UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

Soyara Carolina Biazotto

C*-ÁLGEBRAS DE GRAFOS COM LINHAS FINITAS

Florianópolis

2012

Soyara Carolina Biazotto

C*-ÁLGEBRAS DE GRAFOS COM LINHAS FINITAS

Dissertação submetida à Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica para a obtenção do Grau de mestre.
Orientador: Prof. Dr. Danilo Royer (UFSC)

Florianópolis

2012

Catalogação na fonte elaborada pela biblioteca da
Universidade Federal de Santa Catarina

A ficha catalográfica é confeccionada pela Biblioteca Central.

Tamanho: 7cm x 12 cm

Fonte: Times New Roman 9,5

Maiores informações em:
http://www.bu.ufsc.br/design/Catalogacao.html

Soyara Carolina Biazotto

C*-ÁLGEBRAS DE GRAFOS COM LINHAS FINITAS

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “mestre”, e aprovada em sua forma final pela Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Florianópolis, 10 de fevereiro 2012.

Prof. Dr. Ruy Exel Filho
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Danilo Royer (UFSC)
Orientador

Prof. Dr. Mikhajolo Dokuchaev (USP)

Prof. Dr. Daniel Gonçalves (UFSC)

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro (UFSC)

AGRADECIMENTOS

À Deus, acima de tudo, por me dar força e determinação.

Aos meus pais, Genete Maria e Osvaldino, pelo apoio incondicional.

Ao meu namorado Jociel, por sua compreensão infinita.

Ao meu orientador, prof. Dr. Danilo Royer, pela disposição para me orientar, dedicação e paciência durante a elaboração deste trabalho.

Aos professores, Mikhajolo Dokuchaev, Daniel Gonçalves e Gilles Gonçalves de Castro por aceitarem compor a banca e pelo tempo dedicado a leitura deste trabalho.

Ao amigo Gustavo Felisberto, por toda a ajuda com o LaTeX.

Ao amigo Alysson, por estar sempre a disposição para tirar dúvidas ou mesmo discutir sobre algum assunto.

À amiga Thiane, por toda a ajuda, principalmente no início do mestrado.

Aos colegas Edson de Souza Jr. e Scheila Nair Costa, pela amizade, apoio, estudos e momentos de descontração no início do mestrado.

À amiga Tiara Martini, por estar sempre presente desde o início da graduação.

À amiga Helena Martins, por sua amizade.

À todas as pessoas das salas 106, 107 e 107’ pela amizade, companhia, estudos, festinhas,...

À CAPES pelo suporte financeiro nestes dois anos.

RESUMO

Dado um grafo com linhas finitas E, vamos definir a C^*-álgebra associada a E, que denotaremos por $C^*(E)$, como sendo a C^*-álgebra universal gerada por uma E-família de Cuntz-Krieger. Através de um exemplo, mostraremos que a E-família de Cuntz-Krieger universal tem todos os elementos não nulos. Como a um grafo E podem existir muitas E-famílias de Cuntz-Krieger, e todas essas famílias geram C^*-álgebras, vamos mostrar algumas condições suficientes para que estas C^*-álgebras sejam isomorfas a $C^*(E)$. Também estudaremos a estrutura de ideais de $C^*(E)$.
Palavras-chave: grafo com linhas finitas. famílias de Cuntz-Krieger. C^*-álgebra de grafo.

ABSTRACT

Given a row-finite graph E, we are going to define the C^*-algebra associated to E, which we denote by $C^*(E)$, as the universal C^*-algebra generated by Cuntz-Krieger E-family. Through an example, we are going to show that the universal Cuntz-Krieger E-family has all the elements different from zero. Since there can be many Cuntz-Krieger family associated to a graph E, and all these families generate C^*-algebras, we are going to show sufficient conditions so that they are be isomorphic to $C^*(E)$. We will also study the ideal structure of $C^*(E)$.
Keywords: row finite graph. Cuntz-Krieger families. graph C^*-algebra.

LISTA DE SÍMBOLOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo de C^*-álgebras de grafos começou em 1980 com (2) publicado por J. Cuntz e W. Krieger. Neste trabalho, Cuntz e Krieger consideravam uma matriz quadrada A, com entradas em $\{0, 1\}$ e que não tinha nenhuma linha ou coluna nula, e associavam a essa matriz uma família de isometrias parciais em um espaço de Hilbert H. Eles definiam a C^*-álgebra $\mathcal{O}_A$ como sendo a C^*-álgebra universal gerada por uma família de isometrias parciais, satisfazendo certas relações.

No mesmo ano, o trabalho (3) de autoria de M. Enomoto e Y. Watatani, mostrava que dada uma matriz A era possível definir um grafo finito E_A e dado um grafo E era possível associar uma matriz A_E de forma que, nos dois casos, as C^*-álgebras $\mathcal{O}_A$ e $C^*(E)$ fossem isomorfas.

A partir destes trabalhos, a ideia de definir C^*-álgebra de grafo finito foi estendida para outros tipos de grafos, por exemplo, os grafos dirigidos e com linhas finitas.

Neste trabalho, um grafo dirigido $E = (E^0, E^1, r, s)$ consiste em dois conjuntos enumeráveis E^0 e E^1 e duas funções $r, s : E^0 \longrightarrow E^1$, sendo que E^0 é o conjunto dos vértices, E^1 o conjunto das arestas, e s, r as funções que determinam onde cada aresta começa e termina. Vamos dizer que E tem linhas finitas, quando cada vértice recebe apenas uma quantidade finitas de arestas.

Dado um grafo E, associaremos a cada vértice $v \in E^0$ uma projeção ortogonal P_v e a cada aresta $e \in E^1$ uma isometria parcial S_e, sendo que tanto as projeções como as isometrias parciais são elementos de alguma C^*-álgebra B. Dizemos que a família $\{S, P\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger se as projeções são mutuamente ortgonais e se duas outras propriedades são satisfeitas.

A C^*-álgebra de um grafo E, denotada por $C^*(E)$, é a C^*-álgebra universal gerada por uma E-família de Cuntz-Krieger.

A um único grafo E, podemos associar mais de uma E-família de Cuntz-Krieger e, sendo essas famílias subconjuntos de C^*-álgebras, estas geram C^*-subálgebras. Fica então a pergunta natural: Que relações existem entre essas C^*-álgebras? Mais especificamente, que relação existe entre uma C^*-álgebra dessas e a $C^*(E)$?

O objetivo do trabalho é determinar quando uma E-família de Cuntz-Krieger $\{T, Q\}$ em uma C^*-álgebra B, gera uma C^*-álgebra $C^*(T, Q)$, isomorfa a $C^*(E)$. Vamos provar dois teoremas, a saber, o Teorema da Invariância da Ação de Gauge e o Teorema da Unicidade de Cuntz-Krieger, que darão condições suficientes para a existência de tais isomorfismos.

Esse trabalho está dividido em quatro capítulos. No capítulo 1, vamos introduzir os conceitos fundamentais como definição de grafo, de caminho, de família de Cuntz-Krieger. Definiremos a C^*-álgebra de grafo, a partir da teoria de C^*-álgebra universal. Um resumo desta teoria pode ser encontrado no Apêndice B.

No Capítulo 2, mostraremos a existência de uma aplicação muito importante, denominada de ação de gauge. Também, vamos mostrar a existência de uma aplicação entre $C^*(E)$ e $C^*(E)$ que satisfaz propriedades semelhantes a uma esperança condicional. Estes são os resultados preliminares às provas dos Teoremas da Invariância da Ação de Gauge e da Unicidade de Cuntz-Krieger, que serão provados no próximo capítulo. No Capítulo 3, também colocamos uma seção mostrando os isomorfismos entre as C^*-álgebras $C^*(E)$ e $\mathcal{O}_A$, citadas no início do texto.

No capítulo 4, vamos caracterizar os ideais de $C^*(E)$.

É comum fazermos afirmações durante as provas dos resultados mais importantes. Sendo assim, vamos usar o símbolo $\square$ para indicar o término da prova de uma afirmação e $\blacksquare$ para indicar o término da prova de um lema, proposição ou teorema.

Pré-requitos sugeridos para a leitura deste trabalho: Teoria elementar de C^*-álgebra (definição, exemplos, espectro, elementos positivos,...); Representação de Gelfand, Teorema de Gelfand; estrutura de ideais da C^*-álgebra; representação de Gelfand-Naimark-Segal; Teorema de Gelfand-Naimark; etc...

Todos os pré-requisitos aqui citados, podem se encontrados nos três primeiros capítulos de (9).

1 GRAFOS DIRIGIDOS E FAMÍLIAS DE CUNTZ-KRIEGER

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos iniciais sobre grafos e famílias de Cuntz-Krieger. Nosso objetivo é definir a C^*-álgebra de um grafo e mostrar que esta satisfaz uma propriedade universal. Para tanto, vamos utilizar a teoria de C^*-álgebra universal, que está brevemente resumida do Apêndice B deste trabalho.

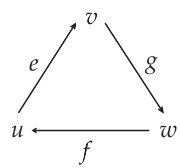
1.1 GRAFOS DIRIGIDOS

Nesta seção vamos definir grafo dirigido, grafo com linhas finitas e apresentar alguns exemplos.

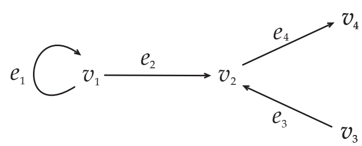
Definição 1.1.1 *Um grafo dirigido* $E = (E^0, E^1, r, s)$ *consiste em dois conjuntos enumeráveis* E^0 *e* E^1 *e duas funções* $r, s : E^1 \longrightarrow E^0$*. Os elementos de* E^0 *são chamados de vértices e os elementos de* E^1 *são chamados de arestas.*

Para cada $e \in E^1$*, s(e) é o vértice onde a aresta e começa, e r(e) é o vértice onde a aresta e termina.*

Exemplo 1.1.2 *Se* $E^0 = \{u, v, w\}$*,* $E^1 = \{e, f, g\}$*,* $s(e) = u$*,* $r(e) = v = s(g)$*,* $r(g) = w = s(f)$ *e* $r(f) = u$*, podemos representar este grafo* E *por:*



Exemplo 1.1.3 *Se* $E^0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *e* $E^1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$*,* $s(e_1) = r(e_1) = v_1 = s(e_2)$*,* $r(e_2) = r(e_3) = v_2 = s(e_4)$*,* $s(e_3) = v_3$ *e* $r(e_4) = v_4$*, podemos representar o grafo* E *por:*



Definição 1.1.4 *Uma aresta que começa e termina no mesmo vértice é chamada de loop.*

Um vértice que não recebe nenhuma aresta é chamado de source.

Um vértice que não emite nenhuma aresta é chamado de sink.

No grafo do Exemplo 1.1.3 temos que, a aresta e_1 é um loop que começa e termina no vértice v_1. Neste caso, dizemos que e_1 é um loop baseado em v_1. Neste mesmo grafo, v_3 é um source e v_4 é um sink.

Um mesmo grafo E pode ser representado por muitos desenhos diferentes. Neste trabalho, muitas vezes vamos fazer uso de algum desenho para facilitar o compreendimento da teoria mas sempre nos lembraremos que tudo o que for feito permanece quando estamos sem o desenho.

Para fins de facilitar a notação, sempre que escrevermos que E é um grafo dirigido (ou simplesmente, E é um grafo), estaremos pensando em $E = (E^0, E^1, r, s)$.

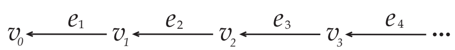
Definição 1.1.5 *Seja E um grafo dirigido. Dizemos que E é um grafo de linhas finitas se todo vértice $v \in E^0$ recebe apenas uma quantidade finita de arestas. Em outras palavras,*

$$\#\{r^{-1}(v)\} < \infty,$$

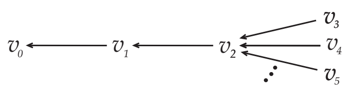
$\forall v \in E^0$.

Observe que, é possível que $\{r^{-1}(v)\} = \emptyset$. Por exemplo, se v é source então $\{r^{-1}(v)\} = \emptyset$.

Exemplo 1.1.6 *O seguinte grafo tem linhas finitas.*



Exemplo 1.1.7 *O seguinte grafo não tem linhas finitas.*



Neste trabalho vamos considerar apenas grafos dirigidos e de linhas finitas, ou seja, toda vez que falarmos em grafo, estamos pensando em um grafo dirigido e de linhas finitas.

1.2 FAMÍLIAS DE CUNTZ-KRIEGER

Dado um grafo E, vamos representá-lo por operadores lineares e limitados em $B(H)$, em que, H é algum espaço de Hilbert. A ideia é associar a cada vértice e a cada aresta de E um operador em $B(H)$ de forma que esses operadores preservem propriedades do grafo E.

Definição 1.2.1 *Seja E um grafo e H um espaço de Hilbert. Uma E-família de Cuntz-Krieger $\{S, P\}$ em $B(H)$ consiste em um conjunto $\{P_v : v \in E^0\}$ de projeções mutuamente ortogonais em $B(H)$ e um conjunto $\{S_e : e \in E^1\}$ de isometrias parciais em $B(H)$ que satisfazem:*

$(CK1)$ $S_e^* S_e = P_{s(e)}$, $\forall e \in E^1$.

$(CK2)$ $P_v = \displaystyle\sum_{e \in r^{-1}(v)} S_e S_e^*$, $\forall v \in E^0$ *tal que v não é source.*

Observação 1.2.2 *Como estamos considerando grafos com linhas finitas, temos a garantia de que a soma em $(CK2)$ é finita.*

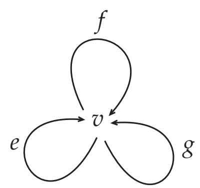
Quando consideramos grafos que não tem linhas finitas, em geral, não podemos manter essa mesma definição de família de Cuntz-Krieger. De fato, basta perceber que se o grafo não tem linhas finitas pode ocorrer da soma em $(CK2)$ ser infinita. Neste caso, como garantir que essa soma converge?

Em geral, é possível adaptar os resultados obtidos de grafos com linhas finitas para grafos arbitrários. Isso pode ser encontrado em (10).

As definições de projeções mutuamente ortogonais e isometrias parciais podem ser encontradas no Apêndice A deste trabalho. Lá também estão citadas algumas propriedades que estas satisfazem, que serão utilizadas (mencionadas ou não) nos próximos resultados.

A seguir, vamos apresentar alguns exemplos de grafos e respectivas famílias de Cuntz-Krieger.

Exemplo 1.2.3 *Considere o seguinte grafo E:*



Vamos definir uma família de Cuntz-Krieger para E.

Considere $H = l^2(\mathbb{N})$. *Neste exemplo estamos pensando* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

Note que a E-família de Cuntz-Krieger deve satisfazer:

$$S_e^*S_e = S_f^*S_f = S_g^*S_g = P_v,$$

$$P_v = S_eS_e^* + S_fS_f^* + S_gS_g^*.$$

Seja $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *a base canônica de* $l^2(\mathbb{N})$. *Defina:*

$$\begin{array}{rccc} P_v\colon & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & \delta_n \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} S_e\colon & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & \delta_{3n} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} S_f\colon & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & \delta_{3n+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} S_g\colon & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & \delta_{3n+2} \end{array}$$

Vamos mostrar que $\{S, P\}$ *é uma E-família de Cuntz-Krieger em* $l^2(\mathbb{N})$.

Claro que P_v *é projeção.*

Temos que,

$$\begin{array}{rccc} S_e^*\colon & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (x_0, x_3, x_6, x_9, \cdots) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} S_f^*\colon & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (x_1, x_4, x_7, x_{10}, \cdots) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} S_g^*\colon & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (x_2, x_5, x_8, x_{11}, \cdots) \end{array}$$

Vamos mostrar que $(CK1)$ *é satisfeita. Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$. *Temos que,*

$$S_e^*S_e((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = S_e^*(x_0, 0, 0, x_1, 0, 0, x_2, 0, 0, x_3, 0, \cdots) =$$

$$= (x_0, x_1, x_2, \cdots) =$$

$$= P_v((x_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

Logo, $(CK1)$ é satisfeita para $e \in E^1$.

Analogamente, mostra-se que $(CK1)$ é satisfeita para $f, g \in E^1$.

Vamos mostrar que $(CK2)$ é satisfeita. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$. Temos que,

$$(S_eS_e^*+S_fS_f^*+S_gS_g^*)((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = S_e(x_0,x_3,x_6,\cdots)+S_f(x_1,x_4,x_7,\cdots)+$$

$$+S_g(x_2,x_5,x_8,\cdots) =$$

$$= (x_0,0,0,x_3,0,0,x_6,\cdots) + (0,x_1,0,0,x_4,0,0,x_7,\cdots)+$$

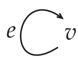
$$+(0,0,x_2,0,0,x_5,0,0,x_8,\cdots) =$$

$$= (x_0,x_1,x_2,x_3,\cdots) =$$

$$= P_v((x_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

Logo, $(CK2)$ é satisfeita. Portanto, $\{S,P\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $B(l^2(\mathbb{N}))$.

Exemplo 1.2.4 *Considere o seguinte grafo E:*



Vamos defimir uma família de Cuntz-Krieger para E. Note que, a família deve satisfazer $S_e^*S_e = P_v = S_eS_e^*$, ou seja, tomando P_v como o operador identidade devemos ter que S_e é um elemento unitário. Seja $H = \mathbb{C}$ e $\theta \in \mathbb{R}$ fixo. Defina,

$$\begin{array}{rccc} S_e\colon & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & e^{it} & \longmapsto & e^{it}e^{i\theta} \end{array}$$

Temos que, $S_e^*S_e(e^{it}) = S_e^*(e^{it}e^{i\theta}) = e^{it}$. Logo, S_e é isometria parcial e $(CK1)$ é satisfeita. Também, $S_eS_e^*(e^{it}) = S_e(e^{it}e^{-i\theta}) = e^{it}$. Logo, $(CK2)$ é satisfeita.

Portanto, $\{S,P\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $B(\mathbb{C})$.

Exemplo 1.2.5 *Considere o seguinte grafo E,*

$$v_0 \xleftarrow{\;e_1\;} v_1 \xleftarrow{\;e_2\;} v_2 \xleftarrow{\;e_3\;} v_3 \xleftarrow{\;e_4\;} \cdots$$

Vamos determinar uma família de Cuntz-Krieger para este grafo.

Seja $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base canônica do $l^2(\mathbb{N})$. Novamente, estamos pensando $\mathbb{N} = \{0,1,2,\cdots\}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina:

$$\begin{array}{rccc} P_{v_i}: & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 0, & se & n \neq i, \\ \delta_i, & se & n = i. \end{array} \right. \end{array}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *defina,*

$$\begin{array}{rccc} S_{e_i}: & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 0, & se & n \neq i, \\ \delta_{i-1}, & se & n = i. \end{array} \right. \end{array}$$

Vamos mostrar que $\{S, P\}$ *é uma* E*-família de Cuntz-Krieger em* $K(l^2(\mathbb{N}))$*, em que* $K(l^2(\mathbb{N}))$ *é o conjunto dos operadores compactos de* $l^2(\mathbb{N})$*.*

Claro que $\{P_{v_i} : i \in \mathbb{N}\}$ *é uma família de projeções mutuamente ortogonais.*

Temos que,

$$\begin{array}{rccc} S^*_{e_i}: & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 0, & se & n \neq i-1, \\ \delta_i, & se & n = i-1. \end{array} \right. \end{array}$$

Vamos mostrar que $(CK1)$ *é satisfeita. Fixe* $e_i \in E^1$*. Temos que,*

$$S^*_{e_i} S_{e_i}(\delta_n) = \left\{ \begin{array}{lll} 0, & se & n \neq i, \\ S^*_{e_i}(\delta_{i-1}), & se & n = i. \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} 0, & se & n \neq i, \\ \delta_i, & se & n = i. \end{array} \right.$$

$$= P_{v_i}(\delta_n) =$$

$$= P_{s(e_i)}(\delta_n).$$

Logo, $(CK1)$ *é satisfeita.*

Vamos mostrar que $(CK2)$ *é satisfeita. Seja* $v_i \in E^0$*. Temos que,*

$$\sum_{e \in r^{-1}(v_i)} S_e S^*_e = S_{e_{i+1}} S^*_{e_{i+1}},$$

e que,

$$S_{e_{i+1}} S^*_{e_{i+1}}(\delta_n) = \left\{ \begin{array}{lll} 0, & se & n \neq (i+1)-1, \\ S_{e_{i+1}}(\delta_{i+1}), & se & n = (i+1)-1. \end{array} \right. =$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} 0, & se & n \neq i, \\ \delta_i, & se & n = i. \end{array} \right. =$$

$$= P_{v_i}(\delta_n).$$

Logo, $(CK2)$ é satisfeita.

Portanto, $\{S, P\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $B(l^2(\mathbb{N}))$.

Note que, $\{S, P\}$ é uma família de operadores limitados e de posto 1, ou seja, é uma família de operadores compactos.

Portanto, $\{S, P\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $K(l^2(\mathbb{N}))$.

Observação 1.2.6 *Até agora definimos o conceito de uma E-família de Cuntz-Krieger apenas em $B(H)$, em que H é algum espaço de Hilbert H. Mas neste trabalho, estamos interessados em estudar estes conceitos em uma C^*-álgebra qualquer. Como os conceitos de projeções e isometrias parciais existem na teoria de C^*-álgebras (veja Definição A.1.8 e Definição A.1.9) a nossa definição de E-familía Cuntz-Krieger permanece a mesma.*

Definição 1.2.7 *Seja E um grafo e B uma C^*-álgebra. Uma E-família de Cuntz-Krieger $\{S, P\}$ em B consiste em um conjunto $\{P_v : v \in E^0\}$ de projeções mutuamente ortogonais em B e um conjunto $\{S_e : e \in E^1\}$ de isometrias parciais em B que satisfazem:*

$(CK1)$ $S_e^* S_e = P_{s(e)}$, $\forall e \in E^1$.

$(CK2)$ $P_v = \displaystyle\sum_{e \in r^{-1}(v)} S_e S_e^*$, $\forall v \in E^0$ *tal que v não é source.*

Proposição 1.2.8 *Seja E um grafo e $\{S, P\}$ uma E-família de Cuntz-Krieger em uma C^*-álgebra B. Para cada $e \in E^1$ temos que,*

$$S_e = P_{r(e)} S_e = S_e P_{s(e)}.$$

Prova: Fixe $e \in E^1$.

Vamos mostrar que $S_e = S_e P_{s(e)}$. Como S_e é uma isometria parcial na C^*-álgebra B temos que (veja Definição A.1.9):

$$S_e = S_e S_e^* S_e = S_e P_{s(e)}.$$

Vamos mostrar que $S_e = P_{r(e)} S_e$. Temos que,

$$P_{r(e)} S_e = \left(\sum_{f \in r^{-1}(r(e))} S_f S_f^* \right) S_e =$$

$$= \left(\sum_{f \in r^{-1}(r(e))} S_f S_f^* \right) S_e S_e^* S_e =$$

$$= \sum_{f \in r^{-1}(r(e))} (S_f S_f^*)(S_e S_e^*) S_e.$$

Note que, para cada $f \in E^1$ temos que $S_f S_f^*$ é uma projeção. Além disso, como $\sum_{f \in r^{-1}(r(e))} S_f S_f^*$ é uma projeção, então pela Proposição A.1.10, temos que $(S_f S_f^*)(S_e S_e^*) = 0$ sempre que $e \neq f$.

Segue que,

$$P_{r(e)} S_e = \sum_{f \in r^{-1}(r(e))} (S_f S_f^*)(S_e S_e^*) S_e = (S_e S_e^*)(S_e S_e^*) S_e = (S_e S_e^*) S_e = S_e.$$

Portanto,

$$S_e = P_{r(e)} S_e = S_e P_{s(e)}.$$

■

Proposição 1.2.9 *Seja E um grafo e $\{S, P\}$ uma E-família de Cuntz-Krieger em uma C^*-álgebra B. Então:*

1. *As projeções $\{S_e S_e^* : e \in E^1\}$ são mutuamente ortogonais.*
2. *Se $S_e^* S_f \neq 0$ então $e = f$.*
3. *Se $S_e S_f \neq 0$ então $s(e) = r(f)$.*
4. *Se $S_e S_f^* \neq 0$ então $s(e) = s(f)$.*

Prova:

1. Claro que $\{S_e S_e^* : e \in E^1\}$ são projeções. Vamos mostrar que são mutuamente ortogonais. Sejam $e, f \in E^1$ tais que $e \neq f$.

   Se $r(e) = r(f) = v$ então $S_e S_e^*, S_f S_f^*$ são parcelas da soma $\sum_{g \in r^{-1}(v)} S_g S_g^* = P_v$.

   Como P_v é projeção, pela Proposição A.1.10 podemos concluir que $S_e S_e^* S_f S_f^* = 0$.

Se $r(e) \neq r(f)$ então,

$$(S_e S_e^*)(S_f S_f^*) = S_e(S_e^* P_{r(e)})(P_{r(f)} S_f) S_f^* = 0.$$

Portanto, $\{S_e S_e^* : e \in E^1\}$ são projeções mutuamente ortogonais.

2. Suponha que $e \neq f$. Então pelo item 1., $(S_e S_e^*)(S_f S_f^*) = 0$. Logo,

$$S_e^* S_f = (S_e^* S_e S_e^*)(S_f S_f^* S_f) = S_e^*(S_e S_e^* S_f S_f^*) S_f = 0.$$

3. Suponha que $s(e) \neq r(f)$. Então,

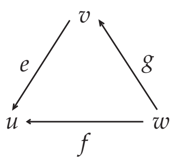
$$S_e S_f = (S_e P_{s(e)})(P_{r(f)} S_f) = S_e(P_{s(e)} P_{r(f)}) S_f = 0.$$

4. Suponha que $s(e) \neq s(f)$. Então,

$$S_e S_f^* = (S_e P_{s(e)})(P_{s(f)} S_f^*) = S_e(P_{s(e)} P_{s(f)}) S_f^* = 0.$$

■

Exemplo 1.2.10 *Seja E o seguinte grafo:*



Seja $\{S, P\}$ uma E-família de Cuntz-Krieger. Pela proposição anterior temos que:

$$S_e S_g^* = S_e S_f^* = S_g S_e = S_g S_f = S_e S_f = 0.$$

Observação 1.2.11 *Note que, na proposição anterior, o fato de que $s(e) = r(f)$ não implica que $S_e S_f \neq 0$, bem como, o fato de que $s(e) = s(f)$ não implica que $S_e S_f^* \neq 0$.*

De fato, basta por exemplo, tomar a E-família de Cuntz-Krieger que tem todos os elementos nulos.

1.3 UM EXEMPLO IMPORTANTE

A seguir mostraremos que dado qualquer grafo E, sempre existe uma E-família de Cuntz-Krieger em $B(l^2(\mathbb{N}))$ que tem todas as projeções não nulas. A existência de tal família nos permitirá provar vários resultados no decorrer do trabalho.

A construção que aqui apresentaremos está baseada em construções descritas em (4) e (5).

Exemplo 1.3.1 *Seja E um grafo.*

Vamos determinar uma E-família de Cuntz-Krieger $\{S, P\}$ em $B(l^2(\mathbb{N}))$ da seguinte forma.

Divida o conjunto dos números naturais em $\#\{E^0\}$ subconjuntos infinitos e disjuntos. Denomine esses subconjuntos de D_v, onde $v \in E^0$.

Para cada $v \in E^0$ que não é source, divida o conjunto D_v em $\#\big\{e \in E^1 : r(e) = v\big\}$ subconjuntos infinitos e disjuntos. Denomine esses subconjuntos por R_f, em que $f \in \big\{e \in E^1 : r(e) = v\big\}$. Note que,

$$D_v = \bigcup_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} R_e,$$

e essa união é disjunta.

Para cada $e \in E^1$ defina uma bijeção:

$$f_e : D_{s(e)} \longrightarrow R_e.$$

Note que, sempre existem tais bijeções, pois $D_{s(e)}$ e R_e são subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$.

Vamos definir uma E-família de Cuntz-Krieger em $B(l^2(\mathbb{N}))$. Seja $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base canônica do $l^2(\mathbb{N})$.

Para cada $e \in E^1$ defina,

$$\begin{array}{cccc} S_e\text{:} & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & [n \in D_{s(e)}]\delta_{f_e(n)} \end{array}$$

em que,

$$[n \in D_{s(e)}] = \begin{cases} 0, & se \quad n \notin D_{s(e)}, \\ 1, & se \quad n \in D_{s(e)}. \end{cases}$$

Para cada $v \in E^0$ defina,

$$\begin{array}{cccc} P_v\text{:} & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & [n \in D_v]\delta_n \end{array}$$

em que,

$$[n \in D_v] = \begin{cases} 0, & se \quad n \notin D_v, \\ 1, & se \quad n \in D_v. \end{cases}$$

Vamos mostrar que $\{S, P\}$ *é uma E-família de Cuntz-Krieger.*

Afirmação 1 *O conjunto* $\{P_v : v \in E^0\}$ *é uma família de projeções mutuamente ortogonais.*

Prova:
Vamos mostrar que $P_v^* = P_v$.
Fixe $v \in E^0$. *Sejam* $n, m \in \mathbb{N}$.
Se $n, m \in D_v$ *então,*

$$\langle P_v(\delta_n), \delta_m \rangle = \langle \delta_n, \delta_m \rangle = \langle \delta_n, P_v(\delta_m) \rangle.$$

Se $n \in D_v$ *e* $m \notin D_v$ *então* $n \neq m$. *Logo,*

$$\langle P_v(\delta_n), \delta_m \rangle = \langle \delta_n, \delta_m \rangle = 0 = \langle \delta_n, 0 \rangle = \langle \delta_n, P_v(\delta_m) \rangle.$$

Analogamente, se $n \notin D_v$ *e* $m \in D_v$ *temos que* $\langle P_v(\delta_n), \delta_m \rangle = 0 = \langle \delta_n, P_v(\delta_m) \rangle$.
Se $n, m \notin D_v$ *então*

$$\langle P_v(\delta_n), \delta_m \rangle = 0 = \langle \delta_n, P_v(\delta_m) \rangle.$$

Portanto, $P_v^* = P_v$.

Vamos mostrar que $P_v^2 = P_v$.
Fixe $v \in E^0$. *Seja* $n \in \mathbb{N}$.
Se $n \in D_v$ *então,*

$$P_v^2(\delta_n) = P(\delta_n) = \delta_n = P_v(\delta_n).$$

Se $n \notin D_v$ *então,*

$$P_v^2(\delta_n) = P(0) = 0 = P_v(\delta_n).$$

Portanto, $P_v^2 = P_v$.

Vamos mostrar que as projeções são mutuamente ortogonais.
Fixe $v, w \in E^0, \quad v \neq w$. *Seja* $n \in \mathbb{N}$.
Se $n \in D_v$ *então* $n \notin D_w$. *Logo,* $P_v P_w(\delta_n) = P_v(0) = 0$.

Se $n \notin D_v$ *então,*

$$P_v P_w(\delta_n) = P_v(0) = 0, \quad se \quad n \notin D_w.$$

$$P_v P_w(\delta_n) = P_v(\delta_n) = 0, \quad se \quad n \in D_w.$$

Portanto, as projeções são mutuamente ortogonais.

$\square$

Afirmação 2 *Para cada* $e \in E^1$, *o adjunto do operador* S_e *é dado por:*

$$\begin{array}{cccc} S_e^*: & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & [n \in R_e]\delta_{f_e^{-1}(n)} \end{array}$$

Prova: *Para verificarmos que a aplicação* S_e^* *definida acima é o operador adjunto de* S_e, *devemos mostrar que, para cada* $x, y \in l^2(\mathbb{N})$,

$$\langle S_e(x), y\rangle = \langle x, S_e^*(y)\rangle.$$

Porém, da linearidade e continuidade do operador S_e^*, *é suficiente mostrar que,*

$$\langle S_e(\delta_n), \delta_m\rangle = \langle \delta_n, S_e^*(\delta_m)\rangle,$$

$\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Fixe $e \in E^1$. *Sejam* $n, m \in \mathbb{N}$. *Temos quatro casos para considerar.*

Se $n \in D_{s(e)}$ *e* $m \in R_e$ *então,*

$$\langle S_e(\delta_n), \delta_m\rangle = \langle \delta_{f_e(n)}, \delta_m\rangle = \begin{cases} 0, & se \quad f_e(n) \neq m \\ 1, & se \quad f_e(n) = m \end{cases} \quad e,$$

$$\langle \delta_n, S_e^*(\delta_m)\rangle = \langle \delta_n, \delta_{f_e^{-1}(m)}\rangle = \begin{cases} 0, & se \quad n \neq f_e^{-1}(m) \\ 1, & se \quad n = f_e^{-1}(m) \end{cases}$$

Logo, $\langle S_e(\delta_n), \delta_m\rangle = \langle \delta_n, S_e^*(\delta_m)\rangle$.

Se $n \in D_{s(e)}$ *e* $m \notin R_e$, *então* $f_e(n) \neq m$. *Logo,*

$$\langle S_e(\delta_n), \delta_m\rangle = \langle \delta_{f_e(n)}, \delta_m\rangle = 0 \quad e,$$

$$\langle \delta_n, S_e^*(\delta_m) \rangle = \langle \delta_n, 0 \rangle = 0.$$

Logo, $\langle S_e(\delta_n), \delta_m \rangle = 0 = \langle \delta_n, S_e^*(\delta_m) \rangle$.

Se $n \notin D_{s(e)}$ *e* $m \notin R_e$ *então,*

$$\langle S_e(\delta_n), \delta_m \rangle = 0 = \langle \delta_n, S_e^*(\delta_m) \rangle.$$

Se $n \notin D_{s(e)}$ *e* $m \in R_e$*, então* $f_e^{-1}(n) \neq n$*. Logo,*

$$\langle S_e(\delta_n), \delta_m \rangle = 0 = \langle \delta_n, \delta_{f_e^{-1}(m)} \rangle = 0.$$

Logo, $\langle S_e(\delta_n), \delta_m \rangle = 0 = \langle \delta_n, S_e^*(\delta_m) \rangle$.

Portanto, S_e^* *é o adjunto do operador* S_e*.*

□

Afirmação 3 *Para cada* $e \in E^1$*,* $S_e^* S_e = P_{s(e)}$*.*

Prova: *Fixe* $e \in E^1$*. Seja* $n \in \mathbb{N}$*.*
Se $n \in D_{s(e)}$ *então,*

$$S_e^* S_e(\delta_n) = S_e^*(\delta_{f_e(n)}) = \delta_n = P_{s(e)}(\delta_n).$$

Se $n \notin D_{s(e)}$ *então,*

$$S_e^* S_e(\delta_n) = S_e^*(0) = 0 = P_{s(e)}(\delta_n).$$

Como $S_e^* S_e$ *e* $P_{s(e)}$ *são lineares e contínuos, podemos concluir que* $S_e^* S_e = P_{s(e)}$*.*

□

Note que, a afirmação anterior mostra que o operador S_e *é uma isometria parcial e que a relação* $(CK1)$ *é satisfeita.*

Afirmação 4 *Para cada* $v \in E^0$ *que não é source, temos que*

$$P_v = \sum_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} S_e S_e^*.$$

Prova: *Fixe* $v \in E^0$*. Seja* $n \in \mathbb{N}$*.*
Caso 1: *Se* $n \in D_v$*.*

Neste caso, $P_v(\delta_n) = \delta_n$. *Por outro lado, como*

$$D_v = \bigcup_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} R_e$$

e essa união é disjunta, existe um único $f \in \{e \in E^1 : r(e) = v\}$ *tal que* $n \in R_f$.

Segue que, se $e \in \{e \in E^1 : r(e) = v\}$, $e \neq f$, *então* $S_e S_e^*(\delta_n) = S_e(0) = 0$. *Logo,*

$$\sum_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} S_e S_e^*(\delta_n) = S_f S_f^*(\delta_n) = \delta_n.$$

Como $\sum_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} S_e S_e^*$ *e* P_v *são lineares e contínuos e coincidem nos elementos da base, podemos concluir que* $(CK2)$ *é satisfeita.*

Caso 2: *Se* $n \notin D_v$.

Como $n \notin D_v$ *então* $P_v(\delta_n) = 0$.

Como $D_v = \bigcup_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} R_e$ *e* $n \notin D_v$ *então, para toda aresta e tal que* $r(e) = v$ *temos que,* $n \notin R_e$, .

Logo, se $e \in E^1$ *é tal que* $r(e) = v$ *então* $S^*(\delta_n) = 0$. *Portanto,*

$$\sum_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} S_e S_e^*(\delta_n) = 0 = P_v(\delta_n).$$

Portanto, a condição $(CK2)$ *é satisfeita.* $\square$

Portanto, $\{S, P\}$ *é uma E-família de Cuntz-Krieger em* $B(l^2)(\mathbb{N})$.

O exemplo que acabamos de construir é extremamente importante por dois motivos: o primeiro deles, é que dado qualquer grafo, sempre existe uma família de Cuntz-Krieger, associada e ele; o segundo motivo, é que dado qualquer grafo, existe pelo menos uma família de Cuntz-Krieger na qual as projeções são todas não nulas.

1.4 CAMINHOS EM GRAFOS

Quando olhamos para um grafo é natural fazermos, mentalmente, caminhos ou trajetos emendando arestas.

Nesta seção, vamos definir formalmente o que é um caminho em um grafo e provaremos algumas propriedades por ele satisfeita.

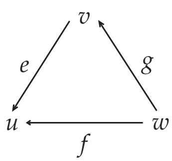
Veremos que algumas propriedades são consequências diretas das propriedades provadas para arestas. Os resultados restantes seguem destes resultados.

Esta seção é importante, pois vai fornecer muitas ferramentas que serão utilizadas no decorrer de todo o trabalho.

Definição 1.4.1 *Seja E um grafo. Um caminho μ em E é uma sequência $\mu = \mu_1\mu_2\cdots\mu_n$ de arestas de E^1 tais que*

$$s(\mu_i) = r(\mu_{i+1}), \quad \forall 1 \leq i \leq n-1.$$

Exemplo 1.4.2 *Considere o seguinte grafo E:*



Temos que eg é um caminho em E. Note que, ef ou gf não são caminhos.

Definição 1.4.3 *Seja μ um caminho em um grafo E. O comprimento ou tamanho do caminho μ é o número de arestas que ele contém e será denotado por $|\mu|$.*

Por exemplo, um caminho $\mu = \mu_1\mu_2\cdots\mu_n$ tem comprimento $|\mu| = n$.

Por definição, os vértices têm comprimento 0.

Definição 1.4.4 *Seja E um grafo. Vamos denotar por E^n o conjunto de todos os caminhos de μ que tem comprimento n. Além disso,*

$$E^* = E^0 \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E^n.$$

É comum encontrarmos grafos que têm caminhos de comprimento infinito. Observe que esses caminhos não pertencem ao conjunto E^*.

De acordo com a definição acima, E^0 e E^1 são os conjuntos de caminhos de tamanho 0 e 1 respectivamente, ou seja, o conjunto dos vértices e o conjunto das arestas. Dessa forma, a nossa definição inicial dos conjuntos E^0 e E^1 permanece inalterada.

Vamos estender as funções $s, r : E^1 \longrightarrow E^0$ para o conjunto E^*, ou seja, queremos que dado um caminho μ, $s(\mu)$ seja o vértice onde esse caminho começa e $r(\mu)$ seja o vértice onde o caminho termina.

Definição 1.4.5 *Seja E um grafo e μ um caminho em E. Definimos*

$$s(\mu) = s(\mu_{|\mu|}) \qquad e \qquad r(\mu) = r(\mu_1).$$

Exemplo 1.4.6 *Considere o seguinte caminho $\mu = \mu_1\mu_2\mu_3$:*

$$v_0 \xleftarrow{\mu_1} v_1 \xleftarrow{\mu_2} v_2 \xleftarrow{\mu_3} v_3$$

Temos que, $s(\mu) = s(\mu_3) = v_3$ e $r(\mu) = r(\mu_1) = v_0$.

Se μ e ν são caminhos em um grafo E tais que $s(\mu) = r(\nu)$, então de acordo com a nossa definição de caminho, $\mu\nu$ é um caminho e, pode ser representado por:

$$\mu\nu = \mu_1\mu_2 \cdots \mu_{|\mu|}\nu_1\nu_2 \cdots \nu_{|\nu|}.$$

Seja E um grafo e $\{S, P\}$ uma E-família de Cuntz-Krieger em alguma C^*-álgebra B. Estamos interessados em caracterizar os produtos finitos de elementos da família $\{S, P\}$.

Definição 1.4.7 *Seja $\{S, P\}$ uma E-família de Cuntz-Krieger. Para $\mu = \mu_1\mu_2 \cdots \mu_n \in \prod_{i=1}^n E^1$ definimos,*

$$S_\mu = S_{\mu_1}S_{\mu_2} \cdots S_{\mu_n}.$$

Para todo $v \in E^0$, definimos $S_v = P_v$.

Observação 1.4.8 *Se $\mu = \mu_1\mu_2 \cdots \mu_n$ não é um caminho, ou seja, se existe $1 \leq i \leq n$ tal que $s(\mu_i) \neq r(\mu_{i+1})$, então pela Proposição 1.2.9, temos que $S_{\mu_i}S_{\mu_{i+1}} = 0$.*

Portanto, $S_\mu = 0$ sempre que μ não é um caminho.

Proposição 1.4.9 *Se μ é uma caminho em um grafo E então $S_\mu^* S_\mu = P_{s(\mu)}$, ou seja, S_μ é uma isometria parcial.*

Prova: Seja $\mu = \mu_1\mu_2\cdots\mu_n$. Temos que,

$$S_\mu^* S_\mu = (S_{\mu_1}S_{\mu_2}\cdots S_{\mu_n})^*(S_{\mu_1}S_{\mu_2}\cdots S_{\mu_n}) =$$

$$= S_{\mu_n}^* S_{\mu_{n-1}}^* \cdots S_{\mu_2}^*(S_{\mu_1}^* S_{\mu}1)S_{\mu_2}S_{\mu_3}\cdots S_{\mu_n}) =$$
$$= S_{\mu_n}^* S_{\mu_{n-1}}^* \cdots S_{\mu_2}^*(P_{s(\mu_1)}S_{\mu_2})S_{\mu_3}\cdots S_{\mu_n}) =$$
$$= S_{\mu_n}^* S_{\mu_{n-1}}^* \cdots S_{\mu_2}^*(P_{r(\mu_2)}S_{\mu_2})S_{\mu_3}\cdots S_{\mu_n}) =$$
$$= S_{\mu_n}^* S_{\mu_{n-1}}^* \cdots S_{\mu_3}(S_{\mu_2}^* S_{\mu_2})S_{\mu_3}\cdots S_{\mu_n}) =$$
$$= S_{\mu_n}^* S_{\mu_{n-1}}^* \cdots S_{\mu_3}^* P_{s(\mu_2)}S_{\mu_3}\cdots S_{\mu_n}) =$$
$$\vdots$$
$$= S_{\mu_n}^* S_{\mu_n} =$$
$$= P_{s(\mu_n)} =$$
$$= P_{s(\mu)}.$$

Portanto, $S_\mu^* S_\mu = P_{s(\mu)}$. ■

Proposição 1.4.10 *Se μ é um caminho em um grafo E então $S_\mu = S_\mu P_{s(\mu)}$.*

Prova: Como $s(\mu) = s(\mu_{|\mu|})$ temos que,

$$S_\mu P_{s(\mu)} = S_{\mu_1}S_{\mu_2}\cdots S_{\mu_{|\mu|}}P_{s(\mu_{|\mu|})} = S_{\mu_1}S_{\mu_2}\cdots S_{\mu_{|\mu|}} = S_\mu.$$

■

Proposição 1.4.11 *Se μ é um caminho em um grafo E então $P_{r(\mu)}S_\mu = S_\mu$.*

Prova: Como $P_{r(\mu)} = P_{r(\mu_1)}$ então,

$$P_{r(\mu)}S_\mu = P_{r(\mu_1)}(S_{\mu_1}S_{\mu_2}\cdots S_{\mu_n}) = S_{\mu_1}S_{\mu_2}\cdots S_{\mu_n} = S_\mu.$$

■

Observe que, as últimas duas proposições nos dizem que, se μ é um caminho então,

$$S_\mu = P_{r(\mu)}S_\mu = S_\mu P_{s(\mu)},$$

ou seja, é um resultado análogo ao da Proposição 1.2.8.

Corolário 1.4.12 *Seja E um grafo e $\{S,P\}$ uma E-família de Cuntz-Krieger em uma C^*-álgebra B. Sejam $\mu,\nu \in E^*$. Então,*

1. *Se $|\mu| = |\nu|$ e $\mu \neq \nu$ então $S_\mu^* S_\nu = 0$. Em particular, $(S_\mu S_\mu^*)(S_\nu S_\nu^*) = 0$.*

2. $$S_\mu^* S_\nu = \begin{cases} S_{\mu'}^*, & \text{se} \quad \mu = \nu\mu' \quad \text{para algum} \quad \mu' \in E^*, \\ S_{\nu'}, & \text{se} \quad \nu = \mu\nu' \quad \text{para algum} \quad \nu' \in E^*, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

3. *Se $S_\mu S_\nu \neq 0$, então $\mu\nu$ é um caminho em E e $S_{\mu\nu} = S_\mu S_\nu$.*

4. *Se $S_\mu S_\nu^* \neq 0$, então $s(\mu) = s(\nu)$.*

Prova:

1. Por hipótese, $|\mu| = |\nu| = n$ e $\mu \neq \nu$. Seja i o menor número natural tal que $\mu_i \neq \nu_i$, ou seja, $\mu_j = \nu_j$, $\forall j < i$. Segue que,

$$\begin{aligned} S_\mu^* S_\nu &= (S_{\mu_1} S_{\mu_2} \cdots S_{\mu_n})^* S_{\nu_1} S_{\nu_2} \cdots S_{\nu_n} = \\ &= S_{\mu_n}^* \cdots S_{\mu_2}^* S_{\mu_1}^* S_{\nu_1} S_{\nu_2} \cdots S_{\nu_n} = \\ &\qquad \text{(análogo à prova da Proposição 1.4.8)} \\ &= S_{\mu_n}^* \cdots S_{\mu_i}^* S_{\mu_{i-1}}^* S_{\nu_{i-1}} S_{\nu_i} \cdots S_{\nu_n} = \\ &= S_{\mu_n}^* \cdots S_{\mu_i}^* S_{\mu_{i-1}}^* S_{\nu_{i-1}} S_{\nu_i} \cdots S_{\nu_n} = \\ &= S_{\mu_n}^* \cdots (S_{\mu_i}^* S_{\nu_i}) \cdots S_{\nu_n} = \\ &\qquad \text{(Proposição 1.2.9, item 1.)} \\ &= S_{\mu_n}^* \cdots (0) \cdots S_{\nu_n} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(S_\mu S_\mu^*)(S_\nu S_\nu^*) = 0$.

2. Vamos separar a demonstração em dois casos.

Caso 1: Se $n = |\mu| < |\nu|$.

Como $|\nu| > n$ podemos fatorar o caminho ν em dois caminhos, $\nu = \alpha\nu'$ tal que $|\alpha| = n$. Então,

$$S_\mu^* S_\nu = S_\mu^* S_{\alpha\nu'} = S_\mu^* S_\alpha S_{\nu'}.$$

Se $\mu = \alpha$ então,

$$S_\mu^* S_\nu = S_\mu^* S_\alpha S_{\nu'} = S_\alpha^* S_\alpha S_{\nu'} = P_{s(\alpha)} S_{\nu'} = P_{r(\nu')} S_{\nu'} = S_{\nu'}.$$

Se $\mu \neq \alpha$ então pelo item 1. desta proposição, temos que,

$$S_\mu^* S_\nu = (S_\mu^* S_\alpha) S_{\nu'} = 0.$$

Portanto, se $|\mu| < |\nu|$ então,

$$S_\mu^* S_\nu = \begin{cases} S_{\nu'}, & \text{se} \quad \nu = \mu\nu', \\ 0, & \text{se} \quad \nu \neq \mu\nu'. \end{cases}$$

Caso 2: Se $n = |\nu| < |\mu|$.

Como $|\mu| > n$ podemos fatorar μ em dois caminhos, $\mu = \alpha\mu'$ tal que $|\alpha| = n$. Temos que,

$$S_\mu^* S_\nu = S_{\alpha\mu'}^* S_\nu = S_{\mu'}^* S_\alpha^* S_\nu.$$

Se $\nu = \alpha$ então,

$$S_\mu^* S_\nu = S_{\mu'}^* S_\alpha^* S_\nu = S_{\mu'}^* S_\alpha^* S_\alpha = S_{\mu'}^* P_{s(\alpha)} = S_{\mu'}^* P_{r(\nu')} = S_{\mu'}^*.$$

Se $\nu \neq \alpha$, pelo item 1. temos que,

$$S_\mu^* S_\nu = S_{\mu'}^* S_\alpha^* S_\nu = 0.$$

Portanto,

$$S_\mu^* S_\nu = \begin{cases} S_{\mu'}^*, & \text{se} \quad \mu = \nu\mu', \\ 0, & \text{se} \quad \mu \neq \nu\mu'. \end{cases}$$

3. Por hipótese, $S_\mu S_\nu \neq 0$, ou seja,

$$S_{\mu_1} S_{\mu_2} \cdots S_{\mu_{|\mu|}} S_{\nu_1} S_{\nu_2} \cdots S_{\nu_{|\nu|}} \neq 0.$$

   Em particular, $S_{\mu_{|\mu|}} S_{\nu_1} \neq 0$ e pela Proposição 1.2.9, $s(\mu_{|\mu|}) = r(\nu_1)$. Portanto, $s(\mu) = r(\nu)$ e assim, $\mu\nu$ é um caminho.

4. Por hipótese, $S_\mu S_\nu^* \neq 0$. Em particular, $S_{\mu_{|\mu|}} S^*_{\nu_{|\nu|}} \neq 0$, e portanto, pela Proposição 1.2.9, $s(\mu_{|\mu|}) = s(\nu_{|\nu|})$.
   Logo, $s(\mu) = s(\nu)$.

■

Observação 1.4.13 *Os itens* 1. *e* 2. *do corolário anterior nos fornecem todas as possibilidades para o produto $S_\mu^* S_\nu$ quando μ, ν são caminhos. Essa caracterização será bastante utilizada no decorrer do trabalho.*

Observação 1.4.14 *O item* 2. *do Corolário 1.4.12 nos diz que se μ, ν são caminhos de modo que μ não é a "parte final" de ν, ou ν não é a "parte final" de μ então, $S_\mu^* S_\nu = 0$.*

Por exemplo, considere o seguinte grafo:

$$v_0 \xleftarrow{e_1} v_1 \xleftarrow{e_2} v_2 \xleftarrow{e_3} v_3 \xleftarrow{e_4} v_4$$

Seja $\mu = e_1e_2e_3$ e $\nu = e_2e_3$. Temos que, ν é um "parte" de μ, mas não é a "parte final", ou seja, não conseguimos escrever $\mu = \nu\nu'$. Neste caso, o Corolário 1.4.12 nos diz que $s_\mu^* s_\nu = 0$.

De fato,

$$S_\mu^* S_\nu = S^*_{e_1e_2e_3} S_{e_2e_3} = S^*_{e_3} S^*_{e_2} (S^*_{e_1} S_{e_2}) S_{e_3} = 0,$$

pois $e_1 \neq e_2$.

Por outro lado, se consideramos $\mu = e_1e_2e_3$ e $\nu = e_1e_2$. Temos que, $\mu = \nu e_3$. Neste caso, o Corolário 1.4.12 nos diz que $S_\mu^* S_\nu = S^*_{e_3}$.

De fato,

$$S_\mu^* S_\nu = S^*_{e_1e_2e_3} S_{e_2e_3} = S^*_{e_3} (S^*_{e_2} (S^*_{e_1} S_{e_1}) S_{e_2}) = S^*_{e_3}.$$

Analogamente, podemos considerar $\mu = e_2e_3$ e $\nu = e_1e_2e_3$. Note que, não conseguimos escrever $\nu = \mu\nu'$. Neste caso, o Corolário 1.4.12 nos diz que $S_\mu^* S_\nu = 0$.

Analogamente, podemos considerar $\mu = e_1e_2$ *e* $\nu = e_1e_2e_3$*. Então,* $\nu = \mu e_3$*. Neste caso, o Corolário 1.4.12 nos diz que* $S_\mu^* S_\nu = S_{e_3}$*.*

Corolário 1.4.15 *Seja* E *um grafo e* $\{S, P\}$ *uma* E*-família de Cuntz-Krieger em uma* C^**-álgebra* B*. Neste caso, para* $\mu, \nu, \alpha, \beta \in E^*$ *temos que:*

$$(S_\mu S_\nu^*)(S_\alpha S_\beta^*) = \begin{cases} S_{\mu\alpha'} S_\beta^*, & \textit{se} \quad \alpha = \nu\alpha', \\ S_\mu S_{\beta\nu'}^*, & \textit{se} \quad \nu = \alpha\nu', \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Prova: Pelo item 2. do Corolário 1.4.12 temos que:

$$(S_\mu S_\nu^*)(S_\alpha S_\beta^*) = \begin{cases} S_\mu (S_{\nu'}^*) S_\beta^*, & \text{se} \quad \nu = \alpha\nu', \\ S_\mu (S_{\alpha'}) S_\beta^*, & \text{se} \quad \alpha = \nu\alpha', \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} S_\mu S_{\beta\nu'}^*, & \text{se} \quad \nu = \alpha\nu', \\ S_{\mu\alpha'} S_\beta^*, & \text{se} \quad \alpha = \nu\alpha', \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

■

Observação 1.4.16 *Observe que, se* $|\mu| = |\nu|$ *então não é possível escrever* $\nu = \alpha\nu'$ *ou* $\alpha = \nu\alpha'$*. Portanto, pelo Corolário 1.4.12, item* 1. *temos que:*

$$(S_\mu S_\nu^*)(S_\alpha S_\beta^*) = \begin{cases} S_\mu S_\beta^*, & \textit{se} \quad \nu = \alpha, \\ 0, & \textit{se} \quad \nu \neq \alpha. \end{cases}$$

Corolário 1.4.17 *Seja* E *um grafo e* $\{S, P\}$ *uma* E*-família de Cuntz-Krieger em uma* C^**-álgebra* B*. Neste caso, todo produto finito e não nulo de isometrias parcias* S_e *e* S_f^* *é da forma* $S_\mu S_\nu^*$ *para algum* $\mu, \nu \in E^*$*, com* $s(\mu) = s(\nu)$*.*

Prova: Seja W um produto finito e não nulo de S_e e S_f^*.

Como $W \neq 0$, cada sequência de S_e's adjacentes é não nula, e assim, pelo item 3. do Corolário 1.4.12, podemos agrupar esses termos em um único termo S_μ.

Analogamente, cada sequência de S_f^*'s adjacentes é não nula, e assim, pelo item 3. do Corolário 1.4.12, podemos grupar esses termos em um único termo S_ν^*.

Feito isso ficamos com um produto finito e não nulo de S_μ e S_ν^*. Então basta reagrupar os S_μ's e os S_ν^*'s adjacentes utilizando o item 2. do Corolário 1.4.12. Então, utilizando o Corolário 1.4.15 e o fato de que, $S_\alpha^* = P_{s(\alpha)}S_\alpha^* = S_{s(\alpha)}S_\alpha^*$, obtemos um produto $S_\mu S_\nu^* \neq 0$.

Como $S_\mu S_\nu^* \neq 0$, pelo item 4. do Corolário 1.4.12 devemos ter $s(\mu) = s(\nu)$.

■

Dado um grafo E e $\{S, P\}$ uma E-família de Cuntz-Krieger em uma C^*-álgebra B, vamos denotar por $C^*(S, P)$, a C^*-álgebra gerada por $\{S, P\}$ em B, ou seja, $C^*(S, P)$ é a menor C^*-subálgebra de B que contém $\{S, P\}$.

Corolário 1.4.18 *Seja E um grafo e $\{S, P\}$ uma E-família de Cuntz-Krieger em uma C^*-álgebra B. Então,*

$$C^*(S, P) = \overline{span}\{S_\mu S_\nu^* : \quad \mu, \nu \in E^*, s(\mu) = s(\nu)\}.$$

Prova: Pelo Corolário 1.4.15 temos que,

$$span\{S_\mu S_\nu^* : \quad \mu, \nu \in E^*, s(\mu) = s(\nu)\}$$

é uma subálgebra de $C^*(S, P)$. Como $(S_\mu S_\nu^*)^* = S_\nu S_\mu^*$ então é uma *-subálgebra e assim,

$$\overline{span}\{S_\mu S_\nu^* : \quad \mu, \nu \in E^*, s(\mu) = s(\nu)\}$$

é uma C^*-subálgebra de $C^*(S, P)$.

Como $S_e = S_e P_{s(e)}^* = S_e S_{s(e)}$ e $P_v = P_v P_v^* = S_v S_v^*$ temos que

$$\overline{span}\{S_\mu S_\nu^* : \quad \mu, \nu \in E^*, s(\mu) = s(\nu)\}$$

contém os geradores da $C^*(S, P)$.

Portanto,

$$C^*(S, P) = \overline{span}\{S_\mu S_\nu^* : \quad \mu, \nu \in E^*, s(\mu) = s(\nu)\}.$$

■

Exemplo 1.4.19 *Considere o seguinte grafo E:*

$$\begin{tikzcd} & v \arrow[dl, "e"'] & \\ u & & w \arrow[ul, "g"'] \arrow[ll, "f"] \end{tikzcd}$$

Seja $\{S,P\}$ uma E-família de Cuntz-Krieger na qual todas as projeções são não nulas. Temos que,

$$C^*(S,P) = \overline{span}\{s_\mu s_\nu^* : \mu,\nu \in E^*, s(\mu) = s(\nu)\} =$$

Note que,

$$\{s_\mu s_\nu^* : \mu,\nu \in E^*, s(\mu) = s(\nu)\} = \left\{ \begin{array}{l} P_u, P_v, P_w, S_eS_e^*, S_fS_f^*, S_gS_g^*, S_{eg}S_{eg}^*, \\ S_{eg}S_f^*, S_fS_{eg}^*, S_fS_g^*, S_gS_f^*. \end{array} \right\}.$$

Observe que, os únicos elementos do conjunto acima que não começam no vértice w são: P_u, P_v e $S_eS_e^*$. Porém, podemos reescrever esses elementos de modo que, eles sejam iguais a elementos que começam em w.

Da condição $(CK2)$ temos que $P_v = S_gS_g^*$, que começa em w.

Note que, $S_e = S_eP_{s(e)} = S_eS_gS_g^* = S_{eg}S_g^*$. Logo, $S_eS_e^* = S_{eg}S_g^*S_gS_{eg}^* = S_{eg}S_{eg}^*$ que começa em w.

Também, $P_u = S_eS_e^* + S_gS_g^* = S_{eg}S_{eg}^* + S_gS_g^*$ que é soma de elementos que começam em w.

Logo,

$$\{s_\mu s_\nu^* : \mu,\nu \in E^*, s(\mu) = s(\nu)\} = \left\{ \begin{array}{l} P_w, S_egS_eg^*, S_fS_f^*, S_gS_g^*, S_{eg}S_{eg}^*, S_{eg}S_f^*, \\ S_fS_{eg}^*, S_fS_g^*, S_gS_f^* \end{array} \right\} =$$

$$= \overline{span}\{s_\mu s_\nu^* : \mu,\nu \in E^*, s(\mu) = s(\nu) = w\} =$$

$$= \overline{span}\{s_\mu s_\nu^* : \mu,\nu \in \{w,f,g,eg\},\}.$$

Como w é um source, se μ e ν são caminhos que começam em w não é possivel reescrever $\mu = \nu\mu'$ ou $\nu = \mu\nu'$. Segue que, se $\mu,\nu,\alpha,\beta \in \{w,f,g,eg\}\}$ então,

$$S_\mu S_\nu^* S_\alpha S_\beta^* = \left\{ \begin{array}{lll} S_\mu S_\beta^*, & se & \alpha = \nu, \\ 0, & se & \alpha \neq \nu. \end{array} \right.$$

Portanto, $C^*(S,P) \cong M_4(\mathbb{C})$ (veja Proposição $C.1.1$).

1.5 A C^*-ÁLGEBRA DE UM GRAFO

Nesta seção, vamos mostrar que dado um grafo E, sempre podemos considerar um conjunto de geradores $\{G\}$ e um conjunto de relações $\{R\}$, de modo que, seja possível definir a C^*-álgebra universal gerada pelo par $\{G, R\}$. Definiremos essa C^*-álgebra como sendo a C^*-álgebra do grafo E.

Um pequeno resumo da teoria de C^*-álgebra universal, pode ser encontrado no Apêndice B deste trabalho.

Definição 1.5.1 *Seja E um grafo. A C^*-álgebra do grafo E, $C^*(E)$, é a C^*-álgebra universal gerada pelo par $\{G, R\}$ dado por:*

$$G = \left\{s_e : e \in E^1\right\} \cup \left\{p_v : v \in E^0\right\},$$

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \{p_v^2 = p_v = p_v^* : v \in E^0\} \cup \{p_v p_w = 0, \forall v \neq w\} \\ \cup\{(CK1)\} \cup \{(CK2)\} \end{array} \right\}.$$

Observação 1.5.2 *Observe que, no conjunto das relações estamos solicitando que os elementos p_v sejam projeções mutuamente ortogonais e que as condições $(CK1)$ e $(CK2)$ sejam satisfeitas. Além disso, quando colocamos a condição $(CK1)$, estamos impondo que os elementos s_e sejam isometrias parciais.*

Para que a C^*-álgebra de grafo fique bem definida para qualquer grafo E, é necessário verificarmos que sempre existe a C^*-álgebra universal. Para tanto, é suficiente verificar que o par $\{G, R\}$ é admissível (veja Definição B.1.7).

Vamos mostrar que $\{G, R\}$ é um par admissível.

Seja D uma C^*-álgebra e $\rho : G \longrightarrow D$ uma representação de $\{G, R\}$.

Como ρ é representação e $\left\{p_v^2 = p_v = p_v^* : v \in E^0\right\}$ então $\rho(p_v)$ é uma projeção em D. Logo, $\|\rho(p_v)\| \leq 1$.

Como ρ é representação e $(CK1) \in R$ então $\rho(s_e^* s_e) = \rho(p_{s(e)})$, ou seja, $\|\rho(s_e)\|^2 = \|\rho(s_e s_e^*)\| = \|\rho(p_{s(e)})\| \leq 1$.

Temos que, $\|\rho(p_v)\| \leq 1$, $\forall v \in E^0$, e $\|\rho(s_e)\| \leq 1$, $\forall e \in E^1$. Portanto, o par $\{G, R\}$ é admissível.

Portanto, dado qualquer grafo E, sempre existe a C^*-álgebra universal gerada pelo par $\{G, R\}$.

Portanto, $C^*(E)$ fica bem definida.

Definição 1.5.3 *Seja E um grafo. A E-família $\{s, p\}$ que gera a $C^*(E)$ é denominada de E-família de Cuntz-Krieger universal.*

Observação 1.5.4 *Dado um grafo E, definimos $C^*(E)$ como sendo a C^*-álgebra universal gerada pelo par $\{G, R\}$. Então, $C^*(E)$ satisfaz a propriedade universal dada pela Teorema B.1.15. Portanto, se $\{s, p\}$ é a E-família de Cuntz-Krieger universal e $\{T, Q\}$ uma E-família de Cuntz-Krieger em uma C^*-álgebra B então, da propriedade universal da $C^*(E)$ existe um único homomorfismo,*

$$\begin{array}{rccc} \pi_{T,Q}\colon & C^*(E) & \longrightarrow & B \\ & s_e & \longmapsto & T_e \\ & p_v & \longmapsto & Q_v \end{array}$$

A existência do homomorfismo $\pi_{T,Q}$ será denominada de propriedade universal da álgebra do grafo E.

No Exemplo 1.3.1 mostramos que, dado qualquer grafo E, sempre existe uma E-família de Cuntz-Krieger $\{S, P\}$ em $B(l^2(\mathbb{N}))$, que tem todas as suas projeções não nulas.

Segue que, se $\{s, p\}$ é a E-família de Cuntz-Krieger universal, então da propriedade universal, existe um homorfismo,

$$\begin{array}{rccc} \pi_{S,P}\colon & C^*(E) & \longrightarrow & B(l^2(\mathbb{N})) \\ & s_e & \longmapsto & S_e \\ & p_v & \longmapsto & P_v \end{array}$$

Note que, esse homomorfismo é uma representação que satisfaz o par $\{G, R\}$ da Definição 1.5.1. Portanto, pela definição da norma em $C^*(E)$, temos que:

$$\|p_v\| \geq \|\pi_{S,P}(p_v)\| = \|P_v\| \neq 0.$$

Logo, $p_v \neq 0$, $\forall v \in E^0$. Isso significa dizer que, se $\{s, p\}$ é a E-família de Cuntz-Krieger universal, então as projeções são todas não nulas.

Observação 1.5.5 *Uma outra importante propriedade da C^*-álgebra universal é a unicidade (a menos de isomorfismo).*

Portanto, se C é uma C^*-álgebra gerada por uma E-família de Cuntz-Krieger $\{r, w\}$ que satisfaz a propriedade universal (ou seja, se $\{T, Q\}$ é uma E-família Cuntz Krieger em uma C^*-álgebra B então existe um homomorfismo $\pi_{T,Q} : C \longrightarrow B$ que satisfaz $\pi_{T,Q}(r_e) = T_e$ e $\pi_{T,Q}(w_v) = Q_v$) então, o homomorfismo,

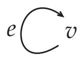
$$\begin{array}{rccc} \pi_{r,w}\colon & C^*(E) & \longrightarrow & C \\ & s_e & \longmapsto & r_e \\ & p_v & \longmapsto & w_v \end{array}$$

é um isomorfismo.

Dado um grafo E, podem existir muitas E-famílias de Cuntz-Krieger. Neste sentido, a observação anterior nos fornece uma primeira caracterização para decidir quando as C^*-álgebras geradas são isomorfas.

No Capítulo 3, estudaremos dois importantes teoremas que tratam da unicidade (a menos de isomorfismo) de C^*-álgebras geradas por famílias de Cuntz-Krieger. Nesses teoremas a existência do isomorfismo dependerá de características específicas do grafo e das famílias de Cuntz-Krieger envolvidas.

Exemplo 1.5.6 *Considere o seguinte grafo E,*



Seja $\{s, p\}$ a E-família de Cuntz-Krieger universal. Essa família satisfaz:

$$s_e^* s_e = p_v = s_e s_e^*.$$

Segue que, organizando esses elementos e essas igualdades como na Definição 1.5.1, podemos concluir que, $C^*(E)$ é a C^*-álgebra universal gerada por um elemento unitário e sua unidade (veja Exemplo B.1.17).

Portanto,

$$C^*(E) \cong C(\mathbb{S}^1).$$

No Corolário 1.4.12, mostramos que se E é um grafo e $\{S, P\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger qualquer, se $S_\mu \neq 0$ então μ é um caminho.

Na próxima proposição, mostraremos que se $\{s, p\}$ é a E-família de Cuntz-Krieger universal então a recíproca deste corolário também é verdadeira.

Proposição 1.5.7 *Seja E um grafo e $\{s, p\}$ a E-família de Cuntz-Krieger universal. Neste caso, $e_1 e_2 \cdots e_n$ é um caminho se, e somente se, $s_{e_1} s_{e_2} \cdots s_{e_n} \neq 0$.*

Prova:

($\Leftarrow$) Segue imediatamente do Corolário 1.4.12.

($\Rightarrow$) Vamos mostrar que $\|s_{e_1} s_{e_2} \cdots s_{e_n}\| \neq 0$.

Na seção 1.3 vimos que existe uma E-família de Cuntz-Krieger $\{S, P\}$ em $B(l^2(\mathbb{N}))$. Logo, existe um homomorfismo,

$$
\begin{array}{rccc}
\pi_{S,P}\colon & C^*(E) & \longrightarrow & B(l^2(\mathbb{N})) \\
& s_e & \longmapsto & S_e \\
& p_v & \longmapsto & P_v
\end{array}
$$

Vamos mostrar que o operador $\pi_{S,P}(s_{e_1}s_{e_2}\cdots s_{e_n}) \neq 0$. Para tanto, é suficiente mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, $\pi_{S,P}(s_{e_1}s_{e_2}\cdots s_{e_n})(\delta_n) \neq 0$ (veja como os operadores S_e e P_v são definidos no Exemplo 1.3.1).

Seja $m \in \mathbb{N}$. Temos que,

$$
\begin{gathered}
(\pi_{S,P}(s_{e_1}s_{e_2}\cdots s_{e_n}))(\delta_m) = (S_{e_1}\cdots S_{e_{n-1}}S_{e_n})(\delta_m) = \\
= (S_{e_1}\cdots S_{e_{n-1}})\big([m \in D_{s(e_n)}]\delta_{f_{e_n}(m)}\big) = \\
= \big[m \in D_{s(e_n)}\big]\, S_{e_1}\cdots S_{e_{n-1}}\big(\delta_{f_{e_n}(m)}\big) = \\
= \big[m \in D_{s(e_n)}\big]\, S_{e_1}\cdots S_{e_{n-2}}\Big([f_{e_n}(m) \in D_{s(e_{n-1})}]\delta_{f_{e_{n-1}}f_{e_n}(m)}\Big) = \\
= [m \in D_{s(e_n)}][f_{e_n}(m) \in D_{s(e_{n-1})}]S_{e_1}\cdots S_{e_{n-2}}(\delta_{f_{e_{n-1}}f_{e_n}(m)}) = \\
= [m \in D_{s(e_n)}][f_{e_n}(m) \in D_{s(e_{n-1})}][f_{e_{n-1}}f_{e_n}(m) \in D_{s(e_{n-2})}] \\
S_{e_1}\cdots S_{e_{n-3}}(\delta_{f_{e_{n-2}}f_{e_{n-1}}f_{e_n}(m)}) = \\
\vdots \\
= [m \in D_{s(e_n)}][f_{e_n(m)} \in D_{s(e_{n-1})}]\cdots[f_{e_2}f_{e_3}\cdots f_{e_n}(m) \in D_{s(e_1)}]\delta_{f_{e_1}\cdots f_{e_n}(m)}.
\end{gathered}
$$

Fixe $N \in D_{s(e_n)}$. Vamos mostrar que,

$$\pi_{S,P}(s_{e_n}s_{e_{n-1}}\cdots s_{e_1})(\delta_N) \neq 0.$$

Como $N \in D_{s(e_n)}$ então $[N \in D_{s(e_n)}] = 1$.

Como $N \in D_{s_{en}}$ então,

$$f_{e_n}(N) \in R_{e_n} \subseteq D_{r(e_n)} = D_{s(e_{n-1})}.$$

Logo, $f_{e_n}(N) \in D_{s(e_{n-1})}$ e assim,

$$[f_{e_n}(N) \in D_{s(e_{n-1})}] = 1.$$

Como $f_{e_n}(N) \in D_{s(e_{n-1})}$ então,

$$f_{e_{n-1}}(f_{e_n}(N)) \in R_{e_{n-1}} \subseteq D_{r(e_{n-1})} = D_{s(e_{n-2})}.$$

Logo, $f_{e_{n-1}}(f_{e_n}(N)) \in D_{s(e_{n-2})}$ e assim,

$$[f_{e_{n-1}}(f_{e_n}(N)) \in D_{s(e_{n-2})}] = 1.$$

Analogamente,

$$[f_{e_{n-i}} \cdots f_{e_n}(N) \in D_{s(e_{n-i-1})}] = 1, \forall 1 \leq i \leq n-2.$$

Portanto,

$$= [n \in D_{s(e_n)}][f_{e_n(N)} \in D_{s(e_{n-1})}] \cdots [f_{e_2} f_{e_3} \cdots f_{e_n}(N) \in D_{s(e_1)}] = 1.$$

Dessa forma,

$$(\pi_{S,P}(s_{e_1} s_{e_2} \cdots s_{e_n}))(\delta_N) = [N \in D_{s(e_n)}][f_{e_n(N)} \in D_{s(e_{n-1})}] \cdots$$

$$[f_{e_2} f_{e_3} \cdots f_{e_n}(N) \in D_{s(e_1)}] \delta_{f_{e_1} \cdots f_{e_n}(N)} =$$

$$= \delta_{f_{e_1} \cdots f_{e_n}(N)}.$$

Portanto, $\pi_{S,P}(s_{e_1} s_{e_2} \cdots s_{e_n}) \neq 0$ e assim, $\|s_{e_1} s_{e_2} \cdots s_{e_n}\| \neq 0$ (veja Observação B.1.13).

Portanto, $s_{e_n} \cdots s_{e_1} \neq 0$.

■

No Capítulo 3 deste trabalho, provaremos dois importantes teoremas sobre isomorfismo entre a $C^*(E)$ e outras C^*-álgebras geradas por E-famílias de Cuntz-Krieger. Esses teoremas pedem que as E-famílias de Cuntz-Krieger consideradas tenham todas as suas projeções não nulas.

A partir deste momento, dado um grafo E, sempre que escrevermos $\{s_e, p_v\}$ estamos pensando que $\{s, p\}$ é a E-família de Cuntz-Krieger universal, a menos que se diga o contrário. Além disso, sempre que escrevermos $\pi_{T,Q}$ estamos pensando no homomorfismo construído a partir da propriedade universal de $C^*(E)$, para alguma família $\{T, Q\}$ em uma C^*-álgebra B.

2 A AÇÃO DE GAUGE

Neste capítulo faremos os resultados preliminares às provas dos Teoremas de Unicidade da C^*-álgebra de grafo, que serão demonstrados no Capítulo 3.

Vamos mostrar um teorema que garante a existência de uma ação contínua entre $\mathbb{S}^1$ e automorfimos $C^*(E)$ que denominaremos de ação de gauge. A existência da ação de gauge nos permitirá definir uma transformação linear contrativa entre $C^*(E)$ e uma C^*-subálgebra desta. Essa aplicação satisfaz relações semelhantes a uma esperança condicional.

2.1 A EXISTÊNCIA DA AÇÃO DE GAUGE

Nesta seção vamos mostrar que, dado um grafo E, sempre existe uma aplicação entre $\mathbb{S}^1$ e o conjunto dos automorfismos de $C^*(E)$. Denominaremos essa aplicação de ação de gauge.

Definição 2.1.1 *Uma ação de um grupo topológico G em uma C^*-álgebra A é uma função,*

$$\begin{array}{rccc} \gamma\colon & G & \longrightarrow & Aut(A) \\ & z & \longmapsto & \gamma_z \end{array}$$

em que,

$$Aut(A) := \{\varphi : A \longrightarrow A : \varphi \text{ é um isomorfismo}\},$$

que satisfaz, $\gamma(zw) = \gamma_z \circ \gamma_w$.

Note que, para cada $z \in G$ fixo, a aplicação $\gamma_z : A \longrightarrow A$ é contínua.

De fato, como γ_z é um isomorfismo entre C^*-álgebras então é injetivo. Portanto, é isométrico (veja Teorema 3.1.5, (9)) e, consequentemente, contínuo.

Definição 2.1.2 *Seja A uma C^*-álgebra. Uma ação $\gamma : G \longrightarrow Aut(A)$ é dita ser uma ação contínua se, para cada $a \in A$, a aplicação,*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_a\colon & G & \longrightarrow & A \\ & z & \longmapsto & \gamma_z(a) \end{array}$$

é contínua.

Neste trabalho, estamos interessados em ações nas quais $G = \mathbb{S}^1$. Note que, $\mathbb{S}^1$ é um grupo topológico com a operação usual de multiplicação em $\mathbb{C}$ e a topologia induzida pela norma euclidiana.

Observação 2.1.3 *Seja A uma C^*-álgebra e $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(A)$ uma ação. Neste caso, $\gamma_1(a) = a$, $\forall a \in A$.*

De fato, se $w \in \mathbb{S}^1$ temos que,

$$\gamma_1 \gamma_w = \gamma(1w) = \gamma(w).$$

Analogamente, $\gamma_w \gamma_1 = \gamma_w$.

Segue que, γ_1 é a unidade do grupo $Aut(A)$, ou seja, $\gamma_1 = I_A$.

Portanto, $\gamma_1(a) = a$, $\forall a \in A$.

Teorema 2.1.4 *Seja E um grafo e $\{s, p\}$ a E-família de Cuntz-Krieger universal. Então, existe uma ação contínua $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(C^*(E))$ que satisfaz:*

$$\gamma_z(s_e) = zs_e \quad e \quad \gamma_z(p_v) = p_v,$$

$\forall e \in E^1$, $\forall v \in E^0$ respectivamente.

Prova:

Fixe $z \in \mathbb{S}^1$.

Vamos mostrar que existe um automorfismo γ_z da $C^*(E)$ associado a z.

Como $\{s, p\}$ é E-família de Cuntz-Krieger, é fácil ver que $\{zs, p\}$ também é uma E-família de Cuntz-Krieger.

Então da propriedade universal da $C^*(E)$, existe um único homomorfismo,

$$\begin{array}{rccc} \gamma_z := \pi_{zs,p}\colon & C^*(E) & \longrightarrow & C^*(E) \\ & s_e & \longmapsto & zs_e \\ & p_v & \longmapsto & p_v \end{array}$$

Note que, $\gamma_z \circ \gamma_w = \gamma_{zw}$, $\forall z, w \in \mathbb{S}^1$.

Analogamente, $\{\overline{z}s, p\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger. Logo, da propriedade universal, existe um único homomorfismo,

$$\begin{array}{rccc} \pi_{\overline{z}s,p}\colon & C^*(E) & \longrightarrow & C^*(E) \\ & s_e & \longmapsto & \overline{z}s_e \\ & p_v & \longmapsto & p_v \end{array}$$

Segue que, $\gamma_{\overline{z}} \circ \gamma_z = \gamma_{z\overline{z}} = \gamma_1 = I$ e $\gamma_z \circ \gamma_{\overline{z}} = \gamma_1 = I$. Logo, $\gamma_{\overline{z}} = \gamma_z^{-1}$.

Portanto, γ_z é um isomorfismo e assim, $\gamma_z \in Aut(C^*(E))$.

Defina,

$$\begin{array}{rccc} \gamma\colon & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & Aut(C^*(E)) \\ & z & \longmapsto & \gamma_z \end{array}$$

Note que, $\gamma_{zw} = \gamma_z \circ \gamma_w \quad \forall z, w \in \mathbb{S}^1$. Portanto, γ é uma ação de $\mathbb{S}^1$ na $C^*(E)$.

Vamos mostrar que γ é ação contínua.

Fixe $a \in C^*(E)$.

Vamos mostrar que a aplicação,

$$\begin{array}{rccc} \gamma_a\colon & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & C^*(E) \\ & z & \longmapsto & \gamma_z(a) \end{array}$$

é contínua.

Fixe $z_0 \in \mathbb{S}^1$.

Fixe $\varepsilon > 0$.

Como $span\{s_\mu s_v^*;\ \ s(\mu) = s(v)\}$ é denso na $C^*(E)$, então existe $c = \sum_{\mu,\nu} \lambda_{\mu,\nu} s_\mu s_\nu^*$ tal que $\|a - c\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Note que,

$$\gamma_z(s_\mu) = \gamma_z(s_{\mu_1} \cdots s_{\mu_{|\mu|}}) = \gamma_z(s_{\mu_1}) \cdots \gamma_z(s_{\mu_{|\mu|}}) = z^{|\mu|} s_\mu,$$

e que,

$$\gamma_z(s_\nu^*) = \gamma_z(s_\nu)^* = \left(z^{|\nu|}\right)^* s_\nu = z^{-|\nu|} s_\nu.$$

Segue que a aplicação,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & C^*(E) \\ w & \longmapsto & \gamma_w(c) = \sum_{\mu\nu} \lambda_{\mu\nu} w^{|\mu|-|\nu|} s_\mu s_\nu^* \end{array}$$

é contínua em z_0.

Como a aplicação $w \longmapsto \gamma_w(c)$ é contínua em z_0, existe $\delta > 0$ tal que se $|w - z_0| < \delta$ então $\|\gamma_w(c) - \gamma_{z_0}(c)\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Como os automorfimos entre C^*-álgebras preservam normas temos que,

$$\|\gamma_w(a - c)\| = \|a - c\|,$$

$\forall w \in \mathbb{S}^1$.

Segue que, se $|w - z_0| < \delta$ então,

$$\|\gamma_w(a) - \gamma_{z_0}(a) = \|\gamma_w(a) - \gamma_w(c) + \gamma_w(c) - \gamma_{z_0}(c) + \gamma_{z_0}(c) - \gamma_{z_0}(a)\| \leq$$

$$\leq \|\gamma_w(a - c)\| + \|\gamma_w(c) - \gamma_{z_0}(c)\| + \|\gamma_{z_0}(c - a)\| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \\ = \varepsilon$$

Portanto, a ação γ é contínua.

■

A ação contínua,

$$\begin{array}{rccc} \gamma\colon & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & Aut(C^*(E)) \\ & z & \longmapsto & \gamma_z \end{array}$$

obtida no teorema anterior é denominada de ação de gauge.

2.2 A EXISTÊNCIA DA APLICAÇÃO ϕ

Nesta seção, vamos mostrar que dado um grafo, é possível definir uma aplicação ϕ entre $C^*(E)$ e uma C^*-subálgebra de $C^*(E)$. Vamos mostrar que tal aplicação é linear, contrativa e invariante na imagem. Além disso, ϕ satisfaz uma quarta condição, como veremos no decorrer da seção.

Defina, para cada função contínua $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz := \int_0^1 f(e^{2\pi it})dt$$

Proposição 2.2.1 *Seja A uma C^*-álgebra e $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow A$ uma função contínua.*

Neste caso, existe um único elemento em A, que denotamos por $\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz$, tal que para toda representação $\pi : A \longrightarrow B(H)$ vale que,

$$\left\langle \pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz\right)h, k\right\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(z))h, k\rangle dz \tag{2.1}$$

$\forall k, h \in H$.

Prova: Como A é uma C^*-álgebra, existe um espaço de Hilbert H e uma representação fiel $\rho : A \longrightarrow B(H)$.

Afirmação 1 A seguinte aplicação,

$$\begin{array}{rcl} (\cdot,\cdot) : H \times H & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (h,k) & \longmapsto & \int_{\mathbb{S}^1} \langle \rho(f(z))h, k\rangle dz \end{array}$$

é uma forma sesquilinear limitada.

Prova: A demonstração que $(\cdot,\cdot)$ é uma forma sesquilinear decorre do fato de que $\langle\rho(f(z))h,k\rangle$ é o produto interno em H e, que integral é uma integral de Riemann.

Vamos verificar que a aplicação é limitada. Como f é função contínua e $\mathbb{S}^1$ é compacto então f é limitada, digamos $\|f\|\leq c$.

Sejam $h,k\in H$. Temos que,

$$\left|\int_{\mathbb{S}^1}\langle\rho(f(z))h,k\rangle dz\right|\leq\int_{\mathbb{S}^1}|\langle\rho(f(z))h,k\rangle|dz\leq$$

$$\leq\int_{\mathbb{S}^1}\|\rho(f(z))\|\|h\|\|k\|dz\leq$$

$$\leq\int_{\mathbb{S}^1}\|f(z)\|\|h\|\|k\|dz\leq$$

$$\leq\int_{\mathbb{S}^1}c\|h\|\|k\|dz=$$

$$=c\|h\|\|k\|$$

Portanto, $|(h,k)|\leq c\|h\|\|k\|$ e assim, $(\cdot,\cdot)$ é limitada.

$\square$

Como $(\cdot,\cdot)$ é uma forma sesquilinear limitada, existe uma aplicação $T\in B(H)$ (veja Teorema 3.8.4, (6)) tal que,

$$\langle T(h),k\rangle=\int_{\mathbb{S}^1}\langle\rho(f(z))h,k\rangle dz, \tag{2.2}$$

$\forall h,k\in H$.

Afirmação 2 $T\in\rho(A)\subseteq B(H)$.

Prova: Como ρ é uma aplicação entre C^*-álgebras então $\rho(A)$ é fechado. Logo, é suficiente mostramos que $T\in\overline{\rho(A)}$.

Fixe $\varepsilon>0$.

Como $f:\mathbb{S}^1\longrightarrow A$ é contínua, para cada $t\in\mathbb{S}^1$ existe $\delta_t>0$ tal que,

$$\text{se}\quad |z-t|<\delta_t\quad\Rightarrow\quad\|f(z)-f(t)\|<\varepsilon.$$

Como

$$\mathbb{S}^1\subseteq\bigcup_{t\in\mathbb{S}^1}B(t;\delta_t)$$

e $\mathbb{S}^1$ é compacto existem $t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathbb{S}^1$ tais que,

$$\mathbb{S}^1 \subseteq \bigcup_{t=1}^{n} B(t; \delta_{t_i}).$$

Seja $\{f_i\}_{i=1}^n \subseteq C(\mathbb{S}^1)$ uma partição da unidade para $\{B(t_i; \delta_{t_i})\}_{i=1}^n$ (veja Teorema 7, (7)), ou seja,

- $supp(f_i) \subseteq B(t_i; \delta_{t_i})$;
- $f_i(z) \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{S}^1$;
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(z) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{S}^1$.

Seja $z \in \mathbb{S}^1$. Então,

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(z) f(t_i) - f(z) \right\| = \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(z) f(t_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(z) \right) f(z) \right\| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} f_i(z) \left\| f(t_i) - f(z) \right\| = \\
&= \sum_{\{i : z \in B(t_i; \delta_{t_i})\}} f_i(z) \left\| f(t_i) - f(z) \right\| = \\
&< \left(\sum_{\{i : z \in B(t_i; \delta_{t_i})\}} f_i(z) \right) \varepsilon \leq \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(z) \right) \varepsilon = \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(z) f(t_i) - f(z) \right\| < \varepsilon, \quad \forall z \in \mathbb{S}^1. \tag{2.3}$$

Temos que,

$$\langle T(h),k\rangle - \left\langle \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz\right)\rho(f(t_i))\right]h,k\right\rangle =$$

$$= \langle T(h),k\rangle - \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz\right)\langle \rho(f(t_i))h,k\rangle =$$

$$= \langle T(h),k\rangle - \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)\langle \rho(f(t_i))h,k\rangle dz\right) =$$

$$= \langle T(h),k\rangle - \int_{\mathbb{S}^1}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\langle \rho(f(t_i))h,k\rangle\right)dz =$$

(por Eq.(2.2))

$$= \int_{\mathbb{S}^1}\langle \rho(f(z))h,k\rangle dz - \int_{\mathbb{S}^1}\left\langle\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\rho(f(t_i))\right)h,k\right\rangle dz =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1}\left\langle \rho\left(f(z)-\sum_{i=1}^{n} f_i(z)f(t_i)\right)h,k\right\rangle dz.$$

Segue que,

$$\left|\langle T(h),k\rangle - \left\langle \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz\right)\rho(f(t_i))\right]h,k\right\rangle\right| =$$

$$= \left|\int_{\mathbb{S}^1}\left\langle \rho\left(f(z)-\sum_{i=1}^{n} f_i(z)f(t_i)\right)h,k\right\rangle dz\right| \leq$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1}\left|\left\langle \rho\left(f(z)-\sum_{i=1}^{n} f_i(z)f(t_i)\right)h,k\right\rangle\right| dz \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{S}^1}\left\|\rho\left(f(z)-\sum_{i=1}^{n} f_i(z)f(t_i)\right)\right\| \|h\|\|k\|dz =$$

(ρ é injetiva)

$$= \int_{\mathbb{S}^1}\left\|f(z)-\sum_{i=1}^{n} f_i(z)f(t_i)\right\| \|h\|\|k\|dz <$$

(por Eq. (2.3))

$$< \varepsilon \|h\| \|k\|.$$

Logo,

$$\left| \left\langle \left(T - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) \rho(f(t_i)) \right) h, k \right\rangle \right| < \varepsilon \|h\| \|k\|,$$

$\forall h, k \in H$.

Portanto,

$$\left\| T - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) \rho(f(t_i)) \right\| \leq \varepsilon.$$

Assim, $T \in \overline{\rho(A)} = \rho(A)$.

$\square$

Como $T \in \rho(A)$ e ρ é injetiva, $\rho^{-1}(T) \in A$.

Defina,

$$\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz := \rho^{-1}(T).$$

Dado $\varepsilon > 0$.

Pelo que fizemos na afirmação anterior, existem $t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathbb{S}^1$ tais que,

$$\left\| T - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) \rho(f(t_i)) \right\| \leq \varepsilon$$

e,

$$\left\| f(z) - \sum_{i=1}^{n} f_i(z) f(t_i) \right\| < \varepsilon.$$

Segue que,

$$\left\| \int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) f(t_i) \right\| =$$

$$= \left\| \rho^{-1}(T) - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) f(t_i) \right\| =$$

$$= \left\| \rho^{-1} \left(T - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) \rho(f(t_i)) \right) \right\| =$$

$$= \left\| T - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) \rho(f(t_i)) \right\| <$$

$$< \varepsilon.$$

Portanto,

$$\left\| \int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) f(t_i) \right\| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Seja $\pi : A \longrightarrow B(H)$ uma representação qualquer. Vamos mostrar que π satisfaz Eq. (2.1).

$$\left| \left\langle \pi \left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz \right) h, k \right\rangle - \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(z))h, k \rangle dz \right| \leq$$

$$\left| \left\langle \pi \left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz \right) h, k \right\rangle - \left\langle \pi \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) f(t_i) \right] h, k \right\rangle \right| +$$

$$+ \left| \left\langle \pi \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) f(t_i) \right] h, k \right\rangle - \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(z))h, k \rangle dz \right| \leq$$

$$\leq \left| \left\langle \pi \left[\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) f(t_i) \right] h, k \right\rangle \right| +$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) \langle \pi(f(t_i))h, k \rangle - \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(z))h, k \rangle dz \right| \leq$$

$$\leq \left| \left\langle \pi \left[\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) f(t_i) \right] h, k \right\rangle \right| +$$

$$+ \left| \int_{\mathbb{S}^1} \left\langle \pi \left[\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(z) \right) f(t_i) \right] h, k \right\rangle - \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(z))h, k \rangle dz \right| \leq$$

$$\leq \left| \left\langle \pi \left[\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) f(t_i) \right] h, k \right\rangle \right| +$$

$$+ \int_{\mathbb{S}^1} \left| \left\langle \pi \left[\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(z) \right) f(t_i) - f(z) \right] h, k \right\rangle \right| dz \leq$$

$$\leq \left\| \pi \left[\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz \right) f(t_i) \right] \right\| \|h\| \|k\|$$

$$+ \int_{\mathbb{S}^1} \left\| \pi \left[\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(z) \right) f(t_i) - f(z) \right] \right\| \|h\| \|k\| dz \leq$$

$$\leq \left\| \int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz - \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{S}^1} f_i(z)dz f(t_i) \right\| \|h\| \|k\| +$$

$$+ \left(\int_{\mathbb{S}^1} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(z) f(t_i) - f(z) \right\| \right) \|h\| \|k\| dz <$$

$$\text{(por Eq. (2.4))}$$

$$< \varepsilon \|h\| \|k\| + \int_{\mathbb{S}^1} \varepsilon \|h\| \|k\| dz$$

$$< 2\varepsilon \|h\| \|k\|$$

Portanto,

$$\left| \left\langle \pi \left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz \right) h, k \right\rangle - \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(z))h, k \rangle dz \right| < 2\varepsilon \|h\| \|k\|.$$

Logo,

$$\left\langle \pi \left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz \right) h, k \right\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(z))h, k \rangle dz.$$

Vamos mostrar que $\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz$ é único.
Suponha que exista $a \in A$ que satisfaz Eq. (2.1), ou seja,

$$\langle \pi(a)h, k \rangle = \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(z))h, k \rangle dz,$$

para toda representação $\pi : A \longrightarrow B(H)$ e $\forall h, k \in H$.

Em particular, se $\pi : A \longrightarrow B(H)$ é injetiva então:

$$\langle \pi(a)h, k\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(z))h, k\rangle dz = \left\langle \pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz\right) h, k\right\rangle,$$

ou seja,

$$\left\langle \pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz - a\right) h, k\right\rangle = 0,$$

$\forall h, k \in H$.

Logo,

$$\pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz - a\right) = 0,$$

e assim,

$$\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz = a.$$

Portanto, $\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz$ é único.

$\blacksquare$

Proposição 2.2.2 *Seja A uma C^*-álgebra e $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow A$ uma função contínua. O elemento $\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz$ definido na proposição anterior satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Se $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow A$ é uma função contínua e $\lambda \in \mathbb{C}$ então,*

$$\int_{\mathbb{S}^1} (f(z) + \lambda g(z))\, dz = \int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz + \lambda \int_{\mathbb{S}^1} g(z)dz.$$

2. *Para todo $b \in A$,*

$$b\left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz\right) = \int_{\mathbb{S}^1} bf(z)dz.$$

3. $\|\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz\| \leq \int_{\mathbb{S}^1} \|f(z)\|dz.$

4. *Se B é uma C^*-álgebra e $\phi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo então,*

$$\phi\left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz\right) = \int_{\mathbb{S}^1} \phi(f(z))dz.$$

5. *Para todo* $w \in \mathbb{S}^1$,

$$\int_{\mathbb{S}^1} f(wz)dz = \int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz.$$

6. *Para todo* $a \in A$,

$$\int_{\mathbb{S}^1} adz = a.$$

Prova:

1. Seja $\pi : A \longrightarrow B(H)$ representação fiel. Então, $\forall h, k \in H$ temos que,

$$\left\langle \pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} (f(z) + \lambda g(z))dz\right) h, k \right\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(z) + \lambda g(z))h, k\rangle dz =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(z))h, k\rangle dz + \lambda \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(g(z))h, k\rangle dz =$$

$$= \left\langle \pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} (f(z))dz\right) h, k \right\rangle + \lambda \left\langle \pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} (g(z))dz\right) h, k \right\rangle =$$

$$= \left\langle \pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} (f(z))dz\right) h, k \right\rangle + \left\langle \pi\left(\lambda \int_{\mathbb{S}^1} (g(z))dz\right) h, k \right\rangle =$$

$$= \left\langle \pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} (f(z))dz + \lambda \int_{\mathbb{S}^1} (g(z))\right) h, k \right\rangle.$$

Logo,

$$\pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} (f(z) + \lambda g(z))dz\right) = \pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} (f(z))dz + \lambda \int_{\mathbb{S}^1} g(z)dz\right).$$

Como π é injetiva, podemos concluir que,

$$\int_{\mathbb{S}^1} (f(z) + \lambda g(z))\, dz = \int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz + \lambda \int_{\mathbb{S}^1} g(z)dz.$$

2. Seja $\pi : A \longrightarrow B(H)$ representação fiel. Então, $\forall h, k \in H$ temos que,

$$\left\langle \pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} bf(z)dz\right) h, k \right\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(bf(z))h, k\rangle dz =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(b)\pi(f(z))h, k\rangle dz =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(z))h, \pi(b)^* k\rangle dz =$$

$$= \left\langle \pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz\right) h, \pi(b)^* k\right\rangle =$$

$$= \left\langle \pi(b)\pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz\right) h, k\right\rangle =$$

$$= \left\langle \pi\left(b\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz\right) h, k\right\rangle .$$

Logo, $\forall h, k \in H$,

$$\left\langle \pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} bf(z)dz\right) h, k\right\rangle = \left\langle \pi\left(b\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz\right) h, k\right\rangle .$$

Como π é injetiva temos que,

$$\int_{\mathbb{S}^1} bf(z)dz = b\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz.$$

3. Na demonstração da Proposição 2.2.1 mostramos que existe $T \in B(H)$ tal que,

$$\langle T(h), k\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} \langle \rho(f(z))h, k\rangle dz,$$

em que, $\rho : A \longrightarrow B(H)$ é uma representação injetiva (veja Eq. (2.2)).

Então,$\forall h, k \in H$ temos que

$$|\langle T(h), k\rangle| = \left|\int_{\mathbb{S}^1} \langle \rho(f(z))h, k\rangle dz\right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{S}^1} |\langle \rho(f(z))h, k\rangle| dz \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{S}^1} \|\rho(f(z))\| \|h\| \|k\| dz \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{S}^1} \|f(z)\| \|h\| \|k\| dz =$$

$$= \|h\|\|k\| \int_{\mathbb{S}^1} \|f(z)\| dz =$$

Em particular, $\forall h \in H$ com $\|h\| = 1$ e $k = T(h) \neq 0$ (se T for, por acaso o operador nulo, então trivialmente a desigualdade é satisfeita) temos que,

$$|\langle T(h), T(h) \rangle| \leq \|h\|\|T(h)\| \int_{\mathbb{S}^1} \|f(z)\| dz,$$

ou seja,

$$\|T(h)\| \leq \|h\| \int_{\mathbb{S}^1} \|f(z)\| dz.$$

Portanto,

$$\|T\| \leq \int_{\mathbb{S}^1} \|f(z)\| dz.$$

Como $\rho^{-1}(T) = \int_{\mathbb{S}^1} f(z) dz$ então,

$$\left\| \int_{\mathbb{S}^1} f(z) dz \right\| \leq \int_{\mathbb{S}^1} \|f(z)\| dz.$$

4. Seja $\pi : B \longrightarrow B(H)$ representação fiel. Note que, $\pi \circ \phi : A \longrightarrow B(H)$ é representação. Segue que,

$$\left\langle \pi \circ \phi \left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z) dz \right) h, k \right\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi \circ \phi(f(z)) h, k \rangle dz =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(\phi(f(z))) h, \rangle dz =$$

$$= \left\langle \pi \left(\int_{\mathbb{S}^1} \phi(f(z)) dz \right) h, k \right\rangle.$$

Logo,

$$\left\langle \pi \circ \phi \left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z) dz \right) h, k \right\rangle = \left\langle \pi \left(\int_{\mathbb{S}^1} \phi(f(z)) dz \right) h, k \right\rangle,$$

$\forall h, k \in H$.

Como π é injetiva,

$$\phi\left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz\right) = \int_{\mathbb{S}^1} \phi(f(z))dz.$$

5. Seja $\pi : A \longrightarrow B(H)$ representação fiel. Então,

$$\left\langle \pi\left(\int_{\mathbb{S}^1} f(wz)dz\right) h, k \right\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(wz))h, k\rangle dz.$$

Escreva, $w = e^{2\pi i\theta}$, com $\theta \in [0, 1]$.

Defina

$$\begin{array}{rccc} \text{g:} & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \langle \pi(f(z))h, k\rangle \end{array}$$

Segue que,

$$\int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(wz))h, k\rangle dz = \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(e^{2\pi i\theta} z))h, k\rangle dz =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} g(e^{2\pi i\theta} z)dz =$$

$$= \int_0^1 g(e^{2\pi i\theta} e^{2\pi it})dt =$$

$$= \int_0^1 \langle \pi(f(e^{2\pi i(\theta+t)}))h, k\rangle dt =$$

(fazendo $s = \theta + t$)

$$= \int_\theta^{\theta+1} \langle \pi(f(e^{2\pi is}))h, k\rangle ds =$$

$$= \int_\theta^1 \langle \pi(f(e^{2\pi is}))h, k\rangle ds + \int_1^{\theta+1} \langle \pi(f(e^{2\pi is}))h, k\rangle ds =$$

$$= \int_\theta^1 \langle \pi(f(e^{2\pi is}))h, k\rangle ds + \int_0^\theta \langle \pi(f(e^{2\pi is}))h, k\rangle ds =$$

$$= \int_0^1 \langle \pi(f(e^{2\pi is}))h, k\rangle ds =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(f(z))h, k\rangle dz =$$

$$= \left\langle \pi \left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz \right) h, k \right\rangle .$$

Logo, $\forall h, k \in H$,

$$\left\langle \pi \left(\int_{\mathbb{S}^1} f(wz)dz \right) h, k \right\rangle = \left\langle \pi \left(\int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz \right) h, k \right\rangle .$$

Como π é injetiva podemos concluir que,

$$\int_{\mathbb{S}^1} f(wz)dz = \int_{\mathbb{S}^1} f(z)dz.$$

6. Fixe $a \in A$. Defina,

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & A \\ & z & \longmapsto & a \end{array}$$

Note que, f é contínua.

Seja $\pi : A \longrightarrow B(H)$ representação fiel. Então, $\forall h, k \in H$ temos que,

$$\left\langle \pi \left(\int_{\mathbb{S}^1} adz \right) h, k \right\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(a)h, k \rangle dz = \langle \pi(a)h, k \rangle.$$

Logo,

$$\pi \left(\int_{\mathbb{S}^1} adz \right) = \pi(a).$$

Como π é injetiva, $\int_{\mathbb{S}^1} adz = a$.

■

Proposição 2.2.3 *Seja A uma C^*-álgebra e $\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(A)$ uma ação contínua. Defina,*

$$A^\alpha := \left\{ a \in A : \alpha_z(a) = a \quad \forall z \in \mathbb{S}^1 \right\} .$$

Neste caso, A^α é uma C^*-álgebra.

Prova: Vamos mostrar que A^α é uma C^*-subálgebra de A. Sejam $a, b \in A^\alpha$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, $\forall z \in \mathbb{S}^1$ temos que,

$$\alpha_z(a + \lambda b) = \alpha_z(a) + \lambda\alpha_z(b) = a + \lambda b \quad \text{e,}$$

$$\alpha_z(ab) = \alpha_z(a)\alpha_z(b) = ab.$$

Portanto, A^α é uma subálgebra de A.

Note que, se $a \in A^\alpha$ então, $a^* \in A^\alpha$. Logo, A^α é autoadjunta e portanto, é uma $*$-subálgebra.

Vamos mostrar que A^α é fechada. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^\alpha$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Temos que, $\forall z \in \mathbb{S}^1$,

$$\begin{aligned} \alpha_z(a) = \alpha_z(\lim_{n\to\infty} a_n) = \\ = \lim_{n\to\infty} \alpha_z(a_n) = \\ = \lim_{n\to\infty} a_n = \\ = a. \end{aligned}$$

Segue que, A^α é uma $*$-subálgebra fechada de A, e portanto, é uma C^*-álgebra.

■

Definição 2.2.4 *Seja A uma C^*-álgebra e $\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(A)$ uma ação contínua. Denominamos de C^*-álgebra dos pontos fixos, a C^*-álgebra A^α definida na proposição anterior.*

Proposição 2.2.5 *Seja A uma C^*-álgebra e $\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(A)$ uma ação contínua. Defina,*

$$\begin{array}{rccc} \phi\colon & A & \longrightarrow & A \\ & a & \longmapsto & \int_{\mathbb{S}^1} \alpha_z(a)dz \end{array}$$

Então:

1. *$\phi(a) \in A^\alpha$.*

2. *Para todo $a \in A^\alpha$, $\phi(a) = a$.*

3. *$\phi : A \longrightarrow A^\alpha$ é linear e contrativa.*

4. *Se $\phi(a^*a) = 0$ então, $a = 0$.*

Note que, a aplicação $\phi : A \longrightarrow A$ está bem definida.

De fato, como $\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(A)$ uma ação contínua então para cada $a \in A$, a aplicação,

$$\begin{array}{rccc} \alpha_a\colon & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & A \\ & z & \longmapsto & \alpha_z(a) \end{array}$$

é contínua.

Também, na Proposição 2.2.1, mostramos que existe um único elemento $\int_{\mathbb{S}^1} \alpha_a(z)dz = \int_{\mathbb{S}^1} \alpha_z(a)dz$.

Portanto, ϕ está bem definida.

Prova:

1. Fixe $a \in A$. Seja $w \in \mathbb{S}^1$. Temos que,

$$\alpha_w(\phi(a)) = \alpha_w\left(\int_{\mathbb{S}^1} \alpha_z(a)dz\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \alpha_w(\alpha_z(a))dz = \int_{\mathbb{S}^1} \alpha_{wz}(a)dz =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \alpha(wz)(a)dz = \int_{\mathbb{S}^1} \alpha(z)(a)dz =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \alpha_z(a)dz = \phi(a).$$

Logo, $\alpha_w(\phi(a)) = \phi(a)$, $\forall w \in \mathbb{S}^1$. Portanto, $a \in A^\alpha$.

2. Seja $a \in A^\alpha$. Então, $\alpha_z(a) = a$, $\forall z \in \mathbb{S}^1$. Segue que,

$$\phi(a) = \int_{\mathbb{S}^1} \alpha_z(a)dz = \int_{\mathbb{S}^1} adz = a.$$

Portanto, $\phi(a) = a$.

3. Vamos mostrar que ϕ é linear.

Sejam $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Temos que,

$$\phi(a + \lambda b) = \int_{\mathbb{S}^1} \alpha_z(a + \lambda b) =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \alpha_z(a)dz + \lambda \int_{\mathbb{S}^1} \alpha_z(b) =$$

$$= \phi(a) + \lambda\phi(b).$$

Logo, ϕ é linear.

Vamos mostrar que ϕ é contrativa. Seja $a \in A$. Temos que,

$$\|\phi(a)\| = \left\| \int_{\mathbb{S}^1} \alpha_z(a) dz \right\| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{S}^1} \|\alpha_z(a)\| dz =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \|a\| dz =$$

$$= \|a\|.$$

Portanto, ϕ é contrativa.

4. Seja $a \in A$ tal que $\phi(a^*a) = 0$. Vamos mostrar que $a = 0$.

Seja $\pi : A \longrightarrow B(H)$ representação fiel.

Afirmação 1 Para todo $z \in \mathbb{S}^1$, $\pi(\alpha_z(a)) = 0$.

Prova: Seja $h \in H$. temos que,

$$0 = \langle \pi(\phi(a^*a))h, h\rangle =$$

$$= \left\langle \pi \left(\int_{\mathbb{S}^1} \alpha_z(a^*a) dz \right) h, h \right\rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(\alpha_z(a^*a))h, h\rangle dz =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(\alpha_z(a^*))\pi(\alpha_z(a))h, h\rangle dz =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(\alpha_z(a))^*\pi(\alpha_z(a))h, h\rangle dz =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \langle \pi(\alpha_z(a))h, \pi(\alpha_z(a))h\rangle dz =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \|\pi(\alpha_z(a))h\|^2 dz.$$

Segue que,

$$\int_{\mathbb{S}^1} \|\pi(\alpha_z(a))h\|^2 dz = 0.$$

Logo, $\pi(\alpha_z(a))h = 0$, $\forall z \in \mathbb{S}^1$. Como $h \in H$ é qualquer, podemos concluir que $\pi(\alpha_z(a)) = 0$.

$\square$

Logo $\pi(\alpha_z(a)) = 0$, $\forall z \in \mathbb{S}^1$. Em particular tomando $z = 1$ temos que, $\pi(\alpha_1(a)) = \pi(a) = 0$. Como π é injetivo, temos que $a = 0$.

$\blacksquare$

Observação 2.2.6 *Seja E um grafo e $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(C^*(E))$ a ação de gauge. Defina a aplicação,*

$$\begin{array}{rccc} \phi\text{:} & C^*(E) & \longrightarrow & C^*(E) \\ & a & \longmapsto & \int_{\mathbb{S}^1} \gamma_z(a)dz. \end{array}$$

De acordo com a proposição anterior, temos que:

1. $\phi(a) \in C^*(E)^\gamma$;
2. *Se* $a \in C^*(E)^\gamma$ *então* $\phi(a) = a$;
3. ϕ *é linear e contrativa;*
4. *Se* $\phi(a^*a) = 0$ *então* $a = 0$.

A partir deste momento, sempre que escrevermos ϕ estaremos pensando na aplicação definida acima, a menos que se diga o contrário.

Observação 2.2.7 *Mostra-se que a aplicação ϕ definida acima é uma esperança condicional.*

Note que, como os itens 1., 2., 3. *e* 4. *são satisfeitos, as únicas condições que precisam ser verificadas para concluirmos que ϕ é uma esperança condicional são:*

- ϕ *é positiva;*
- $\forall b \in C^*(E)^\gamma$ *e* $\forall a \in C^*(E)$ *temos que:* $\phi(ba) = b\phi(a)$ *e* $\phi(ab) = \phi(a)b$.

Não vamos mostrar esses fatos aqui, pois para este trabalho, precisamos apenas que os itens 1., 2., 3. *e* 4. *sejam satisfeitos.*

2.3 A ÁLGEBRA DOS PONTOS FIXOS DA AÇÃO DE GAUGE

Considere um grafo E e a ação de gauge $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(C^*(E))$. Conforme a Definição 2.2.4, $C^*(E)^\gamma$ denota a álgebra dos pontos fixos, isto é,

$$C^*(E)^\gamma := \left\{ a \in C^*(E) : \gamma_z(a) = a, \quad \forall z \in \mathbb{S}^1 \right\}.$$

Nesta seção, vamos caracterizar a álgebra dos pontos fixos $C^*(E)^\gamma$ através da esperaça condicional definida na seção anterior.

Proposição 2.3.1 *Seja E um grafo e $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(C^*(E))$ a ação de gauge. Para qualquer subconjunto finito $F \subseteq E^*$ e para quaisquer escalares $c_{\mu,\nu} \in \mathbb{C}$ temos que:*

1. *Se $\phi : C^*(E) \longrightarrow C^*(E)^\gamma$ é a aplicação dada pela Observação 2.2.6, então:*

$$\phi\left(\sum_{\mu,\nu \in F} c_{\mu\nu} s_\mu s_\nu^* \right) = \sum_{\{\mu,\nu \in F : |\mu| = |\nu|\}} c_{\mu\nu} s_\mu s_\nu^*.$$

2. *$C^*(E)^\gamma = \overline{span}\{ s_\mu s_\nu^* : \quad s(\mu) = s(\nu) \quad e \quad |\mu| = |\nu| \}$.*

Prova:
Seja $\{s, p\}$ a E-família de Cuntz-Krieger universal.

1. Fixe um subconjunto finito $F \subseteq E^*$. Temos que,

$$\phi\left(\sum_{\mu,\nu \in F} c_{\mu\nu} s_\mu s_\nu^* \right) = \sum_{\mu,\nu \in F} c_{\mu\nu} \phi(s_\mu s_\nu^*) =$$

$$= \sum_{\mu,\nu \in F} c_{\mu\nu} \int_{\mathbb{S}^1} \gamma_z(s_\mu s_\nu^*) dz =$$

$$= \sum_{\mu,\nu \in F} c_{\mu\nu} \int_{\mathbb{S}^1} z^{|\mu| - |\nu|} s_\mu s_\nu^* dz.$$

Note que,

$$\int_{\mathbb{S}^1} z^{|\mu| - |\nu|} s_\mu s_\nu^* dz = \left\{ \begin{array}{cl} s_\mu s_\nu^*, & \text{se} \quad |\mu| = |\nu|, \\ 0, & \text{se} \quad |\mu| - |\nu| = k \neq 0. \end{array} \right.$$

Portanto,

$$\phi\left(\sum_{\mu,\nu\in F} c_{\mu\nu}s_\mu s_\nu^*\right) = \sum_{\{\mu,\nu\in F:|\mu|=|\nu|\}} c_{\mu\nu}s_\mu s_\nu^*.$$

2. Seja $A^0 := span\{s_\mu s_\nu^* : \quad s(\mu) = s(\nu) \;\text{ e }\; |\mu| = |\nu|\}$.

   Vamos mostrar que, $C^*(E)^\gamma = \overline{A^0}$.

   ($\supseteq$) Seja $a = \displaystyle\sum_{\{\mu,\nu\in F:|\mu|=|\nu|\}} c_{\mu\nu}s_\mu s_\nu^* \in A^0$ e $z \in \mathbb{S}^1$. Temos que,

$$\begin{aligned}\gamma_z(a) = \gamma_z\left(\sum_{\{\mu,\nu\in F:|\mu|=|\nu|\}} c_{\mu\nu}s_\mu s_\nu^*\right) &= \\ = \sum_{\{\mu,\nu\in F:|\mu|=|\nu|\}} c_{\mu\nu}z^{|\mu|-|\nu|}s_\mu s_\nu^* &= \\ = \sum_{\{\mu,\nu\in F:|\mu|=|\nu|\}} c_{\mu\nu}s_\mu s_\nu^* &= \\ &= a.\end{aligned}$$

   Logo, $a \in C^*(E)^\gamma$.

   Isto mostra que, $A^0 \subseteq C^*(E)^\gamma$. Como $C^*(E)^\gamma$ é fechada então, $\overline{A^0} \subseteq C^*(E)^\gamma$.

   ($\subseteq$) Seja $a \in C^*(E)^\gamma$.

   Note que, $\phi(C^*(E)) \subseteq \overline{A^0}$.

   De fato, no item 1. desta proposição, mostramos que,

$$\phi(span\{s_\mu s_\nu^* : s(\mu) = s(\nu)\}) \subseteq A^0 \subseteq \overline{A^0}.$$

   Como $C^*(E) = \overline{span}\{s_\mu s_\nu^* : s(\mu) = s(\nu)\}$ e ϕ é contínua, temos que,

$$\phi(C^*(E)) \subseteq \overline{A^0}.$$

   Em particular, $\phi(C^*(E)^\gamma) \subseteq \phi(C^*(E)) \subseteq \overline{A^0}$.

Como $a \in C^*(E)^\gamma$ então pela Proposição 2.2.5, item 2., $\phi(a) = a$. Segue que,

$$a = \phi(a) \in \phi(C^*(E)^\gamma) \subseteq \overline{A^0}.$$

Logo, $C^*(E)^\gamma \subseteq \overline{A^0}$.

Portanto,

$$C^*(E)^\gamma = \overline{span}\{s_\mu s_\nu^* : \quad s(\mu) = s(\nu) \;\text{ e }\; |\mu| = |\nu|\}.$$

■

2.4 A ESTRUTURA DA ÁLGEBRA DOS PONTOS FIXOS DA AÇÃO DE GAUGE

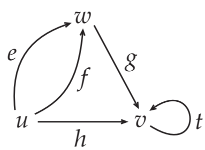
Na seção anterior mostramos que $C^*(E)^\gamma = \overline{span}\{s_\mu s_\nu^* : \quad s(\mu) = s(\nu) \;\text{ e }\; |\mu| = |\nu|\}$. Neste seção, vamos mostrar que a álgebra dos pontos fixos está contida em uma união enumerável de C^*-álgebras encaixadas.

Essa nova caracterização é importante, pois facilita a verificação de que certos homomorfismos, restritos a C^*-álgebra dos pontos fixos, são injetivos. Isso será feito no Capítulo 3.

Definição 2.4.1 *Seja E um grafo. Para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada $v \in E^0$ definimos:*

1. $\mathcal{F}_k(v) := \overline{span}\{s_\mu s_\nu^* : s(\mu) = v = s(\nu) \;\text{ e }\; |\mu| = k = |\nu|\}$.
2. $\mathcal{F}_k := \overline{span}\{s_\mu s_\nu^* : s(\mu) = s(\nu) \;\text{ e }\; |\mu| = k = |\nu|\}$.
3. $E^{\leq k} := \{\mu \in E^* : |\mu| = k, \;\text{ ou }\; |\mu| < k \;\text{ e }\; s(\mu) \;\text{ é source}\}$.
4. $\mathcal{F}_{\leq k}(v) := \overline{span}\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in E^{\leq k} \;\text{ e }\; s(\mu) = v = s(\nu)\}$.
5. $\mathcal{F}_{\leq k} := \overline{span}\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in E^{\leq k} \;\text{ e }\; s(\mu) = s(\nu)\}$.

Observe que, os caminhos $\mu \in E^*$ que pertencem ao conjunto $E^{\leq k}$ podem ser de duas formas: ou $|\mu| = k$, ou $|\mu| < k$ e $s(\mu)$ é um source. Por exemplo, considere o seguinte grafo:



Neste grafo,

$$E^2 = \{ge, gf, tg, th, tt\},$$

$$E^{\leq 2} = \{ge, gf, tg, th, tt, e, f, h, u\}.$$

Observe que, $g, t \notin E^{\leq 2}$, pois estas arestas não começam em um source.

Note que, no conjunto $\mathcal{F}_{\leq k}$ estamos admitindo elementos $s_\mu s_\nu^*$ tais que, $|\mu| \neq |\nu|$. Além disso, se $s_\mu s_\nu^* \in \mathcal{F}_{\leq k}(v)$ e $|\mu| \neq |\nu|$ então ou, $|\mu| < k$, ou $|\nu| < k$. Logo, v é um source.

Por outro lado, se v não é source então $\mathcal{F}_{\leq k}(v) = \mathcal{F}_k(v)$.

Proposição 2.4.2 *Seja E um grafo e $\{s, p\}$ a E-família de Cuntz-Krieger universal. Para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada $v \in E^0$ seja $S = \{E^{\leq k} \cap s^{-1}(v)\}$. Neste caso:*

1. *Se S é um conjunto finito então $\mathcal{F}_{\leq k}(v)$ é isomorfo a $M_{\#\{S\}}(\mathbb{C})$.*
2. *Se S é um conjunto infinito então $\mathcal{F}_{\leq k}(v)$ é isomorfo a $K(l^2(S))$.*

Prova: Primeiro observe que, $S = \{E^{\leq k} \cap s^{-1}(v)\}$ é sempre enumerável.

Defina,

$$F = \{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in S\}.$$

Note que, de acordo com as Proposições C.1.1 e C.1.3, independente de S ser infinito ou infinito, precisamos mostrar que:

- F é não nulo;
- A Eq. $(C.1)$ é satisfeita.

Vamos mostrar que F é não nulo.

Suponha por absurdo que F é nulo. Então, se $\mu \in S$ temos que:

$$s_\mu s_\mu^* = 0 \quad \Rightarrow \quad s_\mu = s_\mu s_{mu}^* s_\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{s(\mu)} = s_\mu^* s_\mu = 0.$$

Mas isso é um absurdo, pois as projeções da família universal são todas não nulas.

Portanto, F é não nulo.

Vamos mostrar que a Eq. $(C.1)$ é satisfeita.

Sejam $\mu, \nu, \alpha, \beta \in S$. Devemos mostrar que,

$$s_\mu s_\nu^* s_\alpha s_\beta^* = \begin{cases} s_\mu s_\beta^*, & \text{se} \quad \alpha = \nu, \\ 0, & \text{se} \quad \alpha \neq \nu. \end{cases}$$

Se $\nu = \alpha$ temos que,

$$s_\mu s_\nu^* s_\alpha s_\beta^* = s_\mu s_\nu^* s_\nu s_\beta^* = s_\mu p_{s(\nu)} s_\beta^* = s_\mu p_v s_\beta^* = s_\mu s_\beta^*.$$

Por outro lado, se $\nu \neq \alpha$ podemos considerar duas situações: $|\nu| = |\alpha|$ ou $|\nu| \neq |\alpha|$.

Se $|\nu| = |\alpha|$. Neste caso, como já estamos supondo que $\nu \neq \alpha$, então pelo Corolário 1.4.12, $s_\nu^* s_\alpha = 0$.

Logo, $s_\mu s_\nu^* s_\alpha s_\beta^* = 0$.

Se $|\nu| \neq |\alpha|$ então $|\nu| < k$ ou $|\alpha| < k$. Como $\nu, \alpha \in S$ então $s(\nu) = s(\alpha) = v$ e assim, v é um source.

Segue que, não é possível escrever $\nu = \alpha\nu$' ou $\alpha = \nu\alpha$'. Portanto, pelo Corolário 1.4.15, $s_\mu s_\nu^* s_\alpha s_\beta^* = 0$.

Portanto,

$$s_\mu s_\nu^* s_\alpha s_\beta^* = \begin{cases} s_\mu s_\beta^*, & \text{se} \quad \alpha = \nu, \\ 0, & \text{se} \quad \alpha \neq \nu. \end{cases}$$

Dessa forma, a Eq. $(C.1)$ está satisfeita.

Portanto, $\mathcal{F}_{\leq k}(v)$ é isomorfo a $M_{\#\{S\}}(\mathbb{C})$ ou $K(l^2(S))$.

■

Observação 2.4.3 *Sabemos que tanto $M_{\#\{S\}}(\mathbb{C})$ como $K(l^2(S))$ são simples. Portanto, para $k \in \mathbb{N}$ e $v \in E^0$ fixos, temos que a C^*-álgebra $\mathcal{F}_{\leq k}(v)$ é simples.*

Proposição 2.4.4 *Para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que,*

$$\mathcal{F}_{\leq k} \cong \bigoplus_{v \in E^0} \mathcal{F}_{\leq k}(v).$$

Prova: Fixe $k \in \mathbb{N}$.

Observe que, E^0 é um conjunto enumerável, $\{\mathcal{F}_{\leq k}(v)\}_{v \in E^0}$ é uma família de subálgebras de $\mathcal{F}_{\leq k}$ e que,

$$\mathcal{F}_{\leq k} = \overline{span}\{\mathcal{F}_{\leq k}(v) : v \in E^0\}.$$

Portanto, pela Proposição C.1.4, para mostrarmos que $\mathcal{F}_{\leq k} \cong \bigoplus_{v \in E^0} \mathcal{F}_{\leq k}(v)$, é suficiente mostrarmos que $\mathcal{F}_{\leq k}(v)\mathcal{F}_{\leq k}(w) = 0$ sempre que, $v \neq w$.

Sejam $v, w \in E^0$ tais que $v \neq w$.

Sejam $\mu, \nu \in E^{\leq k} \cap s^{-1}(v)$ e $\alpha, \beta \in E^{\leq k} \cap s^{-1}(w)$. Precisamos mostrar que $(s_\mu s_\nu^*)(s_\alpha s_\beta^*) = 0$.

Pelo Corolário 1.4.15 temos que,

$$(s_\mu s_\nu^*)(s_\alpha s_\beta^*) = \begin{cases} s_\mu s_{\beta\nu'}^*, & \text{se} \qquad \nu = \alpha\nu', \\ s_{\mu\alpha'} s_\beta^*, & \text{se} \qquad \alpha = \nu\alpha', \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos mostrar que $\nu = \alpha\nu'$ e $\alpha = \nu\alpha'$ não podem ocorrer.

Primeiro note que, $\nu \neq \alpha$, pois $s(\nu) = v \neq w = s(\alpha)$.

Suponha por absurdo que $\nu = \alpha\nu'$. Então, $s(\alpha) = w$ não é um source. Logo, $|\alpha| = k$.

Como $\nu = \alpha\nu'$ e $|\alpha| = k$ então $|\nu| > k$. Absurdo.

Portanto, $\nu \neq \alpha\nu'$.

Analogamente, $\alpha \neq \nu\alpha'$.

Portanto,

$$(s_\mu s_\nu^*)(s_\alpha s_\beta^*) = 0,$$

e assim, $\mathcal{F}_{\leq k}(v)\mathcal{F}_{\leq k}(w) = 0$.

■

Proposição 2.4.5 *Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_{\leq k} \subseteq \mathcal{F}_{\leq k+1}$.*

Prova: Fixe $k \in \mathbb{N}$.

Vamos mostrar que os geradores de $\mathcal{F}_{\leq k}$ estão contidos em $\mathcal{F}_{\leq k+1}$. Sejam $\mu, \nu \in E^{\leq k}$ tais que $s(\mu) = v = s(\nu)$, ou seja, $s_\mu s_\nu^* \in \mathcal{F}_{\leq k}$.

Se v é um source então, por definição, $s_\mu s_\nu^* \in \mathcal{F}_{\leq k+1}$.

Se v não é source temos que, $\mathcal{F}_{\leq k}(v) = \mathcal{F}_k(v)$.

Como v não é source podemos fazer,

$$s_\mu s_\nu^* = s_\mu p_v s_\nu^* =$$

$$= s_\mu \left(\sum_{\{e:r(e)=v\}} s_e s_e^* \right) s_\nu^* =$$

$$= \sum_{\{e:r(e)=v\}} s_\mu s_e s_e^* s_\nu^* =$$

$$= \sum_{\{e:r(e)=v\}} s_{\mu e} s_{\nu e}^*.$$

Portanto, $s_\mu s_\nu^* \in \mathcal{F}_{k+1}$.

Portanto,

$$\mathcal{F}_{\leq k}(v) \subseteq \mathcal{F}_{\leq k+1}.$$

Como $\mathcal{F}_{\leq k} = \overline{span}\{\mathcal{F}_{\leq k}(v) : v \in E^0\}$ e $\mathcal{F}_{\leq k}(v) \subseteq \mathcal{F}_{\leq k+1}$ podemos concluir que $\mathcal{F}_{\leq k} \subseteq \mathcal{F}_{\leq k+1}$.

■

Na Proposição 2.3.1 mostramos que,

$$C^*(E)^\gamma = \overline{span}\{s_\mu s_\nu^* : \quad s(\mu) = s(\nu) \ \text{ e } \ |\mu| = |\nu|\}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} & span\{s_\mu s_\nu^* : \quad s(\mu) = s(\nu) \ \text{ e } \ |\mu| = |\nu|\} \subseteq \\ \subseteq & \bigcup_{k \in \mathbb{N}} span\{s_\mu s_\nu^* : \quad \mu, \nu \in E^{\leq k} \ \text{ e } \ s(\mu) = s(\nu)\} \subseteq \\ \subseteq & \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{span}\{s_\mu s_\nu^* : \quad \mu, \nu \in E^{\leq k} \ \text{ e } \ s(\mu) = s(\nu)\} = \\ & = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{\leq k}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$C^*(E)^\gamma \subset \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{\leq k}},$$

ou seja, a C^*-álgebra dos pontos fixos está contida em uma união enumerável de C^*-álgebras encaixadas.

3 OS TEOREMAS DE UNICIDADE DA C^*-ÁLGEBRA DE GRAFO

Este é o capítulo príncipal deste trabalho. Aqui, vamos enunciar, provar e dar exemplos de dois importantes teoremas que determinam quando C^*-álgebras geradas por famílias de Cuntz-Krieger são isomorfas. Mais precisamente, esses teoremas vão fornecer condições suficientes para que uma C^*-álgebra gerada por uma família de Cuntz-Krieger seja isomorfa a C^*-álgebra do grafo.

Esses isomorfismos vão depender das famílias de Cuntz-Krieger em questão e de características específicas do grafo.

3.1 O TEOREMA DA INVARIÂNCIA DA AÇÃO DE GAUGE

Nesta seção faremos a prova do Teorema da Invariância da Ação de Gauge e algumas aplicações do mesmo.

Antes de enunciarmos o Teorema da Invariância da Ação de Gauge, precisamos fazer um pequeno lema.

Lema 3.1.1 *Sejam E um grafo e $\{T, Q\}$ uma E-família de Cuntz-Krieger em uma C^*-álgebra B tal que, $Q_v \neq 0$, $\forall v \in E^0$ e $\pi_{T,Q} : C^*(E) \longrightarrow B$ o homomorfismo obtido pela propriedade universal.*

Se $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(C^*(E))$ é ação de gauge, então a restrição, $\pi_{T,Q} : C^*(E)^\gamma \longrightarrow B$, é uma isometria.

Prova: Lembre que, $C^*(E)^\gamma \subseteq \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{\leq k}}$.

Fixe $k \in \mathbb{N}$ e $v \in E^0$.

Afirmação 1 Para todo $s_\mu s_\nu^* \in \mathcal{F}_{\leq k}(v)$ temos que $\pi_{T,Q}(s_\mu s_\nu^*) \neq 0$.

Prova: Suponha por absurdo que existam $\mu, \nu \in E^{\leq k} \cap s^{-1}(v)$ tais que

$$\pi_{T,Q}(s_\mu s_\nu^*) = T_\mu T_\nu^* = 0.$$

Então,

$$0 = T_\mu^* T_\mu T_\nu^* T_\nu = Q_{s(\mu)} Q_{s(\nu)} = Q_v^2 = Q_v,$$

o que é um absurdo.

Portanto, $\forall s_\mu s_\nu^* \in \mathcal{F}_{\leq k}(v)$ temos que $\pi_{T,Q}(s_\mu s_\nu^*) \neq 0$.

$\square$

Pela Observação 2.4.3 temos que $\mathcal{F}_{\leq k}(v)$ é simples. Como $\pi_{T,Q}$ é não nula em $\mathcal{F}_{\leq k}(v)$ então, $\pi_{T,Q} : \mathcal{F}_{\leq k}(v) \longrightarrow B$ é injetiva.

Portanto, $\pi_{T,Q}$ restrita a $\mathcal{F}_{\leq k}(v)$ é isométrica.

Vamos mostrar que $\pi_{T,Q}$ restrita a $\bigoplus\limits_{v \in E^0} \mathcal{F}_{\leq k}(v)$ é injetiva.

Seja $(a_v)_{v \in E^0} \in \bigoplus\limits_{v \in E^0} \mathcal{F}_{\leq k}(v)$ tal que $\pi_{T,Q}((a_v)_{v \in E^0}) = 0$.

Fixe $w \in E^0$. Neste caso,

$$\pi_{T,Q}(a_w^*(a_v)_{v \in E^0}) = 0.$$

Como $a_w^* a_v = 0$, $\forall v \neq w$ temos que,

$$\pi_{T,Q}(a_w^* a_w) = 0.$$

Mas $a_w, a_w^* \in \mathcal{F}_{\leq k}(w)$ e $\pi_{T,Q}$ é injetiva em $\mathcal{F}_{\leq k}(w)$ então $a_w^* a_w = 0$. Logo, $a_w = 0$.

Portanto, $a_v = 0$, $\forall v \in E^0$, ou seja, $(a_v)_{v \in E^0}$ é a sequência nula e assim, $\pi_{T,Q}$ é injetiva em $\bigoplus\limits_{v \in E^0} \mathcal{F}_{\leq k}(v)$.

Segue que, $\pi_{T,Q}$ é isométrica em $\bigoplus\limits_{v \in E^0} \mathcal{F}_{\leq k}(v) \cong \mathcal{F}_{\leq k}$.

Como $\mathcal{F}_{\leq k} \subseteq \mathcal{F}_{\leq k+1}$ então $\pi_{T,Q}$ restrita a $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{\leq k}$ é injetiva, e portanto isométrica.

Logo, $\pi_{T,Q}$ restrita a $\overline{\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{\leq k}}$ é injetiva.

Como $C^*(E)^\gamma \subseteq \overline{\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{\leq k}}$, podemos concluir que $\pi_{T,Q}$ restrita a $C^*(E)^\gamma$ é injetiva e portanto, isométrica.

$\blacksquare$

Teorema 3.1.2 - ***O Teorema da Invariância da Ação de Gauge***

Seja E um grafo e $\{T, Q\}$ uma E-família de Cuntz-Krieger em uma C^*-álgebra B, com $Q_v \neq 0$, $\forall v \in E^0$.

Se existe uma ação contínua $\beta : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(B)$ tal que,

$$\beta_z(T_e) = zT_e \quad e \quad \beta_z(Q_v) = Q_v,$$

$\forall e \in E^1$ e $\forall v \in E^0$, respectivamente, então $\pi_{T,Q}$ é um isomorfismo entre $C^*(E)$ e $C^*(T,Q)$.

Prova: Como $C^*(T,Q)$ é gerada por $\{T,Q\} = \{\pi_{T,Q}(s_e), \pi_{T,Q}(p_v)\}$ então $\pi_{T,Q} : C^*(E) \longrightarrow C^*(T,Q)$ é sobrejetivo.

Vamos mostrar que $\pi_{T,Q}$ é injetivo. Para tanto, vamos mostrar que $\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| \leq \|\pi_{T,Q}(a)\|$.

Seja $\{s,p\}$ a E-família de Cuntz-Krieger universal.

Afirmação 1 Seja $a \in span\{s_\mu s_\nu^* : \mu,\nu \in E^* \text{ e } s(\mu) = s(\nu)\}$, digamos,

$$a = \sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} s_\mu s_\nu^*.$$

Neste caso, $\pi_{T,Q}(\gamma_z(a)) = \beta_z(\pi_{T,Q}(a))$.

Prova: Temos que,

$$\pi_{T,Q}(\gamma_z(a)) = \pi_{T,Q}\left(\gamma_z\left(\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} s_\mu s_\nu^*\right)\right) =$$

$$= \pi_{T,Q}\left(\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} z^{|\mu|-|\nu|} s_\mu s_\nu^*\right) =$$

$$= \sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} z^{|\mu|-|\nu|} T_\mu T_\nu^*.$$

Por outro lado,

$$\beta_z(\pi_{T,Q}(a)) = \beta_z\left(\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} T_\mu T_\nu^*\right) =$$

$$= \sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} z^{|\mu|-|\nu|} T_\mu T_\nu^*.$$

Portanto,

$$\pi_{T,Q}(\gamma_z(a)) = \beta_z(\pi_{T,Q}(a)).$$

□

Afirmação 2 Temos que, $\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| \leq \|\pi_{T,Q}(a)\|$ para todo $a \in span\{s_\mu s_\nu^* : \mu,\nu \in E^* \text{ e } s(\mu) = s(\nu)\}$.

Prova: Temos que,

$$\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| = \left\|\pi_{T,Q}\left(\int_{\mathbb{S}^1} \gamma_z(a)dz\right)\right\| =$$

(Proposição 2.2.2, item 4.)

$$= \left\|\int_{\mathbb{S}^1} \pi_{T,Q}(\gamma_z(a))dz\right\| \leq$$

(Proposição 2.2.2, item 3.)

$$\leq \int_{\mathbb{S}^1} \|\pi_{T,Q}(\gamma_z(a))\|dz =$$

(afirmação anterior)

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \|\beta_z(\pi_{T,Q}(a))\|dz =$$

(β_z é um automorfismo $\Rightarrow$ é isométrico)

$$= \int_{\mathbb{S}^1} \|\pi_{T,Q}(a)\|dz$$

$$= \|\pi_{T,Q}(a)\|.$$

Portanto, $\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| \leq \|\pi_{T,Q}(a)\|$.

$\square$

Afirmação 3 Para todo $a \in C^*(E)$, $\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| \leq \|\pi_{T,Q}(a)\|$.

Prova: Seja $a \in C^*(E)$. Então, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, com $a_n \in span\{s_\mu s_\nu^* : s(\mu) = s(\nu)\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Temos que,

$$\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| = \left\|\pi_{T,Q}\left(\phi\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\right)\right\| =$$

$$= \left\|\pi_{T,Q}\left(\lim_{n\to\infty} \phi(a_n)\right)\right\| =$$

$$= \|\lim_{n\to\infty} \pi_{T,Q}(\phi(a_n))\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \|\pi_{T,Q}(\phi(a_n))\| \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \|\pi_{T,Q}(a_n)\| =$$

$$= \left\| \pi_{T,Q} \left(\lim_{n\to\infty} (a_n) \right) \right\| =$$
$$= \|\pi_{T,Q}(a)\|.$$

□

Seja $a \in C^*(E)$ tal que $\pi_{T,Q}(a) = 0$.

Como $\pi_{T,Q}(a) = 0$ então $\pi_{T,Q}(a^*a) = 0$. Segue que, $\|\pi_{T,Q}(a^*a)\| = 0$ e assim, pela afirmação anterior, $\|\pi_{T,Q}(\phi(a^*a))\| = 0$.

Como $\phi(C^*(E)) \subseteq C^*(E)^\gamma$ e $\pi_{T,Q}$ é isométrica em $C^*(E)^\gamma$ temos que, $\|\phi(a^*a)\| = 0$. Logo, $\phi(a^*a) = 0$ e assim, pela Proposição 2.2.5, item 4., $a = 0$.

Portanto, $\pi_{T,Q}$ é injetivo.

Portanto, $\pi_{T,Q}$ é um isomorfismo entre $C^*(E)$ e $C^*(T,Q)$.

■

O Teorema da Invariância da Ação de Gauge nos diz que se B é uma C^*-álgebra que contém uma E-família de Cuntz-Krieger com as projeções todas não nulas e que tem uma ação contínua $\beta : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(B0$ que satisfaz as mesmas propriedades que a ação de gauge, então $C^*(E)$ e $C^*(T,Q)$ são isomorfas. Em outras palavras, esse teorema nos diz que a ação de gauge é única.

O nome Teorema da Invariância da Ação de Gauge, dévesse ao fato de que, se $\beta : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(B)$ é uma ação contínua e satisfaz as condições do Teorema, então $\pi_{T,Q}(\gamma_z(a)) = \beta_z(\pi_{T,Q}(a))$. Em palavras, o homomorfismo $\pi_{T,Q}$ é invariante pela ação de gauge (à direita pela ação de gauge mesmo e à esquerda pela aplicação β que se comporta como uma ação de gauge).

O Teorema da Invariância da Ação de Gauge é importante por não fazer hipótese sobre o grafo em questão, ou seja, pode ser aplicado a qualquer grafo que tenha linhas finitas (desde que as outras hipóteses sejam satisfeitas obviamente).

A seguir vamos fazer uma aplicação desse teorema.

Os grafos que não tem sources nos permitem fazer argumentos utilizando a propriedade $(CK2)$, como o feito na prova da Proposição 2.4.5. Esse tipo de argumento é uma importante ferramenta desta teoria e, será ainda muito utilizada neste trabalho.

Mas e quando consideramos grafos que podem ter (ou não) sources? Neste caso, a ideia é obter a partir do grafo inicial um grafo sem sources e sem sinks, de modo que este "contenha" o grafo original, ou seja, de modo que exista um homomorfismo injetivo entre suas respectivas C^*-álgebras.

Seja E um grafo.

Para cada $v \in E^0$ que é source, adicione ao grafo E, um caminho da seguinte forma,

$$v \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \cdots$$

Para cada $w \in E^0$ que é sink, adicione ao grafo E, um caminho da seguinte forma,

$$w \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \cdots$$

Defina o grafo aumentado $\widetilde{E}$ como sendo o grafo E juntamente com os caminhos que foram adicionados aos sources e sinks. Por exemplo, considere o grafo E,

$$\begin{tikzcd} & w \arrow[dr, "g"] & \\ u \arrow[ur, bend left, "e"] \arrow[ur, bend right, "f"'] \arrow[rr, "h"'] & & v \end{tikzcd}$$

Neste caso, o grafo aumentado $\widetilde{E}$ pode ser representado por,

$$\begin{tikzcd} & & & w \arrow[dr, "g"] & & & \\ \cdots \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & u \arrow[ur, bend left, "e"] \arrow[ur, bend right, "f"'] \arrow[rr, "h"'] & & v \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \cdots \end{tikzcd}$$

Corolário 3.1.3 - ***O Corolário do Grafo Aumentado*** *Seja E um grafo e $\widetilde{E}$ o grafo sem sources nem sinks obtido a partir de E. Neste caso, existe um homomorfismo injetivo $\phi : C^*(E) \longrightarrow C^*(\widetilde{E})$.*

Prova: Seja $\{\widetilde{t}, \widetilde{q}\}$ uma $\widetilde{E}$-família de Cuntz-Krieger universal. Defina, $t_e = \widetilde{t}_e$ e $q_v = \widetilde{q}_v$, $\forall e \in E^1$ e $\forall v \in E^0$ respectivamente.

Vamos mostrar que $\{t, q\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $C^*(\widetilde{E})$.

Como $\{\widetilde{t}, \widetilde{q}\}$ é uma $\widetilde{E}$-família de Cuntz-Krieger claro que, $\{q_v : v \in E^0\}$ é uma família de projeções não nulas e mutuamente ortogonais e $\{t_e : e \in E^1\}$ é uma família de isometrias parciais.

Vamos verificar que $(CK1)$ é satisfeita. Seja $e \in E^0$. Então, $s(e) \in E^0$ e,

$$t_e^* t_e = \widetilde{t}_e^* \widetilde{t}_e = \widetilde{q}_{s(e)} = q_{s(e)}.$$

Logo, $(CK1)$ é satisfeita.

Vamos verificar que $(CK2)$ é satisfeita. Seja $v \in E^0$ que não é source. Neste caso,

$$q_v = \widetilde{q}_v = \sum_{\{e \in \widetilde{E}^1 : r(e) = v\}} \widetilde{t}_e \widetilde{t}_e^* = \sum_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} \widetilde{t}_e \widetilde{t}_e^* = \sum_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} t_e t_e^*.$$

Logo, $(CK2)$ é satisfeita. Dessa forma, $\{t, q\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $C^*(\widetilde{E})$.

Seja $\{s, p\}$ a E-família de Cuntz-Krieger universal. Segue que, existe um homomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \pi_{t,q}: & C^*(E) & \longrightarrow & C^*(\widetilde{E}) \\ & s_e & \longmapsto & t_e \\ & p_v & \longmapsto & q_v \end{array}$$

Como $\widetilde{E}$ é um grafo, pelo Teorema 2.1.4 existe uma ação $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(C^*(\widetilde{E}))$ que satisfaz:

$$\gamma_z(\widetilde{t}_e) = z\widetilde{t}_e \ \text{ e } \ \gamma_z(\widetilde{q}_v) = \widetilde{q}_v,$$

$\forall e \in \widetilde{E}^1$ e $\forall v \in \widetilde{E}^0$.

Em particular,

$$\gamma_z(t_e) = zt_e, \ \text{ e } \ \gamma_z(q_v) = q_v,$$

$\forall e \in E^1$ e $\forall v \in E^0$.

Portanto, pelo Teorema da Invariância da Ação de Gauge, temos que, $\pi_{t,q} : C^*(E) \longrightarrow C^*(\widetilde{E})$ é injetivo.

Logo, definindo $\phi = \pi_{t,q}$ temos que o corolário está provado.

■

No Corolário 3.1.3 o fato crucial para garantir a existência do homomorfismo injetivo foi a existência da ação de gauge dada pelo Teorema 2.1.4.

Podemos nos perguntar se no Teorema da Invariância da Ação de Gauge, a hipótese da existência de uma ação contínua que satisfaz condições semelhantes a ação de gauge não pode ser descartada. No próximo exemplo veremos que a resposta para essa pergunta é não. Antes deste exemplo, precisamos de duas definições.

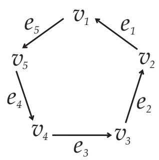
Definição 3.1.4 *Seja E um grafo. Um ciclo em E é um caminho $\mu = \mu_1\mu_2 \cdots \mu_n$ que satisfaz:*

1. $r(\mu) = s(\mu)$;

2. $s(\mu_i) \neq s(\mu_j), \quad \forall i \neq j.$

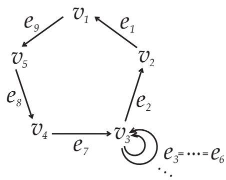
Dizemos que um ciclo μ é baseado em $v \in E^0$ se $r(\mu) = v = s(\mu)$.

Exemplo 3.1.5 *O caminho $e_1 e_2 \cdots e_5$ no grafo,*



é um ciclo baseado em v_1.

Por outro lado, o caminho $e_1 e_2 \cdots e_9$ no grafo,



não é um ciclo, pois $s(e_3) = \cdots = s(e_7) = v_3$.

Os caminhos μ tais que $s(\mu) = r(\mu)$ são chamados caminhos fechados.

Claro que, todo ciclo é um caminho fechado.

Exemplo 3.1.6 *Seja C_n o grafo que consiste em um único ciclo com n arestas, ou seja,*

$$C_n = (\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}, \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}, r, s),$$

que satisfaz:

$$r(e_i) = v_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

$$s(e_i) = v_{i+1}, \quad \forall 1 \leq i \leq n-1,$$

$$s(e_n) = v_1.$$

Por exemplo, para $n = 5$, podemos representar C_5 como o grafo do Exemplo 3.1.5.

Vamos mostrar que o Teorema da Invariância da Ação de Gauge pode falhar se a hipótese da existência da ação $\beta : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(B)$ for retirada.

Defina,

$$T_{e_i} = E_{i,i+1}, \quad \forall 1 \leq i \leq n-1,$$

$$T_{e_n} = E_{n,1},$$

$$Q_{v_i} = E_{i,i}, \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

em que, $\{E_{i,j}\}_{1\leq i,j\leq n}$ *é a base canônica de* $M_n(\mathbb{C})$.

É facil ver que $\{T, Q\}$ *é uma* C_n*-família de Cuntz-Krieger em* $M_n(\mathbb{C})$ *e satistaz* $Q_v \neq 0$, $\forall v \in E^0$.

Então, da propriedade universal da $C^*(C_n)$ *existe um homomorfismo,*

$$\begin{array}{cccc} \pi_{T,Q}\colon & C^*(C_n) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ & s_{e_i} & \longmapsto & T_{e_i} \\ & p_{v_i} & \longmapsto & Q_{v_i} \end{array}$$

Vamos mostrar que $\pi_{T,Q}$ *não é injetivo.*

Note que,

$$\pi_{T,Q}(s_{e_1}s_{e_2}\cdots s_{e_n}) = T_{e_1}T_{e_2}\cdots T_{e_n} = E_{1,1} = Q_{v_1} = \pi_{T,Q}(p_{v_1}).$$

Vamos mostrar que,

$$s_{e_1}s_{e_2}\cdots s_{e_n} - p_{v_1} \neq 0.$$

Para tanto, é suficiente mostrar que $\|s_{e_1}s_{e_2}\cdots s_{e_n} - p_{v_1}\| \neq 0$.

No Exemplo 1.3.1, mostramos que dado um grafo E, sempre é possível obter uma E-família de Cuntz-Krieger em $B(l^2(\mathbb{N}))$. *Seja* $\{S, P\}$ *a* C_n*-família de Cuntz-Krieger construída conforme esse exemplo.*

Considere o homomorfismo,

$$\begin{array}{cccc} \pi_{S,P}\colon & C^*(C_n) & \longrightarrow & B(l^2(\mathbb{N})) \\ & s_{e_i} & \longmapsto & S_{e_i} \\ & p_{v_i} & \longmapsto & P_{v_i} \end{array}$$

Na prova da Proposição 1.5.7 vimos que se $N \in D_{s(e_n)} = D_{v_1}$ *então,*

$$\pi_{S,P}(s_{e_1}s_{e_2}\cdots s_{e_n})(\delta_N) = \delta_{f_{e_1}f_{e_2}\cdots f_{e_n}(N)}.$$

Relembrando a forma como as funções f_{e_i} *foram definidas no Exemplo 1.3.1 podemos escolher, sem perda de generalidade,* $f_{e_1}, f_{e_2}, \cdots, f_{e_n}$ *de modo que exista* $m \in D_{s(e_n)} = D_{v_1}$ *tal que,*

$$f_{e_1}f_{e_2}\cdots f_{e_n}(m) \neq m.$$

Logo,

$$\delta_{f_{e_1}f_{e_2}\cdots f_{e_n}(m)} \neq \delta_m.$$

Portanto,

$$(\pi_{S,P}(s_{e_1}s_{e_2}\cdots s_{e_n}))(\delta_m) \neq \delta_m = (\pi_{S,P}(p_{v_1})(m)).$$

Segue que,

$$(\pi_{S,P}(s_{e_1}s_{e_2}\cdots s_{e_n}) - p_{v_1}) \neq 0.$$

Portanto, $\|s_{e_1}s_{e_2}\cdots s_{e_n} - p_{v_1}\| \neq 0$, *e assim,* $s_{e_1}s_{e_2}\cdots s_{e_n} \neq p_{v_1}$. *Portanto,* $\pi_{T,Q}$ *não é injetivo.*

Até este momento, construímos um grafo C_n *de modo que existe uma* C_n*-família de Cuntz-Krieger* $\{T, Q\}$ *em* $M_n(\mathbb{C})$ *que satisfaz* $Q_v \neq 0$, $\forall v \in C_n^0$, *mas o homomorfismo* $\pi_{T,Q}$ *não é injetivo!*

Mas isso não está contradizendo o Teorema da Invariância da Ação de Gauge? A resposta é não, pois a hipótese da existência da ação contínua não é satisfeita por $M_n(\mathbb{C})$.

Vamos mostrar que não existe uma ação contínua $\beta : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(M_n(\mathbb{C}))$ *que satisfaz as condições do Teorema 3.1.2.*

Suponha por absurdo que existe tal ação. Então,

$$\begin{gathered} Q_{v_1} = T_{e_1}T_{e_2}\cdots T_{e_n} \quad \Rightarrow \\ \beta_z(Q_{v_1}) = \beta_z(T_{e_1}T_{e_2}\cdots T_{e_n}) \ \ \forall z \in \mathbb{S}^1 \quad \Rightarrow \\ Q_{v_1} = z^n T_{e_1}T_{e_2}\cdots T_{e_n} \ \ \forall z \in \mathbb{S}^1 \quad \Rightarrow \\ Q_{v_1} = z^n Q_{v_1} \ \ \forall z \in \mathbb{S}^1. \end{gathered}$$

Mas isso é uma absurdo.
Portanto, não existe tal ação.

O exemplo acima nos mostra que a hipótese da existência da ação contínua β no Teorema da Invariância da Ação de Gauge não pode ser descartada. Isso dificulta um pouco a aplicação deste teorema em exemplos concretos, pois nem sempre é tarefa fácil verificar a existência desta ação. Neste sentido, o segundo teorema, que vamos provar na seção 3.3 é mais "útil", pois suas hipóteses são mais simples de serem verificadas.

Para encerrarmos esta seção, vamos fazer um exemplo do Teorema da Invariância da Ação de Gauge. Para tanto, precisamos primeiro definir grafo dual.

Definição 3.1.7 *Seja E um grafo. Definimos o grafo dual de E, denotado por $\widehat{E}$, como sendo:*

$$\widehat{E}^0 := E^1 \quad e \quad \widehat{E}^1 := E^2,$$

e para cada $ef \in \widehat{E}^1$,

$$r(ef) = e \quad e \quad s(ef) = f.$$

Por exemplo, considere o grafo E:

$$\begin{tikzcd} u \arrow[loop left, "e"] \arrow[r, "f"] & v \arrow[r, bend right, "g"'] & w \arrow[l, bend right, "h"'] \end{tikzcd}$$

Temos que, $E^1 = \{e, f, g, h\}$ e $E^2 = \{ee, fe, hg, gh, gf\}$.
Neste caso, o grafo dual $\widehat{E}$ pode ser representado por:

$$\begin{tikzcd} e \arrow[loop left, "ee"] \arrow[r, "fe"] & f \arrow[d, "gf"] \\ h \arrow[r, shift right, "hg"'] & g \arrow[l, shift right, "gh"'] \end{tikzcd}$$

Exemplo 3.1.8 - ***Exemplo do Grafo Dual*** *Seja E um grafo que não tem sources e considere o grafo dual $\widehat{E}$. Neste caso, o grafo dual tem linhas finitas e $C^*(E) \cong C^*(\widehat{E})$.*

Vamos mostrar que o grafo dual tem linhas finitas (precisamos garantir que o grafo dual tem linhas finitas, pois queremos aplicar o Teorema da Invariância da Ação de Gauge).

Seja $e \in \widehat{E}^0 = E^1$. Temos que,

$$\#\{r^{-1}(e)\} = \#\{ef : ef \in E^2\} =$$

$$= \#\{f \in E^1 : r(f) = s(e)\} = \#\{r^{-1}(s(e))\} < \infty.$$

Portanto, $\widehat{E}$ tem linhas finitas.
Seja $\{s, p\}$ a E-família de Cuntz-Krieger universal.
Defina,

$$Q_e := s_e s_e^*, \quad \forall e \in \widehat{E}^0,$$

$$T_{fe} := s_f s_e s_e^*, \quad \forall fe \in \widehat{E}^1.$$

Vamos mostrar que $\{T, Q\}$ *é uma* $\widehat{E}$*-família de Cuntz-Krieger em* $C^*(E)$.

Claro que, $\{Q_e : e \in \widehat{E}^0\}$ *é uma família de projeções mutuamente ortogonais.*

Vamos verificar que $Q_e \neq 0$, $\forall e \in \widehat{E}^0$. *Suponha por absurdo que exista* $e \in \widehat{E}^0$ *tal que* $Q_e = s_e s_e^* = 0$. *Então,*

$$s_e = s_e s_e^* s_e = 0 \quad \Rightarrow \quad s_e = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{s(e)} = s_e^* s_e = 0.$$

Mas isso é um absurdo.

Portanto, $Q_e \neq 0$, $\forall e \in \widehat{E}^0$.

Vamos mostrar que $(CK1)$ *é satisfeita. Seja* $ef \in \widehat{E}^1$. *Temos que,*

$$T_{ef}^* T_{ef} = (s_e s_f s_f^*)^* (s_e s_f s_f^*) = (s_f s_f^* s_e^*)(s_e s_f s_f^*) = (s_f s_f^*) p_{s(e)} (s_f s_f^*) =$$

$$= (s_f s_f^*)(s_f s_f^*) = Q_f Q_f = Q_f = Q_{s(ef)}.$$

Logo, $(CK1)$ *é satisfeita. Isso também garante que,* T_{ef} *é uma isometria parcial, para todo* $ef \in \widehat{E}^1$.

Vamos mostrar que $(CK2)$ *é satisfeita.*

Seja $e \in \widehat{E}^0$ *que não é source. Isso significa dizer que, existe uma aresta de* $\widehat{E}^1$ *que termina em* e, *ou seja, existe pelo menos um caminho* $ef \in E^2$. *Logo,* $s(e)$ *não é um source do grafo* E. *Temos que,*

$$Q_e = s_e s_e^* = s_e p_{s(e)} s_e^* = s_e \left(\sum_{\{f : r(f) = s(e)\}} s_f s_f^* \right) s_e^* =$$

$$= \sum_{\{f : r(f) = s(e)\}} s_e (s_f s_f^*) s_e^* =$$

$$= \sum_{\{ef : ef \in E^2\}} s_e (s_f s_f^* s_f s_f^*) s_e^* =$$

$$= \sum_{\{ef : ef \in E^2\}} T_{ef} T_{ef}^*.$$

Logo, $(CK2)$ *é satisfeita.*

Portanto, $\{T, Q\}$ *é uma* $\widehat{E}$*-família de Cuntz-Krieger em* $C^*(E)$ *com as projeções todas não nulas.*

Seja $\{t_{ef}, q_e\}$ a $\widehat{E}$-família de Cuntz-Krieger universal. Então, existe único homomorfismo,

$$\begin{array}{rccc} \pi_{T,Q}\colon & C^*(\widehat{E}) & \longrightarrow & C^*(E) \\ & t_{ef} & \longmapsto & T_{ef} \\ & q_e & \longmapsto & Q_e \end{array}$$

Como E é um grafo, existe uma ação contínua (a ação de gauge) $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(C^*(E))$ tal que:

$$\gamma_z(s_e) = zs_e \quad e \quad \gamma_z(p_v) = p_v,$$

$\forall e \in E^1$ e $\forall v \in E^0$, respectivamente.

Em particular,

$$\gamma_z(Q_e) = \gamma_z(s_e s_e^*) = s_e s_e^* = Q_e,$$

$\forall e \in \widehat{E}^0$ e,

$$\gamma_z(T_{ef}) = \gamma_z(s_e s_f s_f^*) = zs_e s_f s_f^* = zT_{ef},$$

$\forall e \in \widehat{E}^0$.

Portanto, a aplicação γ satisfaz as condições do Teorema da Invariância da Ação de Gauge. Portanto,

$$\pi_{T,Q} : C^*(\widehat{E}) \longrightarrow C^*(T, Q) \subseteq C^*(E)$$

é um isomorfismo.

Vamos mostrar que $C^*(T,Q) = C^*(E)$. Para tanto, vamos mostrar que os geradores da $C^*(E)$ estão contidos na $C^*(T,Q)$.

Seja $v \in E^0$. Como E não tem sources, temos que,

$$p_v = \sum_{e:r(e)=v} s_e s_e^* = \sum_{e:r(e)=v} Q_e \in C^*(T,Q).$$

Seja $e \in E^1$. Como E não tem sources temos que,

$$s_e^* s_e = p_{s(e)} = \sum_{f:r(f)=s(e)} s_f s_f^*.$$

Logo,

$$s_e = \sum_{f:r(f)=s(e)} s_e s_f s_f^* = \sum_{f:r(f)=s(e)} T_{ef} \in C^*(T,Q).$$

Portanto, $C^*(T,Q) = C^*(E)$.
Logo,

$$\pi_{T,Q} : C^*(\widehat{E}) \longrightarrow C^*(E)$$

é um isomorfismo.

3.2 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

No ano de 1980, os matemáticos J. Cuntz e W. Krieger publicaram o trabalho (2) que tratava sobre C^*-álgebras geradas a partir de uma matriz com entradas 0 e 1. Mais tarde, começaram a surgir trabalhos mostrando que, dada uma matriz nas condições de Cuntz-Krieger é possível obter um grafo finito e, reciprocamente, dado um grafo finito que não tem sources nem sinks, é possível obter uma matriz nas condições de Cuntz-Krieger de forma que as C^*-álgebras geradas são isomorfas.

Nesta seção, vamos mostrar como definir uma matriz a partir de um grafo e um grafo a partir de uma matriz e, com o auxílio dos resultados da seção anterior, vamos mostrar os isomorfismos.

Definição 3.2.1 *Vamos dizer que uma matriz* $A = a_{ij}$ *é da forma Cuntz-Krieger se* A *é* $n \times n$*, tem entradas* $\{0,1\}$ *e tem todas as linhas e colunas não nulas.*

Definição 3.2.2 *Seja* A *uma matriz da forma Cuntz-Krieger.*

Seja $\{S_i\}_{i=1}^n$ *uma família de isometrias parciais em um espaço de Hilbert* H*. Dizemos que essa família é uma* A*-família de Cuntz-Krieger se:*

$$(S_i S_i^*)(S_j S_j^*) = 0, \quad \textit{sempre que} \quad i \neq j$$

e,

$$S_i^* S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} S_j S_j^* \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Definição 3.2.3 *A* C^**-álgebra de Cuntz-Krieger da matriz* A*, denotada por* $\mathcal{O}_A$*, é a* C^**-álgebra universal gerada por uma* A*-família de Cuntz-Krieger.*

Nosso objetivo é definir um grafo E_A a partir da matriz A de modo que, as C^*-álgebras $C^*(E_A)$ e $\mathcal{O}_A$ sejam isomorfas.

Definição 3.2.4 *Seja* A *uma matriz da forma Cuntz-Krieger. Defini-*

mos o grafo E_A como sendo:

$$E_A := (\{1, 2, \cdots, n\}, \{ij : a_{ij} = 1\}, r, s)$$

em que,

$$r(ij) = i \quad e \quad s(ij) = j.$$

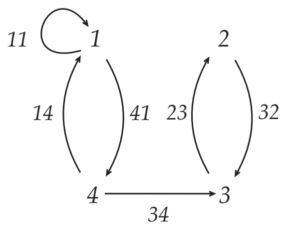
Exemplo 3.2.5 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso, o grafo E_A é

$$E_A = (\{1, 2, 3, 4\}, \{11, 14, 23, 32, 34, 41\}, r, s),$$

e pode ser representado por:



Seja A uma matriz da forma Cuntz-Krieger e $\{S_i\}_{i=1}^n$ a A-família de Cuntz-Krieger universal.

Vamos definir uma E_A-família de Cuntz-Krieger a partir da família $\{S_i\}_{i=1}^n$.

Defina,

$$Q_j := S_j S_j^*, \quad \forall j \in E_A^0,$$

e,

$$T_{ij} := S_i S_j S_j^*, \quad \forall ij \in E_A^1.$$

Com argumentos análogos aos feitos no Exemplo 3.1.8 mostramos que $\{T, Q\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $\mathcal{O}_A$.

Seja $\{s, p\}$ a E_A-família de Cuntz-Krieger universal. Da propriedade universal da $C^*(E_A)$ existe um homomorfismo,

$$\begin{array}{rccc} \pi_{T,Q}\colon & C^*(E) & \longrightarrow & \mathcal{O}_A \\ & p_j & \longmapsto & Q_j \\ & s_{ij} & \longmapsto & T_{ij} \end{array}$$

Vamos mostrar que $\pi_{T,Q}$ é um isomorfismo. Para tanto, vamos verificar que as hipóteses do Teorema da Invariância da Ação de Gauge são satisfeitas.

Proposição 3.2.6 *Existe uma ação contínua* $\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(\mathcal{O}_A)$ *que satisfaz* $\alpha_z(Q_i) = Q_i$ *e* $\alpha_z(T_{ij}) = zT_{ij}$, $\forall i \in E_A^0$ *e* $\forall ij \in E_A^1$ *respectivamente.*

Prova: A prova desta afirmação é análoga a prova do Teorema 2.1.4, por isso, não será feita aqui.

■

Temos que, $\{T, Q\}$ é uma E_A-família de Cuntz-Krieger em $\mathcal{O}_A$ e $\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(\mathcal{O}_A)$ é uma ação contínua que satisfaz: $\alpha_z(Q_i) = Q_i$ e $\alpha_z(T_{ij}) = zT_{ij}$, $\forall i \in E_A^0$ e $\forall ij \in E_A^1$ respectivamente.

Portanto, a aplicação $\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow Aut(\mathcal{O}_A)$ satisfaz as hipóteses do Teorema da Invariância da Ação de Gauge. Segue que, a única hipótese que ainda precisa ser verificada é a de que todas as projeções Q_i sejam não nulas. Para mostrarmos isso, precisamos garantir que a A-família de Cuntz-Krieger universal $\{S_i\}_{i=1}^n$ é não nula.

Como já fizemos anteriormente, para garantir que a A-família de Cuntz-Krieger universal tem todas as isometrias não nulas, é suficiente mostrar que existe uma A-família que tem todas as isometrias não nulas (veja Observação B.1.13).

Proposição 3.2.7 *Seja* A *uma matriz da forma Cuntz-Krieger. Neste caso, existe um espaço de Hilbert* H *e uma* A*-família de Cuntz-Krieger* $\{F_i\}_{i=1}^n$ *em* $B(H)$ *na qual, todas as isometrias parciais* F_i *são não nulas.*

Prova: Seja $\{H_i\}_{i=1}^n$ uma família de espaços de Hilbert separáveis de dimensão infinita (cada H_i é uma cópia de $l^2(\mathbb{N})$).

Fixe $1 \leq i \leq n$.

Vamos considerar que $\displaystyle\bigoplus_{a_{ij}=1} H_j \subseteq \bigoplus_{j=1}^{n} H_j$. Por exemplo, se $a_{ij} = 1$ para $j = 2, 3$ então,

$$\bigoplus_{a_{ij}=1} H_j = 0 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \subseteq \bigoplus_{j=1}^{n} H_j.$$

Neste sentido, vamos denotar os elementos de $\displaystyle\bigoplus_{a_{ij}=1} H_j$ como $(h_j)_{a_{ij}=1}$.

Defina $H = \bigoplus_{j=1}^{n} H_j$. Note que, H é separável.

Como $\bigoplus_{a_{ij}=1} H_j$ e H_i são espaços de Hilbert separáveis e de dimensão infinita, então são isométricamente isomorfos a $l^2(\mathbb{N})$. Portanto, existe um isomorfismo isométrico entre eles, digamos:

$$\widetilde{F_i} : \bigoplus_{a_{ij}=1} H_j \longrightarrow H_i.$$

Como $\widetilde{F_i}$ é uma isometria então $\widetilde{F_i}^* = \widetilde{F_i}^{-1}$.

Considere as seguintes projeções canônicas:

$$Q_i : \bigoplus_{j=1}^{n} H_j \longrightarrow \bigoplus_{a_{ij}=1} H_j.$$

e,

$$P_i : \bigoplus_{j=1}^{n} H_j \longrightarrow H_i.$$

Considere também a inclusão canônica:

$$i : H_i \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{n} H_j.$$

Defina,

$$F_i : \bigoplus_{j=1}^{n} H_j \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{n} H_j$$

como $F_i = i \circ \widetilde{F_i} \circ Q_i$.

Seja $(h_j)_{j=1}^{n} \in \bigoplus_{j=1}^{n} H_j$. Temos que,

$$F_i((h_j)_{j=1}^{n}) = i \circ \widetilde{F_i} \circ Q_i((h_j)_{j=1}^{n}) =$$

$$= i \circ \widetilde{F_i}((h_j)_{a_{ij}=1}) =$$

$$= i(\underbrace{\widetilde{F_i}((h_j)_{a_{ij}=1})}_{\in H_i}) =$$

$$= (0, \cdots, 0, \widetilde{F}_i((h_j)_{a_{ij}=1}), 0 \cdots, 0).$$

Logo,

$$F_i((h_j)_{j=1}^n) = (0, \cdots, 0, \widetilde{F}_i((h_i)_{a_{ij}=1}), 0 \cdots, 0).$$

Note que, é fácil ver que F_i é linear e limitada. Logo, $\{F_i\}_{i=1}^n \subseteq B(H)$.

Considere a projeção canônica,

$$P_i : \bigoplus_{j=1}^n H_j \longrightarrow H_i.$$

Também, a inclusão canônica,

$$T_i : \bigoplus_{a_{ij}=1} H_j \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^n H_j.$$

Neste caso,

$$F_i^* : \bigoplus_{j=1}^n H_j \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^n H_j$$

como $F_i^* = T_i \circ \widetilde{F}_i^* \circ P_i$.

Note que,

$$F_i((h_j)_{j=1}^n) = T_i \circ \widetilde{F}_i^* \circ P_i((h_j)_{j=1}^n) =$$

$$= T_i(\underbrace{\widetilde{F}_i^{-1}(h_i)}_{\sum_{a_{ij}=1} H_j})$$

Vamos mostrar que $\{F_i\}_{i=1}^n$ é uma A-família de Cuntz-Krieger.

Seja $1 \leq i \leq n$ e $(h_j)_{j=1}^n \in \bigoplus_{j=1}^n H_j$. Temos que,

$$F_i F_i^*((h_j)_{j=1}^n) = F_i(T_i \circ \widetilde{F}_i^* \circ P_i(h_j)_{j=1}^n) =$$

$$= i \circ \widetilde{F}_i \circ Q_i \circ (T_i(\underbrace{\widetilde{F}_i^{-1}(h_i)}_{\sum_{a_{ij}=1} H_j})) =$$

$$= i(h_i) = P_i((h_j)_{j=1}^n)$$

Segue que, $F_iF_i^*$ é a projeção sobre H_i. Logo, se $i \neq j$ temos que $(F_iF_i^*)(F_jF_j^*) = 0$.

Portanto, a primeira condição está satisfeita.

Vamos mostrar que a segunda condição é satisfeita. Fixe $1 \leq i \leq n$.

Como $F_jF_j^*$ é a projeção sobre H_j então,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}F_jF_j^* = \sum_{a_{ij}=1} F_jF_j^*$$

é a projeção sobre $\bigoplus_{a_{ij}=1} H_j$.

Por outro lado,

$$F_i^*F_i((h_j)_{j=1}^n) = F_i^*(0, \cdots, 0, \underbrace{\widetilde{F}_i((h_i)_{a_{ij=1}})}_{\in H_i}, 0 \cdots, 0) =$$

$$= T_i \circ \widetilde{F}_i^{-1} \circ P_i(\widetilde{F}_i((h_i)_{a_{ij=1}})) =$$

$$= T_i(\widetilde{F}_i^{-1}\widetilde{F}_i((h_i)_{a_{ij=1}})) =$$

$$= T_i((h_i)_{a_{ij=1}}) =$$

$$= Q_i((h_j)_{j=1}^n).$$

Segue que, $F_i^*F_i$ também é projeção sobre $\bigoplus_{a_{ij}=1} H_j$.

Portanto, $F_i^*F_i = \sum_{j=1}^n a_{ij=1}F_jF_j^*$.

Portanto, $\{F_i\}_{i=1}^n$ é uma A-família de Cuntz-Krieger em $B(H)$.

Note que, F_j é não nula, pois $F_jF_j^*$ é projeção sobre H_j e assim, $F_jF_j^*$ é não nulo.

■

Na afirmação anterior mostramos que existe uma A-família de Cuntz-Krieger não nula. Portanto, a A-família de Cuntz-Krieger universal $\{S_i\}_{i=1}^n$ é não nula.

Segue que, a E_A-família de Cuntz-Krieger $\{T, Q\}$ tem as projeções todas não nulas.

Portanto, pelo Teorema da Invariância da Ação de Gauge,

$$\pi_{T,Q} : C^*(E_A) \longrightarrow \mathcal{O}_A$$

é um isomorfismo entre $C^*(E_A)$ e $C^*(T,Q)$.

Vamos mostrar que $\pi_{T,Q}$ é sobrejetivo.

Fixe $1 \leq i \leq n$ e considere a isometria parcial S_i.

Temos que,

$$S_i = S_i S_i^* S_i = S_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} S_j S_j^* \right).$$

Por outro lado,

$$\pi_{T,Q} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} T_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} S_i S_i^* S_i = S_i.$$

Portanto, $\pi_{T,Q}$ é um isomorfismo entre $C^*(E_A)$ e $\mathcal{O}_A$.

Até este momento, mostramos que dada uma matriz A da forma Cuntz-Krieger é possível definir um grafo, a saber E_A, de forma que as C^*-álgebras $C^*(E_A)$ e $\mathcal{O}_A$ sejam isomorfas.

Vamos mostrar agora que, dado um grafo finito E que não tem sources nem sinks, é possível definir uma matriz A_E da forma Cuntz-Krieger, de modo que as C^*-álgebras $C^*(E_A)$ e $\mathcal{O}_A$ sejam isomorfas.

Segundo o livro (10), a primeira vez que essa ideia apareceu foi ainda no ano de 1980, no trabalho (3) de autoria de M. Enomoto e Y. Watatani.

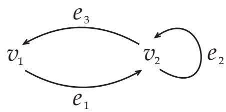
Definição 3.2.8 *Seja E um grafo finito que não tem sources nem sinks.*

Escreva $E^0 = \{v_1, v_2, \cdots, v_{\#\{E^0\}}\}$ e $\{e_1, e_2, \cdots, e_{\#\{E^1\}}\}$.

Definimos a matriz das arestas $A_E = a_{ij}$ como sendo:

$$a_{e_i,e_j} = \begin{cases} 1, & se \quad s(e_i) = r(e_j), \\ 0, & se \quad s(e_i) \neq r(e_j). \end{cases}$$

Exemplo 3.2.9 *Considere o grafo,*



Neste caso,

$$A_E(e_1,e_1)=0 \quad A_E(e_2,e_1)=1 \quad A_E(e_3,e_1)=1,$$

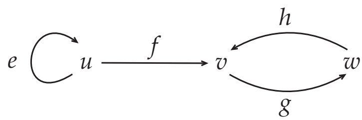
$$A_E(e_1,e_2)=0 \quad A_E(e_2,e_2)=1 \quad A_E(e_3,e_2)=1,$$

$$A_E(e_1,e_3)=1 \quad A_E(e_2,e_3)=0 \quad A_E(e_3,e_3)=0,$$

ou seja,

$$A_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.2.10 *Considere o grafo E,*



Fixe a seguinte enumeração para o conjunto dos vértices e das arestas:

$$u = v_1; v = v_2; w = v_3,$$

$$e = e_1; f = e_2; g = e_3; h = e_4.$$

Neste caso,

$$A_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observação 3.2.11 *Tomando outras enumerações para o conjunto dos vértices e das arestas, encontramos matrizes A_E diferentes.*

Na próxima proposição vamos mostrar que a matriz das arestas é uma matriz da forma Cuntz-Krieger.

Proposição 3.2.12 *Seja E um grafo finito que não tem sources nem sinks. Então a matriz das arestas A_E é da forma cuntz-Krieger.*

Prova: Por definição a matriz das arestas tem entradas $\{0,1\}$.
Fixe $1 \leq i \leq \#\{E^1\}$.

Vamos mostrar que a linha i da matriz A_E é não nula.

Suponha por absurdo que essa linha é nula, ou seja, para todo $1 \leq j \leq \#\{E^1\}$, $a_{ij} = 0$.

Considere a aresta e_i. Como $a_{ij} = 0$, $1 \leq j \leq \#\{E^1\}$ então não existe nenhuma aresta e_j tal que $r(e_j) = s(e_i)$.

Logo, $s(e_i)$ é um source. Absurdo.

Portanto, todas as linhas de A_E são não nulas.

Analogamente, todas as colunas são não nulas.

Portanto, a matriz A_E é da forma cuntz-Krieger.

■

Como a matriz das arestas A_E é da forma Cuntz-Krieger, podemos o considerar o grafo E_{A_E}. Então, pelo que fizemos anteriormente,

$$C^*(E_{A_E}) \cong \mathcal{O}_{A_E}.$$

Proposição 3.2.13 *Seja E um grafo finito que não tem sources e nem sinks.*

Neste caso, o grafo E_{A_E} é igual ao grafo dual $\widehat{E}$ (veja Definição 3.1.7).

Prova: Observe que, por definição, $A_E = a_{e_i,e_j}$.
Temos que,

$$E^0_{A_E} = \{e_1, e_2, \cdots, e_{\#\{E^1\}}\} = E^1;$$

$$E^1_{A_E} = \{e_i e_j : a_{e_i e_j} = 1\} = E^2.$$

Ainda,

$$r_{E_A}(e_i e_j) = e_i = r_{\widehat{E}}(e_i e_j)$$

e,

$$s_{E_A}(e_i e_j) = e_j = s_{\widehat{E}}(e_i e_j).$$

Portanto, os grafos são iguais.

■

No Exemplo 3.1.8, mostramos que,

$$C^*(\widehat{E}) \cong C^*(E).$$

Portanto,

$$C^*(E) \cong C^*(\widehat{E}) = C^*(E_{A_E}) \cong \mathcal{O}_A,$$

ou seja,

$$C^*(E) \cong \mathcal{O}_A.$$

Segue que, dado um grafo finito E que não tem sources nem sinks, é possível definir uma matriz A_E, na forma Cuntz-Krieger, de modo que, as C^*-álgebras $C^*(E)$ e $\mathcal{O}_A$ sejam isomorfas.

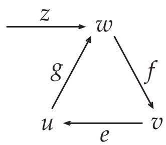
3.3 O TEOREMA DA UNICIDADE DE CUNTZ-KRIEGER

Neste seção, vamos provar o Teorema da Unicidade de Cuntz-Krieger.

Este teorema nos permite fazer alguns exemplos concretos de isomorfismo envolvendo álgebras de grafos.

Definição 3.3.1 *Seja E um grafo e μ um ciclo em E. Dizemos que uma aresta $e \in E^1$ é uma entrada em μ se, $r(e) = r(\mu_i)$ para algum $1 \leq i \leq |\mu|$, e $e \neq \mu_i$.*

Por exemplo, no grafo,



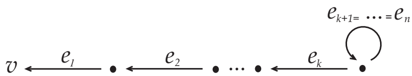
temos que a aresta z é uma entrada no ciclo gef.

Lema 3.3.2 *Seja E um grafo que não tem sources e tal que todo ciclo de E tem uma entrada. Então, para cada $v \in E^0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um caminho $\lambda \in E^*$ tal que:*

1. *$r(\lambda) = v$,*
2. *$|\lambda| \geq n$,*
3. *$\lambda_k \neq \lambda_{|\lambda|}, \quad \forall k < |\lambda|$.*

Por exemplo, o caminho $\lambda = e_1 e_2 \cdots e_n$,

satisfaz as condições do lema. Mas o caminho $\lambda = e_1 e_2 \cdots e_n$



não satisfaz as condições do lema.

Prova: Fixe $v \in E^0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Como o grafo E não tem sourecs, então v não é source, e assim, existe uma aresta que termina em v.

Como o grafo E não tem sources, podemos "voltar" por essa aresta até obter um caminho de comprimento n (e terminando em v).

Portanto, sempre existe um caminho que termina em v e tem tamanho n.

Suponha por absurdo, que todos os caminhos λ que terminam em v e tem comprimento maior ou igual a n, são tais que $\lambda_k = \lambda_{|\lambda|}$ para algum $k < |\lambda|$.

Isso significa que existe um caminho fechado baseado em $s(\lambda_k)$ (a saber, $\lambda_k \lambda_{k+1} \cdots \lambda_{|\lambda|-1}$).

Seja α o caminho minimal tal que:

- $r(\alpha) = v$;
- Existe um caminho fechado baseado em $s(\alpha)$.

Pelo que vimos anteriormente, existe um caminho fechado baseado em $s(\alpha)$. Seja β o ciclo baseado em $s(\alpha)$ (β é uma parte do caminho fechado).

Como β é um ciclo, por hipótese, existe uma entrada em β, digamos e, ou seja,

$$r(e) = r(\beta_{j_0}) \quad \text{e,} \;\; e \neq \beta_i, \;\; \forall 1 \leq i \leq |\beta|.$$

Seja $\beta' := \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{j_0 - 1}$.

Defina,

$$\lambda = \alpha\beta\beta \cdots \beta\beta' e.$$

Vamos mostrar que λ é um caminho que satisfaz as condições do lema. Assim, chegamos a um absurdo.

Temos que, $r(\lambda) = r(\alpha) = v$. Também $|\lambda| \geq n$, pois basta repetir o ciclo β quantas vezes forem necessárias.

Vamos mostrar que $\lambda_k \neq \lambda_{|\lambda|} = e$, $\forall k < |\lambda|$.

Como e é uma entrada no ciclo β então $e \neq \beta_i$, $\forall 1 \leq i \leq |\beta|$.

Suponha por absurdo que $e = \alpha_{i_0}$, para algum $i_0 \leq |\alpha|$. Então,

$$s(\alpha_{i_0}) = s(e) \;\text{ e,}$$

$$r(\alpha_{i_0}) = r(e).$$

Considere o caminho $\nu = \alpha_{i_0}\alpha_{i_0+1}\cdots\alpha_{|\alpha|}\beta_1\beta_2\cdots\beta_{j_0-1}$. Temos que, ν é um caminho e,

$$s(\nu) = s(\beta_{j_0-1}) = r(\beta_{j_0}) = r(e) = r(\alpha_{i_0}) = s(\alpha_{i_0-1})$$

$$r(v) = r(\alpha_{i_0}) = s(\alpha_{i_0-1}).$$

Logo, ν é um caminho fachado baseado em $s(\alpha_{i_0-1})$.

Segue que, o caminho $\alpha^{'} = \alpha_1\cdots\alpha_{i_0-1}$ é tal que: $r(\alpha^{'}) = v$, existe um caminho baseado em $s(\alpha^{'})$ e $\alpha^{'}$ é menor que α.

Mas isso contradiz o fato de que α é um caminho minimal tem um caminho fechado baseado em $s(\alpha)$.

Portanto, $\lambda_k \neq \lambda_{|\lambda|} = e$, e assim, o caminho λ satisfaz as condições do lema. Absurdo!

■

A seguir faremos a prova do segundo grande teorema deste trabalho, conhecido como O Teorema da Unicidade de Cuntz-Krieger.

Lembre que, na prova do Teorema Invariância de Gauge, o fator crucial para mostrarmos que $\pi_{T,Q}$ é injetivo, foi mostrar que $\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| \leq \|\pi_{T,Q}(a)\|$. Na prova do próximo teorema, a dificuldade novamente é mostrar essa desigualdade.

Teorema 3.3.3 - ***O Teorema da Unicidade de Cuntz-Krieger***

Seja E um grafo no qual todo ciclo tem uma entrada.

Seja $\{T, Q\}$ uma E-família de Cuntz-Krieger em uma C^*-álgebra B, tal que, $Q_v \neq 0$, $\forall v \in E^0$.

Neste caso, o homomorfismo $\pi_{T,Q} : C^*(E) \longrightarrow B$ é um isomorfismo entre $C^*(E)$ e $C^*(T, Q)$.

Prova: Seja $\{s, p\}$ a E-família de Cuntz-Krieger universal.

Como $\pi_{T,Q}(C^*(E))$ é a C^*-álgebra gerada por $\{\pi_{T,Q}(s), \pi_{T,Q}(p)\} = \{T, Q\}$, é imediato que $\pi_{T,Q} : C^*(E) \longrightarrow C^*(T, Q)$ é sobrejetivo. A dificuldade é mostrar que $\pi_{T,Q}$ é injetivo.

Seja $\phi : C^*(E) \longrightarrow C^*(E)$ a aplicação definida em Observação 2.2.6.

Para mostrarmos a injetividade, vamos dividir a prova em duas partes.

Primeiro vamos supor que o grafo E não tem sources e, utilizando o lema anterior, mostraremos que $\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| \leq \|\pi_{T,Q}(a)\|$, $\forall a \in C^*(E)$. Feito isso, basta repetir os argumentos da prova do Teorema da Invariância da Ação de Gauge para concluir a injetividade de $\pi_{T,Q}$.

Depois vamos considerar o grafo aumentado $\widetilde{E}$, que não tem sources, e utilizando o que foi feito anteriormente, provaremos diretamente a injetividade de $\pi_{T,Q}$.

Caso Particular: O grafo E não tem sources.

Nosso grande objetivo é mostrar que nessas condições (E não tem sources e todo ciclo de E tem uma entrada), a desigualdade

$$\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| \leq \|\pi_{T,Q}(a)\|$$

é válida $\forall a \in C^*(E)$.

Note que, de acordo com a Afirmação 3, feita na demsnstração do Teorema da Invariância da Ação de Gauge, é suficiente mostrar a desigualdade acima para $a \in span\{s_\mu s_\nu^* : s(\mu) = s(\nu)\}$.

Fixe $a \in span\{s_\mu s_\nu^* : s(\mu) = s(\nu)\}$ digamos,

$$a = \sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} s_\mu s_\nu^*.$$

Seja F o conjunto de todos os pares $(\mu, \nu) \in E^* \times E^*$ tais que, (μ, ν) aparece (como índice) em alguma parcela de $\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} s_\mu s_\nu^*$, ou seja,

$$a = \sum_{(\mu,\nu)\in F} c_{\mu,\nu} s_\mu s_\nu^*.$$

Na Proposição 2.3.1 vimos que,

$$\phi(a) = \sum_{\{(\mu,\nu)\in F : |\mu|=|\nu|\}} c_{\mu,\nu} s_\mu s_\nu^*.$$

Seja $k = \max\{|\mu| = |\nu| : (\mu, \nu) \in F \ \text{ e } \ |\mu| = |\nu|\}$.

Afirmação 1 Para cada par $(\mu, \nu) \in F$ tal que $|\mu| = |\nu|$, é possível escrever $s_\mu s_\nu^*$ como combinação linear finita de $s_\alpha s_\beta^*$ tais que

$(\alpha, \beta) \in E^* \times E^*$ e $|\alpha| = |\beta| = k$.

Prova: Seja $(\mu, \nu) \in F$. Então, $s(\mu) = s(\nu) = v$.
Por hipótese, o grafo E não tem sources. Logo,

$$s_\mu s_\nu^* = s_\mu p_v s_\nu^* =$$

$$= s_\mu \left(\sum_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} s_e s_e^* \right) s_\nu^* =$$

$$= \sum_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} s_\mu s_e s_e^* s_\nu^* =$$

$$= \sum_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} s_{\mu e} s_{\nu e}^*.$$

Considere o elemento $s_{\mu e} s_{\nu e}^*$. Temos que, $s(\mu e) = s(\nu e) = s(e)$. Como $s(e)$ não é source podemos repetir o argumento acima.

Portanto, repetindo o argumento acima quantas vezes forem necessárias, conseguimos reescrever $s_\mu s_\nu^*$ como combinação linear finita de elementos $s_\alpha s_\beta^*$ tais que $(\alpha, \beta) \in E^* \times E^*$ e $|\alpha| = |\beta| = k$.

$\square$

Seja $\widetilde{F}$ o conjunto formado por todos os pares $(\alpha, \beta) \in E^* \times E^*$ que foram obtidos a partir de um par $(\mu, \nu) \in F$ como na afirmação acima. Então,

$$\phi(a) = \sum_{(\alpha,\beta) \in \widetilde{F}} c_{\alpha,\beta} s_\alpha s_\beta^*.$$

Segue que, $\phi(a) \in \mathcal{F}_k$ (veja Definição 2.4.1). Como o grafo E não tem sources, então $\mathcal{F}_{\leq k} = \mathcal{F}_k$.

Na Proposição 2.4.4, vimos que, $\mathcal{F}_{\leq k} \cong \bigoplus_{v \in E^0} \mathcal{F}_{\leq k}(v)$.

Como $\phi(a) \in \mathcal{F}_{\leq k}$, pela forma como é definida a norma em $\bigoplus_{v \in E^0} \mathcal{F}_{\leq k}(v)$, existe um $v_0 \in E^0$ tal que,

$$\|\phi(a)\| = \left\| \sum_{\{(\alpha,\beta) \in \widetilde{F} : s(\alpha) = v_0 = s(\beta)\}} c_{\alpha,\beta} s_\alpha s_\beta^* \right\|.$$

Seja $b_{v_0} := \sum_{\{(\alpha,\beta)\in\widetilde{F}: s(\alpha)=v_0=s(\beta)\}} c_{\alpha,\beta} s_\alpha s_\beta^*$.

Seja G o conjunto formado por todos os caminhos τ tal que $\tau = \alpha$ ou $\tau = \beta$, com $(\alpha, \beta) \in \widetilde{F}$ e $s(\alpha) = v_0 = s(\beta)$. Portanto, se $\tau \in G$ então $|\tau| = k$ e $s(\tau) = v_0$.

Note que, G é um conjunto finito.

Nosso objetivo agora, é mostrar que existe uma projeção $Q \in B$ que satisfaz:

- $\|Q\pi_{T,Q}(\phi(a))Q\| = \|\pi_{T,Q}(\phi(a))\|$;
- $QT_\mu T_\nu^* Q = 0$, sempre que $(\mu, \nu) \in F$ e $|\mu| \neq |\nu|$.

Afirmação 2 Existe um isomorfismo entre $span\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in G\}$ e $M_{\#\{G\}}(\mathbb{C})$.

Prova: Vamos mostrar que as condições da Proposição C.1.1 são satisfeitas.

Vamos mostrar que a família $\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in G\}$ é não nula.

Suponha por absurdo que todos os elementos da família são nulos. Em particular, $s_\mu s_\mu^* = 0$ para todo $\mu \in G$. Logo,

$$s_\mu = s_\mu s_\mu^* s_\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \|p_{s(\mu)}\| = \|s_\mu^* s_\mu\| = 0.$$

Mas isso é uma absurdo pois, as projeções universais sempre são não nulas.

Portanto, a família é não nula.

Claro que, $s_\mu s_\nu^* = s_\nu s_\mu^*$.

Além disso, se $\mu, \nu, \alpha, \beta \in G$ então esses caminhos têm o mesmo tamanho. Logo, pelo Corolário 1.4.12, item 1. temos que a Eq. C.1 é satisfeita.

Portanto, existe isomorfismo entre $span\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in G\}$ e $M_{\#\{G\}}(\mathbb{C})$.

□

Fixe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \max\{|\mu|, |\nu| : (\mu, \nu) \in F\}$. Claro que, $n > k$.

Então pelo lema anterior, para este $n \in \mathbb{N}$ e para $v_0 \in E^0$ fixado anteriormente, existe um caminho $\lambda \in E^*$ que satisfaz:

- $r(\lambda) = v_0$;
- $|\lambda| \geq n$;
- $\lambda_k \neq \lambda_{|\lambda|}, \quad \forall k < |\lambda|$.

Lembre que, o lema anterior tem como hipótese que o grafo não tenha sources. É por isso que precisamos separar a prova deste teorema em duas partes, pois tudo o que vamos fazer a partir de agora, vai depender da existência do caminho λ nas condições acima.

Defina,

$$Q := \sum_{\tau \in G} T_{\tau\lambda} T_{\tau\lambda}^*.$$

Primeiro observe que $Q \in B$ é uma projeção. De fato, basta perceber que Q é soma de projeções que são duas a duas ortogonais.

Afirmação 3 Seja $(\mu, \nu) \in F$. Então,

1. Se $|\mu| = k$, $T_{\tau\lambda}^* T_\mu \neq 0 \Leftrightarrow \tau = \mu$.
2. Se $|\mu| = |\nu| = k$ então $QT_\mu T_\nu^* Q = T_{\mu\lambda} T_{\nu\lambda}^*$. Em particular, se $|\mu| = k$ e $s(\mu) \neq v_0$ ou se $|\nu| = k$ e $s(\nu) \neq v_0$ então $QT_\mu T_\nu^* Q = 0$.
3. Existe um isomorfismo entre $span\{QT_\mu T_\nu^* Q : \mu, \nu \in G\}$ e $M_{\#\{G\}}(\mathbb{C})$.
4. $\|Q\pi_{T,Q}(b_{v_0})Q\| = \|b_{v_0}\|$.
5. Se $|\mu| \neq |\nu|$ então $QT_\mu T_\nu^* Q = 0$.

Prova:

1. ($\Rightarrow$) Se $T_{\tau\lambda}^* T_\mu \neq 0$ então $T_\tau^* T_\mu \neq 0$.

   Suponha por absurdo que $\tau \neq \mu$. Como $|\mu| = |\tau|$ então pelo Corolário 1.4.12, $T_\tau^* T_\mu = 0$. Absurdo.

   Logo, $\mu = \tau$.

   ($\Leftarrow$) Se $\tau = \mu$ então,

   $$\|T_{\tau\lambda}^* T_\mu\|^2 = \|T_\lambda^* T_\mu^* T_\mu\|^2 = \|T_\lambda^* Q_{v_0}\|^2 =$$

   $$= \|T_\lambda^*\|^2 = \|T_\lambda^* T_\lambda\| = \|Q_{s(\lambda)}\|.$$

   Como a família $\{T, Q\}$ tem as projeções todas não nulas, $\|Q_\lambda\| \neq 0$ a assim, $T_{\tau\lambda}^* T_\mu \neq 0$.

2. Por hipótese, $|\mu| = |\nu| = k$. Temos que,

$$QT_\mu T_\nu^* Q = \sum_{\tau\in G} T_{\tau\lambda}T_{\tau\lambda}^*(T_\mu T_\nu^*)\sum_{\tau\in G} T_{\tau\lambda}T_{\tau\lambda}^* = \quad \text{(pelo item anterior)}$$

$$= T_{\mu\lambda}(T_{\mu\lambda}^* T_\mu)(T_\nu^* T_{\nu\lambda})T_{\nu\lambda}^* =$$

$$= T_{\mu\lambda}T_\lambda^* T_\lambda T_{\nu\lambda}^* =$$

$$= T_{\mu\lambda}T_{\nu\lambda}^*.$$

Em particular, se $|\mu| = k$ e $s(\mu) \neq v_0$ então $T_{\mu\lambda} = 0$. Logo,

$$QT_\mu T_\nu^* Q = T_{\mu\lambda}T_{\mu\lambda}^* = 0.$$

Analogamente, se $|\nu| = k$ e $s(\nu) \neq v_0$ então $T_{\nu\lambda} = 0$.

3. Vamos mostrar que as condições da Proposição C.1.1 são satisfeitas.

Vamos mostrar que a família $\{QT_\mu T_\nu^* Q : \mu, \nu \in G\}$ é não nula. Suponha por absurdo que, para todo $\mu \in G$ temos que, $QT_\mu T_\nu^* Q = 0$.

Como $\mu \in G$ então $0 = QT_\mu T_\mu^* Q = T_{\mu\lambda}T_{\mu\lambda}^*$. Logo,

$$T_{\mu\lambda} = T_{\mu\lambda}T_{\mu\lambda}^* T_{\mu\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \|Q_{s(\mu\lambda)}\| = \|T_{\mu\lambda}^* T_{\mu\lambda}\| = 0,$$

mas isso é um absurdo.

Portanto, a família $\{QT_\mu T_\nu^* Q : \mu, \nu \in G\}$ é não nula.

Claro que, $(QT_\mu T_\nu^* Q)^* = QT_\nu T_\mu^* Q$.

Além disso, pelo item 2. desta afirmação, temos que,

$$(QT_\mu T_\nu^* Q)(QT_\alpha T_\beta^* Q) = T_{\mu\lambda}T_{\nu\lambda}^* T_{\alpha\lambda}T_{\beta\lambda}^*.$$

Como $|\nu\lambda| = |\alpha\lambda|$ então pelo Corolário 1.4.12, item 1. temos que,

$$T_{\mu\lambda}T_{\nu\lambda}^* T_{\alpha\lambda}T_{\beta\lambda}^* = \begin{cases} T_{\mu\lambda}T_{\beta\lambda}^*, & \text{se} \quad \nu\lambda = \alpha\lambda, \\ 0, & \text{se} \quad \nu\lambda \neq \alpha\lambda. \end{cases}$$

Logo, a Eq. C.1 é satisfeita.

Portanto, existe um isomorfismo entre $span\{QT_\mu T_\nu^* Q : \mu, \nu \in G\}$ e $M_{\#\{G\}}(\mathbb{C})$.

4. Já sabemos que, $span\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in G\}$ e isomorfo a $M_{\#\{G\}}$ que é isomorfo a $span\{QT_\mu T_\nu^* Q : \mu, \nu \in G\}$. Segue que,

$$\|b_{v_0}\| = \left\| \sum_{\{\alpha,\beta \in G : s(\alpha) = v_0 = s(\beta)\}} c_{\alpha,\beta} s_\alpha s_\beta^* \right\| =$$

$$= \left\| Q \sum_{\{\alpha,\beta \in G : s(\alpha) = v_0 = s(\beta)\}} c_{\alpha,\beta} T_\alpha T_\beta^* Q \right\| =$$

$$= \|Q\pi_{T,Q}(b_{v_0})Q\|.$$

5. Suponha que $|\mu| \neq |\nu|$.

   Temos que,

$$QT_\mu T_\nu^* Q = \sum_{\tau \in G} T_{\tau\lambda} T_{\tau\lambda}^* (T_\mu T_\nu^*) \sum_{\tau \in G} T_{\tau\lambda} T_{\tau\lambda}^*.$$

   Se $|\mu| = k$ e $\mu \neq \tau$, $\forall \tau \in G$, então pelo item 1. desta afirmação, $T_{\tau\lambda}^* T_\mu = 0$, $\forall \tau \in G$. Logo, $QT_\mu T_\nu^* Q = 0$.

   Se $|\mu| = k$ e $\mu = \tau$, para algum $\tau \in G$, então pelo item 1., $T_{\tau\lambda}^* T_\mu = T_\lambda^*$. Logo,

$$QT_\mu T_\nu^* Q = T_{\mu\lambda} T_\lambda^* T_\nu^* \sum_{\tau \in G} T_{\tau\lambda} T_{\tau\lambda}^* =$$

$$= \sum_{\tau \in G} T_{\mu\lambda} (T_{\nu\lambda}^* T_{\tau\lambda}) T_{\tau\lambda}^*.$$

   Como $|\mu| = k$ e $|\mu| \neq |\nu|$ então $|\nu| \neq k$.

   Vamos supor que $|\nu| < k$. O caso em que $|\nu| > k$ é análogo.

   Vamos analisar o que acontece com $T_{\nu\lambda}^* T_{\tau\lambda}$. Pelo Corolário 1.4.12 temos que,

$$T_{\nu\lambda}^* T_{\tau\lambda} = \begin{cases} T_z^*, & \text{se} \quad \nu\lambda = \tau\lambda z, \\ T_z, & \text{se} \quad \tau\lambda = \nu\lambda z, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $|\nu| < k$ então $\nu\lambda = \tau\lambda z$ não pode ocorrer. De fato,

$$|\tau| + |\lambda| + |z| = k + |\lambda| + |z| > |\nu| + |\lambda|.$$

Vamos mostrar que, $\tau\lambda = \nu\lambda z$ também não pode ocorrer. Suponha por absurdo que $\tau\lambda = \nu\lambda z$. Temos que, $|\nu| < k$, digamos que $|\nu| = j$.

Segue que,

$$\begin{aligned}
\nu_j &= \tau_j;\\
\lambda_1 &= \tau_{j+1};\\
\lambda_2 &= \tau_{j+2};\\
&\vdots\\
\lambda_{k-j} &= \tau_{j+(k-j)} = \tau_k;\\
\lambda_{(k-j)+1} &= \lambda_1;\\
\lambda_{(k-j)+2} &= \lambda_2;\\
&\vdots\\
\lambda_{|\lambda|} &= \lambda_{|\lambda|-(k-j)}.
\end{aligned}$$

Mas isso é um absurdo, pois por hipótese, $\lambda_k \neq \lambda_{|\lambda|}$, $\forall k < |\lambda|$.

Portanto, $\tau\lambda \neq \nu\lambda z$ e assim, $T^*_{\nu\lambda} T_{\tau\lambda} = 0$.

Logo, $QT_\mu T^*_\nu Q = 0$.

Se $|\mu| \neq k$, digamos que, $|\mu| = j < k$ (se, $|\mu| = j > k$ é análogo) então, repetindo o mesmo argumento acima, temos que $QT_\mu T^*_\nu Q = 0$.

Portanto, se $|\mu| \neq |\nu|$ então $QT_\mu T^*_\nu Q = 0$.

$\square$

Como $span\{QT_\mu T^*_\nu Q : \mu, \nu \in G\} \cong M_{\#G}(\mathbb{C})$ e $span\{s_\mu s^*_\nu : \mu, \nu \in G\} \cong M_{\#G}(\mathbb{C})$, então existe um homomorfismo injetivo (e portanto, isométrico) entre $span\{QT_\mu T^*_\nu Q : \mu, \nu \in G\}$ e $span\{s_\mu s^*_\nu : \mu, \nu \in G\}$.

Afirmação 4 $\|Q\pi_{T,Q}(\phi(a))Q\| = \|\pi_{T,Q}(\phi(a))\|$, em que $a = \sum_{(\mu,\nu)\in F} c_{\mu,\nu}s_\mu s_\nu^*$, está fixado desde o início da prova.

Prova: No Lema 3.1.1 mostramos que $\pi_{T,Q}$ restrito a $C^*(E)^\gamma$ é isométrico. Além disso, na Proposição 2.2.5 vimos que $\phi(a) \in C^*(E)^\gamma$. Logo,

$$\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| = \|\phi(a)\|.$$

Na Afirmação 2 vimos que, se $|\mu| = |\nu|$ então é possível reescrever $s_\mu s_\nu^*$ como combinação linear finita de $s_\alpha s_\beta^*$ tais que $|\alpha| = k = |\beta|$. Logo,

$$a = \sum_{\{(\alpha,\beta):|\alpha|=k=|\beta|\}} c_{\alpha,\beta}s_\alpha s_\beta^* + \sum_{\{(\mu,\nu):|\mu|\neq|\nu|\}} c_{\mu,\nu}s_\mu s_\nu^*.$$

Também vimos que, $\|\phi(a)\| = \|b_{v_0}\|$ em que,

$$b_{v_0} = \sum_{\{(\alpha,\beta)\in\widetilde{F}:s(\alpha)=v_0=s(\beta)\}} c_{\alpha,\beta}s_\alpha s_\beta^*.$$

Na prova do item 2. da Afirmação 3 vimos que, se $|\alpha| = k$ mas $\alpha \neq \tau$ (ou seja, $s(\alpha) \neq v_0$), $\forall \tau \in G$, então, $QT_\alpha T_\beta^* Q = 0$.

Finalmente,

$$\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| = \|\phi(a)\| =$$

(Lema 3.1.1)

$$= \|b_{v_0}\| =$$

(Afirmação 4, item 4.)

$$= \|Q\pi_{T,Q}(b_{v_0})Q\| =$$

(definição de b_{v_0})

$$= \left\|Q\left(\sum_{\{\alpha,\beta:|\alpha|=k=|\beta|,s(\alpha)=v_0=s(\beta)\}} c_{\alpha,\beta}T_\alpha T_\beta^*\right)Q\right\| =$$

(definição do conjunto G)

$$= \left\| Q \left(\pi_{T,Q} \left(\sum_{(\alpha,\beta)\in G} c_{\alpha,\beta} s_\alpha s_\beta^* \right) \right) Q \right\| =$$

(Afirmação 3, item 2.)

$$= \left\| Q \left(\pi_{T,Q} \left(\sum_{\{(\alpha,\beta):|\alpha|=k=|\beta|\}} c_{\alpha,\beta} s_\alpha s_\beta^* \right) \right) Q \right\| =$$

$$= \|Q\pi_{T,Q}(\phi(a))Q\|.$$

Portanto,

$$\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| = \|Q\pi_{T,Q}(\phi(a))Q\|.$$

□

Afirmação 5 $\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| \leq \|\pi_{T,Q}(a)\|$, para a fixado no início da prova.

Prova: Temos que,

$$\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| = \|Q\pi_{T,Q}(\phi(a))Q\| =$$

$$= \left\| Q\pi_{T,Q} \left(\sum_{\{(\alpha,\beta):|\alpha|=k=|\beta|\}} c_{\alpha,\beta} s_\alpha s_\beta^* \right) Q \right\| =$$

(Afirmação 4, item 5.)

$$= \left\| Q\pi_{T,Q} \left(\sum_{\{(\alpha,\beta):|\alpha|=k=|\beta|\}} c_{\alpha,\beta} s_\alpha s_\beta^* + \sum_{\{(\mu,\nu)\in F:|\mu|\neq|\nu|\}} c_{\alpha,\beta} s_\alpha s_\beta^* \right) Q \right\| =$$

$$= \|Q\pi_{T,Q}(a)Q\| \leq$$

$$\leq \|\pi_{T,Q}(a)\|.$$

Portanto, $\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| \leq \|\pi_{T,Q}(a)\|$.

□

Como $\|\pi_{T,Q}(\phi(a))\| \leq \|\pi_{T,Q}(a)\|$ então repetindo o mesmo argumento usado no Teorema da Invariância da Ação de Gauge, mostramos que $\pi_{T,Q}$ é injetiva.

Até este momento, mostramos o caso particular do Teorema da Unicidade de Cuntz-Krieger, ou seja, se E é um grafo que não tem sources então,

$$\pi_{T,Q} : C^*(E) \longrightarrow C^*(T,Q)$$

é um isomorfismo.

Vamos mostrar agora o caso geral deste teorema, ou seja, o caso em que o grafo E pode ter sources.

Caso Geral: O grafo E pode ter sources.

Devemos mostrar que o homomorfismo $\pi_{T,Q} : C^*(E) \longrightarrow B$ é injetivo.

Como o grafo E pode ter sources, vamos considerar o grafo aumentado $\widetilde{E}$. Já sabemos que existe um homomorfismo injetivo entre $C^*(E)$ e $C^*(\widetilde{E})$ (Corolário do grafo aumentado).

Como o grafo $\widetilde{E}$ não tem sources a ideia natural é, usando o caso particular deste teorema, definir um homomorfismo injetivo entre $C^*(\widetilde{E})$ e B. Dessa forma, fazemos a composição desse homomorfismo com o anterior, obtemos um homomorfismo injetivo entre $C^*(E)$ e B. Da unicidade de $\pi_{T,Q}$ concluímos que $\pi_{T,Q}$ é injetivo.

O problema deste argumento é que, quando aumentamos o grafo E para o grafo $\widetilde{E}$ aumentamos também a $C^*(\widetilde{E})$, de forma que, já não temos garantia de que é possível definir uma $\widetilde{E}$-família de Cuntz-Krieger com as projeções não nulas em B.

O que vamos fazer é construir uma outra C^*-álgebra e definir nesta uma $\widetilde{E}$-família de Cuntz-Krieger, com as projeções não nulas, de maneira que seja possível "voltar" para B.

Como B é uma C^*-álgebra então existe um espaço de Hilbert H e uma representação fiel $\rho : B \longrightarrow B(H)$.

Como $\{T, Q\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em B, com $Q_v \neq 0$, $\forall v \in E^0$, então $\{\rho(T), \rho(Q)\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $B(H)$, com $\rho(Q_v) \neq 0$, $\forall v \in E^0$ (pois ρ é injetiva).

Como $\{\rho(T), \rho(Q)\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $B(H)$, da propriedade universal existe único homomorfismo,

$$\begin{array}{rccc} \pi_{\rho(T),\rho(Q)}: & C^*(E) & \longrightarrow & B(H) \\ & s_e & \longmapsto & \rho(T_e) \\ & p_v & \longmapsto & \rho(Q_v) \end{array}$$

Note que, $C^*(\pi_{\rho(T),\rho(Q)}) = C^*(\rho(T), \rho(Q)) = \rho(C^*(T,Q))$. Segue que, se o homomorfismo $\pi_{\rho(T),\rho(Q)}$ fosse injetivo, então a composição

$\rho^{-1} \circ \pi_{\rho(T),\rho(Q)} : C^*(E) \longrightarrow B$ é injetiva. Logo, da unicidade da homomorfismo $\pi_{T,Q}$, poderíamos concluir que $\pi_{T,Q}$ é injetivo.

Portanto, o que precisamos de fato fazer, é mostrar que $\pi_{\rho(T),\rho(Q)}$ é injetivo. Para tanto, vamos construir um homomorfismo injetivo entre $C^*(E)$ e $B(H)$ (usando as ideias citadas acima) de forma que, esse homomorfismo restrito a família $\{s,p\}$ é igual a $\pi_{\rho(T),\rho(Q)}$. Portanto, da unicidade concluímos que $\pi_{\rho(T),\rho(Q)}$ é o homomorfismo construído.

Seja $\widetilde{E}$ o grafo aumentado. Como $\widetilde{E}^0$ e $\widetilde{E}^1$ são conjuntos enumeráveis vamos renomear os caminhos adicionados ao grafo E da seguinte forma:

Para cada $v \in E^0$ que é source, renomeie o caminho adicionado a v da seguinte forma,

$$v \xleftarrow{e_v^1} v_1 \xleftarrow{e_v^2} v_2 \xleftarrow{e_v^3} v_3 \cdots$$

ou seja,

$$s(e_v^i) = v_i, \quad \forall i \in \mathbb{N};$$

$$r(e_v^1) = v;$$

$$r(e_v^i) = v_{i-1}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, i \neq 1.$$

Analogamente, para cada $w \in E^0$ que é sink, renomeie o caminho adicionado a w da seguinte forma,

$$w \xrightarrow{e_w^1} w_1 \xrightarrow{e_w^2} w_2 \xrightarrow{e_w^3} w_3 \cdots$$

ou seja,

$$s(e_w^1) = w;$$

$$s(e_w^j) = w_{j-1}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, j \neq 1;$$

$$r(e_w^j) = w_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Segue que,

$$\widetilde{E}^0 = E^0 \bigcup_{\{v \in E^0 : v \text{ é source}\}} \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \bigcup_{\{w \in E^0 : w \text{ é sink}\}} \{w_j : j \in \mathbb{N}\} \text{ e,}$$

$$\widetilde{E}^1 = E^0 \bigcup_{\{v \in E^0 : v \text{ é source}\}} \{e_v^i : i \in \mathbb{N}\} \bigcup_{\{w \in E^0 : w \text{ é sink}\}} \{e_w^j : j \in \mathbb{N}\}.$$

Vamos construir um espaço de Hilbert $\widetilde{H}$ e uma $\widetilde{E}$-família de Cuntz-Krieger em $B(\widetilde{H})$.

Para cada $v \in E^0$ que é source, defina $H_v := \rho(Q_v)(H)$. Analogamente, para cada $w \in E^0$ que é sink, defina $H_w := \rho(Q_w)(H)$. Note que, H_v, H_w são espaços de Hilbert, pois são imagens das projeções, $\rho(Q_v), \rho(Q_w) \in B(H)$.

Note que, $H_v, H_w \subseteq H$. Além disso, $H_v \bigcap H_w = \{0\}$, sempre que $v \neq w$.

Para cada $v \in E^0$ que é source, tome uma família de espaços de Hilbert $\{H_{v_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tais que:

$$H_{v_i} \cong H_v, \ \forall i \in \mathbb{N};$$

$$H_{v_i} \cap H_{v_j} = \emptyset, \ \forall i \neq j.$$

Note que, podemos tomar os espaços de Hilbert H_{v_i} como sendo cópias do espaço H_v. Desta forma, garantimos que H_{v_i} é isomorfo a H_v, $\forall i \in \mathbb{N}$. Como H_v é um espaço de Hilbert, então H_v tem base ortonormal então podemos garantir que o isomorfismo é isométrico.

Analogamente, para cada $w \in E^0$ que é sink, tome uma família de espaços de Hilbert $\{H_{w_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tais que:

$$H_{w_i} \cong H_w, \ \forall i \in \mathbb{N};$$

$$H_{w_i} \cap H_{w_j} = \emptyset, \ \forall i \neq j.$$

Defina,

$$\widetilde{H} := H \bigoplus_{\{v\in E^0:\ v \ \text{ é source}\}} \left(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} H_{v_i} \right) \bigoplus_{\{w\in E^0:\ w \ \text{é sink}\}} \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} H_{w_j} \right).$$

Vamos representar um elemento $h \in \widetilde{H}$ por $h = (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, em que $h_1 \in H$.

Vamos definir uma $\widetilde{E}$-família de Cuntz-Krieger em $B(\widetilde{H})$.

Para cada $v \in E^0$, defina:

$$\begin{array}{cccc} P_v\colon & \widetilde{H} & \longrightarrow & \widetilde{H} \\ & (h_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (\rho(Q_v)(h_1), 0, 0, \cdots) \end{array}$$

Note que, como $\{Q_v\}_{v\in E^0}$ é uma família de projeções mutuamente ortogonais então $\{P_v\}_{v\in E^0}$ também é uma família de projeções mutuamente ortogonais.

Para cada $v \in E^0$ que é source e para cada $i \in \mathbb{N}$ defina:

$$P_{v_i}\colon \quad \widetilde{H} \quad \longrightarrow \quad \widetilde{H}$$

como sendo a projeção sobre H_{v_i}.

Analogamente, para cada $w \in E^0$ que é sink e para cada $j \in \mathbb{N}$ defina:

$$P_{w_j}\colon \quad \widetilde{H} \quad \longrightarrow \quad \widetilde{H}$$

como sendo a projeção sobre H_{w_j}.

Note que, $\{P_v, P_{v_i}, P_{w_j}\}$ é uma família de projeções mutuamente ortogonais, com todos os elementos não nulos.

Para cada $e \in E^1$ defina,

$$\begin{array}{cccc} S_e\colon & \widetilde{H} & \longrightarrow & \widetilde{H} \\ & (h_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (\rho(T_e)(h_1), 0, 0, \cdots) \end{array}$$

Para cada $v \in E^0$ que é source e para cada $i \in \mathbb{N}$ temos que, $H_{v_i} \cong H_v \cong H_{v_{i-1}}$, ou seja, $H_{v_i} \cong H_{v_{i-1}}$. Logo, existe uma isometria entre esses espaços, digamos $\widetilde{S}_v^i : H_{v_i} \longrightarrow H_{v_{i-1}}$.

Então, para cada $v \in E^0$ que é source e para cada $i \in \mathbb{N}$ defina,

$$\begin{array}{cccc} S_{e_v^i}\colon & \widetilde{H} & \longrightarrow & \widetilde{H} \\ & (h_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (0, 0, \cdots, 0, \widetilde{S}_v^i(h_k), 0, 0, \cdots) \end{array}$$

com $h_k \in H_{v_i}$ e $\widetilde{S}_v^i(h_k) \in H_{v_{i-1}}$, ou seja, $S_{e_v^i}$ é a extensão canônica de $\widetilde{S}_v^i$ para o espaço $\widetilde{H}$.

Analogamente, para cada $w \in E^0$ que é sink e para cada $j \in \mathbb{N}$ temos que, $H_{w_{j-1}} \cong H_w \cong H_{w_j}$, ou seja, $H_{w_{j-1}} \cong H_{w_j}$. Logo, existe uma isometria entre esses espaços, digamos $\widetilde{S}_w^j : H_{w_{j-1}} \longrightarrow H_{w_j}$. Defina,

$$S_{e_w^j}\colon \quad \widetilde{H} \quad \longrightarrow \quad \widetilde{H}$$

como sendo a extensão canônica de $\widetilde{S}_w^j$ para o espaço $\widetilde{H}$.

Note que, $\{S_e, S_{e_v^i}, S_{w^j}\}$ é uma família de isometrias parciais.

Vamos verificar que $\{S, P\}$ é uma $\widetilde{E}$-família de Cuntz-Krieger.

Vamos verificar a condição $(CK1)$. Seja $e \in \widetilde{E}^1$.

Se $e \in E^1$ então, como $\{\rho(Q), \rho(T)\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $B(H)$, segue imediatamente que $S_e^* S_e = P_{s(e)}$. Logo, $(CK1)$ é satisfeita.

Se $e = e_v^i$ para algum source $v \in E^0$ temos que:

$$S_{e_v^i}^* S_{e_v^i}((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) = S_{e_v^i}^*(0, \cdots, 0, \underbrace{\widetilde{S}_{e_v^i}(h_k)}_{\in H_{v_{i-1}}}, 0, \cdots) =$$

$$= (0, \cdots, 0, \underbrace{\widetilde{S}_{e_v^i}^* \widetilde{S}_{e_v^i}(h_k)}_{H_{v_i}}, 0, \cdots) =$$

$$= (0, \cdots, 0, \widetilde{S}_{e_v^i}^{-1} \widetilde{S}_{e_v^i}(h_k), 0, \cdots) =$$

$$= (0, \cdots, 0, h_k, 0, \cdots) =$$

$$= P_{v_i}((h_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

Se $e = e_w^j$ para algum sink $w \in E^0$ é análogo.
Portanto, $(CK1)$ é satisfeita.

Vamos mostrar que $(CK2)$ é satisfeita. Seja $v \in \widetilde{E}^0$.

Se $v \in E^0$ e não é source (pode ser sink). Neste caso, como $\{\rho(T), \rho(Q)\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $B(H)$, segue imediatamente que $P_v = \sum_{e \in \widetilde{E}} S_e S_e^*$, ou seja, $(CK2)$ é satisfeita.

Se $v \in E^0$ é um source do grafo E então, quando consideramos o grafo aumentado, a única aresta que termina em v é e_v^1. Logo,

$$S_{e_v^1} S_{e_v^1}^*((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) = S_{e_v^1}(0, \cdots, 0, \underbrace{\widetilde{S}_{e_v^1}^*(h)}_{\in H_{v_1}}, 0, \cdots) =$$

$$= (\underbrace{\widetilde{S}_{e_v^1} \widetilde{S}_{e_v^1}^*(h)}_{H_v}, 0, \cdots) =$$

$$= (h, 0, \cdots).$$

Segue que, $S_{e_v^1} S_{e_v^1}^*$ é a projeção canônica sobre H_v. Por outro lado,

$$P_v((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\rho(Q_v)(h_1), 0, \cdots),$$

e $\rho(Q_v)(H)$ é a projeção sobre o espaço H_v.

Portanto, podemos concluir que $S_{e_v^1}S^*_{e_v^1} = P_v$. Logo, $(CK2)$ é satisfeita.

Se $v \in \widetilde{E}^0$ é tal que $v = v_i$ então a única aresta que termina em v é a e_v^{i+1} (se v é uma source). Logo, fazendo um argumento análogo ao feito anteriormente concluímos que $S_{e_v^{i+1}}S^*_{e_v^{i+1}}$ é a projeção sobre o espaço H_{v_i}. Logo, $S_{e_v^{i+1}}S^*_{e_v^{i+1}} = P_{v_i}$.

Se $v \in \widetilde{E}^0$ é tal que $v = w_j$ então a única aresta que termina em w_j é e_w^{j-1} (se w é sink). Analogamente, concluímos que $S_{e_w^{j-1}}S^*_{e_w^{j-1}}$ é a projeção sobre H_{w_j} e portanto, $S_{e_w^{j-1}}S^*_{e_w^{j-1}} = P_{w_j}$.

Portanto, $(CK2)$ é satisfeita.

Portanto, $\{S, P\}$ é uma $\widetilde{E}$-família de Cuntz-Krieger em $B(\widetilde{H})$.

Seja $\{t, q\}$ a $\widetilde{E}$-família de Cuntz-Krieger universal

Como $\{S, P\}$ é uma $\widetilde{E}$-família de Cuntz-Krieger em $B(\widetilde{H})$, existe um homomorfismo,

$$\begin{array}{rccc} \pi_{S,P}\colon & C^*(\widetilde{E}) & \longrightarrow & B(\widetilde{H}) \\ & t_e & \longmapsto & S_e \\ & q_v & \longmapsto & P_v. \end{array}$$

Temos que, $\widetilde{E}$ é um grafo sem source e tal que cada ciclo de E tem uma entrada (pois, os únicos ciclos de $\widetilde{E}$ são os ciclos de E). Além disso, $\{S, P\}$ é uma $\widetilde{E}$-família de Cuntz-Krieger em $B(\widetilde{H})$ com $P_v \neq 0$, $\forall v \in \widetilde{E}^0$.

Portanto, pelo caso particular deste teorema, $\pi_{S,P}$ é injetivo.

Na demonstração do Corolário 3.1.3 vimos que, restringindo a família $\{t, q\}$ para o grafo E, obtemos uma E-família de Cuntz-Krieger. Ainda mais, mostramos que o homomorfismo,

$$\begin{array}{rccc} \pi_{t,q}\colon & C^*(E) & \longrightarrow & C^*(\widetilde{E}) \\ & s_e & \longmapsto & t_e \\ & p_v & \longmapsto & q_v \end{array}$$

é injetivo.

Portanto,

$$\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q} : C^*(E) \longrightarrow B(\widetilde{H})$$

é um homomorfismo injetivo.

Até agora, já conseguimos definir um homomorfismo injetivo entre $C^*(E)$ e $B(\widetilde{H})$. Como queremos definir um homomorfismo injetivo entre $C^*(E)$ e B precisamos "voltar" para a álgebra B.

Sejam $i : H \longrightarrow \widetilde{H}$ inclusão canônica e $p : \widetilde{H} \longrightarrow H$ projeção canônica.

Afirmação 6 Para cada $a \in C^*(E)$ temos que:

1. $[(\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a)]((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) = [(\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a)](i(h_1))$, $\forall (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{H}$.

2. Se $p \circ [\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a)] = 0$ então $(\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a) = 0$.

Prova: Note que, como as aplicações $p, \pi_{S,P}$ e $\pi_{t,q}$ são contínuas, é suficiente mostrar a afirmação para $a \in span\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in E^*$ e $s(\mu) = s(\nu)\}$.

Fixe $a \in span\{s_\mu s_\nu^* : \mu, \nu \in E^*$ e $s(\mu) = s(\nu)\}$, digamos,

$$a = \sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} s_\mu s_\nu^*.$$

1. Temos que,

$$(\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a) = (\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q}) \left(\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} s_\mu s_\nu^* \right) =$$

$$= \pi_{S,P} \left(\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} t_\mu t_\nu^* \right) =$$

$$= \sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} S_\mu S_\nu^*.$$

Seja $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Então,

$$\left(\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} S_\mu S_\nu^* \right) ((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) =$$

$$= \left(\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} \rho(T_\mu T_\nu^*)(h_1), 0, 0, \cdots \right).$$

Por outro lado,

$$(\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a)(i(h_1)) = \left(\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} S_\mu S_\nu^* \right) (i(h_1)) =$$

$$= \left(\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} \rho(T_\mu T_\nu^*)(h_1), 0, 0, \cdots \right).$$

Portanto,

$$[(\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a)]((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) = [(\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a)](i(h_1)).$$

2. Na prova do item anterior vimos que,

$$[(\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a)]((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left(\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} \rho(T_\mu T_\nu^*)(h_1), 0, 0, \cdots \right).$$

Por hipótese, $p \circ [(\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a)] = 0$, ou seja, $\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} \rho(T_\mu T_\nu^*)(h_1) = 0$, $\forall h_1 \in H$.
Portanto, $(\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a) = 0$.

$\square$

Defina,

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & C^*(E) & \longrightarrow & B(H) \\ & a & \longmapsto & p \circ [(\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a)] \circ i \end{array}$$

Afirmação 7 A aplicação ψ definida acima é injetiva.

Prova: Seja $a \in C^*(E)$ tal que $\psi(a) = 0$.
Então $\forall h_1 \in H$ temos que,

$$[p \circ (\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a)) \circ i](h_1) = 0.$$

Seja $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{H}$. Temos que,

$$[p \circ (\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a)]((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) = [p \circ (\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q}(a))](i(h_1)) = 0.$$

Logo,

$$[(\pi_{S,P} \circ \pi_{t,q})(a)]((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0.$$

Portanto, $a = 0$.

$\square$

Lembre que, $\{\rho(T), \rho(Q)\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $B(H)$. Logo, existe um homomorfismo,

$$\begin{array}{rccc} \pi_{\rho(T),\rho(Q)}: & C^*(E) & \longrightarrow & B(H) \\ & s_e & \longmapsto & \rho(T_e) \\ & p_v & \longmapsto & \rho(Q_v) \end{array}$$

Note que, a aplicação ψ satisfaz:

$$\psi(s_e) = \rho(T_e) \text{ e } \psi(p_v) = \rho(Q_v).$$

Portanto, da unicidade segue que, $\psi = \pi_{\rho(T),\rho(Q)}$.
Portanto, $\pi_{\rho(T),\rho(Q)} : C^*(E) \longrightarrow B(H)$ é injetivo.
Segue que,

$$\rho^{-1} \circ \pi_{\rho(T),\rho(Q)} : C^*(E) \longrightarrow B$$

é um homomorfismo injetivo que satisfaz:

$$\rho^{-1} \circ \pi_{\rho(T),\rho(Q)}(s_e) = \rho^{-1}(\rho(T_e)) = T_e \text{ e,}$$

$$\rho^{-1} \circ \pi_{\rho(T),\rho(Q)}(p_v) = \rho^{-1}(\rho(Q_v)) = Q_v.$$

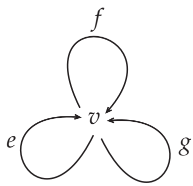
Portanto, da unicidade do homomorfismo $\pi_{T,Q}$, temos que, $\pi_{T,Q}$ é injetivo.

$\blacksquare$

Observe que, se E é um grafo que não tem ciclos, então pelo Teorema da Unicidade de Cuntz-Krieger, a $C^*(E)$ é isomorfa a toda C^*-álgebra gerada por uma E-família de Cuntz-Krieger cujas projeções são todas não nulas.

A seguir faremos dois exemplos do Teorema da Unicidade de Cuntz-Krieger.

Exemplo 3.3.4 *Considere o grafo E,*



No Exemplo 1.2.3 mostramos que,

$$\begin{array}{rccc} P_v\colon & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & \delta_n \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} S_e\colon & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & \delta_{3n} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} S_f\colon & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & \delta_{3n+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} S_g\colon & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & \delta_{3n+2} \end{array}$$

formam uma E-família de Cuntz-Krieger em $B(l^2(\mathbb{N}))$.

Seja $\{s,p\}$ uma E-família de Cuntz-Krieger universal e considere a $C^*(E)$.

É natural nos perguntarmos qual é a relação entre $C^*(S,P)$ e $C^*(E)$.

Temos que, todos os ciclos do grafo E tem uma entrada. De fato, os ciclos de E são da forma e (que tem f ou g como entrada), ou f (que tem como entrada e ou g) e g (que tem e ou f como entrada). Além disso, na família $\{S,P\}$, a projeção P_v é não nula.

Portanto, pelo Teorema da Unicidade de Cuntz-Krieger, $C^*(S,P) \cong C^*(E)$.

Exemplo 3.3.5 *No Exemplo 1.2.5, consideramos o grafo E,*

$$v_0 \xleftarrow{e_1} v_1 \xleftarrow{e_2} v_2 \xleftarrow{e_3} v_3 \xleftarrow{e_4} \cdots$$

Para este grafo, consideramos a seguinte E-família de Cuntz-Krieger $\{S,P\} \subseteq K(l^2(\mathbb{N}))$:

$$\begin{array}{rccc} P_{v_i}\colon & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & \begin{cases} 0, & se \quad n \neq i, \\ \delta_i, & se \quad n = 1. \end{cases} \end{array}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$ $(\mathbb{N}\{0,1,2,\cdots\})$, *e*

$$\begin{array}{rccc} S_{e_i}\colon & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & \delta_n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} 0, & se & n \neq i, \\ \delta_{i-1}, & se & n = i. \end{array} \right. \end{array}$$

para todo $i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Seja $\{s,p\}$ *a E-família de Cuntz-Krieger universal. Como as projeções* P_v *são todas não nulas, pelo Teorema da Unicidade de Cuntz-Krieger, podemos concluir que,*

$$\begin{array}{rccc} \pi_{S,P}\colon & C^*(E) & \longrightarrow & K(l^2(\mathbb{N})) \\ & s_{e_i} & \longmapsto & S_{e_i} \\ & p_{v_i} & \longmapsto & P_{v_i} \end{array}$$

é um isomorfismo entre $C^*(E)$ *e* $C^*(S,P)$.

Vamos mostrar $C^*(S,P) = K(l^2(\mathbb{N}))$, *ou seja,* $\pi_{S,P}$ *é sobrejetivo.*

Seja $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *a base canônica de* $l^2(\mathbb{N})$.

Para cada $i,j \in \mathbb{N}$ *defina,*

$$\begin{array}{rccc} L_{\delta_i\delta_j}\colon & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & h & \longmapsto & \delta_i\langle h,\delta_j\rangle \end{array}$$

Note que, $L_{\delta_i\delta_j}$ *é linear, limitado e tem posto* 1.

Para mostrarmos que $\pi_{S,P}$ *é sobrejetivo vamos mostrar que:* $L_{\delta_i\delta_j}$ *pertence a imagem de* $\pi_{S,P}$*; todo operador de posto* 1 *pertence a imagem de* $\pi_{S,P}$*; todo o operador de posto finito é uma soma (finita) de operadores de posto* 1, *e portanto pertence a imagem de* $\pi_{S,P}$. *Como conjunto dos operados de posto finito é denso no conjunto dos operadores compactos, poderemos concluir que* $\pi_{S,P}$ *é sobrejetiva.*

Afirmação 1 *Para cada* $i,j \in \mathbb{N}$, *temos que,* $L_{\delta_i\delta_j} \in Im(\pi_{S,P})$.

Prova: *Fixe* $i,j \in \mathbb{N}$. *Vamos mostrar que,* $L_{\delta_i\delta_j} \in Im(\pi_{S,P})$.

Primeiro vamos considerar $j < i$, *digamos que,* $i - j = k$.

$$\cdots\ v_j \xleftarrow{e_{j+1}} v_{j+1} \xleftarrow{e_{j+2}} v_{j+2} \cdots \xleftarrow{e_{j+(k-1)}} v_{j+(k-1)} \xleftarrow{e_{j+k=i}} v_{j+k} \cdots$$

Considere o elemento,

$$s_{e_{j+1}} s_{e_{j+2}} \cdots s_{e_{j+(k-1)}} s_{e_{j+k}} \in C^*(E).$$

Temos que,

$$\pi_{S,P}(s_{e_i}^* s_{e_{j+(k-1)}}^* \cdots s_{e_{j+2}}^* s_{e_{j+1}}^*) = S_{e_i}^* S_{e_{j+(k-1)}}^* \cdots S_{e_{j+2}}^* S_{e_{j+1}}^*.$$

Vamos mostrar que,

$$S_{e_i}^* S_{e_{j+(k-1)}}^* \cdots S_{e_{j+2}}^* S_{e_{j+1}}^* = L_{\delta_i \delta_j}.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Temos que,

$$S_{e_i}^* S_{e_{j+(k-1)}}^* \cdots S_{e_{j+2}}^* S_{e_{j+1}}^*(\delta_n) =$$

$$= \begin{cases} 0, & se \quad n \neq (j+1)-1, \\ S_{e_i}^* S_{e_{j+(k-1)}}^* \cdots S_{e_{j+2}}^*(\delta_{j+1}), & se \quad n = (j+1)-1. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & se \quad n \neq j, \\ S_{e_i}^* S_{e_{j+(k-1)}}^* \cdots S_{e_{j+3}}^*(\delta_{j+2}), & se \quad n = j. \end{cases} =$$

$$\vdots$$

$$= \begin{cases} 0, & se \quad n \neq j, \\ S_{e_i}^* S_{e_{j+(k-1)}}^*(\delta_{j+(k-2)}), & se \quad n = j. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & se \quad n \neq j, \\ S_{e_i}^*(\delta_{(j+k)-1}), & se \quad n = j. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & se \quad n \neq j, \\ S_{e_i}^*(\delta_{i-1}), & se \quad n = j. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & se \quad n \neq j, \\ \delta_i, & se \quad n = j. \end{cases}$$

Logo,

$$S_{e_i}^* S_{e_{j+(k-1)}}^* \cdots S_{e_{j+2}}^* S_{e_{j+1}}^*(\delta_n) = \begin{cases} 0, & se \quad n \neq j, \\ \delta_i, & se \quad n = j. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$L_{\delta_i \delta_j}(\delta_n) = \delta_i \langle \delta_n, \delta_j \rangle = \begin{cases} 0, & se \quad n \neq j, \\ \delta_i, & se \quad n = j. \end{cases}$$

Segue que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\pi_{S,P}(s^*_{e_i} s^*_{e_{j+(k-1)}} \cdots s^*_{e_{j+1}})(\delta_n) = S^*_{e_i} S^*_{e_{j+(k-1)}} \cdots S^*_{e_{j+1}}(\delta_n) = L_{\delta_i \delta_j}(\delta_n).$$

Portanto, por linearidade e continuidade, temos que, se $i < j$,

$$\pi_{S,P}(s^*_{e_i} s^*_{e_{j+(k-1)}} \cdots s^*_{e_{j+1}}) = L_{\delta_i \delta_j}.$$

Vamos considerar o caso em que $i < j$, digamos que $j - i = k$.

$$\cdots\ v_{i-1} \xleftarrow{e_i} v_i \xleftarrow{e_{i+1}} v_{i+1} \cdots \xleftarrow{e_{i+(k-1)}} v_{i+(k-1)} \xleftarrow{e_{i+k=j}} v_j\ \cdots$$

Neste caso, basta considerar o elemento,

$$s_{e_i} s_{e_{i+1}} \cdots s_{e_{i+(k-1)}} s_{e_j} \in C^*(E).$$

Analogamente, mostramos que,

$$\pi_{S,P}(s_{e_{i+1}} \cdots s_{e_{i+(k-1)}} s_{e_j}) = L_{\delta_i \delta_j}.$$

Vamos considerar o caso em que $i = j$.
Considere o elemento,

$$s_{e_{i+1}} s^*_{e_{i+1}} \in C^*(E).$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Temos que,

$$[\pi_{S,P}(s_{e_{i+1}} s^*_{e_{i+1}})](\delta_n) = S_{e_{i+1}} S^*_{e_{i+1}}(\delta_n) =$$

$$= \begin{cases} 0, & se \quad n \neq i, \\ S_{e_{i+1}}(\delta_{i+1}), & se \quad n = i. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & se \quad n \neq i, \\ \delta_i, & se \quad n = i. \end{cases} =$$

$$= L_{\delta_i \delta_j}(\delta_n).$$

Portanto,

$$\pi_{S,P}(s_{e_{i+1}} s^*_{e_{i+1}}) = L_{\delta_i \delta_j}.$$

Portanto, $\forall i, j \in \mathbb{N}$ temos que, $L_{\delta_i \delta_j} \in Im(\pi_{S,P})$.

$\square$

Afirmação 2 *Sejam* $h, k \in l^2(\mathbb{N})$ *tais que,*

$$h = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_i \quad e \quad k = \sum_{i=1}^{n} \beta_j \delta_j.$$

Neste caso, a aplicação,

$$\begin{array}{rccc} L_{h,k}: & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & x & \longmapsto & h\langle x, k\rangle \end{array}$$

pertence a imagem de $\pi_{S,P}$.

Prova: *Seja* $x \in l^2(\mathbb{N})$. *Temos que,*

$$L_{h,k}(x) = h\langle x, k\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_i \left\langle x, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \delta_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \overline{\beta_j} \delta_i \langle x, \delta_j\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \overline{\beta_j} L_{\delta_i, \delta_j}(x).$$

Como $L_{\delta_i,\delta_j} \in Im(\pi_{S,P})$ *então* $L_{h,k} \in Im(\pi_{S,P})$. $\square$

Seja $T : l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$ *um operador de posto* 1. *Então, existe* $h \in l^2(\mathbb{N})$ *tal que,*

$$T(x) = \lambda_x h,$$

$\forall x \in l^2(\mathbb{N})$.

Defina a aplicação,

$$\begin{array}{rccc} f_T: & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & l^2(\mathbb{C}) \\ & x & \longmapsto & \lambda_x \end{array}$$

Claro que, f_T *é linear e limitada. Portanto, existe* $z \in l^2(\mathbb{N})$ *tal que,*

$$f_T(x) = \langle x, z\rangle,$$

$\forall x \in l^2(\mathbb{N})$ *(veja Teorema* $3.8 - 1$, *(6)).*

Segue que, $\forall x \in l^2(\mathbb{N})$, *temos que,*

$$T(x) = h\langle x, z\rangle.$$

Afirmação 3 *Seja $T : l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$ um operador de posto 1. Então, $T \in Im(\pi_{S,P})$.*

Prova: *Como T tem posto 1, existem $h, z \in l^2(\mathbb{N})$ tais que,*

$$T(x) = h\langle x, z\rangle = L_{h,z}(x),$$

$\forall x \in l^2(\mathbb{N})$.

Vamos mostrar que, $L_{h,k} \in Im(\pi_{S,P})$.

Se h, z são elementos da base canônica do $l^2(\mathbb{N})$, ou são soma finita de elementos da base então já vimos que $L_{h,k} \in Im(\pi_{S,P})$.

Sem perda de generalidade, suponha,

$$h = \lim_{n\to\infty} h_n \quad e \quad z = \lim_{n\to\infty} k_n,$$

em que, h_n e k_n são combinações lineares finitas de elementos da base canônica, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Fixe $N \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $L_{h_N,z} \in Im(\pi_{S,P})$.

Fixe $\varepsilon > 0$.

Como $z = \lim\limits_{n\to\infty} k_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}, n_0$ tal que, $\forall n \geq n_0$,

$$\|z - k_n\| < \frac{\epsilon}{\|h_N\| + 1}.$$

Seja $x \in l^2(\mathbb{N})$, $\|x\| = 1$. Temos que,

$$\|L_{h_N,z}(x) - L_{h_N,k_n}(x)\| = \|h_N\langle x, z\rangle - h_N\langle x, k_n\rangle\rangle\| \leq$$

$$\leq \|h_N\|\|x\|\|z - k_n\| < \|h_N\|\frac{\varepsilon}{\|h_N\| + 1} < \varepsilon,$$

$\forall n \geq n_0$.

Portanto,

$$\|L_{h_N,z} - L_{h_N,k_n}\| < \varepsilon.$$

$\forall n \geq n_0$.

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} L_{h_N,k_n} = L_{h_N,z}.$$

Pela afirmação anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que o elemento $L_{h_N,k_n} \in Im(\pi_{S,P})$.

Como $Im(\pi_{S,P})$ é fechada e $\lim\limits_{n\to\infty} L_{h_N,k_n} = L_{h_N,z}$, podemos concluir que, $L_{h_N,z} \in Im(\pi_{S,P})$.

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $L_{h_n,z} \in Im(\pi_{S,P})$
Um argumento análogo mostra que,

$$\lim_{n \to \infty} L_{h_n,z} = L_{h,z}.$$

Portanto, $L_{h,z} \in Im(\pi_{S,P})$.
Como $T(x) = h\langle x, z\rangle = L_{h,z}$ podemos concluir que $T \in Im(\pi_{S,P})$.
Portanto, todo operador de posto 1 pertence a imagem de $\pi_{S,P}$.

$\square$

Vamos mostrar agora que todo operador de posto finito pode ser escrito como soma de operadores de posto 1.

Afirmação 4 *Seja $T : l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$ um operador de posto finito. Neste caso, T pode ser escrito como soma finita de operadores de posto 1.*

Prova: *Como T tem posto finito então $Im(T) = V$ é um espaço vetorial (euclidiano) de dimensão finita, digamos $dim(V) = n$.*

Seja $\{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$ base ortonormal para V.

Para cada $1 \leq i \leq n$, defina, $P_i : V \longrightarrow V$ como sendo a projeção sobre h_i.

Como P_i é um operador de posto 1 então $P_i \circ T$ também tem posto 1.

Além disso,

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \circ T = (P_1 + P_2 + \cdots + P_n) \circ T = T$$

Portanto, T é soma de operadores de posto 1.

$\square$

Como todo operador de posto finito é soma finita de operadores de posto 1 (que pertendem a imagem de $\pi_{S,P}$), podemos concluir que, todo operador de posto finito pertence a imagem de $\pi_{S,P}$.

Como o conjunto dos operadores de posto finito é denso em $K(l^2(\mathbb{N}))$ (veja Teorema 2.4.5, (9)) e $Im(\pi_{S,P})$ é fechada, podemos concluir que $\pi_{S,P}$ é sobrejetora.

Portanto, para o grafo E,

$$v_0 \xleftarrow{e_1} v_1 \xleftarrow{e_2} v_2 \xleftarrow{e_3} v_3 \xleftarrow{e_4} \cdots$$

temos que,

$$C^*(E) \cong K(l^2(\mathbb{N})).$$

Corolário 3.3.6 *Seja E um grafo no qual todo ciclo tem uma entrada.*

Se $\{S, P\}$ e $\{T, Q\}$ são E-família de Cuntz-Krieger em C^*-álgebras B e C respectivamente, então existe um isomorfismo $\psi : C^*(S, P) \longrightarrow C^*(T, Q)$ que satisfaz:

$$\psi(S_e) = T_e \ e \ \psi(P_v) = Q_v,$$

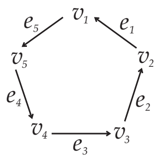
$\forall e \in E^1$ e $\forall v \in E^0$.

Prova: Por hipótese, todo o ciclo de E tem uma entrada. Logo, pelo Teorema da Unicidade de Cuntz-Krieger, $\pi_{S,P}$ e $\pi_{T,Q}$ são isomorfismos.

Defina, $\psi := \pi_{T,Q} \circ {\pi_{S,P}}^{-1}$.

■

Observação 3.3.7 *O Teorema da Unicidade de Cuntz-Krieger pode não valer se a hipótese de que todo ciclo tenha uma entrada não for satisfeita. Por exemplo, considere o grafo C_5,*



Note que, o ciclo $e_1 e_2 \cdots e_5$ não tem entrada.

No Exemplo 3.1.6 vimos que existe uma C_5-família de Cuntz-Krieger em $M_5(\mathbb{C})$ que tem todas as projeções não nulas, mas de forma que o homomorfismo $\pi_{T,Q} : C^*(C_5) \longrightarrow M_5(\mathbb{C})$ não é injetivo. Logo, as $C^*(C_5)$ não é isomorfa a $C^*(T, Q)$.

4 OS IDEAIS DA C^*-ÁLGEBRA DE GRAFO

Conhecer os ideais do espaço no qual trabalhamos pode nos ajudar a, por exemplo, decicir se uma aplicação não nula é injetiva ou não. Por outro lado, determinar todos os ideais de estruturas tão abstratas como C^*-álgebras de grafos é uma tarefa difícil de se realizar.

Neste capítulo vamos analisar os ideais de uma álgebra de grafo. Uma consequência deste estudo é conseguir decidir se uma C^*-álgebra de grafo é simples, apenas observando características do grafo em questão e não os seus ideais.

Por convenção, quando escrevermos ideais, estamos pensando em ideais bilaterais e fechados, a menos que se diga o contrário.

4.1 GRAFOS COFINAIS

Nesta seção, vamos mostrar um teorema que permite concluir se uma álgebra de grafo é simples apenas analisando se o grafo satisfaz duas condições: todo ciclo tem uma entrada e o grafo é cofinal.

Definição 4.1.1 *Seja E um grafo e $v, w \in E^0$. Dizemos que, $v \leq w$ se existe um caminho $\mu \in E^*$ tal que $s(\mu) = w$ e $r(\mu) = v$.*

Considere o seguinte grafo,

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, bend right, "g"'] & u \arrow[l, bend right, "e"'] & w \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$

Temos que,
$v \leq w$, pois $s(ef) = w$ e $r(ef) = v$;
$v \leq u$, pois $s(e) = u$ e $r(e) = v$;
$u \leq v$, pois $s(g) = v$ e $r(g) = u$;
$u \leq w$, pois $s(f) = w$ e $r(f) = u$.

Observação 4.1.2 *A relação "$\leq$" é reflexiva e transitiva mas não é antissimétrica.*

De fato, basta considerar um ciclo $\mu = \mu_1\mu_2\cdots\mu_n$ baseado em v. Fixe $i < |n| - 1$.

Temos que, $v \leq s(\mu_i)$ e $s(\mu_i) \leq v$, pois basta considerar os caminhos, $\mu_1\mu_2\cdots\mu_i$ e $\mu_{i+1}\mu_{i+2}\cdots\mu_n$.

Logo, a relação "$\leq$" não é uma relação de ordem.

Definição 4.1.3 *Seja E um grafo. Definimos,*

$$E^{\infty} := \{\mu : \mu \ \text{ é um caminho e } \ |\mu| = \infty\},$$

$$E^{\leq\infty} := E^{\infty} \cup \{\mu \in E^{*} : |\mu| < \infty \ \text{ e } \ s(\mu) \ \text{ é source}\}.$$

Definição 4.1.4 *Seja E um grafo.*

Dizemos que E é cofinal se para todo $\mu \in E^{\leq\infty}$ e $v \in E^0$, existe um vértice w em μ tal que $v \leq w$.

Exemplo 4.1.5 *O seguinte grafo é cofinal,*

$$\begin{tikzcd} v \arrow[loop left, "e"] \arrow[r, "f"] & w \end{tikzcd}$$

Por outro lado, o grafo,

$$\begin{tikzcd} v \arrow[loop left, "e"] & w \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$

não é cofinal. De fato, se considerarmos o caminho $\mu = eee\cdots$ baseado em v e o vértice w temos que, não existe caminho que começa em v e termina em w

Teorema 4.1.6 - ***O Teorema do Grafo Cofinal*** *Seja E um grafo no qual todo ciclo tem uma entrada. Se E é cofinal então $C^*(E)$ é simples.*

Prova:

Afirmação 1 Seja A uma C^*-álgebra. Neste caso, todo ideal de A é o núcleo de alguma representação de A.

Prova: Seja I um ideal de A.

Como A/I é uma C^*-álgebra, existe um espaço de Hilbert H e uma representação injetiva, $\rho : A/I \longrightarrow B(H)$.

Seja $\pi : A \longrightarrow A/I$ aplicação canônica. Vamos mostrar que $I = \ker(\rho \circ \pi)$.

($\subseteq$) Se $a \in I$ então $\pi(a) = 0 + I$. Logo, $\rho \circ \pi(a) = 0$.

($\supseteq$) Se $a \in \ker(\rho \circ \pi)$ então $\rho \circ \pi(a) = 0$. Como ρ é injetiva então $\pi(a) = 0$, ou seja, $a + I = 0 + I$. Portanto, $a \in I$.

Portanto, $I = \ker(\rho \circ \pi)$.

□

Seja $\rho : C^*(E) \longrightarrow B(H)$ uma representação, em que H é um espaço de Hilbert.

Sem perda de generalidade suponha que ρ é não nula (se todas as representações são nulas então o único ideal de $C^*(E)$ é a própria $C^*(E)$).

Seja $\{s, p\}$ a E-família de Cuntz-Krieger universal. Como ρ é representação então $\{\rho(s), \rho(p)\} = \{S, P\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $B(H)$.

Vamos mostrar que $P_v \neq 0$, $\forall v \in E^0$.

Suponha por absurdo que $P_v = 0$, $\forall v \in E^0$. Neste caso, para cada $e \in E^1$ temos $S_e^* S_e = P_{s(e)} = 0$. Logo,

$$\|S_e\|^2 = \|S_e^* S_e\| = 0 \quad \Rightarrow S_e = 0.$$

Segue que, $\rho(p_v) = 0$ e $\rho(s_e) = 0$, $\forall v \in E^0$ e $\forall e \in E^1$ respectivamente, ou seja, ρ é nula, o que é um absurdo.

Segue que, existe pelo menos um $v_0 \in E^0$ tal que $P_{v_0} \neq 0$.

Seja $w \in E^0$. Vamos mostrar que $P_w \neq 0$.

Caso 1: Se v_0 é source.

Neste caso, $v_0 \in E^{\leq \infty}$. Como o grafo E é cofinal existe um caminho $\alpha \in E^*$ tal que $s(\alpha) = v_0$ e $r(\alpha) = w$. Temos que,

$$S_\alpha^* S_\alpha = P_{v_0} \neq 0 \ \Rightarrow \|S_\alpha\|^2 = \|S_\alpha^* S_\alpha\| \neq 0 \ \Rightarrow \ S_\alpha \neq 0.$$

Como $S_\alpha \neq 0$ e $S_\alpha = P_{r(\alpha)} S_\alpha$ então $P_w \neq 0$.

Caso 2: Se v_0 não é source.

Se v_0 não é source, podemos escolher $e \in E^1$ tal que $r(e) = v_0$ e $S_e S_e^* \neq 0$.

De fato, se para toda aresta $e \in E^1$ com $r(e) = v_0$ tivermos que $S_e S_e^* = 0$ então, por $(CK2)$, $P_{v_0} = 0$, o que é um absurdo.

Como $S_e S_e^* \neq 0$ então $P_{s(e)} \neq 0$. De fato, se $P_{s(e)} = 0$ então,

$$S_e S_e^* = S_e P_{s(e)} S_e^* = 0,$$

mas isso é um absurdo.

Portanto, $P_{s(e)} \neq 0$.

Se $s(e)$ não é source então podemos repetir o argumento acima.

Esse processo termina se encontramos um source ou pode continuar infinitamente. Seja μ o caminho obtido nesse processo (note que, $|\mu| = \infty$ ou $|\mu| < \infty$ e $s(\mu)$ é um source). Note que, por construção $P_{s(\mu_i)} \neq 0$, $\forall i$.

Como $\mu \in E^{\leq \infty}$ e E é cofinal então existe um caminho α tal que $s(\alpha) = s(\mu_j)$ para algum j, e $r(\alpha) = w$.

Como $s(\alpha) = s(\mu_j)$ então $P_{s(\alpha)} = P_{s(\mu_j)} \neq 0$. Logo, $S_\alpha^* S_\alpha = P_{s(\alpha)} \neq 0$ e assim, $S_\alpha \neq 0$.

Como $S_\alpha = P_w S_\alpha$ e $S_\alpha \neq 0$ então $P_w \neq 0$.

Portanto, $P_w \neq 0$.

Se $s(e)$ é um source então basta considerar $\mu = e$ e repetir o argumento acima.

Portanto, $P_w \neq 0$ para todo $w \in E^0$.

Segue que, $\{S, P\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger com $P_v \neq 0$, $\forall v \in E^0$. Por hipótese, todo ciclo do grafo E tem uma entrada. Portanto, pelo Teorema 3.3.3, $\pi_{S,P}$ é injetivo.

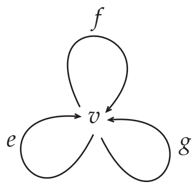
Logo, ρ é injetivo.

Como ρ é qualquer podemos concluir que toda representação de $C^*(E)$ é injetiva.

Portanto, $C^*(E)$ é simples.

■

Exemplo 4.1.7 *Nos Exemplo 1.2.3 e 3.3.4 consideramos o grafo,*



e mostramos que a $C^*(E) \cong C^*(S, P)$, em que $\{S, P\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $B(l^2(\mathbb{N}))$.

Note que, o grafo E é cofinal e todo ciclo tem uma entrada.

Portanto, pelo Teorema do Grafo Cofinal, $C^*(E)$ é simples.

Exemplo 4.1.8 *Vamos considerar novamente o grafo E,*

$$v_0 \xleftarrow{e_1} v_1 \xleftarrow{e_2} v_2 \xleftarrow{e_3} v_3 \xleftarrow{e_4} \cdots$$

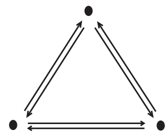
Esse grafo não tem ciclos e é cofinal. Portanto, pelo Teorema do Grafo Cofinal, $C^*(E)$ é simples.

Observe que, já era esperado que $C^*(E)$ fosse simples. De fato, no Exemplo 3.3.5, vimos que $C^*(E) \cong K(l^2(\mathbb{N}))$ e, como sabemos $K(l^2(\mathbb{N}))$ é simples (veja Exemplo 3.2.2, (9)).

Exemplo 4.1.9 *Dizemos que um grafo E é transitivo se $\forall v, w \in E^0$ tivermos que $v \leq w$ e $w \leq v$.*

Note que, se E é um grafo transitivo e não é um grafo formado por um único ciclo, então E satisfaz as condições do Teorema 4.1.6.

Por exemplo, o grafo,



é transitivo. Logo, a C^*-álgebra deste grafo é simples.

Nesta seção, caracterizamos os ideais de C^*-álgebras de grafos cofinais. Para os grafos que não são cofinais, ainda conseguimos uma boa caracterização para os ideais, desde que algumas condições sejam satisfeitas.

4.2 CONJUNTOS HEREDITÁRIOS E SATURADOS E A CONDIÇÃO (K)

Neste seção vamos considerar subconjuntos de vértices de um grafo e classificá-los em hereditários e saturados.

Fixado um subconjunto de vértices, vamos estudar quando é possível definir um novo grafo desconsiderando esse subconjunto, e quais são as propriedades da C^*-álgebra desse novo grafo.

Definição 4.2.1 *Seja E um grafo e I um ideal da $C^*(E)$. Definimos H_I como sendo o conjunto,*

$$H_I := \{v \in E^0 : p_v \in I\}.$$

Seja E um grafo e $I \subseteq C^*(E)$ um ideal.

Seja $\{s, p\}$ a E-família de Cuntz-Krieger universal.

Vamos mostrar que,

$$E \backslash H_I := \{E^0 \backslash H_I, s^{-1}(E^0 \backslash H_I), r, s\}$$

define um grafo. Para tanto, basta verificarmos que se $e \in s^{-1}(E^0 \backslash H_I)$, ou seja, se $s(e) \notin H_I$ então $r(e) \notin H_I$.

Suponha por absurdo que $r(e) \in H_I$, ou seja, $p_{r(e)} \in I$. Como I é ideal temos que,

$$s_e = p_{r(e)} s_e \in I \;\Rightarrow\; p_{s(e)} = s_e^* s_e \in I,$$

ou seja, $s(e) \in H_I$. Mas isso é um absurdo.

Portanto, $r(e) \notin H_I$ e assim, $E \backslash H_I$ é um grafo.

Considere a aplicação canônica $\pi : C^*(E) \longrightarrow C^*(E)/I$.

Como $\{s, p\}$ é E-família de Cuntz-Krieger então $\{\pi(s), \pi(p)\}$ é uma $E \backslash H_I$-família de Cuntz-Krieger em $C^*(E)/I$ com $\pi(q_v) \neq 0$, $\forall v \in E^0 \backslash H_I$.

De fato,

$$\text{se } \; v \notin H_I \;\Rightarrow\; p_v \notin I \;\Rightarrow\; p_v + I \neq 0 + I \;\Rightarrow\; \pi(p_v) \neq 0.$$

Portanto, dado um grafo E e $I \subseteq C^*(E)$ um ideal, podemos considerar o conjunto H_I definido acima e a partir deste, construir um novo grafo $E \backslash H_I$ e uma $E \backslash H_I$-família de Cuntz-Krieger, $\{\pi(s), \pi(p)\}$ em $C^*(E)/I$, com todas as projeções não nulas. Então, podemos nos perguntar qual é a relação entre a $C^*(E \backslash H_I)$ e $C^*(E)/I$.

Em breve, discutiremos uma condição suficiente, para garantir que $C^*(E \backslash H_I)$ e $C^*(E)/I$ sejam isomorfas.

Definição 4.2.2 *Seja E um grafo. Dizemos que um subconjunto $H \subseteq E^0$ é hereditário se $w \in H$ e $v \in E^0$ são tais que $w \leq v$ então $v \in H$.*

Definição 4.2.3 *Seja E um grafo. Dizemos que um subconjunto $H \subseteq E^0$ é saturado se para todo $v \in E^0$ que satisfaz:*

$$r^{-1}(v) \neq \emptyset \text{ e } \{s(e) : r(e) = v\} \subseteq H,$$

tivermos que $v \in H$.

Note que, dado um grafo E, os conjuntos E^0 e $\emptyset$ são hereditários e saturados. Dizemos que, E^0 e $\emptyset$ são os conjuntos saturados e hereditários triviais.

Exemplo 4.2.4 *Considere o seguinte grafo,*

$$\begin{tikzcd} v \arrow[loop left, "e"] \arrow[r, "f"] & w \end{tikzcd}$$

Temos que,

- $\{v\}$ *é hereditário.*

- $\{w\}$ *não é hereditário, pois* $w \leq v$ *e* $v \notin \{w\}$.

- $\{v\}$ *não é saturado, pois o vértice* w *satisfaz:* $r^{-1}(w) \neq \emptyset$ *e* $\{s(e) : r(e) = w\} = \{v\} \subseteq \{v\}$, *mas* $w \notin \{v\}$.

- $\{w\}$ *é saturado, pois não existe nenhum vértice que satisfaz as condições da Definição 4.2.3 e não pertence a* $\{w\}$.

Exemplo 4.2.5 *Considere o seguinte grafo,*

$$\begin{tikzcd} u \arrow[loop left, "e"] & v \arrow[l, "f"'] & w \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

Temos que, $\{v, w\}$ *é hereditário e saturado.*
De fato, note que, para o vértice u *temos que,*

$$\{s(e) : r(e) = u\} = \{u, v\} \nsubseteq \{v, w\}.$$

Lema 4.2.6 *Seja* E *um grafo e* $I \subseteq C^*(E)$ *um ideal não nulo. Neste caso,* H_I *é hereditário e saturado.*

Prova: Seja $\{s, p\}$ E-família de Cuntz-Krieger universal.
Vamos mostrar que H_I é hereditário.
Seja $w \in H_I$ e $v \in E^0$ tal que $w \leq v$.
Como $w \in H_I$ então $p_w \in I$.
Como $w \leq v$ existe um caminho $\alpha \in E^*$ tal que $s(\alpha) = v$ e $r(\alpha) = w$
Como I é um ideal temos que,

$$s_\alpha = p_w s_\alpha \in I \;\Rightarrow p_v = s_\alpha^* s_\alpha \in I.$$

Como $p_v \in I$ então $v \in H_I$ e assim, H_I é hereditário.

Vamos mostrar que H_I é saturado.
Seja $v \in E^0$ tal que, $r^{-1}(v) \neq \emptyset$ e $\{s(e) : r(e) = v\} \subseteq H_I$. Então, se $e \in E^1$ é tal que $r(e) = v$ temos que $p_{s(e)} \in I$. Logo,

$$s_e = s_e p_{s(e)} \in I \;\Rightarrow\; s_e s_e^* \in I \;\Rightarrow\; p_v = \sum_{e \in r^{-1}(v)} s_e s_e^* \in I.$$

Portanto, $v \in H_I$ e assim, H_I é saturado.

$\blacksquare$

Definição 4.2.7 *Seja E um grafo.*

Dizemos que E satisfaz a condição (k) se para todo vértice $v \in E^0$ tivermos que:

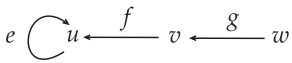
1. *ou não existe ciclo baseado em v;*

2. *ou existem dois caminhos distintos $\mu, \nu \in E^*$ tais que, $s(\mu) = v = r(\mu)$ e $s(\nu) = v = r(\nu)$, $s(\mu_i) \neq v$ $\forall i < |\mu|$ e $s(\nu_i) \neq v$ $\forall i < |\nu|$.*

Observação 4.2.8 *Note que, no item 2. da definição acima, estamos considerando que os caminhos μ e ν podem (ou não) ser ciclos.*

Exemplo 4.2.9 *Se E é um grafo que não tem ciclos então trivialmente temos que E satisfaz a condição (k).*

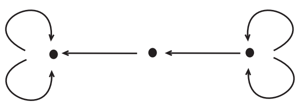
Exemplo 4.2.10 *O seguinte grafo,*



não satisfaz a condição (k), pois existe um único ciclo baseado no vértice u.

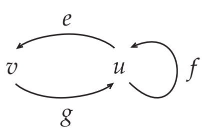
No grafo acima, temos que os caminhos $\mu = e$ e $\nu = eee\cdots$ são distintos, porém eles não satisfazem a condição $s(\mu_i) \neq v$ $\forall i < |\mu|$ e $s(\nu_i) \neq v$ $\forall i < |\nu|$.

Exemplo 4.2.11 *O grafo,*



satisfaz a condição (k).

Exemplo 4.2.12 *O grafo,*



satisfaz a condição (k).

De fato, temos dois ciclos distintos baseados no vértice u (a saber, ge e f) e, um ciclo e um caminho fechado baseados no vértice v (a saber, eg e efg respectivamente).

Observação 4.2.13 *Se E é um grafo que satisfaz a condição (k) então todo ciclo de E tem uma entrada.*

De fato, basta perceber que se μ é um ciclo em E baseado em v, como o grafo E satisfaz a condição (k) existe um caminho ν distinto de μ, que satisfaz as condições da Definição 4.2.7.

Como μ é diferente de ν e $r(\mu) = v = r(\nu)$, seja i o menor número natural tal que $\mu_i \neq \nu_i$.

Segue que, ν_i é uma entrada do ciclo μ.

Não é verdade que se E é um grafo no qual todo ciclo tem uma entrada então E satisfaz a condição (k). Por exemplo, considere o grafo,

$$\begin{tikzcd} u \arrow[loop left, "e"] & v \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$

Note que, esse grafo é tal que todo ciclo tem uma entrada, mas não satisfaz a condição (k).

Definição 4.2.14 *Seja E um grafo e $H \subseteq E^0$ um conjunto saturado e hereditário. Definimos o grafo $E \backslash H$ como sendo:*

$$E\backslash H := \{E^0\backslash H, s^{-1}(E^0\backslash H), r, s\}.$$

Vamos verificar que, nas condições acima $E\backslash H$ define um grafo.

De fato, como H é hereditário e $r(e) \leq s(e)$, $\forall e \in E^1$, temos que se $s(e) \notin H$ então $r(e) \notin H$. Portanto, $E\backslash H$ é um grafo.

No próximo lema vamos relacionar a condição (k) com os subconjuntos hereditários e saturados de um grafo E.

Lema 4.2.15 *Um grafo E satisfaz a condição (k) se, e somente se, para todo subconjunto hereditário e saturado $H \subseteq E^0$, todo o ciclo do grafo $E\backslash H$ tem uma entrada.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Seja $H \subseteq E^0$ hereditário e saturado.

Seja μ um ciclo no grafo $E\backslash H$ baseado em $v \in (E\backslash H)^0 = E^0\backslash H$. Vamos mostrar que μ tem uma entrada em $E\backslash H$.

Como μ é um ciclo em $E\backslash H$, em particular, μ é um ciclo em E. Por hipótese, E satisfaz a condição (k). Logo, existe um caminho $\nu \in E^*$ tal que:

- $\mu \neq \nu$;
- $s(\nu) = v = r(\nu)$;
- $s(\nu_i) \neq v$, $\forall \nu_i < |\nu|$.

Como $r(\mu) = v = r(\nu)$ e $\mu \neq \nu$, escolha o menor número natural i tal que $\mu_i \neq \nu_i$.

Segue que, ν_i é uma entrada do ciclo μ no grafo E.

Vamos mostrar que ν_i é uma entrada de μ no grafo $E\backslash H$, ou seja, $\nu_i \in (E\backslash H)^1 = s^{-1}(E^0\backslash H)$.

Suponha por absurdo que $s(\nu_i) \in H$. Neste caso, considerando o caminho $\beta = \nu_{i+1} \cdots \nu_{|\nu|}$ temos que, $r(\beta) = r(\nu_{i+1}) = s(\nu_i)$ e $s(\beta) = s(\nu_{|\nu|}) = v$, ou seja, $s(\nu_i) \leq v$. Como H é hereditário e $s(\nu_i) \in H$, temos que $v \in H$. Absurdo.

Portanto, $\nu_i \in (E\backslash H)^1$ e assim, o ciclo μ tem uma entrada em $E\backslash H$.

$(\Leftarrow)$ Se o grafo E não tem ciclos, então o resultado está demonstrado.

Seja $v \in E^0$ e μ um ciclo baseado em v. Vamos mostrar que existe um caminho $\nu \in E^*$ que satisfaz a segunda condição da Definição 4.2.7.

Defina o seguinte conjunto:

$$H = \{w \in E^0 : w \nleq v\},$$

ou seja, H é o conjunto de todos os vértices tais que, não existe caminho que começa em v e termina em w.

Afirmação 1 O conjunto H é hereditário e saturado.

Prova: Vamos mostrar que H é hereditário.

Seja $w \in H$ e $z \in E^0$ tal que $w \leq z$. Devemos mostrar que $z \in H$, ou seja, $z \nleq v$.

Suponha por absurdo que $z \leq v$. Neste caso, $w \leq z \leq v$, o que é um absurdo.

Portanto, H é hereditário.

Vamos mostrar que H é saturado.

Seja $w \in E^0$ tal que, $r^{-1}(w) \neq \emptyset$ e $\{s(e) : r(e) = w\} \subseteq H$. Vamos mostrar que $w \in H$.

Suponha por absurdo que $w \notin H$, ou seja, $w \leq v$. Então, existe um caminho $\alpha \in E^*$ tal que $s(\alpha) = v$ e $r(\alpha) = w$.

Considere a aresta α_1. Como $r(\alpha_1) = w$ e, por hipótese $\{s(e) : r(e) = w\} \subseteq H$ então $s(\alpha_1) \in H$.

Como $s(\alpha_1) \in H$, $s(\alpha_1) \leq v$ e H é hereditário então $v \in H$. Mas isso é um absurdo.

Portanto, $w \in H$ e assim, H é saturado.

□

Como H é hereditário e saturado, por hipótese, todo o ciclo de $E \backslash H$ tem uma entrada.

Vamos mostrar que μ é um ciclo em $E \backslash H$.

Como $s(\mu) = v$, $s(\mu_i) \leq v$, $\forall 1 \leq i \leq |\mu|$, H é hereditário e $v \notin H$ temos que, $s(\mu_i) \notin H$, $\forall 1 \leq i \leq |\mu|$.

Logo, μ é um ciclo em $E \backslash H$.

Segue que, existe $e \in (E \backslash H)^1$ que é uma entrada em μ, ou seja, $r(e) = r(\mu_j)$, para algum $1 \leq j \leq |\mu|$, e $e \neq \mu_j$.

Como $e \in (E \backslash H)^1$ então $s(e) \notin H$. Logo, $s(e) \leq v$.

Se $s(e) = v$ então o caminho,

$$\nu = \mu_1 \cdots \mu_{j-1} e$$

satisfaz a segunda condição da Definição 4.2.7.

Se $s(e) \neq v$, como $s(e) \leq v$ existe um caminho α (se tiver mais de um, escolha o menor deles) tal que $s(\alpha) = v$ e $r(\alpha) = s(e)$. Logo, o caminho

$$\nu = \mu_1 \cdots \mu_{j-1} e \alpha$$

satisfaz as condições da Definição 4.2.7.

Portanto, o grafo E satisfaz a condição (k).

■

Observação 4.2.16 *Seja E um grafo que satusfaz a condição (k). Seja $I \subseteq C^*(E)$ um ideal não nulo. Então, H_I é hereditário e saturado e pelo lema anterior, todo o ciclo de $E \backslash H_I$ tem uma entrada.*

Seja $\{s, p\}$ a E-família de Cuntz-Krieger universal e $\pi : C^*(E) \longrightarrow C^*(E)/I$ aplicação canônica.

Já vimos que, $\{\pi(s), \pi(p)\}$ é uma $E \backslash H_I$-família de Cuntz-Krieger em $C^*(E)/I$ com as projeções todas não nulas.

Como todo ciclo do grafo $E \backslash H_I$ tem entrada, pelo Teorema da Unicidade de Cuntz-Krieger, $C^*(E \backslash H_I)$ é isomorfa a $C^*(\pi(s), \pi(p)) = C^*(E)/I$.

Portanto, se o grafo E satisfaz a condição (k) e $I \subseteq C^*(E)$ é um ideal não nulo então,

$$C^*(E \backslash H_I) \cong C^*(E)/I.$$

Observação 4.2.17 *Na Observação 4.2.13 vimos que se E é um grafo que satisfaz a condição (k), então todo ciclo de E tem entrada.*

Nesta mesma observação, vimos que não é verdade, que se todo ciclo de E tem entrada então E satisfaz a condição (k). Porém, o lema anterior nos fornece uma condição suficiente para que isso seja verdade.

De fato, pelo lema anterior, se E é um grafo no qual todo ciclo tem uma entrada e tal que E só possui subconjuntos saturados e hereditários triviais então, E satisfaz a condição (k).

Considere o grafo E,

$$\begin{tikzcd} u \arrow[loop left, "e"] & v \arrow[l] & w \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Vimos que, $\{v, w\}$ é um subconjunto saturado e hereditário de E^0 e que o grafo $E \backslash H$ não satisfaz a condição (k).

Uma outra forma de concluir que o grafo E não satisfaz a condição (k) é, usando o Lema 4.2.15, perceber que no grafo $E \backslash H$,

$$\begin{tikzcd} u \arrow[loop left, "e"] \end{tikzcd}$$

o ciclo e não tem entrada.

Teorema 4.2.18 *Seja E um grafo que satisfaz a condição (k) e $\{s, p\}$ a E-família de Cuntz-Krieger universal.*

Para cada $H \subseteq E^0$, seja I_H o ideal gerado por $\{p_v : v \in H\}$.

Neste caso, a aplicação $H \longmapsto I_H$ é uma bijeção entre o conjunto dos subconjuntos saturados e hereditários de E^0 e o conjunto dos ideais de $C^*(E)$.

Prova: Defina,

$$\mathcal{H} := \{H \subseteq E^0 : H \text{ é hereditário e saturado}\}$$

e,

$$\mathcal{I} := \{I \subseteq C^*(E) : I \text{ é ideal}\}.$$

Seja,

$$\begin{array}{rccc} \Psi\colon & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{I} \\ & H & \longmapsto & I_H \end{array}$$

Vamos mostrar que Ψ é sobrejetiva.

Seja $I \in \mathcal{I}$.
No Lema 4.2.6 mostramos que H_I é hereditário e saturado.
Vamos mostrar que,

$$I = \Psi(H_I) = I_{H_I}.$$

Sabemos que $H_I = \{v : p_v \in I\}$.
Segue que, se $p_v \in I_{H_I}$ então $v \in H_I$ e assim, $p_v \in I$.
Logo, $I_{H_I} \subseteq I$.
Vamos mostrar que $I \subseteq I_{H_I}$.

Note que, se $p_v \in I$ então $v \in H_I$ e assim, $p_v \in I_{H_I}$. Porém, isso não garante que $I \subseteq I_{H_I}$.

Considere as seguintes aplicações canônicas:

$$\begin{array}{rccc} q^I\colon & C^*(E) & \longrightarrow & C^*(E)/I \\ & & & \\ q^{I_{H_I}}\colon & C^*(E) & \longrightarrow & C^*(E)/I_{H_I} \end{array}$$

Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} q^{I/I_{H_I}}\colon & C^*(E)/I_{H_I} & \longrightarrow & C^*(E)/I \\ & a + I_H & \longmapsto & a + I \end{array}$$

Vamos mostrar que $q^{I/I_{H_I}}$ está bem definida. Sejam $a + I_{H_I}, a' + I_{H_I} \in C^*(E)/I_{H_I}$ tais que, $a + I_{H_I} = a' + I_{H_I}$. Então, $a - a' \in I_{H_I} \subseteq I$. Logo,

$$q^{I/I_{H_I}}(a + I_{H_I}) = a + I = a' + I = q^{I/I_{H_I}}(a' + I_{H_I}).$$

Portanto, $q^{I/I_{H_I}}$ está bem definida.

Como I é um ideal da $C^*(E)$, vimos no início desta seção $\{q^I(s), q^I(p)\}$ é uma $E\backslash H_I$-família de Cuntz-Krieger em $C^*(E)/I$ com as projeções todas não nulas.

Da mesma forma, como I_{H_I} é um ideal de $C^*(E)$ então $\{q^{I_{H_I}}(s_e), q^{I_{H_I}}(p_v)\}$ é uma $E\backslash H_{I_{H_I}}$-família de Cuntz-Krieger em $C^*(E)/I_{H_I}$ com as projeções todas não nulas.

Afirmação 1 Temos que $\{q^{I_{H_I}}(s), q^{I_{H_I}}(p)\}$ é uma $E\backslash H_I$-família de Cuntz-Krieger em $C^*(E)/I_{H_I}$ com as projeções todas não nulas.

Prova: Primeiro note que,

$$E^0\backslash H_I \subseteq E^0\backslash H_{I_{H_I}}.$$

De fato, como $I_{H_I} \subseteq I$ temos que:

$$\text{se} \;\; v \notin H_I \;\; \Rightarrow \;\; p_v \notin I \;\; \Rightarrow \;\; p_v \notin I_{H_I} \;\; \Rightarrow \;\; v \notin H_{I_{H_I}}.$$

Logo, $E^0\backslash H_I \subseteq E^0\backslash H_{I_{H_I}}$.

Vamos verificar que $(CK1)$ é satisfeita. Seja $e \in (E\backslash H_I)^1$, ou seja, $s(e) \in E^0\backslash H_I \subseteq E^0\backslash H_{I_{H_I}}$. Portanto, $(CK1)$ é satisfeita.

Vamos verificar que $(CK2)$ é satisfeita. Seja $v \in E^0\backslash H_I$. Temos que,

$$q^{I_{H_I}} p_v = \sum_{f\in(E\backslash H_{I_{H_I}})^1 : r(f)=v} q^{I_{H_I}}(s_f) q^{I_{H_I}}(s_f)^* =$$

$$= \sum_{f:s(f)\in(E^0\backslash H_{I_{H_I}}) \;\;\text{e}\;\; r(f)=v} q^{I_{H_I}}(s_f) q^{I_{H_I}}(s_f)^* =$$

$$= \sum_{f:s(f)\in(E^0\backslash H_I) \;\;\text{e}\;\; r(f)=v} q^{I_{H_I}}(s_f) q^{I_{H_I}}(s_f)^* +$$

$$+ \sum_{f:s(f)\in(E^0\backslash H_{I_{H_I}})\backslash(E^0\backslash H_I) \;\;\text{e}\;\; r(f)=v} q^{I_{H_I}}(s_f) q^{I_{H_I}}(s_f)^*.$$

Note que, se f é tal que $s(f) \in \left(E^0\backslash H_{I_{H_I}}\right)\backslash(E^0\backslash H_I)$ então $s(f) \notin (E^0\backslash H_I)$, ou seja, $s(f) \in H_I$. Logo, $p_{s(f)} \in I_{H_I}$.

Portanto,

$$q^{I_{H_I}}(s_f) = q^{I_{H_I}}(s_f p_{s(f)}) = 0.$$

Segue que,

$$p_v = \sum_{f:s(f)\in(E^0\backslash H_I) \;\;\text{e}\;\; r(f)=v} q^{I_{H_I}}(s_f) q^{I_{H_I}}(s_f)^*.$$

Portanto, $(CK2)$ é satisfeita.

□

Como $\{q^{I_{H_I}}(s), q^{I_{H_I}}(p)\}$ e $\{q^I(s), q^I(p)\}$ são $E\backslash H_I$-famílias de Cuntz-Krieger em $C^*(E)/I_{H_I}$ e $C^*(E)/I$ respectivamente, podemos considerar os homomorfismos:

$$\begin{array}{rccc} \rho = \pi_{q^I(s),q^I(p)}\colon & C^*(E\backslash H_I) & \longrightarrow & C^*(E)/I \\ & s_e & \longmapsto & q^I(s_e) \\ & p_v & \longmapsto & q^I(p_v) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \delta = \pi_{q^{I_{h_I}}}(s), q^{I_{H_I}}(p)\colon & C^*(E\backslash H_I) & \longrightarrow & C^*(E)/I_{H_I} \\ & s_e & \longmapsto & q^{I_{H_I}}(s_e) \\ & p_v & \longmapsto & q^{I_{H_I}}(p_v) \end{array}$$

Por hipótese, E satisfaz a condição (k). Como H_I é saturado e hereditário então pelo Lema 4.2.6, todo ciclo de $E\backslash H_I$ tem uma entrada.

Como todo o ciclo de $E\backslash H_I$ tem uma entrada e $\{q^I(s), q^I(p)\}$ e $\{q^{I_{H_I}}(s), q^{I_{H_I}}(p)\}$ são $E\backslash H_I$-famílias de Cuntz-Krieger com as projeções todas não nulas, pelo Teorema da Unicidade de Cuntz-Krieger, temos que δ e ρ são injetivos.

Afirmação 2 $\rho = q^{I/I_{H_I}} \circ \delta$.

Prova: Seja $a \in C^*(E\backslash H_I)$. Temos que,

$$\rho(a) = q^I(a) = a + I,$$

Por outro lado,

$$q^{I/I_{H_I}} \circ \delta(a) = q^{I/I_{H_I}}(a + I_{H_I}) = a + I.$$

Portanto,

$$q^{I/I_{H_I}} \circ \delta = \rho.$$

□

Afirmação 3 A aplicação $\delta : C^*(E\backslash H_I) \longrightarrow C^*(E)/I_{H_I}$ é sobrejetiva.

Prova: Primeiro note que a $C^*(E)/I_{H_I}$ é gerada por:

$$\{p_v + I_{H_I} : p_v \notin I_{H_I}\} \cup \{s_e + I_{H_I} : s_e \notin I_{H_I}\}.$$

Segue que, para mostrarmos que δ é sobrejetiva, é suficiente mostrarmos que todos os geradores da $C^*(E)/I_{H_I}$ são atingidos.

Temos que, se $p_v \notin I_{H_I}$ então $v \notin H_I$ e assim,

$$p_v + I_{H_I} = \delta(p_v).$$

Por outro lado, se $s_e \notin I_{H_I}$ então $p_{s(e)} \notin I_{H_I}$ e assim, $s(e) \notin H_I$. Logo,

$$s_e + I_{H_I} = \delta(s_e).$$

Portanto, δ é sobrejetiva.

$\square$

Como $\rho = q^{I/I_{H_I}} \circ \delta$, ρ é injetiva e δ é sobrejetiva, é fácil ver que, $q^{I/I_{H_I}}$ é injetiva.

Afirmação 4 $I = I_{H_I}$.

Prova: Já vimos que, $I_{H_I} \subseteq I$.

Lembre que, aplicação

$$\begin{array}{rccc} q^{I/I_{H_I}}: & C^*(E)/I_{H_I} & \longrightarrow & C^*(E)/I \\ & a + I_{H_I} & \longmapsto & a + I \end{array}$$

é injetiva.

Seja $a \in I$. Então, $a + I = 0 + I$.

Suponha por absurdo que $a \notin I_{H_I}$. Neste caso, $a + I_{H_I} \neq 0 + I_{H_I}$. Então, como $q^{I/I_{H_I}}$ é injetiva,

$$a + I = q^{I/I_{H_I}}(a + I_{H_I}) \neq 0 + I.$$

Absurdo.

Portanto, $a \in I_{H_I}$, e assim, $I_{H_I} \subseteq I$.

$\square$

Portanto, dado $I \in \mathcal{I}$, consideramos o conjunto H_I que é saturado e hereditário e mostramos que $I = I_{H_I}$. Segue que,

$$\Psi(H_I) = I_{H_I} = I,$$

ou seja, Ψ é sobrejetiva.

Vamos mostrar que a aplicação Ψ é injetiva.

Afirmação 5 Se $H \in \mathcal{H}$ então $H = \{v : p_v \in I_H\}$.

Prova:
($\subseteq$) Seja $w \in H$.
Como I_H é o ideal gerado por $\{p_v : v \in H\}$ e $p_w \in \{p_v : v \in H\}$ então $p_w \in I_H$.
Logo, $w \in \{v : p_v \in I_H\}$.

($\supseteq$) Seja $\{t, q\}$ a $E\backslash H$-família de Cuntz-Krieger universal.
Defina,

$$\widetilde{t}_e = \begin{cases} t_e, & \text{se} \quad s(e) \notin H, \\ 0, & \text{se} \quad s(e) \in H \end{cases} \quad \text{e} \quad \widetilde{q}_v = \begin{cases} q_v, & \text{se} \quad v \notin H, \\ 0, & \text{se} \quad v \in H. \end{cases}$$

Vamos mostrar que $\{\widetilde{t}, \widetilde{q}\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $C^*(E\backslash H)$.

Claro que, $\{\widetilde{q}_v : v \in E^0\}$ é uma família de projeções ortogonais.

Vamos mostrar que $(CK1)$ é satisfeita. Seja $e \in E^1$. Temos que,

$$\widetilde{t}_e^*\widetilde{t}_e = \begin{cases} t_e^* t_e, & \text{se} \quad s(e) \notin H, \\ 0, & \text{se} \quad s(e) \in H \end{cases} = \begin{cases} q_{s(e)}, & \text{se} \quad s(e) \notin H, \\ 0, & \text{se} \quad s(e) \in H \end{cases} = \widetilde{q}_{s(e)}.$$

Logo, $(CK1)$ é satisfeita.

Vamos mostrar que $(CK2)$ é satisfeita. Seja $v \in E^0$ tal que v não é source em E.

Caso 1: Se $v \in H$.

Neste caso, $\widetilde{q}_v = 0$. Por outro lado, se $e \in E^1$ é tal que $r(e) = v$ então, como H é hereditário e $r(e) \leq s(e)$ temos que $s(e) \in H$. Logo, $\widetilde{t}_e = 0$. Assim,

$$\sum_{e \in r^{-1}(v)} \widetilde{t}_e \widetilde{t}_e^* = 0 = \widetilde{q}_v.$$

Caso 2: Se $v \notin H$.

Vamos mostrar que v não é um source em $E\backslash H$.
Suponha por absurdo que v é um source em $E\backslash H$. Isso significa

dizer que não existe aresta $e \in (E\backslash H)^1$ tal que $r(e) = v$, ou seja, se $r(e) = v$ então $s(e) \in H$. Segue que,

$$r^{-1}(v) \neq \emptyset \text{ e } \{s(e) : r(e) = v\} \subseteq H.$$

Como H é saturado, temos que $v \in H$. Absurdo.
Portanto, se $v \notin H$ então v não é source em $E\backslash H$.

Temos que, $v \notin H$ e v não é source em $E\backslash H$. Logo,

$$q_v = \sum_{\{e:s(e)\notin H \text{ e } r(e)=v\}} t_e t_e^*.$$

Por outro lado,

$$\sum_{\{e:r(e)=v\}} \widetilde{t}_e \widetilde{t}_e^* = \sum_{\{e:s(e)\notin H \text{ e } r(e)=v\}} t_e t_e^* + \sum_{\{e:s(e)\in H \text{ e } r(e)=v\}} t_e t_e^* = q_v = \widetilde{q}_v.$$

Portanto, $(CK2)$ é satisfeita.

Portanto, $\{\widetilde{t}, \widetilde{q}\}$ é uma E-família de Cuntz-Krieger em $C^*(E\backslash H)$.

Considere o homomorfismo,

$$\begin{array}{cccc} \pi_{\widetilde{t},\widetilde{q}}\colon & C^*(E) & \longrightarrow & C^*(E\backslash H) \\ & s_e & \longmapsto & \widetilde{t}_e \\ & p_v & \longmapsto & \widetilde{q}_v \end{array}$$

Note que,

$$\text{se } v \in H \;\Rightarrow\; \widetilde{q}_v = 0 \;\Rightarrow\; \pi_{\widetilde{t},\widetilde{q}}(p_v) = \widetilde{q}_v = 0 \;\Rightarrow\; p_v \in \ker(\pi_{\widetilde{t},\widetilde{q}}).$$

Segue que, $I_H \subseteq \ker(\pi_{\widetilde{t},\widetilde{q}})$.
Devemos mostrar que $\{v : p_v \in I_H\} \subseteq H$. Vamos mostrar que $H^c \subseteq (\{v : p_v \in I_H\})^c$.
Se $w \in H^c$ então $\widetilde{q}_w = q_w \neq 0$, ou seja, $p_w \notin \ker(\pi_{\widetilde{t},\widetilde{q}})$. Como $I_H \subseteq \ker(\pi_{\widetilde{t},\widetilde{q}})$ temos que $p_w \notin I_H$.
Logo, $p_w \in (\{v : p_v \in I_H\})^c$.
Portanto,

$$\{v : p_v \in I_H\} = H.$$

□

Finalmente, sejam $H_1, H_2 \subseteq \mathcal{H}$ tais que $\Psi(H_1) = \Psi(H_2)$, ou seja, $I_{H_1} = I_{H_2}$.

Pela afirmação anterior, $\{v : p_v \in I_{H_1}\} = H_1$ e $\{v : p_v \in I_{H_2}\} = H_2$.

Segue que, se $v \in H_1$ então, $p_v \in I_{H_1} = I_{H_2}$ e assim, $v \in H_2$. Logo, $H_1 \subseteq H_2$.

Analogamente, $H_2 \subseteq H_1$.

Portanto, $H_1 = H_2$ e assim, Ψ é injetiva.

Portanto, existe uma bijeção entre o conjunto dos ideais fechados da $C^*(E)$ e os subconjuntos hereditários e saturados de E^0.

■

Observação 4.2.19 *No teorema anterior vimos que, se E é um grafo que satisfaz a condição (k) então todo ideal da $C^*(E)$ é da forma I_H, em que H é um subconjunto saturado e hereditário de E^0. Isso significa que, se o grafo E só possui subconjuntos saturados e hereditários triviais, então os únicos ideiais de $C^*(E)$ são $I_\emptyset = \{0\}$ e $I_{E^0} = C^*(E)$.*

Portanto, se um grafo E satisfaz a condição (k) e só só possui subconjuntos saturados e hereditários triviais, então a $C^*(E)$ é simples.

Exemplo 4.2.20 *Considere o seguinte grafo,*

$$\begin{tikzcd}
& v \arrow[dl, "e"'] & \\
u & & w \arrow[ll, "f"] \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

Temos que, $\{w\}$ e $\{v, w\}$ são os únicos subconjuntos de E^0 que são hereditários. Porém, esses conjuntos não são saturados. Logo, os únicos conjuntos saturados e hereditários são o $\{\emptyset\}$ e o E^0.

Além disso, como o grafo E não tem ciclos, então a condição (k) é satisfeita.

Portanto, pelo Teorema 4.2.18, $C^*(E)$ é simples.

Lembre que, no Exemplo 1.4.19 mostramos que dada qualquer família de Cuntz-Krieger $\{S, P\}$ para este grafo, com as projeções todas não nulas, temos que,

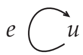
$$C^*(S, P) \cong M_4(\mathbb{C}).$$

Portanto, $C^*(E) \cong M_4(\mathbb{C})$.

Observe que, como $M_4(\mathbb{C})$ é simples já era de se esperar que $C^*(E)$ também fosse simples.

Observação 4.2.21 *O Teorema 4.2.18 pode não valer se a hipótese da condição (k) for retirada.*

Por exemplo, considere o grafo E,



O grafo E é o típico exemplo de um grafo que não satisfaz a condição (k).

Os únicos subconjuntos saturados e hereditários de E^0 são os triviais, porém a $C^*(E)$ não é simples. De fato, no Exemplo B.1.17 mostramos que $C^*(E) \cong C(\mathbb{S}^1)$ que não é simples.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos um pouco da teoria de grafos, sob o ponto de vista da análise funcional. Para simplificar o estudo, consideramos apenas uma classe especial de grafos, denominados de grafos com linhas finitas, que são os grafos, nos quais cada vértice recebe apenas uma quantidade finitas de arestas.

Como os conceitos aqui apresentados, em geral não são vistos nos cursos de graduação e pós graduação, tivemos a preocupação de fazer sempre que possível, exemplos detalhados e também desenhos para ilustrar definições e teoremas.

Nosso foco, foi definir a C^*-álgebra do grafo a partir da teoria de C^*-álgebra universal, o que nos permitiu tirar bons resultados derivados da propriedade universal. Para tanto, introduzimos o conceito de família de Cuntz-Krieger para um grafo.

Logo nos primeiros exemplos, percebemos que, dado um grafo, podem existir mais de uma família de Cuntz-Krieger associada a ele. Sendo essas famílias subconjuntos de C^*-álgebras, podemos considerar as C^*-álgebras por elas geradas. Deste modo, precisamos decidir quando essas C^*-álgebras são "iguais" e principalmente, quando são "iguais" a C^*-álgebra do grafo (definida via C^*-álgebra universal). Isso foi feito no Teorema da Invariância da Ação de Gauge e no Teorema da Unicidade de Cuntz-Krieger, no capítulo 3.

Neste sentido, buscamos apresentar alguns exemplos de grafos cujas C^*-álgebras são isomorfas a C^*-álgebras muito conhecidas, como por exemplo, a C^*-álgebra das matrizes quadradas ou dos operadores compactos do $l^2(\mathbb{N})$.

Também fizemos um breve estudo sobre os ideais da C^*-álgebra de um grafo no Capítulo 4. Esse estudo é importante, pois permite determinarmos os ideais da C^*-álgebra do grafo apenas observando características do grafo em questão.

Neste trabalho, não abordamos os grafos que não têm linhas finitas. Sendo assim, podemos deixar como proposta para futuros estudos a generalização dos resultados aqui apresentados, bem como de outros, para grafos arbitrários.

APÊNDICE A – Projeções e Isometrias Parciais

A.1

Definição A.1.1 *Seja* $\boldsymbol{H}$ *um espaço de Hilbert. Um operador linear* $\boldsymbol{P : H \longrightarrow H}$ *é uma projeção se existe um subespaço vetorial fechado* $\boldsymbol{Y \subset H}$ *tal que:*

1. $\boldsymbol{Y = P(H)}$;
2. $\boldsymbol{Y^{\perp} = KerP}$;
3. $\boldsymbol{P}$ *restrito a* $\boldsymbol{Y}$ *é o operador identidade em* $\boldsymbol{Y}$.

Proposição A.1.2 *Seja* $\boldsymbol{H}$ *um espaço de Hilbert. Um operador linear* $\boldsymbol{P : H \longrightarrow H}$ *é uma projeção se, e somente se,* $\boldsymbol{P^* = P}$ *e* $\boldsymbol{P^2 = P}$.

Prova: A prova desta proposição pode ser encontrada em (6). ■

Definição A.1.3 *Uma família* $\boldsymbol{\{P_n : n \in \mathbb{N}\}}$ *de operadores num espaço de Hilbert H é um conjunto de projeções mutuamente ortogonais se:*

1. $\boldsymbol{P_n^2 = P_n}$, $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$;
2. $\boldsymbol{P_n^* = P_n}$, $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$;
3. $\boldsymbol{P_n P_m = 0}$, $\forall \boldsymbol{n, m} \in \mathbb{N}\boldsymbol{, n \neq m}$,

são satisfeitas.

Definição A.1.4 *Seja* $\boldsymbol{H}$ *um espaço de Hilbert. Um operador linear* $\boldsymbol{S : H \longrightarrow H}$ *é uma isometria de* $\boldsymbol{\|S(h)\| = \|h\|}$, $\forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}$.

Proposição A.1.5 *Seja* $\boldsymbol{H}$ *um espaço de Hilbert. Um operador linear* $\boldsymbol{S : H \longrightarrow H}$ *é uma isometria se, e somente se,* $\boldsymbol{S^*S = I}$.

Prova:
($\Rightarrow$) Se $\boldsymbol{S}$ é uma isometria então $\boldsymbol{\|S(h)\| = \|h\|}$, $\forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}$, ou seja, $\boldsymbol{\langle S(h), S(H)\rangle = \langle h, h\rangle}$, $\forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}$. Logo,

$$\boldsymbol{\langle h, S^*S(h) - h\rangle = \langle h, S^*S(h)\rangle - \langle h, h\rangle = \langle S(h), S(h)\rangle - \langle h, h\rangle = 0,}$$

$\forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}$.

Logo, $\boldsymbol{S^*S = I}$.

($\Leftarrow$) Se $S^*S = I$ então,

$$\langle S(h), S(h)\rangle = \langle h, S^*S(h)\rangle = \langle h, h\rangle,$$

$\forall h \in H$.

Logo, S é uma isometria. ∎

Definição A.1.6 *Um operador T em um espaço de Hilbert H é uma isometria parcial se T restrito a $ker(T)^\perp$ é uma isometria.*

Proposição A.1.7 *Seja T um operador linear e limitado em um espaço de Hilbert H. Neste caso, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *T é isometria parcial.*
2. *T^*T é uma projeção.*
3. *$TT^*T = T$.*
4. *TT^* é uma projeção.*
5. *$T^*TT^* = T^*$.*

Prova: A prova desta proposição pode ser encontrada em (10).
∎

Definição A.1.8 *Seja A uma C^*-álgebra e $a \in A$. Dizemos que a é uma projeção se $a^2 = a = a^*$.*

Definição A.1.9 *Seja A uma C^*-álgebra. Dizemos que $a \in A$ é uma isometria parcial se $a = aa^*a$. Dizemos que, a^*a é a projeção inicial de a e que aa^* é a projeção final de a.*

Proposição A.1.10 *Sejam $\{P_i : 1 \leq i \leq n\}$ projeções em uma C^*-álgebra A. Então, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i$ é projeção se, e somente se, $P_iP_j = 0$ sempre que $i \neq j$.*

Prova: A prova desta proposição pode ser encontrada em (10).
∎

APÊNDICE B – A C^*-Álgebra Universal

B.1

A C^*-álgebra universal é uma C^*-álgebra gerada por um conjunto qualquer e por uma família de relações, e que possui uma propriedade universal. Neste caso, a propriedade universal é a existência, sobre determinadas circunstâncias, de um único homomorfimo entre C^*-álgebras.

A existência da propriedade universal é uma ferramenta bastante útil, pois permite estender funções entre C^*-álgebras para homomorfismos (e isomorfismos!) e nos permite provar muitos resultados da Teoria de C^*-álgebras.

Neste trabalho, praticamente todos os resultados seguem do fato de que a C^*-álgebra de um grafo é uma C^*-álgebra universal.

Nesta seção, vamos fazer um resumo sobre a construção da álgebra universal e apresentar alguns exemplos. Este resumo está baseado nas dissertações (8) e (1).

Seja G um conjunto qualquer. Vamos chamar G de conjunto dos geradores.

Defina $G^* = \{g^* : g \in G\}$.

Note que, "$*$" ainda não tem nenhum significado matemático.

Vamos "enxergar" os elementos de G e G^* como "letras de um alfabeto". Então podemos pensar nas palavras finitas escritas com essas "letras". Denote o conjunto de todas essas palavras por F_G, ou seja,

$$F_G := \{r_1 r_2 \cdots r_k : r_i \in G \cup G^* \text{ e } k < \infty\}.$$

Por exemplo, se $G = \{a, b, c\}$ então $G^* = \{a^*, b^*, c^*\}$. Então,

$$abc,\ ab^*ba,\ c^*ab,\ aabc^*cba\ ,\ ccca^*bba$$

são palavras que pertencem a F_G.

Note que, F_G é um conjunto com infinitos elementos.

Vamos agora definir duas operações no conjunto F_G: a operação involução e a operação produto. Defina a operação produto por:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & F_G \times F_G & \longrightarrow & F_G \\ & (r_1 r_2 \cdots r_n, s_1 s_2 \cdots s_m) & \longmapsto & r_1 r_2 \cdots r_n s_1 s_2 \cdots s_m \end{array}$$

Em palavras, a operação produto é a concatenação de palavras.

Defina a operação involução por:

$$\begin{array}{rccc} * : & F_G & \longrightarrow & F_G \\ & r_1 r_2 \cdots r_n & \longmapsto & r_n^* r_{n-1}^* \cdots r_2^* r_1^* \end{array}$$

em que,

$$r_i^* = \begin{cases} g_i, & \text{se} \quad r_i = g_i^* \in G^*, \\ g_i^*, & \text{se} \quad r_i = g_i \in G. \end{cases}$$

Vamos considerar combinações lineares formais finitas com escalares complexas e elementos de F_G. Defina,

$$B_{F_G} := span \left\{ \sum_{\lambda \in \mathbb{C}}^{finita} \lambda r_\lambda : \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } r = r_{1_\lambda} r_{2_\lambda} \cdots r_{n_\lambda} \in F_G \right\}.$$

É fácil verificar que B_{F_G} é um espaço vetorial. Observe que, estamos pensando nas operações de adição e multiplicação por escalar da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} + : & B_{F_G} \times B_{F_G} & \longrightarrow & B_{F_G} \\ & \left(\sum\limits_{\lambda \in \mathbb{C}}^{finita} \lambda r_\lambda, \sum\limits_{\beta \in \mathbb{C}}^{finita} \beta s_\beta \right) & \longmapsto & \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{C}}^{finita} \lambda r_\lambda + \sum\limits_{\beta \in \mathbb{C}}^{finita} \beta s_\beta \end{array}$$

e,

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{C} \times B_{F_G} & \longrightarrow & B_{F_G} \\ & \left(\beta, \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{C}}^{finita} \lambda r_\lambda \right) & \longmapsto & \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{C}}^{finita} (\beta\lambda) r_\lambda \end{array}$$

Estamos na seguinte situação: a partir de um conjunto qualquer G, definimos dois outros conjuntos, G^* e F_G, e quatro operações. Com tudo isso, foi possível construir um espaço vetorial, que chamamos de B_{F_G}.

Como o nosso objetivo é definir uma C^*-álgebra, vamos definir mais duas operações em B_{F_G} de modo a torná-lo uma $*$-álgebra.

Defina,

$$\begin{array}{rccc} * : & B_{F_G} & \longrightarrow & B_{F_G} \\ & \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{C}}^{finita} \lambda r_\lambda & \longmapsto & \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{C}}^{finita} \overline{\lambda} r_\lambda^* \end{array}$$

onde $\overline{\lambda}$ é o conjugado do número complexo λ.

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & B_{F_G} \times B_{F_G} & \longrightarrow & B_{F_G} \\ & \left(\sum\limits_{\lambda \in \mathbb{C}}^{finita} \lambda r_\lambda, \sum\limits_{\beta \in \mathbb{C}}^{finita} \beta s_\beta \right) & \longmapsto & \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{C}}^{finita} \sum\limits_{\beta \in \mathbb{C}}^{finita} (\lambda\beta) r_\lambda \cdot s_\beta \end{array}$$

Estamos usando a mesma notação "$\cdot$" para indicar a operação produto em diferentes níveis da nossa construção, com a certeza que isso não causará confusão ao leitor. Por exemplo, na definição acima, a notação "$\cdot$" da esquerda representa o produto da álgebra e "$\cdot$" da direita representa a concatenação de palavras em B_{F_G}.

Com as operações acima é fácil ver B_{F_G} é uma $*$-álgebra.

Nosso objetivo e definir uma C^*-álgebra a partir do conjunto G. O que conseguimos fazer até aqui foi definir uma $*$-álgebra, que chamamos de B_{F_G}. Para obtermos a C^*-álgebra precisamos definir uma norma que seja uma C^*-norma.

A ideia para definir a C^*-norma de um elemento $a \in B_{F_G}$ é considerar uma família especial de funções (que denominaremos de representações) e tomar o supremo sobre as normas dessa família avaliada em a.

Proposição B.1.1 *Sejam G um conjunto de geradores, D uma C^*-álgebra e $\rho : G \longrightarrow D$ uma função. Neste caso, existe uma função $\widetilde{\rho} : B_{F_G} \longrightarrow D$, extensão linear de ρ para B_{F_G}.*

Prova: (Essa demonstração foi retirada de (8).

Defina $\widetilde{\rho}$ da seguinte forma:

Para todo $g \in G$, defina $\widetilde{\rho}(g) = \rho(g)$.

Para todo $g \in G^*$, defina $\widetilde{\rho}(g) = (\rho(g))^*$, onde a operação $*$ do lado direta da igualdade é a involução da C^*-álgebra D.

Para todo $r_1 r_2 \cdots r_n \in F_G$, defina

$$\widetilde{\rho}(r_1 r_2 \cdots r_n) = \rho(r_1) \cdot \rho(r_2) \cdots \rho(r_n),$$

onde a operação "$\cdot$" do lado direito da igualdade é o produto da C^*-álgebra D.

Para cada $x = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}}^{finita} \lambda r_\lambda \in B_{F_G}$, defina

$$\widetilde{\rho}\left(\sum_{\lambda \in \mathbb{C}}^{finita} \lambda r_\lambda \right) = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}}^{finita} \lambda \rho(r_\lambda).$$

Com $\widetilde{\rho}$ assim definida, fica fácil verificar que $\widetilde{\rho}$ é extenção linear de ρ para B_{F_G}.

$\blacksquare$

Observação B.1.2 *A aplicação* $\boldsymbol{\rho} : \boldsymbol{B_{F_G}} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ *também satisfaz:*

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{xy}) = \widetilde{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{x})\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{y}) \quad e \quad \widetilde{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{x}^*) = (\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{x}))^*$$

$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B_{F_G}}$.

A Proposição B.1.1 é muito importante pois nos permite estenter uma função qualquer entre o conjunto $\boldsymbol{G}$ e a $\boldsymbol{C^*}$-álgebra $\boldsymbol{D}$ para um homomorfismo entre as $*$-álgebras $\boldsymbol{B_{F_G}}$ e $\boldsymbol{D}$.

Definição B.1.3 *Uma relação é um par* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) \in \boldsymbol{B_{F_G}} \times \mathbb{R}^+$. *Vamos denotar por* $\boldsymbol{R}$ *o conjunto de todas as relações.*

Definição B.1.4 *Sejam* $\boldsymbol{G}$ *um conjunto,* $\boldsymbol{R}$ *um conjunto de relações,* $\boldsymbol{D}$ *uma* $\boldsymbol{C^*}$*-álgebra e* $\boldsymbol{\rho} : \boldsymbol{G} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ *uma função.*

Dizemos que $\boldsymbol{\rho}$ *é uma representação de* $\boldsymbol{G}$ *que satisfaz* $\boldsymbol{R}$ *se, para quaisquer* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) \in \boldsymbol{R}$ *tivermos que,*

$$||\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{x})||_{\boldsymbol{D}} \leq \boldsymbol{\eta},$$

em que $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}$ *é a extensão linear de* $\boldsymbol{\rho}$ *definida na Proposição B.1.1.*

Vamos escrever $\boldsymbol{\rho}$ *satisfaz* $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R})$ *para dizermos que* $\boldsymbol{\rho}$ *é uma representação de* $\boldsymbol{G}$ *que satisfaz* $\boldsymbol{R}$.

Exemplo B.1.5 *Seja* $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{a}\}$ *e* $\boldsymbol{R} = \{(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{0})\}$.

Vamos definir uma representação que satisfaz $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R})$.

Fixe $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$. *Defina a seguinte função,*

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\rho}\text{:} & \boldsymbol{G} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \boldsymbol{a} & \longmapsto & \boldsymbol{\lambda} \end{array}$$

Vamos mostrar que $\boldsymbol{\rho}$ *é uma representação que satisfaz* $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R})$. *Temos que,*

$$|\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^*)| = |\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{a}^*)| = |\boldsymbol{\lambda} - \overline{\boldsymbol{\lambda}}| = |\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}| = \boldsymbol{0}.$$

Como $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}$ *é um homomorfismo e* $|\cdot|$ *é uma norma, é claro que,* $|\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)| = \boldsymbol{0}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B_{F_G}}$.

Portanto, $\boldsymbol{\rho}$ *é uma representação que satisfaz* $\{\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R}\}$.

Exemplo B.1.6 *Seja* $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}\}$ *e,*

$$\boldsymbol{R} = \{(\boldsymbol{ue} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{eu} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{ee} - \boldsymbol{e}, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^*, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u} - \boldsymbol{e}, \boldsymbol{0})\}.$$

Defina,

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\rho}: & \boldsymbol{G} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \boldsymbol{u} & \longmapsto & \boldsymbol{i} \\ & \boldsymbol{e} & \longmapsto & \mathbf{1} \end{array}$$

Neste caso, $\boldsymbol{\rho}$ é uma representação de $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R})$.

Definição B.1.7 *Sejam $\boldsymbol{G}$ um conjunto de geradores e $\boldsymbol{R}$ um conjunto de relações.*

Dizemos que o par $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R})$ é admissível se, para todo $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G}$, existe uma constante $\boldsymbol{c_g} \in \mathbb{R}$ tal que, para toda representação $\boldsymbol{\rho}$ que satisfaz $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R})$, tivermos que,

$$\|\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{g})\| \leq \boldsymbol{c_g}.$$

Exemplo B.1.8 *Sejam $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{x}\}$ e $\boldsymbol{R} = \{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*, \mathbf{0}), (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^2, \mathbf{0})\}$. Vamos verificar que o par $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R})$ é admissível.*

Seja $\boldsymbol{D}$ uma $\boldsymbol{C}^*$-álgebra e $\boldsymbol{\rho} : \boldsymbol{G} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ uma representação que satisfaz $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R})$.

Vamos mostrar que existe uma constante $\boldsymbol{c_x} \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x})\| \leq \boldsymbol{c_x}$.

Como $\boldsymbol{\rho}$ satisfaz $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R})$ temos que,

$$\|\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)\| = \mathbf{0} \text{ e } \|\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^2)\| = \mathbf{0}.$$

Segue que, $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x})^* = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x})^2$, ou seja, $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x})$ é uma projeção na $\boldsymbol{C}^*$-álgebra $\boldsymbol{D}$. Logo, $\|\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x})\| = \mathbf{0}$ ou $\|\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x})\| = \mathbf{1}$.

Portanto, tomando $\boldsymbol{c_x} = \mathbf{1}$ temos que $\|\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x})\| \leq \mathbf{1}$.

Como $\boldsymbol{\rho}$ é uma representação qualquer, podemos concluir que $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R})$ é admissível.

Nossa intenção é definir a norma em $\boldsymbol{B_{F_G}}$ como sendo o supremo sobre todas as normas das representações que satisfazem $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R})$. Para tanto, precisamos garantir que o supremo exista.

Na próxima proposição, daremos uma condição suficiente para garantir que esse supremo exista.

Proposição B.1.9 *Se $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R})$ é um par admisível então*

$$\{\|\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{x})\| : \boldsymbol{\rho} \text{ é representação de } (\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R}), \widetilde{\boldsymbol{\rho}} \text{ é a extensão linar de } \boldsymbol{\rho} \text{ para } \boldsymbol{B_{F_G}}\}$$

é limitado superiormente.

Prova: Seja $x \in B_{F_G}$, digamos,

$$x = \sum_{i=1}^{n_x} \lambda_i x_i,$$

onde $\forall 1 \leq i \leq n_x$ temos que,

$$x_i = r_1^i r_2^i \cdot r_n^i \in F_G.$$

Seja ρ uma representação que satisfaz (G, R).

Como (G, R) é admissível para cada $r_j^i \in G \cup G^*$ que aparece um alguma palavra r_i, para $1 \leq i \leq n_x$, existe uma constante $c_{r_j^i}$ tal que $\|\rho(r_j^i)\| \leq c_{r_j^i}$.

Segue que,

$$\widetilde{\rho}(x_i) = \|\widetilde{\rho}(r_1^i r_2^i \cdot r_n^i)\| =$$

$$= \|\widetilde{\rho}(r_1^i)\widetilde{\rho}(r_2^i) \cdot \widetilde{\rho}(r_n^i)\| \leq$$

$$\leq \|\widetilde{\rho}(r_1^i)\|\|\widetilde{\rho}(r_2^i)\| \cdots \|\widetilde{\rho}(r_n^i)\| \leq$$

$$\leq c_{r_1^i} c_{r_2^i} \cdot c_{r_n^i} := c_{x_i}.$$

Logo,

$$\|\widetilde{\rho}(x)\| \leq \sum_{i=1}^{n_x} |\lambda_i| \|\widetilde{\rho}(x_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n_x} |\lambda_i| c_{x_i} := k_x$$

Como a constate k_x não depende da escolha da representação ρ podemos concluir que,

$$\{\|\widetilde{\rho}(x)\| : \rho \text{ é representação de } (G, R)\}$$

é limitado superiormente por k_x.

■

A Proposição B.1 garante que se o par (G, R) é admissível então existe

$$\sup_{\{\rho:\ \text{é representação de } (G,R)\}} \|\widetilde{\rho}(x)\|.$$

Neste ponto, já temos condições de definir uma semi-norma em

B_{F_G}.

Seja (G, R) um par admissível. Defina,

$$\Delta := \left\{ \begin{array}{l} \rho : G \longrightarrow B(H) : \rho \text{ é representação que satisfaz } (G, R), \\ H \text{ é espaço de Hilbert} \end{array} \right\}.$$

Definição B.1.10 *Seja A uma C^*-álgebra. Dizemos que uma aplicação,*

$$\|\cdot\| : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

é uma C^*-seminorma se são verificadas.

1. *$\|\cdot\|$ é uma seminorma.*
2. *$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, $\forall a, b \in A$.*
3. *$\|a^*\| = \|a\|$, $\forall a \in A$.*
4. *$\|a^*a\| = \|a\|^2$, $\forall a \in A$.*

Proposição B.1.11 *A aplicação,*

$$\begin{array}{rccc} |||\cdot|||: & B_{F_G} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \sup\limits_{\rho \in \Delta} \|\widetilde{\rho}(x)\| \end{array}$$

é uma C^*-seminorma em B_{F_G}.

Observe que a aplicação $|||\cdot|||$ está bem definida, pois já mostramos que $\sup\limits_{\rho \in \Delta} \|\widetilde{\rho}(x)\| < \infty$.

Prova: A demonstração segue imediatamente dos fatos de $\widetilde{\rho}$ ser um homomorfismo entre C^*-álgebras e $\|\cdot\|$ ser uma C^*-norma em $B(H)$.

■

Não podemos garantir que $|||\cdot|||$ é uma norma, pois se $|||x||| = 0$ não temos nenhuma garantia de que $x = 0$ (pois podemos ter $\rho(x) = 0$ para todas as representações).

A única coisa que falta para tornar $|||\cdot|||$ uma C^*-norma é garantir que se $|||x||| = 0$ então $x = 0$. Então, podemos organizar os nossos conjuntos de modo a forçar que isso aconteça.

Defina,

$$\mathcal{N} := \{x \in B_{F_G} : |||x||| = 0\}.$$

É fácil perceber que $\mathcal{N}$ é um ideal autoadjunto em B_{F_G}. Então $B_{F_G}/\mathcal{N}$ é uma $*$-álgebra.

Portanto, a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & B_{F_G}/\mathcal{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x+\mathcal{N} & \longmapsto & |||x||| \end{array}$$

é uma C^*-norma em $B_{F_G}/\mathcal{N}$.

Observe que, a aplicação $\|\cdot\|$ definida acima está bem definida. De fato, de $a+\mathcal{N} = a'+\mathcal{N}$ então $a-a' \in \mathcal{N}$, e assim $|||a-a'||| = 0$. Logo,

$$\big|\|a+\mathcal{N}\| - \|a'+\mathcal{N}\|\big| = \big||||a||| - |||a'|||\big| \leq |||a-a'||| = 0.$$

Portanto, $\|\cdot\|$ está bem definida.

Definição B.1.12 *A C^*-álgebra universal gerada por G e as relações R, denotada por $C^*(G,R)$ é o completamento de $B_{F_G}/\mathcal{N}$ na norma $\|\cdot\|$, ou seja,*

$$C^*(G,R) := \overline{B_{F_G}/\mathcal{N}}^{\|\cdot\|}$$

Observação B.1.13 *A forma como a norma foi definida na C^*-álgebra universal é muito importante. Por exemplo, suponha que quiséssemos mostrar que determinado elemento da C^*-álgebra universal é não nulo. Uma possível saída é definir uma representação que não se anule nesse elemento. Desta forma, podemos garantir que o supremo sobre as normas de todas as representações aplicadas nesse elemento é maior do que 0, e portanto, a norma do elemento é não nula.*

Essa ideia de definir uma representação não nula será utilizada neste trabalho (por exemplo, veja a Proposição 1.5.7).

Até aqui, conseguimos construir uma C^*-álgebra a partir de um conjunto qualquer. Falta mostrar que essa álgebra satisfaz uma propriedade universal.

Teorema B.1.14 - *A Propriedade Universal*

Sejam $i : G \longrightarrow C^*(G,R)$ aplicação canônica, e $\rho : G \longrightarrow B(H)$ uma representação de (G,R).

Neste caso, existe um único homomorfismo $\pi : C^*(G,R) \longrightarrow B(H)$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "i"'] & & B(H) \\ & C^*(G,R) \arrow[ur, dotted, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

Prova: A prova deste teorema pode ser encontrada em (8). ■

No próximo teorema, vamos mostrar que a propriedade universal continua valendo se substituímos $B(H)$ por qualquer outra C^*-álgebra A.

Teorema B.1.15 *Sejam A uma C^*-álgebra e $\delta : G \longrightarrow A$ uma representação que satisfaz (G, R).*

Neste caso, existe um único homomorfismo $\pi : C^*(G, R) \longrightarrow A$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\ & C^*(G,R) \arrow[ur, dotted, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

Prova: A prova deste teorema pode ser encontrada em (8). ■

Teorema B.1.16 - ***Unicidade da C^*-álgebra universal.***

Seja $\mathcal{C}$ uma C^*-álgebra e $\xi : G \longrightarrow \mathcal{C}$ uma representação que satisfaz (G, R).

Se para qualquer representação $\rho : G \longrightarrow A$ existe um único homomorfismo $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow A$ tal que o diagrama abaixo comuta,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\xi"'] & & A \\ & \mathcal{C} \arrow[ur, dotted, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

então $C^*(G, R) \cong \mathcal{C}$.

Prova: A prova deste teorema pode ser encontrada em (8). ■

Com esses três teoremas, podemos concluir que dado um conjunto G qualquer, podemos considerar uma família de relações R nesse conjunto de forma que, se o par (G, R) for admissível, é possivel definir uma C^*-álgebra gerada por G que satisfaz as condições R, que denominamos de $C^*(G, R)$. Além disso, essa C^*-álgebra satisfaz uma propriedade universal e é única, a menos de isomorfismos.

A seguir apresentaremos um exemplo de C^*-álgebra universal.

Vamos considerar um conjunto G com dois elementos e uma família de relações que torna um desses elementos uma unidade e o outro um elemento unitário. Vamos mostrar que a C^*-álgebra universal gerada é isomorfa a $C(\mathbb{S}^1)$.

Exemplo B.1.17 *Considere:*
$G = \{e, u\}$.

$$R = \left\{ \begin{array}{l} (u^*u - uu^*, 0), (u^*u - e, 0), (uu^* - e, 0), \\ (eu - u, 0), (ue - u, 0), (ee - e, 0), (e^* - e, 0) \end{array} \right\}.$$

Vamos verificar que o par (G, R) é admissível.
Seja $\rho : G \longrightarrow A$ uma representação de (G, R). Neste caso,

$$\|\widetilde{\rho}(ee - e)\| = 0 \;\Rightarrow\; \widetilde{\rho}(e^2) = \widetilde{\rho}(e),$$

$$\|\widetilde{\rho}(e^* - e)\| = 0 \;\Rightarrow\; \widetilde{\rho}(e^*) = \widetilde{\rho}(e).$$

Logo, $\widetilde{\rho}(e)$ é uma projeção em A e assim, $\|\widetilde{\rho}(e)\| \leq 1$.
Também,

$$\|\widetilde{\rho}(u^*u - e)\| = 0 \;\Rightarrow\; \|\widetilde{\rho}(u^*u)\| = \|\widetilde{\rho}(e)\|.$$

Logo,

$$\|\widetilde{\rho}(u)\|^2 = \|\widetilde{\rho}(u^*u)\| = \|\widetilde{\rho}(e)\| \leq 1.$$

Portanto, tomando $c_u = 1 = c_e$ podemos concluir que o par (G, R) é admissível.

Portanto, existe a C^*-álgebra universal. Vamos denota-lá por $C^*(\{e, u\})$.

Note que, u é um elemento normal da $C^*(\{e, u\})$.

Portanto, existe um isomorfismo isométrico (veja Teorema **2.1.13**,*(9)),*

$$\Psi : C(\sigma(u)) \longrightarrow C^*(\{e, u\}).$$

Vamos mostrar que $\sigma(u) = \mathbb{S}^1$.
Como u *é um elemento unitário então* $\sigma(u) \subseteq \mathbb{S}^1$.
Fixe $\lambda \in \mathbb{S}^1$. *Vamos mostrar que* $\lambda \in \sigma(u)$.
Defina,

$$\begin{array}{rccc} f_\lambda\colon & G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & e & \longmapsto & 1 \\ & u & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

É fácil ver que f_λ *é uma representação que satisfaz* (G, R).
Portanto, da propriedade universal da $C^*(e, u)$ *existe um homomorfismo* $\pi_\lambda : C^*(\{e, u\}) \longrightarrow \mathbb{C}$.
Segue que,

$$\pi_\lambda(u - \lambda e) = \lambda - \lambda 1 = 0.$$

Afirmação 1 *O elemento* $u - \lambda e$ *não é um elemento inversível da* $C^*(\{e, u\})$.

Prova: *Suponha por absurdo que* $u - \lambda e$ *é inversível. Então, existe um elemento* $x \in C^*(\{e, u\})$ *tal que,*

$$(u - \lambda e)x = x(u - \lambda e) = e.$$

Como π_λ *é um homomorfismo temos que,*

$$1 = \pi_\lambda(e) = \pi_\lambda((u - \lambda e)x) = \pi_\lambda(u - \lambda e)\pi_\lambda(x) = (\lambda - \lambda 1)\pi_\lambda(x) = 0.$$

Absurdo.
Logo, $u - \lambda e$ *não é um elemento inversível da* $C^*(\{e, u\})$.

$\square$

Como $u - \lambda e \notin inv(C^*(\{e, u\}))$ *temos que* $\lambda \in \sigma(u)$.
Logo, $\sigma(u) = \mathbb{S}^1$ *e assim,*

$$C^*(\{e, u\}) \cong C(\mathbb{S}^1).$$

APÊNDICE C – Álgebras de Matrizes

C.1

Neste seção vamos estudar alguns resultados sobre as C^*-álgebras geradas por um subconjunto S (finito ou, infinito e enumerável) de uma C^*-álgebra, que satisfaz propriedades semelhantes às propriedades da base canônica do espaço das matrizes, ou seja,

$$E^*_{i,j} = E_{j,i} \quad \text{e} \quad E_{i,j}E_{n,m} = \begin{cases} E_{i,m}, & \text{se} \quad j = n, \\ 0, & \text{se} \quad j \neq n. \end{cases}$$

Na literatura, as C^*-álgebras que satisfazem essa propriedades são denominadas de álgebras de matrizes.

Note que, quando o conjunto de geradores é finito e satisfaz a condição acima, então a C^*-álgebra gerada é o subespaço vetorial gerado. De fato, basta perceber que quando fazemos os produtos sempre obtemos ou 0, ou um elemento que já pertencia ao conjunto dos geradores.

Neste caso, a C^*-álgebra gerada é isomorfa ao espaço das matrizes quadradas de tamanho $\#\{geradores\}$ com entradas complexas.

Quando o conjunto de geradores é infinito e satisfaz a condição acima, a C^*-álgebra gerada é isomorfa ao espaço dos operadores compactos em algum espaço de Hilbert.

Proposição C.1.1 *Seja* $S = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N\}$ *um conjunto de índices.*

Seja $\{b_{\mu_i\mu_j}\}_{1\leq i,j\leq N}$ *uma família não nula em uma* C^**-álgebra* B *que satisfaz:*

$$(b_{\mu_i\mu_j})^* = b_{\mu_j\mu_i} \ \textit{e} \ b_{\mu_i\mu_n}b_{\mu_m\mu_j} = \begin{cases} b_{\mu_i,\mu_j}, & \textit{se} \quad n = m, \\ 0, & \textit{se} \quad n \neq m. \end{cases} \tag{C.1}$$

Seja $B_N = span\{b_{\mu_i\mu_j} : 1 \leq i, j \leq N\}$.

Neste caso, $B_N \cong M_N(\mathbb{C})$.

Prova:

Afirmação 1 *Para todo* $1 \leq i, j \leq N$, $b_{\mu_i\mu_j} \neq 0$.

Prova: Como $\{b_{\mu_i\mu_j}\}_{i,j\in S}$ é uma família não nula, existe $i_0, j_0 \in S$ tal que $b_{\mu_{i_0}\mu_{j_0}} \neq 0$.

Suponha por absurdo que existe $k, l \in S$ tal que $b_{\mu_k\mu_l} = 0$. Então,

$$b_{\mu_{i_0}\mu_{j_0}} = b_{\mu_{i_0}\mu_k}b_{\mu_k\mu_l}b_{\mu_l\mu_{j_0}} = 0,$$

o que é um absurdo.

Portanto, $\boldsymbol{b_{\mu_i\mu_j} \neq 0}$, $\forall \boldsymbol{1 \leq i, j \leq N}$.

□

Vamos mostrar que $\boldsymbol{\{b_{\mu_i\mu_j} : 1 \leq i, j \leq N\}}$ é linearmente independente.

Sejam $\boldsymbol{\{\lambda_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq N}} \subset \mathbb{C}$ tal que,

$$\boldsymbol{\sum_{i,j=1}^{N} \lambda_{i,j} b_{\mu_i\mu_j} = 0.}$$

Segue que,

$$\boldsymbol{0 = \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_{i,j} b_{\mu_1\mu_1} b_{\mu_i\mu_j}} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{0 = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{1,j} b_{\mu_1\mu_j}} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{0 = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{1,j} b_{\mu_1\mu_j} b_{\mu_1\mu_1}} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{0 = \lambda_{1,1} b_{\mu_1\mu_1}.}$$

Como $\boldsymbol{b_{\mu_1\mu_1} \neq 0}$ temos que, $\boldsymbol{\lambda_{1,1} = 0}$.

Analogamente $\boldsymbol{\lambda_{i,j} = 0}$, $\forall \boldsymbol{1 \leq i, j \leq N}$.

Portanto, $\boldsymbol{\{b_{\mu_i\mu_j} :} \forall \boldsymbol{1 \leq i, j \leq N}$ é linearmente independente.

Defina,

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\psi}: & \boldsymbol{B_N} & \longrightarrow & \boldsymbol{M_N}(\mathbb{C}) \\ & \boldsymbol{b_{\mu_i\mu_j}} & \longmapsto & \boldsymbol{E_{i,j}} \end{array}$$

Note que, $\boldsymbol{\psi}$ é um homomorfismo.

Analogamente,

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\phi}: & \boldsymbol{M_N}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \boldsymbol{B_N} \\ & \boldsymbol{E_{i,j}} & \longmapsto & \boldsymbol{b_{\mu_i\mu_j}} \end{array}$$

Note que, $\boldsymbol{\phi}$ é um homomorfismo e $\boldsymbol{\phi = \psi^{-1}}$.

Portanto, $\boldsymbol{B_N} \cong \boldsymbol{M_N}(\mathbb{C})$.

■

Corolário C.1.2 *A $\boldsymbol{C^*}$-álgebra $\boldsymbol{B_N}$ definida na Proposição C.1.1 é simples, ou seja, só possui ideais triviais.*

Prova: Suponha por absurdo que existe um ideal I em B_N não trivial.

Como ψ é um isomorfismo, então $\psi(I)$ é um ideal de $M_N(\mathbb{C})$. Mas $M_N(\mathbb{C})$ é simples, então $\psi(I) = \{0\}$ ou $\psi(I) = M_N(\mathbb{C})$.

Se $\psi(I) = \{0\}$ então $I \subseteq \ker(\psi) = \{0\}$. Absurdo.

Se $\psi(I) = M_N(\mathbb{C})$ então $I = B_N$. Absurdo.

Portanto, B_N é simples.

■

Se o conjunto de geradores é finito então já temos que a C^*-álgebra por ele gerada está bem caracterizada.

Vamos considerar agora um conjunto de geradores infinito, mas enumerável, e tentaremos caracterizar a C^*-álgebra gerada.

Proposição C.1.3 *Seja $S = \{\mu_1, \mu_2, \cdots\}$ um conjunto de índices.*

Seja $\{b_{\mu_i\mu_j}\}_{\mu_i,\mu_j \in S}$ uma família não nula em uma C^*-álgebra B que satisfaz a Eq. C.1.

Seja

$$V := \overline{span}\{b_{\mu_i\mu_j} : \mu_i, \mu_j \in S\}.$$

Neste caso, existe um espaço de Hilbert H tal que $V \cong K(H)$, onde $K(H)$ é o conjunto dos operadores lineares, contínuos e compactos de H.

Prova: Primeiro note que, como $\{b_{\mu_i\mu_j}\}_{i,j\in S}$ é uma família não nula então $b_{\mu_i\mu_j} \neq 0$, $\forall i, j \in S$.

Defina $H := l^2(S)$. Note que, H é um espaço de Hilbert.

Seja $\{h_{\mu_1}, h_{\mu_2}, \cdots\}$ a base canônica de $H = l^2(S)$.

Defina,

$$\begin{array}{rccc} L_{\mu_i\mu_j}: & H & \longrightarrow & H \\ & h & \longmapsto & h_{\mu_i}\langle h, h_{\mu_j}\rangle. \end{array}$$

É facil ver que $L_{\mu_i\mu_j} \in B(H)$, $\forall i, j \in S$. Além disso, esses operadores têm posto 1. Portanto,

$$\{L_{\mu_i\mu_j} : i, j \in S\} \subseteq K(l^2(S)).$$

Temos que,

$$L_{\mu_i\mu_j}L_{\mu_n\mu_m}(h) = L_{\mu_i\mu_j}(h_{\mu_n}\langle h, h_{\mu_m}\rangle) =$$

$$= h_{\mu_i}\langle h_{\mu_n}(\langle h, h_{\mu_m}\rangle), h_{\mu_j}\rangle =$$

$$= h_{\mu_i}(\langle h, h_{\mu_m}\rangle)\langle h_{\mu_n}, h_{\mu_j}\rangle =$$

$$= \begin{cases} h_{\mu_i}\langle h, h_{\mu_m}\rangle, & \text{se} \quad n = j, \\ 0, & \text{se} \quad n \neq j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} L_{\mu_i\mu_m}(h), & \text{se} \quad n = j, \\ 0, & \text{se} \quad n \neq j. \end{cases}$$

Segue que, o conjunto $\{L_{\mu_i\mu_m} : \mu_i, \mu_j \in S\}$ satisfaz a propriedade C.1.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, defina a C^*-álgebra,

$$B_N := span\{L_{\mu_i\mu_j} : \mu_i, \mu_j \in S \ \text{ e } \ 1 \leq i, j \leq N\}.$$

Pelo corolário anterior, B_N é simples.
Para cada $N \in \mathbb{N}$ defina,

$$\begin{aligned} \psi_N\colon \quad B_N &\longrightarrow V \\ L_{\mu_i\mu_j} &\longmapsto b_{\mu_i\mu_j} \end{aligned}$$

Note que, ψ_N é não nula. Logo, $\ker(\psi_N) \neq B_N$. Como B_N é simples, podemos concluir que ψ_N é injetiva, e portanto, isométrica.

Observe que, $\forall N \in \mathbb{N}$ temos que ψ_{N+1} restrita a B_N é igual a ψ_N.

Defina,

$$\begin{aligned} \psi\colon \quad \bigcup_{N\in\mathbb{N}} B_N &\longrightarrow V \\ b &\longmapsto \psi_N(b), \end{aligned}$$

onde N é algum número natural tal que $b \in B_N$.

Como ψ_{N+1} restrita a B_N é igual a ψ_N então ψ está bem definida.

Como para cada $N \in \mathbb{N}$, ψ_n é injetiva e $B_N \subseteq B_{N+1}$, temos que, ψ é injetiva e portanto, isométrica na $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} B_N$.

Segue que podemos estender ψ para $\overline{\bigcup_{N\in\mathbb{N}} B_N}$ isométricamente.

Portanto,

$$\psi\colon \quad \overline{\bigcup_{N\in\mathbb{N}} B_N} \longrightarrow V$$

é injetiva.

Claramente, ψ é sobrejetiva. Portanto, ψ é um isomorfismo.

Analogamente ao que vimos no Exemplo 3.3.5, temos que

$$K(l^2(\mathbb{S})) = \overline{span}\{L_{\mu_i\mu_j} : i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Portanto,

$$K(l^2(\mathbb{S})) \cong V.$$

■

A prova do Proposição C.1.3 nos fornece duas informações relevantes. A primeira delas é que, se existir um elemento não nulo na família de geradores, então todos são não nulos. A segunda é que a C^*álgebra gerada é isomorfa a $K(l^2(S))$, onde S é o conjunto de índices do conjunto dos geradores.

Proposição C.1.4 *Seja B uma C^*-álgebra e $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de C^*-subálgebras de B que satisfazem: $B_nB_m = 0$, $\forall n \neq m$. Neste caso, existe um isomorfismo entre $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} B_n$ e $\overline{span}\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Prova: A prova desta proposição pode ser encontrada em (10).

■

REFERÊNCIAS

1 BOAVA, G. **Caracterizações da C^*-álgebra gerada por uma compressão aplicadas a cristais e quasicristais**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis: maio 2007.

2 CUNTZ, J.; KRIEGER, W. **A class of C^*-algebras and topological Markov chains**. Invent Math, Alemanha, n.,p. 528-530, 1980.

3 ENOMOTO, M.; WATATANI, Y. **A graph theory for C^*-algebras**. Math Japon, Japão, n.,p. 435-442, 1980.

4 GONÇALVES D.; ROYER D. **On the representations of Leavitt path algebras**. Journal of Algebra. n.,p. 259-272, 2011.

5 GONÇALVES D.; ROYER **Unitary equivalence of representations of graph algebras and Branching Systems**. Functional Analysis and Its Applications. n.,p. 117-127, 2011.

6 KREYSZIG, E. **Unitary equivalence of representations of graph algebras and Branching Systems**. Functional Analysis and Its Applications. Vol. 45, No. 2 n.,p. 117-127, 2011.

7 LIMA, E. L. **Curso de análise**. vol.2., Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

8 MATTOS, A. D. **C^*-álgebras geradas por isometrias**. Florianópolis: Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis: abril 2007.

9 MURPHY, G. J. **C^*-algebras and operator theory**. New York: John Wiley, 1989.

10 RAEBURN, I. **Graph algebras**. Providence: American Mathematical Society, 2004.