Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Equação do Calor com Potencial Singular

Eleomar Cardoso Júnior

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

Florianópolis - SC
Fevereiro de 2011

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Equação do Calor com Potencial Singular

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferencias Parciais.

Eleomar Cardoso Júnior

Florianópolis - SC

Fevereiro de 2011

EQUAÇÃO DO CALOR COM POTENCIAL SINGULAR

por

Eleomar Cardoso Júnior

Esta dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre" em Matemática, Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Dr. Clóvis Caesar Gonzaga

Coordenador em Exercício da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

(UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Anderson Luiz Maciel (UFSM)

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz (UFSC)

Prof. Dr. Luiz Augusto Saeger (UFSC)

Florianópolis, fevereiro de 2011.

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe, Rosi Soares. Apesar das limitações e dificuldades, minha mãe sempre esteve ao meu lado, me incentivando e mostrando que eu sou capaz de vencer os desafios e atingir todos os meus objetivos pessoais e profissionais. A pessoa que sou é reflexo de sua dedicação, educação, presença e amor incondicional.

Agradeço à minha avó, Rosalina, por sua preocupação e apoio. Agradeço também à minha irmã, Catiani, pela amizade e atenção.

Agradeço aos meus amigos de mestrado pelo companheirismo, pelas incontáveis horas de estudo compartilhadas e pelos momentos de conversa e descontração. Agradeço a Eric, Mateus, Thiane e Viviam, pessoas que conheço desde o ano 2005, quando ingressamos no curso de matemática licenciatura da UFSC, e que o tempo de mestrado só fez com que eu os admirasse e os respeitasse ainda mais. Agradeço também a Darlyn e Fábio.

Agradeço a todos os professores com que tive a honra de adquirir conhecimentos durante o período de mestrado. Agradeço ao Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão pelo seu exímio curso de Análise, pelos seus ensinamentos sobre EDPs e Espaços de Sobolev e pelo seu incentivo com relação ao meu ingresso no doutorado.

Agradeço aos professores membros da banca examinadora pelas correções e sugestões, contribuindo em muito no aprimoramento da versão final desta dissertação.

Agradeço de forma especial ao meu orientador, o Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa. Agradeço à dedicação, ao constante incentivo, à preocupação com o andamento da pesquisa e às inúmeras dicas e correções sugeridas. Mais que um orientador, o Prof. Gustavo tornou-se um amigo, uma excelente referência de pessoa e de profissional.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro durante o período de 03/2009 a 02/2011.

Resumo

Este trabalho investiga a existência e unicidade de solução generalizada para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u \quad , \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T) \quad , \quad N \geq 3 \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

onde o potencial V é da forma $V(x) := \dfrac{\lambda}{|x|^2}$ e $0 \leq \lambda < \lambda^* := \dfrac{(N-2)^2}{4}$. Para abordagem, consideramos problemas aproximados definidos sobre regiões limitadas. O embasamento básico é dado por Marchi, ref. [25].

Uma condição suficiente para existência e unicidade de solução é a restrição do crescimento da solução u e da condição inicial u_0. Para tal, consideramos que $|u_0(x)| \leq k|x|^{\alpha}e^{c|x|^2}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^N$, onde c e k são constantes positivas e α atende

$$\frac{-N+2-\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2} < \alpha \leq \frac{-N+2+\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2}.$$

Abstract

This work investigates the existence and uniqueness of generalized solution for the Cauchy problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u \quad , \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T) \quad , \quad N \geq 3 \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

where the potential V has the form $V(x) := \dfrac{\lambda}{|x|^2}$ and $0 \leq \lambda < \lambda^* := \dfrac{(N-2)^2}{4}$. In this approach, we consider approximate problems defined on bounded domains. The basic basement is presented by Marchi, ref. [25].

A sufficient condition for existence and uniqueness of the solution is to restrict the growths of the solution u and of the initial datum u_0. Thus, we consider that $|u_0(x)| \leq k|x|^{\alpha} e^{c|x|^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$, where c and k are positive constants, with

$$\frac{-N+2-\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2} < \alpha \leq \frac{-N+2+\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2}.$$

Sumário

Introdução

Seja N um inteiro não-negativo, $N \geq 3$, $T > 0$ um número real fixo e u_0 uma função real. Este trabalho se preocupa em estudar o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u \quad , \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T). \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1}$$

Para $\lambda \geq 0$, consideramos

$$V(x) := \frac{\lambda}{|x|^2}, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Notamos que V é um potencial que admite uma singularidade em $x = 0$. Na origem, para $\lambda > 0$, o valor de V "explode".

Notamos que uma equação da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u \tag{3}$$

aparece em diversos contextos. Por exemplo, no estudo de fenômenos de combustão após a linearização da equação diferencial. É o caso da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + v(x)e^u.$$

Na aproximação linear $e^u \approx 1 + u = g$ obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \Delta g + v(x)g$$

(ver referências: [5], [9], [12] e [31], citadas por [25]).

A versão elíptica da equação (3),

$$-\Delta u + Vu = 0,$$

ou seja, sem a derivada temporal, é muito estudada em conexão com a equação de Schrödinger, inclusive com potencial da forma

$$V(x) = -\frac{1}{|x|^2(\log|x| + 2)^\beta},$$

onde $\beta \geq 0$ (ver referências: [18], [19], [22] e [28], citadas por [25]).

No caso em que $\lambda = 0$, temos o problema de Cauchy que envolve a bastante conhecida equação do calor. De acordo com a ref. [25], a literatura aborda a unicidade de solução através de associações de dois tipos: em primeiro lugar, considera a não-negatividade da solução (ver referências: [32], [13] e [11]); uma segunda forma requer alguma condição imposta sobre o crescimento da solução quando $|x| \longrightarrow \infty$. Segundo Tychonov, ref. [29], existe no máximo uma solução u tal que, para $|x|$ suficientemente grande,

$$|u(x,t)| \leq K \exp\{C|x|^2\},$$

onde C e K são constantes positivas.

Por outro lado, se $V \in L^\sigma(\Omega)$ para algum $\sigma > \frac{N}{2}$ (com Ω sendo um domínio limitado), então o problema pode ser tratado por métodos desenvolvidos nas referências [7], [10] e [23]. Esse não é o caso configurado pelo problema (1) com potencial singular (2), pois,

$$V(x) := \frac{\lambda}{|x|^2} \in L^{\sigma}(\mathbb{R}^N),$$

somente se $\sigma < \dfrac{N}{2}$. O caso $\sigma = \dfrac{N}{2}$ foi investigado na ref. [17].

Os resultados pioneiros no estudo da equação do calor com potencial singular foram publicados em 1984 por Pierre Baras e Jerome A. Goldstein, ref. [3].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, \ldots$, com $B_1 \subset \Omega$, onde Ω é aberto e $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$. Seja $V(x) = \dfrac{\lambda}{|x|^2}$, $x \in \Omega$ e $\lambda \geq 0$. Baras e Goldstein investigaram a existência de solução distribucional do problema

$$(Q) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = Vu & , \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & , \quad x \in \Omega \end{cases}$$

com $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$ (na verdade, u_0 não sendo zero quase sempre) e $u_0 \in L^1(\Omega)$. Aplicando métodos de semigrupo ao problema aproximado com potencial $V_n(x) = \min\{V(x), n\}$,

$$(Q_n) \begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n = V_n u_n & , \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u_n(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u_n(x,0) = u_0(x) & , \quad x \in \Omega \end{cases}$$

para $n = 1, 2, \ldots$, Baras e Goldstein demonstraram que:

(I) Se

$$0 \leq \lambda \leq \lambda^* := \frac{(N-2)^2}{4},$$

então, $\lim\limits_{n \to \infty} u_n(x,t) = u(x,t) \geq 0$ existe e u é uma solução do problema (Q).

(II) Se $\lambda > \lambda^*$, então,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = \infty, \ \forall \ (x,t) \in \Omega \times (0,T).$$

Na ref. [3], Baras e Goldstein também investigaram o problema de Cauchy no caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N, \ t > 0$; obteram os mesmos resultados empregando técnicas probabilísticas.

Eles também investigaram o uso mais geral da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = V(x)u + f(x,t)$$

no caso em que $V \geq 0$ é um potencial satisfazendo $V \in L^\infty(\Omega - B_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$, sendo que $B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < \varepsilon\}$. Se $V \leq V_0$, onde

$$V_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|x|^2}, & se \quad x \in B_1 \\ 0, & se \quad x \in \Omega - B_1 \end{cases}$$

e $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$, então o problema

$$(P) \begin{cases} u \geq 0 \ sobre \ \Omega \times (0,T) \\ Vu \in L^1_{loc}(\Omega \times (0,T)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + Vu + f \ em \ \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)) \\ ess \lim\limits_{t\to 0^+} \displaystyle\int_\Omega u(t)\phi \, dx = \int_\Omega \phi u_0 \, dx, \ \forall \ \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{cases}$$

tem solução se

$$\int_\Omega |x|^{-\alpha} u_0 \, dx < \infty$$

e

$$\int_0^T \int_\Omega f(x,s)|x|^{-\alpha} \, dx \, ds < \infty,$$

onde

$$\alpha = \frac{N-2}{2} - \left(\left(\frac{N-2}{2} \right)^2 - \lambda \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Na ref. [3], Baras e Goldstein observaram sem demonstrar, no Remark 7.3, pag. 137, que nas condições consideradas a solução do problema (P) pode não ser única.

Se $\lambda > \lambda^*$, $V \geq V_0$ e ainda $u_0 \neq 0$ ou $f \neq 0$, então, o problema (P) não admite solução.

Nesta dissertação, estudamos os resultados devidos a C. Marchi, na referência [25], **The Cauchy Problem for the Heat Equation with a Singular Potential**, onde o problema (1)-(2) é investigado. Neste artigo, uma condição de crescimento sobre a condição inicial é proposta e permite demonstrar a existência e unicidade de solução generalizada do problema de Cauchy na faixa $\mathbb{R}^N \times (0, T)$, $N \geq 3$.

A presente dissertação está organizada em quatro capítulos.

No Capítulo 1 são abordadas noções elementares da Análise e da Análise Funcional. Os espaços L^p, os espaços de Sobolev, algumas desigualdades e relações pertinentes e as características dos Operadores Elípticos de Segunda Ordem e sua Regularidade também são apresentados neste capítulo.

No Capítulo 2, trabalhamos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + W(x)u & , \quad (x,t) \in \Omega \times (0, T] \\ u(x,0) = g(x) & , \quad x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0, T] \end{cases}$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, $g \in L^2(\Omega)$ e $W \in L^\infty(\Omega)$.

Com auxílio do Método de Galerkin prova-se que o dado problema apresenta uma única solução fraca.

No Capítulo 3 demonstra-se a existência de solução generalizada para o problema de Cauchy (1)-(2). Para tal abordagem, trabalhamos com problemas aproximados, definidos sobre regiões limitadas, aplicando resultados do Capítulo 2.

No Capítulo 4, demonstra-se a unicidade da solução do problema (1)-(2).

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Resultados Clássicos da Análise

Nesta seção, abordaremos aspectos elementares da análise que são tratados detalhadamente nas referências [24], [26] e [27].

Consideramos $(M, \|\cdot\|_M)$ e $(N, \|\cdot\|_N)$ espaços normados e A é um subconjunto do espaço $(M, \|\cdot\|_M)$.

Definição 1.1.1 (Funções Limitadas)**.** *A função $f : A \to (N, \|\cdot\|_N)$ é limitada se: $\exists\ y_0 \in N$ e $\exists\ R > 0$ tal que $\|f(x) - y_0\|_N < R$, $\forall\ x \in A$.*

Definição 1.1.2. *O conjunto $A \subset (M, \|\cdot\|_M)$ é dito convexo se dados quaisquer x e y pertencentes a A, então, $tx + (1-t)y \in A$, para qualquer $t \in [0, 1]$.*

Teorema 1.1.1 (Teorema do Valor Médio)**.** *Suponha $G \subset \mathbb{R}^n$, um conjunto aberto e convexo. Suponha a função $f : G \to \mathbb{R}$, diferenciável sobre G. Para quaisquer $x, y \in G$, existe c no segmento que liga x a y em G, tal que*

$$f(y) - f(x) = Df(c) \cdot (y - x),$$

onde $Df(c)$ denota a derivada da função f aplicada em c.

Demonstração. Ref. [26], pg. 373. □

Definição 1.1.3 (Convergência Pontual de Funções)**.** *Sejam as funções $f_n, f : A \to (N, \|\cdot\|_N)$, $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que f_n converge pontualmente para f se: $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ em N, para cada $x \in A$.*

Definição 1.1.4 (Convergência Uniforme de Funções)**.** *Sejam as funções $f_n, f : A \to (N, \|\cdot\|_N)$, $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que f_n converge uniformemente para f se: $\forall\ \epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, n_0 dependendo somente de ϵ, tal que $\|f_n(x) - f(x)\|_N < \epsilon$, $\forall\ x \in A$, $\forall\ n \geq n_0$.*

A convergência uniforme de funções implica na convergência pontual de funções. Entretanto, a recíproca desta informação não é verdadeira.

Teorema 1.1.2. *Sejam $f_n, f : A \subset (M, \|\cdot\|_M) \to (N, \|\cdot\|_N)$ funções, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Suponha que, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, f_n é contínua e que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em A. Então, f é contínua.*

Demonstração. Ref. [26], pg. 294. □

Notação 1.1.1. $C(A, N) = \{f : A \to N \mid f$ *é função contínua* $\}$.

Notação 1.1.2. $C_b(A, N) = \{f : A \to N \mid f$ *é função contínua e limitada* $\}$.

Definição 1.1.5 (Equicontinuidade)**.** *Sejam* $A \subset (M, \|\cdot\|_M)$ *e o conjunto de funções* $B \subset C_b(A, N)$. *Diz-se que* B *é equicontínuo se dado* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que se* x, $y \in A$ *e* $\|x - y\|_M < \delta$, *então,* $\|f(x) - f(y)\|_N < \epsilon$, $\forall\ f \in B$.

Definição 1.1.6 (Conjunto Pontualmente Compacto)**.** *Seja* $B \subset C(A, N)$. *Seja* $x \in A$ *e* $B_x = \{f(x)|f \in B\}$. B *é dito pontualmente compacto se* B_x *é compacto em* N, $\forall\ x \in A$.

Definição 1.1.7 (Conjunto Pontualmente Limitado)**.** *Seja* $B \subset C(A, N)$. *Seja* $x \in A$ *e* $B_x = \{f(x)|f \in B\}$. B *é dito pontualmente limitado se* B_x *é limitado em* N, $\forall\ x \in A$.

Teorema 1.1.3 (Teorema de Arzelà-Ascoli)**.** *Seja* $A \subset (M, \|\cdot\|_M)$, A *compacto. Sejam* $(N, \|\cdot\|_N)$ *espaço normado completo e* $B \subset C(A, N)$. *Então,* B *é compacto se e somente se* B *é fechado, equicontínuo e pontualmente compacto.*

Demonstração. Ref. [26], pg. 299-300. $\square$

Corolário 1.1.1 (Corolário do Teorema de Arzelà-Ascoli)**.** *Seja A conjunto compacto, $A \subset (M, \| \cdot \|_M)$. Suponha que $B \subset C(A, \mathbb{R}^n)$ é equicontínuo e pontualmente limitado. Então, toda sequência em B tem uma subsequência que converge uniformemente.*

Demonstração. Ref. [26], pg. 301. $\square$

Definição 1.1.8. *Sejam A um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e B um conjunto aberto do $\mathbb{R}^m$. Definimos $C^k(A)$, onde $k \in \mathbb{N}$, como o conjunto das funções $f : A \to \mathbb{R}$ que são k vezes continuamente diferenciáveis em A. Definimos $C^{k,j}(A \times B)$, onde $k, j \in \mathbb{N}$, como o conjunto das funções $f : A \times B \to \mathbb{R}$ que são k vezes continuamente diferenciáveis em A e j vezes continuamente diferenciáveis em B.*

1.2 Resultados da Análise Funcional

Nesta seção, abordamos aspectos referentes à análise funcional, sobretudo, relativos às noções de espaços de Banach e espaços de Hilbert. São referências: [8] e [21].

Definição 1.2.1 (Operador Linear)**.** *Sejam X e Y espaços vetoriais reais. Dizemos que $T : X \to Y$ é um operador linear se:*

(i) $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2), \ \forall \ x_1, \ x_2 \in X.$

(ii) $T(\alpha x_1) = \alpha T(x_1), \ \forall \ x_1 \in X, \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}.$

Definição 1.2.2 (Operador Linear Limitado)**.** *Sejam X e Y espaços vetoriais reais normados e $T : X \to Y$ um operador linear. Dizemos que T é um operador linear limitado se existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X, \ \forall \ x \in X$.*

Definição 1.2.3 (Funcional Linear Limitado)**.** *Seja X um espaço vetorial real normado. Um operador linear limitado $f : X \to \mathbb{R}$ define um funcional linear limitado sobre X.*

Sendo f o funcional linear acima definido, entendemos que

$$\langle f, x\rangle := f(x), \ \forall \ x \in X.$$

Definição 1.2.4 (Espaço Dual)**.** *Seja X um espaço vetorial real normado. Definimos o espaço dual de X, denotado por X', como a coleção de todos os funcionais lineares limitados sobre X.*

Espaço de Banach é definido como sendo um espaço vetorial real normado que é completo com relação à métrica induzida pela norma.

Definição 1.2.5 (Reflexividade)**.** *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X é reflexivo se $(X')' = X$.*

Seja X um espaço de Banach reflexivo. Entendemos que para cada $u'' \in (X')'$ existe $u \in X$ tal que

$$\langle u'', u'\rangle = \langle u', u\rangle, \ \forall \ u' \in X'.$$

Definição 1.2.6 (Separabilidade)**.** *Dizemos que um espaço métrico* E *é separável se existe um conjunto* $D \subset E$ *enumerável e denso em* E*.*

Teorema 1.2.1. *Seja* E *um espaço de Banach tal que* E'*, seu espaço dual, é separável. Então,* E *é separável.*

Demonstração. Ref. [8], pg. 47. □

Definição 1.2.7 (Produto Interno)**.** *Seja* X *um espaço vetorial real. Definimos produto interno como a função*

$$\begin{array}{rccc} (\cdot,\cdot)_X : & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1, x_2)_X \end{array}$$

tal que:

(i) $(x_1 + x_2, x_3)_X = (x_1, x_3)_X + (x_2, x_3)_X,\ \forall\ x_1,\ x_2,\ x_3 \in X.$

(ii) $(\alpha x_1, x_2)_X = \alpha(x_1, x_2)_X,\ \forall\ x_1,\ x_2 \in X,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}.$

(iii) $(x_1, x_2)_X = (x_2, x_1)_X,\ \forall\ x_1,\ x_2 \in X.$

(iv) $(x, x)_X \geq 0,\ \forall\ x \in X.$

(v) $(x, x)_X = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Seja X um espaço vetorial real munido de produto interno $(\cdot,\cdot)_X$. Em particular, X é um espaço normado com norma definida por

$$\|x\|_X := \sqrt{(x, x)_X},\ \forall\ x \in X.$$

Espaço de Hilbert é definido como um espaço vetorial real munido de produto interno que é completo com relação à norma induzida deste produto interno. Um espaço de Hilbert é, em particular, um espaço de Banach.

Teorema 1.2.2 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert real e H' seu espaço dual. Então, $\forall\ f \in H'$, existe um único $y \in H$ tal que:*
(i) $f(x) = \langle f, x\rangle = (x, y)_H,\ \forall\ x \in H$, onde $(\cdot,\cdot)_H$ caracteriza produto interno em H.
(ii) $\|f\|_{H'} = \|y\|_H$.

Demonstração. Ref. [21], pg. 188-190. □

Definição 1.2.8 (Base Hilbertiana)**.** *Seja $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ um espaço de Hilbert. Definimos a sequência de funções $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ como uma base Hilbertiana de H se:*
(i) $(e_n, e_n)_H = 1,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
(ii) $(e_n, e_m)_H = 0,\ \forall\ n,\ m \in \mathbb{N},\ n \neq m$.
(iii) O espaço vetorial gerado por $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é denso em H.

Segundo a ref. [8], se $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base Hilbertiana para o espaço $(H, (\cdot,\cdot)_H)$, então,

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, e_k)_H e_k \ \text{e}\ \|u\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u, e_k)_H|^2,\ \forall\ u \in H. \tag{1.1}$$

Além disto, consideramos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.3. *Todo espaço de Hilbert separável admite uma base Hilbertiana.*

Demonstração. Ref. [8], pg. 86. □

Definição 1.2.9 (Convergência forte)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Dizemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x \in X$ no sentido **forte** se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|x_n - x\|_X < \varepsilon, \ \forall \ n \geq n_0.$$

Denotamos a convergência forte por $x_n \longrightarrow x$.

Definição 1.2.10 (Convergência fraca)**.** *Sejam X um espaço de Banach, X' seu espaço dual e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Dizemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x \in X$ no sentido **fraco** se, quando $n \longrightarrow \infty$,*

$$\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle, \ \forall \ f \in X'.$$

Denotamos a convergência fraca por $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema 1.2.4. *A bola unitária em um espaço de Banach reflexivo é compacta no sentido fraco.*

Demonstração. Ref. [8], pg. 44. □

O Teorema 1.2.4 é equivalente ao seguinte resultado:

Teorema 1.2.5. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X. Então, é possível extrair uma subsequência $\{x_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge no sentido fraco em X.*

Segundo a ref. [8], são válidos os seguintes resultados:

Proposição 1.2.1 (Propriedades da Convergência Fraca)**.** *Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência no espaço de Banach X. Seja $x \in X$. Então:*
(i) A convergência forte $x_n \to x$ implica a convergência fraca $x_n \rightharpoonup x$.
(ii) Se dim $X < \infty$, então, a convergência fraca $x_n \rightharpoonup x$ implica a convergência forte $x_n \longrightarrow x$.
(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$, então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e

$$\|x\|_X \leq \liminf \|x_n\|_X .$$

(iv) Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em X e se existe um conjunto D denso em X' tal que

$$\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \ \forall \ f \in D,$$

então, $x_n \rightharpoonup x$.
(v) Se X é reflexivo e a sequência real $\{\langle f, x_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para qualquer $f \in X'$, então, existe $x \in X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$.
(vi) Se cada subsequência de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge fracamente tem o mesmo limite x, então, $x_n \rightharpoonup x$.
(vii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em X e $f_n \longrightarrow f$ em X', então, $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.
(viii) Seja X reflexivo. Se $x_n \longrightarrow x$ em X e $f_n \rightharpoonup f$ em X', então, $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.

Definição 1.2.11 (Convergência fraco-$\star$)**.** *Sejam X um espaço normado, X' seu espaço dual e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$. Dizemos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*

converge para $f \in X'$ *no sentido* ***fraco-***$\star$ *se, quando* $n \longrightarrow \infty$,

$$\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \ \forall \ x \in X.$$

Denotamos a convergência fraco-$\star$ *por* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Teorema 1.2.6 (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Sejam* X *um espaço de Banach reflexivo e* X' *seu dual. Então,*

$$B_{X'} = \{f \in X' | \ \|f\|_{X'} \leq 1\}$$

é um conjunto compacto na topologia fraco-$\star$*.*

Demonstração. Ref. [8], pg. 42. □

Pela ref. [8], também provamos os seguintes resultados:

Proposição 1.2.2 (Propriedades da Convergência Fraco-$\star$)**.** *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* X'. *Seja* $f \in X'$. *Então:*

(i) Se $f_n \longrightarrow f$ *em* X', *então,* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

(ii) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, *então,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada em* X' *e* $\|f\|_{X'} \leq \liminf \|f_n\|_{X'}$.

(iii) Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada em* X' *e se existe um subconjunto* D *denso em* X *tal que*

$$\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \ \forall \ x \in D,$$

então, $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

(iv) Se a sequência real $\{\langle f_n, x\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente para qualquer* $x \in X$, *então, existe uma função* $f \in X'$ *tal que* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

(v) Se $x_n \longrightarrow x$ *em* X *e* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* X', *então,* $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.

(vi) Se X *é reflexivo, então,* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *é equivalente a* $f_n \rightharpoonup f$.

1.3 Os espaços $L^p(\Omega)$

Seja μ a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Os subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ nos quais μ está bem definida são denominados conjuntos mensuráveis. As funções f tais que, para cada $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\}$ é um conjunto mensurável, são denominadas funções mensuráveis. A integral de Lebesgue, por sua vez, é definida para funções mensuráveis. Para mais detalhes sobre a teoria da medida e as integrais de Lebesgue, ver ref. [27].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.

Definição 1.3.1. *Dizemos que duas funções são **equivalentes** em Ω, com respeito a medida de Lebesgue, se elas são iguais quase sempre. Isto é, $v \equiv w$, se v e w são eventualmente diferentes apenas sobre um subconjunto de Ω com medida nula.*

*A **classe de equivalência** determinada por v consiste de todas as funções w que são equivalentes a v.*

Com base nas classes de equivalência, definimos os espaços $L^p(\Omega)$. A referência básica nesta seção é a ref. [1].

Definição 1.3.2. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. O espaço $L^p(\Omega)$ consiste no espaço das classes de equivalência das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que satisfazem a $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, onde:*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, \ se\ 1 \leq p < \infty \tag{1.2}$$

e

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup ess\ \{|f(x)| : x \in \Omega\} \\ &= \inf\ \{C \in \mathbb{R}^+ :\ |f(x)| \leq C\ q.s.\ em\ \Omega\}. \qquad (1.3)\end{aligned}$$

As funções $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+$, $1 \leq p \leq \infty$, são normas. Esta informação é válida, pois, consideramos $L^p(\Omega)$ como sendo um espaço de classe de funções equivalentes; duas funções iguais quase sempre em Ω são interpretadas como o mesmo elemento. Caso esta condição não fosse assegurada, $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ caracterizaria o que denominamos *semi-norma.*

Os espaços $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$, são *espaços de Banach* com a norma dada por (1.2) e, para $p = \infty$, com a norma dada por (1.3). Em particular, $L^2(\Omega)$ é *espaço de Hilbert* munido do produto interno

$$(f,g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Neste caso, vê-se que $\|f\|_{L^2(\Omega)} = (f,f)^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}$.

Teorema 1.3.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* p' *tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Suponha que* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^{p'}(\Omega)$. *Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Demonstração. Ref. [1], pg. 23. □

Um caso particular da Desigualdade de Hölder é a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções $L^2(\Omega)$.

Corolário 1.3.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz para $L^2(\Omega)$). *Suponha $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\Omega)$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\left|(f,g)_{L^2(\Omega)}\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Se $1 < p < \infty$, por intermédio do Teorema da Representação de Riesz, obtemos que o espaço dual de $L^p(\Omega)$ é dado por $L^{p'}(\Omega)$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Além disso, o espaço dual de $L^1(\Omega)$ é o espaço $L^\infty(\Omega)$. Por [1], também são válidas as seguintes propriedades:

Proposição 1.3.1. *Seja Ω um aberto não-vazio do $\mathbb{R}^n$.*

(i) Se $1 \leq p < \infty$, o conjunto das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que f é contínua e

$$supp\ f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

é um compacto contido em Ω, denotado por $C_0(\Omega)$, é denso em $L^p(\Omega)$.

(ii) Se $1 \leq p < \infty$, então, $L^p(\Omega)$ é separável.

(iii) Se $1 < p < \infty$, então, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

(iv) $L^1(\Omega)$ não é reflexivo.

(v) $L^\infty(\Omega)$ não é separável e não é reflexivo.

Definição 1.3.3. *Uma função u, definida quase sempre em Ω, é dita **localmente integrável** sobre Ω se $u \in L^1(K)$, para qualquer subconjunto K compacto contido em Ω. Denotamos $L^1_{loc}(\Omega)$ como o espaço das funções localmente integráveis sobre Ω.*

Por intermédio da Desigualdade de Hölder, para $1 \leq p \leq \infty$, notamos que

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega).$$

1.4 Espaços de Sobolev

Nesta seção, introduzimos a noção de derivada fraca, além dos espaços de Sobolev e algumas de suas propriedades mais elementares. São referências: [1], [14] e [20].

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto não-vazio e $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, uma função.

Definição 1.4.1. *Dizemos que um conjunto A está compactamente contido em Ω, e denotamos por $A \subset\subset \Omega$, se $\bar{A} \subset \Omega$ e $\bar{A}$ é compacto como subconjunto do $\mathbb{R}^n$.*

Definição 1.4.2. *O conjunto $\overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ é chamado de* ***suporte*** *da função f. Denotamos este suporte por supp f.*

Definição 1.4.3. *Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$, cujas derivadas parciais para todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto contido em Ω.*

Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice. Definimos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

e

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdot \partial^{\alpha_2} x_2 \cdot \ldots \cdot \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Convencionamos que se $|\alpha| = 0$, então, $D^\alpha f = f$.

Definição 1.4.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice e $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que g é a α-ésima derivada fraca de f em Ω e escrevemos $D^\alpha f = g$ se*

$$\int_\Omega f(x) \cdot D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega g(x) \cdot \phi \, dx, \ \forall \ \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definição 1.4.5. *Sejam m um inteiro não-negativo e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos $W^{m,p}(\Omega)$ como o **espaço de Sobolev** das funções $v \in L^p(\Omega)$ tais que qualquer derivada fraca de v, até a ordem m, é uma função do $L^p(\Omega)$. Isto é,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega); \ D^\alpha v \in L^p(\Omega), \ \forall \ \alpha \in \mathbb{N}^n, \ com \ |\alpha| \leq m\}.$$

Notamos que, para cada p tal que $1 \leq p \leq \infty$, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Além disto, para cada p, $W^{m_1,p}(\Omega) \subset W^{m_2,p}(\Omega)$ se $m_1 \geq m_2$.

Para $1 \leq p \leq \infty$, temos que $W^{m,p}(\Omega)$ caracteriza um espaço de Banach munido da norma $\| \cdot \|_{W^{m,p}(\Omega)} : W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$, que é dada por:

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |(D^\alpha v)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

se $1 \leq p < \infty$, ou,

$$\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em particular, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$, para cada $m \in \mathbb{N}$, caracteriza um espaço de Hilbert munido do produto interno:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \ u, \ v \in W^{m,2}(\Omega).$$

$H^m(\Omega)$ usualmente denota o espaço $W^{m,2}(\Omega)$.

Definição 1.4.6. *Dizemos que uma sequência* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $W^{m,p}(\Omega)$ *converge para* $u \in W^{m,p}(\Omega)$ *se*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0.$$

Denotamos $u_n \longrightarrow u$ *em* $W^{m,p}(\Omega)$.

Definição 1.4.7. *Definimos o espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *como sendo o fecho de* $C_0^\infty(\Omega)$ *em* $W^{m,p}(\Omega)$. *Analogamente, denotamos por* $H_0^m(\Omega)$ *o fecho de* $C_0^\infty(\Omega)$ *em* $H^m(\Omega)$.

Na verdade, uma função $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, se e somente se, existe $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $W^{m,p}(\Omega)$, no sentido da Definição 1.4.6. Segundo a ref. [14], pg. 245, como consequência do clássico Teorema do Traço, sendo Ω limitado, interpretamos $W_0^{m,p}(\Omega)$ como o conjunto das funções $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tais que

$$D^\alpha u = 0 \textit{ sobre } \partial\Omega,\ \forall\ |\alpha| \leq m-1.$$

Notamos que $W_0^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma induzida de $W^{m,p}(\Omega)$ e denotada por $\|\cdot\|_{W_0^{m,p}(\Omega)}$. Também notamos que $H_0^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Definição 1.4.8. *Suponha* $1 < p < \infty$ *e* p' *tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Representa-se por* $W^{-m,p'}(\Omega)$ *o dual topológico de* $W_0^{m,p}(\Omega)$.
$W^{-m,\infty}(\Omega)$ *caracteriza o dual topológico de* $W_0^{m,1}(\Omega)$.

Segundo Adams, ref. [1], prova-se que $W^{-m,p'}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Em particular, o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ é representado por $H^{-m}(\Omega)$.

Pela ref. [1], também enunciamos a seguinte proposição:

Proposição 1.4.1. *Seja m um inteiro não-negativo.*
(i) Se $1 \leq p < \infty$, então, $W^{m,p}(\Omega)$ é separável.
(ii) Se $1 < p < \infty$, então, $W^{m,p}(\Omega)$ é reflexivo.
(iii) Se $1 < p < \infty$ e p' é tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, então, $W^{-m,p'}(\Omega)$ é reflexivo e separável.

Segundo a ref. [14], $H^{-1}(\Omega)$, o dual de $H_0^1(\Omega)$, tem norma definida como segue:

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup\ \{\langle f, u\rangle;\ u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}.$$

Além disto, com base no Teorema da Representação de Riesz, prova-se o seguinte resultado:

Teorema 1.4.1 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$)**.** *(i) Assuma que a função $f \in H^{-1}(\Omega)$. Então, existem funções $f_0, f_1, \ldots, f_n$ em $L^2(\Omega)$ tal que*

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega \left(f_0 v + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx,\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.4}$$

(ii) Além disto,

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf \left\{ \left(\int_\Omega \sum_{i=0}^{n} |f_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}};\ f\ satisfaz\ (1.4)\ para\ f_0, f_1, \ldots, f_n \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Demonstração. Ref. [14], pg. 283-284. □

Definição 1.4.9. *Sejam V e H espaços de Hilbert, tais que $V \subset H$ e seja $\gamma : V \to H$, a injeção canônica de V em H que a cada $v \in V$ associa $\gamma(v) = v$ como elemento de H. Dizemos que o operador linear γ é o operador de* ***imersão*** *de V em H. Além disto, dizemos que a imersão $\gamma : V \to H$ é* ***contínua*** *e indicamos por $V \hookrightarrow H$, quando existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|v\|_H \leq C\|v\|_V$, $\forall\ v \in V$.*

Segundo a ref. [1], temos que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

As referências [1] e [14] apresentam outras relações e desigualdades que estipulam a norma e a imersão de distintos espaços de Sobolev. Como consequência destas relações, enunciamos o seguinte resultado:

Teorema 1.4.2. *Seja Ω um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$. Suponha que a fronteira de Ω, dada por $\partial\Omega$, seja de classe C^1. Se $u \in H^m(\Omega)$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$, então, $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.*

Demonstração. Ver ref. [14], pg. 270. □

1.5 Os espaços $L^p(0, T; X)$

Os espaços $L^p(0, T; X)$ são relevantes no estudo das equações diferenciais parabólicas, pois levam em consideração variáveis temporal e especial.

Considere $T > 0$. Para cada $t \in [0,T]$, t fixo, interpretamos a função $x \mapsto u(x,t)$ como um elemento do espaço X. Denotamos este elemento como $u(t) \in X$. Por fim, considerando $t \in [0,T]$, podemos obter a função $t \mapsto u(t)$ com valores em X.

Definição 1.5.1. *Seja X um espaço de Banach. O espaço $C([0,T];X)$ consiste de todas as funções contínuas $u : [0,T] \to X$ com*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty. \tag{1.5}$$

O conjunto $C([0,T];X)$ caracteriza um espaço de Banach com a norma $\| \cdot \|_{C([0,T];X)}$ definida em (1.5).

Definição 1.5.2. *Seja X um espaço de Banach. O espaço $C^m([0,T];X)$, $m = 1, 2, \ldots$, consiste de todas as funções contínuas $u : [0,T] \to X$ que possuem derivada contínua até ordem m sobre $(0,T)$.*

Definição 1.5.3. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço $L^p(0,T;X)$ como o conjunto das classes de funções $u : [0,T] \to X$ tais que u é mensurável e $\|u(\cdot)\|_X \in L^p((0,T))$.*

A norma de $L^p(0,T;X)$ é dada por:

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(\cdot)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad se \ 1 \leq p < \infty, \tag{1.6}$$

ou,

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} ess \, \|u(t)\|_X. \tag{1.7}$$

Abaixo, pela ref. [30], algumas propriedades destes espaços:

Proposição 1.5.1. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Então:*

(i) $L^p(0,T;X)$ é espaço de Banach com a norma definida em (1.6). $L^\infty(0,T;X)$ é espaço de Banach com a norma definida em (1.7).

(ii) $C([0,T];X)$ é denso em $L^p(0,T;X)$.

(iii) Se X é um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot,\cdot)_X$, então, $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X \; dt.$$

(iv) Se X é separável, então, $L^p(0,T;X)$ é separável.

Definição 1.5.4 (Derivada Fraca)**.** *Seja X um espaço de Banach. Tome $\boldsymbol{u} \in L^1(0,T;X)$. Dizemos que $\boldsymbol{v} \in L^1(0,T;X)$ é a derivada fraca de $\boldsymbol{u}$ se*

$$\int_0^T \phi'(t)\boldsymbol{u}(t) \; dt = -\int_0^T \phi(t)\boldsymbol{v}(t) \; dt, \; \forall \; \phi \in C_0^\infty(0,T). \tag{1.8}$$

Denotamos a derivada fraca por $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{v}$.

Teorema 1.5.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um conjunto aberto. Suponha que a função $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, com $\boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Então,*

$$\boldsymbol{u} \in C([0,T];L^2(\Omega)). \tag{1.9}$$

Além disto,

$$\max_{0\leq t\leq T} \|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\boldsymbol{u}'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}), \tag{1.10}$$

onde a constante C depende somente de T.

Demonstração. Ref. [14], pg. 287-288. $\square$

Teorema 1.5.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um conjunto aberto e limitado, tal que $\partial\Omega$ seja de classe C^∞. Tome m sendo um inteiro não-negativo. Se $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;H^{m+2}(\Omega))$, com $\boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$, então,*

$$\boldsymbol{u} \in C([0,T];H^{m+1}(\Omega)). \tag{1.11}$$

Além disto,

$$\max_{0\leq t\leq T} \|\boldsymbol{u}(t)\|_{H^{m+1}(\Omega)} \leq C(\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;H^{m+2}(\Omega))} + \|\boldsymbol{u}'\|_{L^2(0,T;H^m(\Omega))}), \tag{1.12}$$

onde a constante C depende somente de T, Ω e m.

Demonstração. Ref. [14], pg. 288-289. $\square$

1.5.1 O espaço dual de $L^p(0,T;X)$

Seja $Y = L^p(0,T;X)$. É possível verificar que $Y' = L^{p'}(0,T;X')$ é o espaço dual de Y, para $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Isto, segundo as referências [33] e [30], é consequência do seguinte teorema:

Teorema 1.5.3. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, sendo que $1 < p < \infty$. Seja $Y = L^p(0,T;X)$.*
(i) Cada função $v \in L^{p'}(0,T;X')$ corresponde a um único funcional $\bar{v} \in Y'$ dado por

$$\langle \bar{v}, u \rangle = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_{X' \times X} \, dt, \ \forall \ u \in Y. \tag{1.13}$$

Reciprocamente, cada $\bar{v} \in Y'$ *corresponde a exatamente uma função* $v \in L^{p'}(0,T;X')$ *dada por (1.13). Além disso,*

$$\|\bar{v}\|_{Y'} = \|v\|_{L^{p'}(0,T;X')}.$$

(ii) O espaço de Banach $L^p(0,T;X)$ *é reflexivo e separável.*

Pelo teorema acima, existe um isomorfismo isométrico de $L^{p'}(0,T;X')$ em Y'. Assim, podemos identificar Y' com $L^{p'}(0,T;X')$. Desta forma,

$$\langle v,u\rangle = \int_0^T \langle v(t),u(t)\rangle_{X'\times X}\ dt,\ \forall\ u\in Y,\ \forall\ v\in Y',$$

e

$$\|v\|_{Y'} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_{X'}^{p'}\ dt\right)^{\frac{1}{p'}},\ \forall\ v\in Y'.$$

1.6 Relações Relevantes

Teorema 1.6.1 (Desigualdade de Cauchy). *Sejam* $a,b\in\mathbb{R}^+$. *Então,*

$$ab \le \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Corolário 1.6.1 (Desigualdade de Cauchy com ϵ). *Sejam* $a,b\in\mathbb{R}^+$ *e* $\epsilon>0$. *Então,*

$$ab \le \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{b^2}{2\epsilon}.$$

Definição 1.6.1 (Funções Absolutamente Contínuas). *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é chamada de absolutamente contínua quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para toda coleção finita $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ de subintervalos em $[a, b]$, dois a dois disjuntos, satisfazendo a condição*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta,$$

tem-se que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

Toda função absolutamente contínua é também contínua e uniformemente contínua.

Teorema 1.6.2. *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua, se e somente se, existe uma função $u \in L^1((a, b))$ tal que*

$$f(t) = f(a) + \int_a^t u(s)\ ds,\ t \in [a, b].$$

Neste caso, existe a derivada de f, denotada por f', quase sempre em $[a, b]$. Além disso, $f' = u$ quase sempre em $[a, b]$.

Demonstração. Ver ref. [16]. □

Teorema 1.6.3. *Sejam*

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

função contínua sobre o intervalo [a,b], e $\eta \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $|\eta| < \infty$*. Então, para cada* $t_0 \in [a, b]$*, existe uma única função* ϕ *que soluciona classicamente o sistema de EDO's*

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt} = A(t)\boldsymbol{y} \\ y(t_0) = \eta \end{cases}$$

sobre o intervalo $[a, b]$*.*

Demonstração. Ref. [6], pg. 37-39. □

Devido à caracterização proposta no Teorema 1.6.2, temos que a função $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t))$, enunciada no Teorema 1.6.3, tem todas as suas entradas sendo funções absolutamente contínuas sobre o intervalo $[a, b]$.

Teorema 1.6.4 (Desigualdade de Gronwall)**.** *(i) Seja* $\eta(\cdot)$ *uma função não-negativa, absolutamente contínua sobre* $[0, T]$*, que satisfaz, para quase todo t neste intervalo, a desigualdade diferencial*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

onde $\phi(t)$ *e* $\psi(t)$ *são funções não-negativas e somáveis sobre* $[0, T]$*. Então,*

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right]$$

para todo $t \in [0, T]$*.*
(ii) Em particular, se $\eta' \leq \phi\eta$ *sobre* $[0, T]$ *e* $\eta(0) = 0$*, então,* $\eta \equiv 0$ *sobre* $[0, T]$*.*

Demonstração. Ref. [14], pg. 624-625. □

Teorema 1.6.5 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$. Então, existe uma constante C (dependendo de Ω) tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega)$. Esta constante $C = C(\Omega)$ é chamada de Constante de Poincaré para Ω. Esta desigualdade também é válida se Ω for limitado em apenas uma direção.

Demonstração. Ref. [8], pag. 174. $\square$

Teorema 1.6.6 (Fórmulas de Green)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Considere as funções $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Então,*

(i) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \, dS.$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega Dv \cdot Du \, dx = -\int_\Omega u\Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} u \, dS.$

(iii) $\displaystyle\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \, dS.$

Aqui, $\partial\Omega$ caracteriza a fronteira de Ω. $\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ caracteriza a derivada com respeito à normal exterior $\vec{n}$ de $\partial\Omega$.

Demonstração. Ref. [14], pg. 628. $\square$

Na ref. [15], pg. 52, temos o resultado:

Teorema 1.6.7. *Sejam $r > 0$, $n \geq 3$ e $\partial B_r := \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ |x| = r\}$. Então,*

$$\int_{\partial B_r} dS = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1},$$

onde

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} \, dy.$$

Teorema 1.6.8 (Teorema da Mudança de Variável)**.** *Sejam $G, E \subset \mathbb{R}^n$ dois abertos e $h : G \to E$ uma bijeção de classe C^1. Seja uma função integrável $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Então,*

$$\int_E f(x) \, dx = \int_G (h \circ f)(x) |Jh(x)| \, dx,$$

onde $Jh(x)$ caracteriza o jacobiano da função h em x.

Demonstração. Ref. [27], pg. 252. □

Teorema 1.6.9 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja E um conjunto mensurável do $\mathbb{R}^n$. Seja $f_k : E \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis, $\forall \; k \in \mathbb{N}$. Suponha que $f_k \longrightarrow f$ quase sempre em E. Suponha também que $|f_k| \leq g$, quase sempre em E, para alguma função $g \in L^1(E)$. Então, $f_k, f \in L^1(E)$ e*

$$\int_E f_k(x) \, dx \longrightarrow \int_E f(x) \, dx.$$

Demonstração. Ref. [27], pg. 321. □

Segundo a ref. [1], temos o seguinte resultado:

Teorema 1.6.10 (Lema de Du Bois Reymond)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se*

$$\int_\Omega fu \, dx = 0, \; \forall \; u \in C_0^\infty(\Omega),$$

então, $f = 0$ quase sempre em Ω.

1.7 Operadores Elípticos de Segunda Ordem e Regularidade

Esta seção contempla resultados que estão apresentados detalhadamente pela ref. [14].

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado e $\partial\Omega$ a fronteira deste conjunto.

Considere $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição 1.7.1. *L é um operador diferencial parcial de segunda ordem na forma do divergente se:*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

para funções $a_{ij}, b_i, c \in L^{\infty}(\Omega),\ \forall\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Equivalentemente a Definição 1.7.1, se $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), \forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, notamos que:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n}\left(b_i(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u.$$

Definição 1.7.2. *L é um operador diferencial elíptico de segunda ordem se atende a Definição 1.7.1 e se existe uma constante $\theta > 0$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2,$$

quase sempre para $x \in \Omega$ e para todo $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Em particular, o operador $\tilde{L} := -\Delta - W$, quando $W \in Ł^{\infty}(\Omega)$, é um operador diferencial elíptico de segunda ordem. Neste caso,

$$\tilde{L}u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - Wu.$$

Observando que $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$, notamos que a Definição 1.7.2 é atendida com $\theta = 1$. Além disto, este operador é simétrico, pois $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Defina a forma bilinear auxiliar associada com o operador diferencial elíptico de segunda ordem L, segundo a caracterização dada pela Definição 1.7.2,

$$E[u,v] := \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv \right] \, dx,$$

para $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Esta forma é usada para simplificar a representação de soluções fracas para problemas elípticos em geral.

Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e L um operador linear elíptico de segunda ordem. Considere o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} Lu = f \quad , & x \in \Omega. \\ \quad u = 0 \quad , & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.14}$$

Definição 1.7.3. *Uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ é a solução fraca para o problema de Dirichlet (1.14) se:*

$$E[u,v] = (f, v)_{L^2(\Omega)}, \tag{1.15}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

O seguinte resultado é proveniente da teoria dos Operadores Compactos.

Teorema 1.7.1. *Precisamente uma das seguintes afirmações ocorre:*
(i) Para cada $f \in L^2(\Omega)$, existe uma única solução fraca ao problema (1.14).
(ii) Existe uma solução fraca não identicamente nula do problema homogêneo

$$\begin{cases} Lu = 0 \quad , \quad x \in \Omega. \\ u = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Demonstração. Ref. [14], pg. 303-305. □

Os teoremas a seguir são relevantes no estudo da regularidade de soluções para equações parabólicas de segunda ordem. Em capítulos posteriores, estes teoremas são usados para descrever o comportamento das soluções de equações do calor com certa regularidade no potencial.

Teorema 1.7.2. *Sejam $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $f \in L^2(\Omega)$. Suponha que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema de Dirichlet (1.14). Finalmente, suponha que $\partial\Omega$ é de classe C^2. Então, $u \in H^2(\Omega)$ e estimamos que:*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}), \tag{1.16}$$

onde a constante C depende somente de Ω, n e dos coeficientes caracterizados em L.

Demonstração. Ref. [14], pg. 317-322. □

Teorema 1.7.3. *Tome m sendo um inteiro não-negativo. Suponha que $a_{ij}, b_i, c \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$, $\forall\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $f \in H^m(\Omega)$. Suponha que $u \in H_0^1(\Omega)$ é a solução fraca do problema de Dirichlet (1.14). Finalmente, suponha que $\partial\Omega$ é de classe C^{m+2}. Então, $u \in H^{m+2}(\Omega)$ e estimamos que:*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}), \tag{1.17}$$

onde a constante C depende somente de m, Ω, n e dos coeficientes caracterizados em L.

Demonstração. Ref. [14], pg. 323-325. □

Teorema 1.7.4. *Suponha que $a_{ij}, b_i, c, f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Suponha que $u \in H_0^1(\Omega)$ é a solução fraca do problema de Dirichlet (1.14). Finalmente, suponha que $\partial\Omega$ é de classe C^∞. Então, a função $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.*

Demonstração. Ref. [14], pg. 326. □

Capítulo 2

Equação do Calor com Potencial L^∞

2.1 Definição de Solução Fraca

No decorrer deste capítulo, $n \in \mathbb{N}$, Ω é um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ e $T > 0$ é um número real fixo.

Sejam $W \in L^\infty(\Omega)$ e $g \in L^2(\Omega)$ funções reais. No que segue, estudaremos a existência e unicidade de solução fraca do seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + W(x)u & , \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T]. \\ u(x,0) = g(x) & , \quad x \in \Omega. \\ u(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \end{cases} \tag{2.1}$$

A referência básica seguida aqui é a ref. [14].

Inicialmente, devemos definir o que se entende como solução fraca do problema (2.1). Primeiro, faremos uma motivação. Suponha que $\partial\Omega$, a fronteira de Ω, seja de classe C^1. Seja $u(x,t)$ uma solução do problema (2.1).

Vamos associar à função $u(x,t)$ a aplicação

$$\mathbf{u} : [0,T] \to H_0^1(\Omega),$$

de forma que

$$[\mathbf{u}(t)](x) := u(x,t)$$

para cada $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$.

Fixe $v \in H_0^1(\Omega)$. Temos que

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}v - (\Delta\mathbf{u})v - W\mathbf{u}v = 0 \tag{2.2}$$

no intervalo $(0,T]$.

Integrando (2.2) sobre Ω e usando a fórmula de Green, Teorema 1.6.6, item (ii), vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \left[\frac{d\mathbf{u}}{dt}v - (\Delta\mathbf{u})v - W\mathbf{u}v\right] dx \\ &= \int_\Omega \frac{d\mathbf{u}}{dt}v \; dx + \int_\Omega [\nabla\mathbf{u}\cdot\nabla v - W\mathbf{u}v]\, dx \qquad (2.3) \end{aligned}$$

no intervalo $(0,T]$.

Para cada $s \in (0,T]$, seja $\mathbf{u}'$ um funcional linear dependendo de $\mathbf{u}$ e s, definido por

$$\langle \mathbf{u}', v_0\rangle := \int_\Omega \frac{d\mathbf{u}}{dt}v_0 \; dx \tag{2.4}$$

para cada $v_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Defina também a forma bilinear

$$B[v_1,v_2] := \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial v_1}{\partial x_i}\frac{\partial v_2}{\partial x_i} - Wv_1v_2\right] dx \tag{2.5}$$

para cada $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$. De (2.3)-(2.5), vemos que

$$\langle \mathbf{u}', v \rangle + B[\mathbf{u}, v] = 0$$

no intervalo $(0, T]$.

Das relações (2.3) e (2.4), para cada $s \in (0, T]$:

$$\langle \mathbf{u}', v \rangle = \int_\Omega \frac{d\mathbf{u}}{dt} v \, dx = \int_\Omega \left[g_0 v + \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dx, \tag{2.6}$$

onde $g_0 = W\mathbf{u}$ e $g_j = -\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. A expressão apresentada (2.6) faz menção à caracterização do dual de $H_0^1(\Omega)$ que é apresentada pelo Teorema 1.4.1, uma vez que $g_i \in L^2(\Omega)$, para todo índice $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Esta informação nos mostra que é razoável considerar que, para cada $s \in (0, T]$, $\mathbf{u}' \in H^{-1}(\Omega)$.

Define-se a solução fraca do problema (2.1) da seguinte maneira:

Definição 2.1.1. $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, *com* $\boldsymbol{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, *é dita a solução fraca do problema de valor inicial e de fronteira (2.1) se:*
(i) $\langle \boldsymbol{u}', v \rangle + B[\boldsymbol{u}, v] = 0$ *para cada* $v \in H_0^1(\Omega)$ *e* t *quase sempre em* $[0, T]$.
(ii) $\boldsymbol{u}(0) = g$.

Nas seções seguintes, apresentaremos o método de Galerkin para demonstrar a existência e unicidade de solução fraca do problema (2.1). Posteriormente, também serão abordados aspectos da regularidade destas soluções.

2.2 Método de Galerkin

Pelo Teorema 1.2.3, existe uma base Hilbertiana para o espaço $L^2(\Omega)$, pois, como comentado na Seção 1.3, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.

Consideramos $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma *base ortogonal* de $H_0^1(\Omega)$ e também uma *base ortonormal* de $L^2(\Omega)$. A justificativa detalhada que garante a escolha acima é apresentada na ref. [14], pg. 334.

Para m um número natural fixo, defina $\mathbf{u}_m : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$,

$$\mathbf{u}_m(t) = \sum_{k=1}^{m} g_{mk}(t) w_k, \tag{2.7}$$

onde as funções $g_{mk}(t)$ são absolutamente contínuas em $[0,T]$ e determinadas pelas seguintes condições:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\mathbf{u}_m}{dt}, w_j\right)_{L^2(\Omega)} + B[\mathbf{u}_m, w_j] = 0, \ \forall\ j \in \{1,2,\ldots,m\} \\ g_{mj}(0) = (g, w_j)_{L^2(\Omega)}, \ \forall\ j \in \{1,2,\ldots,m\} \end{cases} \tag{2.8}$$

quase sempre em $[0,T]$. Queremos mostrar que existe uma subsequência da família de funções $\{\mathbf{u}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que converge fracamente no espaço $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ para uma função $\mathbf{u}$, a solução fraca do problema (2.1) considerado.

As condições (2.8) são equivalentes ao seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{cases} g'_{mj}(t) + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_{mk}(t) e_{kj} = 0, \\ g_{mj}(0) = (g, w_j)_{L^2(\Omega)}, \quad j = 1,2,\ldots,m, \end{cases} \tag{2.9}$$

onde $e_{kj} := B[w_k, w_j]$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, w_j\right)_{L^2(\Omega)} + B[\mathbf{u}_m, w_j] \\
&= \sum_{k=1}^{m} g'_{mk}(t) \int_\Omega w_k w_j \; dx + \sum_{k=1}^{m} g_{mk}(t) \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \; dx \\
&- \sum_{k=1}^{m} g_{mk}(t) \int_\Omega W w_k w_j \; dx \\
&= g'_{mj}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_{mk}(t) \left[\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \; dx - \int_\Omega W w_k w_j \; dx \right] \\
&= g'_{mj}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_{mk}(t) e_{kj}.
\end{aligned}
$$

O Teorema 1.6.3 garante a existência e unicidade da função vetorial $g_m(t) = (g_{m1}(t), g_{m2}(t), \ldots, g_{mm}(t))$, solução clássica para o sistema (2.9) sobre o intervalo $[0, T]$. Em particular, $\forall\ k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, as funções $g_{mk}(t)$ são absolutamente contínuas sobre $[0, T]$. Para efeito de abordagem teórica, algumas propriedades das funções $g_{mk}(t)$ serão ignoradas; apenas vamos supor que $g'_{mk}(t)$, a derivada da função $g_{mk}(t)$, existe quase sempre sobre o intervalo $[0, T]$.

2.2.1 Estimativas à Priori

Proposição 2.2.1. *Existem constantes $\alpha, \beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tais que*

(i) $|B[u, v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ *e*

(ii) $\beta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq B[u, u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$

para toda $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. *(i)* Pela definição de $B[\cdot, \cdot]$ e pela Desigualdade de Cauchy-

Schwarz,

$$\begin{aligned}
|B[u,v]| &= \left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - Wuv \; dx\right| \\
&\leq \left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx\right| + \left|\int_\Omega Wuv \; dx\right| \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \|W\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega |u|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Defina $\alpha' := \max \{1, \|W\|_{L^\infty(\Omega)}\}$. De (2.10), temos que:

$$\begin{aligned}
&|B[u,v]| \leq \alpha' \left[\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&+\alpha' \left[\left(\int_\Omega |u|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq \alpha' \left(\int_\Omega |u|^2 + |\nabla u|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |v|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq 2\alpha' \left(\int_\Omega |u|^2 + |\nabla u|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 + |\nabla v|^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

onde $\alpha = 2\alpha'$.

(ii) Fixe $\theta \in (0,1)$. É verdade que:

$$\begin{aligned}
\theta \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = B[u,u] + \int_\Omega W u^2 dx \\
&\leq B[u,u] + \|W\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Aplicamos agora a Desigualdade de Poincaré, segundo a qual existe

$k_0 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq k_0 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Defina $\beta := \min\left\{\dfrac{\theta}{2}, \dfrac{\theta}{2k_0^2}\right\}$ e $\gamma := \|W\|_{L^\infty(\Omega)}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\beta\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \beta\left[\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \\
&\leq \beta k_0^2 \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\theta}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{\theta}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\theta}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq B[u,u] + \gamma\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.2.1. *Seja $\boldsymbol{u}_m$ definida pela expressão (2.7). Existe uma constante C, dependendo somente de n, Ω, T e W, tal que*

$$\begin{aligned}
&\max_{0\leq t\leq T} \|\boldsymbol{u}_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&+\|\boldsymbol{u}'_m\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

para todo m inteiro positivo.

Demonstração. A demonstração será feita em três etapas.

Etapa 1. Temos que

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, \mathbf{u}_m\right)_{L^2(\Omega)} + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m] = 0 \tag{2.14}$$

quase sempre em $[0,T]$. De fato, por (2.8), para cada $j \in \{1,2,\ldots,m\}$,

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, w_j\right)_{L^2(\Omega)} + B[\mathbf{u}_m, w_j] \\
&= \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, g_{mj}w_j\right)_{L^2(\Omega)} + B[\mathbf{u}_m, g_{mj}w_j] \\
&= \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, \sum_{j=1}^{m} g_{mj}w_j\right)_{L^2(\Omega)} + B\left[\mathbf{u}_m, \sum_{j=1}^{m} g_{mj}w_j\right],
\end{aligned}$$

justificando (2.14).

Note que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{u}_m^2 dx\right) \\
&= \int_\Omega \frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\mathbf{u}_m dx \\
&= \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, \mathbf{u}_m\right)_{L^2(\Omega)}, \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

quase sempre em $[0,T]$.

Além disto, pela Proposição 2.2.1, item (ii), existem $\beta > 0$ e $\gamma \geq 0$, tais que

$$\beta\|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m] + \gamma\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (2.16)$$

Usando (2.14)-(2.16), resulta a desigualdade

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}) &\leq \frac{d}{dt}(\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}) + 2\beta\|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq 2\left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, \mathbf{u}_m\right)_{L^2(\Omega)} + 2B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m] \\
&+ 2\gamma\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\gamma\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

válida quase sempre em $[0,T]$.

Defina $\eta(t) := \|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$. Por (2.17), temos que $\eta'(t) \leq 2\gamma\eta(t)$, para t quase sempre em $[0,T]$. Usando a Desigualdade de Gronwall, Teorema 1.6.4, item (i),

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t 2\gamma \ ds}\eta(0) = e^{2\gamma t}\eta(0), \forall\ t \in [0,T]. \tag{2.18}$$

Pelas propriedades da base Hilbertiana, ver Seção 1.2,

$$\begin{aligned} \eta(0) &= \|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left|\sum_{k=1}^m g_{mk}(0)w_k\right|^2 dx \\ &= \int_\Omega \left|\sum_{k=1}^m (g, w_k)_{L^2(\Omega)}w_k\right|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega |g|^2 dx = \|g\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Pelas desigualdades (2.18) e (2.19), segue que

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{2\gamma T}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}, \forall\ t \in [0,T]. \tag{2.20}$$

Defina $C_1 := e^{\gamma T}$. Então, $\|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|g\|_{L^2(\Omega)},\ \forall\ t \in [0,T]$. Portanto,

$$\max_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|g\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.21}$$

Etapa 2. Pela desigualdade (2.17), quase sempre em $[0,T]$,

$$\|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\gamma}{\beta}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2\beta}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.22}$$

Além disto, pela (2.19),

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt &= \|\mathbf{u}_m(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \int_\Omega |\mathbf{u}_m(T)|^2 dx - \|g\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Por (2.21)-(2.23), segue que:

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} &= \int_0^T \|\mathbf{u}_m\|^2_{H^1_0(\Omega)} dt \\
&\leq \int_0^T \frac{\gamma}{\beta}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} dt - \int_0^T \frac{1}{2\beta}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt \\
&\leq \int_0^T \frac{\gamma}{\beta}\left(\max_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt - \int_0^T \frac{1}{2\beta}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt \\
&\leq T\frac{\gamma}{\beta}C_1^2\|g\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2\beta}\int_\Omega |\mathbf{u}_m(T)|^2 dx + \frac{1}{2\beta}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(T\frac{\gamma}{\beta}C_1^2 + \frac{1}{2\beta}\right)\|g\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Defina $C_2 := \left(T\frac{\gamma}{\beta}C_1^2 + \frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$. Temos que:

$$\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \leq C_2\|g\|_{L^2(\Omega)}. \qquad (2.25)$$

Etapa 3. À priori, para cada $t \in [0,T]$, considere $\mathbf{u}'_m \in H^{-1}(\Omega)$, $\mathbf{u}'_m := \mathbf{u}'_m(\mathbf{u}_m, t)$ e

$$\langle \mathbf{u}'_m, u\rangle = \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, u\right)_{L^2(\Omega)}, \forall\ u \in H^1_0(\Omega) \qquad (2.26)$$

como em (2.4). Em seguida, fixe $v \in H^1_0(\Omega)$, $\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq 1$ e $v = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in\ span\{w_k\}_{k=1}^m$ e $(w_k, v_2)_{L^2(\Omega)} = 0$, $\forall\ k \in \{1, 2, ..., m\}$. Como as funções w_k são ortogonais em $H^1_0(\Omega)$,

$$\|v_1\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq 1. \qquad (2.27)$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado para deduzir (2.14), temos que:

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, v_1\right)_{L^2(\Omega)} + B[\mathbf{u}_m, v_1] \quad = \quad 0 \qquad (2.28)$$

e, além disto,

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, v_2\right)_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{2.29}$$

para t quase sempre em $[0, T]$.

Assim, usando (2.26), (2.28) e (2.29), temos que:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}'_m, v\rangle &= \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, v\right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, v_1\right)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, v_2\right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, v_1\right)_{L^2(\Omega)} = -B[\mathbf{u}_m, v_1]
\end{aligned} \tag{2.30}$$

quase sempre em [0,T].

Pela Proposição 2.2.1, item (i), existe $\alpha > 0$ tal que:

$$|B[\mathbf{u}_m, v_1]| \leq \alpha \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(\Omega)} \|v_1\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.31}$$

Desta maneira, usando (2.27), (2.30) e (2.31), temos que

$$|\langle \mathbf{u}'_m, v\rangle| = |B[\mathbf{u}_m, v_1]| \leq \alpha \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(\Omega)}$$

quase sempre em $[0, T]$.

Em especial,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}'_m\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup \{|\langle \mathbf{u}'_m, v\rangle|; v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\} \\
&\leq \alpha \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Integrando (2.32) sobre $[0, T]$ e usando (2.25),

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &= \int_0^T \|\mathbf{u}'_m\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt \\
&\leq \alpha^2 \int_0^T \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} dt \\
&\leq \alpha^2 C_2^2 \|g\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C_3\|g\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.33}$$

onde $C_3 := \alpha C_2$.

Das desigualdades (2.21), (2.25) e (2.33) se conclui a prova.

■

2.3 Existência de Solução

Para $W \in L^\infty(\Omega)$ e $g \in L^2(\Omega)$, mostraremos no decorrer desta seção que o problema (2.1) admite uma solução fraca.

Do Teorema 2.2.1, segue que $\{\mathbf{u}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $\{\mathbf{u}'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Pela reflexividade dos espaços de Banach $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e pelo Teorema 1.2.5, existe uma subsequência $\{\mathbf{u}_{m_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \{\mathbf{u}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e funções $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $\tilde{\mathbf{u}} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, tais que

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{m_l} \rightharpoonup \mathbf{u} \; em \; L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \mathbf{u}'_{m_l} \rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}} \; em \; L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \end{cases} \tag{2.34}$$

Em espaços de Banach reflexivos, pelo item (vi) da Proposição 1.2.2, convergência fraca e convergência fraco-$\star$ são equivalentes. Por isto,

$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}'$. De fato, tomando a função $\varphi \in C_0^1(0,T)$ e $w \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle \tilde{\mathbf{u}}, \varphi w \rangle \; dt &= \lim_{l \to \infty} \int_0^T \langle \mathbf{u}'_{m_l}, \varphi w \rangle \; dt \\
&= \lim_{l \to \infty} \int_0^T -\langle \mathbf{u}_{m_l}, \varphi' w \rangle \; dt \\
&= -\int_0^T \langle \mathbf{u}, \varphi' w \rangle \; dt. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

Fixe N, um inteiro não-negativo, e seja $\mathbf{v} \in C^1([0,T]; H_0^1(\Omega))$ da forma

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^{N} d_k(t) w_k, \qquad (2.36)$$

onde $\{d_k\}_{k=1}^N$ constitui um conjunto de funções regulares sobre $[0,T]$. Considere também $m \geq N$. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, pelo Método de Galerkin,

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, w_j \right)_{L^2(\Omega)} + B[\mathbf{u}_m, w_j] = 0,$$

quase sempre em $[0,T]$, do que segue

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, d_j w_j \right)_{L^2(\Omega)} + B[\mathbf{u}_m, d_j w_j] \\
&= \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, \sum_{j=1}^{N} d_j w_j \right)_{L^2(\Omega)} + B\left[\mathbf{u}_m, \sum_{j=1}^{N} d_j w_j \right] \\
&= \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, \mathbf{v} \right)_{L^2(\Omega)} + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}\ ] \\
&= \langle \mathbf{u}'_m, \mathbf{v} \rangle + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}] \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

quase sempre em $[0,T]$.

Em seguida, integra-se (2.37) sobre $[0,T]$:

$$\int_0^T \{ \langle \mathbf{u}'_m, \mathbf{v} \rangle + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}] \} \, dt = 0. \qquad (2.38)$$

Faça $m := m_l$. Novamente usando a equivalência entre convergência fraca e convergência fraco-$\star$ no espaço de Banach $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, vemos que, quase sempre em $[0,T]$,

$$\langle \mathbf{u}'_{m_l}, \mathbf{v} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{u}', \mathbf{v} \rangle. \tag{2.39}$$

Para $\mathbf{v}$ fixo, a forma $B[\cdot, \mathbf{v}]$ pode ser interpretada como um funcional linear sobre $H_0^1(\Omega)$. Na verdade, pela estimativa (2.11), $B[\cdot, \mathbf{v}]$ é um funcional linear limitado sobre $H_0^1(\Omega)$. Devido à convergência fraca em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, também constatamos que

$$\int_0^T B[u_{ml}, \mathbf{v}]\ dt \longrightarrow \int_0^T B[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\ dt. \tag{2.40}$$

Em (2.38), escolha $m := m_l$. Devido aos resultados (2.39) e (2.40), no limite $l \longrightarrow \infty$, temos que:

$$0 = \int_0^T \langle \mathbf{u}'_{m_l}, \mathbf{v} \rangle + B[\mathbf{u}_{m_l}, \mathbf{v}]\ dt \longrightarrow \int_0^T \langle \mathbf{u}', \mathbf{v} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\ dt. \tag{2.41}$$

Como as funções $\mathbf{v}$ definidas em (2.36) são densas em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, segue que a relação (2.41) é válida qualquer que seja $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Consequentemente, quase sempre em $[0,T]$, temos que

$$\langle \mathbf{u}', v \rangle + B[\mathbf{u}, v] = 0 \tag{2.42}$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$. Notando que $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e também que a função $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, pelo Teorema 1.5.1, concluímos que $\mathbf{u} \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Em seguida, demonstra-se que $\mathbf{u}(0) = g$.

Suponha que $\mathbf{v} \in C^1([0,T];H_0^1(\Omega))$ e $\mathbf{v}(T) = 0$.

Inicialmente, note que:

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \mathbf{u}', \mathbf{v}\rangle \, dt &= (\mathbf{u}(T), \mathbf{v}(T))_{L^2(\Omega)} - (\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0))_{L^2(\Omega)} - \int_0^T \langle \mathbf{v}', \mathbf{u}\rangle \, dt \\ &= \int_0^T -\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}\rangle \, dt - (\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0))_{L^2(\Omega)}, \qquad (2.43)\end{aligned}$$

para cada $\mathbf{v}$ nas condições acima e onde $\mathbf{v}'$ é, para cada t no intervalo $[0, T]$, um funcional linear sobre $H_0^1(\Omega)$ associado à derivada fraca da função $\mathbf{v}$.

De (2.41) e (2.43), obtemos:

$$\int_0^T \{-\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}\rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\} \, dt = (\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0))_{L^2(\Omega)} \qquad (2.44)$$

e, como nas condições (2.43) e (2.44),

$$\int_0^T \{-\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}_m\rangle + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}]\} \, dt = (\mathbf{u}_m(0), \mathbf{v}(0))_{L^2(\Omega)}. \qquad (2.45)$$

Também notamos, pelas propriedades da base Hilbertiana, que

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_m(0) &= \sum_{j=1}^{m} g_{mj}(0) w_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} (g, w_j)_{L^2(\Omega)} w_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} (g, w_j)_{L^2(\Omega)} w_j = g. \qquad (2.46)\end{aligned}$$

Defina $m := m_l$. Tomando (2.45) e (2.46), no limite $m \longrightarrow \infty$, resulta:

$$\int_0^T \{-\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}\rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\} \, dt = (g, \mathbf{v}(0))_{L^2(\Omega)}. \qquad (2.47)$$

De (2.44) e (2.47) temos que $(\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0))_{L^2(\Omega)} = (g, \mathbf{v}(0))_{L^2(\Omega)}$. Como $\mathbf{v}(0)$ é arbitrário, concluímos que $\mathbf{u}(0) = g$. Portanto, para $g \in L^2(\Omega)$, o problema (2.1) admite solução fraca.

2.4 Unicidade de Solução

A solução fraca do problema de valor inicial e de fronteira (2.1), cuja existência foi demonstrada na seção anterior, é única. Para demonstrar isto, suponha que as funções $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são soluções fracas do problema em questão. Desta forma,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) & e \quad \mathbf{u}_1' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ \langle \mathbf{u}_1', v\rangle + B[\mathbf{u}_1, v] & = \quad 0, \ q.s. \text{ em } [0,T], \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \\ \mathbf{u}_1(0) & = \quad g \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \mathbf{u}_2 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) & e \quad \mathbf{u}_2' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ \langle \mathbf{u}_2', v\rangle + B[\mathbf{u}_2, v] & = \quad 0, \ q.s. \text{ em } [0,T], \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \\ \mathbf{u}_2(0) & = \quad g. \end{cases}$$

Defina $\mathbf{w} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Note que $\mathbf{w}$ é solução fraca para o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \Delta \mathbf{w} + W(x)\mathbf{w} & , \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T]. \\ \mathbf{w}(x,0) = 0 & , \quad x \in \Omega. \\ \mathbf{w}(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \end{cases}$$

De fato,

- $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.
- $\mathbf{w}' = \mathbf{u}_1' - \mathbf{u}_2' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.
- $\langle \mathbf{w}', v\rangle + B[\mathbf{w}, v] = (\langle \mathbf{u}_1', v\rangle + B[\mathbf{u}_1, v]) - (\langle \mathbf{u}_2', v\rangle + B[\mathbf{u}_2, v]) = 0$, quase sempre em $[0,T]$, $\forall\, v \in H_0^1(\Omega)$.

- $\mathbf{w}(0) = \mathbf{u}_1(0) - \mathbf{u}_2(0) = g - g = 0$

  (Pois, $\mathbf{w}(0) := \mathbf{w}(x,0),\ \forall\ x \in \Omega$).

Se demonstrarmos que $\mathbf{w} \equiv 0$ isto implicará que $u_1 \equiv u_2$.

Vimos acima que $\langle \mathbf{w}', v\rangle + B[\mathbf{w}, v] = 0, \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$, quase sempre em $[0,T]$. Em particular,

$$\langle \mathbf{w}', \mathbf{w}\rangle + B[\mathbf{w}, \mathbf{w}] = 0, \tag{2.48}$$

quase sempre em $[0,T]$.

De forma similar a (2.15), observamos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = \left(\frac{d\mathbf{w}}{dt}, \mathbf{w}\right)_{L^2(\Omega)} = \langle \mathbf{w}', \mathbf{w}\rangle \tag{2.49}$$

quase sempre em $[0,T]$. Além disto, sobre este mesmo domínio, pela Proposição 2.2.1, item (ii), existem $\beta > 0$ e $\gamma \geq 0$, tais que

$$B[\mathbf{w}, \mathbf{w}] \geq \beta\|\mathbf{w}\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \gamma\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} \geq -\gamma\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.50}$$

De (2.48)-(2.50),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = \langle \mathbf{w}', \mathbf{w}\rangle = -B[\mathbf{w}, \mathbf{w}] \leq \gamma\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

quase sempre em $[0,T]$.

Em especial,

$$\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \leq 2\gamma\|\mathbf{w}\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.51}$$

quase sempre em $[0,T]$.

Defina $\eta(t) := \|\mathbf{w}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$. De (2.51), observamos que:

$$\eta'(t) \leq 2\gamma\eta(t), \tag{2.52}$$

quase sempre em $[0, T]$.

Aplicando a Desigualdade de Gronwall, Teorema 1.6.4, item (i), em (2.52) temos que

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t 2\gamma ds}\eta(0) \leq e^{2\gamma T}\eta(0), \ \forall \ t \in [0, T]. \tag{2.53}$$

Por fim, (2.53) garante que:

$$0 \leq \|\mathbf{w}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{2\gamma T}\|\mathbf{w}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} = e^{2\gamma T} \cdot 0 = 0,$$

$\forall \ t \in [0, T]$. Logo, $\mathbf{w} \equiv 0$. Portanto, o problema de valor inicial e de fronteira (2.1), para $g \in L^2(\Omega)$, admite uma única solução fraca.

2.5 Regularidade

Impondo condições adicionais sobre a função g caracterizada no problema (2.1) e também sobre a fronteira de Ω, é possível concluir inúmeras propriedades relevantes com relação ao comportamento de sua solução. Nesta seção, apresentaremos alguns teoremas que descrevem a regularidade destas soluções fracas.

Teorema 2.5.1. *Suponha que o conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ possui fronteira de classe C^2, $g \in H_0^1(\Omega)$, e a função $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, com $\boldsymbol{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, é a solução fraca do problema (2.1). Então,*

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{2.54}$$

$$\boldsymbol{u}' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \tag{2.55}$$

Além disto,

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq t \leq T} ess \ \|\boldsymbol{u}(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \\ &+\|\boldsymbol{u}'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\|g\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.56}$$

onde a constante C depende de Ω, n, T e W.

Demonstração. Fixe $m \in \mathbb{N}$. Por método similar àquele empregado para deduzir (2.14), segue que

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}, \frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\right)_{L^2(\Omega)} + B\left[\mathbf{u}_m, \frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\right] = 0 \tag{2.57}$$

quase sempre em $[0,T]$.

Defina a forma bilinear auxiliar

$$A[u,v] := \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right] \, dx, \tag{2.58}$$

onde $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Para $u = v = \mathbf{u}_m$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m]\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla\mathbf{u}_m \cdot \nabla\mathbf{u}_m \, dx\right) \\ &= \int_\Omega \nabla\mathbf{u}_m \cdot \nabla\left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\right) \, dx \\ &= A\left[\mathbf{u}_m, \frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\right]. \end{aligned} \tag{2.59}$$

De (2.57) e (2.59) segue que, quase sempre em $[0,T]$,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\|\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + B\left[\mathbf{u}_m, \frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\right] \\ &= \left\|\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \nabla\mathbf{u}_m \cdot \nabla\left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\right) \, dx - \int_\Omega W\mathbf{u}_m\frac{d\mathbf{u}_m}{dt} \, dx \\ &= \left\|\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m]\right) - \int_\Omega W\mathbf{u}_m\frac{d\mathbf{u}_m}{dt} \, dx \end{aligned}$$

e, por consequência,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m]\right) &= \int_\Omega W\mathbf{u}_m\frac{d\mathbf{u}_m}{dt} \, dx \\ &\leq \|W\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\mathbf{u}_m| \left|\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\right| \, dx. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Tome $\epsilon > 0$. Note que, pelo Corolário 1.6.1,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\mathbf{u}_m| \left| \frac{d\mathbf{u}_m}{dt} \right| \, dx &\leq \frac{1}{4\epsilon} \int_\Omega \mathbf{u}_m^2 \, dx + \epsilon \int_\Omega \left(\frac{d\mathbf{u}_m}{dt} \right)^2 \, dx \\ &\leq \frac{1}{4\epsilon} \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \epsilon \left\| \frac{d\mathbf{u}_m}{dt} \right\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad (2.61) \end{aligned}$$

quase sempre em $[0, T]$.

Suponha que $\|W\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$. Defina as constantes $C_4 := \dfrac{\|W\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{4}$ e $\tilde{\epsilon} := \epsilon \|W\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Reunindo as desigualdades (2.60) e (2.61), deduzimos o seguinte:

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{d\mathbf{u}_m}{dt} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m] \right) \\ &\leq \|W\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\frac{1}{4\epsilon} \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \epsilon \left\| \frac{d\mathbf{u}_m}{dt} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \frac{C_4}{\tilde{\epsilon}} \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \tilde{\epsilon} \left\| \frac{d\mathbf{u}_m}{dt} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \quad (2.62) \end{aligned}$$

quase sempre em $[0, T]$.

Supondo $\|W\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$, a desigualdade (2.62) é válida para quaisquer constantes $C_4, \tilde{\epsilon} > 0$.

Escolhendo ϵ, de forma que $\tilde{\epsilon} = \dfrac{1}{2}$, por (2.62), obtemos que

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{d\mathbf{u}_m}{dt} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m] \right) \leq 2C_4 \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

quase sempre em $[0, T]$. Equivalentemente,

$$\left\| \frac{d\mathbf{u}_m}{dt} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt} \left(A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m] \right) \leq 4C_4 \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \quad (2.63)$$

Seja $s \in [0, T]$. De (2.63) e (2.25), segue que:

$$\int_0^s \frac{d}{dt} \left(A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m] \right) dt \leq \int_0^T 4C_4 \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, dt \leq 4C_2^2 C_4 \|g\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

e, assim,

$$\sup_{0\le t\le T} ess\ A[\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t)] - A[\mathbf{u}_m(0),\mathbf{u}_m(0)] \le 4C_2^2C_4\|g\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.64}$$

Analogamente,

$$\int_0^T \left\|\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \le 4C_2^2C_4\|g\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.65}$$

Assim como (2.19), podemos notar que

$$\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|g\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.66}$$

Associando os resultados (2.64)-(2.66), temos que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left\|\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \sup_{0\le t\le T} ess\ A[\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t)]\\
&\le A[\mathbf{u}_m(0),\mathbf{u}_m(0)] + 8C_2^2C_4\|g\|^2_{H_0^1(\Omega)}\\
&\le \|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 8C_2^2C_4\|g\|^2_{H_0^1(\Omega)}\\
&\le \|g\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 8C_2^2C_4\|g\|^2_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.67}$$

ou seja,

$$\left\|\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le C_5\|g\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{2.68}$$

onde $C_5 := (1+8C_2^2C_4)^{\frac{1}{2}}$.

Considere

$$\{\mathbf{u}_{m_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \{\mathbf{u}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$$

a sequência usada no início da Seção 2.3. Por (2.34), $\mathbf{u}'_{ml} \rightharpoonup \mathbf{u}'$ em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Pela expressão (2.68), $\{\mathbf{u}'_{m_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada no espaço $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto, pelo Teorema 1.2.5, existe uma subsequência $\{\mathbf{u}'_{m_{l_k}}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{\mathbf{u}'_{m_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ e uma função $\tilde{\mathbf{v}}$ tal que $\mathbf{u}'_{m_{l_k}} \rightharpoonup \tilde{\mathbf{v}}$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Usando a imersão contínua de Sobolev $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, temos que $\mathbf{u}'_{m_{l_k}} \rightharpoonup \tilde{\mathbf{v}}$ em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Logo, pela unicidade do limite fraco, $\mathbf{u}' = \tilde{\mathbf{v}}$ em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Desta forma, no limite $k \longrightarrow \infty$, observamos que:

$$\mathbf{u}' := \frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.69}$$

provando (2.55). Além disto,

$$\|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_5\|g\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.70}$$

Reunindo os resultados (2.21) e (2.67),

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq t\leq T} ess \left(\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + A[\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t)]\right)\\ &\leq C_1^2\|g\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C_5^2\|g\|^2_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sup_{0\leq t\leq T} ess\ \|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_6^2\|g\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \tag{2.71}$$

onde $C_6 := (C_1^2 + C_5^2)^{\frac{1}{2}}$.

Considerando a sequência $\{\mathbf{u}_{m_{l_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ como acima e tomando o limite $k \longrightarrow \infty$, de (2.71),

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.72}$$

e

$$\sup_{0\leq t\leq T} ess\ \|\mathbf{u}(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_6\|g\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.73}$$

Como $\mathbf{u}$ caracteriza uma solução fraca do problema (2.1),

$$B[\mathbf{u},v] = \langle -\mathbf{u}',v\rangle = (-\mathbf{u}',v)_{L^2(\Omega)},\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$$

quase sempre em $[0,T]$. Como $\mathbf{u}'(t) \in L^2(\Omega)$, para t quase sempre em $[0,T]$, pelo Teorema 1.7.2 obtemos que $\mathbf{u}(t) \in H^2(\Omega)$. Também, pelo Teorema 1.7.2, existe uma constante $C_7 > 0$, tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} \leq C_7 \left(\|\mathbf{u}'\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

quase sempre em $[0,T]$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq \int_0^T C_7^2 \left(\|\mathbf{u}'\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 \, dt \\
&\leq 2C_7^2 \left(\int_0^T \|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt + \int_0^T \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt\right) \\
&\leq 2C_7^2 \|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + 2C_7^2 \int_0^T \sup_{0 \leq t \leq T} ess \, \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt \\
&\leq 2C_5^2 C_7^2 \|g\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2C_6^2 C_7^2 T \|g\|^2_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C_8^2 \|g\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \tag{2.74}$$

onde $C_8 := \sqrt{2}(C_5^2 + C_6^2 T)^{\frac{1}{2}} C_7$. Por (2.74),

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C_8 \|g\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.75}$$

Esta última desigualdade nos mostra que

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T;H^2(\Omega)). \tag{2.76}$$

Os resultados (2.72) e (2.76) provam (2.54) e as estimativas (2.70), (2.73) e (2.75) provam (2.56).

■

Para $g \in H^2(\Omega)$, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 2.5.2. *Se, nas hipóteses do Teorema 2.5.1, supormos que $g \in H^2(\Omega)$, então:*

$$\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)), \tag{2.77}$$

$$\boldsymbol{u}' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.78}$$

$$\boldsymbol{u}'' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \tag{2.79}$$

e

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le T} ess \, (\|\boldsymbol{u}(t)\|_{H^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}'(t)\|_{L^2(\Omega)}) + \|\boldsymbol{u}'\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&+\|\boldsymbol{u}''\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \le C\|g\|_{H^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.80}$$

onde a constante C depende somente de Ω, T, W e n.

Demonstração. Ref. [14], pg. 361-364. □

Teorema 2.5.3. *Seja p um inteiro não-negativo. Suponha $g \in H^{2p+1}(\Omega)$, $W \in C^{2p+1}(\bar{\Omega})$, e $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, com $\boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, é a solução fraca do problema de valor inicial e de fronteira*

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + W(x)u & , \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T]. \\
u(x,0) = g(x) & , \quad x \in \Omega. \\
u(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T].
\end{cases}$$

Suponha que $\partial\Omega$ é de classe C^{2p+2}. Suponha também a condição de compatibilidade de p-ésima ordem:

$$\begin{aligned}
&g_0 := g \in H_0^1(\Omega), \; g_1 := \Delta g_0 + W g_0 \in H_0^1(\Omega), \ldots, \\
&g_p := \Delta g_{p-1} + W g_{p-1} \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Então,

$$\frac{d^k \boldsymbol{u}}{dt^k} \in L^2(0,T; H^{2p+2-2k}(\Omega)),\ \forall\ k \in \{0,1,2,\ldots,p+1\} \tag{2.82}$$

e

$$\sum_{k=0}^{p+1} \left\| \frac{d^k \boldsymbol{u}}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2p+2-2k}(\Omega))} \leq C\|g\|_{H^{2p+1}(\Omega)}, \tag{2.83}$$

onde a constante C depende de p, Ω, T, W e n.

Demonstração. Por indução, ao longo da qual empregamos a mesma letra C para denotar distintas constantes positivas.

No caso $p = 0$, o resultado é válido pelo Teorema 2.5.1. Suponha que o teorema seja válido para p inteiro não-negativo. Imponha as condições: $g \in H^{2p+3}(\Omega)$, $W \in C^{2p+3}(\bar{\Omega})$, $\partial\Omega$ é de classe C^{2p+4} e a condição de compatibilidade de $(p+1)$-ésima ordem é válida:

$$g_0 := g \in H_0^1(\Omega),\ g_1 := \Delta g_0 + W g_0 \in H_0^1(\Omega), \ldots,$$
$$g_{p+1} := \Delta g_p + W g_p \in H_0^1(\Omega).$$

Queremos mostrar que o teorema vale para $p+1$.

Denote $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}'$. Temos que

$$\langle \mathbf{u}', v\rangle + B[\mathbf{u}, v] = 0,\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.84}$$

quase sempre em $[0,T]$. Derivando (2.84) em relação a t, obtemos

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}', v\rangle + B[\tilde{\mathbf{u}}, v] = 0,\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Também temos que $\tilde{\mathbf{u}}$ é a única solução fraca para o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = \Delta\tilde{\mathbf{u}} + W(x)\tilde{\mathbf{u}} & , \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T]. \\ \tilde{\mathbf{u}}(x,0) = \tilde{g}(x) & , \quad x \in \Omega. \\ \tilde{\mathbf{u}}(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \end{cases}$$

Lembramos que $\tilde{g} := \Delta g + Wg \in H_0^1(\Omega)$. Além disto, pelo Teorema 2.5.2, $\tilde{\mathbf{u}} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, com $\tilde{\mathbf{u}}' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

O fato de g satisfazer a condição de compatibilidade de $(p+1)$-ésima ordem implica que $\tilde{g}$ satisfaz a condição de compatibilidade de p-ésima ordem. Usando a hipótese de indução, segue que

$$\frac{d^k \tilde{\mathbf{u}}}{dt^k} \in L^2(0,T;H^{2p+2-2k}(\Omega)),\ \forall\ k \in \{0,1,2,\dots,p+1\}$$

e

$$\sum_{k=0}^{p+1} \left\| \frac{d^k \tilde{\mathbf{u}}}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2p+2-2k}(\Omega))} \leq C \|\tilde{g}\|_{H^{2p+1}(\Omega)}.$$

Como $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}'$, então:

$$\frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k} \in L^2(0,T;H^{2p+4-2k}(\Omega)),\ \forall\ k \in \{1,2,\dots,p+2\}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+2} \left\| \frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2p+4-2k}(\Omega))} &\leq C \|\tilde{g}\|_{H^{2p+1}(\Omega)} \\ &\leq C \left[\|\Delta g\|_{H^{2p+1}(\Omega)} + \|W\|_{L^\infty(\Omega)} \|g\|_{H^{2p+1}(\Omega)} \right] \\ &\leq C \left[\|g\|_{H^{2p+3}(\Omega)} + \|g\|_{H^{2p+1}(\Omega)} \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^{p+2} \left\| \frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2p+4-2k}(\Omega))} \leq C \|g\|_{H^{2p+3}(\Omega)}. \tag{2.85}$$

Por (2.85), notamos que $\mathbf{u}' := \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0,T;H^{2p+2}(\Omega))$. Assim, quase sempre em $[0,T]$, $\mathbf{u}'(t) \in H^{2p+2}(\Omega)$.

Defina $L := -\Delta - W$, um operador diferencial elíptico de segunda ordem. De (2.1) notamos que

$$\begin{cases} L\mathbf{u} = -\mathbf{u}' & em \quad \Omega \\ \quad\ \mathbf{u} = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

quase sempre em $[0, T]$.

Lembrando que $\partial\Omega$ é C^{2p+4}, pelo Teorema 1.7.3, temos que, quase sempre em $[0, T]$, $\mathbf{u} \in H^{2p+4}(\Omega)$ e

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{2p+4}(\Omega)} \leq C \left(\|\mathbf{u}'\|_{H^{2p+2}(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{2.86}$$

Integramos (2.86) sobre $[0, T]$. Usando o Teorema 2.5.1 e o resultado (2.85),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H^{2p+4}(\Omega))} &\leq C \int_0^T \left(\|\mathbf{u}'\|_{H^{2p+2}(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \, dt \\ &\leq C \left(\|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(0,T;H^{2p+2}(\Omega))} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right) \\ &\leq C \left(\|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(0,T;H^{2p+2}(\Omega))} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \right) \\ &\leq C \left(\|g\|^2_{H^{2p+3}(\Omega)} + \|g\|^2_{H^1_0(\Omega)} \right) \\ &\leq C \|g\|^2_{H^{2p+3}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^{2p+4-2\cdot 0}(\Omega)),$$

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^{2p+4}(\Omega))} \leq C \|g\|_{H^{2p+3}(\Omega)}$$

e consequentemente,

$$\sum_{k=0}^{p+2} \left\| \frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2p+4-2k}(\Omega))} \leq C \|g\|_{H^{2p+3}(\Omega)},$$

o que completa a demonstração.

■

Teorema 2.5.4. *Seja Ω um aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, com $\partial\Omega$ de classe C^∞. Suponha $g \in C^\infty(\bar{\Omega})$ e $W \in C^\infty(\bar{\Omega})$. O problema de valor inicial e de fronteira*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + W(x)u & , \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T] \\ u(x,0) = g(x) & , \quad x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \end{cases} \tag{2.87}$$

tem uma solução $\mathbf{u} \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0,T])$ e ela é única.

Demonstração. Pelos resultados das seções anteriores, existe uma única função $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, com $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, que soluciona fracamente o problema (2.87).

Note que as definições de g e W garantem que a condição de compatibilidade de p-ésima ordem, dada por (2.81) no enunciado do Teorema 2.5.3, é atendida para qualquer que seja o inteiro não-negativo p.

Como $\partial\Omega$ é de classe C^∞, aplicamos o Teorema 2.5.3 indefinidamente para $p = 0, 1, 2, \ldots$ Associando o Teorema 1.5.2 ao Teorema 1.4.2, concluímos que $\mathbf{u} \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0,T])$.

A unicidade da solução é consequência imediata da unicidade de solução fraca.

∎

2.6 Princípio Fraco do Máximo

Nesta seção, denotamos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Para facilitar a apresentação das informações, definimos:

- $\Omega_T := \Omega \times (0,T]$,

- $\bar{\Omega}_T := \bar{\Omega} \times [0, T]$ e

- $\Gamma_T := \bar{\Omega}_T - \Omega_T = (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{t = 0\})$.

Teorema 2.6.1 (Princípio Fraco do Máximo). *Sejam W função limitada em $\bar{\Omega}$, $W \leq 0$, e $\boldsymbol{u} \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$. Se*

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \Delta \boldsymbol{u} - W\boldsymbol{u} \geq 0 \tag{2.88}$$

em Ω_T, então,

$$\min_{\bar{\Omega}_T} \boldsymbol{u} \geq -\max_{\Gamma_T} \boldsymbol{u}^-, \tag{2.89}$$

onde $\boldsymbol{u}^- = -\min\{\boldsymbol{u}, 0\}$.

Demonstração.

Etapa 1. Suponha que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} - W\mathbf{u} > 0$$

em Ω_T e que

$$\min_{\bar{\Omega}_T} \mathbf{u} < -\max_{\Gamma_T} \mathbf{u}^-.$$

Por definição, sabemos que $\mathbf{u}^- \geq 0$. Segue que $-\max_{\Gamma_T} \mathbf{u}^- \leq 0$, o que implica $\min_{\bar{\Omega}_T} \mathbf{u} < 0$.
Então, existe $(x_0, t_0) \in \bar{\Omega}_T$ tal que $\mathbf{u}(x_0, t_0) = \min_{\bar{\Omega}_T} \mathbf{u} < 0$.

- Suponha que $(x_0, t_0) \in \Gamma_T$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_0, t_0) &= \min_{\bar{\Omega}_T} \mathbf{u} < -\max_{\Gamma_T} \mathbf{u}^- \\ &\leq -\mathbf{u}^-(x_0, t_0) = \min\{\mathbf{u}(x_0, t_0), 0\} = \mathbf{u}(x_0, t_0). \end{aligned}$$

Conclui-se que $\mathbf{u}(x_0, t_0) < \mathbf{u}(x_0, t_0)$, um absurdo.

- Suponha que $(x_0, t_0) \in \Omega_T$.

  Se $0 < t_0 < T$, (x_0, t_0) é um ponto interior, então,

  $$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \ e \ \Delta \mathbf{u} \geq 0.$$

  Como $W \leq 0$, por hipótese, e $\mathbf{u}(x_0, t_0) < 0$, temos que

  $$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} - W\mathbf{u} \leq 0$$

  em (x_0, t_0), o que contradiz a hipótese básica da etapa 1.

  Se $t_0 = T$ vemos ainda que, em (x_0, t_0), $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \leq 0$ e a contradição acima também ocorre.

  Logo, $\min\limits_{\bar{\Omega}_T} \mathbf{u} \geq -\max\limits_{\Gamma_T} \mathbf{u}^-$.

Etapa 2. Suponha que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} - W\mathbf{u} = 0.$$

Tome $\epsilon > 0$. Defina a função auxiliar $\mathbf{u}_\epsilon(x,t) = \mathbf{u}(x,t) + \epsilon t$, para $(x,t) \in \bar{\Omega}_T$. Em Ω_T,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\epsilon}{\partial t} - \Delta \mathbf{u}_\epsilon - W\mathbf{u}_\epsilon = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} - W\mathbf{u} + (1 - Wt)\epsilon > 0.$$

Pela etapa 1,

$$\min_{\bar{\Omega}_T} \mathbf{u}_\epsilon \geq \ -\max_{\Gamma_T} \mathbf{u}_\epsilon^-.$$

No limite $\epsilon \longrightarrow 0^+$,

$$\min_{\bar{\Omega}_T} \mathbf{u} \geq -\max_{\Gamma_T} \mathbf{u}^-.$$

■

Teorema 2.6.2. *Sejam W limitada em $\bar{\Omega}$ e $\boldsymbol{u} \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$. Se*

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \Delta \boldsymbol{u} - W\boldsymbol{u} \geq 0 \tag{2.90}$$

em Ω_T e $\boldsymbol{u} \geq 0$ em Γ_T, então, $\boldsymbol{u} \geq 0$ em $\bar{\Omega}_T$.

Demonstração.

Etapa 1. Suponha que $W \leq 0$ em $\bar{\Omega}$. Pelo Teorema 2.6.1, temos que $\min_{\bar{\Omega}_T} \mathbf{u} \geq -\max_{\Gamma_T} \mathbf{u}^-$. A hipótese de que $\mathbf{u} \geq 0$ em Γ_T garante que, sobre esta região, $\mathbf{u}^- \equiv 0$. Logo, $\min_{\bar{\Omega}_T} \mathbf{u} \geq 0$. Isto implica que $\mathbf{u} \geq 0$ sobre $\bar{\Omega}_T$.

Etapa 2. Suponha que $W \geq 0$ em alguma região de $\bar{\Omega}$. Portanto, existe $\lambda < 0$ tal que $\lambda < -|W|$ sobre $\bar{\Omega}$. Agora, sobre $\bar{\Omega}_T$, defina $v := e^{\lambda t}\mathbf{u}$. Daí, $v \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ e $\mathbf{u} = ve^{-\lambda t}$. Substituindo na desigualdade (2.90), resulta

$$0 \leq \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} - W\mathbf{u} = e^{-\lambda t}\frac{\partial v}{\partial t} - \lambda e^{-\lambda t} v - e^{-\lambda t}\Delta v - e^{-\lambda t} W v,$$

ou seja, em Ω_T,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v - (W + \lambda)v \geq 0.$$

Note que $W + \lambda < 0$ em $\bar{\Omega}$. Pelo Teorema 2.6.1,

$$\min_{\bar{\Omega}_T} v \geq -\max_{\Gamma_T} v^-.$$

Como $\mathbf{u} \geq 0$ em Γ_T e $v = e^{\lambda t}\mathbf{u}$, então, $v \geq 0$ em Γ_T. Da etapa 1, segue que $v \geq 0$ sobre $\bar{\Omega}_T$. Da definição de v, concluímos que $\mathbf{u} \geq 0$ sobre a região $\bar{\Omega}_T$.

■

Segue dos Teoremas 2.5.4 e 2.6.2, considerando-se a igualdade em (2.90), o seguinte:

Teorema 2.6.3. *Seja $R > 0$, um número real fixo. Tome o conjunto $\Omega = B_R := \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\}$. Suponha $W \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Suponha $g \in C^\infty(\bar{\Omega})$ e que $g \geq 0$ em $\bar{\Omega}$. O problema de valor inicial e de fronteira*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + W(x)u & , \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T] \\ u(x,0) = g(x) & , \quad x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \end{cases} \tag{2.91}$$

tem uma única solução $\boldsymbol{u} \in C^\infty(\bar{\Omega}_T)$ e $\boldsymbol{u} \geq 0$ sobre $\bar{\Omega}_T$.

O Teorema 2.6.3 também é válido quando enunciado sob um contexto mais geral, ou seja, no caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado, apresentando fronteira de classe C^∞.

Capítulo 3

Equação do Calor com Potencial Singular: Existência de Solução

3.1 Solução Generalizada

Seja $N \in \mathbb{N}$, de forma que $N \geq 3$ e $T > 0$, um número real fixo. Considere o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u \quad , \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{3.1}$$

com função potencial singular da forma

$$V(x) = \frac{\lambda}{|x|^2}, \tag{3.2}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^N$, onde λ é um real positivo. O termo singular refere-se ao fato de que $V \longrightarrow \infty$ se $x \longrightarrow 0$.

O objetivo deste capítulo é provar a existência de solução generalizada do problema de Cauchy (3.1)-(3.2).

A definição de solução generalizada é a seguinte:

Definição 3.1.1 (Solução Generalizada)**.** *Suponha que* $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. *Uma função* $u \in C([0,T); L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$ *é solução generalizada do problema de Cauchy (3.1)-(3.2) se* $Vu \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \times (0,T))$ *e*

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^N} u\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi + V\phi\right) dx\ dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\phi(x,0)\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau)\phi(x,\tau)\ dx, \tag{3.3}$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ *e* $0 \leq \tau < T$.

Vamos fixar desde já a notação a ser empregada neste capítulo. Sejam R e ρ números reais estritamente positivos. Denotamos:

- $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N :\ |x| < R\}$.
- $\overline{B_R} = \{x \in \mathbb{R}^N :\ |x| \leq R\}$.
- $\partial B_R = \{x \in \mathbb{R}^N :\ |x| = R\}$.
- $A_{\rho,R} = \{x \in \mathbb{R}^N :\ \rho \leq |x| \leq R\}$.
- $D_{R,T} = \overline{B_R} \times (0,T)$.
- $S_T = \mathbb{R}^N \times (0,T)$.

Para obter a existência de solução generalizada do problema de Cauchy (3.1)-(3.2), trabalhamos com uma família de aproximações do problema original definidas sobre regiões limitadas.

Definição 3.1.2. *Seja* $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma família de potenciais satisfazendo as seguintes condições:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} V_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N) & , & \forall\, n \in \mathbb{N}. \\ 0 \leq V_n(x) \leq V_{n+1}(x) \leq V(x) & , & \forall\, x \in \mathbb{R}^N\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \\ V_n(x) = \dfrac{\lambda}{|x|^2} & , & \forall\, x \notin \overline{B_{\frac{1}{n}}}. \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ *e* $R > 0$*, fixados, indicamos por* $(P_{n,R})$ *ao problema de valor inicial e de fronteira:*

$$(P_{n,R}) \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V_n(x)u & , & (x,t) \in D_{R,T}. \\ u(x,0) = u_0(x) & , & x \in \overline{B_R}. \\ u(x,t) = 0 & , & (x,t) \in \partial B_R \times (0,T). \end{array}\right. \tag{3.5}$$

Definição 3.1.3. *Suponha* $u_0 \in L^1(B_R)$*. A função* $u \in C([0,T); L^1(B_R))$ *é uma solução generalizada do problema de valor inicial e de fronteira* $(P_{n,R})$ *se, para cada* $\tau \in [0,T)$ *e para cada função* $\phi \in C^\infty(\overline{D_{R,T}})$*, tal que* $\phi \geq 0$ *e,* $\phi(x,t) = 0$ *sobre* $\partial B_R \times (0,T)$*,* u *satisfaz a relação*

$$\int_{B_R} u(x,\tau)\phi(x,\tau)\ dx - \int_{B_R} u_0(x)\phi(x,0)\ dx \\ - \iint_{D_{R,\tau}} u\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi + V_n\phi\right) dx\ dt = 0. \tag{3.6}$$

Toda solução clássica do problema $(P_{n,R})$ é, em particular, uma solução generalizada para este problema.

Seja $\tilde{u}$ uma solução de $(P_{n,R})$. Então, em $D_{R,T}$,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \Delta \tilde{u} - V_n \tilde{u} = 0. \tag{3.7}$$

Multiplicamos a equação (3.7) por uma função-teste ϕ, que atende as condições dadas na Definição 3.1.3. Em seguida, a integramos sobre a região $D_{R,\tau}$, onde $\tau \in [0, T)$. Usando o Teorema de Fubini, ver ref. [26], obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{D_{R,\tau}} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \phi - (\Delta \tilde{u})\phi - V_n \tilde{u} \phi \right] \, dx \, dt \\ &= \int_{B_R} \left[\int_0^\tau \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \phi \, dt \right] dx - \int_0^\tau \left[\int_{B_R} (\Delta \tilde{u}) \phi \, dx \right] dt \\ &- \int_0^\tau \int_{B_R} V_n \tilde{u} \phi \, dx \, dt. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Considerando a expressão (3.8) e usando de integração por partes, da Fórmula de Green, Teorema 1.6.6, item (iii), e do Teorema de Fubini, notamos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_R} \tilde{u}(x,\tau)\phi(x,\tau) \, dx - \int_{B_R} \tilde{u}(x,0)\phi(x,0) \, dx \\ &- \int_{B_R} \int_0^\tau \tilde{u} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dt \, dx - \int_0^\tau \int_{B_R} \tilde{u} \Delta \phi \, dx \, dt \\ &- \int_0^\tau \int_{B_R} V_n \tilde{u} \phi \, dx \, dt \\ &= \int_{B_R} \tilde{u}(x,\tau)\phi(x,\tau) \, dx - \int_{B_R} u_0(x)\phi(x,0) \, dx \\ &- \iint_{D_{R,\tau}} \tilde{u} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta \phi + V_n \phi \right) dx \, dt. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Definição 3.1.4. *Se, para as mesmas condições da Definição 3.1.3, u satisfaz*

$$\int_{B_R} u(x,\tau)\phi(x,\tau)\ dx - \int_{B_R} u_0(x)\phi(x,0)\ dx$$
$$- \iint_{D_{R,\tau}} u \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi + V_n\phi \right) dx\ dt \geq 0, \tag{3.10}$$

então, u é chamada de uma supersolução do problema $(P_{n,R})$. *Se u satisfaz*

$$\int_{B_R} u(x,\tau)\phi(x,\tau)\ dx - \int_{B_R} u_0(x)\phi(x,0)\ dx$$
$$- \iint_{D_{R,\tau}} u \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi + V_n\phi \right) dx\ dt \leq 0, \tag{3.11}$$

então, u é chamada de uma subsolução do problema considerado.

Nosso objetivo neste capítulo consiste em demonstrar a parte de existência do seguinte teorema:

Teorema 3.1.1. *Tome* $0 \leq \lambda < \lambda^* := \dfrac{(N-2)^2}{4}$. *Suponha que a condição inicial satisfaz*

$$|u_0(x)| \leq k|x|^\alpha e^{c|x|^2},\ \forall\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.12}$$

onde c e k são constantes estritamente positivas e

$$\frac{-N+2-\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2} < \alpha \leq \frac{-N+2+\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2}. \tag{3.13}$$

Então, existe uma única u solução generalizada do problema de Cauchy (3.1)-(3.2) tal que

$$|u(x,t)| \leq K|x|^\alpha e^{C|x|^2}, \tag{3.14}$$

$\forall\ (x,t) \in S_{T_0}$, *para* $0 < T_0 < \dfrac{1}{4c}$ *e,* C *e* K *constantes positivas.*

A prova da unicidade deste Teorema será feita no capítulo 4.

3.2 Resultados Preliminares

Nesta seção, estabelecemos alguns resultados relevantes para demonstrar a existência de solução generalizada para o problema de Cauchy (3.1)-(3.2) a ser feita no decorrer da seção seguinte.

Consideramos $n \in \mathbb{N}$ e $R > 0$. Tomamos V como em (3.2) e $V_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ atendendo as condições dadas por (3.4).

Lema 3.2.1. *Tome* $0 \leq \lambda < \lambda^* := \dfrac{(N-2)^2}{4}$*. Suponha* α*, de forma que*

$$\frac{-N+2-\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2} < \alpha \leq \frac{-N+2+\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2}. \tag{3.15}$$

Então, $\alpha + N - 2 > 0$.

Demonstração. Por contradição, supor que exista α atendendo a condição (3.15) tal que $\alpha + N - 2 \leq 0$. É evidente que $\alpha + N \leq 2$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{-N+2-\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2} &< \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{N+2-\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2} &< \alpha + N \leq 2. \end{aligned}$$

Assim, usando a definição de λ e o fato de que $N \geq 3$,

$$\begin{aligned} N+2-\sqrt{(N-2)^2-4\lambda} &< 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow N-2 &< \sqrt{(N-2)^2-4\lambda} \Rightarrow \\ \Rightarrow (N-2)^2 &< (N-2)^2-4\lambda \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda &< 0, \end{aligned}$$

o que contradiz o fato de que $\lambda \geq 0$. Logo, $\alpha + N - 2 > 0$.

■

Também notamos que se α atende a condição (3.15), então, $\alpha \leq 0$.

Lema 3.2.2. *Seja* $0 \leq \lambda < \lambda^* := \dfrac{(N-2)^2}{4}$. *Suponha que existam constantes* $k, c > 0$, *tal que*

$$|u_0(x)| \leq k|x|^\alpha e^{c|x|^2},\ \forall\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.16}$$

onde α *atende a condição (3.15) do Lema 3.2.1.*
Seja T_1 *um número real fixo, tal que*

$$0 < T_1 < \frac{1}{4c}. \tag{3.17}$$

Seja ζ, *uma função definida para* $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T_1)$, *tal que*

$$\zeta(x,t) := k_1|x|^\alpha (T_1 - t)^\beta \exp\left\{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}\right\}, \tag{3.18}$$

onde $\beta = -\dfrac{1}{2}(2\alpha + N)$ *e* $k_1 \geq \dfrac{k}{T_1^\beta}$ *uma constante positiva. Então,*
(i) $|u_0(x)| \leq \zeta(x,0),\ \forall\ x \in \mathbb{R}^N$.
(ii) $\forall\ \tau \in [0, T_1), \displaystyle\int_{B_R} |\zeta(x,\tau)|\ dx < \infty$.

Demonstração. (i) $\forall\ x \in \mathbb{R}^N$,

$$|u_0(x)| \leq k|x|^\alpha e^{c|x|^2} \leq k_1|x|^\alpha T_1^\beta \exp\left\{\frac{|x|^2}{4T_1}\right\} = \zeta(x,0). \qquad (3.19)$$

(ii) Para cada $\tau \in [0, T_1)$,

$$\int_{B_R} |\zeta(x,\tau)|\ dx = \int_{B_R} k_1|x|^\alpha (T_1-\tau)^\beta \exp\left\{\frac{|x|^2}{4(T_1-\tau)}\right\}\ dx.$$

Fazendo a decomposição $dx = r^{N-1}dr\ d\Omega$, resulta

$$\int_{B_R} |\zeta(x,\tau)|\ dx = k_1(T_1-\tau)^\beta \omega_N \int_0^R r^{\alpha+N-1} \exp\left\{\frac{r^2}{4(T_1-\tau)}\right\}\ dr,$$

onde ω_N é a área da superfície da bola unitária no $\mathbb{R}^N$ com medida $d\Omega$. Como $\alpha + N - 1 > 1$, Lema 3.2.1, obtemos que

$$\int_{B_R} |\zeta(x,\tau)|\ dx \leq k_1(T_1-\tau)^\beta \omega_N R^{\alpha+N} \exp\left\{\frac{R^2}{4(T_1-\tau)}\right\} < \infty.$$

■

O Lema acima garante que, para cada $\tau \in [0, T_1)$, $\zeta(\cdot,\tau) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Devido ao Lema 3.2.2, item (i), também garantimos que $u_0 \in L^1(B_R)$, pois,

$$0 \leq \int_{B_R} |u_0(x)|\ dx \leq \int_{B_R} |\zeta(x,0)|\ dx \leq k_1(T_1)^\beta \omega_N R^{\alpha+N} \exp\left\{\frac{R^2}{4T_1}\right\} < \infty.$$

Consequentemente, $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 3.2.3. *Seja u_0 nas condições do Lema 3.2.2. Então, para cada $T_1 \in \left(0, \dfrac{1}{4c}\right)$ e k_1 suficientemente grande, a função ζ é uma supersolução do problema $(P_{n,R})$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $R > 0$, se $T \in [0, T_1)$.*

Demonstração. Temos $n \in \mathbb{N}$ e $R > 0$ fixos. Também fixamos τ, de forma que $0 \leq \tau < T_1$, para T_1 fixo na proposta enunciada. Consideramos ρ, de maneira que $0 < \rho \leq \frac{1}{2}$. Além disto, tomamos a função-teste ϕ atendendo a Definição 3.1.3, ou seja, $\phi \in C^{\infty}(\overline{D_{R,T_1}})$, onde $\phi \geq 0$ e $\phi(x,t) = 0$ sobre $\partial B_R \times (0, T_1)$.

Defina:

$$\begin{aligned} I_\rho \quad := \quad & \int_{A_{\rho,R}} \zeta(x,\tau)\phi(x,\tau)\ dx - \int_{A_{\rho,R}} u_0(x)\phi(x,0)\ dx \\ - \quad & \iint_{A_{\rho,R}\times(0,\tau)} \zeta \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi + V_n \phi \right)\ dx\ dt. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Fazendo integração por partes obtemos, para cada $x \in A_{\rho,R}$, que

$$\int_0^\tau \zeta \frac{\partial \phi}{\partial t}\ dt = \zeta(x,\tau)\phi(x,\tau) - \zeta(x,0)\phi(x,0) - \int_0^\tau \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \phi\ dt. \tag{3.21}$$

Além disto, para cada $t \in (0,\tau)$, notamos pela Fórmula de Green, Teorema 1.6.6, item (iii), que

$$\int_{A_{\rho,R}} \zeta\Delta\phi\ dx = \int_{A_{\rho,R}} (\Delta\zeta)\phi\ dx + \int_{\partial A_{\rho,R}} \left\{ \zeta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \phi \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right\}\ dS, \tag{3.22}$$

onde $\frac{\partial}{\partial \eta}(\cdot) := \vec{n} \cdot \nabla(\cdot)$ é a derivada direcional na direção da normal unitária $\vec{n}$ externa a $\partial A_{\rho,R}$.

Em seguida, substituindo (3.21) e (3.22) em I_ρ resulta:

$$\begin{aligned}
I_\rho &= \int_{A_{\rho,R}} \zeta(x,\tau)\phi(x,\tau)\ dx - \int_{A_{\rho,R}} u_0(x)\phi(x,0)\ dx \\
&- \int_{A_{\rho,R}} \zeta(x,\tau)\phi(x,\tau)\ dx + \int_{A_{\rho,R}} \zeta(x,0)\phi(x,0)\ dx \\
&+ \iint_{A_{\rho,R}\times(0,\tau)} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)\phi\ dx\ dt - \iint_{A_{\rho,R}\times(0,\tau)} (\Delta\zeta)\phi\ dx\ dt \\
&+ \int_0^\tau \int_{\partial A_{\rho,R}} \left\{\phi\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - \zeta\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right\}\ dS\ dt \\
&+ \iint_{A_{\rho,R}\times(0,\tau)} (V - V_n)\zeta\phi\ dx\ dt \\
&- \iint_{A_{\rho,R}\times(0,\tau)} V\zeta\phi\ dx\ dt. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Após reorganizarmos os termos convenientemente, I_ρ pode ser expressa na seguinte forma:

$$I_\rho := I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \qquad (3.24)$$

onde

$$I_1 = \iint_{A_{\rho,R}\times(0,\tau)} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \Delta\zeta - V\zeta\right)\phi\ dx\ dt, \qquad (3.25)$$

$$I_2 = \int_{A_{\rho,R}} [\zeta(x,0) - u_0(x)]\phi(x,0)\ dx, \qquad (3.26)$$

$$I_3 = \iint_{A_{\rho,R}\times(0,\tau)} (V - V_n)\zeta\phi\ dx\ dt \qquad (3.27)$$

e

$$I_4 = \int_0^\tau \int_{\partial A_{\rho,R}} \left\{\phi\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - \zeta\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right\}\ dS\ dt. \qquad (3.28)$$

Na sequência, analisamos cada integral $I_i, i = 1, 2, 3, 4$.

Seja $(x,t) \in (\mathbb{R}^N - \{0\}) \times (0, T_1)$. Por cálculo direto, usando a definição de ζ,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\zeta(x,t)}{(T_1 - t)^2} \left[\frac{|x|^2}{4} - \beta(T_1 - t) \right] \tag{3.29}$$

e

$$\Delta \zeta = \zeta(x,t) \left\{ \frac{[\alpha(\alpha-2) + \alpha N]}{|x|^2} + \frac{2\alpha + N}{2(T_1 - t)} + \frac{|x|^2}{4(T_1 - t)^2} \right\}. \tag{3.30}$$

Para $(x,t) \in A_{\rho,R} \times (0,\tau)$, dos resultados (3.29), (3.30) e das definições de β e V, segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \Delta\zeta - V\zeta &= \zeta \left[\frac{|x|^2}{4(T_1 - t)^2} - \frac{\beta}{T_1 - t} \right] \\
&-\zeta \left[\frac{\alpha(\alpha-2) + \alpha N}{|x|^2} + \frac{2\alpha + N}{2(T_1 - t)} + \frac{|x|^2}{4(T_1 - t)^2} \right] - V\zeta \\
&= \zeta \left[\frac{2\alpha + N}{2(T_1 - t)} - \frac{\alpha(\alpha-2) + \alpha N}{|x|^2} - \frac{2\alpha + N}{2(T_1 - t)} - \frac{\lambda}{|x|^2} \right] \\
&= -\zeta \left[\frac{\alpha(\alpha-2) + \alpha N}{|x|^2} + \frac{\lambda}{|x|^2} \right] = -\frac{\zeta}{|x|^2}[\alpha^2 + (N-2)\alpha + \lambda].
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Por consequência da condição (3.15) dada sobre α, tem-se a desigualdade $\alpha^2 + (N-2)\alpha + \lambda \leq 0$. Pelo fato de ζ ser uma função real estritamente positiva, conclui-se de (3.31) que

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \Delta\zeta - V\zeta \geq 0 \tag{3.32}$$

sobre $A_{\rho,R} \times (0,\tau)$ e, consequentemente, $I_1 \geq 0$.

Também temos que $I_2 \geq 0$ e $I_3 \geq 0$ em vista da escolha de k_1 suficientemente grande, do Lema 3.2.2 e da definição de V_n.

Por último, consideramos I_4.

Observamos que $\partial A_{\rho,R} = \partial B_\rho \cup \partial B_R$. Da ref. [2], pg. 3061, temos que $\dfrac{\partial}{\partial \eta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}$ sobre ∂B_ρ e, $\dfrac{\partial}{\partial \eta} = \dfrac{\partial}{\partial r}$ sobre ∂B_R.

Como $\phi = 0$ sobre $\partial B_R \times (0,\tau)$,

$$\begin{aligned} I_4 &= -\int_0^\tau \int_{\partial B_R} \zeta \frac{\partial \phi}{\partial r}\, dS\, dt - \int_0^\tau \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \phi\, dS\, dt \\ &+ \int_0^\tau \int_{\partial B_\rho} \zeta \frac{\partial \phi}{\partial r}\, dS\, dt. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Como $\phi \geq 0$ em $\overline{B_R} \times [0,\tau]$ e $\phi = 0$ em $\partial B_R \times (0,\tau)$, segue que $\dfrac{\partial \phi}{\partial r} \leq 0$ em $\partial B_R \times (0,\tau)$. Portanto, $-\zeta \dfrac{\partial \phi}{\partial r} \geq 0$ em $\partial B_R \times (0,\tau)$. Por consequência,

$$-\int_0^\tau \int_{\partial B_R} \zeta \frac{\partial \phi}{\partial r}\, dS\, dt \geq 0. \tag{3.34}$$

Usando a estimativa do gradiente em coordenadas polares esféricas do $\mathbb{R}^N$, onde $\vec{n}$ é a normal unitária externa a ∂B_R, temos que:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\tau \int_{\partial B_\rho} \zeta \frac{\partial \phi}{\partial r}\, dS\, dt \right| \\ &= \left| \int_0^\tau \int_{\partial B_\rho} \zeta(-\vec{n} \cdot \nabla \phi)\, dS\, dt \right| \\ &\leq \sup_{(x,t) \in \partial B_\rho \times (0,\tau)} |\zeta(x,t)| \int_0^\tau \int_{\partial B_\rho} |\nabla \phi|\, dS\, dt \\ &\leq \sup_{(x,t) \in \partial B_\rho \times (0,\tau)} |\zeta(x,t)| T_1 \|\nabla \phi\|_{L^\infty(D_{R,T_1})} \omega_{\partial B_\rho}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

onde

$$\omega_{\partial B_\rho} = a_N \rho^{N-1}, \tag{3.36}$$

sendo que a_N, constante positiva que depende apenas de N, é a área da superfície ∂B_ρ.

Notamos tembém que

$$
\begin{aligned}
\sup_{(x,t)\in\partial B_\rho\times(0,\tau)} |\zeta(x,t)| &= k_1\rho^\alpha \sup_{t\in(0,\tau)} (T_1-t)^\beta \exp\left\{\frac{\rho^2}{4(T_1-t)}\right\} \\
&\leq k_1\rho^\alpha \sup_{t\in(0,\tau)} (T_1-t)^\beta \exp\left\{\frac{1}{4(T_1-t)}\right\},
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

pois, $0<\rho\leq \dfrac{1}{2}<1$.

Defina

$$
C_1 := a_N k_1 T_1 \|\nabla\phi\|_{L^\infty(D_{R,T_1})} \sup_{t\in(0,\tau)} (T_1-t)^\beta \exp\left\{\frac{1}{4(T_1-t)}\right\}.
$$

Por (3.35)-(3.37), segue que

$$
\left| \int_0^\tau \int_{\partial B_\rho} \zeta \frac{\partial\phi}{\partial r}\ dS\ dt \right| \leq C_1\rho^{\alpha+N-1}, \tag{3.38}
$$

onde C_1 não depende de ρ.

Além disto,

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^\tau \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial\zeta}{\partial r}\phi\ dS\ dt \\
&= -\int_0^\tau \int_{\partial B_\rho} \alpha k_1 |x|^{\alpha-1}(T_1-t)^\beta \phi \exp\left\{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}\right\}\ dS\ dt \\
&-\int_0^\tau \int_{\partial B_\rho} \frac{k_1}{2}|x|^{\alpha+1}(T_1-t)^{\beta-1} \phi \exp\left\{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}\right\}\ dS\ dt.
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

Notamos que

$$\begin{aligned}
&\left| -\int_0^\tau \int_{\partial B_\rho} \alpha k_1 |x|^{\alpha-1}(T_1-t)^\beta \phi \exp\left\{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}\right\}\, dS\ dt \right| \\
&\le |\alpha| k_1 \int_0^\tau \int_{\partial B_\rho} |x|^{\alpha-1}(T_1-t)^\beta \phi \exp\left\{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}\right\}\, dS\ dt \\
&\le |\alpha| k_1 T_1 \|\phi\|_{L^\infty(D_{R,T_1})} \rho^{\alpha-1} \omega_{\partial B_\rho} \sup_{t\in(0,\tau)} (T_1-t)^\beta \exp\left\{\frac{\rho^2}{4(T_1-t)}\right\} \\
&\le C_2 \rho^{\alpha+N-2},
\end{aligned} \tag{3.40}$$

onde

$$C_2 := a_N(N-2)k_1T_1\|\phi\|_{L^\infty(D_{R,T_1})} \sup_{t\in(0,\tau)} (T_1-t)^\beta \exp\left\{\frac{1}{4(T_1-t)}\right\}.$$

Também,

$$\begin{aligned}
&\left| -\int_0^\tau \int_{\partial B_\rho} \frac{k_1}{2} |x|^{\alpha+1}(T_1-t)^{\beta-1} \phi \exp\left\{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}\right\}\, dS\ dt \right| \\
&\le \frac{k_1}{2} \int_0^\tau \int_{\partial B_\rho} |x|^{\alpha+1}(T_1-t)^{\beta-1} \phi \exp\left\{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}\right\}\, dS\ dt \\
&\le \frac{k_1}{2} T_1 \|\phi\|_{L^\infty(D_{R,T_1})} \rho^{\alpha+1} \omega_{\partial B_\rho} \sup_{t\in(0,\tau)} (T_1-t)^{\beta-1} \exp\left\{\frac{\rho^2}{4(T_1-t)}\right\} \\
&\le C_3 \rho^{\alpha+N},
\end{aligned} \tag{3.41}$$

onde

$$C_3 := a_N \frac{k_1}{2} T_1\|\phi\|_{L^\infty(D_{R,T_1})} \sup_{t\in(0,\tau)} (T_1-t)^{\beta-1} \exp\left\{\frac{1}{4(T_1-t)}\right\}.$$

Os resultados acima obtidos implicam que

$$I_\rho \ge -C_1\rho^{\alpha+N-1} - C_2\rho^{\alpha+N-2} - C_3\rho^{\alpha+N} \tag{3.42}$$

e, portanto, pelo Lema 3.2.1 tem-se

$$\lim_{\rho \to 0^+} I_\rho \geq 0. \tag{3.43}$$

Por consequência, vemos que:

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq & \quad \lim_{\rho \to 0^+} I_\rho = \int_{B_R} \zeta(x,\tau)\phi(x,\tau)\; dx \\ - & \quad \int_{B_R} u_0(x)\phi(x,0)\; dx - \iint_{D_{R,\tau}} \zeta\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi + V_n\phi\right)\; dx\; dt, \end{aligned} \tag{3.44}$$

provando que ζ é uma supersolução do problema $(P_{n,R})$. Este resultado é válido independentemente de n e R.

■

3.3 Existência de Solução Generalizada

Nesta seção, vamos provar o Teorema 3.1.1, parte da existência. Queremos mostrar que se $|u_0(x)| \leq k|x|^\alpha e^{c|x|^2}$, $\forall\; x \in \mathbb{R}^N$, onde c e k são constantes estritamente positivas, então, existe uma função u satisfazendo a Definição 3.1.1 no caso em que $T = T_0 < \dfrac{1}{4c}$. Além disto, devemos mostrar que $|u(x,t)| \leq K|x|^\alpha e^{C|x|^2}$, $\forall\; (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T_0)$, onde C e K são constantes positivas a serem determinadas.

Para tal abordagem, consideramos T_1, número real fixo, de forma que $T_0 < T_1 < \dfrac{1}{4c}$. No decorrer da demonstração, vamos considerar a função ζ para k_1 suficientemente grande e os resultados apresentados nas seções 3.1 e 3.2.

Inicialmente, supomos que $u_0 \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$. O caso geral será considerado adiante.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o problema $(P_{n,n})$,

$$(P_{n,n}) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V_n(x)u & , \quad (x,t) \in D_{n,T_1}. \\ u(x,0) = u_{n0}(x) & , \quad x \in \overline{B_n}. \\ u(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial B_n \times (0,T_1). \end{cases} \tag{3.45}$$

V_n satisfaz as condições dadas por (3.4) e u_{n0} satisfaz as condições:

$$\begin{cases} u_{n0} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \\ 0 \leq u_{n0}(x) \leq u_{(n+1)0}(x) \leq u_0(x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}^N. \\ u_{n0} \longrightarrow u_0 \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^N). \\ u_{n0}(x) = 0, \ \forall \ x \in A_{n-\frac{1}{4},n}. \end{cases} \tag{3.46}$$

Notamos, pelas condições (3.46), que a resolução do problema $(P_{n,n})$ é feita considerando o problema abaixo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V_n(x)u & , \quad (x,t) \in B_n \times (0,T_1). \\ u(x,0) = u_{n0}(x) & , \quad x \in B_n. \\ u(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial B_n \times [0,T_1). \end{cases} \tag{3.47}$$

Pelo Teorema 2.6.3, o problema $(P_{n,n})$ tem uma única solução u_n, de forma que

$$u_n \in C^\infty(\overline{B_n} \times [0,T_1)) \ e \ u_n \geq 0 \ em \ \overline{B_n} \times [0,T_1). \tag{3.48}$$

Considere a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde u_n é a solução do problema $(P_{n,n})$.

Lema 3.3.1. *(i) A sequência* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é não-decrescente.*
(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ *e para cada* $(x,t) \in \overline{B_n} \times [0,T_1)$*, temos:*

$$u_n(x,t) \leq \zeta(x,t) := k_1|x|^\alpha (T_1-t)^\beta \exp\left\{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}\right\}. \tag{3.49}$$

(iii) O limite

$$u(x,t) := \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) \geq 0$$

existe pontualmente para cada $(x,t) \in (\mathbb{R}^N - \{0\}) \times (0,T_1)$ *e vale que* $u(x,t) \leq \zeta(x,t)$ *para* $(x,t) \in (\mathbb{R}^N - \{0\}) \times (0,T_1)$*.*
(iv) A função u satisfaz $u \in C((\mathbb{R}^N - \{0\}) \times (0,T_1))$*.*

Demonstração. (i) Fixe $n \in \mathbb{N}$. Como u_n é a solução não-negativa do problema $(P_{n,n})$ e u_{n+1} é a solução não-negativa do problema $(P_{n+1,n+1})$, então,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} = \Delta u_n + V_n(x)u_n & , \quad (x,t) \in B_n \times (0,T_1) \\ u_n(x,0) = u_{n0}(x) & , \quad x \in B_n \\ u_n(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial B_n \times [0,T_1) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{n+1}}{\partial t} = \Delta u_{n+1} + V_{n+1}(x)u_{n+1} & , \quad (x,t) \in B_{n+1} \times (0,T_1). \\ u_{n+1}(x,0) = u_{(n+1)0}(x) & , \quad x \in B_{n+1}. \\ u_{n+1}(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial B_{n+1} \times [0,T_1). \end{cases}$$

Defina $w_n := u_{n+1} - u_n$ em $\overline{B_n} \times [0,T_1)$.

Para $(x,t) \in B_n \times (0,T_1)$, como $V_n \leq V_{n+1}$, por (3.4), e $u_n \geq 0$, por (3.48), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_n}{\partial t} &= \frac{\partial u_{n+1}}{\partial t} - \frac{\partial u_n}{\partial t} \\
&= \Delta u_{n+1} + V_{n+1}u_{n+1} - \Delta u_n - V_n u_n \\
&\geq \Delta w_n + V_{n+1}w_n.
\end{aligned}$$

Para $x \in B_n$, como $u_{n0} \leq u_{(n+1)0}$, segue que

$$w_n(x,0) = u_{n+1}(x,0) - u_n(x,0) = u_{(n+1)0}(x) - u_{n0}(x) \geq 0.$$

Também notamos que, para $(x,t) \in \partial B_n \times [0,T_1)$,

$$w_n(x,t) = u_{n+1}(x,t) - u_n(x,t) = u_{n+1}(x,t) \geq 0.$$

Pelo princípio do máximo, Teorema 2.6.2, segue que $w_n \geq 0$ sobre $\overline{B_n} \times [0,T_1)$. Logo, $u_{n+1} \geq u_n$ sobre $\overline{B_n} \times [0,T_1)$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência não-decrescente.

(ii) Inicialmente, fixamos $\tau \in (0,T_1)$.

Pelo Lema 3.2.3, para k_1 suficientemente grande, ζ é uma super-solução do problema $(P_{n,R})$. Desta forma, no caso em que $R = n$,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_n} \zeta(x,\tau)\phi(x,\tau)\ dx - \int_{B_n} u_0(x)\phi(x,0)\ dx \\
&- \iint_{B_n\times(0,\tau)} \zeta \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \Delta\phi + V_n\phi\right)\ dx\ dt \geq 0, \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

para cada $\phi \in C^\infty(\overline{B_n} \times [0,T_1])$, $\phi \geq 0$ e $\phi = 0$ sobre $\partial B_n \times [0,T_1]$.

Fixe $n \in \mathbb{N}$. Como u_n é solução do problema $(P_{n,n})$, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_n} u_n(x,\tau)\phi(x,\tau)\ dx - \int_{B_n} u_{n0}(x)\phi(x,0)\ dx \\
&- \iint_{B_n\times(0,\tau)} u_n \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \Delta\phi + V_n\phi\right)\ dx\ dt = 0, \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

para cada $\phi \in C^\infty(\overline{B_n} \times [0, T_1])$, $\phi \geq 0$ e $\phi = 0$ sobre $\partial B_n \times [0, T_1]$.

Subtraindo (3.51) de (3.50),

$$\begin{aligned}
&\int_{B_n} [\zeta(x,\tau) - u_n(x,\tau)]\phi(x,\tau)\ dx \\
&\geq \iint_{B_n \times (0,\tau)} (\zeta - u_n) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta \phi + V_n \phi \right)\ dx\ dt, \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

para cada $\phi \in C^\infty(\overline{B_n} \times [0, T_1])$, $\phi \geq 0$ e $\phi = 0$ sobre $\partial B_n \times [0, T_1]$.

Suponha que existe um par $(x_0, \kappa) \in \overline{B_n} \times (0, T_1)$ para o qual $u_n(x_0, \kappa) > \zeta(x_0, \kappa)$.

Devido as condições de continuidade observadas a u_n e ζ, existe um conjunto com medida não-nula $E \times F \subset \overline{B_n} \times (0, T_1)$, tal que $(x_0, \kappa) \in E \times F$ e, além disto, $u_n(x,t) > \zeta(x,t)$, $\forall\ (x,t) \in E \times F$.

Defina a função $\sigma \in C^\infty(\overline{B_n})$, de forma que *supp* $(\sigma) \subset E$ e que $\sigma \geq 0$ não seja identicamente nula.

Considere o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$\left\{ \begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + V_n \psi = 0 & , & (x,t) \in B_n \times (0, \kappa). \\
\psi(x, \kappa) = \sigma(x) & , & x \in B_n. \\
\psi(x,t) = 0 & , & (x,t) \in \partial B_n \times (0, \kappa].
\end{array} \right. \qquad (3.53)$$

Fazendo a mudança de variável $t \longrightarrow \kappa - t$, o Teorema 2.6.3 garante a existência de $\psi \in C^\infty(\overline{B_n} \times [0, \kappa])$, $\psi \geq 0$, que soluciona o problema acima.

Defina $\phi \in C^\infty(\overline{B_n} \times [0, T_1])$, $\phi \geq 0$, $\phi(x,t) = 0$ no caso em que $(x,t) \in \partial B_n \times [0, T_1]$, de forma que $\phi = \psi$ sobre $\overline{B_n} \times [0, \kappa]$. Notamos que:

$$\int_{B_n} [\zeta(x,\kappa) - u_n(x,\kappa)]\phi(x,\kappa)\ dx = \int_{B_n} [\zeta(x,\kappa) - u_n(x,\kappa)]\sigma(x)\ dx < 0.$$

Mas,

$$\iint_{B_n\times(0,\kappa)} (\zeta - u_n)\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi + V_n\phi\right)\, dx\; dt = 0.$$

Neste caso, a relação (3.52) não é satisfeita para $\tau = \kappa$. Isto é uma contradição. Logo, $u_n \le \zeta$ em $\overline{B_n} \times (0, T_1)$.

Pela condição $u_{n0} \le u_0$, dada por (3.46), e pelo Lema 3.2.2, item (i), segue que $\zeta \ge u_n$, para $(x,t) \in \overline{B_n} \times [0, T_1)$.

(iii) Consequência direta dos itens (i) e (ii).

(iv) Para fazer esta prova, vamos mostrar que para cada conjunto compacto contido em $(\mathbb{R}^N - \{0\}) \times (0, T_1)$, existe uma subsequência da sequência de funções $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente para u. Devido à continuidade das funções u_n segue, pela aplicação do Teorema 1.1.2, que $u \in C((\mathbb{R}^N - \{0\}) \times (0, T_1))$.

Para m, número real suficientemente grande, defina

$$R_m := A_{\frac{1}{m},m} \times \left[\frac{1}{m}, T_1 - \frac{1}{m}\right],$$

conjunto compacto de $(\mathbb{R}^N - \{0\}) \times (0, T_1)$. Para F um conjunto compacto qualquer em $(\mathbb{R}^N - \{0\}) \times (0, T_1)$, $F \subset R_{m_1}$, para algum m_1 real positivo. Por isto, no decorrer desta prova, consideramos apenas os compactos da forma R_m. Se $m \in \mathbb{N}$, vemos que a solução do problema $(P_{m,m})$ satisfaz $u_m \in C^\infty(R_m)$. Se $n \in \mathbb{N}$, com $n \ge m$, $u_n \in C^\infty(R_m)$, uma vez que $R_m \subset R_n$.

Na relação (C.11), apêndice C, notamos que existe uma constante $k_2 > 0$, tal que

$$\|\nabla_x u_n\|_{L^\infty\left(R_{\frac{m}{2}}\right)} \le k_2 \tag{3.54}$$

e, k_2 independe de n.

O resultado (3.54) em conjunto com o item (ii) deste Lema e o Teorema B.2, apêndice B, é usado para mostrar que existe uma constante $k_3 > 0$, de forma que

$$\max_{(x,t)\in R_{\frac{m}{3}}} \left[|u_n| + \left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right| + \ldots + \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_N}\right| \right] \leq k_3, \quad (3.55)$$

onde k_3 depende de m, mas não depende de n. A justificativa para (3.55) é dada no Apêndice C, (C.12)-(C.14).

Seja $m \in \mathbb{N}$, m fixo. Notamos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(R_{\frac{m}{3}})$. Pelo item (ii) deste Lema, segue que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um conjunto pontualmente limitado em $R_{\frac{m}{3}}$. Além disto, a condição (3.55) conclui a equicontinuidade da família de funções $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; ver ref. [24], pag. 242. Portanto, podemos aplicar o Teorema de Arzelà-Ascoli abordado no Capítulo 1 desta dissertação.

Considere $m = m_0 \in \mathbb{N}$ o menor inteiro para o qual faz sentido a definição de $R_{\frac{m}{3}}$. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência $\{u_n^{(m_0)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente sobre $R_{\frac{m_0}{3}}$. Pelo mesmo Teorema, existe $\{u_n^{(1+m_0)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{u_n^{(m_0)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente em $R_{\frac{1+m_0}{3}}$. Repetindo esta construção, é possível obter uma família de sequências $\{\{u_n^{(j)}\}_n\}_{j\geq m_0}$ de forma que $u_n^{(j)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ uniformemente em $R_{\frac{j}{3}}$. Pelo método da diagonal, obtém-se uma sequência $\{u_n^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente para a função u em R_j, para cada j inteiro positivo conveniente. Como consequência, concluímos que $u \in C((\mathbb{R}^N - \{0\}) \times (0, T_1))$.

$\blacksquare$

Seja u como na prova do Lema 3.3.1. Consideramos que u tem uma extensão para o caso em que $t = 0$. Basta definir $u(x, 0) := u_0(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$. A extensão será indicada pelo mesmo símbolo u.

Notamos que, pela definição de u_0, pelo Lema 3.2.2, item (i), e pelo Lema 3.3.1, item (iii),

$$0 \leq u(x,t) \leq \zeta(x,t), \tag{3.56}$$

quase sempre para $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T_1)$.

Suponha $R > 0$ número real. Pelo Lema 3.2.2, item (ii), sabemos que para cada $\tau \in [0,T_1)$,

$$\int_{B_R} \zeta(x,\tau)\ dx < \infty. \tag{3.57}$$

Como consequência de (3.56) e (3.57),

$$\int_{B_R} u(x,\tau)\ dx < \infty. \tag{3.58}$$

Desta maneira, obtém-se que

$$u(\cdot,t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N), \tag{3.59}$$

para cada $t \in [0,T_1)$. De (3.57) e (3.58), também temos que

$$\zeta \in L^1_{loc}(S_{T_1}) \ e\ u \in L^1_{loc}(S_{T_1}). \tag{3.60}$$

Lembramos que u_0, conforme o enunciado do Teorema 3.1.1, é uma função no espaço $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Para mostrar que a extensão u é solução generalizada do problema de Cauchy (3.1)-(3.2) é necessário que, a princípio, consideremos o seguinte Lema:

Lema 3.3.2. *(i)* $Vu \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \times (0,T_1))$.
(ii) $u \in C([0,T_1); L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$.

Demonstração. (i) Lembramos que, para $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T_1)$,

$$(V\zeta)(x,t) = \lambda k_1 |x|^{\alpha-2}(T_1-t)^{\beta} \exp\left\{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}\right\}. \tag{3.61}$$

Tome $R > 0$, um número real. Seja $\tau \in [0,T_1)$, τ fixo. Procedendo como na prova do Lema 3.2.2, item (ii), e usando a relação $\alpha+N-2>0$, Lema 3.2.1,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R} |(V\zeta)(x,\tau)|\, dx \\
&= \int_{B_R} \lambda k_1 |x|^{\alpha-2}(T_1-\tau)^{\beta} \exp\left\{\frac{|x|^2}{4(T_1-\tau)}\right\}\, dx \\
&= \lambda k_1 \omega_N (T_1-\tau)^{\beta} \int_0^R r^{\alpha+N-3} \exp\left\{\frac{r^2}{4(T_1-\tau)}\right\}\, dr \\
&\leq \lambda k_1 \omega_N (T_1-\tau)^{\beta} \exp\left\{\frac{R^2}{4(T_1-\tau)}\right\} \int_0^R r^{\alpha+N-3}\, dr \\
&\leq \frac{(N-2)^2 k_1 \omega_N (T_1-\tau)^{\beta} R^{\alpha+N-2}}{4(\alpha+N-2)} \exp\left\{\frac{R^2}{4(T_1-\tau)}\right\} < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(V\zeta)(\cdot,t) \in L^1(B_R),\ \forall\, t \in [0,T_1).$$

Consequentemente,

$$(V\zeta)(\cdot,t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N),\ \forall\, t \in [0,T_1)\ e\ V\zeta \in L^1_{loc}(S_{T_1}).$$

Como $0 \leq Vu \leq V\zeta$ quase sempre sobre $\mathbb{R}^N \times [0,T_1)$, concluímos que

$$Vu \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \times (0,T_1)). \tag{3.62}$$

(ii) De início, sabemos que $u(\cdot,t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N),\ \forall\, t \in [0,T_1)$. Fixamos G, um conjunto compacto contido no $\mathbb{R}^N$, e $t_1 \in [0,T_1)$. Tomamos, sem perda de generalidade, $t_2 \in (t_1, T_1)$. Seja $R > 0$ de forma que $G \subset \overline{B_R}$ e $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função teste que atende as condições:

$$\begin{gathered}\phi \geq 0,\ supp(\phi) \subset \overline{B_{2R}},\ \phi = 0 \text{ sobre } \partial B_{2R}, \\ \phi = 1 \text{ em } \overline{B_R}\ e\ \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 1.\end{gathered} \tag{3.63}$$

Ademais, sejam u_m e u_n, $m > n > 2R$, respectivamente, as soluções para os problemas $(P_{m,m})$ e $(P_{n,n})$. Pela Definição 3.1.3, para $\tau = t_2$,

$$\begin{aligned}\int_{B_{2R}} u_m(x, t_2)\phi(x)\ dx - \int_{B_{2R}} u_m(x, 0)\phi(x)\ dx \\ - \iint_{B_{2R}\times(0,t_2)} u_m\left(\Delta\phi + V_m\phi\right)\ dx\ dt = 0\end{aligned} \tag{3.64}$$

e, em $\tau = t_1$,

$$\begin{aligned}\int_{B_{2R}} u_m(x, t_1)\phi(x)\ dx - \int_{B_{2R}} u_m(x, 0)\phi(x)\ dx \\ - \iint_{B_{2R}\times(0,t_1)} u_m\left(\Delta\phi + V_m\phi\right)\ dx\ dt = 0.\end{aligned} \tag{3.65}$$

Subtraindo (3.65) de (3.64):

$$\begin{aligned}\int_{B_{2R}} u_m(x, t_2)\phi(x)\ dx - \int_{B_{2R}} u_m(x, t_1)\phi(x)\ dx \\ - \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} u_m\left(\Delta\phi + V_m\phi\right)\ dx\ dt = 0.\end{aligned} \tag{3.66}$$

Analogamente a (3.66), a solução u_n satisfaz:

$$\begin{aligned}\int_{B_{2R}} u_n(x, t_2)\phi(x)\ dx - \int_{B_{2R}} u_n(x, t_1)\phi(x)\ dx \\ - \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} u_n\left(\Delta\phi + V_n\phi\right)\ dx\ dt = 0.\end{aligned} \tag{3.67}$$

Agora, subtraindo (3.67) de (3.66), obtemos que

$$
\begin{aligned}
d_{mn} \quad := \quad & \int_{B_{2R}} [u_m(x,t_2) - u_n(x,t_2)]\phi(x)\ dx \\
- \quad & \int_{B_{2R}} [u_m(x,t_1) - u_n(x,t_1)]\phi(x)\ dx \\
= \quad & \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} (u_m - u_n)\Delta\phi\ dx\ dt \\
+ \quad & \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} V_m u_m \phi\ dx\ dt \\
- \quad & \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} V_n u_n \phi\ dx\ dt.
\end{aligned} \tag{3.68}
$$

Notamos que, como $m > n$, $u_m \geq u_n \geq 0$. Em seguida, aplicamos a (3.68) a propriedade de que, quase sempre em $\mathbb{R}^N \times [0, T_1)$, $u_m \leq u \leq \zeta$. Resulta

$$
\begin{aligned}
d_{mn} \quad \leq \quad & \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} (u_m - u_n)\|\Delta\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\ dx\ dt \\
+ \quad & \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} V u_m \phi\ dx\ dt \\
+ \quad & \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} V u_n \phi\ dx\ dt \\
\leq \quad & \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} \zeta\|\Delta\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\ dx\ dt \\
+ \quad & 2\iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} V\zeta\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\ dx\ dt.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
d_{mn} \leq \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} \zeta(C_R + 2V)\ dx\ dt, \tag{3.69}
$$

onde $C_R := \|\Delta\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$.

Lembramos que $G \subset \overline{B_R}$ e que $\phi = 1$ sobre $\overline{B_R}$. Estas informações implicam na desigualdade:

$$\begin{aligned}
\int_G [u_m(x,t_2) - u_n(x,t_2)]\ dx &\leq \int_{B_R} [u_m(x,t_2) - u_n(x,t_2)]\ dx \\
&= \int_{B_R} [u_m(x,t_2) - u_n(x,t_2)]\phi(x)\ dx \\
&\leq \int_{B_{2R}} [u_m(x,t_2) - u_n(x,t_2)]\phi(x)\ dx \\
&\leq \int_{B_{2R}} [u_m(x,t_1) - u_n(x,t_1)]\phi(x)\ dx \\
&+ \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} \zeta(C_R + 2V)\ dx\ dt,
\end{aligned} \tag{3.70}$$

onde aplicamos (3.69). Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_G [u_m(x,t_2) - u_n(x,t_2)]\ dx &\leq \int_{B_{2R}} [u_m(x,t_1) - u_n(x,t_1)]\ dx \\
&+ \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} \zeta(C_R + 2V)\ dx\ dt,
\end{aligned} \tag{3.71}$$

pois $\phi \geq 0$ e $\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 1$.

Fazendo $m \longrightarrow \infty$, a expressão (3.71) mostra que

$$\begin{aligned}
\int_G [u(x,t_2) - u_n(x,t_2)]\ dx &\leq \int_{B_{2R}} [u(x,t_1) - u_n(x,t_1)]\ dx \\
&+ \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} \zeta(C_R + 2V)\ dx\ dt.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Usando a desigualdade triangular e o resultado (3.72), observamos que:

$$\begin{aligned}
\int_G |u(x,t_2) - u(x,t_1)| \; dx &\leq \int_G |u(x,t_2) - u_n(x,t_2)| \; dx \\
&+ \int_G |u_n(x,t_2) - u_n(x,t_1)| \; dx \\
&+ \int_G |u_n(x,t_1) - u(x,t_1)| \; dx \\
&\leq 2\int_{B_{2R}} [u(x,t_1) - u_n(x,t_1)] \; dx \\
&+ \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} \zeta(C_R + 2V) \; dx \; dt \\
&+ \int_G |u_n(x,t_2) - u_n(x,t_1)| \; dx.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Considere $\epsilon > 0$ qualquer. Pela construção de u e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, Teorema 1.6.9, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 \geq 2R$, tal que

$$\int_{B_{2R}} |u(x,t_1) - u_{N_0}(x,t_1)| \; dx < \frac{\epsilon}{6}. \tag{3.74}$$

A regularidade de u_{N_0} e o fato de que $\zeta(\cdot,t), (V\zeta)(\cdot,t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\forall \; t \in [0,T_1)$, nos garantem a existência de $\delta > 0$ tal que se $t_2 \in [t_1,T_1)$ e $|t_1 - t_2| < \delta$, então,

$$\int_G |u_{N_0}(x,t_2) - u_{N_0}(x,t_1)| \; dx < \frac{\epsilon}{3} \tag{3.75}$$

e

$$\iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} \zeta(C_R + 2V) \; dx \; dt < \frac{\epsilon}{3}. \tag{3.76}$$

Tomamos t_2 de forma que $|t_2 - t_1| < \delta$. Os resultados (3.73)-(3.76) implicam que:

$$\begin{aligned}
\int_G [u(x,t_2) - u(x,t_1)]dx \quad &\leq \quad 2\int_{B_{2R}} [u(x,t_1) - u_{N_0}(x,t_1)]\ dx \\
&+ \quad \iint_{B_{2R}\times(t_1,t_2)} \zeta(C_R + 2V)\ dx\ dt \\
&+ \quad \int_G |u_{N_0}(x,t_2) - u_{N_0}(x,t_1)|\ dx < \epsilon.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

O resultado (3.77) prova que $u \in C([0,T_1), L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$.

■

Tomamos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T_1])$ e $0 \leq \tau < T_1$. Pela definição de ϕ, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $\phi(x,\cdot) = 0,\ \forall\ x \notin B_{n_1}$.

Como u_n é solução do problema $(P_{n,n})$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau \int_{B_n} u_n \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \Delta\phi + V_n\phi\right)\ dx\ dt + \int_{B_n} u_{n0}(x)\phi(x,0)\ dx \\
= \int_{B_n} u_n(x,\tau)\phi(x,\tau)\ dx,
\end{aligned} \tag{3.78}$$

$\forall\ n \geq n_1$. No limite $n \longrightarrow \infty$, $u_n \longrightarrow u$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^N} u \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \Delta\phi + V\phi\right)\ dx\ dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\phi(x,0)\ dx \\
= \int_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau)\phi(x,\tau)\ dx.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Concluímos de (3.79) e do Lema 3.3.2 que u é solução generalizada do problema de Cauchy (3.1)-(3.2) para o caso em que, conforme a

Definição 3.1.1, $T = T_1$. Desta forma, provamos a parte da existência do Teorema 3.1.1.

Pelos resultados apresentados, a função $u \in C([0, T_0), L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$ é solução generalizada do problema de Cauchy (3.1)-(3.2) no caso em que, conforme a Definição 3.1.1, $T = T_0$.

Nesta situação, para $(x, t) \in S_{T_0}$, temos que

$$0 \leq u(x,t) \leq \left(k_1 \max_{t \in [0,T_0]} (T_1 - t)^{\beta}\right) |x|^{\alpha} \exp\left\{\frac{|x|^2}{4(T_1 - T_0)}\right\},$$

o que motiva o item (3.14) do Teorema 3.1.1. Aqui, consideramos as constantes $K \geq k_1 \max_{t \in [0,T_0]} (T_1 - t)^{\beta}$ e $C \geq \dfrac{1}{4(T_1 - T_0)}$.

No caso em que $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ não é uma função não-negativa, a prova da existência continua válida para este caso geral devido à linearidade da equação proposta em (3.1) e pelas propriedades do espaço $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Nesta situação, a função $u \in C([0, T_0); L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$, solução generalizada do problema de Cauchy (3.1)-(3.2), satisfaz

$$|u(x,t)| \leq K|x|^{\alpha} \exp\left\{C|x|^2\right\}, \ \forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T_0).$$

De maneira similar à abordagem apresentada nas seções 3.1-3.3, podemos provar o seguinte Teorema:

Teorema 3.3.1. *Tome* $0 < \lambda \leq \lambda^* := \dfrac{(N-2)^2}{4}$. *Suponha que a condição inicial satisfaz*

$$|u_0(x)| \leq k|x|^{\alpha} e^{c|x|^2}, \ \forall\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.80}$$

onde c *e* k *são constantes estritamente positivas e*

$$\alpha = \frac{-N + 2 - \sqrt{(N-2)^2 - 4\lambda}}{2}. \tag{3.81}$$

Então, existe u solução generalizada do problema de Cauchy (3.1)-(3.2), tal que

$$|u(x,t)| \leq K|x|^{\alpha} e^{C|x|^2}, \tag{3.82}$$

$\forall\ (x,t) \in S_{T_0}$, *para* $0 < T_0 < \dfrac{1}{4c}$ *e,* C *e* K *constantes positivas.*

Capítulo 4

Unicidade de Solução Generalizada

Neste capítulo, concluímos a demonstração do Teorema 3.1.1. Mais precisamente, apresentamos a demonstração da unicidade do problema de Cauchy (3.1)-(3.2). Assim como no capítulo anterior, a abordagem é devido a Marchi, ref. [25].

4.1 Demonstração da Unicidade

Suponha que o problema de Cauchy (3.1)-(3.2) possui duas soluções generalizadas: u_1 e u_2. Nosso objetivo é provar que $u_1 = u_2$. Ao longo da demonstração empregamos alguns resultados técnicos que serão provados na Seção 4.2.

Seja $0 \leq \tau < T_0$. Como u_1 e u_2 são soluções generalizadas, então, para cada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T_0])$,

$$\iint_{S_\tau} u_1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi + V\phi \right) dx\ dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\phi(x,0)\ dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} u_1(x,\tau)\phi(x,\tau)\ dx \qquad (4.1)$$

e

$$\iint_{S_\tau} u_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi + V\phi \right) dx\ dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\phi(x,0)\ dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} u_2(x,\tau)\phi(x,\tau)\ dx. \qquad (4.2)$$

Além disso,

$$|u_1(x,t)| \leq K|x|^\alpha \exp\{C|x|^2\}$$

e

$$|u_2(x,t)| \leq K|x|^\alpha \exp\{C|x|^2\},$$

para cada $(x,t) \in S_{T_0}$, onde T_0, K, C e α são como no enunciado do Teorema 3.1.1.

Em seguida, subtraímos (4.2) de (4.1). Segue a relação:

$$\iint_{S_\tau} (u_1 - u_2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta\phi + V\phi \right) dx\ dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} [u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)]\phi(x,\tau)\ dx, \qquad (4.3)$$

válida para toda função $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T_0])$ e $\tau \in [0, T_0)$. O resultado acima pode ser estendido, por densidade, a qualquer função $\phi \in C_0^{2,1}(\mathbb{R}^N \times [0, T_0])$.

A unicidade da solução segue se provarmos que vale

$$\int_{\mathbb{R}^N} [u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)]\theta(x)\ dx = 0,\ \forall\ \tau \in (0, T_2], \qquad (4.4)$$

para algum $T_2 < T_0$ e para toda função-teste θ tal que

$$\begin{cases} \theta \in C^3(\mathbb{R}^N). \\ 0 \leq \theta(x) \leq 1 \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \\ supp(\theta) \subset A_{d,2d} \quad , \quad \text{algum} \;\; d > 0 \;\; \text{fixo}. \end{cases} \tag{4.5}$$

De (4.4)-(4.5) segue que $u_1 = u_2$ quase sempre sobre $\mathbb{R}^N \times [0, T_2]$. Na verdade, esta conclusão não é imediata. Ela está associada à aplicação do Lema de Du Bois Reymond, Teorema 1.6.10, ao fato da verificação (4.4) se estender para funções $\theta \in C^3(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ mais gerais, ou seja, não necessariamente limitadas inferiormente por 0 e superiormente por 1 e, também, devido ao fato de que $\mathbb{R}^N - \{0\}$ pode ser interpretado como uma união enumerável de regiões como $A_{d,2d}$. Tomamos T_2, de forma que,

$$T_2 := \frac{1}{3} \cdot \min\left\{\frac{1}{4C+1}, T_0\right\}. \tag{4.6}$$

No decorrer da prova, o mesmo raciocínio usado para mostrar que $u_1 = u_2$ quase sempre sobre a região $\mathbb{R}^N \times [0, T_2]$ pode ser empregado para mostrar que a relação $u_1 = u_2$ é válida quase sempre sobre a região $\mathbb{R}^N \times [T_2, 2T_2]$, que $u_1 = u_2$ quase sempre sobre $\mathbb{R}^N \times [2T_2, 3T_2]$ e assim por diante. Assim, provando que $u_1 = u_2$ quase sempre sobre $\mathbb{R}^N \times [0, T_2]$, obtemos que $u_1 = u_2$ quase sempre sobre $\mathbb{R}^N \times [0, T_0)$.

Fixamos τ em $(0, T_2]$.

Para a continuidade da prova, levamos em consideração um problema auxiliar. Seja $R > 2(d + 1)$, onde R é fixo. Consideramos o problema $(J_{n,R})$ definido como segue:

$$(J_{n,R})\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}+\Delta w+V_n w=0 & , \quad (x,t)\in D_{R,\tau}:=\overline{B_R}\times(0,\tau). \\ w(x,\tau)=\theta(x) & , \quad x\in\overline{B_R}. \\ w(x,t)=0 & , \quad (x,t)\in\partial B_R\times(0,\tau). \end{cases} \tag{4.7}$$

Seja

$$\tilde{w}(x,t):=w(x,\tau-t),\ \forall\ (x,t)\in\overline{B_R}\times(0,\tau].$$

Notamos que, sobre a região $D_{R,\tau}$,

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}=-\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Então, em termos de $\tilde{w}$, o problema $(J_{n,R})$ se expressa na forma:

$$(\widetilde{P_{n,R}})\begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{w}}{\partial t}=\Delta\tilde{w}+V_n\tilde{w} & , \quad (x,t)\in D_{R,\tau}. \\ \tilde{w}(x,0)=\theta(x) & , \quad x\in\overline{B_R}. \\ \tilde{w}(x,t)=0 & , \quad (x,t)\in\partial B_R\times(0,\tau). \end{cases} \tag{4.8}$$

Conclui-se que o problema $(J_{n,R})$ pode ser colocado na forma de um problema $(\widetilde{P_{n,R}})$ mediante o reescalonamento do tempo, ou seja, pela mudança de variável $t\longrightarrow\tau-t$. Por esta razão, uma função w é chamada de supersolução do problema $(J_{n,R})$ se $\tilde{w}$ é uma supersolução do problema $(\widetilde{P_{n,R}})$ correspondente.

O problema $(J_{n,R})$ possui uma solução ϕ_n sobre $\overline{D_{R,\tau}}$, de forma que $\phi_n\in C^{2,1}(\overline{B_R}\times(0,\tau))$ e $\phi_n\geq 0$. Isto segue da existência de solução para o problema $(\widetilde{P_{n,R}})$ com as mesmas propriedades. A justificativa destas afirmações é dada pelo Teorema B.3, no Apêndice B, e pelo Teorema 2.6.2.

Estendemos ϕ_n acima, de forma que $\phi_n \in C_0^{2,1}(\mathbb{R}^N \times [0,T_0])$.

Para cada $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, definimos $\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, função auxiliar , satisfazendo as condições

- $0 \leq \psi_\varepsilon(x) \leq 1, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^N$.
- $\psi_\varepsilon(x) = 1$ se $x \in \overline{B_{R-2\varepsilon}}$.
- $\psi_\varepsilon(x) = 0$ se $x \notin \overline{B_{R-\varepsilon}}$.
- $\|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^\infty(B_R)} \leq \dfrac{c_0}{\varepsilon}$.
- $\|\Delta \psi_\varepsilon\|_{L^\infty(B_R)} \leq \dfrac{c_0}{\varepsilon^2}$.

A constante c_0 acima independe de R e ε.

Tomamos $\phi = \psi_\varepsilon \phi_n$ como função-teste e a aplicamos em (4.3). Desta forma,

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)\left(\frac{\partial}{\partial t}(\psi_\varepsilon \phi_n) + \Delta(\psi_\varepsilon \phi_n) + V\psi_\varepsilon \phi_n\right) dx\ dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)](\psi_\varepsilon \phi_n)(x,\tau)\ dx. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Para $(x,t) \in S_\tau$, observamos que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi_\varepsilon \phi_n) = \psi_\varepsilon \frac{\partial \phi_n}{\partial t} + \phi_n \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial t} = \psi_\varepsilon \frac{\partial \phi_n}{\partial t}. \qquad (4.10)$$

Além disto, para $(x_1, x_2, \ldots, x_N, t) \in S_\tau$,

$$\begin{aligned}
\Delta(\psi_\varepsilon \phi_n) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\psi_\varepsilon \phi_n) \\
&= \psi_\varepsilon \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x_i^2} + 2\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} + \phi_n \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 \psi_\varepsilon}{\partial x_i^2} \\
&= \psi_\varepsilon \Delta \phi_n + 2\nabla \psi_\varepsilon \cdot \nabla \phi_n + \phi_n \Delta \psi_\varepsilon.
\end{aligned}$$

(4.11)

Como ϕ_n é solução regular do problema $(J_{n,R})$, observamos que $\phi_n(x,\tau) = \theta(x)$, $\forall\ x \in \overline{B_R}$. De (4.5), lembramos que $supp(\theta) \subset A_{d,2d}$ e, $2d < 2d+1-2\varepsilon < R-2\varepsilon$. Das propriedades da função ψ_ε, segue que $\theta(x) = \theta(x)\psi_\varepsilon(x)$ em $\overline{B_R}$. Além disso, facilmente observamos que $\theta(x) = \psi_\varepsilon(x) = 0$, $\forall\ x \notin \overline{B_R}$. Logo, $\forall\ x \in \mathbb{R}^N$, temos a identidade $\theta(x) = \phi_n(x,\tau)\psi_\varepsilon(x)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} [u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)](\psi_\varepsilon\phi_n)(x,\tau)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)]\theta(x)\ dx.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Além disto, usando (4.10) e (4.11), observamos que:

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)\left(\frac{\partial}{\partial t}(\psi_\varepsilon\phi_n) + \Delta(\psi_\varepsilon\phi_n) + V\psi_\varepsilon\phi_n\right)\ dx\ dt \\
&= \iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)\psi_\varepsilon \frac{\partial \phi_n}{\partial t}\ dx\ dt \\
&+ \iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)\left(\psi_\varepsilon\Delta\phi_n + 2\nabla\psi_\varepsilon \cdot \nabla\phi_n + \phi_n\Delta\psi_\varepsilon\right)\ dx\ dt \\
&+ \iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)V\psi_\varepsilon\phi_n\ dx\ dt.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Organizando as informações acima, podemos perceber que:

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)\left(\frac{\partial}{\partial t}(\psi_\varepsilon\phi_n) + \Delta(\psi_\varepsilon\phi_n) + V\psi_\varepsilon\phi_n\right)\ dx\ dt \\
&= \iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)\psi_\varepsilon\left(\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + \Delta\phi_n + V_n\phi_n\right)\ dx\ dt \\
&+ \iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)(\phi_n\Delta\psi_\varepsilon + 2\nabla\psi_\varepsilon \cdot \nabla\phi_n)\ dx\ dt \\
&+ \iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)(V - V_n)\psi_\varepsilon\phi_n\ dx\ dt.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)\left(\frac{\partial}{\partial t}(\psi_\varepsilon \phi_n) + \Delta(\psi_\varepsilon \phi_n) + V\psi_\varepsilon \phi_n\right)\, dx\, dt$$
$$= \iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)(\phi_n \Delta\psi_\varepsilon + 2\nabla\psi_\varepsilon \cdot \nabla\phi_n)\, dx\, dt$$
$$+ \iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)(V - V_n)\psi_\varepsilon \phi_n\, dx\, dt, \tag{4.14}$$

pois, sobre $\overline{B_R} \times (0, \tau)$, $\dfrac{\partial \phi_n}{\partial t} + \Delta\phi_n + V_n \phi_n = 0$ e, se $x \notin \overline{B_R}$, $\psi_\varepsilon(x) = 0$.

Reunindo os resultados (4.9), (4.12) e (4.14), obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^N} [u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)]\theta(x)\, dx$$
$$= \iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)(\phi_n \Delta\psi_\varepsilon + 2\nabla\psi_\varepsilon \cdot \nabla\phi_n)\, dx\, dt$$
$$+ \iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)(V - V_n)\psi_\varepsilon \phi_n\, dx\, dt. \tag{4.15}$$

Como consequência natural de (4.15), segue que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} [u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)]\theta(x)\, dx\right|$$
$$\leq \left|\iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)(\phi_n \Delta\psi_\varepsilon + 2\nabla\psi_\varepsilon \cdot \nabla\phi_n)\, dx\, dt\right|$$
$$+ \left|\iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)(V - V_n)\psi_\varepsilon \phi_n\, dx\, dt\right|. \tag{4.16}$$

Estamos interessados em analisar a desigualdade (4.16) nos limites $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ e $n \longrightarrow \infty$. Defina

$$H_n := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left|\iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)(\phi_n \Delta\psi_\varepsilon + 2\nabla\psi_\varepsilon \cdot \nabla\phi_n)\, dx\, dt\right| \tag{4.17}$$

e,

$$Q_n := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left|\iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)(V - V_n)\psi_\varepsilon \phi_n\, dx\, dt\right|. \tag{4.18}$$

Pelas propriedades da função ψ_ε, notamos que

$$\iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)(\phi_n \Delta\psi_\varepsilon + 2\nabla\psi_\varepsilon \cdot \nabla\phi_n)\ dx\ dt$$
$$= \iint_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)} (u_1 - u_2)(\phi_n \Delta\psi_\varepsilon + 2\nabla\psi_\varepsilon \cdot \nabla\phi_n)\ dx\ dt.$$

Desigualdades elementares mostram que

$$\left|\iint_{S_\tau} (u_1 - u_2)(\phi_n \Delta\psi_\varepsilon + 2\nabla\psi_\varepsilon \cdot \nabla\phi_n)\ dx\ dt\right|$$
$$\leq \iint_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)} |u_1 - u_2| \cdot |\Delta\psi_\varepsilon \phi_n + 2\nabla\psi_\varepsilon \cdot \nabla\phi_n|\ dx\ dt$$
$$\leq \iint_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)} |u_1 - u_2| \cdot (\|\Delta\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(B_R)}|\phi_n|)\ dx\ dt$$
$$+ \iint_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)} |u_1 - u_2| \cdot (2\|\nabla\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(B_R)}|\nabla\phi_n|)\ dx\ dt.$$

O resultado acima aplicado a (4.17) e as propriedades propostas na construção de ψ_ε garantem que

$$H_n \leq c_0 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)} |u_1 - u_2| \left(\frac{|\phi_n|}{\varepsilon^2} + \frac{2|\nabla\phi_n|}{\varepsilon}\right)\ dx\ dt. \tag{4.19}$$

Como $\phi_n = 0$ sobre $\partial B_R \times (0,\tau)$, segue que

$$\sup_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)} |\phi_n| \leq 2\varepsilon \sup_{A_{R-2\varepsilon,R}\times(0,\tau)} |\nabla\phi_n|. \tag{4.20}$$

De fato, fixe $\kappa \in (0,\tau)$. Tomamos $x_1 \in A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}$ e $x_2 \in \partial B_R$, de forma que $\|x_1 - x_2\| \leq 2\varepsilon$. Inicialmente, notamos que $\phi_n(x_2,\kappa) = 0$, pois, $(x_2,\kappa) \in \partial B_R \times (0,\tau)$. Pelo Teorema do Valor Médio, Teorema

1.1.1, existe $\tilde{x}$ no segmento que liga x_1 a x_2, de forma que:

$$|\phi_n(x_1,\kappa)| = |\phi_n(x_1,\kappa) - \phi_n(x_2,\kappa)| \leq |\nabla\phi_n(\tilde{x},\kappa)| \cdot \|x_1 - x_2\|.$$

Ou seja,

$$|\phi_n(x_1,\kappa)| \leq 2\varepsilon|\nabla\phi_n(\tilde{x},\kappa)|$$

e, como $\tilde{x} \in A_{R-2\varepsilon,R}$, (4.20) é válida.

Além disto, a seguinte desigualdade é pertinente:

$$\max_{0\leq t\leq\tau} |\nabla\phi_n(R,t)| \leq \max_{0\leq t\leq\tau} \left|\frac{\partial\phi_n}{\partial r}(R,t)\right|. \tag{4.21}$$

De fato, a função ϕ_n é a solução regular para o problema $(J_{n,R})$. Em particular, $\phi_n = 0$ sobre $\partial B_R \times (0,\tau)$. Em outras palavras, para cada $t \in (0,\tau)$, ϕ_n é constante sobre a fronteira de B_R. Desta forma, podemos notar que o máximo crescimento de ϕ_n está sobre a direção ortogonal à fronteira de B_R, o que coincide com a derivada radial.

Segue de (4.19) e da desigualdade (4.20) que:

$$\begin{aligned}
&H_n \\
&\leq c_0 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)} \frac{|u_1-u_2|}{\varepsilon^2} \left[\sup_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)} |\phi_n|\right] dx\ dt \\
&+c_0 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)} \frac{|u_1-u_2|}{\varepsilon} \left[2\sup_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)} |\nabla\phi_n|\right] dx\ dt \\
&\leq 4c_0 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\sup_{A_{R-2\varepsilon,R}\times(0,\tau)} |\nabla\phi_n|\right] \left[\iint_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)} \frac{|u_1-u_2|}{\varepsilon}\ dx\ dt\right].
\end{aligned}$$

Agora, aplicando a desigualdade (4.21),

$$
\begin{aligned}
&H_n \\
&\leq 4c_0\left[\max_{0\leq t\leq \tau}|\nabla\phi_n(R,t)|\right]\left[\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iint_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)}\frac{|u_1-u_2|}{\varepsilon}\ dx\ dt\right] \\
&\leq 4c_0\left[\max_{0\leq t\leq \tau}\left|\frac{\partial\phi_n}{\partial r}(R,t)\right|\right]\left[\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iint_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)}\frac{|u_1-u_2|}{\varepsilon}\ dx\ dt\right].
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Defina a função

$$\xi(x,t) := k_4|x|^{\eta}(2T_2+\tau-t)^{-\eta-\frac{N}{2}}\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4(2T_2+\tau-t)}\right\} \tag{4.23}$$

com

$$\eta := \frac{-N+2+\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2} \tag{4.24}$$

e

$$k_4 \geq (2d)^{-\eta}(2T_2)^{\eta+\frac{N}{2}}\exp\left\{\frac{d^2}{2T_2}\right\}. \tag{4.25}$$

Para R suficientemente grande, pelo Lema 4.2.1, item (ii), Seção 4.2, vemos a existência de uma constante $k_5 > 0$, k_5 independente de R, de forma que, sobre $\partial B_R \times (0,\tau)$,

$$k_5\max_{0\leq t\leq\tau}\xi(R-1,t) \geq \left|\frac{\partial\phi_n}{\partial r}\right|. \tag{4.26}$$

Por (4.22) e (4.26), se R é suficientemente grande,

$$H_n \leq 4c_0k_5\max_{0\leq t\leq\tau}\xi(R-1,t)\left[\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iint_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)}\frac{|u_1-u_2|}{\varepsilon}\ dx\ dt\right]. \tag{4.27}$$

Lembrando que $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)} \frac{|u_1-u_2|}{\varepsilon}\,dx\,dt \\
&\leq \|u_1-u_2\|_{L^\infty(A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau))} \left[\lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint_{A_{R-2\varepsilon,R-\varepsilon}\times(0,\tau)} \frac{1}{\varepsilon}\,dx\,dt\right] \\
&\leq \|u_1-u_2\|_{L^\infty(A_{R-1,R}\times(0,\tau))} \left[\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^\tau \int_{R-2\varepsilon}^{R-\varepsilon} \frac{\omega_N r^{N-1}}{\varepsilon}\,dr\,dt\right] \\
&\leq \omega_N T_0 R^{N-1} \|u_1-u_2\|_{L^\infty(A_{R-1,R}\times(0,\tau))}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Substituindo (4.28) em (4.27), resulta

$$H_n \leq 4c_0k_5\omega_N T_0 R^{N-1}\|u_1-u_2\|_{L^\infty(A_{R-1,R}\times(0,\tau))} \max_{0\leq t\leq\tau} \xi(R-1,t). \tag{4.29}$$

No que segue, $c_1 := 4c_0k_5\omega_N T_0$.

Conforme a construção,

$$R > 2(d+1) > 2. \tag{4.30}$$

Usando a definição de ξ, $\max\limits_{0\leq t\leq\tau} \xi(R-1,t)$ pode ser estimado, obtendo que:

$$\begin{aligned}
&H_n \leq c_1 R^{N-1}\|u_1-u_2\|_{L^\infty(A_{R-1,R}\times(0,\tau))} \\
&\cdot\left[\max_{0\leq t\leq\tau} k_4|R-1|^\eta (2T_2+\tau-t)^{-\eta-\frac{N}{2}} \exp\left\{-\frac{(R-1)^2}{4(2T_2+\tau-t)}\right\}\right] \\
&\leq 2c_1k_4R^{N-1}(R-1)^\eta \left[\max_{x\in A_{R-1,R}} K|x|^\alpha \exp\{C|x|^2\}\right] \\
&\cdot\left[\max_{0\leq t\leq\tau} (2T_2+\tau-t)^{-\eta-\frac{N}{2}} \exp\left\{-\frac{(R-1)^2}{4(2T_2+\tau-t)}\right\}\right] \\
&\leq 2c_1k_4K(2T_2)^{-\eta-\frac{N}{2}} R^{N-1}(R-1)^{\eta+\alpha}\exp\{CR^2\}\exp\left\{-\frac{(R-1)^2}{12T_2}\right\}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$H_n \leq c_2 R^{N-1}(R-1)^{\eta+\alpha} \exp\left\{-\frac{(R-1)^2}{12T_2} + CR^2\right\}, \tag{4.31}$$

onde $c_2 := 2c_1 k_4 K (2T_2)^{-\eta-\frac{N}{2}}$.

Pelo Lema 4.2.3, Seção 4.2, existe $k_6 > 0$, para o qual vale a relação

$$(R-1)^{\eta+\alpha} \leq k_6 R^{\eta+\alpha}. \tag{4.32}$$

Aplicando (4.32) na desigualdade (4.31), segue que

$$H_n \leq c_3 R^{\eta+\alpha+N-1} \exp\left\{-\frac{(R-1)^2}{12T_2} + CR^2\right\}, \tag{4.33}$$

onde $c_3 := c_2 k_6$.

Notamos que

$$\begin{aligned} N-1 \quad &\geq \quad \alpha + N + \eta - 1 > \frac{-N+2-\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2} \\ &+ \quad N + \frac{-N+2+\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2} - 1 = 1. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Da definição de T_2,

$$-\frac{1}{T_2} \leq -3(4C+1).$$

Daí,

$$\begin{aligned} -\frac{(R-1)^2}{12T_2} + CR^2 \quad &\leq \quad -\frac{3(4C+1)(R-1)^2}{12} + CR^2 \\ &= \quad C(2R-1) - \left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 < 0, \end{aligned}$$

para R suficientemente grande. Este último resultado, associado às informações (4.33) e (4.34), implica que

$$\lim_{R\to\infty} H_n = 0. \tag{4.35}$$

Lembramos que $V(x) = V_n(x)$, se $x \notin \overline{B_{\frac{1}{n}}}$. Pela definição de ψ_ε, $\|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 1$. Usando o fato de que $\phi_n \leq \xi$ em $D_{R,\tau}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, segundo o Lema 4.2.1, item (i), Seção 4.2,

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_\tau} |u_1 - u_2|(V - V_n)\psi_\varepsilon \phi_n \ dx\ dt \\
&= \iint_{B_{\frac{1}{n}} \times (0,\tau)} |u_1 - u_2||V - V_n|\psi_\varepsilon \phi_n \ dx\ dt \\
&\leq \iint_{B_{\frac{1}{n}} \times (0,\tau)} |u_1 - u_2| V \phi_n \ dx\ dt \\
&\leq \iint_{B_{\frac{1}{n}} \times (0,\tau)} |u_1 - u_2| V \xi \ dx\ dt.
\end{aligned}$$

A informação acima aliada à definição de Q_n, nos permite concluir que:

$$Q_n \leq \iint_{B_{\frac{1}{n}} \times (0,\tau)} |u_1 - u_2| V \xi \ dx\ dt. \tag{4.36}$$

Afirmamos que

$$|u_1 - u_2| V \xi \in L^1_{loc}(S_\tau). \tag{4.37}$$

Para provar este resultado, seja G um conjunto compacto contido no $\mathbb{R}^N$. Existe $P > 0$, de forma que $G \subset \overline{B_P}$. Devemos mostrar que

$$\iint_{B_P \times (0,\tau)} |u_1 - u_2| V \xi \ dx\ dt < \infty.$$

Notamos que, com auxílio da definição de ξ e do comportamento de

u_1 e u_2 dados por (3.14),

$$\iint_{B_P\times(0,\tau)} |u_1-u_2|V\xi\ dx\ dt$$
$$= \iint_{B_P\times(0,\tau)} |u_1-u_2|\frac{\lambda}{|x|^2}k_4|x|^\eta(2T_2+\tau-t)^{-\eta-\frac{N}{2}}$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4(2T_2+\tau-t)}\right\}\ dx\ dt$$
$$\leq 2K\lambda k_4 \iint_{B_P\times(0,\tau)} |x|^\alpha|x|^{\eta-2}(2T_2+\tau-t)^{-\eta-\frac{N}{2}}\exp\{C|x|^2\}$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4(2T_2+\tau-t)}\right\}\ dx\ dt$$
$$\leq 2K\lambda k_4\exp\{CP^2\} \iint_{B_P\times(0,\tau)} |x|^{\alpha+\eta-2}(2T_2+\tau-t)^{-\eta-\frac{N}{2}}$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4(2T_2+\tau-t)}\right\}\ dx\ dt.$$

Como $\eta+\dfrac{N}{2}>0$, segue que:

$$\iint_{B_P\times(0,\tau)} |u_1-u_2|V\xi\ dx\ dt$$
$$\leq k_7\iint_{B_P\times(0,\tau)} |x|^{\alpha+\eta-2}\exp\left\{-\frac{|x|^2}{12T_2}\right\}\ dx\ dt$$
$$\leq k_7\iint_{B_P\times(0,\tau)} |x|^{\alpha+\eta-2}\ dx\ dt, \qquad (4.38)$$

onde $k_7 := 2K\lambda k_4\exp\{CP^2\}(2T_2)^{-\eta-\frac{N}{2}}$.

Mas,

$$\int_0^\tau\int_{B_P} |x|^{\alpha+\eta-2}\ dx\ dt \leq \omega_N T_0\int_0^P r^{\alpha+N+\eta-3}\ dr. \qquad (4.39)$$

Por (4.34), $\alpha+N+\eta-2>0$. Então,

$$\begin{aligned}\int_0^P r^{\alpha+N+\eta-3}\ dr &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^P r^{\alpha+N+\eta-3}\ dr\\ &= \frac{P^{\alpha+N+\eta-2}}{\alpha+N+\eta-2}. \qquad (4.40)\end{aligned}$$

Logo, de (4.38)-(4.40),

$$\iint_{B_P\times(0,\tau)} |u_1 - u_2| V\xi \; dx \; dt \leq \frac{k_8 P^{\alpha+N+\eta-2}}{\alpha+N+\eta-2} < \infty, \tag{4.41}$$

para $k_8 := k_7\omega_N T_0$, provando o que foi afirmado em (4.37).

Os resultados (4.36) e (4.41) implicam na seguinte desigualdade:

$$0 \leq Q_n \leq \frac{k_8}{(\alpha+N+\eta-2)n^{\alpha+N+\eta-2}} \tag{4.42}$$

da qual resulta

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = 0. \tag{4.43}$$

Tomando R e n suficientemente grandes e, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, as informações (4.16), (4.35) e (4.43) apontam que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)]\theta(x) \; dx = 0.$$

Como já citado, a unicidade de solução ao problema (3.1)-(3.2) é assegurada com base nos resultados apresentados neste capítulo. Portanto, a prova do Teorema 3.1.1 está concluída.

4.2 Lemas Técnicos

No decorrer deste capítulo, provamos a parte da unicidade do Teorema 3.1.1. Alguns resultados, principalmente aspectos técnicos, foram assumidos sem uma devida justificativa. Nesta seção, mostramos detalhadamente a prova destes Lemas Técnicos.

Lema 4.2.1. *Seja τ fixo, $0 < \tau \leq T_2 < T_0$. Seja ϕ_n, solução do problema $(J_{n,R})$. Para $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,\tau]$, defina a seguinte função:*

$$\xi(x,t) := k_4|x|^\eta (2T_2 + \tau - t)^{-\eta-\frac{N}{2}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4(2T_2+\tau-t)}\right\} \quad (4.44)$$

com

$$\eta := \frac{-N+2+\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2} \quad (4.45)$$

e

$$k_4 \geq (2d)^{-\eta}(2T_2)^{\eta+\frac{N}{2}} \exp\left\{\frac{d^2}{2T_2}\right\}. \quad (4.46)$$

Então,

(i) $\phi_n \leq \xi$ *em* $D_{R,\tau}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

(ii) $k_5 \max\limits_{0\leq t\leq\tau} \xi(R-1,t) \geq \left|\frac{\partial \phi_n}{\partial r}\right|$ *sobre* $\partial B_R \times (0,\tau)$ *($k_5 > 0$ é uma constante que independe da escolha de R; entretanto, R é real positivo suficientemente grande).*

Demonstração. (i) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $R > 0$ fixos. Consideramos o problema $(J_{n,R})$:

$$(J_{n,R}) \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial w}{\partial t} + \Delta w + V_n w = 0 & , & (x,t) \in D_{R,\tau}. \\ w(x,\tau) = \theta(x) & , & x \in \overline{B_R}. \\ w(x,t) = 0 & , & (x,t) \in \partial B_R \times (0,\tau). \end{array} \right. \quad (4.47)$$

Sobre $[0,\tau]$, fazemos o reescalonamento do tempo:

$$s = \tau - t \Rightarrow t = \tau - s.$$

Consideramos

$$w(x,t) = w(x,\tau - s) =: \tilde{w}(x,s),\ \forall\ x \in \overline{B_R},\ \forall\ s \in [0,\tau].$$

Notamos que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{w}}{\partial s}.$$

Devido ao reescalonamento do tempo, o problema $(J_{n,R})$ é equivalente ao problema $(\widetilde{P_{n,R}})$ dado por:

$$(\widetilde{P_{n,R}}) \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial s} = \Delta \tilde{w} + V_n \tilde{w} \quad , \quad (x,s) \in \overline{B_R} \times (0,\tau). \\ \tilde{w}(x,0) = w(x,\tau) = \theta(x) \quad , \quad x \in \overline{B_R}. \\ \tilde{w}(x,s) = 0 \quad , \quad (x,s) \in \partial B_R \times (0,\tau). \end{cases} \tag{4.48}$$

Como já comentado na seção anterior, o problema $(\widetilde{P_{n,R}})$ apresenta uma solução: $\tilde{\phi_n}$. Notamos que $\tilde{\phi_n} \in C^{2,1}(\overline{B_R} \times (0,\tau))$ e $\tilde{\phi_n} \geq 0$ sobre esta região. Em particular,

$$\phi_n(x,t) = \tilde{\phi_n}(x, \tau - t)$$

é solução regular do problema $(J_{n,R})$.

Tomamos ϕ uma função-teste: $\phi \in C^\infty(\overline{D_{R,T_0}})$, $\phi \geq 0$ e $\phi(x,t) = 0$ sobre $\partial B_R \times (0, T_0)$. Fixamos $\kappa \in (0,\tau)$. Como $\tilde{\phi_n}$ é solução de $(\widetilde{P_{n,R}})$, notamos que:

$$\begin{aligned} &\int_{B_R} \tilde{\phi_n}(x,\kappa)\phi(x,\kappa)\ dx - \int_{B_R} \theta(x)\phi(x,0)\ dx \\ &- \iint_{B_R \times (0,\kappa)} \tilde{\phi_n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} + \Delta\phi + V_n \phi \right)\ dx\ ds = 0. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Para $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0,\tau]$, introduzimos:

$$\tilde{\xi}(x,s) := k_4 |x|^\eta (2T_2 + s)^{-\eta - \frac{N}{2}} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4(2T_2+s)} \right\}. \tag{4.50}$$

Particularmente,

$$\tilde{\xi}(x,0) = k_4|x|^\eta (2T_2)^{-\eta-\frac{N}{2}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{8T_2}\right\}. \tag{4.51}$$

Vamos mostrar que $\tilde{\xi}$ é uma supersolução do problema $(\widetilde{P_{n,R}})$. Consideramos $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e definimos

$$\begin{aligned} J_\rho \quad &:= \quad \int_{A_{\rho,R}} \tilde{\xi}(x,\kappa)\phi(x,\kappa)\ dx - \int_{A_{\rho,R}} \theta(x)\phi(x,0)\ dx \\ &- \quad \iint_{A_{\rho,R}\times(0,\kappa)} \tilde{\xi}\left(\frac{\partial \phi}{\partial s} + \Delta\phi + V_n\phi\right)\ dx\ ds. \end{aligned} \tag{4.52}$$

De forma similar a (3.20)-(3.28),

$$J_\rho := J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \tag{4.53}$$

onde

$$J_1 = \iint_{A_{\rho,R}\times(0,\kappa)} \left(\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial s} - \Delta\tilde{\xi} - V\tilde{\xi}\right)\phi\ dx\ ds, \tag{4.54}$$

$$J_2 = \int_{A_{\rho,R}} [\tilde{\xi}(x,0) - \theta(x)]\phi(x,0)\ dx, \tag{4.55}$$

$$J_3 = \iint_{A_{\rho,R}\times(0,\kappa)} (V - V_n)\tilde{\xi}\phi\ dx\ ds \tag{4.56}$$

e

$$J_4 = \int_0^\kappa \int_{\partial A_{\rho,R}} \left\{\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial\eta}\phi - \tilde{\xi}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right\}\ dS\ ds, \tag{4.57}$$

sendo que $\frac{\partial}{\partial\eta}(\cdot) := \vec{n}\cdot\nabla(\cdot)$ é a derivada direcional na direção da normal unitária $\vec{n}$ externa a $\partial A_{\rho,R}$.

Na sequência, vamos analisar cada integral $J_i,\ i = 1,2,3,4$.

Para cada $(x,s) \in A_{\rho,R} \times (0,\kappa)$, notamos que

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial s} - \Delta \tilde{\xi} - V\tilde{\xi} = -\frac{\tilde{\xi}}{|x|^2}\left[\eta^2 + (N-2)\eta + \lambda\right].$$

Pela definição de η,

$$\eta^2 + (N-2)\eta + \lambda = 0.$$

Assim, sobre $A_{\rho,R} \times (0,\kappa)$,

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial s} - \Delta \tilde{\xi} - V\tilde{\xi} \equiv 0.$$

Portanto,

$$J_1 = 0. \tag{4.58}$$

Seja $x \in A_{\rho,R}$. Analisamos dois casos:

- Se $x \in A_{d,2d}$, note que:

$$d \leq |x| \leq 2d \Rightarrow \frac{1}{d^{-\eta}} \geq \frac{1}{|x|^{-\eta}} \geq \frac{1}{(2d)^{-\eta}}.$$

  Assim, pelas definições de k_4 e θ,

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(x,0) &= \frac{k_4}{|x|^{-\eta}(2T_2)^{\eta+\frac{N}{2}} \exp\left\{\frac{|x|^2}{8T_2}\right\}} \\ &\geq \frac{(2d)^{-\eta}(2T_2)^{\eta+\frac{N}{2}} \exp\left\{\frac{(2d)^2}{8T_2}\right\}}{(2d)^{-\eta}(2T_2)^{\eta+\frac{N}{2}} \exp\left\{\frac{(2d)^2}{8T_2}\right\}} = 1 \geq \theta(x). \end{aligned}$$

- Se $x \notin A_{d,2d}$, como *supp* $(\theta) \subset A_{d,2d}$, segue que $\theta(x) = 0$. Como $\tilde{\xi} \geq 0$, segue que $\tilde{\xi}(x,0) \geq \theta(x)$.

Portanto, $\tilde{\xi}(x,0) \geq \theta(x)$, $\forall\, x \in A_{\rho,R}$. Como $\phi(x,0) \geq 0$, concluímos que

$$J_2 \geq 0. \tag{4.59}$$

Como consequência imediata das definições de V, V_n, por (3.4), $\tilde{\xi}$, por (4.50), e ϕ, segue que

$$J_3 \geq 0. \tag{4.60}$$

Por (4.53), (4.58)-(4.60), segue que:

$$J_\rho \geq J_4. \tag{4.61}$$

Notamos que

$$\begin{aligned}
J_4 &= \int_0^\kappa \int_{\partial A_{\rho,R}} \left\{ \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \eta}\phi - \tilde{\xi}\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right\} \, dS \, ds \\
&= -\int_0^\kappa \int_{\partial B_R} \tilde{\xi}\frac{\partial \phi}{\partial r} \, dS \, ds - \int_0^\kappa \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r}\phi \, dS \, ds \\
&+ \int_0^\kappa \int_{\partial B_\rho} \tilde{\xi}\frac{\partial \phi}{\partial r} \, dS \, ds \\
&= -\int_0^\kappa \int_{\partial B_R} \tilde{\xi}\frac{\partial \phi}{\partial r} \, dS \, ds + \int_0^\kappa \int_{\partial B_\rho} \tilde{\xi}\frac{\partial \phi}{\partial r} \, dS \, ds \\
&- \int_0^\kappa \int_{\partial B_\rho} \left[\eta k_4 |x|^{\eta-1}(2T_2+s)^{-\eta-\frac{N}{2}} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4(2T_2+s)} \right\} \right] \phi \, dS \, ds \\
&+ \int_0^\kappa \int_{\partial B_\rho} \left[\frac{k_4}{2}|x|^{\eta+1}(2T_2+s)^{-\eta-\frac{N}{2}-1} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4(2T_2+s)} \right\} \right] \phi \, dS \, ds.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Assim como (3.34),

$$-\int_0^\kappa \int_{\partial B_R} \tilde{\xi}\frac{\partial \phi}{\partial r} \, dS \, ds \geq 0. \tag{4.63}$$

Além disto,

$$\int_0^\kappa \int_{\partial B_\rho} \left[\frac{k_4}{2}|x|^{\eta+1}(2T_2+s)^{-\eta-\frac{N}{2}-1} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4(2T_2+s)} \right\} \right] \phi \, dS \, ds \geq 0. \tag{4.64}$$

Por (4.61)-(4.64),

$$J_\rho \geq \int_0^\kappa \int_{\partial B_\rho} \tilde{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial r}\ dS\ ds$$
$$- \int_0^\kappa \int_{\partial B_\rho} \left[\eta k_4 |x|^{\eta-1} (2T_2+s)^{-\eta-\frac{N}{2}} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4(2T_2+s)} \right\} \right] \phi\ dS\ ds. \tag{4.65}$$

Notamos que, assim como (3.35)-(3.37),

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^\kappa \int_{\partial B_\rho} \tilde{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial r}\ dS\ ds \right| \\
&= \left| \int_0^\kappa \int_{\partial B_\rho} \tilde{\xi} (\vec{n} \cdot \nabla \phi)\ dS\ ds \right| \\
&\leq \sup_{(x,s) \in \partial B_\rho \times (0,\kappa)} |\tilde{\xi}(x,s)| \int_0^\kappa \int_{\partial B_\rho} |\nabla \phi|\ dS\ ds \\
&\leq k_4 \rho^\eta \left[\max_{s \in [0,\kappa]} (2T_2+s)^{-\eta-\frac{N}{2}} \right] \kappa \|\nabla \phi\|_{L^\infty(D_{R,T_0})} \omega \partial B_\rho \\
&\leq C_4 \rho^{\eta+N-1},
\end{aligned} \tag{4.66}$$

onde $C_4 := a_N k_4 (2T_2)^{-\eta-\frac{N}{2}+1} \|\nabla \phi\|_{L^\infty(D_{R,T_0})}$.

Também vemos que:

$$\begin{aligned}
&\left| - \int_0^\kappa \int_{\partial B_\rho} \left[\eta k_4 |x|^{\eta-1} (2T_2+s)^{-\eta-\frac{N}{2}} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4(2T_2+s)} \right\} \right] \phi\ dS\ ds \right| \\
&\leq k_4 |\eta| \int_0^\kappa \int_{\partial B_\rho} \left[|x|^{\eta-1} (2T_2+s)^{-\eta-\frac{N}{2}} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4(2T_2+s)} \right\} \right] \phi\ dS\ ds \\
&\leq k_4 |\eta| \rho^{\eta-1} \max_{s \in [0,\tau]} (2T_2+s)^{-\eta-\frac{N}{2}} \kappa \|\phi\|_{L^\infty(D_{R,T_0})} \omega \partial B_\rho \\
&\leq C_5 \rho^{\eta+N-2},
\end{aligned} \tag{4.67}$$

onde $C_5 := a_N k_4 (1+|\eta|) (2T_2)^{-\eta-\frac{N}{2}+1} \|\phi\|_{L^\infty(D_{R,T_0})}$.

De (4.65)-(4.67),

$$J_\rho \geq -C_4 \rho^{\eta+N-1} - C_5 \rho^{\eta+N-2}. \tag{4.68}$$

Como $\eta + N - 2 > 0$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{\rho \to 0^+} J_\rho &= \int_{B_R} \tilde{\xi}(x,\kappa)\phi(x,\kappa)\ dx - \int_{B_R} \theta(x)\phi(x,0)\ dx \\ &- \iint_{B_R \times (0,\kappa)} \tilde{\xi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} + \Delta\phi + V_n \phi \right)\ dx\ ds. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Subtraindo (4.49) de (4.69),

$$\begin{aligned} &\int_{B_R} [\tilde{\xi}(x,\kappa) - \tilde{\phi_n}(x,\kappa)]\phi(x,\kappa)\ dx \\ &\geq \iint_{B_R \times (0,\kappa)} (\tilde{\xi} - \tilde{\phi_n}) \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} + \Delta\phi + V_n \phi \right)\ dx\ ds. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Devido à generalidade de ϕ, assim como na prova do Lema 3.3.1, item (ii), $\tilde{\xi} \geq \tilde{\phi_n}$ sobre $D_{R,\tau}$. Usando o reescalonamento do tempo feito no início desta prova, notamos que sobre $D_{R,\tau}$, $\xi \geq \phi_n$.

(ii) Defina a função

$$h(x,t) := e^{(T_0 - t)} \left(\frac{d_1}{|x|^{N-2}} + d_2 \right), \tag{4.71}$$

com

$$d_1 = \frac{R^{N-2}(R-1)^{N-2}}{R^{N-2} - (R-1)^{N-2}} \max_{0 \leq t \leq \tau} \xi(R-1,t)\ e \tag{4.72}$$

$$d_2 = -\frac{(R-1)^{N-2}}{R^{N-2} - (R-1)^{N-2}} \max_{0 \leq t \leq \tau} \xi(R-1,t). \tag{4.73}$$

Considere o problema-auxiliar:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \omega}{\partial t} + \Delta\omega + V_n\omega = 0 & , \quad (x,t) \in A_{R-1,R} \times (0,\tau). \\
\omega(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial B_R \times (0,\tau). \\
\omega(x,t) = \phi_n(x,t) & , \quad (x,t) \in \partial B_{R-1} \times (0,\tau). \\
\omega(x,\tau) = 0 & , \quad x \in A_{R-1,R}.
\end{cases} \tag{4.74}
$$

Notamos que o problema (4.74) é solucionado por ϕ_n, a solução do problema (4.47).

Fixamos $x = R$. Pela expressão (4.71), notamos que $h = 0$ em $\partial B_R \times (0,\tau)$.

Além disto, para R suficientemente grande, temos que $h \geq \phi_n \geq 0$ sobre a região $A_{R-1,R} \times (0,\tau)$. Para detalhes técnicos, ver Lema 4.2.2. Daqui para frente, assumimos R para o qual o resultado acima seja válido.

Desta forma, concluímos que

$$
\left|\frac{\partial h}{\partial r}\right| \geq \left|\frac{\partial \phi_n}{\partial r}\right| \tag{4.75}
$$

sobre $\partial B_R \times (0,\tau)$.

Vemos que, para $(x,t) \in \partial B_R \times (0,\tau)$,

$$
\frac{\partial h}{\partial r} = (2-N)e^{(T_0-t)}\frac{d_1}{|x|^{N-1}},
$$

ou seja, sobre $\partial B_R \times (0,\tau)$,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial h}{\partial r}\right| &\leq (N-2)e^{T_0}\frac{d_1}{R^{N-1}} \\
&\leq (N-2)e^{T_0}\frac{(R-1)^{N-2}}{R[R^{N-2}-(R-1)^{N-2}]}\max_{0\leq t\leq\tau}\xi(R-1,t).
\end{aligned} \tag{4.76}
$$

Notamos que

$$(R-1)^{N-2} = \sum_{k=0}^{N-2} m_k R^{(N-2)-k}(-1)^k, \tag{4.77}$$

onde $m_k = \begin{pmatrix} N-2 \\ k \end{pmatrix}$.

Também temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{(R-1)^{N-2}}{R[R^{N-2}-(R-1)^{N-2}]} \\
&= \frac{(R-1)^{N-2}}{R[m_1R^{N-3}-m_2R^{N-4}+\ldots-m_{N-2}(-1)^{N-2}]} \\
&= \frac{\left(\dfrac{R-1}{R}\right)^{N-2}}{m_1-\dfrac{m_2}{R}+\ldots-\dfrac{m_{N-2}(-1)^{N-2}}{R^{N-3}}}.
\end{aligned} \tag{4.78}$$

No limite $R \longrightarrow \infty$, notamos que

$$\frac{(R-1)^{N-2}}{R[R^{N-2}-(R-1)^{N-2}]} \longrightarrow \frac{1}{N-2}. \tag{4.79}$$

Como $R > 2$, de (4.79) temos a existência de uma constante $d_3 > 0$ para a qual,

$$\frac{(R-1)^{N-2}}{R[R^{N-2}-(R-1)^{N-2}]} < d_3, \ \forall \ R. \tag{4.80}$$

Por (4.75), (4.76) e (4.80), notamos que, em $\partial B_R \times (0,\tau)$,

$$\left|\frac{\partial \phi_n}{\partial r}\right| \leq \left|\frac{\partial h}{\partial r}\right| \leq k_5 \max_{0\leq t\leq \tau} \xi(R-1,t), \tag{4.81}$$

onde $k_5 := (N-2)e^{T_0}d_3$.

■

Lema 4.2.2. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $R > 0$, número real. Seja h a função definida por (4.71)-(4.73). Suponha ϕ_n, solução do problema $(J_{n,R})$, detalhado por (4.7). Se R é suficientemente grande, então,*

$$h \geq \phi_n \text{ em } A_{R-1,R} \times (0,\tau).$$

Demonstração. Consideramos o problema-auxiliar (4.74). Inicialmente, notamos que ϕ_n, a solução do problema $(J_{n,R})$, também é solução para (4.74).

Sobre $[0,\tau]$, fazemos o reescalonamento do tempo:

$$t = \tau - s \Rightarrow s = \tau - t.$$

Definindo

$$\omega(x,t) = \omega(x,\tau - s) =: \tilde{\omega}(x,s), \ \forall\, x \in \overline{B_R}, \ \forall\, s \in [0,\tau],$$

vemos que

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial s}, \ \forall\, x \in \overline{B_R}, \ \forall\, s \in [0,\tau].$$

Pelo reescalonamento proposto, o problema-auxiliar (4.74) é similar a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\omega}}{\partial s} = \Delta\tilde{\omega} + V_n\tilde{\omega} & , \quad (x,s) \in A_{R-1,R} \times (0,\tau). \\ \tilde{\omega}(x,s) = 0 & , \quad (x,s) \in \partial B_R \times (0,\tau). \\ \tilde{\omega}(x,s) = \tilde{\phi_n}(x,s) & , \quad (x,s) \in \partial B_{R-1} \times (0,\tau). \\ \tilde{\omega}(x,0) = 0 & , \quad x \in A_{R-1,R}. \end{cases} \tag{4.82}$$

Por sua vez, o problema (4.82) tem como solução a função $\tilde{\phi_n}$, onde $\tilde{\phi_n}(x,s) := \phi_n(x,\tau - s)$ é a solução do problema $(\widetilde{P_{n,R}})$, dado por (4.8). Notamos que $\tilde{\phi_n} \geq 0$ e

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\phi_n}}{\partial s} = \Delta \tilde{\phi_n} + V_n \tilde{\phi_n} & , \quad (x,s) \in \overline{B_R} \times (0,\tau). \\ \tilde{\phi_n}(x,0) = \theta(x) & , \quad x \in \overline{B_R}. \\ \tilde{\phi_n}(x,s) = 0 & , \quad (x,s) \in \partial B_R \times (0,\tau). \end{cases} \tag{4.83}$$

Lembramos que a função θ atende as condições (4.5).

Tomamos a função φ definida sobre $\overline{B_R} \times [0,\tau]$, φ regular, $\varphi \geq 0$ sobre $A_{R-1,R} \times [0,\tau]$ e $\varphi = 0$ sobre $\partial B_R \times (0,\tau)$. Fixamos $\kappa \in (0,\tau)$.

Por (4.83), vemos que:

$$\iint_{B_R \times (0,\kappa)} \left(\frac{\partial \tilde{\phi_n}}{\partial s} - \Delta \tilde{\phi_n} - V_n \tilde{\phi_n} \right) \varphi \; dx \; ds = 0. \tag{4.84}$$

Por consequência,

$$\begin{aligned} &\int_{B_R} \tilde{\phi_n}(x,\kappa)\varphi(x,\kappa) \; dx - \int_{B_R} \theta(x)\varphi(x,0) \; dx \\ &- \iint_{B_R \times (0,\kappa)} \tilde{\phi_n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \Delta\varphi + V_n \varphi \right) \; dx \; ds = 0. \end{aligned} \tag{4.85}$$

Definimos a função $\tilde{h}(x,s) := e^{(T_0-\tau)+s} \left(\dfrac{d_1}{|x|^{N-2}} + d_2 \right)$, onde as constantes d_1 e d_2 são dadas por (4.72)-(4.73).

Consideramos

$$\begin{aligned} L \quad := \quad & \int_{A_{R-1,R}} \tilde{h}(x,\kappa)\varphi(x,\kappa) \; dx \\ - \quad & \iint_{A_{R-1,R} \times (0,\kappa)} \tilde{h} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \Delta\varphi + V_n \varphi \right) \; dx \; ds. \end{aligned} \tag{4.86}$$

Notamos que $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, de forma que:

$$L_1 = \iint_{A_{R-1,R} \times (0,\kappa)} \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial s} - \Delta \tilde{h} - V \tilde{h} \right) \varphi \; dx \; ds, \tag{4.87}$$

$$L_2 = \int_{A_{R-1,R}} \tilde{h}(x,0)\varphi(x,0)\ dx, \tag{4.88}$$

$$L_3 = \iint_{A_{R-1,R}\times(0,\kappa)} (V - V_n)\tilde{h}\varphi\ dx\ ds \tag{4.89}$$

e

$$L_4 = \int_0^\kappa \int_{\partial A_{R-1,R}} \left\{ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \eta}\varphi - \tilde{h}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right\}\ dS\ ds, \tag{4.90}$$

sendo que $\dfrac{\partial}{\partial \eta}(\cdot) := \vec{n}\cdot\nabla(\cdot)$ é a derivada direcional na direção da normal $\vec{n}$ externa a $\partial A_{R-1,R}$.

Vamos estudar o comportamento de L_1, L_2, L_3 e L_4 de forma que possamos compreender o comportamento de L.

À priori, notamos que:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{h}}{\partial s} - \Delta\tilde{h} - V\tilde{h} \\
&= e^{(T_0-\tau)+s}\left(\frac{d_1}{|x|^{N-2}} + d_2\right) - \frac{\lambda}{|x|^2}e^{(T_0-\tau)+s}\left(\frac{d_1}{|x|^{N-2}} + d_2\right) \\
&= e^{(T_0-\tau)+s}\left(\frac{d_1}{|x|^{N-2}} + d_2\right)\left(1 - \frac{\lambda}{|x|^2}\right).
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Além disto, para $x \in A_{R-1,R}$, notamos que:

$$0 \le \frac{d_1}{|x|^{N-2}} + d_2 \le \max_{0\le t\le\tau} \xi(R-1,t) \tag{4.92}$$

e, para R suficientemente grande,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{|x|^2}\right) \ge 0. \tag{4.93}$$

Logo, de (4.91)-(4.93), para R suficientemente grande,

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial s} - \Delta\tilde{h} - V\tilde{h} \ge 0 \tag{4.94}$$

sobre $A_{R-1,R} \times (0,\tau)$ e, por consequência, $L_1 \geq 0$.

Pelas definições de $\tilde{h}$ e φ, notamos que $L_2 \geq 0$. Pelas definições de V, V_n, $\tilde{h}$ e φ, notamos que $L_3 \geq 0$. Portanto,

$$L \geq \int_0^{\kappa} \int_{\partial A_{R-1,R}} \left\{ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \eta} \varphi - \tilde{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right\} dS \ ds \tag{4.95}$$

se R é suficientemente grande. Consideramos agora R, de forma que a condição (4.95) esteja assegurada.

Da definição de φ,

$$\begin{aligned}\int_0^{\kappa} \int_{\partial A_{R-1,R}} \left\{ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \eta} \varphi - \tilde{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right\} dS \ ds \quad &= \quad -\int_0^{\kappa} \int_{\partial B_R} \tilde{h} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \ dS \ ds \\ &- \quad \int_0^{\kappa} \int_{\partial B_{R-1}} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial r} \varphi \ dS \ ds \\ &+ \quad \int_0^{\kappa} \int_{\partial B_{R-1}} \tilde{h} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \ dS \ ds.\end{aligned} \tag{4.96}$$

Pela definição de $\tilde{h}$, vemos que $\tilde{h}(x,s) = 0, \ \forall \ (x,s) \in \partial B_R \times (0,\kappa)$. Assim,

$$-\int_0^{\kappa} \int_{\partial B_R} \tilde{h} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \ dS \ ds = 0. \tag{4.97}$$

Também notamos que

$$\begin{aligned}&- \quad \int_0^{\kappa} \int_{\partial B_{R-1}} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial r} \varphi \ dS \ ds \\ &= \quad \int_0^{\kappa} \int_{\partial B_{R-1}} \left[e^{(T_0-\tau)+s} (N-2) \frac{d_1}{|x|^{N-1}} \right] \varphi \ dS \ ds \geq 0.\end{aligned} \tag{4.98}$$

De (4.95)-(4.98), segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{R-1,R}} \tilde{h}(x,\kappa)\varphi(x,\kappa)\ dx \\
&-\iint_{A_{R-1,R}\times(0,\kappa)} \tilde{h}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}+\Delta\varphi+V_n\varphi\right)\ dx\ ds \\
&\geq \int_0^\kappa\int_{\partial B_{R-1}} \tilde{h}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\ dS\ ds. \qquad (4.99)
\end{aligned}$$

Subtraindo (4.85) de (4.99), segue que,

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{R-1,R}} [\tilde{h}(x,\kappa)-\tilde{\phi}_n(x,\kappa)]\varphi(x,\kappa)\ dx \\
&+\iint_{B_{R-1}\times(0,\kappa)} \tilde{\phi}_n\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}+\Delta\varphi+V_n\varphi\right)\ dx\ ds \\
&-\int_{B_{R-1}} \tilde{\phi}_n(x,\kappa)\varphi(x,\kappa)\ dx \\
&+\int_{B_R} \theta(x)\varphi(x,0)\ dx \\
&\geq \iint_{A_{R-1,R}\times(0,\kappa)} (\tilde{h}-\tilde{\phi}_n)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}+\Delta\varphi+V_n\varphi\right)\ dx\ ds \\
&+\int_0^\kappa\int_{\partial B_{R-1}} \tilde{h}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\ dS\ ds. \qquad (4.100)
\end{aligned}$$

Sejam $\varepsilon > 0$ e $\sigma \in C^\infty(\overline{B_R})$, $\sigma = 0$ sobre $\partial A_{R-1,R}$, onde σ é uma função não-negativa que não é identicamente nula. Devido ao reescalonamento do tempo, de forma similar ao Teorema 2.6.3, podemos concluir a existência da função ψ, onde $\psi \in C^\infty(A_{R-1,R}\times[0,\kappa])$, $\psi \geq 0$ e

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial\psi}{\partial s}+\Delta\psi+V_n\psi = 0 & , & (x,s)\in A_{R-1,R}\times(0,\kappa). \\
\psi(x,\kappa)=\sigma(x) & , & x\in A_{R-1,R}. \\
\psi(x,s)=0 & , & (x,s)\in \partial A_{R-1,R}\times(0,\kappa).
\end{array}\right. \qquad (4.101)$$

Redefinimos φ sobre $\overline{B_R} \times [0, \kappa]$, de forma que as relações e procedimentos acima apresentados permaneçam válidos. Consideramos

$$\varphi = \begin{cases} \psi, & \text{se} \quad x \in A_{R-1,R} \\ 0, & \text{se} \quad x \in B_{2d+\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{4.102}$$

de forma que

$$\begin{aligned} &\left| \iint_{B_{R-1}\times(0,\kappa)} \tilde{\phi_n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \Delta\varphi + V_n\varphi \right) \, dx \, ds \right. \\ &\left. - \int_{B_{R-1}} \tilde{\phi_n}(x,\kappa)\varphi(x,\kappa) \, dx \right| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.103}$$

Lembrando que $supp(\theta) \subset A_{d,2d}$ e que $R > 2(d+1)$, segue que:

$$\int_{B_R} \theta(x)\varphi(x,0) \, dx = \int_{A_{d,2d}} \theta(x)\varphi(x,0) \, dx = 0. \tag{4.104}$$

Além disso, por (4.101)-(4.102), segue que:

$$\iint_{A_{R-1,R}\times(0,\kappa)} (\tilde{h} - \tilde{\phi_n}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \Delta\varphi + V_n\varphi \right) \, dx \, ds = 0. \tag{4.105}$$

Notando que $\varphi = 0$ sobre $\partial B_{R-1} \times (0,\kappa)$ e $\varphi \geq 0$ sobre a região $A_{R-1,R} \times (0,\kappa)$, temos que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} \geq 0$ sobre $\partial B_{R-1} \times (0,\kappa)$. Logo,

$$\int_0^\kappa \int_{\partial B_{R-1}} \tilde{h} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \, dS \, ds \geq 0. \tag{4.106}$$

Aplicando (4.103)-(4.106) a (4.100), temos que:

$$\begin{aligned} &\varepsilon + \int_{A_{R-1,R}} [\tilde{h}(x,\kappa) - \tilde{\phi_n}(x,\kappa)]\varphi(x,\kappa) \, dx \\ &= \varepsilon + \int_{A_{R-1,R}} [\tilde{h}(x,\kappa) - \tilde{\phi_n}(x,\kappa)]\sigma(x) \, dx \geq 0. \end{aligned} \tag{4.107}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue que:

$$\int_{A_{R-1,R}} [\tilde{h}(x,\kappa) - \tilde{\phi_n}(x,\kappa)]\sigma(x)\, dx \geq 0. \tag{4.108}$$

Devido à generalidade de σ, usando do mesmo raciocínio aplicado no desenvolvimento da prova do Lema 3.3.1, item (ii), temos que $\tilde{h} \geq \tilde{\phi_n}$ sobre $A_{R-1,R} \times (0,\kappa)$. Como κ é qualquer em $(0,\tau)$, segue que $\tilde{h} \geq \tilde{\phi_n}$ sobre $A_{R-1,R} \times (0,\tau)$. Devido à mudança de variável sugerida no início da demonstração, concluímos que $h \geq \phi_n$ sobre $A_{R-1,R} \times (0,\tau)$.

■

Lema 4.2.3. *Seja $R > 2$. Existe uma constante $k_6 > 0$, para a qual vale a relação $(R-1)^{\eta+\alpha} \leq k_6 R^{\eta+\alpha}$, onde α é como em (3.15) e η é como em (4.45).*

Demonstração. Lembramos que

$$\begin{aligned} 0 \quad &\geq \quad \eta + \alpha > \frac{-N+2+\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2} \\ &+ \quad \frac{-N+2-\sqrt{(N-2)^2-4\lambda}}{2} = -N+2. \end{aligned}$$

Portanto, $-\eta - \alpha \geq 0$. Defina a função auxiliar $g : (1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $\forall\, x \in (1,+\infty)$. Note que

$$g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0,\ \forall\, x \in (1,+\infty).$$

Logo, a função g é decrescente e

$$\frac{x}{x-1} \leq 2,\ \forall\, x \in [2,+\infty).$$

Consequentemente,

$$\frac{x^{-\eta-\alpha}}{(x-1)^{-\eta-\alpha}} \leq 2^{-\eta-\alpha} \leq 2^{N-2}, \ \forall \ x \in [2, +\infty).$$

Tomamos $x = R > 2$. Temos que

$$\frac{R^{-\eta-\alpha}}{(R-1)^{-\eta-\alpha}} \leq 2^{N-2} =: k_6.$$

Daí,

$$(R-1)^{\eta+\alpha} \leq k_6 R^{\eta+\alpha}.$$

■

Apêndice A

Espaços de Hölder

Este apêndice está baseado na ref. [23].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, limitado e conexo, com fronteira regular; assumimos $\partial\Omega$ de classe C^∞. Seja $\gamma \in (0,1)$ e ρ_0 uma constante positiva.

Definição A.1. *(i) Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é limitada e contínua, definimos*

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} := \sup_{x\in\Omega} |u(x)|. \tag{A.1}$$

(ii) A γ-ésima seminorma de Hölder de $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é

$$[u]_{C^\gamma(\bar{\Omega})} := \sup_{x,y\in\Omega;\ x\neq y;\ |x-y|\leq\rho_0} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\}, \tag{A.2}$$

e a γ-ésima norma de Hölder é

$$\|u\|_{C^\gamma(\bar{\Omega})} := \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + [u]_{C^\gamma(\bar{\Omega})}. \tag{A.3}$$

Seja l um número real positivo não-inteiro. Suponha $l = k+\gamma$, onde k é um natural, podendo ser zero, e $\gamma \in (0,1)$.

Definição A.2. *Chama-se espaço de Hölder $\mathbb{H}^l(\bar{\Omega})$, ao espaço de Banach cujos elementos são funções $u \in C^k(\bar{\Omega})$ tal que a norma*

$$\|u\|_{\mathbb{H}^l(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^\gamma(\bar{\Omega})} \tag{A.4}$$

é finita.

A norma $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^l(\bar{\Omega})}$ depende da escolha de ρ_0. Entretanto, as normas para $\rho_0 > 0$ são equivalentes. Por isto, nos atemos ao caso $0 < \rho_0 < 1$, sem vincular a norma à constante escolhida.

Pelas definições acima, pode-se obter os seguintes resultados:

(i) $\mathbb{H}^l(\bar{\Omega}) \subset H^k(\Omega)$, onde $H^k(\Omega)$ é um espaço de Sobolev (ver Capítulo I, Seção 1.4).

(ii) Sejam $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$. Se $u \in \mathbb{H}^{\gamma_2}(\bar{\Omega})$, então, $u \in \mathbb{H}^{\gamma_1}(\bar{\Omega})$.

De fato, se $u \in \mathbb{H}^{\gamma_2}(\bar{\Omega})$, então,

$$[u]_{C^{\gamma_2}(\bar{\Omega})} := \sup_{x,y\in\Omega;\ x\neq y;\ |x-y|\leq\rho_0} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma_2}} \right\} < \infty.$$

Mas, como $|x-y| < \rho_0 < 1$, segue que $|x-y|^{\gamma_1} \geq |x-y|^{\gamma_2}$. Daí,

$$\sup_{x,y\in\Omega;\ x\neq y;\ |x-y|\leq\rho_0} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma_1}} \right\} \leq \sup_{x,y\in\Omega;\ x\neq y;\ |x-y|\leq\rho_0} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma_2}} \right\},$$

o que conclui que $u \in \mathbb{H}^{\gamma_1}(\bar{\Omega})$, uma vez que

$$\|u\|_{\mathbb{H}^{\gamma_1}(\bar{\Omega})} := \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + [u]_{C^{\gamma_1}(\bar{\Omega})} < \infty.$$

(iii) Similarmente a (ii), se $u \in C^1(\bar{\Omega})$, então, $u \in \mathbb{H}^\gamma(\bar{\Omega}),\ \forall\ \gamma \in (0,1)$.

(iv) Para $0 < l_1 < l_2$, onde l_1 e l_2 são números reais positivos não-inteiros, se $u \in \mathbb{H}^{l_2}(\bar{\Omega})$, então, $u \in \mathbb{H}^{l_1}(\bar{\Omega})$. Ademais, se $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ então $u \in \mathbb{H}^l(\bar{\Omega})$, $\forall\, l \in \mathbb{R}^+$, onde l é não-inteiro.

Seja $T > 0$, definimos $Q_T := \Omega \times (0, T)$. Suponha l como acima.

Definição A.3. *Chama-se o espaço de Hölder $\mathbb{H}^{l,\frac{l}{2}}(\overline{Q_T})$, ao espaço de Banach das funções $u(x,t)$ que são contínuas em $\overline{Q_T}$, tal que as funções $D_t^r D_x^s u$, para $2r + |s| < l$, também são contínuas em $\overline{Q_T}$ e a norma*

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathbb{H}^{l,\frac{l}{2}}(\overline{Q_T})} &:= \sum_{2r+|s|\le k} \|D_t^r D_x^s u\|_{C(\overline{Q_T})} \\
&+ \sum_{2r+|s|=k} \sup_{(x,t),(y,t)\in\overline{Q_T};\ x\neq y;\ |x-y|\le\rho_0} \left\{ \frac{|D_t^r D_x^s u(x,t) - D_t^r D_x^s u(y,t)|}{|x-y|^\gamma} \right\} \\
&+ \sum_{0<l-2r-|s|<2} \sup_{(x,t),(x,\tau)\in\overline{Q_T};\ t\neq\tau;\ |t-\tau|\le\rho_0} \left\{ \frac{|D_t^r D_x^s u(x,t) - D_t^r D_x^s u(x,\tau)|}{|t-\tau|^{\frac{l-2r-|s|}{2}}} \right\}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

é finita.

Assim como para $\mathbb{H}^l(\bar{\Omega})$, se $u \in C^\infty(\overline{Q_T})$, então, $u \in \mathbb{H}^{l,\frac{l}{2}}(\overline{Q_T})$, para cada $l \in \mathbb{R}^+$, onde l é não-inteiro.

Apêndice B

Equações Parabólicas e Desigualdades em Espaços de Hölder

Este apêndice também é baseado na ref. [23].

Consideramos a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u = 0, \tag{B.1}$$

definida para $(x,t) \in Q_T := \Omega \times (0,T)$, de maneira que a condição de parabolicidade uniforme seja válida, ou seja, existe μ e ν constantes positivas para as quais

$$\nu \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2, \tag{B.2}$$

para cada $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$.

Considere a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + W(x,t)u \tag{B.3}$$

sobre Q_T. Notamos que (B.3) é um caso particular de uma equação uniformemente parabólica conforme às condições (B.1)-(B.2).

Consideramos o caso em que $W \in C^\infty(\overline{Q_T})$.

Defina:

- Q': conjunto aberto arbitrário contido em Q_T.
- $S = \partial\Omega$, a fronteira de Ω.
- $S_T = S \times [0, T]$.
- $\Gamma_T = S_T \cup \{(x,t) : x \in \Omega,\ t = 0\}$.

Teorema B.1. *Seja $u \in C^\infty(\overline{Q_T})$, solução da equação (B.3). Suponha que para a função W exista uma constante $\mu_1 > 0$ de forma que*

$$\left(\int_0^T \left[\int_\Omega |W(x,t)|^{2q} \, dx \right]^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{2r}} \leq \mu_1, \tag{B.4}$$

onde, para $N \geq 2$, q e r satisfazem as condições

$$\frac{1}{r} + \frac{N}{2q} = 1 - \theta_1,\ q \in \left[\frac{N}{2(1-\theta_1)}, +\infty \right]\ e\ r \in \left[\frac{1}{1-\theta_1}, +\infty \right], \tag{B.5}$$

sendo $0 < \theta_1 < 1$. *Então, existe uma constante* $C > 0$, C *dependendo do* $\max\limits_{\overline{Q_T}} |u|$, *das constantes* μ_1, q *e* r, *da função* W *e da distância de* Q' *a* Γ_T, *tal que*

$$\|\nabla_x u\|_{\mathbb{H}^\gamma(\overline{Q'})} < C, \tag{B.6}$$

e $\gamma \in (0,1)$ *é determinado por* N, q *e* r.

Demonstração. Ref. [23], Capítulo III, Teorema 11.1, pg. 211-218. □

Lembramos que $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Tomamos $Q' = \Omega' \times (T_1, T_2)$, onde $\Omega' \subset \Omega$ é um aberto e $0 < T_1 < T_2 < T$. Sendo $S = \partial\Omega$, suponha que $S' = S \cap \overline{\Omega'} = \emptyset$. Seja Ω'' um conjunto aberto, escolhido de forma que $\Omega' \subset \Omega'' \subset \Omega$, com *dist* $(\Omega', \Omega - \Omega'') > 0$ e $S'' = S \cap \overline{\Omega''} = \emptyset$. Finalmente, tomamos $Q'' = \Omega'' \times (T_0, T_2)$, de forma que $0 < T_0 < T_1$. A função $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$. O Teorema a seguir se baseia nestes elementos.

Teorema B.2. *Seja* $u \in C^\infty(\overline{Q_T})$ *solução para o problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + W(x,t)u \quad , \quad (x,t) \in Q_T. \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad x \in \Omega. \\ u(x,t) = 0 \quad , \quad (x,t) \in S \times [0,T). \end{cases} \tag{B.7}$$

Então, para cada $l > 0$, l *não-inteiro, existe uma constante* $C > 0$, *para a qual*

$$\|u\|_{\mathbb{H}^{l+2}(\overline{Q'})} \leq C \left(\max_{T_0 \leq t \leq T_2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega'')} + \|\nabla_x u\|_{L^2(Q'')} \right). \tag{B.8}$$

Demonstração. Ref. [23], Capítulo IV, Teorema 10.1, pg. 351-355. $\square$

Teorema B.3. *Seja Ω um conjunto aberto, conexo e limitado do $\mathbb{R}^N$. Considere $T > 0$, um número real. Considere o problema de valor inicial e de fronteira*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \tilde{W}(x,t)u \quad , \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T). \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad x \in \bar{\Omega}. \\ u(x,t) = 0 \quad , \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{B.9}$$

Suponha o número real γ, de forma que $0 < \gamma < 1$. Suponha que o potencial $\tilde{W} \in \mathbb{H}^{\gamma,\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega} \times [0,T])$. Suponha que a fronteira de Ω, dada por $\partial\Omega$, seja de classe $\mathbb{H}^{\gamma+2}$. Suponha ainda a existência de um conjunto compacto K, na qual $K \subset \Omega$, $K \cap (\partial\Omega) = \emptyset$ e $\varphi(x) = 0$, $\forall\, x \notin K$. Além disto, suponha que a função $\varphi \in \mathbb{H}^{\gamma+2}(\bar{\Omega})$. Então, existe uma única função $u \in \mathbb{H}^{\gamma+2,\frac{\gamma}{2}+1}(\bar{\Omega} \times (0,T))$ que soluciona o problema (B.9)*. Em particular, $u \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0,T))$.*

Demonstração. Ref. [23], pg. 317-323. $\square$

Apêndice C

Estimativas usadas na prova do Lema 3.3.1, item (iv)

As notações usadas neste apêndice fazem referência aos aspectos abordados na Seção 3.3 desta dissertação.

Supomos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in C^\infty(\overline{B_n} \times [0, T_1))$ é a única solução do problema (3.45)-(3.46). Desta forma,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} = \Delta u_n + V_n u_n & , \quad (x,t) \in B_n \times (0, T_1). \\ u_n(x, 0) = u_{n0}(x) & , \quad x \in B_n. \\ u_n(x,t) = 0 & , \quad (x,t) \in \partial B_n \times [0, T_1). \end{cases} \tag{C.1}$$

Para $m \in \mathbb{N}$, m fixo, definimos $R_m := A_{\frac{1}{m},m} \times \left[\frac{1}{m}, T_1 - \frac{1}{m}\right]$.

Notamos que $u_m \in C^\infty(A_{\frac{1}{m},m} \times (0,T_1))$. Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, também temos $u_n \in C^\infty(A_{\frac{1}{m},m} \times (0,T_1))$.

Na definição de R_m, vemos que

$$R_{\frac{m}{2}} := A_{\frac{2}{m},\frac{m}{2}} \times \left[\frac{2}{m}, T_1 - \frac{2}{m}\right] \; e \; R_{\frac{m}{3}} := A_{\frac{3}{m},\frac{m}{3}} \times \left[\frac{3}{m}, T_1 - \frac{3}{m}\right].$$

Pela definição de V_n, dada por (3.4), $V_n = \dfrac{\lambda}{|x|^2}$, $\forall\, n \notin \overline{B_{\frac{1}{n}}}$. Desta forma,

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \Delta u_n + \frac{\lambda}{|x|^2} u_n, \;\forall\, (x,t) \in A_{\frac{1}{m},m} \times (0,T_1), \;\forall\, n \geq m. \tag{C.2}$$

Definimos os seguintes conjuntos abertos, limitados e conexos do $\mathbb{R}^N$:

$$\Omega := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \frac{1,5}{m} < |x| < \frac{m}{1,5}\right\},$$

$$\Omega' := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \frac{2,7}{m} < |x| < \frac{m}{2,7}\right\}$$

e

$$\Omega'' := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \frac{2,3}{m} < |x| < \frac{m}{2,3}\right\}.$$

Inicialmente, observamos que as fronteiras de Ω, Ω' e Ω'' são bastante regulares: todas de classe C^∞. Também notamos que

$$A_{\frac{3}{m},\frac{m}{3}} \subset \Omega' \subset \Omega'' \subset A_{\frac{2}{m},\frac{m}{2}} \subset \Omega \subset A_{\frac{1}{m},m}, \tag{C.3}$$

$dist\ (\Omega', \Omega - \Omega'') > 0$, $(\partial\Omega) \cap \overline{\Omega'} = \emptyset$ e $(\partial\Omega) \cap \overline{\Omega''} = \emptyset$.

Por fim, definimos

$$Q_T := \Omega \times (0, T_1),\ Q' := \Omega' \times \left(\frac{2,7}{m}, T_1 - \frac{2,7}{m}\right)$$

e

$$Q'' := \Omega'' \times \left(\frac{2,3}{m}, T_1 - \frac{2,7}{m}\right).$$

Vemos que:

$$R_{\frac{m}{3}} \subset Q' \subset Q'' \subset R_{\frac{m}{2}} \subset Q_T. \tag{C.4}$$

À princípio, queremos mostrar que existe uma constante $k_2 > 0$ para qual

$$\|\nabla_x u_n\|_{L^\infty(R_{\frac{m}{2}})} \leq k_2,\ \forall\ n \geq m.$$

Vamos aplicar o Teorema B.1. Inicialmente, sabemos que a função $u_n \in C^\infty(\overline{Q_T})$, $\forall\ n \geq m$.

Devemos mostrar que existe uma constante $\mu_1 > 0$ de forma que

$$\left(\int_0^{T_1} \left[\int_\Omega \left|\frac{\lambda}{|x|^2}\right|^{2q} dx\right]^{\frac{r}{q}} dt\right)^{\frac{1}{2r}} \leq \mu_1, \tag{C.5}$$

onde q e r satisfazem as condições (B.5).

Tome $x \in \Omega$. Em particular, $x \in A_{\frac{1}{m},m}$. Desta forma,

$$\frac{1}{m} \leq |x| \leq m,$$

o que implica que

$$\frac{\lambda}{m^2} \leq \frac{\lambda}{|x|^2} \leq \lambda m^2,\ \forall\ x \in \Omega. \tag{C.6}$$

Também notamos que, por (B.5), para $0 < \theta_1 < 1$,

$$\frac{N}{2} \leq \frac{N}{2(1-\theta_1)} \leq q \leq +\infty \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{2q} \leq \frac{1}{N} \tag{C.7}$$

e

$$1 \leq \frac{1}{1-\theta_1} \leq r \leq +\infty \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{2r} \leq \frac{1}{2}. \tag{C.8}$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{T_1}\left[\int_\Omega \left|\frac{\lambda}{|x|^2}\right|^{2q} dx\right]^{\frac{r}{q}} dt\right)^{\frac{1}{2r}} &\leq \left(\int_0^{T_1}\left[\int_\Omega (\lambda m^2)^{2q} dx\right]^{\frac{r}{q}} dt\right)^{\frac{1}{2r}} \\ &= \left(\int_0^{T_1}\left[\lambda^{2q} m^{4q}\int_\Omega dx\right]^{\frac{r}{q}} dt\right)^{\frac{1}{2r}} \\ &= \lambda m^2 (med\ \Omega)^{\frac{1}{2q}} (T_1)^{\frac{1}{2r}}.\end{aligned} \tag{C.9}$$

Por (C.7)-(C.9), notamos a existência da constante $\mu_1 > 0$ que satisfaz (C.5).

Desta forma, pelo Teorema B.1, existe $\gamma \in (0,1)$ e $k_2 > 0$ tal que

$$\|\nabla_x u_n\|_{\mathbb{H}^\gamma(\overline{Q_T})} \leq k_2,\ \forall\ n \geq m. \tag{C.10}$$

A constante k_2 depende, dentre outros, do máximo de $|u_n|$ em $\overline{Q_T}$. Como $|u_n|$ é majorada por ζ em $\overline{B_n} \times [0, T_1)$ e as demais pendências independem da escolha de n, segue que k_2 também não depende de n.

Como consequência de (C.10) e da estrutura da norma no espaço de Hölder $\mathbb{H}^\gamma(\overline{\Omega_T})$, segue que

$$\|\nabla_x u_n\|_{L^\infty(R_{\frac{m}{2}})} \leq k_2,\ \forall\ n \geq m. \tag{C.11}$$

Agora devemos provar que existe uma constante $k_3 > 0$, para a qual

$$\max_{(x,t)\in R_{\frac{m}{3}}} \left[|u_n| + \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| + \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right| \right] \leq k_3, \tag{C.12}$$

e k_3 independe de n adotado (lembrando que $n \geq m$).

O resultado (C.12) é dado como uma consequência do Teorema B.2. De fato, tomamos os conjuntos Q' e Q''. Como $u_n \in C^\infty(\overline{Q_T})$, para $l = \dfrac{1}{10}$ por exemplo, temos a existência de uma constante $C > 0$, para a qual

$$\|u_n\|_{\mathbb{H}^{\frac{21}{10}}(Q')} \leq C \left(\max_{\frac{2,3}{m} \leq t \leq T_1 - \frac{2,7}{m}} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega'')} + \|\nabla_x u_n\|_{L^2(Q'')} \right), \tag{C.13}$$

$\forall\ n \geq m$.

Notamos por (C.13), pela estrutura da norma no espaço de Hölder $\mathbb{H}^{\frac{21}{10}}(Q')$, pelo item (ii) do Lema 3.3.1 e por (C.11) que, $\forall\ n \geq m$,

$$\begin{aligned}
&\max_{(x,t)\in R_{\frac{m}{3}}} \left[|u_n| + \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| + \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right| \right] \leq \|u_n\|_{\mathbb{H}^{\frac{21}{10}}(Q')} \\
&\leq C \left(\max_{\frac{2,3}{m} \leq t \leq T_1 - \frac{2,7}{m}} \|u_n(t)\|_{L^2(\Omega'')} + \|\nabla_x u_n\|_{L^2(Q'')} \right) \\
&\leq C \left[\max_{0 \leq \bar{t} \leq T_1 - \frac{2,7}{m}} \left(\int_{\Omega''} |u_n(x,\bar{t})|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\iint_{Q''} |\nabla_x u_n|^2\, dx\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\leq C \left[\max_{0 \leq \bar{t} \leq T_1 - \frac{2,7}{m}} \left(\int_{A_{\frac{2}{m}, \frac{m}{2}}} |\zeta(x,\bar{t})|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\iint_{R_{\frac{m}{2}}} (k_2)^2\, dx\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \right].
\end{aligned} \tag{C.14}$$

De (C.14) concluímos (C.12), onde

$$k_3 := C \left[\max_{0 \leq \bar{t} \leq T_1 - \frac{2,7}{m}} \left(\int_{A_{\frac{2}{m}, \frac{m}{2}}} |\zeta(x,\bar{t})|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\iint_{R_{\frac{m}{2}}} (k_2)^2\, dx\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces.** Academic Press, New York, 1975.

[2] BACKUS, G. E. **An L^2 Form of Bernstein's Inequality.** Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 76, nº 7, (1979), pg. 3061-3064.

[3] BARAS, P.; GOLDSTEIN, J. A. **The Heat Equation with a Singular Potential.** Trans. Amer. Math. Soc., 284 (1984), 121-139.

[4] BENVENUTTI, M. J. **Existência e Regularidade de Soluções de Equações Diferenciais Parciais Uniformemente Elípticas,** 62 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática e Computação Científica), Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.

[5] BEBERNES, J.; EBERLY, D. **Mathematical Problems from Combustion Theory.** Mathematical Science, 83, Springer-Verlag, New York, 1989.

[6] BRAUER, F.; NOHEL, J. A. **The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations.** Consulting Editors, 1969.

[7] BRÉZIS, H.; CAZENAVE, T. **A Nonlinear Heat Equation with Singular Initial Data.** J. Anal. Math., 68 (1996), 277-304.

[8] BRÉZIS, H. **Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones.** Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1984.

[9] CABRÉ, X.; MARTEL, Y. **Weak Eigenfunctions for the Linearization of Extremal Elliptic Functions.** J. Funct. Anal., 156 (1998), 30-56.

[10] DIBENEDETTO, E. **Degenerate Parabolic Equations.** Springer-Verlag, New York, 1993.

[11] DIBENEDETTO, E. **Partial Differential Equations.** Birkhäuser, Boston, 1995.

[12] DOLD, J. W.; GALAKTIONOV, V. A.; LACEY, A. A.; VAZQUEZ , J. L. **Rate of Approach to a Singular Steady State in Quasilinear Reaction-Diffusion Equation.** Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 26 (1998), 663-687.

[13] EIDELMAN, S. D.; ZHITARASHU, N. V. **Parabolic Boundary Value Problems.** Birkhäuser, Berlim, 1998.

[14] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations.** American Mathematical Society, 1998.

[15] GUSTAFSON, K. E. **Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods.** Dover Publications, 3rd ed., 1999.

[16] HELMBERG, G. **Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space.** North-Holland Publishing Co, 1969.

[17] HIRATA, D.; TSUTSUMI, M. **On the Well-Posedness of a Linear Heat Equation with a Critical Singular Potential.** Differential Integral Equations, 14 (2001), 1-18.

[18] IL'IN, V. A. **An Estimate for the Spectral Function of a Selfadjoint Extension in $\mathbb{R}^N$ of the Schrödinger Operator with a Potential Satisfying the Strenghened Stummel Condition.** Differ. Uravn., 35 (1999), 188-199, Russian, English transl., Differential Equations, 35 (1999), 187-198.

[19] KATO, T. **Schrödinger Operators with Singular Potentials.** Israel J. Math., 13 (1972), 135-148.

[20] KESAVAN, S. **Topics in Functional Analysis and Applications.** Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[21] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications.** Wiley, 1978.

[22] KURATA, K. **Continuity and Harnack's Inequality for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.** Indiana Univ. Math. J., 43 (1994), 411-440.

[23] LADYZENSKAJA, O. A.; SOLONNIKOV, V. A.; URAL'CEVA, N. N. **Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type.** American Mathematical Society, Trans. Math. Monographs, 23, Providence, 1968.

[24] LIMA, E. L. **Espaços Métricos.** IMPA, CNPq, 1977.

[25] MARCHI, C. **The Cauchy Problem for the Heat Equation with a Singular Potencial.** Differential and Integral Equations, Vol. 16, nº 9, (2003), pg. 1065-1081.

[26] MARSDEN, J. E.; HOFFMAN, M. J. **Elementary Classical Analysis.** 2nd edition, W. H. Freeman and Company, New York, 1993.

[27] RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis.** 3rd edition, McGraw-Hill, 1976.

[28] SIMON, B. **Schrödinger Semigroups.** Bull. Amer. Math. Soc., 7 (1982), 447-526.

[29] TYCHONOFF, S. **Théoremes d'Unicité pour l'Équation de la Chaleur.** Math. Sbornik, 42 (1935), 199-216.

[30] TRAVESSINI, F. **Análise de Estabilidade e Convergência dos Métodos Chebyshev-Espectrais para Problemas Parabólicos.** 134 p. Dissertação (Mestrado em Matemática e Computação Científica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2007.

[31] VAZQUEZ, J. L. **Domain of Existence and Blowup for the Exponential Reaction-Diffusion Equation.** Indiana Univ. Math. J., 48 (1999), 677-709.

[32] WIDDER, D. V. **Positive Temperature on an Infinity Rod.** Trans. Amer. Math. Soc., 55 (1944), 85-95.

[33] ZEIDLER, E. **Nonlinear Functional Analysis and its Applications.** Vol 2A: Linear Monotone Operators, Springer-Verlag, 1990.