

ANDRÉ SCHNEIDER DE OLIVEIRA

**ANÁLISE CINEMÁTICA VIA QUATÉRNIOS
DUAIS APLICADA A UM SISTEMA
VEÍCULO-MANIPULADOR SUBAQUÁTICO**

**FLORIANÓPOLIS
2011**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

André Schneider de Oliveira

**ANÁLISE CINEMÁTICA VIA QUATÉRNIOS DUAIS
APLICADA A UM SISTEMA VEÍCULO-MANIPULADOR
SUBAQUÁTICO**

Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. Edson Roberto De Pieri

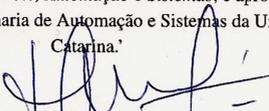
Co-orientador: Prof. Dr. Ubirajara Franco
Moreno

**Florianópolis
2011**

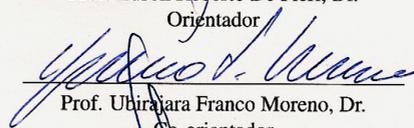
**ANÁLISE CINEMÁTICA VIA QUATÉRNIOS DUAIS
APLICADA A UM SISTEMA VEÍCULO-MANIPULADOR SUBAQUÁTICO**

André Schneider de Oliveira

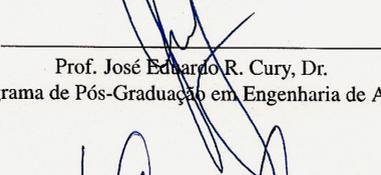
'Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas, Área de Concentração em *Controle, Automação e Sistemas*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina.'



Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr.
Orientador

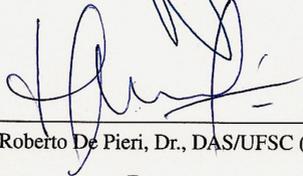


Prof. Ubirajara Franco Moreno, Dr.
Co-orientador



Prof. José Eduardo R. Cury, Dr.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas

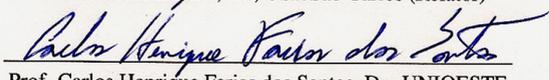
Banca Examinadora:



Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr., DAS/UFSC (Presidente)



Prof. Marcelo Becker, Dr., USP/São Carlos (Relator)



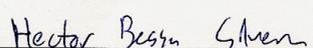
Prof. Carlos Henrique Farias dos Santos, Dr., UNIOESTE



Prof. Daniel Martins, Dr., EMC/UFSC



Prof. Henrique Simas, Dr., EMC/UFSC



Prof. Hector Bessa Silveira, Dr., DAS/UFSC

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas.

ANÁLISE CINEMÁTICA VIA QUATÉRNIOS DUAIS APLICADA A UM SISTEMA VEÍCULO MANIPULADOR SUBAQUÁTICO

André Schneider de Oliveira

Este trabalho propõe metodologias para a análise cinemática de sistemas veículo-manipulador subaquáticos (UVMS) através de quatérnios duais com o intuito de impor menor variação de torque nas juntas durante o seguimento de trajetória. Em adição a isso, evita-se a ocorrência de singularidades cinemáticas e obtém-se menor custo computacional. A abordagem é apresentada inicialmente como uma alternativa à representação tradicional dos movimentos aplicada na cinemática direta de mecanismos através da convenção de Denavit-Hartenberg e do método dos helicoides sucessivos. O benefício dessa representação está no menor custo computacional, mas principalmente, no desacoplamento dos ângulos de orientação de forma a evitar as singularidades cinemáticas. Os quatérnios duais também são aplicados na cinemática inversa em uma metodologia interativa através do método de Davies como uma modalidade de realimentação livre de singularidades. Por fim, a principal contribuição deste trabalho está na proposta da aplicação dos quatérnios duais na cinemática inversa diferencial em por uma metodologia analítica, através da apresentação do Jacobiano dual-quatérniônico. Essas abordagens são aplicadas a um sistema subaquático, onde o amortecimento imposto pela imersão no fluido dissipa grandes variações de torque e agrega erros no seguimento da trajetória.

Palavras-chave: Quatérnios Duais, Singularidade, Sistemas Veículo-Manipulador Subaquáticos, Método de Davies

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Automation and Systems Engineering.

KINEMATIC ANALYSIS THROUGH DUAL QUATERNIONS APPLIED TO AN UNDERWATER VEHICLE-MANIPULATOR SYSTEM

André Schneider de Oliveira

This work proposes a methodology for kinematic analysis of underwater vehicle-manipulator systems (UVMS) using dual-quaternions. The objective is to provide a less joint torque variation to trajectory tracking, avoidance of kinematic singularities occurrence and a lower computational cost. The approach is initially presented as an alternative representation of movements applied to direct kinematics through the Denavit-Hartenberg convention and the successive screws method. The benefit of this representation is a lower computational cost, but mainly, the decoupling of orientation angles in order to avoid kinematic singularities. The dual quaternions also are applied in the inverse kinematics in an interactive approach through Davies method as a feedback without singularities. Finally, the main contribution of this work is the proposal of dual quaternions application in an analytical approach of differential inverse kinematics through of the dual-quaternionic Jacobian. These approaches are applied to an underwater system, where the damping imposed by fluid immersion dissipates large torque variations adding errors in trajectory tracking.

Keywords: Dual Quaternions, Singularity, Underwater Vehicle-Manipulator Systems, Davies Method

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS, ABREVIATURAS E TERMOS	ix
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS	xi
LISTA DE ALGORITMOS	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA	3
1.2 OBJETIVOS	7
1.2.1 Objetivos Específicos	8
1.3 ORGANIZAÇÃO	8
2 O PROBLEMA DA OCORRÊNCIA DAS SINGULARIDADES	11
2.1 CINEMÁTICA DIFERENCIAL	11
2.1.1 Singularidades	13
2.1.2 Redundância	21
2.2 CONCLUSÃO	27
3 ÁLGEBRA QUATERNIÔNICA	29
3.1 ÁLGEBRA DE CLIFFORD	29
3.2 QUATÉRNIOS	34
3.3 BIQUATÉRNIOS E QUATÉRNIOS DUAIS	40
3.3.1 Transformações Geométricas	42
3.3.2 Representação da Posição	44
3.3.3 Representação da Orientação	45
3.4 CONCLUSÃO	47
4 ANÁLISE CINEMÁTICA	49
4.1 CINEMÁTICA DIRETA	49
4.1.1 A Convenção de Denavit-Hartenberg	50
4.1.2 Método dos Helicoides Sucessivos	56
4.2 ÂNGULOS DE ORIENTAÇÃO	63
4.3 DESEMPENHO COMPUTACIONAL	64

4.4	CONCLUSÃO	67
5	CINEMÁTICA DIFERENCIAL INTERATIVA	69
5.1	CINEMÁTICA INVERSA DIFERENCIAL UTILIZANDO RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS	69
5.2	ESTUDO DE CASO	78
5.2.1	Realimentação Dual-Quaterniônica	82
5.2.2	Seguimento de Trajetória sem Singularidades Cinemáticas	83
5.3	CONCLUSÃO	85
6	CINEMÁTICA DIFERENCIAL ANALÍTICA	87
6.1	MATRIZ JACOBIANA	87
6.1.1	Jacobiano Geométrico	88
6.1.2	Jacobiano Analítico	90
6.2	JACOBIANO DUAL-QUATERNIÔNICO	91
6.2.1	Estudo de Caso	98
6.3	CONCLUSÃO	102
7	SISTEMAS VEÍCULO-MANIPULADOR SUBAQUÁTICOS	103
7.1	MODELO HIDRODINÂMICO	103
7.2	ESTUDO DE CASO	105
7.2.1	Cinemática Direta Dual-Quaterniônica	107
7.2.2	Realimentação Dual-Quaterniônica	109
7.2.3	Jacobiano Dual-Quaterniônico	115
7.3	CONCLUSÃO	119
8	CONCLUSÃO	121
8.1	CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO DE TESE	123
8.2	PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS	124
	APÊNDICES	
A	Métodos de Integração	127
B	Representação Clássica dos Movimentos	131
C	Representação da Orientação	145
D	Convenção de Denavit-Hartenberg	149
E	Sistemas de Helicóides	153
F	Cinemática Inversa Diferencial	159
G	Estratégias de Controle Clássicas	171

H Modelagem Hidrodinâmica	183
I Modelo Matemático: ODIN	199
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	207

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Biquatérnio	Associação entre dois quatérnios através do operador ω
D-H	Denavit-Hartenberg
DOF	<i>Degrees of Freedom</i> , ou graus de liberdade
MIPS	Milhões de instruções por segundo
MTH	Matriz de transformação homogênea
ODIN	<i>Omni Directional Intelligent Navigator</i> , ou navegador inteligente omni-direcional
Postura	Localização (ou posição) e orientação espacial do mecanismo
QD	Quatérnio dual, ou <i>dual-quaternion</i> , biquatérnio cujo quadrado de seu operador é nulo
Quatérnio	<i>ou quaternion</i> , quadrinômio imaginário composto por 1 componente real e 3 componentes imaginárias
RISC	<i>Reduced Instruction Set Computer</i> , ou Computador com conjunto de instruções reduzido
RPY	Conjunto de ângulos de Euler <i>Roll-Pitch-Yaw</i>
SNAME	Notação para padronização da simbologia de veículos aquáticos e subaquáticos
UVMS	<i>Underwater Vehicle-Manipulator System</i> , ou Sistema Veículo- Manipulador Subaquático

LISTA DE FIGURAS

1.1	Manipulador espacial movimentando o astronauta para um reparo no telescópio Hubble	1
1.2	Robô explorador de Marte	2
1.3	Robô Opportunity em Marte	2
1.4	Sistema veículo-manipulador subaquático	3
1.5	Organização da tese baseada no diagrama de controle do UVMS.	9
2.1	Degeneração do manipulador redundante planar 3R para o manipulador não-redundante 2R	14
2.2	Singularidade de orientação do punho	16
2.3	<i>Teach-pendant</i> da <i>ABB Robotics</i>	18
2.4	Ilustração do fenômeno “ <i>gimbal-lock</i> ”	19
2.5	Rotações ativas e passivas.	19
2.6	Exemplo de aplicação de rotações passivas e ocorrência do fenômeno “ <i>gimbal-lock</i> ”.	20
2.7	Exemplo de aplicação de rotações ativas.	20
2.8	Múltiplas soluções para a cinemática inversa do manipulador serial planar 3R	22
2.9	Manipulador redundante serial planar 3R	22
2.10	Redundância de posicionamento direita-esquerda	24
2.11	Redundância de posicionamento em cima-baixo	24
2.12	Redundância de posicionamento no punho	24
2.13	Soluções para a cinemática do manipulador em uma aplicação de infinitas soluções	25
2.14	Redundância e singularidades em sistemas veículo-manipulador subaquáticos.	26
3.1	Multiplicação dos quatérnios	35
3.2	Representação de um ponto no espaço.	38
3.3	Rotação de ângulo duplo por quatérnios.	39
3.4	Representação espacial do corpo rígido.	45
4.1	Cinemática direta	50
4.2	Convenção de Denavit-Hartenberg aplicada ao manipulador planar 3R.	51
4.3	Sistema de helicóides aplicados a um manipulador serial	57

4.4	Método dos Helicóides Sucessivos aplicado ao manipulador planar 3R.	60
4.5	Análise do desempenho computacional da multiplicação de dois quatérnios duais.	65
4.6	Análise do desempenho computacional das transformações através das matrizes de transformação homogêneas.	66
4.7	Análise do desempenho computacional das transformações através de quatérnios duais.	66
5.1	Exemplificação do método de Davies.	70
5.2	Cadeias Virtuais de Assur.	72
5.3	Diagrama de cinemática inversa diferencial realimentada por quatérnios duais.	75
5.4	Gráfico de convergência do procedimento iterativo para a determinação da cinemática inversa aplicada ao manipulador planar 3R.	76
5.5	Ensaio realizados com o procedimento iterativo para a determinação da cinemática inversa aplicada ao manipulador planar 3R.	77
5.6	Sistema de helicóides aplicado ao manipulador SCARA.	78
5.7	Trajetória aplicada ao manipulador SCARA.	79
5.8	Trajetória com perfil trapezoidal de velocidade	80
5.9	Estrutura de simulação dinâmica.	80
5.10	Análise da influência das singularidades inerentes das matrizes de transformação homogênea durante a execução da trajetória.	81
5.11	Sistema de helicóides aplicado ao manipulador SCARA.	82
5.12	Seguimento da trajetória através do método dual-quaterniônico.	84
5.13	Estudo de caso SCARA: perfis de velocidades das juntas	84
5.14	Estudo de caso SCARA: perfis de acelerações das juntas	84
5.15	Estudo de caso SCARA: perfis de torques normalizados	85
5.16	Estudo de caso SCARA: erro de postura normalizado do efetuador	85
6.1	Mapeamento entre os espaço das velocidades de junta e o espaço das velocidades do efetuador	88
6.2	Cinemática diferencial inversa realimentada clássica	96
6.3	Cinemática inversa diferencial através do Jacobiano dual-quaterniônico.	97
6.4	Aplicação da cinemática inversa diferencial clássica para o manipulador planar 3R: análise de posição de junta.	98
6.5	Aplicação da cinemática inversa diferencial clássica para o manipulador planar 3R: análise de velocidades.	98
6.6	Aplicação da cinemática inversa diferencial dual-quaterniônica para o manipulador planar 3R.	99

6.7	Aplicação da cinemática inversa diferencial dual-quaterniônica para o manipulador planar 3R: análise de velocidades.	99
6.8	Análise dos erros no espaço operacional na aplicação da cinemática inversa diferencial em ambos os métodos para o manipulador planar 3R	100
7.1	Notação de SNAME aplicada a um UVMS.	106
7.2	AUV ODIN	106
7.3	Modelo cinemático do UVMS.	107
7.4	Método do helicoides sucessivos aplicado ao UVMS.	108
7.5	Trajetória imposta ao UVMS.	109
7.6	Trajetória com perfil trapezoidal de velocidade	109
7.7	Estrutura de simulação hidrodinâmica.	110
7.8	Sistema de helicóides aplicado ao UVMS.	110
7.9	Estudo de caso UVMS: perfis de torque normalizado no espaço das juntas para o veículo	112
7.10	Estudo de caso UVMS: perfis de torque normalizado no espaço das juntas para o manipulador	112
7.11	Estudo de caso UVMS: perfis de posição normalizados no espaço das juntas	113
7.12	Estudo de caso UVMS: perfis de velocidade normalizados no espaço das juntas	113
7.13	Estudo de caso UVMS: diferença nos perfis de aceleração no espaço das juntas	114
7.14	Estudo de caso UVMS: erro normalizado de postura no espaço das juntas	114
7.15	Análise da cinemática inversa diferencial analítica aplicada ao UVMS: perfil de posição normalizado no espaço das juntas	116
7.16	Análise da cinemática inversa diferencial analítica aplicada ao UVMS: perfil de velocidade normalizado no espaço das juntas	116
7.17	Análise da cinemática inversa diferencial analítica aplicada ao UVMS: perfil de erro de posição normalizado no espaço operacional, com "zoom"na região de transiente	117
7.18	Análise da cinemática inversa diferencial analítica aplicada ao UVMS: perfil de erro de velocidade normalizado no espaço operacional, com "zoom"na região de transiente	117

LISTA DE TABELAS

4.1	Parâmetros de Denavit-Hartenberg do manipulador planar 3R. . . .	51
4.2	Parâmetros dos helicóides dispostos no manipulador planar 3R. . .	60
4.3	Análise de desempenho em termos de operações aritméticas e de memória entre as matrizes de transformação homogêneas e os quaternios duais.	67
7.1	Notação para veículos marítimos	105

LISTA DE ALGORITMOS

6.1	Cinemática inversa diferencial dual-quaterniônica para o manipulador planar 3R	101
7.1	Cinemática inversa diferencial dual-quaterniônica aplicada ao UVMS	118

1 INTRODUÇÃO

A operação em ambientes potencialmente perigosos e de difícil acessibilidade para os seres humanos é uma das aplicações para a robótica, onde comumente, são empregados sistemas veículo-manipulador, prevenindo a exposição da vida humana a esses ambientes. Na literatura são encontrados diversos trabalhos relacionados a essas aplicações, por exemplo, em Fu et al. (2006) e Capuska et al. (2005) sistemas robóticos são empregados em ambientes radioativos como em usinas nucleares. Em Seward, Pace e Agate (2007), Stone e Edmonds (1992) e White, Sunagawa e Nakajima (1989) robôs são utilizados para a operação em ambientes perigosos. Garcia-Cerezo et al. (2007) é aplicado um sistema robótico para missões de exploração e resgate em ambientes perigosos e hostis. Sistemas veículo-manipulador são aplicados em uma grande diversidade de ambientes que podem ser categorizados em espacial, terrestre e aquáticos.

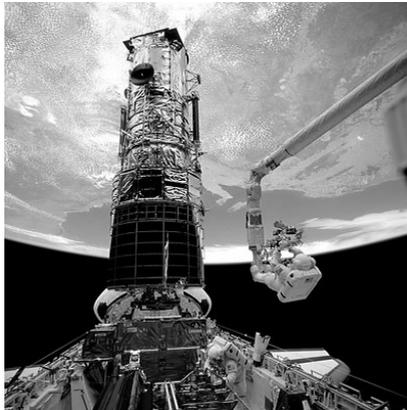


Figura 1.1: Manipulador espacial movimentando o astronauta para um reparo no telescópio Hubble.

Fonte: HubbleSite (2008).

A presença de radiação, a escassez de oxigênio e a ausência de gravidade são características fundamentais do *ambiente espacial*, fatores que dificultam a presença humana. Porém, trajes e equipamentos especiais fornecem condições satisfatórias para que tripulações humanas possam realizar missões

espaciais. A dificuldade então está associada com a falta de gravidade. Os movimentos realizados nessas condições podem levar o astronauta a se perder no vácuo espacial. Assim, os ônibus espaciais são comumente compostos por braços articulados (Figura 1.1) que servem para colocar satélites em órbita ou recuperá-los para manutenção e para movimentação dos astronautas no espaço (por exemplo, estabelecendo caminho até um telescópio espacial ou possibilitando a execução de tarefas na parte exterior de um ônibus espacial).

A exploração do *ambiente terrestre*, devido a fatores climáticos extremos ou mesmo a distância, também é realizada com a aplicação de sistemas robóticos. O programa espacial americano utilizou dois sistemas veículo-manipulador para a exploração da superfície do planeta Marte (Figura 1.2). A motivação desse projeto está na avaliação do meio ambiente (Figura 1.3), mais precisamente das rochas e do solo à procura de indícios da existência de água em Marte, visando determinar a existência de vida no passado, estudar os fatores climáticos, estudar a geologia do planeta e levantar as possibilidades de uma futura exploração humana em Marte (NASA, 2008).



Figura 1.2: Robô explorador de Marte.

Fonte: NASA (2008).

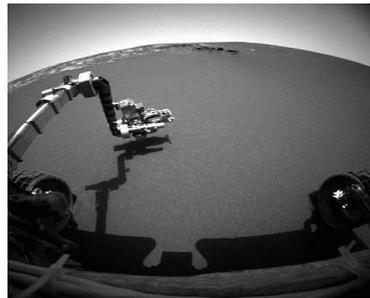


Figura 1.3: Robô Opportunity em Marte.

Fonte: NASA (2008).

Por outro lado, o oceano é considerado a última grande fronteira do nosso planeta cobrindo a maior parte da superfície terrestre. Entretanto, o conhecimento sobre os oceanos é apenas superficial ao ponto que possui-se mapas melhores do planeta Marte do que do fundo oceânico (GEOPROF, 2008). O *ambiente aquático* ainda é considerado relativamente inacessível aos instrumentos convencionais de sensoriamento devido à dificuldade de se operar tais instrumentos nestes níveis de profundidade. Com a utilização de sistemas robóticos subaquáticos (Figura 1.4) é possível acessar grandes profundidades com uma variedade de câmeras, sensores especiais e equipamentos acústicos (GEOPROF, 2008). As missões subaquáticas com sistemas robóticos possibilitam os estudos marinhos em regiões profundas à procura de novas fontes

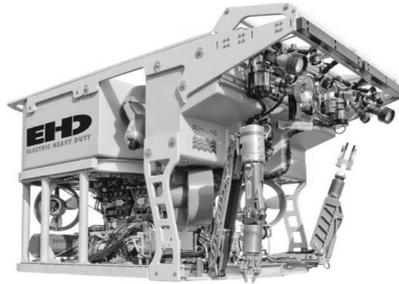


Figura 1.4: Sistema veículo-manipulador subaquático.

Fonte: SchillingRobotics (2008).

de gás e petróleo, inspeção subaquática, perfuração, escavação, manutenção de tubulações, cabeamento subaquático e aplicações militares (CUI; PODDER; SARKAR, 1999).

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Os robôs usados em missões subaquáticas são conhecidos como veículos robóticos subaquáticos (*URVs, Underwater Robotic Vehicles*), também denominados de veículos aquáticos não-tribulados (*UUVs, Unmanned Underwater Vehicles*) (WANG; LANE, 1997) e são comumente classificados em dois grupos. O primeiro é composto pelos veículos remotamente operados (*ROVs, Remotely Operated Vehicles*) ou sistemas não-autônomos coordenados a distância por um operador. O segundo constitui os veículos subaquáticos autônomos (*AUVs, Autonomous Underwater Vehicles*) ou sistemas automatizados que podem tomar algumas decisões independentemente de um operador. Essas duas modalidades de sistemas recebem novas denominações quando é acoplado um ou mais manipuladores ao veículo sendo então designados de sistemas veículo-manipulador subaquáticos (*UVMs, Underwater Vehicle-Manipulator Systems*) (CUI; PODDER; SARKAR, 1999).

Os sistemas veículo-manipulador subaquáticos são sistemas complexos, caracterizados por restrições altamente influentes em sua movimentação que são evidenciadas em aplicações de interação com o ambiente. As dificuldades associadas a esses sistemas são, principalmente: as incertezas paramétricas do modelo dinâmico (ou seja, perturbações não-modeladas atuantes sobre a dinâmica do sistema), a redundância cinemática do sistema e o alto acoplamento entre o veículo e o manipulador (ANTONELLI; CHIAVERINI; SARKAR, 1999).

O *modelo hidrodinâmico* de sistemas veículo-manipulador é composto por equações diferenciais não-lineares, fortemente acopladas e sujeitas a diversos tipos de perturbações e variações dos parâmetros, sendo caracterizadas como incertezas, principalmente, devido a fatores hidrodinâmicos, como a adição de massa e inércia, amortecimento, correntes oceânicas, forças gravitacionais e de empuxo, arrasto viscoso e a dinâmica dos propulsores do veículo. Essas incertezas devem ser compensadas pela estratégia de controle, como realizado em Fossen (1991), McMillan, Orin e McGhee (1995), Lebourne e Rock (1998) e Antonelli (2003).

Um sistema robótico é considerado *redundante* quando possui mais graus de liberdade que o necessário para realizar uma tarefa (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000). No caso de sistemas veículo-manipulador, o veículo incorpora os graus de liberdade adicionais ao sistema. Porém, a exploração dessa característica é geralmente limitada, pois, a movimentação do manipulador pela atuação dos propulsores do veículo não é muito eficiente devido, principalmente, à inércia do veículo ser superior à do manipulador (ANTONELLI; CHIAVERINI, 1998c). Se a tarefa de manipulação for realizada em um espaço de trabalho confinado, o veículo é utilizado para assegurar a estabilidade do movimento, isto é, para assegurar as restrições impostas pelo ambiente, para manter a continuidade na aplicação de forças e para coordenar a interação dinâmica entre o veículo e o manipulador (SCHUBAK; SCOTT, 1995). Quando a tarefa é exercida em um ambiente sem confinamento, o veículo proporciona um movimento lento e amplo (proporciona à ampliação do espaço operacional) enquanto o manipulador promove um movimento rápido e preciso do efetuador (EGELAND, 1987). A redundância cinemática é integrada a um sistema robótico, quando o objetivo primário (manipulação do efetuador) deve ser realizado em conjunto com objetivos secundários (economia de energia, aumento da manipulabilidade, desvio de obstáculos, entre outros) (ANTONELLI; CHIAVERINI, 1998c).

O *acoplamento* entre o veículo e o manipulador ocasiona a variação da referência de posição e orientação do veículo quando um dos subsistemas se movimenta, o que afeta o movimento coordenado de ambos. Este problema pode ser dividido em duas parcelas de acoplamento: dinâmico e cinemático. O acoplamento dinâmico surge quando o manipulador transmite forças e momentos (torque) para o veículo que variam em magnitude e direção de acordo com a trajetória do manipulador. Essas componentes atuam como perturbações do veículo e portanto, influenciam na posição e orientação do efetuador. O acoplamento cinemático está presente porque a posição e a orientação do efetuador estão em função da postura do veículo. Esta característica pode ser explorada para aumentar o espaço de trabalho do manipulador se a posição e a orientação do veículo forem controláveis (DUNNIGAN; RUSSELL, 1998).

As singularidades representam configurações onde a mobilidade da estrutura é reduzida, ou seja, não é possível a imposição de movimentos arbitrários ao efetuador para uma determinada direção. A consequência dessa condição, é que em configurações singulares existem infinitas soluções para a cinemática inversa e nas suas proximidades, pequenas velocidades aplicadas ao efetuador geram grandes velocidades nas juntas, devido à redução gradativa da mobilidade. A ocorrência de singularidades é evidenciada em sistemas de base móvel, onde é possível realizar a reorientação de toda a estrutura. Em situações especiais esse veículo pode possuir três graus de reorientação realizando os movimentos de guinada, arfagem e rolagem (discutidos nos próximos capítulos), como por exemplo, em veículos espaciais e subaquáticos. No ambiente subaquático, o alto acoplamento entre o veículo e o manipulador, associado ao amortecimento induzido pela imersão no fluido e as perturbações do ambiente, delimitam que grandes variações de movimento podem desestabilizar a execução da tarefa, isto é, a ocorrência de singularidades pode degenerar os objetivos primários (como o seguimento da trajetória) e secundários (como o aumento da eficiência energética) do sistema.

Abordagens distintas são empregadas de forma a contornar o fenômeno da singularidade. Soylu, Buckham e Podhorodeski (2010) apresentam uma abordagem para a resolução de redundância em sistemas veículo-manipulador subaquáticos através de uma nova proposta de aproximação para a inversão da matriz Jacobiana. Na abordagem proposta os autores impõem como objetivo primário a execução dos perfis de velocidade do efetuador e como secundário o evitamento das singularidades e os picos de aceleração. Porém, o fenômeno da redução momentânea da mobilidade leva o sistema para regiões de singularidade, ou nas proximidades delas, degradando a função objetivo secundária. Em From et al. (2010) é proposta a modelagem hidrodinâmica para sistemas veículo-manipulador evitando a representação da orientação pelos ângulos de Euler com o emprego de um novo sistema de coordenadas, denominado de “*quasi-coordinates*”.

Um método promissor é apresentado em Santos et al. (2006), onde é abordada uma metodologia para a resolução da cinemática inversa de sistemas veículo-manipulador subaquáticos através do método de Davies com a imposição de restrições cinemáticas que definem os objetivos primários e secundários em relação à eficiência energética do sistema. Porém, existem erros de abertura da cadeia cinemática, denominados de “*drift*” que necessitam ser monitorados e melhorados para otimizar essa solução. Para isso, torna-se necessária a obtenção dos ângulos de orientação e devido à representação ser realizada através de matrizes de transformação homogênea, singularidades são introduzidas na solução.

As singularidades cinemáticas são um dos focos de pesquisa atuais da robótica onde são aplicadas diferentes metodologias. Por exemplo, em Sun, Cheah e Chern (2009) é apresentada uma proposta de controlador que não requer a inversão da matriz Jacobiana e em Mi et al. (2010) é proposta uma metodologia para geração da trajetória evitando regiões que contenham singularidades. Diversas pesquisas se fundamentam no uso dos quatérnios para a representação da orientação devido à sua unicidade na extração dos ângulos de orientação e, conseqüentemente, o evitamento das singularidades cinemáticas. Esse elemento pode ser aplicado no planejamento da trajetória, como por exemplo, em Xu et al. (2009) é realizada a geração de trajetória para um sistema veículo-manipulador espacial onde o emprego dos quatérnios unitários garante a não-ocorrência das singularidades de orientação. Em Bai, Hansen e Andersen (2009) é discutido um método para a modelagem do espaço de trabalho de manipuladores paralelos e os ângulos de orientação são expressos por quatérnios unitários.

Outras abordagens empregam os quatérnios duais para a correção do erro de orientação em procedimentos interativos para a determinação da cinemática inversa ou para a realimentação da representação mínima do sistema no espaço operacional. Por exemplo, em Erdong e Zhaowei (2010) é apresentada a aplicação dos quatérnios unitários para a estabilização da determinação do erro de orientação utilizado no controle de postura de um veículo espacial flexível. Em Castillo-Cruces e Wahrburg (2010) é apresentada uma estrutura de controle para um sistema cooperação robô-humano aplicado em intervenções cirúrgicas, onde os quatérnios unitários são empregados para a correção do erro de orientação. Em Tabandeh, Melek e Clark (2010) é apresentada uma abordagem para a resolução da cinemática inversa de robôs manipuladores através de um algoritmo genético modificado que emprega os quatérnios unitários como realimentação. Outro benefício desses elementos está na aplicação em mecanismos com movimentação espacial, com 3 DOF, sendo evitadas as configurações singulares e também o alinhamento de eixos rotacionais, isto é, o fenômeno “*gimbal-lock*”, descrito em Nagi et al. (2010) e abordado mais detalhadamente no Capítulo 2.

A representação das transformações através das matrizes de transformação homogênea produz um erro acumulado de sucessivas multiplicações da matriz e leva a perda numérica da ortonormalidade e frequentemente, conduz a matrizes singulares. A aplicação de elementos quaterniônicos para a representação dos movimentos não garante apenas a ortonormalidade da transformação mas, também, leva à menor variação possível para o movimento. Esses fenômenos podem ser vistos em Johnson, Williams e Cook (2009) que demonstra a potencialidade desse elemento para a redução de erros na integração dos movimentos.

A aplicação dos quatérnios unitários na sua concepção original limita-se à representação da orientação. A aplicação desses elementos para movimentos translacionais é possível apenas aplicando artifícios matemáticos complexos ou não-lineares, por exemplo, em Sahu, Biswal e Subudhi (2008) é empregada uma metodologia que mescla o emprego de quatérnios unitários e quatérnios duplos para realizar a translação geométrica. Porém, essa abordagem torna-se confusa devido à utilização de elementos com propriedades algébricas distintas, que levaram até o autor a equivocarse na definição das operações de multiplicação desses elementos, e conseqüentemente, à utilização errada dos elementos¹, os quais serão discutidos e definidos no Capítulo 3. Ainda assim, o procedimento é aplicado apenas para a cinemática direta, não sendo aplicado com todo o seu potencial. Em Qiao et al. (2010) é introduzida a resolução da cinemática inversa em uma cadeia serial 6R empregando os quatérnios duplos, através de uma correlação com a matriz de transformação e não da sua fundamentação em uma álgebra, o que leva a definição incorreta das propriedades algébricas e, conseqüentemente, no aumento da complexidade da solução.

A restrição da aplicação dos quatérnios apenas na representação da orientação vêm de sua definição. Um quatérnio é um elemento composto por uma parcela real e três componentes imaginárias. Enquanto, a representação mínima espacial necessita de seis componentes, três para a orientação e três para a posição. Nesse contexto o quatérnio precisa ser expandido gerando um novo elemento denominado de biquatérnio para expressar a transformação geométrica composta (a rotação e a translação) espacial, preservando sua robustez numérica em relação às singularidades cinemáticas e alinhamento de eixos rotacionais. Entretanto, para a definição correta desse novo elemento e de suas propriedades algébricas torna-se necessária a definição da álgebra que correlaciona esses elementos através de uma álgebra de Clifford. As propriedades dessa álgebra definem qual tipo de biquatérnio será empregado (dual, duplo ou hipercomplexo) e suas conseqüências, conforme discutido nos próximos capítulos.

1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo a aplicação de elementos da álgebra dual-quaterniônica para o mapeamento cinemático de sistemas robóticos, com ênfase em sistemas veículo-manipulador subaquáticos. Tendo como requi-

¹Conforme dito por Sahu, Biswal e Subudhi (2008), "A dual number can be defined as $q + \epsilon q_0$ where, q and q_0 are real numbers with ϵ as a dual unit having property $\epsilon^2 = 1$ ", sendo em um número dual $\epsilon^2 = 0$. Ou seja, foi empregado um número duplo com o intuito de utilizar um número dual.

sito a minimização do acoplamento e da influência dinâmica dos subsistemas através da redução do torque induzido para o seguimento da trajetória e da diminuição dos efeitos da ocorrência de singularidades cinemáticas.

1.2.1 Objetivos Específicos

- I. Delimitar o problema da ocorrência de singularidades no contexto da robótica, focado no seguimento de trajetórias por sistemas redundantes e não-redundantes e a influência do ambiente subaquático nesses fenômenos.
- II. Investigar uma abordagem para a fundamentação dos elementos quaterniônicos através da propriedade de suas relações algébricas de forma a expandir suas dimensões para a representação da transformação geométrica composta.
- III. Determinar uma formulação para a obtenção da cinemática direta através dos quatérnios duais, para a extração da representação mínima destes elementos e para a minimização dos efeitos das singularidades cinemáticas.
- IV. Avaliar a influência da realimentação dual-quaterniônica na determinação cinemática através do método de Davies por meio de um modelo de simulação hidrodinâmica, comparando os resultados com o método tradicional.
- V. Desenvolver um método eficiente para a determinação da cinemática inversa diferencial através de elementos dual-quaterniônicos, isto é, propor uma metodologia para a obtenção do Jacobiano dual-quaterniônico.
- VI. Aplicar a representação dual-quaterniônica para o mapeamento cinemático de um modelo de sistema veículo-manipulador subaquático e avaliar sua influência em uma estratégia de controle clássica para o seguimento de trajetória.

1.3 ORGANIZAÇÃO

Este documento é organizado de forma a contemplar os objetivos propostos e baseado nos módulos principais da estrutura de controle de sistemas veículo-manipulador subaquáticos (UVMS), através de uma abordagem dual-quaterniônica, conforme ilustrado na Figura 1.5.

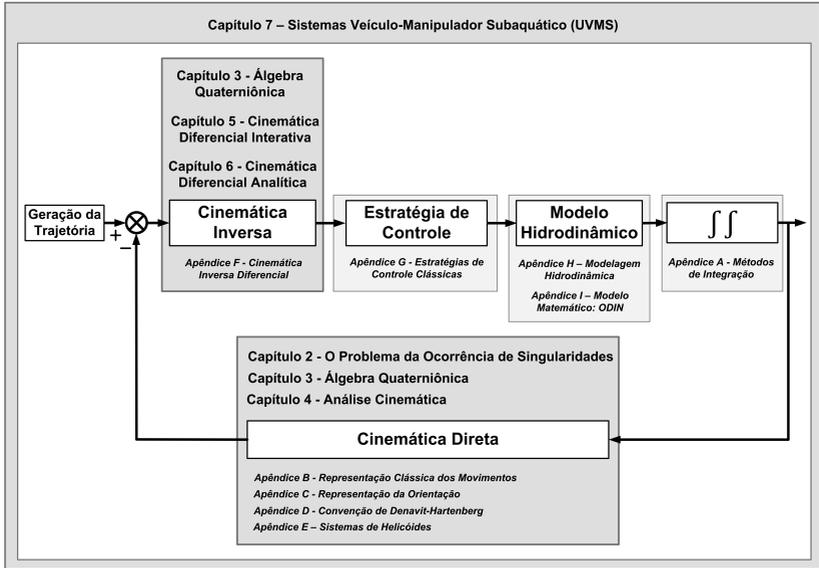


Figura 1.5: Organização da tese baseada no diagrama de controle do UVMS.

Neste contexto, o capítulo 2 trata da discussão teórica do problema da ocorrência de singularidades no contexto da robótica subaquática. O capítulo 3 fundamenta os quatérnios através da álgebra de Clifford para expandir as dimensões desses elementos e definir os quatérnios duais. O capítulo 4 apresenta a cinemática direta através dos quatérnios duais, empregando a convenção de Denavit-Hartenberg e o método dos helicóides sucessivos. O capítulo 5 analisa a influência da realimentação através dos quatérnios duais na cinemática inversa diferencial pelo método de Davies. O capítulo 6 propõe uma abordagem analítica para a obtenção da cinemática inversa diferencial através de um Jacobiano dual-quaterniônico. O capítulo 7 apresenta a aplicação do método dual-quaterniônico a um modelo de sistema veículo-manipulador subaquático. No capítulo 8 são apresentadas as considerações finais, as principais contribuições deste trabalho e algumas sugestões de trabalhos futuros.

2 O PROBLEMA DA OCORRÊNCIA DAS SINGULARIDADES

Este capítulo tem por objetivo tratar o fenômeno da ocorrência de singularidades através da definição do conceito e da interpretação de seus efeitos em diferentes contextos. A degradação da mobilidade, devido à ocorrência de singularidades, interfere diretamente no seguimento da trajetória por sistemas robóticos. Além disso, em sistemas redundantes, a ocorrência de singularidades cinemáticas pode determinar instantaneamente a não-redundância do sistema que, em certas situações não compromete a execução da tarefa, mas adiciona restrições de movimentação altamente influentes no desempenho do sistema como um todo.

2.1 CINEMÁTICA DIFERENCIAL

A cinemática inversa é o problema de estabelecimento de um relacionamento funcional entre as configurações do efetuador (posições, orientações e suas derivadas) para o movimento desejado e o conjunto correspondente de variáveis de junta e suas derivadas temporais (TSAI, 1999). A resolução deste problema é de fundamental importância, pois, a cinemática inversa transforma as especificações de movimento no espaço do efetuador final (trajetória no espaço cartesiano) em variáveis de juntas. Diferentemente da cinemática direta, onde as configurações do efetuador são determinadas de forma unívoca, na cinemática inversa o problema é mais complexo, pois (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000):

- As equações são geralmente não-lineares;
- É possível a existência de múltiplas ou infinitas soluções no espaço das juntas para uma dada configuração no espaço operacional (ou cartesiano);
- Existem configurações no espaço cartesiano para as quais não existem soluções no espaço das juntas.

A determinação da cinemática inversa através de métodos geométricos torna-se complexa quando é aplicada a estruturas avançadas, onde, não é trivial a relação entre a representação (posição e orientação) do efetuador e as variáveis de juntas. Essa limitação leva ao relacionamento não-linear

entre as componentes do espaço operacional e as variáveis do espaço das juntas (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000). Os métodos algébricos necessitam de uma grande intuição algébrica e geométrica para determinação de equações com um número reduzido de incertezas.

Uma alternativa a esses efeitos é o emprego da cinemática diferencial que emprega uma função que correlaciona as derivadas do espaço operacional e do espaço das juntas, realizando um mapeamento linear entre os mesmos. O emprego da cinemática diferencial simplifica parcialmente a resolução matemática do mapeamento mas não garante a unicidade da solução, ou seja, ainda podem existir múltiplas ou infinitas soluções para o problema.

A cinemática diferencial trata do mapeamento linearizado entre as velocidades lineares e angulares do efetuador e as velocidades das juntas. Essa conversão é realizada através do emprego de uma função de correlação denominada de Jacobiano, discutida detalhadamente no capítulo 6. Esta entidade matemática está relacionada com grande parte das componentes de manipulação, isto é, no planejamento e na execução de trajetórias, na determinação de configurações singulares, na execução de movimentos coordenados, na derivação das equações da dinâmica e na transformação das forças e torques do efetuador em grandezas relacionadas às juntas. A equação 2.1 demonstra a correlação entre os espaços promovida pela cinemática direta diferencial.

$$v_e = J(q)\dot{q} \quad (2.1)$$

onde,

v_e : corresponde ao vetor de velocidades no espaço operacional;

$J(q)$: é a matriz Jacobiana;

\dot{q} : corresponde ao vetor de velocidades no espaço das juntas.

Dessa forma, a transformação inversa delimita que para um determinado vetor de velocidades lineares e angulares do efetuador final é possível se obter o vetor de velocidades de junta, o que caracteriza a cinemática inversa diferencial, como:

$$\dot{q} = J(q)^{-1}v_e \quad (2.2)$$

Para a obtenção das variáveis de junta, torna-se necessária a integração dessas grandezas, para isso, são empregados métodos para a aproximação numérica do procedimento de integração. O Apêndice A apresenta alguns desses métodos.

Durante o procedimento para a determinação da cinemática inversa, normalmente, aparecem problemas matemáticos devido ao acoplamento entre os termos da matriz, que impossibilita a inversão da mesma, fenômeno denominado de singularidades numéricas. Esses efeitos necessitam ser iden-

tificados e serão discutidos a seguir.

2.1.1 Singularidades

A principal dificuldade para determinação da cinemática inversa vêm em decorrência das configurações singulares. As singularidades geralmente representam as configurações cuja a mobilidade da estrutura é reduzida, isto é, não é possível se impor um movimento arbitrário do efetuador. A consequência desse efeito é que em configurações singulares existem infinitas soluções para a cinemática inversa. Esse efeito delimita que na vizinhança das singularidades pequenas velocidades aplicadas ao efetuador geram grandes velocidades nas juntas devido à redução gradativa da mobilidade nessas áreas (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000). A redução da mobilidade é denominada de degeneração e conforme Conkur e Buckingham (1997) pode ser definida simplesmente, como:

Proposição 2.1.1¹ *A degeneração é a redução, geralmente temporária, da mobilidade do sistema, isto é, da dimensão do espaço de juntas.*

A degeneração é um efeito temporal onde é reduzida a dimensão do espaço das juntas em virtude da imposição de alguma restrição. O efeito degenerativo mais comum ocorre quando alguma junta se aproxima de seu limite físico, restringindo a mobilidade do sistema. A operação em ambientes confinados ou a ocorrência de obstáculos dentro do espaço de trabalho do manipulador também são caracterizadas como imposições que levam soluções da cinemática inversa à configurações degenerativas (posturas onde o sistema tem sua mobilidade reduzida).

Exemplo 2.1.1 Seja um manipulador planar 3R, conforme apresentado na Figura 2.1, um caso de degeneração ocorre quando a junta 3 se aproxima de seu limite de junta. Nessa condição não é possível a atribuição de movimentos arbitrários a essa junta determinando uma degeneração, pois, nesse instante, existem apenas 2 graus de mobilidade.

O fenômeno de degeneração está associado diretamente com as singularidades cinemáticas, dessa forma se pode interpretar esse conceito, no contexto da robótica, como:

Proposição 2.1.2 *A singularidade consiste em uma condição temporária de degeneração da mobilidade do sistema devido a aspectos cinemáticos do mecanismo ou do movimento.*

¹A proposição é empregada para a apresentação da proposta de definição teórica de um determinado termo.

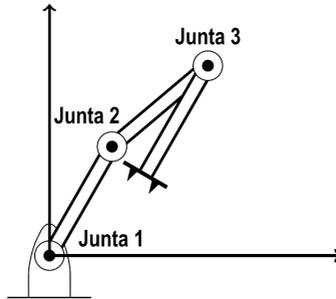


Figura 2.1: Degeneração do manipulador redundante planar 3R para o manipulador não-redundante 2R.

Fonte: Conkur e Buckingham (1997).

As configurações singulares são interpretadas, no âmbito da matemática, como: *A singularidade é qualquer configuração onde o posto da matriz Jacobiana diminui do seu valor máximo, isto é, perde o posto completo.* Pois, a matriz Jacobiana é dependente das configurações das juntas. Dessa forma, esses efeitos podem ser divididos em dois tipos (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000):

- *Singularidades de limite ou estruturais:* ocorrem quando o manipulador se encontra próximo ao seu limite de extensão ou contração. Este tipo de singularidade pode ser prevenida, evitando que o manipulador se aproxime de suas configurações de limite mecânico.
- *Singularidades internas ou cinemáticas:* ocorrem dentro do espaço alcançável do manipulador e são geralmente causadas pelo alinhamento de dois ou mais eixos de movimento de juntas, ou por configurações particulares do efetuador. Esta categoria de singularidades deve ser identificada e prevenida, geralmente, na geração da trajetória.

A singularidade cinemática é uma condição geralmente momentânea, que pode ser interpretada de diferentes contextos, de acordo com sua aplicação, efeito ou benefício. Em Cheniot e Brasselet (2007) são discutidas quatro abordagens para o tema, são elas:

- *A perda de grau(s) de liberdade:* o mapeamento cinemático entre o espaço operacional e das juntas requer tradicionalmente a inversão da matriz Jacobiana. Porém a perda de um ou mais graus de liberdade do efetuador acarreta a matriz não ter posto completo, impossibilitando a transformação entre os espaços. Essa degeneração instantânea está associada com a topologia do mecanismo, com a trajetória executada e com os métodos de representação da transformação entre os espaços.

- *Desestabilização do controlador*: estratégias de controle de posição, velocidade e aceleração especificam a trajetória em termos da variação temporal entre os pontos, dessa forma, especificam o perfil de velocidade desejado para as juntas por meio da cinemática diferencial inversa. Em regiões de singularidade, esta conversão aponta para um espaço nulo de soluções, acarretando em falhas na estratégia de controle que traz como consequência a imposição de grandes variações para os perfis de velocidade e aceleração. Estratégias de controle de força empregam também o mapeamento entre esses espaços para a especificação do torque e, sob a influência de singularidades, delimitam forças e torques inaceitáveis para as juntas.
- *Espaço de trabalho*: na proximidade dos limites do espaço de trabalho, o manipulador é considerado em um ponto de singularidade do mapeamento cinemático entre os espaços. Nessa condição existe uma separação entre diferentes números ou tipos topológicos de cinemática inversa, isto é, existe uma intensa troca de postura sobre o mecanismo.
- *Benefício mecânico*: na proximidade das regiões de singularidades, grandes variações impostas às juntas resultam em pequenos movimentos no efetuador. Esse fenômeno pode ser benéfico em determinadas situações, por exemplo, a manipulação de cargas ou no controle preciso da movimentação do efetuador. Onde é especificada uma trajetória controlada com seções passantes nas regiões de singularidade.

Existem duas formas clássicas para o evitamento das singularidades. A primeira é evitar situações onde o Jacobiano possua deficiência de posto e a outra condiz com a geração da trajetória que deve evitar essas condições (QIU; CAO; MIAO, 2009). Nesse contexto, alguns fabricantes de robôs disponibilizam documentos para orientar a manipulação em regiões singulares e em suas proximidades. No manual de operação dos manipuladores de 6 DOF da *Adept Technology Inc.*, é aconselhado que não se manipule sobre as configurações de singularidade, e na proximidade destes, se empregue um perfil de velocidade reduzido. Nesse contexto são projetadas instruções específicas para a programação da trajetória sobre essas condições. A Figura 2.2, retirada deste manual, ilustra uma destas condições.

O evitamento das singularidades é uma das linhas de pesquisa na área da robótica, sendo aplicadas diferentes metodologias. A abordagem clássica está na decomposição da matriz Jacobiana, cujas colunas representam as juntas do manipulador e as linhas representam as contribuições de cada junta no movimento espacial (a rotação e a translação nos três eixos do sistema cartesiano). Esse conceito será discutido em maior profundidade nos próximos capítulos.

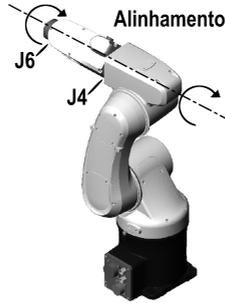


Figura 2.2: Singularidade de orientação do punho.
Fonte: Adept (2007).

O Jacobiano espacial (6×6) pode ser decomposto em um Jacobiano de posição (3×6) e Jacobiano de orientação (3×6). Tradicionalmente, os manipuladores robóticos possuem juntas em sua extremidade dispostas de forma a produzir unicamente movimentos de orientação do efetuador, isto é, $\mathbf{J}_{\text{posição do punho}} = 0$, o que resulta em:

$$\begin{aligned} \text{Jacobiano} &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\text{orientação}} \\ \mathbf{J}_{\text{posição}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\text{orientação do braço}} & \mathbf{J}_{\text{orientação do punho}} \\ \mathbf{J}_{\text{posição do braço}} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Através dessa decomposição, as singularidades de todo o mecanismo são delimitadas através de (DONELAN, 2007):

- as singularidades de posição do efetuador ou do "braço":

$$\det(\mathbf{J}_{\text{posição do braço}}) = 0 \quad (2.4)$$

- as singularidades de orientação do efetuador ou do "punho":

$$\det(\mathbf{J}_{\text{orientação do punho}}) = 0 \quad (2.5)$$

Pode-se então associar dois exemplos clássicos de singularidades para um manipulador serial com $n \leq 6$ juntas rotacionais, como (DONELAN, 2007):

- *Singularidade do punho*: duas juntas em um punho esférico concorrente de 3 DOF são colineares, ou seja, estão perfeitamente alinhadas.

A consequência desse efeito é que instantaneamente só existe um grau de liberdade para o movimento.

- *Singularidade do braço (ou cotovelo)*: três juntas coplanares e paralelas instantaneamente permitem apenas um eixo de rotação e translação perpendicular ao plano comum.

O acoplamento dos termos dinâmicos referentes, principalmente, à orientação do corpo rígido também são suscetíveis à ocorrência de singularidades cinemáticas, sendo uma das áreas atuais de pesquisa, por exemplo, Goodwine e Nightingale (2010) apresentam um estudo da influência de singularidades dinâmicas no controle de robôs seriais para justificar a proposta de uma métrica que identifique esses efeitos. Chen et al. (2010) propõem um algoritmo interativo para o evitamento de singularidades cinemáticas que influenciam diretamente na dinâmica de sistemas veículo-manipulador espaciais.

Em robôs paralelos o problema da ocorrência de singularidades é mais complexo, devido à existência de juntas diretamente e indiretamente atuadas, como pode ser visto em Yang e O'Brien (2009) onde é apresentada uma abordagem geométrica para a delimitação do espaço de trabalho "estável", isto é, livre de singularidades para a especificação da trajetória. Na sequência do trabalho, Yang e O'Brien (2010) apresentam um método sequencial para a determinação de um espaço de trabalho livre de singularidades para um mecanismo paralelo de três barras "caminhantes". Conconi e Carricato (2009) investigam e avaliam regiões de singularidade em cadeias cinemáticas paralelas. Estes fenômenos são classificados em categorias, como: singularidades da cadeia atuada, singularidades de redundância e singularidades de restrições ativas.

Grande parte das pesquisas têm como foco a criação de metodologias para evitar regiões de singularidades, pois, são suscetíveis a sua influência. Uma abordagem diferenciada, com o objetivo do tratamento das singularidades, consiste na representação das orientações através de quatérnios. Antonelli (2003) e Sciavicco e Siciliano (2000) demonstram que a extração dos ângulos de orientação via quatérnios unitários não apresenta singularidades. Por esse motivo, em Antonelli e Chiaverini (1998b) são aplicados os quatérnios unitários para a representação da orientação em sistemas veículo-manipulador, no entanto, a movimentação é realizada através da metodologia clássica das matrizes de transformação homogênea. Essa abordagem é comum, devido aos quatérnios unitários não representarem de uma forma direta as translações. O emprego dos quatérnios para a representação da orientação sem a ocorrência de singularidades, difundiu-se na comunidade científica e deu origem a um termo que representa essa metodologia, "*singularity-free*",

por exemplo, utilizado em Cao et al. (2010), From et al. (2010), Beranek e Hayes (2010), Isenberg e Kakad (2010) e Husty e Schröcker (2010). Essa abordagem já ultrapassou a comunidade científica e atualmente é empregada na indústria. Um dos fabricantes mais expressivos no campo da robótica industrial, a *ABB Robotics*, emprega essa metodologia em seus robôs comerciais, como pode ser visto na Figura 2.3.

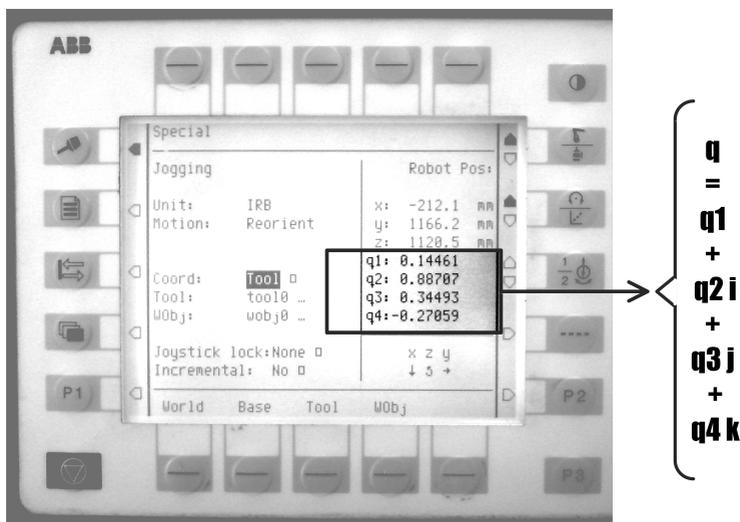


Figura 2.3: Teach-pendant da ABB Robotics.

Em grande parte dos sistemas que possuem singularidades de orientação, os quatérnios são comumente empregados para a determinação de parâmetros dinâmicos dependentes das configurações de junta, para a realimentação dos erros de orientação, ou para a representação da orientação, por exemplo, em Antonelli e Chiaverini (1998a) e Lizarralde, Wen e Hsu (1995).

O problema de singularidade associado à representação das orientações, intensifica-se em aplicações de veículos robóticos com 6 DOF. Assim, na aviação o emprego dos quatérnios é bastante difundida, como pode ser visto em Kharchenko e Ilnytska (2010) e Cooke et al. (1994). No qual, são ressaltadas as vantagens da utilização desses elementos, principalmente, no evitamento do fenômeno de representação, denominado de “*gimbal-lock*”, isto é, no alinhamento de dois eixos rotacionais na mesma direção, como apresentado na Figura 2.4.

O fenômeno de “*gimbal-lock*” pode ser esclarecido de acordo com a interpretação de Rollett (2009) que subdivide uma rotação em transformação ativa e passiva, como ilustrado na Figura 2.5. A rotação passiva correlaciona

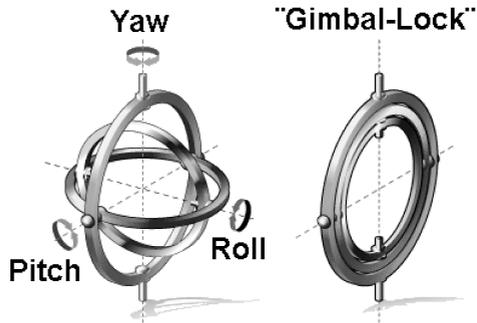


Figura 2.4: Ilustração do fenômeno “gimbal-lock”.

Fonte: Strickland (2008).

um objeto através de dois sistemas de coordenadas, como consequência o sistema de coordenadas modificado pode alinhar-se com o sistema de referências do ambiente, degenerando momentaneamente a mobilidade do sistema.

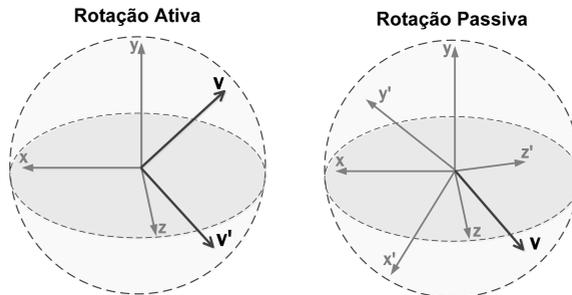


Figura 2.5: Rotações ativas e passivas.

Exemplo 2.1.2 Seja uma rotação 3D realizada através de matrizes de transformação homogêneas na ordem *Arfagem* (*Pitch*), *Guinada* (*Yaw*) e *Rolagem* (*Roll*), e uma rotação de *Yaw* de $\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Neste caso, a rotação *Pitch* é realizada primeiramente e de forma correta, gerando as novas rotações *Yaw'* e *Roll'*. A segunda rotação *Yaw'* também é realizada corretamente. Entretanto, após a rotação de *Yaw'* o movimento de *Roll'* estará sobreposto ao de *Pitch*. Ou seja, se o sistema de coordenadas *Pitch*, *Yaw* e *Roll* é o sistema de referência do ambiente, uma rotação de *Roll'* nesta postura estará rotacionando o objeto por um movimento de *Pitch*, como ilustrado na Figura 2.6. Efeito semelhante pode ser visto em Warwick (2007).

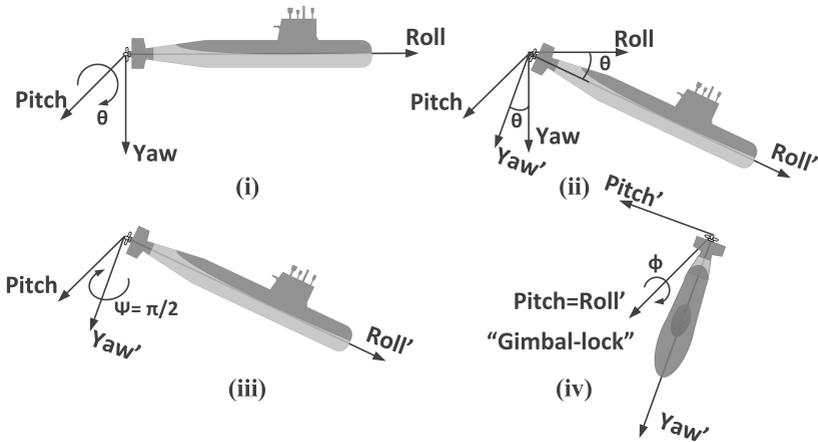


Figura 2.6: Exemplo de aplicação de rotações passivas e ocorrência do fenômeno “gimbal-lock”.

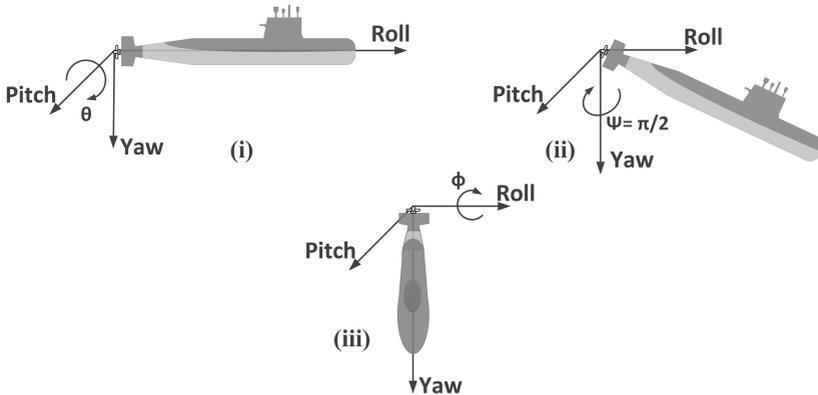


Figura 2.7: Exemplo de aplicação de rotações ativas.

A rotação ativa é realizada em relação ao sistema de coordenadas de referência fixo ao ambiente. Neste caso os eixos de rotação tornam-se absolutos e correlacionados sempre com o sistema de referência. Ou seja, não existe alteração do sistema de coordenadas e nem a criação de sistemas intermediários, conseqüentemente, não permitindo o alinhamento de eixos de rotação. As transformações são realizadas de acordo com o mesmo sistema, dessa forma o exemplo 2.1.2 pode ser ilustrado por um conjunto de rotações ativas como visto na Figura 2.7.

A aplicação dos quatérnios para a representação das transformações pode ser realizada através de rotações passivas e ativas, enquanto as matrizes de transformação homogêneas constituem transformações passivas. Assim pode-se afirmar que: os quatérnios promovem o desacoplamento das componentes que representam as orientações, tornando-se insensível ao fenômeno do alinhamento dos eixos de orientação, isto é, ao “*gimbal-lock*” (CAO et al., 2010; FROM et al., 2010; BERANEK; HAYES, 2010; ISENBERG; KAKAD, 2010; HUSTY; SCHRÖCKER, 2010; KHARCHENKO; ILNYTSKA, 2010; STRICKLAND, 2008; ANTONELLI, 2003; COOKE et al., 1994).

Os efeitos das singularidades cinemáticas também são altamente influentes em sistemas redundantes, porém com uma interferência diferenciada sobre o seguimento de trajetória. Esse fenômeno será descrito a seguir.

2.1.2 Redundância

A definição de redundância cinemática é confusa, devido ao fato de não ser padronizada. Dessa maneira, cada autor a emprega de acordo com sua interpretação. Por exemplo, em Sciavicco e Siciliano (2000), a definição de redundância está fundamentalmente relacionada à tarefa, sendo que no capítulo 2 é dito que “... *um manipulador pode ser redundante em relação a uma tarefa e não-redundante quando relacionado a outra*“. Já em Craig (1989), a redundância é definida em relação ao número de soluções, assim sendo, no capítulo 8 é dito que “*um robô é redundante quando consegue resolver uma tarefa com infinitas soluções*“. Em Martins e Carboni (2008) é utilizado o conceito de “*graus de controle*” de Belfiore e Benedetto (2000), para a definição da redundância em termos do número de “*graus de controle*” do mecanismo e da conectividade entre seus elos, discutido detalhadamente em Carboni (2008).

Aliado a essa característica, o conceito de redundância não pode ser simplificado, delimitando apenas que um sistema seja ou não redundante. Existem outras consequências, que necessitam ser consideradas, por exemplo, a degeneração e a multiplicidade de soluções. De forma a esclarecer esses conceitos, em Conkur e Buckingham (1997) é apresentada um *Technical Note* denominado de *Clarifying the definition of redundancy as used in robotics*, onde, o entendimento da redundância é descrito através de alguns termos. O primeiro delimita o número de eixos do movimento (n) do manipulador, ou dimensão do espaço das juntas. O segundo, trata da definição da dimensão do espaço dos movimentos alcançáveis do efetuador (m), ou dimensão do espaço operacional. Ao relacionar esses termos, pode-se definir um sistema não-redundante como:

Definição 2.1.1² Um sistema é denominado de **não-redundante** quando a dimensão do espaço das juntas (n) é igual à dimensão do espaço operacional (m) (CONKUR; BUCKINGHAM, 1997).

$$n = m \quad (2.6)$$

A redundância, consiste fundamentalmente na ocorrência de um conjunto de soluções para a cinemática inversa. Essa característica é denominada de múltiplas soluções, sendo definida como:

Definição 2.1.2 A cinemática inversa contém **múltiplas soluções**, quando seu número de soluções não é único, mas é finito (CONKUR; BUCKINGHAM, 1997).

Exemplo 2.1.3 Para um manipulador serial planar 3R uma determinada postura do espaço cartesiano, dentro de seu espaço de trabalho, possui mais de uma solução no espaço das juntas como ilustrado na Figura 2.8. A existência de múltiplas soluções ocorre devido ao espaço das juntas ($n = 3$) possuir dimensão superior ao espaço operacional planar ($m = 2$), como pode ser visto na Figura 2.9.

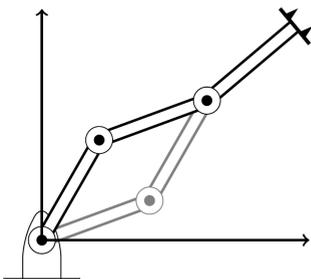


Figura 2.8: Múltiplas soluções para a cinemática inversa do manipulador serial planar 3R.

Fonte: Conkur e Buckingham (1997).

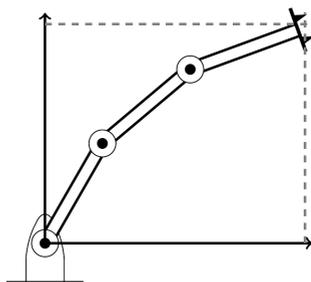


Figura 2.9: Manipulador redundante serial planar 3R, ($n=3, m=2$).

Fonte: Conkur e Buckingham (1997).

A ocorrência de múltiplas soluções para a cinemática inversa é geralmente uma consequência da igualdade definida na equação 2.6 não ser verdadeira. Assim, para Conkur e Buckingham (1997), a redundância pode ser

²A definição é empregada para representar a delimitação teórica de um termo por outros autores.

definida de acordo com as dimensões dos espaços correlacionados por essa transformação, isto é, espaço operacional e das juntas, como:

Definição 2.1.3 *Um sistema é denominado de **cinematicamente redundante** quando a dimensão do espaço das juntas (n) é maior que a dimensão do espaço operacional (m) (CONKUR; BUCKINGHAM, 1997).*

$$n > m \quad (2.7)$$

Um caso particular da redundância ocorre quando a magnitude do espaço das juntas é muito superior ao espaço operacional. Esse fenômeno ocorre, geralmente, em manipuladores com topologias especiais, por exemplo, “snake-like”, abordado em Worst e Linnemann (1996). Nestes sistemas, o número de soluções para a cinemática inversa tende a infinito, por decorrência da grande quantidade de juntas. Essa modalidade de sistemas é denominada de sistemas hiper-redundantes e, conforme Conkur e Buckingham (1997), pode ser definida como:

Definição 2.1.4 *Um manipulador é dito como **hiper-redundante**, quando a dimensão do espaço das juntas (n) é muito superior que a dimensão do espaço operacional (m) (CONKUR; BUCKINGHAM, 1997).*

$$n \gg m \quad (2.8)$$

Similarmente às singularidades, a multiplicidade de soluções para a cinemática inversa é um problema industrial. Dessa forma, os manuais de operação de manipuladores industriais trazem recomendações e apresentam instruções específicas para a determinação da postura desejada para essas condições. A *Adept Technology Inc.* disponibiliza um documento intitulado de “Six-axis robot configuration singularities” que contém recomendações para configurações com multiplicidade de solução em seus manipuladores com 6 DOF, onde basicamente são demonstradas três situações para a postura inicial (zero). A primeira aborda a multiplicidade de soluções em uma postura pela esquerda e outra pela direita do ponto “zero”, como pode ser visto na Figura 2.10. A segunda está relacionada com a postura por baixo do ponto desejado, como ilustrado na Figura 2.11.



Figura 2.10: Redundância de posicionamento direita-esquerda.

Fonte: Adept (2007).

Figura 2.11: Redundância de posicionamento em cima-baixo.

Fonte: Adept (2007).

A terceira situação está relacionada com a multiplicidade de soluções relativas ao giro do punho, apresentada na Figura 2.12.

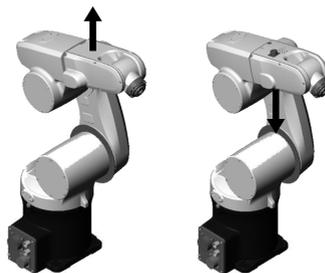


Figura 2.12: Redundância de posicionamento no punho.

Fonte: Adept (2007).

A redundância cinemática é diretamente influenciada pela tarefa, a qual impõe restrições ao movimento. Certas restrições podem deteriorar a solução promovendo um grande ou infinito conjunto de soluções, como ilustrado na Figura 2.13. Esse fenômeno ocorre quando o espaço da tarefa possui dimensão inferior ao espaço das juntas.

Conforme Conkur e Buckingham (1997) o conceito de redundância pode ser definido em relação à dimensão do espaço de tarefa (r), como:

Definição 2.1.5 *Um manipulador é dito como **redundante de tarefa**, quando o espaço da tarefa (R) é totalmente pertencente ao espaço operacional (M), e tem dimensão inferior de M (CONKUR; BUCKINGHAM, 1997).*

$$r < m \quad e \quad R \subseteq M \quad (2.9)$$

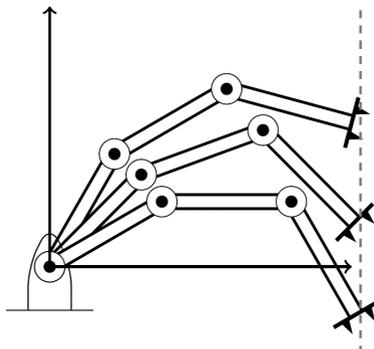


Figura 2.13: Soluções para a cinemática do manipulador em uma aplicação de infinitas soluções.

Fonte: Conkur e Buckingham (1997).

Os sistemas veículo-manipulador subaquáticos (UVMS), geralmente, constituem de sistemas redundantes, os quais contêm naturalmente múltiplas soluções para a cinemática inversa. Nesse contexto, são atribuídas funções objetivos secundários (como por exemplo, o desvio de obstáculos, a melhoria da eficiência energética, o aumento da manipulabilidade, o evitamento de configurações singulares) para priorizar determinadas configurações. Do ponto de vista cinemático, o veículo normalmente contém seis graus de liberdade ilimitados (sem limites físicos para as juntas), três relacionados ao deslocamento linear e três referentes à orientação, sendo suscetível a singularidades e, principalmente, ao fenômeno de "*gimbal-lock*". O acoplamento de um ou mais manipuladores aumenta a mobilidade do sistema e incrementa a possibilidade da ocorrência de singularidades cinemáticas, como ilustrado na Figura 2.14.

Em sistemas não-redundantes, as configurações degenerativas podem expandir o espaço de soluções da cinemática inversa para infinitas soluções (CONKUR; BUCKINGHAM, 1997). Entretanto, em sistemas redundantes a atribuição de configurações degenerativas pode ocasionar na perda momentânea da redundância do sistema. Nesses sistemas, a degeneração comumente promove a execução do movimento atribuindo prioridade às posturas diferentes daquelas especificadas no objetivo secundário. Isto é, ocorre uma degeneração do objetivo secundário. Como consequência, existe a ativação de juntas, caracterizadas como passivas quando o sistema possui sua mobilidade integral para suprir a deficiência de mobilidade e dar continuidade ao movimento. Essa condição atribui picos de torque no espaço de junta para a estabilização de movimento. Todos esses efeitos são evidenciados no ambiente subaquá-

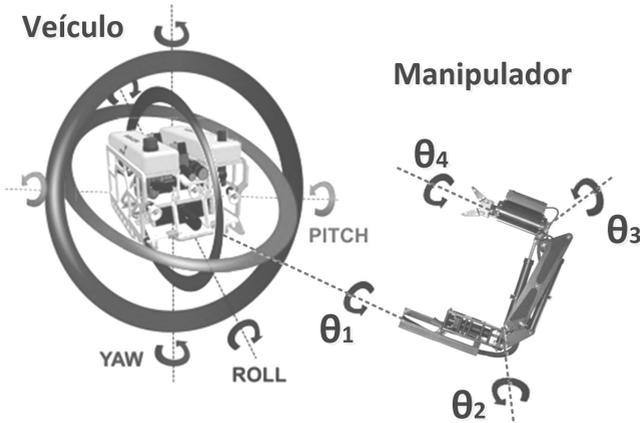


Figura 2.14: Redundância e singularidades em sistemas veículo-manipulador sub-aquáticos.

tico onde o sistema é totalmente envolvido pelo fluido que atribui um grande amortecimento ao sistema e, conseqüentemente, à resposta do controlador. Ao atrasar a mudança de postura para garantir a execução da trajetória na proximidade ou nas regiões de singularidade são introduzidos erros na execução da tarefa.

O tratamento e evitamento das singularidades nesses sistemas constituiu uma área atual de pesquisa no ramo da robótica, por exemplo, Qiu, Cao e Miao (2009) baseia-se na afirmação que "... em sistemas não redundantes, um movimento livre de singularidades é alcançado através do planejamento off-line de trajetórias.." desde que se possua o conhecimento das configurações singulares para se promover a imposição de restrições para a movimentação nesse espaço. Então determina que "...em sistemas redundantes pode-se determinar o evitamento das singularidades escapáveis, porém isso não é aplicado às singularidades não-escapáveis...". Dessa forma é proposto um método "on-line" para o evitamento de singularidades conhecidas ou escapáveis (isto é, de limites de juntas ou configurações pré-determinadas de singularidade), através da modificação interativa da tarefa. Enquanto as singularidades numéricas (não-escapáveis) decorrentes do método de representação e difíceis de se prever, continuam influenciando o seguimento da trajetória. Pouyan et al. (2010) apresentam uma forma de planejamento de trajetória baseada na especificação por redes de Petri e a aplicação de "máscara" constantes que eliminam as singularidades e a redundância. Essas imposições são aplicadas como objetivo secundário ao planejamento da trajetória.

2.2 CONCLUSÃO

Este capítulo discutiu o conceito e as consequências da ocorrência de singularidades durante o seguimento de trajetórias por sistemas robóticos, atingindo o objetivo I deste trabalho delimitado no item 1.2.1.

Ressaltou-se que a cinemática diferencial é uma solução viável para a determinação da cinemática inversa devido à linearidade de sua transformação. Entretanto, apesar da matriz Jacobiana realizar o mapeamento linear entre o espaço das juntas e o espaço operacional, a cinemática inversa é baseada no mapeamento inverso. Em determinadas condições, esta matriz perde seu posto completo, tornando-se singular e invertível. Esse fenômeno é interpretado como uma degeneração momentânea do sistema que acarreta na perda de mobilidade e é denominado de singularidade. Na proximidade dessas regiões, pequenos movimentos no espaço operacional resultam em grandes variações no espaço das juntas.

A ocorrência de singularidades em sistemas não-redundantes pode degenerar o seguimento da trajetória pela perda momentânea de mobilidade. No entanto, em sistemas redundantes as singularidades delimitam a perda momentânea da redundância, isto é, o sistema ainda possui mobilidade suficiente para o cumprimento da tarefa, porém, não existe mobilidade para a execução do objetivo secundário. Nesses sistemas, a singularidade acarreta tradicionalmente no ativamento de juntas passivas, introduzindo grandes variações de torque nas juntas. Porém no ambiente subaquático, o amortecimento introduzido pelo fluido atrasa essa adaptação, agregando erros na execução do movimento.

As singularidades cinemáticas são um problema presente na robótica que necessita ser tratado. A abordagem mais comum para esse fenômeno é o planejamento da trajetória fora da proximidade e das regiões de singularidade, "evitando" essas condições. Existem formas de minimizar a influência desses efeitos sobre o sistema. Um método que tem se apresentado na literatura é o evitamento de singularidades usando o conceito de quatérnios e sua robustez face as instabilidades numéricas.

Nesse contexto, o próximo capítulo apresentará uma abordagem para a definição dos quatérnios e as diferentes formas para a sua aplicação. Em particular, o uso da álgebra de Clifford e a expansão do conceito de quatérnios de forma a considerar transformações geométricas completas: rotação e translação.

3 ÁLGEBRA QUATERNIÔNICA

Este capítulo baseia-se na discussão teórica das propriedades algébricas dos elementos quaterniônicos para contornar a restrição da aplicação dos quatérnios unicamente na representação da orientação. Investigando a fundamentação desses elementos através da álgebra de Clifford para a definição de um elemento capaz de representar a transformação composta (rotação e translação). De forma a preservar os benefícios dos quatérnios quanto às ocorrências das singularidades cinemáticas e o alinhamento de eixos rotacionais e, fornecer a base teórica necessária para a aplicação na cinemática, discutida nos capítulos seguintes.

3.1 ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Um dos fatos iniciais para o desenvolvimento da álgebra de Clifford foi a publicação de Sir William R. Hamilton que abordava a generalização dos números complexos, que por sua vez são uma generalização do conceito de números reais em um sistema denominado de quatérnios. Os quatérnios são objetos extremamente adequados para descrever as transformações do espaço tridimensional, por exemplo, as rotações.

A data desta descoberta é meio contraditória, na literatura existem diferentes referências. O Serviço Europeu de Informação Matemática (EMIS, 2008), que é apoiado pela Sociedade Europeia de Matemática (EMS), disponibiliza quase todos os trabalhos de Hamilton. Dessa forma, foi possível identificar corretamente as datas relacionadas a estes trabalhos. Assim, o anúncio da descoberta dos quatérnios veio em 1844, porém esta foi publicada apenas em Hamilton (1845). Anteriormente ao anúncio da descoberta, em 1843, foi enviado o trabalho *On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions* (HAMILTON, 1844a), que foi publicado no ano seguinte. Ainda em 1844, foi enviado e publicado também o trabalho intitulado de *On Quaternions, or on a new System of Imaginaries in Algebra* (HAMILTON, 1844b). Essas foram as primeiras aparições do termo quatérnio de Hamilton.

A primeira utilização do termo biquatérnios veio em Hamilton (1844b) para a designação de um quatérnio com quatro termos complexos, ao invés da composição tradicional com quatro componentes reais (ROONEY, 2007). Dessa forma, os biquatérnios eram quantidades na forma $q + \sqrt{-1}r$, onde q

e r são quatérnios com coeficientes reais. Análises da época consideram todas as quantidades que não são expressamente assumidas para ser real como complexas, assim, torna-se desnecessário o emprego de um novo termo para os quatérnios com componentes complexas (BUCHHEIM, 1885). Clifford reconheceu a prioridade de Hamilton para a utilização do termo porém admitiu, que na representação anterior os escalares podem ser complexos, o que descharacterizou o emprego do termo (ROONEY, 2007). Assim, ele o reemprega para a designação da combinação algébrica de dois quatérnios através da utilização de um novo símbolo não escalar ω , que é um operador comutativo com todos os outros operadores e o seu quadrado é um escalar (BUCHHEIM, 1885). O que resulta na forma $q + \omega r$ para os biquatérnios, onde q e r são os quatérnios habituais definidos por Hamilton.

A idéia dos biquatérnios é apresentada por Clifford em três trabalhos. O primeiro, denominado de *Preliminary Sketch of Biquaternions* (CLIFFORD, 1873), é considerado um clássico e introduz a teoria dos biquatérnios. O segundo trabalho, intitulado de *Notes on Biquaternions*, são alguns manuscritos de Clifford que formalizam um suplemento do primeiro trabalho, onde são desenvolvidos alguns aspectos específicos da álgebra dos biquatérnios. O último, chamado de *Further Notes on Biquaternions*, discute e esclarece a interpretação dos biquatérnios que podem ser interpretados de dois modos diferentes: como um tipo generalizado de número ou como um operador (ROONEY, 2007).

O emprego do operador ω tornou-se nebuloso, pois Clifford o aplica em diferentes contextos com definições distintas. Por exemplo, na primeira parte do *Preliminary Sketch of Biquaternions* (CLIFFORD, 1873), Clifford define o quadrado do operador ω como $\omega^2 = 0$. Uma definição confusa, visto que é uma quantidade cujo o quadrado é zero, assim, deveria ser visto como um operador ou como uma entidade algébrica abstrata e não como um número real. No mesmo trabalho, na parte IV, o operador é definido por uma regra de multiplicação aparentemente diferente, $\omega^2 = 1$. Já em Clifford (1878) e Clifford (1882) o mesmo operador possui uma propriedade diferente, neste caso $\omega^2 = \pm 1$.

Até que em Rooney (1978), em um trabalho intitulado de *On the three types of complex number and planar transformations*, são considerados três tipos de números complexos no contexto geométrico e cinemático. A diferença entre as definições está no comportamento do quadrado do operador ω . Assim, o operador recebe diferentes denominações dependendo da sua regra de multiplicação. Os tipos apresentados são:

- Número complexo ($a + ib$), onde $i^2 = -1$
- Número dual ($a + \epsilon b$), onde $\epsilon^2 = 0$

- *Número duplo* ($a + jb$), onde $j^2 = +1$

Algebricamente, cada um dos tipos de número complexo é um par ordenado (a, b) de números reais com diferentes regras para o seu quadrado. Ao expandir essa definição para pares ordenados (r, s) de quatérnios clássicos de Hamilton ($q = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$) tem-se os seguintes conjuntos, segundo a nomenclatura de Altmann (2005), Selig (2005) e Conway e Smith (2003):

- *Número hipercomplexo ou Octônio* ($r + ls$), onde $l^2 = -1$
- *Quatérnio dual* ($r + \varepsilon s$), onde $\varepsilon^2 = 0$
- *Quatérnio duplo* ($r + ds$), onde $d^2 = +1$

Na seção II do *Preliminary Sketch of Biquaternions* (CLIFFORD, 1873), Clifford inicia a construção da nova álgebra, baseado na extensão e generalização da álgebra dos quatérnios de Hamilton, onde é introduzido o termo biquatérnios (ROONEY, 2007). Porém, mais tarde, em Clifford (1878) foi publicada uma maneira sistematizada de unificação da álgebra de Grassmann (isto é, álgebra exterior) e os quatérnios de Hamilton. A denominação original de Clifford para esta estrutura foi álgebra geométrica, mas atualmente é denominada de álgebra de Clifford. O sistema resultante permite a generalização dos quatérnios de Hamilton e dos biquatérnios. Assim, as consequências da influência da regra de multiplicação do operador ω sob as operações algébricas dos tipos de biquatérnios pode ser demonstrada através da generalização da álgebra de Clifford para esses tipos de estruturas.

A álgebra de Clifford é uma álgebra associativa gerada por um número de elementos de base e_1, e_2, \dots, e_n . A definição das propriedades da álgebra vem da propriedade do produto dos elementos. Uma álgebra de Clifford é definida conforme $Cl(p, q, r)$, onde, p é o número de bases geradoras cujo quadrado é igual a 1, q está relacionado com o número de quadrados iguais a -1 e r com o número de quadrados igual a 0.

O número total de bases geradores n de uma álgebra de Clifford é dada pela soma dos parâmetros de sua definição, $n = p + q + r$. Por exemplo, uma álgebra $Cl(0, 3, 1)$ contém os geradores e_1, e_2, e_3 cujo quadrado é igual a -1 e a base e com seu quadrado definido por 0. A combinação dessas bases geradores gera o conjunto de elementos de base dessa álgebra que é composto por $2^4 = 16$ elementos. Essas componentes ainda são caracterizadas por seu grau, isto é, pela quantidade de associações de bases geradoras. Sendo que o grau máximo de uma dada álgebra é igual ao número total n de seus geradores. Um conjunto de elementos de mesmo grau é denominado de elementos homogêneos (SELIG, 2000). Assim os geradores da álgebra $Cl(0, 3, 1)$ são:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & \text{grau } 0 \\ e_1, e_2, e_3, e & \text{grau } 1 \\ e_1e_2, e_1e_3, e_1e, e_2e_3, e_2e, e_3e & \text{grau } 2 \\ e_1e_2e_3, e_1e_2e, e_1e_3e, e_2e_3e & \text{grau } 3 \\ e_1e_2e_3e & \text{grau } 4 \end{array} \right)$$

Porém, uma álgebra de Clifford pode ser dividida em duas subálgebras, par e ímpar, como:

$$Cl(p, q, r) = Cl^+(p, q, r) \oplus Cl^-(p, q, r) \quad (3.1)$$

As subálgebras par e ímpar estão relacionadas com a associação dos termos da álgebra principal. Assim, uma subálgebra par associa suas bases geradoras em combinações pares, gerando bases com grau par, similarmente ao que ocorre com as subálgebras ímpares, conforme pode ser visto:

$$\left(\begin{array}{c|c} Cl^+(0, 3, 1) & Cl^-(0, 3, 1) \\ \hline 1 & e_1, e_2, e_3, e \\ e_1e_2, e_1e_3, e_1e, e_2e_3, e_2e, e_3e & e_1e_2e_3, e_1e_2e, e_1e_3e, e_2e_3e \\ e_1e_2e_3e & \end{array} \right)$$

Existem álgebras de Clifford que são consideradas isomórficas, isto é, são álgebras com a mesma quantidade de termos e relações aritméticas semelhantes. Elementos de uma álgebra ou subálgebra podem ser relacionados com elementos de álgebras isomórficas tendo como resultado elementos da álgebra de grau superior. Nesse contexto, para uma álgebra de Clifford qualquer sua álgebra isomórfica é definida como uma álgebra par de grau superior, conforme definido na equação 3.2.

$$Cl(p, q, r) = Cl^+(p, q + 1, r) \quad (3.2)$$

Uma determinada álgebra é construída com a imposição de algumas relações associativas de suas bases geradoras (SELIG, 2000), definidas a seguir.

Axioma 3.1.1¹ – *O produto dos elementos de base da álgebra de Clifford é definido unicamente pela justaposição*² *dos elementos, operação que resulta em um novo componente da álgebra.*

¹O termo axioma é empregado para representar uma sentença difundida na comunidade científica e considerada como fundamental para a construção de uma teoria.

²Processo de formação de elementos pela simples junção lado a lado das bases geradoras, sem nada que as separe e sem alteração na ordem.

$$e_i * e_j = e_i e_j \quad (3.3)$$

Axioma 3.1.2 – Os produtos dos elementos de base são anti-comutativos.

$$e_i e_j = -e_j e_i \quad (3.4)$$

Assim, um elemento da álgebra é simplesmente uma combinação linear das bases geradoras da álgebra. Por exemplo, sejam dois elementos da base $(1 + e_3)$ e $(e_2 + 2e_1 e_3)$, o produto desses elementos é gerado pela aplicação da regra distributiva da multiplicação algébrica, considerando a propriedade anti-comutativa e a propriedade do quadrado das bases geradoras da álgebra (SELIG, 2000).

$$\begin{aligned} (1 + e_3)(e_2 + 2e_1 e_3) &= e_2 + 2e_1 e_3 + e_3 e_2 + 2e_3 e_1 e_3 \\ &= e_2 + 2e_1 e_3 - e_2 e_3 - 2e_1 e_3 e_3 \\ &= e_2 + 2e_1 e_3 - e_2 e_3 + 2e_1 \end{aligned}$$

Uma última operação aritmética dos elementos das álgebras de Clifford precisa ser definida, a conjugação. Esta operação será de fundamental importância na representação dos movimentos de corpos rígidos no espaço tridimensional.

Axioma 3.1.3 – A conjugação de qualquer base geradora é dada simplesmente pelo negativo do gerador, por exemplo, $e_1^* = -e_1$. Porém, a conjugação de elementos de grau > 1 é realizada pela conjugação individual das bases geradoras e a inversão de sua ordem.

$$\begin{aligned} (e_i e_j)^* &= (e_j^*)(e_i^*) = (-e_j)(-e_i) = -e_i e_j \\ (e_i e_j e_k)^* &= (e_k^*)(e_j^*)(e_i^*) = (-e_k)(-e_j)(-e_i) = e_i e_j e_k \end{aligned} \quad (3.5)$$

A conjugação dos elementos pode ser realizada aplicando a propriedade de linearidade da aplicação. Assim, o conjugado de um elemento geral da álgebra é dado pela conjugação de seus geradores. Por exemplo, seja o elemento $a = e_1 + 3e_1 e_2$ seu conjugado será dado por:

$$a^* = -e_1 - 3e_1 e_2$$

Elementos de grau 0 (ou escalares) não são alterados pela operação de conjugação, ou seja:

$$1^* = (-e_1 e_1)^* = -e_1^* e_1^* = -e_1 e_1 = 1$$

para uma álgebra onde o quadrado da base geradora e_1 é -1 , igualmente se pode provar para álgebras com outras definições.

Após definidas as características que determinam uma álgebra de Clifford e suas principais operações aritméticas, serão abordadas as álgebras que definem os quatérnios de Hamilton e os biquatérnios de Clifford.

3.2 QUATÉRNIOS

Os números complexos são elementos pertencentes ao conjunto que representa a extensão dos números reais, onde existe uma unidade imaginária (i) que significa o resultado da raiz quadrada de -1 . Esses elementos são representados pela soma de dois parâmetros, a parte real (a_1) e a parte imaginária (a_2), conforme:

$$q = a_1 + a_2i \quad (3.6)$$

Como os elementos desse conjunto são compostos por duas componentes, é possível interpretá-las como coordenadas cartesianas planares. A componente real corresponde à coordenada x e a componente imaginária corresponde à coordenada y . Um número complexo pode ser interpretado como um vetor planar e, ao aplicar suas propriedades de multiplicação e adição pode-se representar a rotação planar desse vetor (ALTMANN, 2005). Ao se representar um número complexo como coordenadas polares essa característica se torna mais evidente, pois a parcela real está associada à norma do vetor e a componente imaginária ao deslocamento angular (rotação).

A generalização dos números complexos para o espaço tridimensional não é direta, principalmente pelo fato de no plano haver apenas um grau de liberdade de orientação. Dessa forma, é necessária a inclusão de dois novos graus de liberdade, isto é, de duas novas grandezas imaginárias. Assim, as entidades imaginárias são combinadas em um quadrinômio imaginário, denominado de quatérnio, definido da seguinte forma:

Definição 3.2.1³ *O quatérnio é um quadrinômio imaginário composto por uma componente real e três componentes imaginárias (HAMILTON, 1844b), como:*

$$q = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k \quad (3.7)$$

Onde, a_1, a_2, a_3 e a_4 são números reais.

Os progressos na aplicação da álgebra envolvendo o símbolo imaginário $\sqrt{-1}$, admitem uma interpretação real para esta entidade, desde que relacionada com a composição de movimentos lineares e rotações e um plano (HAMILTON, 1845). Assim, Sir William Hamilton adotou um sistema com três símbolos imaginários (i , j e k), que satisfazem as seguintes condições:

³A definição é empregada para representar a delimitação teórica de um termo por outros autores.

$$\begin{aligned}
 i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\
 ij = k &= -ji \\
 ki = j &= -ik
 \end{aligned}$$

Essas relações também podem ser expressas graficamente conforme apresentado na Figura 3.1. Onde, o sentido das setas representa o produto positivo, consequentemente, a multiplicação cuja ordem das grandezas é oposta às setas, é negativa.

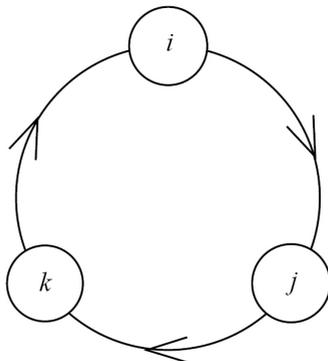


Figura 3.1: Multiplicação dos quatérnios.

Fonte: Baez (2002).

Na cinemática de robôs manipuladores, o uso de quatérnios vem sendo citado em diferentes trabalhos como uma forma alternativa e eficaz para a representação dos movimentos. Em Sciavicco e Siciliano (2000), um pequeno tópico é dedicado para a apresentação dos quatérnios unitários, onde é demonstrada sua potencialidade e enfatizado sua robustez à ocorrência de singularidades (essa característica será explorada mais adiante). Porém, é abordado apenas o procedimento de conversão entre matrizes de transformação homogênea e quatérnios. Já em Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006), Tsai (1999) e Craig (1989) o uso dos quatérnios é mencionado como uma alternativa, mas não é diretamente abordada. Para o entendimento da aplicação desses elementos no contexto da robótica torna-se necessário entender a álgebra que os define. A álgebra dos quatérnios é regida por algumas propriedades aritméticas, as quais serão definidas individualmente a seguir.

Axioma 3.2.1^{4 5} – *A multiplicação de dois quatérnios $q_1 = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$ e $q_2 = b_1 + b_2i + b_3j + b_4k$ é dada pela multiplicação polinomial de seus*

⁴O termo axioma é empregado para representar uma sentença difundida na comunidade científica e considerada como fundamental para a construção de uma teoria.

⁵Os axiomas de 3.2.1 até 3.2.8 são realizados de acordo com as propriedades dos elemen-

termos, resultando em:

$$\begin{aligned}
 q_1 q_2 = & (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) \\
 & + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3) i \\
 & + (a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2) j \\
 & + (a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1) k
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

É necessário ressaltar que devido às propriedades dos elementos imaginários que compõem o quaternião, essa operação não é comutativa, isto é, $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$.

Axioma 3.2.2⁵ – O conjugado (q^*) de um quaternião (conforme definido na equação 3.7) é dado pela inversão do sinal de suas componentes imaginárias.

$$q^* = a_1 - a_2 i - a_3 j - a_4 k \tag{3.9}$$

É possível considerar a relação $(q_1 q_2)^* = q_2^* q_1^*$.

Axioma 3.2.3⁵ – A norma ($\|q\|$) de um quaternião é dada pela somatória do quadrado de suas componentes reais.

$$\|q\| = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \tag{3.10}$$

onde, pode-se definir as relações $(\|q\|) = q^* q = q q^*$.

Axioma 3.2.4⁵ – O módulo ($|q|$) de um quaternião é dado pela raiz quadrada de sua norma.

$$|q| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} \tag{3.11}$$

onde, é possível determinar as relações $(|q|) = \sqrt{\|q\|} = \sqrt{q^* q} = \sqrt{q q^*}$.

Axioma 3.2.5⁵ – O inverso (q^{-1}) de um quaternião é dado pela divisão de seu conjugado por sua norma.

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|} = \frac{q^*}{|q|^2} \tag{3.12}$$

onde, pode-se definir a relação $(q_1 q_2)^{-1} = q_2^{-1} q_1^{-1}$.

tos quaterniônicos apresentados por Hamilton (1844b) e demonstrados em Altmann (2005) e Conway e Smith (2003).

Axioma 3.2.6⁵ – A divisão entre dois quatérnios $\left(\frac{q}{p}\right)$ é dada pela multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor, ou simplesmente:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = qp^{-1} = p^{-1}q \quad (3.13)$$

Axioma 3.2.7⁵ – Um quatérnio é denominado puro quando sua componente real é nula, $a_1 = 0$.

$$q = a_2i + a_3j + a_4k \quad (3.14)$$

Axioma 3.2.8⁵ – Um quatérnio é unitário quando sua norma é igual a 1, isto é, $(\|q\| = 1)$.

Essa categoria de quatérnio é comumente empregada para a representação dos movimentos, devido a sua norma ser unitária. Essa característica leva a um caso particular de simplificação da regra de inversão do quatérnios para:

$$q^{-1} = q^* \quad (3.15)$$

Todas as regras aritméticas impostas para os quatérnios baseiam-se nas propriedades elementares de suas componentes imaginárias. Essas definições podem ser comprovadas através da implementação de uma álgebra de Clifford que defina os quatérnios. Dessa forma, algumas álgebras são capazes de representar os quatérnios, pois existem álgebras que são isomórficas, conforme definido na equação 3.2. A álgebra dos quatérnios pode ser representada pela álgebra de Clifford $Cl(0, 2, 0)$. Nesta álgebra são definidas duas bases geradoras $\{e_1, e_2\}$, cujo quadrado é -1 , assim, expandindo todos os graus possíveis para os geradores dessa álgebra, encontra-se o conjunto $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$. Dessa forma, considerando as relações associativas das bases geradoras de uma álgebra de Clifford, apresentadas anteriormente, pode-se apresentar a relação entre seus elementos através de uma matriz de multiplicação, como:

	1	e_1	e_2	e_1e_2	
1	1	e_1	e_2	e_1e_2	
e_1	e_1	-1	e_1e_2	$-e_2$	
e_2	e_2	$-e_1e_2$	-1	e_1	
e_1e_2	e_1e_2	e_2	$-e_1$	-1	

(3.16)

O elemento tradicional dessa álgebra será $q = a_1 + a_2e_1 + a_3e_2 + a_4e_1e_2$.

⁵Os axiomas 3.2.1 até 3.2.8 são realizadas de acordo com as propriedades dos elementos quaterniônicos apresentados por Hamilton (1844b) e demonstrados em Altmann (2005) e Conway e Smith (2003).

Dessa forma, a multiplicação entre dois elementos dessa álgebra ($q_1 q_2$), sendo que $q_1 = a_1 + a_2 e_1 + a_3 e_2 + a_4 e_1 e_2$ e $q_2 = b_1 + b_2 e_1 + b_3 e_2 + b_4 e_1 e_2$, resulta em:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = & (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) \\ & + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3) e_1 \\ & + (a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2) e_2 \\ & + (a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1) e_1 e_2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pode-se notar a equivalência entre a multiplicação dos quatérnios (equação 3.8) e a multiplicação dos termos da álgebra de Clifford $Cl(0, 2, 0)$ (equação 3.17), o que resulta nas seguintes relações:

$$\begin{aligned} i &= e_1 \\ j &= e_2 \\ k &= e_1 e_2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

A representação dos movimentos do corpo rígido (discutida mais detalhadamente no Apêndice B), baseia-se inicialmente na representação do elemento geométrico fundamental, o ponto. A posição de um ponto no espaço é especificada através das projeções de seu vetor posição nos eixos de coordenadas cartesianos, como ilustrado na Figura 3.2.

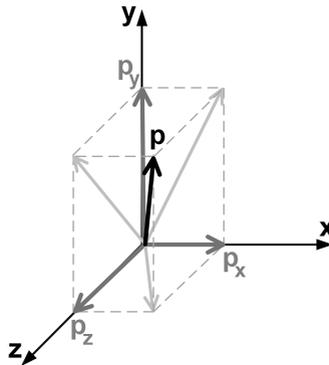


Figura 3.2: Representação de um ponto no espaço.

Este vetor pode ser definido através dessa álgebra de Clifford, conforme Selig (2005), como:

Definição 3.2.2 Um ponto espacial é representado através da álgebra de Clifford $Cl(0,2,0)$ pelas projeções de seu vetor posição $p = (p_x, p_y, p_z)$ (SELIG, 2005), como:

$$p = p_x e_1 + p_y e_2 + p_z e_1 e_2 \quad (3.19)$$

onde, p_x , p_y e p_z são número reais e representam as coordenadas cartesianas de um ponto no espaço.

O vetor posição que representa o ponto no espaço pode sofrer transformações geométricas, como por exemplo a rotação. Dessa forma, um vetor arbitrário (p) é rotacionado por um quatérnio unitário (g), de ângulo duplo (2ϕ), através de um vetor unitário. Por essa característica a rotação por quatérnios é normalmente definida por meio ângulo $\left(\frac{\phi}{2}\right)$. A Figura 3.3 ilustra graficamente a rotação através de ângulo duplo realizada por quatérnios. Uma discussão mais detalhada sobre a rotação através de quatérnios é vista em Vicci (2001), Conway e Smith (2003), Altmann (2005) e Selig (2005).

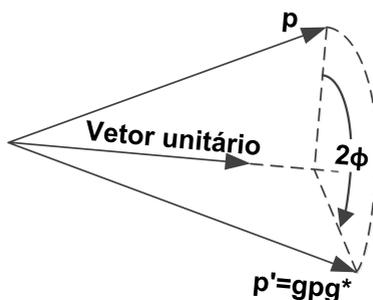


Figura 3.3: Rotação de ângulo duplo por quatérnios.

Nesse contexto a rotação de um ponto por quatérnios pode ser definida como:

Definição 3.2.3 Uma rotação (g) de ϕ é expressa por um elemento da álgebra de Clifford $Cl(0,2,0)$ (discutido detalhadamente em Selig (2005)) como um quatérnio unitário, através de uma transformação por meio ângulo $\left(\frac{\phi}{2}\right)$ por:

$$g = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)[e_1 + e_2 + e_1 e_2] \quad (3.20)$$

Definição 3.2.4 A aplicação da rotação *ativa* sobre um ponto é realizada com a pré-multiplicação do ponto pelo elemento de transformação e por sua

pós-multiplicação pelo conjugado da transformação (VICCI, 2001):

$$p' = gp g^* \quad (3.21)$$

Definição 3.2.5 *A aplicação da rotação **passiva** de um ponto é realizada com a pré-multiplicação do ponto pelo elemento de transformação conjugado e por sua pós-multiplicação pela transformação como (VICCI, 2001):*

$$p'' = g^* p g \quad (3.22)$$

O problema relacionado à representação dos movimentos através da álgebra de Clifford $Cl(0,2,0)$, isto é, álgebras dos quatérnios, está na translação. Naturalmente, essa forma de representação não possui os graus de liberdade necessários para a representação dessa transformação. Assim, sendo aplicada apenas para a representação da orientação do corpo rígido no espaço. Dessa forma, os quatérnios foram expandidos para oito dimensões e denominados de biquatérnios.

3.3 BIQUATÉRNIOS E QUATÉRNIOS DUAIS

Os biquatérnios de Clifford são a expansão dos quatérnios de Hamilton para oito dimensões sendo definidos como:

Definição 3.3.1 *Um biquatérnio é a associação de dois quatérnios clássicos de Hamilton através do operador ω (CLIFFORD, 1873).*

$$b_q = q_1 + q_2 \omega \quad (3.23)$$

onde, q_1 e q_2 são quatérnios clássicos de Hamilton, definidos na equação 3.7.

Esses elementos são relacionados de acordo com a característica de seu operador ω , como discutido anteriormente. Assim, um biquatérnio pode ser classificado como: quatérnio duplo, quatérnio dual e número hipercomplexo ou octônio. Um quatérnio dual é definido como:

Definição 3.3.2 *O quatérnio dual é um biquatérnio cujo quadrado de seu operador ω é nulo, o que leva o operador a ser representado por ε (ROONEY, 1978).*

$$h = q_1 + q_2 \varepsilon, \quad \text{para,} \quad \varepsilon^2 = 0 \quad (3.24)$$

Essa categoria de elementos também representa os movimentos do corpo rígido no espaço, porém, é possível aplicar as transformações a elementos geométricos diferentes do elementar. Dessa forma, a transformação

ativa de um quatérnio dual, segundo Selig (2000), é dada por:

$$\xi' = h\xi h^* \quad (3.25)$$

onde, ξ é o elemento geométrico e h a transformação.

As transformações geométricas elementares do corpo rígido podem ser representadas pelos biquatérnios, incluindo a translação. Assim, o biquatérnio que representa o movimento do corpo rígido no espaço é definido como:

$$h = g + \frac{1}{2}tg\epsilon \quad (3.26)$$

onde, g representa a parcela rotacional através de um quatérnio unitário e t representa a translação através de um quatérnio puro.

O quatérnio dual de transformações geométricas respeita a seguinte condição, segundo Selig (2005):

$$hh^* = 1 \quad (3.27)$$

Dessa forma, como $g = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ e $t = b_1i + b_2j + b_3k$, a transformação de um biquatérnio (equação 3.26) pode ser expandida, gerando:

$$\begin{aligned} h = & (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k) + \frac{1}{2}(a_0b_1 - a_2b_3 + a_3b_2)i\epsilon \\ & + \frac{1}{2}(a_0b_2 + a_1b_3 - a_3b_1)j\epsilon + \frac{1}{2}(a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1)k\epsilon \\ & - \frac{1}{2}(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\epsilon \end{aligned} \quad (3.28)$$

Igualmente aos quatérnios, os biquatérnios podem ser representados por uma álgebra de Clifford. A álgebra que define os quatérnios duais é a $Cl^+(0,3,1)$, onde são empregadas 4 bases geradoras, sendo, três geradores $\{e_1, e_2, e_3\}$ cujo quadrado é -1 e uma base geradora $\{e\}$ cujo quadrado é nulo. Como esta álgebra é par, as bases geradoras são associadas de forma a gerar unicamente elementos de grau par, resultando em 7 elementos complexos, sendo 6 elementos de grau 2, $\{e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1, e_1e, e_2e, e_3e\}$, e um elemento de grau 4, $\{e_1e_2e_3e\}$.

O elemento dessa álgebra que representa a transformação do corpo rígido no espaço é semelhante ao definido na equação 3.20, porém o operador é substituído pela base geradora e , resultando em:

Definição 3.3.3 *A transformação composta, rotação (g) e translação (t), é realizada através da álgebra de Clifford $Cl^+(0,3,1)$, por um quatérnio dual, onde em sua parcela imaginária são representados os ângulos de orientação de forma mínima e desacoplada e, na parcela dual existe a contribuição da translação (SELIG, 2005), como:*

$$h = g + \frac{1}{2}tge \quad (3.29)$$

Definição 3.3.4 *A conjugação dos elementos de transformação dessa álgebra é dada, unicamente, pela conjugação de suas componentes rotacionais. Por exemplo, seja o elemento conforme definido na equação 3.29 seu conjugado será dado por (SELIG, 2005):*

$$h^* = g^* + \frac{1}{2}tg^*e \quad (3.30)$$

Como a componente rotacional g é um quatérnio unitário, definido nesta álgebra como $g = a_0 + a_1e_2e_3 + a_2e_3e_1 + a_3e_1e_2$, e a componente translacional é um quatérnio puro, definido nesta álgebra por $t = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$, a transformação definida na equação 3.26 pode ser expandida, gerando:

$$\begin{aligned} h = & (a_0 + a_1e_2e_3 + a_2e_3e_1 + a_3e_1e_2) + \frac{1}{2}(a_0b_1 - a_2b_3 + a_3b_2)e_1e \\ & + \frac{1}{2}(a_0b_2 + a_1b_3 - a_3b_1)e_2e + \frac{1}{2}(a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1)e_3e \\ & - \frac{1}{2}(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)e_1e_2e_3e \end{aligned} \quad (3.31)$$

Relacionando a equação 3.28 com a equação 3.31, pode-se verificar a equivalência dos elementos da álgebra de Clifford $Cl^+(0, 3, 1)$ e os quatérnios duais, determinada pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} i &= e_2e_3 & j &= e_3e_1 & k &= e_1e_2 \\ i\varepsilon &= e_1e & j\varepsilon &= e_2e & k\varepsilon &= e_3e & \varepsilon &= -e_1e_2e_3e \end{aligned} \quad (3.32)$$

Demonstrada a relação entre os quatérnios duais e a álgebra de Clifford empregada, serão abordadas as transformações elementares aplicadas a esses elementos.

3.3.1 Transformações Geométricas

A transformação geométrica composta (rotação e translação) é realizada conforme descrito anteriormente na equação 3.29. Entretanto, a componente rotacional (g), definida na equação 3.20, deve ser atualizada para esta nova álgebra. Deve-se ressaltar que este elemento consiste em um quatérnio unitário, caracterizado por sua norma ser unitária ($a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$), ou simplesmente, $g^{-1} = g^*$ que resulta em $gg^* = 1$. Assim, considerando as relações definidas em 3.32, obtêm-se:

Definição 3.3.5 *A rotação espacial é representada na álgebra de Clifford $Cl^+(0, 3, 1)$ por um elemento de grau 2 equivalente a um quatérnio unitário*

(SELIG, 2005), como:

$$g = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)[e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2] \quad (3.33)$$

onde, ϕ consiste no ângulo da transformação, $[e_2e_3]$ o eixo x , $[e_3e_1]$ o eixo y e $[e_1e_2]$ o eixo z .

A rotação através das álgebras biquaterniônicas tem uma característica particular que oferece alguns benefícios no seu emprego para o cálculo da cinemática. Devido a seu ângulo ser duplo e, conseqüentemente, à sua rotação ser definida com componentes $\left(\frac{\phi}{2}\right)$, um componente rotacional g qualquer, representa a mesma transformação que $-g$ (SELIG, 2000). Para a álgebra dos quatérnios duais, a translação pode ser definida como:

Definição 3.3.6 *A componente translacional é representada na álgebra de Clifford $Cl(0, 3, 1)$ por um elemento de grau 1 equivalente a um quatérnio puro (SELIG, 2005), como:*

$$t = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \quad (3.34)$$

onde, b_1 , b_2 e b_3 são escalares, $[e_1]$ o eixo x , $[e_2]$ o eixo y e $[e_3]$ o eixo z .

Dessa forma, as transformações elementares podem ser obtidas a partir da equação 3.29. Uma translação pura, isto é, $g = 1$, é definida como:

$$h = 1 + \frac{1}{2}te \quad (3.35)$$

Igualmente, pode-se determinar uma transformação geométrica de rotação pura, isto é, $t = 0$, como:

$$h = g \quad (3.36)$$

A composição de transformações é dada simplesmente pelo produto dos quatérnios duais de transformação. Entretanto, como a aplicação da transformação sobre um elemento geométrico, via quatérnio duais, é realizada com a pré-multiplicação do quatérnio dual de transformação e com a pós-multiplicação do conjugado do mesmo, sobre o elemento geométrico, operação definida na equação 3.29, a aplicação da transformação composta resulta na transformação multi-camadas, definida como:

Proposição 3.3.1⁶ *O acoplamento entre transformações é realizado em camadas, com a pré-multiplicação do quatérnio dual de transformação e a pós-multiplicação de seu conjugado no objeto a ser transformado ordenado em camadas, sendo a camada mais interna a primeira transformação e a mais externa a última, isto é:*

$$\xi' = \underbrace{\left(h_n \dots \left(h_2 \underbrace{\left(h_1 (\xi) h_1^* \right)}_{\text{Camada 1}} h_2^* \right) \dots h_n^* \right)}_{\text{Camada } n} \quad (3.37)$$

Uma última característica dessas transformações precisa ser ressaltada, a transformação inversa de uma transformação geométrica composta (h) é dada, simplesmente, pelo conjugado de seu quatérnio de transformação (h^*).

Assim, após terem sido abordadas as transformações geométricas compostas e elementares e suas características, será discutido o emprego dos quatérnios duais para a representação dos movimentos.

3.3.2 Representação da Posição

A representação espacial de um corpo rígido é realizada por um vetor posição (que geralmente aponta para uma extremidade ou seu centro de massa) situado na origem do sistema de coordenadas global (ou da base, no caso de um manipulador) e por um sistema de coordenadas fixo sobre o objeto (no mesmo local para qual aponta o vetor posição). A posição espacial é delimitada pelas projeções do vetor posição sobre o sistema de coordenadas global. Enquanto a orientação espacial é descrita pelas rotações associadas ao sistema de coordenadas do corpo rígido quando comparado ao sistema de coordenadas global, como ilustrado na Figura 3.4.

Em uma transformação composta que representa a cinemática direta de um mecanismo, obtém-se a posição espacial do corpo rígido movimentando diretamente o elemento que o representa. Visto que a transformação modifica sua representação espacial, ou seja, seu vetor posição (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000). Existem diferentes abordagens para a composição dessas transformações, as quais serão abordadas no Capítulo 4.

⁶O termo proposição é empregado para a apresentação da proposta de definição de uma operação matemática.

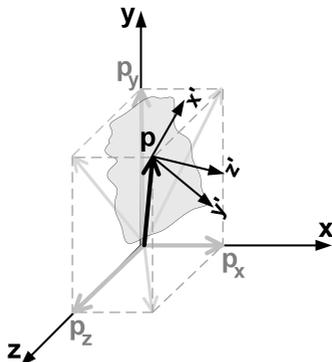


Figura 3.4: Representação espacial do corpo rígido.

O vetor posição pode ser interpretado geometricamente por um ponto qualquer no corpo rígido e delimita a posição deste ponto em relação ao sistema de coordenadas global. Assim, um ponto é descrito no espaço através de três coordenadas cartesianas, que podem ser expressas em um vetor $p = [p_x, p_y, p_z]^T$. A representação de um ponto através de quatérnios duais é definida como:

Definição 3.3.7 *Um ponto pode ser representado na álgebra de Clifford $Cl^+(0, 3, 1)$, por um elemento de grau 2, cujas projeções são descritas como (SELIG, 2005):*

$$p = 1 + (p_x e_1 e + p_y e_2 e + p_z e_3 e) \quad (3.38)$$

onde, p_x , p_y e p_z são as coordenadas cartesianas, e lembrando que o elemento satisfaz a equação $pp^* = 1$.

A posição de um corpo rígido no espaço é obtida diretamente do ponto resultante da transformação, como definido na equação 3.37. Porém, os ângulos de orientação necessitam ser extraídos do elemento de transformação, o que será discutido a seguir.

3.3.3 Representação da Orientação

Os ângulos de Euler (discutidos detalhadamente no Apêndice C) são caracterizados por ser uma representação mínima da orientação do corpo rígido no espaço, através de um conjunto de três ângulos. Por exemplo, o conjunto de ângulos ZYX, denominados de *Roll-Pitch-Yaw*, delimitam que a orientação espacial pode ser representada através de três rotações, resultando

em uma matriz de rotação genérica, como:

$$R(\phi) = R_z R_y R_x = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

A extração dos ângulos de Euler de uma transformação representada por matrizes de transformação homogênea agrega singularidades que por sua vez degeneram instantaneamente ou definitivamente a solução, conforme discutido previamente, principalmente devido ao modo como são realizadas.

Os ângulos de orientação são grandezas dependentes de outras componentes na matriz de transformação homogênea, pois são empregadas nove variáveis (uma matriz (3×3)) para a representação de 6 DOF. Para a extração dos ângulos de uma matriz de transformação homogênea são aplicados artifícios matemáticos, baseados na função $Atan2$. Segundo Sciavicco e Siciliano (2000), a função $Atan2(y, x)$ determina o arco-tangente da razão $\left(\frac{y}{x}\right)$ e utiliza o sinal de cada argumento para determinar o quadrante do ângulo resultante. Essa função torna-se ambígua quando uma das variáveis da razão é nula (zero), pois nessa condição não existe a determinação de uma solução lógica (com significado), mas um resultado sem representação. Os fatores dessa razão estão relacionados com o conjunto de ângulos de Euler utilizados, porém são dependentes de mais de uma variável. Ou seja, existem diversas condições que podem convergir a solução para um resultado não desejável, uma singularidade numérica. O que torna difícil a determinação dessas condições e, as mesmas podem ocorrer durante o seguimento de trajetória de um sistema robótico, delimitando uma postura indesejável para o sistema e degenerando parcialmente ou completamente a solução.

Nesse contexto é comum a representação dos ângulos de Euler para um intervalo válido da solução, como apresentado por exemplo em Sciavicco e Siciliano (2000) e Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006). Outra característica dessa função é sua multiplicidade de soluções, naturalmente para um mesmo conjunto de ângulos de Euler é possível a determinação de mais de uma solução, como discutido no Apêndice C.

A orientação do corpo rígido no espaço é extraída do biquatérnio de transformação (equação 3.29) de forma direta, pois a orientação é uma componente independente dentro do elemento de transformação. Os ângulos de Euler ZYX, também denominados de $Roll(\phi)$ - $Pitch(\vartheta)$ - $Yaw(\psi)$, de um quatérnio dual de transformação $h = a_0 + a_1 e_2 e_3 + a_2 e_3 e_1 + a_3 e_1 e_2 + a_4 e_1 e_2 e_3 e + a_5 e_1 e + a_6 e_2 e + a_7 e_3 e$, são obtidos conforme:

$$\psi = 2\text{sen}^{-1}(A_1), \quad \vartheta = 2\text{sen}^{-1}(A_2) \quad e \quad \phi = 2\text{sen}^{-1}(A_3) \quad (3.40)$$

onde, A_1 , A_2 e A_3 são a representação em graus dos ângulos a_1 , a_2 e a_3 respectivamente.

Conforme discutido no Capítulo 2, o alinhamento de eixos de rotação ("gimbal-lock") influencia diretamente a transformação por matrizes de rotação, promovendo a transformação sobre um eixo não desejado. A representação por quatérnios duais não apresenta essa problema, visto que a rotação é independente e sempre ocorre sobre o eixo determinado. Ainda através dos quatérnios duais uma rotação, g é igual a rotação $-g$. O que fortalece a unicidade da extração dos ângulos de orientação.

3.4 CONCLUSÃO

Este capítulo apresentou a fundamentação teórica sobre a representação dos movimentos através das entidades quaterniônicas. É demonstrado o potencial dos elementos quaterniônicos, principalmente quando relacionado com a não-ocorrência de singularidades cinemáticas. São discutidas também as restrições que ocasionam na expansão das dimensões do quatérnio e, conseqüentemente, no emprego dos quatérnios duais.

Os quatérnios duais são apresentados como um caso particular dos biquatérnios de Clifford e como uma generalização dos quatérnios de Hamilton. A aplicação desse elemento é decorrência do requisito da representação da transformação composta (isto é, da rotação e da translação) no espaço. Pois, os quatérnios unitários não possuem dimensões suficientes para a representação dessa transformação.

A utilização dos quatérnios duais se fundamenta em sua definição através da álgebra de Clifford. A análise através dessa álgebra permite a justificativa da não-ocorrência de singularidades devido à linearidade da extração da representação, atingindo o objetivo II deste trabalho, delimitado no item 1.2.1.

Os próximos capítulos discutirão o emprego desses elementos na determinação da cinemática direta e inversa, como também sua influência na representação das orientações, exemplificando através de estudos de caso numéricos.

4 ANÁLISE CINEMÁTICA

A cinemática consiste no estudo dos movimentos, desconsiderando as forças e torques que os originam. Esta ciência relaciona grandezas como posição, velocidade e aceleração, através de seu comportamento temporal. Conseqüentemente, a cinemática se preocupa unicamente com as propriedades geométricas e temporais do movimento. A análise cinemática se concentra na derivação dos movimentos relativos às juntas através dos vários elos do mecanismo, neste caso um manipulador. Os movimentos são referenciados através da colocação de sistemas de coordenadas em pontos específicos do mecanismo e a transformação entre os mesmos acarreta no mapeamento cinemático. Diferentes abordagens podem ser empregadas para delimitar a localização e a quantidade de sistemas de coordenadas a ser utilizado.

Este capítulo se fundamenta na aplicação dos quatérnios duais para o mapeamento da cinemática direta. Utiliza-se os biquatérnios para descrever a transformação entre os sistemas de coordenadas atribuídos ao mecanismo. É investigada a sua aplicação em abordagens distintas para a atribuição dos sistemas de coordenadas.

4.1 CINEMÁTICA DIRETA

A cinemática direta modela a relação entre as variáveis de junta (os ângulos dos atuadores, medidos através do sistema de sensoriamento das juntas) para a determinação do conjunto, posição e orientação, correspondente ao efetuador final (TSAI, 1999). O cálculo da cinemática direta clássica se fundamenta na atribuição de sistemas de coordenadas intermediários. Através das transformações homogêneas entre cada sistema, realiza-se a transformação das variáveis de junta para a posição e orientação do efetuador, conforme representado na Figura 4.1. A representação dos movimentos entre esses sistemas é realizada a partir de transformações homogêneas, representadas por meio de matrizes, conforme discutido detalhadamente no Apêndice B, denominadas de matrizes de transformação homogênea $\left(H_n^0(q)\right)$. O acoplamento dessas transformações gera a transformação geral para a cadeia cinemática, através da multiplicação ordenada dessas matrizes, conforme a equação 4.1.

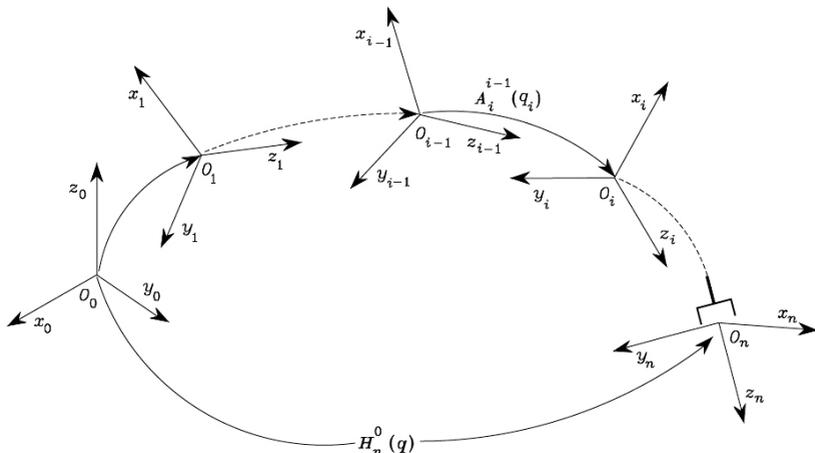


Figura 4.1: Cinemática direta.

Fonte: Sciavicco e Siciliano (2000).

$$H_n^0(q) = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2)\dots A_n^{n-1}(q_n) \quad (4.1)$$

onde, q_1, q_2, \dots, q_n são as variáveis de junta, n o número de elos da cadeia cinemática e A_n^{n-1} é a matriz de transformação homogênea do sistema de coordenadas $(n-1)$ para o sistema de coordenadas (n) .

Entretanto, a determinação da posição e orientação dos sistemas de coordenadas intermediários não é unívoca, permitindo diferentes soluções para a cinemática direta. Dessa forma, existem alguns métodos para a sistematização dessas operações.

4.1.1 A Convenção de Denavit-Hartenberg

A convenção de Denavit-Hartenberg (D-H) é a metodologia sistemática clássica para a determinação das transformações entre os corpos rígidos. Quando aplicada à uma cadeia cinemática realiza a cinemática direta do mecanismo, discutida detalhadamente no Apêndice D. Dessa forma, são definidas as sequências de transformações e não a forma de realizá-las. Assim, podem ser empregados diferentes procedimentos para a resolução das transformações geométricas como, por exemplo, a matriz de transformação homogênea ou os quatérnios duais.

Um mecanismo é descrito, através desta convenção, por um conjunto de quatro parâmetros: comprimento do elo (a_n), ângulo de torção do elo (α_n),

deslocamento do elo (d_n) e ângulo de junta (θ_n). Os parâmetros de Denavit-Hartenberg são designados de acordo com a disposição dos sistemas de coordenadas do mecanismo.

Exemplo 4.1.1 De modo a exemplificar esse procedimento, seja um manipulador planar composto por 3 juntas rotativas ($3R$), a aplicação dos sistemas de coordenadas segundo a convenção de D-H resulta na Figura 4.2 e os parâmetros de D-H são apresentados na Tabela 4.1.

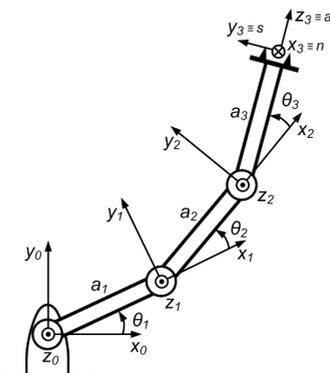


Figura 4.2: Convenção de Denavit-Hartenberg aplicada ao manipulador planar 3R.

<i>Elo</i>	a_n	α_n	d_n	θ_n
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

Tabela 4.1: Parâmetros de Denavit-Hartenberg do manipulador planar 3R.

Os parâmetros de Denavit-Hartenberg delimitam de forma sistemática como são realizadas as transformações entre os sistemas de coordenadas. Ou simplesmente, como é montada a matriz de transformação homogênea para descrever a transformação entre dois sistemas de coordenadas, como:

$$A_n^{n-1} = R_z(\theta_n)T_z(d_n)T_x(a_n)R_x(\alpha_n) \quad (4.2)$$

Onde, R_x, R_y, R_z representa a rotação sobre um eixo e T_x, T_y, T_z a translação em

um eixo, ambas as transformações são dependentes dos parâmetros de D-H e n representa o número do elo correspondente.

Ao aplicar os parâmetros descritos na Tabela 4.1 à equação de movimentos entre os sistemas de coordenadas definidos pela convenção de Denavit-Hartenberg (equação 4.2), obtêm-se as transformações em relação aos sistemas intermediários (A_n^{n-1}), que quando associadas, conforme a equação 4.1, resultam na cinemática direta do manipulador planar 3R:

$$H_3^0 = A_1^0(a_1, \theta_1)A_2^1(a_2, \theta_2)A_3^2(a_3, \theta_3) \quad (4.3)$$

Devido às características físicas do manipulador, as transformações podem ser descritas unicamente de acordo com o comprimento do elo a_n e o ângulo da junta rotativa θ_n . Como a_n é um parâmetro fixo, pode ser tratado como uma constante numérica, a equação 4.3, pode ser escrita simplesmente como:

$$H_3^0 = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2)A_3^2(q_3) \quad (4.4)$$

Onde, a variável de junta q_i representa o ângulo da junta rotativa θ_i , sendo i o número da junta.

Entretanto, como $A_n^{n-1}(q_n) = A_n^{n-1}(a_n, \theta_n) = R_z(\theta_n)T_x(a_n)$, a cinemática direta do manipulador planar 3R, pode ser expandida em suas transformações elementares como:

$$H_3^0 = R_z(\theta_1)T_x(a_1)R_z(\theta_2)T_x(a_2)R_z(\theta_3)T_x(a_3) \quad (4.5)$$

Ao aplicar as matrizes de transformação homogêneas, para a resolução da equação 4.5, obtêm-se:

$$H_3^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 & a_1 \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_2) & 0 & a_2 \\ \text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\text{sen}(\theta_3) & 0 & a_3 \\ \text{sen}(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

A determinação da posição do efetuador final no espaço operacional será dada pela resultante da transformação de um vetor nulo (ou um ponto situado na origem do sistema de coordenadas global) pela transformação equivalente do primeiro ao último sistema de coordenadas intermediários, isto é, da base do manipulador ao seu efetuador final. A aplicação da cinemá-

tica direta através das matrizes de transformação homogênea é realizada com a multiplicação da transformação resultante pelo ponto inicial, ou simplesmente:

$$\hat{p}' = H_3^0 \hat{p} \quad (4.7)$$

Onde, $\hat{p}' = [p_x, p_y, p_z, 1]^T$ é o ponto transformado e $\hat{p} = [0, 0, 0, 1]^T$ é o ponto inicial.

As transformações geométricas podem ser realizadas com a aplicação dos quatérnios duais, conforme discutido no Capítulo 3. Dessa forma, a transformação entre os sistemas de coordenadas descritos pela convenção de Denavit-Hartenberg (equação 4.2) podem ser definidas através de quatérnios duais como:

Proposição 4.1.1⁰ *A transformação entre os sistemas de coordenadas empregados na convenção de Denavit-Hartenberg é realizada através das transformações elementares, designadas de acordo com os seus quatro parâmetros, que podem ser descritas por quatérnios duais de transformação (definidos na equação 3.29), como:*

$$h_n^{n-1} = \left(g_z(\theta_n) + \frac{1}{2} (t_z(\mathbf{d}_n) + t_x(\mathbf{a}_n)) g_z(\theta_n) e \right) g_x(\alpha_n)^1 \quad (4.8)$$

Ou na forma expandida:

$$h_n^{n-1} = \left(\overbrace{\left(\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e_1 e_2 \right)}^{g_z(\theta_n)} + \left(\frac{1}{2} \left(\overbrace{\mathbf{d}_n e_3}^{t_z(\mathbf{d}_n)} + \overbrace{\mathbf{a}_n e_1}^{t_x(\mathbf{a}_n)} \right) \right) \right) \left(\overbrace{\left(\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e_1 e_2 \right) e}^{g_z(\theta_n)} \right) \overbrace{\left(\cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) e_2 e_3 \right)^1}^{g_x(\alpha_n)} \quad (4.9)$$

Onde, θ_n , \mathbf{d}_n , \mathbf{a}_n e α_n são os parâmetros de D-H e, n é o número do elo correspondente.

⁰O termo proposição é empregado para a apresentação da proposta de definição de uma operação matemática.

¹Ooptou-se por usar negrito para realçar as variáveis.

Exemplo 4.1.2 A cinemática direta do manipulador 3R, definida na equação 4.5, pode ser reescrita através dos quatérnios duais, como definido na equação 4.8, resultando em:

$$h_n^{n-1} = \left(g_z(\theta_n) + \frac{1}{2} t_x(\mathbf{a}_n) g_z(\theta_n) e \right)^1 \quad (4.10)$$

Ou expandindo, como na equação 4.9:

$$h_n^{n-1} = \left(\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e_1 e_2 \right) + \left(\frac{1}{2} (\mathbf{a}_n e_1) \left(\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e_1 e_2 \right) e \right)^1 \quad (4.11)$$

Onde, $n = 1, 2, 3$.

A determinação da transformação resultante através de quatérnios duais respeita a regra de transformação ordenada em camadas. Assim, o mapeamento cinemático para obtenção da posição do efetuador final, analogamente ao apresentado na equação 4.7, é definido como:

Proposição 4.1.2⁰ *A cinemática direta através de quatérnios duais é realizada com a aplicação da transformação resultante do acoplamento das transformações entre os sistemas de coordenadas intermediários em camadas (como definido na equação 3.37) ao ponto situado na origem, ou seja:*

$$p' = \left(h_n^{(n-1)} \dots \left(h_2^1 \left(h_1^0(p) h_1^{0*} \right) h_2^{1*} \right) \dots h_n^{(n-1)*} \right) \quad (4.12)$$

Onde, $p' = (1 + p_x e_1 e + p_y e_2 e + p_z e_3 e)$ é o ponto transformado e $p = 1$ é o ponto inicial.

Para uma melhor exemplificação do processo, ambas as metodologias serão empregadas em um exemplo numérico.

Exemplo 4.1.3 Assim, seja um manipulador planar composto por 3 juntas rotativas (Figura 4.2), cujo comprimento dos elos é $a_1 = 30\text{cm}$, $a_2 = 60\text{cm}$, $a_3 = 20\text{cm}$, ao aplicar um movimento a configuração resultante das juntas resultante é $\theta_1 = 137^\circ$, $\theta_2 = 252^\circ$ e $\theta_3 = 330^\circ$. A obtenção da posição do efetuador final através das matrizes de transformação homogêneas é realizado de acordo com a aplicação da transformação relativa entre o sistema de coordenadas da base e do efetuador final H_3^0 (definida na equação 4.6) ao vetor nulo (como definido na equação 4.7, resultando em:

$$\begin{aligned}
\hat{p}' &= \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50,5335 \\ 49,1995 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0,9998 & 0,0175 & 0 & 50,5335 \\ -0,0175 & 0,9998 & 0 & 49,1995 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.13) \\
p_x &= 50,5335, \quad p_y = 49,1995 \quad e \quad p_z = 0
\end{aligned}$$

Exemplo 4.1.4 O exemplo 4.1.3 pode ser reescrito através dos quatérnios duais. A transformação da cinemática direta (descrito na equação 4.11) é aplicada ao ponto inicial situado na origem do sistema de coordenadas global (como definido na equação 4.12), resultando em:

$$\begin{aligned}
p' &= (0,99996 - 0,0087265e_1e_2 + 25,0511e_1e + 24,8193e_2e) \\
&\quad (1 + 0e_1e + 0e_2e + 0e_3e)(0,99996 + 0,0087265e_1e_2 + 25,0511e_1e \\
&\quad + 24,8193e_2e) \\
p' &= (1 + 50,5335e_1e + 49,1995e_2e) \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Ao comparar a equação 4.14 com um ponto definido na álgebra de Clifford $Cl^+(0, 3, 1)$ (definido na equação 3.38) obtém-se a posição do efetuador final no espaço operacional, como:

$$\begin{aligned}
p' &= (1 + 50,5335e_1e + 49,1995e_2e) = (1 + p_xe_1e + p_ye_2e + p_ze_3e) \\
p_x &= 50,5335, \quad p_y = 49,1995 \quad e \quad p_z = 0 \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Ao comparar o resultado obtido na equação 4.13 com o resultado da equação 4.15 nota-se a equivalência entre os dois métodos de transformação. Assim, demonstra-se que a transformação geométrica com quatérnios duais é idêntica a realizada com matrizes de transformação homogênea, ao aplicar a convenção de Denavit-Hartenberg.

Porém esta é considerada a metodologia clássica para a determinação da cinemática direta. Existem outras padronizações, como o método dos helicóides sucessivos, discutido a seguir.

4.1.2 Método dos Helicóides Sucessivos

O método dos helicóides sucessivos é uma metodologia para a análise cinemática de cadeias abertas através do elemento geométrico helicóide, discutido mais detalhadamente no Apêndice E. Esta metodologia vem sendo aplicada em diversos trabalhos do Laboratório de Robótica da UFSC, por exemplo, nas teses de doutorado de Campos (2004), Santos (2006), Simas (2008) e Ribeiro (2010) e, nas dissertações de mestrado de Dourado (2005) e Cruz (2007), em diferentes contextos, como na aplicação em sistemas redundantes em ambientes confinados, em sistema cooperativos e em sistemas redundantes subaquáticos. Uma particularidade desta metodologia está na necessidade do emprego de apenas um sistema fixo de coordenadas de referência e um sistema de coordenadas do efetuador, diferentemente da convenção de Denavit-Hartenberg que emprega um sistema de coordenada por junta (TSAI, 1999).

Para o emprego desse método o procedimento inicial é a determinação da posição de referência do manipulador. Esta postura pode ser selecionada arbitrariamente, porém é aconselhada a escolha de uma configuração conhecida, onde os ângulos de junta possam ser facilmente determinados, como por exemplo, a configuração onde todos os ângulos de junta sejam nulos (TSAI, 1999).

A posição e orientação dos eixos das juntas, também necessitam ser determinados. Esse procedimento é realizado com a colocação de um helicóide sobre o eixo de cada junta, assim, pode-se determinar:

- O vetor direção do eixo do helicóide ($s_i = (s_x, s_y, s_z)$), isto é, a direção do eixo da junta;
- O vetor posição do eixo de helicóide ($s_0 = (s_{0x}, s_{0y}, s_{0z})$), ou, a localização espacial da junta.

Com a posição desejada para o manipulador expressa em termos de posição do efetuador pode-se montar as transformações associadas a cada helicóide e o acoplamento dessas gera a cinemática direta do manipulador. Para o caso genérico de um manipulador serial de n juntas, a aplicação do método dos helicóides sucessivos (apresentado na Figura 4.3) pode ser esquematizado sequencialmente, conforme Tsai (1999), como:

1. *Posição de referência*: significa a posição de referência do manipulador especificada através da localização inicial do efetuador (u_0, v_0, w_0 e q_0) e a direção e orientação dos eixos dos helicóides (s_i e s_{0i} , para $i = 1, 2, \dots, n$).
2. *Posição de destino*: é a posição desejada para o manipulador especificada em termos da posição desejada do efetuador (u, v, w e q).

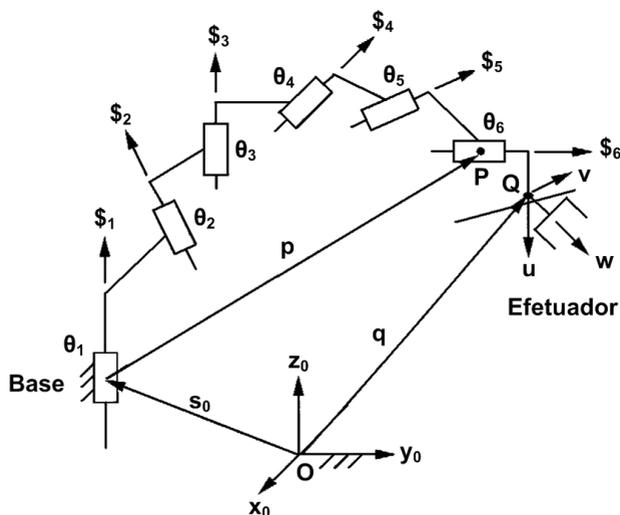


Figura 4.3: Sistema de helicóides aplicados a um manipulador serial.

Fonte: Tsai (1999).

3. *Transformação de deslocamento do efetuador:* é a transformação da posição de referência para a posição de destino, como consequência do deslocamento de n helicóides sucessivos. Desde que todos os helicóides sejam colocados nos eixos das juntas do manipulador na posição de referência. Assim, o deslocamento helicoidal resultante é dado pela pré-multiplicação desses deslocamentos, conforme:

$$H = H_1 H_2 \dots H_{n-1} H_n \quad (4.16)$$

onde, H_n representa a matriz de transformação do deslocamento helicoidal.

O deslocamento helicoidal é expresso tradicionalmente por matrizes de transformação homogêneas (discutida detalhadamente no Apêndice B). A rotação (R) e a translação (q) geométrica são descritas através de uma única matriz, como:

$$H_n = \begin{bmatrix} R_{(3 \times 3)} & \vdots & q_{(3 \times 1)} \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0_{(1 \times 3)} & \vdots & 1_{(1 \times 1)} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \quad (4.17)$$

A componente rotacional do deslocamento helicoidal ($R_{(3 \times 3)}$), discutida detalhadamente no Apêndice E, é descrita como:

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} (s_x^2 - 1)(1 - \cos(\theta)) + 1 & s_x s_y (1 - \cos(\theta)) - s_z \text{sen}(\theta) \\ s_y s_x (1 - \cos(\theta)) - s_x \text{sen}(\theta) & (s_y^2 - 1)(1 - \cos(\theta)) + 1 \\ s_z s_x (1 - \cos(\theta)) - s_y \text{sen}(\theta) & s_z s_y (1 - \cos(\theta)) - s_x \text{sen}(\theta) \\ s_x s_z (1 - \cos(\theta)) - s_y \text{sen}(\theta) \\ s_y s_z (1 - \cos(\theta)) - s_x \text{sen}(\theta) \\ (s_z^2 - 1)(1 - \cos(\theta)) + 1 \end{bmatrix}$$

Onde, s_x , s_y e s_z são as componentes do vetor direção que representa o eixo do helicóide $s_i = (s_x, s_y, s_z)$ e θ é o ângulo de junta (para o caso de uma junta rotativa).

As componentes translacionais do deslocamento helicoidal ($q = [q_x, q_y, q_z]^T$) (discutida detalhadamente no Apêndice E) são determinadas de acordo com as componentes rotativas (especificadas na equação 4.18), como:

$$q = \begin{cases} q_x = t s_x - s_{0x}(a_{11} - 1) - s_{0y} a_{12} - s_{0z} a_{13} \\ q_y = t s_y - s_{0x} a_{21} - s_{0y}(a_{22} - 1) - s_{0z} a_{23} \\ q_z = t s_z - s_{0x} a_{31} - s_{0y} a_{32} - s_{0z}(a_{33} - 1) \end{cases} \quad (4.19)$$

Onde, s_{0x} , s_{0y} e s_{0z} são as componentes do vetor posição que representa o eixo do helicóide $s_0 = (s_{0x}, s_{0y}, s_{0z})$ e t é o deslocamento de junta (para o caso de uma junta prismática).

A determinação da cinemática direta será dada pela resultante da transformação do vetor posição inicial pela transformação equivalente ao acoplamento de todos os deslocamentos helicoidais (equação 4.16), ou simplesmente:

$$\hat{p}' = H \hat{p}_0 \quad (4.20)$$

Onde, $\hat{p}' = [p_x, p_y, p_z, 1]^T$ é o ponto transformado e \hat{p}_0 é o ponto inicial.

As transformações geométricas, relativas ao deslocamento helicoidal, podem ser realizadas com a aplicação dos quatérnios duais, conforme discutido no Capítulo 3. Dessa forma, o deslocamento helicoidal descrito por matriz de transformação homogênea nas equações 4.17, 4.18 e 4.19, podem ser definidas através de quatérnios duais como:

Proposição 4.1.3⁰ *O quatérnio dual de transformação (conforme definido na equação 3.29) pertencente a álgebra de Clifford $Cl^+(0, 3, 1)$ que representa o deslocamento helicoidal é definido como:*

$$h_n = \left(g_{s_i}(\theta_n) + \frac{1}{2} (t_x(\mathbf{q}_x) + t_y(\mathbf{q}_y) + t_z(\mathbf{q}_z)) g_{s_i}(\theta_n) e \right)^1 \quad (4.21)$$

Onde, g_{s_i} representa a componente rotacional do deslocamento helicoidal, descrita pelo vetor direção do eixo do helicóide e , q_x , q_y e q_z são as componentes translacionais do deslocamento helicoidal.

Ou na forma expandida:

$$h_n = \overbrace{\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) [\mathbf{s}_x e_2 e_3 + \mathbf{s}_y e_3 e_1 + \mathbf{s}_z e_1 e_2] \right)}^{g_{s_i}(\theta_n)} + \frac{1}{2} \left(\underbrace{t_x(\mathbf{q}_x)}_{q_x e_1} + \underbrace{t_y(\mathbf{q}_y)}_{q_y e_2} + \underbrace{t_z(\mathbf{q}_z)}_{q_z e_3} \right) \overbrace{\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) [\mathbf{s}_x e_2 e_3 + \mathbf{s}_y e_3 e_1 + \mathbf{s}_z e_1 e_2] \right)}^{g_{s_i}(\theta_n)} e^1 \quad (4.22)$$

Onde, $s_i = (s_x, s_y, s_z)$ é o vetor direção que representa o eixo do helicóide.

De maneira semelhante a abordagem pela convenção de D-H, a determinação da transformação resultante através de quatérnios duais respeita a regra de transformação ordenada em camadas, como:

Proposição 4.1.4⁰ *A cinemática direta através de quatérnios duais é realizada com a aplicação da transformação resultante do acoplamento dos deslocamentos helicoidais em camadas (como definido na equação 3.37) a um ponto situado na origem, ou seja:*

$$p' = \left(h_n \dots \left(h_2 \left(h_1 (p_0) h_1^* \right) h_2^* \right) \dots h_n^* \right) \quad (4.23)$$

Onde, $p' = (1 + p_x e_1 e + p_y e_2 e + p_z e_3 e)$ é o ponto transformado e $p = (1 + p_{x_0} e_1 e + p_{y_0} e_2 e + p_{z_0} e_3 e)$ é o ponto que representa a configuração inicial.

⁰O termo proposição é empregado para a apresentação da proposta de definição de uma operação matemática.

¹Optou-se por usar negrito para realçar as variáveis.

Exemplo 4.1.5 Como exemplo da aplicação do método, seja um manipulador planar composto por 3 juntas rotativas (3R), o emprego dos helicóides para a aplicação do método dos helicóides sucessivos helicóides resulta na Figura 4.4.

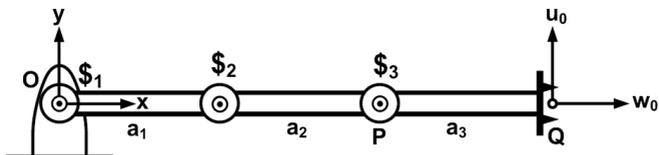


Figura 4.4: Método dos Helicóides Sucessivos aplicado ao manipulador planar 3R.

Com o sistema de helicóides empregado conforme a Figura 4.4, é possível se determinar os parâmetros iniciais da cadeia cinemática que resultam na Tabela 4.2. Ainda pode ser acrescentadas as coordenadas da posição inicial do manipulador $\hat{p}_0 = [a_1 + a_2 + a_3, 0, 0, 1]^T$, que consistem nas configurações onde todos os ângulos de junta são nulos, ou seja, $\theta_{1,2,3} = 0$.

<i>Junta</i>	s_i	s_{0i}
1	(0, 0, 1)	(0, 0, 0)
2	(0, 0, 1)	(a_2 , 0, 0)
3	(0, 0, 1)	($a_2 + a_3$, 0, 0)

Tabela 4.2: Parâmetros dos helicóides dispostos no manipulador planar 3R.

Após especificadas as condições iniciais, pode-se determinar as transformações associadas aos deslocamentos helicoidais, descritas por matrizes de transformação homogênea (conforme as equações 4.17, 4.18 e 4.19) e, acoplá-las (como descrito na equação 4.16) para o procedimento de obtenção da cinemática direta do manipulador, resultando em:

$$H = H_1 H_2 H_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_2) & 0 & a_1(1 - \cos(\theta_2)) \\ \text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & -a_1\text{sen}(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\text{sen}(\theta_3) & 0 & (a_1 + a_2)(1 - \cos(\theta_3)) \\ \text{sen}(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & -(a_1 + a_2)\text{sen}(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.1.6 O exemplo 4.1.5 pode ser desenvolvido através do deslocamento helicoidal que delimita a cinemática direta do manipulador 3R especificado através de quatérnios duais, conforme definido na equação 4.21, resultando em:

$$\begin{aligned} H_1 &= (g_{s_1}(\theta_1)) \\ H_2 &= \left(g_{s_2}(\theta_2) + \frac{1}{2}(t_x(q_x) + t_y(q_y))g_{s_2}(\theta_2)e \right) \\ H_3 &= \left(g_{s_3}(\theta_3) + \frac{1}{2}(t_x(q_x) + t_y(q_y))g_{s_3}(\theta_3)e \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ou na forma expandida:

$$\begin{aligned} H_1 &= \left(\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)e_1e_2 \right) \\ H_2 &= \left(\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)e_1e_2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\left(a_1(1 - \cos(\theta_2)) \right)e_1 + \left(-a_1\text{sen}(\theta_2) \right)e_2 \right) \\ &\left(\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right)e_1e_2 \right)e \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} H_3 &= \left(\cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta_3}{2}\right)e_1e_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\left((a_1 + a_2)(1 - \cos(\theta_3)) \right)e_1 + \right. \\ &\left. \left(-(a_1 + a_2)\text{sen}(\theta_3) \right)e_2 \right) \left(\cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta_3}{2}\right)e_1e_2 \right)e \end{aligned}$$

Para uma melhor exemplificação do processo, o método será aplicado, com ambas as metodologias de transformação, em um exemplo numérico (o mesmo empregado na convenção de Denavit-Hartenberg).

Exemplo 4.1.7 Assim, seja um manipulador planar composto por 3 juntas rotativas (Figura 4.4), cujo comprimento dos elos é $a_1 = 30\text{cm}$, $a_2 = 60\text{cm}$, $a_3 = 20\text{cm}$ e ao aplicar um movimento a configuração resultante é $\theta_1 = 137^\circ$, $\theta_2 = 252^\circ$ e $\theta_3 = 330^\circ$. A cinemática direta desse manipulador através do método dos helicóides sucessivos via de transformação homogênea, aplicando a transformação definida na equação 4.24 à equação 4.20 e, considerando que a configuração inicial é $\hat{p}_0 = [a_1 + a_2 + a_3, 0, 0, 1]^T = [110, 0, 0, 1]^T$, resulta em:

$$\begin{aligned} \hat{p}' &= \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50,5335 \\ 49,1995 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,9998 & 0,0175 & 0 & -59,4497 \\ -0,0175 & 0,9998 & 0 & 51,1192 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.27) \\ p_x &= 50,5335, \quad p_y = 49,1995 \quad e \quad p_z = 0 \end{aligned}$$

Exemplo 4.1.8 A mesma transformação, do exemplo 4.1.7, pode ser realizada através dos quatérnios duais. Onde, a cinemática direta (descrita na equação 4.25) é aplicada ao ponto que representa a configuração inicial do sistema ($p_0 = 1 + 100e_1$), como definido na equação 4.23, resultando em:

$$\begin{aligned} p' &= (0,99996 - 0,0087265e_1e_2 - 29,9468e_1e + 25,2993e_2e) \\ &\quad (1 + 100e_1e + 0e_2e + 0e_3e)(0,99996 + 0,0087265e_1e_2 - 29,9468e_1e \\ &\quad + 25,2993e_2e) \\ p' &= (1 + 50,5335e_1e + 49,1995e_2e) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ao comparar a equação 4.28 com um ponto definido na álgebra de Clifford $Cl^+(0, 3, 1)$ (definido na equação 3.38) obtém-se a posição do efetuador final no espaço operacional, como:

$$\begin{aligned} p' &= (1 + 50,5335e_1e + 49,1995e_2e) = (1 + p_xe_1e + p_ye_2e + p_ze_3e) \\ p_x &= 50,5335, \quad p_y = 49,1995 \quad e \quad p_z = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ao comparar o resultado obtido na equação 4.27 com o resultado da equação 4.29 nota-se novamente a equivalência entre os dois métodos de transformação. Ainda, ao comparar os resultados obtidos com o método dos helicóides sucessivos (equações 4.27 e 4.29) e os resultados obtidos com a

convenção de Denavit-Hartenberg (equações 4.13 e 4.15) verifica-se a semelhança de resultados para a determinação da cinemática direta com ambas as metodologias para atribuição dos sistemas de coordenadas.

Como discutido teoricamente, a representação da orientação é delimitada por um conjunto mínimo de três ângulos, que são extraídos do elemento de transformação, o que será avaliado numericamente a seguir.

4.2 ÂNGULOS DE ORIENTAÇÃO

Independentemente do método de atribuição dos sistemas de coordenadas ou do elemento de transformação, a orientação necessita ser extraída diretamente da parcela rotacional da transformação. No caso das matrizes de transformação homogênea, a representação mínima da orientação é determinada através de artifícios matemáticos baseados na função $Atan2(y, x)$ conforme discutido na seção 3.3.3, o que determina alguns problemas numéricos que podem levar a singularidades numéricas, ou soluções não-válidas.

A representação mínima da orientação é comumente realizada através dos ângulos de Euler, discutidos mais detalhadamente no Apêndice C. Os ângulos de Euler consistem em um conjunto de três rotações ordenadas que representam a orientação espacial. O conjunto denominado de *Roll-Pitch-Yaw* determina que a representação mínima da orientação é realizada com as rotações $R_z(\phi)$, $R_y(\vartheta)$ e $R_x(\psi)$ respectivamente, resultando em:

$$R(\phi) = R_z(\phi)R_y(\vartheta)R_x(\psi)$$

$$= \begin{bmatrix} c_\phi c_\vartheta & c_\phi s_\vartheta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\vartheta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ s_\phi c_\vartheta & s_\phi s_\vartheta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\vartheta c_\psi - c_\phi s_\psi \\ -s_\vartheta & c_\vartheta s_\psi & c_\vartheta c_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Dessa forma, para uma transformação genérica através de matrizes de transformação homogênea, a representação mínima da orientação é determinada através da matriz resultante. No caso planar, como o de um manipulador 3R, existe apenas um grau de liberdade para orientação, em torno do eixo z . A extração dos ângulos RPY nesse caso, resulta apenas em uma componente de orientação devido aos graus de liberdade do plano. Assim, seja a transformação da cinemática direta através de matrizes de transformação homogênea, definida como a equação 4.13 (para convenção de Denavit-Hartenberg) ou a equação 4.27 (para o método dos helicóides sucessivos), para um manipulador planar, a determinação do ângulo Roll ($R_z(\phi)$), resulta em:

$$\begin{aligned}\varphi &= \text{Atan2}(r_{21}, r_{11}) = \text{Atan2}(s_{\varphi}c_{\vartheta}, c_{\varphi}c_{\vartheta}) \\ &= \text{Atan2}(s_{\varphi}, c_{\varphi}) = \text{Atan2}(-0,0175; 0,9998)\end{aligned}\tag{4.31}$$

O mesmo procedimento pode ser realizado através dos quatérnios duais. Assim, sejam as transformações da cinemática direta, definida na equação 4.15 (para convenção de Denavit-Hartenberg) ou a equação 4.29 (para o método dos helicóides sucessivos) a extração dos ângulos RPY, segundo as relações definidas na equação 3.40, resulta em:

$$\varphi = 2sen^{-1}(a_3) = 2sen^{-1}(0,9996)\tag{4.32}$$

Comparando ambos os métodos numericamente, é possível demonstrar sua equivalência, resultando em:

$$\varphi = (2sen^{-1}(0,9996)) = (\text{Atan2}(-0,0175; 0,9998))\tag{4.33}$$

Após demonstrada a aplicação dos quatérnios duais na cinemática direta, o método será avaliado em termos do desempenho computacional.

4.3 DESEMPENHO COMPUTACIONAL

A análise do desempenho computacional da aplicação dos quatérnios duais na cinemática é realizada através da implementação da metodologia em um processador dedicado para o processamento de sinais digitais. O objetivo é avaliar o tempo de execução com ambos os métodos, isto é, matriz de transformação homogênea e quatérnios duais, na transformação entre sistemas de coordenadas. Neste contexto é empregado um DSP de alto desempenho com CPU RISC e 16 bits de resolução, apto a executar 30 MIPS (milhões de instruções por segundo). Este processador realiza a operação de multiplicação-acumulação em um ciclo de *clock*, devido à existência de uma unidade paralela dedicada. A arquitetura desse processador é voltada para o processamento matricial sendo que a operação de multiplicação e a operação de adição possuem o mesmo custo computacional.

O primeiro ensaio tem como objetivo determinar o custo computacional da rotina de multiplicação de dois quatérnios duais, conforme definido na equação 3.24. A variação temporal do cálculo desta multiplicação (retirado em tempo de execução real do processador através de seu recurso de supervisão de eventos) é apresentado na Figura 4.5. Onde pode-se verificar que em menos de 20 *ciclos de clock* é calculada a primeira componente

do quatérnio dual resultante (q_1), o que constitui em um intervalo de tempo de aproximadamente $0,6 \mu s$. É possível determinar que as componentes duais $\{q_e, q_{ie}, q_{je}, q_{ke}\}$ (dependentes de ε , ou e) necessitam de um tempo maior para sua determinação, devido às propriedades algébricas dos elementos. Nesse contexto, o processador necessitou de $209 \text{ ciclos de clock}$ para realizar a operação. Ao relacionar esse resultado com a frequência de operação do processador, delimita-se que o resultado a multiplicação entre dois quatérnios duais ocorreu em $6,9 \mu s$.

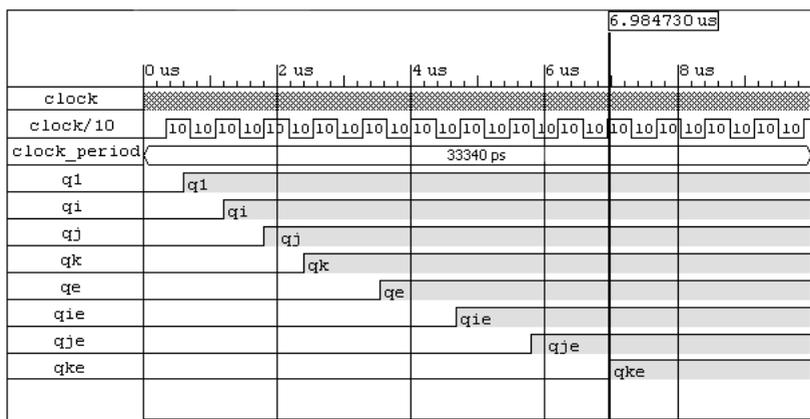


Figura 4.5: Análise do desempenho computacional da multiplicação de dois quatérnios duais.

O segundo ensaio tem por objetivo a comparação entre o custo computacional para a determinação da cinemática direta de um manipulador antropomórfico genérico com seis graus de liberdade, cujos sistemas de coordenadas da transformação são definidos de acordo com a convenção de Denavit-Hartenberg, em ambos os métodos. No primeiro caso, são empregadas as matrizes de transformação homogênea para a realização da transformação entre os sistemas de coordenadas, conforme apresentado na equação 4.1. Onde, devido às características do mecanismo e da abordagem empregada são utilizadas seis matrizes para determinar a cinemática direta, mas a operação de multiplicação pelo ponto inicial, como descrito na equação 4.7. O custo para o processamento dessa operação foi de $6.270 \text{ ciclos de clock}$ que equivalem a $209 \mu s$. A Figura 4.6 apresenta a progressão temporal desse ensaio.

O mesmo mapeamento cinemático é determinado através de quatérnios duais de transformação definidos de acordo com os parâmetros de D-H (equação 4.8). Onde são empregados seis quatérnios duais para a representação das transformações entre os sistemas de coordenadas intermediários,

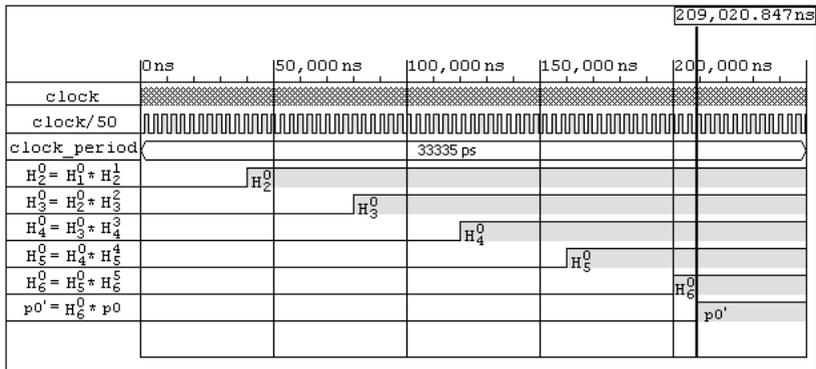


Figura 4.6: Análise do desempenho computacional das transformações através das matrizes de transformação homogêneas.

os quais são acoplados para determinar a transformação resultante do mecanismo de acordo com o acoplamento em camadas, descrito na equação 4.12. Como resultado, tem-se que o custo de processamento para essa operação foi de 1.343 *ciclos de clock* que equivale à 51,7μs, a Figura 4.7 apresenta esse ensaio.

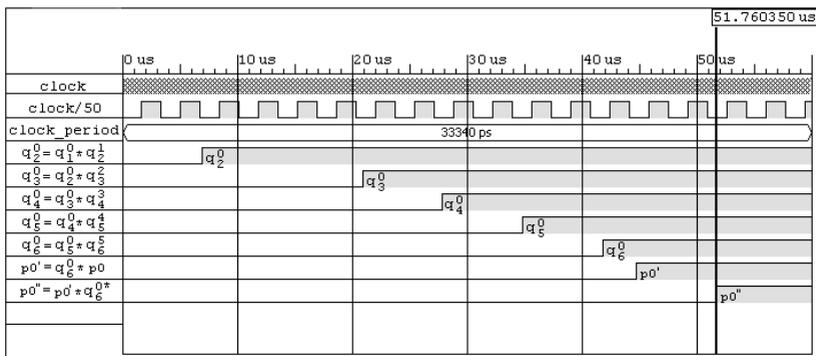


Figura 4.7: Análise do desempenho computacional das transformações através de quaternions duais.

A cinemática direta através de ambos os métodos pode ser expressa em termos de operações matemáticas, como: adição, subtração e multiplicação. O desempenho computacional também é influenciado pela quantidade de operações de acesso a memória, principalmente, pelas operações de escrita na memória que podem levar até 8 *ciclos de clock*. A comparação entre

a quantidade de operações necessárias pelos quatérnios duais e as matrizes de transformação homogênea é descrita na Tabela (4.3). Nesta tabela é possível se observar que os quatérnios duais necessitam de uma menor quantidade de operações matemáticas e de acessos a memória para realizar as transformações geométricas.

	Adição/ Subtração	Multiplificação	Escrita na Memória	Leitura da Memória
Multiplificação de MTHs	180	216	36	432
Multiplificação de QDs	40	48	8	96
Cinemática por MTHs	930	1116	186	2664
Cinemática por QDs	280	336	56	672

Tabela 4.3: Análise de desempenho em termos de operações aritméticas e de memória entre as matrizes de transformação homogêneas e os quatérnios duais.

Ao comparar o custo computacional obtido para a determinação da cinemática por ambos os métodos, verifica-se que o emprego dos quatérnios duais leva a um custo computacional inferior ao necessário para o emprego das matrizes de transformação homogêneas, quando avaliados em um processador dedicado para multiplificação matricial.

4.4 CONCLUSÃO

Este capítulo apresenta a representação dos movimentos para a análise cinemática de mecanismos. Mais precisamente para a determinação da cinemática direta de robôs manipuladores. Dentro desse contexto, foram abordadas algumas metodologias para a atribuição do sistema de coordenadas na determinação da cinemática direta. Primeiramente, é apresentada a abordagem clássica, isto é, a convenção de Denavit-Hartenberg, que se fundamenta na atribuição de um sistema de coordenadas para cada junta do manipulador. A cinemática direta é uma decorrência do produto das transformações entre esses sistemas e descrita por quatro parâmetros. Posteriormente, é estudado o método do Helicóides Sucessivos, cuja transformação cinemática é realizada com o emprego de um sistema de coordenadas fixo e um sistema de coordenada relativo ao efetuador. A representação dos movimentos das juntas é realizada com a utilização de um elemento geométrico diferenciado, o

helicóide.

Entretanto, são analisadas diferentes metodologias para a transformação entre os sistemas de coordenadas e são demonstradas as suas equivalências. Através do método tradicional, baseado nas matrizes de transformação homogêneas, o espaço é descrito em nove componentes para a rotação e três componentes para a translação, geralmente, variáveis dependentes e acopladas. Como consequência, é necessário o emprego da função *Atan2* para a extração dos ângulos de orientação, porém existem problemas numéricos que podem degenerar a solução agregando singularidades, como discutido no Capítulo 3.

De forma a evitar esses efeitos é apresentada a representação dos movimentos através dos quatérnios duais para a convenção de Denavit-Hartenberg e para o método dos helicóides sucessivos. O que especifica a representação espacial em seis componentes, sendo que a parcela rotacional é independente e desacoplada. Isso permite a extração dos ângulos de Euler de forma simples, unívoca e sem singularidades, atingindo o objetivo III deste trabalho, delimitado no item 1.2.1. Outro benefício do emprego desses elementos está no custo computacional que é inferior ao método clássico.

Após avaliada a influência dos quatérnios duais na cinemática direta e representação da orientação, serão discutidos os efeitos da aplicação desses elementos na cinemática inversa.

5 CINEMÁTICA DIFERENCIAL INTERATIVA

A cinemática diferencial realiza a derivação das variáveis dos espaços das juntas e operacional, de forma a linearizar o mapeamento entre esses espaços, principalmente, quando a análise é realizada para a transformação das representações do espaço operacional para o espaço das juntas, ou seja, a cinemática inversa. Além do problema de multiplicidade de soluções e outras características dessa operação, discutidos previamente, existe a ocorrência do fenômeno de “escorregamento” (ou “*drift*”) que consiste na diferença numérica entre a postura de referência no espaço operacional e a correspondência do espaço operacional da configuração encontrada no espaço de juntas, isto é, o erro associado a essa transformação (SIMAS, 2008; SCIAVICCO; SICILIANO, 2000). Diversos fatores levam a essa variação, as principais influências vêm dos métodos numéricos de integração e das aproximações numéricas como a pseudo-inversão de matrizes não-quadradas, para o caso de sistemas redundantes. Uma forma de minimizar significativamente esse efeito é a aplicação de métodos iterativos corretivos que empregam o erro como referência para a correção do sinal. Essa abordagem permite a imposição do erro máximo permitido (SIMAS, 2008).

A realimentação é realizada no espaço operacional e requer a representação mínima espacial, ou seja, a posição e a orientação descritas em seis variáveis independentes (três para a posição e três para a representação dos ângulos de orientação). Como discutido nos capítulos anteriores, a determinação dos ângulos de orientação pelos métodos clássicos pode ocasionar em singularidades numéricas. Este capítulo tem por objetivo a aplicação dos quatérnios duais para a realimentação de uma abordagem interativa para a determinação da cinemática inversa diferencial, o método das restrições cinemáticas.

5.1 CINEMÁTICA INVERSA DIFERENCIAL UTILIZANDO RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS

Este método se baseia no uso de helicóides através do método de *Davies*, o qual consiste na adaptação da lei de *Kirchhoff* para mecanismos. Segundo a lei de *Kirchhoff*, a soma algébrica das diferenças de potencial em um circuito elétrico é nula. Por analogia, em mecanismos, é determinado que a soma algébrica das velocidades relativas de pares cinemáticos ao longo de

uma cadeia cinemática fechada é nula, como ilustrado na Figura 5.1.

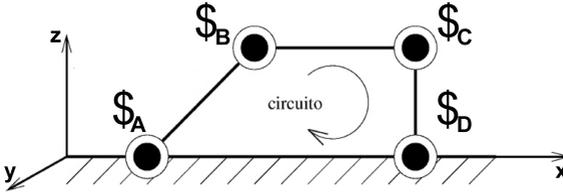


Figura 5.1: Exemplificação do método de Davies.

Assim, defini-se o método de Davies como:

$$\sum_{i=1}^n \$i = 0 \quad (5.1)$$

Onde, $\$$ é o helicóide (explicado detalhadamente no Apêndice E) e n é o número de helicóides da cadeia cinemática fechada.

O helicóide é empregado para a representação dos movimentos de uma junta, onde o eixo helicoidal $\$$, pode ser expresso pelo eixo normalizado correspondente $\hat{\$}$ e sua magnitude \dot{q} , ou simplesmente, $\$ = \hat{\$}\dot{q}$. Sendo que o eixo normalizado é definido de acordo com a modalidade de junta que ele representa, como:

$$\hat{\$}_i = \begin{bmatrix} \hat{s}_i \\ s_{0i} \times \hat{s}_i + h_s \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{s}_i \\ s_{0i} \times \hat{s}_i \end{bmatrix} & \left\{ \begin{array}{l} \text{juntas} \\ \text{rotacionais} \\ h = 0 \end{array} \right. \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{s}_i \end{bmatrix} & \left\{ \begin{array}{l} \text{juntas} \\ \text{prismáticas} \\ h = \infty \end{array} \right. \end{cases} \quad (5.2)$$

Onde, s_0 é o vetor posição do helicóide em relação ao sistema de referência, \hat{s} é a direção do eixo do helicóide e h_s é o passo do helicóide, como discutido no Capítulo 4.

Dessa forma, o método de *Davies*, definido na equação 5.1, pode ser reescrito como:

$$\sum_{i=1}^n \hat{\$}_i \dot{q}_i = 0 \quad (5.3)$$

Ou, na forma matricial como:

$$[\hat{\$}_1 \ \hat{\$}_2 \ \dots \ \hat{\$}_n] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = 0 \quad (5.4)$$

Entretanto, robôs manipuladores são geralmente cadeias abertas, ou seja, não é possível a aplicação do método de *Davies* conforme foi definido. Para isso, em Campos, Guenther e Martins (2005), é apresentado o conceito de cadeias virtuais de *Assur*, isto é, a inclusão de cadeias cinemáticas virtuais de modo a fechar a cadeia. Isso possibilita o monitoramento e a imposição de movimentos à cadeia cinemática (CAMPOS; GUENTHER; MARTINS, 2005). Porém, durante a execução do procedimento iterativo ¹ ocorrem erros que resultam na abertura da cadeia cinemática e consequentemente na degeneração da solução. Um fenômeno semelhante ocorre no algoritmo de Sciavicco e Siciliano (2000), sendo denominado de “*drift*”. A consequência é que devido ao procedimento de integração, a localização do efetuador corresponderá a ângulos de junta diferentes do desejado. Para solucionar essa questão, Simas (2008) emprega cadeias virtuais de erro, que não permitem a abertura da cadeia cinemática.

Exemplo 5.1.1 De forma a exemplificar todo o procedimento para um manipulador serial planar 3R, a colocação das cadeias virtuais de *Assur* e de erro, resulta no sistema de helicóides ilustrado na Figura 5.2. Onde os helicóides $\{\$1, \$2, \$3\}$ representam as juntas do manipulador, os helicóides $\{\$px, \$py, \$rz\}$ representam as juntas da cadeia virtual PPR (composta por duas juntas prismáticas e uma rotativa) disposta sobre os eixos cartesianos e os helicóides $\{\$ex, \$ey, \$ez\}$ representa a cadeia de erro de fechamento.

A equação 5.4 pode ser aplicada para o manipulador 3R levando em consideração que para um determinado sentido da cadeia, as juntas opostas (isto é, a cadeia virtual de *Assur* e a cadeia de erro) são negativas. Pode-se fazer novamente uma analogia aos circuitos elétricos, a segunda lei de *Kirchhoff* pode ser interpretada como: em um circuito elétrico fechado, a soma algébrica das tensões elétricas no sentido da corrente elétrica é igual a soma das tensões no sentido oposto. Ou seja em uma cadeia fechada, determina-se o sentido da cadeia e os helicóides que representam as juntas que se opõem a esse sentido são negativos. Assim, a aplicação do método de *Davies* para o

¹O termo iterativo é empregado para designar um método matemático corretivo, onde é disposta uma aproximação inicial e esta é readequada sucessivamente até atingir uma condição pré-especificada.

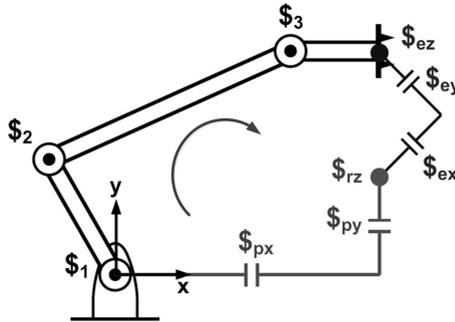


Figura 5.2: Cadeias Virtuais de Assur.

exemplo da Figura 5.2, resulta em:

$$[\hat{\$}_1 \ \hat{\$}_2 \ \hat{\$}_3 \ -\hat{\$}_{ez} \ -\hat{\$}_{ey} \ -\hat{\$}_{ex} \ -\hat{\$}_{rz} \ -\hat{\$}_{py} \ -\hat{\$}_{px}] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_{ez} \\ \dot{q}_{ey} \\ \dot{q}_{ex} \\ \dot{q}_{rz} \\ \dot{q}_{py} \\ \dot{q}_{px} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.5)$$

A equação 5.5, pode ser subdividida em pequenas parcelas, relativas às juntas primárias ou cadeia virtual de Assur, às juntas secundárias ou o manipulador real e, às juntas da cadeia de erro, como (SIMAS, 2008):

$$\begin{aligned} & \overbrace{[\hat{\$}_1 \ \hat{\$}_2 \ \hat{\$}_3]}^{N_p(q_p)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \overbrace{[-\hat{\$}_{ez} \ -\hat{\$}_{ey} \ -\hat{\$}_{ex}]}^{N_e(q_e)} \begin{bmatrix} \dot{q}_{ez} \\ \dot{q}_{ey} \\ \dot{q}_{ex} \end{bmatrix} \\ & + \overbrace{[-\hat{\$}_{rz} \ -\hat{\$}_{py} \ -\hat{\$}_{px}]}^{N_s(\bar{q}_s)} \begin{bmatrix} \dot{q}_{rz} \\ \dot{q}_{py} \\ \dot{q}_{px} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ou simplesmente:

$$N_p(q_p)\dot{q}_p + N_e(q_e)\dot{q}_e + N_s(\bar{q}_s)\dot{q}_s = 0 \quad (5.7)$$

Sendo que N_p é a submatriz que representa os helicóides das juntas primá-

rias relativas a cadeia virtual de Assur, N_s é a submatriz que representa os helicóides das juntas secundárias, isto é, ao manipulador, N_e corresponde aos helicóides da cadeia de erro e, \dot{q}_p , \dot{q}_s e \dot{q}_e são os vetores de magnitudes das velocidades das juntas primárias, secundárias e de erro, respectivamente.

Assim, as velocidades das juntas secundárias, podem ser obtidas com o rearranjo da equação 5.7, conforme:

$$\dot{q}_s = -N_s^{-1}(\bar{q}_s) \left[N_p(q_p)\dot{q}_p + N_e(q_e)\dot{q}_e \right] \quad (5.8)$$

Entretanto, ao analisar a equação 5.8 é possível verificar sua equivalência com a equação da cinemática inversa diferencial clássica, discutida no Apêndice F. Esta também sofre a influência do efeito de "escorregamento" ("*drift*") que introduz incertezas na determinação da solução. Assim, Sciacivico e Siciliano (2000) apresentam um algoritmo para a determinação da cinemática inversa diferencial com realimentação do erro, sendo definida como:

$$\dot{q} = J_A^{-1}(\dot{v}_e + Ke) \quad (5.9)$$

Onde, \dot{q} é o vetor que representa as velocidades nas juntas, J_A é o Jacobiano obtido na forma analítica (este será discutido no Capítulo 6), \dot{v}_e é o vetor de velocidades no efetuador final, K é a matriz de ganhos para a realimentação proporcional do erro de velocidade e e_v é vetor de erro de posição no espaço operacional.

Conforme ressaltado em Simas (2008), ao comparar as equações 5.8 e 5.9, pode-se determinar que o fator $(-N_s^{-1}N_p)$ corresponde ao Jacobiano da cinemática direta diferencial, similar aos obtidos pelos métodos clássicos. Pois, como a cadeia primária (ou virtual) é colocada similarmente aos graus de liberdade do ambiente, seu vetor de variáveis de junta (\dot{q}_p) é equivalente ao vetor de velocidades no espaço operacional (\dot{v}_e). Analogamente, pode-se fazer uma correlação entre a realimentação do erro (e) e o vetor de erros de fechamento obtido a partir das variáveis de junta da cadeia de erro (q_e). Dessa forma, é possível a designação de um ganho para a realimentação proporcional da velocidade na equação 5.8, resultando em (SIMAS, 2008):

$$\dot{q}_s = -N_s^{-1}(\bar{q}_s)N_p(q_p)\dot{q}_p - N_s^{-1}(\bar{q}_s)N_e(q_e)K_e q_e \quad (5.10)$$

Onde, K_e é uma matriz de ganhos definida positiva de realimentação e q_e é o vetor de erros de fechamento, assim, $(K_e q_e)$ representa uma aproximação das velocidades de junta da cadeia de erro.

Para a determinação dos ângulos de junta da cadeia secundária (ou do manipulador) a equação 5.10 necessita ser integrada (a integração numérica é discutida detalhadamente no Apêndice A). Entretanto, um método bastante

utilizado para esse fim é a integração de Euler, definida como:

$$q_s(t_{i+1}) = q_s(t_i) + \dot{q}_s(t_{i+1})\Delta t \quad (5.11)$$

Onde, $q(t+1)$ é o valor do vetor posição das juntas, no instante $t+1$, $q(t)$ é o valor do vetor posição das juntas, no instante t , $\dot{q}(t)$ é o valor do vetor velocidade das juntas, no instante t , Δt é o intervalo de integração.

Ao aplicar o método de integração de Euler (definido na equação 5.11) à equação para a determinação das velocidades da cadeia secundária (equação 5.10), conforme apresentado em Simas (2008), obtém-se:

$$\begin{aligned} q_s(t_{i+1}) = & q_s(t_i) - \left(N_s^{-1}(q_s(t_i)) N_p(q_p(t_i)) \right) \Delta q_p(t_i) \\ & - \left(N_s^{-1}(q_s(t_i)) N_e(q_e(t_i)) K_e q_e(t_i) \right) \Delta t \end{aligned} \quad (5.12)$$

Onde, $\Delta q_p(t_i) = q_p(t_{i+1}) - q_p(t_i)$.

Ainda, em Simas (2008) é aplicada uma simplificação à equação 5.12, pois, durante o procedimento iterativo não ocorrem alterações nas posições das juntas primárias ao longo do tempo t_i , presumindo que $\Delta q_p = 0$, resultando em:

$$q_s(t_{i+1}) = q_s(t_i) - \left(N_s^{-1}(q_s(t_i)) N_e(q_e(t_i)) K_e q_e(t_i) \right) \Delta t \quad (5.13)$$

A cadeia de erro $q_e(t_i)$ é uma associação direta ao erro relativo à representação mínima do mecanismo, baseada em sua posição e orientação no espaço operacional através de seis variáveis independentes, ou seja, nos graus de liberdade do espaço operacional. A representação mínima pode ser definida como:

$$k(q) = x_{ee} = \begin{bmatrix} \phi_e \\ p_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Onde, x_{ee} é a descrição do efetuador final no espaço operacional, p_e é o vetor posição no espaço operacional e ϕ_e é o vetor orientação no espaço operacional.

A obtenção dessa componente requer o mapeamento do resultado obtido na cinemática inversa diferencial do espaço das juntas para o espaço operacional, isto é, a cinemática direta. Conforme discutido no Capítulo 3, na transformação composta que representa a cinemática direta de um mecanismo, obtém-se a posição espacial do corpo rígido movimentando direta-

mente o elemento que o representa (o ponto). Visto que a transformação modifica sua representação espacial, ou seja, seu vetor posição. Entretanto, a extração dos ângulos de orientação de uma transformação representada por matrizes de transformação homogênea agrega singularidades cinemáticas, que por sua vez degeneram instantaneamente ou definitivamente a solução. Nesse contexto, os quatérnios duais são empregados para o mapeamento da cinemática direta e determinação da representação mínima, evitando as singularidades cinemáticas e impondo como requisito a minimização da variação de velocidade. A Figura 5.3 ilustra o processo para a determinação da cinemática inversa diferencial com realimentação através de quatérnios duais.

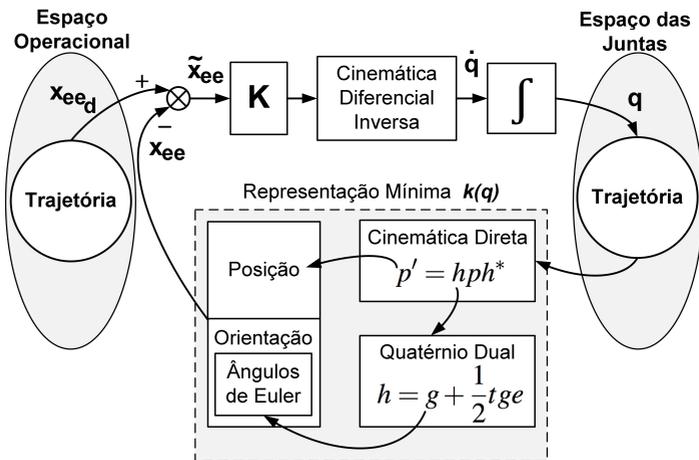


Figura 5.3: Diagrama de cinemática inversa diferencial realimentada por quatérnios duais.

Exemplo 5.1.2 De modo a exemplificar o procedimento para a obtenção da cinemática inversa, o método é aplicado a um manipulador serial planar composto por 3 juntas rotativas, disposto de cadeias virtuais, conforme a Figura 5.2. Sendo a configuração inicial deste manipulador delimitada como $q_s = \left[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0 \right]$ e o sistema de helicóides disposto para esse manipulador é apresentado na equação 5.6. Dessa forma, a determinação das configurações para a cadeia secundária e de erro, respeitando o sistema de helicóides e de acordo com os tipos de junta (equação 5.2), resulta em:

$$N_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_1 \sin(\theta_1) & a_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & a_1 \cos(\theta_1) & a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$N_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_y - e_x \text{sen}(\theta_z) + e_y \text{cos}(\theta_z) & -\text{sen}(\theta_z) & \text{cos}(\theta_z) \\ -p_y - e_x \text{cos}(\theta_z) + e_y \text{sen}(\theta_z) & \text{cos}(\theta_z) & \text{sen}(\theta_z) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Onde, ao considerar que o sistema é planar, algumas colunas de zeros podem ser desconsideradas.

A aplicação do procedimento iterativo para a determinação da cinemática inversa no manipulador planar 3R, cujo comprimento dos elos são $a_1 = 30\text{cm}$, $a_2 = 60\text{cm}$, $a_3 = 20\text{cm}$, com o objetivo de converter a postura no espaço operacional designada por $p_0 = [50, 5335; 49.1995; 0]$, com o requisito da realimentação ter a tolerância de erro de 10^{-3} graus, resulta em $q_s = [137, 3704; -108, 6014; -28, 7691]\text{rad}$, com o erro normalizado de $2,3841 \times 10^{-6}$. De forma a explorar a relação entre a variação de postura e o número de interações, foi realizado um conjunto de simulações, em que a postura desejada foi colocada em diferentes quadrantes. O objetivo é avaliar a relação entre interações realizadas pelo método para determinação da cinemática inversa e a distância da trajetória. Para identificar o pior caso, onde mais interações seriam necessárias para a determinação de uma solução válida com erro dentro da faixa desejada.

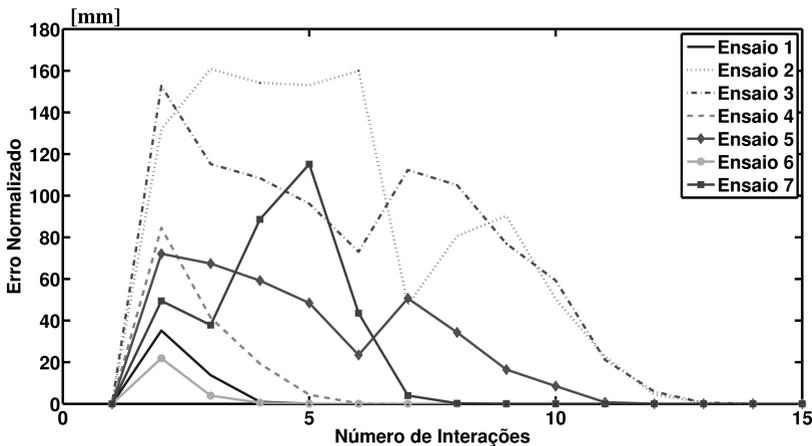


Figura 5.4: Gráfico de convergência do procedimento iterativo para a determinação da cinemática inversa aplicada ao manipulador planar 3R.

A Figura 5.5 apresenta os 7 ensaios realizados, mantendo a mesma posição inicial (p) para o sistema e colocando a posição de destino (p') em

diferentes quadrantes e posição. Na Figura 5.4 é apresentado o gráfico de convergência para os ensaios, onde é vista a relação entre interações e erro normalizado de postura (posição e orientação). Sendo que os piores casos determinados foram a variação de dois quadrantes (ensaio 3) e a variação de 1 quadrante (ensaio 2), cuja solução foi determinada com 13 interações.

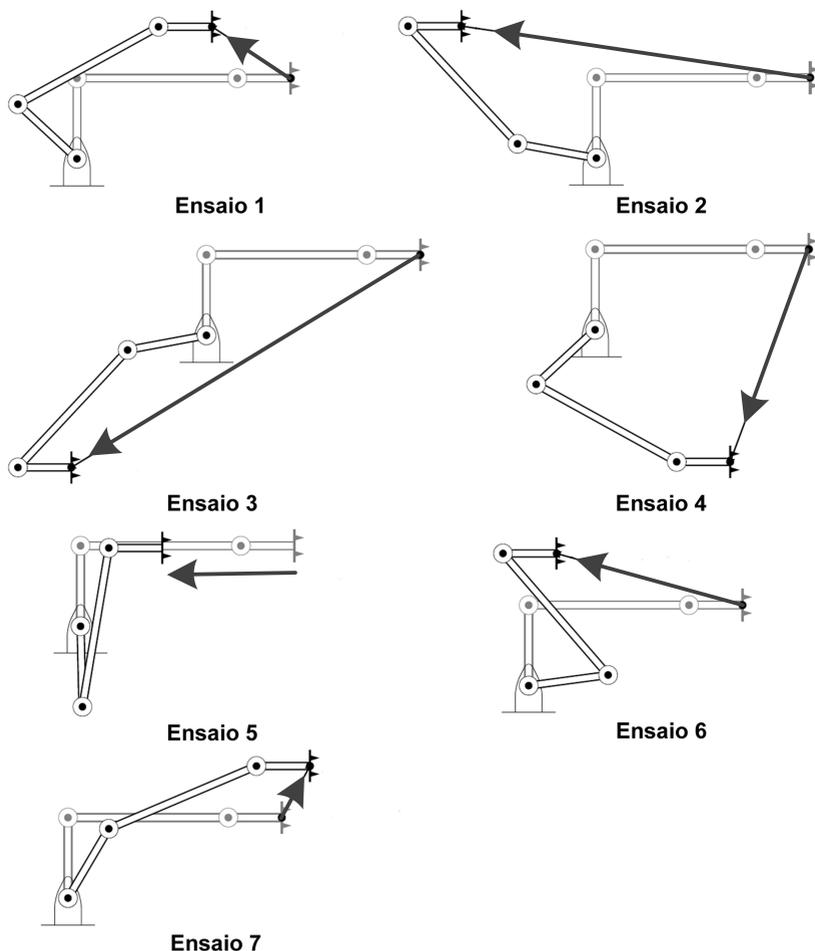


Figura 5.5: Ensaios realizados com o procedimento iterativo para a determinação da cinemática inversa aplicada ao manipulador planar 3R.

Esse método sofre influência de singularidades cinemáticas, devido a necessidade da operação de inversão matricial, que podem degenerar a so-

lução quando realizado com as matrizes de transformação homogênea. De forma a avaliar seus efeitos e apresentar a potencialidade dos quatérnios duais nessa situação, é realizado um estudo de caso para a aplicação do método interativo através de quatérnios duais (descrito na Figura 5.3) a um manipulador SCARA.

5.2 ESTUDO DE CASO

O estudo de caso é realizado em um manipulador SCARA clássico. Essa topologia de manipulador foi selecionada por sua semelhança com o manipulador 3R, quando empregado em trajetórias planares e, principalmente, por Alshamasin, Ionescu e Al-Kasasbeh (2009) disponibilizar os parâmetros dinâmicos reais do manipulador que tornam a simulação mais realística.

O manipulador é composto por três juntas rotativas e uma junta prismática, com as seguintes características físicas: altura da base (d_0), comprimento do elo 1 (a_1), comprimento do elo 2 (a_2) e o comprimento do punho (d_4). As variáveis de junta são: deslocamento da junta 1 (θ_1), deslocamento da junta 2 (θ_2), deslocamento linear da junta prismática (d_3) e deslocamento da junta do punho (θ_4). A aplicação de helicóides para a representação do manipulador, resulta no sistema de helicóides ilustrado na Figura 5.6.

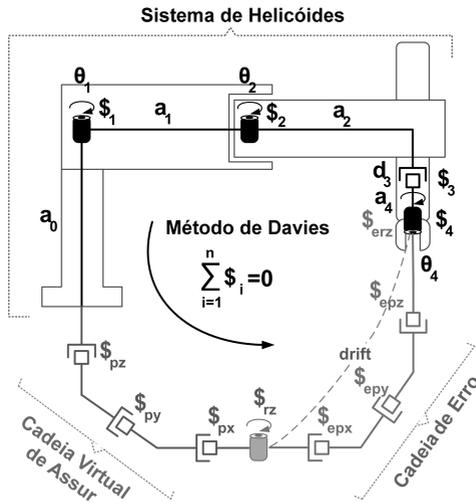


Figura 5.6: Sistema de helicóides aplicado ao manipulador SCARA.

A formulação das velocidades relativas ao deslocamento helicoidal respeita o método de *Davies*, definido na equação 5.1 e, pode ser subdividido

em parcelas relativas às juntas primárias, secundárias e cadeia de erro (como apresentado na equação 5.7). No caso do manipulador SCARA, o sistema de helicóides apresentado na Figura 5.6 é equacionado como:

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{[\hat{\$}_1 \ \hat{\$}_2 \ \hat{\$}_3 \ \hat{\$}_4][\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dot{q}_4]^T}^{N_s(\bar{q}_s)\dot{q}_s} \\
 & + \overbrace{[-\hat{\$}_{e_{ry}} \ -\hat{\$}_{e_{py}} \ -\hat{\$}_{e_{pz}} \ -\hat{\$}_{e_{py}}][\dot{q}_{e_{ry}} \ \dot{q}_{e_{py}} \ \dot{q}_{e_{pz}} \ \dot{q}_{e_{px}}]^T}^{N_e(q_e)\dot{q}_e} \\
 & + \overbrace{[-\hat{\$}_{r_y} \ -\hat{\$}_{p_x} \ -\hat{\$}_{p_z} \ -\hat{\$}_{p_y}][\dot{q}_{r_y} \ \dot{q}_{p_x} \ \dot{q}_{p_z} \ \dot{q}_{p_y}]^T}^{N_p(q_p)\dot{q}_p} = 0
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Como discutido anteriormente, esta metodologia se baseia em um procedimento iterativo para a correção do erro de abertura da cadeia cinemática. Consequentemente é aplicada a realimentação da postura no espaço operacional, que necessita da representação da orientação (como descrito na Figura 5.3). No entanto, a extração dos ângulos de Euler das matrizes de transformação homogêneas comumente introduzem singularidades. De forma a esclarecer esses efeitos, é aplicada uma trajetória de referência ao manipulador SCARA para a transição linear de três pontos do espaço operacional, promovendo uma trajetória triangular, como ilustrado na Figura 5.7.

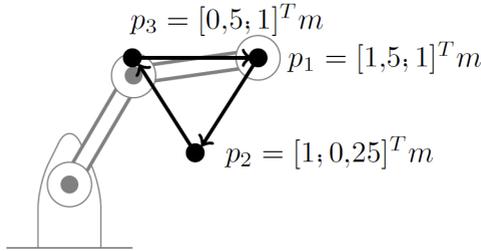


Figura 5.7: Trajetória aplicada ao manipulador SCARA.

A transição entre os pontos da trajetória respeita um perfil de velocidade trapezoidal (Figura 5.8), como definido na equação 5.18 (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000).

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t^2 & 0 \leq t \leq t_c \\ q_i + \dot{q}_c t_c \left(\frac{t-t_c}{2}\right) & t_c < t \leq t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2}\ddot{q}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases} \tag{5.18}$$

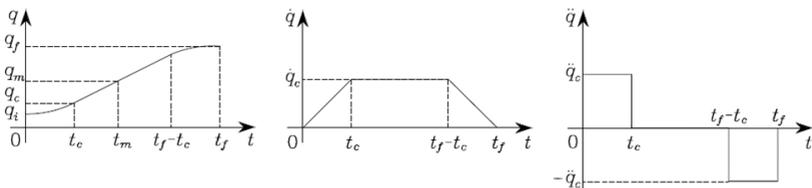


Figura 5.8: Trajetória com perfil trapezoidal de velocidade.

Fonte: Sciavicco e Siciliano (2000).

O seguimento dessa trajetória é regido por uma estratégia de controle proporcional derivativa (PD) clássica, igualmente ao apresentado no Apêndice G, com ganhos fixos, resultando na estrutura de simulação dinâmica apresentada na Figura 5.9. Sendo que a análise dinâmica e os parâmetros físicos do manipulador são baseados na especificação de Alshamasin, Ionescu e Al-Kasasbeh (2009).

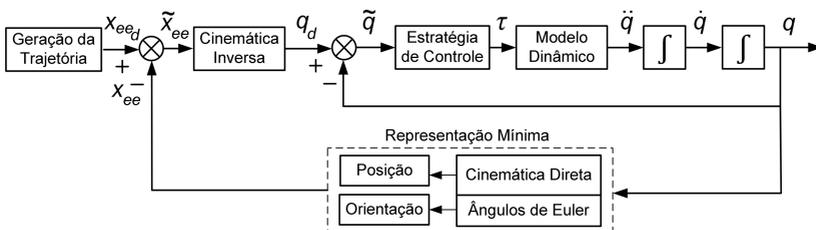


Figura 5.9: Estrutura de simulação dinâmica.

A cinemática direta clássica, que será empregada para a realimentação, definida através da convenção de Denavit-Hartenberg para esse manipulador, resulta em:

$$H_4^0 = \begin{bmatrix} R_a & R_b & 0 & L_x \\ R_c & R_d & 0 & L_y \\ 0 & 0 & -1 & L_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{onde,} \quad \begin{aligned} R_a &= c_{124} + s_{124} \\ R_b &= -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 \\ R_c &= s_{12}c_4 + c_{12}s_4 \\ R_d &= -s_{124} - c_{124} \\ L_x &= a_1c_1 + a_2c_{12} \\ L_y &= a_1s_1 + a_2s_{12} \\ L_z &= a_0 - d_3 - a_4 \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde, $s_{ijk} = \text{sen}(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$ e $c_{ijk} = \text{cos}(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$.

O modelo dinâmico clássico de um manipulador no espaço das juntas é dependente das variáveis de junta e suas derivadas, como apresentado na equação 5.20 (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000).

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) = \tau \quad (5.20)$$

onde,

- $B(q)$: é a matriz de inércia;
- $C(q, \dot{q})$: é a matriz de torque centrífugos e de Coriolis;
- F_v : é a matriz de atrito viscoso;
- $g(q)$: é o vetor de termos gravitacionais;
- τ : é o vetor de torques de controle.

A aplicação da estratégia de controle necessita do rearranjo do modelo dinâmico para o isolamento do vetor de aceleração das juntas, o que introduz a operação de inversão da matriz de inércia $B(q)$. Em regiões singulares essa matriz perde seu posto completo, tornando-se não-inversível e com determinante nulo, devido à influência direta do ângulo da junta 2 em sua diagonal principal.

A Figura 5.10 apresenta o monitoramento do determinante da matriz de inércia durante a execução da trajetória. É demonstrada a ocorrência de singularidades no uso de matrizes de transformação homogênea para a determinação dos ângulos de Euler. Esse fenômeno degenera a execução da trajetória, pois introduz um região de indeterminação onde não existe soluções matemática para o cumprimento da tarefa e não existem graus adicionais de liberdade que possam compensar a perda momentânea de mobilidade.

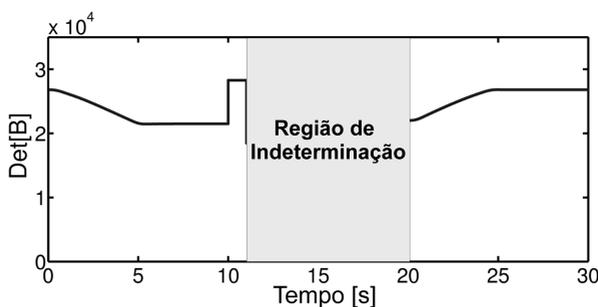


Figura 5.10: Análise da influência das singularidades inerentes das matrizes de transformação homogênea durante a execução da trajetória.

Com o objetivo de evitar esses fenômenos são empregados elementos dual-quaterniônicos para a realização da realimentação do procedimento interativo, como descrito a seguir.

5.2.1 Realimentação Dual-Quaterniônica

Como citado anteriormente, a cinemática direta pode ter a representação dos movimentos entre os sistemas de coordenadas designada através dos quatérnios duais, evitando a ocorrência de singularidades. A metodologia dual-quaterniônica para a convenção de Denavit-Hartenberg, apresentada no capítulo anterior e definida na equação 4.8, pode ser aplicada ao manipulador SCARA, resultando nas parcelas rotacionais descritas na equação 5.21.

$$g_n = \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta_n}{2}\right)[e_2 e_3] \quad (5.21)$$

onde, n é o número da junta correspondente.

As componentes translacionais são definidas como:

$$\begin{aligned} t_1 &= a_1 \cos(\theta_1) e_1 + a_1 \text{sen}(\theta_1) e_2 + (a_0 - d_3 - a_4) e_3 \\ t_2 &= a_2 \cos(\theta_2) e_1 + a_2 \text{sen}(\theta_2) e_2 \\ t_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

A determinação das transformações e a atribuição dos sistemas de coordenadas que representam o mecanismo podem ser realizadas através da aplicação de um sistema de helicóides. A cinemática direta dual-quaterniônica pode ser designada pelo método dos helicóides sucessivos, como definido na equação 4.21. A aplicação dessa metodologia ao manipulador SCARA é realizada, primeiramente, com a definição da postura inicial do sistema, como $p = 1 + (a_1 + a_2)e_1 e$ e a atribuição dos helicóides às juntas do sistema, como apresentado na Figura 5.11.

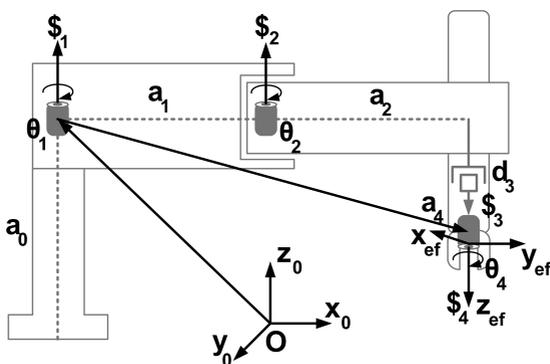


Figura 5.11: Sistema de helicóides aplicado ao manipulador SCARA.

A transformação entre os helicóides resulta na mesma parcela rotacional da convenção de Denavit-Hartenberg, apresentada na equação 5.21. As componentes translacionais são dadas por:

$$\begin{aligned} t_1 &= (a_0 - d_3 - a_4)e_3 \\ t_2 &= a_1(1 - \cos(\theta_2))e_1 - a_1 \sin(\theta_2)e_2 \\ t_3 &= (a_1 + a_2)(1 - \cos(\theta_4))e_1 - (a_1 + a_2)\sin(\theta_4)e_2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Ambas as abordagens resultam em um quatérnio-dual de transformação para a cinemática direta que possui a rotação expressa de forma mínima e independente. Nesse contexto, a extração dos ângulos de orientação é realizada conforme discutido na seção 3.3.3. A aplicação da transformação dual-quatérniônica evita a indeterminação ocorrida no seguimento da trajetória pelo método tradicional, como apresentado na Figura 5.10, o que será discutido a seguir.

5.2.2 Seguimento de Trajetória sem Singularidades Cinemáticas

Para comprovar o potencial da aplicação dos quatérnios duais é aplicada a mesma estrutura de simulação dinâmica (descrita na Figura 5.9). O seguimento da trajetória é realizado pelo mesmo o controlador PD, mantendo o ajuste de ganhos para a realimentação com matrizes de transformação homogêneas. Entretanto, a representação da cinemática direta e, consequentemente, a extração de representação mínima da orientação é realizada com os quatérnios duais. Neste caso, as singularidades cinemáticas não exercem influência significativa sobre o seguimento da trajetória, apenas impõem uma perturbação que é rapidamente corrigida pelo controlador, mesmo existindo uma saturação imposta à velocidade das juntas. Assim, ao comparar o monitoramento do determinante da matriz de inércia entre as duas abordagens, nota-se que no método dual-quatérniônico (Figura 5.12) existe a especificação de movimentos no intervalo de tempo de 12s à 20s, ou seja, na região de indeterminação da abordagem clássica (Figura 5.10).

Os perfis de velocidade, aceleração e torque das juntas para o seguimento da trajetória sem a ocorrência de singularidade são apresentados nas Figuras 5.13, 5.14 e 5.15 respectivamente.

Em algumas transições o manipulador se aproxima das regiões de singularidade, o que resulta em picos de aceleração para uma rápida adaptação da postura de forma a manter a continuidade da execução da trajetória. Essa alteração de postura introduz um pico no perfil de erro de postura, como visto na Figura 5.16. A perturbação é evidenciada devido à imposição de saturação nos perfis de aceleração das juntas empregados para promover uma simulação mais realística.

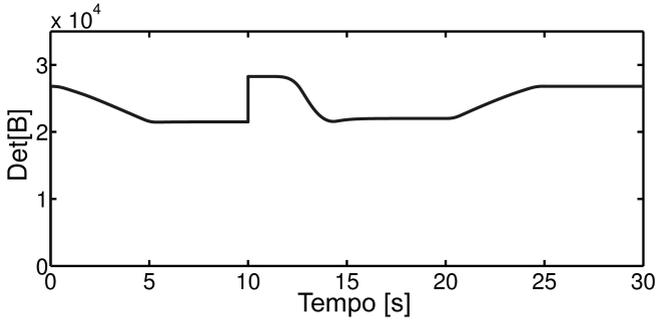


Figura 5.12: Seguimento da trajetória através do método dual-quaterniônico.

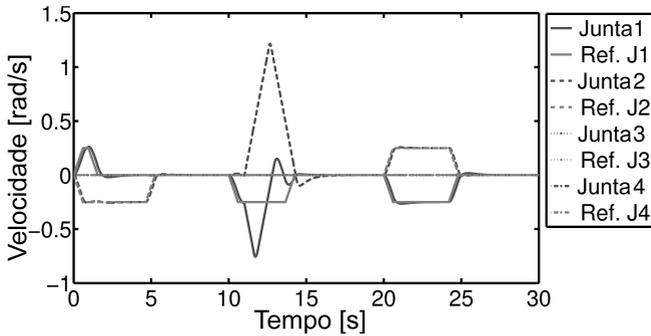


Figura 5.13: Perfis de velocidades das juntas.

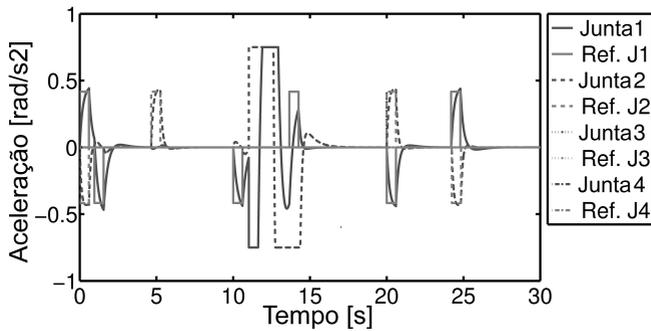


Figura 5.14: Perfis de acelerações das juntas.

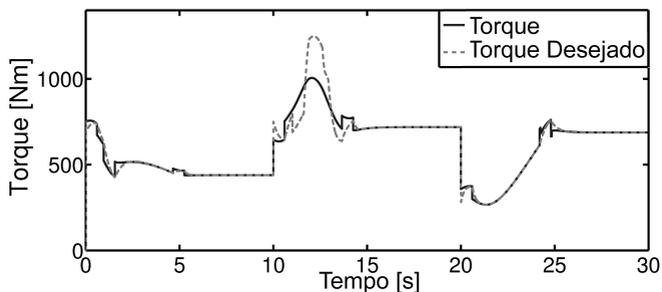


Figura 5.15: Perfis de torques normalizados.

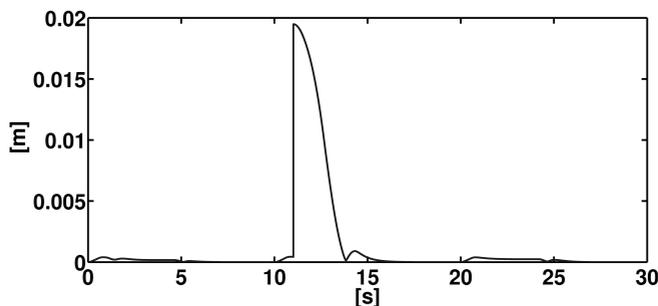


Figura 5.16: Erro de postura normalizado do efetuador.

5.3 CONCLUSÃO

Este capítulo abordou o emprego de elementos dual-quaterniônicos para a representação dos movimentos, de forma a evitar a ocorrência de singularidades cinemáticas. Principalmente, devido à orientação ser expressa em três variáveis independentes no espaço operacional, diferentemente das matrizes de transformação homogêneas que empregam nove componentes dependentes e acopladas.

Os elementos foram empregados no contexto de um método interativo para a resolução da cinemática inversa, o qual se baseia na representação do movimento helicoidal, denominado de método das restrições cinemáticas. O objetivo é realizar a realimentação da representação mínima da orientação no espaço operacional sem singularidades. Esta forma de realimentação promove soluções matemáticas para regiões tradicionalmente indeterminadas através da representação por matrizes de transformação homogêneas. A perda momentânea de um grau de mobilidade, causada por configurações sin-

gulares pode degenerar a solução, se o sistema não tiver graus de liberdade adicionais para suprir essa perda. Sem uma referência, o controlador não tem como convergir para uma solução, promovendo assim uma indeterminação de postura.

A realimentação dual-quaterniônica é avaliada no estudo de caso de um manipulador SCARA e comparada com a abordagem tradicional por matrizes de transformação homogênea. Para a mesma estrutura de simulação dinâmica, obteve-se duas situações distintas. Através do método clássico houve uma extensa região de indeterminação que degenerou o seguimento da trajetória. Enquanto essas singularidades cinemáticas apenas introduziram uma perturbação no movimento pelo método dual-quaterniônico.

Nesse contexto, atingi-se parcialmente o objetivo IV deste trabalho, delimitado no item 1.2.1, pois a aplicação dessa abordagem em um modelo de simulação hidrodinâmica para veículos-manipulador subaquáticos será apresentada no Capítulo 7.

6 CINEMÁTICA DIFERENCIAL ANALÍTICA

Este capítulo aborda métodos matemáticos para a resolução do problema da cinemática inversa diferencial através de abordagens puramente analíticas. Inicialmente é discutido o Jacobiano clássico e suas formas de determinação geométrica (Jacobiano geométrico) ou analítica (Jacobiano analítico). Para após correlacionar os efeitos da matriz Jacobiana com o deslocamento helicoidal, discutido nos capítulos anteriores. Com o intuito de demonstrar a equivalência entre o Jacobiano e o movimento helicoidal e, promover o formalismo necessário para a apresentação de um novo método baseado no emprego do Jacobiano expresso através de quatérnios duais.

Um dos benefícios do emprego do Jacobiano dual-quatérniônico está na redução da variação angular, ou seja, das velocidades aplicadas nas juntas, visto que o mapeamento entre o espaço operacional e das juntas é linear do ponto de vista das velocidades. Essa minimização delimita o aumento da eficiência energética do sistema e auxilia na estabilização de sistemas subaquáticos, reduzindo a influência dos efeitos hidrodinâmicos incidentes no sistema. De forma a validar a eficácia do método proposto é realizada a comparação com a abordagem clássica da matriz Jacobiana em um estudo de caso.

6.1 MATRIZ JACOBIANA

A cinemática diferencial tem por objetivo promover o relacionamento linear entre as componentes do espaço das juntas e do espaço operacional. Nesse contexto é definida uma função que correlaciona as velocidades das juntas (\dot{q}) com as velocidades do efetuador (v_e), denominada de Jacobiano, isto é:

$$J(q) : \dot{q} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow v_e \in \mathbb{R}^r \quad (6.1)$$

O Jacobiano realiza o mapeamento linear entre as variáveis do espaço das juntas e do espaço operacional, conforme ilustrado na Figura 6.1. A matriz Jacobiana clássica pode ser obtida através do método geométrico e do método analítico, ambos serão apresentados a seguir.

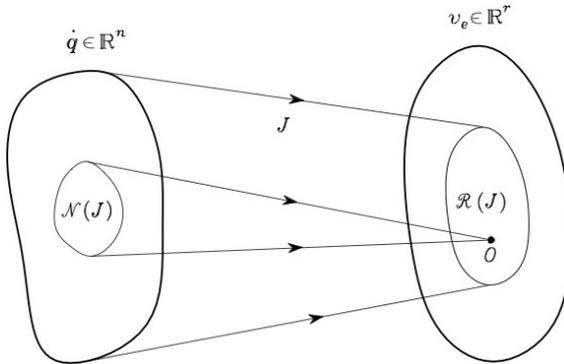


Figura 6.1: Mapeamento entre o espaço das velocidades de junta e o espaço das velocidades do efetuador.

Fonte: Sciavicco e Siciliano (2000).

6.1.1 Jacobiano Geométrico

O objetivo fundamental para o emprego da matriz Jacobiana é o mapeamento linear entre as velocidades das juntas e as velocidades do efetuador. Este é realizado através da equação da cinemática diferencial, definida como:

$$v_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ w_e \end{bmatrix} = J(q)\dot{q} \quad (6.2)$$

onde,

v_e : é o vetor de velocidades no espaço operacional;

\dot{p}_e : é o vetor de velocidades lineares do espaço operacional;

w_e : é o vetor de velocidades angulares do espaço operacional;

$J(q)$: é a matriz Jacobiana;

\dot{q} : é o vetor de velocidades de junta.

A matriz Jacobiana relaciona as velocidades lineares e angulares em ambos os espaços, dessa forma, a equação da cinemática diferencial (equação 6.2) pode ser subdividida em:

$$\dot{p}_e = J_P(q)\dot{q} \quad (6.3)$$

$$w_e = J_O(q)\dot{q} \quad (6.4)$$

Sendo que a matriz Jacobiana também sofre uma subdivisão em Jacobiano de posição (J_P) e Jacobiano de orientação (J_O), sendo formalizado como:

$$J = \begin{bmatrix} J_{P1} & \dots & J_{Pn} \\ J_{O1} & \dots & J_{On} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

onde, as colunas da matriz Jacobiana estão relacionadas ao número de juntas, ou seja, n juntas.

O Jacobiano de posição e o Jacobiano de orientação podem ser especificados de acordo com a geometria das juntas do manipulador, como:

$$\begin{bmatrix} J_{Pi} \\ J_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{---> para juntas prismáticas;} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} & \text{---> para juntas rotacionais.} \end{cases} \quad (6.6)$$

As componentes do Jacobiano geométrico (definidas na equação 6.6) são extraídas da matriz de transformação homogênea do manipulador, como:

$$T_e(q) = \begin{bmatrix} R_e(q) & p_e(q) \\ O^T & 1 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

onde,

$R_e(q)$: é a matriz das componentes rotacionais;

$p_e(q)$: é o vetor das componentes translativas;

q : é o vetor das variáveis de junta.

As componentes da matriz Jacobiana, definidas na equação 6.6, estão relacionadas à cinemática direta do manipulador, que é expressa tradicionalmente através de uma matriz de transformação homogênea (equação 6.7). Nesse contexto, as componentes do Jacobiano podem ser obtidas, conforme Sciavicco e Siciliano (2000), por:

- o vetor z_{i-1} é dado pela terceira coluna da componente rotacional $R_e(q)$ da matriz de transformação, como:

$$z_{i-1} = R_1^0(q_1) \dots R_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) z_0 \quad (6.8)$$

Onde, $z_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$.

- o vetor p_e é dado pela parcela translacional $p_e(q)$ da matriz de transformação, ou seja:

$$p_e = A_1^0(q_1) \dots A_n^{n-1}(q_n) p_0 \quad (6.9)$$

onde, $\tilde{p}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$.

- o vetor \tilde{p}_{i-1} é dado pela parcela translacional $p_e(q)$ da transformação T_{i-1}^0 , isto é:

$$\tilde{p}_{i-1} = A_1^0(q_1) \dots A_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \tilde{p}_0 \quad (6.10)$$

6.1.2 Jacobiano Analítico

Esta forma de determinação da matriz Jacobiana está relacionada com a representação da postura do efetuador em termos da representação mínima no espaço operacional. O Jacobiano é calculado com base na diferenciação da cinemática direta em termos das variáveis de junta. A velocidade linear do efetuador (\dot{p}_e) pode ser expressa em termos da derivada do vetor de posição linear do efetuador (p_e) em relação às variáveis de junta (q), como:

$$\dot{p}_e = \frac{\partial p_e}{\partial q} \dot{q} = J_P(q) \dot{q} \quad (6.11)$$

A velocidade angular está relacionada com a representação mínima da orientação do efetuador (ϕ_e), que pode ser realizada através dos ângulos de Euler, discutido no Apêndice C. A derivada temporal desse vetor é expressa por:

$$\dot{\phi}_e = \frac{\partial \phi_e}{\partial q} \dot{q} = J_\phi(q) \dot{q} \quad (6.12)$$

Através da relação entre as velocidades do efetuador no espaço operacional, definidas pelas equações 6.11 e 6.12, pode-se definir a cinemática diferencial em termos da derivada da cinemática direta como:

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{\phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_\phi(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J_A(q) \dot{q} \quad (6.13)$$

Assim, sendo a equação 6.13 resulta na matriz Jacobiana analítica, que é definida como:

$$J_A(q) = \frac{\partial k(q)}{\partial q} \quad (6.14)$$

onde, $k(q)$ é o vetor de representação mínima, definido como $k(q) = [p_e \ \phi_e]^T$.

Através da transformação T entre w_e e $\dot{\phi}_e$, é possível correlacionar o Jacobiano geométrico e o Jacobiano analítico, como:

$$v_e = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(\phi_e) \end{bmatrix} \dot{x}_e = T_A(\phi_e) \dot{x}_e \quad (6.15)$$

Ou simplesmente:

$$J = T_A(\phi) J_A \quad (6.16)$$

Após apresentados os métodos clássicos para a determinação da matriz Jacobiana, será apresentado um novo método baseado no emprego de quatérnios duais.

6.2 JACOBIANO DUAL-QUATERNIÔNICO

O Jacobiano pode ser interpretado como a associação do movimento linear e angular produzido pelas juntas de uma cadeia cinemática. A matriz Jacobiana consiste na concatenação desses movimentos de forma a produzir um elemento único que represente todo o mecanismo. Porém, cada parcela está associada diretamente a um grau de liberdade e, conseqüentemente, com seus movimentos. Sendo assim, cada coluna da matriz Jacobiana representa o deslocamento helicoidal de uma junta, podendo ser representada e interpretada por um helicóide (discutido detalhadamente no Apêndice E). A equivalência entre as colunas da matriz Jacobiana e o descolamento helicoidal é apresentada na equação 6.17.

$$J_{coluna} = \left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \\ z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \\ \iff \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{s} \\ \hat{s} \\ s_0 \times \hat{s} \end{bmatrix} \end{array} \right\} = \hat{\$} \quad (6.17)$$

A diferença entre as representações está na ordem dos movimentos, o Jacobiano têm seus termos iniciais associados ao deslocamento linear, ao contrário do helicóide que emprega seus termos iniciais para a representação da orientação, como descrito na equação 6.18.

$$J_{coluna} = \begin{bmatrix} J_{P_i} \\ J_{O_i} \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \hat{\$}_{O_i} \\ \hat{\$}_{P_i} \end{bmatrix} = \hat{\$} \quad (6.18)$$

Dessa forma, a correlação entre o espaço das juntas e o espaço operacional pode ser descrita como:

$$\begin{bmatrix} w_e \\ \dot{p}_e \end{bmatrix} = J\dot{q} \quad (6.19)$$

onde, $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$.

Sendo que a matriz Jacobiana pode ser decomposta em movimentos helicoidais, conforme expresso na equação 6.20. Esses movimentos podem ser correlacionados com eixos helicoidais, representados pelo eixo normalizado correspondente ($\hat{\$}_i$) e sua magnitude (\dot{q}_i).

$$\begin{bmatrix} w_e \\ \dot{p}_e \end{bmatrix} = \left(\hat{\$}_1 \dot{q}_1 + \hat{\$}_2 \dot{q}_2 + \dots + \hat{\$}_n \dot{q}_n \right) \quad (6.20)$$

As colunas do Jacobiano são simplesmente os helicóides das junta, conforme expresso na equação 6.21. Na análise tradicional das singularidades entende-se que existe uma singularidade cinemática quando o determinante da matriz Jacobiana é nulo. Entretanto, ao analisar o Jacobiano como uma concatenação de helicóides, pode-se entender que os helicóides das juntas são linearmente dependentes na ocorrência de singularidades cinemáticas.

$$J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \$_1 & \$_2 & \dots & \$_n \end{array} \right] \quad (6.21)$$

No entanto, o movimento helicoidal pode ser expresso mais detalhadamente em relação as dimensões do espaço operacional, resultando em:

$$\$ = \begin{pmatrix} w \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

onde, w representa as componentes do deslocamento angular e \dot{p} o deslocamento linear.

Ao decompor um helicóide em movimentos angulares e lineares, de acordo com as dimensões do espaço operacional, obtém-se seis componentes (como demonstrado na equação 6.22). Essas componentes podem ser interpretadas como a variação da posição e da orientação sobre um sistema de coordenadas espaciais. O método proposto fundamenta-se na representação do movimento helicoidal através do quatérnio dual, definido na equação 3.24. Onde é empregada a parcela complexa (q_1) para a representação das componentes do movimento angular (w) e a parcela bicomplexa ou dual (q_2) para o movimento linear (\dot{p}), ou seja:

Proposição 6.2.1⁰ *O movimento helicoidal poder ser descrito por um quatérnio dual, definido na álgebra de Clifford $Cl^+(0, 3, 1)$, como:*

$$J_{helicoidal} = \mathbf{w}_x e_2 e_3 + \mathbf{w}_y e_3 e_1 + \mathbf{w}_z e_1 e_2 + \dot{\mathbf{p}}_x e_1 e + \dot{\mathbf{p}}_y e_2 e + \dot{\mathbf{p}}_z e_3 e^1 \quad (6.23)$$

⁰O termo proposição é empregado para a apresentação da proposta de definição de uma operação matemática.

¹Optou-se por usar negrito para realçar as variáveis.

onde, w_x , w_y e w_z são as componentes do vetor de velocidades angulares do espaço operacional e, \dot{p}_x , \dot{p}_y e \dot{p}_z são as componentes do vetor de velocidades lineares do espaço operacional.

A concatenação dos Jacobianos helicoidais representados por quatérnios duais promove o mapeamento linearizado entre o espaços operacional e o espaço de juntas, resultando no Jacobiano dual-quatérniônico. Entretanto, o quatérnio dual não permite uma representação acoplada em um único componente como pode-se fazer com as matrizes, onde é possível acrescentar colunas livremente. Entretanto, o Jacobiano dual-quatérniônico pode ser interpretado como a resultante do acoplamento serial dos Jacobianos helicoidais, definido na equação 6.23, que representam os graus de mobilidade de uma estrutura cinemática, como:

$$J_{dq} = \left(J_{helicoidal_1} \mid J_{helicoidal_2} \mid \cdots \mid J_{helicoidal_n} \right) \quad (6.24)$$

A conversão entre os espaços associa as dimensões do espaço de trabalho às juntas, isto é, as juntas sofrem influências unicamente das parcelas atuantes sobre o eixo de deslocamento ou rotação da junta. Como cada linha do Jacobiano está associada a uma dimensão do movimento linear e angular (conforme descrito na equação 6.22) é possível realizar o particionamento do Jacobiano dual-quatérniônico (definido na equação 6.24) em quatérnios duais que representam as contribuições nas componentes do espaço de trabalho $\{w_x, w_y, w_z, \dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z\}$. A influência do deslocamento helicoidal é subdividida em componentes do espaço operacional sendo representada individualmente pelas dimensões do quatérnio dual $\{i, j, k, ie, je, ke\}$, ou $\{e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2, e_1e, e_2e, e_3e\}$ na álgebra de Clifford $Cl^+(0, 3, 1)$, resultando nas componentes do deslocamento dual-quatérniônico $\{w_i, w_j, w_k, p_i, p_j, p_k\}$ e constituindo no Jacobiano dual-quatérniônico particionado pelas dimensões do espaço de trabalho. O objetivo dessa formulação é introduzir em um elemento as contribuições do mecanismo para uma determinada dimensão do espaço de trabalho, para determinar o mapeamento cinemático em uma dimensão. Esse particionamento é definido como:

Proposição 6.2.2⁰ *O Jacobiano dual-quatérniônico particionado pelas dimensões do espaço de trabalho consiste no acoplamento das influências do deslocamento helicoidal de todo o mecanismo em uma determinada dimensão, resultando nas componentes de deslocamento angular:*

$$J_{dq_w} \begin{cases} J_{w_i} = J_{dq_1(w_x)}e_2e_3 + J_{dq_2(w_x)}e_3e_1 + J_{dq_3(w_x)}e_1e_2 \\ \quad + J_{dq_4(w_x)}e_1e + J_{dq_5(w_x)}e_2e + J_{dq_6(w_x)}e_3e \\ J_{w_j} = J_{dq_1(w_y)}e_2e_3 + J_{dq_2(w_y)}e_3e_1 + J_{dq_3(w_y)}e_1e_2 \\ \quad + J_{dq_4(w_y)}e_1e + J_{dq_5(w_y)}e_2e + J_{dq_6(w_y)}e_3e \\ J_{w_k} = J_{dq_1(w_z)}e_2e_3 + J_{dq_2(w_z)}e_3e_1 + J_{dq_3(w_z)}e_1e_2 \\ \quad + J_{dq_4(w_z)}e_1e + J_{dq_5(w_z)}e_2e + J_{dq_6(w_z)}e_3e \end{cases} \quad (6.25)$$

E nas componentes relativas ao deslocamento linear:

$$J_{dq_p} \begin{cases} J_{p_i} = J_{dq_1(p_x)}e_2e_3 + J_{dq_2(p_x)}e_3e_1 + J_{dq_3(p_x)}e_1e_2 \\ \quad + J_{dq_4(p_x)}e_1e + J_{dq_5(p_x)}e_2e + J_{dq_6(p_x)}e_3e \\ J_{p_j} = J_{dq_1(p_y)}e_2e_3 + J_{dq_2(p_y)}e_3e_1 + J_{dq_3(p_y)}e_1e_2 \\ \quad + J_{dq_4(p_y)}e_1e + J_{dq_5(p_y)}e_2e + J_{dq_6(p_y)}e_3e \\ J_{p_k} = J_{dq_1(p_z)}e_2e_3 + J_{dq_2(p_z)}e_3e_1 + J_{dq_3(p_z)}e_1e_2 \\ \quad + J_{dq_4(p_z)}e_1e + J_{dq_5(p_z)}e_2e + J_{dq_6(p_z)}e_3e \end{cases} \quad (6.26)$$

Através dos Jacobiano dual-quaterniônico particionado por dimensão, definido nas equações 6.25 e 6.26, pode-se realizar a determinação da cinemática direta e inversa diferencial, ambas serão definidas a seguir.

Proposição 6.2.3⁰ *A cinemática direta diferencial espacial através do Jacobiano dual-quaterniônico é determinada como:*

$$v_{en} = \underbrace{\left(J_{\zeta}^* e^{-1} \right)}_{\text{influência complexa}} \underbrace{\left(\dot{q}_n e^{-1} \right)}_{\text{influência bicomplexa}} - \underbrace{\left(\dot{q}_n^* J_{\zeta} \right)}_{\text{influência bicomplexa}} \quad (6.27)$$

onde, J_{ζ} é um dos Jacobianos dual-quaterniônicos particionados pelas dimensões do espaço operacional (definido nas equações 6.25 e 6.26); n é o número da junta e ; (e) é a componente dual (ϵ) definida na álgebra de Clifford $Cl^+(0, 3, 1)$ pela base geradora e .

A equação 6.27 apresenta a cinemática direta diferencial através de quatérnios duais, semelhante ao método clássico apresentado na equação 6.2. Entretanto, um número dual é fundamentalmente definido pelo quadrado de sua componente dual ser nulo (na álgebra de Clifford $Cl^+(0, 3, 1)$ representada pela base geradora e). A multiplicação de dois quatérnios duais anula as

⁰O termo proposição é empregado para a apresentação da proposta de definição de uma operação matemática.

contribuições das parcelas duais e, assim, introduz incertezas de mapeamento quando aplicado a cinemática. Para contornar esses efeitos, a cinemática diferencial por quatérnio duais é subdividida em duas parcelas. Primeiramente é realizado o mapeamento das influências representadas pelas componentes complexas $(J_\zeta^* e^{-1})(\dot{q}_n e^{-1})$, onde é desprezada a contribuição da parcela bicomplexa (realizada com a divisão pela base geradora e). Posteriormente são incluídas as contribuições da parcela bicomplexa com o termo $(-\dot{q}_n^* J_\zeta)$.

Em casos planares, algumas dimensões do espaço de trabalho são desconsideradas, pois sua influência será nula. O que possibilita a realização de simplificações na determinação da cinemática direta dual-quatérniônica, ao utilizar unicamente as dimensões primárias, isto é, sem a dependência da parcela bicomplexa. Neste caso, a cinemática direta diferencial será dada pelo produto escalar quatérniônico. Exemplificando, seja dois quatérnios duais unitários e com a parcela bicomplexa nula ($h_1 = a_2 e_2 e_3 + a_3 e_3 e_1 + a_4 e_1 e_2$ e $h_2 = b_2 e_2 e_3 + b_3 e_3 e_1 + b_4 e_1 e_2$) o produto escalar, conforme definido em Altmann (2005) e Conway e Smith (2003), resultará simplesmente em:

$$\begin{aligned} (h_1 \cdot h_2) &= a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4, \quad \text{ou} \\ &= \frac{1}{2} (h_1^* h_2 + h_2^* h_1), \quad \text{ou} \\ &= \frac{1}{2} (h_1 h_2^* + h_2 h_1^*) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Assim pode-se definir a cinemática direta diferencial através de quatérnios duais, para casos planares, como:

Proposição 6.2.4⁰ *A cinemática direta diferencial, em casos planares ou de até três dimensões, é determinada através do Jacobiano dual-quatérniônico como:*

$$v_{en} = \left(\frac{1}{2} (J_\zeta (\dot{q}_n \delta)^* + (\dot{q}_n \delta) J_\zeta^*) \right) \quad (6.29)$$

onde, δ é uma das componentes da álgebra na de Clifford $Cl^+(0, 3, 1)$ que representa as dimensões do espaço operacional planar $(e_2 e_3; e_3 e_1; e_1 e_2)$; J_ζ é um dos Jacobianos dual-quatérniônicos particionados pelas dimensões do espaço operacional (definido nas equações 6.25 e 6.26); e n é o número da junta.

Como citado anteriormente, na determinação da cinemática inversa existe o erro de "escorregamento", determinado de "drift" em Sciavicco e Siciliano (2000), o qual introduz incertezas na determinação da solução. Isto é, ao transformar a solução encontrada no espaço das juntas para o espaço

operacional, o resultado terá um erro associado e a postura obtida se diferenciará da postura inicial. De forma a corrigir a inconsistência associada ao mapeamento entre os espaços é comumente introduzida uma realimentação proporcional da velocidade no espaço operacional semelhante ao conceito de cadeias de erro, discutido no Capítulo 5. A estratégia clássica para a determinação da cinemática inversa diferencial com realimentação é apresentada na Figura 6.2 e é definida na equação 6.30. Uma discussão mais detalhada sobre a influência desse erro nos métodos tradicionais para a resolução da cinemática inversa diferencial é discutida no Apêndice F.

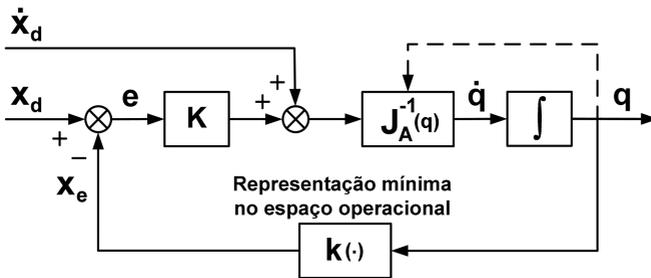


Figura 6.2: Cinemática diferencial inversa realimentada clássica.

Fonte: Sciavicco e Siciliano (2000).

$$\dot{q} = J_A^{-1}(\dot{x}_d + Ke) \quad (6.30)$$

onde, K é a matriz de ganhos e $(e = x_d - x_e)$ é o erro de posição no espaço operacional.

A cinemática inversa diferencial realimentada através da inversão do Jacobiano (definida na equação 6.30) e a cinemática inversa diferencial por meio do método de Davies com a aplicação de cadeias de erro (equação 5.13) baseiam-se na realimentação de postura (posição e orientação) no espaço operacional. Ou seja, é realizada a aproximação do erro de velocidade no espaço operacional através de uma matriz de ganhos (K), o que agrega incertezas no mapeamento entre os espaços. A determinação do erro de posição também emprega a influência da aproximação numérica para o procedimento de integração, que introduz novas incertezas no mapeamento (visto que o Jacobiano é dependente da representação mínima e requer o procedimento de integração numérica).

O emprego do Jacobiano dual-quaterniônico é realizado por um pro-

cedimento de correção direta do erro de velocidade sem a necessidade de sua aproximação, como ilustrado na Figura 6.3. Assim, o ganho (K_v) é empregado unicamente para a realimentação proporcional do erro de velocidade no espaço operacional. Essa estrutura de determinação da cinemática inversa diferencial juntamente com as características numéricas dos quatérnios duais (unicidade e independência de seus termos) delimitam um conjunto de soluções que priorizam a menor variação numérica, ou seja, a redução da variação de torque nas juntas quando comparada com o método clássico. O que influí diretamente na eficiência energética do sistema e em sua estabilização no ambiente subaquático. Nesse contexto, a cinemática inversa diferencial realimentada através do Jacobiano dual-quatérniônico pode ser definida como:

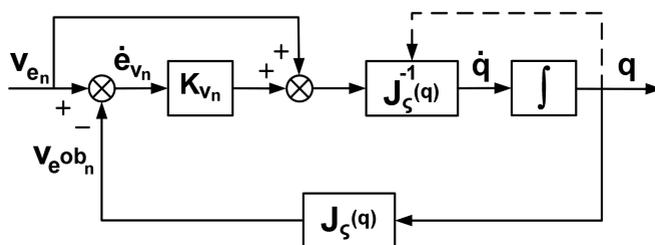


Figura 6.3: Cinemática inversa diferencial através do Jacobiano dual-quatérniônico.

Proposição 6.2.5⁰ *A cinemática inversa diferencial através do Jacobiano dual-quatérniônico é determinada como:*

$$\dot{q}_n = J_{\zeta}^{-1} \left(v_{e_n} + K_{v_n} \dot{e}_{v_n} \right) \quad (6.31)$$

onde, v_e é o vetor velocidade no espaço operacional, K_v é a matriz de ganhos, $\dot{e}_v = (v_e - v_{e_{ob}})$ é o erro de velocidade no espaço operacional, J_{ζ} é um dos Jacobianos dual-quatérniônicos particionados pelas dimensões do espaço operacional (definido nas equações 6.25 e 6.26); n é o número da junta e ; (e) é a componente dual (ϵ) definida na álgebra de Clifford $Cl^+(0, 3, 1)$ pela base geradora e .

De forma a avaliar essa abordagem, a mesma é aplicada no estudo de caso de um manipulador planar composto por três juntas rotativas. Onde é realizada a imposição de uma trajetória de posição e velocidade no espaço

⁰O termo proposição é empregado para a apresentação da proposta de definição de uma operação matemática.

operacional para o emprego da cinemática inversa e comparação dos resultados entre a abordagem clássica e a dual-quaterniônica.

6.2.1 Estudo de Caso

Em uma cadeia cinemática serial planar 3R é aplicada uma trajetória circular de diâmetro de $0,5m$, a qual deve ser executada em 4 segundos. Os parâmetros cinemáticos do manipulador são dados por $a = [0,5; 0,5; 0,5]^T m$. A esse sistema é aplicado o método clássico para a obtenção da cinemática inversa através da matriz Jacobiana, ilustrado na Figura 6.2 e definido na equação 6.30. Os perfis de posição e velocidade no espaço das juntas resultantes são apresentados nas Figuras 6.4 e 6.5 respectivamente.

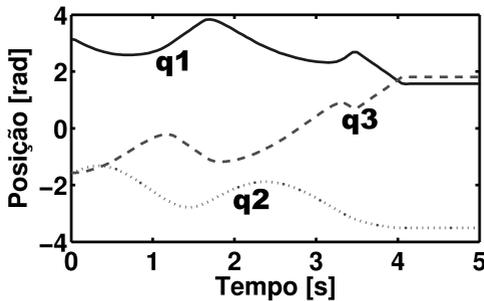


Figura 6.4: Aplicação da cinemática inversa diferencial clássica para o manipulador planar 3R: análise de posição de junta.

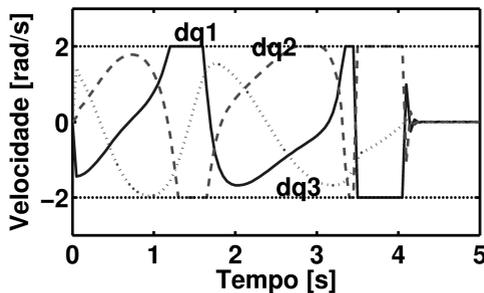


Figura 6.5: Aplicação da cinemática inversa diferencial clássica para o manipulador planar 3R: análise de velocidades.

O mesmo estudo de caso é avaliado através da abordagem por quatérnios duais para a resolução da cinemática inversa diferencial, demonstrada na

Figura 6.3. O exemplo consiste de um manipulador 3R planar, o que possibilita a simplificação do procedimento de determinação da cinemática direta (apresentado na equação 6.29) empregado na determinação do erro no espaço operacional. Os perfis de posição e velocidade no espaço operacional para a trajetória imposta, através do método dual quaterniônico são apresentados nas Figuras 6.6 e 6.7 respectivamente.

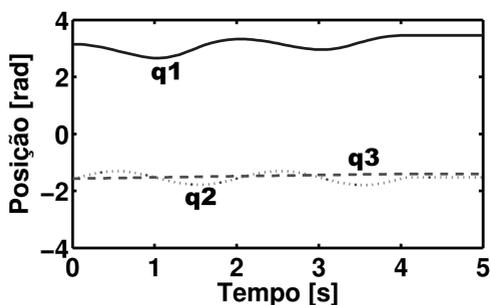


Figura 6.6: Aplicação da cinemática inversa diferencial dual-quaterniônica para o manipulador planar 3R.

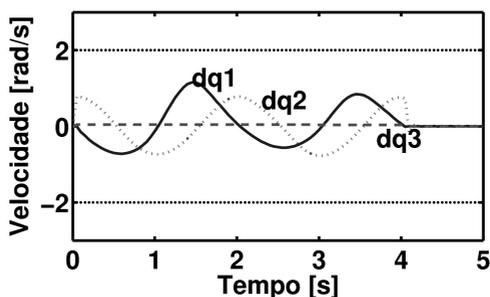


Figura 6.7: Aplicação da cinemática inversa diferencial dual-quaterniônica para o manipulador planar 3R: análise de velocidades.

Ao analisar o resultado obtido para a cinemática inversa através da matriz Jacobiana (Figuras 6.4 e 6.5), observa-se a imposição de grandes variações angulares para as juntas em um curto intervalo de tempo. O que acarreta em perfis de velocidade que atingem diversas vezes o limite imposto para as juntas. A saturação estipula um limite físico para a realimentação do erro e evita a correção infinita dos erros e como consequência, acarreta em atraso na resposta. Pois, o método induz perfis de velocidade que não podem ser

atingidos pelo sistema.

A resposta obtida pela abordagem dual-quaterniônica (Figuras 6.6 e 6.7) apresenta uma redução da variação angular das juntas para a execução da trajetória quando comparado ao método clássico. A minimização da variação angular e , conseqüentemente, do torque nas juntas influencia diretamente a eficiência energética do sistema, visto que é reduzido o torque especificado para os atuadores.

A postura inicial do sistema se difere do ponto inicial especificado pela trajetória desejada, ou seja, existe um erro inicial imposto ao sistema. Nas duas abordagens a realimentação (Ke e $K_v\dot{e}_v$) dissipa o erro inicial. Mais precisamente, ambas convergem os perfis de erro de posição e velocidade no espaço das juntas para zero no mesmo instante de tempo, como pode ser visto nas Figuras 6.8a e 6.8b. Para uma melhor visualização desses efeitos as Figuras 6.8c e 6.8d apresentam uma aproximação do intervalo de correção do erro inicial.

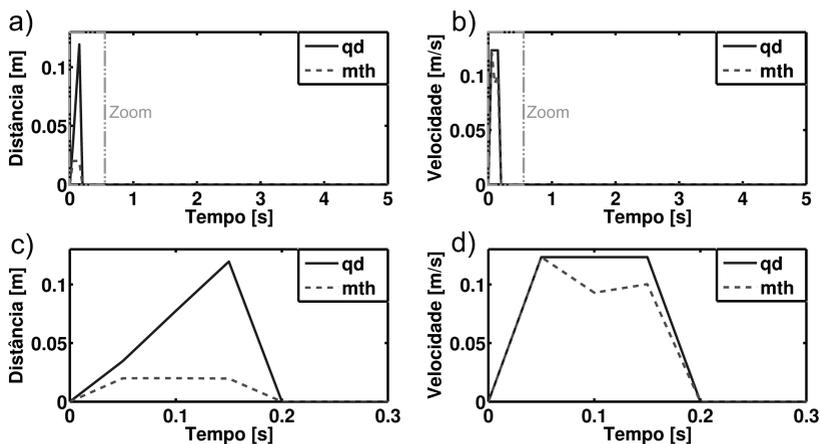


Figura 6.8: Análise dos erros no espaço operacional na aplicação da cinemática inversa diferencial em ambos os métodos para o manipulador planar 3R. a) perfil de erro normalizado de posição no espaço das juntas; b) perfil de erro normalizado de velocidade no espaço das juntas; c) Detalhamento do intervalo de convergência do erro de posição; d) Detalhamento do intervalo de convergência do erro de velocidade.

O processo para a aplicação do método dual-quaterniônico no estudo de caso é descrito detalhadamente no algoritmo 6.1.

Algoritmo 6.1: Cinemática inversa diferencial dual-quaterniônica para o manipulador planar 3R

Entrada: Descrição da postura na derivada do espaço operacional

$$v_e(t) = [v_{e_1}(t); v_{e_2}(t); v_{e_3}(t)]^T$$

Saída: Variáveis de junta no espaço de juntas $q = [\theta_{1(t)}, \theta_{2(t)}, \theta_{3(t)}]^T$

1 *Determinação dos parâmetros das juntas*

$z_{(n-1)}$, vetor direção da junta,

$p_{(n-1)}$, vetor posição da junta;

2 **para** ($t \leftarrow$ início) **até** (fim da trajetória) **faça**

3 *Montagem dos Quatérnios-Duais Jacobianos para cada junta*

$J_{qd_n(t)}$, onde, n é o número da junta;

4 *Particionamento Quatérnios-Duais Jacobianos das juntas por dimensão*

$J_{w_k(t)}$, $J_{p_i(t)}$, $J_{p_j(t)}$;

5 *Determinação das velocidades no espaço das juntas*

$$\dot{\theta}_{1(t+1)} = \left(J_{w_k(t)}^{-1} \left(v_{e_1}(t) + K_{v_1} \dot{e}_{v_1}(t) \right) \right) k,$$

$$\dot{\theta}_{2(t+1)} = \left(J_{p_i(t)}^{-1} \left(v_{e_2}(t) + K_{v_2} \dot{e}_{v_2}(t) \right) \right) i,$$

$$\dot{\theta}_{3(t+1)} = \left(J_{p_j(t)}^{-1} \left(v_{e_3}(t) + K_{v_3} \dot{e}_{v_3}(t) \right) \right) j;$$

6 *Determinação da velocidade no espaço operacional, para conferência*

$$v_{e_{1ob}(t)} = \left(\frac{1}{2} \left(J_{w_k(t)} (\dot{\theta}_{1(t+1)} k)^* + (\dot{\theta}_{1(t+1)} k) J_{w_k(t)}^* \right) \right),$$

$$v_{e_{2ob}(t)} = \left(\frac{1}{2} \left(J_{p_i(t)} (\dot{\theta}_{2(t+1)} i)^* + (\dot{\theta}_{2(t+1)} i) J_{p_i(t)}^* \right) \right),$$

$$v_{e_{3ob}(t)} = \left(\frac{1}{2} \left(J_{p_j(t)} (\dot{\theta}_{3(t+1)} j)^* + (\dot{\theta}_{3(t+1)} j) J_{p_j(t)}^* \right) \right);$$

7 *Cálculo do erro de postura no espaço operacional*

$$\dot{e}_{v_1(t+1)} = (v_{e_1}(t) - v_{e_{1ob}(t)}), \quad \dot{e}_{v_2(t+1)} = (v_{e_2}(t) - v_{e_{2ob}(t)}),$$

$$\dot{e}_{v_3(t+1)} = (v_{e_3}(t) - v_{e_{3ob}(t)});$$

8 *Integração das velocidades na derivada do espaço das juntas*

$$q_{(t+1)} = \int \dot{q}_{(t+1)};$$

fim

6.3 CONCLUSÃO

Este capítulo apresentou a discussão sobre métodos de determinação da cinemática inversa diferencial analítica, com o propósito de linearizar o mapeamento entre o espaço das juntas e o espaço operacional. A linearização é possível através do emprego do Jacobiano, que correlaciona as velocidades das juntas com as velocidades do efetuador através de um mapeamento linear. Onde, torna-se necessária a integração numérica das velocidades para obter a posição relativa das juntas.

Inicialmente foi investigado o método tradicional baseado no Jacobiano clássico e suas formas de determinação através da abordagem geométrica ou puramente analítica para possibilitar a correlação entre os efeitos da matriz Jacobiana e o deslocamento helicoidal, discutido nos capítulos anteriores. Foi demonstrada a equivalência entre ambos os métodos e proposto um novo método baseado no emprego do Jacobiano especificado por elementos duais-quatérniônicos, atingindo o objetivo V deste trabalho, delimitado no item 1.2.1.

O Jacobiano dual-quatérniônico proposto, quando aplicado para a cinemática diferencial, delimita um conjunto de soluções que priorizam a menor variação numérica e, conseqüentemente, a redução do torque especificado para os atuadores quando comparada com o método clássico. Isto influi diretamente na eficiência energética do sistema e em sua estabilização no ambiente subaquático.

As limitações dimensionais dos quatérnios duais que podem restringir sua aplicação em sistemas com excesso de graus de liberdade, pode ser contornada quando se fundamenta esse elemento através de uma álgebra de Clifford, como demonstrado no Capítulo 3. Pois, é possível realizar a expansão da álgebra empregada para uma álgebra isomórfica¹ com mais bases geradoras e definir um elemento com mais dimensões para a representação. Como por exemplo, os sedênios que possuem 16 dimensões². Porém, preservando as relações algébricas e a metodologia apresentada para os quatérnios duais.

¹O conceito de isomorfismo entre álgebras de Clifford é discutido na seção 3.1.

²Os sedênios são o acoplamento entre dois biquatérnios, apresentados em Altmann (2005) e Conway e Smith (2003).

7 SISTEMAS VEÍCULO-MANIPULADOR SUBAQUÁTICOS

Quando um sistema se movimenta no ambiente subaquático, componentes de força e momentos adicionais são acrescentados à massa efetiva do fluido que envolve o veículo. Ou seja, o fluido que envolve o corpo rígido submerso é acelerado juntamente com o corpo, devido a uma força ser exercida sobre o conjunto, provavelmente pela atuação dos propulsores. Como consequência, tem-se que o fluido exerce uma força de reação à essa aceleração, de mesma magnitude, mas na direção oposta. Esta força de reação é considerada na modelagem dinâmica como a contribuição da massa adicional (ANTONELLI, 2003). As forças e momentos relacionados à adição de massa podem ser interpretados como a soma das forças e momentos de inércia hidrodinâmicos e as forças e momentos centrípetos e de Coriolis hidrodinâmicos.

O acoplamento de um ou mais manipuladores ao sistema, torna o sistema composto e pode ser denominado como "multi-corpo", o que dificulta sua modelagem dinâmica. O efeito hidrodinâmico sobre cada elo do manipulador influencia no movimento do veículo e deve ser considerado na modelagem dinâmica do sistema composto. O efeito da dinâmica dos propulsores sobre o veículo também tem grande influência, especialmente, se o veículo realizar um movimento lento e suave (YUH, 2000).

Nesse contexto enquadram-se os sistemas veículo-manipulador subaquáticos, cuja imersão no fluido agrega uma grande quantidade de não-linearidades que influenciam diretamente a execução do movimento. Movimentos lentos e suaves são requisitos para a execução de tarefas no ambiente subaquático. Assim, formas de minimização do movimento global do sistema e das forças de arrasto, para favorecer a estabilização do sistema, constituem um dos focos de pesquisa nessa área, como por exemplo em From et al. (2010) e Soyly, Buckham e Podhorodeski (2010). Esse capítulo apresenta o emprego da metodologia dual-quaterniônica no contexto da cinemática e voltado a sistemas veículos-manipuladores subaquáticos.

7.1 MODELO HIDRODINÂMICO

A modelagem dinâmica tem como objetivo a representação matemática das forças e torques necessários para a realização de movimento em sistemas subaquáticos. A principal componente da modelagem dinâmica é a influência da força inercial sobre o sistema. Torques e forças são aplicados aos

atuadores de forma a movimentarem o efetuador, porém, essas componentes não dependem unicamente das propriedades espaciais e temporais, mas também sofrem influências das propriedades físicas dos elos e das forças externas. Essas influências são incluídas na estratégia de controle através da modelagem dinâmica do sistema e do ambiente (TSAI, 1999).

No ambiente subaquático, algumas características que podem ser desprezadas em outros ambientes são evidenciadas. Dessa forma, o controle de sistemas veículo-manipulador torna-se complexo devido ao fato desses sistemas serem caracterizados como: altamente não-linear; possuem um comportamento dinâmico variante no tempo; presença de incertezas associadas aos coeficientes hidrodinâmicos; serem representados por equações de alta ordem; serem sistemas redundante devido ao acoplamento do manipulador; ocorrência de perturbações significativas devido a correntes oceânicas e, presença de variações nos centros de gravidade e empuxo durante a movimentação do sistema, que perturbam o controle (ANTONELLI, 2003)

Os efeitos hidrodinâmicos atuantes em um corpo rígido subaquático, são denominados em Fossen (1994) como as forças e momentos de radiação induzida. Esses efeitos são definidos como a somatória de três componentes elementares (discutidas no Apêndice H) são elas:

- i) A massa adicional, devido à inércia do fluido que envolve o corpo rígido submerso;
- ii) O amortecimento potencial de radiação induzida, devido à energia transmitida;
- iii) As forças de restauração, devido ao princípio de Arquimedes (isto é, peso e empuxo).

A modelagem hidrodinâmica do veículo subaquático, considera as forças e momentos de radiação induzida exercidas sobre o movimento em 6 DOF de um corpo rígido submerso, discutido detalhadamente no Apêndice H. No entanto, o modelo hidrodinâmico de um sistema veículo-manipulador subaquático é definido como:

$$M(q)\ddot{\zeta} + C(q, \dot{\zeta})\dot{\zeta} + D(q, \zeta)\zeta + g(q, \eta) = Bu \quad (7.1)$$

Onde,

- $M(q)$: corresponde à matriz de massa e inércia;
- $C(q, \dot{\zeta})$ são os termos centrípetos e de Coriolis;
- $D(q, \zeta)$: é a matriz de amortecimento hidrodinâmico;
- $g(q, \eta)$: são as componentes gravitacionais e de empuxo;
- B : é a matriz de parâmetros dinâmicos dos propulsores;
- u : vetor de controle.

Os efeitos hidrodinâmicos atuantes sobre os veículos subaquáticos, são representados através da notação de SNAME (1950), que padroniza a simbologia para os graus de liberdade, forças e momentos, velocidades e posições, como apresentado na Tabela 7.1.

DOF	Nome	Forças e Momentos	Símbolo	Velocidades Lineares e Angulares	Posição e Ângulos de Euler
1	Avanço (<i>Surge</i>)	Translação na direção do eixo longitudinal	X	u	x
2	Deriva (<i>Sway</i>)	Translação na direção do eixo transversal	Y	v	y
3	Afundamento (<i>Heave</i>)	Translação na direção do eixo vertical	Z	w	z
4	Rolagem (<i>Roll</i>)	Rotação em torno do eixo longitudinal	K	p	ϕ
5	Arfagem (<i>Pitch</i>)	Rotação em torno do eixo transversal	M	q	θ
6	Guinada (<i>Yaw</i>)	Rotação em torno do eixo vertical	N	r	ψ

Tabela 7.1: Notação para veículos marítimos.

Fonte: SNAME (1950).

Diferentemente da representação dinâmica de manipuladores convencionais, que baseiam-se nos perfis de posição (q), velocidade (\dot{q}) e aceleração (\ddot{q}) das juntas, a modelagem hidrodinâmica fundamenta-se no vetor de coordenadas generalizadas ($\eta = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T$) em relação ao sistema de coordenadas do ambiente, no vetor de velocidades lineares e angulares do corpo rígido submerso ($v = [u, v, w, p, q, r]^T$) e no vetor de acelerações lineares e angulares ($\dot{v} = [\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}]^T$), relacionados com o sistema de coordenadas fixo ao veículo. A aplicação da notação de SNAME a um sistema veículo-manipulador é apresentada na Figura 7.1.

As abordagens dual-quaterniônicas serão avaliadas em estudos de caso, onde será empregado um sistema veículo-manipulador bastante difundido no meio acadêmico, o qual será apresentado a seguir.

7.2 ESTUDO DE CASO

O veículo autônomo subaquático (AUV) ODIN (*Omni Directional Intelligent Navigator*), Figura 7.2, é um sistema veículo-manipulador desenvolvido pelo Laboratório de Sistema Autônomos da Universidade do Havaí.

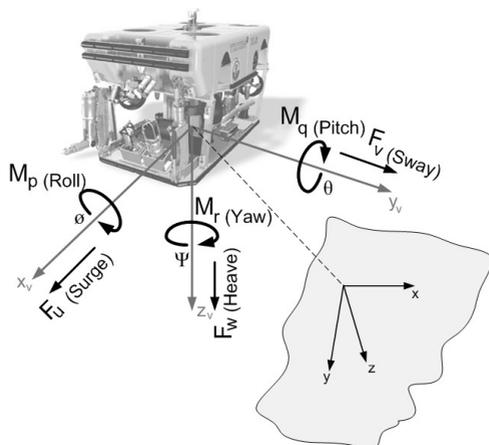


Figura 7.1: Notação de SNAME aplicada a um UVMS.

Este sistema é bastante difundido na comunidade acadêmica, sendo seu modelo matemático aplicado para a validação de diversos trabalhos, como por exemplo em Chyba et al. (2009), Dunbabin et al. (2009), Sarkar, Podder e Antonelli (2002), Antonelli et al. (2001), Nie et al. (2000), Podder, Antonelli e Sarkar (2000), Yuh, Nie e Lee (1999) e Choi e Yuh (1996). Devido à sua simetria, algumas simplificações podem ser aplicadas ao seu modelo hidrodinâmico. A descrição detalhada dos parâmetros hidrodinâmicos do sistema é realizada no Apêndice I.

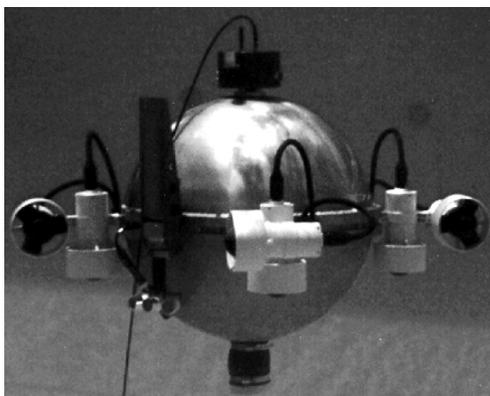


Figura 7.2: AUV ODIN.

Fonte: Sarkar, Podder e Antonelli (2002).

O sistema veículo-manipulador ODIN será empregado a seguir em três estudos de caso. Primeiro, será realizada a determinação da cinemática direta através de quatérnios duais. Em seguida, será avaliado no procedimento iterativo para a cinemática inversa diferencial, utilizando o método de Davies e empregando a realimentação dual-quatérniônica. Por último, será realizada a determinação da cinemática inversa por meio do Jacobiano dual-quatérniônico.

7.2.1 Cinemática Direta Dual-Quatérniônica

O veículo-manipulador subaquático ODIN será empregado em tarefas planares e será analisado como um sistema planar com três graus de liberdade para o veículo (isto é, dois para translação e um para orientação) com um manipulador serial planar 3R acoplado. A cadeia cinemática resultante é ilustrada na Figura 7.3.

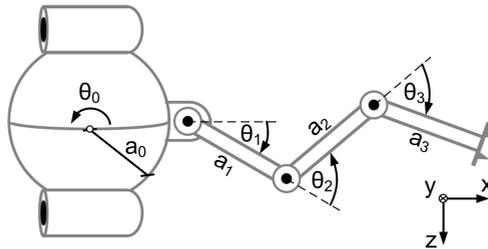


Figura 7.3: Modelo cinemático do UVMS.

A abordagem quatérniônica será comparada com o método clássico, no procedimento iterativo para a cinemática inversa diferencial. Dessa forma, a cinemática direta clássica por meio de matrizes de transformação homogênea (MTH) e da convenção de Denavit-Hartenberg, resulta em:

$$H_6^0 = \begin{bmatrix} c_{0123} & -s_{0123} & 0 & L_x \\ s_{0123} & c_{0123} & 0 & L_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Sendo que:

$$\begin{aligned} L_x &= t_x + a_0 c_0 + a_1 c_{01} + a_2 c_{012} + a_3 c_{0123} \\ L_y &= t_y + a_0 c_0 + a_1 c_{01} + a_2 c_{012} + a_3 c_{0123} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Onde, $s_{ijk} = \text{sen}(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$ e $c_{ijk} = \text{cos}(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$.

As transformações entre os sistemas de coordenadas podem ser representadas através dos quatérnios duais, evitando a ocorrência de singularidades cinemáticas. A metodologia dual-quatérniônica para a convenção de Denavit-Hartenberg é apresentada no Capítulo 4 e definida na equação 4.8. Como resultado, para o modelo cinemático de UVMS, descrito na Figura 7.3, os quatérnios duais referentes a cinemática direta via convenção de D-H, tem as seguintes parcelas rotativas:

$$\begin{aligned} g_0 &= 0 \\ g_{n=1}^4 &= \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta_n}{2}\right)[e_3 e_1] \end{aligned} \quad (7.4)$$

Onde, n é o número de junta.

As parcelas referentes à translação são:

$$\begin{aligned} t_0 &= t_x e_1 + t_z e_3 \\ t_{n=1}^4 &= a_{(n-1)} \cos(\theta_n) e_1 + a_{(n-1)} \text{sen}(\theta_n) e_3 \end{aligned} \quad (7.5)$$

A cinemática direta também pode ser determinada através do método dos helicóides sucessivos que define a disposição e a quantidade de sistemas de coordenadas que será empregado e, a transformação entre os mesmos. A aplicação da cinemática direta dual-quatérniônica designada pelo método dos helicóides sucessivos, apresentada no Capítulo 4 e definida na equação 4.21, resulta no sistema de helicóides apresentado na Figura 7.4.

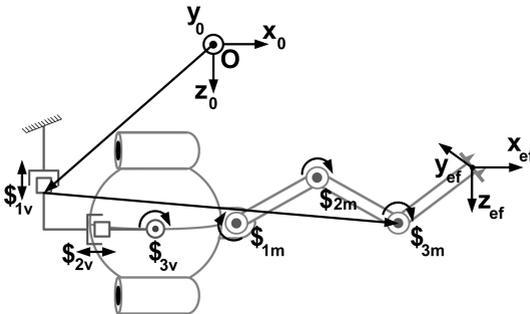


Figura 7.4: Método do helicóides sucessivos aplicado ao UVMS.

A postura inicial do sistema é definida como $p = 1 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)e_1$. As transformações entre os helicóides acarretam na mesma parcela rotativa da metodologia de Denavit-Hartenberg, definidas na equação 7.4. Dessa forma, as componentes translacionais são dadas por:

$$\begin{aligned}
 t_0 &= t_x e_1 + t_z e_3 \\
 t_1 &= 0 \\
 t_{n=2}^4 &= \left(\sum_{i=0}^{(n-2)} a_i \right) \left(e_1 - (\cos(\theta_n) e_1) - (\sin(\theta_n) e_3) \right)
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

A cinemática direta será empregada para a realimentação do procedimento iterativo para a determinação da cinemática inversa diferencial, discutido a seguir.

7.2.2 Realimentação Dual-Quaterniônica

A realimentação dual-quaterniônica, discutida detalhadamente no Capítulo 5, é avaliada com a imposição de uma trajetória de posição e orientação, obedecendo as restrições do perfil de velocidade trapezoidal (ilustrado na Figura 7.6 e definido na equação 7.7), resultando na trajetória apresentada na Figura 7.5.

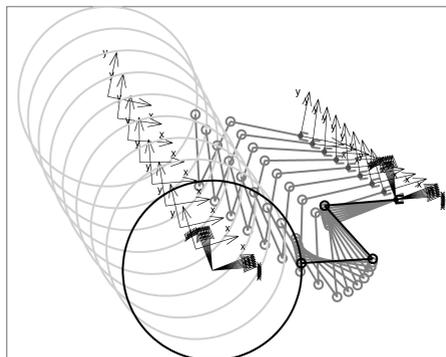


Figura 7.5: Trajetória imposta ao UVMS.

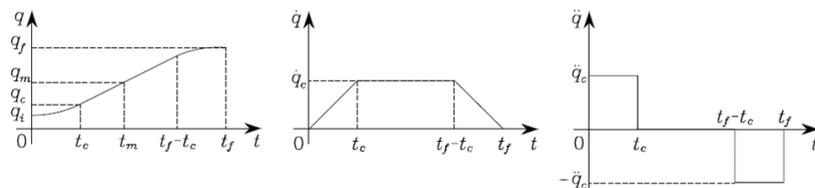


Figura 7.6: Trajetória com perfil trapezoidal de velocidade.

Fonte: Sciavicco e Siciliano (2000).

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t^2 & 0 \leq t \leq t_c \\ q_i + \dot{q}_c t_c \left(\frac{t-t_c}{2}\right) & t_c < t \leq t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2}\ddot{q}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases} \quad (7.7)$$

Para a análise da ocorrência das singularidades em sistemas UVMS, foi empregada uma estrutura de simulação (semelhante à apresentada na Figura 5.3) que considera as características hidrodinâmicas do sistema submerso, conforme descrito na Figura 7.7. O controle desse movimento é realizado através de uma estratégia de controle proporcional-derivativa (PD) com ganhos fixos.

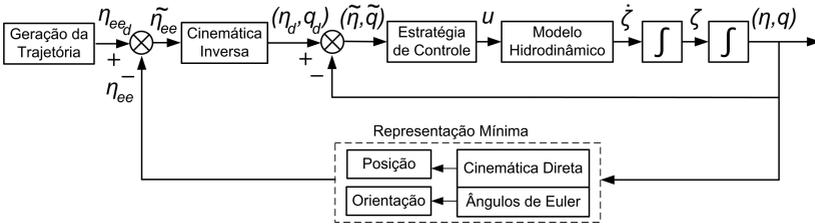


Figura 7.7: Estrutura de simulação hidrodinâmica.

A aplicação da metodologia de determinação da cinemática inversa nesse sistema, resulta no sistema de helicóides apresentado na Figura 7.8.

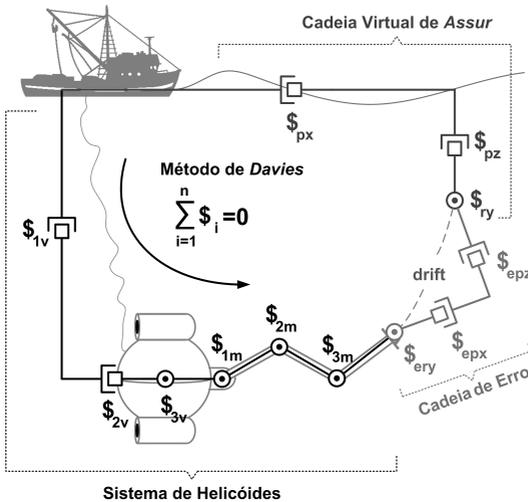


Figura 7.8: Sistema de helicóides aplicado ao UVMS.

O equacionamento do sistema de helicóides através do método de *Davies*, definido na equação 5.1, resulta em:

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{N_s(\bar{q}_s)\dot{q}_s} \\
 & \overbrace{N_{s_v}(\bar{q}_{s_v})\dot{q}_{s_v}} \quad \overbrace{N_{s_m}(\bar{q}_{s_m})\dot{q}_{s_m}} \\
 & [\hat{\$}_{1v} \ \hat{\$}_{2v} \ \hat{\$}_{3v}][\dot{q}_{1v} \ \dot{q}_{2v} \ \dot{q}_{3v}]^T + [\hat{\$}_{1m} \ \hat{\$}_{2m} \ \hat{\$}_{3m}][\dot{q}_{1m} \ \dot{q}_{2m} \ \dot{q}_{3m}]^T + \\
 & \underbrace{N_e(q_e)\dot{q}_e}_{N_e(q_e)\dot{q}_e} \quad \underbrace{N_p(q_p)\dot{q}_p}_{N_p(q_p)\dot{q}_p} \\
 & [-\hat{\$}_{e_{ry}} \ -\hat{\$}_{e_{px}} \ -\hat{\$}_{e_{pz}}][\dot{q}_{e_{ry}} \ \dot{q}_{e_{px}} \ \dot{q}_{e_{pz}}]^T + [-\hat{\$}_{r_y} \ -\hat{\$}_{p_z} \ -\hat{\$}_{p_x}][\dot{q}_{r_y} \ \dot{q}_{p_z} \ \dot{q}_{p_x}]^T \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Esta metodologia baseia-se no emprego de um procedimento interativo que corrige o erro de abertura da cadeia cinemática. Entretanto, emprega uma malha de realimentação da postura no espaço operacional que necessita da representação da orientação. A extração dos ângulos de Euler da matriz de transformação homogênea do mecanismo, geralmente, não é unívoca e introduz singularidades, como discutido previamente.

Durante o seguimento da trajetória, ocorre a manipulação em regiões singulares ou nas proximidades. O que acarreta na degradação da mobilidade do sistema e consequentemente na ativação de uma junta passiva, isto é, na ativação dos graus de liberdade do veículo. Essa alteração de prioridade (ou o chaveamento) leva a picos de torque para a estabilização do sistema (CRUZ, 2007). Essa degradação instantânea do sistema, agrega erros na execução e a necessidade de um esforço adicional no controlador. Esses efeitos são intensificados no ambiente subaquático, devido ao amortecimento imposto pela submersão ao fluido.

Nesse contexto, a movimentação na proximidade de regiões singulares introduz variações instantâneas no torque das juntas para priorização do objetivo secundário em virtude da degeneração da mobilidade de juntas primárias. A abordagem clássica através das matrizes de transformação homogênea (MTH) (definida na equação 7.2) é mais suscetível a esses efeitos induzindo a erros instantâneos na execução da trajetória. Enquanto que esses fenômenos não possuem influência significativa na solução com emprego dos quatérnios duais (definido de acordo com a equação 7.4 para parcela rotacional e, na equação 7.5 ou na equação 7.6 para a componente translativa). Estes efeitos são comprovados na comparação da execução da trajetória (ilustrada na Figura 7.5) por ambos os métodos, cujos perfis de torque são apresentados na Figura 7.9 para o veículo e na Figura 7.10 para o manipulador.

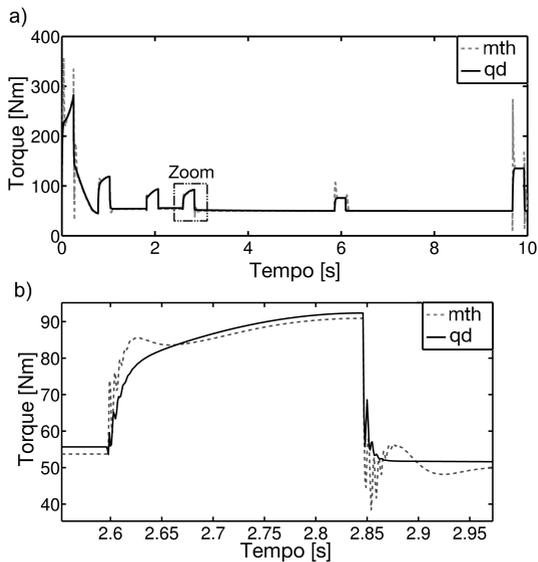


Figura 7.9: Perfis de torque normalizado no espaço das juntas para o veículo.

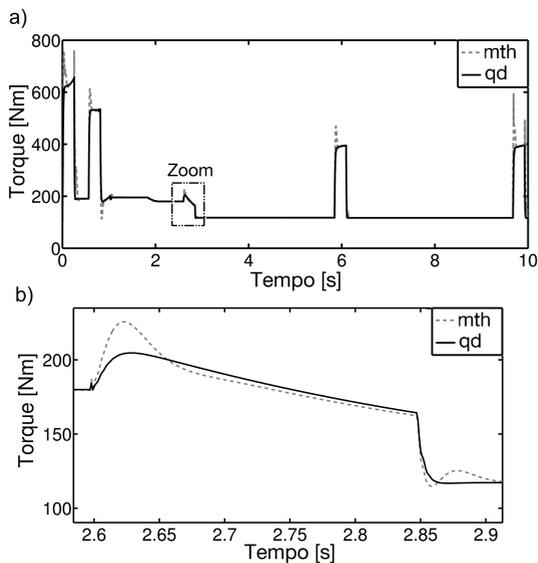


Figura 7.10: Perfis de torque normalizado no espaço das juntas para o manipulador.

Apesar da imposição de perfis diferentes de torque para as juntas (como apresentado nas Figuras 7.10 e 7.9) o seguimento da trajetória do ponto de vista da posição e velocidade no espaço das juntas é visualmente idêntico. Dessa forma, ambas as metodologias de representação executam a trajetória de posição e velocidade igualmente, como apresentado na Figura 7.11 para a especificação de posição e na 7.12 para a velocidade.

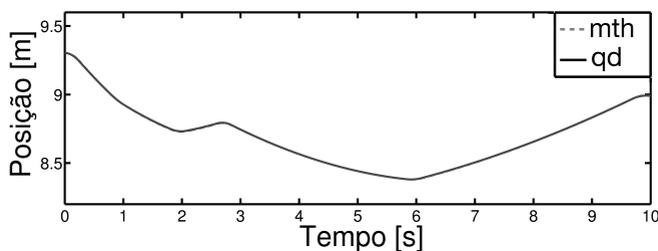


Figura 7.11: Perfis de posição normalizados no espaço das juntas.

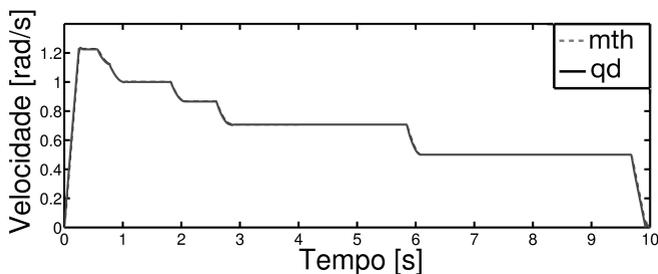


Figura 7.12: Perfis de velocidade normalizados no espaço das juntas.

A diferença entre os métodos está na especificação da trajetória em termos da aceleração no espaço das juntas. A abordagem através das matrizes de transformação homogênea induz a maiores variações ("picos") de velocidade, quando comparada com a aplicação dos quatérnios duais. Para enfatizar essa característica, a Figura 7.13 demonstra a diferença entre o perfil de aceleração no espaço das juntas delimitado pelas matrizes de transformação homogêneas em relação aos quatérnios duais. Onde são evidenciados os picos de aceleração produzidos pelo método clássico devido à influência de perturbações causadas pela imposição de movimentos em regiões singulares, os quais não ocorrem com na aplicação dos elementos dual-quaterniônicos. O gráfico apresentado na Figura 7.13 é produzido pela diferença aritmética ponto a ponto da trajetória especificada pelas MTH em relação a trajetória

via quatérnios duais.

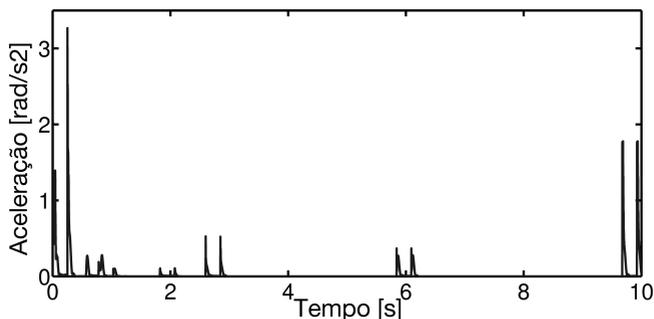


Figura 7.13: Diferença nos perfis de aceleração no espaço das juntas.

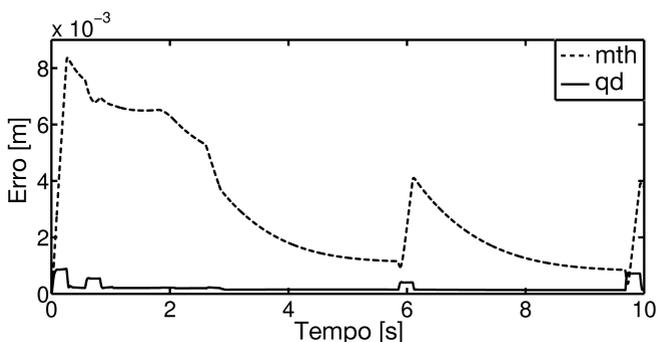


Figura 7.14: Erro normalizado de postura no espaço das juntas.

A imposição de picos de aceleração acarreta na degradação da solução, produzindo erros instantâneos de posição que exigem a correção do controlador. Porém, o acúmulo de erros na execução da trajetória pode levar a degeneração do movimento. O seguimento da trajetória (ilustrada na Figura 7.5) por meio das matrizes de transformação homogênea contém degenerações instantâneas que delimitam erros de postura superiores à aplicação dos quatérnios duais, principalmente, na ocorrência de singularidades cinemáticas. A Figura 7.14 apresenta os perfis de erro normalizado de postura no espaço das juntas para ambos os métodos, onde nos instantes $t = \{0; 0,7; 5,9; 9,7\}$ ocorrem picos significantes de desestabilização da trajetória. Ao comparar o seguimento da trajetória por ambos os métodos, torna-se evidente o potencial dos quatérnios duais para o evitamento de influências das singularidades

cinemáticas.

Os quatérnios duais podem ser empregados como uma abordagem alternativa para a cinemática inversa diferencial através de um procedimento analítico (discutido no Capítulo 6). A qual será avaliada em termos do UVMS a seguir.

7.2.3 Jacobiano Dual-Quaterniônico

A um sistema veículo-manipulador subaquático planar, conforme ilustrado na Figura 7.3, é imposta uma trajetória circular no espaço operacional, cujo raio é $1.5m$ e com restrição de tempo para execução da trajetória em 4 segundos. O mapeamento cinemático para o espaço das juntas é realizado por meio do Jacobiano clássico realimentado, conforme o diagrama apresentado na Figura 6.2 e definido pela equação 6.30 e; através da abordagem baseada no Jacobiano dual-quaterniônico, segundo o esquema apresentado na Figura 6.3 e definido pela equação 6.31.

A trajetória de posição especificada no espaço das juntas pelo método do Jacobiano clássico realimentado emprega uma maior variação da posição relativa das juntas, quando comparada ao método do Jacobiano dual-quaterniônico. No ambiente subaquático, devido às influências de imersão no fluido, movimentos bruscos podem degenerar o seguimento da trajetória por causa dos efeitos hidrodinâmicos do ambiente, discutidos detalhadamente no Apêndice H. Ainda, a dinâmica do veículo é lenta, nesse contexto, o veículo é empregado tradicionalmente para o posicionamento e a estabilização do sistema em relação as perturbações do ambiente. A movimentação do manipulador influencia diretamente a estabilização do sistema, devido ao alto acoplamento entre os subsistemas. A eficiência energética do sistema é aumentada com a priorização da movimentação do manipulador, pois, os atuadores do veículo possuem potência e consumo superior aos do manipulador. Por todas essas características, em sistemas veículo-manipulador subaquáticos é importante a minimização da movimentação das juntas. Neste contexto, pode-se comprovar a eficiência "natural" dos quatérnios duais para a minimização da movimentação global do sistema com o mapeamento cinemático realizados por ambos os métodos e apresentados na Figura 7.15.

A variação brusca de posição especificada pelo mapeamento através do Jacobiano clássico acarreta na imposição de grandes variações de torque nas juntas, e conseqüentemente, em picos de velocidade no espaço das juntas. Esses movimentos perturbam a estabilização global do sistema realizada através dos propulsores de veículo, tais efeitos são intensificados pelo alto amortecimento do ambiente. A Figura 7.16 apresenta o perfil de velocidade normalizado no espaço das juntas para ambos os métodos, onde é verificada a potencialidade do método do Jacobiano dual-quaterniônico para a minimiza-

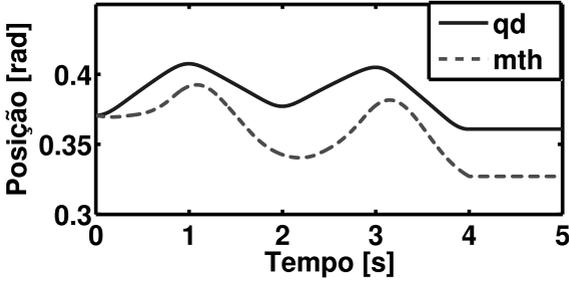


Figura 7.15: Análise da cinemática inversa diferencial analítica aplicada ao UVMS: perfil de posição normalizado no espaço das juntas.

ção energética e das forças de arrasto de sistemas subaquáticos. Mesmo após a correção do erro inicial de posição do sistema, o método clássico continua especificando grandes variações de velocidades para as juntas.

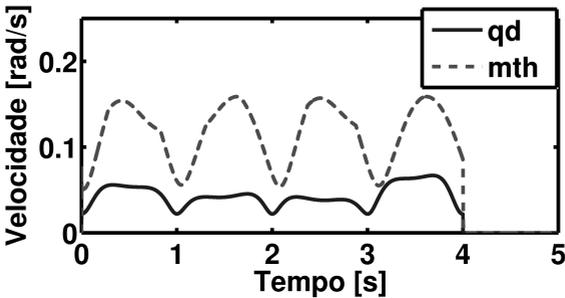


Figura 7.16: Análise da cinemática inversa diferencial analítica aplicada ao UVMS: perfil de velocidade normalizado no espaço das juntas.

A postura inicial do sistema difere-se do ponto inicial da trajetória constituindo em um erro inicial de posição ao sistema. Ambos os métodos corrigem o erro inicial e convergem o erro de posição para zero. A Figura 7.17 apresenta o transitório do perfil de erro de posição normalizado no espaço operacional, visto que em $t = 0.08s$ a resposta converge e estabiliza em zero. A diferença entre os dois métodos é sucinta, pois, a abordagem através de quatérnios duais apresenta um suave pico de erro, devido a minimização da variação angular nas juntas que atrasa a correção do sistema. Entretanto, ambos os métodos convergem para zero no mesmo instante.

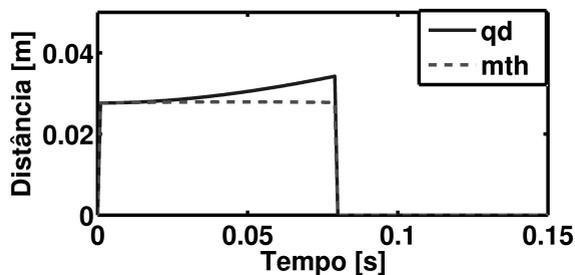


Figura 7.17: Análise da cinemática inversa diferencial analítica aplicada ao UVMS: perfil de erro de posição normalizado no espaço operacional, com "zoom" na região de transiente.

Do ponto de vista do erro de velocidade no espaço operacional a resposta é idêntica visualmente por ambos os métodos. Devido à rápida convergência do erro para zero, a Figura 7.18 apresenta o intervalo de transitório do erro de velocidade normalizado no espaço operacional.

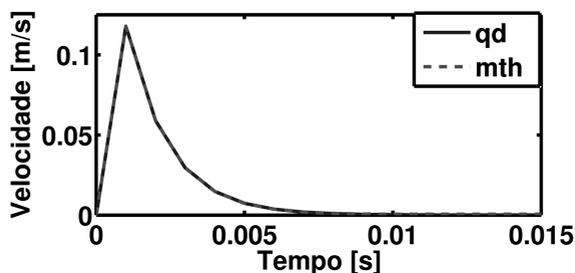


Figura 7.18: Análise da cinemática inversa diferencial analítica aplicada ao UVMS: perfil de erro de velocidade normalizado no espaço operacional, com "zoom" na região de transiente.

A metodologia para a aplicação do método do Jacobiano dual-quaterniônico no sistema veículo-manipulador subaquático utilizado como estudo de caso é descrito detalhadamente no algoritmo 7.1.

Algoritmo 7.1: Cinemática inversa diferencial dual-quaterniônica aplicada ao UVMS

Entrada: Descrição da postura na derivada do espaço operacional

$$v_{e(t)} = [v_{e_1(t)}; v_{e_2(t)}; v_{e_3(t)}]^T$$

Saída: Variáveis de junta no espaço de juntas $q = [\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)]^T$

1 *Determinação dos parâmetros das juntas*

$z_{(n-1)}$, vetor direção da junta,

$p_{(n-1)}$, vetor posição da junta;

2 **para** ($t \leftarrow$ início) **até** (fim da trajetória) **faça**

3 *Montagem dos Quatérnios-Duais Jacobianos para cada junta*

$J_{qd_n(t)}$, onde, n é o número da junta;

4 *Particionamento Quatérnios-Duais Jacobianos das juntas por dimensão*

$J_{w_k(t)}$, $J_{p_i(t)}$, $J_{p_j(t)}$;

5 *Determinação das velocidades no espaço das juntas*

$$\dot{q}_{k(t+1)} = \left(J_{w_k(t)}^{-1} (v_{e_1}(t) + K_{v_1} \dot{v}_1(t)) \right) k,$$

$$\dot{q}_{i(t+1)} = \left(J_{p_i(t)}^{-1} (v_{e_2}(t) + K_{v_2} \dot{v}_2(t)) \right) i,$$

$$\dot{q}_{j(t+1)} = \left(J_{p_j(t)}^{-1} (v_{e_3}(t) + K_{v_3} \dot{v}_3(t)) \right) j;$$

6 *Montagem das variáveis de velocidade no espaço nas juntas de acordo com a influência do deslocamento helicoidal em cada junta*

7 *Determinação da velocidade no espaço operacional, para conferência*

$$v_{e_{n\text{ob}(t)}} = \left(J_{\zeta}^* e^{-1} \right) \left(\dot{q}_n e^{-1} \right) - \left(\dot{q}_n^* J_{\zeta} \right);$$

Onde,

$$J_{\zeta} = \{ J_{w_k}, J_{p_i}, J_{p_j} \},$$

$$n = 1 \dots 3;$$

8 *Cálculo do erro de postura no espaço operacional*

$$\dot{v}_{1(t+1)} = (v_{e_1(t)} - v_{e_{1\text{ob}(t)}}), \quad \dot{v}_{2(t+1)} = (v_{e_2(t)} - v_{e_{2\text{ob}(t)}}),$$

$$\dot{v}_{3(t+1)} = (v_{e_3(t)} - v_{e_{3\text{ob}(t)}});$$

9 *Integração das velocidades na derivada do espaço das juntas*

$$q_{(t+1)} = \int \dot{q}_{(t+1)};$$

fim

7.3 CONCLUSÃO

Este capítulo teve por objetivo realizar a análise cinemática (direta e inversa), por meio de elementos dual-quaterniônicos, de um sistema veículo-manipulador subaquático. Primeiramente, foi realizada a determinação da cinemática direta através de quatérnios duais. Na sequência, foi empregado um procedimento iterativo para a cinemática inversa diferencial, utilizando o método de Davies com realimentação dual-quaterniônica. Por último, foi determinada a cinemática inversa por meio do Jacobiano dual-quaterniônico.

Em sistemas subaquáticos, onde um fluido envolve todo o veículo e agrega um grande amortecimento ao sistema, a imposição de largas variações de torque pode desestabilizar o sistema. O emprego dos quatérnios duais, devido ao seu comportamento numérico, induz a realização de movimentos lentos e suaves. Isso minimiza o movimento global do sistema e as forças de arrasto induzidas pelo fluido, o que facilita a estabilização do sistema no ambiente subaquático.

A ocorrência de erros instantâneos de posição, devido à imposição de picos de torque para garantir o seguimento da trajetória, promove a degradação da solução. O ambiente subaquático amortece esses efeitos exigindo a correção adicional do controlador, o que induz grandes erros de postura ao sistema. O emprego de quatérnios duais para a representação dos movimentos diminui significativamente esses efeitos quando comparado ao método clássico via matrizes de transformação homogênea.

Em sistemas redundantes, o uso de quatérnios duais evita a perda momentânea de mobilidade, causada pela manipulação em regiões singulares e minimiza a variação de velocidade na proximidade dessas regiões. Nessa modalidade de sistema, a perda de um grau de liberdade acarreta na transformação de uma junta secundária em primária, levando a picos na estabilização do sistema. Os quatérnios duais não sofrem essas influências, promovendo um mapeamento suave entre o espaço operacional e o espaço das juntas. Ainda, para o tratamento de sistemas redundantes esta abordagem não necessita de uma aproximação numérica como é necessário no método tradicional, isto é, a utilização da pseudo-inversão. O tratamento é idêntico ao realizado para sistemas não-redundantes.

Dessa forma são atingidos os objetivos desse trabalho, apresentados no item 1.2.1, que não haviam sido contemplados previamente.

8 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma nova abordagem para o mapeamento cinemático de sistemas veículo-manipulador subaquáticos, baseado em elementos dual-quaterniônicos. Nessa modalidade de sistema, o veículo é utilizado para dar estabilidade no movimento cancelando as perturbações do ambiente. A inércia do veículo é significativamente superior a do manipulador e existe um alto acoplamento entre os subsistemas, o que acarreta em uma intensa interação dinâmica entre o veículo e o manipulador. Em virtude disso, um forte requisito para o seguimento de trajetórias com esses sistemas é a minimização do torque aplicado às juntas para que o manipulador agregue um perfil reduzido de perturbações ao sistema durante sua movimentação. Trajetórias mapeadas no espaço das juntas por grandes variações de posição de junta tendem a agregar grandes erros em sua execução, devido à influência do amortecimento induzido e da força de arrasto (pela imersão no fluido) que introduz atrasos na resposta do sistema.

Primeiramente, foi delimitado o problema da ocorrência de singularidades durante o seguimento de trajetórias por sistemas subaquáticos. A cinemática diferencial é demonstrada como uma ferramenta importante na determinação da cinemática inversa, pela linearidade de sua transformação. Todavia, essa operação é baseada na inversão do Jacobiano e em determinadas condições esta matriz perde seu posto completo, tornando-se singular e não-inversível. Esse fenômeno é denominado de *singularidade cinemática* e é interpretado e definido como, “... *uma condição temporária de degeneração da mobilidade do sistema devido a aspectos cinemáticos do mecanismo ou do movimento*”. Ainda, na proximidade dessas regiões pequenos movimentos no espaço operacional resultam em grandes variações no espaço das juntas. A ocorrência de singularidades em sistemas não-redundantes pode degenerar o seguimento da trajetória pela perda momentânea de mobilidade. Em sistemas redundantes as singularidades delimitam a perda momentânea da redundância, ou seja, o sistema ainda possui mobilidade suficiente para o cumprimento da tarefa, porém, são adicionadas restrições altamente influentes. Nesse sistemas, a singularidade delimita uma readequação de postura que introduz grandes variações de torque nas juntas e acarreta em erros na execução do movimento. Nesse contexto, é ressaltado o potencial dos quatérnios para a minimização da influência das singularidades cinemáticas, abordagem que vêm se difundido na literatura com o termo “*singularity-free*”.

Em seguida é realizada uma investigação sobre a fundamentação dos quatérnios, através de suas relações algébricas definidas por uma álgebra de Clifford, para expandir suas dimensões e permitir a representação da cinemática. A representação dos movimentos através de quatérnios possui benefícios, principalmente relacionados com a não-ocorrência de singularidades. Porém existem restrições que ocasionam na expansão de suas dimensões, e conseqüentemente, no emprego dos quatérnios duais. Os quatérnios duais são apresentados como um caso particular dos biquatérnios de Clifford e como uma generalização dos quatérnios de Hamilton. A aplicação desse elemento é decorrência do requisito da representação da transformação composta (rotação e translação) no espaço. Os quatérnios não possuem dimensões suficientes para a representação. A análise cinemática através dessa álgebra permite a justificativa do potencial de aplicação desses elementos devido a características particulares da transformação com esses elementos, como a igualdade $g = -g$ e a representação desacoplada dos ângulos de Euler.

Mostrada a adequação dos quatérnios e a importância do uso da álgebra de Clifford, os quatérnios duais são aplicados para a representação dos movimentos na cinemática direta, através da convenção de Denavit-Hartenberg e dos método dos helicóides sucessivos. O método tradicional baseado nas matrizes de transformação homogêneas, descreve o espaço por nove componentes dependentes e acopladas. Como consequência, é necessário o emprego da função *Atan2* para a extração dos ângulos de orientação, porém existe uma dualidade natural da função e a possibilidade da degeneração da solução, agregando singularidades. Os quatérnios duais são aplicados de forma a evitar esses efeitos promovendo a representação espacial em seis componentes, onde a parcela rotacional é independente e desacoplada. O que promove a extração dos ângulos de Euler de forma simples, unívoca e sem singularidades. Outro benefício está no custo computacional, que é inferior quando comparado com o método clássico.

Complementando o tratamento cinemático do problema, são empregados os quatérnios duais para a representação mínima dos movimentos aplicada na realimentação da cinemática inversa diferencial através do método de Davies. Com o objetivo de evitar a ocorrência de singularidades cinemáticas, pois, a orientação é expressa em três variáveis independentes no espaço operacional, diferentemente das matrizes de transformação homogênea que empregam nove componentes dependentes e acopladas. Esta forma de realimentação promove soluções matemáticas para regiões tradicionalmente indeterminada através da representação por matrizes de transformação homogêneas. A perda momentânea de um grau de mobilidade, causada por configurações singulares pode degenerar a solução se o sistema não tiver graus de liberdade adicionais para suprir essa perda. Sem uma referência, o controlador não tem

como convergir para uma solução promovendo assim uma indeterminação de postura. A abordagem é aplicada ao sistema veículo-manipulador subaquático e comparada com o método clássico em uma estrutura de simulação dinâmica, onde os quatérnios duais demonstram-se mais eficazes na minimização da influência das singularidades e na minimização do torque aplicado às juntas. A ocorrência de erros instantâneos de posição, devido a imposição de picos de torque para garantir o seguimento da trajetória, leva a degradação da solução. O ambiente subaquático amortece esses efeitos exigindo a correção adicional do controlador, o que induz grandes erros de postura ao sistema. O emprego de quatérnios duais para a representação dos movimentos diminui significativamente esses efeitos.

Por fim, é proposta uma metodologia para a obtenção do Jacobiano dual-quaterniônico, que demonstra ser uma ferramenta poderosa para o mapeamento da cinemática diferencial devido a sua transformação inversa ser sempre definida e pela sua imposição natural da minimização do torque nas juntas. Essa característica promove a minimização energética do sistema e em sistemas subaquáticos, onde um fluido envolve todo o veículo e agrega um grande amortecimento ao sistema, facilita a estabilização do veículo para a execução de uma trajetória pelo efetuador. Para o tratamento de sistemas redundantes esta abordagem não necessita de uma aproximação numérica como é necessário no método tradicional. A limitações dimensionais dos quatérnios duais que pode limitar sua aplicação em sistemas com muitos graus de liberdade, torna-se um detalhe quando fundamenta-se esse elemento através de uma álgebra de Clifford. Pois, pode-se facilmente expandir a álgebra para outra álgebra isomórfica com mais bases geradoras e se empregar um elemento com mais dimensões para determinação, isto é, os sedênios que possuem 16 dimensões, preservando as relações algébricas e a metodologia apresentada para os quatérnios duais. As potencialidades da aplicação dos quatérnios duais no mapeamento cinemático são comprovadas através de simulações que são comparadas com o método clássico.

8.1 CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO DE TESE

As principais contribuições obtidas a partir desta tese são:

- Delimitação do problema da ocorrência de singularidades no contexto da robótica subaquática, desenvolvido no Capítulo 2;
- A investigação do formalismo para a fundamentação dos elementos quaterniônicos através da propriedade de suas relações algébricas, justificando a expansão de suas dimensões para a representação da transformação geométrica composta, realizado no Capítulo 3;

- A formulação de uma metodologia para a obtenção da cinemática direta, através dos quatérnios duais, e para a extração da representação mínima destes elementos, minimizando os efeitos das singularidades cinemáticas e o custo computacional da solução, definido no Capítulo 4;
- Um método para realimentação de algoritmos iterativos para determinação da cinemática inversa diferencial através de quatérnios duais, evitando as singularidades cinemáticas e minimizando os picos de torque no seguimento da trajetória, requisitos do ambiente subaquático, apresentado no Capítulo 5;
- A proposta de uma metodologia eficiente para a determinação da cinemática inversa diferencial de sistemas veículo-manipulador subaquáticos, de forma analítica, por meio do Jacobiano dual-quaterniônico, com o objetivo de minimizar o torque induzido às juntas e evitar a ocorrência de singularidades cinemáticas, aumentando a eficiência energética do sistema, designado no Capítulo 6;
- Uma nova abordagem para a análise cinemática de sistemas veículo-manipulador subaquáticos em diferentes contextos, apresentada no Capítulo 7.

Os resultados dessa tese geraram as seguintes publicações:

1. *A new approach to the kinematic analysis using dual quaternions*, *Robotica*, Cambridge University Press, Situação: Em processo de revisão.
2. *Optimal trajectory tracking of underwater vehicle-manipulator system through dual-quaternionic feedback*, *Ocean Engineering*, Elsevier, Situação: Em processo de revisão.
3. *Dual-quaternionic posture feedback in control of underwater vehicle-manipulator system*, *21st International Congress of Mechanical Engineering, 2011*, Situação: Aceito para apresentação.
4. *Análise cinemática via quatérnios duais*, *XVII Congresso Brasileiro de Automática, 2010*, Situação: Apresentado (OLIVEIRA; PIERI; MORENO, 2010).

8.2 PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

Como propostas para trabalhos futuros, ficam como sugestões:

- Empregar os quatérnios duais para a aproximação numérica do procedimento de integração, de forma a diminuir a perturbação numérica em estratégias de controle, como introduzido em Johnson, Williams e Cook (2009);
- Introduzir os quatérnios duais, mais aprofundadamente, no contexto da dinâmica, para a representação de forças e momentos;
- Expandir a potencialidade dos quatérnios duais em outras formas de realimentação no espaço operacional para a melhoria de estratégias de controle;
- Relacionar novos objetivos secundários para a aplicação da metodologia dual-quaterniônica na resolução da cinemática inversa de sistemas redundantes;
- Avaliar o emprego do Jacobiano dual-quaterniônico em outros tipos de mecanismos, como em robôs paralelos e sistemas cooperativos;
- Explorar a possibilidade de transformação de outros componentes, como retas e planos, para o desenvolvimento de restrições para operações em sistemas cooperativos, confinados ou com interação com o ambiente. Pois, como demonstrado em Selig (2000) existe operações de correlação entre esses componentes.

APÊNDICE A - Métodos de Integração

Os métodos de integração são procedimentos numéricos para a decomposição do cálculo analítico em aproximações numéricas, podendo ainda ser mais precisamente caracterizados como métodos para a aproximação de equações diferenciais ordinárias. Dessa forma, os métodos se baseiam na determinação de soluções através da transformação de equações diferenciais ordinárias em equações algébricas, pela discretização do domínio e, ainda pela aproximação das derivadas através de diferenças finitas (GARCIA, 2005).

No campo da robótica, a integração numérica é comumente aplicada na determinação da cinemática direta e inversa diferencial, onde são determinadas as velocidades lineares e angulares das juntas e do efetuador e, essas grandezas são integradas para obtenção das posições. Esses métodos são aplicados também no controle de robôs no espaço das juntas, onde é realizado o cálculo da equação diferencial que modela o sistema, para a determinação da aceleração das juntas. Essa grandeza é duplamente integrada para a determinação das velocidades e posições das juntas. Os métodos são aproximações numéricas e sua aplicação tem como consequência a agregação de erros ao sistema. Normalmente existe algum método corretivo associado ao emprego dessas aproximações.

Dessa forma, foram analisados dois métodos para a aproximação da integração numérica, os quais serão expostos a seguir.

A.1 MÉTODO DE EULER

Este método é uma aproximação simples que utiliza a derivada de primeira ordem já conhecida e substitui as equações diferenciais ordinárias por uma decomposição de diferenças finitas (GARCIA, 2005), como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h_{(i+1)} - h_{(i)}}{\Delta t} \quad (\text{A.1})$$

onde,

$\Delta h, \Delta t$: correspondem à diferença de primeira ordem;

$h_{(i+1)}$: é o valor da solução numérica, no instante $i + 1$;

$h_{(i)}$: é o valor da solução numérica, no instante i .

A equação A.1 pode ser rearranjada numericamente, resultando no método de integração de Euler (denominado como método explícito de Euler, que pode ser visto mais detalhadamente em Garcia (2005)), que é definido como:

$$h_{(i+1)} = h_{(i)} + \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_i \Delta t \quad (\text{A.2})$$

Nas literaturas associadas à robótica, o método de integração de Euler é comumente apresentado em relação as variáveis de junta. Dessa forma, conforme a nomenclatura (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000), o método de integração de Euler pode ser reescrito como:

$$q_{(t_{k+1})} = q_{(t_k)} + \dot{q}_{(t_k)} \Delta t \quad (\text{A.3})$$

onde,

$q_{(t_{k+1})}$: é o valor do vetor posição das juntas, no instante t_{k+1} ;

$q_{(t_k)}$: é o valor do vetor posição das juntas, no instante t_k ;

$\dot{q}_{(t_k)}$: é o valor do vetor velocidade das juntas, no instante t_k ;

Δt : é o intervalo de integração.

A.2 MÉTODO TRAPEZOIDAL

A aproximação da integração numérica pelo método trapezoidal, decompõe as equações diferenciais ordinárias em uma sequência de trapézios (Figura A.1), diferentemente do método de Euler, que emprega as diferenças finitas cuja correspondente geométrica são os retângulos (Figura A.2).

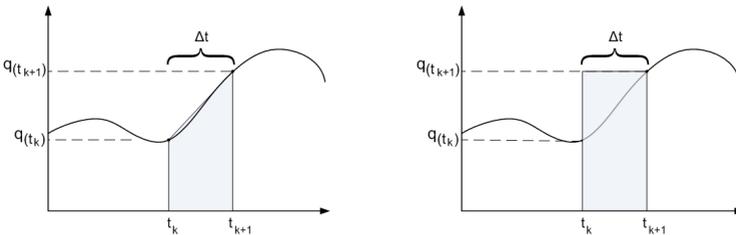


Figura A.1: Método de integração tra- **Figura A.2:** Método de integração de
pezoidal. Euler.

Esse método se baseia fundamentalmente no emprego da equação da área de um trapézio, para a aproximação numérica da integração analítica. Como consequência, a aproximação realizada torna-se mais realística que o

método de Euler, pois a parte superior à inclinação da reta formada pela solução numérica no instante atual e no próximo instante, é desprezada. Assim, a equação para a determinação da área de um trapézio é definida como:

$$A = \frac{(B+b)}{2}h \quad (\text{A.4})$$

onde,

B : é a base maior;

b : é a base menor;

h : é a altura.

Ao readequar o método de Euler, equação A.1, para a determinação de uma aproximação trapezoidal, através da substituição de suas componentes de área retangular pela área trapezoidal, e ainda, relacionando à variáveis de junta, obtém-se o método de integração trapezoidal, que pode ser definido como:

$$q_{(t_{k+1})} = q_{(t_k)} + \left(\frac{\dot{q}_{(t_{k+1})} + \dot{q}_{(t_k)}}{2} \right) \Delta t \quad (\text{A.5})$$

onde,

$\dot{q}_{(t_{k+1})}$: é o valor do vetor velocidade das juntas, no instante t_{k+1} .

APÊNDICE B - Representação Clássica dos Movimentos

Um manipulador pode ser representado como uma cadeia cinemática formada por corpos rígidos (elos), conectados por articulações (juntas rotativas ou prismáticas). O início da cadeia é denominado de base, ou o ponto de apoio, e o final está relacionado com o efetuador ou a ferramenta. O movimento resultante é uma composição de movimentos elementares relacionados aos elos e as juntas que compõem o sistema (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000). Este tópico está relacionado com a representação dos movimentos, ou seja, com a representação matemática da movimentação da cadeia cinemática para a geração do movimento controlado do efetuador.

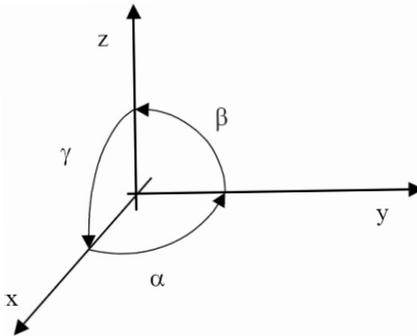


Figura B.1: Sistema de referência espacial.

Fonte: Santos (2001).

A representação dos movimentos está associada, inicialmente com a representação dos objetos, e conseqüentemente, relacionada à um sistema de referência (Fig.B.1), comumente denominado de sistema de coordenadas referenciais. O sistema de referência consiste em três eixos de coordenadas ortogonais (x,y,z), onde a interseção desses eixos define a origem do sistema de coordenadas, ou seja, o ponto de origem (*zero*) das métricas sobre as dimensões do espaço. É possível a determinação da localização unívoca de objetos no espaço de trabalho. Diversas literaturas abordam esses conceitos, porém de uma forma não padronizada. Assim, serão adotadas as notações de Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006), as quais, diferem-se muito sucintamente das de Sciavicco e Siciliano (2000).

Esses referenciais são fundamentados em duas características, a primeira define que os três eixos de referência, para o caso de coordenadas espaciais, são ortogonais entre si. O outro aspecto está relacionado com a medição convencional dos ângulos, ou seja, quando os ângulos são positivos no sentido anti-horário é denominado que o sistema de coordenadas é direto e quando os ângulos são negativos é dito que o sistema de coordenadas é indireto (SANTOS, 2001). A função do sistema de coordenadas é a definição do ponto inicial, da direção e do sentido da localização de objetos no espaço, sendo uma ferramenta para a representação dos movimentos.

A entidade geométrica fundamental é o ponto, que no espaço tridimensional, é representado matematicamente por um vetor de três coordenadas $p = [p_x, p_y, p_z]^T$, cada uma associada a um eixo de referência. A associação deste elemento geométrico forma elementos mais complexos, como: retas, planos, entre outros.

Os elementos geométricos podem ser designados de diferentes formas no espaço ou em distintos sistemas de referência. Assim, o mesmo objeto pode ser visualizado de diferentes referenciais, mesmo que fisicamente seja o mesmo objeto sua descrição está associada a diferentes pontos de visualização. A Figura B.2 apresenta graficamente esse efeito, para a representação de um ponto em dois sistemas de referências planares e diferentes.

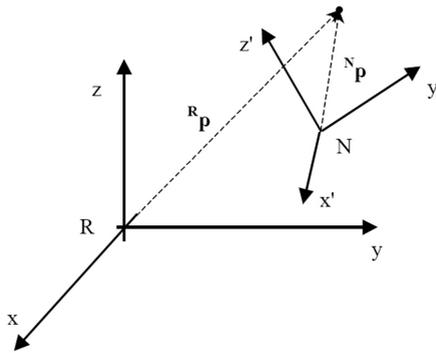


Figura B.2: Um ponto representado em diferentes referenciais.

Fonte: Santos (2001).

Os objetos geométricos representados em sistemas de referências podem ser movimentados por meio de transformações geométricas, ou alterações de suas coordenadas através de transformações também associadas aos seus sistemas de coordenadas. Essas transformações estão diretamente relacionadas as duas transformações elementares, que serão abordadas a seguir.

B.1 TRANSFORMAÇÕES ELEMENTARES

A tarefa fundamental de um robô industrial é a movimentação de objetos, característica que leva esse sistema a ser comumente denominado de manipulador. Essa operação é primordialmente realizada com a utilização de garras mecânicas, ou outros dispositivos de fixação, acoplados ao punho do robô. Desta forma, para o cumprimento da tarefa o importante é a representação do movimento associado ao centro do objeto a ser manipulado. O movimento resultante pela cadeia cinemática é a composição dos movimentos elementares de cada junta, que é refletido até o efetuador (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000), onde está situado o objeto. O ponto de contato entre o efetuador e o objeto pode ser representado pela entidade geométrica fundamental, o ponto.

Os elementos geométricos sofrem fundamentalmente duas transformações, consideradas de elementares: a translação e a rotação. Ambas estão diretamente relacionadas com o sistema de referência do objeto, mais precisamente, sobre um dos eixos coordenados do sistema de referência. Essa característica será melhor explorada individualmente a seguir com a abordagem individual destas transformações.

B.1.1 Translação

A transformação elementar mais evidente é a translação. Por meio desta, um objeto geométrico move-se linearmente paralelamente à um dos eixos coordenados do sistema de referência da transformação. Assim, seja um ponto $p = [p_x, p_y]^T$ que representa a extremidade de um manipulador planar 3R (três juntas rotativas), conforme a Figura B.3, este sofre uma translação $d_{(i+1)}^i = [d_x, d_y]^T$ (um deslocamento linear) e torna-se um novo ponto denominado de $p' = [p'_x, p'_y]^T$.

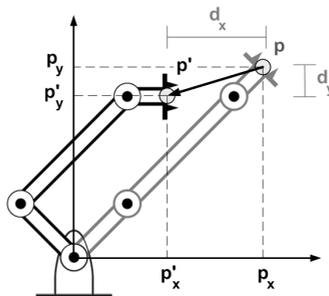


Figura B.3: Translação Elementar.

Essa transformação pode ser representada matematicamente como:

$$\begin{cases} p_{x'} = p_x + d_x \\ p_{y'} = p_y + d_y \end{cases}$$

Essa transformação também pode ser exposta na forma matricial, conforme:

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Ou simplesmente:

$$p' = p + d_{(i+1)} \quad (\text{B.1})$$

onde,

i : índice do sistema de referência atual;

$(i + 1)$: índice do sistema de referência de destino.

B.1.2 Rotação

A rotação elementar está relacionada com o movimento angular sobre um dos eixos de coordenadas do sistema de referência da transformação. Desta forma, sobre um sistema de referência espacial (x, y, z) , são possíveis até três eixos de rotações distintos. Esta modalidade de transformação pode ser analisada geometricamente, através de suas projeções nos eixos de referências. Assim, seja um movimento rotacional de ângulo θ , realizado sobre a junta inicial de um manipulador planar 3R, a soma do comprimento de seus elos é l , conforme a Figura B.4, é possível se extrair as seguintes relações sobre o movimento:

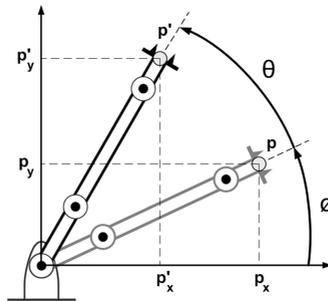


Figura B.4: Rotação Elementar.

$$\begin{cases} p'_x = l \cos(\theta + \phi) = l(\cos(\theta)\cos(\phi) - \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)) \\ p'_y = l \text{sen}(\theta + \phi) = l(\cos(\phi)\text{sen}(\theta) + \text{sen}(\phi)\cos(\theta)) \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Sabendo que a situação inicial do manipulador pode ser descrita por:

$$\begin{cases} p_x = l \cos(\phi) \\ p_y = l \text{sen}(\phi) \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Ao substituir a situação inicial, equação B.3, na configuração após a rotação, equação B.2, obtém-se:

$$\begin{cases} p'_x = p_x \cos(\theta) - p_y \text{sen}(\theta) \\ p'_y = p_x \text{sen}(\theta) + p_y \cos(\theta) \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

A equação B.4 pode ser reescrita na forma matricial resultando em:

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

Ou simplesmente:

$$p' = R_{(i+1)}^i p \quad (\text{B.5})$$

B.1.3 Reorientação

Um caso particular da transformação elementar de rotação, acontece quando o objeto a ser transformado possui seu eixo de giro (ponto central), sobre o ponto de interseção dos eixos coordenados (origem) do sistema de referência da transformação. Nesse caso, ocorre uma reorientação do objeto, visto que o mesmo realiza um giro sobre o seu ponto central e não um deslocamento angular como na rotação. Esse fenômeno ocorre devido a ausência de deslocamento entre o ponto de origem e o ponto central do objeto. A Figura B.5 demonstra essa situação para um ponto que representa a extremidade de um manipulador.

As transformações elementares podem ser associadas de forma a gerar uma transformação composta. Esse procedimento é necessário, quando se opera em um ambiente espacial (tridimensional). O próximo tópico é destinado a apresentação dos métodos mais difundidos para realização de transformações compostas no espaço, a matriz de transformação homogênea.

B.2 TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS

A representação completa de um corpo rígido (um objeto qualquer) no espaço é dada por sua posição e orientação em relação ao referencial fixo

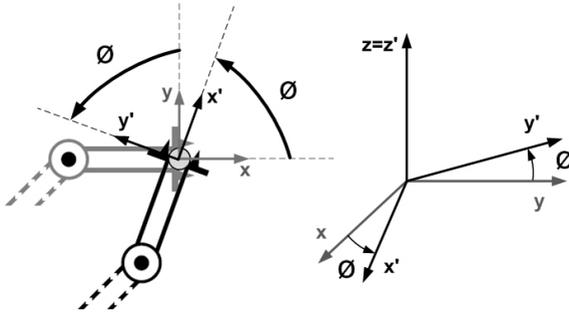


Figura B.5: Reorientação.

(SCIAVICCO; SICILIANO, 2000). Um corpo rígido tem sua localização no ambiente espacial expressa em relação ao sistema de referência, descrita por uma translação tridimensional. A orientação do corpo rígido está relacionada com a rotação tridimensional sobre o próprio sistema de referência, localizado sobre seu centro, expresso no sistema de referência do ambiente. A Figura B.6 ilustra as propriedades de representação de um corpo rígido no espaço.

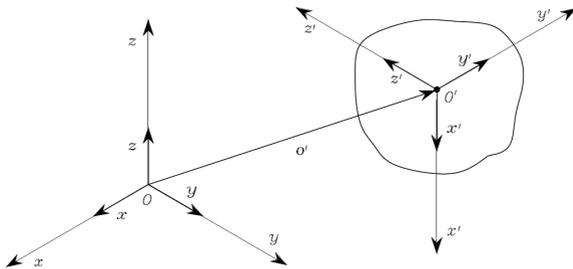


Figura B.6: Representação do corpo rígido no espaço.

Fonte: Sciavicco e Siciliano (2000).

A movimentação de um corpo rígido no espaço é baseada nas transformações elementares. Porém, essas necessitam ser ampliadas para o caso espacial. Neste caso, a entidade geométrica fundamental (o ponto) deve considerar a inclusão desta nova dimensão. Assim, um ponto no espaço tridimensional é representado por:

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Desta maneira, a realização de uma transformação de translação, como determinada na equação B.1, ocorre com a expansão do vetor de translação para o caso espacial, conforme:

$$d_{(i+1)}^i = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Da mesma maneira, é necessário generalizar as componentes da transformação de rotação para o caso espacial. O procedimento é similar ao empregado para a determinação da equação B.5, cujas resultantes são as transformações associadas a cada um dos eixos de coordenadas do sistema de referência da transformação, apresentadas abaixo como:

$$R_x(\theta)_{(i+1)}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$R_y(\theta)_{(i+1)}^i = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$R_z(\theta)_{(i+1)}^i = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

As transformações elementares podem ser compostas em transformações que representem a manipulação no ambiente espacial tridimensional. Essa composição ainda pode ser expressa em uma representação matricial mínima denominada de matriz de transformação homogênea. A seguir serão abordados individualmente essas propriedades.

B.2.1 Transformações Compostas

Como já foi dito anteriormente, um manipulador industrial consiste em uma cadeia cinemática cujo movimento de seu efetuador é uma consequência dos movimentos elementares realizados por suas juntas. Para Tsai (1999) são necessários seis parâmetros independentes para a representação do corpo rígido no espaço tridimensional. O ambiente espacial possui três dimensões e seis graus de liberdade, isto é, três graus de liberdade para translação e mais três para orientação. Assim, os movimentos do efetuador não são realizados sequencialmente mas simultaneamente, conseqüentemente, não são realizadas transformações elementares, mas sim, uma composição des-

sas transformações.

No espaço, ocorre o acoplamento das transformações, para a representação da posição e da orientação. A rotação é responsável pela modificação da orientação do corpo rígido, enquanto a translação altera a localização do corpo rígido. A composição de rotações é realizada simplesmente pela multiplicação das matrizes, apresentadas nas equações B.8, B.9 e B.10, conforme:

$$R_{(i+n)}^i = R_{(i+1)}^i R_{(i+2)}^{(i+1)} \dots R_{(i+n)}^{(i+n-1)} \quad (\text{B.11})$$

A combinação de translações é realizada pela soma de seus vetores, definido na equação B.7, conforme:

$$d_{(i+n)}^i = d_{(i+1)}^i + d_{(i+2)}^{(i+1)} + \dots + d_{(i+n)}^{(i+n-1)} \quad (\text{B.12})$$

A rotação elementar de um elemento geométrico é representada pela equação B.5, enquanto a translação elementar é representada pela equação B.1, assim, um acoplamento de ambas as transformações resulta em:

$$p^{(i+n)} = R_{(i+n)}^i p^i + d_{(i+n)}^i \quad (\text{B.13})$$

O sentido da equação B.13 pode ser interpretado como a descrição da posição de um ponto que representa um corpo rígido, em relação à origem de um sistema de referência e da orientação que significa o movimento do sistema de coordenadas das ferramentas em relação ao referencial fixo (TSAI, 1999). Dessa form, ao considerar que os referenciais i e $(i+n)$ são coincidentes (esta suposição será explícita mais adiante, na descrição dos significados da matriz de transformação homogênea), p^i é a posição inicial do ponto, $p^{(i+n)}$ é a posição de destino do ponto, $R_{(i+n)}^i$ é a componentes rotativa e $d_{(i+n)}^i$ a parcela translativa. Esta equação determina a transformação total do corpo rígido como o resultado da adição da rotação e da translação, esta conclusão é conhecida como o Teorema de Chasles (TSAI, 1999).

Uma dificuldade encontrada nas rotações tridimensionais está na não-comutatividade desta transformação. Diferentemente das translações, onde é possível se representar a posição de um corpo rígido como a soma dos deslocamentos lineares nos eixos de referência (ALTMANN, 2005). Assim, a ordem das transformações é um fator a ser considerado, principalmente, devido ao caso particular da transformação elementar de rotação, a orientação. Conforme apresentado na Figura B.7, as transformações não são comutativas.

A matriz de rotação é responsável por expressar a orientação do corpo rígido no espaço, porém, de uma forma acoplada. Existem algumas formas de representação mínima dessa transformação através de poucas variáveis desacopladas. A metodologia clássica para a representação da orientação de um

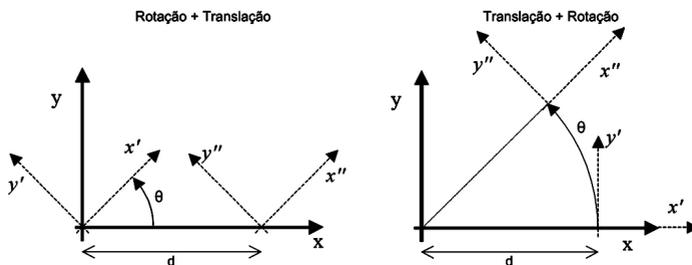


Figura B.7: A ordem das transformações.

Fonte: Santos (2001).

corpo rígido no espaço são os ângulos de Euler, que são descritos no Apêndice C.

O acoplamento entre as transformações elementares resulta na equação B.13, que introduz o conceito de transformação homogênea, a qual será abordada a seguir.

B.2.2 Coordenadas Homogêneas

A equação B.13 não apresenta a transformação de uma forma compacta, devido ao desacoplamento do efeitos. Dessa forma, para apresentar as transformações geométricas através de uma forma mais elegante, são introduzidos os conceitos de coordenadas homogêneas.

O conceito de coordenadas homogêneas é uma generalização da representação tradicional das coordenadas de um vetor de posição, ou da localização de um elemento geométrico fundamental. O vetor de posição de um ponto em relação à um referencial fixo no espaço tridimensional é expresso por $p = [p_x, p_y, p_z]^T$. A generalização deste vetor, ou seja, a definição das coordenadas homogêneas de um vetor de posição, ocorre com a introdução de uma quarta coordenada ρ , que representa um fator de escala não-nulo. As coordenadas homogêneas de p são representadas por:

$$\hat{p} \equiv [\rho p_x, \rho p_y, \rho p_z, \rho]^T \quad (\text{B.14})$$

Ou simplesmente:

$$\hat{p} \equiv [\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z, \rho]^T \quad (\text{B.15})$$

Conforme (BALLARD; BROWN, 1982) e (TSAI, 1999), um vetor de posição em um espaço N -dimensional é representado através de um sistema de coordenadas homogêneas de dimensão $N+1$. Do vetor de coordenadas homo-

gêneas de quarta ordem (equação B.15), pode ser extraído o vetor de posição p , essa operação ocorre com a divisão de coordenadas pela quarta coordenada, o fator de escala ρ , conforme:

$$\hat{p} = \left[\frac{\hat{p}_x}{\rho}, \frac{\hat{p}_y}{\rho}, \frac{\hat{p}_z}{\rho}, \frac{\rho}{\rho} \right]^T \quad (\text{B.16})$$

Que resulta em:

$$\hat{p} = [p_x, p_y, p_z, 1]^T \quad (\text{B.17})$$

Deve ser ressaltado que o vetor de coordenadas homogêneas de um ponto p não possui uma solução única, pois, diferentes fatores de escala pode representar o mesmo vetor de posição tridimensional (NEVATIA, 1982). Em (TSAI, 1999), é definido que por conveniência, na cinemática de mecanismos e robôs manipuladores admite-se que o fator de escala é unitário, $\rho = 1$. Pois, nesse caso, o vetor de coordenadas homogêneas é semelhante ao vetor de posição no espaço tridimensional.

O conceito de coordenadas homogêneas é aplicável para o desenvolvimento de uma matriz de transformação geométrica composta, que considera a rotação, translação, a transformação de escala e perspectiva, as quais, são apresentadas na Figura B.8 (BALLARD; BROWN, 1982). Dessa forma, são associadas outras duas transformações aos elementos geométricos. A transformação de escala que corresponde a alteração proporcional das dimensões elementares do objeto geométrico, a modificação do tamanho real do objeto. E a transformação de perspectiva que significa a alteração do ponto de visualização do objeto, isto é, a rotação e/ou translação do sistema de referência global, sem modificações associadas ao objeto (BALLARD; BROWN, 1982).

Por meio da aplicação dos conceitos das coordenadas homogêneas é possível se chegar em uma matriz de transformação genérica, denominada de matriz de transformação homogênea. Essa matriz tem como propósito a apresentação, em uma forma compacta e elegante, das transformações geométricas fundamentais.

B.2.3 Matriz de Transformação Homogênea

A matriz de transformação homogênea é uma matriz 4×4 , que pode ser dividida em quatro submatrizes, conforme apresentado na equação B.18. A primeira parcela é a matriz $R_{(i+n)(3 \times 3)}^i$ que corresponde a orientação em relação ao sistema de referência, o vetor $d_{(i+n)(3 \times 1)}^i$ representa a parcela referente a translação, ou seja a posição em relação ao sistema de referência, o vetor $\gamma_{(1 \times 3)}$ é a transformação de perspectiva e a variável $\rho_{(1 \times 1)}$ determina o

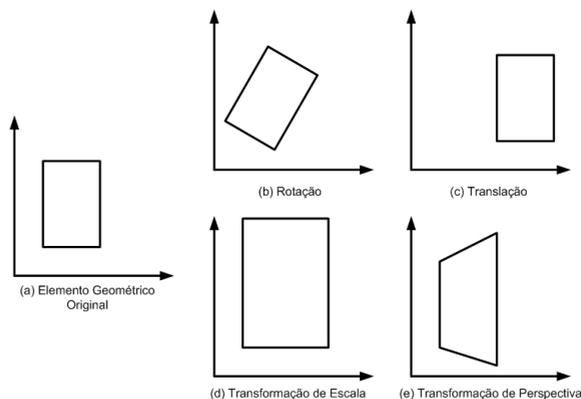


Figura B.8: As transformações associadas a matriz de transformação homogênea.

Fonte: Ballard e Brown (1982).

fator de escala.

$$H_{(i+n)}^i = \begin{bmatrix} R_{(i+n)(3 \times 3)}^i & \vdots & d_{(i+n)(3 \times 1)}^i \\ \dots & \vdots & \dots \\ \gamma_{(1 \times 3)} & \vdots & \rho_{(1 \times 1)} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \quad (\text{B.18})$$

Como ressaltado anteriormente, por conveniência para a cinemática de robôs manipuladores é admitido que a transformação de perspectiva é nula, $\gamma = 0$, e o fator de escala é unitário, $\rho = 1$. Conseqüentemente, a equação B.18 pode ser apresentada da seguinte forma, adotada por diversas literaturas como Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006) e Sciavicco e Siciliano (2000):

$$H_{(i+n)}^i = \begin{bmatrix} R_{(i+n)(3 \times 3)}^i & \vdots & d_{(i+n)(3 \times 1)}^i \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0_{(1 \times 3)} & \vdots & 1_{(1 \times 1)} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \quad (\text{B.19})$$

Utilizando o conceito de coordenadas homogêneas e a matriz de transformação homogênea, a equação B.13 pode ser reescrita como:

$$\hat{p}^{(i+n)} = H_{(i+n)}^i \hat{p}^i \quad (\text{B.20})$$

Onde, $\hat{p}^{(i+n)} = [p_x, p_y, p_z, 1]$ e $\hat{p}^i = [p_u, p_v, p_w, 1]$.

A composição de uma transformação baseada na matriz de transformação homogênea é realizada com a multiplicação das matrizes, que neste caso é uma operação não comutativa. Uma sequência de transformações homogêneas, para Sciavicco e Siciliano (2000), pode ser representada pela composição de seus produtos, como:

$$\hat{p}^{(i+n)} = H_{(i+1)}^i H_{(i+2)}^{(i+1)} \dots H_{(i+n)}^{(i+n-1)} \hat{p}^i \quad (\text{B.21})$$

Esse método para a representação das transformações geométricas é um dos principais métodos para a transformação de corpos rígidos, que fundamenta as principais literaturas relacionadas com a robótica, como Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006), Sciavicco e Siciliano (2000), Tsai (1999) e Craig (1989). Porém, o emprego dessa ferramenta pode ser interpretado de diferentes sentidos, apesar de sua consequência ser unívoca. Em Tsai (1999), a matriz de transformação é aplicada fundamentalmente para mapear um corpo rígido de um sistema de referência para outro. Já em Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006), sua finalidade está na transformação de coordenadas entre sistemas de referência que se diferem em translação e rotação. Porém, o significado do emprego dessa ferramenta é um pouco mais abrangente. Em Sciavicco e Siciliano (2000) e Craig (1989), a matriz de transformação é interpretada de três maneiras distintas:

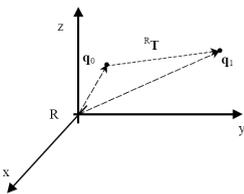


Figura B.9: Interpretação 1: movimentação de um ponto.

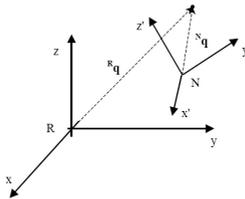


Figura B.10: Interpretação 2: mudança de referencial de observação.

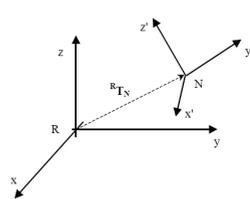


Figura B.11: Interpretação 3: mudança de sistema de coordenadas de referência.

1. Realiza a transformação geométrica de um ponto para outro local geométrico, esta postura impõe um movimento a um ponto dentro do mesmo sistema de referência (Figura B.9).
2. Relaciona as coordenadas de um ponto em dois sistemas de referência diferentes, ou seja, modifica-se o ponto de observação do objeto geométrico (Figura B.10).
3. Transforma um sistema referencial em outro distinto, isto é, realiza a criação de um novo sistema de coordenadas de referência através da translação e da rotação (Figura B.11).

A matriz de transformação homogênea não é ortogonal, $\left(H_{(i+n)}^i\right)^T \neq \left(H_{(i+n)}^i\right)^{-1}$, assim, a transformação inversa não é direta. Entretanto, ao multiplicar a equação da transformação composta (B.13) pelo inverso da matriz de rotação $\left(R_{(i+n)}^i\right)^{-1}$, que é ortogonal $\left(R_{(i+n)}^i\right)^{-1} = \left(R_{(i+n)}^i\right)^T$, facilmente obtêm-se a relação:

$$p^{(i+n)} = \left(R_{(i+n)}^i\right)^T p^i - \left(R_{(i+n)}^i\right)^T d_{(i+n)}^i \quad (\text{B.22})$$

Empregando as coordenadas homogêneas e a matriz de transformação homogênea, a equação B.22 pode ser reescrita como:

$$\hat{p}^{(i+n)} = \left(H_{(i+n)}^i\right)^{-1} \hat{p}^i \quad (\text{B.23})$$

Ao expressar a equação B.23 na forma matricial, obtêm-se:

$$\left(H_{(i+n)}^i\right)^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} \left(R_{(i+n)}^i\right)_{(3 \times 3)}^T & \vdots & -\left(R_{(i+n)}^i\right)_{(3 \times 3)}^T \left(d_{(i+n)}^i\right)_{(3 \times 1)} & \\ \dots & \vdots & \dots & \\ \gamma_{(1 \times 3)} & \vdots & \rho_{(1 \times 1)} & \end{array} \right]_{(4 \times 4)} \quad (\text{B.24})$$

Ou simplesmente:

$$\left(H_{(i+n)}^i\right)^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} \left(R_{(i+n)}^i\right)_{(3 \times 3)}^T & \vdots & -\left(R_{(i+n)}^i\right)_{(3 \times 3)}^T \left(d_{(i+n)}^i\right)_{(3 \times 1)} & \\ \dots & \vdots & \dots & \\ 0_{(1 \times 3)} & \vdots & 1_{(1 \times 1)} & \end{array} \right]_{(4 \times 4)} \quad (\text{B.25})$$

APÊNDICE C - Representação da Orientação

A representação do corpo rígido no espaço por matrizes de transformação homogêneas em relação a um sistema de referência é designado por nove componentes não-independentes. Porém, um corpo rígido possui apenas três graus de liberdade rotacionais, que são aplicados para a representação da orientação espacial do corpo rígido (SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2006). Devido à redundância de variáveis, a representação da orientação de um corpo rígido pode ser realizada de diferentes maneiras (TSAI, 1999). Dessa forma, serão abordadas duas modalidades clássicas de representação da orientação do corpo rígido, através de três variáveis independentes: os ângulos de *Euler* e a representação *Roll-Pitch-Yaw*.

C.1 ÂNGULOS DE EULER

Os ângulos do Euler são um método tradicional para a representação da matriz de rotação, isto é, da orientação do corpo rígido, através de três ângulos independentes. Existem algumas combinações de ângulos, porém o conjunto de ângulos mais conhecido são os ângulos *ZYZ*. Esses ângulos correspondem ao acoplamento ordenado de três transformações, primeiramente ocorre uma rotação em torno do eixo *Z*, após uma rotação em torno de *Y* e novamente é realizada uma rotação em torno de *Z*, conforme apresentado na Figura C.1.

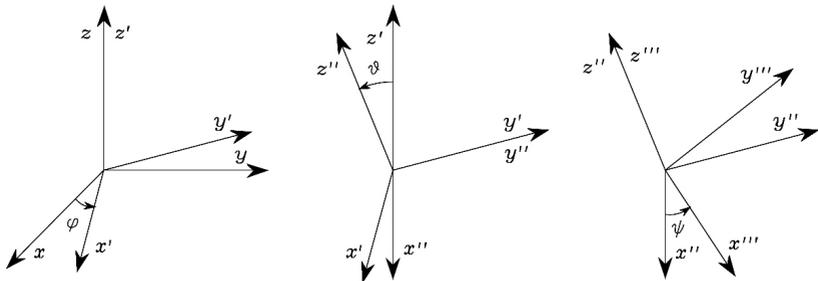


Figura C.1: Representação dos Ângulos de Euler.

Fonte: Sciavicco e Siciliano (2000).

A rotação resultante $R(\phi)_{(i+3)}^i$ é o acoplamento dessas três transformações, conforme:

$$R(\phi)_{(i+3)}^i = R_z(\varphi)_{(i+1)}^i R_y(\vartheta)_{(i+2)}^{(i+1)} R_z(\psi)_{(i+3)}^{(i+2)} \quad (\text{C.1})$$

A equação C.1 pode ser expandida na forma matricial, resultando em:

$$\begin{aligned} R(\phi)_{(i+3)}^i &= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta s_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

onde, $c_\alpha = \cos(\alpha)$ e $s_\beta = \sin(\beta)$.

O procedimento inverso, a obtenção dos ângulos de orientação a partir da matriz de transformação, é comumente realizado com o emprego de função matemática denominada de função arco-tangente de dois argumentos *Atan2*. Essa função retorna o ângulo cuja tangente é o quociente dos dois números repassados como parâmetros. Diferentemente da função tradicional de inversão do cálculo da tangente que retorna ângulos no intervalo de $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a *Atan2* opera com todo o intervalo de variação dos ângulos. Essa função utiliza os sinais dos parâmetros para determinar o quadrante apropriado para o ângulo, dessa forma, se ambos os parâmetros forem nulos a função será indefinida (SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2006).

A obtenção dos ângulos ocorre com a aplicação da função *Atan2* em relação aos coeficientes da matriz de transformação que divididos resultam na tangente. Por exemplo, o ângulo φ , pode ser obtido através do arco-tangente do quociente entre os termos r_{23} e r_{13} , assim:

$$\frac{r_{23}}{r_{13}} = \frac{\sin(\varphi)\sin(\vartheta)}{\cos(\varphi)\sin(\vartheta)} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi) \quad (\text{C.3})$$

Através desse procedimento, podemos definir os ângulos de Euler ZYZ de uma matriz de rotação, desde que $r_{13} \neq 0$, $r_{23} \neq 0$ e que ϑ esteja no intervalo de $(0, \pi)$ para garantir o sinal positivo para o termo $\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}$, como:

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{Atan2}(r_{23}, r_{13}) \\ \vartheta &= \text{Atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}) \\ \psi &= \text{Atan2}(r_{32}, -r_{31}) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

É possível também a delimitação de outra solução, desde que ϑ esteja no intervalo de $(-\pi, 0)$, como:

$$\varphi = \text{Atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \quad (\text{C.5})$$

C.2 ÂNGULOS ROLL-PITCH-YAW

Outra representação muito empregada para a orientação do corpo rígido no espaço é o conjunto de ângulos denominado de Roll-Pitch-Yaw. Esses ângulos representam a rotação composta ZYX , apresentada na Figura C.2, e possuem essa denominação devido a representarem os movimentos típicos das aeronaves. Neste caso, os ângulos *Roll* ($R_z(\varphi)$), *Pitch* ($R_y(\vartheta)$) e *Yaw* ($R_x(\psi)$) representam as rotações do centro de massa da aeronave (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000).

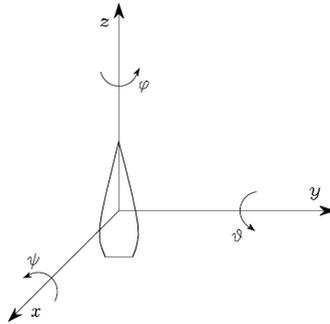


Figura C.2: Representação Roll-Pitch-Yaw.

Fonte: Sciavicco e Siciliano (2000).

Assim, a transformação resultante do acoplamento das rotações é definida por:

$$R(\phi)_{(i+3)}^i = R_z(\varphi)_{(i+1)}^i R_y(\vartheta)_{(i+2)}^{(i+1)} R_x(\psi)_{(i+3)}^{(i+2)} \quad (\text{C.6})$$

A equação C.6 pode ser expandida na forma matricial, resultando em:

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta & c_\varphi s_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\vartheta & s_\varphi s_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\vartheta & c_\vartheta s_\psi & c_\vartheta c_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

O procedimento inverso para encontrar os ângulos Roll-Pitch-Yaw de uma transformação composta, apresentada sobre a forma de uma matriz de rotação, é semelhante ao aplicado na equação C.3, com ϑ em um intervalo de

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $c_{\vartheta} \neq 0$, resulta em:

$$\begin{aligned}\varphi &= \text{Atan2}(r_{21}, r_{11}) \\ \vartheta &= \text{Atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi &= \text{Atan2}(r_{32}, r_{33})\end{aligned}\tag{C.8}$$

Pode-se também determinar uma solução alternativa, desde que ϑ esteja em um intervalo de $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ e $c_{\vartheta} \neq 0$, resulta em:

$$\begin{aligned}\varphi &= \text{Atan2}(-r_{21}, -r_{11}) \\ \vartheta &= \text{Atan2}(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \psi &= \text{Atan2}(-r_{32}, -r_{33})\end{aligned}\tag{C.9}$$

APÊNDICE D - Convenção de Denavit-Hartenberg

A convenção de Denavit-Hartenberg, apresentada em Denavit e Hartenberg (1955), definiu uma linguagem simbólica que permite a descrição completa das propriedades cinemáticas do mecanismo. Os mesmos são definidos como uma sucessão de acoplamentos entre corpos rígidos, constituindo uma cadeia cinemática. A contribuição principal deste estudo, é o desenvolvimento de uma notação simbólica para a representação completa de um par de mecanismos, baseada unicamente em quatro parâmetros, conforme apresentada nas Figuras D.1 e D.2.

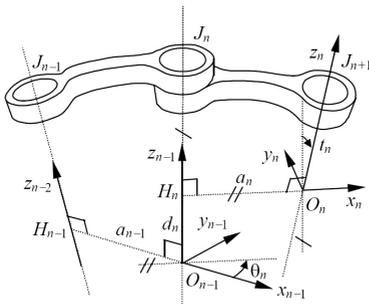


Figura D.1: Notação de Denavit-Hartenberg aplicada à uma junta rotativa.

Fonte: Carrara (2006).

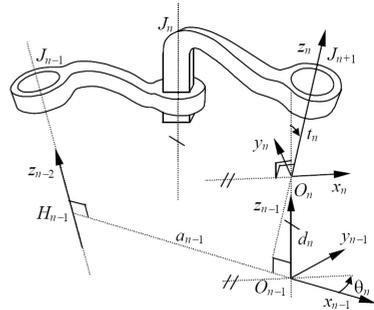


Figura D.2: Notação de Denavit-Hartenberg aplicada à uma junta prismática.

Fonte: Carrara (2006).

A metodologia apresentada, baseia-se em quatro parâmetros para a descrição do par cinemático, porém esses são determinados após a atribuição de sistemas de coordenadas individuais para cada junta do manipulador. A disposição desses sistemas é realizada através de uma metodologia sistematizada, conforme Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006) e Sciavicco e Siciliano (2000), apresentada ordenadamente a seguir.

1. *Identificação dos componentes do manipulador*: numerar as juntas do manipulador $\{1 \dots n\}$, e numerar os elos do manipulador $\{0 \dots n - 1\}$.
2. *Atribuição dos sistemas de coordenadas*:
 - (a) Eixo Z_n : é designado sobre o eixo da junta $n + 1$;
 - (b) Origem O_n : encontra-se na interseção entre os eixos Z_n e Z_{n-1} , ou na interseção da normal comum entre os eixos Z_{n-1} e Z_n e o eixo Z_n ;
 - (c) Eixo X_n : ficará sobre a normal comum entre os eixos Z_{n-1} e Z_n , na direção $J_n \rightarrow J_{n+1}$;
 - (d) Eixo Y_n : é designado completando o perpendicularismo com os eixos Z_n e X_n , isto é, através da regra da mão direita.

Essa metodologia para a atribuição dos sistemas de coordenadas promove uma solução não única para os seguintes casos, segundo Sciavicco e Siciliano (2000):

- *Atribuição do sistema de coordenadas da base*: apenas o eixo Z_0 é especificado, a origem O_0 e o eixo X_0 são arbitrários;
- *Designação do sistema de coordenadas do efetuador*: apenas o eixo X_n é especificado, enquanto o eixo Z_n é arbitrário;
- *Dois eixos consecutivos são paralelos*: a normal comum entre eles não é unívoca;
- *Dois eixos consecutivos se interceptam*: a direção do eixo X_i é arbitrária;
- *Junta prismática*: o sentido do eixo Z_{i-1} é arbitrário.

De forma a diminuir as arbitrariedades na atribuição dos sistemas de coordenadas nas situações previamente descritas em Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006) são definidas outras regras para esse procedimento, como:

- *Quando os eixos Z_{i-1} e Z_i são paralelos*: a designação do eixo X_i é realizada no sentido O_i e Z_{i-1} , sob a normal comum entre esses eixos. O ponto O_i é determinado pela interseção da normal comum entre O_{i-1} e X_i , e o eixo Z_i .

- *Quando os eixos Z_{i-1} e Z_i interseção-se:* o eixo X_i é designado pela normal ao plano formado pelos eixos Z_i e Z_{i-1} , porém o sentido continua sendo arbitrário. E a origem O_i é determinada pela interseção dos mesmos eixos.
- *Sistema de coordenadas do efetuador:* a origem é comumente designada simetricamente entre os dedos da garra, ou na extremidade da ferramenta. Os eixos coordenados são dispostos conforme apresentado na Figura D.3. Esses recebem uma nova terminologia, de acordo com sua funcionalidade. O eixo Z_n é denominado de a , pois representa a direção de aproximação do efetuador no objeto ou ambiente. Similarmente, o eixo Y_n simboliza o sentido de deslizamento, ou seja, o eixo de abertura e fechamento da garra. O eixo X_n é chamado de normal, por ser simplesmente o eixo formado pela normal ao plano formado pelos eixos a e s .

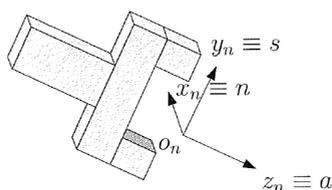


Figura D.3: Sistema de referência do efetuador.

Fonte: Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006).

Como dito anteriormente, a convenção de Denavit-Hartenberg descreve de maneira sistematizada, através de quatro parâmetros, um par de mecanismos. Esses parâmetros são determinados através dos sistemas de coordenadas atribuídos ao mecanismo segundo as regras previamente discutidas. Dessa forma, os parâmetros de Denavit-Hartenberg, apresentados na Figura D.4, são designados como:

- *Ângulo de junta (θ_i):* é o ângulo de rotação em torno de Z_{i-1} , medido de X_{i-1} à X_i . Se a junta i for rotativa, θ_i é igual à variável de junta.
- *Deslocamento do elo (d_i):* é determinado pela distância da origem O_{i-1} à interseção dos eixos Z_{i-1} e X_i , medido no eixo Z_{i-1} . Caso, a junta i seja prismática, d_i é igual à variável de junta.
- *Comprimento do elo (a_i):* é designado pela distância da interseção de Z_{i-1} e X_i , à origem O_i , medido no eixo X_i .

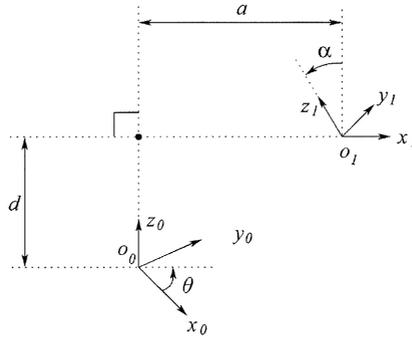


Figura D.4: Parâmetros de Denavit-Hartenberg.

Fonte: Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006).

- *Ângulo de torção do elo* (α_i): corresponde ao ângulo de rotação em torno de X_i , medido de Z_{i-1} à Z_i .

Os parâmetros relacionados as rotações, ou seja, o ângulo de junta (θ_i) e o ângulo de torção do elo (α_i), tem seu sentido positivo determinado, conforme Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006), pelo giro no sentido da junta $i - 1$ à junta i . Essa definição pode ser visualizada na Figura D.5.

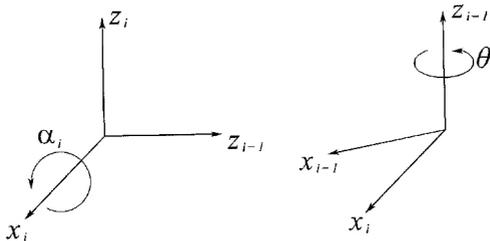


Figura D.5: Rotações de Denavit-Hartenberg.

Fonte: Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006).

A transformação entre os sistemas de coordenadas do mecanismo, é definida através dos parâmetros de Denavit-Hartenberg, conforme apresentada na equação D.1.

$$A_n^{n-1} = R_z(\theta_i)T_z(d_i)T_x(a_i)R_x(\alpha_i) \quad (D.1)$$

APÊNDICE E - Sistemas de Helicóides

Uma alternativa a convenção de Denavit-Hartenberg é o emprego do método dos Helicóides sucessivos, apresentado em Tsai (1999). Esta metodologia baseia-se na utilização de um elemento geométrico diferenciado, o helicóide. O helicóide é um elemento geométrico composto por uma reta direcionada, denominada de eixo, e por um parâmetro escalar com unidades de comprimento h , isto é, o passo (CAMPOS, 2004). Este componente representa a composição dos movimentos rotacional e translacional simultâneos, resultando em um movimento helicoidal, como demonstrado na Figura E.1.

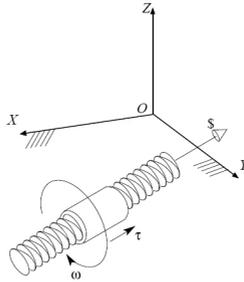


Figura E.1: Helicóide.

Fonte: Campos (2004).

Um helicóide pode ser descrito por sua forma generalizada, ou seja, considerado seu passo, ou a frequência de suas revoluções, conforme:

$$\hat{\$} = \begin{bmatrix} \hat{s} \\ s_0 \times \hat{s} + hs \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

Onde, \hat{s} é a direção do eixo do helicóide, s_0 é a posição do helicóide em relação a um sistema de referência e hs é o passo do helicóide.

A representação de uma rotação por meio de helicóides ocorre quando seu passo é nulo, $h = 0$, ou seja, suas revoluções estão sobrepostas:

$$\hat{\$}_R = \begin{bmatrix} \hat{s} \\ s_0 \times \hat{s} \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Já a representação de translações é uma decorrência de um passo infinito, $h = \infty$, ou seja, o efeito da revolução torna-se imperceptível, caracterizando unicamente uma translação como:

$$\hat{\$}_T = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{s} \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

Analisando inicialmente o caso da rotação pura por helicóides, tem-se que esta transformação se baseia na rotação de um elemento geométrico em torno do eixo do helicóide. Assim, exemplificando, um ponto P_1 sofre uma rotação de ângulo θ em torno de um eixo s , resultando em um novo ponto P_2 , conforme apresentado na Figura E.2. A posição inicial do ponto P_1 , de um corpo rígido, é descrita através do vetor $r_1 = \overline{OP_1}$ e a posição final do mesmo ponto é representada pelo vetor $r_2 = \overline{OP_2}$.

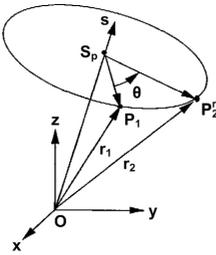


Figura E.2: Diagrama vetorial do deslocamento esférico.

Fonte: Tsai (1999).

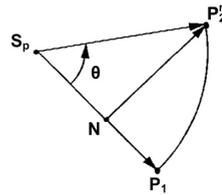


Figura E.3: Plano normal ao eixo de rotação.

Fonte: Tsai (1999).

Essa transformação fornece algumas relações geométricas, como:

$$\overline{S_p P_1} = r_1 - (r_1^T s) s \quad (\text{E.4})$$

$$\overline{S_p P_2} = r_2 - (r_2^T s) s \quad (\text{E.5})$$

Na Figura E.5 é apresentado um plano normal ao eixo de rotação s que contém os pontos P_1 e P_2 , onde o ponto de intersecção entre este plano e o eixo de rotação é denominado de S_p . Dessa forma, aplicando algumas

relações, como: $(|S_p P_1| = |S_p P_2^r|)$ e $(s \times \overline{S_p P_1} = s \times r_1)$, obtém-se:

$$\overline{S_p N} = \overline{S_p P_1} \cos(\theta) \quad (\text{E.6})$$

$$\overline{N P_2^r} = s \times r_1 \text{sen}(\theta) \quad (\text{E.7})$$

Assim, derivando a relação entre r_2 e r_1 , o vetor $\overline{S_p P_2^r}$ pode ser descrito com a soma de dois vetores, como expresso na equação E.8.

$$\overline{S_p P_2^r} = s \overline{S_p N} + \overline{N P_2^r} \quad (\text{E.8})$$

Dessa forma, a substituição da equação E.4 na equação E.6, resulta em:

$$\overline{S_p N} = [r_1 - (r_1^T s)s] \cos(\theta) \quad (\text{E.9})$$

Substituindo ordenadamente as equações E.5, E.9 e E.7, na equação E.8, obtém-se a relação:

$$(r_2 - (r_2^T s)s) = ([r_1 - (r_1^T s)s] \cos(\theta)) + (s \times r_1 \text{sen}(\theta)) \quad (\text{E.10})$$

Ainda, a substituição da igualdade $(r_1^T s = r_2^T s)$ na equação E.10 e reorganização de seus termos, resulta na *fórmula de Rodrigues* para o deslocamento esférico do corpo rígido (TSAI, 1999).

$$r_2 = r_1 \cos(\theta) + s \times r_1 \text{sen}(\theta) + s(r_1^T s)(1 - \cos(\theta)) \quad (\text{E.11})$$

A equação de Rodrigues pode ser escrita na forma matricial, resultando em uma equação análoga à equação B.5, definida como:

$$r_2 = R r_1 \quad (\text{E.12})$$

Onde, a matriz R , discutida detalhadamente em Tsai (1999), é definida como:

$$R = \begin{bmatrix} (s_x^2 - 1)(1 - \cos(\theta)) + 1 & s_x s_y (1 - \cos(\theta)) - s_z \text{sen}(\theta) \\ s_y s_x (1 - \cos(\theta)) - s_x \text{sen}(\theta) & (s_y^2 - 1)(1 - \cos(\theta)) + 1 \\ s_z s_x (1 - \cos(\theta)) - s_y \text{sen}(\theta) & s_z s_y (1 - \cos(\theta)) - s_x \text{sen}(\theta) \\ s_x s_z (1 - \cos(\theta)) - s_y \text{sen}(\theta) \\ s_y s_z (1 - \cos(\theta)) - s_x \text{sen}(\theta) \\ (s_z^2 - 1)(1 - \cos(\theta)) + 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.13})$$

A equação E.13 é denominada de representação da orientação do corpo rígido através dos eixos do helicóide. Esta representação está baseada em qua-

tro parâmetros: três $[s_x, s_y, s_z]$ associados a direção do eixo do helicóide e um (θ) relacionado ao ângulo de rotação. Assim, dada uma matriz de rotação pode-se denominar os parâmetros de orientação, onde, o ângulo de rotação é obtido com a soma dos elementos da diagonal principal da matriz, como:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2} \right) \quad (\text{E.14})$$

A direção do eixo do helicóide (s), é determinada pela diferença dos pares de elementos da diagonal principal e diagonal oposta, como:

$$s_x = \left(\frac{a_{32} - a_{23}}{2\text{sen}(\theta)} \right), \quad s_y = \left(\frac{a_{13} - a_{31}}{2\text{sen}(\theta)} \right), \quad s_z = \left(\frac{a_{21} - a_{12}}{2\text{sen}(\theta)} \right) \quad (\text{E.15})$$

Ainda deve ser ressaltado que nas equações E.14 e E.15 são possíveis duas soluções, uma positiva e outra negativa. Porém, essas soluções representam o mesmo helicóide, pois, a rotação de $-\theta$ em torno de $-s$ é equivalente a rotação de θ no eixo s .

O helicóide representa uma transformação composta, i.e., rotação seguida por translação. Consequentemente, a metodologia empregada para a exemplificação da transformação de rotação, apresentada na Figura E.2, pode ser generalizada para incluir a translação sobre o eixo do helicóide, resultando na Figura E.4. Além desta modificação, neste caso, a origem do sistema de referência do helicóide O não é sobreposta ao ponto inicial do vetor de helicóide S_0 .

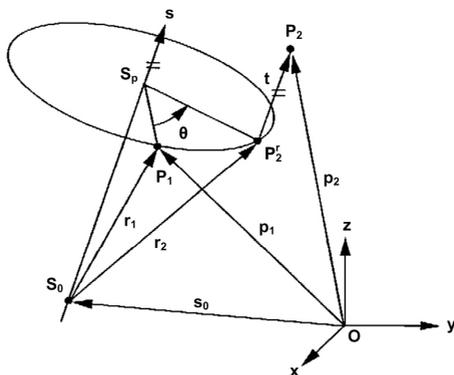


Figura E.4: Diagrama vetorial do deslocamento esférico generalizado.
Fonte: Tsai (1999).

Na Figura E.4, é apresentado o diagrama vetorial do deslocamento esférico generalizado, onde podem ser determinadas algumas grandezas. Assim, $s = [s_x, s_y, s_z]^T$ é o vetor unitário que representa a direção do eixo do helicóide e $s_0 = [s_{0x}, s_{0y}, s_{0z}]^T$ é o vetor posição da localização do eixo do helicóide. A rotação θ e a translação t são denominados de parâmetros de helicóide. O deslocamento do corpo rígido é completamente definido pelos parâmetros e o eixo do helicóide (TSAI, 1999).

Como o eixo do helicóide não passa pela origem do sistema de referência, pode-se observar que neste caso:

$$r_1 = p_1 - s_0 \quad (\text{E.16})$$

$$r_2 = p_2 - s_0 - ts \quad (\text{E.17})$$

Substituindo as equações E.16 e E.17 na fórmula de Rodrigues (equação E.11), obtém-se:

$$p_2 = s_0 + ts + (p_1 - s_0)\cos(\theta) + s \times (p_1 - s_0)\text{sen}(\theta) + [(p_1 - s_0)^T s]s(1 - \cos(\theta)) \quad (\text{E.18})$$

A equação E.18 é denominada de *fórmula de Rodrigues* para o deslocamento esférico generalizado do corpo rígido (TSAI, 1999). Esta relação pode ser escrita na forma matricial, tornando-se semelhante à equação B.13:

$$p_2 = Rp_1 + q_2 \quad (\text{E.19})$$

Os elementos da matriz de rotação R_1^2 são definidos na equação E.13, e a componente translacional $q = [q_x, q_y, q_z]^T$ é dada por:

$$\begin{aligned} q_x &= ts_x - s_{0x}(a_{11} - 1) - s_{0y}a_{12} - s_{0z}a_{13} \\ q_y &= ts_y - s_{0x}a_{21} - s_{0y}(a_{22} - 1) - s_{0z}a_{23} \\ q_z &= ts_z - s_{0x}a_{31} - s_{0y}a_{32} - s_{0z}(a_{33} - 1) \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

A equação E.19, pode ser escrita como uma transformação homogênea, análoga a equação B.20, conforme:

$$\hat{p}_2 = H\hat{p}_1 \quad (\text{E.21})$$

A matriz de transformação homogênea H é definida como:

$$H = H(\theta, q) = \begin{bmatrix} R_{(3 \times 3)} & \vdots & q_{(3 \times 1)} \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots \\ 0_{(1 \times 3)} & \vdots & 1_{(1 \times 1)} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \quad (\text{E.22})$$

APÊNDICE F - Cinemática Inversa Diferencial

A cinemática inversa diferencial baseia-se na inversão da transformação das velocidades e acelerações do espaço de juntas para o espaço operacional. Isto ocorre através de inversão do mapeamento realizado pela cinemática direta diferencial. O diagrama de blocos desta operação é apresentado na Figura F.1, resultando simplesmente em:

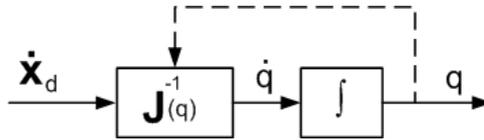


Figura F.1: Algoritmo Jacobiano Inverso.

Fonte: Sciavicco e Siciliano (2000).

$$\dot{q} = J^{-1}(q)v_e \quad (\text{F.1})$$

O vetor de velocidades do efetuador v_e pode ser substituído pelo vetor de variáveis do espaço operacional \dot{x}_d , ou simplesmente, pelo perfil de velocidades desejadas para o efetuador, resultando em:

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{x}_d \quad (\text{F.2})$$

De forma a exemplificar essa metodologia para a resolução da cinemática inversa, é aplicada uma trajetória circular no espaço operacional à um manipulador planar 3R. O que resulta nos perfis de posição, orientação e suas derivadas temporais que são apresentados na Figura F.2. Após, é aplicada a metodologia para a transformação de toda a trajetória do espaço operacional para o espaço de juntas, resultando na Figura F.3. Porém, esta é uma abordagem em malha aberta, isto é, não existe nenhuma forma de correção dos erros.

O ponto fundamental da cinemática diferencial está na manipulação das velocidades, que possuem um mapeamento linear entre os espaços das juntas e operacional. Como consequência, existe a necessidade da integração da solução para a obtenção das variáveis de juntas. A aplicação de métodos numéricos de integração é na verdade uma decomposição do cálculo analítico

em aproximações numéricas, o que aproxima a solução, agregando erros a resposta.

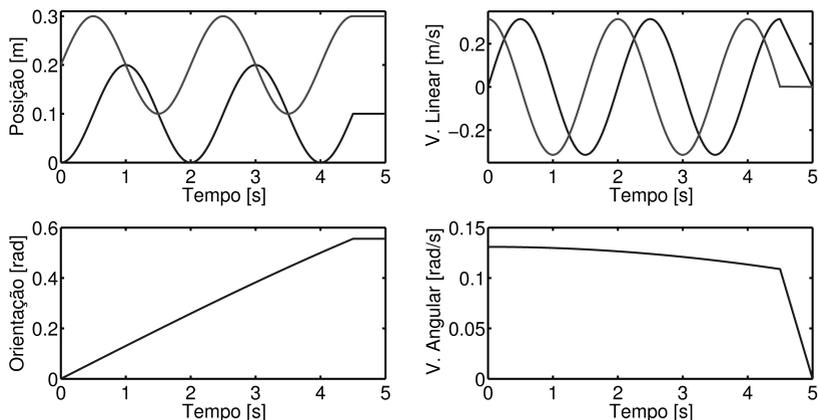


Figura F.2: Trajetória aplicada ao manipulador.

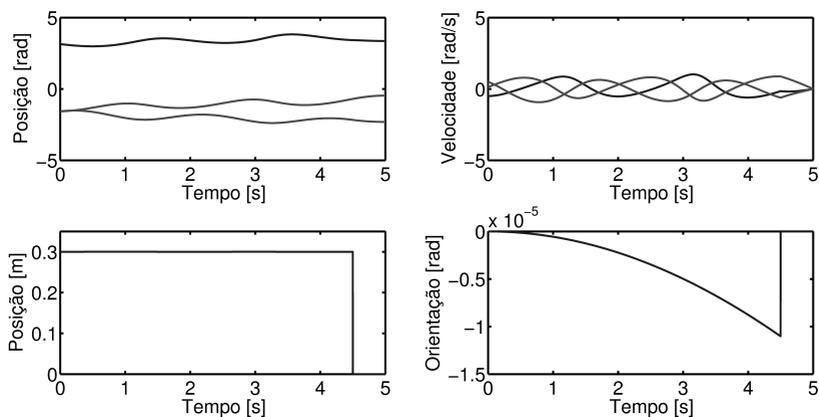


Figura F.3: Resolução da cinemática inversa diferencial em malha aberta.

Aliado a isso, no exemplo a postura inicial se encontra fora dos perfis desejados e a metodologia não corrige essa inconsistência, assim, a trajetória é executada desprezando essa alteração. A Figura F.4 apresenta um comparativo entre a trajetória desejada e a trajetória obtida. Essa abordagem realiza uma divergência entre os valores desejados no espaço operacional e os obtidos no espaço das juntas, pois estabelece uma conversão direta, sem

correções. Quando aplicada à uma trajetória, promove um acúmulo dos erros deteriorando a solução. De forma a evitar esses efeitos, será discutida uma abordagem em malha fechada para a determinação da cinemática inversa diferencial.

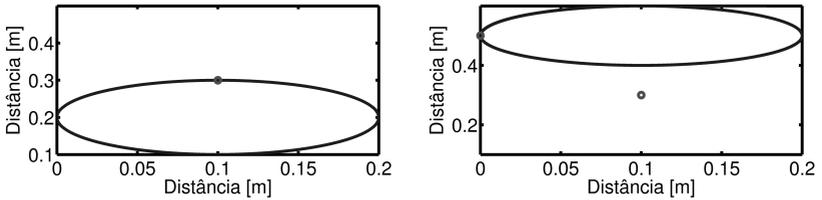


Figura F.4: Trajetória realizada pelo manipulador para a resolução da cinemática inversa diferencial em malha aberta.

F.0.1 Jacobiano Inverso Realimentado

Uma consequência da metodologia anterior, foi o surgimento de um procedimento iterativo corretivo, ou seja, a determinação das variáveis de junta através de uma metodologia que realiza a convergência da solução até uma determinada margem de tolerância. Existe a necessidade de realimentação do procedimento através do monitoramento de alguma grandeza, que nesse caso é o erro do espaço operacional, definido como:

$$\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x} \quad (\text{F.3})$$

onde,

- \dot{x}_d : corresponde ao vetor de velocidades operacionais desejadas para o efetuador;
- \dot{x} : corresponde ao vetor de velocidades operacionais obtidas para o efetuador.

Conforme Sciavicco e Siciliano (2000), a manipulação de variáveis do espaço operacional leva ao emprego do Jacobiano Analítico. Uma forma alternativa para a obtenção da matriz Jacobiana, baseada fundamentalmente na representação mínima. Dessa forma, o procedimento substitui a aplicação do Jacobiano geométrico J pelo Jacobiano Analítico J_A . A cinemática diferencial direta, pode ser reescrita como:

$$e = \dot{x}_d - J_A(q)\dot{q} \quad (\text{F.4})$$

onde,

J_A : é o Jacobiano analítico;

q : é o vetor de variáveis de junta.

A metodologia realimentada baseada na inversão do Jacobiano, emprega a determinação do erro, definido na equação F.4, para a convergência da solução para uma margem de erro desprezível. A Figura F.5 apresenta o diagrama de blocos do procedimento, que é definido como:

$$\dot{q} = J_A^{-1}(q)(\dot{x}_d + Ke) \quad (\text{F.5})$$

onde,

K : é a matriz de ganhos;

e : é o erro definido na equação F.4.

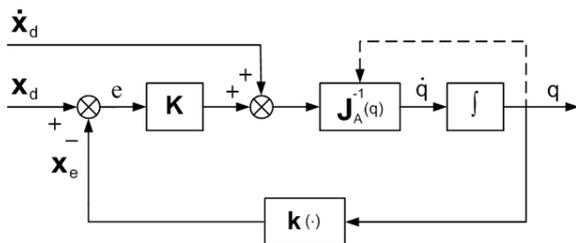


Figura F.5: Algoritmo Jacobiano Inverso Realimentado.

Fonte: Sciavicco e Siciliano (2000).

Ao aplicar o mesmo exemplo, executado anteriormente com a metodologia não realimentada, obtém-se os perfis de posição e velocidades apresentado na Figura F.6. Por ser um procedimento iterativo corretivo, os erros agregados dos métodos de aproximação da integração e da postura inicial do efetuador são corrigidos, promovendo uma solução melhor que a do método anterior. Isso pode ser comprovado na Figura F.7, que apresenta a trajetória desejada e a obtida com essa metodologia.

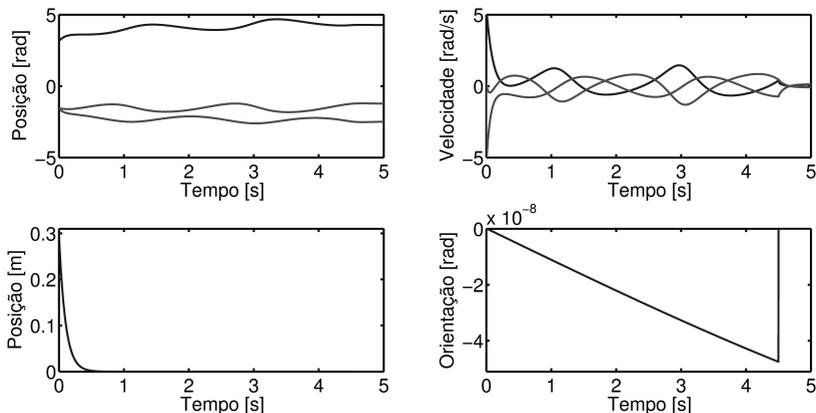


Figura F.6: Resolução da cinemática inversa diferencial realimentada.

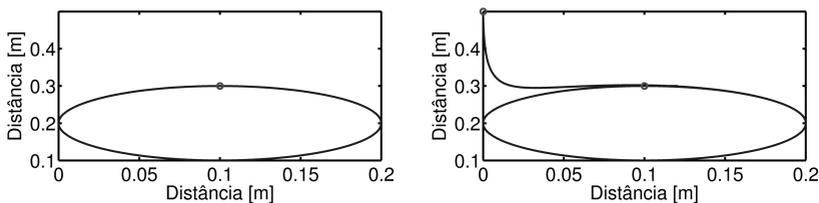


Figura F.7: Trajetória realizada pelo manipulador para a resolução da cinemática inversa diferencial realimentada.

F.0.2 Jacobiano Transposto

Uma metodologia alternativa é a do Jacobiano Transposto que não se baseia na inversão da matriz jacobiana mas na transposição da mesma, conforme o diagrama apresentado na Figura F.8, é definido como:

$$\dot{q} = J_A^T(q)Ke \quad (\text{F.6})$$

A aplicação do Jacobiano transposto para a determinação cinemática do estudo de caso resulta na execução de trajetória apresentada na Figura F.9. O mapeamento cinemático por esse método é ilustrado na Figura F.10.

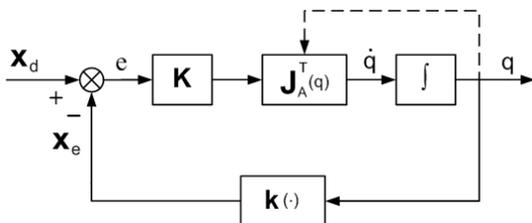


Figura F.8: Algoritmo Jacobiano Transposto.

Fonte: Sciavicco e Siciliano (2000).

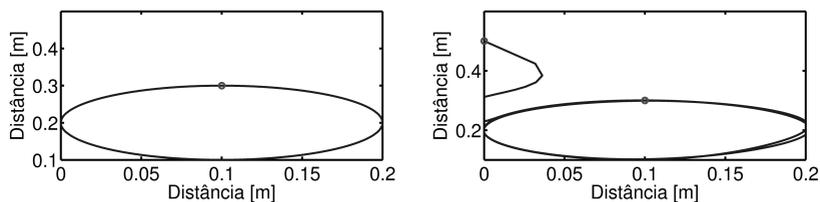


Figura F.9: Trajetória realizada pelo manipulador para a resolução da cinemática inversa diferencial através do Jacobiano transposto.

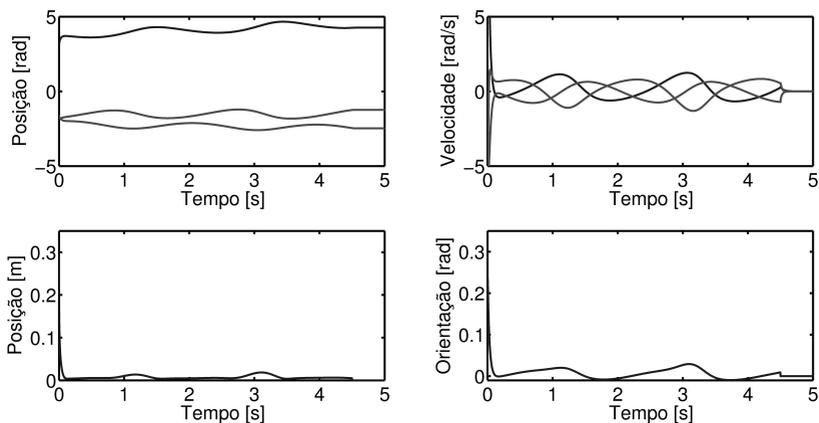


Figura F.10: Resolução da cinemática inversa diferencial através do Jacobiano transposto.

Essas metodologias se baseiam na aplicação em sistemas cuja a mobilidade seja inferior a dimensão do espaço de trabalho, ou seja, em sistemas que não sejam redundantes. Pois, ambas fundamentam-se na inversão da ma-

triz Jacobiana, que é uma operação de inversão matricial e só pode ser aplicada à matrizes quadradas de posto completo. A aplicação desta metodologia em sistemas redundantes é discutida a seguir.

F.0.3 Pseudo-Inversão do Jacobiano

A inversão matricial é possível apenas quando a matriz é quadrada. Como a matriz Jacobiana possui variação de acordo com o número de juntas do manipulador, nem sempre é possível a inversão. Dessa maneira, existe uma aproximação para a operação de inversão matricial, denominada pseudo-inversa, que permite a inversão de matrizes não quadradas. O procedimento de pseudo-inversão do Jacobiano é definido como:

$$J^\dagger = J^T (JJ^T)^{-1} \quad (\text{F.7})$$

A cinemática inversa diferencial realimentada, definida pela equação F.5, pode ser rescrita de acordo com o procedimento da pseudo-inversão, como:

$$\dot{q} = J_A^\dagger(q)(\dot{x}_d + Ke) \quad (\text{F.8})$$

onde,

J_A^\dagger : é a pseudo-inversa do Jacobiano analítico.

Porém, como discutido anteriormente, em sistemas redundantes a solução para a cinemática inversa não é unívoca. Nesse caso, é necessário atribuir um objetivo secundário para diminuir o conjunto de soluções. A equação F.8 pode ser expandida para incluir esse novo requisito, esta operação é abordada mais aprofundadamente em Sciavicco e Siciliano (2000), resultando em:

$$\dot{q} = J_A^\dagger(q)(\dot{x}_d + Ke) + (I_n - J_A^\dagger(q)J_A(q))\dot{q}_0 \quad (\text{F.9})$$

onde,

I_n : é a matriz identidade de ordem n ;

\dot{q}_0 : é o objetivo secundário.

O segundo termo adicionado a equação F.9 é comumente denominado de solução homogênea, e tem por objetivo a atribuição de um confinamento especial, denominado pelo termo \dot{q}_0 . Um caso especial desta equação acontece quando $\dot{x}_d = 0$, nesta situação é possível a geração de movimentos internos, descritos pelos termos $(I_n - J_A^\dagger(q)J_A(q))\dot{q}_0$, que exploram a redundância do sistema, ou seja, reconfiguram a postura do efetuador sem alterar a posição e a orientação do efetuador (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000). Geralmente o

termo de definição dos objetivos secundários é definido como:

$$\dot{q}_0 = k_0 \left(\frac{\partial w(q)}{\partial q} \right)^T \quad (\text{F.10})$$

onde,

k_0 : é uma matriz de prioridade (pesos) do objetivo secundário;

$w(q)$: é a função objetivo secundário.

O confinamento adicional imposto pelo objetivo secundário pode estar relacionado com uma série de fatores. Um exemplo clássico está em empregar como regra para o objetivo secundário a medição do *índice de manipulabilidade* das juntas. O conceito desta restrição está no evitamento das configurações singulares pela maximização deste índice, isto é, priorizando situações $\det J_A(q) \neq 0$. Esta restrição é definida como:

$$w(q) = \sqrt{\det(J_A(q)J_A^T(q))} \quad (\text{F.11})$$

De forma a validar a restrição, foi aplicada uma trajetória circular à um manipulador 3R serial planar, como nos exemplos anteriores e apresentada na Figura F.2. Ao aplicar a função objetivo secundário obtém-se a resposta apresentada na Figura F.11, onde, pode ser visualizada a diferença da imposição desta regra, quando comparada a variação temporal do índice de manipulabilidade da execução da trajetória sem restrição (Figura F.11, linhas tracejadas) com a execução da trajetória com a restrição (Figura F.11, linhas contínuas).

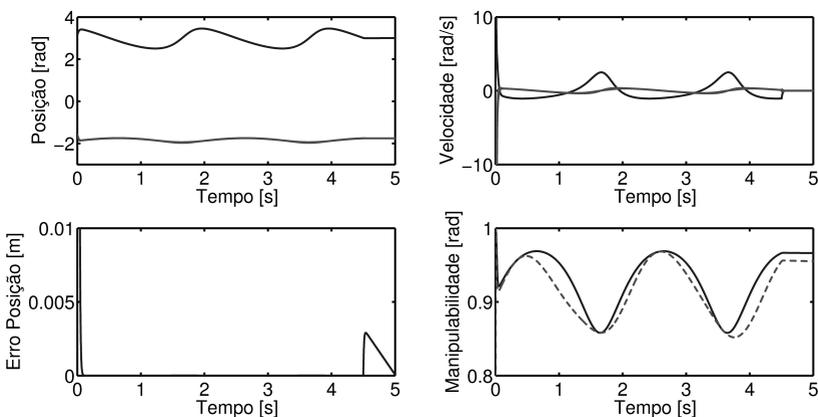


Figura F.11: Simulação da função objetivo-secundário do índice de manipulabilidade.

É possível comprovar a eficácia da execução da trajetória, com a comparação entre a trajetória desejada e executada, apresentada na Figura F.12.

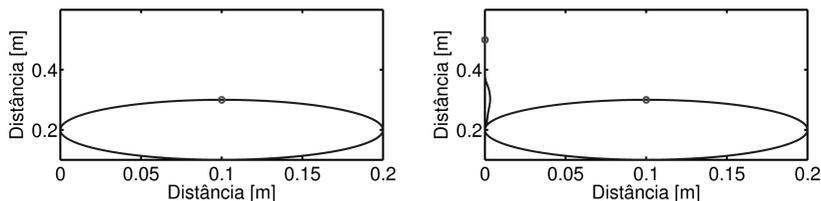


Figura F.12: Trajetória realizada pelo manipulador com a função objetivo secundário do índice de manipulabilidade.

Outra possibilidade para a imposição do objetivo secundário está no evitamento de configurações de singularidade pela maximização da *distância do limite mecânico das juntas*, priorizando configurações onde as juntas permaneçam mais próximas do seu centro de movimento, sendo definida como:

$$w(q) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{iM} - q_{im}} \right)^2 \quad (\text{F.12})$$

onde,

- q_i : é a variável da junta i ;
- \bar{q}_i : é o valor médio do deslocamento (linear ou angular) da junta i ;
- q_{iM} : é limite máximo do deslocamento da junta i ;
- q_{im} : é limite mínimo do deslocamento da junta i ;
- n : é o número de juntas do manipulador.

De forma semelhante à restrição anterior, esta é validada com a realização de uma trajetória circular resultando na resposta apresentada na Figura F.13. Na qual fica explícito, a imposição da restrição, pois o limite de movimentação das juntas é reduzido (representado pelas linhas tracejadas) e a trajetória fica o mantém-se distante dos limites, mantendo o mesmo perfil de erro de posição.

O comparativo entre a trajetória desejada e a trajetória obtida com a função objetivo secundário da distância do limite mecânico das juntas é apresentada na Figura F.14. Pode ser observado que alternando a restrição secundária, a trajetória continua sendo executada igualmente à anterior, isto é, a redundância cinemática é explorada.

Existe outra abordagem clássica para a função objetivo secundário que é relacionada com a maximização da *distância até um obstáculo*. Nessa caso,

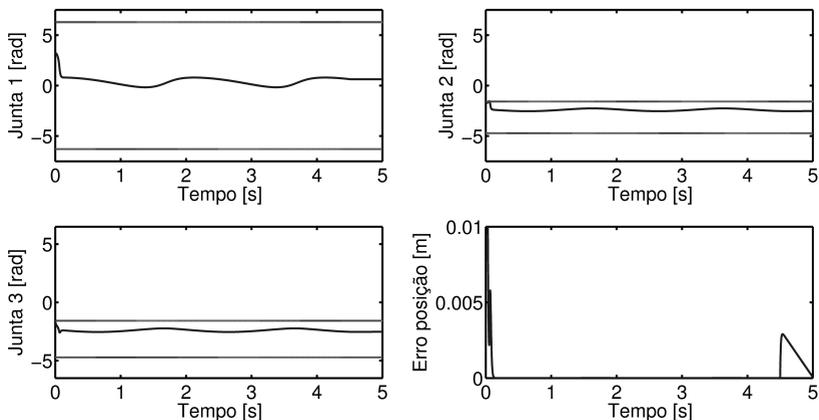


Figura F.13: Simulação da função objetivo secundário da distância do limite mecânico das juntas.

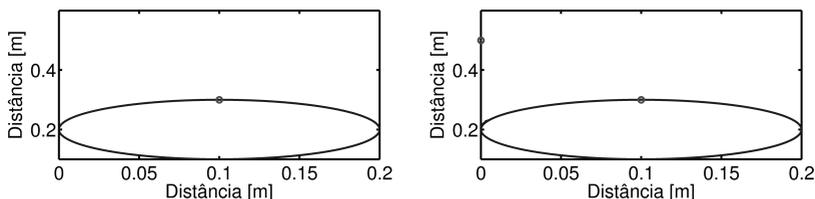


Figura F.14: Trajetória realizada pelo manipulador com a função objetivo secundário da distância do limite mecânico das juntas.

ocorre uma maximização da distância entre um ponto da estrutura do manipulador e um ponto do obstáculo. Esta restrição pode ser empregada para o evitamento da colisão entre o manipulador e um objeto em seu espaço de trabalho, sendo definida como:

$$w(q) = \min_{p,o} \|p(q) - o\| \quad (\text{F.13})$$

onde,

o : é o vetor posição do ponto de monitoramento do obstáculo;

$p(q)$: é o vetor posição do ponto de monitoramento da estrutura do manipulador.

Esta restrição é validada semelhante às outras, porém é colocado um obstáculo no centro da trajetória circular, a saída é apresentada na Figura F.15. Onde é possível visualizar a diferença da trajetória realizada sem a imposição

da restrição (linhas tracejadas) e com a imposição da restrição (linhas contínuas), demonstrando a maximização da distância entre o ponto de referência da estrutura e o obstáculo.

Igualmente à outras funções objetivo secundário a trajetória executada com essa restrição continua sendo idêntica a trajetória desejada, como pode ser visualizado na Figura F.16.

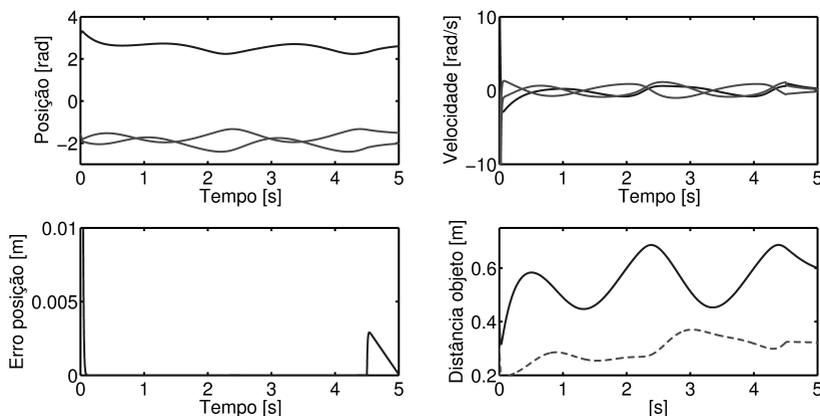


Figura F.15: Simulação da função objetivo secundário da distância para um obstáculo.

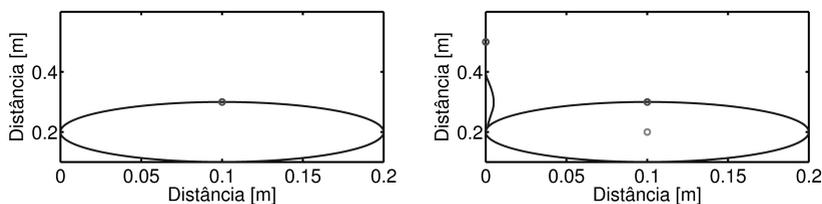


Figura F.16: Trajetória realizada pelo manipulador com a função objetivo secundário da distância para um obstáculo.

APÊNDICE G - Estratégias de Controle Clássicas

Na execução de trajetórias com manipuladores, é comum a ocorrência de perturbações externas e internas ao sistemas que causam erros de execução. Dessa forma, torna-se necessário o emprego de procedimentos interativos corretivos para a execução das tarefas. Do ponto de vista de controle, essa modalidade de sistemas é denominado de realimentado, ou seja, uma parte da saída corrige a entrada do sistema.

O modelo dinâmico clássico de manipuladores, consiste em um conjunto de termos acoplados, que formalizam um sistema multivariável de n entradas (torques das juntas) e n saídas (posição das juntas) se interagindo através de relações não-lineares (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000). Essas características devem ser tratadas através de uma estratégia de controle estável a ação desses termos. Para uma simulação adequada dessas influências é necessária uma formulação concisa das perturbações e a inclusão das não-linearidades dinâmicas e cinemáticas dentro da estratégia de controle. Assim, para uma simulação dinâmica adequada desses fatores, é empregado um modelo aproximado da estrutura real empregada para o controle de manipuladores, apresentada na Figura G.1. Onde é empregado por duas vezes a aproximação numérica da integração analítica, agregando mais erros à solução.

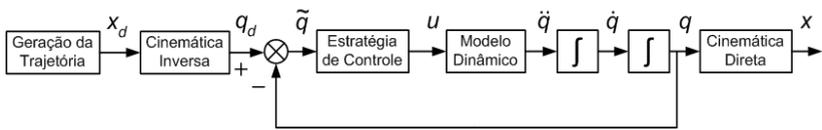


Figura G.1: Estrutura para a simulação dinâmica de estratégias de controle.

As estratégias de controle centralizado tratam o problema como um sistema não-linear multivariável, essa abordagem leva em consideração o modelo dinâmico do sistema e implementa estratégias de controle centralizado não-linear, para a geração dos torques de controle u . O modelo dinâmico clássico de manipuladores é definido como:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = u \quad (\text{G.1})$$

onde,

- $B(q)$: é a matriz de inércia;
- $C(q, \dot{q})$: é a matriz de torque centrífugos e de Coriolis;
- F : é a matriz de atrito viscoso;
- $g(q)$: é o vetor de termos gravitacionais;
- u : é o vetor de torques de controle.

A seguir serão abordadas algumas estratégias clássicas para o controle não-linear multivariável de robôs manipuladores.

G.1 CONTROLE PROPORCIONAL-DERIVATIVO

O controle proporcional-derivativo é considerado uma estratégia clássica para o controle de manipuladores, comumente aplicada à estruturas mecânicas simples. Uma particularidade dessa estratégia de controle é a necessidade de uma compensação não-linear dos termos gravitacionais, isto é, admitir o conhecimento integral dos parâmetros dinâmicos do sistema, para a estabilização do controlador. Visto que, nessa modalidade de sistema, a influência gravitacional é bastante expressiva, dessa forma, a compensação desses termos consiste em uma linearização do grande parte das perturbações do sistema. A determinação da estabilidade assintótica desse controlador é detalhada em Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006) e Sciavicco e Siciliano (2000) por meio do método direto de Lyapunov. Sendo que essa estratégia é definida como:

$$u = g(q) + K_P \tilde{q} - K_D \dot{q} \quad (\text{G.2})$$

onde,

- $g(q)$: é o termo de compensação dos efeitos gravitacionais;
- K_P : é a matriz definida positiva de ganhos proporcionais;
- \tilde{q} : é o vetor erro de posição;
- K_D : é a matriz definida positiva de ganhos derivativos;
- \dot{q} : é o vetor de velocidades das juntas.

Sendo que o vetor erro de posição é definido como:

$$\tilde{q} = q_d - q \quad (\text{G.3})$$

onde,

- q_d : é o vetor posição das juntas desejado;
- q : é o vetor posição das juntas obtido.

De forma a validar a estratégia de controle, é atribuída uma trajetória simples entre dois pontos ($p \rightarrow p'$) à um manipulador planar 2R, demonstrada na Figura G.2. Porém a movimentação entre os pontos, segue um perfil de velocidade trapezoidal (Figura G.3), definido como:

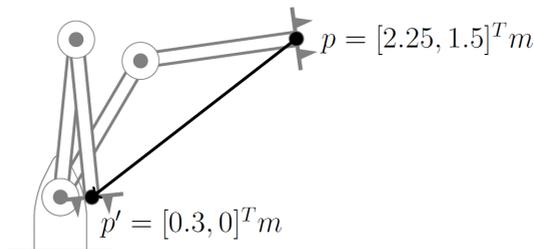


Figura G.2: Trajetória aplicada ao manipulador 2R.

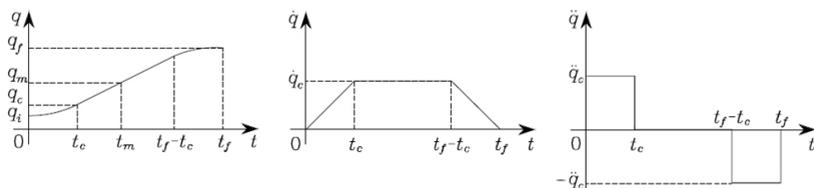


Figura G.3: Trajetória com perfil trapezoidal de velocidade.

Fonte: Sciavicco e Siciliano (2000).

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}_c t^2 & 0 \leq t \leq t_c \\ q_i + \dot{q}_c t_c \left(\frac{t-t_c}{2}\right) & t_c < t \leq t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2}\ddot{q}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases} \quad (\text{G.4})$$

A saída da ação proporcional-derivativa com compensação dos termos gravitacionais, pode ser vista na Figura G.4. Pode-se salientar a imprecisão do controlador para o seguimento da trajetória imposta. A estratégia de controle promove naturalmente um atraso na resposta, em virtude da não-linearidade de alguns termos dinâmicos do sistema, mesmo com o ajuste dos ganhos, esse atraso permanece na resposta do sistema. Outro fator importante na resposta, é o erro normalizado de posição que possui uma ordem de grandeza que pode degenerar a execução da tarefa.

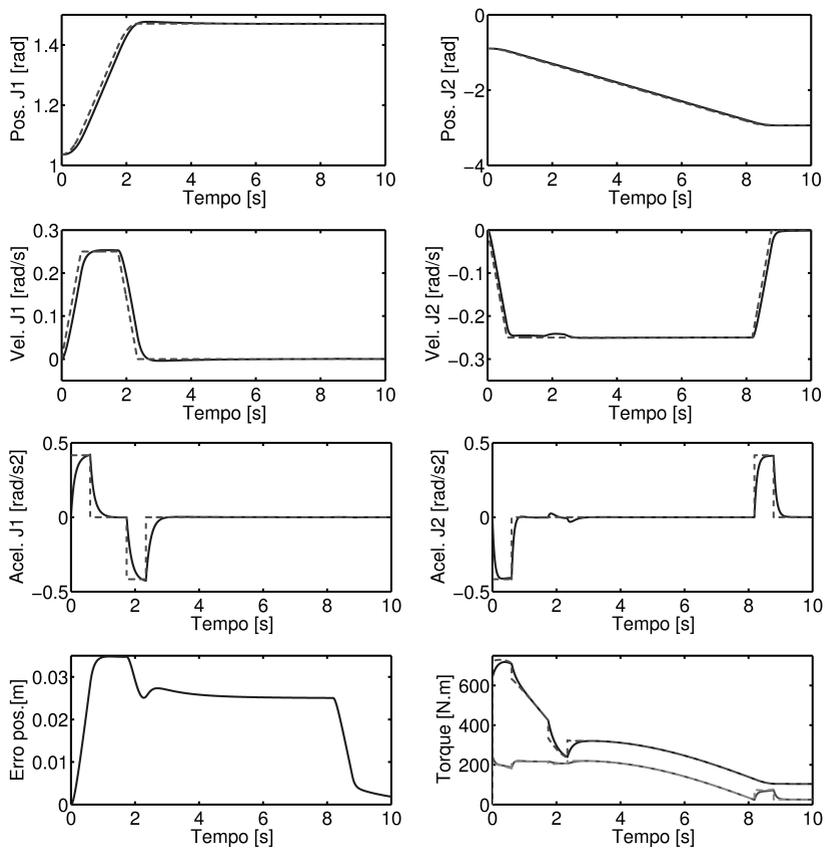


Figura G.4: Trajetória executada com o controle PID com compensação gravitacional.

G.2 CONTROLE PELA DINÂMICA INVERSA

Como dito anteriormente, o controle de robôs manipuladores é não-linear e multivariável, essas características levam a um conjunto de perturbações que dificultam a estabilização da resposta. Sendo assim, o controle pela dinâmica inversa, é um caso especial do método da realimentação linearizante, conforme Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006). Onde, é aplicada uma realimentação dos termos não-lineares, porém não para uma aproximação da linearização, mas para uma exata linearização do sistema (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000). Esse formalismo é aplicado admitindo o conhecimento integral dos aspectos dinâmicos do sistema, para então desprezá-los. Sendo a malha de controle desta estratégia definida como:

$$u = B(q)y + n(q, \dot{q}) \quad (\text{G.5})$$

onde,

y : é o vetor de controle do sistema linearizado;

As componentes dinâmicas que são desacopladas do controle são reescritas de forma simplificada como:

$$n(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) \quad (\text{G.6})$$

A equação G.5 é a estratégia de controle não-linear denominada como controle pela dinâmica inversa. Nesta é gerado um novo vetor de controle, para o sistema desacoplado e linearizado. A resultante da aplicação deste controle (equação G.5) no modelo dinâmico do sistema (equação G.1) é simplesmente:

$$\ddot{q} = y \quad (\text{G.7})$$

Após a exata linearização e o desacoplamento do termos, é possível a aplicação de uma nova estratégia de controle para a gerência dos erros de execução, sendo definida como:

$$y = \ddot{\tilde{q}} + K_D\dot{\tilde{q}} + K_P\tilde{q} \quad (\text{G.8})$$

onde,

$\ddot{\tilde{q}}$: é o vetor erro de aceleração, definido similarmente à equação G.3;

$\dot{\tilde{q}}$: é o vetor erro de velocidade, definido similarmente à equação G.3.

Este controlador é validado aplicando a mesma situação da estratégia de controle anterior, na qual a saída é apresentada na Figura G.5, sendo possível a identificação da ausência de não-linearidade que promove uma diminuição considerável dos erros de posição.

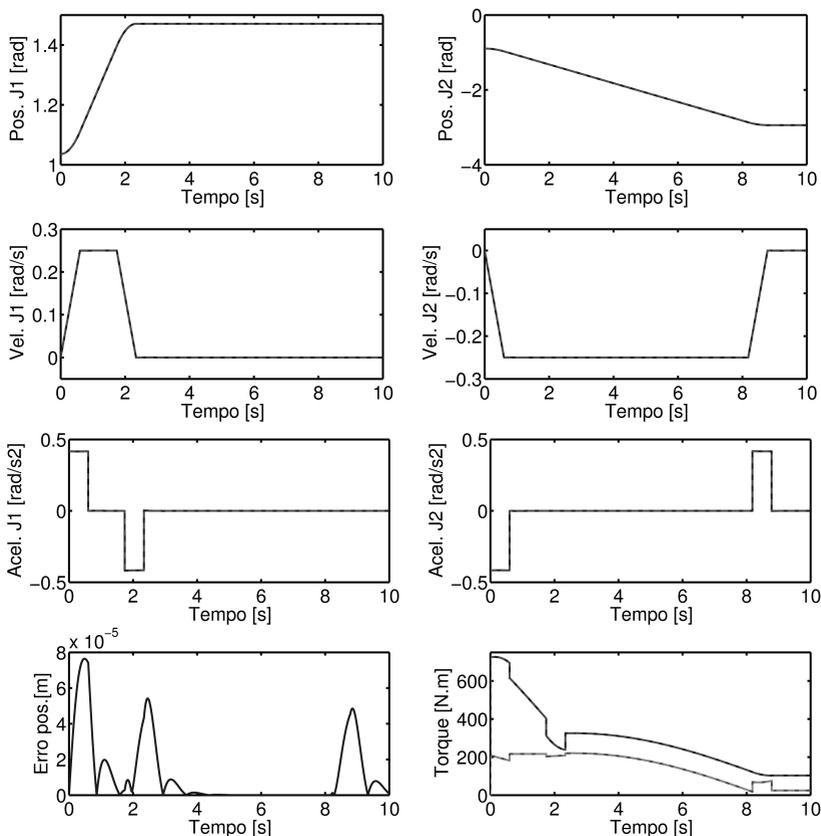


Figura G.5: Trajetória executada com o controle pela dinâmica inversa.

G.3 CONTROLE ROBUSTO

A estratégia de controle pela dinâmica inversa trabalha com a hipótese de conhecimento integral dos parâmetros dinâmicos do sistema. Porém, geralmente ocorre a existência de incertezas sobre a dinâmica do sistema e do ambiente. O controle robusto é uma alternativa para manter o desempenho do sistema em relação a estabilidade e ao erro de localização na ocorrência de perturbações externas, fatores dinâmicos não previstos e outras incertezas do sistema. Para Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006), o controle robusto é uma estratégia de controle fixa projetado para satisfazer as especificações de desempenho do sistema sobre a ocorrência de incertezas, sendo definido

como:

$$u = \hat{B}(q)y + \hat{n}(q, \dot{q}) \quad (\text{G.9})$$

Onde, \hat{B} e \hat{n} são as estimativas dos parâmetros dinâmicos e as incertezas, ou seja, os erros da estimativa. Ou, são a compensação aproximada dos efeitos não-lineares e do desacoplamento das juntas, definidos como:

$$\tilde{B} = \hat{B} - B, \quad e, \quad \tilde{n} = \hat{n} - n \quad (\text{G.10})$$

O controle robusto é uma derivação do controle pela dinâmica inversa, para a consideração das incertezas associadas a estimativa dos parâmetros dinâmicos. O controlador é semelhante ao definido na equação G.8, porém é acrescido o termo w que é a garantia de robustez à incertezas, resultando em:

$$y = \ddot{q} + K_D \dot{\tilde{q}} + K_P \tilde{q} + w \quad (\text{G.11})$$

O termo w representa o fator de robustez que reage a ocorrência de incertezas em \tilde{B} e \tilde{n} , determinando os termos não-lineares do sistema de acordo com a postura do manipulador, sendo definido como:

$$w = \begin{cases} \rho \frac{D^T Q \xi}{\|D^T Q \xi\|} & \text{para } \|D^T Q \xi\| \geq \xi, \\ \rho \frac{D^T Q \xi}{\xi} & \text{para } \|D^T Q \xi\| < \xi. \end{cases} \quad (\text{G.12})$$

Onde,

- ρ : é um positivo escalar do nível de incerteza;
- D : é uma matriz $(2n \times n)$, definida como: $D = [0 \quad I]^T$;
- Q : é uma matriz $(2n \times 2n)$, definida positiva;
- ξ : é um vetor de erro, definido como $\xi = [\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}]^T$.

De forma a validar esta estratégia de controle, fora aplicada o mesmo cenário utilizado com os outros controladores, sendo que a resposta para o controle robusto é apresentado na Figura G.6. Onde, é possível identificar a robustez do controlador às incertezas paramétricas do modelo dinâmico e das não-linearidades do sistema. Assim, produzindo uma resposta mais próxima do desejado, diminuindo o erro de posição quando relacionado ao controle PD com compensação gravitacional, mas não chega à ordem de grandeza do resposta do controlador pela dinâmica inversa. O que é esperado, visto que o controle pela dinâmica inversa é uma postura impossível de se aplicar na prática.

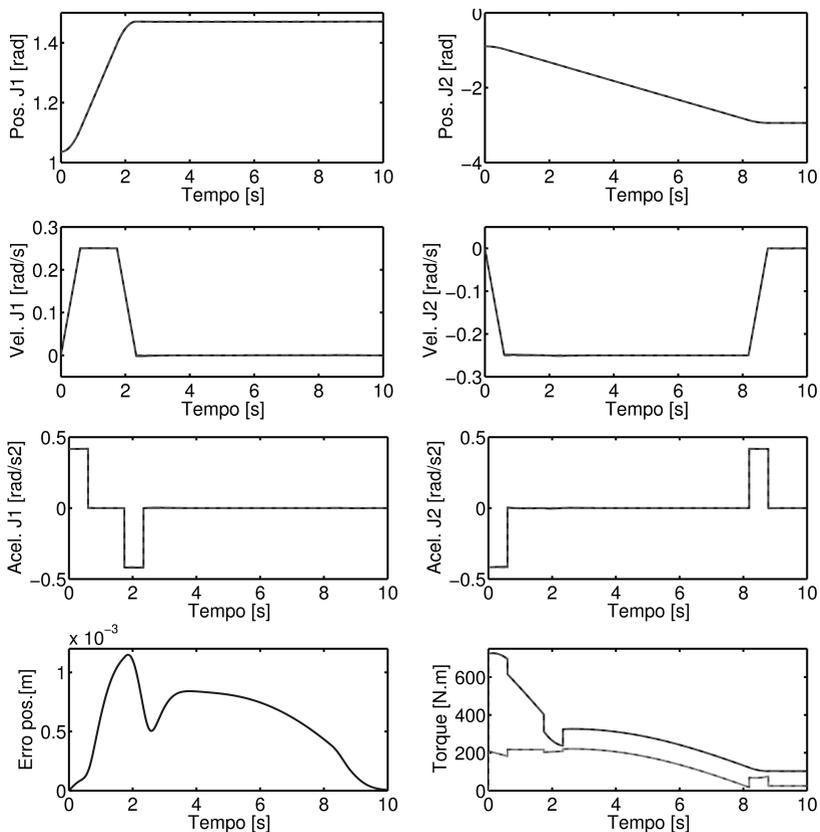


Figura G.6: Trajetória executada com o controle robusto.

G.4 CONTROLE ADAPTATIVO

Semelhantemente ao controle robusto, o adaptativo também é uma expansão da linearização através da realimentação realizada pelo controle da dinâmica inversa. A diferença entre essas duas estratégias nem sempre é clara, porém deve ser esclarecida. Para Spong, Hutchinson e Vidyasagar (2006), o controle robusto é um controlador fixo projetado para satisfazer as especificações de desempenho do controlador à ocorrência de incertezas, enquanto o controle adaptativo opera com uma estimação de parâmetros interativa. A robustez está associada ao controle com a presença de incertezas e a adaptabilidade é uma forma interativa de convergência da solução pela adaptação do modelo de linearização do sistema, isto é, o controlador irá se adaptar as incertezas melhorando sua resposta. De forma a exemplificar, em uma tarefa repetitiva, os erros de posição produzidos pelo controlador robusto fixo irão se repetir indefinidamente, enquanto em um controlador adaptativo, a tendência é ocorrer uma diminuição gradativa dos erros. Dessa maneira, é possível reescrever o modelo dinâmico do sistema, equação G.1, como:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\pi = u \quad (\text{G.13})$$

onde,

Y : é a matriz $(n \times p)$ em função das posições, velocidades e acelerações das juntas;
 π : é o vetor $(p \times 1)$ de parâmetros constantes.

A adaptabilidade do controlador baseia-se na característica de ser sempre possível expressar as equações não-lineares de movimento em relação à um conjunto de parâmetros dinâmicos constante. Assim, o controlador adaptativo é definido como:

$$\begin{aligned} u &= \hat{B}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{F}\dot{q}_r + \hat{g} + K_D\sigma \\ &= Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)\hat{\pi} + K_D\sigma \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

onde,

$\hat{B}, \hat{C}, \hat{F}$ e \hat{g} : são os parâmetros dinâmicos estimados;
 $\hat{\pi}$: é o fator de estimação do parâmetros.

O termo $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)\hat{\pi}$ descreve a ação do controle pela dinâmica inversa com compensação aproximada dos efeitos não-lineares e do desacoplamento das juntas. Sendo que as componentes de compensação não-linear são definidas como:

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d + \Lambda\tilde{q} \quad , \quad \ddot{q}_r = \ddot{q}_d + \Lambda\dot{\tilde{q}} \quad (\text{G.15})$$

onde,

\dot{q}_d e \ddot{q}_d : são os vetores de velocidade e aceleração desejados;

\tilde{q}_d e $\dot{\tilde{q}}_d$: são os vetores de erro de velocidade e aceleração.

Ainda, Λ é uma matriz definida positiva, que expressa a compensação não-linear e os termos de desacoplamento em relação aos perfis de velocidade e aceleração desejados (SCIAVICCO; SICILIANO, 2000).

Sendo que na equação G.14 o termo $K_D\sigma$ representa a ação proporcional-derivativa que estabiliza a ação de controle linear PD para o controle de posição, onde σ é o erro empregado para realimentação, definido como:

$$\sigma = \dot{q}_r - \dot{q} = \dot{\tilde{q}} + \Lambda\tilde{q} \quad (\text{G.16})$$

A ação adaptativa corrige interativamente os parâmetros do sistema, ou seja, atualiza as estimativas dinâmicas. Esse efeito ocorre através do parâmetro $\hat{\pi}$ que realiza uma compensação assintótica dos termos do modelo dinâmico, e ainda é correlacionado com a matriz K_π que determina a taxa de convergência para os parâmetros (SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2006). Sendo a lei adaptativa, definida como:

$$\dot{\hat{\pi}} = K_\pi^{-1} Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \sigma \quad (\text{G.17})$$

onde,

K_π : é uma matriz simétrica definida positiva de ganhos de adaptação.

Este controlador é validado aplicando a mesma situação das estratégias de controle anteriores, onde a saída é apresentada na Figura G.7. Torna-se visível o potencial deste controlador, pois, sua resposta é semelhante ao controle pela dinâmica inversa, mas neste, são consideradas as incertezas e as não-linearidades do sistema.

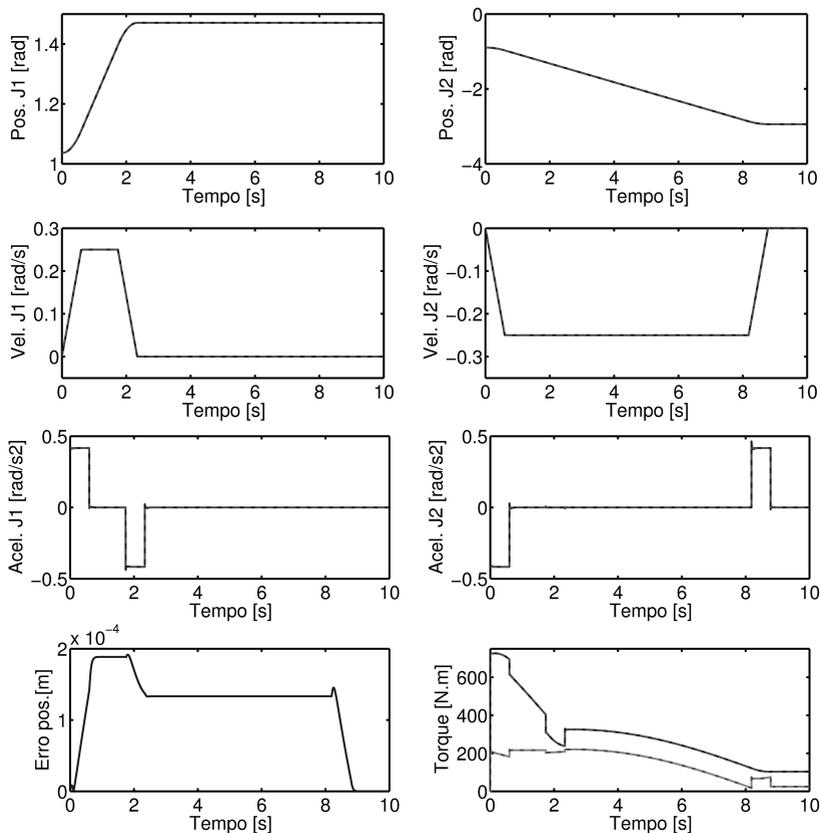


Figura G.7: Trajetória executada com o controle adaptativo.

APÊNDICE H - Modelagem Hidrodinâmica

O modelo dinâmico do movimento de um corpo rígido submerso em 6 DOF, é definido como:

$$M\dot{v} + C(v)v + D(v)v + g(\eta) = \tau \quad (\text{H.1})$$

onde,

- M : corresponde à matriz de massa e inércia;
- $C(v)$: são os termos centrípetos e de Coriolis;
- $D(v)$: é a matriz de amortecimento hidrodinâmico;
- $g(\eta)$: são as componentes gravitacionais e de empuxo;
- τ : vetor de torques de controle.

Na sequência, serão abordados individualmente as componentes da modelagem dinâmica de veículos subaquáticos, expressa pela equação 2.1.

H.0.1 Massa e Inércia

A modelagem dinâmica da massa de um veículo subaquático possui duas parcelas, uma relacionada à massa do veículo e outra que considera os efeitos adicionais de massa, conforme descrito na equação H.2.

Propriedade H.0.1 *Para um corpo rígido subaquático, a matriz de inércia é estritamente positiva, se e unicamente se, $M_{ad} > 0$, isto é:*

$$M = M_v + M_{ad} > 0 \quad (\text{H.2})$$

onde, M_v é a massa do veículo e M_{ad} é a contribuição de massa adicional.

Ao admitir que o corpo rígido esteja imerso em um fluido ideal, e que se encontra em descanso ou movimentando em baixas velocidades, a matriz de inércia será simétrica, e por consequência, torna-se positiva definida, ou:

$$M = M^T > 0 \quad (\text{H.3})$$

A massa de uma veículo subaquático pode ser determinada, para Fossen (1994), como:

$$M_v = \begin{bmatrix} mI_{(3 \times 3)} & -mS(r_G) \\ mS(r_G) & I_0 \end{bmatrix} \quad (\text{H.4})$$

onde, m é a massa do veículo, $I_{(3 \times 3)}$ é a matriz identidade, $r_G = [x_G, y_G, z_G]^T$ são as coordenadas do centro de gravidade do veículo em relação ao sistema de referência do corpo rígido, e:

$$I_0 = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{H.5})$$

É o tensor de inércia relativo ao sistema de coordenadas fixo ao corpo rígido. Por uma simplicidade de notação, igualmente à Fossen (2005), produto vetorial tradicional é representado como:

$$a \times b = S(a)b \quad (\text{H.6})$$

O produto vetorial é definido em termos da matriz antisimétrica $S \in SS(3)$, como:

$$S(\lambda) = -S^T(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (\text{H.7})$$

Ainda, deve-se considerar que a matriz de massa de um corpo rígido submerso, definida na equação H.4, possui a seguinte propriedade.

Propriedade H.0.2 *A parametrização da matriz de inércia de um corpo rígido (M_v) é única e satisfaz as condições:*

$$M_v = M_v^T > 0 \quad e \quad \dot{M}_v = 0 \quad (\text{H.8})$$

Assim, é possível expandir a equação H.4, resultando em:

$$M_v = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_G & -my_G \\ 0 & m & 0 & -mz_G & 0 & mx_G \\ 0 & 0 & m & my_G & -mx_G & 0 \\ 0 & -mz_G & my_G & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_G & 0 & -mx_G & -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -my_G & mx_G & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{H.9})$$

A determinação da dinâmica do corpo rígido, utiliza como abordagem a separação das componentes de forças e momentos adicionais de massa, em uma matriz de inércia adicional (M_{ad}) e a uma matriz de termos centrípetos e de Coriolis hidrodinâmicos adicionais ($C_{ad}(v)$). A determinação dessas matrizes emprega a abordagem energética em termos das equações de Kir-

chhoff's, que é descrita detalhadamente em Fossen (1994).

A matriz de inércia que representa a contribuição de massa adicional está relacionada com a geometria da superfície do corpo rígido. Dessa forma, para um veículo submerso qualquer a matriz de massa adicional pode ser definida como:

$$M_{ad} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & X_{\dot{v}} & X_{\dot{w}} & X_{\dot{p}} & X_{\dot{q}} & X_{\dot{r}} \\ Y_{\dot{u}} & Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{w}} & Y_{\dot{p}} & Y_{\dot{q}} & Y_{\dot{r}} \\ Z_{\dot{u}} & Z_{\dot{v}} & Z_{\dot{w}} & Z_{\dot{p}} & Z_{\dot{q}} & Z_{\dot{r}} \\ K_{\dot{u}} & K_{\dot{v}} & K_{\dot{w}} & K_{\dot{p}} & K_{\dot{q}} & K_{\dot{r}} \\ M_{\dot{u}} & M_{\dot{v}} & M_{\dot{w}} & M_{\dot{p}} & M_{\dot{q}} & M_{\dot{r}} \\ N_{\dot{u}} & N_{\dot{v}} & N_{\dot{w}} & N_{\dot{p}} & N_{\dot{q}} & N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \quad (\text{H.10})$$

A determinação das derivativas hidrodinâmicas que compõem a matriz de massa adicional é aprofundadamente descrito em Imlay (1961).

A notação de SNAME (1950), é empregada para expressar as derivativas hidrodinâmicas na matriz de massa adicional. A força hidrodinâmica de massa adicional Y_A , que ocorre sobre o eixo z com aceleração \dot{u} na direção u , é representada como:

$$Y_A = Y_{\dot{u}}\dot{u}, \quad \text{onde } Y_{\dot{u}} = \frac{\partial Y}{\partial \dot{u}} \quad (\text{H.11})$$

O movimento de veículos subaquáticos em seus 6 DOF com altas velocidades é altamente acoplado e não-linear. Entretanto, em grande parte das aplicações esses veículos se movimentam apenas em baixas velocidades. Essa característica quando associada à um veículo com três planos de simetria, possibilita a desconsideração da contribuição dos componentes de fora da diagonal principal da matriz M_{ad} . A estrutura diagonal é altamente atracente, pois, os elementos desconsiderados são de difícil determinação teórica e experimentalmente. A contribuição dos elementos de fora da diagonal são relativamente inferiores se comparadas aos elementos da diagonal principal (FOSSEN, 1994). Na prática, a aproximação diagonal para a matriz de massa adicional é considerada satisfatória para a maior parte das aplicações, sendo que diversos pesquisadores à empregam, como Fossen (2005), Antonelli (2003), Lapiere, Fraisse e Dauchez (2003), Sarkar e Podder (2001), Dunigan e Russell (1998) e Schjolberg e Fossen (1994).

Dessa forma, a matriz de massa adicional pode ser simplificada, para:

$$M_{ad} = \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\dot{v}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{\dot{w}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{\dot{p}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \quad (\text{H.12})$$

Deve-se considerar que a matriz de massa adicional de um corpo rígido submerso, definida na equação H.4, possui a seguinte propriedade.

Propriedade H.0.3 *Para um corpo rígido em descanso, assumindo que o mesmo esteja imerso em um fluido ideal, sem a incidência de ondas, sem correntes oceânicas e com frequências independentes, a matriz de inércia adicional é positiva definida, ou seja:*

$$M_{ad} = M_{ad}^T > 0 \quad (\text{H.13})$$

As derivativas hidrodinâmicas estão correlacionadas com a geometria do corpo submerso, dessa forma, conforme Fossen (1994), o emprego de uma geometria elipsoidal permite a simplificação das componentes de massa adicional. Sendo um corpo de geometria elipsoidal definida por três semi-eixos, conforme ilustrado na Figura H.1, as derivativas hidrodinâmicas podem ser definidas como:

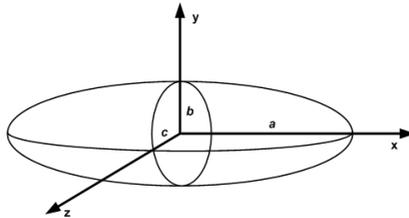


Figura H.1: Elipsóide com semi-eixos a , b e c .

Fonte: Fossen (1994).

$$\begin{aligned} X_{\dot{u}} &= -\left(\frac{\alpha_0}{2-\alpha_0}\right)\bar{m} & Y_{\dot{v}} &= Z_{\dot{w}} = -\left(\frac{\beta_0}{2-\beta_0}\right)\bar{m} \\ K_{\dot{p}} &= 0 & M_{\dot{q}} &= N_{\dot{r}} = -\frac{1}{5}\left(\frac{(b^2-a^2)^2(\alpha_0-\beta_0)}{2(b^2-a^2)+(b^2+a^2)(\beta_0-\alpha_0)}\right)\bar{m} \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

onde,

a massa é definida como: $\bar{m} = \frac{4}{3}\pi\rho ab^2$,

a constante α_0 é definida por: $\alpha_0 = \frac{2(1-\bar{e}^2)}{\bar{e}^3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}} \right) - \bar{e} \right)$,

a constante β_0 é definida por: $\beta_0 = \frac{1}{\bar{e}^2} - \frac{1-\bar{e}^2}{2\bar{e}^3} \ln \left(\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}} \right)$,

o coeficiente de excentricidade é definido como: $\bar{e} = 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2$.

Outra abordagem simplificada, ocorre quando o objeto submerso a ser modelado dinamicamente possui geometria cilíndrica, conforme abordado em Faltinsen (1993) e Sarpkaya (1978). Dessa forma, para um objeto cilíndrico, com massa \bar{m} , comprimento \bar{L} e raio da seção circular \bar{r} , conforme a ilustrado na Figura H.2, suas derivativas hidrodinâmicas são definidas como:

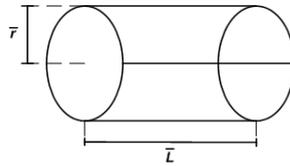


Figura H.2: Cilindro, com massa \bar{m} , comprimento \bar{L} e raio da seção circular \bar{r} .

$$\begin{aligned} X_{\dot{u}} &= -0.1\bar{m} & Y_{\dot{v}} &= -\pi\rho\bar{r}^2\bar{L} & Z_{\dot{w}} &= -\pi\rho\bar{r}^2\bar{L} \\ K_{\dot{p}} &= 0 & M_{\dot{q}} &= -\frac{1}{12}\rho\bar{r}^2\bar{L}^3 & N_{\dot{r}} &= -\frac{1}{12}\rho\bar{r}^2\bar{L}^3 \end{aligned} \quad (\text{H.15})$$

Após abordados os efeitos dinâmico de massa adicional à representação dinâmica de veículos subaquáticos, será exposto o conceito relativo à influência dos termos centrípetos e de Coriolis nesse ambiente.

H.0.2 Forças e Torques Centrípetos e de Coriolis

O efeito de massa adicional também exerce uma contribuição nos termos centrípetos e de Coriolis, devido a essa matriz ser fundamentada na matriz de massa. Dessa forma, a matriz de forças e torques centrípetos e de coriolis ($C(\mathbf{v})$), pode ser especificada, através de uma matriz de massa genérica, definida como:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{H.16})$$

Considera-se a seguinte propriedade:

Propriedade H.0.4 *Para um corpo rígido movendo-se em um fluido ideal, a matriz de termos centrípetos e de Coriolis ($C(\mathbf{v})$) é anti-simétrica, ou:*

$$C(\mathbf{v}) = -C^T(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^6 \quad (\text{H.17})$$

É possível se determinar uma grande variedade de parametrizações diferenciadas para a matriz C . Porém em Fossen (1994), a especificação dessa matriz é realizada através das equações de Kirchhoff's. A matriz de contribuição dos termos centrípetos e de Coriolis é especificada como:

$$C(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & -S(M_{11}\mathbf{v}_1 + M_{12}\mathbf{v}_2) \\ -S(M_{11}\mathbf{v}_1 + M_{12}\mathbf{v}_2) & -S(M_{21}\mathbf{v}_1 + M_{22}\mathbf{v}_2) \end{bmatrix} \quad (\text{H.18})$$

Como visto anteriormente, existe a influência dos efeitos de massa adicional sobre os termos centrípetos e de Coriolis, dessa forma, igualmente a matriz de massa, a matriz C pode ser decomposta em duas componentes, como:

$$C(\mathbf{v}) = C_v(\mathbf{v}) + C_{ad}(\mathbf{v}) \quad (\text{H.19})$$

Onde, C_v são os termos centrípetos e de Coriolis relativos ao veículo e C_{ad} é a contribuição de massa adicional.

A variedade de parametrizações diferenciadas para a matriz C é uma consequência da existência de diferentes definições para a matriz C_v . São adotadas as especificações de Fossen (1994) que define essa componente como:

$$C_v(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & -mS(\mathbf{v}_1) - mS(\mathbf{v}_2)S(r_G) \\ -mS(\mathbf{v}_1) + mS(r_G)S(\mathbf{v}_2) & -S(I_0\mathbf{v}_2) \end{bmatrix} \quad (\text{H.20})$$

Onde é respeitada a seguinte propriedade da matriz C_v :

Propriedade H.0.5 *A matriz de termos centrípetos e de Coriolis (C_v) para um veículo submerso em um fluido ideal, é anti-simétrica, i.e.:*

$$C_v(\mathbf{v}) = -C_v^T(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^6 \quad (\text{H.21})$$

A equação H.20 pode ser expandida em termos de suas componentes hidrodinâmicas, resultando em:

$$C_{ad}(\mathbf{v}) = -C_{ad}^T(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^6 \quad (\text{H.24})$$

Igualmente à matriz de massa adicional, devido ao movimento dos veículos subaquáticos ocorrer geralmente à baixas velocidades e, ainda, ao veículo possuir três planos de simetria, a matriz de termos centrípetos e de Coriolis hidrodinâmicos (equação H.23) pode ser simplificada e se considera apenas seus termos mais influentes, resultando em:

$$C_{ad}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_{\dot{w}}w & Y_{\dot{v}}v \\ 0 & 0 & 0 & Z_{\dot{w}}w & 0 & -X_{\dot{u}}u \\ 0 & 0 & 0 & -Y_{\dot{v}}v & X_{\dot{u}}u & 0 \\ 0 & -Z_{\dot{w}}w & Y_{\dot{v}}v & 0 & -N_{\dot{r}}r & M_{\dot{q}}q \\ Z_{\dot{w}}w & 0 & -X_{\dot{u}}u & N_{\dot{r}}r & 0 & -K_{\dot{p}}p \\ -Y_{\dot{v}}v & X_{\dot{u}}u & 0 & -M_{\dot{q}}q & K_{\dot{p}}p & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{H.25})$$

H.0.3 Amortecimento Hidrodinâmico

Em geral, o amortecimento em um veículo subaquático movimentando-se em 6 DOF com alta velocidade é altamente não-linear e acoplado. Dessa forma a componente de amortecimento hidrodinâmico é composta por vários efeitos, relacionados na equação H.26.

$$D(\mathbf{v}) = - \underbrace{D_p(\mathbf{v})}_{\text{Amortecimento potencial}} - \underbrace{D_S(\mathbf{v})}_{\text{Atrito subaquático}} - \underbrace{D_W(\mathbf{v})}_{\text{Amortecimento pelo movimento das ondas}} - \underbrace{D_M(\mathbf{v})}_{\text{Amortecimento devido à vibração induzida pela emissão de vórtices}} \quad (\text{H.26})$$

Apesar disso, uma aproximação de seus efetivos pode ser empregada, onde assume-se que, o veículo: realiza um movimento desacoplado e possui três planos de simetria. Assim, os termos com grau de complexidade maior que segunda ordem podem ser ignorados. A resultante é uma matriz de amortecimento subaquático com estrutura diagonal e, unicamente, com termos lineares e componentes de amortecimento quadrático, que é descrita na

equação H.27 (FOSSEN, 1994).

$$D(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -X_u - X_{|u|}|u| & 0 & 0 \\ 0 & -Y_v - Y_{|v|}|v| & 0 \\ 0 & 0 & -Z_w - Z_{|w|}|w| \\ -K_p - K_{|p|}|p| & 0 & 0 \\ 0 & -M_q - M_{|q|}|q| & 0 \\ 0 & 0 & -N_r - N_{|r|}|r| \end{bmatrix} \quad (\text{H.27})$$

A matriz de amortecimento viscoso $D(\mathbf{v})$ deve satisfazer a seguinte propriedade.

Propriedade H.0.7 *Para um corpo rígido movendo-se através de um fluido ideal, a matriz de amortecimento hidrodinâmico ($D(\mathbf{v})$) é real, não-simétrica e estritamente positiva, ou seja:*

$$D(\mathbf{v}) > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^6 \quad (\text{H.28})$$

Os efeitos viscosos podem ser considerados como a soma de duas forças, o arrasto e o sustentação.

H.0.4 Gravidade e Empuxo

Segundo a terminologia hidrodinâmica, as forças gravitacionais e de empuxo são denominadas como forças de restauração. A atuação dessas forças está concentrada sobre pontos específicos do veículo, assim a força gravitacional f_G exerce seus efeitos sobre o centro gravitacional do veículo, localizado em $r_G = [x_G, y_G, z_G]^T$. Similar ao que ocorre com a força de empuxo f_B , que atua sobre o centro de empuxo, localizado em $r_B = [x_B, y_B, z_B]^T$.

Segundo a notação de SNAME (1950), o peso de um corpo submerso é definido como:

$$W = mg \quad (\text{H.29})$$

Onde, m é a massa do veículo incluindo a parcela de massa adicional do fluido e g a aceleração gravitacional.

Enquanto a força de empuxo é definida como:

$$B = \rho g \nabla \quad (\text{H.30})$$

onde, ρ é a densidade do fluido, ∇ é o volume do fluido adicional sobre o veículo.

O peso de um corpo submerso e a força de empuxo podem ser trans-

formados para o sistema de coordenadas do corpo rígido, resultando em:

$$f_G(\eta_2) = J_1^{-1}(\eta_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix} \quad e \quad f_B(\eta_2) = -J_1^{-1}(\eta_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} \quad (\text{H.31})$$

onde, $J_1(\eta_2)$ é a matriz de transformação relativa à representação pelos ângulos de Euler.

De acordo com Fossen (1994), as forças e momentos de restauração necessitam ter seu sinal invertido, pois, obedecem a segunda lei de *Newton*. Dessa forma, o vetor de forças e momentos de restauração no sistema de coordenadas do corpo rígido, pode ser definido como:

$$g(\eta) = - \begin{bmatrix} f_G(\eta) + f_B(\eta) \\ r_G \times f_G(\eta) + r_B \times f_B(\eta) \end{bmatrix} \quad (\text{H.32})$$

A equação H.32 pode ser expandida, resultando em:

$$g(\eta) = \begin{bmatrix} (W - B)\text{sen}(\theta) \\ -(W - B)\text{cos}(\theta)\text{sen}(\phi) \\ -(W - B)\text{cos}(\theta)\text{cos}(\phi) \\ -(y_G W - y_B B)\text{cos}(\theta)\text{cos}(\phi) + (z_G W - z_B B)\text{cos}(\theta)\text{sen}(\phi) \\ (z_G W - z_B B)\text{sen}(\theta) + (x_G W - x_B B)\text{cos}(\theta)\text{cos}(\phi) \\ -(x_G W - x_B B)\text{cos}(\theta)\text{sen}(\phi) - (y_G W - y_B B)\text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{H.33})$$

A equação H.33 define as forças e momentos de restauração no sistema de coordenadas do corpo rígido através da representação pelos ângulos de Euler. Porém, é possível aplicar uma representação alternativa baseada na representação através de quatérnios, resultando em:

$$g(\eta) = \begin{bmatrix} 2(a_1 a_3 - a_2 a_4)(W - B) \\ -2(a_1 a_2 - a_3 a_4)(W - B) \\ -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2)(W - B) \\ (-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(y_G W - y_B B) + 2(a_1 a_2 + e_3 e_4)(z_G W - z_B B) \\ -(-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(x_G W - x_B B) + 2(a_1 a_3 + e_2 e_4)(z_G W - z_B B) \\ -2(a_1 a_2 + e_3 e_4)(x_G W - x_B B) - 2(a_1 a_3 + e_2 e_4)(y_G W - y_B B) \end{bmatrix} \quad (\text{H.34})$$

O conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ é o conjunto de escalares do quatérnio dual que representa a orientação, conforme definido na equação 3.33. Assim, $a_1 = \frac{\text{cos}(\theta)}{2}$ e $a_2 = a_3 = a_4 = \frac{\text{sen}(\theta)}{2}$.

Uma aproximação pode ser realizada sobre as forças e momentos de restauração. Ao considerar que um sistema subaquático seja neutro aos efei-

tos de empuxo, nesse caso ele satisfaz a seguinte equação:

$$W = B \quad (\text{H.35})$$

Ainda, se a distância entre o centro gravitacional r_G e o centro de empuxo r_B , for definida como:

$$r_G - r_B = [(x_G - x_B), (y_G - y_B), (z_G - z_B)] \quad (\text{H.36})$$

Com essas características, é possível reescrever a equação H.33, simplesmente, como:

$$g(\eta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(y_G - y_B)W \cos(\theta) \cos(\phi) + (z_G - z_B)W \cos(\theta) \sin(\phi) \\ (z_G - z_B)W \sin(\theta) + (x_G - x_B)W \cos(\theta) \cos(\phi) \\ (x_G - x_B)W \cos(\theta) \sin(\phi) - (y_G - y_B)W \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{H.37})$$

H.0.5 Dinâmica dos Propulsores

Os veículos subaquáticos são fundamentalmente movimentados através de propulsores subaquáticos. Estes são atuadores baseados na revolução de uma hélice interna à um duto. Este acionamento induz o fluido estacionário que envolve o veículo à um movimento através do túnel. A movimentação do fluido é uma decorrência da velocidade angular aplicada sobre a hélice que gera uma força de propulsão ao veículo. O esquemático de um propulsor subaquático é apresentado na Figura H.3, onde, é ressaltada a velocidade do veículo (V), a velocidade de avanço (V_a), a força do propulsor (T) e o torque do propulsor (Q).

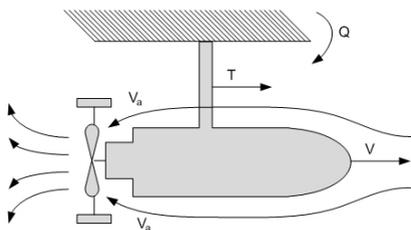


Figura H.3: Esquemático de um propulsor subaquático.

Fonte: Fossen (1994).

A modelagem dinâmica dos propulsores subaquáticos é realizada através de uma função dependente do vetor velocidade do veículo ($v \in \mathbb{R}^6$) e da variável de controle ($u \in \mathbb{R}^p$ ($p \geq 6$)), que pode ser representada como:

$$\tau_v = B(v, u) \quad (\text{H.38})$$

onde, $B(\cdot)$ é um vetor função não-linear.

A representação dinâmica dos propulsores subaquáticos, pode ser realizada através de um modelo de propulsor bilinear, equação H.39. Porém, parte dos coeficientes empregados são aproximações lineares, levando o modelo à um caso generalizado. Em Fossen (1994), é comprovado experimentalmente que algumas dependências internas do modelo podem ser desprezadas na maioria das condições práticas de operação.

$$\tau_v = B_1 u - B_2(u)v \quad (\text{H.39})$$

onde, τ_v é a força do propulsor, B_1 e B_2 são duas matrizes constantes de dimensões apropriadas, u é a variável de controle e v é a velocidade do veículo.

O relacionamento entre as forças e momentos atuantes sobre o veículo (τ_v) e a entrada de controle dos propulsores do veículo (u) é altamente não-linear. Essa característica ocorre devido à variância temporal de algumas variáveis estruturais, e.g, a densidade da água, o diâmetro da hélice, o comprimento do túnel, entre outras (ANTONELLI et al., 2000). Dessa forma, grande parte dos trabalhos relacionados ao controle dinâmico dessa modalidade de veículos, como Lapierre, Fraise e Dauchez (2003), Antonelli et al. (2000) e Sarkar, Yuh e Podder (1999), emprega uma linearização do modelo bilinear, apresentada em Fossen (1994).

Em grande parte das aplicações o modelo bilinear pode ser aproximado para um modelo refinado, onde o sistema é linear, conforme a equação H.40

$$\tau_v = Bu \quad (\text{H.40})$$

onde, $B = B_1$ e $B_2(u)v \approx 0$.

H.1 MODELO HIDRODINÂMICO DOS SISTEMAS VEÍCULO-MANIPULADOR

Um veículo subaquático tem sua representação definida através da notação de SNAME (definida na tabela 7.1) por um vetor de velocidades lineares e angulares do corpo rígido submerso ($v = [u, v, w, p, q, r]^T$) e um vetor de acelerações lineares e angulares ($\dot{v} = [\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}]^T$), ambos relacionados ao sistema de coordenadas fixo ao veículo. Assim, sua modelagem dinâmica

é definida conforme a equação H.1. Entretanto, um manipulador é definido através de seu vetor de posições de junta $q \in \mathbb{R}^n$, onde n é o número de juntas, e seu vetor de velocidades de junta $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$. Sendo que sua modelagem dinâmica é definida de acordo com Sciavicco e Siciliano (2000), como:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) = \tau \quad (\text{H.41})$$

onde, $B(q)$ é a matriz de inércia, $C(q, \dot{q})$ é a matriz das forças e torques centrífugos e de Coriolis, F_v é a matriz de atrito viscoso e $g(q)$ é o vetor de termos gravitacionais.

A modelagem hidrodinâmica de manipuladores é semelhante à realizada com os veículos subaquáticos a diferença encontra-se apenas nas variáveis do sistema, como:

$$M_m(q)\ddot{q} + C_m(q, \dot{q})\dot{q} + D_m(q, \dot{q})\dot{q} + g_m(q) = \tau \quad (\text{H.42})$$

O acoplamento entre esses dois subsistemas necessita que ambas as modelagens dinâmicas sejam reescritas em relação à uma variável comum que correlacione os subsistemas. Pode-se definir $\zeta \in \mathbb{R}^{6+n}$ como:

$$\zeta = \begin{bmatrix} v \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (\text{H.43})$$

A modelagem hidrodinâmica do veículo, definida na equação H.1, pode ser reescrita na forma matricial em relação à ζ , como:

$$\begin{bmatrix} M_v + M_{ad} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} C_v(v) + C_{ad}(v) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} D_v(v) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} g_v(\eta) \\ 0 \end{bmatrix} \zeta = \tau_1 \quad (\text{H.44})$$

A modelagem hidrodinâmica do manipulador, definida na equação H.42, pode ser reescrita na forma matricial em relação à ζ , como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_m(q) \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_m(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_m(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ g_m(\eta, q) \end{bmatrix} \zeta = \tau_2 \quad (\text{H.45})$$

Ambos os subsistemas são correlacionados através de alguns fatores de acoplamento, que definem a influência de um subsistema sobre o outro.

Seguindo a definição de Kim, Chung e Yuh (2003), esses termos podem ser escritos matricialmente relacionados à ζ , como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & M_{ac}(q) \\ M_{ac}(q)^T & 0 \end{bmatrix} \dot{\zeta} + \begin{bmatrix} 0 & C_{ac1}(q, \zeta) \\ C_{ac2}(q, \zeta) & 0 \end{bmatrix} \zeta \\ & + \begin{bmatrix} 0 & D_{ac1}(q, \zeta) \\ D_{ac2}(q, \zeta) & 0 \end{bmatrix} \zeta = \tau_3 \end{aligned} \quad (\text{H.46})$$

Os coeficientes de massa adicional do manipulador influenciam diretamente o veículo, conforme definido em Kim, Chung e Yuh (2003), pode-se modelar esses efeitos na forma matricial em relação à ζ , como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{adm}(q) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\zeta} + \begin{bmatrix} C_{adm}(q, v) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} D_{adm}(q, v) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta \\ & + \begin{bmatrix} g_{adm}(\eta, q) \\ 0 \end{bmatrix} \zeta = \tau_4 \end{aligned} \quad (\text{H.47})$$

A força total é definida como:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \quad (\text{H.48})$$

onde, $\tau = [\tau_v, \tau_q]^T \in \mathbb{R}^{6+n}$, sendo que $\tau_v \in \mathbb{R}^6$ é torque do propulsor e $\tau_q = [\tau_{q1}, \dots, \tau_{qn}]^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de torques das juntas.

A modelagem hidrodinâmica de um sistema veículo-manipulador subaquático, pode ser definida através de uma equação única, com a junção das equações H.44, H.45 e H.46. Assim, considerando a correlação dinâmica dos propulsores subaquáticos, definida na equação H.40, obtém-se:

$$M(q)\dot{\zeta} + C(q, \zeta)\zeta + D(q, \zeta)\zeta + g(q, \eta) = Bu \quad (\text{H.49})$$

A matriz de massa e inércia é definida como:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_v + M_{ad} + M_{adm}(q) & M_{ac}(q) \\ M_{ac}(q)^T & M_m(q) \end{bmatrix} \quad (\text{H.50})$$

A matriz de forças e torque centrípetos e de Coriolis é definida por:

$$C(q, \zeta) = \begin{bmatrix} C_v(v) + C_{ad}(v) + C_{adm}(q, v) & C_{ac1}(q, \zeta) \\ C_{ac2}(q, \zeta) & C_m(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (\text{H.51})$$

O amortecimento hidrodinâmica é definido como:

$$D(q, \zeta) = \begin{bmatrix} D_v(\mathbf{v}) + D_{ad_m}(q, \mathbf{v}) & D_{ac_1}(q, \zeta) \\ D_{ac_2}(q, \zeta) & D_m(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (\text{H.52})$$

Os termos gravitacionais e de empuxo são:

$$g(q, \eta) = \begin{bmatrix} g_v(\eta) + g_{ad_m}(\eta, q) \\ g_m(\eta, q) \end{bmatrix} \quad (\text{H.53})$$

APÊNDICE I - Modelo Matemático: ODIN

O veículo autônomo subaquático (AUV) ODIN (*Omni Directional Intelligent Navigator*) possui três eixos de simetria, devido ao ser formato esférico, assim, é possível o emprego de simplificações ao seu modelo dinâmico, principalmente devido ao fato de duas das coordenadas do centro gravitacional serem nulas, $y_G = x_G = 0m$. Dessa forma, a matriz de massa, definida na equação H.9, resultante é:

$$M_{v_{odin}} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_G & 0 \\ 0 & m & 0 & -mz_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -mz_G & 0 & I_{xx} & 0 & 0 \\ mz_G & 0 & 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (I.1)$$

Sendo que, a massa do veículo é $m = 125kg$, as coordenadas do centro de gravidade do veículo são $y_G = x_G = 0m$ e $z_G = 0,5m$ e as componentes inercias são designadas por $I_{xy} = I_{yx} = I_{zx} = I_{xz} = I_{zy} = I_{yz} = 0$ e $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{8}{15}\pi\rho_v r^5$. A densidade média do veículo é $\rho_v = 965kg/m^3$ e o raio de veículo é $r = 0,3m$.

A matriz de massa adicional do veículo, definida na equação H.12, também é simplificada devido à suas característica físicas, sendo:

$$M_{ad_{odin}} = \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\dot{v}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{\dot{w}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (I.2)$$

As derivativas hidrodinâmicas do sistema são $K_{\dot{p}} = M_{\dot{q}} = N_{\dot{r}} = 0$ e $X_{\dot{u}} = Y_{\dot{v}} = Z_{\dot{w}} = \frac{2}{3}\pi\rho r^3$, sendo que a densidade do fluido de imersão, neste caso a água, é $\rho = 1000kg/m^3$.

A matriz de forças e torques centrípetos e de Coriolis, definida na equação I.3, também sofre simplificações, resultando em:

$$C_v(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & m(z_G r) \\ 0 & 0 & 0 & -m(w) \\ 0 & 0 & 0 & -m(z_G p - v) \\ -m(z_G r) & m(w) & m(z_G p - v) & 0 \\ -m(w) & -m(z_G r) & m(z_G q + u) - I_{zz} r & 0 \\ m(v) & -m(u) & 0 & I_{yy} q \\ & & & \\ & m(w) & -m(v) & \\ & m(z_G r) & m(u) & \\ & -m(z_G q + u) & 0 & \\ & -I_{zz} r & -I_{yy} q & \\ & 0 & I_{xx} p & \\ & -I_{xx} p & 0 & \end{bmatrix} \quad (I.3)$$

A matriz das forças e torques centrípetos e de Coriolis adicionais, definida na equação H.25, também é simplificada, admitindo-se que as derivativas hidrodinâmicas $K_{\dot{p}} = M_{\dot{q}} = N_{\dot{r}} = 0$. Assim, resultando em:

$$C_{ad_{odin}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_{\dot{w}} w & Y_{\dot{v}} v \\ 0 & 0 & 0 & Z_{\dot{w}} w & 0 & -X_{\dot{u}} u \\ 0 & 0 & 0 & -Y_{\dot{v}} v & X_{\dot{u}} u & 0 \\ 0 & -Z_{\dot{w}} w & Y_{\dot{v}} v & 0 & 0 & 0 \\ Z_{\dot{w}} w & 0 & -X_{\dot{u}} u & 0 & 0 & 0 \\ -Y_{\dot{v}} v & X_{\dot{u}} u & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (I.4)$$

As derivativas hidrodinâmicas restantes são simplificadas como $X_{\dot{u}} = Y_{\dot{v}} = Z_{\dot{w}} = -m$. Resultando em:

$$C_{ad_{odin}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & m(w) & -m(v) \\ 0 & 0 & 0 & -m(w) & 0 & m(u) \\ 0 & 0 & 0 & m(v) & -m(u) & 0 \\ 0 & m(w) & -m(v) & 0 & 0 & 0 \\ -m(w) & 0 & m(u) & 0 & 0 & 0 \\ m(v) & -m(u) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (I.5)$$

A equação H.27, que descreve as componentes do amortecimento hidrodinâmica, sofre uma simplificação, isto é, $-X_u - X_{u|u}| = -Y_v - Y_{v|v}| = -Z_w - Z_{w|w}| = d_t$ e $-K_p - K_{p|p}|p| = d_{ad}|p| + d_{ld}$, $-M_q - M_{q|q}|q| = d_{ad}|q| + d_{ld}e - N_r - N_{r|r}|r| = d_{ad}|r| + d_{ld}$. Assim, resultando em:

$$D_{odin}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} d_t|u|0 & 0 & 0 & d_{ad}|p| + d_{ld} \\ 0 & d_t|v| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_t|w| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{ad}|q| + d_{ld} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{ad}|r| + d_{ld} \end{bmatrix} \quad (I.6)$$

Para Podder e Sarkar (1999), as componentes de amortecimento, correspondem à:

- d_t : é o fator de amortecimento quadrático translacional, onde,
 $d_t = 248N(s/m)^2$;
- d_{ad} : é o fator de amortecimento quadrático angular, onde,
 $d_{ad} = 280Ns^2/m$;
- d_{ld} : é o fator de amortecimento linear/angular, onde,
 $d_{ld} = 230Ns^2/m$;

Igualmente as demais matrizes, a matriz de termos gravitacionais e de empuxo, definida na equação H.33, também é simplificada devido às características físicas do veículo, isto é, ao centro de gravidade do veículo ser $r_g = [0; 0; 0, 05]^T$ e o centro de empuxo ser $r_b = [0; 0; 0]^T$, resultando simplesmente em:

$$g_{odin}(\eta) = \begin{bmatrix} (W - B)sen(\theta) \\ -(W - B)cos(\theta)sen(\phi) \\ -(W - B)cos(\theta)cos(\phi) \\ (z_G W)cos(\theta)sen(\phi) \\ (z_G W)sen(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (I.7)$$

Conforme definido na equação H.29, o peso do corpo submerso é $W = mg$ e a força de empuxo (equação H.30), é $B = \rho g \nabla$. Sendo que, a força gravitacional é $g = 9,81m/s^2$ e o volume do fluido adicional sobre o veículo é $\nabla = \frac{4}{3}\pi r^3$, resultando em:

$$g_{odin}(\eta) = \begin{bmatrix} (mg - \rho g \frac{4}{3} \pi r^3) \text{sen}(\theta) \\ -(mg - \rho g \frac{4}{3} \pi r^3) \text{cos}(\theta) \text{sen}(\phi) \\ -(mg - \rho g \frac{4}{3} \pi r^3) \text{cos}(\theta) \text{cos}(\phi) \\ (z_G mg) \text{cos}(\theta) \text{sen}(\phi) \\ (z_G mg) \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.8})$$

A matriz de configuração dos propulsores é definida segundo Podder e Sarkar (1999), como:

$$B_{odin} = \begin{bmatrix} s & -s & -s & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & s & -s & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_s & R_s & -R_s & -R_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_s & -R_s & -R_s & R_s \\ R_z & -R_z & R_z & -R_z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.9})$$

Onde, $s = \text{sen}(\frac{\pi}{4})$, a distância do centro do veículo ao centro dos propulsores verticais é $R = 0,381m$ e a distância radial do centro do veículo ao centro dos propulsores horizontais é $R_z = 0,508m$.

Já em Antonelli (2003), a dinâmica do AUV ODIN é determinada com algumas diferenças, devido a valores diferenciados das derivativas hidrodinâmicas e componentes inerciais. O veículo é definido com as seguintes componentes inerciais:

$$\begin{aligned} I_x &= 8 \text{ Nms}^2 \\ I_y &= 8 \text{ Nms}^2 \\ I_z &= 8 \text{ Nms}^2 \\ I_{xy} &= 0 \text{ Nms}^2 \\ I_{yz} &= 0 \text{ Nms}^2 \\ I_{xz} &= 0 \text{ Nms}^2 \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

As derivativas hidrodinâmicas relacionadas às matrizes de massa, admitindo as simplificações de um corpo com três graus de simetria (esférico), são:

$$\begin{aligned}
 X_{\dot{u}} &= -62,5 \\
 Y_{\dot{v}} &= -62,5 \\
 Z_{\dot{w}} &= -62,5 \\
 K_{\dot{p}} &= -30 \\
 M_{\dot{q}} &= -30 \\
 N_{\dot{r}} &= -30
 \end{aligned}
 \tag{I.11}$$

As derivativas hidrodinâmicas relacionadas aos torques centrípetos e de Coriolis, admitindo as simplificações de um corpo esférico submerso, são:

$$\begin{aligned}
 X_{u|u} &= -48 & Y_{v|v} &= -48 \\
 Z_{w|w} &= -48 & K_{p|p} &= -80 \\
 M_{q|q} &= -80 & N_{r|r} &= -80
 \end{aligned}
 \tag{I.12}$$

À esse veículo é acoplado um manipulador planar 3R, os parâmetros físicos dos elos são descritos na tabela I.1. As matrizes dinâmicas do manipulador também sofrem simplificações devido à suas características físicas, pois, os elos possuem o formato regular de cilindro.

Características Físicas			
Elos	Massa (kg)	Comprimento(m)	Raio(m)
1	3,3	1	0,1
2	1,9	1	0,08
3	1,2	1	0,07

Componentes Inerciais (Nms^2)					
I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	I_{xy}	I_{xz}	I_{yz}
1,1	1,1	0,165	0	0	0
0,63	0,63	0,075	0	0	0
0,4	0,4	0,04	0	0	0

Tabela I.1: Parâmetros físicos dos elos do manipulador submerso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADEPT. Six-axis robot configuration singularities. *Adept Technology Inc.*, 2007.

ALSHAMASIN, M.; IONESCU, F.; AL-KASASBEH, R. Kinematic modeling and simulation of a scara robot by using solid dynamics and verification by matlab/simulink. *European Journal of Scientific Research*, v. 37, n. 3, p. 388–405, 2009.

ALTMANN, S. L. *Rotation, Quaternions and Doubles Groups*. 1. ed. England: Oxford University Press, 2005.

ANTONELLI, G. *Underwater Robots: Motion and Force Control of Vehicle-Manipulator Systems*. 2. ed. Germany: Springer Tracts in Advanced Robotics, 2003.

ANTONELLI, G. et al. Tracking control for underwater vehicle-manipulator systems with velocity estimation. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, v. 25, n. 3, p. 399–413, 2000. ISSN 0364-9059.

ANTONELLI, G.; CHIAVERINI, S. Adaptive tracking control of underwater vehicle-manipulator systems. *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*, v. 2, p. 1089–1093 vol.2, 1998.

ANTONELLI, G.; CHIAVERINI, S. Singularity-free regulation of underwater vehicle-manipulator systems. *Proceedings of the American Control Conference*, v. 1, p. 399–403 vol.1, 1998.

ANTONELLI, G.; CHIAVERINI, S. Task-priority redundancy resolution for underwater vehicle-manipulator systems. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, v. 1, 1998.

ANTONELLI, G.; CHIAVERINI, S.; SARKAR, N. An explicit force control scheme for underwater vehicle-manipulator systems. *Proceeding of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, v. 1, p. 136–141 vol.1, 1999.

ANTONELLI, G. et al. Adaptive control of an autonomous underwater vehicle: experimental results on odin. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 9, n. 5, p. 756–765, 2001. ISSN 1063-6536.

BAEZ, J. The octonions. *Bulletin-American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 39, n. 2, p. 145–206, 2002.

BAI, S.; HANSEN, M.; ANDERSEN, T. Modelling of a special class of spherical parallel manipulators with euler parameters. *Robotica*, Cambridge Univ Press, v. 27, n. 02, p. 161–170, 2009. ISSN 0263-5747.

BALLARD, D.; BROWN, C. *Computer Vision*. 1. ed. San Diego: Prentice Hall Professional Technical Reference, 1982.

BELFIORE, N.; BENEDETTO, A. D. Connectivity and redundancy in spatial robots. *The International Journal of Robotics Research*, v. 12, n. 19, p. 1245–1261, 2000.

BERANEK, R.; HAYES, M. Position level kinematics of the atlas motion platform. *Advances in Robot Kinematics: Motion in Man and Machine*, Springer, p. 385–392, 2010.

BUCHHEIM, A. A memoir on biquaternions. *American Journal of Mathematics*, The Johns Hopkins University Press, v. 7, n. 4, p. 293–326, 1885. ISSN 00029327.

CAMPOS, A. Cinemática diferencial de manipuladores empregando cadeias virtuais. *Tese de Doutorado, Engenharia Mecânica, UFSC*, 2004.

CAMPOS, A.; GUENTHER, R.; MARTINS, D. Differential kinematics of serial manipulators using virtual chains. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, SciELO Brasil, v. 27, p. 345–356, 2005.

CAO, Y. et al. Orientation-singularity and nonsingular orientation-workspace analyses of the stewart-gough platform using unit quaternion representation. *Control and Decision Conference (CCDC), 2010 Chinese*, p. 2282–2287, 2010.

CAPUSKA, S. et al. Manipulator robotics in use for decommissioning of a-1 nuclear power plant. 2005. *ICAR '05. Proceedings of the 12th International Conference on Advanced Robotics*, p. 123–128, 2005.

CARBONI, A. P. Análise conceitual de estruturas cinemáticas planas e espaciais. *Dissertação de Mestrado, Engenharia Mecânica, UFSC*, 2008.

CARRARA, V. Apostila de robótica. *Departamento de Engenharia Mecânica e Engenharia de Controle e Automação, Universidade Braz Cubas*, 2006.

CASTILLO-CRUCES, R.; WAHRBURG, J. Virtual fixtures with autonomous error compensation for human–robot cooperative tasks. *Robotica*, Cambridge Univ Press, v. 28, n. 02, p. 267–277, 2010. ISSN 0263-5747.

CHEN, G. et al. The study on algorithm for avoiding dynamics singularities of space robot. *IEEE International Conference on Control and Automation*, p. 780–785, 2010.

CHENIOT, D.; BRASSELET, J. *Singularity Theory: Dedicated to Jean-paul Brasselet on His 60th Birthday*. Marseille, France: World Scientific Pub Co Inc, 2007. (1, v. 1).

CHOI, S.; YUH, J. Experimental study on a learning control system with bound estimation for underwater robots. *Autonomous Robots*, Springer, v. 3, n. 2, p. 187–194, 1996.

CHYBA, M. et al. Increasing underwater vehicle autonomy by reducing energy consumption. *Ocean Engineering*, v. 36, n. 1, p. 62 – 73, 2009.

CLIFFORD, W. Applications of grassmann’s extensive algebra. *American Journal of Mathematics*, v. 1, n. 4, p. 350–358, 1878.

CLIFFORD, W. K. Preliminary sketch of biquaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society* 4, v. 64,65, p. 381–395, 1873.

CLIFFORD, W. K. On the classification of geometric algebras. *Mathematical Papers*, Paper XLIII, 1882.

CONCONI, M.; CARRICATO, M. A new assessment of singularities of parallel kinematic chains. *IEEE Transactions on Robotics*, v. 25, n. 4, p. 757–770, 2009.

CONKUR, E.; BUCKINGHAM, R. Clarifying the definition of redundancy as used in robotics. *Robotica*, Cambridge University Press, v. 15, n. 05, p. 583–586, 1997.

CONWAY, J.; SMITH, D. *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry*. 1. ed. Natick, MA: AK Peters, Ltd., 2003.

COOKE, J. M. et al. Npsnet: Flight simulation dynamic modeling using quaternions. In *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*, MIT Press, v. 2, n. 3, p. 244–258, 1994.

CRAIG, J. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. 2. ed. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1989.

CRUZ, D. F. M. Implementação da cinemática inversa em robos redundantes operando em ambientes confinados operando no projeto roboturb. *Dissertação de Mestrado, Engenharia Mecânica, UFSC*, 2007.

CUI, Y.; PODDER, T.; SARKAR, N. Impedance control of underwater vehicle-manipulator systems. *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, v. 1, p. 148–153 vol.1, 1999.

DENAVIT, J.; HARTENBERG, R. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Journal of Applied Mechanics*, v. 22, n. 2, p. 215–221, 1955.

DONELAN, P. Singularity-theoretic methods in robot kinematics. *Robotica*, Cambridge University Press, v. 25, n. 06, p. 641–659, 2007.

DOURADO, A. O. Cinemática de robôs cooperativos. *Dissertação de Mestrado, Engenharia Mecânica, UFSC*, 2005.

DUNBABIN, M. et al. Experiments with cooperative control of underwater robots. *The International Journal of Robotics Research*, Multimedia Archives, v. 28, n. 6, p. 815, 2009.

DUNNIGAN, M.; RUSSELL, G. Evaluation and reduction of the dynamic coupling between a manipulator and an underwater vehicle. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, v. 23, n. 3, p. 260–273, 1998. ISSN 0364-9059.

EGELAND, O. Task-space tracking with redundant manipulators. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, v. 3, n. 5, p. 471–475, 1987. ISSN 0882-4967.

EMIS. Classical papers: Sir william rowan hamilton (1805-1865): Mathematical papers. 2008. Disponível em: <<http://www.emis.ams.org-/classics/Hamilton/>>. Acesso em: 01 de julho de 2008.

ERDONG, J.; ZHAOWEI, S. Passivity-based control for a flexible spacecraft in the presence of disturbances. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, 2010.

FALTINSEN, O. *Sea Loads on Ships and Offshore Structures*. Phoenix: Cambridge University Press, 1993.

FOSSSEN, T. Adaptive macro-micro control of nonlinear underwater robotic systems. *Fifth International Conference on Advanced Robotics, Robots in Unstructured Environments*, p. 1569–1572 vol.2, 1991.

FOSSSEN, T. *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. Chichester, New York: Wiley, 1994.

FOSSSEN, T. A nonlinear unified state-space model for ship maneuvering and control in a seaway. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, World Scientific Publishing, v. 15, n. 9, p. 2717, 2005.

FROM, P. et al. Singularity-free dynamic equations of vehicle-manipulator systems. *Simulation Modelling Practice and Theory*, Elsevier, v. 18, n. 6, p. 712–731, 2010. ISSN 1569-190X.

FU, X. et al. A new robot system for auto-inspection of intersected welds of pipes used in nuclear power stations. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Springer, v. 28, n. 5, p. 596–601, 2006.

GARCIA, C. *Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos*. São Paulo, Brasil: EdUSP, 2005.

GARCIA-CEREZO, A. et al. Development of alacrane: A mobile robotic assistance for exploration and rescue missions. *IEEE International Workshop on Safety, Security and Rescue Robotics*, p. 1–6, 2007.

GEOPROF. O mar profundo. 2008. Disponível em: <<http://www.geoprof.org>>. Acesso em: 23 de janeiro de 2008.

GOODWINE, B.; NIGHTINGALE, J. The effect of dynamic singularities on robotic control and design. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, p. 5213–5218, 2010.

HAMILTON, W. On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, v. 2, p. 424–434, 1844.

HAMILTON, W. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *Philosophical Magazine*, v. 25, p. 10–13, 241–246, 489–495, 1844.

HAMILTON, W. On a theory of quaternions. *British Association Report 1844*, v. 2, p. 2, 1845.

HUBBLESITE. Gallery spacecraft hubble. 2008. Disponível em: <<http://hubblesite.org/gallery/spacecraft/>>. Acesso em: 20 de janeiro de 2008.

HUSTY, M.; SCHRÖCKER, H. Algebraic geometry and kinematics. *Nonlinear Computational Geometry*, Springer, p. 85–107, 2010.

- IMLAY, F. The complete expressions for added mass of a rigid body moving in an ideal fluid. DTIC Research Report AD0263966, 1961.
- ISENBERG, D.; KAKAD, Y. Quaternion based computed-torque and feed-forward tracking controllers for a space robot. *42nd Southeastern Symposium on System Theory (SSST)*, p. 232–236, 2010. ISSN 0094-2898.
- JOHNSON, S.; WILLIAMS, J.; COOK, B. On the application of quaternion-based approaches in discrete element methods. *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering*, Emerald Group Publishing Limited, v. 26, n. 6, p. 610–620, 2009.
- KHARCHENKO, V.; ILNYTSKA, S. Analysis of unmanned aerial vehicle kinematic equations integration algorithms. *Proceedings of the NAU*, 2010.
- KIM, J.; CHUNG, W. K.; YUH, J. Dynamic analysis and two-time scale control for underwater vehicle-manipulator systems. *Proceedings of the 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2003)*, v. 1, p. 577–582 vol.1, 2003.
- LAPIERRE, L.; FRAISSE, P.; DAUCHEZ, P. Position/force control of an underwater mobile manipulator. *Journal of Robotic Systems*, v. 20, n. 12, p. 707–722, 2003.
- LEABOURNE, K.; ROCK, S. Model development of an underwater manipulator for coordinated arm-vehicle control. *OCEANS '98 Conference Proceedings*, v. 2, p. 941–946 vol.2, 1998.
- LIZARRALDE, F.; WEN, J.; HSU, L. Quaternion-based coordinated control of a subsea mobile manipulator with only position measurements. *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control, New Orleans*, p. 2000–2005, 1995.
- MARTINS, D.; CARBONI, A. P. Variety and connectivity in kinematic chains. *Mechanism and Machine Theory*, Elsevier, 2008.
- MCMILLAN, S.; ORIN, D.; MCGHEE, R. Efficient dynamic simulation of an underwater vehicle with a robotic manipulator. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, v. 25, n. 8, p. 1194–1206, 1995. ISSN 0018-9472.
- MI, Z. et al. Determining the initial configuration of uninterrupted redundant manipulator trajectories in a manufacturing environment. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Elsevier, 2010.

NAGI, F. et al. Fuzzy bang-bang relay controller for satellite attitude control system. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 161, n. 15, p. 2104 – 2125, 2010.

NASA. Mars exploration rover mission. 2008. Disponível em: <<http://marsrover.nasa.gov/home/index.html>>. Acesso em: 20 de janeiro de 2008.

NEVATIA, R. *Machine Perception*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1982.

NIE, J. et al. On-board sensor-based adaptive control of small uavs in very shallow water. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 14, n. 4, p. 441–452, 2000.

OLIVEIRA, A. S.; PIERI, E. R. D.; MORENO, U. F. Análise cinemática via quatérnios duais. *XVIII Congresso Brasileiro de Automática, CBA2010*, v. 1, 2010.

PODDER, T.; ANTONELLI, G.; SARKAR, N. Fault tolerant control of an autonomous underwater vehicle underthruster redundancy: simulations and experiments. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA'00*, v. 2, 2000.

PODDER, T.; SARKAR, N. Fault tolerant decomposition of thruster forces of an autonomous underwater vehicle. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1999.

POUYAN, A. et al. Eliminating redundancy and singularity in robot path planning based on masking. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 37, n. 9, p. 6213–6217, 2010.

QIAO, S. et al. Inverse kinematic analysis of the general 6r serial manipulators based on double quaternions. *Mechanism and Machine Theory*, v. 45, n. 2, p. 193 – 199, 2010.

QIU, C.; CAO, Q.; MIAO, S. An on-line task modification method for singularity avoidance of robot manipulators. *Robotica*, Cambridge Univ Press, v. 27, n. 04, p. 539–546, 2009.

RIBEIRO, L. P. G. Modelagem cinemática de sistemas robóticos cooperativos: o jacobiano de cooperação. *Tese de Doutorado, Engenharia Mecânica, UFSC*, 2010.

ROLLETT, A. D. L3b rodrigues vectors and quaternions by seth wilson. *Department of Materials Science and Engineering, Texture & Anisotropy course*, 2009.

- ROONEY, J. On the three types of complex number and planar transformations. *Environment and Planning B*, v. 5, p. 89–99, 1978.
- ROONEY, J. William kingdon clifford. *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science: Their Contributions and Legacies*, Springer London, 2007.
- SAHU, S.; BISWAL, B.; SUBUDHI, B. A novel method for representing robot kinematics using quaternion theory. *Proceedings of the IEEE International Conference on Computational Intelligence, Control and Computer Vision in Robotics and Automation*, 2008.
- SANTOS, C. dos et al. Virtual kinematic chains to solve the underwater vehicle-manipulator systems redundancy. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, SciELO Brasil, v. 28, p. 354–361, 2006.
- SANTOS, C. H. F. Movimento coordenado de sistemas veículo-manipulador submarinos utilizando técnicas de inteligência artificial e sistemas híbridos. *Tese de Doutorado, Engenharia Elétrica, UFSC*, 2006.
- SANTOS, V. M. F. Robótica industrial. *Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro*, 2001.
- SARKAR, N.; PODDER, T. Coordinated motion planning and control of autonomous underwater vehicle-manipulator systems subject to drag optimization. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, v. 26, n. 2, p. 228–239, 2001. ISSN 0364-9059.
- SARKAR, N.; PODDER, T.; ANTONELLI, G. Fault-accommodating thruster force allocation of an auv considering thruster redundancy and saturation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 18, n. 2, p. 223–233, 2002.
- SARKAR, N.; YUH, J.; PODDER, T. Adaptive control of underwater vehicle-manipulator systems subject to joint limits. *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'99)*, v. 1, 1999.
- SARPKAYA, T. Fluid forces on oscillating cylinders. *Journal of the Waterway Port Coastal and Ocean Division*, v. 104, n. 3, p. 275–290, 1978.
- SCHILLINGROBOTICS. Remotely operated vehicles. 2008. Disponível em: <<http://www.schilling.com/products.php>>. Acesso em: 23 de janeiro de 2008.

SCHJOLBERG, I.; FOSSEN, T. Modeling and control of underwater vehicle-manipulator systems. *Proceedings of the 3rd Conference on Marine Craft Maneuvering and Control, Southampton, UK*, p. 45–57, 1994.

SCHUBAK, G.; SCOTT, D. A techno-economic comparison of power systems for autonomous underwater vehicles. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, v. 20, n. 1, p. 94–100, 1995. ISSN 0364-9059.

SCIAVICCO, L.; SICILIANO, B. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Spain: Springer, 2000.

SELIG, J. Clifford algebra of points, lines and planes. *Robotica*, Cambridge Univ Press, v. 18, n. 05, p. 545–556, 2000.

SELIG, J. *Geometric Fundamentals of Robotics*. New York: Springer Verlag, 2005.

SEWARD, D.; PACE, C.; AGATE, R. Safe and effective navigation of autonomous robots in hazardous environments. *Autonomous Robots*, Springer, v. 22, n. 3, p. 223–242, 2007.

SIMAS, H. Planejamento de trajetórias e evitamento de colisão em tarefas de manipuladores redundantes operando em ambientes confinados. *Tese de Doutorado, Engenharia Mecânica, UFSC*, 2008.

SNAME. Nomenclature for treating the motion of a submerged body through a fluid. technical and research bulletin no. 1-5. *The Society of Naval Architects and Marine Engineers*, 1950.

SOYLU, S.; BUCKHAM, B. J.; PODHORODESKI, R. P. Redundancy resolution for underwater mobile manipulators. *Ocean Engineering*, v. 37, n. 2-3, p. 325 – 343, 2010.

SPONG, M.; HUTCHINSON, S.; VIDYASAGAR, M. *Robot Modeling and Control*. Canada: Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2006.

STONE, H.; EDMONDS, G. Hazbot: a hazardous materials emergency response mobile robot. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 67–73 vol.1, 1992.

STRICKLAND, J. What is a gimbal – and what does it have to do with nasa? *HowStuffWorks.com - Discovery Company*, 2008. Disponível em: <<http://science.howstuffworks.com/gimbal.htm>>. Acesso em: 28 de outubro de 2010.

- SUN, Y.; CHEAH, C.; CHERN, C. Adaptive control schemes for autonomous underwater vehicle. *Robotica, Cambridge Univ Press*, v. 27, n. 01, p. 119–129, 2009.
- TABANDEH, S.; MELEK, W.; CLARK, C. An adaptive niching genetic algorithm approach for generating multiple solutions of serial manipulator inverse kinematics with applications to modular robots. *Robotica, Cambridge Univ Press*, v. 28, n. 04, p. 493–507, 2010. ISSN 0263-5747.
- TSAI, L. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. Canada: Wiley-Interscience, 1999.
- VICCI, L. Quaternions and rotations in 3-space: The algebra and its geometric interpretation. *TR01-014, Department of Computer Science, UNC, Chapel Hill, NC, Citeseer*, 2001.
- WANG, Y.; LANE, D. Subsea vehicle path planning using nonlinear programming and constructive solid geometry. *Proceedings of the IEEE Control Theory and Applications*, v. 144, n. 2, p. 143–152, 1997. ISSN 1350-2379.
- WARWICK, M. S. Quaternions and their importance. *Note 0525921, Mathematics Society, University of Warwick*, 2007. Disponível em: <[http://warwickmaths.org/files/Quaternions And Their Importance 65.pdf](http://warwickmaths.org/files/Quaternions%20And%20Their%20Importance%2065.pdf)>. Acesso em: 23 de janeiro de 2010.
- WHITE, J.; SUNAGAWA, T.; NAKAJIMA, T. Hazardous-duty robots - experiences and needs. *Proceedings of the IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems, The Autonomous Mobile Robots and Its Applications (IROS '89)*, p. 262–267, 1989.
- WORST, R.; LINNEMANN, R. Construction and operation of a snake-like robot. *IEEE International Joint Symposia on Intelligence and Systems*, p. 164–169, Nov 1996.
- XU, W. et al. Study on non-holonomic cartesian path planning of a free-floating space robotic system. *Advanced Robotics*, 23, VSP, an imprint of Brill, v. 1, n. 2, p. 113–143, 2009.
- YANG, Y.; O'BRIEN, J. A geometric approach for the design of singularity-free parallel robots. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '09)*, p. 1801–1806, 2009.
- YANG, Y.; O'BRIEN, J. A sequential method for the singularity-free workspace design of a three legged parallel robot. *Mechanism and Machine Theory*, Elsevier, 2010.

YUH, J. Underwater robotics. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '00)*, v. 1, p. 932–937 vol.1, 2000.

YUH, J.; NIE, J.; LEE, C. Experimental study on adaptive control of underwater robots. *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, v. 1, 1999.