

SERGIO EDGARDO FLOODY PIÑA

**DINÂMICA DE ESTRUTURAS COMPOSTAS
METAL/ELASTÔMERO:
UMA ABORDAGEM GENERALIZADA**

**TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE
FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
ENGENHARIA MECÂNICA;
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA; PROGRAMA DE PÓS-
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA.**

**ORIENTADOR: JOSÉ JOÃO DE
ESPÍNDOLA, PHD.**

**FLORIANÓPOLIS,
2010**

Floody, Sergio Edgardo, 1966 -

Dinâmica de Estruturas Compostas Metal/Elastômero : uma Abordagem Generalizada / Sergio Edgardo Floody – 2010.

98 f. : il. ; 8,6 cm

Orientador: José João de Espíndola, PhD.

Tese Submetida à Universidade Federal de Santa Catarina Para a Obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Mecânica –

Universidade Federal de Santa Catarina - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2010.

1. Estruturas compostas metal/elastômero. 2. Dinâmica de estruturas com parâmetros variáveis com a frequência e a temperatura. 3. Solução numérica do problema de autovalores. I. Espíndola, José João de. II. Universidade Federal de Santa Catarina - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Tese.

SERGIO EDGARDO FLOODY PIÑA

**DINÂMICA DE ESTRUTURAS COMPOSTAS METAL/ELASTÔMERO:
UMA ABORDAGEM GENERALIZADA**

**ESTA TESE FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
DOUTOR ENGENHEIRO**

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA (ÁREA DE
CONCENTRAÇÃO VIBRAÇÕES E RUÍDO) E APROBADA NA SUA
FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA 2010**

Prof. José João de Espíndola, PhD. Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Eduardo Fancello, DSc. Coordenador
Universidade Federal de Santa Catarina

BANCA EXAMINADORA

Prof. José João de Espíndola, PhD.
Presidente Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Hans Ingo Weber, Dr. Ing.
Relator – Pontifícia Universidade Católica de Rio
de Janeiro

Prof. Paulo Roberto Gardel Kurka, PhD.
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Paulo de Tarso Rocha de Mendonça, PhD.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Carlos Alberto Bavastri, Dr. Eng.
Universidade Federal de Tecnologia Paraná

A la memoria de Sergio Guillermo Floody Tighe
Mi Viejo

AGRADECIMENTOS

- Goryet por todo.
- Ao Professor Espíndola, pela excelente orientação, pela experiência transmitida durante todo este tempo e, sobre tudo, pela amizade.
- A meus pais, pelo amor que sempre me deram, pelo apoio incessante para continuar a minha carreira, apesar da distância e da saudade infinita que senti em todo este tempo.
- A minha família, por todo, especialmente minha irmã Lilian.
- A Gustavo e Liliana Donnatelli. Amigos para sempre
- Aos companheiros e amigos de trabalho: Carlos, Felipe, Orlando, Acir, Eduardo, Adriana, Takao, Luciano, pelo apoio e colaboração. A Luis Galás, Luis Sanchez, pelas vivências.
- A todos os meus amigos. Por ter apoiado sempre, por nunca esquecer de mim.
- A todos meus amigos no exterior, em especial ao Rodrigo.
- A Ezzio e Soledad.
- A Felipe Reyes.
- A Susana Cendoya.
- Aos professores do Laboratório de Vibrações e Acústica, pela amizade.
- Ao governo brasileiro em nome do CNPq, pelo apoio financeiro no decorrer deste trabalho.
- À Universidad Tecnológica Vicente Pérez Rosales, por permitir realizar esta especialização e ter apoiado financeiramente. Aos amigos e colegas, pela confiança e apoio.

RESUMO

Estruturas compostas metal/elastômero são uma importante ferramenta para a redução de vibrações mecânicas. Em geral apresentam-se na forma de vigas ou placas sanduíche, neutralizadores dinâmicos de vibração ou “links” viscoelásticos

A principal consequência de uma construção metal/elastômero é a dependência do seu comportamento dinâmico da frequência e da temperatura. Isto resulta em um problema de autovalores em que a matriz de rigidez é dependente da frequência e da temperatura. A dinâmica de estruturas com parâmetros variáveis com a frequência é elaborada e uma técnica de solução numérica é apresentada.

Tais estruturas apresentam matriz de rigidez complexa e dependente da frequência. Uma solução que determine as frequências naturais é apresentada na forma de um diagrama tipo Campbell. Os fatores de perda da estrutura são determinados para toda a banda de frequência e não apenas os fatores de perda modais. Expressões para as respostas em frequência são feitas. Comparação com resultados experimentais são realizados.

A teoria acima é aplicada na formulação da dinâmica de um neutralizador tipo Stockbridge em que a haste é uma viga composta metal/elastômero. A potencialidade de tal neutralizador no controle de vibrações em linhas de transmissão de potência elétrica é discutida

Palavras-chave: Estruturas compostas metal/elastômero. Dinâmica de estruturas com parâmetros variáveis com a frequência e a temperatura. Solução numérica do problema de autovalores com parâmetros dependentes da frequência.

ABSTRACT

Metal/elastomer composite structures are an important tool for the reduction of mechanical vibrations. Generally, they appear in the form of sandwich beams or plates, dynamic neutralizers or viscoelastic links.

The main consequence of a metal/elastomer construction is the dependence of its dynamic performance on frequency and temperature. This results in eigenvalue problem in which the stiffness matrix depends on frequency and temperature. A structural dynamics model with the variable parameters dependent on the frequency is developed and a numerical solution technique is presented.

Such structures present a complex and frequency dependent stiffness matrix. A solution that determines natural frequencies is presented in the form of Campbell's diagrams. Structure's loss factors are determined for all the band of frequencies and not only modal loss factors. Expressions for frequency response are developed. Comparisons with experimental results are carried out.

The previous theory is applied in the formulation of a Stockbridge dynamic vibration neutralizer in which the pole is a metal/elastomer compound beam. The capacity of such neutralizer regarding vibration control in transmission lines of electric power is discussed.

Keywords: Metal/elastomer composite structures. Dynamics of structures with frequency and temperature variable parameters. Numerical solution of eigenvalue problem with frequency variable parameters.

LISTA DE SÍMBOLOS

Dinâmica de Estruturas

m	Constante de massa $[Kg]$.
c	Constante de amortecimento viscoso $[Ns/m]$.
k	Constante de rigidez $[N/m]$.
h	Constante de amortecimento histerético $[N m^{-1}]$.
η	Fator de perda.
M	Matriz de distribuição de massa do sistema primário ou estrutura $(n \times n)$.
C	Matriz de distribuição de amortecimento do sistema primário ou estrutura $(n \times n)$.
K	Matriz de distribuição de rigidez do sistema primário ou estrutura $(n \times n)$.
H	Matriz de distribuição de amortecimento histerético do sistema primário ou estrutura $(n \times n)$.
Γ	Matriz de perda $(n \times n)$.
t	Tiempo $[s]$.
f	Frequência $[Hz]$.
Ω	Variável frequência $[seg^{-1}]$.
Ω_0	Frequência natural de um sistema de um grau de liberdade $[seg^{-1}]$.
θ	Temperatura $[^{\circ}K]$.
$x(t)$	Deslocamento da massa de um sistema de um grau de liberdade $[m]$.
$X(\Omega)$	Transformada de Fourier de $x(t)$.

$\mathbf{q}(t)$	Coordenada generalizada do sistema primário, se o sistema primário é de múltiplos graus de liberdade se converte em um vetor de ordem $(n \times 1)$.
$\mathbf{Q}(\Omega)$	Transformada de Fourier de $\mathbf{q}(t)$.
$\mathbf{f}(t)$	Excitação sobre o sistema primário ou estrutura. Para um sistema de múltiplos graus de liberdade é um vetor $(n \times 1)$.
$\mathbf{F}(\Omega)$	Transformada de Fourier de $\mathbf{f}(t)$.
$f(t)$	Excitação sobre o sistema primário simples é um escalar $[N]$.
$F(\Omega)$	Transformada de Fourier de $f(t)$.
$h(t)$	Resposta impulsiva $[Nm^{-1}]$.
$\mathbf{H}(\Omega)$	Função resposta em frequência em forma geral. Se a resposta é o deslocamento recebe o nome de receptância $[m N^{-1}]$. Se o sistema analisado é de múltiplos graus de liberdade é uma matriz $(n \times n)$. As vezes é comum expressar esta função em forma adimensional.
$\alpha(\Omega)$	Matriz de resposta em frequência (receptância) no espaço físico $(n \times n)$.
$\mathbf{s}(\Omega)$	Matriz de resposta em frequência (inertância) no espaço físico $(n \times n)$.
$\alpha(\Omega)_{ks}$	Coefficiente k, s da matriz resposta em frequência $\alpha(\Omega)$ $[m/N]$.
ϕ_j	Autovetor.
Φ	Matriz modal formada pelos autovetores $(n \times n)$.
$\hat{\Phi}$	Matriz modal truncada formada pelos autovetores $(n \times \hat{n})$.
ψ_j	Autovetor.
Ψ	Matriz modal ortonormalizada através da matriz de massa modal.

$\mathbf{P}(\Omega)$	Coordenadas principais do sistema primário no domínio da freqüência.
$\mathbf{N}(\Omega)$	Excitação no espaço modal.
σ_j	Autovalor.
Σ	Matriz diagonal formada por σ_j .
λ_j	Autovalor.
Λ	Matriz diagonal formada por λ_j .
Ω_j	Freqüência modal.
η_j	Fator de perda modal.
${}^j A_{k,s}$	k, s -ésima constante modal associada ao j -ésimo modo.
$K(\Omega)$	Rigidez Dinâmica $[N/m]$.
$Z(\Omega)$	Impedância $[Ns/m]$.
$M(\Omega)$	Massa Dinâmica $[Kg]$.
$c_{eq}(\Omega)$	Amortecimento equivalente $[Nseg/m]$.
$m_{eq}(\Omega)$	Massa equivalente $[Kg]$.
m_B	Metade da massa da base $[Kg]$.
m_C	Massa do corpo montado na viga $[Kg]$.
J_C	Momento de inércia do corpo $[Kgm^2]$.
G	Centro de gravidade do corpo $[m]$.
e	Distancia entre o extremo da haste até o centro de gravidade do corpo em balanço $[m]$.
$q_1(t)$	Deslocamento da massa de sintonia $[m]$.
$q_2(t)$	Rotação da massa de sintonia $[rad]$.
$y(t)$	Deslocamento imposto $[m]$.
L	Comprimento da haste $[m]$.
E	Módulo de Young $[N/m^2]$.
I	Segundo momento de área da seção reta $[m^4]$.

V	Energia potencial $[Nm]$.
T	Energia cinética $[Nm]$.
n	Número de graus de liberdade do um sistema linear qualquer.
\hat{n}	Modos computados ($\hat{n} \ll n$).

Elementos Finitos

$\boldsymbol{\sigma}(x, y, t)$	Tensor de Tensões $[N/m^2]$.
$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, t)$	Tensor de deformações.
$\mathbf{u}(x, y, t)$	Vetor de deslocamentos $[m]$.
E	Módulo de Young $[N/m^2]$.
\mathbf{C}	Matriz de coeficientes elásticos.
h	Espessura $[m]$.
ν	Coefficiente de Poisson.
ρ	Densidade superficial do corpo $[Kg/m^2]$.
$\varphi_j(r, s)$	Funções de forma ($j = 1, \dots, 9$).
$x(r, s)$	Funções de mapeamento.
$y(r, s)$	
∇_{xy}	Divergência nas coordenadas físicas.
∇_{rs}	Divergência nas coordenadas padrão.
\mathbf{J}	Jacobiano da transformação.
\mathbf{N}	Matrix das funções de forma.
\mathbf{D}	Divergencia (forma matricial).
\mathbf{B}	Tensor deformação – deslocamento.
V^e	Energia potencial do elemento $[Nm]$.
T^e	Energia cinética do elemento $[Nm]$.
\mathbf{M}^e	Matriz de massa elementar.
\mathbf{K}^e	Matriz de rigidez elementar.

Materiais Elastoméricos

$\sigma(t)$	Tensão relativa $[N/m^2]$.
$\sigma(\Omega)$:	Transformada de Fourier de $\sigma(t)$.
$\varepsilon(t)$	Deformação relativa.
$\varepsilon(\Omega)$:	Transformada de Fourier de $\varepsilon(t)$.
a_n	Coefficientes.
b_n	Coefficientes.
$\bar{G}(\Omega)$	Módulo complexo de cisalhamento do elastômero $[N/m^2]$.
$G_r(\Omega)$	Parte real do módulo de cisalhamento do elastômero $[N/m^2]$.
$G_i(\Omega)$	Parte imaginária do módulo de cisalhamento do elastômero $[N/m^2]$.
$\eta_G(\Omega)$	Fator de perda do elastômero.
$\bar{E}(\Omega)$	Módulo de Young Complexo $[N/m^2]$.
$\eta_E(\Omega)$	Fator de perda.
θ	Temperatura $[^{\circ}K]$.
Ω_t	Frequência de transição.
θ_t	Temperatura de transição.

Símbolos Adicionais

$diag()$	Significa matriz diagonal.
$(Y)^T$	A letra T superescrita em um vetor ou matriz, indica a transposta do mesmo.
$()^{-1}$	O símbolo -1 superescrito na matriz, indica a

	inversa da mesma.
$()^+$	O símbolo + superescrito na matriz, indica a pseudo inversa da mesma.
$\ \ $	Norma euclidiana de um vetor ou matriz.
$ $	Módulo de um vetor ou número complexo.
$\Re()$	Parte real de um número complexo.
$\Im()$	Parte imaginaria de um número complexo.
I	Matriz identidade.
i	$\sqrt{-1}$.

SUMÁRIO

1. CAPÍTULO I <i>Introdução</i>	
1.1 - Generalidades	1
1.2 - Antecedentes Bibliográficos	2
1.3 – Objetivos	5
2. CAPÍTULO II <i>O Modelo Histerético de Amortecimento</i>	
2.1 – Generalidades	7
2.2 - O Problema de Autovalores com Amortecimento Histerético	12
2.3 - Função Resposta em Frequência	13
2.4 - Função Resposta Impulsiva	16
2.5 - Materiais Viscoelásticos	19
2.6 - Materiais Viscoelásticos: Dependência da Frequência e Temperatura	21
3. CAPÍTULO III <i>Modelagem de Estruturas Compostas Tipo Metal/Elastômero</i>	
3.1 – Generalidades	24
3.2 - Dinâmica de Sistemas de Grande Porte com Parâmetros Dependentes Da Frequência	25
3.3 – Discussão	30
4. CAPÍTULO IV <i>Exemplo de Aplicação</i>	
4.1 – Introdução	31
4.2 - Descrição da Estrutura de Exemplo	31
4.3 - Descrição do Experimento	32
4.4 - Equações do Modelo da Viga Sanduíche Usando o Método dos Elementos Finitos	35
4.4.1 - Relações Constitutiva e Cinemática	35
4.4.2 - Energias Cinética e Potencial	37
4.4.3 - Funções de Forma e Mapeamento	37
4.4.4 - Cálculo das Matrizes de Rigidez e Massa	40
4.4.5 - Considerações Adicionais	42
4.5 - Resultados Experimentais : Funções Resposta de Frequência	42
4.6 - Resultados Experimentais : Avaliação das Frequências Naturais não Amortecidas e Fatores de Perda Modais	48
4.6.1 - Frequências Naturais	48
4.6.2 - Fatores de Perda	54
4.7 - Comentários Adicionais	60

5. CAPÍTULO V <i>Modelagem do NeutralizadorTipo Stockbridge Composto</i>	
5.1 – Introdução	63
5.2 - Modelo Básico	64
5.3 - Modelo de Elementos Finitos	70
5.4 - Comentários Finais	79
6 CAPÍTULO VI <i>Comentários Finais, Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros</i>	
6.1 - Comentários Finais	82
6.2 – Conclusões	84
6.3 - Sugestões para Trabalhos Futuros	86
Referências Bibliográficas	87
APÊNDICE A <i>Teorema da Expansão Truncada</i>	
A1 – Introdução	92
A2 - Teorema da Expansão Truncada	93
A3 - Resolução da Equação de Movimento com Matriz de Rigidez Dependente da Frequência para Matrizes de Grande Porte	95

1. INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

O interesse em estruturas metal/elastômero é dado pelas propriedades de amortecimento desses materiais, as quais são adicionadas a um sistema mecânico cujas vibrações deseja-se controlar. Tal controle pode ser realizado por dispositivos de neutralização que incluam materiais viscoelásticos, ou por modificação estrutural através do uso de camadas adicionadas ou de links. Este interesse leva consigo a necessidade de obter uma adequada formulação da dinâmica das estruturas compostas metal/elastômero.

Partindo do clássico trabalho de Ross, Ungar e Kerwin (1959), o qual apresentou pela primeira vez uma formulação geral para o cálculo de frequências de ressonância e fatores de perda para este tipo de estrutura, existem até a presente data, muitos artigos e contribuições. Mas, quando tenta-se determinar a resposta de estruturas ou componentes mecânicos, que de alguma forma possuam materiais viscoelásticos, o problema cresce no seu grau de complexidade, o que se deve a que os elastômeros apresentam nas suas características, dependência em função da frequência, a temperatura, carregamento estático etc.,. Por tanto tal dependência é transmitida à estrutura completa.

Para determinar o comportamento dinâmico de estruturas compostas metal/elastômero, pode-se determinar um fator comum na série de trabalhos até a presente data que é o método de análise da

energia modal de deformação,. O método da energia de deformação modal pode apresentar algumas limitações:

- a. Primeiro deve-se ser cuidadoso em estender os resultados, quando a rigidez do material viscoelástico varia apreciavelmente numa certa faixa de frequência - temperatura, conhecida como região de transição.
- b. Segundo o método é válido para fatores de perda menores que a unidade, embora existam casos em que se mostrem boas previsões.

Em relação aos parágrafos anteriores, um ponto importante que deve ser levado em conta, é o trabalho de Crandall (1970), que determina os limites da validade do modelo histerético, quando este amortecimento é assumido constante em função da frequência, especialmente para materiais elastoméricos. Tal simplificação traz consigo o problema de que o modelo não é causal, i.e. o sistema fornece resposta antes de ser excitado por algum tipo de entrada. Por tanto se consideramos somente os resultados em função da frequência o julgamento da qualidade do modelo é incompleta. Por outro lado, Crandall (1991) discute outra simplificação bastante usada quando se trata de modelo de amortecimento histerético, que é considerar uma função que seja constante dentro de certas faixas de frequência. Esta situação novamente determina a não causalidade do sistema que se está modelando. Logo deve-se abrir uma necessária discussão em relação aos métodos e simplificações anteriormente descritos, porque eles dão como resultado um modelo que é fisicamente irrealizável.

1.2 ANTECEDENTES BIBLIGRÁFICOS

Após o trabalho pioneiro de Ross, Ungar, Kerwin (1959), vários pesquisadores tentaram ampliar e desenvolver a dinâmica de estruturas compostas metal/elastômero no campo da mecânica do contínuo. O aporte básico de Ross, Ungar e Kerwin foi apresentar a primeira teoria generalizada para uma viga composta metal/elastômero engastada em um de seus extremos. Naquele artigo se apresenta o cisalhamento do material viscoelástico como mecanismo básico de dissipação de energia. Este trabalho foi a base para o desenvolvimento do método de determinação experimental das características dinâmicas dos materiais viscoelásticos, o qual é detalhadamente explicado em várias publicações (ASTM E 756-93 ,1993; NASHIF, JONES, HENDERSON, 1985). A

principal limitação deste método consiste na aproximação senoidal dos modos de vibração da viga, que pode ser bastante adequado para modos de ordem elevada, mas não para os primeiros.

Di Taranto (1965) em conjunto com Mead e Marcus (1969), propõem uma teoria mais realista para vigas compostas, considerando vibrações forçadas e variadas condições de contorno. As hipóteses de este conjunto de trabalhos são:

- a. As camadas metálicas externas são elásticas e isotrópicas, suas deformações decisalemente não são consideradas.
- b. A camada interna é linearmente viscoelástica submetida a tensões de cisalhamento.
- c. Não existem deformações normais nas camadas externas e interna.
- d. Não existem escorregamento entre as interfaces.
- e. Os efeitos de inercia rotatoria são de interés secundário, não considerados

Estes trabalhos são a base para um novo método experimental para o cálculo das características dinâmicas dos materiais elastoméricos (LOPES, BRANDON, ESPÍNDOLA, 1995). Mais tarde Mead (1972) criou, baseado nos trabalhos anteriores, uma teoria de objetivos similares para placas compostas metal/elastômero.

Rao (1978) apresentou uma revisão para vigas compostas metal/elastômero. Neste caso seu trabalho se concentrou em vigas curtas e não simétricas, incluindo múltiplas condições de contorno. Miles e Reinhall (1986) incluíram dentro do problema de vigas compostas os efeitos de extensão além dos efeitos de cisalhamento do material viscoelástico. Outra contribuição foi dada por Hamidadeh e Jiang (1995), especificamente, este último trabalho foi dirigido a cascas cilíndricas compostas.

Embora estas contribuições sejam muito importantes, possuem uma grande limitação. Seu escopo está restrito a geometrias simples, fato que limita suas aplicações em engenharia. Em alguns casos a dependência da frequência do material viscoelástico não é levada em conta (MILES, REINHALL, 1986; HAMIDADEH, JIANG 1995). Para solucionar este problema variados autores tem recorrido ao método dos elementos finitos.

O método dos elementos finitos (MEF) é escolhido, devido a sua confiabilidade em problemas de dinâmica, em conjunto com sua grande adaptabilidade a problemas de estruturas compostas de geometria complexa.. Tal método tem sido usado em problemas que incluem estruturas compostas metal/elastômero desde a década dos 70. Três possibilidades tem sido usadas com sucesso.

A primeira é uma combinação de elementos isoparmétricos de casca fina de oito nós, modelando a parte metálica, em conjunto com elementos isoparamétricos sólidos 3D de oito nós, que modelam a parte elastomérica; assim como é proposto nos trabalhos de Soni (1980) e Rogers, Johnson e Keinholtz (1980).

Uma outra escolha é relatada por Lu, Killian, Everstine (1979) e Mignery (1995), que consiste no uso de elementos de placa para modelar a parte metálica, e molas para a parte viscoelástica. Tal método tem a vantagem de agilizar os processos de cálculo e montagem das matrizes de rigidez e massa.

Uma outra aproximação ao problema utiliza elementos de casca especiais para representar a estrutura composta, como no trabalho de Lumsdaine, Scott (1995). Neste trabalho além dos graus de liberdade usuais, para a parte metálica nos nós, agregam-se graus de liberdade adicionais para representar a deformação do material viscoelástico.

Estos modelos são eficientes, mas o modelo mais completo e exato disponível utiliza elementos sólidos 3D para as partes metálicas e viscoelástica. Tal modelo possui um elevado custo computacional (MIGNERY 1995).

Outros modelos usando elementos finitos de viga composta, como os de Ravi, Kundra e Nakra (1995), tem similaridades ao modelo de Luminsdale et. al., mas falham devido a uma insuficiente modelagem do elastômero, o que leva a um modelo inconsistente, que viola o principio de causalidade dos sistemas físicos (CRANDALL,1991). No caso do trabalho de Trompete, Boillot e Ravanel (1987), usa-se um modelo similar para vigas compostas, mas as equações que decrevem o comportamento do material viscoelástico são irrealis. Ovbiamente estos trabalhos limitam-se a este tipo de estruturas somente.

Em geral o uso do método dos elementos finitos, necessita de matrizes de grande porte e considerando que a matriz de rigidez é dependente da frequência, uma resolução direta, resultaria num elevado custo computacional. Um método simplificado para determinar a resposta de estruturas compostas metal/elastômero é o método da energia de deformação modal, o qual tem sido usado amplamente na literatura (SONI, 1980; ROGERS, JOHNSON, KEINHOLTZ 1980; MIGNERY 1995).

Tal método não leva em conta a rigidez variável com a frequência. Ainda quando as soluções por este método são favoráveis, estas são limitadas a condições que não são reais para este tipo de amortecimento. Deve-se lembrar que no caso do amortecimento histerético, quando este supõe-se constante, estamos modelando um sistema não causal e por tanto não correspondente a um sistema físico real (CRANDALL, 1970, 1991). Por outro lado, deve-se considerar as limitações na faixa de frequências escolhidas para a análise, a qual, se fosse na banda de frequência de transição seria extremadamente limitada e inexata (MIGNERY 1995). Tal faixa é de extremo interesse, devido a que os maiores valores de fator de perda se encontram ali. Nesta faixa também acontece o maior aproveitamento da dissipação de energia da estrutura.

Por outro lado, métodos baseados na resolução de autovalores, para a modelagem de estruturas metal/elastômero, tais como o método de Lanczos (1950) ou o método de iteração de subespaço (BATHE, 1982), presupõem uma descomposição da matriz de rigidez, a qual é variável com a frequência. Se tais métodos fossem usados, o esforço computacional seria elevado. Portanto ainda existe a necessidade, de estabelecer uma teoria completa que explique a dinâmica de estruturas compostas metal/elastômero.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é determinar um método eficiente para descrever o comportamento dinâmico de estruturas compostas metal – elastômero dependente da frequência e da temperatura, e que sirva como uma alternativa aos métodos mais usados até o momento.

Como objetivo secundário apresentar uma metodologia para o projeto e construção de um neutralizador dinâmico de vibrações tipo Stockbridge viscoelásticamente modificado, estendendo a teoria proposta de parâmetros equivalentes generalizados para vários graus de liberdade que possam apresentar na raiz do neutralizador (ESPÍNDOLA, SILVA, 1992).

No capítulo II, faz-se uma revisão do modelo de amortecimento histerético em sistemas mecânicos, suas características, e o problema da não causalidade provocado por simplificações em relação à dependência da frequência. Mostra-se também, a relação deste tipo de amortecimento com os materiais viscoelásticos.

No capítulo III, é feita uma revisão dos principais métodos para determinar o comportamento dinâmico de estruturas metal/elastômero. Um novo método será proposto e comparado com os existentes, em relação ao problema de autovalores dependente da frequência e temperatura.

No capítulo IV apresenta-se um exemplo da teoria proposta no capítulo anterior aplicada a viga sanduíche. O modelo é construído usando o método dos elementos finitos, sua resposta em frequência é calculada com o novo algoritmo. Paralelamente comparam-se os resultados teóricos com os experimentais. Finalmente, como consequência de todo o desenvolvimento anterior, obtém-se um novo método para o cálculo das frequências naturais e dos fatores de perda.

No capítulo V, modela-se também, o neutralizador tipo Stockbridge - viga sanduíche, como uma aplicação do novo método, para o controle de vibrações em linhas de transmissão de potência elétrica. As limitações da metodologia serão analisadas.

No capítulo VI, apresentam-se os comentários finais, conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

2. O MODELO HISTERÉTICO DE AMORTECIMENTO

2.1. GENERALIDADES

Neste capítulo uma revisão da dinâmica de sistemas mecânicos com amortecimento estrutural será apresentado. Boa parte deste material foi cedido pelo professor José J. De Espíndola (1987, 1991), para esta introdução tutorial. Sabe-se que a energia dissipada por ciclo de movimento harmônico, em um mecanismo viscoso é dada por (DEN HARTOG, 1956)

$$E_d = \pi c \Omega X^2, \quad (2.1)$$

onde

- c : é a constante de amortecimento viscoso,
- Ω : é a frequência circular,
- X : é a amplitude do movimento harmônico.

Por esta expressão a energia dissipada por ciclo é proporcional à frequência e ao quadrado da amplitude.

Quando uma estrutura real, ou parte dela, é posta em movimento harmônico verifica-se, entretanto que não existe esta proporcionalidade entre a energia dissipada por ciclo e a frequência. É verdade que esta energia depende, de alguma forma, da frequência, mas nunca de maneira proporcional. Para citar um exemplo, para estruturas ou peças metálicas a energia depende apenas moderadamente da frequência.

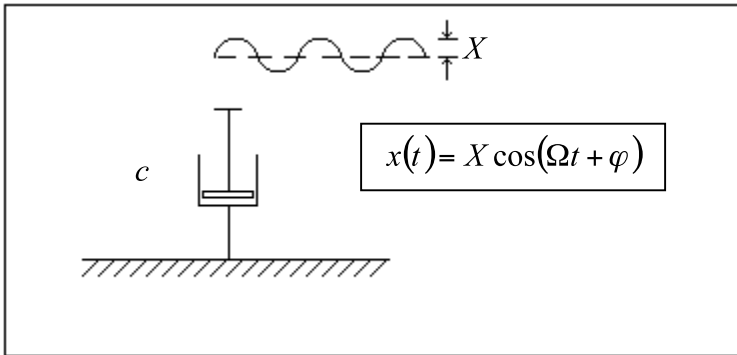


FIGURA 2.1. Amortecedor viscoso submetido a movimento harmônico simples.

Os mecanismos de extração de energia, isto é, de amortecimento de uma estrutura completa são muitos e muito complexos, e em nada se assemelham ao comportamento viscoso. Basta pensar na perda de energia via contornos estruturais e meio elástico em que a estrutura esteja imersa (ar, água), entre outras formas. Qualquer tentativa de levar em conta os vários mecanismos de dissipação e extração de energia mecânica, individualmente, em uma análise matemática, é impraticável.

O que de melhor se pode fazer é modificar o modelo viscoso, gerando outros modelos de simples manipulação matemática. O modelo de amortecimento histerético surge dessas considerações (CRANDALL, 1968).

Supõe-se, inicialmente, que o modelo viscoso prevaleça, porém com a constante de amortecimento dependente da frequência (o termo “constante” aqui refere-se ao tempo apenas). Segundo, supõe-se que esta constante de amortecimento viscoso seja da forma

$$c(\Omega) = \frac{h(\Omega)}{\Omega}, \quad (2.2)$$

Onde $h(\Omega)$ é uma constante (em relação ao tempo), característica do sistema. Desta maneira a energia dissipada por ciclo (ver 2.1) é dada por:

$$E_d = \pi h(\Omega) X^2. \quad (2.3)$$

A dependência de $h(\Omega)$ da frequência é, em geral e de forma realística, estabelecida experimentalmente. Como para estruturas metálicas a dependência de $h(\Omega)$ da frequência é moderada, costuma-se, toma-la como constante. Assim, de forma aproximada tem-se:

$$E_d \approx \pi h X^2. \quad (2.4)$$

Engeheiros aeronáuticos, por exemplo, costumam fazer esta simplificação. Em 2.4, h recebe o nome de constante de amortecimento hysterético.

Para uma estrutura completa ou parte dela, supõe-se, em analogia com o caso viscoso, que inúmeros mecanismos hysteréticos estejam distribuídos, de sorte que, para uma excitação harmônica, de frequência Ω , a matriz de amortecimento fica:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\Omega} \mathbf{H}, \quad (2.5)$$

onde \mathbf{H} é denominada matriz de amortecimento hysterético. Note-se que, como \mathbf{C} é simétrica, também \mathbf{H} o é. Para um sistema discreto, de múltiplos graus de liberdade, excitado por um vetor de forças harmônicas da mesma frequência, a equação diferencial matricial fica:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \frac{1}{\Omega} \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.6)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, ou de a inércia, \mathbf{K} é a matriz de rigidez, $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ é o vetor de configuração do sistema e $\mathbf{f}(t)$ o vetor de forças de excitação. \mathbf{M} e \mathbf{K} são simétricas e ambas pertencem a $\mathfrak{R}^{n \times n}$

É importante notar a restrição acima: a expressão (2.6) é válida apenas quando o segundo membro à direita da igualdade for um vetor de forças harmônicas, todas da mesma frequência. Infringida a restrição acima a equação (2.6) fica sem sentido. Para entender isto, basta perguntar: no caso de o segundo membro possuir um espectro mais amplo do que uma simples frequência, qual é o sentido de Ω no primeiro membro? Esta restrição deve ficar bem clara, caso contrario pode-se estar misturando os domínios do tempo com o da frequência Crandall (1968) chama este tipo de equação de “non-equation”. Portanto para se usar o modelo histerético de amortecimento, no caso em que a excitação contenha múltiplas frequências, é necessário usar a transformada de Fourier e escrever a equação (2.6) no domínio da frequência.

$$\left(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\mathbf{H} + \mathbf{K}\right)\mathbf{Q}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega), \quad (2.7)$$

onde $\mathbf{Q}(\Omega)$ e $\mathbf{F}(\Omega)$ são as transformadas de Fourier de $\mathbf{q}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$.

No caso em que a matriz de rigidez \mathbf{K} seja não singular pode-se escrever:

$$\mathbf{K} + i\mathbf{H} = \mathbf{K}\left(\mathbf{I} + i\mathbf{K}^{-1}\mathbf{H}\right) = \mathbf{K}\left(\mathbf{I} + i\Gamma\right), \quad (2.8)$$

onde $\Gamma = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{H}$.

Γ é chamada de matriz de perda e seus elementos os fatores de perda.

Considere-se o sistema mecânico representado pela figura 2.2. A equação do movimento é dada por:

$$f(t) = kx(t) + c\dot{x}(t), \quad (2.9)$$

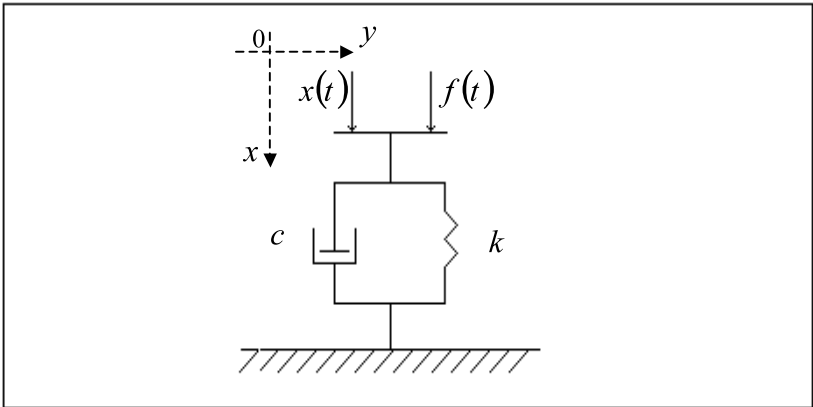


FIGURA 2.2. Sistema mecânico mola - amortecedor

Ou no domínio da frequência,

$$F(\Omega) = (k + ic\Omega)X(\Omega) = k\left(1 + i\frac{c\Omega}{k}\right)X(\Omega), \quad (2.10)$$

Supondo-se amortecimento histerético, tem-se $c = \frac{h}{\Omega}$

Logo,

$$F(\Omega) = k\left(1 + i\frac{h}{k}\right)X(\Omega), \quad (2.11)$$

$$F(\Omega) = k(1 + i\eta)X(\Omega), \quad (2.12)$$

onde $\eta = \frac{h}{k}$

A expressão $k(1 + i\eta)$ recebe o nome de rigidez complexa do sistema. A parte imaginária $k\eta$ da rigidez complexa produz uma componente de força defasada em $\pi/2$ radianos em relação ao deslocamento e é uma medida da dissipação interna da mola. A

constante η é o fator de perda do sistema. Como um amortecedor é apenas uma idealização, costuma-se dizer que η é o fator de perda histerético do elemento elástico do sistema.

2.2 O PROBLEMA DE AUTOVALORES COM AMORTECIMENTO HISTERÉTICO

Considere-se o seguinte problema de autovalores:

$$[i\mathbf{H} + \mathbf{K}]\phi = \lambda\mathbf{M}\phi \quad (2.13)$$

Este problema fornece n autovalores λ_i , $i=1, n$ e n correspondentes autovetores ϕ_i , $i=1, n$. Tanto autovalores como autovetores são complexos. Note-se que, como a matriz de rigidez é complexa, não se espera que os autovalores λ_i ocorram em pares conjugados. Pode-se demonstrar com extrema simplicidade as seguintes condições de ortogonalidade:

$$\phi_j^T \mathbf{M} \phi_i = m_j \delta_{ij}, \quad i \neq j \quad (2.14)$$

$$\phi_j^T (i\mathbf{H} + \mathbf{K}) \phi_i = \bar{k}_j \delta_{ij} \quad (2.15)$$

Definindo a matriz modal

$$\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_n], \quad (2.16)$$

as relações de ortogonalidade ficam

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \text{diag}(m_i) \quad (2.17)$$

$$\Phi^T (i\mathbf{H} + \mathbf{K}) \Phi = \text{diag}(\bar{k}_i) \quad (2.18)$$

Tomando a equação (2.13) e pré - multiplicando por ϕ_j^T obtém-se, tendo em vista as condições de ortogonalidade:

$$\lambda_j = \frac{\overline{k_j}}{m_j} \quad (2.19)$$

Os autovetores podem ser ortonormalizados, de tal sorte que

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (2.20)$$

$$\Phi^T (i\mathbf{H} + \mathbf{K}) \Phi = \Lambda = \text{diag}(\lambda_i) \quad (2.21)$$

2.3 FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Tome-se a matriz modal Φ para a seguinte transformação

$$\mathbf{Q}(\Omega) = \Phi \mathbf{P}(\Omega). \quad (2.22)$$

Substituindo 2.22 em 2.7, tem-se:

$$\left(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\mathbf{H} + \mathbf{K} \right) \Phi \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega). \quad (2.23)$$

Pré - multiplicando por 2.23 Φ^T , obtém-se:

$$\left(-\Omega^2 \mathbf{I} + \Lambda \right) \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{N}(\Omega) \quad (2.24)$$

Onde $\mathbf{N}(\Omega) = \Phi^T \mathbf{F}(\Omega)$, e a matriz

$$\left(-\Omega^2 \mathbf{I} + \Lambda \right) \quad \text{é diagonal.} \quad (2.25)$$

A expressão (2.24) representa um sistema de equações desacopladas do tipo

$$\left(-\Omega^2 + \lambda_j\right)P_j(\Omega) = N_j(\Omega) \quad j = 1, n. \quad (2.26)$$

A solução de 2.24 será:

$$\mathbf{P}(\Omega) = \left(-\Omega^2 \mathbf{I} + \Lambda\right)^{-1} \mathbf{N}(\Omega) \quad (2.27)$$

Substituindo 2.27 em 2.22 e tendo em conta 2.25, pode-se escrever:

$$\mathbf{Q}(\Omega) = \Phi \left(-\Omega^2 \mathbf{I} + \Lambda\right)^{-1} \Phi^T \mathbf{F}(\Omega) \quad (2.28)$$

O coeficiente do vetor $\mathbf{F}(\Omega)$ é reconhecido como a matriz de receptância:

$$\alpha(\Omega) = \Phi \left(-\Omega^2 \mathbf{I} + \Lambda\right)^{-1} \Phi^T \quad (2.29)$$

Um particular elemento de $\alpha(\Omega)$ será:

$$\alpha_{ks}(\Omega) = \sum_{j=1}^n \frac{\phi_{kj} \phi_{sj}}{\lambda_j - \Omega^2} \quad (2.30)$$

A expressão 2.30 representa a resposta na coordenada de ordem k devida a uma força de amplitude unitária aplicada à coordenada de ordem s . Toda esta afirmação refere-se, obviamente, ao domínio da frequência.

O produto no numerador da expressão acima é chamada a constante modal

$$A_{ks}^j = \phi_{kj} \phi_{sj} \quad (2.31)$$

Então pode-se reescrever a receptância como

$$\alpha_{ks}(\Omega) = \sum_{j=1}^n \frac{A_{ks}^j}{\lambda_j - \Omega^2} \quad (2.32)$$

A receptância acima escrita, pode ser levada a uma forma mais elaborada. Lembrando-se do problema de autovalores 2.21, pode-se escrever

$$\lambda_j = \phi_j^T \mathbf{K} \phi_j + i \phi_j^T \mathbf{H} \phi_j \quad (2.33)$$

Como os autovetores são complexos, os produtos triplos acima são também complexos. Como os λ_j tem unidades de freqüência circular ao quadrado, é conveniente representá-lo por suas partes real e imaginária, assim:

$$\lambda_j = \Omega_j^2 + i h_j. \quad (2.34)$$

Ou, de forma mais conveniente:

$$\lambda_j = \Omega_j^2 (1 + i \eta_j). \quad (2.35)$$

$$\eta_j = \frac{h_j}{\Omega_j^2} \quad (2.36)$$

A Ω_j se atribui o nome de freqüência natural do j -ésimo modo, a η_j o nome de fator de perda do j -ésimo modo e a h_j , o de coeficiente modal de histerese do j -ésimo modo. Com esta nova notação a receptância assume a seguinte forma:

$$\alpha_{ks}(\Omega) = \sum_{j=1}^n \frac{A_{ks}^j}{\Omega_j - \Omega^2 + i \eta_j \Omega_j^2} \quad (2.37)$$

A forma dada pela equação (2.33) é geralmente mais usada em problemas de identificação, enquanto esta última (2.37) é mais adequada à discussão do comportamento do sistema.

2.4 FUNÇÃO RESPOSTA IMPULSIVA

Existe algo que é fundamental ao considerar o modelo histerético como forma de dissipação de energia em um sistema mecânico; o modelo do sistema é não causal se a rigidez e o fator de perda da estrutura são considerados constantes com a frequência. Isto quer dizer que na ausência de uma sinal de entrada o sistema entrega uma resposta. Por tanto, não se cumpre $h(t) = 0, \quad t < 0$, onde $h(t)$ é resposta impulsiva.

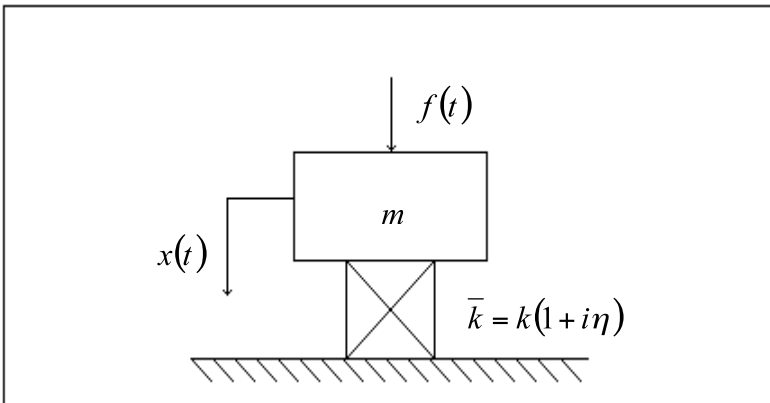


FIGURA 2.3. Sistema de um grau de liberdade com amortecimento histerético

Considere-se como exemplo um sistema mecânico de um grau de liberdade. A equação de movimento é dada por

$$m \ddot{x}(t) + \bar{k}x(t) = f(t), \quad (2.38)$$

onde $\bar{k} = k(1 + i\eta)$ é a rigidez complexa do sistema.

No domínio da frequência a equação anterior fica como

$$\left[-\Omega^2 m + \bar{k}\right]X(\Omega) = F(\Omega). \quad (2.39)$$

A receptância do sistema é dada por

$$\alpha(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{\bar{k} - \Omega^2 m}, \quad (2.40)$$

a qual pode ainda ser escrita assim:

$$\alpha(\Omega) = \frac{1}{k - \Omega^2 m + ik\eta}. \quad (2.41)$$

Reorganizando algebricamente, tem-se

$$\alpha(\Omega) = \frac{1}{m(\Omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega_0^2\eta)} \quad (2.42)$$

$$\Omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (2.43)$$

Calcula-se a resposta impulsiva tomando a transformada inversa de Fourier da receptância

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[m(\Omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega_0^2\eta) \right]^{-1} e^{i\Omega t} d\Omega. \quad (2.44)$$

Tal integral não tem uma expressão analítica fechada e usualmente é calculada numericamente. Quando se considera o fator de perda como uma constante com a frequência, o modelo não cumpre com a condição de causalidade acontecendo $h(t) \neq 0, t < 0$. Por outro lado

se considerarmos o fator de perda dependente da frequência, a expressão correta para a resposta impulsiva seria dada por:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ m \left[\Omega_0^2(\Omega) - \Omega^2 + i\Omega_0^2(\Omega)\eta(\Omega) \right] \right\}^{-1} e^{i\Omega t} d\Omega, \quad (2.45)$$

onde a própria frequência natural será dependente da frequência de excitação. A figura 2.4 mostra o resultado da integração numérica de 2.44 e de 2.45. Esta última integração foi feita considerando-se um material elastomérico verdadeiro, cujas propriedades de amortecimento e rigidez em função da frequência, são aqui omitidas por brevidade. Vê-se claramente que, para o sistema com material elastomérico (verdadeiro) a resposta impulsiva é causal, isto é, $h(t) = 0$ para $t < 0$. Para o amortecimento histerético constante, entretanto, $h(t) \neq 0$, $t < 0$. A consideração de material elastomérico verdadeiro foi extraída do artigo de Crandall (1970).

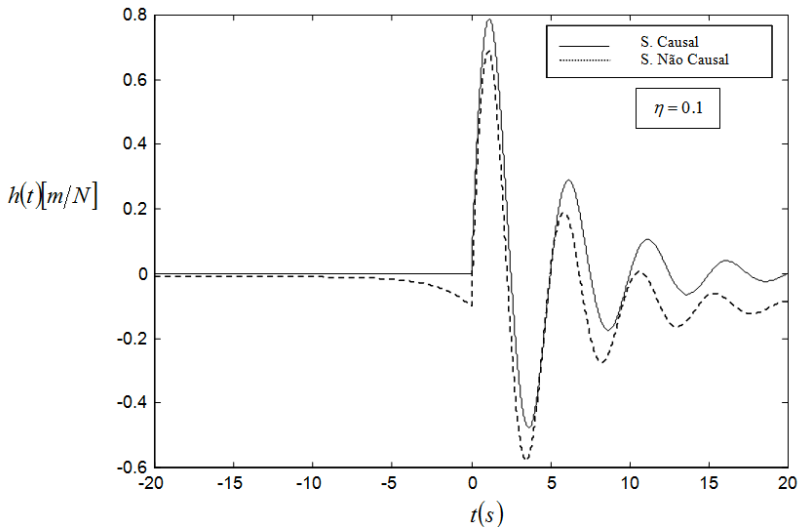


FIGURA 2.4. Resposta Impulsiva Sistema Causal e Não Causal

Para estruturas de baixo amortecimento, entretanto os autores esquecem a não causalidade do modelo histerético e adotá-lo como

modelo, simplificando o amortecimento estrutural. Para estruturas compostas metal/elastômero entretanto, esta simplificação pode resultar em erros significativos.

2.5 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

O amortecimento material é fortemente exibido em materiais viscoelásticos e este mecanismo de amortecimento tem múltiplas possibilidades de aplicação em controle de ruído e vibrações. De forma geral, materiais viscoelásticos lineares, submetidos a tensões e deformações variáveis no tempo, podem ser modelados por uma equação diferencial parcial linear de ordem arbitrária (SNOWDON, 1968; NASSHIFF, JONES, HENDERSON, 1985).

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\partial^n \sigma(t)}{\partial t^n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\partial^n \varepsilon(t)}{\partial t^n} \quad (2.46)$$

sendo $\sigma(t)$ tensão e $\varepsilon(t)$ a deformação relativa e a_n e b_n propriedades do material.

Transformando 2.46 membro a membro obtém-se:

$$\sigma(\Omega) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (i\Omega)^n = \varepsilon(\Omega) \sum_{n=0}^{\infty} b_n (i\Omega)^n \quad (2.47)$$

sendo

$$\begin{aligned} \sigma(\Omega) &: && \text{Transformada de Fourier de } \sigma(t), \\ \varepsilon(\Omega) &: && \text{Transformada de Fourier de } \varepsilon(t), \\ \Omega &: && \text{Frequência angular,} \\ a_n, b_n &: && \text{Coeficientes a determinar.} \end{aligned}$$

Uma forma simples de reescrever (2.47) é

$$\dots \quad (2.48)$$

$$\frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(i\Omega)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(i\Omega)^n} = \frac{N_0(\Omega) + iN_1(\Omega)}{D_0(\Omega) + iD_1(\Omega)} \quad (2.48)$$

Ou ainda

$$\sigma(\Omega) = \bar{G}(\Omega)\varepsilon(\Omega), \quad (2.49)$$

Considerando que existe cisalhamento puro, onde:

$$\bar{G}(\Omega) = G_r(\Omega) + iG_i(\Omega), \quad (2.50)$$

Em 2.50, tem-se

- $\bar{G}(\Omega)$:Módulo complexo de cisalhamento.
 $G_r(\Omega)$:Parte real do módulo de cisalhamento. É a parte responsável pelo armazenamento da energia.
 $G_i(\Omega)$:Parte imaginária do módulo de cisalhamento. Representa o poder de dissipação interna da energia mecânica do movimento.

Uma outra forma de escrever o módulo de cisalhamento é:

$$\bar{G}(\Omega) = G_r(\Omega)(1 + i\eta_G(\Omega)), \quad (2.51)$$

ou simplesmente eliminando o índice r:

$$\bar{G}(\Omega) = G(\Omega)(1 + i\eta_G(\Omega)), \quad (2.52)$$

$$\text{Onde } \eta_G(\Omega) = \frac{G_i(\Omega)}{G_r(\Omega)}, \quad (2.53)$$

é denominado fator de perda. Está implícito neste modelo que o módulo de cisalhamento e o fator de perda dependem da temperatura, além da frequência

Em analogia com o visto acima, pode-se também escrever para o módulo de Young:

$$\bar{E}(\Omega) = E(\Omega)(1 + i\eta_E(\Omega)) \quad (2.54)$$

Geralmente, o símbolo que representa a temperatura será omitido por simplicidade de notação. Segundo Snowdon (1968), para elastômeros em geral, tem-se a seguinte aproximação:

$$\eta_E(\Omega) = \eta_G(\Omega) \quad (2.55)$$

2.6 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS: DEPENDÊNCIA DA FREQUENCIA E TEMPERATURA.

O módulo dinâmico de cisalhamento dos materiais viscoelásticos, em geral, aumenta com a frequência e diminui com o aumento da temperatura. Na figura 2.5 (SNOWDON, 1968, NASHIF, JONES, HENDERSON, 1985), destacam-se tres regiões, podendo-se estender por várias décadas de a frequência. Na primeira região, o material viscoelástico tem um comportamento resiliente, adequado para aplicações em isoladores de vibração. Na segunda região, o módulo de elasticidade aumenta consideravelmente até atingir um patamar (terceira região), a partir da qual se mantém aproximadamente constante. Nesta região (terceira) o material tem uma característica vítrea. Na segunda zona, o fator de perda sobe até um máximo, reduzindo o seu valor a um mínimo, na terceira zona. Esta segunda região, chamada zona de transição, é adequada para a construção de neutralizadores, bem como estruturas compostas.

O comportamento do material viscoelástico com a temperatura, segue um curso similar àquele descrito acima, como mostra a figura 2.6

Devido à dependência do módulo de elasticidade com a frequência, a matriz de rigidez de uma estrutura composta metal/elastômero também será dependente da frequência. Esta matriz de rigidez será anotada como $\mathbf{K}(\Omega)$.

Para tais estruturas, por analogia com a equação 2.7, as equações diferenciais serão dadas por 2.56:

$$\left(-\Omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}(\Omega)\right)\mathbf{Q}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega) \quad (2.56)$$

A construção de $\mathbf{K}(\Omega)$, bem como a solução de 2.56, no domínio da frequência, será a maior preocupação deste trabalho. Esta solução pressupõe a resolução do problema de autovalores associado

$$\mathbf{K}(\Omega)\phi(\Omega) = \sigma(\Omega)\mathbf{M}\phi(\Omega) \quad (2.57)$$

Esta solução também será objeto deste trabalho. No capítulo III a solução de 2.57 será abordada por um método original

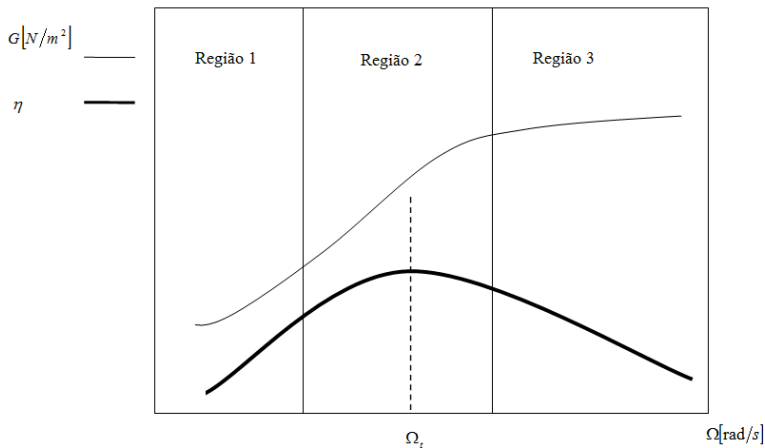


FIGURA 2.5. Variação das características de um material viscoelástico com a frequência a temperatura constante.

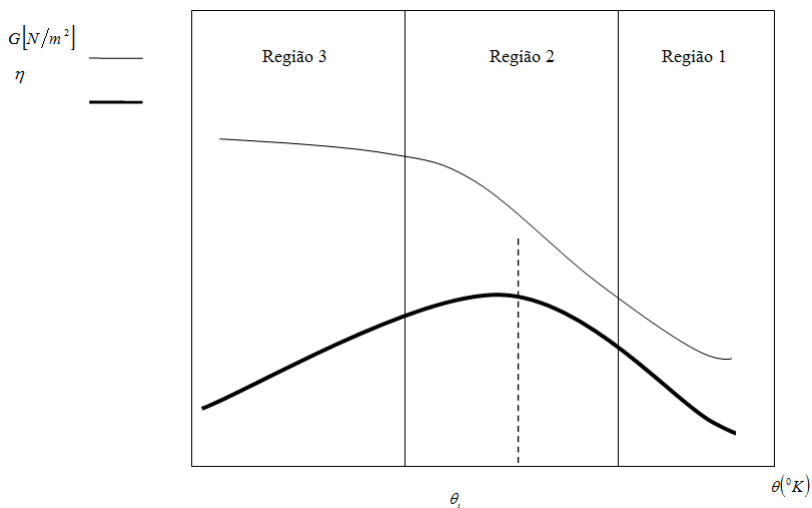


FIGURA 2.6. Variação das características com a temperatura a frequência constante.

3. MODELAGEM DE ESTRUTURAS COMPOSTAS TIPO METAL/ELASTÔMERO

3.1 GENERALIDADES

O objetivo deste trabalho é apresentar uma teoria o mais completa possível. De igual forma, os resultados desta tese podem ser empregados em quaisquer outros sistemas dinâmicos que apresentem dependência da frequência nos seus comportamentos.

Embora a metodologia principal para o modelagem de este tipo estruturas seja o método dos elementos finitos, os resultados de este trabalho podem ser utilizados em conjunto a técnicas tais como, o método de elementos de contorno, matrizes de transferência, etc. Naturalmente, ao modificar o método, algumas adaptações devem ser consideradas para cada caso em particular.

Este método esta baseado no teorema da expansão truncada, o qual é apresentado detalhadamente no apêndice A. Basicamente consiste em reduzir o tamanho do problema principal empregando uma série adequada de transformações. A principal transformação é uma projeção da matriz de rigidez em um sub – espaço aproximado que permite mudar a ordem original n do problema de autovalores por um de tamanho menor \hat{n} , onde $\hat{n} \ll n$. A qualidade desta aproximação será discutida no final deste capítulo.

Deve-se considerar que a principal vantagem de este método consiste em que a matriz de rigidez $\mathbf{K}(\Omega)$, não é decomposta como nos

casos das técnicas mais usadas na literatura (LACZOS, 1950; BATHE, 1982).

3.2 DINÂMICA DE SISTEMAS DE GRANDE PORTE COM PARÂMETROS DEPENDENTES DA FREQUÊNCIA

Nos métodos conhecidos, de alguma forma, explícita ou implícita, requer-se a decomposição da matriz de rigidez. Basta somente observar as equações no algoritmo de Lanczos, ou as características do método de iteração de subespaço. A inversão, ou decomposição, de uma matriz de rigidez dependente da frequência demanda um elevado esforço computacional. É preferível aproveitar as propriedades de ortogonalidade dos autovetores e evitar tais operações. Inicialmente considere-se a equação de movimento do sistema e seu problema de autovalores associado:

$$\left[-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}(\Omega) \right] \mathbf{Q}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{K}(\Omega) \phi(\Omega) = \sigma(\Omega) \mathbf{M} \phi(\Omega) \quad (3.2)$$

onde

$\mathbf{K}(\Omega)$:	é a matriz de rigidez dependente da frequência,
\mathbf{M}	:	é a matriz de massa,
$\sigma(\Omega)$:	é um autovalor associado uma frequência natural,
$\phi(\Omega)$:	é um autovetor associado aos modos de vibração.

Note-se que tanto $\sigma(\Omega)$ quanto $\phi(\Omega)$ são dependentes da frequência.

Considerando a ordem elevada das matrizes, a resolução direta do problema de autovalores (3.2) para cada frequência, usando subrotinas padrões, é um trabalho excessivo e ineficiente. Por tanto utilizar-se-á o seguinte algoritmo.

1. O problema inicial de autovalores é (ver 3.2)

$$\mathbf{K}(\Omega)\phi(\Omega) = \mathbf{M}\phi(\Omega)\sigma(\Omega) \quad \text{da ordem } n \times n. \quad (3.3)$$

2. Define-se $\Psi(\Omega)$ tal que

$$\Phi(\Omega) = \hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) \quad (3.4)$$

Onde $\hat{\Phi}_0$ é a matriz modal da ordem $(n \times \hat{n})$ formada pelos autovetores associados aos menores autovalores $(\hat{n} \ll n)$. A matriz modal $\hat{\Phi}_0$ resulta de resolver o problema de autovalores generalizados para uma frequência fixa Ω_0

$$\mathbf{K}(\Omega_0)\phi_0 = \sigma_0 \mathbf{M}\phi_0, \quad (3.5)$$

A resolução do problema (3.5) foi realizada mediante um algoritmo QR adaptado para os requerimentos, obtido da biblioteca de programas NETLIB. A matriz modal formada pelos autovetores ortonormalizados possui as seguintes propriedades

$$\hat{\Phi}_0^T \mathbf{M} \hat{\Phi}_0 = \mathbf{I}_{\hat{n}} \quad (3.6)$$

$$\hat{\Phi}_0^T \mathbf{K}(\Omega_0) \hat{\Phi}_0 = \Sigma_0 \quad (3.7)$$

Onde

$\mathbf{I}_{\hat{n}}$:Matriz identidade da ordem $(\hat{n} \times \hat{n})$.

$\Sigma_0 = \text{diag}(\sigma_0)$:Matriz formada pelos menores autovalores do problema inicial, da ordem $(\hat{n} \times \hat{n})$.

Logo a equação 3.3 pode ser expressada como

$$\mathbf{K}(\Omega)\hat{\Phi}_0\Psi(\Omega) = \mathbf{M}\hat{\Phi}_0\Psi(\Omega) \quad (3.8)$$

3. Pre multiplicando por $\hat{\Phi}_0^T$

$$\hat{\Phi}_0^T\mathbf{K}(\Omega)\hat{\Phi}_0\Psi(\Omega) = \left(\hat{\Phi}_0^T\mathbf{M}\hat{\Phi}_0\right)\Psi(\Omega)\Lambda(\Omega) \quad (3.9)$$

ou

$$\Sigma(\Omega)\Psi(\Omega) = \Psi(\Omega)\Lambda(\Omega) \quad (3.10)$$

A matriz $\Sigma(\Omega)$ da ordem $(\hat{n} \times \hat{n})$ não é estritamente diagonal, então resolve-se um novo problema de autovalores, para qualquer frequência $\Omega \neq \Omega_0$

$$\Sigma(\Omega)\psi(\Omega) = \lambda(\Omega)\psi(\Omega) \quad (3.11)$$

e se têm

$$\Psi(\Omega)^T\Psi(\Omega) = \mathbf{I} \quad (3.12)$$

$$\Psi(\Omega)^T\Sigma(\Omega)\Psi(\Omega) = \Lambda(\Omega) \quad (3.13)$$

$$\Lambda(\Omega) = \text{diag}(\lambda_j(\Omega)) \quad (3.14)$$

A solução do problema (3.8) requer um mínimo de esforço computacional, já que a matriz $\Sigma(\Omega)$ é pequena.

4. Sejam as transformações

$$\mathbf{Q}(\Omega) = \hat{\Phi}_0\mathbf{Y}(\Omega), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{Y}(\Omega) = \Psi(\Omega)\mathbf{P}(\Omega). \quad (3.16)$$

Aplicando (3.16) e (3.17) na equação de movimento (3.1) obtêm-se:

$$\left[-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}(\Omega)\right] \hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega) \quad (3.17)$$

Pré multiplicando (3.14) por $\left(\Psi(\Omega)^T \hat{\Phi}_0^T\right)$

$$\left[-\Omega^2 \mathbf{I} + \Lambda(\Omega)\right] \mathbf{P}(\Omega) = \left(\Psi(\Omega)^T \hat{\Phi}_0^T\right) \mathbf{F}(\Omega). \quad (3.18)$$

Logo

$$\mathbf{P}(\Omega) = \left[-\Omega^2 \mathbf{I} + \Lambda(\Omega)\right]^{-1} \left(\Psi(\Omega)^T \hat{\Phi}_0^T\right) \mathbf{F}(\Omega) \quad (3.19)$$

Finalmente, substituindo (3.20) em (3.16) e o resultado em (3.17), tem-se

$$\mathbf{Q}(\Omega) = \hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) \left[-\Omega^2 \mathbf{I} + \Lambda(\Omega)\right]^{-1} \Psi(\Omega)^T \hat{\Phi}_0^T \mathbf{F}(\Omega) \quad (3.20)$$

ou

$$\mathbf{Q}(\Omega) = \hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) \left[-\Omega^2 \mathbf{I} + \Lambda(\Omega)\right]^{-1} \left(\hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega)\right)^T \mathbf{F}(\Omega). \quad (3.21)$$

A matriz de receptância será:

$$\alpha(\Omega) = \hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) \left[-\Omega^2 \mathbf{I} + \Lambda(\Omega)\right]^{-1} \left(\hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega)\right)^T. \quad (3.22)$$

Chamando

$$\mathbf{S}(\Omega) = \hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) \quad (3.23)$$

tem-se,

$$\alpha(\Omega) = \mathbf{S}(\Omega) \left[-\Omega^2 \mathbf{I} + \Lambda(\Omega)\right]^{-1} \mathbf{S}(\Omega)^T. \quad (3.24)$$

Um elemento genérico de $\alpha(\Omega)$ será dado por (3.24)

$$\alpha(\Omega)_{ks} = \sum_{j=1}^{\hat{n}} \frac{S_{kj}(\Omega)S_{sj}(\Omega)}{-\Omega^2 + \lambda_j(\Omega)}. \quad (3.25)$$

Onde $\lambda_j(\Omega)$ pode ser considerado como uma aproximação de $\sigma_j(\Omega)$.

$$\lambda_j(\Omega) \cong \sigma_j(\Omega) \quad (3.26)$$

Ao se utilizar os autovetores $\hat{\Phi}_0$ associados aos menores autovalores, cria-se uma matriz $\Sigma(\Omega)$, que pode ser assumida como a projeção da matriz de rigidez em um sub – espaço aproximado do espaço formado pelos autovetores verdadeiros do problema de autovalores, para essa frequência específica. Porém a qualidade da aproximação depende do subespaço, o $span\{\phi_{01} \dots \phi_{0\hat{n}}\}$.

A matriz $\Sigma(\Omega)$ é de ordem $\hat{n} \times \hat{n}$, portanto pequena. O problema não é oneroso do ponto de vista computacional. O problema de autovalores inicial (Eq. 3.2) é o único de grande dimensão a ser resolvido, porém para uma única frequência. Consegue-se então um considerável aumento na eficiência e uma notável diminuição no tempo computacional.

Do que se viu anteriormente, um ponto vital para a montagem do problema de autovalores 2.55 e para a obtenção da solução (3.24) é a construção da matriz de rigidez $\mathbf{K}(\Omega)$. Esta construção é feita, para cada frequência, pelo método dos elementos finitos.

Se $\mathbf{K}(\Omega)$ for muito grande, entretanto, ela poderá ser computada para várias frequências, através da expansão em série de Taylor, em torno da frequência de transição Ω_t :

$$\mathbf{K}(\Omega) = \sum_{m=0}^M \frac{\mathbf{K}^{(m)}(\Omega_t)}{m!} (\Omega - \Omega_t)^m \quad (3.27)$$

onde

$$\mathbf{K}^{(m)}(\Omega) = \frac{d^m \mathbf{K}(\Omega)}{d\Omega^m} \quad (3.28)$$

As derivadas $\mathbf{K}^{(m)}(\Omega_i)$ podem ser computadas sem elevado custo, devido ao fato que somente as matrizes elementares de rigidez da parte viscoelástica são realmente dependentes da frequência.

Por outro lado, as derivadas da matriz de rigidez para a parte metálica, i.e. as matrizes elementares da parte metálica, não dependem da frequência e por tanto são nulas.

A expansão em série de Taylor da matriz de rigidez, em torno da frequência de transição, não foi completamente explorada, levándose uma expansão para $M = 3$. Não obstante os resultados numa banda pequena em torno à frequência de transição, são bastante exatos.

3.3 DISCUSSÃO

A qualidade do método apresentado, i.e. da aproximação, depende do subespaço, o $span\{\phi_{01}, \dots, \phi_{0n}\}$. Os fatores que determinam o comportamento são:

- A dimensão do subespaço \hat{n} , se esta é maior a aproximação será mais exata.
- A variação do módulo de cisalhamento complexo $\bar{G}(\Omega, \theta)$ do material viscoelástico, em função da frequência e da temperatura. Se pode esperar que na zona de transição os erros sejam maiores.
- Como resultado do visto no ponto anterior, distancia entre os subespaço gerado pela matriz modal truncada $\hat{\Phi}_0$, e o espaço gerado pela matriz modal do problema original $\Phi(\Omega)$, aumenta.

Obviamente, isto implica que a frequência inicial Ω_0 possui um papel importante neste ponto, as diferenças entre $\mathbf{K}(\Omega_0)$ e $\mathbf{K}(\Omega)$ aumentam com as mudanças de temperatura.

4. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

4.1 INTRODUÇÃO

Para ilustrar a teoria da seção 3.2, toma-se uma viga metal/elastômero tipo sanduíche em balanço. Os resultados numéricos sob a forma de função resposta em frequência FRF (inertância), serão comparadas com outras obtidas experimentalmente. Uma descrição dos procedimentos será feita adiante. A inertância é igual à receptância (expressão 3.22) multiplicada por $-\Omega^2$ e representa a aceleração na coordenada q_k por unidade de força aplicada na coordenada q_s . Essa comparação é feita, necessariamente, no domínio da frequência.

4.2 DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA DE EXEMPLO

Uma viga sanduíche, composta de duas partes metálicas e um núcleo elastomérico, foi dividida em 114 elementos sólidos 2D, quadráticos, lagrangeanos de nove nós, num estado plano de tensões, o que dá um total de 507 nós, com 2 graus de liberdade por nó, totalizando 1014 graus de liberdade.

No comprimento serão utilizados 19 elementos e na espessura das partes metálicas e viscoelástica, 2 elementos por camada (ver figura 4.1). Tal configuração foi escolhida por duas razões: a divisão em 19 elementos garante a determinação dos primeiros quatro modos dentro da faixa de frequência usada. Por outro lado, dois elementos por camada representam eficientemente o cisalhamento interno do material viscoelástico, que é o principal responsável pela dissipação da energia vibrante. Os deslocamentos foram restritos nos primeiros treze nós, simulando um engaste perfeito.

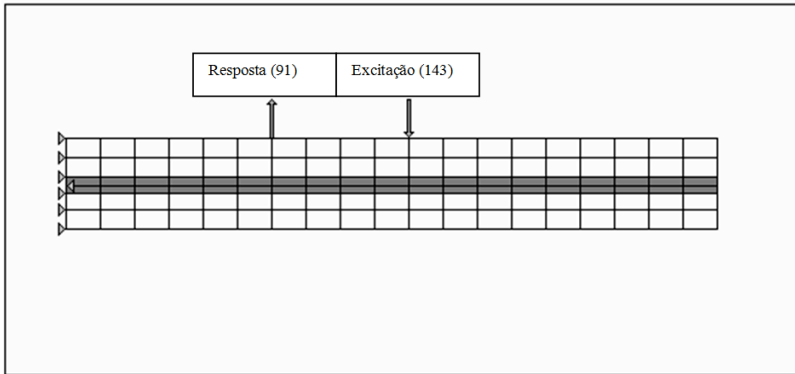


FIGURA 4.1. Modelo de Elementos Finitos Viga Sanduíche

4.3 DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO

Para validar os resultados numéricos obtidos como explicado acima, estes foram comparados com FRF obtidas experimentalmente. A viga sanduíche, como explicado anteriormente, consta de duas lâminas metálicas de aço 1020 e um material viscoelástico fabricado por Soundcoat modelo DYAD 601, cujas características foram medidas no Laboratório de Vibrações e Acústica por Carlos Bavastri (1997). Essas características são o fator de perda e o módulo de cisalhamento em função da frequência e da temperatura.

As lâminas metálicas foram retificadas nas instalações da UFSC (setor de máquinas ferramentas) e suas dimensões são especificadas abaixo (figura 4.2).

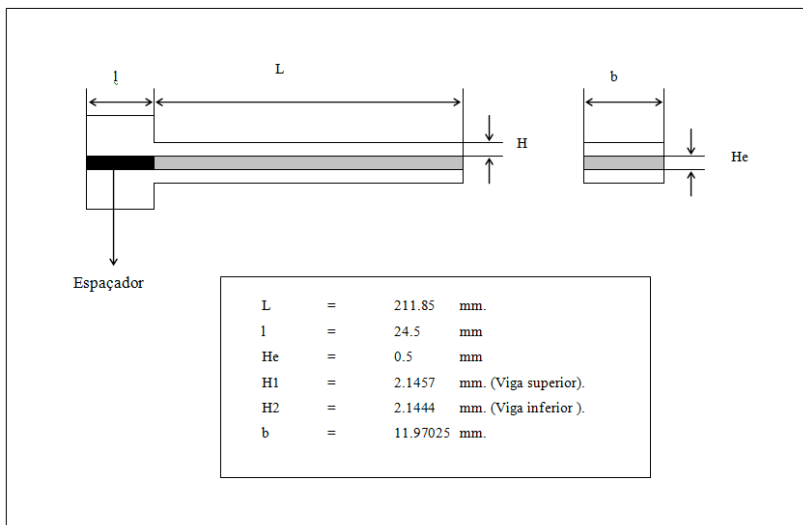


FIGURA 4.2. Viga Sanduíche

O material viscoelástico, disposto em fitas, foi cortado em uma largura igual às laminas metálicas e coladas com cola estrutural epóxica. A cura foi acelerada com calor, com a ajuda da câmara de climatização, a uma temperatura de 50 graus Celsius. Cuidados foram tomados para que a colagem não ficasse distorcida nem com vazios. Para isto, grampos foram colocados ao longo da viga. As dimensões das lâminas metálicas e a espessura da cola, comparadas com o material viscoelástico, estão dentro dos limites aceito pela norma ASTM E 756-93. As vigas foram confeccionadas de forma artesanal.

A cadeia de medição está esquematizada na figura 4.3. Um “software” faz a comunicação entre uma placa HPIB e o analisador de Fourier HP 3567A de dois (2) canais, permitindo uma fácil manipulação do ensaio e também, ampla variedade de análises e excitações. A viga engastada - livre é colocada em uma câmara de climatização (-30 a 60

graus centígrados) com precisão de ± 1 grau, onde são feitas as medições.

A excitação é feita por meio de um atuador eletromagnético MM 0002 fabricado por Brüel & Kjaer, com uma faixa de frequência útil de 0 a 2000 Hz. Embora seja comumente usado como um transdutor de velocidade, se colocado muito perto da superfície metálica a relação entre a voltagem de entrada e a força aplicada à viga sanduíche é linear. A relação entre estes parâmetros estão indicados nas características técnicas fornecidas pelo fabricante. O transdutor de resposta é um acelerômetro Brüel & Kjaer 4375 colocado próximo ao engaste para minimizar influências da massa do mesmo nas características dinâmicas da viga sanduíche.

A excitação adotada foi um sinal Chirp de 0 a 1600 Hz, devido as limitações em frequência do excitador eletromagnético. O motivo de adotar o sinal Chirp deve-se aos seguintes motivos:

- a. A repetitividade nas medições, o que permite calcular as densidades espectrais de potência e cruzada, para determinar a inércia.
- b. A curta duração do sinal no tempo minimiza a mudança de temperatura no elastômero. Como as características deste tipo de materiais depende da temperatura, evitar tais variações é fundamental.

Este sinal é amplificada por um amplificador de potência tipo 2706 da Brüel & Kjaer. A saída do amplificador vai tanto para o canal 1 do analisador quanto para o atuador eletromagnético que se encontra no extremo livre da viga (excitador). Assim, a comparação entre as FRF experimentais e as obtidas numericamente, será feita a menos um fator de escala. Na viga sanduíche, a resposta em frequência foi medida para diferentes temperaturas a partir de - 30 até 60 graus Celcius com um intervalo de $10^{\circ}C$.

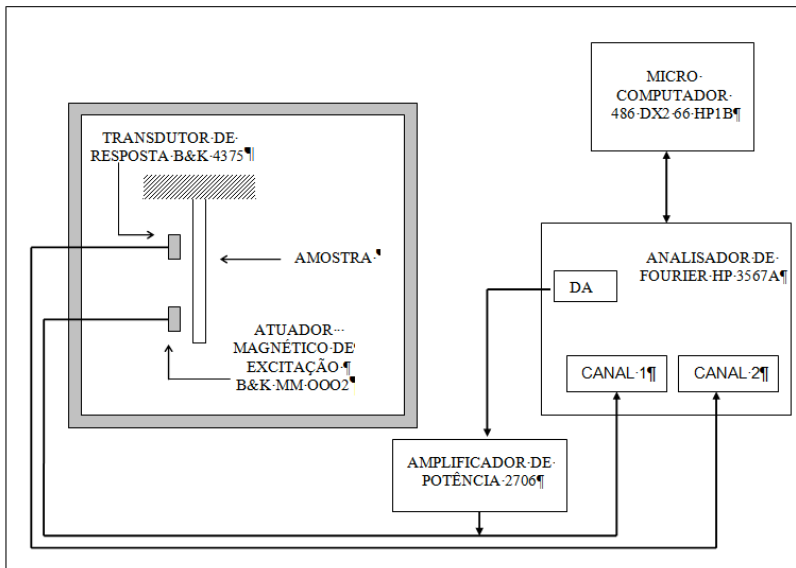


FIGURA 4.3. Cadeia experimental.

4.4 EQUAÇÕES DO MODELO DA VIGA SANDUÍCHE USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

4.4.1 RELAÇÕES CONSTITUTIVA E CINEMÁTICA

A relação constitutiva para um corpo sólido submetido a um estado plano de tensões é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, t), \quad (4.1)$$

e a relação cinemática que define as deformações é:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, t) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u}(x, y, t) + \nabla^T \mathbf{u}(x, y, t) \right) \quad (4.2)$$

Onde

$\sigma(x, y, t)$:	Tensões.
$\varepsilon(x, y, t)$:	Deformações.
$\mathbf{u}(x, y, t)$:	Deslocamentos.
\mathbf{C}	:	Matriz de Coeficientes Elásticos.

$$\mathbf{C} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

com

E	:	Módulo de Young.
h	:	Espessura.
ν	:	Coefficiente de Poisson.

Os vetores formados pelas tensões e deformações são dados por:

$$\sigma(x, y, t) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}(x, y, t) \\ \sigma_{yy}(x, y, t) \\ \sigma_{xy}(x, y, t) \end{Bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\varepsilon(x, y, t) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y, t) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, t) \\ \varepsilon_{xy}(x, y, t) + \varepsilon_{yx}(x, y, t) \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

finalmente a última componente não nulo das deformações é calculada pela equação:

$$\varepsilon_{zz}(x, y, t) = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx}(x, y, t) + \sigma_{yy}(x, y, t)) \quad (4.6)$$

4.4.2 ENERGIAS CINÉTICA E POTENCIAL

A energia cinética é determinada pela seguinte equação:

$$T = \frac{1}{2} \iint h \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad dx dy, \quad (4.7)$$

onde ρ representa a densidade superficial do corpo.

A energia potencial de deformação elástica é determinada pela equação 4.7. Para propósitos de simplificação omite-se a dependência do espaço e do tempo neste segmento. Além disso omite-se a dependência da frequência e da temperatura para o material viscoelástico.

$$V = \frac{1}{2} \iint \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad dx dy \quad (4.8)$$

4.4.3 FUNÇÕES DE FORMA E MAPEAMENTO

Considere-se inicialmente um único elemento lagrangiano padrão de nove nós. As funções de forma são dadas por:

$$\varphi_1(r, s) = \frac{1}{4} [r(r-1)] [s(s-1)] \quad (4.9)$$

$$\varphi_2(r, s) = \frac{1}{2} [1-r^2] [s(s-1)] \quad (4.10)$$

$$\varphi_3(r, s) = \frac{1}{4} [r(r+1)] [s(s-1)] \quad (4.11)$$

$$\varphi_4(r, s) = \frac{1}{2} [r(r-1)] [1-s^2] \quad (4.12)$$

$$\varphi_5(r, s) = [1-r^2][1-s^2] \quad (4.13)$$

$$\varphi_6(r, s) = \frac{1}{2}[r(r+1)][1-s^2] \quad (4.14)$$

$$\varphi_7(r, s) = \frac{1}{4}[r(r-1)][s(s+1)] \quad (4.15)$$

$$\varphi_8(r, s) = \frac{1}{2}[1-r^2][s(s+1)] \quad (4.16)$$

$$\varphi_9(r, s) = \frac{1}{4}[r(r+1)][s(s+1)] \quad (4.17)$$

O mapeamento desde as coordenadas padrão às coordenadas físicas é dado por:

$$x(r, s) = \sum_{i=1}^9 x_i \phi_i(r, s), \quad (4.18)$$

$$y(r, s) = \sum_{i=1}^9 y_i \phi_i(r, s), \quad (4.19)$$

onde x_i e y_i são as coordenadas dos nós do elemento.

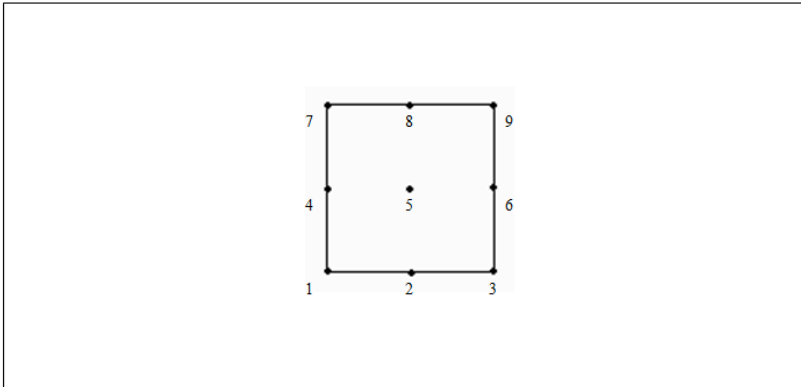


FIGURA 4.4. Elemento Lagrangeano - 9 nós.

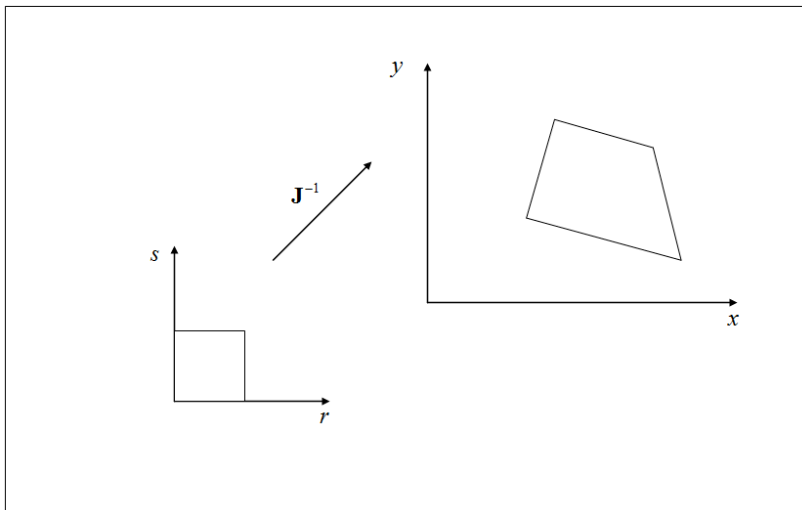


FIGURA 4.5 Mapeamento

Logo o operador divergência pode ser facilmente calculado como:

$$\nabla_{xy} = \mathbf{J}^{-1} \nabla_{rs} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Onde

- ∇_{xy} : Divergência nas coordenadas físicas.
- ∇_{rs} : Divergência nas coordenadas padrão.
- \mathbf{J} : Jacobiano da transformação.

$$\nabla_{xy} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \nabla_{rs} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

4.4.4 CÁLCULO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ E MASSA

Considerando-se apenas um elemento finito genérico, os deslocamentos podem ser expressos aproximadamente como:

$$\mathbf{u}^e(x, y, t) \approx \mathbf{N}(x(r, s), y(r, s)) \mathbf{U}(t), \quad (4.23)$$

onde

$$\mathbf{U} = \left[u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}, u_{2y}, \quad \dots, \quad u_{9x}, u_{9y} \right]^T e^{i\Omega t}, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & \varphi_9 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & \dots & 0 & \varphi_9 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

u_{ix}, u_{iy} : Amplitudes de deslocamentos nodais

A deformação fica:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \approx \mathbf{D}\mathbf{N}\mathbf{U} = \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad (4.26)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N}, \quad (4.27)$$

onde \mathbf{D} é definido como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

A energia cinética e potencial do elemento são expressos finalmente como:

$$T^e = \frac{1}{2} \iint h \rho \mathbf{N} \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{N} \dot{\mathbf{U}} \det \mathbf{J} \, dr \, ds, \quad (4.29)$$

$$V^e = \frac{1}{2} \iint \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \mathbf{U} \det \mathbf{J} \, dr \, ds. \quad (4.30)$$

Usando as equações de lagrange pode-se obter a equação de movimento para o elemento

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{U}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (4.31)$$

Logo obtemos as matrizes de rigidez e massa elementares como:

$$\mathbf{M}^e = \iint h \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det \mathbf{J} \, dr \, ds \quad (4.32)$$

$$\mathbf{K}^e = \iint \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det \mathbf{J} \, dr \, ds \quad (4.33)$$

4.4.5 CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS

Os elementos usados na análise são sólidos 2D lagrangianos de 9 nós, os quais tem-se demonstrado como muito eficientes na modelagem destas estruturas. Tem-se que levar em conta uma série de considerações adicionais:

Primeiro, a massa de sintonia m_C e a base ou massa central m_B influem não somente na inércia do sistemas, mas na rigidez também, mas como nosso interesse está focalizado nos modos mais baixos, sua discretização não será tão intensa.

Segundo, os deslocamentos serão restringidos na direção x , no eixo de simetria do neutralizador, simulando a sujeição ao cabo da linha de transmissão. Os únicos deslocamentos considerados na análise são os verticais, produto do movimento do cabo.

Terceiro, um esquema de diagonalização da matriz de massa do tipo HRZ (HUGHES, 1987), será tomado, o motivo principal é facilitar a resolução do problema de autovalores. assim como facilitar a convergência do problema. Embora não existem efeitos interessantes na exatidão dos resultados, a diagonalização facilita a reatuação do problema de autovalores para a frequência Ω_0 .

Finalmente, no caso do neutralizador tipo Stockbridge, um dos nós dentro do eixo de simetria do neutralizador será escolhido como nó de controle no qual, idealmente, a força de excitação será aplicada.

4.4. RESULTADOS EXPERIMENTAIS : FUNÇÕES RESPOSTA DE FREQUÊNCIA

Os resultados comparativos são apresentados nas figuras 4.4 a 4.13. Várias temperaturas foram consideradas, ja que o nucleo tem módulo de elasticidade e fator de perda dependentete desta grandeza (além da frequência). Note-se que o comportamento das curvas obtidas numericamente segue bem de perto aquele das experimentais.

Entretanto, as frequências naturais, obtidas numericamente, são sistematicamente menores do que as experimentais em promedio de 8%. Teoricamente, esperava-se o contrario, i.e. um erro menor. Tal discordância, entretanto, não pode invalidar o modelo numérico aqui criado e testado. Os erros entre os resultados teóricos e experimentais são causados por:

- Dadas as pequenas dimensões da “estrutura” aqui testada, pequenos erros dimensionais, principalmente nas espessuras das partes metálicas e da elastomérica, podem ter produzido tais discrepâncias.
- Medições de pequenos modelos em câmaras de temperatura são, em geral, acompanhadas de consideráveis incertezas. Estes erros são importantes quando as temperaturas da câmara estão na região de transição, onde pequenas variações de temperatura causam grandes variações nas propriedades do material viscoelástico.
- Um terceiro fator é causado pela humidade a qual não estava controlada na câmara no momento das medições. O efeito ve-se refletido no ruído nas curvas experimentais.
- Por último, as limitações próprias do método descrito no capítulo III, causam um erro sistemático, o qual aumenta consideravelmente em baixas temperaturas.

Na última análise e de um modo geral, os resultados numéricos podem ser encorajadores.

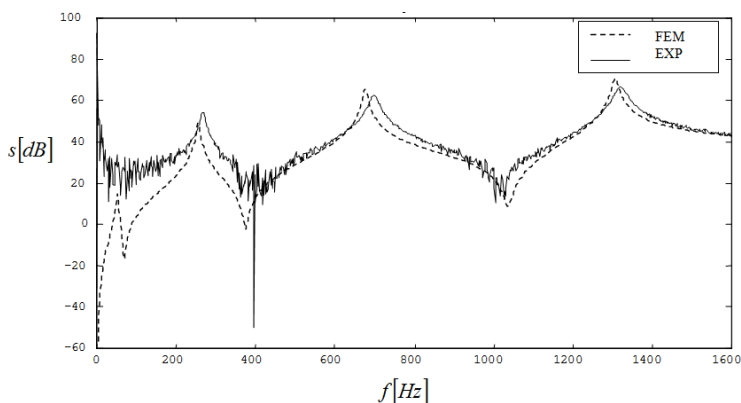


FIGURA 4.6. FRF Inertância. Viga composta 60 °C.

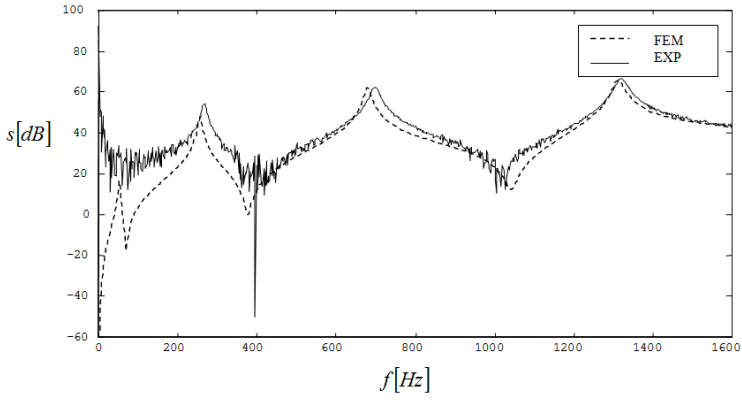


FIGURA 4.7. FRF Inertância. Viga composta 50 °C.

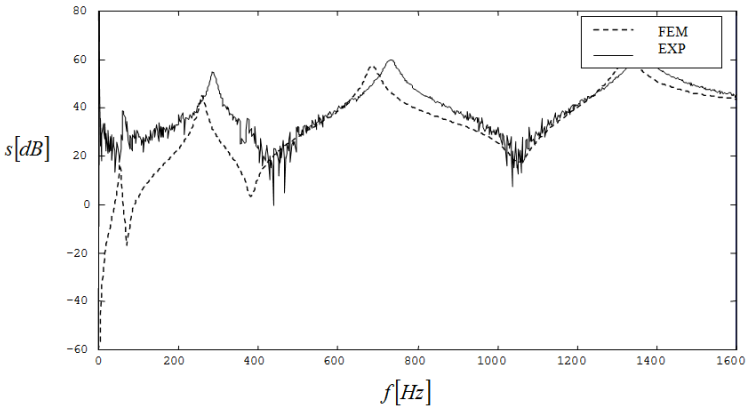


FIGURA 4.8. FRF Inertância. Viga composta 40 °C.

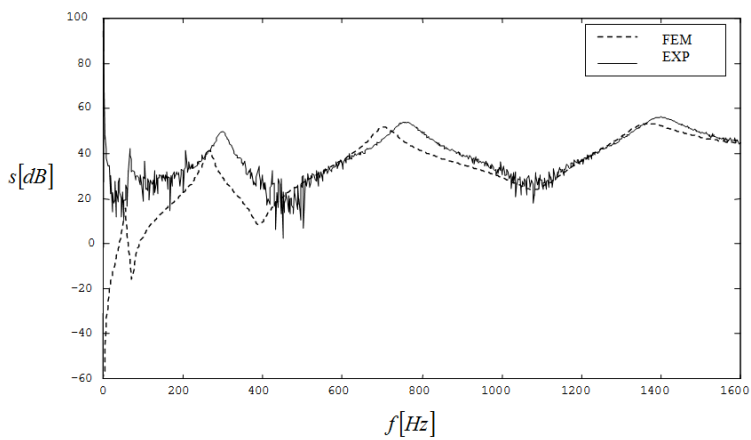


FIGURA 4.9. FRF Inertância. Viga composta 30 °C.

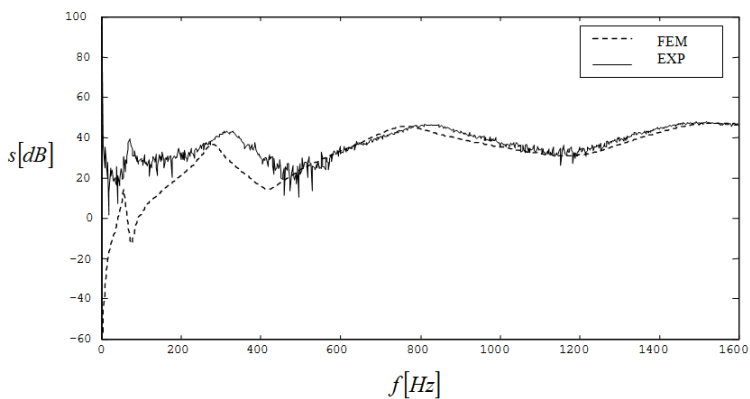


FIGURA 4.10. FRF Inertância. Viga composta 20 °C.

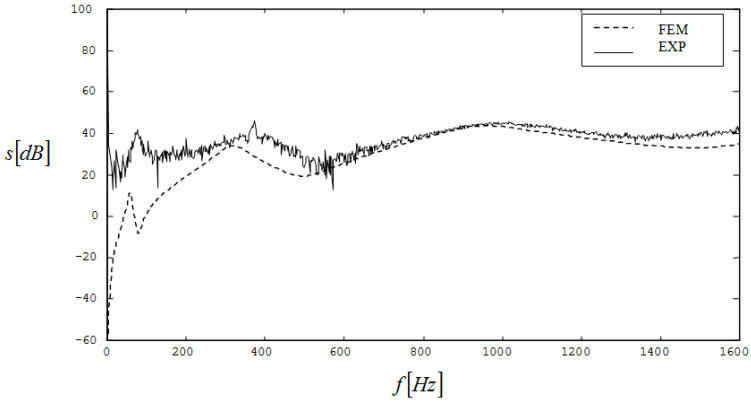


FIGURA 4.11. FRF Inertância. Viga composta 10 °C.

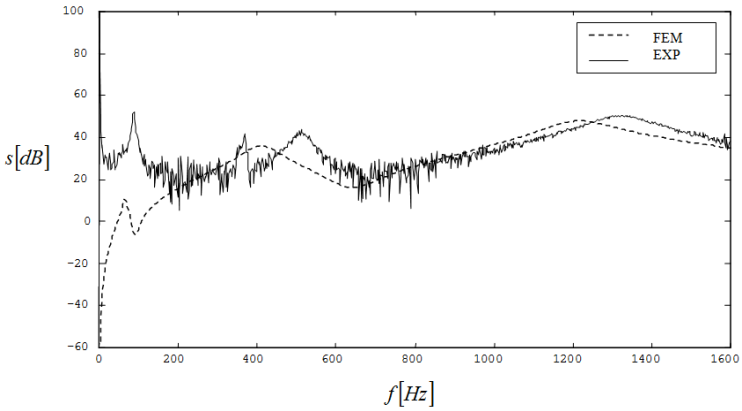


FIGURA 4.12. FRF Inertância. Viga composta 0 °C.

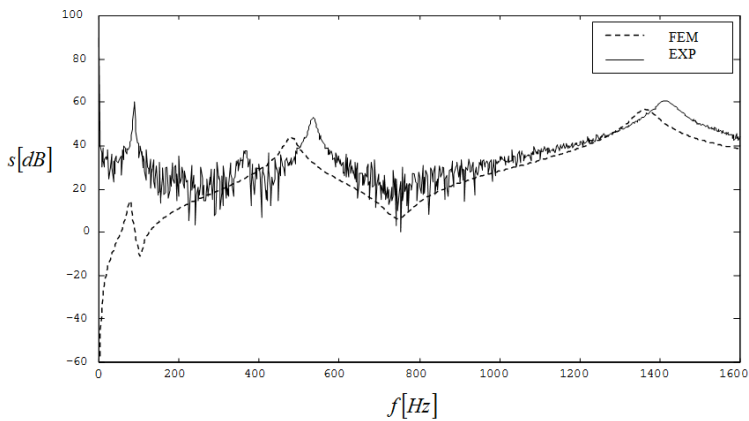


FIGURA 4.13. FRF Inertância. Viga composta -10 °C.

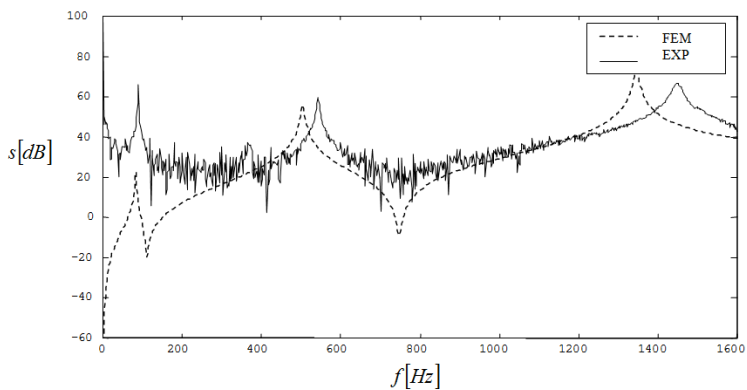


FIGURA 4.14. FRF Inertância. Viga composta -20 °C.

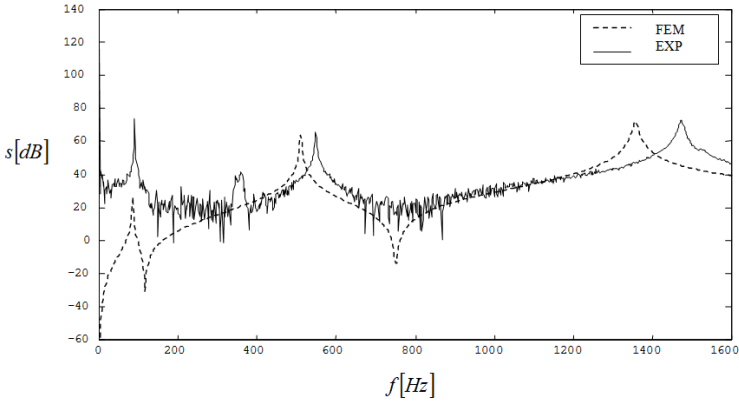


FIGURA 4.15. FRF Inertância. Viga composta -30 °C.

4.5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS : AVALIAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS NÃO AMORTECIDAS E FATORES DE PERDA MODAIS

4.5.1 FREQUÊNCIAS NATURAIS

Como foi estabelecido nos parágrafos anteriores deste trabalho, o problema de autovalores, aqui tratado, é dependente da frequência. Portanto os parâmetros modais também o são. Isto pode ser expresso matematicamente como (ver 2.36):

$$\lambda_j(\Omega) = \Omega_j(\Omega)^2 (1 + i\eta_j(\Omega)) \quad (4.34)$$

Logo, considerando a parte real apenas, as frequências naturais podem ser calculadas a partir da equação:

$$\Omega_j(\Omega) = \Omega \quad (4.32)$$

A solução da equação 4.2 pode ser, convenientemente obtida de forma numérica e representada graficamente em uma espécie de diagrama de Campbell. Os digramas de Campbell são bastante usados em dinâmica de rotores, onde as freqüências naturais dependem da freqüência de rotação, devido ao efeito giroscópico (VANICE 1988). Esta é a ideia que se deseja aplicar aqui. Na solução numérica da equação 3.8, para cada freqüência Ω obtém-se os autovalores λ_j , $j = 1, 2, \dots$ e, conseqüentemente, $\Omega_j(\Omega)$, $j = 1, 2, \dots$. Sempre que a equação 4.2 for satisfeita, tem-se uma freqüência natural da estrutura composta. Isto é mostrado nas figuras que vão de 4.14 a 4.23 para várias temperaturas. A tabela 4.1 mostra as freqüências naturais da viga sanduíche, obtidas pela equação 4.2. Na zona de transição ($-10^0 C < \theta < 20^0 C$) nota-se claramente o efeito de aumento da rigidez do nucleo elastomérico nas freqüências naturais. De fato, a quarta freqüência subiu tanto que ficou fora da banda de freqüências considerada.

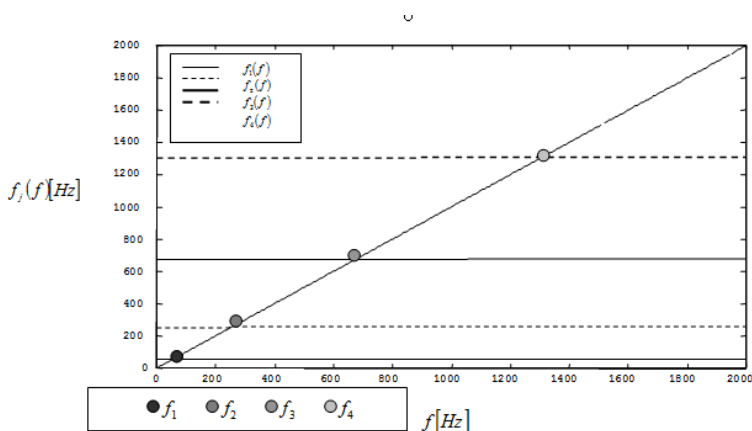


FIGURA 4.16. FRF Diagrama de Campbell. Viga composta 60 °C.

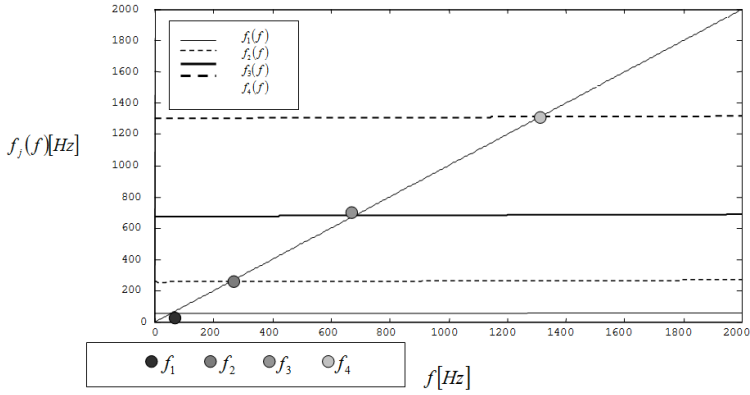


FIGURA 4.17. FRF Diagrama de Campbell. Viga composta 50 °C.

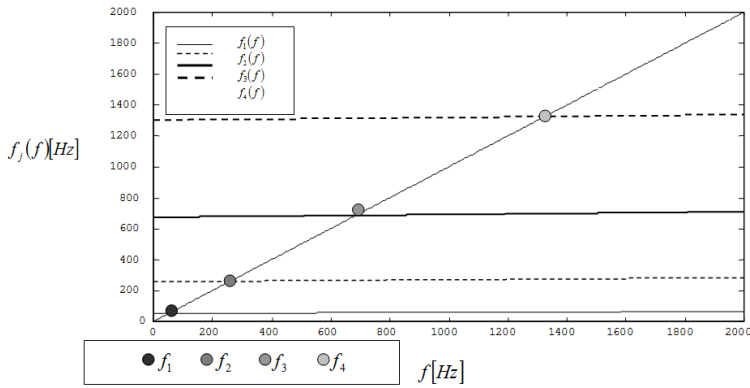


FIGURA 4.18. FRF Diagrama de Campbell. Viga composta 40 °C.

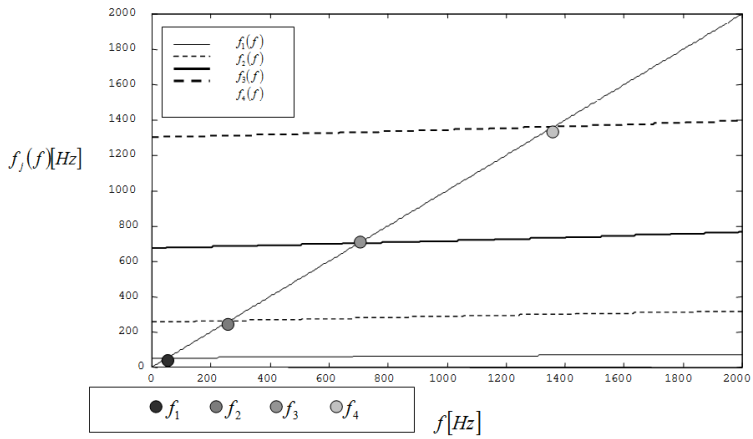


FIGURA 4.19. FRF Diagrama de Campbell. Viga composta 30 °C.

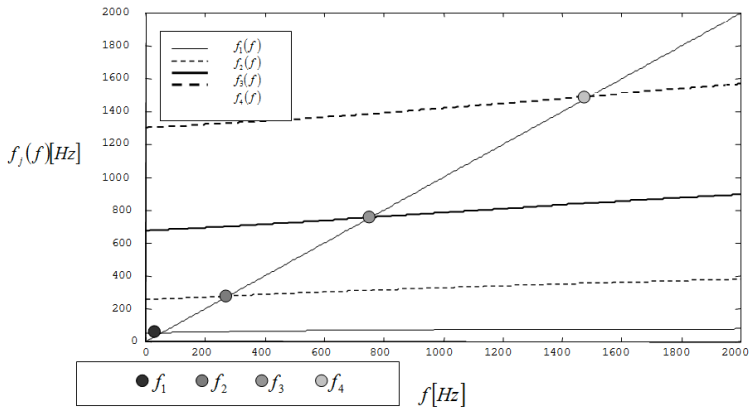


FIGURA 4.20. FRF Diagrama de Campbell. Viga composta 20 °C.

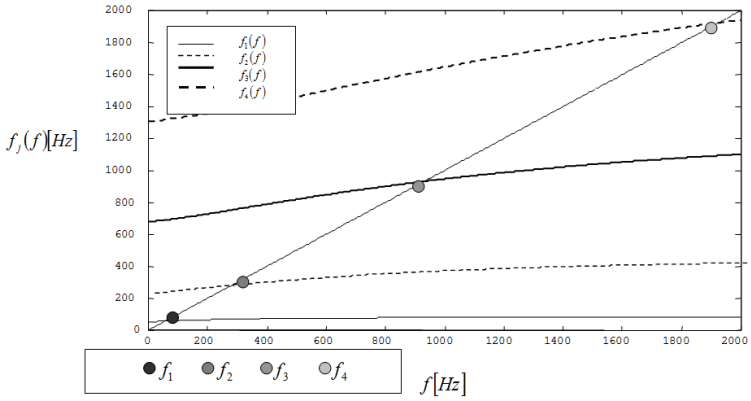


FIGURA 4.21. FRF Diagrama de Campbell. Viga composta 10 °C.

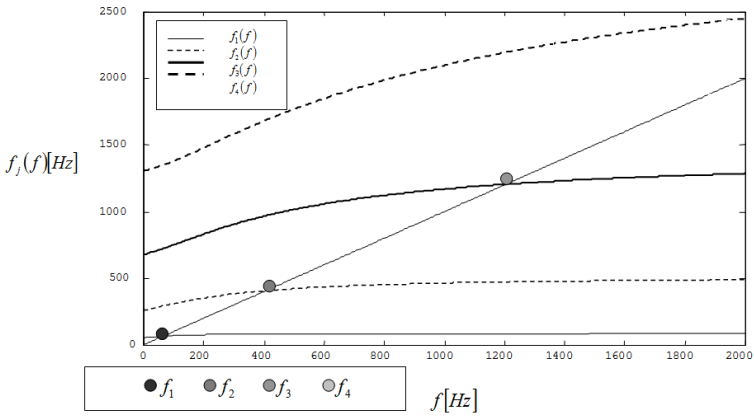


FIGURA 4.22. FRF Diagrama de Campbell. Viga composta 0 °C.

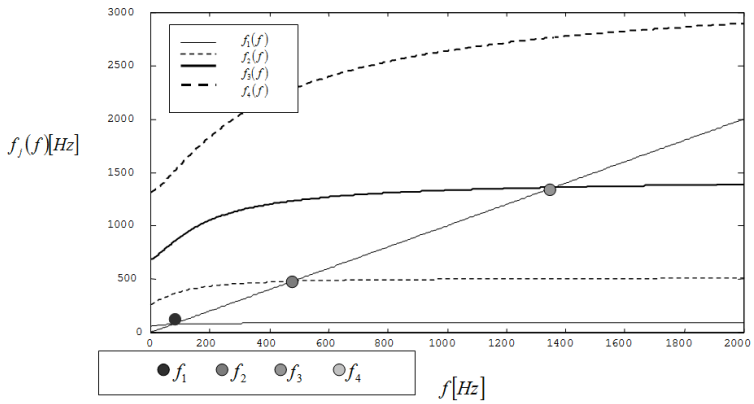


FIGURA 4.23. FRF Diagrama de Campbell. Viga composta -10 °C.

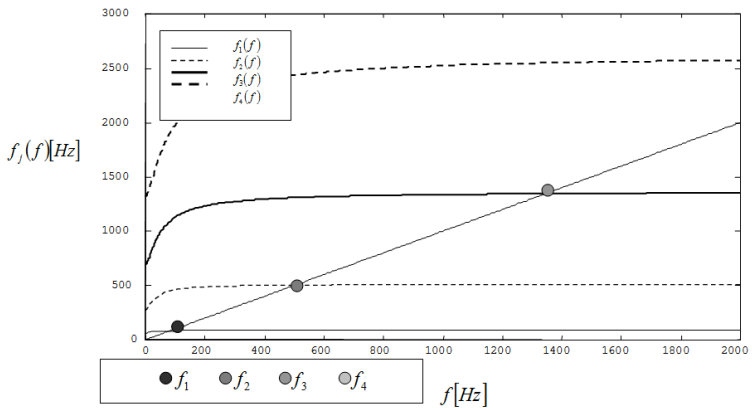


FIGURA 4.24. FRF Diagrama de Campbell. Viga composta -20 °C.

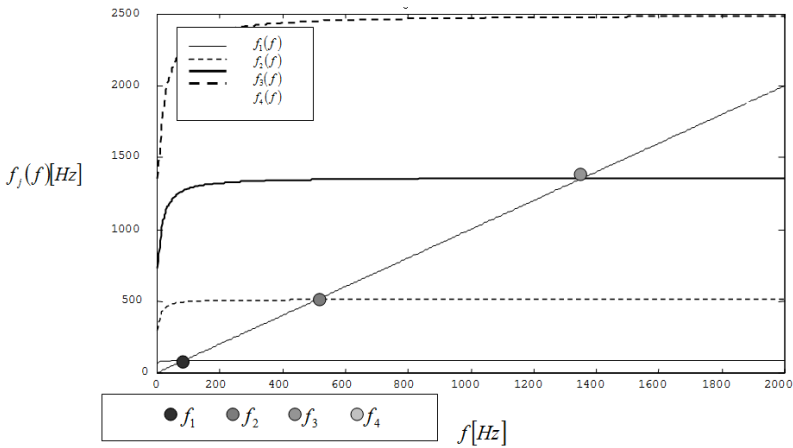


FIGURA 4.25. FRF Diagrama de Campbell. Viga composta -30 °C.

4.5.2 FATORES DE PERDA

Para cada frequência Ω os autovalores $\lambda_j(\Omega)$ são computados, também os fatores de perda $\eta_j(\Omega)$. Os resultados estão registrados nas figuras que vão de 4.24 a 4.33. É importante notar que a técnica de tratamento da dinâmica de estruturas compostas metal/elastômero, apresentada em 3.2, conduz não só aos fatores de perda modais (nas frequências naturais), como também não modais. Este é um aspecto poderoso desta técnica e, tanto quanto se sabe, não existe estudo anterior que chegou a este ponto, e com tanta generalidade.

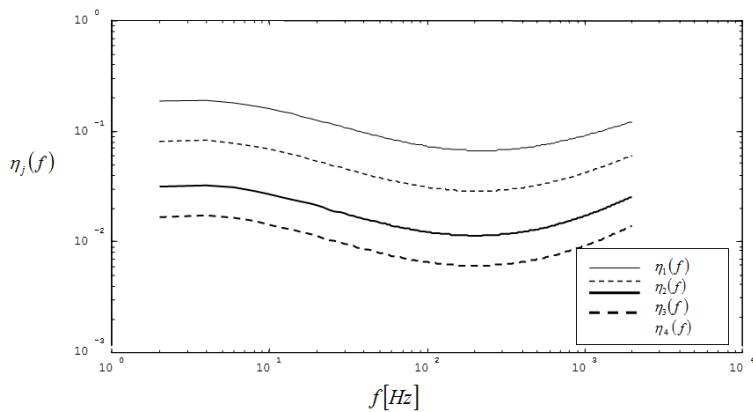


FIGURA 4.26. FRF Fatores de Perda Modais. Viga composta 60 °C.

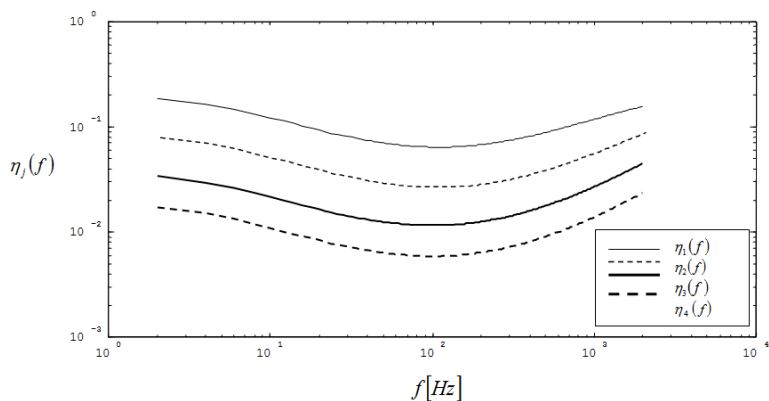


FIGURA 4.27. FRF Fatores de Perda Modais. Viga composta 50 °C.

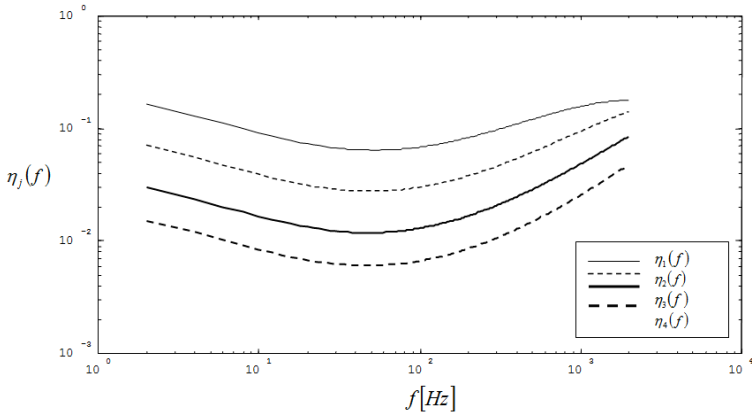


FIGURA 4.28. FRF Fatores de Perda Modais. Viga composta 40 °C.

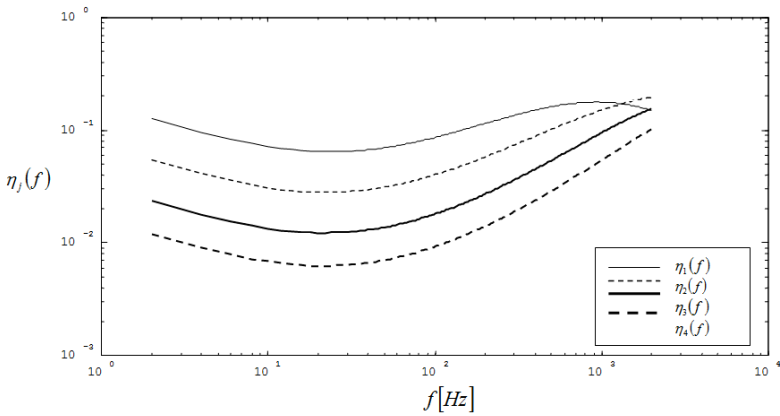


FIGURA 4.29. FRF Fatores de Perda Modais. Viga composta 30 °C.

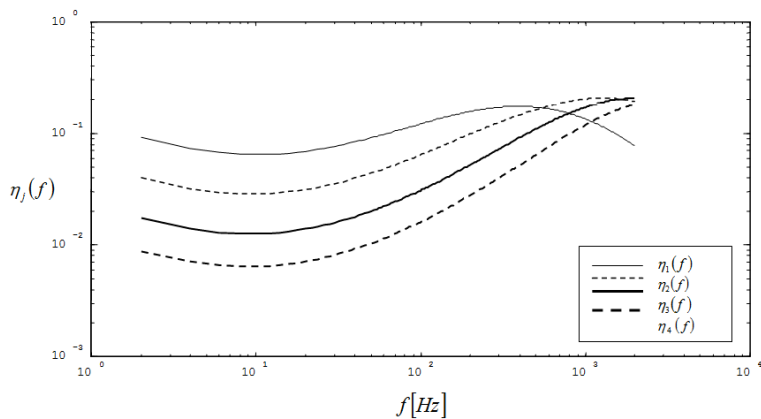


FIGURA 4.30. FRF Fatores de Perda Modais. Viga composta 20 °C.

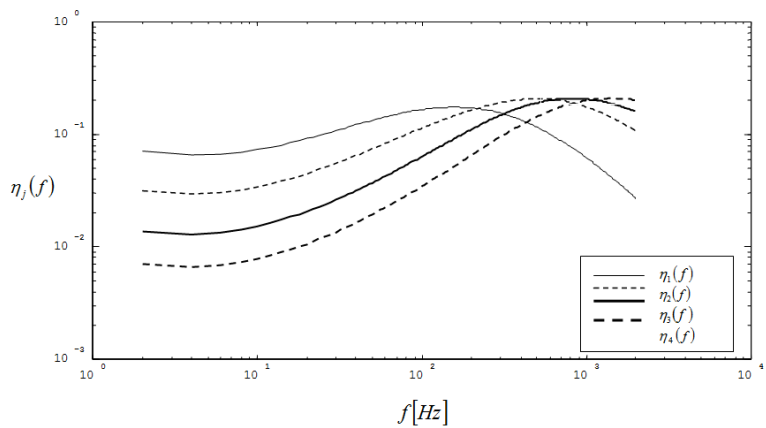


FIGURA 4.31. FRF Fatores de Perda Modais. Viga composta 10 °C.

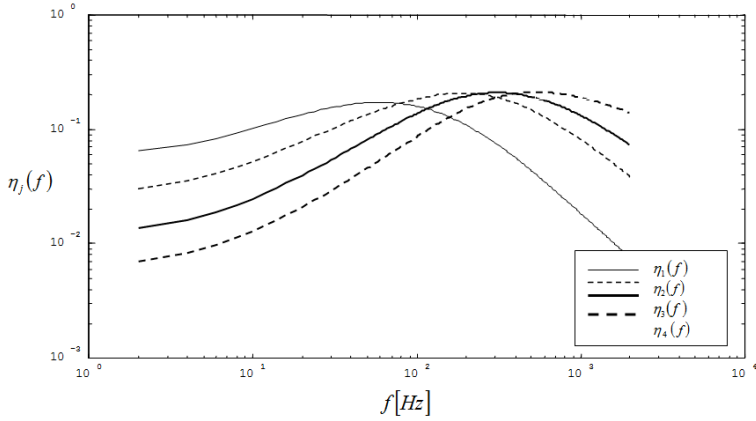


FIGURA 4.32. FRF Fatores de Perda Modais. Viga composta 0°C .

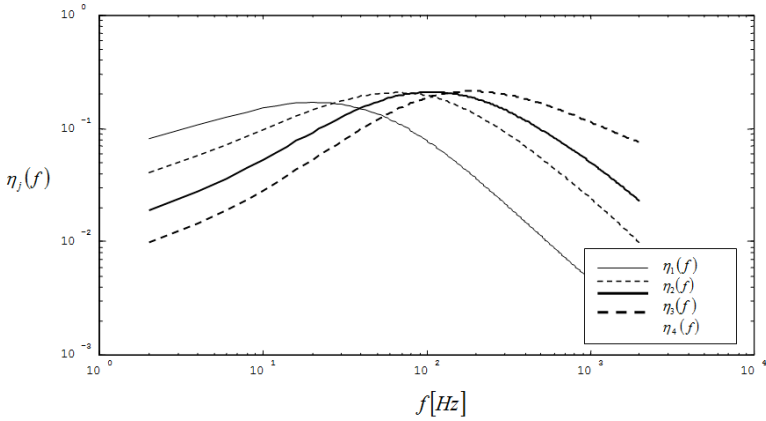


FIGURA 4.33. FRF Fatores de Perda Modais. Viga composta -10°C .

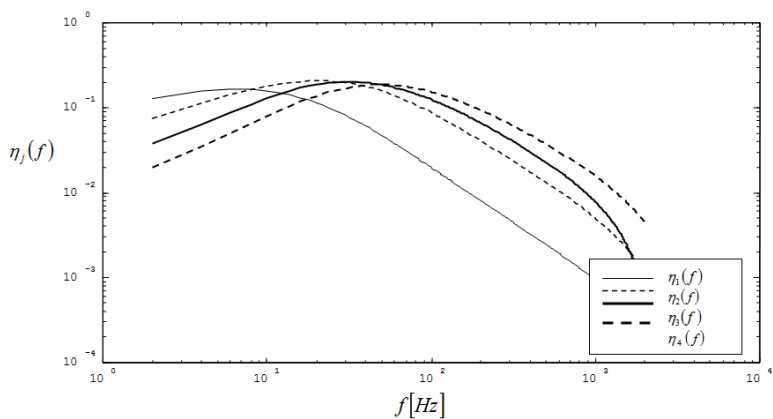


FIGURA 4.34. FRF Fatores de Perda Modais. Viga composta -20°C .

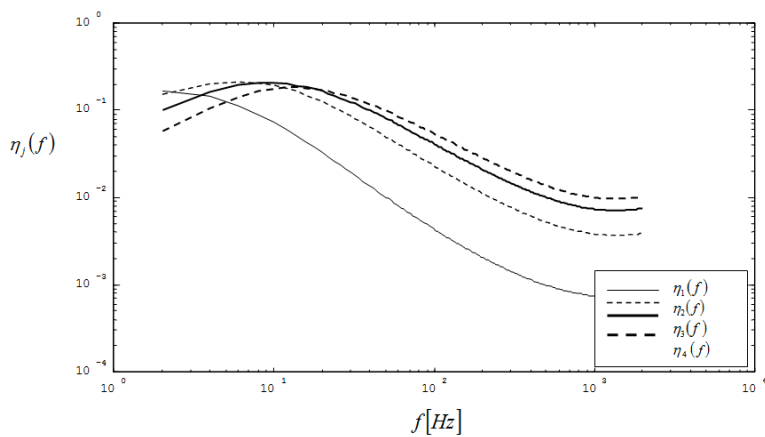


FIGURA 4.35. FRF Fatores de Perda Modais. Viga composta -30°C .

6 COMENTARIOS ADICIONAIS

Neste capítulo discuti um exemplo clássico de estrutura metal/elastômero, através da teoria da sua dinâmica exposta anteriormente no artigo 3.2. Este artigo pretende ser a parte central desta tese. Os resultados numéricos estão perfeitamente dentro do esperado, dada a experiência de trabalhos anteriores. Nota-se aqui, que em todos os trabalhos anteriores baseiam-se no problema de estruturas compostas do ponto de vista de vibrações livres. A teoria do artigo 3.2 o faz do ponto de vista de vibrações forçadas, com excitação contendo um espectro de frequências qualquer. Embora as matrizes possam ser de tamanho considerável, aquela teoria aponta para uma solução econômica e de bom senso. No caso dos exemplos deste capítulo a matriz de rigidez (bem como a de massa) é obtida por via do método dos elementos finitos.

Aparecem os parâmetros modais em função da frequência. No caso do fator de perda estrutural, este é obtido em todas as frequências da banda considerada. Esta é uma originalidade importante. Tentou-se uma comparação experimental dos resultados. Entretanto, em modelos de pequena dimensão, a sensibilidade dos parâmetros modais a pequenos erros é grande. Notou-se uma discrepância (não excessiva, diga-se!) entre as frequências naturais computadas e medidas. O nível de ruído do experimento também foi excessivo por uma razão que só bem mais tarde (e tarde demais!) foi notada: o micro – acelerômetro, com pre – amplificador embutido, era alimentado com a fonte própria do analisador de Fourier, uma técnica tida como normal pelos fabricantes do equipamento. Constatou-se, mais tarde, que a fonte do analisador não é suficiente e que uma fonte externa (que existe no mercado!) faz o serviço com competência, isto é, eliminar o ruído eletrônico. Recomenda-se que esses ensaios sejam refeitos em outra oportunidade.

As seguintes tabelas mostram o comportamento das frequências naturais e os fatores de perda modais, tanto para os cálculos feitos usando o método de elementos finitos (FEM), como aqueles obtidos experimentalmente (EXP) e por último é adicionada uma coluna com o erro relativo entre os resultados mencionados anteriormente.

TABELA 4.1 Frequências naturais da Viga Sanduíche

Número do Modo	Temperatura [$^{\circ}C$]	Frequência Natural V. Sanduíche FEM [Hz]	Frequência Natural V. Sanduíche EXP [Hz]	Erro Relativo [%]
1	-30.0	85.0	---	---
2	-30.0	510.0	548	6.93
3	-30.0	1357.0	1472	7.81
1	-20.2	83.5	---	---
2	-20.2	504.0	542	7.01
3	-20.2	1345.5	1448	7.11
1	-10.0	78.0	---	---
2	-10.0	478.5	534	10.39
3	-10.0	1362.0	1416	3.81
1	0.0	65.0	---	---
2	0.0	407.5	512	20.41
3	0.0	1205.0	1322	8.85
1	10.0	58.0	---	---
2	10.0	317	---	---
3	10.0	932	1000	6.80
1	19.9	54.5	---	---
2	19.9	279.0	316	11.70
3	19.9	757.0	820	7.68
4	19.9	1495.0	---	---
1	30	53.0	---	---
2	30	264.5	298	11.24
3	30	703.0	758	7.25
4	30	1363.0	1398	2.50
1	40	52.5	---	---
2	40	259.5	286	9.26
3	40	686.0	732	6.28
4	40	1325.5	1360	2.53
1	50	52.0	---	---
2	50	256.5	278	7.73
3	50	680.0	716	5.02
4	50	1312.0	1344	2.38
1	60	51.5	---	---
2	60	255.0	266	4.13
3	60	676.0	698	3.15
4	60	1306.0	1320	1.06

TABELA 4.2 Fatores de Perda da Viga Sanduíche

Número do Modo	Temperatura [$^{\circ}C$]	Fator de Perda V. Sanduíche FEM	Fator de Perda V. Sanduíche. EXP	Erro Relativo [%]
1	-30.0	0.0052	---	---
2	-30.0	0.0051	0.0066	22.7
3	-30.0	0.0070	0.00776	9.1
1	-20.2	0.0256	---	---
2	-20.2	0.0132	0.01181	11.8
3	-20.2	0.0098	0.01492	34.2
1	-10.0	0.0985	---	---
2	-10.0	0.0572	0.02969	93.2
3	-10.0	0.0356	0.03638	1.9
1	0.0	0.1715	---	---
2	0.0	0.1685	0.078	115.3
3	0.0	0.1150	0.116	0.8
1	10.0	0.1400	---	---
2	10.0	0.1930	---	---
3	10.0	0.2068	0.258	20.1
1	19.9	0.0940	---	---
2	19.9	0.1200	0.18544	35.1
3	19.9	0.1496	0.20180	25.8
4	19.9	0.1785	---	---
1	30	0.0708	---	---
2	30	0.0680	0.07534	9.6
3	30	0.0704	0.07527	6.3
4	30	0.0714	0.05697	25.4
1	40	0.0642	---	---
2	40	0.0423	0.04896	13.4
3	40	0.0357	0.04297	16.7
4	40	0.0324	0.03360	3.5
1	50	0.0694	---	---
2	50	0.0308	0.04994	38.2
3	50	0.0208	0.03792	45.1
4	50	0.0168	0.02461	31.7
1	60	0.0850	---	---
2	60	0.0267	0.04489	40.4
3	60	0.0142	0.02665	46.6
4	60	0.0101	0.01997	49.2

5. MODELAGEM DO NEUTRALIZADOR TIPO STOCKBRIDGE COMPOSTO

5.1 INTRODUÇÃO

O neutralizador de vibrações ou absorvedor de vibrações é uma estrutura secundária que minimiza as vibrações ao introduzir forças de reação e dissipar a energia (YOUNG, 1952; DEN HARTOG, 1956; SNOWDON, 1959, 1966, 1968; NASHIF, JONES, 1969; JONES, NASHIF, STARGARDTER, 1975; JAQUOT, FOSTER, 1977; HUNT, 1979; SNOWDON, NOBILE, 1980; SNOWDON, WOLF., KERLIN, 1984; FREITAS, 1993; ALVARENGA, 1994). A teoria geral de neutralizadores viscoelásticos, aplicados ao controle passivo de vibrações de estruturas complexas, foi desenvolvida por Espíndola e Silva (1992), Espíndola e Bavastrí (1995, 1997, 1998). A ideia fundamental dessa teoria é o conceito de grandezas equivalentes, que permite operar no espaço modal da estrutura primária, mesmo que, com a adição dos neutralizadores, novos graus de liberdade sejam adicionados à estrutura.

Esta tese não é sobre neutralizadores, mas sobre dinâmica de estruturas com parâmetros dependentes da frequência, em que o exemplo mais ilustre são estruturas compostas metal/elastômero. Entretanto, é irresistível a tentação de mostrar que a teoria do artigo 3.2 conduz às grandezas generalizadas para um neutralizador do tipo Stockbridge, com múltiplos graus de liberdade. A partir desse ponto a otimização de tais neutralizadores segue o curso traçado por Espíndola e Bavastrí (1997). Este aspecto não será tratado nesta tese, por impertinente. Neutralizadores tipo Stockbridge são muito usados no controle passivo de linhas aéreas de transmissão de potência elétrica, bem como de outras estruturas. No que segue, a haste do Stockbridge

será uma estrutura metal/elastômero, portanto com características dependentes da frequência

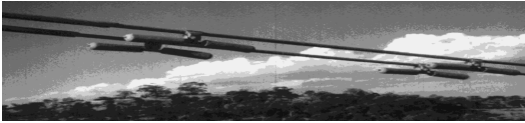


FIGURA 5.1. Neutralizadores Tipo Stockbrige

5.2 MODELO BÁSICO

À guisa de introdução apresentar-se-á um modelo bastante simplificado. Com o propósito de facilitar a análise da estrutura, e por razões de simetria tomar-se-á a metade do neutralizador, convenção que será adotada doravante. Os graus de liberdades são restringidos aos movimentos de deslocamento e rotação da massa de sintonia. A massa da haste não é, neste modelo simplificado, considerada. A viga é composta de metal/elastômero/metal, introduzindo amortecimento na estrutura. A figura 4.1 mostra, esquematicamente este modelo simplificado.

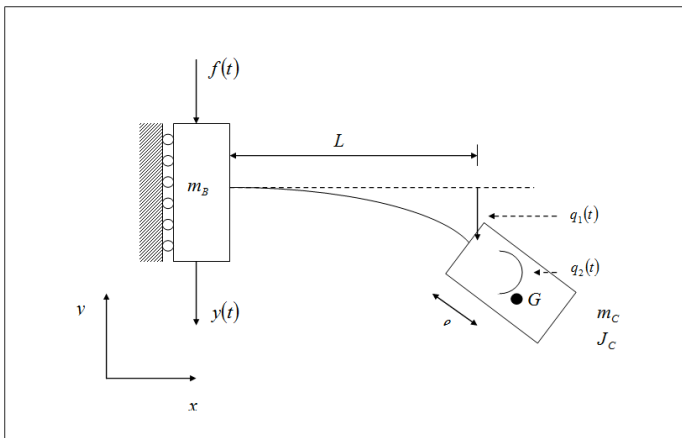


FIGURA 5.2. Neutralizador Tipo Stockbrige Modelo Simples

Onde:

- m_B : é a metade da massa da base;
 m_C : é a massa do corpo montado na viga;
 J_C : é momento de inércia do corpo;
 G : é centro de gravidade do corpo;
 e : é a distancia entre o extremo da haste até o centro de gravidade do corpo em balanço;
 $q_1(t)$: é o deslocamento da massa de sintonia;
 $q_2(t)$: é a rotação da massa de sintonia;
 $y(t)$: é o deslocamento imposto (por um mecanismo externo à base);
 $f(t)$: é a força excitadora não realimentada pelo movimento do sistema.

Calcular-se-ão as energias potencial e cinética.

Energia Potencial

É dada por:

$$V = 1 / 2 q(t)^T \mathbf{K} q(t) - f(t)y(t) \quad (5.1)$$

onde

$$\mathbf{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix}, \quad (5.2)$$

vetor de coordenadas generalizadas;

$$\mathbf{K} = \overline{EI} \begin{bmatrix} 12/L^3 & -6/L^2 \\ -6/L^2 & 4/L \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

é a matriz de rigidez da haste, sendo

$$\overline{EI} = EI(1 + i\eta) \quad (5.4)$$

a rigidez à flexão complexa da secção reta da haste. Tem-se mais

L	:	Comprimento da haste.
EI	:	Rigidez à flexão do haste.
η	:	Fator de perda.
E	:	Módulo de Young.
I	:	Segundo momento de área da secção reta.

Energia Cinética

É dada pela expressão:

$$T = 1/2m_C \left(\dot{y}(t) + \dot{q}_1(t) + e\dot{q}_2(t) \right)^2 + \quad (5.5)$$

$$+ 1/2J_C \dot{q}_2(t)^2 + 1/2m_B \dot{y}(t)^2$$

Usando as equações de Lagrange abaixo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} - f_{knc} = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (5.6)$$

onde f_{knc} são forças não conservativas, obtém-se as tres equações abaixo:

$$m_C \left(\ddot{y} + \ddot{q}_1 + e\ddot{q}_2 \right) + 12\overline{EI}/L^3 q_1 - 6\overline{EI}/L^2 q_2 = 0 \quad (5.7a)$$

$$em_C \left(\ddot{y} + \ddot{q}_1 + e\ddot{q}_2 \right) + J_C \ddot{q}_2 - 6\overline{EI}/L^2 q_1 + 4\overline{EI}/L q_2 = 0 \quad (5.7b)$$

$$(m_B + m_C) \ddot{y} + m_C \ddot{q}_1 + em_C \ddot{q}_2 - f(t) = 0, \quad (5.7c)$$

ou em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_C & em_C & m_C \\ em_C & e^2m_C + J_C & em_C \\ m_C & em_C & m_B + m_C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 12\overline{EI}/L^3 & -6\overline{EI}/L^2 & 0 \\ -6\overline{EI}/L^2 & 4\overline{EI}/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} m_C & em_C \\ em_C & e^2m_C + J_C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_C \\ em_C \end{Bmatrix} \ddot{y} + \begin{bmatrix} 12\overline{EI}/L^3 & -6\overline{EI}/L^2 \\ -6\overline{EI}/L^2 & 4\overline{EI}/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.9a)$$

$$\begin{Bmatrix} m_C \\ em_C \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + (m_B + m_C) \ddot{y} = f(t) \quad (5.9b)$$

Em forma compacta, 5.9a e 5.9b

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_L \ddot{y} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5.10b)$$

$$\mathbf{M}_L^T \ddot{\mathbf{q}} + (m_B + m_C) \ddot{y} = f(t) \quad (5.10b)$$

onde

$$\mathbf{M}_L = [m_C, em_C]^T \quad (5.10c)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_C & em_C \\ em_C & e^2m_C + J_C \end{bmatrix} \quad (5.10d)$$

Usando a transformada de Fourier, estas equações são expressas no domínio da frequência:

$$[-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}] \mathbf{Q}(\Omega) - \Omega^2 \mathbf{M}_L Y(\Omega) = \mathbf{0} \quad (5.11a)$$

$$-\Omega^2 \mathbf{M}_L^T \mathbf{Q}(\Omega) - \Omega^2 (m_B + m_C) Y(\Omega) = F(\Omega) \quad (5.11b)$$

Da equação (5.11a) se obtêm

$$\frac{1}{Y(\Omega)} \mathbf{Q}(\Omega) = \Omega^2 \left[-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \right]^{-1} \mathbf{M}_L. \quad (5.12)$$

Substituindo na equação (5.11b) obtêm-se a rigidez dinâmica:

$$K_1(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{Y(\Omega)} \quad (5.13a)$$

$$K_1(\Omega) = -\Omega^4 \mathbf{M}_L^T \left[-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \right]^{-1} \mathbf{M}_L - \Omega^2 (m_B + m_C) \quad (5.13b)$$

Tendo a rigidez dinâmica, pode-se calcular a impedância e a massa dinâmica

$$Z_1(\Omega) = \frac{K_1(\Omega)}{i\Omega} \quad (5.14a)$$

$$Z_1(\Omega) = i\Omega^3 \mathbf{M}_L^T \left[-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \right]^{-1} \mathbf{M}_L + i\Omega (m_B + m_C) \quad (5.14b)$$

$$M_1(\Omega) = \frac{K_1(\Omega)}{-\Omega^2} \quad (5.15a)$$

$$M_1(\Omega) = \Omega^2 \mathbf{M}_L^T \left[-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \right]^{-1} \mathbf{M}_L + (m_B + m_C) \quad (5.15b)$$

Considerando a totalidade da estrutura deve-se tomar $K(\Omega) = 2K_1(\Omega)$, $Z(\Omega) = 2Z_1(\Omega)$ e $M(\Omega) = 2M_1(\Omega)$. Logo o amortecimento e massa equivalente são (Espíndola e Silva, 1992):

$$c_{eq}(\Omega) = \Re \left\{ \overline{Z(\Omega)} \right\} \quad (5.16)$$

$$m_{eq}(\Omega) = \Re \left\{ \overline{M(\Omega)} \right\} \quad (5.17)$$

Para calcular a inversa de $[-\Omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}]$ de uma forma eficaz, considere-se o problema de autovalores

$$\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi \quad (5.18)$$

com os autovetores normalizados de tal sorte que:

$$\Phi^T\mathbf{K}\Phi = \Lambda = \text{diag}(\lambda), \quad (5.19)$$

onde $\Phi = [\phi_1, \phi_2]$ é a matriz modal. Devido à ortonormalização, tem-se, também:

$$\Phi^T\mathbf{M}\Phi = \mathbf{I} \quad (5.20)$$

Seja então a matriz

$$\mathbf{X} = -\Omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K} \quad (5.21)$$

Logo

$$\Phi^T\mathbf{X}\Phi = -\Omega^2\mathbf{I} + \Lambda \quad (5.22)$$

Invertendo 5.22, tem-se:

$$\Phi^{-1}\mathbf{X}^{-1}\Phi^{-T} = [-\Omega^2\mathbf{I} + \Lambda]^{-1} \quad (5.23)$$

de onde se tira

$$\mathbf{X}^{-1} = \Phi [-\Omega^2\mathbf{I} + \Lambda]^{-1} \Phi^T \quad (5.24)$$

Este método para inverter é mais estável numericamente do que a inversão direta.

Se se tomar a haste como uma viga sanduíche, EI será então a rigidez à flexão composta, ou equivalente, da secção reta. Esta rigidez é

influenciada pelo núcleo elastomérico. Como as propriedades deste são dependentes da frequência, também o EI o será. Argumento análogo leva à conclusão de que o η , o fator de perda da viga composta, também é dependente da frequência.

5.3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Com o objetivo de modelar da forma mais geral possível o comportamento do neutralizador, utiliza-se o método dos elementos finitos. Os resultados usando esta técnica, dados no capítulo anterior para estruturas compostas metal/elastômero, são a base para estabelecer a modelagem da estrutura proposta. Considerando a definição de neutralizador dinâmico de vibrações, i.e. um dispositivo mecânico que reduz as vibrações de um sistema mecânico primário, aplicando forças de reação e dissipação de energia, a estrutura do neutralizador será definida. Em forma geral o neutralizador Stockbridge está composto por duas hastes, uma massa central e duas massas de sintonia. A massa central corresponde ao ponto de contato do neutralizador ao sistema primário. A função das massas de sintonia é permitir ao neutralizador atingir a frequência necessária de sintonia. As hastes são duas vigas sanduíche, compostas de duas lâminas metálicas de aço 1020 e um recheio elastomérico fabricado por Soundcoat modelo DYAD 601, o objetivo do material viscoelástico é causar dissipação. Considerando a definição de neutralizador dinâmico de vibrações, i.e. um dispositivo mecânico que reduz as vibrações de um sistema mecânico primário, aplicando forças de reação e dissipação de energia.

A viga foi dividida em 114 elementos. No comprimento serão utilizados 19 elementos e na espessura das partes metálicas e viscoelástica, 2 elementos por camada. Tal configuração foi escolhida por duas razões: a divisão em 19 elementos garante a determinação dos primeiros quatro modos dentro da faixa de frequência usada. Por outro lado, dois elementos por camada representam eficientemente o cisalhamento interno do material viscoelástico, que é o principal responsável pela dissipação da energia vibrante.

A massa central foi dividida em 32 elementos, as massas de sintonia são divididas em 24 elementos cada uma. Tal configuração foi

escolhida devido a que pela função dessas partes do neutralizador, não precisavam alta discretização.

Os elementos são sólidos 2D, quadráticos, lagrangeanos de nove nós, num estado plano de tensões, o que dá um total 308 elementos, 1319 nós, com 2 graus de liberdade per nó, totalizando 2638 graus de liberdade. O desenvolvimento das equações referentes à formulação de elementos finitos para o neutralizador, podem ser achados no anexo A1

O digrama geral do modelo é mostrado na figura 5.1. As restrições na figura 5.2 indicam que o neutralizador está sujeito a um ponto específico da estrutura primaria, não permitindo deslocamentos laterais. A figura 5.3 representa a força transmitida ao neutralizador.

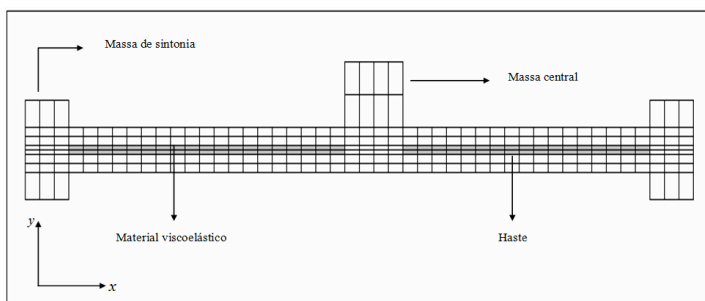


FIGURA 5.3. Neutralizador Tipo Stockbridge. Modelo Elementos Finitos

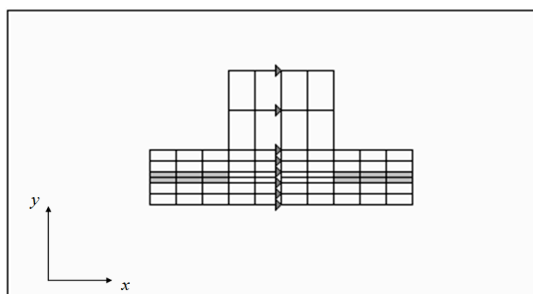


FIGURA 5.4. Neutralizador Stockbridge. Detalhe das Restrições.

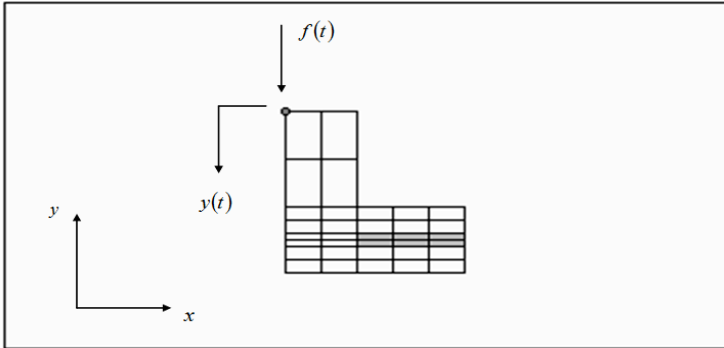


FIGURA 5.5. Neutralizador Stockbridge. Detalhe do Nó de Controle.

Consideremos inicialmente a equação (non - equation, Crandall,1970) de movimento

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}(\Omega)\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (5.25)$$

Onde as matrizes de massa e rigidez são obtidas normalmente usando elementos finitos com uma numeração normal dos nós, para uma temperatura fixa. Modificando a ordem de linhas e colunas, para posicionar adequadamente o nó de controle nas equações, assim como é mostrado nas figuras 4.2 a 4.4, pode-se rescrever dita equação onde:

$$\mathbf{u} = \left[q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, y \right]^T \quad (5.26)$$

ou em forma compacta

$$\left[\mathbf{q}, y \right]^T \quad (5.27)$$

$$\mathbf{q} = \left[q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1} \right]^T \quad (5.28)$$

$$\mathbf{f}(t) = \left[0, 0, \dots, 0, f(t) \right]^T = \left[\mathbf{0}, f(t) \right]^T \quad (5.29)$$

Mais explicitamente a equação 5.25 pode ser escrita assim:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1(\Omega) & \mathbf{K}_2(\Omega) \\ \mathbf{K}_3(\Omega) & \mathbf{K}_4(\Omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ f(t) \end{Bmatrix}. \quad (5.30)$$

Onde

\mathbf{M}_1 : é a sub-matriz de massa da ordem $(n-1 \times n-1)$;

\mathbf{M}_2 : é a sub-matriz de massa da ordem $(n-1 \times 1)$;

\mathbf{M}_3 : é a sub-matriz de massa da ordem $(1 \times n-1)$;

\mathbf{M}_4 : é a sub-matriz de massa da ordem (1×1) , escalar;

$\mathbf{K}_1(\Omega)$: é a sub-matriz de rigidez da ordem $(n-1 \times n-1)$;

$\mathbf{K}_2(\Omega)$: é a sub-matriz de rigidez da ordem $(n-1 \times 1)$;

$\mathbf{K}_3(\Omega)$: é a sub-matriz de rigidez da ordem $(1 \times n-1)$;

$\mathbf{K}_4(\Omega)$: é a sub-matriz de rigidez da ordem (1×1) , escalar;

\mathbf{u} : é vetor total de deslocamentos da ordem $(n \times 1)$;

\mathbf{q} : é vetor de deslocamentos sem considerar o nó de controle da ordem $(n-1 \times 1)$;

y : é deslocamento do nó de controle da ordem (1×1) , escalar;

$\mathbf{f}(t)$: é vetor de forças da ordem $(n \times 1)$;

$\mathbf{0}$: é vetor nulo da ordem $(n-1 \times 1)$;

$f(t)$: é a força aplicada pelo sistema primario ao neutralizador, da ordem (1×1) , escalar.

Pode-se separar a equação (5.30) em duas equações

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_2 \ddot{y} + \mathbf{K}_1(\Omega) \mathbf{q} + \mathbf{K}_2(\Omega) y = \mathbf{0} \quad (5.31a)$$

$$\mathbf{M}_3 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_4 \ddot{y} + \mathbf{K}_3(\Omega) \mathbf{q} + \mathbf{K}_4(\Omega) y = f(t) \quad (5.31b)$$

Transformando, membro a membro, as equações 5.31a e 5.31b, obtém-se:

$$\left(-\Omega^2 \mathbf{M}_1 + \mathbf{K}_1(\Omega)\right) \mathbf{Q}(\Omega) + \left(-\Omega^2 \mathbf{M}_2 + \mathbf{K}_2(\Omega)\right) \mathbf{Y}(\Omega) = \mathbf{0} \quad (5.32a)$$

$$\left(-\Omega^2 \mathbf{M}_3 + \mathbf{K}_3(\Omega)\right) \mathbf{Q}(\Omega) + \left(-\Omega^2 \mathbf{M}_4 + \mathbf{K}_4(\Omega)\right) \mathbf{Y}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega) \quad (5.32b)$$

A equação (5.32a) pode ser escrita assim:

$$\mathbf{Q}(\Omega) = -\left(-\Omega^2 \mathbf{M}_1 + \mathbf{K}_1(\Omega)\right)^{-1} \left(-\Omega^2 \mathbf{M}_2 + \mathbf{K}_2(\Omega)\right) \bar{\mathbf{Y}}(\Omega) \quad (5.33)$$

Substituindo $\mathbf{Q}(\Omega)$ em (5.32b)

$$F(\Omega) = \left[-\mathbf{X}_3(\Omega) \mathbf{X}_1(\Omega)^{-1} \mathbf{X}_2(\Omega) + \mathbf{X}_4(\Omega)\right] Y(\Omega) \quad (5.34)$$

Ordenando obtemos a rigidez dinâmica do sistema

$$K(\Omega) \frac{F(\Omega)}{Y(\Omega)} = \mathbf{X}_4(\Omega) - \mathbf{X}_3(\Omega) \mathbf{X}_1(\Omega)^{-1} \mathbf{X}_2(\Omega) \quad (5.35)$$

$$\mathbf{X}_1(\Omega) = -\Omega^2 \mathbf{M}_1 + \mathbf{K}_1(\Omega) \quad (5.36a)$$

$$\mathbf{X}_2(\Omega) = -\Omega^2 \mathbf{M}_2 + \mathbf{K}_2(\Omega) \quad (5.36b)$$

$$\mathbf{X}_3(\Omega) = -\Omega^2 \mathbf{M}_3 + \mathbf{K}_3(\Omega) \quad (5.36c)$$

$$\mathbf{X}_4(\Omega) = -\Omega^2 \mathbf{M}_4 + \mathbf{K}_4(\Omega) \quad (5.36d)$$

Usando um método similar ao usado para resolver o problema de autovalores de grande porte, descrito na sua forma completa no capítulo III e no apêndice A, calcula-se a inversa da matriz

$$\left(-\Omega^2 \mathbf{M}_1 + \mathbf{K}_1(\Omega)\right) \quad (5.37)$$

Para isto considere-se inicialmente uma frequência arbitrária Ω_0 e resolver o problema de autovalores:

$$\mathbf{K}_1(\Omega_0)\phi_0 = \sigma_0\mathbf{M}_1\phi_0. \quad (5.38)$$

A matriz modal formada pelos autovetores ortonormalizados satisfaz as seguintes propriedades:

$$\Phi_0^T\mathbf{M}_1\Phi_0 = \mathbf{I} \quad (5.39)$$

$$\Phi_0^T\mathbf{K}_1(\Omega_0)\Phi_0 = \Sigma_0, \quad (5.40)$$

onde

\mathbf{I} : é uma matriz identidade e
 $\Sigma_0 = \text{diag}(\sigma_0)$: é uma matriz formada pelos autovalores do problema inicial.

Forma-se o produto triplo para quaisquer outras frequências

$$\hat{\Phi}_0^T\mathbf{K}_1(\Omega)\hat{\Phi}_0 = \Sigma(\Omega) \quad (5.41)$$

$\hat{\Phi}_0$: é a matriz $n \times \hat{n}$ formada pelos primeiros \hat{n} autovetores associados aos menores autovalores. ($\hat{n} \ll n - 1$).

Neste caso sabemos que a matriz $\Sigma(\Omega)$, da ordem $\hat{n} \times \hat{n}$, não é estritamente diagonal. Então resolve-se um novo problema de autovalores

$$\Sigma(\Omega)\psi(\Omega) = \lambda(\Omega)\psi(\Omega) \quad (5.42)$$

cumprindo-se a relação abaixo:

$$\Psi(\Omega)^T\Psi(\Omega) = \mathbf{I}_{\hat{n}} \quad (5.43)$$

e

$$\Psi(\Omega)^T \Sigma(\Omega) \Psi(\Omega) = \Lambda(\Omega) \quad (5.44)$$

sendo

$$\Lambda(\Omega) = \text{diag}(\lambda_j(\Omega)) \quad (5.45)$$

Definindo a matriz $\mathbf{X}_1(\Omega)$:

$$\mathbf{X}_1(\Omega) = -\Omega^2 \mathbf{M}_1 + \mathbf{K}_1(\Omega). \quad (5.46)$$

Fazendo os produtos matriciais ve-se que:

$$\hat{\Phi}_0^T \mathbf{X} \hat{\Phi}_0 = -\Omega^2 \hat{\Phi}_0^T \mathbf{M}_1 \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_0^T \mathbf{K}_1(\Omega) \hat{\Phi}_0 \quad (5.47a)$$

$$\hat{\Phi}_0^T \mathbf{X} \hat{\Phi}_0 = -\Omega^2 \mathbf{I} + \Sigma(\Omega) \quad (5.47b)$$

e

$$\Psi^T(\Omega) \hat{\Phi}_0^T \mathbf{X} \hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) = -\Omega^2 \mathbf{I}_{\hat{n}} + \Lambda(\Omega). \quad (5.48)$$

Logo a inversa da matriz $\mathbf{X}_1 = -\Omega^2 \mathbf{M}_1 + \mathbf{K}_1(\Omega)$ pode-se aproxima-la pela pseudo inversa \mathbf{X}_1^+ :

$$\mathbf{X}_1^{-1} \equiv \mathbf{X}_1^+ = \left(-\Omega^2 \mathbf{M}_1 + \mathbf{K}_1(\Omega) \right)^+ \quad (5.49a)$$

$$\mathbf{X}_1^{-1} \equiv \mathbf{X}_1^+ = \left(\hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) \right) \left(-\Omega^2 \mathbf{I}_{\hat{n}} + \Lambda(\Omega) \right)^{-1} \left(\hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) \right)^T \quad (5.49b)$$

Dessa forma, tomando-se $\mathbf{X}_1^{-1} \equiv \mathbf{X}_1^+$ e a rigidez dinâmica pode ser computada. Esta formulação foi explicada de uma forma bastante simples, enfatizando aqueles aspectos diretamente relacionados ao algoritmo de computação do problema; os detalhes e fundamentos de

tal aproximação, conhecida como o teorema da expansão truncada, são examinados no apêndice A.

A partir da rigidez dinâmica pode-se calcular a impedância e a massa dinâmica

$$Z(\Omega) = \frac{K(\Omega)}{i\Omega} \quad (5.50)$$

$$M(\Omega) = \frac{K(\Omega)}{-\Omega^2} \quad (5.51)$$

Logo ao amortecimento e massa equivalente são :

$$c_{eq}(\Omega) = \Re \{Z(\Omega)\} \quad (5.52)$$

$$m_{eq}(\Omega) = \Re \{M(\Omega)\} \quad (5.53)$$

Fica pois demonstrado que a teoria do artigo 3.2 conduz a uma teoria elegante do neutralizador composto tipo Stockbridge. Para uma escolha criteriosa do material elastomérico, o fator de perda deve ser alto. Portanto a a banda de frequência de trabalho, onde as vibrações serão reduzidas, deve coincidir com a banda de frequência na zona de transição. De igual forma a faixa de temperatura de trabalho deve coincidir com faixa de temperatura na zona de transição. O fator de perda estrutural do neutralizador pode ser da ordem 0,2 ou 0,3, o que permitiria um controle de vibrações em uma ampla faixa de frequências (ESPÍNDOLA E BAVASTRI, 1998).

Em comparação com o clássico Stockbridge, cujo fator de perda é da ordem $\eta \approx 5 \times 10^{-4}$, as vantagens são óbvias. As grandezas equivalentes 5.51 e 5.52 são peças fundamentais para o eficaz projeto de de um sistema de neutralizadores (BAVASTRI,1997). Este assunto extrapola os objetivos desta tese e não será abordado aqui. Se o neutralizador contiver uma viga composta, a matriz de rigidez será montada pelo método dos elementos finitos, como no capítulo IV.

Como antevisão do que pode ser esperado com esses neutralizadores, toman-se os dados de um vão de uma linha de transmissão contruida em ITAIPU fornecidos por Paulo Henrique Texeira (1998). Os dados sobre esta linha, isto é, o seu modelo modal, foram gentilmente cedidos para os cálculos que aqui se mostram. Para um neutralizador com uma viga sanduíche como mostra a figura 5.5, aplicado a esta linha, obteve-se o resultado da figura 5.6. Esta figura mostra a resposta em freqüência desta linha com e sem neutralizadores na faixa de freqüências até os 60 Hz, de interesse, o neutralizador é altamente eficiente. Insiste-se em que tal neutralizador não foi otimizado pelo método de Espíndola e Bavastri (1997), (HOLLAND ,1975, RECHENBERG,1993). A otimização de tais neutralizadores, fica aqui como sugestão para futuros estudos. Os dados do neutralizador usado são vistos na tabela 5.1

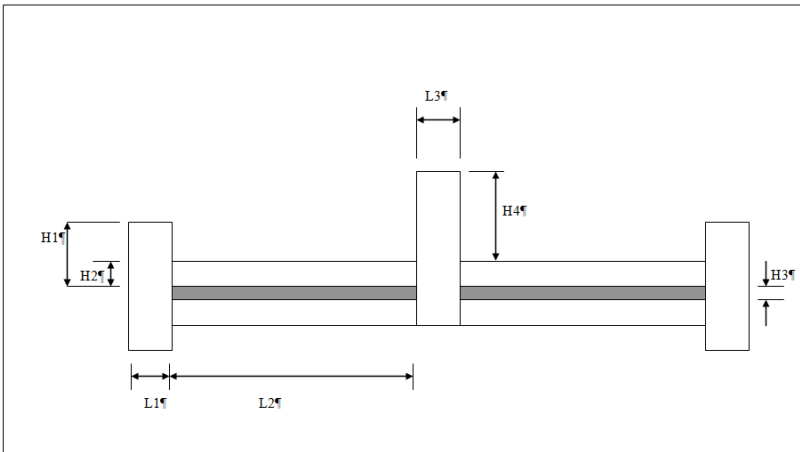


FIGURA 5.6. Neutralizador Stockbridge. Dimensões Ótimas

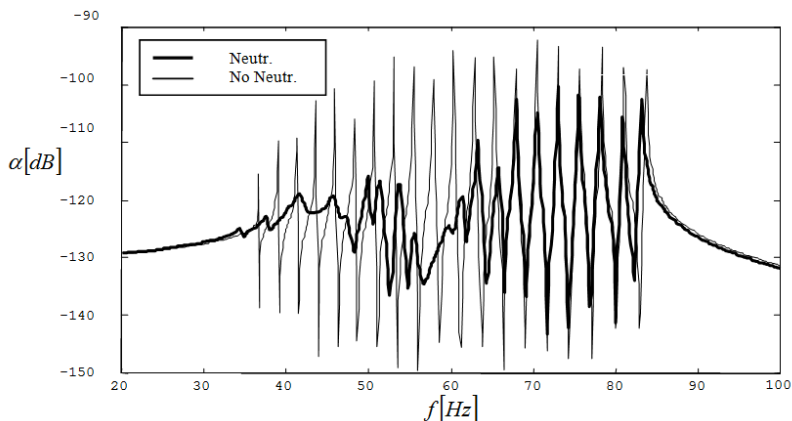


FIGURA 5.7. Linha de Transmissão. Receptância com e sem Neutralizadores

TABELA 5.1. Dimensões Neutralizador Ótimo

L1	Comprimento	0.0102 m
L2	Comprimento	0.2115 m
L3	Comprimento	0.0346 m
H1	Altura	0.0138 m
H2	Altura	0.0024 m
H3	Altura	0.0021 m
H4	Altura	0.0306 m
T	Espessura	0.0127 m

5.4 COMENTARIOS FINAIS

Uma aplicação do trabalho desenvolvido, foi a utilização do método de cálculo de autovalores para o projeto de um neutralizador dinâmico de vibrações. A base para tal projeto foi a modificação do neutralizador stockbridge usado em linhas de transmissão de energia elétrica. Em conjunto com o método das quantidades equivalentes

generalizadas para neutralizadores e o método de otimização não linear baseado em algoritmo genético.

Para realizar tal finalidade implementou-se um programa baseado no programa de autovalores anteriormente mencionado, as principais modificações forem o cálculo da rigidez dinâmica impedância e massa dinâmica na base do neutralizador, a construção de uma função objetivo e a implementação da rotina de algoritmo genético.

Encontrou-se então um problema bastante importante, que foi a baixa taxa de convergência ao pseudo – inverter uma matriz de cálculos parciais do processo. Inicialmente esperava-se que poucos modos forem necessários para lograr dito objetivo com sucesso, como foi possível fazer para o cálculo da resposta em frequência. Desgraçadamente não foi assim, para lograr um projeto ótimo de neutralizador, e estimou-se um tempo extenso demais para ter alguma utilidade prática.

Resumindo, desejava-se calcular a inversa de $\mathbf{X}_1(\Omega) = -\Omega^2 \mathbf{M}_1 + \mathbf{K}_1(\Omega)$, usando a aproximação dada pela pseudo inversa $\mathbf{X}_1(\Omega)^+$,

$$\mathbf{X}_1(\Omega)^+ = \left(\hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) \right) \left(-\Omega^2 + \Lambda(\Omega) \right)^{-1} \left(\hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) \right)^T. \quad (5.54)$$

Onde $\hat{\Phi}_0$ é a matriz modal reduzida da ordem $n \times \hat{n}$ onde \hat{n} é muito menor que n . Esta é a principal propriedade do método, se dito número é muito pequeno, então os cálculos posteriores seriam realizados com facilidade, rapidez e economia. Desgraçadamente, pelas características do problema observou-se uma baixa convergência numérica. Explicando mais claramente, para que a aproximação seja eficiente, \hat{n} deve ser aproximadamente o 60% de n , por tanto a economia esperada nunca se atingiu. Obviamente existe algum grau de aproveitamento das características da formulação, mas são insuficientes. Esperava-se uma convergência maior devido a que o método de pseudo inversão foi derivado da resolução do problema de autovalores revisado no terceiro capítulo onde \hat{n} era aproximadamente o 0.5% de n . Dita quantidade era suficiente para determinar a resposta em frequência de uma estrutura metal/elastômero, conseguindo calcular com certeza a

resposta até o quarto modo pelo menos, sendo a única limitação o grau de discretização da estrutura usando elementos finitos.

Outro ponto a ser considerado é o fato da dependência do problema em relação à frequência e a temperatura. A cada iteração na frequência o problema da convergência aparece resultando num efeito cumulativo, tudo para calcular um único valor da função objetivo.

Por último deve-se ter em conta que existe um processo de minimização usando algoritmo genético, logo ao gerar toda uma população o problema inicial de convergência é alastrado a um ponto em que a praticidade vira um ponto inatingível. Como exemplo, seria necessário um ano de tempo de CPU num computador Cray T90, para chegar ao final do processo de minimização e sem garantias de que o resultado final seja o ótimo.

Tentou-se usar modelos alternativos de elementos finitos para estruturas compostas metal/elastômero tipo viga sanduíche, mas os resultados não forem satisfatórios. Quando o material viscoelástico entrava na região de transição o aumento na rigidez e no fator de perda não eram acompanhados apropriadamente pelos modelos Boillot e Ravanel (1987) e Ravi, Kundra e Nakra (1995)

6. COMENTÁRIOS FINAIS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1 COMENTARIOS FINAIS

Partindo de uma revisão dos aspetos principais que regulam o comportamento de sistemas mecânicos que apresentam dissipação de energia a traves do chamado amortecimento histerético, estabelece-se, uma série de pontos que devem ser tomados em conta ao estudar o comportamento de estruturas mecânicas que possuem materiais elastoméricos. Um dos principais aspetos que devem ser tomados em conta é que se o sistema mecânico possua materiais viscoelásticos, então apresenta um comportamento dependente da frequência e a temperatura. Dita situação em muitas oportunidades não é levada em conta em forma correta, e a principal consequência é a modelagem errada da estrutura ou do sistema mecânico a ser analisado, i.e obtém-se uma função resposta impulsiva que não é causal.

Outra razão de vital importância que se desprende do parágrafo anterior é de natureza prática, quando adicionamos materiais elastoméricos a uma estrutura mecânica em geral procuramos conseguir o máximo de dissipação de energia. Isto acontece para uma certa combinação de frequência - temperatura chamada Região II ou de transição, onde a variação do modulo de cisalhamento do elastômero varia consideravelmente. Usualmente o modelamento tradicional considera a chamada Região I ou de baixo amortecimento, como comportamento único do material, obtendo um aproveitamento menor que o esperado.

Quando uma estrutura metal/elastômero possui uma elevada complexidade geométrica se faz necessário modela-la usando o método dos elementos finitos, isto leva à formulação de um problema de autovalores de grande porte que é dependente da frequência e da temperatura. A simplificação usual para resolver dita situação é o chamado método da energia de deformação modal, o qual apresenta uma série de limitações, entre elas não é adequado para um análise na região de transição, e segundo, modela o sistema esquecendo da causalidade do mesmo. Por esta razão ainda é válido considerar a resolução direta do problema de autovalores.

Um análise dos métodos que poderiam ser candidatos à solução deste problema de características complexas, dependência de frequência e temperatura, demonstra que não são os mais adequados para esta situação, devido ao fato que de alguma forma sempre apresentam uma inversão (decomposição) da matriz de rigidez, onde a dependência se manifesta, fazendo que os métodos usuais para o cálculo de autovalores e autovetores sejam elevadamente custosos.

Para solucionar este problema foi desenvolvido um novo método, o qual foi implementado computacionalmente, que utiliza uma decomposição da matriz de massa e a projeção a um sub – espaço modal de uma frequência arbitrária a fim de reduzir o tamanho das matrizes e conservar os autovalores na faixa de interesse. O método foi utilizado com sucesso é seus resultados forem comprovados experimentalmente para vigas sanduíche, embora as pequenas diferenças sejam produtos de ruído nas medições e as limitações do método. Outro aspeto importante, que foi obtido como consequência do método para calcular os autovalores usado, foi um técnica para estimar as frequências de ressonância e os fatores de perda modais, derivado dos diagramas de Campbell, que comúmente são usados em dinâmica de rotores.

Uma aplicação do trabalho desenvolvido, foi a utilização do método de cálculo de autovalores para o projeto de um neutralizador dinâmico de vibrações. A base para dito projeto foi a modificação do neutralizador Stockbridge usado em linhas de transmissão de energia elétrica. Em conjunto com o método das quantidades equivalentes generalizadas para neutralizadores e o método de otimização não linear baseado em algoritmo genético. Para realizar dita finalidade implementou-se um programa baseado no programa de autovalores anteriormente mencionado, as principais modificações foram o calculo da rigidez dinâmica impedância e massa dinâmica na base do

neutralizador, a construção de uma função objetivo e a implementação da rotina de algoritmo genético.

Encontrou-se então um problema bastante importante, que foi a baixa taxa de convergência ao pseudo – inverter uma matriz de cálculos parciais do processo. Inicialmente esperava-se que poucos modos fossem necessários para lograr dito objetivo com sucesso, como foi possível fazer para o cálculo da resposta em frequência, desgraçadamente não foi assim, para lograr um projeto ótimo de neutralizador estimou-se um tempo extenso demais para ter alguma utilidade prática.

Tentou-se usar modelos alternativos de elementos finitos para estruturas compostas metal/elastômero tipo viga sanduíche, mas os resultados não foram satisfatórios porque quando o material viscoelástico entrava na região de transição o aumento na rigidez e no fator de perda não eram acompanhados apropriadamente pelos modelos. Finalmente optou-se por simulações não otimizadas de neutralizadores agindo sobre estruturas reais.

6.2 CONCLUSÕES

Este trabalho centrou-se na dinâmica de estruturas com parâmetros dependentes da frequência. Uma revisão da dinâmica de estruturas com amortecimento estrutural independente da frequência (isto é, histerético) foi inicialmente feita por razões pedagógicas. A matriz de rigidez de tal sistema é complexa, bem como os autovalores e os autovetores do problema subjacente. A questão da causalidade é adequadamente demonstrada para amortecimento histerético e levantada para o amortecimento estrutural geral.

Para o controle passivo de vibrações e ruído acústico um tipo importante de estrutura é a composta metal/elastômero. Para boa eficácia este material deve-se atuar na zona de transição, tanto da temperatura como da frequência. Nesse caso a matriz de rigidez do sistema, além de ser complexa, é dependente da frequência. A dinâmica deste tipo de estruturas foi mostrada no capítulo III, artigo 3.2.

Além desta dinâmica, feita no domínio da frequência, um procedimento foi proposto para a solução eficiente do problema de

autovalores. As expressões finais para a resposta em frequência (receptância) foi derivada. A teoria foi testada no Laboratório de Vibrações e Acústica. As matrizes de rigidez e de massa foram montadas por técnicas usuais de elementos finitos. A solução do problema de autovalores levou à determinação das frequências naturais em diagramas tipo Campbell em várias temperaturas. Um ponto relevante desta teoria conduz à determinação do fator de perda da estrutura em toda a banda de frequências e não apenas, limitadamente, nas frequências naturais, como se faz até aqui. Os resultados numéricos, tão ricos quanto promissores, foram testados experimentalmente e os corroboram. As discrepâncias devem ser atribuídas às limitações da teoria do capítulo III e a fatos experimentais, como já foi comentado no capítulo IV. Embora estas limitações podem ser superadas em estudos posteriores.

A utilização de elementos sólidos lagrangianos 2D, em estado plano de tensões, para modelar estruturas compostas que possuam materiais viscoelásticos, e um certo grau de simetria é viável. Obviamente quando a forma da estrutura seja mais complexa, outro tipo de elementos podem ser usados. Mas quaisquer que sejam estes o problema da determinação dos autovalores e autovetores pode ser resolvido usando o método criado no presente trabalho.

É possível compatibilizar o método de grandezas generalizadas equivalentes com a técnica dos elementos finitos para determinar o comportamento dinâmico de estruturas que possuam neutralizadores de vibração, independente da natureza da estrutura primária a ser estudada. A massa dinâmica e a impedância na raiz do neutralizador, necessárias à determinação das grandezas generalizadas, são determinadas por suas expressões.

Embora, a dinâmica de um neutralizador de vibrações tipo Stockbridge viscoelásticamente modificado, tenha sido estudada com sucesso, o processo de otimização não foi atingido. Os tempos de computação são elevados demais como para ser práticos.

6.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Renovar para cada frequência a matriz de transformação $\hat{\Phi}_0$ usando os resultados da matriz $S(\Omega)$, obtidos na iteração anterior.

Estimar o erro causado pela matriz de transformação $\hat{\Phi}_0$ como uma função da frequência e a temperatura.

Inicialmente criar um novo método para o cálculo da impedância mecânica de estruturas modeladas por elementos finitos que sejam de grande porte. Isto usualmente requer o cálculo de inversas de matrizes, logo implica formas de inverter que sejam mais eficientes, ou bem outras formas de modelamento.

Pesquisar no campo dos elementos finitos a fim de criar um elemento metal/elastômero tipo viga ou placa sanduíche, que represente o comportamento deste tipo de estruturas na regiões de transição e vítrea. Atualmente o existente na literatura e projetado para a região I destes materiais.

Como outra sugestão para futuros estudos, recomenda-se que, em se partindo da formulação apresentada, estudem-se técnicas de projeto ótimo de tais neutralizadores. Uma ideia é começar pela otimização da espessura do elastômero apenas, sendo as demais dimensões físicas dadas a priori. Também, em uma segunda etapa, o material elastômero pode ser considerado.

Uma outra sugestão é o acoplamento da teoria do capítulo III com a teoria das secções equivalentes, apresentada por João Neto (1999) em sua Dissertação de Mestrado. Esta teoria está agora sendo elaborada para estruturas compostas, i.e. mediante métodos experimentais é possível calcular o $EI(\Omega, \theta)$ da estrutura composta, em função da frequência e da temperatura. Prevê-se que esse acoplamento, implicará em uma enorme economia na construção da matriz de rigidez

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVARENGA, E.S., Otimização de Neutralizadores Dinâmicos Tipo Pendular, Dissertação de Mestrado, UFSC, Santa Catarina, 1994.

ASTM E 756-93, Standard Test Method for Measuring Vibration Damping Properties of Materials. American Society for Testing Materials, 1993.

BATHE, J., Finite Elements Proceedings in Engineering, Prentice - Hall Inc, 1982.

CRANDALL S. H., The Role of Damping in Vibration Theory, Journal of Sound and Vibration, Vol. 11(1), pp. 3 – 18, 1970

CRANDALL S. H., The Histeretic Damping Model in Vibration Theory, Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science , Vol. 205, pp. 23 – 28, 1991.

DEN HARTOG , J.P., Mechanical Vibrations, McGraw-Hill, New York, 1956.

DI TARANTO, R., 1965, Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite Beams, Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, pp 881 - 886.

ESPÍNDOLA, J.J., Apostila de Controle de Vibração, Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica (LVA), UFSC, Santa Catarina, 1987.

ESPÍNDOLA J.J., Apostila do Curso de Vibrações em Estruturas., Curso de Pós- Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC,1991.

ESPÍNDOLA, J.J, SILVA, H.P., Modal Reduction of Vibrations by Dynamic Neutralizers: A General Approach, In: 10th International Modal Analysis Conference, San Diego, California, pp. 1367-1373, 1992.

ESPÍNDOLA, J.J, FLOODY, S.E., On the Modeling of Metal – Elastomer Composites Structures: A Finite Element Method Approach, In: PACAM IV – DINAME VI, Pan American Congress in Applied Mechanics, Rio de Janeiro, Brasil , 1998.

LOPES E. M. O., BRANDON J.A., ESPÍNDOLA J.J., On the Use of SVD for Solving Inverse Problems in Sandwich Beams, In: Friswell, M.I. and Mottershead, J.E. eds. In: Proceedings of the International Conference on Identification Theory. Swansea: University of Wales Swansea. pp. 184 – 193, 1995.

LOPES E. M. O., BRANDON J.A., ESPÍNDOLA J.J., Some Recent Results in the Inverse Analysis of Sandwich Beams. In: Sas. P. Ed. Proceedings of ISMA 21 – 1996 International Conference on Noise and Vibration Engineering, Vol. II Leuven: Katholieke Universiteit Leuven. pp. 1131 – 1135, 1996.

ESPÍNDOLA, J.J., AND BAVASTRI, C.A., Reduction of Vibration in Complex Structures with Viscoelastic Neutralizers - A Generalized Approach and a Physical Realization, In: Proceeding of DETC'97, 1997 ASME Design Engineering Technical Conferences, September 14 - 17, 1997, Sacramento, California, 1995.

FREITAS, F., Controle de Vibrações e Ruído por Neutralizadores Dinâmicos Tipo Viga: Método das Grandezas Generalizadas Equivalentes., Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, UFSC, 1993.

HAMIDZADEH, H., JIANG, J., Modal Loss Factors of Three Layer Cylinder with Viscoelastic Core., In: ASME Design Engineering Technical Conferences, Vol. 3, Part C, pp 3 - 8, 1995.

HARRIS, C.M., CREDE, C.H., Shock and Vibration Handbook, McGraw Hill Company, New York, 1976, 1976.

HUGHES, T., The Finite Element Method, Prentice - Hall Inc, 1987.

HOLLAND, J.H. Adaptation in natural and artificial systems, Ann Arbor, MI: The University of Michigan Press. [HOLLAND75]: 2nd ed. 1992

HUNT, J.B., Dynamic Vibration Absorbers, Mechanical Engineering Publication LTD., London, 1979.

JAQUOT, R.G., FOSTER, J.E., Optimal Cantilever Dynamic Vibration Absorber, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, February, pp 138-141, 1977.

JOHNSON C.D., KLEINHOLTZ D.A., Rogers L.C., Finite Element Prediction of Damping in Beams with Constrained Viscoelastic Layers, Shock and Vibration Bulletin, Vol. 51, pp.71 – 80, 1981.

JONES, D.I.G., NASHIF, A.D. AND STARGARDTER, H., 1975, Vibrating Beam Dampers for Reducing Vibrations in Gas Turbines, Journal of Engineering for Power, January, pp 111-116.

LANCZOS C., An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators, Journal of Research of the national Bureau of Standards, Vol. 45, pp. 255 – 281, 1950.

LU, Y. P., KILLIAN, W., EVERSTINE, C., Vibration of Three Layered Damped Sandwich Composites, Journal of Sound and Vibration, Vol. 64, pp 63 - 71, 1979.

MEAD D .J., The Damping Properties of Elastically Supported Sandwich Plates, Journal of Sound and Vibration, Vol. 34(3), pp. 275 – 295, 1972.

MEAD, D. J., MARKUS, S., The Forced Vibration of a Three - Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 10(2), pp271 - 282, 1969.

MIGNERY, L., Vibration Analysis of Metal / Polymer / Metal Components, In: *ASME Design Engineering Technical Conferences*, Vol. 3, Part C, pp 23 - 33, 1995.

MILES R. N., REINHALL P. G., An Analytical Model for the Vibration of Laminated Beams Including the Effects of Both Shear and Thickness Deformation in the Adhesive Layer, *Transactions of the ASME*, Vol. 108, pp. 56 – 64, 1986.

NASHIF, A.D., JONES, D.I.G., A Resonant Beam Tuned Damping Device, *Journal of Engineering for Power*, July, pp 143-148, 1969.

NASHIF, A.D., JONES, D.I.G, HENDERSON, J.P., “Vibration Damping”, John Wiley & Sons, 1985.

NETO, J.M., Identificação de Parâmetros Materiais e Estruturais no Domínio da Frequência, *Dissertação de Mestrado*, UFSC, Santa Catarina, 1999.

RAVI S. S. A., KUNDRA T. K., NAKRA B. C., A Response Re-Analysis of Damped Beams Using Eigenparameter Perturbation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 179(3), pp. 399 – 412, 1995.

RAO, D., Frequency and Loss Factor of Sandwich Beams Under Various Bondary Conditions, *Journal of Mechanics Engineering Science*, Vol. 20 (5), pp 271 – 282, 1978.

RECHENBERG, I. (1973, 2nd edn) *Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*, Stuttgart: Fromman-Holzboog. (Evolution Strategy: Optimization of technical systems by means of biological evolution), 1993.

ROGERS, L. C., JOHNSON, D. A., KEINHOLTZ, D., The Modal Strain Energy Method and Its Application to Damped Laminated Beams”, *51st Shock and Vibration Symposium*, San Diego, California, pp 71 - 81, 1980.

ROSS, D., UNGAR, E., KERWIN, M., Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminate Structural Damping., Structural Damping, ASME, New York, pp 49 – 58, 1959.

SNOWDON, J.C., Steady - State Behaviour of the Dynamic Absorber, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 31, N 8, pp. 1096-1103, 1959.

SNOWDON, J.C., Vibration of Cantilever Beams to which Dynamic Absorbers are Attached, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 39, N 5, Part 1, pp. 878-881, 1966.

SNOWDON, J.C., Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems, John Wiley & Sons, New York, 1968

SNOWDON, J.C., Nobile, M.A., Beamlike Dynamic Vibration Absorbers, Acustica, Vol. 44, pp 98-108, 1980.

SNOWDON, J.C., WOLF, A. A., KERLIN, R.L., The Cruciform Dynamic Vibration Absorber”, Journal of the Acoustic Society of America, Vol. 75, N 6, pp 1792-1799, 1984.

SONI, M. L., 1980, Finite Element Analysis of Viscoelastically Damped Sandwich Structures, In: 51st Shock and Vibration Symposium, San Diego, California, pp 97 - 109.

TEXEIRA, P.H., Neutralizadores Viscoelásticos em Cabos de Transmissão, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil, 1998.

TOMLINSON G. R., The Use of Constrained Layer Damping in Vibration Control, International Journal of Mechanical Society, Vol. 32(3), pp.233 – 242, 1990.

TROMPETE P., BOILLOT D., RAVANEL M. A., The Effect of Boundary Conditions on the Vibration of a Viscoelastically Damped Cantilever Beam, Journal of Sound and Vibration, Vol. 60(3) pp.345 – 350, 1978.

VANCE, J.M., Rotordynamics of Turbomachinery, John Wiley and Sons, 1988.

APÊNDICE A: TEOREMA DA EXPANSÃO TRUNCADA

A.1 INTRODUÇÃO

De um modo geral seja:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} . \tag{A.1}$$

\mathbf{A} : uma matriz real $n \times \hat{n}$ de rank \hat{n} .

\mathbf{b} : um vetor real $n \times 1$.

\mathbf{x} : um vetor real $\hat{n} \times 1$.

Pre – multiplicando B.1 por \mathbf{A}^T , tem-se:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b} \tag{A.2}$$

Se \mathbf{A} é de rank \hat{n} , então a matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ de ordem $\hat{n} \times \hat{n}$ também o será. Então $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$ existe e

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T\mathbf{b} \tag{A.3}$$

Onde $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ é a pseudo inversa de Moore – Penrose.

Se o rank de \mathbf{A} for menor que \hat{n} então $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ não existe. Ainda assim é possível definir uma pseudo inversa para \mathbf{A} que de uma solução para $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ no sentido dos mínimos quadrados, isto é, uma solução tal que

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2, \quad (\text{A.4})$$

seja mínima. Outro tipo de soluções que envolvem a equação (B.1), estão fora do escopo deste anexo.

A.2 TEOREMA DA EXPANSÃO TRUNCADA

Sabe-se que os coeficientes da solução da equação de movimento de um sistema não amortecido \mathbf{q} são dados por:

$$\mathbf{q} = \Phi \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \quad (\text{A.5})$$

onde

Φ : Matriz modal $n \times n$.
 α : Vetor de constantes $n \times 1$.

Então dado \mathbf{q} as constantes são determinadas por

$$\alpha = \Phi^{-1} \mathbf{q}, \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\Phi^{-1} = \mathbf{M}_r^{-\frac{1}{2}} \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{M}_r^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{M}_r = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad (\text{A.8})$$

Truncando-se a expansão, tem-se:

$$\mathbf{q} = \hat{\Phi} \hat{\alpha}, \quad (\text{A.9})$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} & : && \text{Matriz modal truncada } n \times \hat{n}. \\ \hat{\alpha} & : && \text{Vetor truncado de constantes } \hat{n} \times 1. \end{aligned}$$

Para obter $\hat{\alpha}$ a partir da equação (A2.9), já que $\hat{\Phi}$ não é quadrada e tem rank $\hat{n} \ll n$, pre- multiplica-se por $\hat{\Phi}^T \mathbf{M}$, então:

$$\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{q} = \hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi} \hat{\alpha} \quad (\text{A.10})$$

Como $\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi}$ é de ordem $\hat{n} \times \hat{n}$ e de rank \hat{n} , logo a solução é dada por:

$$\hat{\alpha} = \left(\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi} \right)^{-1} \hat{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{q} \quad (\text{A.11})$$

Se Φ for ortonormal, então:

$$\Phi^{-1} = \Phi^T \mathbf{M}, \quad (\text{A.12})$$

$$\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi} = \mathbf{I}_{\hat{n}}, \quad (\text{A.13})$$

logo, neste caso

$$\hat{\alpha} = \hat{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{q}. \quad (\text{A.14})$$

Finalmente, deve-se notar que:

$$\left(\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi} \right)^{-1} \neq \hat{\Phi}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \hat{\Phi}^{-T} \quad (\text{A.15})$$

e que

$$\hat{\Phi}^+ = \left(\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi} \right)^{-1} \hat{\Phi}^T \mathbf{M} \quad (\text{A.16})$$

$$\hat{\Phi}^+ = \hat{\Phi}^T \mathbf{M} \quad (\text{A.17})$$

Correspondem às pseudo inversas de $\hat{\Phi}$ nos casos não ortonormalizado (eq. A.11) e ortonormalizado (eq. A.14) respectivamente.

A.3 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO COM MATRIZ DE RIGIDEZ DEPENDENTE DA FREQUÊNCIA PARA MATRIZES DE GRANDE PORTE

Seja a equação

$$\left[-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}(\Omega) \right] \mathbf{Q}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega) \quad (\text{A.18})$$

Para uma frequência fixa Ω_0 resolve-se o problema generalizado de auto valores

$$\mathbf{K}(\Omega_0) \phi_0 = \sigma_0 \mathbf{M} \phi_0, \quad (\text{A.19})$$

Onde

$$\Phi_0^T \mathbf{M} \Phi_0 = \mathbf{I} \quad (\text{A.20})$$

$$\Phi_0^T \mathbf{K}(\Omega_0) \Phi_0 = \Sigma_0 \quad (\text{A.21})$$

\mathbf{I} :Matriz identidade

$\Sigma_0 = \text{diag}(\sigma_0)$:Matriz formada pelos autovalores do problema inicial.

Tem-se a transformação:

$$\mathbf{Q}(\Omega) \approx \hat{\Phi}_0 \mathbf{Y}(\Omega) \quad (\text{A.22})$$

$$\hat{\Phi}_0 \in C^{n \times \hat{n}} \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}(\Omega) \in C^{\hat{n} \times 1}; \quad \hat{n} \ll n.$$

Valem as relações:

$$\hat{\Phi}_0^T \mathbf{M} \hat{\Phi}_0 = \mathbf{I}_{\hat{n}} \quad (\text{A.23})$$

$$\hat{\Phi}_0^T \mathbf{K}(\Omega_0) \hat{\Phi}_0 = \Sigma_{\hat{n}} \quad (\text{A.24})$$

$$\hat{\Phi}_0 = [\phi_1, \dots, \phi_{\hat{n}}] \quad (\text{A.25})$$

Substituindo na equação e pre - multiplicando por $\hat{\Phi}_0^T$

$$[-\Omega^2 \mathbf{I}_{\hat{n}} + \hat{\Phi}_0^T \mathbf{K}(\Omega) \hat{\Phi}_0] \mathbf{Y}(\Omega) \approx \hat{\Phi}_0^T \mathbf{F}(\Omega) \quad (\text{A.26})$$

Como $\hat{\Phi}_0^T \mathbf{K}(\Omega) \hat{\Phi}_0$ não é diagonal se $\Omega \neq \Omega_0$ para uma certa frequência Ω , tem-se

$$\mathbf{A}(\Omega) \mathbf{Y}(\Omega) \approx \hat{\Phi}_0^T \mathbf{F}(\Omega), \quad (\text{A.27})$$

onde

$$\mathbf{A}(\Omega) = -\Omega^2 \mathbf{I}_{\hat{n}} + \hat{\Phi}_0^T \mathbf{K}(\Omega) \hat{\Phi}_0 \in C^{\hat{n} \times \hat{n}}. \quad (\text{A.28})$$

Logo

$$\mathbf{Y}(\Omega) = \mathbf{A}^{-1}(\Omega) \hat{\Phi}_0^T \mathbf{F}(\Omega), \quad (\text{A.29})$$

usando a transformação (A.22)

$$\mathbf{Q}(\Omega) \approx \Phi_0 \mathbf{A}^{-1}(\Omega) \hat{\Phi}_0^T \mathbf{F}(\Omega). \quad (\text{A.30})$$

Resolva-se o problema de autovalores:

$$\mathbf{A}(\Omega) \psi(\Omega) = \delta(\Omega) \psi(\Omega), \quad (\text{A.31})$$

com

$$\Psi(\Omega)^T \Psi(\Omega) = \mathbf{I}_{\hat{n}} \quad (\text{A.32})$$

$$\Psi(\Omega)^T \mathbf{A}(\Omega) \Psi(\Omega) = \Lambda(\Omega) \quad (\text{A.33})$$

onde $\Lambda(\Omega) \in C^{\hat{n} \times \hat{n}}$

$$\Psi^{-1}(\Omega) = \Psi^T(\Omega) \quad \text{onde} \quad \Psi(\Omega) \in C^{\hat{n} \times \hat{n}}, \quad (\text{A.34})$$

$$\mathbf{A}^{-1}(\Omega) = \Psi(\Omega) \Lambda^{-1}(\Omega) \Psi^T(\Omega) \quad (\text{A.35})$$

portanto

Substituindo na equação (A.26)

$$\mathbf{Q}(\Omega) \approx \hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) \Lambda^{-1}(\Omega) \Phi_0^T \Psi^T(\Omega) \mathbf{F}(\Omega) \quad (\text{A.36})$$

De (A.33), tira-se:

$$\Lambda(\Omega) = \Psi^T(\Omega) \left[-\Omega^2 \mathbf{I}_{\hat{n}} + \hat{\Phi}_0^T K(\Omega) \hat{\Phi}_0 \right] \Psi(\Omega) \quad (\text{A.37})$$

$$\Lambda(\Omega) = -\Omega^2 \mathbf{I}_{\hat{n}} + \Psi^T(\Omega) \hat{\Phi}_0^T \mathbf{K}(\Omega) \hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) \quad (\text{A.38})$$

pode-se escrever

$$\Lambda(\Omega) = -\Omega^2 \mathbf{I}_{\hat{n}} + \Lambda(\Omega) \quad (\text{A.39})$$

onde $\Lambda(\Omega)$ é diagonal porque $\Lambda(\Omega)$ também o é. Onde:

$$\Lambda(\Omega) = \Psi^T(\Omega) \hat{\Phi}_0^T \mathbf{K}(\Omega) \hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) \quad (\text{A.40})$$

Portanto a equação (A.36) fica como

$$\mathbf{Q}(\Omega) \approx \hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega) [-\Omega^2 \mathbf{I}_{\hat{n}} + \Lambda(\Omega)]^{-1} \Psi(\Omega) \hat{\Phi}_0^T \mathbf{F}(\Omega) \quad (\text{A.41})$$

ou bem

$$\mathbf{Q}(\Omega) \approx (\hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega)) [-\Omega^2 \mathbf{I}_{\hat{n}} + \Lambda(\Omega)]^{-1} (\hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega))^T \mathbf{F}(\Omega) \quad (\text{A.42})$$

A matriz

$$\mathbf{X}^+ = [-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}(\Omega)]^+ \quad (\text{A.43})$$

$$\mathbf{X}^+ = (\hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega)) [-\Omega^2 \mathbf{I}_{\hat{n}} + \Lambda(\Omega)]^{-1} (\hat{\Phi}_0 \Psi(\Omega))^T \quad (\text{A.44})$$

Corresponde à pseudo inversa da matriz $[-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}(\Omega)]$. Tal solução é produto da expansão truncada que foi realizada na equação (A.22) no início da seção. Os efeitos de dependência da temperatura na matriz de rigidez são incluídos.

