Fabiano Carlos Cidral

Ideais no produto cruzado parcial reduzido

Dissertação apresentada ao Curso de Pós- Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel Filho

Florianópolis – SC
17 de Janeiro de 2011

Verso da folha: parte posterior da página deve conter a ficha catalográfica, de acordo com o CCAA2 – Código de Catalogação Anglo Americano 2.

Ideais no produto cruzado parcial reduzido

por

Fabiano Carlos Cidral

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção, do Título de "Mestre" em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica em 17/01/2011.

Prof. Dr. Ruy Exel Filho
Coordenador da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Ruy Exel Filho (UFSC – Orientador)

Prof. Dr. Alcides Buss (UFSC)

Prof. Dr. Daniel Gonçalves (UFSC)

Prof. Dr. Michael Dokuchaev (USP)

Agradecimentos

Agradeço a Deus todas as oportunidades concedidas e as pessoas especiais que colocou no meu caminho. Como dizia Jorge Amado, "A vida me deu muito mais do que eu pedi e muito mais do que eu mereci."

Aos meus pais, Antonio Carlos Cidral e Rose maria Back cidral, e ao meu irmão, Felipe Carlos Cidral, que sempre me incentivaram em cada etapa da minha vida.

A minha namorada, Anelize Zomkowski Salvi, agradeço por todo amor, carinho, paciência e compreensão. Durante esses dois anos, precisei estudar muito e, em vários momentos, não pude dar toda a atenção que ela merece.

Ao meu orientador, Ruy Exel, por acreditar em mim e por todos os conhecimentos adquiridos durante esse período. Agradeço também, o seu convite para participar dos seminários de álgebra de operadores.

Ao Giuliano Boava, pela enorme paciência e boa vontade em tirar minhas dúvidas. A clareza das suas explicações impressionam.

Ao Professor, Ivan Pontual Costa e Silva, pela amizade e confiança que muito me ajudaram a prosseguir nesta caminhada nada fácil. Os seus ensinamentos e conselhos foram fundamentais no meu ingresso ao curso de mestrado.

Ao Professor, Eliezer Batista, pela amizade e disposição em ajudar.

Aos amigos João Carlos Bez Batti, Lucas Ramiro Talarico e Elton Felix, pela convivência, lealdade e compreensão.

A meus pais, Antonio e Rose.

Ao meu irmão, Felipe.

A minha namorada, Anelize.

Ao meu avô, Nélio Cidral.

Resumo

Dados um grupo G, uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ e uma ação parcial α de G sobre $\mathcal{A}$, construiremos outra C*-álgebra denominada produto cruzado parcial reduzido de $\mathcal{A}$ sobre G. O principal objetivo deste trabalho é estudar a existência de ideais não triviais nesta C*-álgebra no caso particular $\mathcal{A} = C_0(\mathcal{X})$, em que $\mathcal{X}$ é um espaço topológico localmente compacto Hausdorff. Inicialmente, discutiremos os seguintes tópicos: ações parciais, representações parciais, fibrados de Fell e produtos cruzados parciais. Além dos tópicos citados, o conceito de esperança condicional é de grande importância na construção da C*-álgebra. Finalmente, quando a ação parcial é topologicamente livre e minimal, demonstraremos que o produto cruzado parcial reduzido é simples, isto é, possui apenas ideais triviais.

Abstract

Given a group G, a C*-algebra $\mathcal{A}$ and a partial action α of G on $\mathcal{A}$, we will construct an other C*-algebra called reduced crossed product of $\mathcal{A}$ on G. The main goal of this study is the existence of nontrivial ideals C*-algebra in the particular case $\mathcal{A} = C_0(\mathcal{X})$, where $\mathcal{X}$ is a locally compact Hausdorff topological space. We will first discuss the following topics: partial actions, partial representations, Fell bundles and crossed products. Besides the topics mentioned, the definition of conditional expectation is of great importance in construction of C*-algebra. Finally, when the partial action is topologically free and minimal, we will show that the reduced crossed product is simple, namely, it has only trivial ideals.

Sumário

Introdução

Praticamente toda a rica interação entre a teoria de álgebras de operadores e sistemas dinâmicos ocorre por meio de uma construção conhecida como o produto cruzado. A idéia básica, que foi utilizada pela primeira vez por von Neumann em 1936 no contexto de automorfismos de espaços de medida, consiste em fixar uma álgebra de operadores (a W*-álgebra no caso da construção original de von Neumann) para um dado sistema dinâmico cuja estrutura algébrica deva refletir as propriedades dinâmicas do mesmo. O análogo dessa construção para o caso de C*-álgebras é devido a I. Gelfand com os co-autores M. Naimark e S. Fomin, que a utilizaram, mais tarde, em certos sistemas dinâmicos especiais.

A noção de produto cruzado parcial em uma C*-álgebra por uma ação parcial do grupo $\mathbb{Z}$ através de automorfismos parciais foi introduzida por R. Exel. Em seguida, K. McClanachan generalizou o conceito para uma ação parcial de grupos discretos e N. Sieben para ações de semigrupos inversos. O produto cruzado parcial é uma generalização natural do produto cruzado em uma C-álgebra por um grupo de automorfismos. Recentemente, um número de novas aplicações de produtos cruzados foram encontrados em análise, bem como em outros campos da matemática e da física-matemática.

O principal objetivo deste trabalho é construir, a partir de um grupo G e de uma ação parcial de G sobre uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, a C*-álgebra chamada produto cruzado parcial reduzido e estudar a presença de ideais não triviais nessa C*-álgebra no caso particular $\mathcal{A} = C_0(\mathcal{X})$, em que $\mathcal{X}$ é um espaço topológico localmente compacto Hausdorff. Esse trabalho está organizado da seguinte maneira:

No primeiro capítulo, apresentaremos as definições de ação parcial e representação parcial e ilustraremos as mesmas através de exemplos. Esses conceitos básicos serão fundamentais para o desenvolvimento do trabalho.

O capítulo 2 contém a definição de fibrado de Fell e a construção da C*-álgebra envolvente de uma álgebra admissível utilizando o conceito de C*-seminorma. Além disso, dado um fibrado de Fell, existe uma C*-álgebra associada a esse fibrado chamada C*-álgebra seccional cheia.

No terceiro capítulo, construiremos um fibrado de Fell a partir de uma ação parcial. Em seguida, faremos um pequeno estudo sobre álgebras de multiplicadores para definir o chamado produto cruzado parcial. Finalmente, o conceito de esperança condicional é fundamental na construção do produto cruzado parcial reduzido, que é a C*-álgebra mais importante em nosso estudo.

No capítulo 4, definiremos os conceitos de ação parcial topologicamente livre e ação parcial minimal. Além disso, provaremos o principal resultado deste trabalho. Esse resultado afirma que se G é um grupo, $\mathcal{X}$ é um espaço topológico localmente compacto Hausdorff e α é uma ação parcial topologicamente livre então os ideais do produto cruzado parcial reduzido $C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G$ intersectam necessariamente $C_0(\mathcal{X})$ de maneira não trivial. Como consequência desse fato, exibiremos uma condição suficiente que garante a simplicidade do produto cruzado parcial reduzido $C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G$. Finalmente, através de exemplos, ilustraremos todos os conceitos definidos no início do capítulo para o caso particular em que G é o grupo livre e ainda enunciaremos condições necessárias e suficientes para que uma ação parcial do grupo livre sobre o espaço topológico compacto associado a um grafo seja topologicamente livre e minimal.

1 Conceitos básicos

1.1 Ações parciais

O objetivo deste capítulo é apresentar e exemplificar as definições de ação parcial e representação parcial. Esses conceitos serão essenciais no desenvolvimento dos próximos capítulos.

Definição 1.1.1: Seja $\mathcal{X}$ um conjunto e G um grupo. Uma **ação parcial de G sobre $\mathcal{X}$** é um par $(\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ tal que, para todo $t \in G$, $\mathcal{X}_t$ é um subconjunto de $\mathcal{X}$ e $\theta_t : \mathcal{X}_{t^{-1}} \longrightarrow \mathcal{X}_t$ é uma função bijetora satisfazendo as seguintes condições:

(1) $\mathcal{X}_e = \mathcal{X}$.

(2) $\theta_t^{-1}(\mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}}) \subseteq \mathcal{X}_{(st)^{-1}}$ para todo $t, s \in G$.

(3) Se $x \in \theta_t^{-1}(\mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}})$ então $\theta_s(\theta_t(x)) = \theta_{st}(x)$.

Definição 1.1.2: Seja $\mathcal{X}$ um espaço topológico e G um grupo. Uma **ação parcial de G sobre o espaço topológico** $\mathcal{X}$ é uma ação parcial de G sobre $\mathcal{X}$ tal que, para todo $t \in G$, $\mathcal{X}_t$ é um conjunto aberto em $\mathcal{X}$ e $\theta_t : \mathcal{X}_{t^{-1}} \longrightarrow \mathcal{X}_t$ é um homeomorfismo.

Definição 1.1.3: Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra e G um grupo. Uma **ação parcial de G sobre a C*-álgebra** $\mathcal{A}$ é uma ação parcial $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ de G sobre $\mathcal{A}$ tal que, para todo $t \in G$, $\mathcal{D}_t$ é uma ideal fechado e $\alpha_t : \mathcal{D}_{t^{-1}} \longrightarrow \mathcal{D}_t$ é um isomorfismo.

Proposição 1.1.4: Seja $(\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de G sobre $\mathcal{X}$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

(1) $\theta_e = Id_{\mathcal{X}}$.

(2) $\theta_t^{-1} = \theta_{t^{-1}}$ para todo $t \in G$.

(3) $\theta_{t^{-1}}(\mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}}) = \mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{X}_{(st)^{-1}}$ para todo $t, s \in G$.

Demonstração.

(1) Considere $t = s = e$ no item (3) da definição de ação parcial. Dessa forma, para todo $x \in \mathcal{X}$, $\theta_e(\theta_e(x)) = \theta_e(x)$. Como θ_e é uma função bijetora, segue que $\theta_e(x) = x$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

(2) Faça $s = t^{-1}$ no item (3) da definição de ação parcial. Sendo assim, para todo $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$, $\theta_{t^{-1}}(\theta_t(x)) = \theta_e(x) = x$. Logo, $\theta_t^{-1} = \theta_{t^{-1}}$.

(3) Primeiro, faça $t = t^{-1}$ e $s = st$ no item (2) da definição de ação parcial. Sendo assim, temos que $\theta_{t^{-1}}^{-1}(\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{X}_{(st)^{-1}}) \subseteq \mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}}$, ou seja, $\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{X}_{(st)^{-1}} \subseteq \theta_{t^{-1}}(\mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}})$. Por fim, o item (2) garante que $\theta_{t^{-1}}(\mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}}) = \theta_t^{-1}(\mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}}) \subseteq \mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{X}_{(st)^{-1}}$. Logo, $\theta_{t^{-1}}(\mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}}) = \mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{X}_{(st)^{-1}}$.

■

Exemplo 1.1.5: Seja $G = \mathbb{Z}$ e $\mathcal{X} = \mathbb{C}^n$. Defina, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{X}_k$ da seguinte forma: Se $0 \leqslant k < n$,

$$\mathcal{X}_k = \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ zeros}}, a_{k+1}, \ldots, a_n)\};$$

se $-n < k < 0$,

$$\mathcal{X}_k = \{a_1, \ldots, a_{n+k}, \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{-k \text{ zeros}}\}$$

e se $k \leqslant -n$ ou $k \geqslant n$, $\mathcal{X}_k = \{\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n \text{ zeros}}\}$. Defina também, para cada $k \in \mathbb{Z}$, θ_k da seguinte maneira:

$$\theta_k : \mathcal{X}_{-k} \longrightarrow \mathcal{X}_k$$
$$(a_1, \ldots, a_{n-k}, 0, \ldots, 0) \longmapsto (0, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_{n-k})$$

se $0 \leqslant k < n$,

$$\theta_k : \mathcal{X}_{-k} \longrightarrow \mathcal{X}_k$$
$$(0, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_{n+k}) \longmapsto (a_1, \ldots, a_{n+k}, 0, \ldots, 0)$$

se $-n < k < 0$, e

$$\theta_k : \{(0, \ldots, 0)\} \longrightarrow \{(0, \ldots, 0)\}$$

se $k \leqslant -n$ ou $k \geqslant n$. Primeiramente, note que θ_k está bem definida para cada $k \in \mathbb{Z}$. Além disso, $\theta_k : \mathcal{X}_{-k} \longrightarrow \mathcal{X}_k$ é uma bijeção. Vamos provar que $(\{\mathcal{X}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\theta_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ é uma ação parcial do grupo $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{C}^n$.

(1) Por definição, $\mathcal{X}_0 = \mathbb{C}^n$

(2) Para esse item, oito casos devem ser considerados:

Caso 1: $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ e $k + m < n$. Por definição,

$$\mathcal{X}_k \cap \mathcal{X}_{-m} = \{\underbrace{(0, \ldots, 0}_{k \text{ zeros}}, a_1, \ldots, a_{n-(k+m)}, \underbrace{0, \ldots, 0)}_{m \text{ zeros}}\}.$$

Assim,

$$\theta_k^{-1}(\mathcal{X}_k \cap \mathcal{X}_{-m}) = \{(a_1, \ldots, a_{n-(k+m)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k+m \text{ zeros}})\}$$
$$= \mathcal{X}_{-(k+m)} \subseteq \mathcal{X}_{-(k+m)}.$$

Caso 2: $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ e $k + m \geqslant n$. Nesse caso, temos que $\mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}_{-m} = \{(0, \ldots, 0)\} \subseteq \mathcal{X}_{-(k+m)}$.

Caso 3: $k < 0$, $m < 0$ e $-(k + m) \geqslant n$. Análogo ao caso 2.

Caso 4: $k < 0$, $m < 0$ e $-(k + m) < n$. Análogo ao caso 1.

Caso 5: $k \geqslant 0$, $m < 0$ e $|k| \leqslant |m| < n$. Assim, $\mathcal{X}_k \cap \mathcal{X}_{-m} = \mathcal{X}_{-m}$. Portanto,

$$\theta_k^{-1}(\mathcal{X}_k \cap \mathcal{X}_{-m}) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{-(k+m) \text{ zeros}}, a_1, \ldots, a_{n+m}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ zeros}})$$
$$= \mathcal{X}_{-k} \cap \mathcal{X}_{-(k+m)} \subseteq \mathcal{X}_{-(k+m)}.$$

Caso 6: $k \geqslant 0$, $m < 0$ e $|m| < |k| < n$. Nesse caso, $\mathcal{X}_k \cap \mathcal{X}_{-m} = \mathcal{X}_k$. Assim, $\alpha_k^{-1}(\mathcal{X}_k \cap \mathcal{X}_{-m}) = \mathcal{X}_{-k} \subseteq \mathcal{X}_{-(k+m)}$ pois $-n < -k < -(k + m) < 0$.

Caso 7: $k < 0$, $m \geqslant 0$ e $|k| \leqslant |m| < n$. Análogo ao caso 5.

Caso 8: $k < 0$, $m \geqslant 0$ e $|m| < |k| < n$. Análogo ao caso 6.

Dessa forma, $\theta_k^{-1}(\mathcal{X}_k \cap \mathcal{X}_{-m}) \subseteq \mathcal{X}_{-(k+m)}$ em todas as situações.

(3) Caso 1:

$$\begin{aligned}
&\theta_m \circ \theta_k\big((a_1, \ldots, a_{n-(k+m)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k+m \text{ zeros}})\big) = \\
&= \theta_m\big((\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ zeros}}, a_1, \ldots, a_{n-(k+m)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m \text{ zeros}})\big) \\
&= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k+m \text{ zeros}}, a_1, \ldots, a_{n-(k+m)}) \\
&= \theta_{m+k}\big((a_1, \ldots, a_{n-(k+m)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k+m \text{ zeros}})\big)
\end{aligned}$$

Caso 2 e 3: Trivial.

Caso 4: Análogo ao caso 1.

Caso 5:

$$\begin{aligned}
&\theta_m \circ \theta_k\big((\underbrace{0, \ldots, 0}_{-(k+m) \text{ zeros}}, a_1, \ldots, a_{n+m}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ zeros}})\big) = \\
&= \theta_m\big((\underbrace{0, \ldots, 0}_{-m \text{ zeros}}, a_1, \ldots, a_{n+m})\big) \\
&= (a_1, \ldots, a_{n+m}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{-m \text{ zeros}}) \\
&= \theta_{m+k}\big((\underbrace{0, \ldots, 0}_{-(k+m) \text{ zeros}}, a_1, \ldots, a_{n+m}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ zeros}})\big)
\end{aligned}$$

pois $m + k \geqslant 0$.

Caso 6:

$$
\begin{aligned}
&\theta_m \circ \theta_k\big((a_1, \ldots, a_{n-k}, \underbrace{0 \ldots, 0}_{k \text{ zeros}})\big) = \\
&= \theta_m\big((\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ zeros}}, a_1, \ldots, a_{n-k})\big) \\
&= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k+m \text{ zeros}}, a_1, \ldots, a_{n-k}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{-m \text{ zeros}}) \\
&= \theta_{m+k}\big((a_1, \ldots, a_{n-k}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ zeros}})\big)
\end{aligned}
$$

pois $m + k > 0$.

Caso 7: Análogo ao caso 5.

Caso 8: Análogo ao caso 6.

Logo, $(\{\mathcal{X}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\theta_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ é uma ação parcial do grupo $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{C}^n$.

Exemplo 1.1.6: Seja G um grupo, $\mathcal{X}$ um espaço topológico localmente compacto Hausdorff e $(\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de G sobre $\mathcal{X}$. Considere $C_0(\mathcal{X})$ a C*-álgebra das funções contínuas de $\mathcal{X}$ em $\mathbb{C}$ que se anulam no infinito. Construiremos uma ação parcial de G sobre $C_0(\mathcal{X})$. Para cada $t \in G$, defina $\mathcal{D}_t = \{f \in C_0(\mathcal{X})/f(x) = 0$ para todo $x \notin \mathcal{X}_t\}$ e

$$
\begin{aligned}
\alpha_t : \mathcal{D}_{t^{-1}} &\longrightarrow \mathcal{D}_t \\
f &\longmapsto \alpha_t(f)
\end{aligned}
$$

com

$$
\alpha_t(f)(x) = \begin{cases} f(\theta_{t^{-1}}(x)), \text{ se } x \in \mathcal{X}_t \\ 0, \text{ se } x \notin \mathcal{X}_t. \end{cases}
$$

Vamos provar que $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ é uma ação parcial do grupo G sobre C*-álgebra $C_0(\mathcal{X})$. Inicialmente, $\mathcal{D}_t$ é um ideal em $C_0(\mathcal{X})$ (ver exercício 3.2.3 em [1]). Além disso, note que α_t está bem definida e que $\alpha_t : \mathcal{D}_{t^{-1}} \longrightarrow \mathcal{D}_t$ é um homomorfismo. Para mostrar que α_t é um isomorfismo, seja $f \in \mathcal{D}_{t^{-1}}$. Sendo assim, dado $x \in \mathcal{X}$, temos dois casos a considerar. Se $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$ então $\alpha_{t^{-1}}(\alpha_t(f))(x) = \alpha_t(f)(\theta_t(x)) = f(\theta_{t^{-1}}(\theta_t(x))) = f(x)$. Por outro lado, se $x \notin \mathcal{X}_{t^{-1}}$ então $\alpha_{t^{-1}}(\alpha_t(f))(x) = 0 = f(x)$ pois $f \in \mathcal{D}_{t^{-1}}$. Portanto, $\alpha_{t^{-1}}(\alpha_t(f)) = f$ para todo $f \in \mathcal{D}_{t^{-1}}$. Como $t \in G$ é arbitrário, segue que $\alpha_t : \mathcal{D}_{t^{-1}} \longrightarrow \mathcal{D}_t$ é um isomorfismo com $\alpha_t^{-1} = \alpha_{t^{-1}}$. Finalmente, vamos verificar as condições de ação parcial.

(1) Por vacuidade, $\mathcal{D}_e = C_0(\mathcal{X})$.

(2) Seja $f \in \alpha_t^{-1}(\mathcal{D}_t \cap \mathcal{D}_{s^{-1}})$. Nosso objetivo é mostrar que $f \in \mathcal{D}_{(st)^{-1}}$. Por hipótese, existe $g \in \mathcal{D}_t \cap \mathcal{D}_{s^{-1}}$ tal que $f = \alpha_{t^{-1}}(g)$. Dado $x \notin \mathcal{X}_{(st)^{-1}}$, temos dois casos a considerar novamente. Se $x \notin \mathcal{X}_{t^{-1}}$ então $f(x) = 0$ pois $f \in \mathcal{D}_{t^{-1}}$. Por outro lado, se $x \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$ então existe $y \in \mathcal{X}_t$ tal que $x = \theta_{t^{-1}}(y)$. Sendo assim, $f(x) = \alpha_{t^{-1}}(g)(x) = g(\theta_t(x)) = g(\theta_t(\theta_{t^{-1}}(y))) = g(y)$. Como $\theta_{t^{-1}}(\mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}}) = \mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{X}_{(st)^{-1}}$, segue que $x \notin \theta_{t^{-1}}(\mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}})$ e $y \notin \mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}}$, portanto, $f(x) = g(y) = 0$ pois $g \in \mathcal{D}_t \cap \mathcal{D}_{s^{-1}}$. Logo $f \in \mathcal{D}_{(st)^{-1}}$.

(3) Seja $f \in \alpha_t^{-1}(\mathcal{D}_t \cap \mathcal{D}_{s^{-1}})$. Vamos provar que $\alpha_s(\alpha_t(f)) = \alpha_{st}(f)$.

Por definição,

$$\alpha_s(\alpha_t(f))(x) = \begin{cases} \alpha_t(f)(\theta_{s^{-1}}(x)), & \text{se } x \in \mathcal{X}_s \text{ e } \theta_{s^{-1}}(x) \in \mathcal{X}_t \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $x \in \mathcal{X}_s$ e $\theta_{s^{-1}}(x) \in \mathcal{X}_t$ se, e somente se, $x \in \theta_s(\mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}})$. Além disso, $\theta_s(\mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}}) = \mathcal{X}_s \cap \mathcal{X}_{st}$ e $\theta_{t^{-1}}(\theta_{s^{-1}}(x)) = \theta_{(st)^{-1}}(x)$ para todo $x \in \theta_s(\mathcal{X}_t \cap \mathcal{X}_{s^{-1}})$. Portanto,

$$\alpha_s(\alpha_t(f))(x) = \begin{cases} f(\theta_{(st)^{-1}}(x)), & \text{se } x \in \mathcal{X}_s \cap \mathcal{X}_{st} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathcal{X}_s \cap \mathcal{X}_{st}. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\alpha_{st}(f)(x) = \begin{cases} f(\theta_{(st)^{-1}}(x)), & \text{se } x \in \mathcal{X}_{st} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathcal{X}_{st}. \end{cases}$$

Como $f \in \alpha_t^{-1}(\mathcal{D}_t \cap \mathcal{D}_{s^{-1}}) \subseteq \mathcal{D}_{t^{-1}} \cap \mathcal{D}_{(st)^{-1}}$, segue que $f(\theta_{(st)^{-1}}(x)) = 0$ se $x \notin \mathcal{X}_s \cap \mathcal{X}_{st}$. Portanto,

$$\alpha_{st}(f)(x) = \begin{cases} f(\theta_{(st)^{-1}}(x)), & \text{se } x \in \mathcal{X}_s \cap \mathcal{X}_{st} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathcal{X}_s \cap \mathcal{X}_{st}. \end{cases}$$

Assim, $\alpha_s(\alpha_t(f)) = \alpha_{st}(f)$ para todo $f \in \alpha_t^{-1}(\mathcal{D}_t \cap \mathcal{D}_{s^{-1}})$. Logo, $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ é uma ação parcial de G sobre a C*-álgebra $C_0(\mathcal{X})$.

Observação 1.1.7: Na verdade, toda ação parcial de G sobre $C_0(\mathcal{X})$ é induzida por uma ação parcial de G sobre $\mathcal{X}$ (ver [1], Exercício 3.2.3).

Exemplo 1.1.8: Sejam $\mathcal{G} = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{F}_n$ os geradores livres do grupo livre, $\mathcal{G}^{-1} = \{a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}\}$ os seus respectivos inversos e $\mathcal{X}$ um espaço topológico. Suponha que, para cada $g \in \mathcal{G}$, existam $\mathcal{X}_{g^{-1}}$ e $\mathcal{X}_g$ subconjuntos abertos de $\mathcal{X}$ e $\theta_g : \mathcal{X}_{g^{-1}} \longrightarrow \mathcal{X}_g$ um homeomorfismo. Sendo assim, para cada $g \in \mathcal{G}$, defina $\theta_{g^{-1}} = \theta_g^{-1} : \mathcal{X}_g \longrightarrow \mathcal{X}_{g^{-1}}$. No caso geral, escreva $g = y_1 \ldots y_k$ na sua forma reduzida, isto é, $y_{i+1} \neq y_i^{-1}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ em que $y_i \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$. Além disso, defina $\mathcal{X}_{g^{-1}} = \mathcal{X}_{y_k^{-1}} \cap \theta_{y_k}^{-1}(\mathcal{X}_{y_{k-1}^{-1}}) \cap \ldots \cap (\theta_{y_2} \circ \ldots \circ \theta_{y_k})^{-1}(\mathcal{X}_{y_1^{-1}})$, $\mathcal{X}_g = \theta_{y_1}\Big(\theta_{y_2}\big(\ldots(\theta_{y_k}(\mathcal{X}_{g^{-1}}))\ldots\big)\Big)$ e $\theta_g = \theta_{y_1} \circ \ldots \circ \theta_{y_k} : \mathcal{X}_{g^{-1}} \longrightarrow \mathcal{X}_g$. Definiremos $\theta_e = Id_{\mathcal{X}}$ em que $e \in \mathbb{F}_n$ é o elemento neutro do grupo livre. Vamos provar que $(\{\mathcal{X}_g\}_{g \in \mathbb{F}_n}, \{\theta_g\}_{g \in \mathbb{F}_n})$ é uma ação parcial do grupo livre $\mathbb{F}_n$ sobre $\mathcal{X}$. Note que, para todo $g \in \mathbb{F}_n$, θ_g é um homeomorfismo e $\mathcal{X}_{g^{-1}}$ e $\mathcal{X}_g$ são conjuntos abertos em $\mathcal{X}$. Para mostrar o item (2), sejam $g, h \in \mathbb{F}_n$ e $x \in \theta_{h^{-1}}(\mathcal{X}_{g^{-1}} \cap \mathcal{X}_h)$. Primeiramente, escreva $g = y_1 \ldots y_k z_1 \ldots z_\ell = yz$ com $y = y_1 \ldots y_k$ e $z = z_1 \ldots z_\ell$ e $h = z_\ell^{-1} \ldots z_1^{-1} w_1 \ldots w_p = z^{-1}w$ com $w = w_1 \ldots w_p$ na forma reduzida tal que $y_k \neq w_1^{-1}$, $k, p \in \mathbb{N}^*$ e $\ell \in \mathbb{N}$. Em seguida, como $x \in \theta_{h^{-1}}(\mathcal{X}_{g^{-1}} \cap \mathcal{X}_h)$, segue que $x \in \mathcal{X}_{w^{-1}}$. Além disso, $\theta_w(x) \in \mathcal{X}_{y^{-1}}$. Logo, $x \in \mathcal{X}_{(gh)^{-1}}$ pois $gh = y_1 \ldots y_k w_1 \ldots w_p = yw$. Finalmente, para provar o item (3), sejam $g = y_1 \ldots y_k z_1 \ldots z_\ell = yz$, $h = z_\ell^{-1} \ldots z_1^{-1} w_1 \ldots w_p = z^{-1}w \in \mathbb{F}_n$ e $x \in \theta_{h^{-1}}(\mathcal{X}_{g^{-1}} \cap \mathcal{X}_h)$. Como $x \in \mathcal{X}_{w^{-1}}$ e $\theta_w(x) \in \mathcal{X}_z$, $\theta_{gh}(x) = \theta_y \circ \theta_w(x) = \theta_y \circ \theta_z \circ \theta_{z^{-1}} \circ \theta_w(x) = \theta_g \circ \theta_h(x)$. Logo, $(\{\mathcal{X}_g\}_{g \in \mathbb{F}_n}, \{\theta_g\}_{g \in \mathbb{F}_n})$ é uma ação parcial do grupo livre $\mathbb{F}_n$ sobre $\mathcal{X}$.

1.2 Representações parciais

Definição 1.2.1: Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade e G um grupo. Uma **representação parcial de** G **sobre** $\mathcal{A}$ é uma função $\lambda : G \longrightarrow \mathcal{A}$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) $\lambda(e) = 1_{\mathcal{A}}$

(2) $\lambda(t)\lambda(s)\lambda(s^{-1}) = \lambda(ts)\lambda(s^{-1})$ para todo $t, s \in G$

(3) $\lambda(t^{-1}) = (\lambda(t))^*$

No caso em que $\lambda(t)\lambda(s) = \lambda(ts)$ para todo $t, s \in G$, dizemos que $\lambda : G \longrightarrow \mathcal{A}$ é uma **representação de** G **sobre** $\mathcal{A}$.

Exemplo 1.2.2: Seja G um grupo e considere o espaço de Hilbert $\ell^2(G)$ das funções de G em $\mathbb{C}$ de quadrado somável. Defina, para cada $t \in G$,

$$\begin{aligned} \lambda_t : \ell^2(G) &\longrightarrow \ell^2(G) \\ f &\longmapsto \lambda_t(f) \end{aligned}$$

com $\lambda_t(f)(s) = f(t^{-1}s)$ para todo $s \in G$. Note que λ_t está bem definida pois $\sum_{s\in G} |\lambda_t(f)(s)|^2 = \sum_{s\in G} |f(t^{-1}s)|^2 = \sum_{t\in G} |f(r)|^2 < \infty$. Além disso, λ_t é linear e $\|\lambda_t(f)\|^2 = \sum_{s\in G} |f(t^{-1}s)|^2 = \sum_{r\in G} |f(r)|^2 = \|f\|^2$, isto é, $\|\lambda_t(f)\| = \|f\|$. Portanto, segue que $\lambda_t \in \mathcal{B}(\ell^2(G))$ para todo $t \in G$. Sendo assim, defina

$$\begin{aligned} \lambda : G &\longrightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G)) \\ t &\longmapsto \lambda_t \end{aligned}$$

Vamos provar que $\lambda : G \longrightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G))$ é uma representação de G sobre $\mathcal{B}(\ell^2(G))$. Dados $f, g \in \ell^2(G)$ e $t, s, r \in G$, temos:

(1) $\lambda_e(f)(t) = f(e^{-1}t) = f(t)$, ou seja, $\lambda_e = Id_{(\ell^2(\mathbb{N}))}$.

(2) $\lambda_t(\lambda_s(f))(r) = \lambda_s(f)(t^{-1}r) = f(s^{-1}t^{-1}r) = \lambda_{ts}(f)(r)$, ou seja, $\lambda_t\lambda_s = \lambda_{ts}$.

(3) $\langle \lambda_t^*(f), g\rangle = \langle f, \lambda_t(g)\rangle = \sum_{s\in G} f(s)\overline{g(t^{-1}s)} = \sum_{r\in G} f(tr)\overline{g(r)} = \langle \lambda_{t^{-1}}(f), g\rangle$, ou seja, $\lambda_t^* = \lambda_{t^{-1}}$.

Logo, $\lambda : G \longrightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G))$ é uma representação de G sobre $\mathcal{B}(\ell^2(G))$. Essa representação é denominada **representação regular à esquerda** de G.

Exemplo 1.2.3: Seja $\ell^2(\mathbb{N})$ o espaço de Hilbert das sequências de quadrado somável e $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a base canônica de $\ell^2(\mathbb{N})$. Considere S o operador shift em $\ell^2(\mathbb{N})$, isto é, $S(e_n) = e_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como S é uma isometria (não necessariamente bijetora), segue que $S^*S = Id_{\ell^2(\mathbb{N})}$. Seja $C^*(\{S\})$ a C*-álgebra gerada por S. $C^*(\{S\})$ é denominada a **álgebra de Toeplitz**. Para mais detalhes, ver [5]. Defina

$$\lambda : \mathbb{Z} \longrightarrow C^*(\{S\})$$
$$k \longmapsto \lambda(k)$$

com

$$\lambda(k) = \begin{cases} S^k, & \text{se } k \geqslant 0 \\ (S^*)^{-k}, & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Vamos provar que $\lambda : \mathbb{Z} \longrightarrow C^*(\{S\})$ é uma representação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $C^*(\{S\})$.

(1) $\lambda(0) = S^0 = Id_{(\ell^2(\mathbb{N}))}$

(2) Dados $k, m \in \mathbb{Z}$, seis casos devem ser considerados:

Caso 1: $m = 0$ ou $k = 0$. Suponha $k = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \lambda(m)\lambda(k)\lambda(-k) &= \lambda(m)Id_{(\ell^2(\mathbb{N}))}Id_{(\ell^2(\mathbb{N}))} \\ &= \lambda(m+0)Id_{(\ell^2(\mathbb{N}))} \\ &= \lambda(m+k)\lambda(-k). \end{aligned}$$

Se $m = 0$, a verificação é análoga.

Caso 2: $m > 0$ e $k > 0$. Por definição, temos que

$$\begin{aligned} \lambda(m)\lambda(k)\lambda(-k) &= S^m S^k \lambda(-k) \\ &= S^{m+k}\lambda(-k) \\ &= \lambda(m+k)\lambda(-k). \end{aligned}$$

Caso 3: $m < 0$ e $k < 0$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \lambda(m)\lambda(k)\lambda(-k) &= (S^*)^{-m}(S^*)^{-k}\lambda(-k) \\ &= (S^*)^{-(m+k)}\lambda(-k) \\ &= \lambda(m+k)\lambda(-k). \end{aligned}$$

Caso 4: $m < 0$ e $0 < |m| \leqslant k$. Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned}\lambda(m)\lambda(k)\lambda(-k) &= (S^*)^{-m}S^k(S^*)^k\\ &= (S^*)^{-m}S^{-m}S^{m+k}(S^*)^k\\ &= (S^*S)^{-m}S^{m+k}(S^*)^k\\ &= S^{m+k}(S^*)^k\\ &= \lambda(m+k)\lambda(-k).\end{aligned}$$

Caso 5: $m < 0$ e $0 < k < |m|$. Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned}\lambda(m)\lambda(k)\lambda(-k) &= (S^*)^{-m}S^k(S^*)^k\\ &= (S^*)^{-m-k}(S^*)^kS^k(S^*)^k\\ &= (S^*)^{-m-k}(S^*S)^k(S^*)^k\\ &= (S^*)^{-m-k}(S^*)^k\\ &= \lambda(m+k)\lambda(-k).\end{aligned}$$

Caso 6: $m > 0$ e $k < 0$. Suponha que $0 < |k| \leqslant m$. Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned}\lambda(m)\lambda(k)\lambda(-k) &= S^m(S^*)^{-k}S^{-k}\\ &= S^m\\ &= S^{m+k}S^{-k}\\ &= \lambda(m+k)\lambda(-k).\end{aligned}$$

Se $0 < m < |k|$, a verificação é análoga.

(3) Suponha $k \geqslant 0$. Sendo assim $\lambda(-k) = (S^*)^k = (S^k)^* = (\lambda(k))^*$.

Por outro lado, se $k < 0$ então

$$\lambda(-k) = S^{-k} = ((S^{-k})^*)^* = ((S^*)^{-k})^* = (\lambda(k))^*.$$

Logo, λ é uma representação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre a C*-álgebra $C^*(\{S\})$.

Definição 1.2.4: Seja $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, $\lambda : G \longrightarrow \mathcal{B}$ uma representação parcial de G sobre uma C*-álgebra $\mathcal{B}$ com unidade e $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo. O par (π, λ) é chamado de α-**covariante** quando as seguintes condições são satisfeitas:

(1) $\pi(\alpha_t(x)) = \lambda(t)\pi(x)\lambda(t^{-1})$ para todo $t \in G$ e $x \in \mathcal{D}_{t^{-1}}$.

(2) $\pi(a)\lambda(t)\lambda(t^{-1}) = \lambda(t)\lambda(t^{-1})\pi(a)$ para todo $t \in G$ e $a \in \mathcal{A}$.

Exemplo 1.2.5:

Seja $\mathcal{A} = \{T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))/$matriz de T é diagonal e $\lim a_{nn}$ existe $\}$, $\mathcal{B} = C^*(\{S\})$, $\lambda : \mathbb{Z} \longrightarrow C^*(\{S\})$ a representação parcial do exemplo 1.2.3 e $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow C^*(\{S\})$ a inclusão de $\mathcal{A}$ em $C^*(\{S\})$. Dado $k \in \mathbb{Z}$, defina $\mathcal{D}_k = \mathcal{A}$ se $k \leqslant 0$ e $\mathcal{D}_k = \{T \in \mathcal{A}/a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{kk} = 0\}$ se $k > 0$. Em seguida, defina $\alpha_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}_1$ com $\alpha_1(T) = STS^*$. Note que α_1 é um isomorfismo de C*-álgebras. Sendo assim, para cada $k \in \mathbb{Z}$, considere as funções $\alpha_k = (\alpha_1)^k : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}_k$ se $k \geqslant 0$ com $(\alpha_1)^0 = Id_{\mathcal{A}}$ e $\alpha_k = (\alpha_1^{-1})^k : \mathcal{D}_k \longrightarrow \mathcal{A}$ se $k < 0$. Vamos provar que $(\{\mathcal{D}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ é uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathcal{A}$. Inicialmente, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{D}_k$ é um ideal de $\mathcal{A}$. Além disso, note que α_k é um isomorfismo com $\alpha_k^{-1} = \alpha_{-k}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Em seguida, verificaremos as condições de ação parcial.

(1) Por definição, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{A}$.

(2) Seja $T \in \alpha_k^{-1}(\mathcal{D}_{-m} \cap \mathcal{D}_k)$. Nosso objetivo é provar que $T \in \mathcal{D}_{-(m+k)}$.

Caso 1: $m \geqslant 0$ e $k \geqslant 0$. Por definição, $T \in \alpha_k^{-1}(\mathcal{A} \cap \mathcal{D}_k) = \alpha_k^{-1}(\mathcal{D}_k) = \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} = \mathcal{D}_{-(m+k)}$.

Caso 2: $m \leqslant 0$, $k < 0$ e $0 < |k| \leqslant m$. Nesse caso, temos que $T \in \alpha_k^{-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_{-k} \subseteq \mathcal{D}_{(-m+k)}$.

Caso 3: $m \geqslant 0$, $k < 0$ e $0 < m < |k|$. Sendo assim, temos que $T \in \alpha_k^{-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_{-k} \subseteq \mathcal{D}_{-(m+k)}$.

Caso 4: $m < 0$, $k \geqslant 0$ e $0 < |m| \leqslant k$. Por definição, temos que $T \in \alpha_k^{-1}(\mathcal{D}_{-(m+k)} \cap \mathcal{D}_k) = \alpha_k^{-1}(\mathcal{D}_k) = \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} = \mathcal{D}_{-(m+k)}$.

Caso 5: $m < 0$, $k \geqslant 0$ e $0 < k < |m|$. Nesse caso, temos que $T \in \alpha_k^{-1}(\mathcal{D}_{-(m+k)} \cap \mathcal{D}_k) = \alpha_k^{-1}(\mathcal{D}_{-m}) = \mathcal{D}_{-(m+k)}$.

Caso 6: $m < 0$ e $n < 0$. Sendo assim, $T \in \alpha_k^{-1}(\mathcal{D}_{-m}) = \mathcal{D}_{-(m+k)} \subseteq \mathcal{D}_{-(m+k)}$.

Portanto, $\alpha_k^{-1}(\mathcal{D}_{-m} \cap \mathcal{D}_k) \subseteq \mathcal{D}_{-(m+k)}$ para todo $m, k \in \mathbb{Z}$.

(3) Seja $T \in \alpha_k^{-1}(\mathcal{D}_{-m} \cap \mathcal{D}_k)$. Provaremos que $\alpha_m(\alpha_k(T)) = \alpha_{m+k}(T)$.

Caso 1: Uma vez que $\alpha_k^{-1}(\mathcal{D}_{-m} \cap \mathcal{D}_k) = \mathcal{A}$ então teremos $\alpha_m(\alpha_k(\mathcal{A})) = \alpha_m(\mathcal{D}_k) = \mathcal{D}_{m+k} = \alpha_{m+k}(\mathcal{A})$.

Caso 2: Como $\alpha_k^{-1}(\mathcal{D}_{-m} \cap \mathcal{D}_k) = \mathcal{D}_{-k}$ então temos que $\alpha_m(\alpha_k(\mathcal{D}_{-k})) = \alpha_m(\mathcal{A}) = \mathcal{D}_m = \alpha_{m+k}(\mathcal{D}_{-k})$.

Caso 3: Análogo ao Caso 2.

Caso 4: Análogo ao Caso 1.

Caso 5: Como $\alpha_k^{-1}(\mathcal{D}_{-m} \cap \mathcal{D}_k) = \mathcal{D}_{-(m+k)}$ então temos que

$$\alpha_m(\alpha_k(\mathcal{D}_{-(m+k)})) = \alpha_m(\mathcal{D}_{-m}) = \mathcal{A} = \alpha_{m+k}(\mathcal{D}_{-(m+k)}).$$

Caso 6: Análogo ao Caso 5.

Logo, $(\{\mathcal{D}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ é uma ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathcal{A}$. Finalmente, vamos demonstrar que o par (π, λ) é α-covariante.

(1) Seja $k \in \mathbb{Z}$ e $T \in \mathcal{D}_k$. Se $k \geqslant 0$ então $\pi(\alpha_k(T)) = \pi(S^k T (S^*)^k) = S^k T (S^*)^k = \lambda(k)\pi(T)\lambda(-k)$. Por outro lado, se $k < 0$ então $\pi(\alpha_k(T)) = \pi((S^*)^{-k} T S^{-k}) = (S^*)^{-k} T S^{-k} = \lambda(k)\pi(T)\lambda(-k)$.

(2) Seja $k \in \mathbb{Z}$ e $T \in \mathcal{A}$. Se $k \geqslant 0$ então $\pi(T)\lambda(k)\lambda(-k) = TS^k(S^*)^k = T(SS^*)^k = (SS^*)^k T = S^k (S^*)^k T = \lambda(k)\lambda(-k)\pi(T)$ pois $SS^* \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é uma C*-álgebra comutativa. Por outro lado, se $k < 0$ então $\pi(T)\lambda(k)\lambda(-k) = T(S^*)^{-k}S^{-k} = T(S^*S)^{-k} = T = (S^*S)^{-k}T = (S^*)^{-k}S^{-k}T = \lambda(k)\lambda(-k)\pi(T)$ pois $S^*S = Id_{\mathcal{A}}$.

Logo, o par (π, λ) é α-covariante.

2 Fibrado de Fell e C*-álgebra seccional cheia

2.1 Fibrado de Fell

O conceito de fibrado de Fell foi introduzido por J. M. G. Fell na década de 60. Uma de suas principais importâncias está relacionada com o estudo dos chamados produtos cruzados parciais. Na verdade, o fibrado de Fell é um passo intermerdiário para a construção dos mesmos. Para mais detalhes sobre esse assunto, ver [14] e [15].

Definição 2.1.1: Dado um grupo G, um **fibrado de Fell** é uma tripla $(\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G}, *, \cdot)$ em que $\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G}$ é uma família de espaços de Banach com operações

$$\begin{aligned} * : \mathcal{B}_t &\longrightarrow \mathcal{B}_{t^{-1}} \\ b_t &\longmapsto b_t^* \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{B}_t \times \mathcal{B}_s &\longrightarrow \mathcal{B}_{ts} \\ (b_t, b_s) &\longmapsto b_t b_s \end{aligned}$$

que satisfazem as seguintes condições:

(1) Para todo $t \in G$, $* : \mathcal{B}_t \longrightarrow \mathcal{B}_{t^{-1}}$ é conjugada linear e isométrica. Além disso, $(b_t^*)^* = b_t$ para todo $b_t \in \mathcal{B}_t$.

(2) Para todo $t, s \in G$, $\cdot : \mathcal{B}_t \times \mathcal{B}_s \longrightarrow \mathcal{B}_{ts}$ é associativa e bilinear.

(3) Para todo $b_t \in \mathcal{B}_t$ e $b_s \in \mathcal{B}_s$, $(b_t b_s)^* = b_s^* b_t^*$, $\|b_t^* b_t\|_{\mathcal{B}_e} = \|b_t\|_{\mathcal{B}_t}^2$ e $\|b_t b_s\|_{\mathcal{B}_{ts}} \leqslant \|b_t\|_{\mathcal{B}_t} \|b_s\|_{\mathcal{B}_s}$.

(4) Dado $b_t \in \mathcal{B}_t$, existe $a \in \mathcal{B}_e$ tal que $b_t^* b_t = a^* a$.

Cada espaço de Banach $\mathcal{B}_t$ é denominado a **fibra** t do fibrado de Fell $(\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G}, *, \cdot)$.

Observação 2.1.2: As condições da definição 2.1.1 garantem que $\mathcal{B}_e$ é uma C*-álgebra.

Exemplo 2.1.3: Seja $G = \mathbb{Z}$ e $M_3(\mathbb{C})$ a C*-álgebra das matrizes quadradas de ordem 3. Defina

$$\mathcal{B}_0 = \{A \in M_3(\mathbb{C}) / a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0\},$$

$$B_1 = \{A \in M_3(\mathbb{C}) / a_{11} = a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0\},$$

$$B_{-1} = \{A \in M_3(\mathbb{C}) / a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{22} = a_{23} = a_{32} = a_{33} = 0\}$$

e, para todo $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1, 0, 1\}$, $\mathcal{B}_k = \{0\}$. Note que, $\{\mathcal{B}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ é uma família de espaços de Banach. Por fim, definindo as operações $*$ e $\cdot$ de maneira natural, $(\{\mathcal{B}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, *, \cdot)$ é um fibrado de Fell.

Exemplo 2.1.4: Sejam $G = \mathbb{Z}$ e $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ o círculo unitário. Considere $z : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ a inclusão de S^1 em $\mathbb{C}$. Em seguida, para cada $k \in \mathbb{Z}$, defina $\mathcal{B}_k = \{\alpha z^k / \alpha \in \mathbb{C}\}$ e

$$\begin{aligned} \|\ \| : \mathcal{B}_k &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \alpha z^k &\longmapsto |\alpha|. \end{aligned}$$

Note que, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{B}_k$ é uma espaço de Banach. Além disso, as operações

$$\begin{aligned} * : \mathcal{B}_k &\longrightarrow \mathcal{B}_{-k} \\ \alpha z^k &\longmapsto \overline{\alpha} z^{-k} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_m &\longrightarrow \mathcal{B}_{k+m} \\ (\alpha z^k, \beta z^m) &\longmapsto \alpha\beta z^{k+m} \end{aligned}$$

satisfazem as condições da definição 2.1.1. Logo, $(\{\mathcal{B}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, *, \cdot)$ é um fibrado de Fell.

2.2 A C*-álgebra envolvente de uma $*$-álgebra admissível

Nesta seção, mostraremos a existência e a unicidade da C*-álgebra envolvente de uma $*$-álgebra admissível. Para isso, iniciaremos a mesma com o conceito de C*-seminorma.

Definição 2.2.1: Seja $\mathcal{B}$ uma $*$-álgebra. Uma **C*-seminorma** em $\mathcal{B}$ é uma função $s : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que, para todo $a, b \in \mathcal{B}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, as seguintes condições são satisfeitas:

(1) $s(\alpha a) = |\alpha| s(a)$

(2) $s(a+b) \leqslant s(a) + s(b)$

(3) $s(ab) \leqslant s(a)s(b)$

(4) $s(a^* a) = (s(a))^2$

Proposição 2.2.2: Seja $s : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma C*-seminorma. O conjunto $N = \{b \in \mathcal{B}/s(b) = 0\}$ é um ideal em $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A} = \overline{(\mathcal{B}/N)}$ é uma C*-álgebra com relação à norma $\|b + N\| = s(b)$.

Demonstração. Sejam $b, c \in N$, $a \in \mathcal{B}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Como $s : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma C*-seminorma, $s(\alpha b + c) \leqslant |\alpha| s(b) + s(c) = 0$, $s(ab) \leqslant s(a)s(b) = 0$ e $s(ba) \leqslant s(b)s(a) = 0$. Portanto, N é um ideal em $\mathcal{B}$. Sendo assim, $\mathcal{B}/N$ é uma álgebra. Além disso,

$$\begin{aligned} * : \mathcal{B}/N &\longrightarrow \mathcal{B}/N \\ b + N &\longmapsto b^* + N \end{aligned}$$

é uma involução pois $s(b^*) = s(b)$ para todo $b \in \mathcal{B}$. Por fim, a função

$$\begin{aligned} \| \ \| : \mathcal{B}/N &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ b + N &\longmapsto s(b) \end{aligned}$$

é uma norma. Logo, $\mathcal{A} = \overline{(\mathcal{B}/N)}$ é uma C*-álgebra. ■

Proposição 2.2.3: Se $s : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma C*-seminorma então existe uma $*$-representação $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ tal que $s(b) = \|\pi(b)\|$ para todo $b \in \mathcal{B}$.

Demonstração. Como $\mathcal{A} = \overline{(\mathcal{B}/N)}$ é uma C*-álgebra então existe uma $*$-representação isométrica $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ em que H é um espaço de Hilbert (ver [1], Teorema 3.4.15). Considere a aplicação quociente

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{B}/N \\ b &\longmapsto b + N. \end{aligned}$$

Finalmente, defina $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ tal que $\pi(b) = \varphi(\rho(b))$ para todo $b \in \mathcal{B}$. Note que π é uma $*$-representação de $\mathcal{B}$. Além disso, temos que $\|\pi(b)\| = \|\varphi(\rho(b))\| = \|\rho(b)\| = \|b + N\| = s(b)$. ■

Proposição 2.2.4: Se $s : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma C*-seminorma em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, então $s(a) \leqslant \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Demonstração. A proposição anterior garante a existência de uma $*$-representação $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ tal que $s(a) = \|\pi(a)\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Como toda $*$-representação em uma C*-álgebra é contrativa (ver [1], Lema 3.4.2), segue que $s(a) = \|\pi(a)\| \leqslant \|a\|$. ■

Dada uma $*$-álgebra $\mathcal{B}$, considere $C_s^*(\mathcal{B})$ o conjunto de todas as C*-seminorma em $\mathcal{B}$. Em seguida, defina $s' : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tal que $s'(b) = \sup\limits_{s \in C_s^*(\mathcal{B})} s(b)$. Note que s' satisfaz todas as condições da definição de C*-seminorma. Entretanto, não temos a certeza de que $s'(b) < \infty$ para todo $b \in \mathcal{B}$. Esse fato será fundamental para a existência da chamada C*-álgebra envolvente.

Definição 2.2.5: Seja $\mathcal{B}$ uma $*$-álgebra. Uma **C*-álgebra envolvente de** $\mathcal{B}$ é um par $(\mathcal{A}, \pi)$ em que $\mathcal{A}$ é uma C*-álgebra e $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ é um $*$-homomorfismo tal que, para qualquer C*-álgebra $\mathcal{C}$ e para qualquer $*$-homomorfismo $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$, existe um único $*$-homomorfismo $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$, ou seja, que o diagrama abaixo comute.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{A} \arrow[dl, "\tilde{\varphi}"] \\ \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

Definição 2.2.6: Uma $*$-álgebra $\mathcal{B}$ é **admissível** quando $s'(b) < \infty$ para todo $b \in \mathcal{B}$.

Observação 2.2.7: Pela proposição 2.2.4, toda C*-álgebra é admissível.

Proposição 2.2.8: Se $\mathcal{B}$ é uma $*$-álgebra admissível então existe um par $(\mathcal{A}, \pi)$ tal que $(\mathcal{A}, \pi)$ é a C*-álgebra envolvente de $\mathcal{B}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma $*$-álgebra admissível. Como $s'(b) < \infty$ para todo $b \in \mathcal{B}$, segue que $s' : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma C*-seminorma. Considere o ideal $N = \{b \in \mathcal{B} / s'(b) = 0\}$, a C*-álgebra $\mathcal{A} = \overline{(\mathcal{B}/N)}$ e o $*$-homomorfismo $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $\pi(b) = b + N$. Nosso objetivo é provar que o par $(\mathcal{A}, \pi)$ é a C*-álgebra envolvente de $\mathcal{B}$. Seja C uma C*-álgebra e $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow C$ um $*$-homomorfismo. Defina $\overline{\varphi} : \mathcal{B}/N \longrightarrow C$ tal que $\overline{\varphi}(b + N) = \varphi(b)$. Note que $\overline{\varphi}$ está bem definido. Além disso, $\overline{\varphi}$ é um $*$-homomorfismo. Em seguida, considere $s : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $s(b) = \|\varphi(b)\|$. Como s é uma C*-seminorma, segue que $\|\overline{\varphi}(b + N)\| = \|\varphi(b)\| = s(b) \leqslant s'(b) = \|b + N\|$. Portanto, existe $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \longrightarrow C$ extensão contínua de $\overline{\varphi}$. Além disso, $\tilde{\varphi}(\pi(b)) = \tilde{\varphi}(b + N) = \overline{\varphi}(b + N) = \varphi(b)$ para todo $b \in \mathcal{B}$, isto é, $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$. Finalmente, se $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow C$ é um $*$-homomorfismo tal que $\rho \circ \pi = \varphi$ então $\rho(b + N) = \rho(\pi(b)) = \varphi(b) = \tilde{\varphi}(\pi(b)) = \tilde{\varphi}(b + N)$. Como $\mathcal{B}/N$ é denso em $\mathcal{A}$, segue que $\rho = \tilde{\varphi}$. Logo, o par $(\mathcal{A}, \pi)$ é a C*-álgebra envolvente de $\mathcal{B}$. ∎

Definição 2.2.9: Sejam $\mathcal{B}$ uma $*$-álgebra, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ duas C*-álgebras e $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ e $\rho : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ $*$-homomorfismos. Os pares $(\mathcal{A}, \varphi)$ e $(\mathcal{C}, \rho)$ são chamados **isomorfos** quando existe um $*$-isomorfismo $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $\pi \circ \varphi = \rho$, ou seja, que o diagrama abaixo comute.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{A} \arrow[dl, "\pi"] \\ \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

Proposição 2.2.10: Sejam $\mathcal{B}$ uma $*$-álgebra admissível, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ duas C*-álgebras e $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ e $\rho : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ $*$-homomorfismos. Se $(\mathcal{A}, \varphi)$ e $(\mathcal{C}, \rho)$ são C*-álgebras envolventes de $\mathcal{B}$ então $(\mathcal{A}, \varphi)$ e $(\mathcal{C}, \rho)$ são isomorfos.

Demonstração. A definição de C*-álgebra envolvente garante a existência de $*$-homomorfismos $\tilde{\varphi} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ e $\tilde{\rho} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $\tilde{\varphi} \circ \rho = \varphi$ e $\tilde{\rho} \circ \varphi = \rho$. Sendo assim, temos que $(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\rho}) \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ (\tilde{\rho} \circ \varphi) = \tilde{\varphi} \circ \rho = \varphi$. Por outro lado, $Id_{\mathcal{A}} \circ \varphi = \varphi$. Portanto, $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\rho} = Id_{\mathcal{A}}$. Analogamente, $\tilde{\rho} \circ \tilde{\varphi} = Id_{\mathcal{C}}$. Logo, os pares $(\mathcal{A}, \varphi)$ e $(\mathcal{C}, \rho)$ são isomorfos. ■

Exemplo 2.2.11: Seja $\ell_1(\mathbb{Z}) = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} / \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| < \infty\}$. Defina em $\ell_1(\mathbb{Z})$ as seguintes operações: $(a \cdot b) = c$ em que $c_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$ e $a^* = d$ com $d_n = \overline{a}_{-n}$. Com essas operações, $\ell_1(\mathbb{Z})$ é uma $*$-álgebra de Banach comutativa com unidade. Além disso, considere $\pi : \ell_1(\mathbb{Z}) \longrightarrow C(S^1)$ tal que $\pi(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n f^n$ com $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z$. Vamos provar que $(C(S^1), \pi)$ é a C*-álgebra envolvente de $\ell_1(\mathbb{Z})$. Primeiramente, note que a sequência $\delta_1 = (\delta_1^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ em que

$$\delta_1^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n \neq 1 \end{cases}$$

é um elemento unitário em $\ell_1(\mathbb{Z})$. De fato, $(\delta_1)^* = \delta_{-1} = (\delta_1)^{-1}$ pois $\delta_1 \cdot \delta_{-1} = \delta_0 = 1_{\ell_1(\mathbb{Z})}$. Sendo assim, dados uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ e um $*$-homomorfismo $\varphi : \ell_1(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{A}$, $u = \varphi(\delta_1)$ é um elemento unitário em $\mathcal{A}$. Denotando $C^*(\{1_{\mathcal{A}}, u\})$ a C*-álgebra gerada por $1_{\mathcal{A}}$ e u, e $\sigma(u)$ o espectro de u, temos que $C^*(\{1_{\mathcal{A}}, u\}) \cong C(\sigma(u))$ e $\sigma(u) \subseteq S^1$ (ver [1], Proposições 3.3.10 e 3.3.11). Sem perda de generalidade, podemos supor que $\mathcal{A} = C(\sigma(u))$. Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : C(S^1) &\longrightarrow C(\sigma(u)) \\ g &\longmapsto g|_{\sigma(u)} \end{aligned}$$

é o único $*$-homomorfismo tal que $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$ pois, se $\rho : C(S^1) \longrightarrow C(\sigma(u))$ é tal que $\rho \circ \pi = \varphi$ então $\rho(\pi(a)) = \tilde{\varphi}(\pi(a))$ para todo $a \in \ell_1(\mathbb{Z})$. Portanto, $\rho = \tilde{\varphi}$ uma vez que $\overline{\pi(\ell_1(\mathbb{Z}))} = C(S^1)$. Logo, $(C(S^1), \pi)$ é a C*-álgebra envolvente de $\ell_1(\mathbb{Z})$.

2.3 C*-álgebra seccional cheia

A partir de um fibrado de Fell, construiremos uma C*-álgebra associada a esse fibrado através do conceito de C*-envolvente.

Dado um Fibrado de Fell $(\{\mathcal{B}_t\}_{t \in G}, *, \cdot)$, defina $\mathcal{B} = \bigoplus\limits_{t \in G} \mathcal{B}_t$. Em seguida, considere $\mathcal{B}$ com a soma e multiplicação por escalar da maneira natural. Além disso, defina

$$\begin{aligned} * : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ (b_t)_{t \in G} &\longmapsto (b^*_{t^{-1}})_{t \in G} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{B} \times \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ \big((b_t)_{t\in G}, (c_s)_{s\in G}\big) &\longmapsto \left(\sum_{t\in G} b_t c_{t^{-1}s}\right)_{s\in G} \end{aligned}$$

Vamos mostrar que estas operações dão uma estrutura de $*$-álgebra à $\mathcal{B}$. De fato, $\mathcal{B}$ é claramente um espaço vetorial. Sendo assim, basta provar as propriedades relativas a $\cdot$ e $*$. Dados $(b_t)_{t\in G}, (c_s)_{s\in G}, (d_r)_{r\in G} \in \mathcal{B}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que:

(a)

$$\begin{aligned} \big(\lambda(b_t)_{t\in G}\big) \cdot (c_s)_{s\in G} &= (\lambda b_t)_{t\in G} \cdot (c_s)_{s\in G} \\ &= \left(\sum_{t\in G} (\lambda b_t) c_{t^{-1}s}\right)_{s\in G} \\ &= \left(\sum_{t\in G} b_t (\lambda c_{t^{-1}s})\right)_{s\in G} \\ &= (b_t)_{t\in G} \cdot \lambda (c_s)_{s\in G} \\ &= \lambda\big((b_t)_{t\in G} \cdot (c_s)_{s\in G}\big) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (b_t)_{t\in G} \cdot \big((c_s)_{s\in G} + (d_s)_{s\in G}\big) &= (b_t)_{t\in G} \cdot (c_s + d_s)_{s\in G} \\ &= \left(\sum_{t\in G} b_t (c_{t^{-1}s} + d_{t^{-1}s})\right)_{s\in G} \\ &= \left(\sum_{t\in G} b_t c_{t^{-1}s}\right)_{s\in G} + \left(\sum_{t\in G} b_t d_{t^{-1}s}\right)_{s\in G} \\ &= (b_t)_{t\in G} \cdot (c_s)_{s\in G} + (b_t)_{t\in G} \cdot (d_s)_{s\in G} \end{aligned}$$

A outra demonstração é análoga.

(c)

$$\begin{aligned}\big((b_t)_{t\in G}\cdot(c_s)_{s\in G}\big)\cdot(d_r)_{r\in G} &= \left(\sum_{t\in G} b_t c_{t^{-1}s}\right)_{s\in G}\cdot(d_r)_{r\in G}\\ &= \left(\sum_{s\in G}\left(\sum_{t\in G} b_t c_{t^{-1}s}\right) d_{s^{-1}r}\right)_{r\in G}\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(b_t)_{t\in G}\cdot\big((c_s)_{s\in G}\cdot(d_r)_{r\in G}\big) &= (b_t)_{t\in G}\cdot\left(\sum_{s\in G} c_s d_{s^{-1}r}\right)_{r\in G}\\ &= \left(\sum_{t\in G} b_t\left(\sum_{s\in G} c_s d_{s^{-1}t^{-1}r}\right)\right)_{r\in G}\end{aligned}$$

Renomeando os índices de maneira apropriada, segue que

$$\big((b_t)_{t\in G}\cdot(c_s)_{s\in G}\big)\cdot(d_r)_{r\in G} = (b_t)_{t\in G}\cdot\big((c_s)_{s\in G}\cdot(d_r)_{r\in G}\big)$$

(d)

$$\Big(\big((b_t)_{t\in G}\big)^*\Big)^* = \big((b^*_{t^{-1}})_{t\in G}\big)^* = \big((b^*_{(t^{-1})^{-1}})^*\big)_{t\in G} = (b_t)_{t\in G}$$

(e)

$$\begin{aligned}\big(\lambda(b_t)_{t\in G}+(c_t)_{t\in G}\big)^* &= \big((\lambda b_t + c_t)_{t\in G}\big)^*\\ &= \big((\lambda b_{t^{-1}} + c_{t^{-1}})^*\big)_{t\in G}\\ &= (\overline{\lambda} b^*_{t^{-1}} + c^*_{t^{-1}})_{t\in G}\\ &= \overline{\lambda}\big((b_t)_{t\in G}\big)^* + \big((c_t)_{t\in G}\big)^*\end{aligned}$$

(f)

$$
\begin{aligned}
\left((b_t)_{t\in G}\cdot(c_s)_{s\in G}\right)^* &= \left(\left(\sum_{t\in G} b_t c_{t^{-1}s}\right)_{s\in G}\right)^*\\
&= \left(\left(\sum_{t\in G} b_t c_{t^{-1}s^{-1}}\right)^*\right)_{s\in G}\\
&= \left(\sum_{t\in G}(b_t c_{t^{-1}s^{-1}})^*\right)_{s\in G}\\
&= \left(\sum_{t\in G} c^*_{t^{-1}s^{-1}} b^*_t\right)_{s\in G}\\
&= \left(\sum_{s\in G} c^*_{s^{-1}} b^*_{st^{-1}}\right)_{t\in G}\\
&= (c^*_{s^{-1}})_{s\in G}\cdot(b^*_{t^{-1}})_{t\in G}\\
&= \left((c_s)_{s\in G}\right)^*\cdot\left((b_t)_{t\in G}\right)^*
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{B}$ é $*$-álgebra.

Proposição 2.3.1: Seja $(\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G},*,\cdot)$ um Fibrado de Fell. A $*$-álgebra $\mathcal{B}=\bigoplus_{t\in G}\mathcal{B}_t$ é admissível.

Demonstração. Seja $s:\mathcal{B}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ uma C*-seminorma. Para cada $t\in G$, vamos denotar por $\tilde{\mathcal{B}}_t$ o subconjunto de $\mathcal{B}$ cujos elementos são nulos nas entradas diferentes de t. Além disso, para cada $b_t\in\mathcal{B}_t$, considere $(\tilde{b}_t)\in\tilde{\mathcal{B}}_t$ que é igual a b_t na entrada de t. Inicialmente, tome $\tilde{b}_e\in\tilde{\mathcal{B}}_e$ arbitrário.

Como $\tilde{\mathcal{B}}_e$ é isomorfo a $\mathcal{B}_e$ definindo $\|\tilde{b}_e\|_{\tilde{\mathcal{B}}_e}=\|b_e\|_{\mathcal{B}_e}$, segue da observação 2.1.2 que $\tilde{\mathcal{B}}_e$ é uma C*-álgebra. Sendo assim, pela proposição 2.2.4, $s|_{\tilde{\mathcal{B}}_e}$ é contrativa. Portanto, $\tilde{\mathcal{B}}_e$ é admissível. Agora, considere

$\tilde{b}_t \in \tilde{\mathcal{B}}_t$ arbitrário. Como $(\tilde{b}_t)^*\tilde{b}_t \in \tilde{\mathcal{B}}_e$, temos que

$$s(\tilde{b}_t)^2 = s((\tilde{b}_t)^* b_t) \leqslant \|(\tilde{b}_t)^* b_t\|_{\tilde{\mathcal{B}}_e}.$$

Dessa forma cada $\tilde{\mathcal{B}}_t$ também é admissível. Finalmente, seja $b \in \mathcal{B}$. Como $b = \sum_{t\in G} \tilde{b}_t$, segue que

$$s(b) = s\left(\sum_{t\in G} \tilde{b}_t\right) \leqslant \sum_{t\in G} s(\tilde{b}_t) \leqslant \sum_{t\in G} \|(\tilde{b}_t)^*\tilde{b}_t\|^{\frac{1}{2}}_{\tilde{\mathcal{B}}_e}.$$

Logo, $\mathcal{B} = \bigoplus_{t\in G} \mathcal{B}_t$ é uma $*$-álgebra admissível. ∎

Definição 2.3.2: Seja $(\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G}, *, \cdot)$ um fibrado de Fell. A **C*-álgebra seccional cheia do fibrado de Fell** $(\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G}, *, \cdot)$, denotada por $C^*(\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G})$, é a C*-álgebra envolvente de $\mathcal{B}$.

Observação 2.3.3: No capítulo 3, construiremos um fibrado de Fell a partir de uma ação parcial. Para esse caso específico, mostraremos que $N = \{b = (b_t)_{t\in G} \in \mathcal{B}/s'(b) = 0\} = \{0\}$(ver proposição 3.3.19).

3 Fibrado de Fell associado a uma ação parcial e produtos cruzados parciais

Neste capítulo, construiremos um fibrado de Fell a partir de uma ação parcial sobre uma C*-álgebra. Em seguida, definiremos o produto cruzado parcial associado a esse fibrado. Finalmente, o conceito de esperança condicional será de grande importância na definição do chamado produto cruzado parcial reduzido.

3.1 Fibrado de Fell associado a uma ação parcial

Seja $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre uma C*-álgebra $\mathcal{A}$. Para cada $t \in G$, defina

$$\mathcal{B}_t = \{(a_t, s) \in \mathcal{A} \times G / s = t \text{ e } a_t \in \mathcal{D}_t\}.$$

Em seguida, para cada $t \in G$ e para cada $a_t \in \mathcal{D}_t$, denote $a_t\delta_t = (a_t, t)$. Além disso, para cada $t \in G$, defina em $\mathcal{B}_t$ as operações de soma e multiplicação por escalar da maneira natural. Finalmente, para cada $t, s \in G$, defina

$$\begin{aligned} * : \mathcal{B}_t &\longrightarrow \mathcal{B}_{t^{-1}} \\ a_t\delta_t &\longmapsto \alpha_{t^{-1}}(a_t^*)\delta_{t^{-1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{B}_t \times \mathcal{B}_s &\longrightarrow \mathcal{B}_{ts} \\ (a_t\delta_t, b_s\delta_s) &\longmapsto \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_s)\delta_{ts} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \| \ \| : \mathcal{B}_t &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ a_t\delta_t &\longmapsto \|a_t\|. \end{aligned}$$

Note que a operação $\cdot$ está bem definida pois cada $\mathcal{D}_t$ é um ideal em $\mathcal{A}$ e $\alpha_t(\mathcal{D}_{t^{-1}} \cap \mathcal{D}_t) = \mathcal{D}_t \cap \mathcal{D}_{ts}$. No entanto, não temos nenhuma garantia de que a operação $\cdot$ é associativa. Para provarmos que essa operação é mesmo associativa, faremos um breve estudo sobre álgebra de multiplicadores.

3.2 A álgebra de multiplicadores

Definição 3.2.1: Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. A **álgebra de multiplicadores** de $\mathcal{A}$ é o conjunto $M(\mathcal{A})$ dos pares ordenados (L, R), em que L e R são transformações lineares de $\mathcal{A}$ tais que, para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$, as seguintes condições são satisfeitas:

(1) $L(ab) = L(a)b$

(2) $R(ab) = aR(b)$

(3) $R(a)b = aL(b)$

A transformação L é denominada um **multiplicador à esquerda de** $\mathcal{A}$. Analogamente, R é denominada um **multiplicador à direita de** $\mathcal{A}$.

Exemplo 3.2.2: Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e $x \in \mathcal{A}$. Considere

$$\begin{aligned} L_x : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ a &\longmapsto xa \end{aligned}$$

e

$$R_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$a \longmapsto ax.$$

Vamos mostrar que $(L_x, R_x) \in M(\mathcal{A})$. Claramente L_x e R_x são transformações lineares. Além disso, dados $a, b \in \mathcal{A}$, temos que:

(1) $L_x(ab) = x(ab) = (xa)b = L_x(a)b$

(2) $R_x(ab) = (ab)x = a(bx) = aR_x(b)$

(3) $R_x(a)b = (ax)b = a(xb) = aL_x(b)$

Dados (L, R), $(L', R') \in M(\mathcal{A})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, defina em $M(\mathcal{A})$ as seguintes operações:

(a) (Adição): $(L, R) + (L', R') = (L + L', R + R')$

(b) (Multiplicação por escalar): $\lambda(L, R) = (\lambda L, \lambda R)$

(c) (Multiplicação): $(L, R) \cdot (L', R') = (L \circ L', R' \circ R)$

As operações de adição e multiplicação por escalar estão bem definidas. Vamos provar que a operação de multiplicação também está bem definida. Dados $a, b \in \mathcal{A}$, temos que:

(1) $L \circ L'(ab) = L(L'(ab)) = L(L'(a)b) = L(L'(a))b = (L \circ L'(a))b$;

(2) $R' \circ R(ab) = R'(R(ab)) = R'(aR(b)) = aR'(R(b)) = a(R' \circ R(b))$;

(3) $(R' \circ R(a))b = R'(R(a))b = R(a)L'(b) = aL(L'(b)) = a(L \circ L'(b))$.

Note que, com as operações definidas anteriormente, $M(\mathcal{A})$ é uma álgebra com unidade pois $(Id_{\mathcal{A}}, Id_{\mathcal{A}}) \in M(\mathcal{A})$.

Definição 3.2.3: Uma álgebra $\mathcal{A}$ é **não degenerada** quando para todo elemento não nulo $a \in \mathcal{A}$, existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $ab \neq 0$ ou $ba \neq 0$.

Exemplo 3.2.4: Todo ideal I fechado de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ é não degenerado. De fato, se $a \in I$ é não-nulo então existe $a^* \in I$ tal que $a^*a \in I$ é não-nulo pois, $\|a^*a\| = \|a\|^2 \neq 0$.

Sejam $x, y \in \mathcal{A}$ e $(L_x, R_x), (L_y, R_y) \in M(\mathcal{A})$. Para todo $a \in \mathcal{A}$, $R_y \circ L_x(a) = R_y(xa) = (xa)y = x(ay) = xR_y(a) = L_x(R_y(a)) = L_x \circ R_y(a)$, isto é, $R_y \circ L_x = L_x \circ R_y$.

O próximo exemplo ilustra o fato que esta igualdade nem sempre é verdadeira em $M(\mathcal{A})$.

Exemplo 3.2.5: Seja $\mathbb{R}^3$ com a multiplicação trivial, isto é, $xy = 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^3$. Note que as condições da definição 3.2.1 são satisfeitas por qualquer par de operadores lineares. Portanto, considere L e R' operadores lineares tais que $L(e_1) = e_2$, $L(e_2) = e_1$, $L(e_3) = e_3$, $R'(e_1) = e_1$, $R'(e_2) = e_3$ e $R'(e_3) = e_2$. Nesse caso, a igualdade não é válida pois $R' \circ L(e_1) = R'(e_2) = e_3 \neq e_2 = L(e_1) = L \circ R'(e_1)$.

Definição 3.2.6: Uma álgebra $\mathcal{A}$ é (L, R)-**associativa** quando para quaisquer $(L, R), (L', R') \in M(\mathcal{A})$ temos que $R' \circ L = L \circ R'$.

Proposição 3.2.7: Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra não degenerada então $\mathcal{A}$ é (L, R)-associativa.

Demonstração. Sejam $(L, R), (L', R') \in M(\mathcal{A})$ e $a \in \mathcal{A}$. Assim, $R(L'(a))b = L'(a)L(b) = L'(aL(b)) = L'(R(a)b) = L'(R(a))b$, para todo $b \in \mathcal{A}$, ou seja, $[R(L'(a)) - L'(R(a))]b = 0$. Analogamente, $b[R(L'(a)) - L'(R(a))] = 0$ para todo $b \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é não degenerada, segue que $R(L'(a)) - L'(R(a)) = 0$. Logo, $\mathcal{A}$ é (L, R)-associativa. ■

Proposição 3.2.8: Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras. Se $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é um isomorfismo e $(L, R) \in M(\mathcal{A})$ então $(\pi \circ L \circ \pi^{-1}, \pi \circ R \circ \pi^{-1}) \in M(\mathcal{B})$.

Demonstração. Inicialmente, note que $\pi \circ L \circ \pi^{-1}$ e $\pi \circ R \circ \pi^{-1}$ são transformações lineares. Além disso, para quaisquer $a, b \in \mathcal{B}$ temos que:

(1)

$$\begin{aligned}
\pi \circ L \circ \pi^{-1}(ab) &= \pi \circ L(\pi^{-1}(a)\pi^{-1}(b)) \\
&= \pi(L(\pi^{-1}(a))\pi^{-1}(b)) \\
&= \pi(L(\pi^{-1}(a)))\pi(\pi^{-1}(b)) \\
&= (\pi \circ L\pi^{-1}(a))b.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\pi \circ R \circ \pi^{-1}(ab) &= \pi(R(\pi^{-1}(a)\pi^{-1}(b))) \\
&= \pi(\pi^{-1}(a)R(\pi^{-1}(b))) \\
&= \pi(\pi^{-1}(a))\pi(R(\pi^{-1}(b))) \\
&= a(\pi \circ R \circ \pi^{-1}(b)).
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\pi \circ R \circ \pi^{-1}(a))b &= \pi(R(\pi^{-1}(a)))b\\ &= \pi(R(\pi^{-1}(a)))\pi(\pi^{-1}(b))\\ &= \pi(R(\pi^{-1}(a))\pi^{-1}(b))\\ &= \pi(\pi^{-1}(a)L(\pi^{-1}(b)))\\ &= a(\pi \circ L \circ \pi^{-1}(b)).\end{aligned}$$

Logo, $(\pi \circ L \circ \pi^{-1}, \pi \circ R \circ \pi^{-1}) \in M(\mathcal{B})$. ■

Teorema 3.2.9: Seja $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre uma C*-álgebra. A operação

$$\begin{aligned}\cdot : \mathcal{B}_t \times \mathcal{B}_s &\longrightarrow \mathcal{B}_{ts}\\ (a_t\delta_t, b_s\delta_s) &\longmapsto \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_s)\delta_{ts}\end{aligned}$$

é associativa.

Demonstração. Sejam $a_t\delta_t \in \mathcal{B}_t$, $b_s\delta_s \in \mathcal{B}_s$ e $c_r\delta_r \in \mathcal{B}_r$. Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned}\big((a_t\delta_t)\cdot(b_s\delta_s)\big)\cdot(c_r\delta_r) &= \big(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_s)\delta_{ts}\big)\cdot c_r\delta_r\\ &= \alpha_{ts}\big(\alpha_{(ts)^{-1}}\big(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_s)\big)c_r\big)\delta_{tsr}.\end{aligned}$$

Como $\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_s \in \mathcal{D}_{t^{-1}} \cap \mathcal{D}_s$, segue que $\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_s) \in \mathcal{D}_t \cap \mathcal{D}_{ts}$ e $\alpha_{(ts)^{-1}}(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_s)) \in \mathcal{D}_{(ts)^{-1}} \cap \mathcal{D}_{s^{-1}}$. Portanto, pelo item (3) da definição de ação parcial, trocaremos $\alpha_{s^{-1}t^{-1}}$ por $\alpha_{s^{-1}} \circ \alpha_{t^{-1}}$ e α_{ts} por $\alpha_t \circ \alpha_s$. Logo, $\big((a_t\delta_t)\cdot(b_s\delta_s)\big)\cdot(c_r\delta_r) = \alpha_t\big(\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_s)c_r)\big)\delta_{tsr}$.

Por outro lado,

$$(a_t\delta_t)\cdot\big((b_s\delta_s)\cdot(c_r\delta_r)\big)=\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(b_s))c_r)\delta_{tsr}.$$

Aplicando $\alpha_{t^{-1}}$ em ambas as equações, temos que a operação é associativa se, e somente, se

$$\alpha_s\big(\alpha_{s^{-1}}(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_s)c_r\big)=\alpha_{t^{-1}}(a_t)\alpha_s\big(\alpha_{s^{-1}}(b_s)c_r\big).$$

Como $\alpha_{t^{-1}}:\mathcal{D}_t\longrightarrow\mathcal{D}_{t^{-1}}$ é um isomorfismo, substitua $\alpha_{t^{-1}}(a_t)$ por $a_{t^{-1}}\in\mathcal{D}_{t^{-1}}$. Assim, a a operação é associativa se, e somente se,

$$\alpha_s\big(\alpha_{s^{-1}}(a_{t^{-1}}b_s)c_r\big)=a_{t^{-1}}\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(b_s)c_r)$$

para todo $r,s,t\in G$, $a_{t^{-1}}\in\mathcal{D}_{t^{-1}}$, $b_s\in\mathcal{D}_s$ e $c_r\in\mathcal{D}_r$. Em particular, faça $t=r=e$. Sendo assim, a operação é associativa se, e somente se,

$$\alpha_s\big(\alpha_{s^{-1}}(ab_s)c\big)=a\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(b_s)c)$$

para todo $s\in G$, $a,c\in\mathcal{A}$ e $b_s\in\mathcal{D}_s$. Finalmente, note que a equação acima é igual à

$$(\alpha_s\circ R_c\circ\alpha_{s^{-1}})\circ L_a(b_s)=L_a\circ(\alpha_s\circ R_c\circ\alpha_{s^{-1}})(b_s)$$

em que R_c é um multiplicador à direita de $\mathcal{D}_{s^{-1}}$ e L_a é um multiplicador à direita de $\mathcal{D}_s$. Além disso, pela proposição 3.2.8, $\alpha_s\circ R_c\circ\alpha_{s^{-1}}$ é um multiplicador à direita de $\mathcal{D}_s$. Como em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ todo ideal é (L,R)-associativo, segue que a operação

$$\begin{aligned}\cdot:\mathcal{B}_t\times\mathcal{B}_s&\longrightarrow\mathcal{B}_{ts}\\(a_t\delta_t,b_s\delta_s)&\longmapsto\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_s)\delta_{ts}\end{aligned}$$

é associativa. ∎

3.3 Produtos cruzados parciais

Agora que já sabemos que a operação $\cdot : \mathcal{B}_t \times \mathcal{B}_s \longrightarrow \mathcal{B}_{ts}$ é associativa, vamos provar que a construção é realmente um Fibrado de Fell.

Proposição 3.3.1: $(\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G}, *, \cdot)$ é uma Fibrado de Fell.

Demonstração. Primeiramente, note que cada $\mathcal{B}_t$ é um espaço vetorial normado. Como os ideais $\mathcal{D}_t$ são fechados, segue que $\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G}$ é uma família de espaços de Banach. Além disso, para todo $t, s \in G$, $* : \mathcal{B}_t \longrightarrow \mathcal{B}_{t^{-1}}$ é conjugada linear, isométrica e $(b_t^*)^* = b_t$ para todo $b_t \in \mathcal{B}_t$ e $\cdot : \mathcal{B}_t \times \mathcal{B}_s \longrightarrow \mathcal{B}_{ts}$ é bilinear. Finalmente, mostraremos os demais axiomas da definição de Fibrado de Fell. Dados $a_t\delta_t, b_t\delta_t \in \mathcal{B}_t$, $c_s\delta_s \in \mathcal{B}_s$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos:

(3)

$$
\begin{aligned}
\big((a_t\delta_t)\cdot(c_s\delta_s)\big)^* &= \big(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)c_s)\delta_{ts}\big)^* \\
&= \alpha_{s^{-1}t^{-1}}\big((\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)c_s))^*\big)\delta_{s^{-1}t^{-1}} \\
&= \alpha_{s^{-1}t^{-1}}\big(\alpha_t((\alpha_{t^{-1}}(a_t)c_s)^*)\big)\delta_{s^{-1}t^{-1}} \\
&= \alpha_{s^{-1}t^{-1}}\big(\alpha_t(c_s^*\alpha_{t^{-1}}(a^*))\big)\delta_{s^{-1}t^{-1}} \\
&= \alpha_{s^{-1}}(c_s^*\alpha_{t^{-1}}(a^*))\delta_{s^{-1}t^{-1}} \\
&= \alpha_{s^{-1}}\big(\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(c_s^*))\alpha_{t^{-1}}(a_t^*)\big)\delta_{st} \\
&= \alpha_{s^{-1}}(c_s^*)\delta_{s^{-1}}\cdot\alpha_{t^{-1}}(a_t^*)\delta_{t^{-1}} \\
&= (c_s\delta_s)^*\cdot(a_t\delta_t)^*
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\|(a_t\delta_t)^* \cdot a_t\delta_t\| &= \|\alpha_{t^{-1}}(a_t^*)\delta_{t^{-1}} \cdot a_t\delta_t\| \\
&= \|\alpha_{t^{-1}}\big(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t^*))a_t\big)\delta_e\| \\
&= \|\alpha_{t^{-1}}(a_t^* a_t)\delta_e\| \\
&= \|\alpha_{t^{-1}}(a_t^* a_t)\| \\
&= \|a_t^* a_t\| \\
&= \|a_t\|^2 \\
&= \|a_t\delta_t\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|(a_t\delta_t) \cdot (c_s\delta_s)\| &= \|\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)c_s)\delta_{ts}\| \\
&= \|\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)c_s)\| \\
&= \|\alpha_{t^{-1}}(a_t)c_s\| \\
&\leqslant \|\alpha_{t^{-1}}(a_t)\|\|c_s\| \\
&= \|a_t\|\|c_s\| \\
&= \|a_t\delta_t\|\|c_s\delta_s\|
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
(a_t\delta_t)^* \cdot (a_t\delta_t) &= \alpha_{t^{-1}}(a_t^*)\delta_{t^{-1}} \cdot a_t\delta_t \\
&= \alpha_{t^{-1}}(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t^*))a_t)\delta_e \\
&= \alpha_{t^{-1}}(a_t^* a_t)\delta_e \\
&= (\alpha_{t^{-1}}(a_t)\delta_e)^* \cdot (\alpha_{t^{-1}}(a_t)\delta_e)
\end{aligned}$$

Logo, $(\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G}, *, \cdot)$ é um Fibrado de Fell. ■

Observação 3.3.2: Pela proposição 2.3.1, a $*$-álgebra $\mathcal{B} = \bigoplus_{t\in G} \mathcal{B}_t$ associada a esse fibrado de Fell é admissível.

Definição 3.3.3: Seja $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre uma C*-álgebra $\mathcal{A}$. O **produto cruzado parcial** de $\mathcal{A}$ por G, denotado por $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, é a C*-álgebra seccional cheia do fibrado de Fell $(\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G}, *, \cdot)$ construído anteriormente.

Definição 3.3.4: Seja $\mathcal{A}$ uma $*$-álgebra e $\mathcal{B}$ uma sub-$*$-álgebra de $\mathcal{A}$. Uma **esperança condicional** de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ é uma função linear $E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $E|_{\mathcal{B}} = Id_{\mathcal{B}}$

(ii) $E(a) \geqslant 0$ para todo $a \geqslant 0$

(iii) $E(ab) = E(a)b$ e $E(ba) = bE(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ e $b \in \mathcal{B}$.

Proposição 3.3.5: Seja $E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ uma esperança condicional. O conjunto $J = \{a \in \mathcal{A}/E(b^*ac) = 0$ para todo $b, c \in \mathcal{A}\}$ é um ideal em $\mathcal{A}$ tal que $J \cap \mathcal{B} = \{0\}$.

Demonstração. Sejam $a, a' \in J$, $d \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Para todo $b, c \in \mathcal{A}$, $E(b^*(\alpha a + a')c) = E(b^*\alpha ac) + E(b^*a'c) = \alpha E(b^*a'c) + E(b^*a'c) = 0$, $E(b^*(ad)c) = E(b^*a(dc)) = 0$ e $E(b^*(da)c) = E\big((b^*d)ac\big) = 0$. Logo, J é um ideal em $\mathcal{A}$. Finalmente, vamos mostrar que $J \cap \mathcal{B} = \{0\}$. De fato, se $a \in J \cap \mathcal{B}$ então $a = E(a) = E(1_{\mathcal{A}}^* a 1_{\mathcal{A}}) = 0$. ■

Definição 3.3.6: Uma esperança condicional $E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é **fiel** quando a seguinte condição for satisfeita: Dado $a \in \mathcal{A}$, se $E(b^*ac) = 0$ para todo $b, c \in \mathcal{A}$ então $a = 0$. Em outra palavras, uma esperança condicional $E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é fiel quando o ideal $J = \{0\}$.

Dada uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de G sobre $\mathcal{A}$, $(\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G}, *, \cdot)$ o fibrado de Fell associado e $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ uma representação isométrica de $\mathcal{A}$ (ver [1], Teorema 3.4.15), nosso objetivo é construir uma esperança condicional contínua $E : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}_e$ em que $\tilde{\mathcal{B}}_e$ é o conjunto dos elementos de $\bigoplus_{t\in G} \mathcal{B}_t$ que são nulos nas entradas diferentes de e. Com um abuso de notação, considere $E : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{B}_e$ pois $\tilde{\mathcal{B}}_e$ e $\mathcal{B}_e$ são C*-álgebras isomorfas. Inicialmente, vamos demonstrar um resultado importante que será utilizado nessa construção.

Proposição 3.3.7: Se $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ é uma ação parcial de um grupo G sobre uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, $\lambda : G \longrightarrow C$ uma representação parcial de G sobre uma C*-álgebra unital C e $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow C$ um $*$-homomorfismo tal que o par (π, λ) é α-covariante, então existe um único $*$-homomorfismo $(\pi \times \lambda) : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow C$ em que $(\pi \times \lambda)((a_t\delta_t)_{t\in G}) = \sum_{t\in G} \pi(a_t)\lambda(t)$.

Demonstração. Seja $(\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G}, *, \cdot)$ o fibrado de Fell associado a ação parcial $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$. Defina $(\pi \tilde{\times} \lambda) : \mathcal{B} = \bigoplus_{t\in G} \mathcal{B}_t \longrightarrow C$ dada por $(\pi \tilde{\times} \lambda)((a_t\delta_t)_{t\in G}) = \sum_{t\in G} \pi(a_t)\lambda(t)$. Nosso objetivo é mostrar que $\pi \tilde{\times} \lambda$ é um $*$-homomorfismo. Uma vez que $\pi \tilde{\times} \lambda$ é linear, é suficiente verificar as propriedades de $*$-homomorfismo em cada fibra $\mathcal{B}_t$. Sendo assim, temos que

$$
\begin{aligned}
(\pi \tilde{\times} \lambda)((a_t\delta_t)\cdot(b_s\delta_s)) &= (\pi \tilde{\times} \lambda)(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_s)\delta_{ts}) \\
&= \pi(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_s))\lambda(ts) \\
&= \lambda(t)\pi(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_s)\lambda(t^{-1})\lambda(ts) \\
&= \lambda(t)\pi(\alpha_{t^{-1}}(a_t))\pi(b_s)\lambda(t^{-1})\lambda(ts) \\
&= \lambda(t)\lambda(t^{-1})\pi(a_t)\lambda(t)\pi(b_s)\lambda(t^{-1})\lambda(ts) \\
&= \lambda(t)\lambda(t^{-1})\pi(a_t)\lambda(t)\pi(b_s)\lambda(t^{-1})\lambda(t)\lambda(s) \\
&= \lambda(t)\lambda(t^{-1})\pi(a_t)\lambda(t)\lambda(t^{-1})\lambda(t)\pi(b_s)\lambda(s) \\
&= \lambda(t)\lambda(t^{-1})\pi(a_t)\lambda(t)\pi(b_s)\lambda(s) \\
&= \pi(a_t)\lambda(t)\lambda(t^{-1})\lambda(t)\pi(b_s)\lambda(s) \\
&= \pi(a_t)\lambda(t)\pi(b_s)\lambda(s) \\
&= (\pi \tilde{\times} \lambda)(a_t\delta_t)\cdot(\pi \tilde{\times} \lambda)(b_s\delta_s).
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
(\pi \tilde{\times} \lambda)((a_t\delta_t)^*) &= (\pi \tilde{\times} \lambda)(\alpha_{t^{-1}}(a_t^*)\delta_{t^{-1}}) \\
&= \pi(\alpha_{t^{-1}}(a_t^*))\lambda(t^{-1}) \\
&= \lambda(t^{-1})\pi(a_t^*)\lambda(t)\lambda(t^{-1}) \\
&= \lambda(t^{-1})\lambda(t)\lambda(t^{-1})\pi(a_t^*) \\
&= \lambda(t^{-1})\pi(a_t^*) \\
&= (\lambda(t))^*(\pi(a_t))^* \\
&= (\pi(a_t)\lambda(t))^* \\
&= ((\pi \tilde{\times} \lambda)(a_t\delta_t))^*.
\end{aligned}
$$

Como $\pi \tilde{\times} \lambda$ é um homomorfismo definido em cada fibra $\mathcal{B}_t$ então $\pi \tilde{\times} \lambda$ é único. Finalmente, pelo fato de que $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é a C*-álgebra envolvente de $\mathcal{B}$, o resultado segue. ■

Iniciaremos a construção da esperança condicional contínua. Seja $\ell^2(G,H) = \{f : G \longrightarrow H / \sum_{g \in G} \|f(g)\|^2 < \infty\}$. Considere

$$\lambda : G \longrightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G,H))$$
$$t \longmapsto \lambda_t$$

tal que $(\lambda_t(f))(g) = f(t^{-1}g)$, isto é, λ é a representação regular à esquerda de G sobre $\mathcal{B}(\ell^2(G,H))$. Para cada $g \in G$, defina $\pi_g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ tal que $\pi_g(x) = \pi(\alpha_{g^{-1}}(x))$ e $H_0 = \overline{span}\{\pi_g(x)\xi / x \in \mathcal{D}_g$ e $\xi \in H\}$. Note que π_g é uma representação. Além disso, como H_0 é um subespaço fechado de H, temos que $H = H_0 \bigoplus H_0^\perp$.

Afirmação 3.3.8: H_0 é invariante por π_g.

Seja $\eta = \lim_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \pi_g(x_i)\xi_i \in H_0$. Dado $x \in \mathcal{D}_g$, temos que

$$\begin{aligned}
\pi_g(x)\eta &= \pi_g(x)\left(\lim_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \pi_g(x_i)\xi_i\right) \\
&= \lim_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \pi_g(x)(\pi_g(x_i)\xi_i) \\
&= \lim_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \pi_g(xx_i)\xi_i \in H_0.
\end{aligned}$$

Afirmação 3.3.9: Para todo $\eta \in H_0^\perp$, $\pi_g(x)\eta = 0$ para todo $x \in \mathcal{D}_g$.

De fato, $\|\pi_g(x)\eta\|^2 = \langle \pi_g(x)\eta, \pi_g(x)\eta \rangle = \langle (\pi_g(x))^*\pi_g(x)\eta, \eta \rangle = \langle \pi_g(x^*x)\eta, \eta \rangle = 0$ pois $\pi_g(x^*x)\eta \in H_0$.

Proposição 3.3.10: Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra, J um ideal em $\mathcal{A}$ e $\pi : J \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ uma representação. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) Se $\pi(x)\xi = 0$ para todo $x \in J$ então $\xi = 0$.

(2) $H = \overline{span}\{\pi(x)\xi / x \in J \text{ e } \xi \in H\}$.

Demonstração.

(1)⇒(2) Seja $\eta \in H_0^{\perp}$. Pela afirmação 3.3.9, $\pi(x)\eta = 0$ para $x \in J$. Portanto, $\eta = 0$. Logo, $H = H_0 = \overline{span}\{\pi(x)\xi / x \in J \text{ e } \xi \in H\}$.

(2)⇒(1) Seja $\eta = \lim\limits_{n \in N} \sum\limits_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i \in H$. Se $\pi(x)\xi = 0$ para todo $x \in J$ então

$$\begin{aligned}
\langle \xi, \eta \rangle &= \langle \xi, \lim_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\xi_i \rangle \\
&= \lim_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \langle \xi, \pi(x_i)\xi_i \rangle \\
&= \lim_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \langle \pi(x_i^*)\xi, \xi_i \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo $\xi = 0$. ■

Definição 3.3.11: Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra e J um ideal em $\mathcal{A}$. Uma representação $\pi : J \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ é **não degenerada** quando satisfaz as condições acima.

Proposição 3.3.12: Se $\mathcal{A}$ é uma C*-álgebra, J um ideal fechado em $\mathcal{A}$, $\pi : J \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ uma representação e $H_0 = \overline{span}\{\pi(x)\xi / x \in J \text{ e } \xi \in H\}$ então para todo $\eta \in H_0$ existem $x \in J$ e $\xi \in H$ tal que $\pi(x)\xi = \eta$.

Demonstração. Essa proposição é um caso particular do Teorema da Fatoração de Cohen-Hewitt (Ver [10], Teorema 32.22). ■

Corolário 3.3.13: Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra e J um ideal fechado em $\mathcal{A}$. Se $\pi : J \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ é uma representação não degenerada então existe $\tilde{\pi} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ representação de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{B}(H)$ tal que $\tilde{\pi}|_J = \pi$.

Demonstração. Como $\pi : J \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ é não degenerada, temos que $H = \overline{span}\{\pi(x)\xi / x \in J \text{ e } \xi \in H\}$. Além disso, pela proposição anterior, para todo $\eta \in H$ existem $x \in J$ e $\xi \in H$ tal que $\pi(x)\xi = \eta$. Sendo assim, defina $\tilde{\pi} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ da seguinte forma: Dado $a \in \mathcal{A}$ e $\eta = \pi(x)\xi \in H$, $\tilde{\pi}(a)\eta = \pi(ax)\xi$. Inicialmente, vamos mostrar que $\tilde{\pi}$ está bem definida. De fato, se $\eta = \pi(x)\xi_1 = \pi(y)\xi_2$ e $a \in \mathcal{A}$ então para todo $z \in J$ temos que

$$\begin{aligned}
\pi(z)(\pi(ax)\xi_1 - \pi(ay)\xi_2) &= \pi(z)(\pi(ax)\xi_1) - \pi(z)(\pi(ay)\xi_2) \\
&= \pi(z(ax))\xi_1 - \pi(z)(\pi(ay)\xi_2) \\
&= \pi(za)(\pi(x)\xi_1) - \pi(z)(\pi(ay)\xi_2) \\
&= \pi(za)(\pi(y)\xi_2) - \pi(z)(\pi(ay)\xi_2) \\
&= \pi(z)(\pi(ay)\xi_2) - \pi(z)(\pi(ay)\xi_2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\pi(ax)\xi_1 - \pi(ay)\xi_2 = 0$, ou seja, $\pi(ax)\xi_1 = \pi(ay)\xi_2$. Logo, $\tilde{\pi}$ está bem definida. Além disso, $\tilde{\pi}$ é uma representação de $\mathcal{A}$ sobre

$\mathcal{B}(H)$. Com efeito, dados $a, b \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(\lambda a + b)\eta &= \pi((\lambda a + b)x)\xi \\
&= \lambda\pi(ax)\xi + \pi(bx)\xi \\
&= \lambda\tilde{\pi}(a)\eta + \tilde{\pi}(b)\eta \\
&= (\lambda\tilde{\pi}(a) + \tilde{\pi}(b))\eta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(ab)\eta &= \pi((ab)x)\xi \\
&= \pi(a(bx))\xi \\
&= \tilde{\pi}(a)(\pi(bx)\xi) \\
&= \tilde{\pi}(a)(\tilde{\pi}(b)\eta) \\
&= (\tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b))\eta
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \eta', (\tilde{\pi}(a))^*\eta \rangle &= \langle \tilde{\pi}(a)\eta', \eta \rangle \\
&= \langle \pi(ay)\xi', \eta \rangle \\
&= \langle \pi(ay)\xi', \pi(x)\xi \rangle \\
&= \langle \pi(x^*ay)\xi', \xi \rangle \\
&= \langle \pi(x^*a)\eta', \xi \rangle \\
&= \langle (\pi(a^*x))^*\eta', \xi \rangle \\
&= \langle \eta', \pi(a^*x)\xi \rangle \\
&= \langle \eta', \tilde{\pi}(a^*)\eta \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{\pi}$ é uma representação. Por fim, se $a \in J$ e $\eta = \pi(x)\xi \in H$, temos que $\tilde{\pi}(a)\eta = \pi(ax)\xi = \pi(a)(\pi(x)\xi) = \pi(a)\eta$. Logo, $\tilde{\pi}$ é uma representação de $\mathcal{A}$ tal que $\tilde{\pi}|_J = \pi$. ■

Com base nos resultados acima, defina

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_g : \mathcal{D}_g &\longrightarrow \mathcal{B}(H_0) \\ x &\longmapsto \pi_g(x) \mid_{H_0}. \end{aligned}$$

Note que $\tilde{\pi}_g$ está bem definida. Além disso, $\tilde{\pi}_g$ é uma representação não degenerada. Pelo corolário anterior, existe $\tilde{\pi}'_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H_0)$ representação de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{B}(H_0)$ que estende $\tilde{\pi}_g$. Em seguida, defina $\pi'_g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ da seguinte maneira: Dado $\eta \in H$, escreva $\eta = \eta_1 + \eta_2$ com $\eta_1 \in H_0$ e $\eta_2 \in H_0^{\perp}$. Sendo assim, $\pi'_g(a)\eta = \tilde{\pi}'_g(a)\eta_1$. Claramente, π'_g é uma representação de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{B}(H)$. Por fim, considere $\tilde{\pi} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G,H))$ com $(\tilde{\pi}(a)(f))(g) = (\pi'_g(a))(f(g))$.

Afirmação 3.3.14: $\tilde{\pi} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G,H))$ é uma representação de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{B}(\ell^2(G,H))$.

Inicialmente, note que $\tilde{\pi}$ é linear. Assim, para todo $a, b \in \mathcal{A}$, temos que $(\tilde{\pi}(ab)(f))(g) = (\pi'_g(ab))(f(g)) = (\pi'_g(a)\pi'_g(b))(f(g)) = \pi'_g(a)(\pi'_g(b)(f(g))) = \pi'_g(a)((\tilde{\pi}(b)(f))(g)) = (\tilde{\pi}(a)(\tilde{\pi}(b)(f)))(g)$. Além disso, $((\tilde{\pi}(a))^*(g) = (\pi'_g(a))^*(f(g)) = (\pi'_g(a^*))(f(g)) = (\tilde{\pi}(a^*)(f))(g)$. Portanto, temos que, $(\tilde{\pi}(a))^* = \tilde{\pi}(a^*)$. Logo, $\tilde{\pi}$ é uma representação.

Afirmação 3.3.15: O par $(\tilde{\pi}, \lambda)$ é α-covariante.

Dados $t \in G$ e $x \in \mathcal{D}_{t^{-1}}$, temos que

$$\begin{aligned}
\big((\lambda(t)\tilde{\pi}(x))(f)\big)(g) &= \big(\lambda(t)(\tilde{\pi}(x)(f))\big)(g) \\
&= \big(\tilde{\pi}(x)(f)\big)(t^{-1}g) \\
&= (\pi'_{t^{-1}g}(x))(f(t^{-1}g)) \\
&= \pi(\alpha_{g^{-1}t}(x))(f(t^{-1}g)) \\
&= \pi\big(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_t(x))\big)(f(t^{-1}g)) \\
&= \pi'_g(\alpha_t(x))(f(t^{-1}g)) \\
&= \pi'_g(\alpha_t(x))\big((\lambda(t)(f))(g)\big) \\
&= \big(\tilde{\pi}(\alpha_t(x))(\lambda(t)(f))\big)(g)
\end{aligned}$$

para todo $g \in G$ e $f \in \ell^2(G, H)$. Portanto, $\lambda(t)\tilde{\pi}(x) = \tilde{\pi}(\alpha_t(x))\lambda(t)$, isto é, $\tilde{\pi}(\alpha_t(x)) = \lambda(t)\tilde{\pi}(x)\lambda(t^{-1})$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(a)\lambda(t)\lambda(t^{-1}) &= \big(\tilde{\pi}(a)\lambda(t)\big)\lambda(t^{-1}) \\
&= \big(\lambda(t)\tilde{\pi}(\alpha_{t^{-1}}(a))\big)\lambda(t^{-1}) \\
&= \lambda(t)\big(\tilde{\pi}(\alpha_{t^{-1}}(a))\lambda(t^{-1})\big) \\
&= \lambda(t)\big(\lambda(t^{-1})\tilde{\pi}(a)\big) \\
&= \lambda(t)\lambda(t^{-1})\tilde{\pi}(a)
\end{aligned}$$

para todo $t \in G$ e $a \in \mathcal{A}$. Logo, o par $(\tilde{\pi}, \lambda)$ é α-covariante. Pela proposição 3.3.7, segue que $\tilde{\pi} : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G, H))$ com

$$(\tilde{\pi} \times \lambda)((a_t\delta_t)_{t\in G}) = \sum_{t\in G} \tilde{\pi}(a_t)\lambda(t)$$

é a única representação de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ sobre $\mathcal{B}(\ell^2(G, H))$ associada ao par α-covariante $(\tilde{\pi}, \lambda)$.

A seguir, considere

$$\begin{aligned} i_e : H &\longrightarrow \ell^2(G,H) \\ h &\longmapsto f_h \end{aligned}$$

em que $f_h(g) = \begin{cases} 0, \text{ se } g \neq e \\ h, \text{ se } g = e \end{cases}$ e

$$\begin{aligned} i_e^* : \ell^2(G,H) &\longrightarrow H \\ f &\longmapsto f(e). \end{aligned}$$

Defina, $p_e = i_e i_e^* : \ell^2(G,H) \longrightarrow \ell^2(G,H)$. Note que $p_e \in \mathcal{B}(\ell^2(G,H))$ é uma projeção. Finalmente, considere

$$\begin{aligned} \tilde{E} : \mathcal{B}(\ell^2(G,H)) &\longrightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G,H)) \\ T &\longmapsto p_e \circ T \circ p_e \end{aligned}$$

A aplicação linear $\tilde{E}$ é contínua pois $\|\tilde{E}(T)\| = \|p_e \circ T \circ p_e\| \leqslant \|T\|$. A partir de $\tilde{E}$ construiremos uma esperança condicional $E : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{B}_e$.

O resultado seguinte é fundamental para alcançar nosso objetivo.

Proposição 3.3.16: Sejam $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra, G um grupo, $(\{\mathcal{D}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de G sobre $\mathcal{A}$, $(\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G}, *, \cdot)$ o fibrado de Fell associado a ação parcial, $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ uma representação isométrica de $\mathcal{A}$ e $\tilde{\pi} \times \lambda : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{B}(\ell^2(G,H))$ a representação construída acima. Se $H_e = \{f \in \ell^2(G,H) / f(g) = 0 \text{ se } g \neq e\}$ então $\tilde{E}\left((\tilde{\pi} \times \lambda)((a_t\delta_t)_{t\in G})\right)\big|_{H_e} = \pi(a_e)$ para todo $(a_t\delta_t)_{t\in G} \in \mathcal{B} = \bigoplus_{t\in G} \mathcal{B}_t$.

Demonstração. Inicialmente, defina a função $\varphi : \mathcal{B}(H_e) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ tal que $(\varphi(T))(h) = (T(f_h))(e)$. Claramente, φ é linear. Além disso, $\varphi^{-1} = \Psi$ em que $\Psi : \mathcal{B}(H) \longrightarrow \mathcal{B}(H_e)$ com

$$(\Psi(S)(f))(g) = \begin{cases} 0, \text{ se } g \neq e \\ S(f(e)), \text{ se } g = e. \end{cases}$$

Portanto, φ é um isomorfismo. Sendo assim, basta mostrar que para todo $(a_t\delta_t)_{t\in G} \in \mathcal{B}$, $\varphi\left(\tilde{E}\big((\tilde{\pi} \times \lambda)((a_t\delta_t)_{t\in G})\big)\Big|_{H_e} \right) = \pi(a_e)$. Seja $(a_t\delta_t)_{t\in G} \in \mathcal{B}$ e denote $T = (\tilde{\pi} \times \lambda)((a_t\delta_t)_{t\in G})$. Dado $h \in H$, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\varphi\big(\tilde{E}(T)\Big|_{H_e}\big)\right)(h) &= \Big(p_e\big(T(p_e(f_h))\big)\Big)(e) \\
&= \Big(p_e\big(T(f_h)\big)\Big)(e) \\
&= \big(T(f_h)\big)(e) \\
&= \left(\sum_{t\in G} \tilde{\pi}(a_t)\big(\lambda(t)(f_h)\big)\right)(e) \\
&= \sum_{t\in G} \Big(\tilde{\pi}(a_t)\big(\lambda(t)(f_h)\big)\Big)(e) \\
&= \sum_{t\in G} (\pi'_e(a_t))\big((\lambda(t)(f_h))(e)\big) \\
&= \sum_{t\in G} \big(\pi'_e(a_t)\big)\big(f_h(t^{-1})\big) \\
&= \big(\pi'_e(a_e)\big)\big(f_h(e)\big) \\
&= \big(\pi'_e(a_e)\big)(h) \\
&= \big(\pi(a_e)\big)(h)
\end{aligned}$$

Logo, $\varphi\left(\tilde{E}(T)\Big|_{H_e} \right) = \pi(a_e)$ para todo $(a_t\delta_t)_{t\in G} \in \mathcal{B}$. ■

Proposição 3.3.17: A aplicação $E_0 : \mathcal{B} = \bigoplus_{t\in G} \mathcal{B}_t \longrightarrow \mathcal{B}_e$ em que $E_0\big((a_t\delta_t)_{t\in G}\big) = a_e\delta_e$ é uma esperança condicional contínua.

Demonstração. Primeiramente, note que E_0 é linear. Além disso, E_0 é contínua pois é uma composição de funções contínuas. De fato, temos que $E_0(b) = \varrho\Bigg(\pi^{-1}\Big(\varphi\big(\tilde{E}((\tilde{\pi}\times\lambda)(b))\Big|_{H_e}\big)\Big)\Bigg)$ com

$$\begin{aligned} \varrho : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B}_e \\ a &\longmapsto a\delta_e. \end{aligned}$$

Sendo assim, basta verificar as condições da definição de esperança condicional. Note que $E_0\Big|_{\mathcal{B}_e} = Id_{\mathcal{B}_e}$. Se $(a_t\delta_t)_{t\in G} \in \mathcal{B}$ e $(b_s\delta_s)_{s\in G} \in \mathcal{B}_e$ então

$$\begin{aligned} E_0 &= \big((a_t\delta_t)_{t\in G}\cdot(b_s\delta_s)_{s\in G}\big) \\ &= E_0\left(\left(\sum_{t\in G}\alpha_t\big(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}s}\big)\delta_{ts}\right)_{s\in G}\right) \\ &= E_0\left(\left(\Big(\alpha_s\big(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_e\big)\Big)\delta_{ss}\right)_{s\in G}\right) \\ &= (a_eb_e)\delta_e. \end{aligned}$$

Além disso, $E_0\big((a_t\delta_t)_{t\in G}\big)\cdot(b_s\delta_s)_{s\in G} = a_e\delta_e\cdot(b_s\delta_s)_{s\in G} = (a_eb_e)\delta_e$. Portanto, $E_0\big((a_t\delta_t)_{t\in G}\cdot(b_s\delta_s)_{s\in G}\big) = E_0\big((a_t\delta_t)_{t\in G}\big)\cdot(b_s\delta_s)_{s\in G}$ para todo $(a_t\delta_t)_{t\in G} \in \mathcal{B}$ e $(b_s\delta_s)_{s\in G} \in \mathcal{B}_e$. De maneira análoga, concluimos que $E_0\big((b_s\delta_s)_{s\in G}\cdot(a_t\delta_t)_{t\in G}\big) = (b_s\delta_s)_{s\in G}\cdot E_0((a_t\delta_t)_{t\in G})$ para todo $(a_t\delta_t)_{t\in G} \in \mathcal{B}$ e $(b_s\delta_s)_{s\in G} \in \mathcal{B}_e$. Finalmente, temos que $E_0\Big(\big((a_t\delta_t)_{t\in G}\big)^*(a_t\delta_t)_{t\in G}\Big) = c\delta_e$ com $c = \sum_{t\in G}\alpha_{t^{-1}}(a_t^*a_t)$ é positivo pois $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}_e$ são C*-álgebras isomorfas e $c = \sum_{t \in G} \alpha_{t^{-1}}(a_t^* a_t)$ é um elemento positivo de $\mathcal{A}$. Logo, $E_0 : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_e$ é uma esperança condicional contínua. ■

Observação 3.3.18: Como $E_0 : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_e$ é linear e contínua e pela definição de C*-álgebra envolvente $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G = \overline{\mathcal{B}/N}$ então existe $E : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{B}_e$ contínua.

Proposição 3.3.19: A aplicação $E : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{B}_e$ é uma esperança condicional (contínua). Além disso, $N = \{0\}$.

Demonstração. A verificação de que $E : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{B}_e$ é uma esperança condicional é imediata, uma vez que $E_0 : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_e$ é uma esperança condicional. Sendo assim, vamos provar que $N = \{0\}$. Dado $b = (b_t)_{t \in G} \in \mathcal{B}$, se $s'(b) = \sup_{s \in C_s^*(\mathcal{B})} s(b) = 0$, então $s'(b^* b) = s'(b)^2 = 0$. Como $E_0 : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_e$ é contínua, segue que $E_0(b^* b) = 0$. Portanto, $c = \sum_{t \in G} b_t^* b_t = 0$ pois $E_0(b^* b) = c\delta_e$. Com isso, temos que $b_t^* b_t = 0$ para todo $t \in G$. Logo, $b_t = 0$ para todo $t \in G$, ou seja, $b = (b_t)_{t \in G} = 0$. ■

Definição 3.3.20: Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra, $(\{\mathcal{D}_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ uma ação parcial de G sobre $\mathcal{A}$, $(\{\mathcal{B}_t\}_{t \in G}, *, \cdot\})$ o fibrado de Fell associado a ação parcial, $E : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{B}_e$ a esperança condicional definida acima e $J = \{a \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha G / E(b^* a c) = 0$ para todo $b, c \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha G\}$. O **produto cruzado parcial reduzido** de $\mathcal{A}$ por G, denotado por $\mathcal{A} \rtimes_{\alpha,r} G$ é a C*-álgebra quociente do produto cruzado parcial pelo ideal J, isto é, $\mathcal{A} \rtimes_{\alpha,r} G = \mathcal{A} \rtimes_\alpha G / J$.

Proposição 3.3.21: Seja $E : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{B}_e$ a esperança condicional contínua construída anteriormente. A aplicação $E_r : \mathcal{A} \rtimes_{\alpha,r} G \longrightarrow \mathcal{B}_e$ em que $E_r(a+J) = E(a)$ é uma esperança condicional contínua fiel.

Demonstração. Inicialmente, vamos provar que E_r está bem definida. Se $a_1 + J = a_2 + J$ então $a_1 - a_2 \in J$. Portanto, $E(a_1 - a_2) = 0$. Logo, $E_r(a_1 + J) = E_r(a_2 + J)$. Além disso, claramente E_r é contínua e satisfaz as condições de esperança condicional. Finalmente, seja $a + J \in \mathcal{A} \rtimes_{\alpha,r} G$ tal que $E_r\big((b+J)^*(a+J)(c+J)\big) = 0$ para todo $b + J, c + J \in \mathcal{A} \rtimes_{\alpha,r} G$. Sendo assim, $E(b^*ac) = 0$ para todo $b, c \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$. Portanto, $a \in J$, isto é, $a + J = 0 + J$. Logo, E_r é uma esperança condicional contínua fiel. ■

No capítulo 4, a esperança condicional fiel construída acima será utilizada na demonstração do principal resultado do trabalho. Com esse resultado, é possível encontrar condições sob as quais o produto cruzado parcial reduzido é simples. Para encerrar esse capítulo, apresentaremos a seguir dois exemplos muito importantes de produto cruzado parcial reduzido.

Exemplo 3.3.22:

Seja $\mathcal{A} = \{T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))/\text{matriz de } T \text{ é diagonal e } \lim a_{nn} \text{existe}\}$ e $C^*(\{S\})$ a álgebra de Toeplitz. Considere $(\{\mathcal{D}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ a ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathcal{A}$ e (π, λ) o par α-covariante, ambos construídos no exemplo 1.2.5. Nosso objetivo é mostrar que $C^*(\{S\}) \cong \mathcal{A} \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z}$, isto é, que a álgebra de Toeplitz é isomorfa ao produto cruzado parcial reduzido de $\mathcal{A}$ por $\mathbb{Z}$. Como (π, λ) é um α-covariante, a proposição 3.3.7 garante a existência de um $*$-homomorfismo $(\pi \times \lambda) : \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \longrightarrow C^*(\{S\})$ tal que $(\pi \times \lambda)((T_k\delta_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \pi(T_k)\lambda(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} T_k\lambda(k)$. Seja $(\{\mathcal{B}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, *, \cdot)$ o fibrado de Fell associado a ação parcial e $E : \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{B}_0$ a esperança condicional construída neste capítulo. Inicialmente, vamos provar que, para todo $a \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, $\langle(\pi \times \lambda)(a^*a)e_n, e_n\rangle e_n = (\pi \times \lambda)(E(a^*a))e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ em que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a base canônica de $\ell^2(\mathbb{N})$. De fato, se $a = (T_k\delta_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{B}_k$ então

$$
\begin{aligned}
\langle(\pi \times \lambda)(a^*a)e_n, e_n\rangle e_n &= \Big\langle(\pi \times \lambda)\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{-k}(T_k^*T_{k+m})\Big)\delta_m\Big)e_n, e_n\Big\rangle e_n \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle(\pi \times \lambda)(\alpha_{-k}(T_k^*T_{k+m})\delta_m)e_n, e_n\rangle e_n \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\alpha_{-k}(T_k^*T_{k+m})[n+m>0]e_{n+m}, e_n\rangle e_n \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\alpha_{-k}(T_k^*T_k)e_n, e_n\rangle e_n \\
&= \langle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{-k}(T_k^*T_k)e_n, e_n\rangle e_n \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{-k}(T_k^*T_k)e_n \\
&= (\pi \times \lambda)(E(a^*a))e_n
\end{aligned}
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{B}_k$ é denso em $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ e as funções E e $\pi \times \lambda$ são contínuas, a igualdade é válida para o caso geral. Agora, mostraremos que se $J = \{a \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/E(b^*ac) = 0 \ \text{ para todo } b, c \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}\}$ então $(\pi \times \lambda)(J) = 0$. Com efeito, se $a \in J$ então $E(a^*a) = 0$. Sendo assim, temos que $(\pi \times \lambda)(E(a^*a))e_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto $\langle(\pi \times \lambda)(a^*a)e_n, e_n\rangle e_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\pi \times \lambda$ é um $*$-homomorfismo, segue que $\langle(\pi \times \lambda)(a)e_n, (\pi \times \lambda)(a)e_n\rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(\pi \times \lambda)(a) = 0$. Finalmente, uma vez que $(\pi \times \lambda)(J) = 0$ então existe $\overline{\pi \times \lambda} : \mathcal{A} \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z} \longrightarrow C^*(\{S\})$ $*$-homomorfismo dado por $\overline{\pi \times \lambda}(a + J) = (\pi \times \lambda)(a)$. Note que $\overline{\pi \times \lambda}$ é sobrejetor pois temos que $SS^*\delta_1 + J \in \mathcal{A} \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z}$ e $\overline{\pi \times \lambda}(SS^*\delta_1 + J) = (\pi \times \lambda)(SS^*\delta_1) = \pi(SS^*)\lambda(1) = SS^*S = S$. Além disso, $\overline{\pi \times \lambda}$ é injetor. De fato, se $a + J \in \ker \overline{\pi \times \lambda}$ então $\overline{\pi \times \lambda}((a + J)^*(a + J)) = (\pi \times \lambda)(a^*a) = 0$. Portanto, $(\pi \times \lambda)(E(a^*a))e_n = \langle(\pi \times \lambda)(a^*a)e_n, e_n\rangle e_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $(\pi \times \lambda)(E(a^*a)) = 0$. Como $(\pi \times \lambda)(E(a^*a)) = E(a^*a)$, segue que $E(a^*a) = 0$. Assim, $a + J = 0 + J$ pois a esperança condicional é fiel no produto cruzado parcial reduzido. Logo, $C^*(\{S\}) \cong \mathcal{A} \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z}$.

Exemplo 3.3.23: Fixe $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números inteiros tais que n_k divide n_{k+1} para todo $k \in \mathbb{N}$. Dada uma sequência limitada de números complexos $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, considere $S_a \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ tal que $S_a(e_i) = a_i e_{i+1}$. No caso em que $a_i = a_{i+p}$, para algum $p \in \mathbb{N}$, dizemos que S_a é p-**periódico**. Defina, para cada $k \in \mathbb{N}$, a C*-álgebra $\mathcal{A}_{n_k} = C^*(\{S_a \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))/S_a \text{ é } n_k\text{-periódico}\})$. Note que $\mathcal{A}_{n_1} \subseteq \mathcal{A}_{n_2} \subseteq \mathcal{A}_{n_3} \subseteq \ldots$. Seja $\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{n_k}}$. A C*-álgebra $\mathcal{A}$ é chamada a **álgebra de Bunce-Deddens-Toeplitz** de $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Note que $C^*(\{S\}) \subseteq \mathcal{A}$ para qualquer sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Em particular, $\mathcal{A}$ contém o conjunto $\mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$ dos operadores compactos de $\ell^2(\mathbb{N})$ (ver [5], Teorema 1.1.1). Seja $\mathcal{A}_0 = \{T \in \mathcal{A}/T \text{ é diagonal}\}$. Considere, com as devidas modificações, a ação parcial $(\{\mathcal{D}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathcal{A}_0$ e o par α-covariante (π, λ) construídos no exemplo 1.2.5. A proposição 3.3.7 garante a existência de um $*$-homomorfismo $(\pi \times \lambda) : \mathcal{A}_0 \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $(\pi \times \lambda)((T_k\delta_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \pi(T_k)\lambda(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} T_k\lambda(k)$. Seja $(\{\mathcal{B}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, *, \cdot)$ o fibrado de Fell associado a ação parcial $(\{\mathcal{D}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ e $E : \mathcal{A}_0 \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{B}_0$ a esperança condicional construída neste capítulo. Novamente, temos $(\pi \times \lambda)(J) = 0$ em que $J = \{a \in \mathcal{A}_0 \rtimes_\alpha \mathbb{Z} / E(b^*ac) = 0$ para todo $b, c \in \mathcal{A}_0 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}\}$. Além disso, o $*$-homomorfismo $\overline{\pi \times \lambda} : \mathcal{A}_0 \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $\overline{\pi \times \lambda}(a + J) = (\pi \times \lambda)(a)$ também é injetor. As demonstrações desses fatos são análogas as que foram feitas no exemplo anterior. Assim, falta apenas provar que $\overline{\pi \times \lambda} : \mathcal{A}_0 \rtimes_{\alpha,r} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{A}$ é sobrejetor. De fato, basta mostrar que todo operador S_a n_k-periódico pertence a imagem de $\overline{\pi \times \lambda}$. Seja S_a um operador n_k-periódico e $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a sequência n_k-periódica associada a ele. Considere $T \in \mathcal{A}_0$ tal que $t_1 = 0$ e $t_{i+1} = a_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto, $\overline{\pi \times \lambda}(T\delta_1 + J) = (\pi \times \lambda)(T\delta_1) = \pi(T)\lambda(1) = TS = S_a$. Logo, $\mathcal{A}$ é isomorfa ao produto cruzado parcial reduzido de $\mathcal{A}_0$ por $\mathbb{Z}$.

4 Ideais no produto cruzado parcial reduzido

4.1 Ações parciais topologicamente livres

Neste capítulo, definiremos os conceitos de ação parcial topologicamente livre e ação parcial minimal. Além disso, provaremos o principal resultado deste trabalho e enunciaremos condições necessárias e suficientes para que uma ação parcial do grupo livre sobre o espaço topológico compacto associado a um grafo seja topologicamente livre e minimal. Este capítulo teve como base o artigo [2].

Inicialmente, fixaremos um grupo G, um espaço topológico localmente compacto Hausdorff $\mathcal{X}$, $(\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de G sobre $\mathcal{X}$, $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ a ação parcial de G sobre $C_0(\mathcal{X})$ (Vide exemplo 1.1.6),$(\{\mathcal{B}_t\}_{t\in G}, *, \cdot)$ o fibrado de Fell associado a ação parcial de G sobre $C_0(\mathcal{X})$ e $E_r : C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G \longrightarrow \mathcal{B}_e$ a esperança condicional definida no capítulo 3. Novamente, com um abuso de notação, consideraremos $E_r : C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G \longrightarrow C_0(\mathcal{X})$ pois $C_0(\mathcal{X})$ e $\mathcal{B}_e$ são C*-álgebras isomorfas.

Definição 4.1.1: Uma ação parcial $(\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ de G sobre $\mathcal{X}$ é **topologicamente livre** quando para todo $t \in G\backslash\{e\}$ o conjunto $F_t = \{x \in \mathcal{X}_{t^{-1}} / \theta_t(x) = x\}$ tem interior vazio.

Observação 4.1.2: Pela definição acima, note que o conjunto F_t é fechado em $\mathcal{X}_{t^{-1}}$.

Enunciaremos uma caracterização das ações parciais topologicamente livres mais apropriada para os nossos objetivos.

Proposição 4.1.3: Uma ação parcial $(\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ é topologicamente livre se, e somente se, para todo subconjunto finito $\{t_1, \ldots, t_n\}$ de $G\backslash\{e\}$ o conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} F_{t_i}$ tem interior vazio.

Demonstração.

$(\Longleftarrow)$ É imediato.

$(\Longrightarrow)$ Basta mostrar que para todo $t \in G\backslash\{e\}$, F_t é raro, isto é, $\overline{F}_t$ tem interior vazio e usar o fato que a união finita de conjuntos raros é um conjunto raro. Como F_t é fechado em $\mathcal{X}_{t^{-1}}$ então $F_t = C \cap \mathcal{X}_{t^{-1}}$ em que $C \subseteq \mathcal{X}$ fechado. Seja $V \subseteq \overline{F}_t$ um aberto em $\overline{F}_t$. Sendo assim, note que $V \cap \mathcal{X}_{t^{-1}}$ é aberto em F_t. Portanto, $V \cap \mathcal{X}_{t^{-1}} = \emptyset$ pois $(\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ é uma ação parcial topologicamente livre. Como V e $\mathcal{X}_{t^{-1}}$ são abertos disjuntos em $\mathcal{X}$, então $V \cap \overline{\mathcal{X}_{t^{-1}}} = \emptyset$. Por outro lado, $V \subseteq \overline{F_t} = \overline{C \cap \mathcal{X}_{t^{-1}}} \subseteq C \cap \overline{\mathcal{X}_{t^{-1}}} \subseteq \overline{\mathcal{X}_{t^{-1}}}$. Dessa forma, $V = \emptyset$. Logo, F_t é uma conjunto raro. Finalmente, $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} F_{t_i}}$ tem interior vazio pois $\overset{\circ}{\overline{\bigcup_{i=1}^{n} F_{t_i}}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overset{\circ}{\overline{F_{t_i}}} = \emptyset$. Logo, $\bigcup_{i=1}^{n} F_{t_i}$ também tem interior vazio. ■

Lema 4.1.4: Sejam $t \in G\backslash\{e\}$, $f \in \mathcal{D}_t$ e $x_0 \notin F_t$. Para todo, $\varepsilon > 0$, existe $h \in C_0(\mathcal{X})$ tal que:

(1) $h(x_0) = 1$.

(2) $\|(hf)\delta_t h\| \leqslant \varepsilon$.

(3) $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

Demonstração. Caso 1: $x_0 \notin \mathcal{X}_{t^{-1}}$.

Considere $K = \{x \in \mathcal{X}_{t^{-1}} / |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$. Note que K é um conjunto compacto pois $f \in C_0(\mathcal{X})$ e $x_0 \notin K$. Como todo espaço localmente compacto Hausdorff possui uma compactificação de Alexandrov e todo espaço compacto Hausdorff é normal, então existe $h \in C_0(\mathcal{X})$ tal que $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$, para todo $x \in \mathcal{X}$, $h(x_0) = 1$ e $h(K) = 0$. Além disso, f é limitada por ε fora de K. Portanto, $\|hf\| \leqslant \varepsilon$. Logo, temos que $\|(hf)\delta_t h\| = \|\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(hf)h)\| = \|\alpha_{t^{-1}}(hf)h\| \leqslant \|hf\| \leqslant \varepsilon$.

Caso 2: $x_0 \in \mathcal{X}_{t^{-1}}$.

Como $\theta_t(x_0) \neq x_0$ e $\mathcal{X}$ é Hausdorff, existem V_1 e V_2 abertos disjuntos em $\mathcal{X}$ tal que $x_0 \in V_1$ e $\theta_t(x_0) \in V_2$. Sem perda de generalidade, suponha que $V_1 \subseteq \mathcal{X}_{t^{-1}}$ e $V_2 \subseteq \mathcal{X}_t$. Considere $V = V_1 \cap \theta_{t^{-1}}(V_2)$. Note que $x_0 \in V \subseteq V_1$ e $\theta_t(V) \subseteq V_2$. Portanto, $V \cap \theta_t(V) = \emptyset$. Pelo mesmo argunto do caso 1, existe $h \in C_0(\mathcal{X})$ tal que $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$ para todo $x \in \mathcal{X}$, $h(x_0) = 1$ e $h(\mathcal{X} \backslash V) = 0$. Falta mostrar que $h \in C_0(\mathcal{X})$ satisfaz a condição (2). De fato, note que o suporte de $\alpha_{t^{-1}}(hf)$ está contido em $\theta_t(V)$ e o suporte de h está contido em V. Logo, $\|(hf)\delta_t h\| = \|\alpha_{t^{-1}}(hf)h\| \leqslant \varepsilon$. ■

Proposição 4.1.5: Se $(\{\mathcal{X}_t\}_{t \in G}, \{\theta_t\}_{t \in G})$ é uma ação parcial topologicamente livre então para todo $c \in C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha, r} G$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe $h \in C_0(\mathcal{X})$ tal que:

(1) $\|hE_r(c)h\| \geqslant \|E_r(c)\| - \varepsilon$.

(2) $\|hE_r(c)h - hch\| \leqslant \varepsilon$.

(3) $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

Demonstração. Inicialmente, suponha $c = (a_t\delta_t)_{t\in T} \in C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G$ com $T \subseteq G$ subconjunto finito. Defina $E_r(c) = a_e$ (se $e \notin T$, tome $a_e = 0$). Seja $V = \{x \in \mathcal{X} / \|a_e(x)\| > \|a_e\| - \varepsilon\}$. Primeiramente, note que V é um conjunto aberto não-vazio. Pela proposição 4.1.3, existe $x_0 \in V$ tal que $x_0 \notin F_t$ para todo $t \in T\backslash\{e\}$. Além disso, pelo lema 4.1.4, para cada $t \in T\backslash\{e\}$ existe $h_t \in C_0(\mathcal{X})$ tal que $h_t(x_0) = 1$, $0 \leqslant h_t(x) \leqslant 1$ para todo $x \in \mathcal{X}$ e $\|h_t(a_t\delta_t)h_t\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{|T|}$ com $|T|$ sendo o número de elementos de T. Assim, seja $h = \prod_{t\in T\backslash\{e\}} h_t$. Claramente $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$ para todo $x \in \mathcal{X}$. Como $h(x_0) = 1$, segue que

$$\|hE_r(c)h\| \geqslant |a_e(x_0)| > \|a_e\| - \varepsilon = \|E_r(c)\| - \varepsilon.$$

Finalmente, temos que

$$\|hE_r(c)h - hch\| \leqslant \sum_{t\in T\backslash\{e\}} \|h(a_t\delta_t)h\| \leqslant \sum_{t\in T\backslash\{e\}} \|h_t(a_t\delta_t)h_t\| < \varepsilon.$$

Como os elementos da forma $(a_t\delta_t)_{t\in T}$ são densos em $C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G$ e E_r é contínua, o caso geral segue. ■

4.2 Ideais e ações parciais topologicamente livres e minimais

Essa seção é dedicada ao principal resultado deste trabalho, suas conseqüências e exemplos interessantes.

Teorema 4.2.1: Se $(\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ é uma ação parcial topologicamente livre e I é um ideal em $C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G$ com $I \cap C_0(\mathcal{X}) = \{0\}$ então $I = \{0\}$.

Demonstração. Considere $\pi : \mathcal{A} = C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G \longrightarrow \mathcal{A}/I$ a aplicação quociente e sejam $a \in I$, $b, c \in C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G$. Dado $\varepsilon > 0$ e $b^*ac \in C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G$, existe $h \in C_0(\mathcal{X})$ satisfazendo as condições (1), (2) e (3) da proposição anterior. Dessa forma,

$$\|\pi(hE_r(b^*ac)h)\| = \|\pi(h(E_r(b^*ac) - b^*ac)h)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

pois $\pi(b^*ac) = 0$. Além disso, π é uma isometria em $C_0(\mathcal{X})$ pois $I \cap C_0(\mathcal{X}) = \{0\}$. Portanto, $\|hE_r(b^*ac)h\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Utilizando o item (1), temos que

$$\|E_r(b^*ac)\| - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \|hE_r(b^*ac)h\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

isto é, $\|E_r(b^*ac)\| \leqslant \varepsilon$. Assim, $E_r(b^*ac) = 0$. Como a, b, c são arbitrários e E_r é fiel, segue que $a = 0$. Logo, $I = \{0\}$. ■

Definição 4.2.2: Seja G um grupo, $\mathcal{X}$ um espaço topológico e $(\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de G sobre $\mathcal{X}$. Um subconjunto $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ é denominado θ-**invariante** quando, para todo $t \in G$, $\theta_t(\mathcal{X}_{t^{-1}} \cap \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{X}_t \cap \mathcal{Y}$.

Definição 4.2.3: Seja G um grupo, $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra e $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de G sobre $\mathcal{A}$. Um ideal I em $\mathcal{A}$ é denominada α-**invariante** quando, para todo $t \in G$, $\alpha_t(\mathcal{D}_{t^{-1}} \cap I) \subseteq \mathcal{D}_t \cap I$.

Definição 4.2.4: Uma ação parcial $(\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ em $\mathcal{X}$ é **minimal** quando os únicos subconjuntos abertos θ-invariantes em $\mathcal{X}$ são $\emptyset$ e $\mathcal{X}$.

Observação 4.2.5: Note que $U \subseteq \mathcal{X}$ aberto em $\mathcal{X}$ é θ-invariante se, e somente se, o ideal $I = \{f \in C_0(\mathcal{X}) / f(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{X} \backslash U\}$ é α-invariante em relação à $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$. Portanto, $(\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ é minimal se, e somente se, os únicos ideais α-invariantes de $C_0(\mathcal{X})$ são os ideais triviais.

Definição 4.2.6: Uma ação parcial $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ em $C_0(\mathcal{X})$ é **minimal** quando os únicos ideais α-invariantes de $C_0(\mathcal{X})$ são os ideais triviais.

Exemplo 4.2.7:

Seja $\mathcal{A} = \{T \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))/$matriz de T é diagonal e $\lim a_{nn}$ existe $\}$, $I = \{T \in \mathcal{A}/ \lim a_{nn} = 0\}$ e $(\{\mathcal{D}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ a ação parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathcal{A}$ construída no exemplo 1.2.5. Nosso objetivo é mostrar que a ação parcial $(\{\mathcal{D}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ não é minimal. Primeiramente, note que I é um ideal em $\mathcal{A}$. Em seguida, vamos provar que I é um ideal α-invariante em relação à $(\{\mathcal{D}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$. Seja $T \in \mathcal{D}_{-k} \cap I$. Se $k \geqslant 0$ então $\mathcal{D}_{-k} = \mathcal{A}$. Assim, $\alpha_k(T) = S^kT(S^*)^k \in \mathcal{D}_k \cap I$. Por outro lado, se $k < 0$ então $\mathcal{D}_{-k} = \{T \in \mathcal{A}/a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{kk} = 0\}$. Portanto, $\alpha_k(T) = (S^*)^{-k}TS^{-k} \in \mathcal{D}_k \cap I = I$ pois $\mathcal{D}_k = \mathcal{A}$. Logo, a ação parcial $(\{\mathcal{D}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ não é minimal pois I é um ideal em $\mathcal{A}$ não-trivial α-invariante.

Proposição 4.2.8: Seja $(\{\mathcal{D}_t\}_{t\in G}, \{a_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ e H um espaço de Hilbert. Existe uma correspondência biunívoca entre representações α-covariantes de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ sobre $\mathcal{B}(H)$ e representações não degeneradas de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ sobre $\mathcal{B}(H)$.

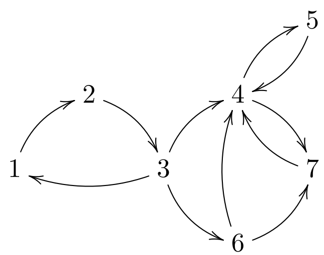
Demonstração. Ver [2] (Teorema 1.4). ∎

Proposição 4.2.9: Se $(\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ é uma ação parcial topologicamente livre e minimal então $C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G$ é simples.

Demonstração. Seja I um ideal em $C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G$ e considere $\rho : C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ uma representação de $C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G$ tal que $\ker \rho = I$. Pela proposição 4.2.8, existe $(\tilde{\pi}, \lambda)$ α-covariante tal que $\rho = \tilde{\pi} \times \lambda$. Defina $J = I \cap C_0(\mathcal{X})$. Claramente, J é um ideal em $C_0(\mathcal{X})$. Além disso, J é um ideal α-invariante. De fato, para todo $f \in J \cap \mathcal{D}_{t^{-1}}$, $\tilde{\pi}(\alpha_t(f)) = \lambda(t)\tilde{\pi}(f)(\lambda(t))^* = 0$ pois $\tilde{\pi}(f) = 0$. Assim, $\alpha_t(f) \in J \cap \mathcal{D}_t$. Como $(\{\mathcal{X}_t\}_{t\in G}, \{\theta_t\}_{t\in G})$ é uma ação parcial minimal, segue que $J = C_0(\mathcal{X})$ ou $J = \{0\}$.

Se $J = C_0(\mathcal{X})$ então $\tilde{\pi} = 0$. Portanto $\rho = 0$ e $I = C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G$. Se $J = \{0\}$, pelo teorema 4.2.1, segue que $I = \{0\}$. Logo, $C_0(\mathcal{X}) \rtimes_{\alpha,r} G$ é simples. ■

Exemplo 4.2.10: Um **grafo** G é um par (V, A) em que V é um conjunto não-vazio finito e A é um subconjunto de $V \times V$. Os elementos de V são chamados **vértices** do grafo e os elementos e A são chamados **arestas** do grafo.



Dado um grafo $G = (V, A)$, podemos definir uma matriz $B_{n\times n}$ associada ao grafo G da seguinte maneira: $b_{ij} = 1$ se $(i,j) \in A$ e $b_{ij} = 0$ se $(i,j) \notin A$. Reciprocamente, se $B_{n\times n}$ é uma matriz cujos elementos são 0 e 1 então existe um grafo $G = (V, A)$ associado a essa matriz tal que $V = \{1, \ldots, n\}$ e $A = \{(i,j) \in V \times V / b_{ij} = 1\}$. Dado um grafo $G = (V, \mathcal{A})$ com $V = \{1, \ldots, n\}$, defina

$$\mathcal{X}_B = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{1, 2, \ldots, n\}^{\mathbb{N}} / b_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}.$$

Em seguida, considere $\mathcal{T}$ a topologia produto em $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}$. Vamos mostrar que $(\mathcal{X}_{\mathcal{B}}, \mathcal{T})$ é uma espaço topológico compacto. De fato, para cada $k \in \mathbb{N}$, defina $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}^k = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{1, \ldots, n\}^{\mathbb{N}} / b_{x_k x_{k+1}} = 1\}$ e

$$\begin{aligned} f_k : \{1, \ldots, n\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \\ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} &\longmapsto (x_k, x_{k+1}). \end{aligned}$$

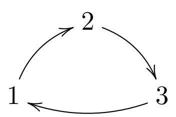
Além disso, seja

$$\begin{aligned} b : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ (i,j) &\longmapsto b_{ij}. \end{aligned}$$

Note que $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}^k$ é fechado pois $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}^k = (b \circ f_k)^{-1}(\{1\})$ e $b \circ f_k$ é uma função contínua. Como $\mathcal{X}_{\mathcal{B}} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{X}_{\mathcal{B}}^k$, segue que $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}$ é um conjunto fechado. Por fim, o teorema de Tychonov garante que $\{1, 2, \ldots, n\}^{\mathbb{N}}$ é compacto na topologia $\mathcal{T}$. Logo, $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}$ também é compacto pois $\mathcal{X}_{\mathcal{B}} \subseteq \{1, \ldots, n\}^{\mathbb{N}}$. Nosso objetivo é construir uma ação parcial do grupo livre $\mathbb{F}_n$ em $\mathcal{X}_B$ e caracterizar as ações parciais topologicamente livre e as ações parciais minimais de $\mathbb{F}_n$ em $\mathcal{X}_B$. Sejam $\{a_1, \ldots, a_n\}$ os geradores livres de $\mathbb{F}_n$

e $\{a_1^{-1},\ldots,a_n^{-1}\}$ os seus inversos. Para cada $k\in\{1,\ldots,n\}$, defina $\mathcal{X}_{a_k^{-1}}=\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{X}_B/b_{kx_1}=1\}$, $\mathcal{X}_{a_k}=\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{X}_B/x_1=k\}$, $\theta_{a_k}:\mathcal{X}_{a_k^{-1}}\longrightarrow\mathcal{X}_{a_k}$ tal que $\theta_{a_k}(x_1,x_2,\ldots)=(k,x_1,x_2,\ldots)$ e ,por fim, $\theta_{a_k^{-1}}:\mathcal{X}_{a_k}\longrightarrow\mathcal{X}_{a_k^{-1}}$ tal que $\theta_{a_k^{-1}}(k,x_2,x_3,\ldots)=(x_2,x_3,\ldots)$. Note que para cada $k\in\{1,\ldots,n\}$, θ_{a_k} e $\theta_{a_k^{-1}}$ são bijeções contínuas, $\mathcal{X}_{a_k^{-1}}$ e $\mathcal{X}_{a_k}$ são conjuntos abertos em $\mathcal{X}_B$ e $\theta_{a_k}^{-1}=\theta_{a_k^{-1}}$. Logo, pelo exemplo 1.1.8, $(\{\mathcal{X}_g\}_{g\in\mathbb{F}_n},\{\theta_g\}_{g\in\mathbb{F}_n})$ é uma ação parcial do grupo livre $\mathbb{F}_n$ sobre $\mathcal{X}_B$.

Exemplo 4.2.11: Seja $G=(V,A)$ o grafo abaixo.



Assim, $\mathcal{X}_B=\{(1,2,3,1,2,3,\ldots),(2,3,1,2,3,1,\ldots)(3,1,2,3,1,2,\ldots)\}$. Sejam $\{a_1,a_2,a_3\}$ os geradores livres de $\mathbb{F}_3$. Vamos provar que a ação parcial $(\{\mathcal{X}_g\}_{g\in\mathbb{F}_3},\{\theta_g\}_{g\in\mathbb{F}_3})$ de $\mathbb{F}_3$ sobre $\mathcal{X}_B$ não é topologicamente livre. De fato, considere $g=a_1a_2a_3\neq e$. Note que $\mathcal{X}_{g^{-1}}=\{(1,2,3,1,2,3,\ldots)\}$, $\mathcal{X}_g=\{(1,2,3,1,2,3,\ldots)\}$ e $\theta_g((1,2,3,1,2,3,\ldots))=(1,2,3,1,2,3,\ldots)$. Portanto, $F_g=\{x\in\mathcal{X}_{g^{-1}}/\theta_g(x)=x\}=\mathcal{X}_{g^{-1}}=\{(1,2,3,1,2,3,\ldots)\}$ é um conjunto aberto em $\mathcal{X}_B$. Logo, $(\{\mathcal{X}_g\}_{g\in\mathbb{F}_3},\{\theta_g\}_{g\in\mathbb{F}_3})$ não é uma ação parcial topologicamente livre.

Definição 4.2.12: Seja $G=(V,\mathcal{A})$ um grafo. Um subconjunto $\{n_1,\ldots,n_k\}\subseteq V$ é um **circuito** de $G=(V,\mathcal{A})$ quando $bn_kn_1=1$ e $b_{n_in_{i+1}}=1$ para todo $i\in\{1,\ldots,k-1\}$.

Definição 4.2.13: Seja $G=(V,\mathcal{A})$ um grafo. Um subconjunto

$\{n_1, \ldots, n_k\} \subseteq V$ é um **circuito sem saída** quando $\{n_1, \ldots, n_k\} \subseteq V$ é um circuito tal que, para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $b_{n_i p} = 0$ para todo $p \neq n_{i+1}$ e $b_{n_k p} = 0$ para todo $p \neq n_1$.

O próximo resultado exibe a condição necessária e suficiente para que a ação parcial $(\{\mathcal{X}_g\}_{g \in \mathbb{F}_n}, \{\theta_g\}_{g \in \mathbb{F}_n})$ de $\mathbb{F}_n$ sobre $\mathcal{X}_\mathcal{B}$ seja topologicamente livre.

Teorema 4.2.14: A ação $(\{\mathcal{X}_g\}_{g \in \mathbb{F}_n}, \{\theta_g\}_{g \in \mathbb{F}_n})$ de $\mathbb{F}_n$ sobre $\mathcal{X}_B$ é topologicamente livre se, e somente se, nenhum circuito do grafo $G = (V, \mathcal{A})$ é sem saída.

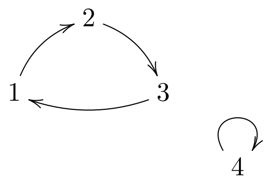
Demonstração.

($\Longrightarrow$) Suponha que o grafo $G = (V, A)$ possua um circuito sem saída $\{n_1, \ldots, n_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Assim, considere $g = a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_k}$ e $x = (n_1, n_2, \ldots, n_k, n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$. Primeiramente, note que $\theta_g(x) = x$. Além disso, $\mathcal{X}_{g^{-1}} = \{x\}$ pois $\{n_1, \ldots, n_k\}$ é uma circuito sem saída. Portanto, $F_g = \{x \in \mathcal{X}_{g^{-1}} / \theta_g(x) = x\} = \{x\}$ que é um conjunto aberto em $\mathcal{X}_B$. Logo, $(\{\mathcal{X}_g\}_{g \in \mathbb{F}_n}, \{\theta_g\}_{g \in \mathbb{F}_n})$ não é topologicamente livre.

($\Longleftarrow$) Suponha que a ação parcial $(\{\mathcal{X}_g\}_{g \in \mathbb{F}_n}, \{\theta_g\}_{g \in \mathbb{F}_n})$ não é topologicamente livre. Por definição, existe $g \in \mathbb{F}_n$ tal que o conjunto $F_g = \{x \in \mathcal{X}_{g^{-1}} / \theta_g(x) = x\}$ possui interior não-vazio. Vamos admitir que $g = a_{n_1} \ldots a_{n_k}$. Os demais casos são tratados de maneira análoga. Seja $x \in \overset{\circ}{\overline{F_g}}$. Como $\theta_g(x) = x$, segue que $x = (n_1, n_2, \ldots, n_k, n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$. Portanto, $\mathcal{X}_{g^{-1}} = \{x\}$. Assim, para todo $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, temos que $b_{n_i n_{i+1}} = 1$, $b_{n_k n_1} = 1$,

$b_{n_i p} = 0$ para todo $p \neq n_{i+1}$, e $b_{n_k p} = 0$ para todo $p \neq n_1$. Logo, $\{n_1, \ldots, n_k\}$ é um circuito sem saída do grafo $G = (V, A)$. ■

Exemplo 4.2.15: Seja $G = (V, A)$ o grafo abaixo.



Sendo assim, $\mathcal{X}_B = \{(1,2,3,\ldots), (2,3,1,\ldots), (3,1,2,\ldots), (4,\ldots)\}$. Sejam $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ os geradores livres de $\mathbb{F}_4$. Vamos provar que a ação $(\{\mathcal{X}_g\}_{g\in\mathbb{F}_4}, \{\theta_g\}_{g\in\mathbb{F}_4})$ de $\mathbb{F}_4$ sobre $\mathcal{X}_B$ não é minimal. De fato, considere $U = \{(1,2,3,1,2,3,\ldots), (2,3,1,2,3,1,\ldots), (3,1,2,3,1,2,\ldots)\}$. Note que U é um conjunto aberto θ-invariante em $\mathcal{X}_B$ pois, para todo $g \in \mathbb{F}_4$, $\theta_g(U \cap \mathcal{X}_{g^{-1}}) \subseteq U \cap \mathcal{X}_g$. Logo, $(\{\mathcal{X}_g\}_{g\in\mathbb{F}_4}, \{\theta_g\}_{g\in\mathbb{F}_4})$ não é uma ação parcial minimal.

Definição 4.2.16: Sejam $G = (V, \mathcal{A})$ um grafo e $i, j \in V$. Um **caminho** entre os vértices i e j é um subconjunto $\{n_1, \ldots, n_k\} \subseteq V$ com $n_1 = i$ e $n_k = j$ tal que $b_{n_i n_{i+1}} = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. No caso em que, para todo $i, j \in V$, existe um caminho entre os vértices i e j, o grafo $G = (V, \mathcal{A})$ é chamado **transitivo**.

Definição 4.2.17: Seja $G = (V, \mathcal{A})$ um grafo. Um elemento $j \in V$ é um **vértice isolado** quando $b_{ji} = b_{ij} = 0$ para todo $i \in V \backslash \{j\}$.

Observação 4.2.18: Obviamente, se um grafo $G = (V, \mathcal{A})$ possui um vértice isolado, então $G = (V, \mathcal{A})$ não é transitivo.

O resultado seguinte caracteriza as ações $(\{\mathcal{X}_g\}_{g \in \mathbb{F}_n}, \{\theta_g\}_{g \in \mathbb{F}_n})$ de $\mathbb{F}_n$ sobre $\mathcal{X}_\mathcal{B}$ minimais.

Teorema 4.2.19: A ação $(\{\mathcal{X}_g\}_{g \in \mathbb{F}_n}, \{\theta_g\}_{g \in \mathbb{F}_n})$ de $\mathbb{F}_n$ sobre $\mathcal{X}_B$ é minimal se, e somente se, o grafo G é transitivo.

Demonstração.

($\Longleftarrow$) Suponha que a ação parcial $(\{\mathcal{X}_g\}_{g \in \mathbb{F}_n}, \{\theta_g\}_{g \in \mathbb{F}_n})$ não é minimal. Sendo assim, existe $U \subseteq \mathcal{X}_\mathcal{B}$ aberto não-trivial tal que, para todo $g \in \mathbb{F}_n$, $\theta_g(U \cap \mathcal{X}_{g^{-1}}) \subseteq U \cap \mathcal{X}_g$. Sem perda de generalidade, considere $U = U_{n_1 \ldots n_k} = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{X}_\mathcal{B} / x_s = n_s \ \forall s \in \{1, \ldots, k\}\}$ em que $\{n_1, \ldots, n_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Seja $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $b_{jn_1} = 1$. Assim, se $x \in U_{n_1 \ldots n_k}$ então $\theta_{a_j}(x) \in U_{n_1 \ldots n_k}$. Portanto, $j = n_1 = n_2 = \cdots = n_k = x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots$. Dessa forma, $U_{n_1 \ldots n_k} = \{(n_1, n_1, n_1, \ldots)\}$, isto é, $(n_1, n_1, n_1, \ldots)$ é um vértice isolado do grafo. Logo, o grafo G não é transitivo.

($\Longrightarrow$) Suponha que o grafo G não é transitivo. Por definição, não existe um caminho entre os vértices i e j. Sendo assim, os conjuntos $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{n_1 \ldots n_k j}$ com $n_p \in \{1, \ldots, n\}$ e U_i são disjuntos. Além disso, note que U é um conjunto θ-invariante. Portanto, existe $U \subseteq \mathcal{X}_\mathcal{B}$ aberto não-trivial tal que para todo $g \in \mathbb{F}_n$ $\theta_g(U \cap \mathcal{X}_{g^{-1}}) \subseteq U \cap \mathcal{X}_g$. Logo, a ação parcial $(\{\mathcal{X}_g\}_{g \in \mathbb{F}_n}, \{\theta_g\}_{g \in \mathbb{F}_n})$ não é minimal. ■

Observação 4.2.20: Dado um grafo $G = (V, \mathcal{A})$, considere a C*-álgebra do grafo $C^*(G)$ (Ver [12], proposição 1.20). O Teorema 8.4 em

[11] afirma que $C^*(G) \cong C(\mathcal{X}_{\mathcal{B}}) \rtimes \mathbb{F}_n$.

Sendo assim, terminaremos o trabalho com o seguinte resultado.

Teorema 4.2.21: Se $G = (V, \mathcal{A})$ é um grafo transitivo e nenhum circuito de G é sem saída, então $C^*(G)$ é simples.

Referências Bibliográficas

[1] SUNDER, V. S. **Functional Analysis - Spectral Theory.** Berlin: Birkhäuser Verlag, 1998. (Birkhäuser Advanced Texts). ISBN 3-7643-5892-0.

[2] EXEL, R.; LACA, M.; QUIGG, J. **Partial dynamical systems and C*-algebras generated by partial isometries.** J. Operator Theory, v. 47, p. 169-186, 2002.

[3] BUSS, A. **A C*-álgebra de um Grupo.** 126 p. Dissertação (Mestrado em Matemática e Computação Científica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2003.

[4] MCCLANAHAN, K. **K-theory for partial crossed products by discrete groups.** Journal of Functional Analysis, v. 130, p. 77-117, 1995.

[5] MATTOS, A. D. **C*-álgebras geradas por Isometrias.** 169 p. Dissertação (Mestrado em Matemática e Computação Científica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2007.

[6] KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications.** New York: J. Wiley, 1989. 688p. (Wiley classics library). ISBN 0471504599.

[7] BOAVA, G. **Caracterizações da C*-álgebra gerada por uma compressão aplicadas a Cristais e Quasicristais.** Dissertação (Mestrado

em Matemática e Computação Científica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2007.

[8] DOKUCHAEV, M.; EXEL, R. **Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations.** Trans. American Math. Soc., v. 357, p.1931-1952, 2005.

[9] G. J. MURPHY. **C*-álgebras and operator theory**. Academic Press Inc, San Diego, 1990.

[10] E. HEWITT, K. A. ROSS. **Abstract harmonic Analysis Vol. 2**, Springer, 1972

[11] EXEL, R.; LACA, M. **Cuntz-Krieger Algebras For Infinite Matrices.** J. Reine Angew. Math., v.512, p.119-172, 1999.

[12] RAEBURN, I. **Graph Algebras**. American Mathematical Society. CBMS 103.

[13] EXEL, R. **The Bunce-Dedens Algebras as Crossed Products by Partial Automorphisms.** Bull. Braz. Math. Soc. (N.S), 25 (1994), 173-179.

[14] FELL, J. M. G. **An extension of Mackey´s method to Banach $*$-algebraic Bundles.** Memoirs Amer. Math. Soc., vol. 90, 1969.

[15] FELL, J. M. G.; DORAN, R. S. **Representations of $*$-algebras, locally compact groups, and Banach $*$-algebraic bundles.** Pure and Applied Mathematics series, vol. 125 and 126, Academic Press, 1988.