangle\right| \\
&\leq \|f\|_*\|\xi\|_2\|\eta\|_2 \text{ por Cauchy-Schwartz.}
\end{aligned}
$$

Pela Proposição 2.2.3, o conjunto $\{(y,z)\in K : z\in[y] = [x]\}$ é finito, digamos $\{(y,z_1),\cdots,(y,z_N)\}$. Segue da mesma proposição que o conjunto $\{(y,z_i) : y\in [z_i]=[x]\}$ é finito, suponhamos $\{(y_1,z_i),\cdots,(y_M,z_i)\}$. Assim fica justificada a igualdade $(\star)$. Portanto $\|\lambda_x(f)\|_{op}\leq\|f\|_*$ para todo $f\in C_c(R)$. Além do mais, $\lambda_x(f)$ é contínua na norma operador.

- λ_x é não-degenerada em $\ell^2([x])$.

  Seja $\eta\in\ell^2([x])$ fixo, e suponha que $\langle\lambda_x(f)\xi,\eta\rangle = 0$ para todo $f\in C_c(R)$ e para todo $\xi\in\ell^2([x])$. Para cada

$(z, z') \in R$ podemos encontrar um conjunto aberto $U_{zz'}$ que satisfaz o item (ii) da Definição 2.2.1. Uma vez que ambas as aplicações r e s são bijetivas no conjunto $U_{zz'}$, podemos observar que para um y' fixo em $s(U_{zz'})$ o conjunto $\{(y, y') \in U_{zz'}\}$ tem exatamente um elemento. Agora $U_{zz'}$ é aberto e podemos definir uma função $f_{zz'}$ em $C_c(R)$, que toma valor 1 em (z, z'), e vale 0 fora do conjunto $U_{zz'}$, i.e.,

$$f_{zz'}(y, y') = \begin{cases} 1 & \text{se } (y, y') = (z, z') \\ c(y, y') & \text{se } (y, y') \in U_{zz'} \\ 0 & \text{se } (y, y') \notin U_{zz'} \end{cases},$$

onde $c(y, y')$ é qualquer função que torne $f_{zz'}$ contínua. Podemos definir uma sequência $\xi_{z'}$ em $\ell^2([x])$ por:

$$\xi_{z'}(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = z' \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Então para todo z e z' em $[x]$ temos:

$$\langle \lambda_x(f_{zz'})\xi_{z'}, \eta \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{y \in [x]} \overline{(\lambda_x(f_{zz'})\xi_{z'})(y)}\eta(y) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{y \in [x]} \sum_{y' \in [x]} f_{zz'}(y, y')\xi_{z'}(y')\eta(y) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{y \in [x]} \overline{f_{zz'}(y, z')}\eta(y) = 0 \Rightarrow \eta(z) = 0, \;\; \forall\, z \in [x].$$

Portanto, λ_x é não-degenerada. ∎

Definição 3.2.4. *Seja $f \in C_c(R)$. A norma reduzida é definida como:*

$$\|f\|_{red} = \sup_{x \in X}\{\|\lambda_x(f)\|_{op}\}.$$

Proposição 3.2.5. *A norma $\|\cdot\|_{red}$ é uma C^*- norma e $\|\cdot\|_{red}$ é dominada pela norma, $\|\cdot\|_{C^*}$, da C^*- álgebra cheia.*

Demonstração: O fato que $\|\cdot\|_{red}$ é dominada pela C^*-norma cheia é claro pois a norma $\|\cdot\|_{C^*}$ é o sup de mais elementos. Agora, $\|\cdot\|_{red}$ é uma C^*-norma pois para todo $x \in X$, $\ell^2([x])$ é um espaço de Hilbert, então segue que $B(\ell^2([x]))$ é uma C^* - álgebra. Portanto,

$$\begin{aligned} \|f^* f\|_{red} &= \sup_{x \in X}\{\|\lambda_x(f^* f)\|_{op}\} = \sup_{x \in X}\{\|\lambda_x(f)^* \lambda_x(f)\|_{op}\} \\ &= \sup_{x \in X}\{\|(f)\|_{op}^2\} = \|f\|_{red}^2. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Definição 3.2.6. *O completamento de $C_c(R)$ com relação a norma reduzida é uma C^*- álgebra, chamada a C^*- álgebra reduzida e denotado por $C_r^*(R)$.*

3.3 Exemplos

Exemplo 3.1. Sejam X um conjunto finito e $R = X \times X$, ambos discretos. Então

$$C^*(R) \simeq C_r^*(R) \simeq M_n(\mathbb{C}).$$

Vamos considerar $X = \{1, 2, \cdots, n\}$. Para $i \in X$, $\ell^2([i]) = \{\xi = (\xi(1), \cdots, \xi(n))\} \simeq \mathbb{C}^n$, $B(\ell^2([i])) \simeq M_n(\mathbb{C})$ e

$$\begin{aligned}
[\lambda_i(f)\xi](k) &= \sum_{l \in [i]} f(k,l)\xi(l) = \sum_{l=1}^{n} f(k,l)\xi(l) \\
&= \begin{pmatrix} f(k,1) & \cdots & f(k,n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(1) \\ \vdots \\ \xi(n) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Observe que para quaisquer $i, j \in X$, $\lambda_i(f) = \lambda_j(f)$. Então definimos λ por:

$$\begin{aligned}
\lambda : C_c(R) &\longrightarrow \quad M_n(\mathbb{C}) \\
f &\longmapsto \quad \lambda(f) = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & \cdots & f(1,n) \\ f(2,1) & f(2,2) & \cdots & f(2,n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(n,1) & f(n,2) & \cdots & f(n,n) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Claro que λ é linear. Agora, dados $f, g \in C_c(R)$ temos que,

$$\begin{aligned}
[\lambda(f * g)\xi](k) &= \sum_{i=1}^{n} f * g(k,i)\xi(i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(k,j)g(j,i)\xi(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(k,j)g(j,i)\xi(i).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}[\lambda(f)\lambda(g)\xi](k) &= \sum_{j=1}^{n} f(k,j)\lambda(g)\xi(j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f(k,j) \sum_{i=1}^{n} g(j,i)\xi(i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(k,j)g(j,i)\xi(i).\end{aligned}$$

Portanto $\lambda(f * g) = \lambda(f)\lambda(g)$. Além disso, λ preserva a involução. Dados $f \in C_c(R)$, $\xi,\ \eta \in \mathbb{C}^n$, temos que

$$\begin{aligned}\langle \lambda(f^*)\xi, \eta\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \lambda(f^*)\xi(i)\overline{\eta(i)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} f^*(i,j)\xi(j)\right)\overline{\eta(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{f(j,i)}\xi(j)\overline{\eta(i)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \xi(j)\overline{f(j,i)\eta(i)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \xi(j)\overline{\lambda(f)\eta(j)} = \langle \xi, \lambda(f)\eta\rangle\,.\end{aligned}$$

Logo $\lambda(f^*) = \lambda(f)^*$. Portanto λ é um $*$ - homomorfismo.

Seja $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$, definimos $f : R \to \mathbb{C}$ por $f(i,j) := a_{ij}$ para $i, j = 1, \cdots, n$. Uma vez que R é finito e tem a topologia discreta, f tem suporte compacto (a saber R) e é contínuo, ou seja, $f \in C_c(R)$. Logo $\lambda(f) = A$ e λ é sobrejetiva. Para finalizar λ é uma isometria, pois

$$\|f\|_{red} = \sup_{i\in X} \|\lambda_i(f)\| = \sup_{i\in X} \|\lambda(f)\| = \|\lambda(f)\|.$$

Portanto λ é um $*$ - isomorfismo isométrico. E como todo espaço de dimensão finita é completo, temos que

$$C_c(R) \simeq C^*(R) \simeq C_r^*(R) \simeq M_n(\mathbb{C}).$$

Exemplo 3.2. Sejam X um conjunto enumerável discreto e $R = X \times X$ discreto. Então

$$C_r^*(R) \simeq K(l^2(X)).$$

O caminho para mostrar o isomorfismo acima é muito semelhante ao exemplo anterior. Para simplificar tomamos $X = \{1, 2, 3, \cdots\}$. Para todo $i \in X$, $\ell^2([i]) = \{\xi = (\xi(1), \xi(2), \cdots : (\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\} = \ell^2$

$$\begin{aligned}
\lambda_i(f)\xi(j) &= \sum_{k \in [i]} f(j,k)\xi(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(j,k)\xi(k) \\
&= \begin{pmatrix} f(k,1) & f(k,n) & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(1) \\ \xi(n) \\ \vdots \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Então definimos λ como:

$$\begin{aligned}
\lambda : C_c(R) &\longrightarrow K(\ell^2(X)) \\
f &\longmapsto \lambda(f) = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & f(1,3) & \cdots \\ f(2,1) & f(2,2) & \cdots & \\ f(3,1) & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como f tem suporte compacto e assim finito, então os operadores $\lambda(f)$ têm um número finitos de entradas não nulas. Segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(j,k) = 0$ se $j > N$ ou $k > N$. Com isso, temos que $\lambda(f) \subseteq FR(\ell^2(X))$, o espaço dos operadores de posto finito. De forma análoga ao Exemplo 3.1 mostra-se que λ é um $*$ - isomorfismo isométrico de $C_c(R)$ sobre $FR(\ell^2(X))$. Então podemos estender λ para um $*$ - homomorfismo isométrico, $\widetilde{\lambda}$, de $C_r^*(R)$ para o fecho da imagem de λ, que é o espaço dos operadores compactos $K(\ell^2(X))$. E como a imagem de uma C^*- álgebra por um $*$ - homomorfismo é sempre fechada temos que,

$$Im(\widetilde{\lambda}) \subseteq K(\ell^2(X)) = \overline{FR(\ell^2(X))} = \overline{Im(\lambda)} \subseteq \overline{Im(\widetilde{\lambda})} = Im(\widetilde{\lambda}).$$

Portanto,

$$C_r^*(R) \simeq Im(\widetilde{\lambda}) = K(\ell^2(X)).$$

Exemplo 3.3. Seja X qualquer conjunto localmente compacto e σ- compacto e seja $R = \triangle$ com a topologia relativa de $X \times X$, como no Exemplo 2.4. Então

$$C_r^*(R) \simeq C_0(X).$$

Vimos que a aplicação *range* r é um homeomorfismo de R em X. Então

$$\begin{array}{rcl} \phi : C_c(R) & \to & C_c(X) \\ f & \mapsto & f \circ r^{-1} \end{array}$$

está bem definida e é um $*$ - isomorfismo isométrico considerando $C_c(X)$ como subalgebra de $C_0(X)$, como mostramos abaixo.

- ϕ está bem definida: Temos que $f \circ r^{-1}$ é contínua pois é composição de funções contínuas. E se K é o suporte compacto de f então $r(K)$ é o suporte compacto de $f \circ r^{-1}$.

- ϕ é multiplicativa: $\phi(fg)(x) = (fg) \circ r^{-1}(x) = fg(x,x) = \sum_{y \in [x]} f(x,y)g(y,x) = f(x,x)g(x,x) = (f \circ r^{-1}(x))(g \circ r^{-1}(x)) = (\phi(f)(x))(\phi(g)(x)) = (\phi(f)\phi(g))(x)$.

- ϕ é sobrejetiva: Se $g \in C_c(X)$ então $g \circ r \in C_c(R)$. E $\phi(g \circ r) = g \circ r \circ r^{-1} = g$.

- ϕ é uma isometria: Observe que para $x \in X$, $\ell_2([x]) \simeq \mathbb{C}$ e para $\xi(x) \in \mathbb{C}$ temos que,

$$\lambda_x(f)(\xi) = \sum_{y \in [x]} f(x,y)\xi(y) = f(x,x)\xi(x).$$

  Isto implica que $\lambda_x(f) = f(x,x)$ e portanto

$$\begin{aligned} \|f\|_{red} &= \sup_{x \in X} \|\lambda_x(f)\| = \sup_{x \in X} |f(x,x)| = \sup_{x \in X} |\phi(f)(x)| \\ &= \|\phi(f)\|. \end{aligned}$$

  Consequentemente ϕ é injetiva e contínua.

Podemos estender ϕ para um $*$ - homomorfismo isométrico,

$\widetilde{\phi}$ de $C_r^*(R)$ para $C_0(X)$. Novamente como a imagem de uma C^*- álgebra por um $*$ - homomorfismo é fechada temos que $C_r^*(R) \simeq C_0(X)$.

Exemplo 3.4. Sejam S e T relações de equivalência étale em X e Y, respectivamente, e $R = S\dot{\cup}T$ a relação étale em $X\dot{\cup}Y$, como no Exemplo 2.5. Então

$$C_r^*(R) \simeq C_r^*(S) \oplus C_r^*(T).$$

Note que se $\imath : C_c(S) \to C_r^*(S)$ e $\jmath : C_c(T) \to C_r^*(T)$ são as inclusões canônicas então

$$\begin{array}{rcl} \imath \oplus \jmath : C_c(R) & \to & C_r^*(S) \oplus C^*(T) \\ f & \mapsto & (\imath(f|_S), \jmath(f|_T)) \end{array}$$

é um $*$ - isomorfismo isométrico de $C_c(R)$ em $\imath(C_c(S)) \oplus \jmath(C_c(T))$. Então podemos estender $\imath \oplus \jmath$ para um $*$ - homomorfismo isométrico $\widetilde{\imath \oplus \jmath} : C_r^*(R) \to C_r^*(S) \oplus C_r^*(T))$. Usando o mesmo raciocínio do Exemplo 3.2 podemos concluir que $\widetilde{\imath \oplus \jmath}(C^*(R)) = C^*(S) \oplus C_r^*(T)$. Portanto

$$C_r^*(R) \simeq C_r^*(S) \oplus C_r^*(T).$$

Exemplo 3.5. Seja $X = [0,1] \cup [2,3]$ e $R = \triangle \cup \{(x, x+2), (x+2, x) \ : \ 0 \leq x < 1\}$ como no Exemplo 2.6. Se $A = \{f : [0,1] \to M_2(\mathbb{C}) \ : f$ é contínua e $f(1)$ é diagonal$\}$ então

$$C_r^*(R) \simeq A.$$

Primeiro é importante notar que A é uma C^*- álgebra com a soma e o produto definidos pontualmente, a involução sendo a transposta conjugada e a norma do *sup*.

Se $t \in [0,1)$ então : $[t] = \{t, t+2\}$, $\ell^2([t]) = \{\xi = (\xi_t, \xi_{t+2})\} \simeq \mathbb{C}^2$, $B(\ell^2([t])) \simeq M_2(\mathbb{C})$, e obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_t : C_c(R) \to &\ M_2(\mathbb{C}) \\ \lambda_t(f) = &\begin{pmatrix} f(t,t) & f(t,t+2) \\ f(t+2,t) & f(t+2,t+2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se $t = 1$ então: $[1] = \{1\}$, $\ell^2([1]) = \{\xi_1\} \simeq \mathbb{C}$ e $B(\ell^2([1])) \simeq \mathbb{C}$. Obtemos,

$$\begin{aligned} \lambda_1 : C_c(R) \to &\ \mathbb{C} \\ \lambda_1(f) &= f(1,1). \end{aligned}$$

Se $t \in [2,3)$ então : $[t] = \{t-2, t\}$, $\ell^2([t]) = \{\xi = (\xi_{t-2}, \xi_t)\} \simeq \mathbb{C}^2$, $B(\ell^2([t])) \simeq M_2(\mathbb{C})$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_t : C_c(R) \to &\ M_2(\mathbb{C}) \\ \lambda_t(f) = &\begin{pmatrix} f(t-2,t-2) & f(t-2,t) \\ f(t,t-2) & f(t,t). \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Substituindo t por $s+2$, obtemos $s \in [0,1)$ e λ_s análogo ao caso $t \in [1,0)$.

E se $t = 3$ então: $[3] = \{3\}, \ell^2([3]) = \{\xi_3\} \simeq \mathbb{C}$, $B(\ell^2([3])) \simeq \mathbb{C}$ e

$$\begin{aligned} \lambda_3 : C_c(R) \rightarrow & \ \ \mathbb{C} \\ \lambda_3(f) = & \ \ f(3,3). \end{aligned}$$

Isto nos induz a definir $\lambda : C_c(R) \longrightarrow A$ por:

$$\lambda(f)(s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} f(s,s) & f(s,s+2) \\ f(s+2,s) & f(s+2,s+2) \end{pmatrix} & \text{se } 0 \leq s < 1 \\ \begin{pmatrix} f(1,1) & 0 \\ 0 & f(3,3) \end{pmatrix} & \text{se } s = 1 \end{cases}.$$

Com pouca dificuldade, verifica-se que λ é um $*$ - homomorfismo. Vamos provar que λ é uma isometria.

Se $t \in [0,1) \cup [2,3)$ então

$$\|\lambda_t(f)\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|\lambda_t(f)(\xi)\| = \sup_{\|\eta\|=1} \|\lambda(f)(s)(\eta)\| = \|\lambda(f)(s)\|,$$

onde $s = t$ se $t \in [0,1)$ ou $s = t-2$ se $t \in [2,3)$.

Além disso, $\|\lambda_1(f)\| = \|f(1,1)\|$, $\|\lambda_3(f)\| = \|f(3,3)\|$ e $\|\lambda(f)(1)\| = \max\{\|f(1,1)\|, \|f(3,3)\|\} = \sup_{t\in\{1,3\}}\{\|\lambda_t(f)\|\}$. Portanto,

$$\|\lambda(f)\| = \sup_{s\in[0,1]} \{\|\lambda(f)(s)\|\} = \sup_{t\in[0,1]\cup[2,3]} \{\|\lambda_t(f)\|\} = \|f\|_{red}.$$

Consequentemente λ é contínua e injetiva.

Precisamos também provar que λ tem imagem densa em A. Tomamos $g \in A$. Como g é contínua e $g(1)$ é diagonal, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|g_{12}(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\|g_{21}(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $t \in [1-\delta, 1)$. Definimos $f \in C_c(R)$ por:

$$\begin{cases} f(t,t) = g_{11}(t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ f(t+2,t+2) = g_{22}(t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ f(t,t+2) = g_{12}(t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1-\delta \\ f(t+2,t) = g_{21}(t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1-\delta \\ f(t,t+2) = c(t) & \text{se } 1-\delta < t < 1-\frac{\delta}{2} \\ f(t+2,t) = k(t) & \text{se } 1-\delta < t < 1-\frac{\delta}{2} \\ f(t,t+2) = 0 & \text{se } 1-\frac{\delta}{2} \leq t < 1 \\ f(t+2,t) = 0 & \text{se } 1-\frac{\delta}{2} \leq t < 1 \end{cases}.$$

As funções $c(t)$ e $k(t)$ são quaisquer funções que tornem f contínua. Segue que $\|g - \lambda(f)\| = \sup_{t\in[0,1]}\{\|g(t) - \lambda(f)(t)\|\} \leq \varepsilon$, como queríamos.

Exemplo 3.6. Sejam X um espaço de Hausdorff compacto, $Y = \{1, 2, \cdots, n\}$ discreto e $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in X \times Y \times X \times Y \ : \ x_1 = x_2\}$ como no Exemplo 2.8. Então

$$C^*_r(R) \simeq C(X, M_n(\mathbb{C})).$$

Para cada $(x, i) \in X \times Y$, $\ell^2([(x, i)]) = \{\xi = \xi(x, 1), \xi(x, 2), \cdots, \xi(x, n)\} \simeq \mathbb{C}^n, B(\ell^2([(x, i)])) \simeq M_n(\mathbb{C})$ e $\lambda_{(x,i)} : C_c(R) \to M_n(\mathbb{C})$ fica definida por:

$$\begin{aligned} [\lambda_{(x,i)}(f)\xi](x,t) &= \sum_{(x,j)\in[(x,t)]} f((x,t),(x,j))\xi(x,j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f((x,t),(x,j))\xi(x,j) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} f((x,t),(x,1)) & \cdots & f((x,t),(x,n)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(x,1) \\ \vdots \\ \xi(x,n) \end{pmatrix}.$$

Observe que $\lambda_{(x,i)} = \lambda_{(x,j)}$ para todo $i, j \in Y$.

Definimos $\lambda : C_c(R) \to C(X, Mn(\mathbb{C}))$ por

$$[\lambda(f)(x)\xi](t) = \sum_{j=1}^{n} f((x,t),(x,j))\xi(j),$$

para $x \in X$, $\xi \in \mathbb{C}^n$ e $t \in Y$, ou seja,

$$\lambda(f)(x) = \begin{pmatrix} f((x,1),(x,1)) & f((x,1),(x,2)) & \cdots & f((x,1),(x,n)) \\ f((x,2),(x,1)) & f((x,2),(x,2)) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ f((x,n),(x,1)) & \cdots & & f((x,n),(x,n)) \end{pmatrix}.$$

- λ está bem definida.

  Precisamos provar que $\lambda(f)$ é contínua. Seja $x_0 \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, como f é contínua implica que $|f((x,i),(x,j)) - f((x_0,i),(x_0,j))| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ para todo $i, j = 1, 2, \cdots, n$. Se $\xi \in \mathbb{C}^n$ com $\|\xi\| = 1$ então

$$\|(\lambda(f)(x) - \lambda(f)(x_0))\xi\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|[(\lambda(f)(x) - \lambda(f)(x_0))\xi(i)]\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} [f((x,i),(x,j)) - f((x_0,i),(x_0,j))]\xi(j)|^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |f((x,i),(x,j)) - f((x_0,i),(x_0,j))|^2 |\xi(j)|^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}|\xi(j)|^2 = \frac{\varepsilon^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\|\xi\|^2 = \frac{\varepsilon^2}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \varepsilon^2.$$

Então,

$$\begin{aligned}\|\lambda(f)(x) - \lambda(f)(x_0)\| &= \sup_{\|\xi\|=1} \|(\lambda(f)(x) - \lambda(f)(x_0))\xi\| \\ &\leq \sup_{\|\xi\|=1} \varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto $\lambda(f)$ é contínua para todo $x_0 \in X$ e λ está bem definida.

Vamos provar que λ é um $*$ - homomorfismo isométrico de $C_c(R)$ em $C(X, M_n(\mathbb{C}))$.

- λ é multiplicativa.

$$\begin{aligned}[\lambda(f*g)(x)\xi](t) &= \sum_{j=1}^{n} f*g((x,t),(x,j))\xi(j) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f((x,t),(x,i))g((x,i),(x,j))\xi(j).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}[\lambda(f)\lambda(g)(x)\xi](t) &= [\lambda(f)(x)\lambda(g)(x)\xi](t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f((x,t),(x,i))[\lambda(g)(x)\xi](i)\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f((x,t),(x,i)) \sum_{j=1}^{n} g((x,i),(x,i))\xi(j)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f((x,t),(x,i))g((x,j),(x,i))\xi(j).$$

Portanto, $\lambda(f * g) = \lambda(f)\lambda(g)$ para todo $f, g \in C_c(R)$.

- λ preserva a involução.

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(f^*)(x)\xi, \eta \rangle &= \sum_{i=1}^{n} [\lambda(f^*)(x)\xi](i)\overline{\eta(i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} f^*((x,i),(x,j))\xi(j) \right) \overline{\eta(i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{f((x,j),(x,i))}\xi(j)\overline{\eta(i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi(j)\overline{f((x,j),(x,i))\eta(i)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \xi(j)[\lambda(f)(x)\eta](j) = \langle \xi, \lambda(f)(x)\eta \rangle .
\end{aligned}$$

Portanto $\lambda(f^*) = (\lambda(f))^*$

- λ é uma isometria.
  Para qualquer $(x,i) \in X \times Y$ a função $\lambda_{(x,i)}(f)$ coincide com $\lambda(f)(x)$. Assim,

$$\|f\|_{red} = \sup_{(x,i)\in X\times Y} \|\lambda_{(x,i)}(f)\| = \sup_{x\in X} \|\lambda(f)(x)\| = \|\lambda(f)\|.$$

De imediato temos que λ é injetiva e contínua.

- λ é sobrejetiva .

  Dado $g \in C(X, M_n(\mathbb{C}))$ definimos $f : R \to \mathbb{C}$ por $f((x,i),(x,j)) := g_{ij}(x)$. Note que f tem suporte compacto, o próprio R. Seja $x_0 \in X$. Dado $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança aberta V_{x_0} tal que $\|g(y) - g(x_0)\| < \varepsilon$ para todo $y \in V_{x_0}$. Sejam $((x_0,i),(x_0,j)) \in R$ e $U_{x_0,i,j} = \{((x,i),(x,j)) \in R : x \in V_{x_0}\}$. Então para todo $((y,i),(y,j)) \in U_{x_0,i,j}$ temos que $|f((y,i),(y,j)) - f((x_0,i),(x_0,j))| = |g_{ij}(y) - g_{ij}(x_0)| \leq \|g(y) - g(x_0)\| < \varepsilon$. Portanto f é contínua e $f \in C_c(R)$.

Conclusão: $C_c(R) \simeq C(X, M_n(\mathbb{C}))$, que é completo e portanto

$$C_r^*(R) \simeq C^*(R) \simeq C_c(R) \simeq C(X, M_n(\mathbb{C})).$$

4 Exemplos Especiais

Vamos apresentar mais três exemplos de relações étale, R, com suas C^*- álgebras associadas.

A primeira relação de equivalência é construída a partir de uma ação (global) de um grupo G enumerável discreto sobre um espaço X Hausdorff compacto. Dada esta ação, existe uma ação associada de G na C^*- álgebra $C(X)$. Vamos provar que a C^* - álgebra cheia, $C^*(R)$, é isomorfa ao produto cruzado de $C(X)$ por G pela ação associada de G em $C(X)$.

O segundo exemplo é uma generalização do primeiro. Simplesmente trocamos uma ação global por uma ação parcial e ao invés do espaço X Hausdorff compacto, tomamos X um espaço de Hausdorff localmente compacto.

E por fim, o terceiro exemplo começamos com a introdução de diagramas Bratteli. Posteriormente definiremos um relação de equivalência étale sobre estes diagramas e vamos à busca da C^*- álgebra reduzida associada a esta relação.

4.1 Produto Cruzado

O estudo de C^*- sistemas dinâmicos começou na década de 1930 com F. Murray e J. von Neumann nos trabalhos fundamentais sobre, as agora designadas, álgebras de von Neumann, estabelecendo ligações importantes entre a teoria ergódica, a emergente teoria de álgebras de operadores e a mecânica quântica. O estudo de um C^*-sistema dinâmico leva de forma natural à consideração de uma nova C^*- álgebra, o produto cruzado, que codifica informação importante sobre o sistema dinâmico. Em particular, as representações do produto cruzado estão sempre associadas a representações do sistema dinâmico e vice-versa. Os produtos cruzados foram introduzidos, para grupos discretos, por Turumaru em 1955 e para grupos localmente compactos arbitrários por Doplicher, Kastler e Robinson, que estabeleceram também a sua teoria de representações, em 1966.

Definição 4.1.1. *Sejam G um grupo e X um conjunto. Uma ação (global) de G em X é uma aplicação de $G \times X$ em X, denotada por $(g, x) \mapsto g(x)$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $g_1(g_2(x)) = (g_1 g_2)(x)$, *para quaisquer* $g_1, g_2 \in G$ *e* $x \in X$*;*

(ii) $e(x) = x$, *para qualquer* $x \in X$, *onde* e *é o elemento neutro de* G.

Se G é um grupo topológico e X um espaço topológico, a *ação* diz-se *contínua* quando a aplicação $(g, x) \mapsto g(x) : G \times X \to X$ é contínua.

Dada uma ação de um grupo G em um conjunto X define-se a G - *órbita* de um subconjunto $A \subseteq G$ como sendo o conjunto

$$G(A) := \{g(x) \in X \ : \ g \in G, \, x \in A\} \, .$$

Uma ação se diz *livre* se para qualquer $x \in X$, $g(x) = x$ se e somente se $g = e$.

Um C^*- *sistema dinâmico* é uma tripla (A, G, α), onde G é um grupo discreto, A é uma C^*- álgebra e $\alpha : G \to Aut(A)$ é um homomorfismo de grupos de G em $Aut(A)$. Dizemos que α é *ação* de G em A.

Para uma ação de um grupo G discreto em um espaço X Hausdorff localmente compacto, existe uma ação associada $\alpha : G \to Aut(C_0(X))$, dada por $\alpha(g)(f) = f(g^{-1}(x))$. Reciprocamente, se $(C_0(X), G, \alpha)$ é um C^*- sistema dinâmico com G um grupo discreto e X um espaço de Hausdorff localmente compacto, então G tem uma ação sobre X que faz cumprir a igualdade $\alpha(g)(f) = f(g^{-1}(x))$. Para ter mais detalhes, ver D. Gonçalves [3], capítulo 2.

Seja (A, G, α) um C^*- sistema dinâmico. Definimos

$$l_1(G, A) = \{\, a = \sum_{t\in G} a_t\delta_t \;:\; a_t \in A \; \forall\, t \in G,\; \sum_{t\in G} \|a_t\| < \infty\},$$

onde $\delta_t|_g = \begin{cases} 1 & \text{se } g = t \\ 0 & \text{se } g \neq t \end{cases}$. Para $a = \sum_{t\in G} a_t\delta_t \in l_1(G, A)$ e $b = \sum_{t\in G} b_t\delta_t \in l_1(G, A)$ definimos as operações de multiplicação e involução por:

$$(a * b)_\gamma = \sum_{t\in G} a_t\alpha_t(b_{t^{-1}\gamma}) \quad \gamma \in G,$$

$$(a^*)_\gamma = \alpha_\gamma(a^*_{\gamma^{-1}}) \quad \gamma \in G,$$

E a norma de um elemento $a = \sum_{t\in G} a_t\delta_t$ por:

$$\|a\| = \sum_{t\in G} \|a_t\|$$

Segue que $l_1(G, A)$ é uma $*$ - álgebra de Banach normada. Ver D. Gonçalves [3], capítulo 2.

Definição 4.1.2. *Seja (A, G, α) uma C^*- sistema dinâmico. O Produto Cruzado de A por G, pela ação α, denotado por $A \rtimes_\alpha G$, é a C^*- álgebra envolvente de $l_1(G, A)$.*

Proposição 4.1.3. *$l_1(G, A)$ é uma core subalgebra de $A \rtimes_\alpha G$.*

Demonstração: Seja λ uma representação de $(l_1(G, A), |||\cdot|||)$. Precisamos provar que $\|\lambda(a)\| \leq |||a|||$ para qualquer $a \in l_1$, onde

$$|||a||| = \sup_{\pi}\{\|\pi(a)\| \,:\, \pi \text{ é representação com } \|\pi(a)\| \leq \|a\|_{l_1}\}.$$

Não é difícil mostrar que $A_0 = \{a\delta_0 \in l_1 \;:\; a \in A\}$, com as operações de l_1, é uma C^*- álgebra, a qual é isometricamente $*$-isomorfa a C^*- álgebra A. Então, pela Proposição 1.1.8,

$$\|\lambda(a\delta_0)\| \leq \|a\delta_0\|_{l_1} \text{ para qualquer } a\delta_0 \in l_1.$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
\|\lambda(a_t\delta_t)\|^2 &= \|\lambda(a_t\delta_t)\lambda^*(a_t\delta_t)\| = \|\lambda((a_t\delta_t)(a_t\delta_t)^*)\| \\
&= \|\lambda((a_t\delta_t)\alpha_{t^{-1}}(a_t^*)\delta_{t^{-1}})\| = \|\lambda(a_t a_t^*\delta_0)\| \\
&\leq \|a_t a_t^*\delta_0\| = \|a_t a_t^*\| = \|a_t\|^2 = \|a_t\delta_t\|^2,
\end{aligned}$$

então $\|\lambda(a_t\delta_t)\| \leq \|a_t\delta_t\|_{l_1}$ para qualquer $a_t\delta_t \in l_1$.
Seja $a = \sum_{t \in G} a_t\delta_t \in l_1$, então

$$\begin{aligned}
\|\lambda(a)\| &= \|\lambda(\sum_{t\in G} a_t\delta_t)\| \leq \sum_{t\in G}\|\lambda(a_t\delta_t)\| \leq \sum_{t\in G}\|a_t\delta_t\| \\
&= \sum_{t\in G}\|a_t\| = \|a\|_{l_1}.
\end{aligned}$$

Logo, $\|\lambda(a)\| \leq \|a\|_{l_1}$ para qualquer $a \in l_1(G, A)$.
Portanto, quando calculamos $|||a|||$, λ é umas das representações consideradas e logo $\|\lambda(a)\| \leq |||a|||$, para qualquer $a \in l_1(G, A)$. ■

Agora, vamos definir uma relação de equivalência. Sejam X um espaço de Hausdorff compacto e G um grupo enumerável discreto agindo livre em X (como homeomorfismo). Definimos

$$R = \{(x, g(x)) \ : \ x \in X, \, g \in G\},$$

i.e., a classe de equivalência de x é simplesmente a G - órbita de x.

Para determinar uma topologia em R, note que a aplicação

$$(x, g) \in X \times G \longmapsto (x, g(x)) \in R \tag{4.1}$$

é uma bijeção. De fato, é sobrejetiva devido a definição de R. Agora, se $(x, g(x)) = (y, h(y)) \Rightarrow x = y$ e $g(x) = h(y) \Rightarrow g(x) = h(x) \Rightarrow x = (g^{-1}h)(x) \Rightarrow g = h$, pois a ação é livre, e segue a injetividade.

Definimos para R a topologia produto de $X \times G$ deslocada ao longo da aplicação (4.1.). Isto é, uma sequência $\{(x_n, g_n(x_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $(x, g(x))$ em R se, e somente se, $\{x_n\}_{n \in N}$ converge para x em X e $g_n = g$ para qualquer n, exceto para uma quantidade finita.

Observe que com esta topologia, para qualquer $g \in G$, os conjuntos $B_g := \{(x, g(x)) \ : \ x \in X\}$ são abertos e compactos em R. Desta forma R é uma relação de equivalência étale, como se pode ver abaixo:

- $R = \bigcup_{g \in G} B_g$ e assim σ- compacto;

- para cada $(x, g(x)) \in R$ o conjunto $B_g = \{(z, g(z)) \ : \ z \in X\}$ é uma vizinhança aberta de $(x, g(x))$ e as aplicações *range* $r : B_g \to X$ e *source* $s : B_g \to X$ são homeomorfismos locais.

Nosso objetivo agora é provar que a C^*- álgebra cheia associada a R, $C^*(R)$, é isomorfa ao produto cruzado $C(X) \rtimes_\alpha G$, onde α é a ação associada de G em $C(X)$, dada por $\alpha(f)(x) = f(g^{-1}(x))$.

Antes disso, vamos reescrever o produto em $C_c(R)$. O produto está definido por: $f * h(x, y) = \sum_{z \in [x]} f(x, z)h(z, y)$. Se $(x, y) \in R$ então $(x, y) = (x, g(x))$ para algum $g \in G$, e se $(x, z) \in R$ então $(x, z) = (x, s(x))$ para algum $s \in G$. Assim o produto em $C_c(R)$ fica definido por:

$$f * h(x, g(x)) = \sum_{s \in G} f(x, s(x))h(s(x), g(x)).$$

Note que $(s(x), g(x)) \in R$. Basta tomar $y = s(x)$ e assim $(s(x), g(x)) = (y, (gs^{-1})(y)) \in R$.

Para cada $t \in G$, seja

$$E_t := \{(x, t^{-1}(x)) \ : \ x \in X\},$$

que é um subconjunto aberto e compacto em R. Definimos χ por $t \mapsto \chi_t : G \to C^*(R)$, onde

$$\chi_t: \quad R \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\chi_t(x, g(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ g = t^{-1} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} .$$

Note que χ_t denota a função característica de E_t.

Também definimos a aplicação $\lambda : C(X) \to C^*(R)$ por

$$\lambda(f): \quad R \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\lambda(f)(x, g(x)) = \begin{cases} f(x) & \text{se } \ g = e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} .$$

Definição 4.1.4. *Dado um C^*- sistema dinâmico (A, G, α), uma Representação Covariante de (A, G, α) é um par* $\begin{cases} \pi : A \to B(H) \\ u : G \to U(H) \end{cases}$, *onde π é uma representação e u é um homomorfismo do grupo G no espaço dos operadores unitários $U(H)$, tais que $u_t\pi(a)(u_t)^{-1} = \pi(\alpha_t(a))$ para todo $a \in A$ e para todo $t \in G$. Denotaremos uma representação covariante por (π, u).*

Afirmação 4.1.5. *(λ, χ) é uma representação covariante de $(C(X), G, \alpha)$.*

Demonstração: Para provar esta afirmação é necessário mostrar que λ é uma representação, χ é um homomorfismo de grupos, χ_t são unitários e é satisfeita a relação de covariança $\chi_t\lambda(f)\chi_t^{-1} = \lambda(\alpha_t(f))$, para todo $f \in C(X), t \in G$.

- λ é linear. Dados $f, g \in C(X)$ e $k \in \mathbb{C}$, temos que

$$\lambda(kf+h)(x,g(x)) = \begin{cases} (kf+h)(x) & \text{se } \ g=e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$
$$= k\begin{cases} f(x) & \text{se } \ g=e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} + \begin{cases} h(x) & \text{se } \ g=e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$
$$= k\lambda(f)(x,g(x)) + \lambda(h)(x,g(x))$$
$$= (k\lambda(f)+\lambda(h))(x,g(x)).$$

  Logo $\lambda(kf+h) = (k\lambda(f)+\lambda(h))$.

- λ é multiplicativa. Dados $f, g \in C(X)$, temos que

$$\lambda(fh)(x,g(x)) = \begin{cases} fh(x) & \text{se } \ g=e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(x)h(x) & \text{se } \ g=e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

  Por outro lado,

$$\lambda(f)\lambda(h)(x,g(x)) = \sum_{s\in G} \lambda(f)(x,s(x))\lambda(h)(s(x),g(x))$$
$$= f(x)\lambda(h)(x,g(x))$$
$$= \begin{cases} f(x)h(x) & \text{se } \ g=e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

  Logo $\lambda(fh) = \lambda(f)\lambda(h)$.

- λ preserva $*$. Dado $f \in C(X)$, temos que

$$\lambda(f^*)(x,g(x)) = \begin{cases} f^*(x) & \text{se } g = e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \overline{f(x)} & \text{se } g = e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\lambda(f)^*(x,g(x)) = \overline{\lambda(f)(g(x),x)}$$
$$= \overline{\begin{cases} f(x) & \text{se } g = e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}} = \begin{cases} \overline{f(x)} & \text{se } g = e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Logo $\lambda(f^*) = \lambda(f)^*$.

Então λ é um $*$ - homomorfismo da C^*- álgebra $C(X)$ na C^*- álgebra $C^*(R)$.

- χ é um homomorfismo. Dados $t, s \in G$, temos que

$$\chi_t * \chi_s(x,g(x)) = \sum_{r\in G} \chi_t(x,r(x))\chi_s(r(x),g(x))$$
$$= \chi_s(t^{-1}(x),g(x)) \text{ (fazendo } y = t^{-1}(x))$$
$$= \chi_s(y,(gt)(y)) = \begin{cases} 1 & \text{se } (gt) = s^{-1} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{se } g = (ts)^{-1} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} = \chi_{ts}(x,g(x)).$$

Portanto $\chi_t * \chi_s = \chi_{ts}$.

- χ_t é unitário. Temos que

$$\chi_e(x, g(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } g = e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases},$$

ou seja, χ_e é a unidade de $C_c(R)$. Dado $t \in G$, pelo item anterior, $\chi_{t^{-1}}\chi_t = \chi_{t^{-1}t} = \chi_e$ e
$\chi_t\chi_{t^{-1}} = \chi_{tt^{-1}} = \chi_e$. Logo, $\chi_t^{-1} = \chi_{t^{-1}}$. Além disso,

$$\begin{aligned}\chi_t^*(x, g(x)) &= \overline{\chi_t(g(x), x)} = \chi_t(g(x), x) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } g = t \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} = \chi_{t^{-1}}(x, g(x)).\end{aligned}$$

Logo $\chi_t^* = \chi_t^{-1} = \chi_{t^{-1}}$ e,

$$\|\chi_t\|_{C^*}^2 = \|\chi_t^*\chi_t\|_{C^*} = \|\chi_t^{-1}\chi_t\|_{C^*} = \|\chi_e\|_{C^*} = 1.$$

Portanto $\|\chi_t\|_{C^*} = 1$.

- λ e χ satisfazem a relação de covariança. Dados $f \in C(X), t \in G$, temos que

$$\begin{aligned}\lambda(f) * \chi_t^{-1}(x, g(x)) &= \sum_{s \in G} \lambda(f)(x, s(x))\chi_{t^{-1}}(s(x), g(x)) \\ &= \lambda(f)(x, t^{-1}g(x))\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\chi_t * \lambda(f) * \chi_t^{-1}(x, g(x)) &= \chi_t * \lambda(f)(x, t^{-1}g(x)) \\ &= \sum_{s \in G} \chi_t(x, s(x))\lambda(f)(s(x), t^{-1}g(x))\end{aligned}$$

$$= \lambda(f)(t^{-1}(x), (t^{-1}g)(x))$$
$$= \begin{cases} f(t^{-1}(x)) & \text{se } g = e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\lambda(\alpha_t(f))(x, g(x)) = \begin{cases} \alpha_t(f)(x) & \text{se } g = e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(t^{-1}(x)) & \text{se } g = e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Portanto $\chi_t \lambda(f) \chi_t^{-1} = \lambda(\alpha_t(f))$ para todo $f \in C(X),\ t \in G$. ■

O próximo passo é provar que $C_c(R)$ e $l_1(G, C(X))$ são $*$ - isomorfos. Este isomorfismo provamos através da aplicação ϕ definida por:

$$\begin{array}{cccc} \phi: & l_1 & \longrightarrow & C^*(R) \\ & \sum_{t \in G} f_t \delta_t & \mapsto & \sum_{t \in G} \lambda(f_t) * \chi_t \end{array}$$

- ϕ é um $*$ - homomorfismo. Na verdade, isto vale para qualquer representação covariante. Aqui está feito de maneira particular.
  Claramente ϕ é linear. Dados $f = \sum_{t \in G} f_t \delta_t$ e $h = \sum_{s \in G} h_s \delta_s$ em l_1, temos que

$$\begin{aligned}
\phi(f)\phi(h) &= \phi(\sum_t f_t\delta_t)\phi(\sum_s h_s\delta_s) = \sum_t \lambda(f_t)\chi_t \sum_s \lambda(h_s)\chi_s \\
&= \sum_t \sum_s \lambda(f_t)\chi_t\lambda(h_s)\chi_s \\
&= \sum_{t,s} \lambda(f_t)\chi_t\lambda(h_s)(\chi_t)^{-1}\chi_t\chi_s \\
&\overset{(\star)}{=} \sum_{t,s} \lambda(f_t)\lambda(\alpha_t(h_s))\chi_{ts} = \sum_s \sum_t \lambda(f_t\alpha_t(h_s))\chi_{ts} \\
&= \sum_s \sum_t \phi\left(f_t\alpha_t(h_s)\delta_{ts}\right) = \phi(\sum_t \sum_s f_t\alpha_t(h_s)\delta_t\delta_s) \\
&= \phi(\sum_t \sum_t f_t\delta_s h_s\delta_s) = \phi(\sum_t f_t\delta_t \sum_s h_s\delta_s) \\
&= \phi(fh)
\end{aligned}$$

a igualdade $(\star)$ é verdadeira pois (λ, χ) é uma representação covariante. Logo, $\phi(f)\phi(h) = \phi(fh)$.
Lembre que $(f^*)_t = \alpha_t(f^*_{t^{-1}})$. Assim,

$$\phi(f^*) = \phi\left(\sum_{t\in G} \alpha_t(f^*_{t^{-1}})\delta_t\right). \tag{4.2}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\phi(f)^* &= \left(\sum_{t\in G}\lambda(f_t)\chi_t\right)^* = \sum_{t\in G}(\lambda(f_t)\chi_t)^* = \sum_{t\in G}\chi_t^*\lambda(f_t^*) \\
&= \sum_{t\in G}\chi_{t^{-1}}\lambda(f_t^*) = \sum_{t\in G}\chi_{t^{-1}}\lambda(f_t^*)\chi_t\chi_{t^{-1}} \overset{(\star)}{=} \sum_{t\in G}\lambda(\alpha_{t^{-1}}(f_t^*))\chi_{t^{-1}} \\
&= \sum_{t\in G}\lambda(\alpha_t(f^*_{t^{-1}}))\chi_t \overset{(4.2)}{=} \phi\left(\sum_{t\in G}\alpha(f^*_{t-1})\delta_t\right) = \phi(f^*).
\end{aligned}$$

A igualdade $(\star)$ é verdadeira pois (λ, χ) é representação covariante. Portanto ϕ é um $*$ - homomorfismo.

- ϕ é injetiva. Seja $f = \sum_{t \in G} f_t \delta_t \in l_1$, se

$$\phi(f) = 0 \Rightarrow \phi\left(\sum_{t \in G} f_t \delta_t\right) = 0 \Rightarrow \sum_{t \in G} \lambda(f_t) * \chi_t = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{t \in G} \lambda(f_t) * \chi_t(x, g(x)) = 0 \;\; \forall (x, g(x)) \in R$$
$$\Rightarrow \sum_{t \in G} \sum_{s \in G} \lambda(f_t)(x, s(x)) \chi_t(s(x), g(x)) = 0 \; \forall x \in X, g \in G$$
$$\Rightarrow \sum_{t \in G} \lambda(f_t)(x, tg(x)) = 0 \; \forall x \in X, g \in G$$
$$\Rightarrow f_{g^{-1}}(x) = 0 \;\; \forall x \in X, \; g \in \Rightarrow f_t(x) = 0 \;\; \forall x \in X, \; t \in G$$
$$\Rightarrow \sum_{t \in G} f_t \delta_t = 0 \Rightarrow f = 0$$

Portanto ϕ é injetiva.

- ϕ é sobrejetiva. Tome $f \in C_c(R)$ e defina

$$f_t(x) := f(x, t^{-1}(x)).$$

Então f_t é contínua, pois é a composição de funções contínuas $(x \mapsto (x, t^{-1}(x)) \mapsto f(x, t^{-1}(x)))$. Como G é discreto e f tem suporte compacto, o conjunto $\{f \;:\; f(x, t^{-1}(x)) \neq 0\}$ é finito, e segue que o conjunto $\{t \;:\; f(x, t^{-1}(x))\}$ também é finito, digamos $\{t_1, \cdots, t_n\}$. Desta maneira $f_{t_k} \equiv 0, \|f_{t_k}\| = 0$ para todo $k > n$ e,

$$\| \sum_{t \in G} f_t \delta_t \| = \sum_{t \in G} \| f_t \| = \| f_{t_1} \| + \cdots + \| f_{t_n} \| < \infty.$$

Portanto $\sum_{t \in G} f_t \delta_t \in l_1$. Por fim,

$$\begin{aligned}
\phi \left(\sum_{t \in G} f_t \delta_t \right) (x, g(x)) &= \sum_{t \in G} \lambda(f_t) * \chi(x, g(x)) \\
&= \sum_{t \in G} \sum_{s \in G} \lambda(f_t)(x, s(x)) \chi_t(s(x), g(x)) \\
&= \sum_{t \in G} \lambda(f_t)(x, tg(x)) = f_{g^{-1}}(x) \\
&= f(x, g(x)) \ \forall \, (x, g(x)) \in R.
\end{aligned}$$

Portanto ϕ é sobrejetiva. ■

Para finalizar, pelo Corolário 1.22 em [11] J. Renault, $C_c(R)$ é uma core subalgebra densa de $C^*(R)$, e pela Proposição 4.1.3, $l_1(G, C(X))$ é uma core subalgebra densa de $C(X) \rtimes_\alpha G$. Portanto, pela Proposição 1.2.7,

$$C^*(R) \simeq C(X) \rtimes_\alpha G.$$

4.2 Produto Cruzado Parcial

Definição 4.2.1. *Sejam G um grupo e X um conjunto. Uma ação parcial α de G sobre X, é um par ordenado $(\{\mathcal{D}_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$, onde para qualquer $g \in G$, $\mathcal{D}_g$ é um* *subconjunto de* X *e* $\alpha_g : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to D_g$ *é uma bijeção que satisfazem os seguintes axiomas:*

(i) $\mathcal{D}_e = X$*;*

(ii) $\alpha_h^{-1}(\mathcal{D}_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq \mathcal{D}_{(gh)^{-1}}$ *para quaisquer* $g, h \in G$*;*

(iii) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$ *para qualquer* $x \in \alpha_h^{-1}(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}})$*.*

No caso particular em que $\mathcal{D}_g = X$ para qualquer $g \in G$, o par $(\{\mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é uma *ação* (global) de G sobre X. Assim a definição se resume às funções $\alpha_g : X \longrightarrow X$ tais que $\alpha_e = Id_X$ e $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$.

A seguir, duas proposições relativas às ações parciais.

Proposição 4.2.2. *Seja* $(\{\mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ *uma ação parcial de um grupo sobre um conjunto* X*. As seguintes propriedades são válidas:*

1. $\alpha_e = Id_X$ *e* $\alpha_{g^{-1}} = \alpha_g^{-1}$*;*

2. $\alpha_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cap \mathcal{D}_h) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{gh}$*;*

3. $\alpha_g \circ \alpha_h$ *é uma bijeção de* $\mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{(gh)^{-1}}$ *sobre* $\mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{gh}$*.*

Demonstração: Ver [3], capítulo 4.

Proposição 4.2.3. *As condições (i), (ii) e (iii) da definição de ação parcial são equivalentes às seguintes condições:*

1. $\mathcal{D}_e = X$*;*

2. α_{gh} *estende* $\alpha_g \circ \alpha_h$ *para quaisquer* $g, h \in G$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) O item (iii) afirma que $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$ em $\alpha_h^{-1}(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}})$. Além disso, pelo item (ii), temos que $Dom(\alpha_g \circ \alpha_h) \subseteq Dom(\alpha_{gh})$. Logo, α_{gh} estende $\alpha_g \circ \alpha_h$.

($\Leftarrow$) Suponha que (1) e (2) sejam verdadeiros. Assim $\alpha_h^{-1}(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}) = Dom(\alpha_g \circ \alpha_h) \subseteq Dom(\alpha_{gh}) = \mathcal{D}_{gh}^{-1}$ e $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$ em $\alpha_h^{-1}(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}})$, o que prova (ii) e (iii).

■

Definição 4.2.4. *Dada* $(\{\mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ *uma ação parcial de um grupo* G *sobre um conjunto* X, *a tripla* (X, G, α) *é denominada sistema dinâmico parcial.*

A definição de uma ação parcial é um conceito que pode ser particularizado para várias categorias.

Definição 4.2.5. *Seja* $(\{\mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ *uma ação parcial de um grupo* G *sobre um conjunto* X. *Quando:*

(a) X *é um espaço topológico localmente compacto Hausdorff,* $\mathcal{D}_g$ *é um aberto de* X *e* $\alpha_t : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g$ *é um homeomorfismo, para qualquer* $g \in G$, α *é dita uma ação parcial de grupo* G *sobre o espaço topológico* X.

(b) X *é uma* C^**- álgebra,* $\mathcal{D}_g$ *é um ideal fechado (autoadjunto) de* X *e* $\alpha_g : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g$ *é um isomorfismo, para qualquer* $t \in G$, α *é dita uma ação parcial do grupo* G *sobre a* C^**- álgebra* X.

Definição 4.2.6. *Sejam G um grupo e X um conjunto. Uma ação parcial $(\{\mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é dita livre se para todo $x \in X$, $\alpha_g(x) = x$ se e somente se $g = e$, onde e é a unidade de G.*

Exemplo 4.1. Sejam G um grupo, X um espaço topológico localmente compacto e $(\{X_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de G sobre X. Seja $A = C_0(X)$ e defina, para cada $t \in G$,

$$\mathcal{D}_t = \{f \in A \ : \ f(x) = 0, \forall\, x \notin X_t\}.$$

Claramente, $\mathcal{D}_t$ é um ideal de A, para todo $t \in G$. Defina, também

$$\begin{array}{rccc} \beta_t : & \mathcal{D}_{t^{-1}} & \to & \mathcal{D}_t \\ & f & \mapsto & f \circ \alpha_t^{-1} \end{array}$$

Afirmamos que $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\beta_t\}_{t\in G})$ é uma ação parcial de G sobre a C^*- álgebra A. Ver [3], capítulo 4.

Definição 4.2.7. *Seja A uma C^*- álgebra e G um grupo. Dada uma ação parcial $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\beta_t\}_{t\in G})$, onde para qualquer $t \in G$, $\mathcal{D}_t$ é ideal fechado de A, seja*

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{t\in G} a_t\delta_t \ : \ a_t \in \mathcal{D}_t \ \ e \ \sum_{t\in G} \|a_t\| < \infty \right\} \subseteq l_1(G, A).$$

Para $a = (a_t)_{t\in G} \in \mathcal{L}$ e $b = (b_t)_{t\in G} \in \mathcal{L}$ definimos as operações de multiplicação e involução por:

$$(a * b)_\gamma = \sum_{t\in G} \beta_t(\beta_{t^{-1}}(a_t) b_{t^{-1}\gamma}),$$

$$(a^*)_\gamma = \beta_\gamma(a^*_{\gamma^{-1}}),$$

e a norma por:

$$\|a\| = \sum_{t\in G} \|a_t\|.$$

Proposição 4.2.8. *As operações estão bem definidas e $\mathcal{L}$ é uma $*$ - álgebra de Banach normada.*

Demonstração: Ver [3] D. Gonçalves, capítulo 4.

Definição 4.2.9. *O Produto Cruzado Parcial de A por G pela ação β, denotado por $A \rtimes_\beta G$, é a C^*- álgebra envolvente de $\mathcal{L}$.*

Observação 4.2.10. *Prova-se, analogamente a $l_1(G, A)$, que $\mathcal{L}$ é uma core subálgebra de $A \rtimes_\beta G$.*

A partir daqui consideramos G um grupo enumerável discreto, X um espaço topológico Hausdorff localmente compacto e $(\{X_t\}_{t\in G}, \{\alpha_{t\in G}\})$ uma ação parcial livre de G sobre X. Além disso, assumimos que X_t é σ- compacto para qualquer t em G.

Para $x, y \in X$, definimos

$$(x, y) \in R \subseteq X \times X$$

se existe $t \in G$ tal que $x \in X_{t^{-1}}$, $y \in X_t$ e $\alpha_t(x) = y$. Segue que R é uma relação de equivalência em X. De fato,

- $x \in X = X_{e^{-1}} = X_e$ e $\alpha_e(x) = x$. Então $(x, x) \in R$.

- Se $(x,y) \in R$ então existe $t \in G$ tal que $x \in X_{t^{-1}}, y \in X_t$ e $\alpha_t(x) = y$, ou seja, existe $s = t^{-1} \in G$ tal que $x \in X_s, y \in X_{s^{-1}}$ e $\alpha_s(y) = \alpha_{t^{-1}}(y) = x$. Portanto $(y,x) \in R$.

- Se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$ então existem $t, s \in G$ tais que $x \in X_{t^{-1}}, y \in X_t \cap X_{s^{-1}}, z \in X_s, \alpha_t(x) = y$ e $\alpha_s(y) = z$. Isto implica que, $x \in \alpha_t^{-1}(X_t \cap X_{s^{-1}}) \subseteq X_{(st)^{-1}}$, $z \in \alpha_s(X_{s^{-1}} \cap X_t) = X_s \cap X_{st}$ e $z = \alpha_s(y) = \alpha_s(\alpha_t(x)) = \alpha_{st}(x)$. Tomando $r = st$ temos que, $x \in X_{r^{-1}}$, $z \in X_r$ e $\alpha_r(x) = z$. Logo $(x,z) \in R$.

Note que os elementos de R são da forma $(x, \alpha_t(x))$ e que para cada elemento $(x,y) \in R$ existe um único $t \in G$ tal que $(x,y) = (x, \alpha_t(x))$. De fato, se existem $t, s \in G$ tal que $(x,y) = (x, \alpha_t(x))$ e $(x,y) = (x, \alpha_s(x))$ então $\alpha_t(x) = \alpha_s(x)$. Como $x \in \alpha_s^{-1}(X_s \cap X_t)$ implica que $x = \alpha_{t^{-1}}(\alpha_s(x)) = \alpha_{t^{-1}s}(x)$ em $\alpha_s^{-1}(X_s \cap X_t)$, mas α é livre, então $t = s$.

Como no caso da ação global, dotamos R com a topologia produto de $X \times G$ deslocada através da bijeção

$$(x,t) \in X \times G \longmapsto (x, \alpha_t(x)) \in R. \tag{4.3}$$

Aqui não será diferente, esta aplicação é sobrejetiva pela definição de R. Agora, se $(x, \alpha_t(x)) = (y, \alpha_s(y)) \Rightarrow x = y$ e $\alpha_t(x) = \alpha_s(y) \Rightarrow \alpha_t(x) = \alpha_s(x)$ e $x \in \alpha_s^{-1}(X_s \cap X_t) \Rightarrow x = \alpha_{t^{-1}}(\alpha_s(x)) = \alpha_{t^{-1}s}(x) \Rightarrow t = s$, pois α é livre. Portanto a aplicação (4.3) é injetiva.

Por hipótese, X_t é σ - compacto para cada $t \in G$. Então existe uma família enumerável de subconjuntos compactos de X_t, $\{K_n^t\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $X_t = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n^t$. Segue que os conjuntos

$$U_{t,n} := \{(x, \alpha_t(x)) \ : \ x \in K_n^t\}$$

são compactos e $R = \bigcup_{t\in G, n\in\mathbb{N}} U_{t,n}$ é σ - compacto.

Se $(x, \alpha_t(x)) \in R$ então $U_t := \{(z, \alpha_t(z)) \ : \ z \in X_{t^{-1}}\}$ é uma vizinhança aberta de $(x, \alpha_t(x))$ e as aplicações *range* $r : U_t \to X_{t^{-1}}$ e *source* $s : U_t \to X_t$ são homeomorfismos.

Portanto R é étale.

Sejam $f, h \in C_c(R)$. O produto $f * h$ em $C_c(R)$ fica definido por:

$$f * h(x, \alpha_t(x)) = \sum_{s\in G} f(x, \alpha_s(x))h(\alpha_s(x), \alpha_t(x)).$$

Observe que $(\alpha_s(x), \alpha_t(x)) \in R$, pois $x \in \alpha_s^{-1}(X_s \cap X_{t^{-1}})$ e tomando $y = \alpha_s(x)$, pela Definição 4.2.1 item (iii), temos que $\alpha_t(x) = \alpha_t(\alpha_{s^{-1}}(y)) = \alpha_{ts^{-1}}(y)$. Logo $(\alpha_s(x), \alpha_t(x)) = (y, \alpha_{ts^{-1}}(y)) \in R$.

Definimos $\phi : C_0(X) \to C_c(R)$ por:

$$\phi(f)(x, \alpha_t(x)) = \begin{cases} f(x) & \text{se } t = e \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

E $\mu : G \to C_c(R)$ por :

$$\mu(g)(x, \alpha_t(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = g^{-1} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Mostra-se que ϕ é um $*$ - homomorfismo, analogamente a λ no caso global. E também prova-se que μ é um homomorfismo, $\mu(g^{-1}) = \mu(g)^{-1} = \mu(g)^*$ e $\|\mu(g)\| = 1$, da mesma forma que χ no caso global.

Dada a ação parcial $(\{X_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ do grupo G sobre X, pelo Exemplo 4.1, existe uma ação parcial associada $(\{\mathcal{D}_t\}_t, \{\beta_t\}_t)$ do grupo G sobre a C^*- álgebra $C_0(X)$ tal que

$$\mathcal{D}_t = \{f \in C_0(X) \ : \ f(x) = 0 \,\forall\, x \notin X_t\} \quad \text{e}$$

$$\begin{array}{rccc} \beta_t : & \mathcal{D}_{t^{-1}} & \to & \mathcal{D}_t \\ & f & \mapsto & f \circ \alpha_t^{-1} \end{array}$$

Afirmação 4.2.11. $\mu(g)\phi(f)\mu(g)^{-1} = \phi(\beta_g(f))$.

Demonstração: Primeiro note que,

$$\begin{aligned} \phi(f) * \mu(g)^{-1}(x, \alpha_t(x)) &= \sum_{s\in G} \phi(f)(x, \alpha_s(x))\mu(g^{-1})(\alpha_s(x), \alpha_t(x)) \\ &= \phi(f)(x, \alpha_{g^{-1}t}(x)). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Então,

$$\begin{aligned} \mu(g) * \phi(f) * \mu(g^{-1})(x, \alpha_t(x)) &= \mu(g) * \phi(f)(x, \alpha_{g^{-1}t}(x)) \\ &\overset{(4.4)}{=} \sum_{s\in G} \mu(g)(x, \alpha_s(x))\phi(f)(\alpha_s(x), \alpha_{g^{-1}t}(x)) \end{aligned}$$

$$= \phi(f)(\alpha_{g^{-1}}(x), \alpha_{g^{-1}t}(x)) = \begin{cases} f(\alpha_{g^{-1}}(x)) & \text{se } t = e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \phi(\beta_g(f))(x, \alpha_t(x)) &= \begin{cases} \beta_g(f)(x)) & \text{se } t = e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(\alpha_g^{-1}(x)) & \text{se } t = e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(\alpha_{g^{-1}}(x)) & \text{se } t = e \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto $\mu(g)\phi(f)\mu(g)^{-1} = \phi(\beta_g(f))$. ■

Proposição 4.2.12. *As C^*- álgebras $C_0(X) \rtimes_\beta G$ e $C^*(R)$ são isometricamente $*$ - isomorfos.*

Demonstração: Uma vez que $C_c(R)$ é uma core subálgebra densa de $C^*(R)$ pelo Corolário 1.22 em [11], e $\mathcal{L}$ é uma core subálgebra densa $C_0(X) \rtimes_\beta G$, pela Proposição 1.2.7, basta provar que $\mathcal{L}$ e $C_c(R)$ são isomorfos como $*$ - álgebras. Para isto definimos,

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathcal{L} & \longrightarrow & C_c(R) \\ & \sum\limits_{g \in G} f_g \delta_g & \mapsto & \sum_{g \in G} \phi(f_g)\mu(g). \end{array}$$

- ρ é um $*$ - homomorfismo. Como ρ é claramente linear, basta verificarmos que ela separa o produto e preserva a involução. Dados $g, t \in G$, $f_g \in \mathcal{D}_g$ e $h_t \in \mathcal{D}_t$ arbitrários temos que,

$$\begin{aligned}
(f_g\delta_g * h_t\delta_t)_\gamma &= \sum_{s\in G} \beta_s(\beta_{s^{-1}}((f_g\delta_g)_s)(h_t\delta_t)_{s^{-1}\gamma}) \\
&= \beta_{\gamma t^{-1}}(\alpha_{t\gamma^{-1}}(f_g\delta_g)_{\gamma t^{-1}} h_t) \\
&= \beta_g(\beta_{g^{-1}}(f_g\delta_g)_g) h_t) \\
&= \begin{cases} \beta_g(b_{g^{-1}}(f_g)h_t) & \text{se } \gamma = gt \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, $f_g\delta_g * h_t\delta_t = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(f_g)h_t)\delta_{gt}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\rho(f_g\delta_g * h_t\delta_t) &= \rho(\beta_g(\beta_{g^{-1}}(f_g)h_t)\delta_{gt}) \\
&= \phi(\beta_g(\beta_{g^{-1}}(f_g)h_t)\mu(gt) \\
&= \mu(g)\phi(\beta_{g^{-1}}(f_g)h_t)\mu(g^{-1})\mu(g)\mu(t) \\
&= \mu(g)\phi(\beta_{g^{-1}}(f_g))\phi(h_t)\mu(t) \\
&= \mu(g)\mu(g^{-1})\phi(f_g)\mu(g)\phi(h_t)\mu(t) \\
&= \phi(f_g)\mu(g)\phi(h_t)\mu(t) \\
&= \rho(f_g\delta_g)\rho(h_t\delta_t)
\end{aligned}$$

Portanto, como ρ é linear, segue que para $\sum\limits_g f_g\delta_g$, $\sum\limits_t h_t\delta_t \in C^*(R)$ arbitrários, temos que

$$\rho\left(\left(\sum_{g\in G} f_g\delta_g\right)\left(\sum_{t\in G} h_t\delta_t\right)\right) = \rho\left(\sum_{g\in G} f_g\delta_g\right)\rho\left(\sum_{t\in G} h_t\delta_t\right)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}((f_g\delta_g)^*)_\gamma &= \beta_\gamma((f_g\delta_g)^*_{\gamma^{-1}}) = \beta_\gamma((f_g\delta_g)^*_{\gamma^{-1}})\\ &= \begin{cases}\beta_{g^{-1}}(f_g^*) & \text{se}\,\gamma = g^{-1}\\ 0 & \text{c.c}\end{cases} = \beta_{g^{-1}}(f_g^*)\delta_{g^{-1}}.\end{aligned}$$

Então $(f_g\delta_g)^* = \beta_{g^{-1}}(f_g^*)\delta_{g^{-1}}$. Assim,

$$\begin{aligned}\rho((f_g\delta_g)^*) &= \rho(\beta_{g^{-1}}(f_g^*)\delta_{g^{-1}}) = \phi(\beta_{g^{-1}}(f_g)^*)\mu(g^{-1})\\ &= \mu(g^{-1})\phi(f_g^*)\mu(g)\mu(g^{-1}) = \mu(g^{-1})\phi(f_g^*)\\ &= \mu(g)^*\phi(f_g)^* = (\phi(f_g)\mu(g))^* = (\rho(f_g\delta_g))^*.\end{aligned}$$

Segue que $\rho\left(\left(\sum_{g\in G} f_g\delta_g\right)^*\right) = \left(\rho\left(\sum_{g\in G} f_g\delta_g\right)\right)^*$, pois ρ é linear.

- ρ é injetiva.
  Seja $f = \sum_g f_g\delta_g$ tal que $\rho(f) = 0$. Então

$$\begin{aligned}\rho(f) = 0 &\Rightarrow \rho\left(\sum_g f_g\delta_g\right) = 0\\ &\Rightarrow \rho\left(\sum_{g\in G} f_g\delta_g\right)(x,\alpha_t(x)) = 0\ \forall\,(x,\alpha_t(x)) \in R\\ &\Rightarrow \sum_g \phi(f_g)\mu(g)(x,\alpha_t(x)) = 0\ \forall\,(x,\alpha_t(x)) \in R\\ &\Rightarrow \sum_s\sum_g \phi(f_g)(x,\alpha_s(x))\mu(g)(\alpha_s(x),\alpha_t(x)) = 0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \sum_g \phi(f_g)(x, \alpha_{gt}(x)) = 0 \; \forall\, x \in X, t \in G \\
&\Rightarrow f_{t^{-1}}(x) = 0 \; \forall\, x \in X, t \in G \\
&\Rightarrow \;\; f = \sum_g f_g \delta_g = 0
\end{aligned}
$$

Portanto ρ é injetiva.

- ρ é sobrejetiva sobre $C_c(R)$.
  Tome $f \in C_c(R)$ e defina

$$f_t(x) := f(x, \alpha_{t^{-1}}(x)).$$

Então f_t é contínua uma vez que é a composição, $x \mapsto (x, \alpha_{t^{-1}}(x)) \mapsto f(x, \alpha_{t^{-1}}(x))$, de funções contínuas. Como G é discreto e f tem suporte compacto, segue que o conjunto $\{t \in G \;:\; f(x, \alpha_{t^{-1}}(x)) \neq 0\}$ é finito, digamos para $t_1, \cdots, t_n$. Desta forma $f_{t_k} \equiv 0$, $\|f_{t_k}\| = 0 \; \forall k > n$. Assim,

$$\|\sum_{t \in G} f_t \delta_t\| = \sum_{t \in G} \|f_t\| = \|f_{t_1}\| + \cdots + \|f_{t_n}\| < \infty.$$

Portanto, $\displaystyle\sum_{g \in G} f_g \delta_g \in \mathcal{L}$ e $\displaystyle\rho \left(\sum_{g \in G} f_g \delta_g \right) (x, \alpha_t(x))$ $= f_{t^{-1}}(x) = f(x, \alpha_t(x)) \;\; \forall\, (x, \alpha_t(x)) \in R$ como desejado.

Acabamos de provar que $\mathcal{L}$ e $C_c(R)$ são $*$ - isomorfos e portanto

$$C_0(X) \rtimes_\beta G \simeq C^*(R).$$

■

4.3 Diagrama de Bratteli

Considerado como um grafo direcionado, um diagrama Bratteli é uma sequência de camadas de vértices com qualquer variedade de arestas somente para as camadas consecutivas. É usado para descrever sequências de C^*-álgebras de dimensões finitas. O conceito foi introduzido por Ola Bratteli, *Inductive limits of finite dimensional C^*-algebras*, em 1972.

Definição 4.3.1. *Um Diagrama de Bratteli é um grafo dirigido infinito (V, E) tal que o conjunto dos vértices $V = \bigcup_{n\geq 0} V_n$ e o conjunto das arestas $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$ são decompostos em subconjuntos disjuntos V_n e E_n tal que:*

(i) $V_0 = \{v_0\}$ *é um único ponto;*

(ii) V_n *e* E_n *são conjuntos finitos para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) existe uma aplicação inicial $i : E_n \to V_{n-1}$ *e uma aplicação terminal* $t : E_n \to V_n$*, e* i^{-1} *é não vazio para todo* v *em* V*, e* t^{-1} *é não vazio para todo* $v \neq v_0$ *em* V*.*

Podemos esboçar um diagrama de Bratteli como na figura abaixo.

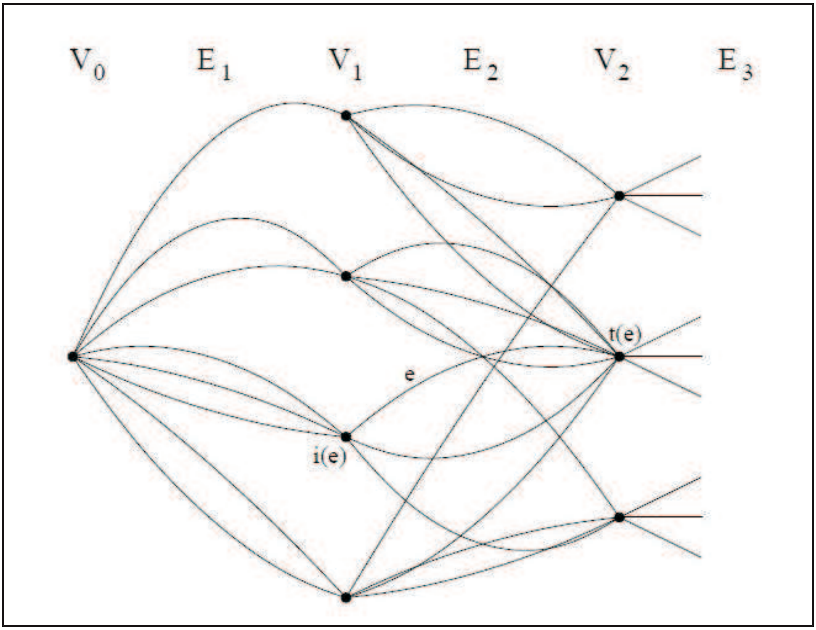

Figura 1: Diagrama de Bratteli

Definição 4.3.2. *Seja (V, E) um diagrama de Bratteli. Para $M \geq 0$, um caminho p é uma sequência de arestas $(e_{M+1}, e_{M+2}, \cdots)$ tal que $e_n \in E_n$ e $t(e_n) = i(e_{n+1})$ para todo $n > M$. Para $N \geq M$, um caminho finito $p = (e_{M+1}, e_{M+2}, \cdots, e_N)$ é a truncagem de um caminho infinito.*

Definição 4.3.3. *Seja (V, E) um diagrama de Bratteli. Definimos o espaço $X(V, E)$ como sendo a coleção dos caminhos* *infinitos do diagrama começando em v_0. Explicitamente escrevemos*

$$X(V,E)=\{x=(x_1,x_2,\cdots):x_n\in E_n,\, t(x_n)=i(x_{n+1})\,\forall\, n\geq 1\}.$$

Observe que podemos considerar x como um elemento do produto cartesiano $\prod\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Equipando cada E_n com a topologia discreta este torna-se um espaço compacto por (ii), e assim, pelo Teorema de Tychonov, o produto cartesiano $\prod\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ é compacto com a topologia produto. Podemos ver $X(V,E)$ como um subconjunto fechado de $\prod\limits_{n} E_n$ e portanto também compacto. De fato, para cada $n\in\mathbb{N}$, a projeção canônica $x\mapsto x_n:\prod_{n=1}^{\infty}E_n\to E_n$ é contínua. Também as aplicações terminal $t:E_n\to V_n$ e inicial $i:E_{n+1}\to V_n$ são contínua para todo $n\in\mathbb{N}$, uma vez que E_n e V_n são discretos. Segue que as aplicações $\rho_n:\prod_{n=1}^{\infty}E_n\to V_n$, $\rho_n(x)=t(x_n)$ e $\gamma_n:\prod_{n=1}^{\infty}E_n\to V_n$, $\gamma_n(x)=i(x_{n+1})$ são contínuas para todo $n\in\mathbb{N}$. Como, para cada $n\in\mathbb{N}$, V_n é discreto e portanto Hausdorff, o conjunto $F_n=\{x\in\prod_{n=1}^{\infty}E_n\ :\ t(x_n)=i(x_{n+1})\}=\{x\in\prod_{n=1}^{\infty}E_n\ :\ \rho_n(x)=\gamma_n(x)\}$ é fechado em $\prod_{n=1}^{\infty}E_n$. Portanto $X=F_1\cap F_2\cap F_3\cap\cdots$ é fechado em $\prod\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ como queríamos.

Definição 4.3.4. *Definimos E^N como o conjunto dos cami-*

nhos começando em V_0 *e terminando em* V_N*, isto é,*

$$E^N = \{p = (e_0, e_1, \cdots, e_N) : e_n \in E_n, t(e_n) = i(e_{n+1}), \forall\, n < N\}.$$

E para qualquer $p \in E^N$*, definimos*

$$U(p) = \{x \in X(V, E) \ : \ (x_1, \cdots, x_N) = p\}$$

Proposição 4.3.5. *Seja* $X(V, E)$ *um diagrama de Bratteli.*

1. $U(p)$ *é aberto e fechado, em particular compacto. E* $X(V, E)$ *é Hausdorff.*

2. *A coleção de todos os conjuntos*

   $$\{U(p) \ : \ p \in E^N, \, N \geq 1\}$$

   é uma base enumerável para a topologia em $X(V, E)$*.*

3. $X(V, E)$ *é compacto, metrizável e totalmente desconexo.*

Demonstração:

1. Claro que $U(p)$ é aberto pois

   $$U(p) = (\{e_0\} \times \{e_1\} \times \cdots \times \{e_N\} \times E_{N+1} \times \cdots) \cap X(V, E).$$

   Em seguida, se $p, q \in E^N$ e $p \neq q$, então $U(p)$ e $U(q)$ são disjuntos. Note que estes conjuntos cobrem

$X(V,E)$, ou seja, para $N \geq 1$ fixo

$$X(V,E) = \dot{\bigcup}_{p \in E^N} U(p).$$

Se $x \in X(V,E)$ então $x \in U(p)$ para $p = (x_1, \cdots, x_N)$. Logo o complementar de $U(p)$ é a união finita dos outros $U(q)$, que é aberta, e portanto $U(p)$ é fechado e compacto.

Sejam $x, y \in X(V,E)$ com $x \neq y$. Então existe $N \geq 1$ tal que $x_N \neq y_N$, fazendo $p = (x_1, \cdots, x_N)$ e $q = (y_1, \cdots, y_N)$ segue que $x \in U(p)$, $y \in U(q)$ e $U(p) \cap U(q) = \varnothing$. Portanto $X(V,E)$ é Hausdorff.

2. Para cada ponto $x \in X(V,E)$ existe $U(p)$ tal que $x \in U(p)$, basta tomar $p = (x_1, \cdots, x_N)$.

   Sejam $p = (e_1, \cdots, e_N)$ e $q = (f_1, \cdots, f_M)$, e suponha que $M \geq N$. Se $x \in U(p) \cap U(q)$ então $(x_1, \cdots, x_N) = (e_1, \cdots, e_N)$ e $(x_1, \cdots, x_M) = (f_1, \cdots, f_M)$. Tome $r = (x_1, \cdots, x_M, x_{M+1})$, segue que $x \in U(r)$ e $U(r) \subseteq U(p) \cap U(q)$.

   Portanto, pela Proposição (1.3.2), a coleção

   $$\{U(p) \ : \ p \in E^N, \, N \geq 1\}$$

   forma uma base para $X(V,E)$. Além do mais, E^N é finito para todo $N \geq 1$ e assim a coleção $\{U(p) \ : \ p \in E^N, \, N \geq 1\}$ é uma base enumerável.

3. Já temos que $X(V,E)$ é um espaço de Hausdorff compacto com base enumerável. Então, pelo Teorema da Metrização de Urysohn, $X(V,E)$ é metrizável. Agora, $X(V,E)$ é totalmente desconexo pois é metrizável e tem uma base de conjuntos simultaneamente abertos e fechados. ∎

Agora, nosso objetivo é determinar uma relação de equivalência étale R em $X(V,E)$. Para isto definimos,

$$(x,y) \in R \subseteq X(V,E) \times X(V,E)$$

se e somente se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = y_n$ para todo $n > \mathbb{N}$. Temos que R define uma relação de equivalência em $X(V,E)$, chamada de relação de equivalência “cofinal” ou “tail”.

Para cada $N \geq 0$ definimos,

$$R_N = \{(x,y) \ : \ x,y \in X(V,E) \text{ e } x_n = y_n \ \ \forall n > N\}.$$

Observação 4.3.6. *$R_0 = \{(x,x) \ : \ x \in X(V,E)\}$, R_N é uma relação de equivalência, R_N está contido em R_{N+1} e ainda,*

$$R = \bigcup_{N=0}^{\infty} R_N.$$

Dotamos cada R_N com a topologia relativa de $X(V,E) \times X(V,E)$ e R com a topologia limite indutivo. Ou seja, um subconjunto $U \subseteq R$ é aberto se, e somente se, $U \cap R_N$ é aberto em R_N para todo $N \geq 0$.

Com essas topologias temos que R_N é subconjunto aberto de R_{N+1} para todo $N \geq 0$ e consequentemente, R_N é um subconjunto aberto de R para todo $N \geq 0$. Realmente, note que $U \subseteq R_{N+1}$ é aberto se

$$U = \{(x, y) \in A \times B \,:\, A, B \subseteq X(V, E) \text{ são abertos e } \\ x_n = y_n \;\forall\; n > N+1\}.$$

Logo,

$$R_N = \{(x, y) \in X(V, E) \times X(V, E) \;:\; x_n = y_n \;\forall\, n > N\}$$

é aberto em R_{N+1}. Segue que R_N também é um subconjunto aberto de $R_{N+2}, R_{N+3}, \cdots$. Para concluir, vamos ver que R_N é aberto em R para todo N.
Se $M \geq N$,

$$R_N \cap R_M = R_N \text{ aberto em } R_M,$$

e se $M < N$,

$$R_N \cap R_M = R_M \text{ aberto em } R_M.$$

Outro fato importante para provarmos é que R_N é compacto em R para todo N.

Proposição 4.3.7.

1. *R_N é fechado em $X(V, E) \times X(V, E)$, da mesma forma*

R_N é fechado em R_{N+1}.

2. R_N é compacto.

3. R_N é subconjunto compacto de R.

Demonstração:

1. Seja $\{(x^k, y^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em R_N que converge para (x, y). Claro que $(x, y) \in X(V, E) \times X(V, E)$, pois $X(V, E)$ é fechado. Sejam $x = (x_1, x_2, \cdots)$ e $y = (y_1, y_2, \cdots)$, precisamos apenas provar que $x_n = y_n$ para todo $n > N$. Como a topologia de R_N é a topologia relativa de $X(V, E) \times X(V, E)$, segue que $\lim_{k\to\infty} x_n^k = x_n$ e $\lim_{k\to\infty} y_n^k = y_n$. Para cada k fixo, $(x^k, y^k) \in R_N$ e $x_n^k = y_n^k$ para todo $n > N$. Logo, $x_n = \lim_{k\to\infty} x_n^k = \lim_{k\to\infty} y_n^k = y_n$ para todo $n > N$, como queríamos.

2. Vimos que $X(V, E)$ é compacto, então $X(V, E) \times X(V, E)$ é compacto. Pelo item 1., R_N é compacto com a topologia relativa de $X(V, E) \times X(V, E)$.

3. Seja $\{U_\lambda\}_{\lambda\in L}$ uma família de conjuntos abertos em R que cobrem R_N. Com efeito, a família $(V_\lambda = U_\lambda \cap R_N)_{\lambda\in L}$ de subconjuntos abertos de R_N cobrem R_N. Pelo item 2., existe uma subfamília finita $(V_{\lambda_1}, \cdots, V_{\lambda_n})$ tal que $R_N \subseteq V_{\lambda_1} \bigcup \cdots \bigcup V_{\lambda_n}$. Portanto

$\{U_{\lambda_i}\}_{i=1}^n$ é uma família finita de conjuntos abertos em R que cobrem R_N. ■

Definição 4.3.8. *Para cada $N \geq 0$ e para $p, q \in E^N$, $p = (e_1, \cdots, e_N)$, $q = (f_1, \cdots, f_N)$ definimos:*

$$U(p,q) = \{(x,y) \,:\, x \in U(p), y \in U(q) \text{ e } x_n = y_n \,\forall\, n > N\}.$$

Note que $U(p,q)$ é não vazio se e somente se $t(e_N) = t(f_N)$. $U(p,q)$ é a intersecção de R_N com o produto cartesiano $U(p) \times U(q)$, que é aberto em $X(V,E) \times X(V,E)$ e portanto $U(p,q)$ aberto em $R_N, R_{N+1}, \cdots$. Além do mais, $U(p,q)$ é aberto em R. De fato, se $M \geq N$,

$$U(p,q) \cap R_M = U(p,q),$$

que é aberto em R_N, logo aberto em R_M. E se $M < N$,

$$U(p,q) \cap R_M = U(p',q'),$$

com $p' = (e_1, \cdots, e_M)$ e $q' = (f_1, \cdots, f_M)$, o qual é aberto em R_M.

Enfim, temos todas as informações necessárias para mostrar que R é uma relação étale.

- $R = \bigcup_{N=0}^{\infty} R_N$ é σ - compacto pela Proposição 4.3.7 item 3.

- Se $(x,y) \in R$ então existe $N \geq 0$ tal que $(x,y) \in R_N$.

Tomando $p = (x_1, \cdots, x_N)$ e $q = (y_1, \cdots, y_N)$ temos que $U(p, q)$ é uma vizinhança aberta de (x, y) e $U(p)$ e $U(q)$ são vizinhanças aberta de x e y, respectivamente. E as aplicações *range* $r : U(p, q) \to U(p)$ e *source* $s : U(p, q) \to U(q)$ são homeomorfismos.

Agora vamos à busca da C^* - álgebra associada com a relação de equivalência cofinal de um diagrama de Bratteli. Primeiro passo vamos descrevemos $C^*_r(R_N)$, para N fixo.

Para $v \in V_N$, X_v denota o conjunto de todos os caminhos em X que passam em v. Podemos escrever

$$X = \bigcup_{v \in V_N} X_v.$$

Note que para todo x em X_v, y em X_w com $v, w \in V_n$ e $v \neq w$ temos que $(x, y) \notin R_N$.

Seja X^i_v o conjunto dos caminhos de v_0 até v e seja X^f_v o conjuntos dos caminhos a partir de v. Observe que

$$X_v \simeq X^i_v \times X^f_v$$

e a restrição de R_N para X_v é a relação trivial em X^i_v, $R^i_v = X^i_v \times X^i_v$, produto com a relação co-trivial em X^f_v, $R^f_v = \triangle_{X^f_v}$ (note que X^f_v pode ser identificado com X e assim Hausdorff compacto). Agora, usando os exemplos 3.4 e 3.6 obtemos

$$C^*_r(R_N) \simeq \bigoplus_{v \in V_n} (C(X^f_v, M_{k(v)}(\mathbb{C})))$$

onde $K(v) = |X_v^i|$.

Para finalizar será necessário as definições de uma sequência indutiva de C^*- álgebras e do limite indutivo de uma sequência indutiva.

Definição 4.3.9. *Uma sequência indutiva de C^*- álgebras é uma sequência $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de C^*- álgebras e uma sequência $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$ de $*$ - homomorfismo, usualmente escrevemos*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots .$$

Para $m > n$ devemos também considerar os $*$ - homomorfismos compostos

$$\varphi_{m,n} = \varphi_{m-1} \circ \varphi_{m-2} \circ \cdots \circ \varphi_n : A_n \to A_m.$$

os quais, juntamente com o $*$ - homomorfismo φ_n, são chamados de $*$ - homomorfismos de ligação (ou aplicações de ligação). É conveniente considerar os $*$ - homomorfismo de ligação $\varphi_{m,n}$ quando $m \leq n$. São definidos por $\varphi_{n,n} = Id_{A_n}$ e $\varphi_{m,n} = 0$ quando $m < n$.

Definição 4.3.10. *Um limite indutivo de uma sequência indutiva*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots .$$

de C^*- álgebras é um sistema $(A, \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty})$, onde $\mu_n : A_n \to A$ é um $*$ - homomorfismo para cada $n \in \mathbb{N}$, e tais que as *duas condições são satisfeitas.*

(i) O diagrama

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\mu_n"'] & & A_{n+1} \arrow[dl, "\mu_{n+1}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

comuta para cada $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Se $(B, \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty})$ é um sistema, onde B é uma C^*- álgebra, $\lambda_n : A_n \to B$ é um $*$ - homomorfismo para cada $n \in \mathbb{N}$, e com $\lambda_n = \lambda_{n+1} \circ \varphi_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe um único $*$ - homomorfismo $\lambda : A \to B$ fazendo o diagrama

$$\begin{tikzcd} & A_n \arrow[dl, "\mu_n"'] \arrow[dr, "\lambda_n"] & \\ A \arrow[rr, "\lambda"'] & & B \end{tikzcd}$$

comutar para cada $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 4.3.11. *Toda sequência indutiva de C^*- álgebras*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots .$$

tem um limite indutivo $(A, \{\mu_n\})$. Além disso satisfaz:

1. $A = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)}$;

2. $\|\mu(a)\| = lim_{m\to\infty} \|\varphi_{m,n}(a)\|$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $a \in A_n$;

3. $Ker(\mu_n) = \{a \in A_n \ : \ lim_{m\to\infty} \|\varphi_{m,n}\| = 0\}$;

4. *se* $(B, \{\lambda_n\})$ *e* $\lambda : A \to B$ *são como na Definição 4.3.10 (ii), então:*

   (a) $Ker(\mu_n) \subseteq Ker(\lambda_n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

   (b) λ *é injetiva se, e somente se,* $Ker(\lambda_n) \subseteq Ker(\mu_n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

   (c) λ *é sobrejetiva se, e somente se,* $B = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A_n)}$.

Demonstração: Ver [12], pg 94.

Enunciadas as definições e a proposição necessárias, voltamos ao contexto da C^*- álgebra reduzida associada à relação de equivalência cofinal de um diagrama de Bratteli.

Obtemos uma sequência

$$R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq \cdots \subseteq R$$

tal que $R = \bigcup_{N \geq 0} R_N$. Agora vamos provar que

$$C_r^*(R_0) \subseteq C_r^*(R_1) \subseteq C_r^*(R_2) \subseteq \cdots,$$

e que $C_r^*(R)$ é isometricamente $*$ - isomorfo ao limite indutivo da sequência de C^*- álgebras

$$C_r^*(R_0) \xrightarrow{i_0} C_r^*(R_1) \xrightarrow{i_1} C_r^*(R_2) \xrightarrow{i_2} \cdots .$$

Proposição 4.3.12. *$C_r^*(R_N)$ é uma subalgebra de $C_r^*(R_{N+1})$, para todo $N = 0, 1, 2, \cdots$.*

Demonstração: É suficiente mostrar a proposição para

$N = 0$. A idéia é incluir uma função $f \in C_c(R_0)$ em $C_c(R_1)$, estendendo-a com 0 em $R_1 \setminus R_0$. Mais explicitamente, definimos $i : C_c(R_0) \to C_c(R_1)$ por

$$i(f)(x,y) = \widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se} \quad (x,y) \in R_0 \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) \in R_1 \setminus R_0 \end{cases}.$$

Vamos provar que i é um $*$ - homomorfismo isométrico. E assim podemos estender i para um $*$ - homomorfismo isométrico de $C_r^*(R_0)$ em $C_r^*(R_1)$. Denotamos a classe de um ponto x em R_N por $[x]_N$.

- i é um $*$ - homomorfismo. Temos que

$$\widetilde{f * g}(x,y) = \begin{cases} f * g(x,y) = \displaystyle\sum_{z \in [x]_0} f(x,z)g(z,y) \quad \text{se} \quad (x,y) \in R_0 \\ 0 \quad \text{se} \quad (x,y) \in R_1 \setminus R_0 \end{cases}.$$

Por outro lado,

$$\widetilde{f} * \widetilde{g}(x,y) = \sum_{z \in [x]_1} \widetilde{f}(x,z)\widetilde{g}(z,y),$$

e temos duas possibilidades. Se $(x,y) \in R_1 \setminus R_0$, então para todo $z \in [x]_1$, ou $(x,z) \in R_1 \setminus R_0$ ou $(z,y) \in R_1 \setminus R_0$, caso contrário teríamos $(x,y) \in R_0$. Então para todo $z \in [x]_1$, ou $\widetilde{f}(x,z) = 0$ ou $\widetilde{g}(z,y) = 0$ e assim $\widetilde{f} * \widetilde{g}(x,y) = 0$ se $(x,y) \in R_1 \setminus R_0$.

Se $(x,y) \in R_0$. Seja $[x]_0$ o conjunto $\{z \in [x]_1 : (x,z) \in R_0\}$ e $[x]_1 - [x]_0 = \{z \in [x]_1 : (x,z) \in R_1 \setminus R_0\}$. Observe que se $z \in [x]_0$ então $(z,y) \in R_0$, e se $z \in [x]_1 - [x]_0$ então

$(z,y) \in R_1 \setminus R_0$, e assim $\widetilde{g}(z,y) = 0$. Isto implica que

$$\begin{aligned}\widetilde{f} * \widetilde{g}(x,y) &= \sum_{z \in [x]_0} \widetilde{f}(x,z)\widetilde{g}(z,y) + \sum_{z \in [x]_1 - [x]_0} \widetilde{f}(x,z)\widetilde{g}(z,y) \\ &= \sum_{z \in [x]_0} f(x,z)g(z,y) = \widetilde{f * g}(x,y).\end{aligned}$$

e i é um homomorfismo.

A condição $*$ segue imediatamente e assim i é um $*$ -homomorfismo.

- i é uma isometria. Temos que a norma reduzida de uma função $\widetilde{f} \in C_c(R_1)$ é dada por $\|\widetilde{f}\|_{red} = \sup\limits_{x \in X} \|\lambda_x(\widetilde{f})\|$, onde

$$(\lambda_x(\widetilde{f})\xi)(y) = \sum_{z \in [x]_1} \widetilde{f}(y,z)\xi(z),$$

para $\xi \in \ell^2([x]_1)$.

Podemos escrever $[x]_1$ igual a união disjunta $[x_0]_0 \cup [x_1]_0 \cup [x_2]_0 \cdots$, onde $x_i \in [x]_1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto $\ell^2([x]_1) = \ell^2([x_0]_0) \oplus \ell^2([x_1]_0) \oplus \ell^2([x_2]_0) \oplus \cdots$.

Sejam $\lambda_x^1(\widetilde{f}) := \lambda_x(\widetilde{f})$ e $\lambda_{x_i}^0(f) = \lambda_{x_i}(f)$. Observe que $\lambda_x^1(\widetilde{f})$ atua em $\ell^2([x]_1)$ e $\lambda_{x_i}^0(f)$ atua em $\ell^2([x]_0)$.

Uma vez que mostrarmos que $\lambda_x^1(\widetilde{f}) = \bigoplus \lambda_{x_i}^0(f)$, temos que $\|\widetilde{f}\|_{red} = \sup\limits_{x \in X} \|\lambda_x^1(\widetilde{f})\| = \sup\limits_{x \in X} \| \bigoplus \lambda_{x_i}^0(f)\|$.

É um fato da análise funcional que, se um espaço de Hilbert $H = \bigoplus H_i$, $T = \bigoplus T_i$ é um operador limitado em H e $\|T_i\|$ é uniformemente limitado então $\|T\| = \sup_i \|T_i\|$.

Usando este fato, temos que

$$\begin{aligned}\sup_{x\in X} \|\bigoplus \lambda^0_{x_i}(f)\| &= \sup_{x\in X}\left\{\sup_{xi:[x]_1=\cup[x_i]_0} \|\lambda^0_{x_i}(f)\|\right\} \\ &= \sup_{x\in X} \|\lambda^0_x(f)\| = \|f\|,\end{aligned}$$

e portanto i é isométrico.

Ainda precisamos provar que $\lambda^1_x(\widetilde{f}) = \bigoplus \lambda^0_{x_i}(f)$. Observe que $\ell^2([x_i]_0) \subseteq \ell^2([x]_1)$ é invariante em $\lambda^1_x(\widetilde{f})$, para qualquer $i \in \mathbb{N}$. Para ver isso, seja $i \in \mathbb{N}$ e $\xi \in \ell^2([x]_1)$ com suporte em $\ell^2([x_i]_0)$. Agora, suponha que $y \notin [x_i]_0$. Queremos mostrar que $\lambda^1_x(\widetilde{f})(\xi)(y) = \sum_{z\in[x]_1} f(y,z)\xi(z) = 0$. Mas isto segue imediatamente uma vez que percebemos que, se $(y,z) \notin R_0$ então $\widetilde{f}(y,z) = 0$, e se $(y,z) \in R_0$ então $z \notin [x_i]_0$ e portanto $\xi(z) = 0$.

Em seguida, mostramos que $\lambda^1_x(\widetilde{f})|_{\ell^2([x_i]_0)} = \lambda^0_{x_i}(f)$ e, consequentemente, os resultados desejados segue, uma vez que $\ell^2([x]_1) = \ell^2([x_0]_0) \oplus \ell^2([x_1]_0) \oplus \ell^2([x_2]_0) \oplus \cdots$. Então, tome $\xi \in \ell^2([x_i]_0)$ e seja $y \in [x_i]_0$. Sejam $Z_2 = \{z \in [x]_1 : (y,z) \notin R_0\}$ e $Z_1 = \{z \in [x]_1 : (y,z) \in R_0 \Leftrightarrow z \in [x_i]_0\}$. Observe que $\widetilde{f}(y,z) = 0 \in Z_2$. Então, temos como desejado:

$$\begin{aligned}\lambda^1_x(\widetilde{f})\xi(y) &= \sum_{z\in[x]_1} \widetilde{f}(y,z)\xi(z) = \sum_{z\in Z_1} \widetilde{f}(y,z)\xi(z) + \sum_{z\in Z_2} \widetilde{f}(y,z)\xi(z) \\ &= \sum_{z\in[x]_0} \widetilde{f}(y,z)\xi(z) = \lambda^0_{x_i}(f)(\xi|_{[x_i]_0})(y).\end{aligned}$$

■

Proposição 4.3.13. *O limite indutivo das C^*-álgebras $C_r^*(R_N)$, $\varinjlim C_r^*(R_N)$, é isomorfo a C^*- álgebra $C_r^*(\bigcup R_N) = C_r^*(R)$.*

Demonstração: Para provar essa proposição, primeiro precisamos definir uma família de inclusões de $C_r^*(R_N)$ em $C_r^*(\bigcup R_N)$. Definimos estas inclusões, da mesma forma que incluímos $C_r^*(R_0)$ em $C_r^*(R_1)$, na proposição anterior. Assim, para $n = 0, 1, 2, \cdots$ definimos $\lambda_n : C_c(R_n) \to C_c(\bigcup R_N)$ por

$$\lambda_n(f)(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in R_n \\ 0 & \text{se } (x,y) \in (\bigcup R_N) - R_n \end{cases}$$

Cada λ_n é um $*$ - homomorfismo isométrico e, portanto, pode ser estendido a um $*$ - homomorfismo isométrico de $C_r^*(R_n)$ em $C_r^*(\bigcup R_N)$ (a prova desta afirmação é análoga à proposição anterior). Agora, denotamos por i_N a inclusão de $C_r^*(R_N)$ em $C_r^*(R_{N+1})$. Então $\lambda_n = \lambda_{n+1} \circ i_n$, para todo $n = 0, 1, 2, \cdots$ e, pela Definição 4.3.10 (ii), segue-se que $C_r^*(\bigcup R_N)$ é isomorfo ao limite indutivo $\varinjlim C_r^*(R_N)$, como desejado. ∎

5 Skew Anel de Grupo

Em 2005, M. Dokuchaev e R. Exel [1] obtiveram resultados a respeito de ações parciais num contexto puramente algébrico. Motivados por este trabalho e pelos exemplos do capítulo anterior elaboramos este capítulo. O capítulo 5 tem uma “caraŽŽ diferente dos outros, pois esquecemos aqui a topologia étale.

Sejam G um grupo enumerável e X um conjunto qualquer. Dado uma ação h de G em X, mostraremos que existe uma ação associada α de G em $\mathcal{F}_0(X)$ (o conjunto das funções de X em um corpo $\mathbb{K}$ eventualmente nulas). E vice-versa, dado uma ação α de G em $\mathcal{F}_0(X)$, existe uma ação h de G em X tal que α é proveniente da ação h.

Definiremos uma relação de equivalência em X, análoga ao primeiro exemplo do Capítulo 4 (claro que aqui sem a topologia), e construiremos uma $\mathbb{K}$ - álgebra associativa a partir desta relação de equivalência. E por fim, provaremos que esta $\mathbb{K}$ - álgebra associativa é $\mathbb{K}$ - isomorfa ao *skew anel de grupo* $\mathcal{F}_0(X) \rtimes_\alpha G$.

5.1 Homomorfismos sobre um Corpo $\mathbb{K}$

Nesta primeira seção vamos provar que existe uma correspondência biunívoca entre um conjunto qualquer X e o espaço de todos os $\mathbb{K}$-homomorfismos $\phi : \mathcal{F}_0(X) \to \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo e $\mathcal{F}_0(X)$ é o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$ eventualmente nulas.

Definição 5.1.1. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Um conjunto A é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$, ou uma $\mathbb{K}$ - álgebra, se A é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e existe uma multiplicação bem definida em A;*

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \to & A \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

que satisfaz as seguintes condições, para quaisquer $x, y, z \in A$ e $k \in \mathbb{K}$:

(i) $k(xy) = (kx)y = x(ky)$;

(ii) $(x+y)z = xz + yz$ *e* $z(x+y) = zx + zy$.

Se $xy = yx$ dizemos que A é uma $\mathbb{K}$ - álgebra comutativa.

E se $(xy)z = x(yz)$ dizemos que A é uma $\mathbb{K}$ - álgebra associativa.

Definição 5.1.2. *Um conjunto não vazio $I \subseteq A$ é um ideal de A se para quaisquer $x, y \in I, a \in A$ tem-se*

$0_A, x - y, ax, xa \in I$.

Um ideal M de A diz-se um ideal maximal em A se $M \neq A$ e se J é um ideal de A tal que $M \subseteq J \subseteq A$ então $J = M$ ou $J = A$.

Exemplo 5.1. Sejam X um conjunto qualquer e $\mathbb{K}$ um corpo. Denotamos por $\mathcal{F}_0(X)$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$ tal que f tem suporte finito, ou seja, $f(x) = 0$ para todos os pontos $x \in X$, exceto para uma quantidade finita de x's. Definimos as seguintes operações em $\mathcal{F}_0(X)$, para quaisquer $f, g \in \mathcal{F}_0(X), k \in \mathbb{K}$ e $x \in X$,

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(kf)(x) = k.f(x)$;
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

As operações estão bem definidas, pois $f + g, kf$ e fg têm suporte finito. E como $\mathbb{K}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$, temos que $\mathcal{F}_0(X)$ é uma álgebra com as operações acima.

Exemplo 5.2. Note que $\mathcal{F}_0(X)$ é uma álgebra sem unidade. Seja $\widetilde{\mathcal{F}_0(X)}$ a unitização de $\mathcal{F}_0(X)$ (como no Capítulo 1). Os elementos de $\widetilde{\mathcal{F}_0(X)}$ são da forma (f, λ) com $f \in \mathcal{F}_0(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\widetilde{\mathcal{F}_0(X)}$ torna-se uma $\mathbb{K}$ - álgebra com as operações definidas por:

- $(f, \lambda) + (g, \mu) = (f + g, \lambda + \mu)$;

- $k(f,\lambda) = (kf, k\lambda)$;
- $(f,\lambda)(g,\mu) = (fg + \lambda g + \mu f, \lambda\mu)$;

para quaisquer $(f,\lambda),(g,\mu) \in \widetilde{\mathcal{F}_0(X)}$ e $k \in \mathbb{K}$.

Exemplo 5.3. Sejam X um conjunto, $\mathbb{K}$ um corpo e

$$\mathcal{F}_c(X) = \{f : X \to \mathbb{K} : \#\{k \in \mathbb{K} : \#\{f^{-1}(k)\} = \infty\} = 1\}.$$

Observe que $\mathcal{F}_c(X)$ é o conjunto das "funções eventualmente constantes". Definimos em $\mathcal{F}_c(X)$ as mesmas operações do Exemplo 5.1. Desta forma $\mathcal{F}_c(X)$ também é uma $\mathbb{K}$- álgebra.

Observação 5.1.3.

1. *A função constante igual a $1_{\mathbb{K}}$, que denotamos por f_1, é a unidade de $\mathcal{F}_c(X)$.*

2. *$f \in \mathcal{F}_c(X)$ é inversível se, e somente se, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$.*

3. *Se $f \in \mathcal{F}_0(X)$ então $\#\{k \in \mathbb{K} : \#\{f^{-1}(k)\} = \infty\} = \#\{0\} = 1$. Portanto $f \in \mathcal{F}_c(X)$ e $\mathcal{F}_0(X) \subseteq \mathcal{F}_c(X)$, além do mais, $\mathcal{F}_0(X)$ é um ideal de $\mathcal{F}_c(X)$.*

Lema 5.1.4. $\mathcal{F}_c(X) = span\{\mathcal{F}_0(X), f_1\}$.

Demonstração:

($\subseteq$) Seja $f \in \mathcal{F}_c(X)$. Então existe um único $c \in \mathbb{K}$ tal que $\#\{f^{-1}(c)\} = \infty$. Se $f \equiv c$ então $f = cf_1 \in$

$span\{\mathcal{F}_0(X), f_1\}$. Caso contrário, existem $x_1, \cdots, x_n \in X$ tais que $f(x_i) \neq c$. Definimos $g : X \to \mathbb{K}$ por:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in X \setminus \{x_1, \cdots, x_n\} \\ f(x) - c & \text{se } x \in \{x_1, \cdots, x_n\} \end{cases},$$

Então $g \in \mathcal{F}_0(X)$ e $f = g + cf_1$. Portanto $f \in span\{\mathcal{F}_0(X), f_1\}$.

($\supseteq$) Se $f \in span\{\mathcal{F}_0(X), f_1\}$ então $f = \sum_{i=1}^{n}(c_i f_i) + cf_1$, onde $c, c_i \in \mathbb{K}$ e $f_i \in \mathcal{F}_0(X)$ para $i = 1, \cdots, n$. Como cada f_i tem suporte finito, $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ também tem suporte finito, suponha que seja $\{x_1, \cdots, x_m\}$. Então $f(x) = c$ para qualquer $x \in X \setminus \{x_1, \cdots, x_m\}$ e $\#\{k \in \mathbb{K} : \#\{f^{-1}(c)\} = \infty\} = \#\{c\} = 1$. Portanto $f \in \mathcal{F}_c(X)$. ■

No desenvolvimento do Lema 5.1.4, podemos observar que qualquer função de $\mathcal{F}_c(X)$ pode ser escrita como a soma de uma função g em $\mathcal{F}_0(X)$ mais uma função constante $f(x) = \lambda$, a qual denotaremos apenas pela constante λ, e ainda, f é escrita de forma única. De fato, se $f \in \mathcal{F}_c(X)$ é tal que

$$f = g + \lambda, \quad g \in \mathcal{F}_0(X), \lambda \in \mathbb{K}, \text{ e}$$

$$f = h + k, \quad h \in \mathcal{F}_0(X), k \in \mathbb{K},$$

então $g - h = k - \lambda$. Mas como $g - h \in \mathcal{F}_0(X)$, podemos apenas ter $k - \lambda = 0$. Portanto $k = \lambda$ e $g = h$.

Definição 5.1.5. *Sejam A e B duas $\mathbb{K}$ - álgebra. Uma aplicação $\psi : A \to B$ diz-se um $\mathbb{K}$ - homomorfismos se para quaisquer $x, y \in A$ e qualquer $k \in \mathbb{K}$ se verifica:*

(i) $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$;

(ii) $\psi(kx) = k\psi(x)$;

(iii) $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$.

Um $\mathbb{K}$ - homomorfismo diz-se um $\mathbb{K}$ - isomorfismo se for bijetivo.

Lema 5.1.6. *As $\mathbb{K}$ - álgebras $\widetilde{\mathcal{F}_0(X)}$ e $\mathcal{F}_c(X)$ são $\mathbb{K}$ - isomorfas.*

Demonstração: Este isomorfismo se dá via aplicação $\rho : \widetilde{\mathcal{F}_0(X)} \to \mathcal{F}_c(X)$ definida por $\rho(f, \lambda) = f + \lambda$. ∎

Definição 5.1.7. *Um homomorfismo sobre um corpo $\mathbb{K}$ de uma $\mathbb{K}$ - álgebra A é uma aplicação $\phi : A \to \mathbb{K}$ que satisfaz as seguintes condições, para quaisquer $x, y \in A, k \in \mathbb{K}$:*

(i) $\phi(kx + y) = k\phi(x) + \phi(y)$;

(ii) $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$;

(iii) ϕ *é não nulo.*

Denotaremos a coleção de todos os homomorfismos sobre $\mathbb{K}$ de uma $\mathbb{K}$ - álgebra A por $\widehat{A}$.

Observação 5.1.8. *Se A é uma $\mathbb{K}$ - álgebra com unidade 1_A então $\phi(x) = \phi(1_A x) = \phi(1_A)\phi(x)$, implica que $\phi(1_A) = 1_{\mathbb{K}}$.*

Exemplo 5.4. Sejam X um conjunto qualquer e $\mathbb{K}$ um corpo. Para cada $x \in X$ a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \phi_x : \mathcal{F}_0(X) & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & \phi_x(f) = f(x) \end{array}$$

é um homomorfismo sobre $\mathbb{K}$. De fato, para quaisquer $f, g \in \mathcal{F}_0(X), k \in \mathbb{K}$ temos que,

- $\phi_x(kf + g) = (kf + g)(x) = k.f(x) + g(x) = k\phi_x(f) + \phi_x(g)$
- $\phi_x(fg) = (fg)(x) = f(x)g(x) = \phi_x(f)\phi_x(g)$
- A função $\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$ está em $\mathcal{F}_0(X)$ e $\phi_x(\delta_x) = \delta_x(x) = 1$. Logo ϕ_x é não nulo.

Da mesma forma a aplicação $f \mapsto \phi_x(f) = f(x) : \mathcal{F}_c(X) \to \mathbb{K}$ é um homomorfismo sobre $\mathbb{K}$ de $\mathcal{F}_c(X)$.

Exemplo 5.5. Se $\phi : \mathcal{F}_0(X) \to \mathbb{K}$ é um homomorfismo sobre $\mathbb{K}$ então $\widetilde{\phi}$ definido por

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\phi} : \mathcal{F}_c(X) & \to & \mathbb{K} \\ (f + \lambda) & \mapsto & \phi(f) + \lambda \end{array}$$

é um homomorfismo sobre $\mathbb{K}$. Realmente,

- $\widetilde{\phi}(k(f+\lambda)+(g+\mu)) = \widetilde{\phi}(kf+g+k\lambda+\mu)$
  $= \phi(kf+g)+k\lambda+\mu = k\phi(f)+\phi(g)+k\lambda+\mu$
  $= k(\phi(f)+\lambda)+\phi(g)+\mu = k\widetilde{\phi}(f+\lambda)+\widetilde{\phi}(g+\mu)$.

- $\widetilde{\phi}((f+\lambda)(g+\mu)) = \widetilde{\phi}(fg+\mu f+\lambda g+\lambda\mu)$
  $= \phi(fg+\mu f+\lambda g)+\lambda\mu = \phi(f)\phi(g)+\mu\phi(f)+\lambda\phi(g)+\lambda\mu$
  $= (\phi(f)+\lambda)(\phi(g)+\mu) = \widetilde{\phi}(f+\lambda)\widetilde{\phi}(g+\mu)$.

- $\phi(f_1) = 1$, logo ϕ é não nulo.

De forma análoga, se $\phi : \mathcal{F}_0(X) \to \mathbb{K}$ é um homomorfismo sobre $\mathbb{K}$ então podemos estender ϕ para um homomorfismo sobre $\mathbb{K}$ de $\widetilde{\mathcal{F}_0(X)}$ dado por: $(f,\lambda) \mapsto \phi(f)+\lambda : \widetilde{\mathcal{F}_0(X)} \to \mathbb{K}$.

Lema 5.1.9. *Seja ϕ um homomorfismo sobre $\mathbb{K}$ da $\mathbb{K}$ - álgebra $\mathcal{F}_c(X)$. Então $\phi(\lambda) = \lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Demonstração: Sejam $\lambda \in \mathbb{K}, f+\mu \in \mathcal{F}_c(X)$ com $\phi((f+\mu) \neq 0$. Então $\phi(\lambda(f+\mu)) = \lambda\phi(f+\mu)$. Agora consideramos λ como a função constante igual a λ em $\mathcal{F}_c(X)$. Então $\phi(\lambda(f+\mu)) = \phi(\lambda)\phi(f+\mu)$. Temos que $\phi(\lambda)\phi(f+\mu) = \lambda\phi(f+\mu)$ e portanto $\phi(\lambda) = \lambda$, pois $\phi(f+\mu) \neq 0$. ■

Os dois próximos resultados são bem conhecidos em álgebra, por isso vamos apenas enunciá-los.

Proposição 5.1.10. *Seja A uma $\mathbb{K}$ - álgebra comutativa com unidade e seja M um ideal de A. Então M é um ideal maximal de A se, e somente se, $\dfrac{A}{M}$ é um corpo.*

Teorema 5.1.11. *(Teorema do homomorfismo). Sejam A, B $\mathbb{K}$ - álgebras e $\psi : A \to B$ um $\mathbb{K}$ - homomorfismo. Então $\dfrac{A}{Ker\ \psi}$ e $Im(\psi)$ são $\mathbb{K}$ - isomorfos.*

Lema 5.1.12. *O Kernel de um homomorfismo sobre $\mathbb{K}$ de $\mathcal{F}_c(X)$ é um ideal maximal.*

Demonstração: Seja $\phi : \mathcal{F}_c(X) \to \mathbb{K}$ um homomorfismo sobre $\mathbb{K}$. É claro que $Ker\,\phi = \{f \in \mathcal{F}_c(X) : \phi(f) = 0\}$ é um ideal de $\mathcal{F}_c(X)$ e, pelo Lema 5.1.9, ϕ é sobrejetivo. Então, pelo teorema do homomorfismo,

$$\frac{\mathcal{F}_c(X)}{Ker\,\phi} \simeq \mathbb{K}.$$

Portanto, pela Proposição 5.1.10, $Ker\,\phi$ é um ideal maximal de $\mathcal{F}_c(X)$. ■

Lema 5.1.13. *Seja ϕ um homomorfismo sobre $\mathbb{K}$ de $\mathcal{F}_c(X)$ e suponha que não existe $x \in X$ tal que $\phi = \phi_x$. Então para cada ponto $p \in X$ existe uma função $f \in Ker\,\phi$ tal que $f(p) \neq 0$.*

Demonstração: Suponha ao contrário. Então existe um $p \in X$ tal que $f(p) = 0$ para qualquer $f \in Ker\,\phi$. Segue que $Ker\,\phi \subseteq \{f \in \mathcal{F}_c(X) : f(p) = 0\} = Ker\,\phi_p$. Pelo Lema 5.1.12, $Ker\,\phi_p$ é maximal, logo $Ker\,\phi = Ker\,\phi_p$.

Agora, se $f \in \mathcal{F}_c(X)$ então $g = f - \phi(f) \cdot 1 \in Ker\,\phi = Ker\,\phi_p$. Assim

$$f = f - \phi(f) \cdot 1 + \phi(f) \cdot 1 \text{ e}$$

$$\phi_p(f) = \phi_p(f - \phi(f).1) + \phi(f)\phi_p(1) = 0 + \phi(f).1 = \phi(f).$$

Portanto $\phi = \phi_p$, o que contradiz a hipótese do lema. ■

Lembre que todo ideal próprio não contém elementos inversíveis. E todo ideal maximal não nulo é um ideal próprio.

A próxima proposição é objetivo desta seção.

Proposição 5.1.14. *Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto X e o conjunto $\widehat{\mathcal{F}_0(X)}$ dada por:*

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \widehat{\mathcal{F}_0(X)} \\ x & \mapsto & \phi_x \end{array}.$$

Demonstração:

Injetividade: Se $x \neq y$ então existe uma função $f \in \mathcal{F}_0(X)$ tal que $f(x) \neq f(y)$ (por exemplo δ_x). Segue que $\phi_x(f) \neq \phi_y(f)$ e portanto $\phi_x \neq \phi_y$.

Sobrejetividade: Suponhamos que existe um homomorfismo $\phi \in \widehat{\mathcal{F}_0(X)}$, que não seja um homomorfismo ϕ_x. Agora estendemos ϕ para $\widetilde{\phi} : \mathcal{F}_c(X) \to \mathbb{K}$ como no Exemplo

5.5. Note que não existe $y \in X$ tal que $\widetilde{\phi} = \phi_y$. Caso contrário, $\widetilde{\phi}$ restrito a $\mathcal{F}_0(X)$ é um ϕ_y, o que é uma contradição. Pelo Lema 5.1.13, para cada ponto $p \in X$, existe uma função $f \in Ker\ \widetilde{\phi}$ tal que $f(p) \neq 0$. Denotamos f por f_p.

Caso 1: Existe algum $p \in X$ tal que $f_p \in \mathcal{F}_c(X) \setminus \mathcal{F}_0(X)$.

Sejam $x_1, \cdots, x_n$ os pontos de X tais que $f_p(x_i) = 0$. Definimos

$$g := f_p + f_{x_1}\delta_{x_1} + \cdots + f_{x_n}\delta_{x_n}.$$

Então $g \in Ker\ \widetilde{\phi}$, pois $Ker\ \widetilde{\phi}$ é um ideal. E mais, $g(x) \neq 0$ para qualquer $x \in X$ e portanto g é inversível. Absurdo!

Caso 2 : Se para todo $p \in X$, $f_p \in \mathcal{F}_0(X)$.

Seja $I = \langle f_p : p \in X \rangle$ o ideal gerado pelas $f_p's$. Claro que $I \subseteq \mathcal{F}_0(X)$. Observamos que $\delta_x \in I$ para todo $x \in X$. Realmente, suponhamos que $f_p(p) = c$. Então $\delta_p = \frac{1}{c} f_p \delta_p \in I$, para qualquer $p \in X$. Mas toda função $f \in \mathcal{F}_0(X)$ é uma combinação linear finita dos δ_x, ou seja, $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{x_i} \in I$. Portanto $I = \mathcal{F}_0(X)$.

Temos que $\mathcal{F}_0(X) = I \subseteq Ker\ \widetilde{\phi}$. Então, para todo $f \in \mathcal{F}_0(X)$, $\phi(f) = \widetilde{\phi}|_{\mathcal{F}_0(X)}(f) = \widetilde{\phi}(f) = 0$. Portanto ϕ é nulo. Absurdo! Logo $x \leftrightarrow \phi_x$ é sobrejetiva como desejado.
$\blacksquare$

5.2 Skew Anel de um Grupo

Nosso próximo objetivo é mostrar que dada uma ação global

$$\begin{array}{rcl} h : G & \to & Bij(X) \\ t & \mapsto & h_t \end{array},$$

onde $Bij(X)$ é o conjunto das bijeções de X em X, existe uma ação α de G em $\mathcal{F}_0(X)$ que provém da ação h. E que dado uma ação α de G em $\mathcal{F}_0(X)$, existe uma ação h de G em $Bij(X)$ tal que α provém de h.

Proposição 5.2.1. *Sejam X e Y conjuntos quaisquer, $\mathbb{K}$ um corpo e $h : X \to Y$ uma bijeção. Então ψ_h definida por*

$$\begin{array}{rcl} \psi_h : \mathcal{F}_0(Y) & \to & \mathcal{F}_0(X) \\ f & \mapsto & f \circ h \end{array}$$

é um $\mathbb{K}$ - isomorfismo.

Demonstração:

- ψ_h está bem definida.
  É claro que $\psi_h(f) \in \mathcal{F}_0(X)$, uma vez que h é bijetiva, que $\psi_h(f)(x) = f \circ h(x) = f(h(x)) = f(y)$ e que $f \in \mathcal{F}_0(X)$.

- ψ_h é um $\mathbb{K}$ - homomorfismo.
  Dados $f, f' \in \mathcal{F}_0(X), k \in \mathbb{K}$ temos que,

$$\begin{aligned}\psi_h(f+f')(x) &= (f+f')\circ h(x) = (f+f')(h(x))\\ &= f(h(x)) + f'(h(x)) = f\circ h(x) + f'\circ h(x)\\ &= \psi_h(f)(x) + \psi_h(f')(x)\\ &= (\psi(f)+\psi(f'))(x),\ \forall\, x \in X.\end{aligned}$$

Logo $\psi_h(f+f') = \psi_h(f) + \psi(f')$.

$$\begin{aligned}\psi_h(kf)(x) &= (kf)\circ h(x) = (kf)(h(x)) = k.f(h(x))\\ &= k.(f\circ h(x)) = k.\psi_h(f)(x),\ \forall\, x \in X.\end{aligned}$$

Então $\psi_h(kf) = k\psi_h(f)$.

$$\begin{aligned}\psi_h(ff')(x) &= (ff')\circ h(x) = (ff')(h(x))\\ &= f(h(x))f'(h(x)) = f\circ h(x)\cdot f'\circ h(x)\\ &= \psi_h(f)(x)\cdot \psi_h(f')(x)\\ &= (\psi_h(f)\psi_h(f'))(x),\ \forall\, x \in X.\end{aligned}$$

Portanto $\psi(f+f') = \psi_h(f)\psi_h(f')$.

- ψ_h é injetiva.
  Se $f \in Ker\,\psi_h \Rightarrow \psi_h(f)(x) = 0\ \forall\, x \in X \Rightarrow f(h(x)) = 0\ \forall\, x \in X \Rightarrow f(y) = 0\ \forall\, y \in Y$, pois f é sobrejetiva. Portanto $f \equiv 0$ e ψ_h é injetiva.

- ψ_h é sobrejetiva.
  Seja $g \in \mathcal{F}_0(X)$. Então $g_\circ h^{-1} \in \mathcal{F}_0(X)$ e

$\psi_h(g_\circ h^{-1})(x) = (g_\circ h^{-1})_\circ h(x) = g_\circ h^{-1}(h(x)) = g(h^{-1}(h(x))) = g(x)$ para todo $x \in X$. ■

Proposição 5.2.2. *Dado um $\mathbb{K}$ - isomorfismo $\lambda : \mathcal{F}_0(Y) \to \mathcal{F}_0(X)$, então existe uma única bijeção $h : X \to Y$ tal que $\lambda = \psi_h$.*

Demonstração: Suponha que exista h tal que $\lambda = \psi_h$. Pela Proposição 5.1.14 todos os homomorfismos sobre $\mathbb{K}$ de $\mathcal{F}_0(X)$ são da forma ϕ_x com $x \in X$. Então, $\phi_x \circ \lambda(f) = \phi_x(\lambda(f)) = \phi_x(f \circ h) = f \circ h(x) = f(h(x)) = \phi_{h(x)}(f)$.
Isto nos leva a definir h da seguinte forma: Dado $x \in X$, $\phi_x \circ \lambda$ é um homomorfismo sobre $\mathbb{K}$ de $\mathcal{F}_0(Y)$. Como todos os homomorfismos sobre $\mathbb{K}$ de $\mathcal{F}_0(Y)$ são da forma ϕ_x, existe $y \in Y$ tal que $\phi_x \circ \lambda = \phi_y$. Defina então, h em x, por y. Falta mostrar que $\lambda = \psi_h$ e que h é uma bijeção.

- $\lambda = \psi_h$, pois
  $\psi_h(f)(x) = f(h(x)) = f(y) = \phi_y(f) = \phi_x \circ \lambda(f) = \phi_x(\lambda(f)) = \lambda(f)(x)$ para qualquer $f \in \mathcal{F}_0(Y)$ e $x \in X$.

- existe h^{-1}.
  Considere $\lambda^{-1} : \mathcal{F}_0(X) \to \mathcal{F}_0(Y)$. Vamos definir $t : Y \to X$. Dado $y \in Y$, $\phi_y \circ \lambda^{-1}$ é um homomorfismo sobre $\mathbb{K}$ de $\mathcal{F}_0(X)$. Logo, existe $x \in X$ tal que $\phi_y \circ \lambda^{-1} = \phi_x$. Defina t em y, por x.
  Para $x \in X$, $t \circ h(x) = t(h(x)) = t(y) = x_0$, onde y é tal que $\phi_x \circ \lambda = \phi_y$ e x_0 é tal que $\phi_y \circ \lambda^{-1} = \phi_{x_0}$.

Então, x_0 é tal que $\phi_{x_0} = \phi_y \circ \lambda^{-1} = \phi_x \circ \lambda \circ \lambda^{-1} = \phi_x$. Logo $x_0 = x$ e $t \circ h = I$. Analogamente prova-se que $h \circ t = I$ e portanto $t = h^{-1}$ e h é uma bijeção.

Falta mostrar que h tal que $\lambda = \psi_h$ é único. Suponhamos que existam bijeções h_1 e h_2 tal que $\lambda(f) = \psi_{h_1}(f) = \psi_{h_2}(f)$ para todo $f \in \mathcal{F}_0(Y)$. Então $f \circ h_1(x) = f \circ h_2(x)$ para todo $f \in \mathcal{F}_0(Y)$, $x \in X$. Isto implica que $f(h_1(x)) = f(h_2(x))$, para todo $f \in \mathcal{F}_0(Y)$, $x \in X$.

Agora, suponha que existe $x \in X$ tal que $h_1(x) \neq h_2(x)$. Então, tomando $f = \delta_{h_1(x)}$ temos que $f(h_1(x)) \neq f(h_2(x))$, o que é uma contradição.

Logo $h_1(x) = h_2(x)$ para todo $x \in X$. ■

Proposição 5.2.3. *A aplicação ψ definida por:*

$$\begin{array}{rcl} \psi : Bij(X,Y) & \to & Iso(\mathcal{F}_0(Y), \mathcal{F}_0(X)) \\ h & \mapsto & \psi_h \end{array}$$

é uma bijeção, onde $Iso(\mathcal{F}_0(Y), \mathcal{F}_0(X))$ denota o conjunto de todos $\mathbb{K}$ - isomorfismo de $\mathcal{F}_0(Y)$ em $\mathcal{F}_0(X)$.

Demonstração: Segue direto das Proposições 5.2.1 e 5.2.2. ■

Proposição 5.2.4. *A aplicação ψ, definida na proposição acima, é um anti-homomorfismo de grupos.*

Demonstração: Sejam $h : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ bijeções e $\psi_g : \mathcal{F}_0(X) \to \mathcal{F}_0(Y)$, $\psi_h : \mathcal{F}_0(Y) \to \mathcal{F}_0(X)$ seus $\mathbb{K}$ -

isomorfismos associados. Então

$$\begin{aligned}(\psi_h \circ \psi_g)(f) &= \psi_h(\psi_g(f)) = \psi_h(f \circ g) = (f \circ g) \circ h \\ &= f \circ (g \circ h) = \psi_{g \circ h}(f).\end{aligned}$$

■

Proposição 5.2.5. *Dado uma ação h de G em X existe uma ação α associada, definida por*

$$\begin{array}{rcl}\alpha : G & \to & Aut_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}_0(X)) \\ t & \mapsto & \alpha_t = \psi_{h_{t^{-1}}}\end{array},$$

onde $Aut_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}_0(X))$ denota o conjunto de todos $\mathbb{K}$ - automorfismos de $\mathcal{F}_0(X)$. Dizemos que α é proveniente de h.

Demonstração: Pela Proposição 5.2.1, α está bem definida. Precisamos apenas verificar que α é realmente uma ação. De fato, para quaisquer t, s em G e para toda f em $\mathcal{F}_0(X)$:

$$\begin{aligned}\alpha_t \circ \alpha_s(f) &= \psi_{h_{t^{-1}}} \circ \psi_{h_{s^{-1}}}(f) = \psi_{h_{s^{-1}} \circ h_{y^{-1}}}(f) \\ &= f(h_{s^{-1}} \circ h_{y^{-1}}) = f(h_{s^{-1}t^{-1}}) = f(h_{(ts)^{-1}}) \\ &= \psi_{h_{(ts)^{-1}}}(f) = \alpha_{ts}(f).\end{aligned}$$

■

Proposição 5.2.6. *Dado uma ação α de G em $\mathcal{F}_0(X)$ existe uma ação h de G em X tal que α é proveniente de h.*

Demonstração: Dada a ação $\begin{array}{rcl}\alpha : G & \to & Aut(\mathcal{F}_0(X)) \\ t & \mapsto & \alpha_t\end{array}$, para cada automorfismo α_t associamos a bijeção h_t proveniente da Proposição 5.2.2, isto é, h_t é a única bijeção de X

em X tal que $\alpha_t = \psi_{h_{t^{-1}}}$. Defina $\begin{array}{rcl} h : G & \to & Bij(X) \\ t & \mapsto & h_{t^{-1}}. \end{array}$

Então, procedendo como na proposição anterior, vemos que α é uma ação proveniente da ação h. Falta mostrar que h é realmente uma ação, ou seja, que h é um homomorfismo de grupos.

Primeiro vamos provar que $h_{t^{-1}} \circ h_{s^{-1}} = h_{(ts)^{-1}}$. Lembre que $h_{(ts)^{-1}}$ é a única bijeção tal que $\alpha_{(tx)^{-1}} = \psi_{h_{(ts)^{-1}}}$. Logo,

$$\psi_{h_{(ts)^{-1}}} = \alpha_{(ts)^{-1}} = \alpha_{s^{-1}} \circ \alpha_{t^{-1}} = \psi_{h_{s^{-1}}} \circ \psi_{h_{t^{-1}}} \overset{5.2.4}{=} \psi_{h_{t^{-1}} \circ h_{s^{-1}}},$$

e temos que $h_{(ts)^{-1}} = h_{t^{-1}} \circ h_{s^{-1}}$. Portanto,

$$h(ts) = h_{(ts)^{-1}} = h_{t^{-1}} \circ h_{s^{-1}} = h(t)h(s) \qquad \blacksquare$$

Definição 5.2.7. *Dada uma ação α de um grupo G em uma $\mathbb{K}$ - álgebra A, o skew anel de grupo $A \rtimes_\alpha G$, correspondente a ação α é o conjunto de todas as somas finitas*

$$A \rtimes_\alpha G = \left\{ \sum_{t \in G} a_t \delta_t \ : \ a_t \in A \right\}$$

em que $\delta_t|_g = \begin{cases} 1 & se \ \ g = t \\ 0 & se \ \ g \neq t \end{cases}$. A adição é a usual e a multiplicação é dada por $(a_t\delta_t)(b_s\delta_s) = a_t\alpha_t(b_s)\delta_{ts}$, para quaisquer $s, t \in G$.

Proposição 5.2.8. *O skew anel de grupo $A \rtimes_\alpha G$ é uma*

$\mathbb{K}$ - álgebra onde $k\left(\sum_{t\in G} a_t\delta_t\right) = \sum_{t\in G} ka_t\delta_t$, para qualquer $k \in \mathbb{K}$ e $\sum_{t\in G} a_t\delta_t \in A \rtimes_\alpha G$.

Demonstração: Dados $x = \sum_{t\in G} a_t\delta_t, y = \sum_{t\in G} g_t\delta_t \in A \rtimes_\alpha G$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ temos que,

$$\begin{aligned}(k_1+k_2)x = (k_1+k_2)\sum_{t\in G} a_t\delta_t &= \sum_{t\in G}((k_1+k_2)a_t)\delta_t\\ &= \sum_t (k_1a_t + k_2a_t)\delta_t = \sum_{t\in G} k_1a_t\delta_t + \sum_{t\in G} k_2a_t\delta_t\\ &= k_1\sum_{t\in G} a_t\delta_t + k_2\sum_{t\in G} a_t\delta_t = k_1x + k_2x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_1(x+y) &= k_1\left(\sum_{t\in G} a_t\delta_t + \sum_{t\in G} b_t\delta_t\right) = k_1\left(\sum_{t\in G}(a_t+b_t)\delta_t\right)\\ &= \sum t \in Gk_1(a_t+b_t)\delta_t = \sum t \in G(k_1a_t + k_1b_t)\delta_t\\ &= \sum t \in Gk_1a_t\delta_t + \sum_{t\in G} k_1b_t\delta_t\\ &= k_1\sum t \in Ga_t\delta_t + k_1\sum_{t\in G} b_t\delta_t = k_1x + k_1y.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(k_1k_2)x = (k_1k_2)\sum_{t\in G} a_t\delta_t &= \sum_{t\in G}((k_1k_2)a_t)\delta_t\\ &= \sum_{t\in G}(k_1(k_2a_t))\delta_t = k_1\sum_{t\in G}(k_2a_t)\delta_t\\ &= k_1\left(k_2\sum_{t\in G} a_t\delta_t\right) = k_1(k_2x).\end{aligned}$$

Suponhamos que $x = a_t\delta_t$, $y = b_s\delta_s$ e $z = c_t\delta_t$ em $A \rtimes_\alpha G$ e $k \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} k(xy) &= k((a_t\delta_t)(b_s\delta_s)) = k(a_t\alpha_t(b_s)\delta_{ts}) = (ka_t\alpha_t(b_s))\delta_{ts} \\ &= ((ka_t)\alpha_(b_s))\delta_{ts} = ((ka_t)\delta_t)(b_s\delta_s) = (k(a_t\delta_t))(b_s\delta_s) \\ &= (kx)y. \end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que $k(xy) = x(ky)$. Usando a linearidade segue que $k(xy) = (kx)y = x(ky)$ para qualquer $k \in \mathbb{K}$ e quaisquer $x, y \in A \rtimes_\alpha G$.

$$\begin{aligned} (x+z)y &= ((a_t\delta_t) + (c_t\delta_t))b_s\delta_s = ((a_t + c_t)\delta_t)b_s\delta_s \\ &= ((a_t + c_t)\alpha_t(b_s))\delta_{ts} = (a_t\alpha_t(b_s) + c_t\alpha_t(b_s))\delta_{ts} \\ &= a_t\delta_t(b_s)\delta_{ts} + c_t\alpha_t(b_s)\delta_{ts} = (a_t\delta_t)(b_s\delta_s) + (c_t\delta_t)(b_s\delta_s) \\ &= xy + zy. \end{aligned}$$

Estendo linearmente temos que $(x + z)y = xy + zy$ para quaisquer $x, y, z \in A \rtimes_\alpha G$. Analogamente prova-se que $y(x + z) = yx + yz$ para quaisquer $x, y, z \in A \rtimes_\alpha G$.

5.3 A $\mathbb{K}$ - álgebra $\mathcal{F}_0(R)$

Seja α uma ação de um grupo G enumerável agindo sobre a $\mathbb{K}$ - álgebra $\mathcal{F}_0(X)$. Vamos ver que o *skew anel de grupo*, $\mathcal{F}_0(X) \rtimes_\alpha G$, neste caso é uma $\mathbb{K}$ - álgebra associativa.

Tomamos uma ação h do grupo enumerável G sobre o um conjunto qualquer X. Definimos $R \subseteq X \times X$ por:

$$R = \{(x, h_t(x)) \,:\, x \in X, t \in G\}.$$

Afirmamos que R é uma relação de equivalência.

- se $x \in X$ então $(x, x) = (x, h_e(x)) \in R$.

- se $(x, y), (y, z) \in R$ então existem $t, s \in G$ tais que $y = h_t(x)$ e $z = h_s(y)$. Isto implica que $z = h_s(h_t(x)) = h_{(ts)}(x)$ e então $(x, z) = (x, h_{(ts)}(x)) \in R$.

- se $(x, y) \in R$ então existe $t \in G$ tal que $y = h_t(x)$. Isto implica que $h_{t^{-1}}(y) = h_{t^{-1}}h_t(x) = h_e(x) = x$, ou seja, existe $s = t^{-1} \in G$ tal que $x = h_s(y)$ e portanto $(y, x) \in R$.

Consideramos

$$\mathcal{F}_0(R) = \{f : R \to \mathbb{K} \,:\, f \,\text{tem suporte finito}\}.$$

Temos que $\mathcal{F}_0(R)$ é um $\mathbb{K}$ - espaço vetorial com as operações definidas por:

$$(kf + g)(x, h_t(x)) = kf(x, h_t(x)) + g(x, h_t(x))$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{F}_0(R)$, $k \in \mathbb{K}$ e $(x, h_t(x)) \in R$.

Para $\mathcal{F}_0(R)$ ser uma $\mathbb{K}$ - álgebra, definimos a multiplicação de f, g por

$$f * g(x, h_t(x)) = \sum_{s \in G} f(x, h_s(x))g(h_s(x), h_t(x)).$$

Precisamos verificar que a multiplicação está bem definida. Note que $(h_s(x), h_t(x)) \in R$, pois fazendo $h_s(x) = y$ temos que $y \in X$, $x = h_{s-1}(y)$ e $h_t(x) = h_t(h_{s^{-1}}(y)) = h_{ts^{-1}}(y) = h_r(y)$ (tomando $r = ts^{-1}$). Desta forma $(h_s(x), h_t(x)) = (y, h_r(y)) \in R$. Além disso, como f tem suporte finito o conjunto $\{t \in G : f(x, h_t(x)) \neq 0, x \in X\}$ é finito, e portanto a soma acima é finita.

Vamos verificar que $\mathcal{F}_0(R)$ é realmente uma $\mathbb{K}$ - álgebra. Sejam $f, g, l \in \mathcal{F}_0(R), (x, h_t(x)) \in R$ e $k \in \mathbb{K}$, temos que

$$\begin{aligned} k(f * g)(x, h_t(x)) &= k \sum_{s \in G} f(x, h_s(x))g(h_s(x), h_t(x)) \\ &= \sum_{s \in G} (kf)(x, h_s(x))g(h_s(x), h_t(x)) \\ &= (kf) * g(x, h_t(x)). \end{aligned}$$

Portanto $k(f * g) = (kf) * g$ para quaisquer $f, g \in \mathcal{F}_0(R), k \in \mathbb{K}$. Analogamente prova-se que $k(f * g) = (f * (kg))$.

$$(f + g) * l(x, h_t(x)) = \sum_{s \in G} (f + g)(x, h_s(x))l(h_s(x), h_t(x))$$

$$= \sum_{s \in G} (f(x, h_s(x)) + g(x, h_s(x)))l(h_s(x), h_t(x))$$

$$= \sum_{s\in G}(f(x,h_s(x))l(h_s(x),h_t(x)) + g(x,h_s(x))l(h_s(x),h_t(x)))$$
$$\overset{(\star)}{=} \sum_{s\in G} f(x,h_s(x))l(h_s(x),h_t(x)) + \sum_{s\in G} g(x,h_s(x))l(h_s(x),h_t(x))$$
$$= (f*l)(x,h_t(x)) + g*l(x,h_t(x)) = (f*l+g*l)(x,h_t(x)).$$

A igualdade $(\star)$ é verdadeira pois as somas são finitas. Então $(f*g)*l = (f*l+g*l)$ para quaisquer $f,g,l \in \mathcal{F}_0(R)$.

$$\begin{aligned}
&(f*g)*l(x,h_t(x))\\
&= \sum_{s\in G}(f*g)(x,h_s(x))l(h_s(x),h_t(x))\\
&= \sum_{s\in G}\left(\sum_{r\in G} f(x,h_r(x))g(h_r(x),h_s(x))\right) l(h_s(x),h_t(x))\\
&= \sum_{s\in G}\sum_{r\in G}[f(x,h_r(x))g(h_r(x),h_s(x))]l(h_s(x),h_t(x))\\
&\overset{(\star)}{=} \sum_{s\in G}\sum_{r\in G} f(x,h_r(x))[g(h_r(x),h_s(x))l(h_s(x),h_t(x))]\\
&= \sum_{r\in G} f(x,h_r(x)) \sum_{s\in G} g(h_r(x),h_s(x))l(h_s(x),h_t(x))\\
&= \sum_{r\in G} f(x,h_r(x)) \sum_{s\in G} g*l(h_r(x),h_t(x))\\
&= f*(g*l)(x,h_t(x)).
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{K}$ é associativo a igualdade $(\star)$ é justificada. Portanto $(f*g)*l = f*(g*l)$ para quaisquer $f,g,l \in \mathcal{F}_0(R)$ e então $\mathcal{F}_0(X)$ é uma $\mathbb{K}$ - álgebra associativa.

Teorema 5.3.1. *Seja h uma ação livre de G em X e α a* *ação associada em $\mathcal{F}_0(X)$. Então as $\mathbb{K}$ - álgebras $\mathcal{F}_0(R)$ e $\mathcal{F}_0(X) \rtimes_\alpha G$ são isomorfas.*

Demonstração: Definimos $\phi : \mathcal{F}_0(X) \rtimes_\alpha G \to \mathcal{F}_0(R)$ por $\phi(f\delta_t) = \widetilde{f}$ onde

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x) & \text{se } \ y = h_{t^{-1}}(x) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases},$$

e estendemos ϕ linearmente

$$\phi\left(k\sum_{t\in G} f_t\delta_t\right) := k\sum_{t\in G}\phi(f_t\delta_t).$$

A aplicação ϕ está bem definida?
Suponhamos que $\{x_1^t, \cdots, x_{n_t}^t\}$ é o suporte finito de $f_t \in \mathcal{F}_0(X)$. Então $\phi(f_t\delta_t)$ tem como suporte o conjunto $\{(x_1^t, h_{t^{-1}}(x_1^t)), \cdots, (x_{n_t}^t, h_{t^{-1}}(x_{n_t}^t))\}$. Tome $F \in \mathcal{F}_0(X) \rtimes_\alpha G$ então $F = \sum_{i=1}^m f_{t_i}\delta_{t_i}$, onde $t_i \in G$ para cada i. Segue que,

$$\phi(F) = \phi\left(\sum_{i=1}^m f_{t_i}\delta_{t_i}\right) = \sum_{i=1}^m \phi(f_{t_i}\delta_{t_i}),$$

cujo suporte está contido no conjunto $\{(x_1^{t_1}, h_{t_1^{-1}}(x_1^{t_1})), \cdots, (x_{n_{t_1}}^{t_1}, h_{t_1^{-1}}(x_{n_{t_1}}^{t_1})), \cdots, (x_1^{t_m}, h_{t_m^{-1}}(x_1^{t_m})),$ $\cdots, (x_{n_{t_m}}^{t_m}, h_{t_m^{-1}}(x_{n_{t_m}}^{t_m}))\}$ e portanto $\phi(F)$ tem suporte finito.

Agora vamos provar que ϕ é um $\mathbb{K}$ - isomorfismo. Precisamos apenas mostrar que ϕ é bijetiva e que $\phi(f_t\delta_t * f_g\delta_g) = \phi(f_t\delta_t) * \phi(f_s\delta_s)$ uma vez que estendemos ϕ linearmente. Dados $f_t\delta_t, f_g\delta_g \in \mathcal{F}_0(X) \rtimes_\alpha G$ temos que,

$$\begin{aligned}
\phi(f_t\delta_t * f_s\delta_s)(x,y) &= \phi(f_t\alpha_t(f_s)\delta_{ts})(x,y)\\
&= (\widetilde{f_t\alpha_t(f_s)})(x,y)\\
&= \begin{cases} f_t(x)\alpha_t(f_s)(x) & \text{se}\, y = h_{(ts)^{-1}}(x)\\ 0 & \text{c.c.}\end{cases}\\
&= \begin{cases} f_t(x)(f_s)(h_{t^{-1}}(x)) & \text{se}\, y = h_{(ts)^{-1}}(x)\\ 0 & \text{c.c.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\phi(f_t\delta_t)\phi(f_s\delta_s)(x,y) &= \sum_{r\in G}\phi(f_t\delta_t)(x,h_r(x))\phi(f_s\delta_s)(h_r(x),y)\\
&= f_t(x)\phi(f_s\delta_s)(h_{t^{-1}}(x),y)\\
&= \begin{cases} f_t(x)(f_s)(h_{t^{-1}}(x)) & \text{se}\, y = h_{s^{-1}}(h_{t^{-1}}(x))\\ 0 & \text{c.c.}\end{cases}\\
&= \begin{cases} f_t(x)(f_s)(h_{t^{-1}}(x)) & \text{se}\, y = h_{(ts)^{-1}}(x)\\ 0 & \text{c.c.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, $\phi(f_t\delta_t * f_s\delta_s) = \phi(f_t\delta_t)\phi(f_s\delta_s)$.

Para provar a injetividade vamos mostrar que o $ker\ \phi = \{0\}$. Se $\sum_{t\in G} f_t\delta_t \in Ker\ \phi$ então $\phi\left(\sum_{t\in G} f_t\delta_t\right) = 0$. Isto implica que $\phi\left(\sum_{t\in G} f_t\delta_t\right)(x,h_s(x)) = 0$, para qualquer $(x,h_s(x)) \in R$, ou seja, $\sum_{t\in G}\phi(f_t\delta_t)(x,h_s(x)) = 0$, para qualquer $x \in X, s \in G$. Uma vez que h é livre segue que $f_{s^{-1}}(x) = 0$ para qualquer $x \in X, s \in G$. Portanto

$f_t \equiv 0\ \forall t \in G$, $\sum_{t\in G} f_t\delta_t = 0$ e $ker\ \phi = \{0\}$ como queríamos.

E para finalizar vamos provar a sobrejetividade. Dado $f \in \mathcal{F}_0(R)$, definimos, $f_t(x) := f(x, h_{t^{-1}}(x))$, para todo $x \in X$. Suponhamos que $\{(x_1, h_{t_1}(x_1)), \cdots, (x_n, h_{t_n}(x_n))\}$ é o suporte finito de f. Então $f_t = 0$ para todo $t \in G \backslash \{t_1, \cdots, t_n\}$, e para $t \in \{t_1, \cdots, t_n\}$, f_t tem suporte finito. Então $\sum_{i=1}^{n} f_{t_i}\delta_{t_i} \in \mathcal{F}_0(X) \rtimes_\alpha G$ e,

$$\begin{aligned}
\phi\left(\sum_{i=1}^{n} f_{t_i}\delta_{t_i}\right)(x, h_s(x)) &= \sum_{i=1}^{n} \phi(f_{t_i}\delta_{t_i})(x, h_s(x)) \\
&= \begin{cases} f_{s^{-1}}(x) & \text{se } s \in \{t_1, \cdots, t_n\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(x, h_s(x)) & \text{se } s \in \{t_1, \cdots, t_n\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= f(x, h_s(x)).
\end{aligned}$$

Logo ϕ é sobrejetiva e portanto $\mathcal{F}_0(X) \rtimes_\alpha G$ e $\mathcal{F}_0(R)$ são álgebras $\mathbb{K}$ - isomorfas.

Corolário 5.3.2. *$\mathcal{F}_0(X) \rtimes_\alpha G$ é uma $\mathbb{K}$ - álgebra associativa.*

Demonstração: A $\mathbb{K}$ - álgebra $\mathcal{F}_0(X) \rtimes_\alpha G$ é associativa pois é $\mathbb{K}$ - isomorfa a $\mathcal{F}_0(R)$, que é associativa. ■

Referências

[1] M. Dokuchaev and R. Exel, *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations.* Transactions of the American Mathematical Society, 2005.

[2] R. Exel, T. Giordano, D. Gonçalves, *Envelope Algebras of Partial Actions as Groupoid C^*-Algebras.* J. Operator Theory, 2011.

[3] D. Gonçalves, *Produto Cruzado.* Dissertação (Mestrado em Matemática e Computação Científica), Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.

[4] D. Gonçalves, *New C*-Algebras from substitution Tilings.* Journal of Operator Theory, 57 (2007) , 391-407.

[5] E. L. Lima, *Elementos de Topologia Geral.* Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[6] J. R. Munkres, *Topology.* Second Edition, Prentice Hall, 2000.

[7] G. J. Murphy, *C*-álgebras and operator theory.* Academic Press Inc, 1990.

[8] A. L. T. Paterson. *Groupoids, Inverse Semigroups and their Operator Algebras.* Progress in Mathematics, Birkhauser, 1999.

[9] J. Peebles, I. F. Putnam, I. Zwiers, *Minimal Dynamical Systems on the Cantor Set*, 2009.

[10] I. F. Putnam, *A Survey of Recent K-Theoretic Invariants for Dynamical Systems*. The Dynamics of Zd- actions, M. Pollicott e K. Schmidt, Cambridge University Press, 1996.

[11] J. Renault, *A Groupoid Approach to C*-Algebras*. Springer, Berlin, 1980.

[12] M. Rordam, F. Larsen, N.J. Laustsen. an Introduction to K-Theory for C*-Algebras. London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 49, Cambridge University Press.

[13] W. Rudin, *Functional Analysis*. Second Edition, International Series in Pure and Applied mathematics, McGraw Hill, 1991.

[14] E. R. Santos *Ações parciais: sobre a associatividade do skew anel de grupo parcial, ação envolvente e contexto de Morita.* Dissertação (Mestrado em Matemática e Computação Científica), Universidade Federal de Santa Catarina, 2010.

[15] V. S. Sunder, *Functional Analysis: Spectral Theory.* Birkhäuser Verlag, 1998.

[16] M. F. Whittaker, *Groupoid C^*- Algebras of the Pinwheel Tiling*. Master thesis, Departament of Mathematics an Statistics, University of Victoria, 2005.