

Universidade Federal de Santa Catarina  
Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica

O Método de Galerkin Descontínuo  
para as Equações de Stokes

Eric Zettermann Dias de Azevedo

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rafael Bösing

Florianópolis  
Março de 2011



Universidade Federal de Santa Catarina  
Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica

O Método de Galerkin Descontínuo para as  
Equações de Stokes

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise Numérica.

Eric Zettermann Dias de Azevedo

Florianópolis  
Março de 2011



# O Método de Galerkin Descontínuo para as Equações de Stokes

por

**Eric Zettermann Dias de Azevedo**

Esta dissertação será julgada para a obtenção, do Título de Mestre em Matemática, Área de Concentração em Análise Numérica, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

---

Dr. Ruy Exel Filho  
Coordenador da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora

---

**Prof. Dr. Paulo Rafael Bösing (UFSC-Orientador)**

---

**Prof. Dr. Saulo Pomponet Oliveira (UFPR)**

---

**Prof. Dr. Licio Hernanes Bezerra (UFSC)**

---

**Prof Dr. Luciano Bedin (UFSC)**

**Florianópolis, 21 de Março de 2011.**



À minha esposa. À minha família.



# Agradecimentos

Em primeira instância, agradeço à minha família, que esteve ao meu lado durante a graduação e o mestrado. À minha esposa, Luiza, por todo carinho e compreensão, aos meus pais, Alex e Ana, por todo o apoio financeiro e emocional durante a vida acadêmica, e aos meus irmãos, Alan, Alexander e Rodrigo, que de uma forma ou outra fizeram parte desta jornada.

Agradeço ao meu professor, orientador e amigo Paulo Bösing, que, em todo o tempo, demonstrou acreditar em minha capacidade. Agradeço todas as críticas, sugestões e tempo despendido para ajudar a resolver os problemas que apareciam.

Agradeço aos professores Licio Bezerra, Luciano Bedin e Saulo Pomponet por terem aceitado o convite para serem membros da banca, mesmo com curto tempo para a leitura do trabalho assim como as sugestões e correções apresentadas.

Agradeço a todos os amigos que fiz enquanto estudei na UFSC. Aos colegas do mestrado, companheiros de inúmeros dias na sala da pós, com quem compartilhei muitos almoços. Agradeço aos meus amigos de outras atividades pelo apoio e compreensão quando me ausentei em função deste trabalho. Agradeço também pelos momentos juntos que me ajudaram a descontraír e relaxar, melhorando minha produção acadêmica.

Agradeço a Edson e Clara, mestrando e graduanda do curso de matemática pela contribuição na revisão do trabalho.

Agradeço à Elisa, secretária da pós, que de forma rápida e competente resolveu as questões burocráticas sempre que necessário.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de mestrado, sem a qual eu não teria feito esta dissertação.



# Resumo

Este trabalho apresenta resultados teóricos e práticos sobre às equações de Stokes e sobre o método de Galerkin descontínuo aplicado às equações de Stokes. Primeiramente apresentamos o teorema de Lax-Milgram que garante, para alguns problemas existência e unicidade. Mostrando que o problema de Stokes não se enquadra nas hipóteses do teorema de Lax-Milgram, criamos uma motivação para estudar existência e unicidade via condição Inf-Sup. Apresentamos para isso uma série de teoremas determinando condições que um problema precisa satisfazer para que existência e unicidade sejam satisfeitas. Essas condições foram enunciadas demonstradas num contexto mais geral. Por isso, mostramos que o problema de Stokes, de fato, satisfaz essas condições e, portanto, é um problema com existência e unicidade de solução. Depois disso, o problema é discretizado usando o método de Galerkin descontínuo para depois ser implementado e testado. Também enunciados e demonstramos teoremas com estimativas de erro *a priori* na norma energia e  $L_2(\Omega)$  para o campo de velocidade, e na norma  $L_2(\Omega)$  para a pressão. Por último apresentamos os resultados numéricos em dois problemas teste retirados da literatura e discutimos aspectos sobre a implementação e estabilização do método.



# Abstract

This work presents theoretical results on the Stokes equations and the discontinuous Galerkin method applied to Stokes equations. First we present the Lax-Milgram theorem that ensures existence and uniqueness for some problems. Showing that the Stokes problem does not fit the assumptions of the theorem of Lax-Milgram, we create a motivation for studying existence and uniqueness through Inf-Sup condition. About this, we enunciate a series of theorems determining conditions that a problem needs to satisfy such that existence and uniqueness is also satisfied. These conditions were given in very general lines, so we show that the Stokes problem, in fact, satisfies these conditions and, therefore, is a problem with existence and uniqueness of solution. After that, the problem is discretized using the DGM (Discontinuous Galerkin Methods) to after that be implemented and tested. Finally we demonstrate some a priori error estimate theorems in energy and  $L_2(\Omega)$  norm for velocity and in  $L_2(\Omega)$  norm for pressure. We also present numerical results on two test problems taken from literature and discuss aspects about implementation and stabilization of the method.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Espaços de Lebesgue . . . . .	1
1.2 Noção de Derivada Fraca . . . . .	3
1.3 Espaços de Sobolev . . . . .	5
1.4 Desigualdade de Poincaré e $H^{-1}(\Omega)$ . . . . .	8
1.5 Resultados Importantes . . . . .	8
<b>2 Elementos Finitos</b>	<b>11</b>
2.1 Notações e Convenções . . . . .	11
2.2 Partições . . . . .	12
2.3 Saltos e Médias . . . . .	13
2.4 Pré-requisitos . . . . .	14
<b>3 O Problema no Caso Geral</b>	<b>19</b>
3.1 Formulação Fraca . . . . .	19
3.2 Teorema de Lax-Milgram . . . . .	21
<b>4 O Problema de Stokes e a Condição Inf-Sup</b>	<b>27</b>
4.1 As Equações de Stokes . . . . .	27
4.2 Uma Primeira Análise . . . . .	28
4.3 Condição Inf-Sup . . . . .	31
<b>5 Método de Galerkin Descontínuo</b>	<b>41</b>
5.1 Existência e Unicidade da forma fraca . . . . .	41
5.2 Aplicação ao Problema de Stokes . . . . .	43
5.3 Condição Inf-Sup discreta . . . . .	50
5.4 Estimativas de erro <i>a priori</i> . . . . .	54

<b>6</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>77</b>
6.1	O ambiente NeoPZ . . . . .	77
6.2	Implementação . . . . .	78
6.3	Teste 1 . . . . .	81
6.4	Teste 2 (Fluxo de Kovasznay) . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Definição Alternativa para <math>a_\epsilon(\cdot, \cdot)</math> e <math>b_\epsilon(\cdot, \cdot)</math></b>	<b>91</b>
<b>B</b>	<b>Coercividade e Continuidade de <math>a_\epsilon(\cdot, \cdot)</math></b>	<b>95</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>99</b>

# Lista de Tabelas

6.1	Teste 1 com malha triangular usando o espaço $\mathbb{P}_k(E)$ com $k$ igual a 1, 2 e 3. . . . .	82
6.2	Teste 1 com malha triangular usando o espaço $\mathbb{P}_k(E)$ com $k$ igual a 1, 2 e 3, para o par $(\mathbf{u}, p)$ em relação a norma $\ \cdot\ _S$ . . . . .	82
6.3	Teste 1 com malha retangular usando o espaço $\mathbb{Q}_k(E)$ com $k$ igual a 2. . . . .	83
6.4	Teste 2 com malha triangular usando o espaço $\mathbb{P}_k(E)$ com $k$ igual a 1, 2 e 3, para pressão em relação a norma $\ \cdot\ _0$ . . . . .	87
6.5	Teste 2 com malha triangular usando o espaço $\mathbb{P}_k(E)$ com $k$ igual a 1, 2 e 3, para velocidade em relação a norma $\ \cdot\ _0$ . . . . .	87
6.6	Teste 2 com malha triangular usando o espaço $\mathbb{P}_k(E)$ com $k$ igual a 1, 2 e 3, para a velocidade em relação a norma $\ \cdot\ _\varepsilon$ . . . . .	88
6.7	Teste 2 com malha triangular usando o espaço $\mathbb{P}_k(E)$ com $k$ igual a 1, 2 e 3, para o par $(\mathbf{u}, p)$ em relação a norma $\ \cdot\ _S$ . . . . .	88



# Lista de Figuras

6.1	Refinamento com elementos triangulares. $L = 0$ , $L = 1$ e $L = 2$ . . . . .	80
6.2	Refinamento com elementos quadrados. $L = 0$ , $L = 1$ e $L = 2$ . . . . .	81
6.3	Ordens de convergência. . . . .	84
6.4	Campo vetorial da velocidade e linhas de contorno da solução $u_1$ quando $Re = 10$ . . . . .	85



# Introdução

Será que ninguém nunca se perguntou como a água é simulada nos filmes de animação? A água e outros fluidos, quando simulados, devem corresponder à realidade. Quando a menina irritada joga a água de um copo no menino atrevido, em filmes de animação computadorizada, essa deve percorrer um caminho natural após se chocar com o rosto do sujeito. Todos irão notar se esta água for mal simulada, pois estamos acostumados a ver e prever a ação água na natureza. Bem, para tais simulações existem equações diferenciais que modelam esses fenômenos físicos. Após adaptadas para o computador essas equações são “resolvidas” de acordo com as informações que o problema oferece. A solução encontrada é usada para prever e modelar o movimento de água ao longo do tempo.

Este simples exemplo, lúdico, não é suficiente para entender a importância dessas equações. Elas simulam vários fluidos em situações como previsões meteorológicas, escoamentos turbulentos, transportes de contaminantes em meios porosos, vazamentos e escoamentos de petróleo, entre outros. A julgar pelas aplicações é fácil compreender o porquê de tanto interesse de pesquisadores nessa área conhecida como dinâmica dos fluidos.

Muitas dessas equações são extremamente complicadas de serem resolvidas de maneira exata. Visto que o mundo não para, métodos foram desenvolvidos afim de contornar essas dificuldades. O conjunto dos métodos numéricos para resolução de problemas de dinâmica de fluidos compõe uma outra área chamada de CFD (Computational Fluid Dynamics). Em CFD as soluções são aproximadas de várias maneiras diferentes sempre buscando uma severa semelhança com a solução exata, caso exista.

Neste trabalho, trataremos de equações específicas e um método específico: as equações de Stokes resolvidas, aproximadamente, pelo método de Galerkin descontínuo (DGM - Discontinuous Galerkin

Method). Essas equações, atribuídas a George Gabriel Stokes, modelam escoamentos de fluidos Newtonianos relacionando a velocidade, a pressão e a viscosidade de fluido.

O método de Galerkin descontínuo foi introduzido em 1973 por Reed e Hill [18] para resolver questões relacionadas ao transporte de nêutrons. A motivação para esse método de elementos finitos veio dos problemas não lineares, nos quais a convecção é a característica principal. Esse tipo de situação pode apresentar uma solução exata que evolui descontinuamente com o tempo. A maior preocupação é que a parte descontínua da função, apesar de apresentar uma estrutura bem complicada, armazena muita informação sobre a solução. Entretanto, com estrutura complicada ou não, é preciso que o problema seja resolvido. O método candidato a resolvê-lo tem que lidar muito bem com as descontinuidades, pois quando não se tem conhecimento sobre a solução exata, o método é a única fonte de informações sobre a solução. Como saber quando tal descontinuidade é significativa ou quando é apenas imprecisão do método?

Em busca de uma resposta eficiente a essa pergunta, o DGM vem se desenvolvendo em sua precisão, consistência, velocidade e eficiência desde então. Tal método hoje apresenta vantagens, como uma boa adaptatividade a geometrias mais complexas, a malhas irregulares e a diferenças de grau polinomial de aproximação entre os elementos.

A idéia principal, que caracteriza o método, é a escolha dos espaços de aproximação. No DGM esses espaços contêm funções polinomiais por partes (em cada elemento) com nenhuma restrição em relação a continuidade da função. Ou seja, é possível que uma função descontínua faça parte desse espaço, desde que essa seja polinomial em cada elemento da malha. Por esse motivo, entre elementos vizinhos, sobre a interface, podem ocorrer saltos nos valores dessa função. Para diminuir esse salto no valor da função, ou seja, para fazer com que a função seja mais próxima de uma função contínua, podem ser introduzidos termos de penalização que vão forçar essa continuidade.

Nosso objetivo, então, é estudar o desempenho do método de Galerkin descontínuo na resolução numérica do problema de Stokes, relacionando a teoria construída com os resultados numéricos gerados por simulações. Tal objetivo será alcançado estudando testes nos quais as soluções exatas já são conhecidas. Assim associaremos os resultados numéricos tanto com a solução exata quanto com toda a teoria construída sobre o método.

No Capítulo 1 fazemos um breve estudo sobre os alicerces de nossa teoria definindo uma série de ferramentas de análise funcional

para que possamos usá-las durante o resto do trabalho.

O Capítulo 2 é dedicado às definições básicas para a construção de um método de elementos finitos. Conceitos básicos como partições e elementos são definidos neste capítulo, bem como outros resultados não tão básicos como interpolantes e desigualdades do traço, por exemplo. No mesmo capítulo são definidos conceitos bem particulares do método de Galerkin descontínuo como os saltos e médias.

Num contexto geral, o Capítulo 3 trata dos problemas e suas formulações fracas. O importante Teorema de Lax-Milgram integra o capítulo como uma das alternativas para garantir a consistência de um problema. A coercividade de uma forma bilinear também é definida nesse capítulo.

A partir do Capítulo 4 nossos estudos começam a se voltar mais para as equações de Stokes buscando mostrar resultados como, por exemplo, consistência, através do Teorema de Lax-Milgram. Diante de obstáculos com relação a este ponto nos vemos obrigados a recorrer a novas alternativas para garantir a consistência do nosso problema. Nesse momento surgem os estudos para construir a condição Inf-Sup que garante a consistência desejada.

No Capítulo 5 construímos o método de Galerkin descontínuo para resolver as equações de Stokes. Nesse capítulo são realizadas todas as garantias teóricas (consistência, coercividade, unicidade, convergência, entre outros) para que o problema possa ser resolvido “com segurança”. Estimativas de erro *a priori* em várias normas são apresentadas em importantes teoremas que servirão posteriormente para avaliar os resultados numéricos.

Tentamos fazer com que as demonstrações fossem bem detalhadas, com a intenção de fazer desse trabalho fonte de consulta àquelas que se interessarem pelo tema. Por isso, algumas delas podem ser consideradas longas, em comparação às compactas 10 linhas que costumamos encontrar nos livros e que acabam se desdobrando em diversas páginas e dias quando nos debruçamos sobre elas. Afinal, quanto mais pessoas souberem daquilo que estamos estudando, melhor.

Finalmente, no Capítulo 6 apresentamos resultados os numéricos que obtemos aplicando o método de Galerkin descontínuo para resolução de alguns problemas relacionados às equações de Stokes. Neste capítulo discutimos brevemente a implementação do método e possíveis problemas a respeito de estabilidade.

As referências mais usadas neste trabalho são [19] e [13] que trazem uma construção detalhada do DGM e depois o aplicam no problema de Stokes. A parte que trata da condição Inf-Sup segue uma

sequência similar a de [11], incluindo idéias das demonstrações. Os resultados numéricos foram gerados a partir de problemas apresentados em [7] e em [17]. Uma forte influência de [15] pode ser encontrada na hora da implementação das formas bilineares no pacote NeoPZ. A parte de análise funcional no início da dissertação tem como fortes referências [21], [4] e [16]. Na parte da versão estabilizada do método, discutida no Capítulo 6, [22] e [10] são as referências mais utilizadas. Em [8] pode ser encontrado um interessante material sobre a evolução do DGM, de onde, inclusive, foram baseados os dados históricos dessa introdução.

Esperamos, como objetivo numérico, que o método se mostre eficiente na resolução de problemas práticos, ou seja, que as soluções aproximadas estejam relativamente próximas das exatas.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo introduziremos as principais ferramentas para o nosso estudo. A teoria a seguir é importante pois está por trás de resultados e teoremas que formarão o corpo deste trabalho. Você pode considerar este capítulo como uma lista de definições e teoremas para consulta durante o desenvolvimento do conteúdo.

### 1.1 Espaços de Lebesgue

Salvo exceções mencionadas, usaremos  $\Omega$  para denotar um conjunto aberto, conexo e limitado em  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2$  ou  $3$ ), com fronteira  $\partial\Omega$  regular. Nesse caso usaremos  $\mathbf{n}$  como notação para a normal unitária exterior à  $\partial\Omega$ .

As próximas definições explicitam uma noção de regularidade para a fronteira  $\partial\Omega$ .

**Definição 1.1** (Função Lipschitz). *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados. Dizemos que a função  $f : X \rightarrow Y$  é Lipschitz quando existe uma constante  $L$  tal que*

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq L\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X.$$

**Definição 1.2** (Fronteira Lipschitz). *Seja  $\Omega$  como convencionado sendo que  $d \geq 2$ . Chamaremos  $\partial\Omega$  de fronteira Lipschitz quando existir, para esta, uma cobertura finita de abertos  $\{U_i\}_{1 \leq i \leq m}$ , tal que, para  $j = 1, 2, \dots, m$  as seguintes condições sejam satisfeitas.*

(i)  $\partial\Omega \cap U_i$  é o gráfico de uma função de Lipschitz;

(ii)  $\Omega \cap U_i$  está em somente um dos lados deste gráfico.

Qualquer estudo sobre equações diferenciais parciais envolve certos conhecimentos sobre as funções, já que é uma como tal que resolve a equação. Para definir alguns espaços e algumas características das funções usaremos a integral (notação usual) e medida ( $m(\cdot)$ ) de Lebesgue .

**Definição 1.3.** O espaço  $L^2(\Omega)$  é o espaço das funções quadrado integráveis definidas em  $\Omega$ , ou seja

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} f^2 < \infty \right\}.$$

**Observação:** Em  $L^2(\Omega)$  duas funções são equivalentes quando são iguais quase sempre, ou seja, quando diferem entre si somente num conjunto de medida nula.

Esses espaços de funções, bem como seus resultados, não são objetivos de nossos estudos, são ferramentas que iremos usar ao longo do trabalho. Por isso, não iremos demonstrar os resultados enunciados acerca desses espaços.

**Teorema 1.1.1.**  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert considerando o seguinte produto interno.

$$\langle u, v \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} uv.$$

**Observação:** Nesse caso, a norma induzida desse produto interno para um vetor  $v$  de  $L^2(\Omega)$  é

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} v^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ao longo do trabalho usaremos também o espaço  $L^2_0(\Omega)$  definido por:

$$L^2_0(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} v = 0 \right\}.$$

As definições acima são estendidas naturalmente para as funções vetoriais  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_d)$  sendo que  $v_i$  e  $u_i$  estão em  $L^2(\Omega)$  para  $i = 1, \dots, d$ :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{e}$$

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} = \left( \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \cdots + \|u_d\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Definição 1.4.** O conjunto  $L^\infty(\Omega)$  é definido como o espaço das funções limitadas. Ou

$$L^\infty(\Omega) = \{v : \|v\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}$$

sendo que

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^\infty} &= \text{ess sup}\{|v(x)| : x \in \Omega\} = \\ &= \text{inf}\{\text{sup}\{|v(x)| : x \in \Omega \setminus N\} : N \subset \Omega, m(N) = 0\}. \end{aligned}$$

**Observação:** Analogamente, podemos definir os espaços  $L^p(\Omega)$  usando

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } p \text{ tal que } 1 \leq p \leq \infty.$$

## 1.2 Noção de Derivada Fraca

Adiante, precisaremos de espaços um pouco mais elaborados do que os de Lebesgue. No entanto, para definir tais conjuntos uma noção diferente de derivação se faz necessária.

**Definição 1.5.** Seja  $v$  uma função contínua definida em  $\Omega$ . Considere o conjunto

$$M = \{x : v(x) \neq 0, x \in \Omega\}.$$

Chamamos o conjunto  $\overline{M}$  de suporte da função  $v$  denotado por  $\text{supp}(v) = \overline{M}$ . Além disso, dizemos que  $v$  tem suporte compacto quando  $\text{supp}(v)$  for um conjunto compacto.

**Definição 1.6.** Defina  $\mathcal{D}(\Omega)$  como sendo o conjunto das funções de  $C^\infty$  (funções infinitamente diferenciáveis) cujo suporte é um subconjunto compacto de  $\Omega$ . O espaço  $\mathcal{D}'(\Omega)$  (espaço dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$ ) é chamado de espaço das distribuições.

Como mencionamos anteriormente, duas funções que são iguais quase sempre podem ser identificadas em  $L^2(\Omega)$  como equivalentes (na verdade isso é válido para qualquer  $L^p(\Omega)$ ). Então, uma função que não é contínua em um único ponto, pode ser identificada com uma função contínua. Isso nos motiva a definir uma nova noção de derivadas para estes espaços. Afinal queremos que a derivada seja a mesma para as funções que são iguais quase sempre. Para definir tal noção precisaremos da seguinte notação.

Seja  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  um multi-índice, sendo que  $\alpha_i$  é inteiro e não negativo para cada  $i$ . Seja  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_d$  o comprimento de  $\alpha$ . Então usaremos a seguinte notação

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

sendo que  $v$  nesse caso é uma função em  $\mathbb{R}^d$ .

**Definição 1.7.** Dizemos que uma função  $v \in L^2(\Omega)$  é fracamente diferenciável se existe uma função  $u$  tal que

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) D^\alpha \varphi(x) \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

nesse caso  $u$  é a derivada fraca de  $v$  denotada por  $D^\alpha v$ .

**Observação:** Note que se o multi-índice  $\alpha$  for tal que  $v \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega)$  então a definição de derivada fraca (Definição 1.7) equivale à de derivada clássica que já nos é familiar. Por isso o abuso de notação na definição. Isto é, quando a derivada clássica não existir, a notação  $D^\alpha v$  estará se referindo à derivada fraca. Isso dependerá, obviamente, da suavidade da função  $v$ .

Algumas funções não admitem derivadas clássicas e, no entanto, são fracamente diferenciáveis.

**Exemplo:** Considere a função

$$\begin{aligned} v : (-1, 1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto v(x) = 1 + |x|. \end{aligned}$$

Veja que  $v$  não é diferenciável no ponto  $x = 0$ , porém  $v$  é fracamente diferenciável com  $D^1 v$  dada por

$$D^1 v(x) = u(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Isso é facilmente constatado usando a Definição 1.7. De fato, seja  $\varphi \in$

$\mathcal{D}(-1, 1)$ . Então

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 v(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx &= \int_{-1}^0 v(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx + \int_0^1 v(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx = \\
 &\hspace{15em} \text{(integração por partes)} \\
 &= [v\varphi]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (-1) \cdot \varphi(x) dx + [v\varphi]_0^1 - \int_0^1 (+1) \cdot \varphi(x) dx = \\
 &\hspace{15em} \text{(definição de } u(x)) \\
 &= [v\varphi]_{-1}^0 + [v\varphi]_0^1 - \int_{-1}^1 u(x)\varphi(x) dx = \\
 &= v(0)\varphi(0) - v(-1)\varphi(-1) + v(1)\varphi(1) - v(0)\varphi(0) - \\
 &\quad - \int_{-1}^1 u(x)\varphi(x) dx = \\
 &= - \int_{-1}^1 u(x)\varphi(x) dx. \hspace{10em} (v(1) = v(-1) = 0)
 \end{aligned}$$

## 1.3 Espaços de Sobolev

Agora, usando a nova noção de diferenciação, definiremos um espaço de funções mais suave que  $L^2(\Omega)$ . As demonstrações dos teoremas desta seção podem ser encontradas em [4].

**Definição 1.8.** *O espaço de funções  $H^1(\Omega)$  é dado por:*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall 0 \leq |\alpha| \leq 1\}.$$

**Observação:** Lembrando que  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$  podemos também escrever  $H^1(\Omega)$  (Definição 1.8) da seguinte maneira.

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \dots, d \right\}$$

ou ainda,

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in (L^2(\Omega))^d\}.$$

De maneira análoga definimos  $H^s(\Omega)$  com  $s$  inteiro e positivo.

**Definição 1.9.**

$$H^s(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall 0 \leq |\alpha| \leq s \right\}.$$

**Exemplo:** Quando  $d = s = 2$  temos

$$H^2(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \in L^2(\Omega) \right\}$$

ou

$$H^2(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Nesse exemplo fica claro que  $L^2(\Omega) \supseteq H^1(\Omega) \supseteq H^2(\Omega)$ .

O resultado a seguir é essencial para discussões futuras.

**Teorema 1.3.1.**  $H^1(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com relação ao seguinte produto interno.

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x).$$

**Observação:** Em  $H^1(\Omega)$  a norma induzida pelo produto interno é

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

ou

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_d} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Analogamente, uma norma para  $H^s(\Omega)$  seria

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Definição 1.10.** Definimos o número real  $|u|_{H^s(\Omega)}$  como sendo

$$|u|_{H^s(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Observação:**  $|u|_{H^s(\Omega)}$  é uma seminorma associada ao espaço  $H^s(\Omega)$ .

**Teorema 1.3.2.** O espaço  $H_0^1(\Omega)$ , composto por funções de  $H^1(\Omega)$  com suporte compacto, é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)$$

que, por sua vez, induz a norma  $|u|_{H^1(\Omega)}$  (Definição 1.10) em  $H_0^1(\Omega)$ .

Podemos também definir espaços do tipo  $H$  para índices fracionários:

**Definição 1.11.** Seja  $s \geq 0$  um inteiro e  $k = s + \theta$  com  $0 < \theta < 1$ . Então, definimos o espaço  $H^k(\Omega)$  como sendo um subespaço de  $H^s(\Omega)$  cuja norma abaixo (norma de Slobodečkiĭ) é finita.

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left\{ \|u\|_{H^s(\Omega)}^2 + \right. \quad (1.2)$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|=s} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{d+2\theta}} dx dy \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3)$$

Generalizando, podemos olhar os espaços  $H^s(\Omega)$  como sendo um caso particular dos espaços  $W^{s,k}(\Omega)$  com  $k = 2$ . Tais espaços são definidos a seguir:

**Definição 1.12.** Seja  $1 \leq k \leq \infty$ ,  $s \in \mathbb{N}$ . Então,

$$W^{s,k}(\Omega) = \{u \in L^k(\Omega) : D^\alpha u \in L^k(\Omega), \forall |\alpha| \leq s\}$$

**Teorema 1.3.3.** O espaço  $W^{s,k}(\Omega)$  é completo com a norma

$$\|u\|_{W^{s,k}(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|_{L^k(\Omega)}^k \right)^{\frac{1}{k}}$$

**Observação:** Nesses espaços, o valor de  $s$  pode ser não inteiro, nesse caso, a definição de tal espaço é análoga a Definição 1.11, levando em consideração que  $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$ .

## 1.4 Desigualdade de Poincaré e $H^{-1}(\Omega)$

Uma estimativa muito importante usada para mostrar coercividade ou majorar erros é a desigualdade de Poincaré.

**Teorema 1.4.1** (Desigualdade de Poincaré). *Considere  $\Omega$  como convencionado sendo que  $d \geq 2$ . Então existe uma constante  $C_\Omega$  tal que*

$$\|v(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla v(x)\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.4)$$

**Demonstração:** Essa demonstração pode ser encontrada na seção 1.2.4 de [6]. ■

**Observação:** Usando (1.4) é possível mostrar que em  $H_0^1(\Omega)$  as normas  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  e  $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$  são equivalentes.

Para próxima definição é necessário recordar que  $H_0^1(\Omega)$  é espaço de Hilbert e, por conseqüência, espaço de Banach (Teorema 1.3.2).

**Definição 1.13** (Espaço Dual a  $H_0^1(\Omega)$ ). *O espaço dual do espaço  $H_0^1(\Omega)$  será denotado por  $H^{-1}(\Omega)$ . A seguir definimos em  $H^{-1}(\Omega)$  uma norma dada por:*

$$\|v\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{0 \neq x \in H_0^1(\Omega)} \frac{|v(x)|}{\|x\|_{H_0^1(\Omega)}} \quad (1.5)$$

## 1.5 Resultados Importantes

**Teorema 1.5.1** (Green). *Considere  $\Omega$  como convencionado. Seja  $\mathbf{n}$  a normal exterior unitária com relação a  $\partial\Omega$ . Então*

$$-\int_{\Omega} w \Delta v = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w - \int_{\partial\Omega} \nabla v \cdot \mathbf{n} w, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \text{ e } w \in H^1(\Omega),$$

sendo que  $\Delta w = \nabla \cdot \nabla w = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}$ .

Ou, de forma mais geral

$$-\int_{\Omega} w \nabla \cdot \underline{\tau} \nabla v = \int_{\Omega} \underline{\tau} \nabla v \cdot \nabla w - \int_{\partial\Omega} \underline{\tau} \nabla v \cdot \mathbf{n} w,$$

$$\forall v \in H^2(\Omega) \text{ e } w \in H^1(\Omega),$$

sendo que  $\underline{\tau}$  é matriz.

**Demonstração:** Uma pode ser encontrada em [24].

■

**Teorema 1.5.2** (Cauchy-Schwarz). *Seja  $X$  um espaço de Hilbert. Então:*

$$|\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}| \leq \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X. \quad (1.6)$$

**Demonstração:** Uma pode ser encontrada em [2].

■

**Teorema 1.5.3** (Young).

$$ab \leq \frac{\epsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\epsilon} b^2, \quad \forall \epsilon > 0 \text{ e } \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

**Demonstração:** De  $(c - d)^2 \geq 0$  temos que  $2cd \leq c^2 + d^2$ . Para concluir a demonstração basta escolhermos  $c = \frac{a\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}}$  e  $d = \frac{b}{\sqrt{2\epsilon}}$ .

■

Segue agora um teorema clássico da análise funcional que usaremos sem demonstrar. A construção detalhada desse teorema bem como sua demonstração está em [16] na seção 4.3.

**Teorema 1.5.4** (Hahn-Banach). *Seja  $f$  um funcional linear e limitado em um subespaço  $Z$  de um espaço normado  $X$ . Então, existe um funcional linear e limitado  $\tilde{f}$  em  $X$  que estende  $f$  a  $X$  com a mesma norma.*

Outro clássico cuja prova pode ser encontrada em [16]:

**Teorema 1.5.5** (Teorema da Aplicação Aberta). *Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços de Banach. Se  $A : X \rightarrow Y$  é contínua, linear e bijetiva, então  $A^{-1}$  é também um operador contínuo. Ou seja, existe  $\alpha > 0$  tal que,*

$$\alpha \|u\|_X \leq \|Au\|_Y.$$



# Capítulo 2

## Elementos Finitos

### 2.1 Notações e Convenções

Para o estudo ficar mais claro vamos definir algumas notações que iremos usar ao longo do trabalho.

Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d)$  é uma função vetorial, definimos o gradiente de  $\mathbf{u}$  como a matriz

$$\underline{\nabla \mathbf{u}} = \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]_{i,j=1,2,\dots,d}$$

e se  $\underline{A} = a_{ij}$  for uma matriz definimos

$$\nabla \cdot \underline{A} = \left( \sum_{j=1}^d \frac{\partial a_{1j}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^d \frac{\partial a_{2j}}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^d \frac{\partial a_{dj}}{\partial x_j} \right).$$

A definição anterior nos permite definir também  $\Delta \mathbf{u} = \nabla \cdot \underline{\nabla \mathbf{u}}$ .

Para o divergente de um vetor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d)$  usaremos tanto  $\text{div } \mathbf{u}$  quanto  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ . Logo,  $\text{div } \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ .

Usaremos “.” para relacionar duas matrizes  $\underline{A} = a_{ij}$  e  $\underline{B} = b_{ij}$  e representar a quantidade

$$\underline{A} : \underline{B} = \sum_{i,j=1}^d a_{ij} b_{ij}.$$

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são dois vetores então  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  é o produto escalar entre eles. Mas se  $\underline{A}$  é matriz e  $\mathbf{u}$  é vetor,  $\underline{A} \cdot \mathbf{u}$  é uma simples multiplicação matriz-vetor.

Como estamos fazendo aqui, quando se fizer necessário, vamos diferenciar números, vetores e matrizes usando o formato negrito para o segundo e o formato sublinhado para o terceiro. Para o primeiro, ou quando não for necessária a distinção, usaremos a escrita no formato normal.

Quando, novamente, existirem dois vetores  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_d)$  em  $\mathbb{R}^d$ , usaremos  $\otimes$  para relacioná-los afim de gerar uma matriz  $a_{ij}$  da seguinte maneira:

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = a_{ij} = [u_i v_j]_{i,j=1,2,\dots,d}.$$

Usaremos também, quando conveniente,  $\partial_j v_i$  para abreviar  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ . Além disso, omitiremos o termo de integração  $dx$  ou  $ds$  ou qualquer que seja, sempre que acharmos desnecessário.

No decorrer do trabalho, usaremos várias normas diferentes, as vezes numa mesma equação ou expressão. Afim de condensar a notação para facilitar a visualização dos resultados vamos introduzir a seguinte notação.

$$\begin{aligned} \|v\|_{0,E} &= \|v\|_{L^2(E)}, & \|v\|_{s,E} &= \|v\|_{H^s(E)}, \\ |v|_{1,E} &= |v|_{H^1(E)} & \text{e} & \|v\|_{\infty,E} = \sup_{x \in E} |v(x)|. \end{aligned}$$

Omitiremos  $E$  quando  $E = \Omega$ . Por exemplo,  $\|v\|_1 = \|v\|_{H^1(\Omega)}$ .

O uso de novas notações especiais e abreviações tem o objetivo de condensar expressões, exterminar ambiguidades ou esclarecer algumas passagens. Assim, quando não se fizer necessário o uso destas, optaremos pela apresentação mais limpa aos olhos do leitor.

## 2.2 Partições

Para utilizar a estratégia de elementos finitos, é necessária a construção de uma partição, ou malha, de  $\Omega$ . Aqui, além do convencional exigimos que  $\Omega$  seja poligonal. Chamaremos cada membro dessa partição de elemento. Usaremos  $E$  para denotar tais elementos. É comum que esses elementos sejam triângulos ou quadriláteros quando em  $\mathbb{R}^2$  e, tetraedros e hexaedros em  $\mathbb{R}^3$ . Neste estudo estamos interessados em um tipo especial de partição.

**Definição 2.1** (Partição Conforme). *A partição de  $\Omega$  em elementos  $E_i$  é dita conforme quando para todo  $i \neq j$  a intersecção entre  $E_i$  e  $E_j$  é vazia ou uma face de dimensão menor que  $d$  (se  $d = 2$ , por exemplo essa intersecção pode ser um segmento de reta ou um ponto).*

Para um estudo mais eficiente do método, associaremos as partições de  $\Omega$  de acordo com o “tamanho” de cada elemento. Ou seja, se  $h = \sup \{diam(E)\}$ , então denotaremos essa partição por  $\mathcal{T}_h$ . Claro que quando uma partição for definida é preciso especificar como serão os elementos. Apenas dizer quanto vale  $h$  não serve como definição de uma partição.

Para especificar um pouco mais a partição que iremos trabalhar, vamos definir  $h_E$  como sendo o diâmetro do elemento  $E$ , isto é  $h_E := diam(E)$ . Também,  $\rho_E = \sup \{diam(\beta) : \beta \text{ é bola inscrita em } E\}$ .

**Definição 2.2** (Partição Regular). *Uma partição  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  em elementos  $E_i$  é dita ser regular se, e somente se, existir uma constante  $\rho > 0$  tal que*

$$\frac{h_E}{\rho_E} \leq \rho, \quad \forall E \in \mathcal{T}_h.$$

Em nossa análise, usaremos somente partições conformes regulares.

## 2.3 Saltos e Médias

Mais adiante, definiremos espaços nos quais será exigido que as funções sejam de determinada suavidade somente no interior de cada elemento  $E$ . Ou seja, a função pode ser descontínua em  $\Omega$ . Estamos procurando soluções que sejam bem parecidas com funções contínuas. Assim, definiremos alguns conceitos que contribuirão para que a nossa solução discreta seja relativamente suave.

Considere  $\mathcal{T}_h$  uma partição conforme e regular de  $\Omega$  e  $E$  um elemento dessa partição. Cada elemento  $E$  tem suas faces (que podem ser segmentos de reta ou de planos por exemplo). O conjunto dessas faces que não estão em  $\partial\Omega$ , chamaremos de  $\Gamma_h$ , isto é, o conjunto das faces interiores ao domínio  $\Omega$ . A cada face  $e$  de  $\Gamma_h \cup \partial\Omega$  é associado um vetor normal exterior unitário  $\mathbf{n}_e$ . Se por acaso  $e \in \partial\Omega$  então  $\mathbf{n}_e$  será a normal exterior e unitária de  $\partial\Omega$ .

Vamos definir o espaço  $H^s(\mathcal{T}_h)$  como sendo

$$H^s(\mathcal{T}_h) := \{v \in L^2(\Omega) : v|_E \in H^s(E), \forall E \in \mathcal{T}_h\}.$$

Veremos a seguir (Teorema 2.4.1) que se tomarmos  $v \in H^1(\mathcal{T}_h)$  teremos a garantia de que o traço de  $v$  está bem definido em todas as faces de  $E, \forall E \in \mathcal{T}_h$ . Note que se dois elementos  $E_e^L$  e  $E_e^R$  compartilham a mesma face  $e$  teremos dois traços definidos nessa face (a normal

$\mathbf{n}_e$  é convencionada ser de  $E_e^L$  para  $E_e^R$ ). Isso nos motiva a definir para a função  $v$  sua média e seu salto em  $e$ , respectivamente:

$$\{\{v\}\} = \frac{1}{2} \left( v|_{E_e^L} \right) + \frac{1}{2} \left( v|_{E_e^R} \right) \quad (2.1)$$

$$[[v]] = \left( v|_{E_e^L} \right) - \left( v|_{E_e^R} \right) \quad (2.2)$$

A definição é análoga se  $v$  for um vetor ou uma matriz. Em todos os casos quando  $e$  está em  $\partial\Omega$  convençamos que  $\{\{v\}\} = [[v]] = \left( v|_{E_e^L} \right)$ , em que  $e = E_e^L \cap \partial\Omega$ .

Essa definição de salto está em [19]. Outras definições de saltos estão disponíveis nas literaturas. É claro que a escolha da definição influencia nos resultados que utilizam tais conceitos. Faremos uma breve discussão sobre isso no Apêndice A.

## 2.4 Pré-requisitos

Nessa seção apresentaremos vários resultados e definições que usaremos na construção e na análise do método.

Um importante teorema que encadeia uma série de outros resultados fundamentais é o teorema do traço, usado para definir a restrição de uma função de um espaço de Sobolev ao longo de sua fronteira. Aqui iremos apenas listar os resultados que iremos usar ao longo deste trabalho. Uma abordagem um pouco mais detalhada pode ser encontrada em [19] na subseção 2.1.3.

**Teorema 2.4.1.** *Seja  $\Omega$  como convencionado e seja  $\mathbf{n}$  a normal exterior a  $\partial\Omega$ . Então existem operadores de traço*

$$\gamma_0 : H^s(\Omega) \longrightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad \text{para } s > \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$\gamma_1 : H^s(\Omega) \longrightarrow H^{s-\frac{3}{2}}(\partial\Omega), \quad \text{para } s > \frac{3}{2}$$

que são, respectivamente, extensão dos valores da fronteira e extensão das derivadas normais da fronteira. Os operadores  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  são sobrejetivos. Além disso, se  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ , então:

$$\gamma_0 v = v|_{\partial\Omega} \quad e \quad (2.3)$$

$$\gamma_1 v = \nabla v \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}. \quad (2.4)$$

Esse teorema é base para enunciar várias desigualdades muito úteis na hora de estimar os erros.

**Teorema 2.4.2.** *Sejam  $E$ ,  $e$  e  $h_E$  como definidos anteriormente. Então, existe uma constante  $C$ , independente de  $h_E$  e de  $v$  tal que para toda  $v \in H^s(E)$*

$$\|\gamma_0 v\|_{0,e} \leq C|e|^{\frac{1}{2}}|E|^{-\frac{1}{2}}(\|v\|_{0,E} + h_E\|\nabla v\|_{0,E}), \quad (2.5)$$

$$\|\gamma_1 v\|_{0,e} \leq C|e|^{\frac{1}{2}}|E|^{-\frac{1}{2}}(\|\nabla v\|_{0,E} + h_E\|\nabla^2 v\|_{0,E}), \quad (2.6)$$

sendo que,  $s \geq 1 \forall e \subset \partial E$  para a primeira desigualdade e  $s \geq 2 \forall e \subset \partial E$  para a segunda. Aqui,  $|e|$  e  $|E|$  denotam, respectivamente, a área da face  $e$  e o volume do elemento  $E$ . Usamos as palavras área e volume mas dependendo da dimensão considerada pode ser comprimento, área ou volume.

**Observação:** Vamos abusar da notação  $e$ , a partir de agora, utilizar  $v$  ao invés de  $\gamma_0 v$  e  $\nabla v \cdot \mathbf{n}$  ao invés de  $\gamma_1 v$ . Além disso, este teorema e o seguinte valem também para funções vetoriais.

O próximo teorema é mais particular, utiliza a propriedade das funções polinomiais para gerar novas desigualdades. Aqui o espaço  $\mathbb{P}_k(E)$  denota o espaço de todos os polinômios com grau menor ou igual a  $k$ , definidos em  $E$ . A definição é análoga para o espaço  $\mathbb{P}_k(e)$ .

**Teorema 2.4.3.** *Sejam  $E$ ,  $e$  e  $h_E$  como definidos anteriormente. Existem constantes  $C$ , independentes de  $h_E$  ou  $v$ , porém dependentes do grau polinomial  $k$ , tais que para toda função  $v \in \mathbb{P}_k(E)$*

$$\|v\|_{0,e} \leq C|e|^{\frac{1}{2}}|E|^{-\frac{1}{2}}\|v\|_{0,E}, \quad \forall e \subset \partial E; \quad (2.7)$$

$$\|v\|_{0,e} \leq Ch_E^{-\frac{1}{2}}\|v\|_{0,E}, \quad \forall e \subset \partial E; \quad (2.8)$$

$$\|\nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \leq C|e|^{\frac{1}{2}}|E|^{-\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_{0,E}, \quad \forall e \subset \partial E; \quad (2.9)$$

$$\|v \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \leq Ch_E^{-\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_{0,E}, \quad \forall e \subset \partial E. \quad (2.10)$$

**Observação:** Em [19] pode-se encontrar a expressão exata para  $C$  nas dimensões 1, 2 e 3.

O próximo teorema é bem útil para relacionar normas em espaços  $H^s(\Omega)$  para diferentes  $s$ .

**Teorema 2.4.4** (Desigualdade Inversa). *Seja  $E$  um domínio limitado em  $\mathbb{R}^d$  com diâmetro  $h_E$ . Então, existe uma constante  $C$ , independente*

de  $h_E$  tal que para qualquer função polinomial  $v$  de grau  $k$  definida em  $E$ , temos,

$$\|\nabla^j v\|_{0,E} \leq Ch_E^{-j} \|v\|_{0,E}, \quad \forall 0 \leq j \leq k. \quad (2.11)$$

**Demonstração:** Pode ser encontrada em [5]. ■

**Observação:** O Teorema 2.4.4 anterior pode ser generalizado para funções em  $\mathbb{P}_k(E)$ , com  $E$  em alguma partição. A demonstração é uma replicação do Teorema 2.4.4 em cada elemento  $E$ .

Um dos objetivos desse trabalho é estudar os erros *a priori* das soluções encontradas pelo método de Galerkin descontínuo. Para tanto, usaremos como ferramenta um operador  $R$  conhecido como operador Crouzeix-Raviart. Esse operador aproxima uma função  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega)^2$  no seguinte sentido:

$$\int_e R\mathbf{v} = \int_e \mathbf{v}, \quad \forall e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega. \quad (2.12)$$

A construção desse operador e a demonstração de algumas de suas propriedades, em que  $E$  é um elemento triangular sob coordenadas baricêntricas, pode ser encontrada em [19]. O nosso interesse é numa versão desse operador tal que  $R\mathbf{v}|_E \in \mathbb{P}_k(E)^2$  para todo elemento triangular  $E$ . Esse operador é definido para  $k = 1$ ,  $k = 2$  e  $k = 3$ . Para mais detalhes e outras referências ver [13]. As seguintes propriedades utilizadas em nossas demonstrações são satisfeitas para todo elemento  $E$  triangular:

$$\int_E q \nabla(R\mathbf{v} - \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2, \quad \forall q \in \mathbb{P}_{k-1}(E); \quad (2.13)$$

$$\int_e \mathbf{q} \cdot [[R\mathbf{v}]] = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2, \quad \forall e \in \Gamma_h \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-1}(e)^2; \quad (2.14)$$

$$\int_e \mathbf{q} \cdot R\mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \quad \forall e \in \partial\Omega \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{P}_{k-1}(e)^2; \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - R\mathbf{v}\|_{0,E} + h_E \|\nabla(\mathbf{v} - R\mathbf{v})\|_{0,E} &\leq Ch_E^s |\mathbf{v}|_{H^s(\Delta E)}, \\ \forall s \in [1, k+1], \quad \forall \mathbf{v} \in H^s(\Omega)^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Aqui,  $\Delta E$  é um macro elemento que contém  $E$ .

Outro importante teorema bastante usado nas estimativas de erro é apresentado em seguida.

**Teorema 2.4.5.** *Seja  $E$  um triângulo ou um paralelogramo em dimensão 2, ou um tetraedro ou paralelepípedo em dimensão 3. Seja  $v \in H^s(E)$  para  $s \geq 1$ . Seja  $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ . Então, existe uma constante  $C$  independente de  $h_E$  e  $v$  e uma função  $\tilde{v} \in \mathbb{P}_k(E)$  tal que:*

$$\|v - \tilde{v}\|_{q,E} \leq Ch_E^{\min(k+1,s)-q} |v|_{H^s(E)}, \quad \forall 0 \leq q \leq s.$$

**Demonstração:** Detalhes em [19] e em [20]

■

**Observação:** Este teorema também pode ser usado se  $v$  for vetorial, basta usá-lo em cada componente.

Outras definições que também nos auxiliarão ao longo do trabalho:

**Definição 2.3.** *Seja  $E$  um elemento fixo da malha. Se  $p \in H^s(E)$  então  $\tilde{p} \in \mathbb{P}_k(E)$  denota a  $L^2$ -projeção de  $p$  no espaço  $\mathbb{P}_k(E)$ . Isto é,*

$$\int_E (p - \tilde{p})v = 0, \quad \forall v \in \mathbb{P}_k(E).$$

**Observação:** Conforme afirmado em [19], existe uma constante  $C$ , independente de  $h_E$  de modo que

$$\|p - \tilde{p}\|_{0,E} + h_E \|\nabla(p - \tilde{p})\|_{0,E} \leq Ch_E^{\min(k+1,s)} |p|_{H^s(E)}. \quad (2.17)$$



# Capítulo 3

## O Problema no Caso Geral

Antes de atacarmos o nosso problema em sua formulação específica, gerada a partir da equação de Stokes, faremos uma introdução do problema num contexto mais geral. Discutiremos nessa etapa os principais pontos desse tipo de abordagem, como a formulação fraca e a discussão acerca da existência e unicidade.

### 3.1 Formulação Fraca

Considere o problema de achar  $u$  tal que:

$$Au = b. \tag{3.1}$$

Aqui  $A$  é uma matriz  $d \times d$  e  $b$ , assim como  $u$ , é um vetor de  $\mathbb{R}^d$ .

Se considerarmos  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  como o produto euclidiano de  $\mathbb{R}^d$  podemos afirmar que o problema (3.1) é equivalente a achar  $u \in \mathbb{R}^d$  tal que

$$\langle Au, v \rangle = \langle b, v \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^d. \tag{3.2}$$

De fato, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle = \langle b, v \rangle &\Rightarrow \langle Au, v \rangle - \langle b, v \rangle = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle Au - b, v \rangle = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

e lembrar que  $0$  é o único vetor de  $\mathbb{R}^d$  que é ortogonal a todos os vetores deste espaço.

Em se tratando de equações diferenciais parciais o problema que corresponde ao (3.1) é chamado de formulação forte e o correspondente ao problema (3.2) é chamado de formulação fraca.

Usaremos neste capítulo a sequência de raciocínio, bem como as idéias das demonstrações e definições contidas em [11]. Considere agora o seguinte problema, mais conhecido como problema de *Poisson*.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

Neste caso  $f \in L^2(\Omega)$ . Comparando (3.1) com (3.3) o operador  $-\Delta$  faz o papel da matriz  $A$ . Como  $L^2(\Omega)$  é espaço de Hilbert podemos usar o produto interno desse espaço para escrever

$$\int_{\Omega} -\Delta uv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad (3.4)$$

para toda função  $v$  num determinado espaço. Note que (3.4) é a formulação fraca, assim como (3.2) no exemplo anterior. As funções  $v$  são chamadas funções de teste. Para se ter uma idéia de um espaço apropriado para estas funções usaremos a fórmula de Green (Teorema 1.5.1) para escrever

$$\int_{\Omega} -\Delta uv \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} v(\nabla u \cdot n) \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (3.5)$$

O primeiro aspecto a considerar é o fato da função  $u$  ser 0 em  $\partial\Omega$ , por isso é razoável escolhermos um espaço onde as funções se comportem da mesma forma. Se assim fizermos, o termo anterior que contém a integral sobre a fronteira some. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.6) observamos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \leq \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0.$$

Ou seja, se tomarmos  $\nabla u$  e  $\nabla v$  em  $L^2(\Omega)$ , a formulação fraca (3.5) ficará bem definida. Então é natural escolhermos  $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$  para as funções  $u$  e  $v$ . Poderíamos até pensar no espaço  $(C^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$ , porém o fato deste espaço não ser completo pode nos privar de alguns

resultados sobre espaços de Hilbert, como por exemplo o teorema de Lax-Milgram.

Portanto, podemos reformular o problema (3.3) como: Encontre  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ou ainda, usando o teorema da representação de Riesz (Teorema 3.2.1) para identificar  $f$  com um funcional do espaço  $H^{-1}(\Omega)$  e abusando da notação: Encontre  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = f(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.6)$$

Nessa altura dos estudos, algumas perguntas podem atrapalhar a nossa serenidade. Por exemplo, será que resolver o problema em sua formulação fraca é satisfatório? Como garantir que somente a formulação fraca é suficiente para dizermos que nosso problema está resolvido? Essas perguntas serão respondidas, afirmativamente, quando entrarmos no universo das equações de Stokes. Por hora, nos contentaremos em estudar as formulações fracas num contexto mais geral.

## 3.2 Teorema de Lax-Milgram

Outra preocupação importante ao se analisar um problema de equações diferenciais parciais é sobre a existência e unicidade da solução. O importante teorema que dá o nome a esta seção nos fornece condições para que o problema em sua formulação fraca tenha solução única.

Sejam  $(X, \|\cdot\|_X)$  um espaço de Hilbert e  $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear.

**Definição 3.1** (Continuidade). *Dizemos que a forma bilinear  $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua se, e somente se existe  $M > 0$  tal que:*

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X. \quad (3.7)$$

A Definição 3.1 motiva a definição de uma norma para a forma  $a(\cdot, \cdot)$ :

$$\|a\| = \sup_{0 \neq u, v \in X} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_X \|v\|_X}.$$

Nesse caso,  $\|a\|$  denota a menor constante  $M$  que satisfaz (3.7).

**Definição 3.2** (Coercividade). *Dizemos que a forma bilinear  $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é coerciva se existe  $\alpha > 0$  tal que:*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2, \quad \forall v \in X. \quad (3.8)$$

*O maior  $\alpha$  que satisfaz (3.8) é chamado de constante de coercividade.*

**Lema 3.1** (Ponto Fixo). *Seja  $V$  um espaço de Banach. Considere a aplicação  $T : V \rightarrow V$  tal que, para  $0 \leq M < 1$  fixo*

$$\|Tv_1 - Tv_2\| \leq M \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in V. \quad (3.9)$$

*Então, existe um único  $u \in V$  tal que*

$$u = Tu, \quad (3.10)$$

*ou seja, a contração  $T$  admite um único ponto fixo  $u$ .*

O lema do ponto fixo (Lema 3.1) é essencial na prova do teorema de Lax-Milgram. A demonstração deste resultado, assim como a do teorema de Lax-Milgram, pode ser encontrado em [4].

Também usaremos na demonstração, o teorema da representação de Riesz cuja prova se encontra em [16].

**Teorema 3.2.1** (Teorema da Representação de Riesz). *Todo funcional  $f$  linear e limitado em um espaço de Hilbert  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  pode ser representado em termos do produto interno, a saber*

$$f(x) = \langle x, z \rangle.$$

*Nesse caso  $z$  é unicamente determinado por  $f$  e tem norma  $\|z\| = \|f\|$ .*

**Teorema 3.2.2** (Lax-Milgram). *Seja  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um espaço de Hilbert. Considere a forma bilinear, contínua e coerciva  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  e um funcional  $f \in V'$ . Então, existe um único  $u \in V$  tal que*

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V. \quad (3.11)$$

**Demonstração:** Como a forma  $a(\cdot, \cdot)$  é definida de  $V \times V$  em  $\mathbb{R}$ , se fixarmos uma das entradas, por exemplo  $u \in V$ , podemos definir o seguinte funcional para cada  $u \in V$  que escolhermos.

$$\begin{aligned} A_u : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto A_u(v) = a(u, v). \end{aligned}$$

Já que  $a(\cdot, \cdot)$  é bilinear, podemos concluir facilmente que  $A_u$  também será linear. Veja que  $A_u$  é também limitado e contínuo

$$|A_u(v)| = |a(u, v)| \stackrel{(3.7)}{\leq} C\|u\|_V\|v\|_V. \quad (3.12)$$

Portanto,  $A_u \in V'$ . Agora considere a aplicação

$$\begin{aligned} A : V &\longrightarrow V' \\ u &\longmapsto A(u) = A_u. \end{aligned}$$

Veja que  $A$  é linear e limitado, pois para  $u, w \in V$ , temos

$$\begin{aligned} A(u + \alpha w)(v) &= A_{u+\alpha w}(v) \\ &= a(u + \alpha w, v) \quad (a \text{ é bilinear}) \\ &= a(u, v) + \alpha a(w, v) \\ &= A_u(v) + \alpha A_w(v) \\ &= (A_u + \alpha A_w)(v) \end{aligned}$$

e

$$\|A(u)\|_{V'} = \|A_u\|_{V'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|A_u(v)|}{\|v\|_V} \stackrel{(3.12)}{\leq} C\|u\|_V.$$

Para provarmos o teorema, deveremos encontrar um único  $u \in V$  tal que  $A_u(v) = f(v) \quad \forall v \in V$ . Ou seja, queremos obter uma igualdade de funcionais em  $V'$ , a saber,

$$A_u = f.$$

Agora, pelo teorema da representação de Riesz (Teorema 3.2.1), como  $A_u$  e  $f$  são lineares e limitados, existem únicos  $z_{A_u}$  e  $z_f$  tais que

$$A_u(v) = \langle v, z_{A_u} \rangle \quad \text{e} \quad f(v) = \langle v, z \rangle \quad \forall v \in V.$$

Então, na realidade, já que  $z_{A_u}$  e  $z_f$  estão unicamente determinados, a igualdade que demonstrará o teorema, pode ser escrita como:

$$z_{A_u} = z_f.$$

A fim de obter tal igualdade, defina a aplicação  $T$ , com  $\rho \neq 0$  da seguinte forma.

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto T(v) = v - \rho(z_{A_v} - z_f). \end{aligned}$$

O objetivo é encontrar um  $\rho$  tal que  $T$  seja uma contração. Se isso acontecer, pelo lema do ponto fixo (Lema 3.1), existirá um único  $u \in V$ , ponto fixo de  $T$ , então,

$$\begin{aligned} T(u) = u &\Rightarrow u - \rho(z_{A_u} - z_f) = u \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho(z_{A_u} - z_f) = 0 \Rightarrow z_{A_u} = z_f. \end{aligned}$$

Isso demonstra o teorema desde que encontremos tal  $\rho$ .

Para tanto, considere  $v_1, v_2 \in V$ . Defina  $v := v_1 - v_2$ . Então

$$\begin{aligned} \|T(v_1) - T(v_2)\|^2 &= \|v_1 - \rho(z_{A_{v_1}} - z_f) - v_2 + \rho(z_{A_{v_2}} - z_f)\|^2 \\ &= \|v_1 - v_2 - \rho(z_{A_{v_1}} - z_{A_{v_2}})\|^2 && \text{(A é linear)} \\ &= \|v - \rho(z_{A_v})\|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2\rho\langle z_{A_v}, v \rangle + \rho^2\langle z_{A_v}, z_{A_v} \rangle && \text{(Teorema 3.2.1)} \\ &= \|v\|^2 - 2\rho A_v(v) + \rho^2 A_v(z_{A_v}) && \text{(definição de } A_v) \\ &= \|v\|^2 - 2\rho a(v, v) + \rho^2 a(v, z_{A_v}) && \text{(coercividade } (\alpha) \text{ e continuidade } (C) \text{ de } a) \\ &\leq \|v\|^2 - 2\rho\alpha\|v\|^2 + \rho^2 C\|v\|\|z_{A_v}\| && (A_v \text{ é limitado } (M) \text{ e } \|z_{A_v}\| = \|A_v\|) \\ &\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 CM)\|v\|^2 \\ &= (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 CM)\|v_1 - v_2\|^2 \\ &= K\|v_1 - v_2\|^2. \end{aligned}$$

Queremos que  $0 \leq K < 1$  para que  $T$  seja contração. Portanto precisamos que

$$1 - 2\rho\alpha + \rho^2 CM < 1 \quad \Rightarrow \quad \rho(\rho CM - 2\alpha) < 0,$$

basta, então, escolhermos  $\rho \in (0, 2\alpha/CM)$  para que  $K < 1$ , completando assim a demonstração do teorema.

■

**Observação:** Voltando ao exemplo de Poisson e olhando para o problema (3.6) segue pela desigualdade de Poincaré (1.4) que a forma  $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v$  é coerciva e também contínua. Nesse caso, como o funcional  $f$  do exemplo é também contínuo, aplicamos o teorema de Lax-Milgram (Teorema 3.2.2) para concluir que o problema de Poisson em sua formulação fraca (3.6) possui uma única solução.

De posse da importante ferramenta de Lax-Milgram, estamos prontos para começar a entrar diretamente nas equações de Stokes e aplicar toda essa teoria construída até então. O principal objetivo desse trabalho está relacionado com resultados numéricos, em que as soluções exatas das equações não estão disponíveis, porém precisam ser aproximadas. Nesse processo, toda essa teoria fica de plano de fundo, juntamente com algum método para discretizar o problema.



# Capítulo 4

## O Problema de Stokes e a Condição Inf-Sup

### 4.1 As Equações de Stokes

As equações de Stokes dadas por

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

descrevem o comportamento de um fluido newtoniano em um escoamento, considerando-se partículas infinitesimais do mesmo. No sistema, o vetor  $\mathbf{u}$  representa a velocidade do fluido no espaço e  $p$  representa a pressão. A força exercida sobre o fluido é representada pela função vetorial  $\mathbf{f}$ .

A primeira equação do sistema de Stokes se refere ao balanço do fenômeno. A segunda equação expressa a condição de incompressibilidade do fluido (quando a densidade do fluido tem variação desprezível). A terceira equação fornece dados iniciais do problema através das condições de contorno da velocidade armazenados na função  $\mathbf{g}$ .

O parâmetro  $\mu$  refere-se a viscosidade do fluido. Essa propriedade pode ser definida como a resistência (atrito) que um fluido oferece ao escoamento. Se  $Re$  é o número de Reynolds, podemos relacionar a viscosidade com  $Re$  da seguinte forma:  $\mu = \frac{1}{Re}$ .

## 4.2 Uma Primeira Análise

Seja  $\Omega$  um conjunto aberto, conexo e limitado em  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2$  ou  $3$ ), com fronteira  $\partial\Omega$  regular. Considere o problema de encontrar duas funções  $\mathbf{u}$  e  $p$  que satisfazem (4.1).

sendo que  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$ .

Para simplificar vamos assumir ao longo deste capítulo  $\mu = 1$  e  $\mathbf{g} = 0$ . Uma primeira formulação variacional, mais simples, surge quando multiplicamos (4.1)<sub>1</sub> por uma função  $\mathbf{v} \in \mathbf{V} = \{\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^d : \nabla \cdot \mathbf{w} = 0\}$  e integramos em  $\Omega$ . (Note que o espaço  $\mathbf{V}$  é espaço de Hilbert pois é subespaço fechado de um espaço de Hilbert)

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$$

$$-\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla p \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

$$\int_{\Omega} -\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

$$\int_{\Omega} -\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \quad (\text{Teorema 1.5.1})$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\partial\Omega} (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \partial_i p v_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \quad (\mathbf{v} = 0 \text{ em } \partial\Omega)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \partial_i p v_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \quad (p \in L_0^2(\Omega))$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} p \partial_i v_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \sum_{i=1}^d \partial_i v_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \quad (\mathbf{v} \in \mathbf{V})$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}$$

Ou seja, o problema (4.1) em sua formulação fraca consiste em

achar  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  tal que

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (4.2)$$

Como o espaço  $\mathbf{V}$  força a condição de incompressibilidade, o termo referente à pressão não aparece em (4.2).

Podemos mostrar que a forma bilinear  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$  é coerciva e contínua.

De fato,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_1^2 &= \|\mathbf{v}\|_0^2 + \|\nabla \mathbf{v}\|_0^2 \stackrel{(1.4)}{\leq} \mathcal{C}_{\Omega} \|\nabla \mathbf{v}\|_0^2 + \|\nabla \mathbf{v}\|_0^2 = \\ &= (\mathcal{C}_{\Omega} + 1) \|\nabla \mathbf{v}\|_0^2. \end{aligned}$$

Logo, fazendo  $\alpha := \frac{1}{(\mathcal{C}_{\Omega} + 1)}$  temos

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{v}\|_1^2 &\leq \|\nabla \mathbf{v}\|_0^2 = \sum_{i,j=1}^d \|\partial_i v_j\|_0^2 = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} (\partial_i v_j)^2 = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d (\partial_i v_j)^2 = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Para mostrar a continuidade de  $a(\cdot, \cdot)$  usaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.6). Veja que  $\|\partial_i v_j\|_0 \stackrel{(1.1)}{\leq} \|\mathbf{v}\|_1$  para todo  $1 \leq i, j \leq d$  e para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ . Então

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \right| = \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \partial_i u_j \partial_i v_j \right| \stackrel{(1.6)}{\leq} \\ &\leq \sum_{i,j=1}^d \|\partial_i u_j\|_0 \|\partial_i v_j\|_0 \leq d \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1. \end{aligned}$$

Agora basta usarmos o Teorema 3.2.2 de Lax-Milgram para concluir que o problema (4.2) é bem definido. Estamos diante de um problema agradável do ponto de vista teórico, porém algumas fraquezas aparecem nessa formulação quando direcionamos nossa análise para o ponto de vista prático. A primeira fraqueza consiste no fato dessa

formulação não fornecer uma solução aproximada para a pressão (já que esta foi excluída pelas condições do espaço  $\mathbf{V}$ ). Outro fator que pode ser considerado uma fraqueza é o próprio espaço  $\mathbf{V}$ , que é artificial e acaba sendo inconveniente para se aplicar o método dos elementos finitos.

É mais comum, por isso, utilizar uma outra formulação para se trabalhar com o problema de Stokes. Para obter tal formulação, utilizaremos o mesmo procedimento da anterior só que agora usando funções  $\mathbf{v}$  em  $H_0^1(\Omega)^d$ . Além disso, multiplicaremos por  $q \in L_0^2(\Omega)$  a equação (4.1)<sub>2</sub> e em seguida integraremos em  $\Omega$ . Dessa maneira ficamos com:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\nabla \cdot \mathbf{u})q = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

Assim, nosso problema consiste em achar, para todo  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$  e para todo  $q \in L_0^2(\Omega)$ , um par  $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$  tal que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}, \\ \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Veja que, agora, o termo da pressão aparece na primeira equação de (4.3), o que não ocorria em (4.2) por conta do espaço  $\mathbf{V}$ . Ou seja, essa formulação supera as fraquezas encontradas na anterior. Entretanto perdemos uma importante propriedade da formulação, a coercividade. De fato, vamos denotar por  $X$  o espaço  $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$  equipado com a norma  $\|(\mathbf{v}, q)\|_X^2 = \|\mathbf{v}\|_1^2 + \|q\|_0^2$ . Agora definimos uma forma bilinear da seguinte maneira.

$$\Psi : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Psi((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{u}).$$

Como conseqüência do Teorema 1.3.2, temos que  $H_0^1(\Omega)^d$  é um espaço de Hilbert. Logo, podemos utilizar o teorema de Riesz (Teorema 3.2.1) para definir um funcional  $h$  em  $H_0^1(\Omega)^d$  tal que

$$\begin{aligned} h : H_0^1(\Omega)^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\longmapsto h(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}. \end{aligned}$$

Podemos estender o funcional  $h$  para o funcional  $F$  definido no espaço  $X$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, q) &\longmapsto F(\mathbf{v}, q) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}. \end{aligned}$$

Como o produto interno, num espaço real, é linear na segunda variável e também pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.6) podemos dizer que  $F \in X'$ . Aqui  $X'$  é o espaço dual do espaço  $X$ . Temos que a solução  $(\mathbf{u}, p) \in X$  de (4.3) também satisfaz:

$$\Psi((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = F(\mathbf{v}, q), \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in X.$$

Logo, para garantir a coercividade de  $\Psi$  devemos majorar o termo

$$\Psi((\mathbf{u}, p), (\mathbf{u}, p)) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2,$$

por uma constante  $\alpha$  e pelo termo  $\|(\mathbf{u}, p)\|_X^2$  para todo  $\mathbf{u}$  e  $p$ . Entretanto, esse último termo, diferentemente do primeiro, depende da parcela  $\|p\|_0$  que pode ser tão grande quanto se queira. Ou seja, essa majoração não é possível e por isso a formulação não será coerciva. Isso significa que aquela formulação mais conveniente, do ponto de vista prático, não está nas hipóteses do teorema de Lax-Milgram (Teorema 3.2.2). Ou seja, precisamos de outras condições, para poder decidir quando a nossa formulação conveniente está bem definida. É por isso que daqui por diante caminharemos para definir a condição de inf-sup, que vai nos trazer novas hipóteses para afirmarmos quando nosso problema é bem definido.

### 4.3 Condição Inf-Sup

Apesar do nosso interesse neste trabalho estar direcionado para a equação de Stokes, faremos nesta seção uma abordagem mais geral para a condição de inf-sup.

Sejam  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$  e  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$  dois espaços de Hilbert reais. Vamos denotar os espaços duais de  $X$  e de  $M$  por  $X'$  e  $M'$ . Agora, considere duas formas bilineares e contínuas  $a(\cdot, \cdot)$  e  $b(\cdot, \cdot)$  tais que:

$$\begin{aligned} a : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} & b : X \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v) & (v, q) &\longmapsto b(v, q). \end{aligned}$$

Para cada forma definida anteriormente, vamos associar um operador como segue.

$$\begin{aligned} A : X &\longrightarrow X' \\ u &\longmapsto A(u) = A_u : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto A_u(v) = a(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B : X &\longrightarrow M' \\ v &\longmapsto B(v) = B_v : M \longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto B_v(q) = b(v, q). \end{aligned}$$

Todo espaço de Hilbert é reflexivo. Portanto, podemos definir  $B^T$ , o dual do operador  $B$  como

$$\begin{aligned} B^T : (M')' = M &\longrightarrow X' \\ q &\longmapsto B^T(q) = B_q^T : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto B_q^T(v) = b(v, q). \end{aligned}$$

$$\text{Veja que } B_v(q) = b(v, q) = B_q^T(v), \quad \forall (v, q) \in X \times M.$$

**Observação:** As aplicações definidas acima:  $A$ ,  $B$ ,  $B^T$ ,  $a$  e  $b$  serão usadas nas hipóteses dos teoremas apresentados no restante do capítulo. Considere, nesse caso, tais formas como definidas anteriormente.

Sejam  $f \in X'$  e  $g \in M'$ . Considere o problema de achar  $(u, p) \in X \times M$  tal que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = f(v), \\ b(u, q) = g(q), \end{cases} \quad (4.4)$$

$\forall (v, q) \in X \times M$ .

Como  $a(u, v) = A_u(v)$  e  $b(v, p) = B_p^T(v)$  podemos observar que a primeira linha do problema é uma igualdade de funcionais aplicados em  $v \in X$ . Da mesma maneira, como  $b(u, q) = B_u(q)$  podemos reescrever o problema como: achar  $(u, p) \in X \times M$  tal que

$$\begin{cases} A_u + B_p^T = f, \\ B_u = g. \end{cases} \quad (4.5)$$

Ora, dado o problema (4.5), procuramos condições necessárias e suficientes para afirmar que este possui uma única solução. Para

enunciar o primeiro resultado a respeito disso precisaremos de algumas preparações.

Denotaremos por  $V$  o núcleo do operador  $B$ , ou seja,

$$\begin{aligned} V = Ker B &= \{u \in X, B_u = 0\} = \\ &= \{u \in X, b(u, q) = 0, \forall q \in M\}. \end{aligned}$$

Veja que  $V$  é um subespaço fechado. Para verificar basta considerarmos  $v$  em  $\bar{V}$ . Por definição, existe uma sequência em  $V$  que converge para  $v$ . Usando que os termos  $s_n$  da sequência satisfazem  $b(s_n, q) = 0, \forall q \in M$  com  $b(\cdot, \cdot)$  contínuo, mostra-se que  $v$  está, também, em  $V$ .

Denotaremos por  $V^\circ$  o conjunto polar de  $V$ ,

$$V^\circ = (Ker B)^\circ = \{h \in X', h(v) = 0, \forall v \in V\}.$$

Ou seja,  $V^\circ$  é o conjunto dos funcionais lineares definidos em  $X$  que se anulam em todo o conjunto  $V \subset X$ . O teorema da imagem fechada enunciado a seguir não será demonstrado. Entretanto será de grande utilidade na demonstração dos teoremas a seguir (ver [24] para prova e maiores detalhes sobre o teorema).

**Teorema 4.3.1** (Teorema da imagem fechada). *Seja  $B$  como definido anteriormente. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *Im  $B$  é um conjunto fechado;*
- (ii) *Im  $B^T$  é um conjunto fechado;*
- (iii)  *$(Ker B)^\circ = Im B^T$ ;*
- (iv)  *$(Ker B^T)^\circ = Im B$ .*

A restrição de  $h \in X'$  para o espaço  $V'$  será denotada por  $\Pi$ , então:

$$\begin{aligned} \Pi &: X' \longrightarrow V' \\ h &\longmapsto h|_V. \end{aligned}$$

Observe que como  $\Pi h$  é restrição temos que  $\|\Pi h\|_{V'} \leq \|h\|_{X'}$ . E também, por mera consequência da definição, temos  $V^\circ = Ker \Pi$ . A seguir o primeiro resultado que fornece hipóteses sobre a solução do problema (4.5).

**Teorema 4.3.2.** *Sejam  $a(\cdot, \cdot)$  e  $b(\cdot, \cdot)$  formas bilineares fixadas, tais quais aquelas consideradas no início da seção. O problema (4.5) admite uma única solução para cada  $f$  e  $g$ , se e somente se*

- (i)  $\Pi \circ A$  é um isomorfismo de  $V = \text{Ker} B$  para  $V' = (\text{Ker} B)'$ ;  
(ii) O operador  $B$  é uma sobrejeção de  $X$  para  $M'$ .

**Demonstração:**  $\Rightarrow$  Assuma que (4.5) tenha uma única solução. Neste caso, temos que mostrar (i) e (ii). Começemos por (ii). Dado  $h \in M'$ . Queremos concluir que  $h$  é a imagem, por  $B$ , de algum  $u \in X$ . Como  $h \in M'$  e existe um funcional nulo em  $X'$ , podemos afirmar, de acordo com a hipótese, que o problema (4.5) tem uma única solução considerando  $f = 0$  e  $g = h$ . Logo a solução  $u \in X$  é tal que  $Bu = g = h$  e portanto, o operador  $B : X \rightarrow M'$  é sobrejetivo.

Mostrar (i) significa concluir que  $\Pi \circ A : V \rightarrow V'$  é tanto sobrejetivo quanto injetivo. Para mostrar a sobrejetividade, seguindo a idéia do item anterior, escolhamos  $f \in V'$  qualquer. De acordo com o teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.5.4) existe um funcional  $\tilde{f} \in X'$  tal que  $\tilde{f}|_V = f$ . Isto é o mesmo que dizer que  $\Pi\tilde{f} = f$ . Ora, se existe um funcional nulo em  $M'$ , podemos afirmar, conforme a hipótese, que existe um único  $(u, p) \in X \times M$  tal que:

$$\begin{cases} A_u + B_p^T = \tilde{f}, \\ B_u = 0. \end{cases}$$

Então se  $v \in V$  temos que

$$A_u(v) + B_p^T(v) = \tilde{f}(v) \stackrel{v \in V}{=} f(v).$$

Além disso temos que  $B_p^T(v) = b(v, p) = B_v(p)$ . Mas  $v \in V = \text{Ker} B$ .

Logo

$B_p^T(v) = 0$ . Ou seja,

$$A_u(v) = f(v), \quad \forall v \in V.$$

Portanto,  $(\Pi \circ A)(u) = f$  e  $\Pi \circ A$  é sobrejetiva.

Falta ainda mostrar a injetividade. Para tanto, mostraremos que o núcleo da aplicação  $\Pi \circ A$  contém somente o elemento nulo. Seja  $u \in V$  tal que  $\Pi A_u = 0$ . Então,

$$A_u(v) = 0, \quad \forall v \in V \quad \Rightarrow \quad A_u \in V^\circ = (\text{Ker} B)^\circ. \quad (4.6)$$

Já que  $B$  é uma sobrejeção temos que  $\text{Im } B = M'$ , que é claramente um conjunto fechado. Logo, como consequência do Teorema 4.3.1 e de (4.6) temos que  $A_u \in \text{Im } B^T$ . Segue daí que existe um  $p \in M$  tal que

$B_p^T = -A_u \Rightarrow A_u + B_p^T = 0$ . Além disso, como escolhermos  $u \in V$  temos que  $Bu = 0$ . Logo, encontramos um par  $(u, p)$  tal que

$$\begin{cases} A_u + B_p^T = 0, \\ B_u = 0. \end{cases}$$

Mas a hipótese garante que este problema tem uma única solução (nesse caso deve ser a homogênea já que os funcionais do lado direito são nulos). Portanto  $(u, p) = (0, 0)$  e  $u = 0$ . Assim  $\Pi \circ A$  é, de fato, uma injeção, provando a primeira parte do teorema.

◀ Suponha agora que as condições (i) e (ii) são satisfeitas. Devemos concluir, a partir daí, que o problema (4.5) tem uma única solução. Primeiramente mostraremos a existência da solução. Dado o funcional  $g \in M'$ , podemos encontrar  $u_g \in X$  tal que  $B_{u_g} = g$ . Isso porque a condição (ii) nos garante que  $B$  é sobrejetiva. Como  $f$  e  $A_{u_g}$  são funcionais de  $X'$ , temos que  $\Pi f - \Pi A_{u_g}$  está em  $V'$ . Já sabemos que (i) é verdadeira. Logo, podemos afirmar que existe  $u_0 \in V$  tal que

$$\Pi A_{u_0} = \Pi f - \Pi A_{u_g}.$$

Então, definindo  $u := u_0 + u_g$  podemos escrever

$$\begin{aligned} \Pi A_u = \Pi f &\Rightarrow \Pi(f - A_u) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (f - A_u)(v) = 0, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Segue daí que  $f - A_u \in (Ker B)^\circ$ . Veja que  $Im B = M'$ , pois  $B$  é sobrejetivo. Essa última igualdade nos permite afirmar que o conjunto  $Im B$  é fechado para então concluirmos, usando o Teorema 4.3.1, que  $(Ker B)^\circ = Im B^T$ . Ou seja,  $f - A_u \in Im B^T$ . Isto significa que existe  $p \in M$  tal que  $B_p^T = f - A_u$  ou, escrevendo de uma maneira mais simpática,  $A_u + B_p^T = f$ .

Veja agora que  $B_u = g$ , pois como  $u_0 \in V = Ker B$  e  $B_{u_g} = g$  temos que  $B_u = B_{u_0+u_g} = B_{u_0} + B_{u_g} = 0 + B_{u_g} = g$ . Então achamos  $u \in X$  e  $p \in M$  tais que

$$\begin{cases} A_u + B_p^T = f, \\ B_u = g, \end{cases}$$

o que garante a existência de uma solução para (4.5).

Para mostrar unicidade da solução, mostraremos que o problema homogêneo associado a (4.5) admite somente a solução trivial. Assim considere  $(u, p)$  tal que

$$\begin{cases} A_u + B_p^T = 0, \\ B_u = 0, \end{cases}$$

Da primeira linha do problema acima concluímos que  $\Pi A_u + \Pi B_p^T = 0$  e daí, assim como fizemos na demonstração da primeira parte deste teorema, ficamos com  $\Pi A_u = 0$ . Ora,  $\Pi \circ A$  é injetiva pelo item (i) e acabamos de concluir que  $u \in \text{Ker}(\Pi \circ A)$ . Então,  $u = 0$ .

Para concluirmos que  $p = 0$  usaremos o Teorema 4.3.1. Como  $B$  é sobrejetora,  $\text{Im } B = M'$  é um conjunto fechado. Pelo Teorema 4.3.1 temos que  $(\text{Ker } B^T)^\circ = \text{Im } B = M'$ . Isso significa, pela definição do conjunto  $(\text{Ker } B^T)^\circ$ , que

$$v \in \text{Ker } B^T \quad \Rightarrow \quad h(v) = 0, \quad \forall h \in M',$$

ou seja,  $v = 0$  (consequência do teorema de Riesz, Teorema 3.2.1) e por isso  $\text{Ker } B^T = \{0\}$ . Portanto  $B^T$  é injetivo. Como já sabemos que  $u = 0$  podemos afirmar que  $A_u + B_p^T = 0$  na verdade significa  $B_p^T = 0$ . Porém, como acabamos de mostrar,  $B^T$  é injetiva. Assim  $p = 0$ , pois está em  $\text{Ker } B^T$ , concluindo a demonstração. ■

Conseguimos as condições que estávamos procurando. Ou seja, para constatar quando um problema é bem definido, basta concluir que este satisfaz as condições (i) e (ii) do teorema anterior. Agora, estudaremos um pouco melhor essas condições a fim de torná-las mais práticas de serem verificadas.

De fato, é suficiente, para que a condição (i) do Teorema 4.3.2 seja satisfeita, mostrar que a forma  $a(\cdot, \cdot)$  é coerciva em  $V = \text{Ker } B$ , ou seja, mostrar que existe  $\alpha > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2, \quad \forall v \in V.$$

Ora, se isso acontece então a forma  $a(\cdot, \cdot)$  é tanto coerciva quanto contínua (por hipótese) em  $V \times V$ . Usando o teorema de Lax-Milgram (Teorema 3.2.2), podemos afirmar que o problema de achar  $u \in V$  tal que  $a(u, v) = f(v)$ ,  $\forall v \in V$ , sendo que  $f \in V'$ , possui uma única solução. Isso é o mesmo que dizer que o problema de achar  $u \in V$  tal que  $A_u = f$ , sendo que  $f \in V'$ , admite uma única solução. E por isso,  $A$  é injetiva e sobrejetiva em  $V$  o que garante a condição (i). Veja que se por acaso,  $a(\cdot, \cdot)$  for coerciva no espaço  $X$  todo, a condição já fica satisfeita. Em casos onde a coercividade não ocorre em  $X$ , deve-se mostrá-la em  $V$  para usar o Teorema 4.3.2.

Para se substituir a condição (ii) do Teorema 4.3.2 um pouco mais de trabalho se faz necessário, porém a recompensa justifica o esforço.

**Definição 4.1.** *O espaço ortogonal a  $V \subseteq X$ , em que  $X$  é munido de um produto interno, é definido e denotado como*

$$V^\perp = \{v \in X; \langle v, u \rangle_X = 0, \quad \forall u \in V\}.$$

A definição acima é bem conhecida, porém foi formalizada para mostrar o seguinte resultado.

**Lema 4.1.** *Os espaços  $V^\circ$  e  $V^\perp$  podem ser identificados por um isomorfismo que preserva a norma.*

**Demonstração:** Já sabemos que se  $f \in X'$ , podemos associar, segundo o teorema de Riesz (Teorema 3.2.1), um  $z_f \in X$  tal que  $f(x) = \langle z_f, x \rangle_X \quad \forall x \in X$ . Seja  $\zeta : X' \rightarrow X$  o operador que associa  $f$  à  $z_f$ . Do próprio teorema de Riesz segue que  $\zeta$  é isomorfismo de  $X'$  em  $X$ . Além disso  $\|f\|_{X'} = \|z_f\|_X$ . Porém queremos identificar  $V^\circ$  com  $V^\perp$ , então devemos mostrar que  $\text{Im } V^\circ$  por  $\zeta$  é  $V^\perp$ .

De fato, seja  $f \in V^\circ$  então por definição

$$f(v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Seja agora,  $z_f = \zeta(f)$  então, pela definição do operador  $\zeta$  temos,

$$f(v) = \langle z_f, v \rangle_X = 0 \quad \forall v \in V \quad \Rightarrow \quad z_f \in V^\perp.$$

O raciocínio é análogo para mostrar, primeiramente, que  $\text{Im } V^\perp$  por  $\zeta^{-1}$  é  $V^\circ$  e concluir a demonstração. ■

A próxima definição, que nomeia a seção, é peça fundamental no estudo das formulações fracas do tipo (4.4).

**Definição 4.2** (Condição inf-sup). *Seja  $b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear contínua. Dizemos que a condição inf-sup é satisfeita se existir  $\beta > 0$  tal que,*

$$\inf_{0 \neq q \in M} \sup_{0 \neq v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta. \quad (4.7)$$

A partir de agora, na notação de *inf* ou *sup*, não vamos mais escrever que  $v$  ou que  $q$  são diferentes de zero a fim de simplificar a escrita e a visualização das fórmulas.

A definição acima pode ser reescrita para facilitar a sua utilidade.

$$\exists \beta > 0, \quad \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_M, \quad \forall q \in M, \quad (4.8)$$

ou ainda

$$\exists \beta > 0, \|B_q^T\|_{X'} \geq \beta \|q\|_M, \quad \forall q \in M. \quad (4.9)$$

Finalmente, o teorema que de fato vai fazer a substituição da condição (ii) do Teorema 4.3.2 pela condição inf-sup:

**Teorema 4.3.3.** *Seja  $\beta > 0$ , então as afirmações abaixo são equivalentes.*

(i) *A condição (4.7) é satisfeita com constante  $\beta$ ;*

(ii)  *$B^T$  é um isomorfismo de  $M$  para  $V^\circ$  e*

$$\|B_q^T\|_{X'} \geq \beta \|q\|_M, \quad \forall q \in M;$$

(iii)  *$B$  é um isomorfismo de  $V^\perp$  para  $M'$  e*

$$\|B_u\|_{M'} \geq \beta \|u\|_X, \quad \forall u \in V^\perp.$$

**Demonstração:**  $(i) \Rightarrow (ii)$  Nesse caso, a condição inf-sup é satisfeita, então, usando a condição na forma (4.9), temos que

$$\exists \beta > 0, \|B_q^T\|_{X'} \geq \beta \|q\|_M, \quad \forall q \in M.$$

Veja que se  $q \in \text{Ker} B^T$  temos que  $B_q^T = 0$ . Portanto, pela condição acima,  $\beta \|q\|_M \leq 0$  com  $\beta > 0$ , ou seja  $q = 0$ . Acabamos de mostrar que  $B^T$  é um operador injetivo. Podemos considerá-lo bijetivo de  $M$  em  $\text{Im } B^T$  e, pelo Teorema 1.5.5, concluímos que  $(B^T)^{-1}$  também é contínua.

Veja que se  $f \in \text{Im } B^T$  então  $\exists q \in M$  tal que  $B_q^T = f$ . Assim, usando a inversa  $(B^T)^{-1}$  e a função  $f$ , podemos reescrever a condição inf-sup como

$$\|(B^T)^{-1}f\|_M \leq \frac{1}{\beta} \|f\|_{X'}.$$

Note que a aplicação  $(B^T)^{-1} : \text{Im } B^T \rightarrow M$  é contínua e bijetiva e  $M$  é um conjunto fechado. Como a imagem inversa de um conjunto fechado por uma aplicação contínua é também um fechado, podemos afirmar que  $\text{Im } B^T$  é um conjunto fechado. Pelo teorema da imagem fechada (Teorema 4.3.1), já que  $\text{Im } B^T$  é um conjunto fechado, temos que  $\text{Im } B^T = (\text{Ker } B)^\circ = V^\circ$ . Então a aplicação  $B^T$  é um isomorfismo de  $M$  em  $V^\circ$ .

$(ii) \Rightarrow (i)$  Ora, se existe  $\beta > 0$  que satisfaz a condição  $(ii)$  deste teorema, a condição inf-sup é automaticamente satisfeita. Veja (4.9).

$(ii) \Rightarrow (iii)$  Seja  $v \in V^\perp = (Ker B)^\perp$  e considere  $B_v = 0$ . Ora, se  $v \neq 0$  então  $v$  estaria em  $V = Ker B$  o que é uma contradição, pois  $v \in V^\perp$  e  $VeV^\perp$  são disjuntos, a menos do elemento nulo. Logo,  $v = 0$ . Então, o operador  $B$  é injetivo quando restrito a  $V^\perp$ .

Se  $B^T$  é um isomorfismo de  $M$  em  $V^\circ$  então  $Im B^T$  é um conjunto fechado já que  $M$  é fechado e  $(B^T)^{-1}$  é contínua. Nesse caso, podemos usar novamente o teorema da imagem fechada e concluir que  $Im B = (Ker B^T)^\circ = (\{0\})^\circ = M'$ .

Agora, pelo Teorema 1.5.5 temos que  $B^{-1}$  é contínua, e também, existe um  $\frac{1}{\beta} > 0$  tal que,

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\beta} \|B_u\|_{M'} \quad \forall u \in V^\perp,$$

ou ainda,

$$\|B_u\|_{M'} \geq \beta \|u\|_X, \quad \forall u \in V^\perp.$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$  A demonstração deste item é análoga a anterior.

■

A rigor, deveríamos mostrar que todos os  $\beta$  da demonstração anterior são, de fato, o mesmo  $\beta$ . Isso segue da dualidade dos espaços  $M$  e  $M'$  e dos espaços  $V^\circ$  e  $V^\perp$  (Lema 4.1).

O que nos interessa no momento é concluir que a condição  $(iii)$  do Teorema 4.3.3 implica na condição  $(ii)$  do Teorema 4.3.2. Ora, se  $B$  é isomorfismo de  $V^\perp$  em  $M'$  então  $Im B = M'$ . Logo, se acrescentarmos ao domínio de  $B$  o conjunto  $V$  (lembre que  $V = Ker B$  então  $B_v = 0$  se  $v \in V$ ), poderemos afirmar que  $B$  é uma sobrejeção de  $X = V \oplus V^\perp$  em  $M'$ , já que  $Im B$  continua sendo  $M'$ .

Portanto, acabamos de concluir, pelo Teorema 4.3.3 que se a condição inf-sup é satisfeita então,  $B : X \rightarrow M'$  é uma sobrejeção. Isso é o suficiente para enunciar o seguinte teorema que resume o resultado de todo o nosso estudo.

**Teorema 4.3.4.** *O problema (4.5) admite uma única solução, se e somente se*

(i)  $\Pi \circ A$  é um isomorfismo de  $V = Ker B$  para  $V' = (Ker B)'$ ;

(ii) A condição inf-sup, (4.7), é satisfeita.

**Demonstração:** Esse teorema é o resultado da combinação do Teorema 4.3.2 com o Teorema 4.3.3.



Ou ainda, como comentamos anteriormente e para mais fácil aplicação:

**Teorema 4.3.5.** *O problema (4.5) admite uma única solução, se e somente se*

- (i)  $a(\cdot, \cdot)$  é uma forma bilinear contínua e coerciva em  $V = \text{Ker}B$ ;
- (ii) A condição inf-sup, (4.7), é satisfeita.

# Capítulo 5

## Método de Galerkin Descontínuo

Neste capítulo vamos apresentar o método de elementos finitos de Galerkin descontínuo para construir uma solução numérica para as equações de Stokes (4.1), considerando por simplicidade,  $\mathbf{g} = 0$ . Como a função  $p$  é unicamente determinada a menos de uma constante, vamos assumir que  $\int_{\Omega} p = 0$ . Aqui usaremos uma sequência de idéias e resultados bem similar aos apresentados em [19].

Neste capítulo, consideraremos  $\Omega$  um conjunto aberto, poligonal, conexo e limitado em  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2$  ou  $3$ ), com fronteira  $\partial\Omega$  regular.

### 5.1 Existência e Unicidade da forma fraca

Como fizemos na equação de Poisson no Capítulo 3, podemos determinar a formulação fraca para o problema de Stokes. Assim ficamos com o problema de encontrar um par  $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$  que satisfaz (4.3) com  $d = 2$ .

O primeiro passo é mostrar que o problema de Stokes, em sua formulação fraca, possui única solução. Para tanto, precisamos mostrar a condição Inf-Sup em  $H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$ . Tal demonstração segue como resultado do seguinte teorema.

**Teorema 5.1.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  limitado, conexo e aberto. Seja  $\Gamma = \partial\Omega$  fronteira de Lipschitz (Definição 1.2). Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Seja  $\nabla : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  uma aplicação que leva  $q \in L^2(\Omega)$  em um funcional  $\langle q, \text{div} \cdot \rangle_\Omega$ . Então, a imagem dessa aplicação é um conjunto fechado em  $H^{-1}(\Omega)$ .

(ii) Existe uma constante  $C$  tal que:

$$\|q\|_0 \leq C \|q \text{div}(\cdot)\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \quad (5.1)$$

**Demonstração:** A demonstração desse teorema é bem técnica e será omitida. Uma referência para a demonstração pode ser encontrada em [21].

■

**Teorema 5.1.2.** A condição Inf-Sup é satisfeita nos espaço  $H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$ , considerando  $b(\mathbf{v}, q) = \langle q, \text{div} \mathbf{v} \rangle_\Omega$ .

**Demonstração:** Para mostrar a condição Inf-Sup (4.8), considerando  $X = H_0^1(\Omega)$  e  $M = L_0^2(\Omega)$ , devemos mostrar que:

$$\exists \beta > 0, \quad \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \beta \|q\|_0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega)$$

Note que por (5.1) temos que,  $\forall q \in L_0^2(\Omega)$ :

$$\|q\|_0 \leq C \|q \text{div}(\cdot)\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

Mas, pela definição de norma em  $H^{-1}(\Omega)$  ( ver (1.5)) temos que

$$\begin{aligned} \|q\|_0 &\leq C \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle q, \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle_\Omega}{\|\mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega)}} = \\ &= C \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega)}}, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Logo, a condição Inf-Sup é satisfeita para o espaço  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

■

Agora mostraremos existência e unicidade para a formulação fraca (4.3). Definimos o espaço  $V$  como sendo

$$V = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2 : \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, q \rangle_\Omega = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega)\}.$$

Aqui  $\langle \nabla \cdot \mathbf{v}, q \rangle_\Omega = \int_\Omega q \nabla \cdot \mathbf{v}$ . Assim, podemos reescrever a primeira linha

(4.3) considerando  $\mathbf{v} \in V$ . Então para todo  $\mathbf{v} \in V$  temos

$$\mu \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle_\Omega + 0 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega. \quad (5.2)$$

Ora, a forma bilinear que leva  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  em  $\mu \langle \nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w} \rangle_\Omega$  é contínua e coerciva (a coercividade vem direto da desigualdade de Poincaré (1.4)), assim como o funcional que leva  $\mathbf{v}$  em  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega$  é contínuo. Sobre tais afirmações podemos usar o teorema de Lax-Milgram (Teorema 3.2.2) e concluir que existe uma única  $\mathbf{u} \in V$  que satisfaz (5.2).

Agora definiremos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \Phi : H_0^1(\Omega)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\longmapsto \mu \langle \nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{u} \rangle_\Omega - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega. \end{aligned}$$

Veja que como  $\mathbf{u}$  satisfaz (5.2)  $\forall \mathbf{v} \in V$  temos que  $\Phi$  é nula, portanto  $\Phi \in V^\circ$ . Combinando Inf-Sup em  $H_0^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)$  (Teorema 5.1.2) com a condição (ii) do Teorema 4.3.3 podemos afirmar que a aplicação  $\langle \nabla \cdot \mathbf{v}, \cdot \rangle_\Omega$  é um isomorfismo em  $V^\circ$ , isto é, existe uma única  $p \in L_0^2(\Omega)$ , a menos de uma constante, tal que para toda  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$  temos  $\langle \nabla \cdot \mathbf{v}, p \rangle_\Omega = \Phi(\mathbf{v})$ . Isso equivale a dizer que existe uma única  $p$  tal que

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, p \rangle_\Omega &= \mu \langle \nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{u} \rangle_\Omega - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu \langle \nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{u} \rangle_\Omega - \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, p \rangle_\Omega = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega. \end{aligned}$$

Isto é, o problema de Stokes na formulação (4.3), possui uma única solução .

**Observação:** Já sabemos que a forma  $\mu \langle \nabla \cdot, \nabla \cdot \rangle_\Omega$  é coerciva e contínua. Além disso, mostramos no início da seção o Teorema 5.1.2. Dessa maneira, a existência e unicidade do problema (4.3) pode ser rapidamente mostrada como resultado direto do Teorema 4.3.5.

## 5.2 Aplicação ao Problema de Stokes

A partir de agora vamos trabalhar para que o método de Galerkin descontínuo seja construído e aplicado.

Seja  $\mathcal{T}_h$  uma partição conforme e regular (Definição 2.1 e Definição 2.2 respectivamente). Para  $k \geq 1$  definiremos os espaços parti-

cionados para a velocidade e para a pressão:

$$X = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2 : \forall E \in \mathcal{T}_h \mathbf{v}|_E \in W^{2, \frac{4}{3}}(E)^2\}$$

$$M = \{q \in L_0^2(\Omega) : \forall E \in \mathcal{T}_h q|_E \in W^{1, \frac{4}{3}}(E)\}$$

Aqui os espaços  $W^{2, \frac{4}{3}}(E)^2$  e  $W^{1, \frac{4}{3}}(E)^2$  contém uma exigência bem precisa para a suavidade (ver [13] p. 55). É comum se exigir um pouco mais das funções para não precisar lidar com esses espaços do tipo  $W$ .

Agora definiremos as formas bilineares geradas pela discretização, via Galerkin descontínuo, dos termos  $-\Delta \mathbf{u}$  e  $\nabla p$ .

**Definição 5.1.** A forma bilinear  $a_\epsilon(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$a_\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket -$$

$$- \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{ \nabla \mathbf{u} \} \} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{ \nabla \mathbf{v} \} \} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket.$$

**Definição 5.2.** A forma bilinear  $b_\epsilon(\cdot, \cdot) : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$b_\epsilon(\mathbf{v}, q) = - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E q \nabla \cdot \mathbf{v} + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{ q \} \} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \mathbf{n}_e.$$

O parâmetro  $\epsilon$  é introduzido de modo que ao mudá-lo para  $\epsilon = -1$ ,  $\epsilon = 0$  e  $\epsilon = 1$  estaremos lidando com classes diferentes do método de Galerkin descontínuo. A saber, respectivamente, SIPG (Symmetric Interior Penalty Galerkin), IIPG (Incomplete Interior Penalty Galerkin) e NIPG (Nonsymmetric Interior Penalty Galerkin).

O parâmetro  $\sigma_e$  denota a penalidade na interface  $e$ . Quanto maior  $\sigma_e$  menor o salto em  $e$ , ou seja, esse parâmetro força a continuidade da função na interface a que se refere. Para simplificar, usaremos o mesmo  $\sigma_e$  para todas as interfaces.

**Observação:** As Definições 5.1 e 5.2 estão em [19], outra maneira de definir tais formas, encontrada em [15], é descrita no Apêndice A e utiliza uma forma diferente de se definir os saltos.

Após todas essas definições, podemos formular fracamente o problema nos espaços particionados. Achar  $(\mathbf{U}, P) \in X \times M$  tal que

$$\mu a_\epsilon(\mathbf{U}, \mathbf{v}) + b_\epsilon(\mathbf{v}, P) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in X \quad (5.3)$$

$$b_\epsilon(\mathbf{U}, q) = 0 \quad \forall q \in M \quad (5.4)$$

Em um primeiro momento, a definição das formas  $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$  e  $b_\epsilon(\cdot, \cdot)$  podem parecer mágicas ou misteriosas. O Próximo teorema, além de mostrar que o método é consistente, mostra de onde, de fato, vem a idéia dessas formas.

**Teorema 5.2.1.** *Seja  $\mathbf{f} \in L^{\frac{4}{3}}(\Omega)^2$ , em que  $\Omega$  é um domínio poligonal com fronteira de Lipschitz. Se  $(\mathbf{u}, p)$  é solução de (4.3) então  $(\mathbf{u}, p)$  satisfaz (5.3) e (5.4). A recíproca também é verdadeira.*

**Demonstração:**  $\Rightarrow$  A escolha de  $\mathbf{f} \in L^{\frac{4}{3}}(\Omega)^2$  nos garante, segundo Grisvard em [14], que  $\mathbf{u} \in W^{2, \frac{4}{3}}(\Omega)^2$  e que  $p \in W^{1, \frac{4}{3}}(\Omega)$ . Com essa suavidade podemos garantir que a formulação (4.3) é consistente com o problema (4.1). Além disso, ainda segundo Grisvard, o par  $(\mathbf{u}, p)$  possui dependência contínua sobre  $\|\mathbf{f}\|_{L^{\frac{4}{3}}(\Omega)^2}$  e também, o traço de cada componente de  $\nabla \mathbf{u}$  sobre uma face  $e$  é bem definido e está em  $L^2(e)$ .

Dito isso, assumamos que  $(\mathbf{u}, p)$  seja solução de (4.3). Então,  $\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Além disso, como  $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2$  temos que  $[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}_e = 0$  para cada  $e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega$ . Logo,

$$b_\epsilon(\mathbf{u}, q) = - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E q \nabla \cdot \mathbf{u} + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{q\} [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}_e = 0, \quad \forall q \in M$$

ou seja, a igualdade (5.4) é válida para todo  $q \in M$ .

Continuando a demonstração, olharemos para a equação (4.1)<sub>1</sub> onde  $\mathbf{v}$  é uma função de  $X$ :

$$\begin{aligned} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \\ (-\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \\ \int_{\Omega} (-\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p) \cdot \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Note que, como  $\mathbf{v} \in W^{2, \frac{4}{3}}(E)^2$ ,  $\forall E \in \mathcal{T}_h$ , segue que  $\mathbf{v} \in L_\infty(E)$ ,  $\forall E \in \mathcal{T}_h$ . Em particular, podemos afirmar que  $\mathbf{v} \in L_4(E)$ ,  $\forall E \in \mathcal{T}_h$ , logo, usando a desigualdade de Hölder, o lado direito de 5.5 está bem definido.

Agora, desenvolveremos apenas o lado esquerdo de (5.5).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p) \cdot \mathbf{v} &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \mu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla p \cdot \mathbf{v} = \\ & \quad \text{(Teorema 1.5.1)} \\ &= \mu \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \left( \int_E \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\partial E} (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{v} \right) - \\ & \quad - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \left( \int_E p \nabla \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial E} p \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{v} \right) := T. \end{aligned}$$

Note agora que tanto  $p$  quanto  $\nabla \mathbf{u}$  são funções contínuas em todo  $e$ . Logo,  $p|_e = \{\{p\}\}|_e$  e  $\nabla \mathbf{u}|_e = \{\{\nabla \mathbf{u}\}\}|_e$ . Antes de continuar, perceba que se a fronteira de cada elemento é somada uma vez, a interface  $e$  aparece duas vezes, daí o surgimento do salto de  $v$ .

$$\begin{aligned} T &= \mu \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E p \nabla \cdot \mathbf{v} - \\ & \quad - \mu \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \int_e \{\{\nabla \mathbf{u}\}\} \mathbf{n}_e \cdot [\mathbf{v}] - \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \int_e \{\{p\}\} [\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n}_e. \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $[\mathbf{u}] = 0$  e  $\mathbf{u} = 0$  em  $\partial \Omega$  temos que:

$$\sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e [\mathbf{u}] \cdot [\mathbf{v}] = \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \int_e \{\{\nabla \mathbf{u}\}\} \mathbf{n}_e \cdot [\mathbf{u}] = 0,$$

ou seja, a expressão  $a_\epsilon(\mathbf{u}, v) + b_\epsilon(\mathbf{v}, p)$  equivale a  $T$ . Portanto se substituirmos  $T$  em (5.5) teremos exatamente (5.3) o que concluí esta etapa da demonstração.

$\boxed{\Leftarrow}$  Para mostrar a recíproca, devemos assumir que  $(\mathbf{u}, p)$  é solução de (5.3) e (5.4). A idéia é aproveitarmos da condição que as igualdades valem, respectivamente, para toda  $\mathbf{v}$  em  $X$  e toda  $q$  em  $M$ . Dessa maneira tiraremos conclusões interessantes a partir de  $\mathbf{v}$  e  $q$  extremamente particulares.

Primeiramente vamos tomar um elemento qualquer de  $\mathcal{T}_h$  e escolher  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(E)^2$  estendida por zero fora de  $E$  (em particular,  $\mathbf{v} = 0$  em  $\partial E$ ). Com essa  $\mathbf{v}$  temos:

$$a_\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_E \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \quad \text{e} \quad b_\epsilon(\mathbf{v}, p) = - \int_E p \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Substituindo em (5.3) ficamos com:

$$\begin{aligned} \mu \int_E \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_E p \nabla \cdot \mathbf{v} &= \int_E \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} & (\text{Teorema 1.5.1}) \\ -\mu \int_E \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_E \nabla p \cdot \mathbf{v} &= \int_E \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Levando em conta que  $\mathbf{v}$  é uma função arbitrária de  $\mathcal{D}(E)^2$ , podemos concluir, no sentido de distribuições, que:

$$-\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{em } E. \quad (5.6)$$

Analogamente, usando (5.4), podemos escolher  $q \in \mathcal{D}(E)$  estendida por zero fora de  $E$ . Assim temos, no sentido distribucional, que:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{em } E. \quad (5.7)$$

A nossa segunda escolha de  $\mathbf{v}$  será  $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1(\overline{E})^2$  estendida por zero fora de  $E$  tal que  $\mathbf{v} = 0$  em  $\partial E$  e  $\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_e = 0$  em  $\partial E$  com exceção de um lado  $e$ . Na equação (5.6) multiplicamos ambos os lados pela nossa  $\mathbf{v}$  e integramos por partes. Lembre que  $v = 0$  em  $\partial E$ , por isso, algumas parcelas se anularão resultando em:

$$\mu \int_E \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_E p \nabla \cdot \mathbf{v} = \int_E \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \quad (5.8)$$

Por outro lado, da equação (5.3), após abrirmos os termos usando nossa definição particular para  $\mathbf{v}$ , ficamos com:

$$\mu \int_E \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \epsilon \int_e \{\{\nabla \mathbf{v}\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \int_E p \nabla \cdot \mathbf{v} = \int_E \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \quad (5.9)$$

Comparando as equações (5.8) e (5.9) podemos afirmar que:

$$\int_e \{\{\nabla \mathbf{v}\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = 0,$$

entretanto  $\{\{\nabla \mathbf{v}\}\}$  é arbitrária, o que nos leva a concluir que  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = 0$ . Ora, se por acaso acontecer de  $e$  estar em  $\partial \Omega$  temos  $\mathbf{u}|_{\partial \Omega} = 0$ , então podemos admitir que  $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2$ .

Mais uma escolha para  $\mathbf{v}$  é tomarmos  $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1(\overline{E})^2$  estendida por zero fora de  $\overline{E}$  tal que  $v = 0$  em  $\partial E$  com a exceção de um lado  $e$ .

Utilizando um processo de comparação de equações análogo ao anterior contando que agora temos  $\llbracket \mathbf{v} \rrbracket = \mathbf{v}$  em  $e$  pois  $\mathbf{v}$  é zero nos elementos vizinhos à  $E$ , chegamos ao seguinte resultado:

$$\int_e (-\mu \nabla \mathbf{u} \mathbf{n}_E + p \mathbf{n}_E) \cdot \mathbf{v} = \int_e \{ \{-\mu \nabla \mathbf{u} \mathbf{n}_E + p \mathbf{n}_E\} \cdot \mathbf{v}.$$

Daí, concluímos que  $-\mu \nabla \mathbf{u} \mathbf{n}_E + p \mathbf{n}_E$  é contínua, pois é igual a sua média. Logo a igualdade (5.6) é válida também no interior de  $\Omega$ . Como já sabemos que  $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2$ , podemos concluir, também dessa última comparação, que  $p = \llbracket p \rrbracket$ . Ora se  $p$  é contínua então  $p \in L^2(\Omega)$  e, como assumimos que  $\int_{\Omega} p = 0$ ,  $p \in L_0^2(\Omega)$ . Ou seja,  $(\mathbf{u}, p)$  é solução de (4.3), como queríamos demonstrar. ■

O próximo passo é discretizar os espaços  $X$  e  $M$  para que o nosso problema fique “implementável” em um computador. Para tanto definiremos os seguintes espaços:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &:= \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2 : \mathbf{v} \in \mathbb{P}_k(E)^2, \quad \forall E \in \mathcal{T}_h \}; \\ M_h &:= \{ q \in L_0^2(\Omega) : q \in \mathbb{P}_{k-1}(E), \quad \forall E \in \mathcal{T}_h \}. \end{aligned}$$

As formas bilineares definidas acima são redefinidas para esses novos espaços.

**Definição 5.3.** A forma bilinear  $a_\epsilon(\cdot, \cdot) : \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$\begin{aligned} a_\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket - \\ &- \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \int_e \{ \{ \nabla \mathbf{u} \} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \int_e \{ \{ \nabla \mathbf{v} \} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket. \end{aligned}$$

**Definição 5.4.** A forma bilinear  $b_\epsilon(\cdot, \cdot) : \mathbf{X}_h \times M_h \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$b_\epsilon(\mathbf{v}, q) = - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E q \nabla \cdot \mathbf{v} + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \int_e \{ \{ q \} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \mathbf{n}_e.$$

E então o problema é reformulado para os espaços discretos. Esse é o problema que caracteriza o método de Galerkin descontínuo. Achar  $(\mathbf{U}_h, P_h) \in \mathbf{X}_h \times M_h$  tal que

$$\mu a_\epsilon(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}) + b_\epsilon(\mathbf{v}, P_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h \quad (5.10)$$

$$b_\epsilon(\mathbf{U}_h, q) = 0, \quad \forall q \in M_h. \quad (5.11)$$

**Observação:** Neste capítulo estamos considerando a função  $\mathbf{g}$ , da condição de contorno, como sendo nula. No entanto, nos testes, faremos simulações em que tal função é diferente da função nula. Isso faz com que o lado direito da nossa formulação discreta modifique um pouco a fim de acrescentar a contribuição da função  $\mathbf{g}$ . Por isso, nossa formulação usada nas simulações onde a função  $\mathbf{g}$  é não nula é escrita da seguinte forma: achar  $(\mathbf{U}_h, P_h) \in \mathbf{X}_h \times M_h$  tal que,

$$\begin{aligned} \mu a_\epsilon(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}) + b_\epsilon(\mathbf{v}, P_h) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega + \epsilon \sum_{e \in \partial\Omega} \int_e (\mathbf{g} \otimes \mathbf{n}) : (\mu \nabla \mathbf{v}) \, ds + \\ &\quad + \sum_{e \in \partial\Omega} \int_e \frac{\sigma_e}{|e|} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, ds, \\ b_\epsilon(\mathbf{U}_h, q) &= - \sum_{e \in \partial\Omega} \int_e q \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, ds. \end{aligned}$$

A primeira equação deve ser satisfeita para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$ , assim como a segunda deve ser satisfeita para todo  $q \in M_h$ .

Agora que o problema discreto foi formulado, trabalharemos para mostrar que ele admite uma única solução. Para tanto alguns resultados como coercividade e continuidade, por exemplo, são necessários. Para demonstrarmos a continuidade e a coercividade da forma  $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$  vamos definir a norma energia para o problema de Stokes.

**Definição 5.5** (Norma Energia). *Para toda função  $\mathbf{v} \in H^1(\mathcal{T}_h)^2$  definimos a norma energia de  $\mathbf{v}$  para o problema de Stokes como sendo:*

$$\|\mathbf{v}\|_\epsilon = \left( \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,E}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \|[\![\mathbf{v}]\!] \|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2}. \quad (5.12)$$

**Teorema 5.2.2.** *A forma bilinear,  $a_\epsilon(\cdot, \cdot) : \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \rightarrow \mathbb{R}$ , para o problema de Stokes é contínua na norma  $\|\cdot\|_\epsilon$ .*

**Teorema 5.2.3.** *A forma bilinear,  $a_\epsilon(\cdot, \cdot) : \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \rightarrow \mathbb{R}$ , para o problema de Stokes é coerciva na norma  $\|\cdot\|_\epsilon$  quando  $\sigma_e$  é adequado.*

**Observação:** As demonstrações dos teoremas citados anteriormente (Teorema 5.2.3 e Teorema 5.2.2) foram colocadas no Apêndice B pois contém alguns processos que constam em teoremas seguintes.

Agora que provamos a coercividade da forma  $a_e(\cdot, \cdot)$ , estamos a um passo de garantir a existência e unicidade do problema (5.10)-(5.11). Falta somente mostrar a condição (ii) do Teorema 4.3.5, ou seja, falta mostrar a condição inf-sup para os espaços discretos.

### 5.3 Condição Inf-Sup discreta

Depois de construir teoria sobre a existência e a unicidade da solução de um problema do tipo (4.5) na Seção 4.3, vamos adaptar esses resultados a formulação discreta. Primeiramente lembraremos que, conforme o Teorema 5.1.2, os espaços  $H_0^1(\Omega)^2$  e  $L_0^2(\Omega)$  satisfazem

$$\text{a condição de inf-sup com } b(\mathbf{v}, q) = \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, q \rangle_\Omega = \int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{v})q$$

A demonstração a seguir, da condição inf-sup discreta, segue as idéias da seção 6.4 de [19].

**Lema 5.1.** *Existe um interpolante  $\pi : H^1(\Omega)^2 \rightarrow \mathbf{X}_h$ , de Raviart-Thomas, que satisfaz as seguintes propriedades para cada  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2$ , sendo que  $C$  é uma constante independente de  $h$  ou  $h_E$ .*

$$\int_E q \nabla \cdot (\pi \mathbf{v} - \mathbf{v}) = 0, \quad \forall E \in \mathcal{T}_h, \quad \forall q \in \mathbb{P}_{k-1}(E); \quad (5.13)$$

$$\int_e q (\pi \mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_e = 0, \quad \forall e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega, \quad \forall q \in \mathbb{P}_{k-1}(e); \quad (5.14)$$

$$\pi \mathbf{v}|_e \cdot \mathbf{n}_e \in \mathbb{P}_{k-1}(e), \quad \forall e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega; \quad (5.15)$$

$$\|\pi \mathbf{v} - \mathbf{v}\|_{0,E} + h_E \|\nabla(\pi \mathbf{v} - \mathbf{v})\|_{0,E} \leq C \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,E},$$

$$\forall E \in \mathcal{T}_h; \quad (5.16)$$

$$\|\pi \mathbf{v}\|_\varepsilon \leq \|\nabla \mathbf{v}\|_0. \quad (5.17)$$

**Teorema 5.3.1.** *Existe uma constante  $\beta > 0$  independente de  $h$ , tal*

que:

$$\inf_{q \in M_h} \sup_{\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{X}}_h} \frac{b_\epsilon(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_\epsilon \|q\|_0} \geq \beta,$$

sendo que,

$$\tilde{\mathbf{X}}_h = \{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h : \llbracket \mathbf{v} \rrbracket|_e \cdot \mathbf{n}_e = 0, \quad \forall e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega\}$$

e

$$b_\epsilon(\mathbf{v}, q) = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E q \nabla \cdot \mathbf{v} + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{q\}\} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \mathbf{n}_e.$$

**Demonstração:** A idéia da demonstração é mostrar, primeiramente, que para cada  $q$  em  $M_h$ , existe um  $\mathbf{v}$  em  $\tilde{\mathbf{X}}_h$  tal que:

$$b_\epsilon(\mathbf{v}, q) \geq \beta_1 \|q\|_0^2 \quad \text{e} \quad (5.18)$$

$$\|\mathbf{v}\|_\epsilon \leq \beta_2 \|q\|_0, \quad (5.19)$$

sendo que  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são constantes positivas e independentes de  $h$ ,  $q$  ou  $\mathbf{v}$ . Isso feito teremos:

$$\begin{aligned} \frac{b_\epsilon(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_\epsilon \|q\|_0} &\stackrel{(5.18)}{\geq} \frac{\beta_1 \|q\|_0^2}{\|\mathbf{v}\|_\epsilon \|q\|_0} \stackrel{(5.19)}{\geq} \frac{\beta_1 \|q\|_0^2}{\beta_2 \|q\|_0^2} = \\ &= \frac{\beta_1}{\beta_2} := \beta, \quad \forall q \in M_h. \end{aligned}$$

Isso é suficiente para demonstrar o teorema. Logo, basta demonstrarmos (5.18) e (5.19).

Seja  $q \in M_h$ . Em particular,  $q \in L_0^2(\Omega)$ . Novamente lembramos que os espaços  $H_0^1(\Omega)^2$  e  $L_0^2(\Omega)$  satisfazem a condição inf-sup considerando  $b$  como definida no Teorema 5.1.2. Assim, pelo Teorema 4.3.3, podemos afirmar que existe um  $\tilde{\mathbf{v}} \in H_0^1(\Omega)^2$ , tal que :

$$-\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = q \quad \text{e} \quad (5.20)$$

$$\|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\|_0 \leq \frac{1}{\beta^*} \|q\|_0. \quad (5.21)$$

Agora vamos definir  $\tilde{\mathbf{v}}_h := \pi \tilde{\mathbf{v}}$ . Conforme seção 6.4 de [19], podemos afirmar que  $\tilde{\mathbf{v}}_h \in \tilde{\mathbf{X}}_h$ .

Para mostrarmos (5.18) repare que pela propriedade (5.13), já que  $\tilde{\mathbf{v}} \in H_0^1(\Omega)^2$ , temos,  $\forall E \in \mathcal{T}_h$ :

$$\begin{aligned} \int_E q \nabla \cdot (\pi \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}) &= 0 \\ \int_E q \nabla \cdot \pi \tilde{\mathbf{v}} &= \int_E q \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \\ \int_E q \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_h &= \int_E q \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Isso feito, note que:

$$\begin{aligned} b_\epsilon(\tilde{\mathbf{v}}_h, q) &= - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E q \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_h + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{q\} [\tilde{\mathbf{v}}_h] \cdot \mathbf{n}_e = (\tilde{\mathbf{v}}_h \in \tilde{\mathbf{X}}_h) \\ &= - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E q \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_h \stackrel{(5.22)}{=} \\ &= - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E q \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \stackrel{(5.20)}{=} \\ &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) = \\ &= \|q\|_0^2, \end{aligned}$$

mostrando o resultado (5.18) com  $\beta_1 = 1$ .

Por fim, de (5.17) temos que:

$$\|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_\epsilon \leq C \|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\|_0 \stackrel{(5.21)}{\leq} \frac{C}{\beta^*} \|q\|_0,$$

ou seja, o resultado (5.19) está mostrado com  $\beta_2 = \frac{C}{\beta^*}$ , concluindo assim a demonstração do teorema. ■

**Observação:** Defina o seguinte subespaço de  $\mathbf{X}_h$ :

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h : b_\epsilon(\mathbf{v}, q) = 0, \quad \forall q \in M_h\}.$$

Uma consequência do Teorema 4.3.3(ver [12]) é que dado  $q \in M_h$  existe uma única função  $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{X}}_h$ , tal que,  $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}_h$ :

$$\sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e [[\mathbf{v}]] \cdot [[\mathbf{w}]] = 0; \quad (5.23)$$

$$b_\epsilon(\mathbf{v}, q) = -\|q\|_0^2; \quad (5.24)$$

$$\|\mathbf{v}\|_\epsilon \leq \frac{1}{\beta} \|q\|_0. \quad (5.25)$$

Agora podemos, enfim, afirmar que o problema (5.10)-(5.11) tem única solução em  $\tilde{\mathbf{X}}_h$ . Tal espaço é um subespaço de  $\mathbf{X}_h$  mas não garante unicidade para o mesmo, somente a existência. Isso significa que pelo fato de nós termos construído e utilizado o espaço  $\tilde{\mathbf{X}}_h$  em nossa demonstração da condição Inf-Sup, perdemos a garantia da unicidade para o espaço  $\mathbf{X}_h$ . No nosso caso podemos contornar essa situação com o seguinte resultado que se utilizará da condição Inf-Sup discreta que acabamos de mostrar (Teorema 5.3.1).

**Teorema 5.3.2.** *O problema (5.10), (5.11) admite uma única solução.*

**Demonstração:** Observe que como o problema (5.10), (5.11) é um sistema quadrado de equações lineares em dimensão finita, basta mostrarmos unicidade de solução. Sejam  $(\mathbf{U}_h, P_h)$  e  $(\mathbf{U}_h^*, P_h^*)$  duas soluções para tal problema. Já sabemos que  $\mathbf{U}_h$  e  $\mathbf{U}_h^*$  estão em  $\mathbf{X}_h$  assim como  $P_h$  e  $P_h^*$  estão em  $M_h$ . Assim, como  $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$  e  $b_\epsilon(\cdot, \cdot)$  são bilineares, podemos afirmar que  $(\mathbf{U}_h - \mathbf{U}_h^*, P_h - P_h^*)$  satisfaz (5.10). Se escolhermos  $\mathbf{f} = 0$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{U}_h - \mathbf{U}_h^*$  nessa mesma igualdade podemos concluir, usando (5.11), que o termo  $b_\epsilon(\mathbf{U}_h - \mathbf{U}_h^*, P_h - P_h^*)$  é nulo. Assim ficamos apenas com  $a_\epsilon(\mathbf{U}_h - \mathbf{U}_h^*, \mathbf{U}_h - \mathbf{U}_h^*) = 0$ . Ora, o Teorema 5.2.3 garante que  $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$  é coerciva em  $\mathbf{X}_h$ , portanto  $\|\mathbf{U}_h - \mathbf{U}_h^*\|_\epsilon = 0 \Rightarrow \mathbf{U}_h = \mathbf{U}_h^*$ .

Isso feito podemos reescrever a equação (5.10) para o vetor  $(\mathbf{U}_h - \mathbf{U}_h^*, P_h - P_h^*) = (0, P_h - P_h^*)$ . Isto é:

$$b_\epsilon(\mathbf{v}, P_h - P_h^*) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h \quad (5.26)$$

Como mostramos que a condição Inf-Sup discreta é satisfeita para o espaço  $\tilde{\mathbf{X}}_h$  (Teorema 5.3.1), podemos usar (4.8) em (5.26) para concluir que  $P_h = P_h^*$ . Finalmente podemos afirmar que o problema discreto (5.10), (5.11) possui uma única solução. ■

Um resultado que pode se tornar eficiente numa demonstração de Inf-Sup é o lema de Fortin.

**Lema 5.2** (Lema de Fortin). *Assuma que a condição Inf-Sup seja satisfeita no espaço  $X \times Y$ . Seja  $X^* \subset X$  e  $Y^* \subset Y$ . Então, a condição Inf-Sup também será satisfeita em  $X^* \times Y^*$  com uma constante  $\beta$  independente de  $h$  se, e somente se, existe uma restrição linear  $\Pi^h : X \rightarrow X^*$  e uma constante  $C > 0$  independente de  $h$  tais que:*

- (i)  $b_\epsilon(\Pi_h \tilde{v} - v, q_h) = 0, \quad \forall v \in X, \quad \forall q_h \in Y^*;$
- (ii)  $\|\Pi_h v\|_X \leq C \|v\|_X.$

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada na seção 3.3.1 de [11].

■

Ou seja, se mostrarmos a existência de tal operador, é possível garantir a condição Inf-Sup para um espaço contido num espaço maior que já satisfaz a condição.

A construção desse operador não é trivial. No nosso caso, encararemos o lema de Fortin (Lema 5.2) como um resultado alternativo para o estudo da condição de Inf-Sup. Neste trabalho, ele é apresentado apenas como curiosidade.

## 5.4 Estimativas de erro *a priori*

Antes de passarmos para os resultados numéricos, apresentamos nessa seção teoremas que trazem estimativas para o erro cometido pelo método ao aproximar a solução exata. Com esses teoremas obtemos a ordem de convergência do método em determinadas normas. São três grandes teoremas que majoram o erro na velocidade e na pressão nas normas  $\|\cdot\|_\epsilon$  e  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  para o primeiro e  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  para o último. As demonstrações desses teoremas foram baseadas em [19] e [13]. Gostaríamos de ressaltar que os processos de majorar alguns termos se repetem nas demonstrações, estes serão menos detalhados quando aparecerem pela segunda vez em diante.

**Lema 5.3.** *Para todas funções  $v$  e  $q$ , em  $H_0^1(\Omega)^2$  e  $M_h$ , respectivamente, tem-se:*

$$b_\epsilon(Rv - v, q) = 0.$$

**Demonstração:** Sejam  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$  e  $q \in M_h$ . Pela definição da forma bilinear  $b_\epsilon(\cdot, \cdot)$  (Definição 5.4) temos que:

$$\begin{aligned} b_\epsilon(R\mathbf{v} - \mathbf{v}, q) &= - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E q \nabla \cdot (R\mathbf{v} - \mathbf{v}) + \\ &+ \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{q\}\} \llbracket R\mathbf{v} - \mathbf{v} \rrbracket \cdot \mathbf{n}_e. \end{aligned}$$

Pela propriedade (2.13) do operador  $R$  concluímos que o primeiro termo de  $b_\epsilon(R\mathbf{v} - \mathbf{v}, q)$  é nulo.

Note que a expressão  $\llbracket R\mathbf{v} - \mathbf{v} \rrbracket$  pode ser escrita, usando a definição de salto, como  $\llbracket R\mathbf{v} \rrbracket - \llbracket \mathbf{v} \rrbracket$ . Como  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$  concluímos que  $\mathbf{v}$  tem salto nulo. Assim, o segundo termo de  $b_\epsilon(R\mathbf{v} - \mathbf{v}, q)$  pode ser escrito como

$$\sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{q\}\} \llbracket R\mathbf{v} \rrbracket \cdot \mathbf{n}_e = \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \llbracket R\mathbf{v} \rrbracket \cdot \{\{q\}\} \mathbf{n}_e$$

Como  $\{\{q\}\} \in M_h$  podemos afirmar que  $\{\{q\}\} \mathbf{n}_e \in \mathbb{P}_k(e)^2$ , logo, pela propriedade (2.14) do operador  $R$  concluímos que o segundo termo em questão também é nulo, o que nos permite escrever, por fim, que  $b_\epsilon(R\mathbf{v} - \mathbf{v}, q) = 0$ .

■

**Teorema 5.4.1.** *Assuma que a solução exata  $(\mathbf{u}, p)$ , do problema (4.1), pertença ao espaço  $H^{k+1}(\Omega)^2 \times H^k(\Omega)$ . Então a solução aproximada  $(\mathbf{U}_h, P_h)$ , do problema (5.10)-(5.11) satisfaz*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{U}_h\|_\epsilon \leq Ch^k \left( |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{1}{\mu} |p|_{H^k(\Omega)} \right),$$

sendo que  $C$  uma constante independente de  $h$  ou de  $k$ .

**Demonstração:** A fim de facilitar a apresentação, definiremos  $\chi = \mathbf{U}_h - R\mathbf{u}$ , assim como  $\theta = P_h - \tilde{p}$ . Aqui  $\tilde{p}$  é a  $L^2$ -projeção de  $p$  (Definição 2.3 no espaço  $\mathbb{P}_{k-1}(E)$ ) e  $R$  é o operador de aproximação (Definição 2.12).

Sobre as formas bilineares  $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$  e  $b_\epsilon(\cdot, \cdot)$  afirmamos que para

toda  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$  temos:

$$\begin{aligned}
 \mu a_\epsilon(\chi, \mathbf{v}) + b_\epsilon(\mathbf{v}, \theta) &= \mu a_\epsilon(\mathbf{U}_h - R\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_\epsilon(\mathbf{v}, P_h - \tilde{p}) = \\
 &\hspace{15em} (a_\epsilon(\cdot, \cdot) \text{ e } b_\epsilon(\cdot, \cdot) \text{ são bilineares}) \\
 &= \mu a_\epsilon(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}) - \mu a_\epsilon(R\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_\epsilon(\mathbf{v}, P_h) - b_\epsilon(\mathbf{v}, \tilde{p}) = \quad (\text{usando (4.3)}) \\
 &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega - \mu a_\epsilon(R\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b_\epsilon(\mathbf{v}, \tilde{p}) = \quad (\mathbf{u} \text{ e } p \text{ são soluções exatas}) \\
 &= \mu a_\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mu a_\epsilon(R\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_\epsilon(\mathbf{v}, p) - b_\epsilon(\mathbf{v}, \tilde{p}) = \\
 &\hspace{15em} (a_\epsilon(\cdot, \cdot) \text{ e } b_\epsilon(\cdot, \cdot) \text{ são bilineares}) \\
 &= \mu a_\epsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_\epsilon(\mathbf{v}, p - \tilde{p}).
 \end{aligned}$$

Analogamente, para toda função  $q \in M_h$  temos:

$$b_\epsilon(\chi, q) = b_\epsilon(\mathbf{U}_h, q) - b_\epsilon(R\mathbf{u}, q) = 0 - b_\epsilon(R\mathbf{u}, q) = b_\epsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, q).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 \mu a_\epsilon(\chi, \mathbf{v}) + b_\epsilon(\mathbf{v}, \theta) &= \mu a_\epsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_\epsilon(\mathbf{v}, p - \tilde{p}), \\
 \text{e} \quad b_\epsilon(\chi, q) &= b_\epsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, q),
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Isso  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$  na primeira equação e  $\forall q \in M_h$  na segunda equação.

Note que, por definição,  $R\mathbf{u} \in \mathbf{X}_h$  e  $\tilde{p} \in M_h$ . Portanto  $\chi \in \mathbf{X}_h$  assim como  $\theta \in M_h$ .

Nas equações (5.27) faremos  $\mathbf{v} = \chi$  e  $q = \theta$ . Além disso usaremos o Lema 5.3, então:

$$\mu a_\epsilon(\chi, \chi) + b_\epsilon(\chi, \theta) = \mu a_\epsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, \chi) + b_\epsilon(\chi, p - \tilde{p}), \quad \text{e} \tag{5.28}$$

$$b_\epsilon(\chi, \theta) = b_\epsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, \theta) \stackrel{\text{Lema 5.3}}{=} 0. \tag{5.29}$$

Substituindo (5.29) em (5.28) temos:

$$\begin{aligned}
 \mu a_\epsilon(\chi, \chi) &= \mu a_\epsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, \chi) + b_\epsilon(\chi, p - \tilde{p}), & \text{ou,} \\
 a_\epsilon(\chi, \chi) &= a_\epsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, \chi) + \frac{1}{\mu} b_\epsilon(\chi, p - \tilde{p}).
 \end{aligned}$$

Pela coercividade da forma  $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$  (Teorema 5.2.3) temos:

$$\alpha \|\chi\|_\mathcal{E}^2 \leq a_\epsilon(\chi, \chi) = a_\epsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, \chi) + \frac{1}{\mu} b_\epsilon(\chi, p - \tilde{p}),$$

ou ainda:

$$\alpha \|\chi\|_\mathcal{E}^2 \leq a_\epsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, \chi) + \frac{1}{\mu} b_\epsilon(\chi, p - \tilde{p}). \tag{5.30}$$

Nosso objetivo é usar a desigualdade (5.30) para encontrar um limitante para  $\|\chi\|_\varepsilon$ , já que, pela desigualdade triangular temos:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{U}_h\|_\varepsilon = \|\mathbf{u} - R\mathbf{u} + R\mathbf{u} - \mathbf{U}_h\|_\varepsilon \leq \|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_\varepsilon + \|\chi\|_\varepsilon, \quad (5.31)$$

depois limitaremos  $\|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_\varepsilon$ , usando a definição da norma energia, completando a demonstração.

Como primeiro passo, limitaremos os termos da direita em (5.30) por majorantes em função de  $\|\chi\|_\varepsilon^2$ .

### Limitação de $a_\varepsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, \chi)$ em (5.30)

Pela definição da forma  $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$  (Definição 5.3) temos:

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, \chi) &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u}) : \nabla\chi - \\ &\quad - \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \chi \rrbracket + \\ &\quad + \varepsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\nabla\chi\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{u} - R\mathbf{u} \rrbracket + \\ &\quad + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e \llbracket \mathbf{u} - R\mathbf{u} \rrbracket \cdot \llbracket \chi \rrbracket. \end{aligned}$$

Para organizar a demonstração, denotaremos cada parcela da soma acima, respectivamente por  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ . Assim podemos afirmar que

$$a_\varepsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, \chi) \leq |a_\varepsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, \chi)| \leq |T_1| + |T_2| + |T_3| + |T_4|.$$

Vamos agora limitar cada  $|T_i|$ , para  $i = 1, 2, 3$  e  $4$ .

Para limitar os termos usaremos  $C$  para denotar uma constante genérica que independe de  $h$  ou de  $k$ .

**Limitação de  $|T_1|$** 

$$\begin{aligned}
|T_1| &= \left| \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u}) : \nabla \chi \right| = \\
&= \left| \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \langle \nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u}), \nabla \chi \rangle_E \right| \stackrel{(1.6)}{\leq} \\
&\leq \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E} \|\nabla \chi\|_{0,E} \stackrel{(1.6) \text{ em } \mathbb{R}^p}{\leq} \\
&\leq \left( \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \chi\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(1.7)}{\leq} \\
&\leq \frac{\alpha}{10} \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \chi\|_{0,E}^2 + C \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E}^2.
\end{aligned}$$

Ao usar a desigualdade de Young (1.7) foi utilizado  $\epsilon = \frac{\alpha}{5}$ , onde  $\alpha$  é a constante da coercividade de  $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$ . De acordo com (5.12) podemos continuar majorando  $|T_1|$ :

$$|T_1| \leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_\epsilon^2 + C \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E}^2.$$

Como  $\mathbf{u} \in H^{k+1}(\Omega)^2$  podemos usar (2.16) com  $s = k + 1$ , nesse caso, de acordo com tal propriedade:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_0 + h_E \|\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E} &\leq Ch_E^{k+1} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)} \stackrel{\|\cdot\| \geq 0}{\Rightarrow} \\
&\Rightarrow h_E \|\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E} \leq Ch_E^{k+1} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \|\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E} \leq Ch_E^k |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)} \stackrel{h_E \leq h}{\Rightarrow} \\
&\Rightarrow \|\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E} \leq Ch^k |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)}. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Voltando ao termo  $T_1$  ficamos com

$$\begin{aligned}
|T_1| &\stackrel{(5.32)}{\leq} \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_\epsilon^2 + C \sum_{E \in \mathcal{T}_h} h^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)}^2 \leq \\
&\leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_\epsilon^2 + Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

portanto,

$$|T_1| \leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_\epsilon^2 + Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2. \tag{5.33}$$

**Limitação de  $|T_4|$**

$$\begin{aligned}
|T_4| &= \left| \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e [\mathbf{u} - R\mathbf{u}] \cdot [\boldsymbol{\chi}] \right| \stackrel{(1.6)}{\leq} \\
&\leq \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \left[ \left( \sqrt{\frac{\sigma_e}{|e|}} \right)^2 \|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{0,e} \|\boldsymbol{\chi}\|_{0,e} \right] \stackrel{(1.6) \text{ em } \mathbb{R}^n}{\leq} \\
&\leq \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \|\boldsymbol{\chi}\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \|\boldsymbol{\chi}\|_\varepsilon \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Para voltar a majorar  $T_4$  precisamos achar uma cota superior para  $\|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{0,e}$ . Usaremos, para tanto, a definição de salto (Definição 2.2) e a desigualdade do teorema do traço (2.5).

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{0,e} &= \|\mathbf{u}^R - R\mathbf{u}^R - \mathbf{u}^L + R\mathbf{u}^L\|_{0,e} \leq \\
&\leq \|\mathbf{u}^R - R\mathbf{u}^R\|_{0,e} + \|\mathbf{u}^L - R\mathbf{u}^L\|_{0,e} \stackrel{(2.5)}{\leq} \\
&\leq C|e|^{\frac{1}{2}}|E|^{-\frac{1}{2}} (\|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{0,E^R} + h_E \|\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E^R}) + \\
&+ C|e|^{\frac{1}{2}}|E|^{-\frac{1}{2}} (\|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{0,E^L} + h_E \|\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E^L}).
\end{aligned}$$

Agora escolhemos  $E = E^L$  ou  $E = E^R$ . Como estamos pensando em majorar, a opção escolhida deve ser aquela na qual o valor da expressão acima fica o maior possível. Feita essa escolha podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{0,e} &\leq C|e|^{\frac{1}{2}}|E|^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{0,E} + \\
&+ C|e|^{\frac{1}{2}}|E|^{-\frac{1}{2}} h_E \|\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E} \stackrel{(2.16) \text{ e } h_E \leq h}{\leq} \\
&\leq C|e|^{\frac{1}{2}}|E|^{-\frac{1}{2}} h^{k+1} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Com esse resultado em mãos voltamos agora a majorar  $|T_4|$ , usando o

fato de que  $|E| \leq \min\{|E|\}$ :

$$\begin{aligned}
 |T_4| &\leq \|\chi\|_\varepsilon \left( C \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \frac{\sigma_e}{|e|} C|e||E|^{-1} h^{2k+2} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \|\chi\|_\varepsilon \left( C \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \sigma_e h^{2k+2} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(1.7)}{\leq} \text{com } \epsilon = \frac{\alpha}{5} \\
 &\leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_\varepsilon^2 + C \sum_{E \in \mathcal{T}_h} h^{2k+2} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)}^2 \stackrel{h < 1}{\leq} \\
 &\leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_\varepsilon^2 + Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$|T_4| \leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_\varepsilon^2 + Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2. \quad (5.35)$$

**Limitação de  $|T_2|$**

$$\begin{aligned}
 |T_2| &= \left| \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\}\} \mathbf{n}_e [\chi] \right| \stackrel{(1.6)}{\leq} \\
 &\leq \left| \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \|\{\{\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\}\} \mathbf{n}_e\|_{0,e} \|\chi\|_{0,e} \right| \leq \\
 &\leq \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sqrt{|e|}}{\sqrt{|e|}} \|\{\{\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\}\} \mathbf{n}_e\|_{0,e} \|\chi\|_{0,e} \stackrel{(1.6) \text{ em } \mathbb{R}^n}{\leq} \\
 &\leq \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{1}{|e|} \|\chi\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\
 &\cdot \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} |e| \|\{\{\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\}\} \mathbf{n}_e\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(1.7)}{\leq} \\
 &\leq \frac{\alpha}{10} \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{1}{|e|} \|\chi\|_{0,e}^2 + \\
 &+ C \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} |e| \|\{\{\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\}\} \mathbf{n}_e\|_{0,e}^2 \stackrel{5.12}{\leq} \\
 &\leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_\varepsilon^2 + C \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} |e| \|\{\{\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\}\} \mathbf{n}_e\|_{0,e}^2.
 \end{aligned}$$

Agora, analogamente ao caso anterior, quando majoramos o termo  $\|\llbracket \mathbf{u} - R\mathbf{u} \rrbracket\|_{0,e}$  usando (2.5), majoraremos  $\|\llbracket \nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u}) \rrbracket \mathbf{n}_e\|_{0,e}$  usando (2.6). Isso feito, ficaremos com:

$$\begin{aligned} \|\llbracket \nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u}) \rrbracket \mathbf{n}_e\|_{0,e} &\leq C|e|^{\frac{1}{2}}|E|^{-\frac{1}{2}}\|\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E} + \\ &\quad + C|e|^{\frac{1}{2}}|E|^{-\frac{1}{2}}h_E\|\nabla^2(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E}. \end{aligned}$$

A partir de agora vamos melhorar a cota superior encontrada para  $\|\llbracket \nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u}) \rrbracket \mathbf{n}_e\|_{0,e}$  limitando o termo  $\|\nabla^2(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E}$ .

De acordo com o Teorema 2.4.5 e lembrando que  $\mathbf{u} \in H^{k+1}(\Omega)$ , podemos definir  $\tilde{u} \in \mathbb{P}_k(E)^2$  tal que:

$$\|\mathbf{u} - \tilde{u}\|_{q,E} \leq Ch_E^{k+1-q}|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(E)}, \quad \forall 0 \leq q \leq k+1. \quad (5.36)$$

Nesse caso:

$$\begin{aligned} \|\nabla^2(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E} &= \|\nabla^2(\mathbf{u} - \tilde{u} + \tilde{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E} \leq \\ &\leq \|\nabla^2(\mathbf{u} - \tilde{u})\|_{0,E} + \|\nabla^2(\tilde{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E} \stackrel{(2.11)}{\leq} \\ &\leq \|\nabla^2(\mathbf{u} - \tilde{u})\|_{0,E} + Ch_E^{-2}\|\tilde{u} - R\mathbf{u}\|_{0,E}. \quad (5.37) \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned} \|\nabla^2(\mathbf{u} - \tilde{u})\|_{0,E} &\leq \|\mathbf{u} - \tilde{u}\|_{2,E} \stackrel{(5.36)}{\leq} \\ &\leq Ch_E^{k-1}|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(E)}, \quad (5.38) \end{aligned}$$

e ainda que,

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - R\mathbf{u}\|_{0,E} &\leq \|\tilde{u} - \mathbf{u} + \mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{0,E} \leq \\ &\leq \|\mathbf{u} - \tilde{u}\|_{0,E} + \|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{0,E} \stackrel{(5.36) \text{ e } (2.16)}{\leq} \\ &\leq Ch_E^{k+1}|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(E)} + Ch_E^{k+1}|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)} \leq \\ &\leq Ch_E^{k+1}|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)}, \quad (5.39) \end{aligned}$$

então, substituindo (5.38) e (5.39) em (5.37) ficamos com:

$$\begin{aligned} \|\nabla^2(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E} &\leq Ch_E^{k-1}|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(E)} + Ch_E^{-2}(h_E^{k+1}|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)}) \leq \\ &\leq Ch_E^{k-1}|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)}. \end{aligned}$$

Voltando para o termo  $\|\{\{\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\}\mathbf{n}_e\|_{0,e}$  e usando o resultado anterior temos:

$$\|\{\{\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\}\mathbf{n}_e\|_{0,e} \leq C|e|^{\frac{1}{2}}|E|^{-\frac{1}{2}}\|\nabla\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{0,E} + \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} &+ h_E C h^{k-1} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)} \stackrel{(2.16)}{\leq} \\ &\leq C|e|^{\frac{1}{2}}|E|^{-\frac{1}{2}} h_E^k |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)} + \quad (5.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ C|e|^{\frac{1}{2}}|E|^{-\frac{1}{2}} h_E^k |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)} \leq \\ &\leq C h_E^{k-1} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)}. \quad (5.42) \end{aligned}$$

Aqui usamos o fato de que  $|e|$  e  $|E|$  podem ser majorados respectivamente por  $h$  e por uma constante. Além disso  $h < 1$ .

Finalmente estamos prontos para voltar a analisar  $|T_2|$ .

$$\begin{aligned} |T_2| &\leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_{\varepsilon}^2 + C \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} |e| \|\{\{\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\}\mathbf{n}_e\|_{0,e}^2 \stackrel{(5.42)}{\leq} \\ &\leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_{\varepsilon}^2 + C \sum_{E \in \mathcal{T}_h} C h_E^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)}^2 \leq \\ &\leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_{\varepsilon}^2 + C h^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|T_2| \leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_{\varepsilon}^2 + C h^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2. \quad (5.43)$$

**Limitação de  $|T_3|$**

$$\begin{aligned} |T_3| &= \left| \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\nabla\chi\}\mathbf{n}_e \cdot [\mathbf{u} - R\mathbf{u}]\right| \stackrel{(1.6)}{\leq} \quad (\epsilon \leq 1) \\ &\leq \left| \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \|\{\{\nabla\chi\}\mathbf{n}_e\|_{0,e} \|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{0,e} \right|. \end{aligned}$$

Analogamente ao que vimos na limitação de  $|T_4|$ , podemos usar a definição de média, usar a desigualdade triangular e escolher a norma de maior valor. Fazendo essa majoração, será necessário uma constante

$C$ .

$$\begin{aligned}
|T_3| &\leq C \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \|\{\{\nabla\chi\}\}\mathbf{n}_e\|_{0,e} \|\llbracket \mathbf{u} - R\mathbf{u} \rrbracket\|_{0,e} \stackrel{(1.6) \text{ em } \mathbb{R}^n}{\leq} \\
&\leq \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} C \|\{\{\nabla\chi\}\}\mathbf{n}_e\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \|\llbracket \mathbf{u} - R\mathbf{u} \rrbracket\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(1.7)}{\leq} \\
&\leq \frac{\alpha}{10C} \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} C \|\nabla\chi\mathbf{n}_e\|_{0,e}^2 + C \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \|\llbracket \mathbf{u} - R\mathbf{u} \rrbracket\|_{0,e}^2 \stackrel{(2.9)}{\leq} \\
&\leq \frac{\alpha}{10C} \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} C \|\nabla\chi\|_{0,E}^2 + C \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \|\llbracket \mathbf{u} - R\mathbf{u} \rrbracket\|_{0,e}^2 \leq \quad (5.12) \\
&\leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_{\mathcal{E}}^2 + C \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \|\llbracket \mathbf{u} - R\mathbf{u} \rrbracket\|_{0,e}^2 \stackrel{(5.34)}{\leq} \\
&\hspace{20em} (|e| \text{ e } |E| \text{ são majoráveis}) \\
&\leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_{\mathcal{E}}^2 + C \sum_{E \in \mathcal{T}_h} Ch_E^{2k+2} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)}^2 \leq \\
&\leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_{\mathcal{E}}^2 + Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|T_3| \leq \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_{\mathcal{E}}^2 + Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2. \quad (5.44)$$

Agora podemos voltar para o termo inicial que estávamos majorando e usar os resultados (5.33), (5.35), (5.43) e (5.44). Assim:

$$a_\epsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, \chi) \leq |T_1| + |T_2| + |T_3| + |T_4| \leq 4 \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_{\mathcal{E}}^2 + Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \quad (5.45)$$

**Limitação de  $\frac{1}{\mu} b_\epsilon(\chi, p - \tilde{p})$  em (5.30)**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} b_\epsilon(\chi, p - \tilde{p}) &= \frac{1}{\mu} - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E (p - \tilde{p})(\nabla \cdot \chi) + \\
&\quad + \frac{1}{\mu} \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{p - \tilde{p}\}\} [\chi] \cdot \mathbf{n}_e.
\end{aligned}$$

Já que,  $\nabla \cdot \chi \in \mathbb{P}_k(E)$  podemos afirmar, pela definição de  $\tilde{p}$  (Definição 2.3) que

$$\int_E (p - \tilde{p})(\nabla \cdot \chi) = 0,$$

portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} b_\epsilon(\chi, p - \tilde{p}) &= \frac{1}{\mu} \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{p - \tilde{p}\} [\chi] \cdot \mathbf{n}_e \right) \stackrel{(1.6)}{\leq} \\ &\leq \frac{1}{\mu} \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \| \{p - \tilde{p}\} \|_{0,e} \| [\chi] \cdot \mathbf{n}_e \|_{0,e} \frac{\sqrt{|e|}}{\sqrt{|e|}} \right) \stackrel{(1.6)}{\leq} \\ &\hspace{15em} (\| \mathbf{n}_e \| = 1) \\ &\leq \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{|e|}{\mu^2} \| \{p - \tilde{p}\} \|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{|e|} \| [\chi] \|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} C \frac{|e|}{\mu^2} \| p - \tilde{p} \|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{|e|} \| [\chi] \|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(1.7)}{\leq} \\ &\hspace{15em} (5.12) \\ &\leq \frac{\alpha}{10} \| \chi \|_\mathcal{E}^2 + \frac{C}{\mu^2} \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \| p - \tilde{p} \|_{0,e}^2 \stackrel{(2.17)}{\leq} \\ &\leq \frac{\alpha}{10} \| \chi \|_\mathcal{E}^2 + \frac{C}{\mu^2} h^2 k |p|_{H^k(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Por fim ficamos com:

$$\frac{1}{\mu} b_\epsilon(\chi, p - \tilde{p}) \leq \frac{\alpha}{10} \| \chi \|_\mathcal{E}^2 + \frac{C}{\mu^2} h^{2k} |p|_{H^k(\Omega)}^2. \tag{5.46}$$

Agora voltemos a desigualdade (5.30) a fim de usar (5.45) e (5.46) para

assim concluímos que:

$$\begin{aligned}
\alpha \|\chi\|_{\mathcal{E}}^2 &\leq a_\epsilon(\mathbf{u} - R\mathbf{u}, \chi) + \frac{1}{\mu} b_\epsilon(\chi, p - \tilde{p}) \\
\alpha \|\chi\|_{\mathcal{E}}^2 &\leq \frac{4\alpha}{10} \|\chi\|_{\mathcal{E}}^2 + Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{10} \|\chi\|_{\mathcal{E}}^2 + \frac{C}{\mu^2} h^{2k} |p|_{H^k(\Omega)}^2 \\
\alpha \|\chi\|_{\mathcal{E}}^2 &\leq \frac{\alpha}{2} \|\chi\|_{\mathcal{E}}^2 + Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \frac{C}{\mu^2} h^{2k} |p|_{H^k(\Omega)}^2 \\
\frac{\alpha}{2} \|\chi\|_{\mathcal{E}}^2 &\leq (Ch^k |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)})^2 + \left( \frac{C}{\mu} h^k |p|_{H^k(\Omega)} \right)^2 \\
&\hspace{15em} (\alpha/2 \text{ incorpora-se em } C) \\
\|\chi\|_{\mathcal{E}}^2 &\leq (Ch^k |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)})^2 + \left( \frac{C}{\mu} h^k |p|_{H^k(\Omega)} \right)^2 \quad (C, h, |\cdot| \geq 0) \\
\|\chi\|_{\mathcal{E}}^2 &\leq \left( Ch^k |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{C}{\mu} h^k |p|_{H^k(\Omega)} \right)^2 \\
\|\chi\|_{\mathcal{E}} &\leq Ch^k |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{C}{\mu} h^k |p|_{H^k(\Omega)} \tag{5.47}
\end{aligned}$$

A fim de voltar para a desigualdade triangular (5.31) precisamos ainda majorar o termo  $\|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{\mathcal{E}}$ . Para tanto, note que:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{\mathcal{E}}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \|[\![\mathbf{u} - R\mathbf{u}]\!] \|_{0,e}^2 \tag{5.34} \\
&\leq \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - R\mathbf{u})\|_{0,E}^2 + \sum_{E \in \mathcal{T}_h} Ch_E^{2k+2} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)}^2 \tag{2.16} \\
&\leq \sum_{E \in \mathcal{T}_h} Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Delta E)}^2 + Ch^{2k+2} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \stackrel{h \leq 1}{\leq} \\
&\leq Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \leq \\
&\leq Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_{\mathcal{E}} \leq Ch^k |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} \tag{5.48}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{U}_h\|_\varepsilon &\leq \|\mathbf{u} - R\mathbf{u}\|_\varepsilon + \|\chi\|_\varepsilon \stackrel{(5.47) \text{ e } (5.48)}{\leq} \\ &\leq Ch^k |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{C}{\mu} h^k |p|_{H^k(\Omega)} + Ch^k |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} \leq \\ &\leq Ch^k |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{C}{\mu} h^k |p|_{H^k(\Omega)}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{U}_h\|_\varepsilon \leq Ch^k \left( |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{1}{\mu} |p|_{H^k(\Omega)} \right).$$

■

**Teorema 5.4.2.** *Sob as mesmas hipóteses e notação do Teorema 5.4.1, existe uma constante  $C$ , independente de  $h$  e  $\mu$  tal que:*

$$\|p - P_h\|_0 \leq Ch^k (\mu |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + |p|_{H^k(\Omega)})$$

**Demonstração:** Seja  $\tilde{p}$  a  $L^2$ -projeção de  $p$ . Como  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\mathbf{U}_h$  e  $P_h$  satisfazem (5.10) e (5.11) temos que para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$ :

$$\begin{aligned} \mu a_\varepsilon(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}) + b_\varepsilon(\mathbf{v}, P_h) - \mu a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b_\varepsilon(\mathbf{v}, p) &= 0 \\ \mu a_\varepsilon(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_\varepsilon(\mathbf{v}, P_h - p) &= 0 \\ \mu a_\varepsilon(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_\varepsilon(\mathbf{v}, P_h - \tilde{p} + \tilde{p} - p) &= 0 \\ \mu a_\varepsilon(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_\varepsilon(\mathbf{v}, P_h - \tilde{p}) + b_\varepsilon(\mathbf{v}, \tilde{p} - p) &= 0 \\ \mu a_\varepsilon(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_\varepsilon(\mathbf{v}, P_h - \tilde{p}) &= b_\varepsilon(\mathbf{v}, p - \tilde{p}) \\ a_\varepsilon(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\mu} b_\varepsilon(\mathbf{v}, P_h - \tilde{p}) &= \frac{1}{\mu} b_\varepsilon(\mathbf{v}, p - \tilde{p}). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Pela Definição 2.3 podemos afirmar que  $P_h - \tilde{p} \in M_h$ . Agora, pela observação do Teorema 5.3.1 temos que existe uma única  $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{X}}_h$  que satisfaz as equações (5.23), (5.24) e (5.25), ou seja:

$$\sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \llbracket \mathbf{w} \rrbracket = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}_h, \quad (5.50)$$

$$b_\varepsilon(\mathbf{v}, P_h - \tilde{p}) = -\|P_h - \tilde{p}\|_0^2 \quad \text{e} \quad (5.51)$$

$$\|\mathbf{v}\|_\varepsilon \leq \frac{1}{\beta} \|P_h - \tilde{p}\|_0. \quad (5.52)$$

Da equação (5.27)<sub>2</sub> com o Lema 5.3, podemos afirmar que  $b_\epsilon(\chi, q) = 0$ ,  $\forall q \in M_h$ , logo, já que  $\chi \in \mathbf{X}_h$  podemos concluir que  $\chi \in \mathbf{V}_h$ . Assim por (5.50) podemos escrever:

$$\sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla \mathbf{v} : \nabla \chi + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \llbracket \chi \rrbracket = 0. \quad (5.53)$$

Reescreveremos agora a equação (5.49) para nosso  $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{X}}_h$  particular:

$$\begin{aligned} a_\epsilon(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\mu} b_\epsilon(\mathbf{v}, P_h - \tilde{p}) &= \frac{1}{\mu} b_\epsilon(\mathbf{v}, p - \tilde{p}) \\ - \frac{1}{\mu} b_\epsilon(\mathbf{v}, p - \tilde{p}) &= a_\epsilon(\mathbf{U}_h - R\mathbf{u} + R\mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \frac{1}{\mu} b_\epsilon(\mathbf{v}, P_h - \tilde{p}) \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\frac{1}{\mu} \|P_h - \tilde{p}\|_0^2 = a_\epsilon(\mathbf{U}_h - R\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_\epsilon(R\mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \frac{1}{\mu} b_\epsilon(\mathbf{v}, P_h - \tilde{p})$$

$$\frac{1}{\mu} \|P_h - \tilde{p}\|_0^2 = a_\epsilon(\chi, \mathbf{v}) + a_\epsilon(R\mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \frac{1}{\mu} b_\epsilon(\mathbf{v}, P_h - \tilde{p})$$

Como  $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{X}}_h$  temos que  $\nabla \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{P}_{k-1}(E)$  e também que  $\llbracket p - \tilde{p} \rrbracket \llbracket \mathbf{v} \rrbracket_e \cdot \mathbf{n}_e = 0$  Logo:

$$\begin{aligned} b_\epsilon(\mathbf{v}, p - \tilde{p}) &= - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E (p - \tilde{p}) \nabla \cdot \mathbf{v} + \\ &+ \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \llbracket p - \tilde{p} \rrbracket \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \mathbf{n}_e \stackrel{\text{Definição 2.3}}{=} \\ &= \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \llbracket p - \tilde{p} \rrbracket \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \mathbf{n}_e \stackrel{\text{Definição de } \mathbf{V}_h}{=} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} \|P_h - \tilde{p}\|_0^2 &= a_\epsilon(\chi, \mathbf{v}) + a_\epsilon(R\mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v}) \stackrel{\text{Definição 5.3}}{=} \\
&= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla \chi : \nabla \mathbf{v} + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e \llbracket \chi \rrbracket \llbracket \mathbf{v} \rrbracket - \\
&\quad - \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{ \nabla \chi \} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{ \nabla \mathbf{v} \} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \chi \rrbracket + \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla(R\mathbf{u} - \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e \llbracket R\mathbf{u} - \mathbf{u} \rrbracket \llbracket \mathbf{v} \rrbracket - \\
&\quad - \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{ \nabla(R\mathbf{u} - \mathbf{u}) \} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + \\
&\quad + \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{ \nabla \mathbf{v} \} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket R\mathbf{u} - \mathbf{u} \rrbracket := \\
&:= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8.
\end{aligned}$$

Veja que  $T_1 + T_2 = 0$  por (5.53), assim como  $T_3$  e  $T_7$  também são nulos pois  $\mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{X}}_h$ . Além disso como  $\chi + R\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{U}_h - R\mathbf{u} + R\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{U}_h - \mathbf{u}$  temos que:

$$T_4 + T_8 = \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{ \nabla \mathbf{v} \} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \rrbracket := T_9.$$

A idéia agora é majorar os termos  $T_5$ ,  $T_6$  e  $T_9$  por parcelas em função de  $\|\mathbf{v}\|_\epsilon$  para assim usar (5.52) e estimar o valor de  $\|P_h - \tilde{p}\|_0$ .

Como as limitações dos termos seguem basicamente a mesma idéia das do Teorema 5.4.1, onde fizemo-nas detalhadamente não vamos explicitar as contas. Porém, seguem os resultados:

$$\begin{aligned}
T_5 &\leq \frac{\beta}{6\mu} \|\mathbf{v}\|_\epsilon^2 + Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2, \\
T_6 &\leq \frac{\beta}{6\mu} \|\mathbf{v}\|_\epsilon^2 + Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \text{ e} \\
T_9 &\leq \frac{\beta}{6\mu} \|\mathbf{v}\|_\epsilon^2 + Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu} Ch^{2k} |p|_{H^k(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} \|P_h - \tilde{p}\|_0^2 &= T_5 + T_6 + T_9 \\
\frac{1}{\mu} \|P_h - \tilde{p}\|_0^2 &\leq \frac{3\beta}{6\mu} \|\mathbf{v}\|_\varepsilon^2 + Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu} Ch^{2k} |p|_{H^k(\Omega)}^2 \\
\|P_h - \tilde{p}\|_0^2 &\leq \frac{1\beta}{2} \|\mathbf{v}\|_\varepsilon^2 + \mu Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + Ch^{2k} |p|_{H^k(\Omega)}^2 \\
&\quad \text{(usando (5.52))} \\
\|P_h - \tilde{p}\|_0^2 &\leq \frac{1}{2} \|P_h - \tilde{p}\|_0^2 + \mu Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + Ch^{2k} |p|_{H^k(\Omega)}^2 \\
\frac{1}{2} \|P_h - \tilde{p}\|_0^2 &\leq \mu Ch^{2k} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + Ch^{2k} |p|_{H^k(\Omega)}^2 \\
\|P_h - \tilde{p}\|_0 &\leq \mu Ch^k |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + Ch^k |p|_{H^k(\Omega)} \tag{5.54}
\end{aligned}$$

Vamos agora, através da desigualdade triangular, usar os resultados anteriores para melhorar o termo que realmente nos interessa.

$$\begin{aligned}
\|p - P_h\|_0 &\leq \|p - \tilde{p}\|_0 + \|P_h - \tilde{p}\|_0 \stackrel{(2.17)}{\leq} \\
&\leq Ch^k |p|_{H^k(\Omega)} + \|P_h - \tilde{p}\|_0 \stackrel{(5.54)}{\leq} \\
&\leq Ch^k |p|_{H^k(\Omega)} + \mu Ch^k |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + Ch^k |p|_{H^k(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\|p - P_h\|_0 \leq Ch^k (\mu |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + |p|_{H^k(\Omega)}).$$

■

Vamos agora apresentar o teorema que traz estimativas de erro para a velocidade na norma  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ . Antes disso precisamos impor algumas condições para a solução do problema dual, já que este será usado na demonstração de tal teorema.

Supondo  $\Omega$  convexo, queremos que, para cada  $\mathbf{g} \in L^2(\Omega)^2$ , a solução  $(\Phi, \xi)$  do problema dual ao problema (4.1):

$$-\mu \Delta \Phi + \nabla \xi = \mathbf{g}, \quad \text{em } \Omega; \tag{5.55}$$

$$\nabla \cdot \Phi = 0, \quad \text{em } \Omega; \tag{5.56}$$

$$\Phi = \mathbf{0}, \quad \text{em } \partial\Omega, \tag{5.57}$$

esteja em  $H^2(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)$ . Além disso queremos dependência contínua de tal solução sobre  $\mathbf{g}$ . Isto é:

$$\|\Phi\|_2 + \frac{1}{\mu} \|\xi\|_1 \leq \frac{C}{\mu} \|\mathbf{g}\|_0. \tag{5.58}$$

**Teorema 5.4.3.** *Seja  $\Omega$  convexo e seja  $k = 1, 2$  ou  $3$ . Assuma que a solução  $(\mathbf{u}, p)$  de (4.1) pertença a  $H^{k+1}(\Omega)^2 \times H^k(\Omega)$ . Então, se a partição é regular (Definição 2.2), existe uma constante  $C > 0$  independente de  $h$  e de  $\mu$  tal que:*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{U}_h\|_0 \leq Ch^{k+1-\delta} \left( |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{1}{\mu} |p|_{H^k(\Omega)} \right),$$

sendo que  $\delta = 0$  para SIPG e  $\delta = 1$  para IIPG e NIPG.

**Demonstração:** Considere o problema dual (5.55)-(5.57) com  $\mathbf{g} = \mathbf{U}_h - \mathbf{u}$ . Usando o teorema de Green sobre cada elemento temos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_h - \mathbf{u}\|_0^2 &= \int_{\Omega} (\mathbf{U}_h - \mathbf{u})^2 = \\ &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E (\mathbf{U}_h - \mathbf{u})^2 \stackrel{(5.55)}{=} \\ &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E (\mathbf{U}_h - \mathbf{u})(-\mu \Delta \Phi + \nabla \xi) = \\ &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E (\mathbf{U}_h - \mathbf{u})(-\mu \Delta \Phi) + \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E (\mathbf{U}_h - \mathbf{u})(\nabla \xi) = \\ &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \mu \nabla (\mathbf{U}_h - \mathbf{u}) : \nabla \Phi - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial E} (\mu \nabla \Phi \mathbf{n}_E)(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}) - \\ &\quad - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \xi \nabla \cdot (\mathbf{U}_h - \mathbf{u}) + \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial E} \xi \mathbf{n}_E (\mathbf{U}_h - \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Pela regularidade das funções  $\Phi$  e  $\xi$  podemos afirmar que  $[[\mathbf{u} \nabla \Phi]]|_e \mathbf{n}_e = \mathbf{0}$  e também  $[[\xi]]|_e = 0$  para toda interface  $e \in \Gamma_h$ . Assim já que

$$\begin{aligned} b_e(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}, \xi) &= - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \xi \nabla \cdot (\mathbf{U}_h - \mathbf{u}) + \\ &\quad + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \int_e \{\{\xi\}\} [[\mathbf{U}_h - \mathbf{u}]] \cdot \mathbf{n}_e, \end{aligned}$$

ficamos com:

$$\|\mathbf{U}_h - \mathbf{u}\|_0^2 = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \mu \nabla \Phi : \nabla (\mathbf{U}_h - \mathbf{u}) - \quad (5.59)$$

$$- \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \int_e \{\{\mu \nabla \Phi\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \rrbracket + b_\epsilon(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}, \xi). \quad (5.60)$$

Das equações (5.10)-(5.11) aplicadas a  $(\mathbf{U}_h, P_h)$  e  $(\mathbf{u}, p)$  temos, quando subtraímos-las:

$$\begin{aligned} \mu a_\epsilon(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_\epsilon(\mathbf{v}, P_h - p) &= 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h; \\ b_\epsilon(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}, q) &= 0, \quad \forall q \in M_h. \end{aligned}$$

Sabendo disso, podemos somar alguns “zeros” convenientes em (5.60).

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_h - \mathbf{u}\|_0^2 &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \mu \nabla \Phi : \nabla (\mathbf{U}_h - \mathbf{u}) - \\ &- \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \int_e \{\{\mu \nabla \Phi\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \rrbracket + \\ &+ b_\epsilon(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}, \xi) - \mu \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla (\mathbf{U}_h - \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} - \\ &- \mu \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e \llbracket \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \rrbracket \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + \\ &+ \mu \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \int_e \{\{\nabla (\mathbf{U}_h - \mathbf{u})\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket - \\ &- \mu \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \int_e \{\{\nabla \mathbf{v}\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \rrbracket - \\ &- b_\epsilon(\mathbf{v}, P_h - p) - b_\epsilon(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}, q) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\mu \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e \llbracket \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \rrbracket \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + \\
&+ b_\epsilon(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}, \xi - q) - b_\epsilon(\mathbf{v}, P_h - p) + \\
&+ \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \mu \nabla(\Phi - \mathbf{v}) : \nabla(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}) + \\
&+ \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\mu \nabla(\mathbf{U}_h - \mathbf{u})\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket - \\
&- \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\mu \nabla \Phi\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \rrbracket - \\
&- \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\mu \nabla \mathbf{v}\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \rrbracket + \quad (\text{somando } 0) \\
&+ \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\mu \nabla \Phi\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \rrbracket - \\
&- \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\mu \nabla \Phi\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \rrbracket = \\
& \\
&= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 - \\
&- (1 + \epsilon) \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\mu \nabla \Phi\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \rrbracket + \\
&+ \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\mu \nabla(\Phi - \mathbf{v})\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \rrbracket = \\
& \\
&= T_1 + \dots + T_7.
\end{aligned}$$

Assim como as outras demonstrações de estimativa de erro, a idéia agora é majorar cada termo separadamente para assim estimar o erro. Muitos dos processos já são conhecidos de demonstrações anteriores e por isso não serão tão detalhados, além disso usaremos o Teorema 5.4.1 para fazer algumas das limitações. Escolheremos  $\mathbf{v} = R\Phi$  e  $q = \tilde{\xi}$ , sendo que este último é a  $L^2$ -projeção de  $\xi$  (Definição 2.3).

Assim sendo, começaremos por  $T_3$ :

$$\begin{aligned}
T_3 &= b_\epsilon(\mathbf{v}, P_h - p) = b_\epsilon(R\Phi, P_h - p) + \\
&\quad + b_\epsilon(\Phi, P_h - p) - b_\epsilon(\Phi, P_h - p) = \\
&= b_\epsilon(R\Phi - \Phi, P_h - p) + b_\epsilon(\Phi, P_h - p) \stackrel{(5.56)}{=} \\
&= b_\epsilon(R\Phi - \Phi, P_h - \tilde{p} + \tilde{p} - p) = \\
&= b_\epsilon(R\Phi - \Phi, \tilde{p} - p) + b_\epsilon(R\Phi - \Phi, P_h - \tilde{p}) \stackrel{\text{Lema 5.3}}{=} \\
&= b_\epsilon(R\Phi - \Phi, \tilde{p} - p) = \\
&= - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E (\tilde{p} - p) \nabla \cdot (R\Phi - \Phi) + \\
&\quad + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\tilde{p} - p\}\} \llbracket R\Phi - \Phi \rrbracket \cdot \mathbf{n}_e \leq \\
&\leq \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\tilde{p} - p\|_{0,E} \|R\Phi - \Phi\|_{1,E} + \\
&\quad + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \|\{\{\tilde{p} - p\}\}\|_{0,e} \|\llbracket R\Phi - \Phi \rrbracket\|_{0,e} \leq \\
&\leq \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\tilde{p} - p\|_{0,E} \|R\Phi - \Phi\|_{1,E} + \\
&\quad + Ch^k |p|_{H^k(\Omega)} Ch^2 |\Phi|_{H^2(\Omega)} \stackrel{(5.58)}{\leq} \\
&\leq Ch^k |p|_{H^k(\Omega)} \sum_{E \in \mathcal{T}_h} (\|R\Phi - \Phi\|_{0,E} + \|\nabla(R\Phi - \Phi)\|_{0,E}) + \\
&\quad + Ch^{k+2} \frac{C}{\mu} \|\mathbf{U}_h - \mathbf{u}\|_0 \leq \\
&\leq Ch^k |p|_{H^k(\Omega)} (Ch^2 |\Phi|_{H^2(\Omega)} + Ch |\Phi|_{H^2(\Omega)}) + \\
&\quad + Ch^{k+1} \frac{C}{\mu} \|\mathbf{U}_h - \mathbf{u}\|_0 \leq \\
&\leq \frac{C}{\mu} h^{k+1} |p|_{H^k(\Omega)} \|\mathbf{U}_h - \mathbf{u}\|_0.
\end{aligned}$$

Portanto

$$|T_3| \leq \frac{C}{\mu} h^{k+1} |p|_{H^k(\Omega)} \|\mathbf{U}_h - \mathbf{u}\|_0. \quad (5.61)$$

Analogamente,

$$|T_2| \leq Ch^{k+1} \left( |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{1}{\mu} |p|_{H^k(\Omega)} \right) \|\mathbf{U}_h - \mathbf{u}\|_0. \quad (5.62)$$

Seguimos a demonstração majorando o termo  $T_4$ :

$$\begin{aligned} |T_4| &= \left| \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \mu \nabla(R\Phi - \Phi) : \nabla(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}) \right| \leq \\ &\leq \mu \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(R\Phi - \Phi)\|_{0,E} \|\nabla(\mathbf{U}_h - \mathbf{u})\|_{0,E} \leq \\ &\leq \mu \left( \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(R\Phi - \Phi)\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{U}_h - \mathbf{u})\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \mu \frac{C}{\mu} h \|\mathbf{U}_h - \mathbf{u}\|_0 Ch^k \left( |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{1}{\mu} |p|_{H^k(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$|T_4| \leq Ch^{k+1} \left( |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{1}{\mu} |p|_{H^k(\Omega)} \right) \|\mathbf{U}_h - \mathbf{u}\|_0. \quad (5.63)$$

Note que  $\llbracket R\Phi \rrbracket = \llbracket R\Phi - \Phi \rrbracket$ , pois  $\llbracket \Phi \rrbracket = 0$ . Por isso, e também baseando-se nos termos que já foram majorados, ficamos com:

$$|T_7| \leq Ch^{k+1} \left( |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{1}{\mu} |p|_{H^k(\Omega)} \right) \|\mathbf{U}_h - \mathbf{u}\|_0 \text{ e} \quad (5.64)$$

$$|T_5| \leq Ch^{k+1} \left( |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{1}{\mu} |p|_{H^k(\Omega)} \right) \|\mathbf{U}_h - \mathbf{u}\|_0. \quad (5.65)$$

Para o termo  $|T_1|$  a limitação ocorre como segue.

$$\begin{aligned}
|T_1| &= \left| \mu \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e [\mathbf{U}_h - \mathbf{u}] [R\Phi] \right| \leq \\
&\leq \mu \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \|[\mathbf{U}_h - \mathbf{u}]\|_{0,e} \| [R\Phi] \|_{0,e} \leq \\
&\leq \mu \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \|[\mathbf{U}_h - \mathbf{u}]\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \| [R\Phi] \|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \mu \| \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \|_\varepsilon \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \| [R\Phi - \Phi] \|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq Ch^{k+1} \left( |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{1}{\mu} |p|_{H^k(\Omega)} \right) \| \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \|_0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$|T_1| \leq Ch^{k+1} \left( |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{1}{\mu} |p|_{H^k(\Omega)} \right) \| \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \|_0. \quad (5.66)$$

Veja que se  $\epsilon = -1$  (método SIPG) ficamos com  $|T_6| = 0$  e por isso podemos combinar os resultados (5.61)-(5.66) para concluir que:

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \|_0^2 &\leq |T_1| + \dots + |T_7| \leq \\
&\leq Ch^{k+1} \left( |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{1}{\mu} |p|_{H^k(\Omega)} \right) \| \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \|_0 \\
\| \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \|_0 &\leq Ch^{k+1} \left( |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{1}{\mu} |p|_{H^k(\Omega)} \right).
\end{aligned}$$

Agora se  $\epsilon = 0$  ou  $\epsilon = 1$  ficamos com:

$$\begin{aligned}
|T_6| &= \left| -(1 + \epsilon) \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{ \{ \mu \nabla \Phi \} \cdot \mathbf{n}_e [\mathbf{U}_h - \mathbf{u}] \} \right| \leq \\
&\leq \mu \| \Phi \|_2 \| \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \|_\varepsilon \leq \\
&\leq Ch^k \left( |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{1}{\mu} |p|_{H^k(\Omega)} \right) \| \mathbf{U}_h - \mathbf{u} \|_0.
\end{aligned}$$

Ou seja, quando escolhermos o método NIPG ou o IIPG perdemos uma potência de  $h$ .



De acordo com esses teoremas, devemos encontrar nos resultados numéricos uma ordem de convergência igual  $k$  para a pressão e para velocidade na norma  $\|\cdot\|_\varepsilon$  e  $k + 1$  para a velocidade na norma  $\|\cdot\|_0$  (considerando o método SIPG).

# Capítulo 6

## Resultados Numéricos

Esse capítulo é dedicado aos resultados numéricos. Primeiro, uma breve descrição do ambiente de programação e da implementação dos nossos problemas. Em seguida, uma seção para cada problema onde são apresentadas as particularidades desses, bem como seus resultados através de tabelas e uma comparação com a teoria que construímos sobre o método.

### 6.1 O ambiente NeoPZ

O ambiente PZ é um conjunto de classes escritas em linguagem C++ usando programação orientada a objetos que resolvem numericamente EDP's usando elementos finitos. O ambiente permite resolver numericamente problemas 1D, 2D e 3D usando espaços de aproximação contínuos e descontínuos. No entanto, ainda não está concluída a implementação para espaços de ordens diferentes para variáveis diferentes.

A idéia é motivada na similaridade entre os códigos de resolução de problemas físicos distintos, na criação “coletiva” de um código útil para toda a comunidade científica e na propriedade didática que o ambiente tem para o aluno que aprende sobre elementos finitos.

Philippe Devloo e José Filho foram os criadores deste ambiente. Iniciado em 1989 mudou de nome, para NeoPZ, dez anos depois devido a mudanças estruturais. A biblioteca não para de se atualizar recebendo contribuições de diversos pesquisadores da área. A nova meta é criar uma versão para que se possa aplicar os algoritmos já existentes usando computação em paralelo.

Dentre os ítems da biblioteca (módulos) destacamos:

**Analysis:** Armazena classes que realizam tarefas globais de uma simulação de elementos finitos tais como o gerenciamento da montagem da matriz e da solução do problema e a implementação de métodos de pós-processamento.

**Geom:** Implementa métodos para o mapeamento da malha.

**Integral:** Este módulo contém implementações de métodos de integração numérica.

**Material:** Contém as classes que implementam as formulações variacionais dos problemas.

**Matrix:** Define classes de diversos formatos de matrizes tais como banda, simétrica, esparsa e cheia. Além disso, implementa classes de solvers diretos e iterativos.

**Mesh:** Dispõe implementações de elementos geométricos e computacionais além de malhas e sub-malhas, assim como é responsável pela ligação entre os dois tipos de malhas.

**Post:** Responsável pelas classes que geram arquivos de pós-processamento.

**Refine:** Implementa processos de refinamento.

**StrMatrix:** Responsável pela interface entre a matriz de rigidez e o sistema de equações gerado pela malha.

**Util:** Implementa principalmente classes de vetores.

## 6.2 Implementação

Usando o ambiente de programação orientada NeoPZ, descrito na Seção 6.1, a implementação, de uma maneira sucinta, funcionou da seguinte forma: implementamos a formulação variacional do problema (5.10)-(5.11) no módulo *Material*. O cálculo do erro cometido pela aproximação da solução exata foi implementado em *Material* e *Analysis*. Foi criado um arquivo *main* para cada problema analisado. Nesse arquivo foi especificado a malha geométrica, a malha computacional, o lado direito do problema, os dados sobre a solução exata (expressão da função e suas derivadas), o método de resolução do sistema linear, o formato de saída dos resultados (gráficos e tabelas, por exemplo) e outras tarefas que compõem a resolução do problema em questão.

Implementamos também um algoritmo para determinar a pressão unicamente, usando o fato de que  $\int_{\Omega} p = 0$ . Dessa forma encontramos a constante que garante a unicidade da pressão.

Antes de fazermos testes mais complexos, fizemos uns mais triviais a fim de testar o código separadamente. No primeiro deles tomamos os dados do lado direito e as condições de contorno como sendo nulas a fim de recuperar a solução nula. Nos demais testes alternamos entre campo de velocidade e pressão constante ou linear, formando adequadamente o lado direito e as condições de contorno. Em todos esses casos recuperamos a solução exata. A idéia destes primeiros testes é procurar erros no algoritmo de uma maneira mais eficiente.

Durante todo o trabalho desenvolvemos a teoria com base em espaços discretos formados por polinômios. Usamos grau polinomial  $k$  para o espaço relacionado a velocidade e grau  $k - 1$  para aqueles relacionados a pressão. Entretanto, como já comentado, tais espaços ainda estão sendo implementados no NeoPZ por uma doutoranda da UNICAMP (Denise de Siqueira). Então, para não realizar trabalho duplicado e pelo curto espaço de tempo disponível, optamos por implementar a formulação (5.10)-(5.11) considerando espaços de mesma ordem para a velocidade e pressão. Isto é utilizamos os seguintes espaços:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h^* &:= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2 : \mathbf{v} \in \mathbb{P}_k(E)^2, \quad \forall E \in \mathcal{T}_h\}; \\ M_h^* &:= \{q \in L_0^2(\Omega) : q \in \mathbb{P}_k(E), \quad \forall E \in \mathcal{T}_h\}. \end{aligned}$$

Esta escolha facilita o trabalho de implementação, mas, por outro lado, a constante de limitação da condição Inf-Sup discreta passa a depender de  $h$  e de  $k$  (veja [22]). Desse modo o método deixa de ser uniformemente convergente em  $h$  e, por isso, não é mais adequado para estudos de  $h$ -convergência (ver [22]). Para contornar o problema da perda da convergência uniforme podemos estabilizar a formulação. Uma das formas de se fazer isso é acrescentar um termo na formulação que penaliza a pressão de maneira análoga àquela em que a velocidade é penalizada (ver [10]). Tal termo é expresso como:

$$s(p, q) = \sum_{e \in \Gamma_h} \gamma h_e \int_e [p] [q],$$

sendo que  $q$  e  $p$  funções de  $M_h^*$  e  $\gamma$  é uma constante de penalização similar a  $\sigma_e$ . Assim, a formulação do novo método, chamado de SIPG estabilizado, consiste em achar  $(\mathbf{U}_h, P_h) \in \mathbf{X}_h^* \times M_h^*$  tal que

$$\mu a_\epsilon(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}) + b_\epsilon(\mathbf{v}, P_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h^*, \quad (6.1)$$

$$b_\epsilon(\mathbf{U}_h, q) + s(P_h, q) = 0 \quad \forall q \in M_h^*. \quad (6.2)$$

Também em [10] podemos encontrar uma estimativa de erro na norma  $\|\cdot\|_S$  que se refere a ambos, velocidade e pressão, simultaneamente e é definida por:

$$\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|_S = \sqrt{\|\mathbf{v}_h\|_\varepsilon^2 + \|q_h\|_0^2 + s(q_h, q_h)^2}. \quad (6.3)$$

A estimativa afirma que a convergência desse método é de ordem  $k$  na norma  $\|\cdot\|_S$ .

Com o apresentado até aqui vamos ressaltar dois pontos para explorarmos na parte numérica dessa dissertação. O primeiro deles consiste em resolver a formulação (5.10)-(5.11) com os espaços  $\mathbf{X}_h^*$  e  $M_h^*$  ao invés de, respectivamente,  $\mathbf{X}_h$  e  $M_h$  verificando se a convergência é, de fato, perdida ao se realizar  $h$  refinamentos. Nossa referência para esse ponto serão os teoremas de análise de erro (Teorema 5.4.1, Teorema 5.4.2 e Teorema 5.4.3).

O segundo ponto consiste em resolver numericamente a formulação (6.1)-(6.2) calculando a ordem de convergência numérica na norma  $\|\cdot\|_S$ , a qual, esperamos, deve ser igual a  $k$ .

Se o objetivo é achar uma solução satisfatória para a resolução de um problema prático, isso não influencia em nossos resultados, pois estamos, na prática, usando espaços mais ricos do que na teoria, embora não estamos tirando vantagem desse enriquecimento do espaço. Pelo contrário, herdamos com essa escolha o ônus de resolver um sistema linear maior.

Em todos os problemas usamos uma malha triangular conforme e regular e vários níveis de refinamento  $L$ . Conforme mostra a Figura 6.1, em cada simulação temos  $2 \cdot 4^L$  elementos triangulares. E se  $h_L$  é o comprimento  $h$  numa malha de refinamento  $L$  temos que  $h_L = 2h_{L+1}$ .

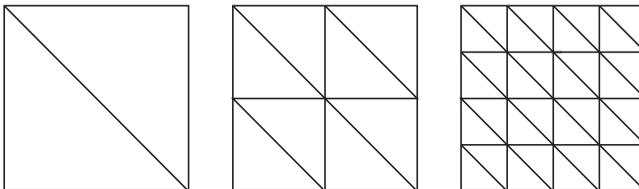


Figura 6.1: Refinamento com elementos triangulares.  $L = 0$ ,  $L = 1$  e  $L = 2$ .

A ordem de convergência numérica  $r_L$  num refinamento de nível

$L$  foi calculada usando a fórmula prática:

$$r_L = \log \left( \frac{e_L}{e_{L-1}} \right) / \log(0.5),$$

sendo que  $e_L$  é o erro avaliado em um nível  $L$  de refinamento.

A título de curiosidade, pois nossa teoria não foi construída para isso, apresentaremos também simulações em malhas onde os elementos são quadrados, como mostra a Figura 6.2. Para essas simulações utilizamos, ao invés do espaço  $\mathbb{P}_k(E)$ , o espaço  $\mathbb{Q}_k(E)$ , composto pelos polinômios com grau até  $k$  em cada coordenada. Por exemplo  $x^2y, y^2x^2 \in \mathbb{Q}_2(E)$  já que em cada coordenada o grau polinomial não passou de 2.

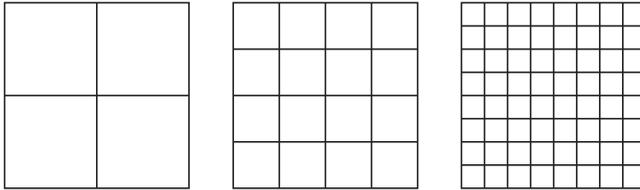


Figura 6.2: Refinamento com elementos quadrados.  $L = 0$ ,  $L = 1$  e  $L = 2$ .

## 6.3 Teste 1

Resolveremos numericamente o problema de Stokes (4.1) usando o seguinte exemplo apresentado em [7]. As soluções exatas são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= -e^x (y \cos y + \sin y), \\ u_2(x, y) &= e^x (y \sin y), \\ p(x, y) &= 2e^x \sin y. \end{aligned}$$

Os demais dados do problema tais como a função  $\mathbf{f}$  e a função condição de fronteira, são construídas a partir das soluções exatas. O domínio neste teste é  $\Omega = (-1, 1)^2$ . Usamos  $\epsilon = 1$  (método SIPG),  $\mu = 1$  e  $\sigma_e = 10$ . Os testes foram feitos para  $k = 1$ ,  $k = 2$  e  $k = 3$  com níveis de refinamento variando de 1 até 5. Vejamos as tabelas com os resultados, sendo que  $\|e_p\|_0$ ,  $\|e_u\|_0$  e  $\|e_u\|_\epsilon$  simbolizam o erro relativo à pressão

na norma  $\|\cdot\|_0$ , o erro relativo à velocidade na norma  $\|\cdot\|_0$  e o erro relativo a velocidade na norma  $\|\cdot\|_\varepsilon$ , respectivamente.

Tabela 6.1: Teste 1 com malha triangular usando o espaço  $\mathbb{P}_k(E)$  com  $k$  igual a 1, 2 e 3.

SIPG		$\ e_p\ _0$		$\ e_u\ _0$		$\ e_u\ _\varepsilon$	
$k.$	$L$	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
1	3	2.179e+00	0.944	2.629e-02	1.900	7.647e-01	0.970
	4	1.122e+00	0.957	6.767e-03	1.960	3.848e-01	0.991
	5	5.708e-01	0.975	1.718e-03	1.980	1.928e-01	0.997
2	3	1.476e-01	1.790	1.173e-03	2.970	4.749e-02	1.990
	4	5.524e-02	1.420	1.463e-04	3.000	1.183e-02	2.000
	5	2.559e-02	1.110	1.831e-05	3.000	2.949e-03	2.000
3	3	5.929e-03	2.990	3.773e-05	4.000	2.031e-03	2.970
	4	8.406e-04	2.820	2.358e-06	4.000	2.539e-04	3.000
	5	1.536e-04	2.450	1.484e-07	3.990	3.172e-05	3.000
SIPG Est.		$\ e_p\ _0$		$\ e_u\ _0$		$\ e_u\ _\varepsilon$	
2	3	6.859e-02	1.920	9.561e-04	2.980	4.266e-02	1.970
	4	1.806e-02	1.930	1.189e-04	3.010	1.073e-02	1.990
	5	4.645e-03	1.960	1.480e-05	3.010	2.687e-03	2.000

Tabela 6.2: Teste 1 com malha triangular usando o espaço  $\mathbb{P}_k(E)$  com  $k$  igual a 1, 2 e 3, para o par  $(\mathbf{u}, p)$  em relação a norma  $\|\cdot\|_S$

$\ (\mathbf{u}, p)\ _S$						
SIPG Est.	$k = 1$		$k = 2$		$k = 3$	
$L$	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
3	7.434e-01	1.010	8.085e-02	1.940	2.564e-03	3.350
4	3.707e-01	1.000	2.102e-02	1.940	2.689e-04	3.250
5	1.850e-01	1.000	5.368e-03	1.970	3.024e-05	3.150

Na Tabela 6.1, para  $k = 1$  encontramos ordens de convergência numérica próximas a 1, 2 e 1 para, respectivamente,  $\|e_p\|_0$ ,  $\|e_u\|_0$  e  $\|e_u\|_\varepsilon$ . Esse resultado, conforme os Teoremas 5.4.1, 5.4.2 e 5.4.3, conferem com a teoria já que o grau polinomial para estas estimativas é igual a 1.

Na mesma tabela, agora para  $k = 2$  e  $k = 3$ , os resultados seguem os teoremas satisfatoriamente com relação aos erros na velocidade. A pressão, no entanto, não se comportou tão bem, apresentando

na parte da tabela em questão ordens inferiores àquelas esperadas pela teoria.

No final da Tabela 6.1 apresentemos o desempenho do método SIPG estabilizado. Visto que, só dispomos de suporte teórico desse método com relação a norma  $\|\cdot\|_S$ , os números nessa tabela são para uma breve comparação, a cargo do leitor, entre os métodos. Essa simulação seguiu de acordo com a teoria prevista para o método SIPG estabilizado, como podemos ver na Tabela 6.2, em que o erro é quantificado na norma  $\|\cdot\|_S$  mostrando uma ordem de convergência bem próxima  $k$ , como afirmado na Seção 6.2.

Como comentado, a título de curiosidade, a Tabela 6.3 apresenta os resultados da simulação desse problema usando o espaço  $\mathbb{Q}_k(E)$  com  $k = 2$ , assim como elementos quadriláteros. Podemos ver que nessas condições o método se comporta quase igual à simulação feita com os elementos triangulares e espaços  $\mathbb{P}_k(E)$ , a não ser a pressão que é melhor aproximada por esse último cenário, o que, talvez, se justifique na estrutura mais rica de  $\mathbb{Q}_k(E)$  perante  $\mathbb{P}_k(E)$ .

Na Figura 6.3 apresentamos o comportamento do erro nas diversas normas e com os diversos graus polinomiais, em função do refinamento. A inclinação de cada reta representa a ordem de convergência, logo, retas paralelas possuem a mesma taxa de convergência.

**Observação:** Considerando uma malha de elementos quadrangulares e espaços polinomiais do tipo  $\mathbb{Q}_k$  [22] traz alguns apontamentos sobre o mal comportamento da pressão em simulações usando espaços com a mesma ordem de aproximação para velocidade e para pressão sem o termo de estabilização. O artigo, traz em teoremas, uma dependência do erro da pressão da seguinte forma:

$$\|P_h - p\| \leq Ch^{k-1} \|\mathbf{u}\|_{H^{k+1}(\Omega)} + Ch^k \|p\|_{H^k(\Omega)}. \quad (6.4)$$

O teorema só vale quando os graus de aproximação para a velocidade e para a pressão são os mesmos. Dessa forma, dependendo do tama-

Tabela 6.3: Teste 1 com malha retangular usando o espaço  $\mathbb{Q}_k(E)$  com  $k$  igual a 2.

SIPG		$\ e_p\ _0$		$\ e_u\ _0$		$\ e_u\ _\varepsilon$	
$k$ .	$L$	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
2	3	1.054e-01	1.84	7.680e-04	3.01	2.800e-02	2.01
	4	2.810e-02	1.91	9.535e-05	3.01	6.998e-03	2.00
	5	7.260e-03	1.95	1.190e-05	3.00	1.751e-03	2.00

nho das quantidades  $|\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}$  e  $|p|_{H^k(\Omega)}$ , podemos ter uma ordem de convergência mais próxima de  $k$  ou de  $k - 1$ . Esta estimativa pode justificar a perda de convergência da pressão apresentada na Tabela 6.1 para  $k = 2$  e  $k = 3$ .

Neste ponto podemos concluir, com base em nossos testes numéricos e em resposta aos nossos objetivos para com a parte numérica deste trabalho, que, de fato, o método SIPG perde convergência (em especial a pressão) quando fazemos  $h$ -refinamentos na malha, no caso de usarmos espaços de aproximação de mesma ordem. As ordens de convergência numérica da velocidade no entanto, se mantém praticamente inalteradas.

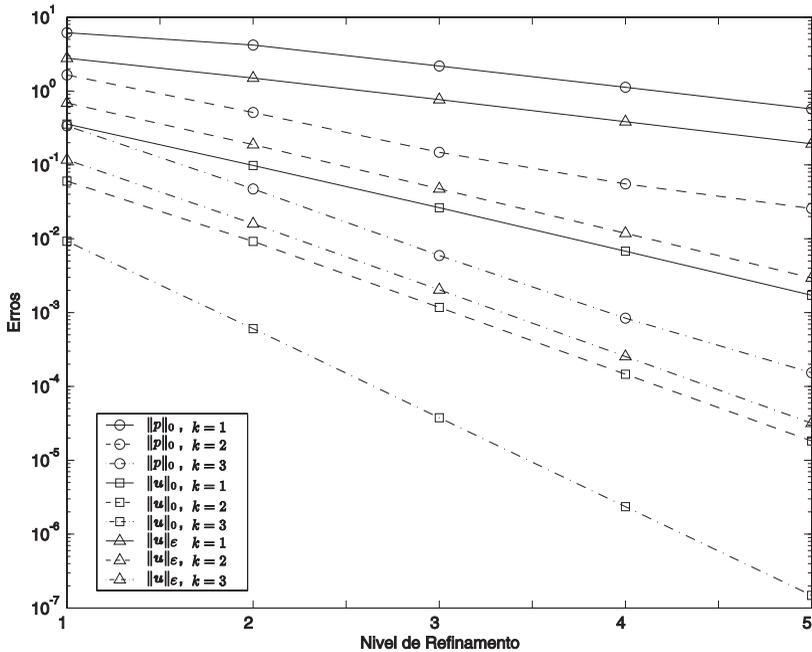


Figura 6.3: Ordens de convergência.

## 6.4 Teste 2 (Fluxo de Kovasznay)

Este problema, apresentado em [17] tem como soluções exatas:

$$u_1(x, y) = 1 - e^{(\lambda x)} \cos(2\pi y),$$

$$u_2(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi} e^{(\lambda x)} \sin(2\pi y),$$

$$p(x, y) = \frac{1}{2} e^{(2\lambda x)},$$

sendo que,

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{1 + 16\pi^2 \mu^2}}{2\mu}.$$

A Figura 6.4 mostra o campo vetorial da velocidade bem como as linhas de contorno da solução  $u_1$ .

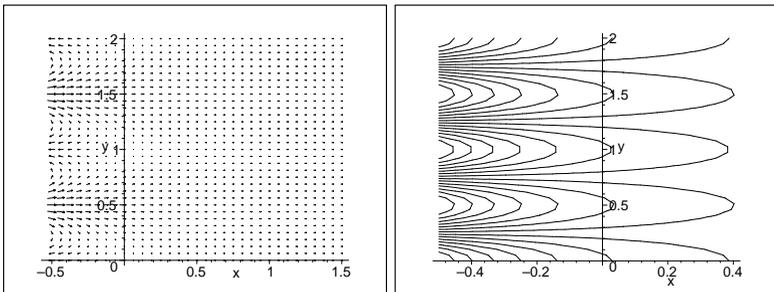


Figura 6.4: Campo vetorial da velocidade e linhas de contorno da solução  $u_1$  quando  $Re = 10$ .

Nessa simulação usamos, além de  $\epsilon = -1$ ,  $\Omega = (0, 2) \times (-0.5, 1.5)$ . Usamos três valores distintos para  $Re$ : 10, 1000 e 10000. Portanto, como nossa viscosidade depende de  $Re$  nossas simulação usam  $\mu = 0.1$ ,  $\mu = 0.001$  e  $\mu = 0.0001$  respectivamente. Ou seja, estamos preocupados, nesse teste, em analisar o desempenho do método quando a viscosidade sofre variações.

As tabelas 6.4, 6.5, 6.6, e 6.7 mostram o desempenho do método SIPG (com  $k = 1$ ,  $k = 2$  e  $k = 3$ ) e do SIPG estabilizado (somente  $k = 2$ ) em relação a pressão na norma  $\|\cdot\|_0$ , a velocidade na norma  $\|\cdot\|_0$  e por último a velocidade na norma  $\|\cdot\|_\epsilon$ . Além disso, para fazer

comparações com a teoria, apresentamos os resultados do método SIPG estabilizado (SIPG Est.) para a norma  $\|\cdot\|_S$ .

O desempenho do método na aproximação da pressão é apresentado na Tabela 6.4. Como já esperávamos, o comportamento dessa grandeza não respeitou o teorema de análise de erro para pressão (Teorema 5.4.2) apresentando ordens ora acima e ora abaixo do grau de aproximação polinomial  $k$ . Claro, o método serve para resolver problemas práticos, pois aproximou a pressão com uma diferença na ordem de  $10^{-7}$  da solução exata, para  $k = 3$ . Ou seja, o método converge, entretanto, não temos muito controle sobre essa convergência.

Na Tabela 6.5 e na Tabela 6.6 o erro na velocidade é analisado com respeito a duas normas distintas ( $\|\cdot\|_0$  e  $\|\cdot\|_\varepsilon$ ). Em ambas, o método condiz com os teoremas de erro para velocidade (Teorema 5.4.3 e Teorema 5.4.1) apresentando ordem  $k + 1$  para a norma  $\|\cdot\|_0$  e ordem  $k$  para a norma  $\|\cdot\|_\varepsilon$ .

Seguindo [10] e analisando o desempenho do método SIPG estabilizado com a norma  $\|\cdot\|_S$ , apresentado na Tabela 6.7, podemos observar uma ordem  $k$  de convergência assim como esperávamos.

Vimos que, concluindo este teste, o método não sofre tanta influência conforme variamos a viscosidade do fluido. Além disso, conseguimos, através de nossos resultados numéricos, validar a estimativa de [10] que espera ordem de convergência numérica  $k$  na norma  $\|\cdot\|_S$  para o método SIPG estabilizado.

Tabela 6.4: Teste 2 com malha triangular usando o espaço  $\mathbb{P}_k(E)$  com  $k$  igual a 1, 2 e 3, para pressão em relação a norma  $\|\cdot\|_0$ 

$\ e_p\ _0$							
SIPG		$Re = 10$		$Re = 1000$		$Re = 10000$	
$k$	$L$	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
1	3	4.329e-01	0.095	4.564e-03	-1.490	4.722e-04	-1.490
	4	1.944e-01	1.160	1.878e-03	1.280	1.943e-04	1.280
	5	9.805e-02	0.987	9.132e-04	1.040	9.449e-05	1.040
2	3	1.315e-01	1.280	7.877e-04	2.110	8.129e-05	2.120
	4	5.560e-02	1.240	1.710e-04	2.200	1.739e-05	2.220
	5	2.649e-02	1.070	4.204e-05	2.020	4.020e-06	2.110
3	3	2.438e-02	2.320	1.732e-04	0.131	1.790e-05	0.060
	4	3.310e-03	2.880	2.408e-05	2.850	2.488e-06	2.850
	5	5.948e-04	2.480	5.167e-06	2.220	5.337e-07	2.220
SIPG Est.		$Re = 10$		$Re = 1000$		$Re = 10000$	
2	3	3.152e-02	1.720	6.097e-04	2.370	7.727e-05	2.170
	4	1.027e-02	1.620	1.291e-04	2.240	1.648e-05	2.230
	5	3.044e-03	1.750	2.734e-05	2.240	3.459e-06	2.250

Tabela 6.5: Teste 2 com malha triangular usando o espaço  $\mathbb{P}_k(E)$  com  $k$  igual a 1, 2 e 3, para velocidade em relação a norma  $\|\cdot\|_0$ 

$\ e_u\ _0$							
SIPG		$Re = 10$		$Re = 1000$		$Re = 10000$	
$k$	$L$	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
1	3	5.901e-02	1.570	1.992e-01	0.131	2.063e-01	0.130
	4	1.635e-02	1.850	5.533e-02	1.850	5.732e-02	1.850
	5	4.334e-03	1.920	1.466e-02	1.920	1.518e-02	1.920
2	3	1.139e-02	2.660	2.461e-02	3.210	2.549e-02	3.210
	4	1.413e-03	3.010	3.208e-03	2.940	3.322e-03	2.940
	5	1.720e-04	3.040	4.048e-04	2.990	4.192e-04	2.990
3	3	1.395e-03	3.560	2.447e-03	1.690	2.533e-03	1.680
	4	8.249e-05	4.080	1.600e-04	3.940	1.656e-04	3.930
	5	5.082e-06	4.020	1.021e-05	3.970	1.057e-05	3.970
SIPG Est.		$Re = 10$		$Re = 1000$		$Re = 10000$	
2	3	8.715e-03	2.670	2.444e-02	3.220	2.547e-02	3.210
	4	1.148e-03	2.920	3.183e-03	2.940	3.319e-03	2.940
	5	1.434e-04	3.00	4.018e-04	2.990	4.188e-04	2.990

Tabela 6.6: Teste 2 com malha triangular usando o espaço  $\mathbb{P}_k(E)$  com  $k$  igual a 1, 2 e 3, para a velocidade em relação a norma  $\|\cdot\|_\varepsilon$

$\ e_u\ _\varepsilon$							
SIPG		$Re = 10$		$Re = 1000$		$Re = 10000$	
$k$	$L$	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
1	3	1.583e+00	0.662	3.713e+00	0.0734	3.845e+00	0.073
	4	8.144e-01	0.959	1.878e+00	0.984	1.944e+00	0.984
	5	4.096e-01	0.992	9.394e-01	0.999	9.728e-01	0.999
2	3	3.997e-01	1.740	7.470e-01	2.280	7.735e-01	2.280
	4	1.013e-01	1.980	1.912e-01	1.970	1.980e-01	1.970
	5	2.512e-02	2.010	4.800e-02	1.990	4.970e-02	1.990
3	3	6.366e-02	2.710	1.004e-01	1.110	1.040e-01	1.100
	4	8.200e-03	2.960	1.272e-02	2.980	1.317e-02	2.980
	5	1.025e-03	3.000	1.594e-03	3.000	1.650e-03	3.000
SIPG Est.		$Re = 10$		$Re = 1000$		$Re = 10000$	
2	3	3.420e-01	1.850	7.410e-01	2.290	7.726e-01	2.280
	4	8.901e-02	1.940	1.897e-01	1.970	1.978e-01	1.970
	5	2.254e-02	1.980	4.767e-02	1.990	4.965e-02	1.990

Tabela 6.7: Teste 2 com malha triangular usando o espaço  $\mathbb{P}_k(E)$  com  $k$  igual a 1, 2 e 3, para o par  $(\mathbf{u}, p)$  em relação a norma  $\|\cdot\|_S$

$\ (\mathbf{u}, p)\ _S$							
SIPG Est.		$Re = 10$		$Re = 1000$		$Re = 10000$	
$k$	$L$	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
1	3	1.489e+00	0.629	3.675e+00	0.0868	3.840e+00	0.075
	4	7.728e-01	0.946	1.865e+00	0.979	1.943e+00	0.983
	5	3.907e-01	0.984	9.338e-01	0.998	9.721e-01	0.999
2	3	3.447e-01	1.850	7.410e-01	2.290	7.726e-01	2.280
	4	8.986e-02	1.940	1.897e-01	1.970	1.978e-01	1.970
	5	2.279e-02	1.980	4.767e-02	1.990	4.965e-02	1.990
3	3	5.372e-02	2.820	9.829e-02	1.130	1.034e-01	1.110
	4	6.775e-03	2.990	1.249e-02	2.980	1.308e-02	2.980
	5	8.377e-04	3.020	1.566e-03	3.000	1.635e-03	3.000

## Capítulo 7

# Conclusões e Trabalhos Futuros

Visto que o objetivo inicial de nosso trabalho era estudar o desempenho do método de Galerkin descontínuo para o problema de Stokes, podemos afirmar, com base nos resultados numéricos e comparações feitas no Capítulo 6, que alcançamos tal objetivo com sucesso. Além disso, ressaltamos:

Foi, de fato, construída a teoria para dar sustentação ao método, representada pelo teorema que garante existência e unicidade do problema quando este apresenta condições sobre coercividade e Inf-Sup.

Foram enunciados e demonstrados os teoremas de análise de erro *a priori* sobre a velocidade e a pressão, assim como foram relacionados com os resultados numéricos.

Os métodos SIPG e SIPG estabilizado foram implementados e avaliados, conforme estabilidade e convergência, segundo as referências teóricas disponíveis sobre estes, alcançando as expectativas determinadas pelas mesmas.

Pensando no futuro, podemos visualizar alternativas que poderiam seguir desse trabalho. A primeira delas é testar o método em sua implementação com espaços de aproximação com ordens diferentes. Como comentado anteriormente, esta está sendo feita e com certeza acrescentará ao pacote NeoPZ mais uma ferramenta interessante. Utilizar essa ferramenta é uma das propostas para trabalhos futuros.

Incluir nos testes para SIPG e SIPG estabilizado, problemas que explicitem numericamente as qualidades e a robustez do método. Por exemplo, a função delta de Dirac, é uma candidata interessante

para protagonizar tal teste futuro.

Visto que nosso trabalho carece de estudos sobre o método de SIPG estabilizado, seria de grande importância numa continuação desse trabalho que se aprimorem os resultados teóricos sobre este método, buscando, por exemplo, teoremas de análise de erro na velocidade e na pressão, considerando a norma  $\|\cdot\|_0$ .

Após vivenciar os pontos positivos que nos engrandecem, e os negativos que nos fortalecem, esperamos que esse trabalho seja útil, de alguma maneira, àqueles que desejam ou precisam aprender sobre o assunto. Afinal a humanidade ainda não aprendeu outra forma de transmissão de conhecimento que não dependa da comunicação.

# Apêndice A

## Definição Alternativa para $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$ e $b_\epsilon(\cdot, \cdot)$

Neste apêndice pretendemos comparar duas formas diferentes de se definir as formas bilineares para se formular o problema de Stokes. Uma corresponde às Definições 5.1 e 5.2 dadas no Capítulo 5 a outra é dada em [15] e será explorada melhor em a seguir.

A diferença entre as duas definições é, basicamente, na forma em que os saltos e médias são apresentados. Usaremos aqui uma outra definição de saltos e médias introduzida por Douglas N. Arnold. Tal definição consta em [1]. Usaremos o mesmo contexto das definições anteriores mostradas na Seção 2.3.

**Definição A.1.** *Seja  $\underline{A}$  uma matriz,  $\mathbf{u}$  um vetor e  $q$  um escalar. seja  $\mathbf{n}_E$  a normal exterior e unitária referente á fronteira  $\partial E$  do elemento  $E$ . Então definimos primeiramente as médias numa interface e entre  $E^L$  e  $E^R$ :*

$$\begin{aligned}\{\{ \underline{A} \}\} &= \frac{1}{2} \left( \underline{A}|_{E_e^L} \right) + \frac{1}{2} \left( \underline{A}|_{E_e^R} \right) \\ \{\{ \mathbf{u} \}\} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}|_{E_e^L} \right) + \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}|_{E_e^R} \right) \\ \{\{ q \}\} &= \frac{1}{2} \left( q|_{E_e^L} \right) + \frac{1}{2} \left( q|_{E_e^R} \right)\end{aligned}$$

Agora definimos os seguintes saltos:

$$\begin{aligned} \llbracket A \rrbracket &= \left( A|_{E_e^L} \right) \mathbf{n}_E - \left( A|_{E_e^R} \right) \mathbf{n}_E \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket &= \left( \mathbf{u}|_{E_e^L} \right) \cdot \mathbf{n}_E - \left( \mathbf{u}|_{E_e^R} \right) \cdot \mathbf{n}_E \\ \llbracket \underline{\mathbf{u}} \rrbracket &= \left( \underline{\mathbf{u}}|_{E_e^L} \right) \otimes \mathbf{n}_E - \left( \underline{\mathbf{u}}|_{E_e^R} \right) \otimes \mathbf{n}_E \\ \llbracket q \rrbracket &= \left( q|_{E_e^L} \right) \mathbf{n}_E - \left( q|_{E_e^R} \right) \mathbf{n}_E \end{aligned}$$

**Observação:** Deve-se convencionar  $\mathbf{n}_E$  como a normal referente a um dos dois elementos (por isso aparece o sinal de menos). Note também que tem dois saltos diferentes para um vetor, dependendo do contexto aquela mais adequada é utilizada. Nas definições da Seção 2.3 salto de escalar era escalar e assim acontecia para vetores e matrizes. Já nessa definição salto de escalar é vetor, salto de vetor é escalar ou matriz e salto de matriz é vetor. Outra diferença é a presença da normal dentro da definição de salto.

Agora, podemos definir as formas equivalentes à  $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$  e à  $b_\epsilon(\cdot, \cdot)$  usando essa nova definição de salto.

**Definição A.2.** *Definimos a forma bilinear  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot) : \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \int_e c \llbracket \underline{\mathbf{u}} \rrbracket : \llbracket \underline{\mathbf{v}} \rrbracket - \\ &\quad - \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \int_e \left( \{\{ \nabla \mathbf{u} \} \} : \llbracket \underline{\mathbf{v}} \rrbracket + \{\{ \nabla \mathbf{v} \} \} : \llbracket \underline{\mathbf{u}} \rrbracket \right). \end{aligned}$$

**Definição A.3.** *Definimos a forma bilinear  $\mathcal{B}(\cdot, \cdot) : \mathbf{X}_h \times M_h \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo*

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}, p) = - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E q \nabla \cdot \mathbf{v} + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial \Omega} \int_e \{\{ q \} \} \llbracket \underline{\mathbf{v}} \rrbracket.$$

Nessa definição não aparece o parâmetro  $\epsilon$ , entretanto conforme classificamos o método anteriormente, podemos considerar aqui  $\epsilon = -1$  (método SIPG). Nessas definições é acrescentado um termo ao parâmetro  $\frac{\sigma_e}{|e|}$  que depende do grau polinomial  $k$ . Tal termo aparece na

definição do novo parâmetro  $c := \frac{\sigma_e}{|e|} k^2$ . É claro que a normal não aparece nas formas anteriores pois já está incluída na definição de salto. Assim, podemos reformular o problema usando nossas novas definições. Achar  $(\mathbf{U}_h, P_h) \in \mathbf{X}_h \times M_h$  tal que

$$\begin{aligned} \mu \mathcal{A}(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}) + \mathcal{B}(\mathbf{v}, P_h) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h \\ \mathcal{B}(\mathbf{U}_h, q) &= 0 & \forall q \in M_h \end{aligned}$$

Esse definição “alternativa” é equivalente àquela que usamos anteriormente. Para conferir basta considerar  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d)$  e  $q$  um escalar e expandir as expressões utilizando as definições de saltos, médias e as demais.



## Apêndice B

# Coercividade e Continuidade de $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$

**Teorema 5.2.2** *A forma bilinear,  $a_\epsilon(\cdot, \cdot) : \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \rightarrow \mathbb{R}$ , para o problema de Stokes é contínua na norma  $\|\cdot\|_\epsilon$ .*

**Demonstração:** Pela Definição 3.1 devemos mostrar que existe um  $M > 0$ , tal que, para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$  temos:

$$|a_\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M \|\mathbf{u}\|_\epsilon \|\mathbf{v}\|_\epsilon$$

Então, partindo do lado esquerdo da desigualdade, usando a Definição 5.3, temos que:

$$\begin{aligned} a_\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e [\![\mathbf{u}]\!] \cdot [\![\mathbf{v}]\!] - \\ &\quad - \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\!\{ \nabla \mathbf{u} \}\!\} \mathbf{n}_e \cdot [\![\mathbf{v}]\!] + \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\!\{ \nabla \mathbf{v} \}\!\} \mathbf{n}_e \cdot [\![\mathbf{u}]\!] \leq \\ &\leq |T_1| + |T_2| + |T_3| + |T_4|. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Para o termo  $T_1$  vamos usar, tanto para  $\mathbf{u}$  quanto para  $\mathbf{v}$ , uma majoração análoga a que fizemos para  $\chi$  na limitação do também termo  $T_1$  na demonstração do Teorema 5.4.1. Assim obtemos:

$$|T_1| \leq \|\mathbf{u}\|_\epsilon \|\mathbf{v}\|_\epsilon. \tag{B.2}$$

Para o termo  $|T_2|$ , a majoração é análoga ao termo  $T_4$  da demonstração do Teorema 5.4.1. Nesse caso ficamos com:

$$|T_2| \leq \|\mathbf{u}\|_\epsilon \|\mathbf{v}\|_\epsilon. \tag{B.3}$$

O termo  $T_3$  e o termo  $T_4$  são majorados de maneira análoga aos termos  $T_2$  e  $T_3$  da demonstração do Teorema 5.4.1. Desse maneira, sendo  $C_3$  e  $C_4$  constantes positiva, temos:

$$|T_3| \leq C_3 \|\mathbf{u}\|_\epsilon \|\mathbf{v}\|_\epsilon. \tag{B.4}$$

$$|T_4| \leq C_4 \|\mathbf{u}\|_\epsilon \|\mathbf{v}\|_\epsilon. \tag{B.5}$$

A continuidade é resultado direto da substituição das limitações (B.2), (B.3), (B.4) e (B.5) na desigualdade (B.1). ■

**Teorema 5.2.3** *A forma bilinear,  $a_\epsilon(\cdot, \cdot) : \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \rightarrow \mathbb{R}$ , para o problema de Stokes é coerciva na norma  $\|\cdot\|_\epsilon$  quando  $\sigma_e$  é adequado.*

**Demonstração:** Devemos então, de acordo com a definição de coercividade (Definição 3.2), mostrar que existe uma constante  $\alpha > 0$  independente de  $h$  tal que

$$a_\epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_\epsilon^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h.$$

Pela Definição 5.3 temos que:

$$\begin{aligned} a_\epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket - \\ &- \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\nabla \mathbf{v}\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket + \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\nabla \mathbf{v}\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket = \\ &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,E}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sigma_e}{|e|} \|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{0,e}^2 + \\ &+ (\epsilon - 1) \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\nabla \mathbf{v}\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket = \\ &= \|\mathbf{v}\|_\epsilon^2 + (\epsilon - 1) \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\nabla \mathbf{v}\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket = \\ &= \|\mathbf{v}\|_\epsilon^2 + (\epsilon - 1)T. \end{aligned}$$

Note que se  $\epsilon = 1$  então  $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$  é coerciva com  $\alpha = 1$ . Caso contrário,  $\epsilon = 0$  ou  $\epsilon = -1$ , ou seja, se  $\epsilon \neq 0$  o termo  $T$  será negativo e portanto

para concluir a demonstração devemos majorá-lo.

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \int_e \{\{\nabla \mathbf{v}\}\} \mathbf{n}_e \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \stackrel{(1.6)}{\leq} \\
&\leq \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{\sqrt{|e|}}{\sqrt{|e|}} \|\{\{\nabla \mathbf{v}\}\} \mathbf{n}_e\|_{0,e} \|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{0,e} \stackrel{(1.6) \text{ em } \mathbb{R}}{\leq} \\
&\leq \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} |e| \|\{\{\nabla \mathbf{v}\}\} \mathbf{n}_e\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{1}{|e|} \|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Agora lembremos que  $|e|$  pode ser majorado por uma constante  $C > 0$  e usaremos a desigualdade de Young (1.7) com  $\epsilon = \delta$ . Assim ficamos com:

$$T \leq \frac{C}{2\delta} \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \|\{\{\nabla \mathbf{v}\}\} \mathbf{n}_e\|_{0,e}^2 + \frac{\delta}{2} \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{1}{|e|} \|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{0,e}^2$$

Na demonstração do Teorema 5.4.1 majoramos um termo praticamente igual a  $\sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \|\{\{\nabla \mathbf{v}\}\} \mathbf{n}_e\|_{0,e}^2$ , porém com  $\chi$  ao invés de  $\mathbf{v}$ . Mas ambos estão em  $\mathbf{X}_h$ , logo, usando os resultados de tal demonstração ficamos com:

$$T \leq \frac{C}{2\delta} \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,E}^2 + \frac{\delta}{2} \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{1}{|e|} \|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{0,e}^2$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
a_\epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{v}\|_\epsilon^2 + (\epsilon - 1)T \geq \\
&\geq \|\mathbf{v}\|_\epsilon^2 - T \geq \\
&\geq \|\mathbf{v}\|_\epsilon^2 - \frac{C}{2\delta} \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,E}^2 - \frac{\delta}{2} \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{1}{|e|} \|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{0,e}^2 \stackrel{5.12}{=} \\
&= \left(1 - \frac{C}{2\delta}\right) \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,E}^2 + \left(\sigma_\epsilon - \frac{\delta}{2}\right) \sum_{e \in \Gamma_h \cup \partial\Omega} \frac{1}{|e|} \|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|_{0,e}^2
\end{aligned}$$

Veja que se  $\frac{C}{2\delta} < 1$  e  $\frac{\delta}{2} < \sigma_\epsilon$  a demonstração acaba. A escolha de  $\delta$  é livre segundo a desigualdade de Young, assim como também é livre a

escolha de  $\sigma_e$ . Porém a constante  $C$  requer um pouco mais de cuidado. No entanto, se fizermos com que  $\sigma_e$  e  $\delta$  sejam tais que  $\frac{C}{2} < \delta < 2\sigma_e$ , (ver [19] seção 2.7.1) a constante  $C$  fica sob controle e a demonstração pode ser concluída. Note, como vimos no início da demonstração, que para o caso  $\epsilon = 1$  (NIPG), a coercividade não depende de  $\sigma_e$ .



# Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, D. N. et al. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 39 n. 5 p. 1749-1779, 2002.
- [2] AXLER, S. *Linear Algebra Done Right*. New York: Springer, 1997. 249 p.
- [3] BÖSING, P. R. *Método de Galerkin descontínuo para equações elípticas de alta ordem*. 2006. 119 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática e estatística, Universidade do Estado de São Paulo. São Paulo. 2006.
- [4] BRENNER, S. C.; SCOTT, L. R. *The mathematical theory of finite element methods*. New York: Springer, 1994. 294 p.
- [5] CIARLET, P. G. *The finite element method for elliptic problems*. Amsterdam: North-Holland, 1980. 530 p.
- [6] CHEN, Z. *Finite element methods and their applications*. Berlin: Springer, 2005. 410 p.
- [7] COCKBURN, B. et al. Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 40 n. 1 p. 319-343, 2002.
- [8] COCKBURN, B.; KARNIADAKIS, G. E.; SHU, C-W. *The development of discontinuous Galerkin methods*. In: FIRST INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DISCONTINUOUS GALERKIN METHODS, Notas de aulas em Computational Science and Engineering, v. 11, Springer Verlag, 2000 p.3-50.

- [9] DEVLOO, P. R. B. An object oriented environment for scientific programming. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, n. 150, p. 133-153, 1997.
- [10] DI PIETRO, D. A.; ERN, A. Discrete funcional analysis tools for discontinuous Galerkin methods with application to the incompressible Navier-Stokes equations. v. 1. *Mathematics of Computation*, v. 79, n. 271, p. 1303-1330, 2010.
- [11] GERBEAU, J. F.; FARHAT, C. DISCIPLINA CME 358, 2009. Stanford. *The finite element method for fluid mechanics*, Stanford, Stanford University, 2009.
- [12] GIRAULT, V.; RAVIART, P-A. *Finite elements methods for Navier-Stokes equations*. Springer Verlag, 1986. 374 p.
- [13] GIRAULT, V.; RIVIÈRE, B. ; WHEELER, M. F. A discontinuous Galerkin method with nonoverlapping domain composition for the Stokes and Navier-Stokes problems. *Mathematics of Computation*, v. 74, n. 249, p. 53-84, 2004.
- [14] GRISVARD, P. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Boston: Pitman, 1984, 410 p.
- [15] HOUSTON, P.; SCHÖTZAU, D.; WIHLER, T. P. *hp-adaptative discontinuous Galerkin finite element methods for the Stokes problem*. In: EUROPEAN CONGRESS ON COMPUTACIONAL METHODS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING, 2004, Jyväskylä. Jyväskylä, 2004 p.1-20.
- [16] KREYZIG, E. *Introductory funcional analysis with applications*. New York: John Wiley & Sons, 1978. 688 p.
- [17] NGUYEN, N.C.; PERAIRE, J.; COCKBURN B. A hybridizable discontinuous Galerkin method for Stokes flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, n. 199, p. 582-597, 2009.
- [18] REED, W. H.; Hill, T. R. *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*. Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [19] RIVIÈRE, B. *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations*. Philadelphia: SIAM, 2008. 190 p.

- [20] RIVIÈRE, B.; WHEELER, M. F.; GIRAULT, V. A priori error estimates for finite element methods based on discontinuous approximation spaces for elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 39 n. 3 p. 902-931, 2001.
- [21] SCHWAB, C. *p- and hp- finite element methods: theory and applications in solid and fluid mechanics*. New York: Oxford University Press, 1998. 375 p.
- [22] TOSELLI, A. *hp Discontinuous Galerkin Approximations for the Stokes Problem*. In: SEMINAR FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK, 2002, ZÜRICH, p.1-27
- [23] YANG, D. *C++ and object-oriented numeric computing: for scientists and engineers*. New York: Springer, 2001. 439 p.
- [24] YOSIDA, K. *Functional Analysis*. 6. ed. Berlin: Springer, 1965. 500 p.