UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE MATEMÁTICA: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JHULIANE LISBOA PINTO GUILHERME

O admirável Teorema de Pitágoras

Florianópolis - SC
Fevereiro - 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE MATEMÁTICA: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JHULIANE LISBOA PINTO GUILHERME

O admirável Teorema de Pitágoras

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Antonio Vladimir Martins

Florianópolis - SC
Fevereiro - 2006

Resumo

Este trabalho tem como objetivo mostrar a grande variedade de assuntos (na matemática) nos quais o teorema de pitágoras é importante. Para isto estudaremos algumas de suas aplicações no cálculo, na trigonometria, na geometria e na teoria de numeros.

Sumário

Introdução **3**

1 Demonstrações do Teorema de Pitágoras **4**

1.1 A Demonstração do Presidente 4

1.2 Demonstração de da Vinci 6

2 Teorema de Pitágoras no Cálculo **15**

2.1 O oscilador não-linear x^3 15

2.2 Volume de uma cunha cilindrica $V = \frac{2R^3 tg\alpha}{3}$ 17

3 Teorema de Pitagoras na Trigonometria **20**

4 Resolvendo Problemas Propostos Utilizando o Teorema de Pitagoras **26**

4.1 Problema I 26

5 Ternos Pitagóricos **34**

5.1 Ternos Pitagóricas 34

5.2 Problemas 36

6 Teorema de Pitot **38**

6.1 Teorema de Pitot 38

7 A recíproca do Teorema de Pitágoras **42**

8 Generalização de Thabit ibn Qurra*(836 - 901)* do Teorema de Pitágoras **45**

9 Lei do paralelogramo **47**

Introdução

Da vida de Pitágoras quase nada pode ser afirmado com certeza, já que ele foi objeto de uma série de relatos tardios e fantasiosos, como referentes a suas viagens e a seus contatos com as culturas orientais. Parece certo, contudo, que o Filósofo e matemático grego nasceu no ano de 571 a.C. ou 570 a.C. na cidade de Samos, fundou uma escola mística e filosófica em Crotona (colônia grega na península itálica), cujos princípios foram determinantes para evolução geral da matemática e da filosofia ocidental cujo principais enfoques eram: harmonia matemática, doutrina dos números e dualismo cósmico essencial.

Figura 1: Pitágoras cunhado em moeda

Os pitagóricos (seguidores da escola Pitagórica) interessavam-se pelo estudo das propriedades dos números - para eles o número (sinônimo de harmonia) era considerado como essência das coisas - é constituído então da soma de pares e ímpares, noções opostas (limitado e ilimitado) respectivamente números pares e ímpares expressando as relações que se encontram em permanente processo de mutação, criando a teoria da harmonia das esferas (o cosmos é regido por relações matemáticas).

A observação dos astros sugeriu-lhes a idéia de que uma ordem domina o universo. Evidencia disso estariam no dia e noite, no alterar-se das estações e no movimento circular e perfeito das estrelas, por isso o mundo poderia ser chamado de cosmos, termo que contem as idéias de ordem, de correspondência e de beleza. Nessa cosmovisão também concluíram que a terra é esférica, estrela entre as estrelas que se movem ao redor de um fogo central. Alguns pitagóricos chegaram até a falar da rotação da Terra sobre seu eixo, mas a maior descoberta de Pitágoras ou de seus discípulos (já que há obscuridades que cerca o pitagorismo devido ao caráter esotérico e secreto da escola) deu-se no domínio da geometria e se refere às relações entre os lados do triângulo retângulo.

O teorema que leva o nome de pitágoras tem o seguinte enunciado: "Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo cujos catetos medem a e b, e a hipotenusa mede c então $a^2 + b^2 = c^2$".

Pitágoras foi expulso de Crotona e passou a morar em Metaponto, onde morreu provavelmente em 497 a. C. ou 496 a.C..

O Teorema de Pitágoras tem este nome porque supõem-se que Pitágoras foi o primeiro a demonstrá-lo. Hoje em dia este teorema tem muitas demonstrações conhecidas, 54 delas podem ser encontradas em [W2].

Apesar da aparente simplicidade deste teorema ele é importante em diversas áreas da matemática, desde o cálculo do comprimento de vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ além de motivar a definição usual de norma em $\mathbb{R}^n$.

Neste trabalho mostramos duas demonstrações curiosas do teorema de Pitágoras, uma dada por Leonardo da Vinci e a outra dada pelo ex-presidente dos Estados Unidos o General James Abram Garfield. Também algumas aplicações no cálculo, na trigonometria, na geometria e em teoria dos números.

Capítulo 1

Demonstrações do Teorema de Pitágoras

1.1 A Demonstração do Presidente

O Presidente dos Estados Unidos General James Abram Garfield (durante apenas 4 meses pois foi assassinado em 1881) apreciava Matemática.

Vários anos antes de tornar-se presidente, por volta de 1857, apresentou uma prova do teorema de Pitágoras baseada na figura 1.1, no New England Journal of Education.

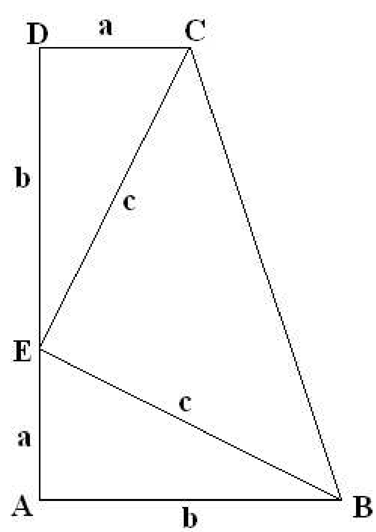


Figura 1.1: trapézio do presidente

Utilizaremos a figura 1.1 apresentada pelo presidente para demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Demonstração 1.1. *Como os triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle DEC$ têm os três lados iguais, então pelo caso LLL eles são congruentes, e portanto:*

$$\angle ABE \cong \angle CED \text{ e } \angle AEB \cong \angle ECD$$

A soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle AEB$ será:

$$\angle AEB + \angle ABE + \angle EAB = 180^o$$

O ângulo $\angle EAB$ é reto por construção e como $\angle ABE \cong \angle CED$ temos:

$$\angle AEB + \angle ABE + 90^o = 180^o \;\Rightarrow\; \angle AEB + \angle ABE = 90^o$$

$$\angle AEB + \angle CED = 90^o \tag{1.1}$$

A soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle CEB$ será:

$$\angle BEC + \angle AEB + \angle CED = 180^o$$

Pela equação 1.1 temos:

$$\angle BEC + 90^o = 180^o \;\Rightarrow\; \angle BEC = 90^o$$

Assim o triângulo $\triangle CEB$ é retângulo.

Portanto as áreas dos triângulos $\triangle AEB$, $\triangle BEC$ e $\triangle CED$ são:

$$A_{\triangle AEB} = \frac{a.b}{2}, \quad A_{\triangle BEC} = \frac{c^2}{2} \quad e \quad A_{\triangle CED} = \frac{a.b}{2}$$

A soma das áres dos triângulos $\triangle AEB$, $\triangle BEC$ e $\triangle CED$ será igual a área do trapézio $ABCD$ com bases a, b e altura $a+b$, então

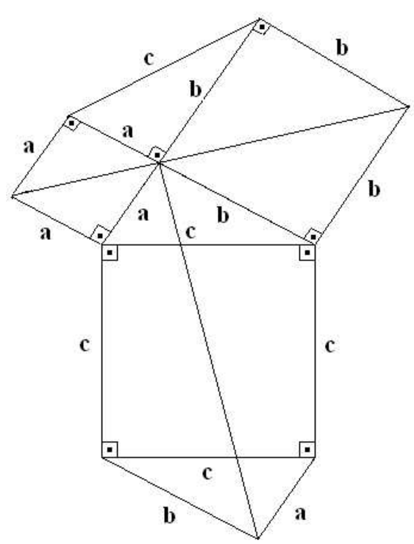
$$\frac{a.b}{2}+\frac{c^2}{2}+\frac{a.b}{2}=\frac{(a+b)}{2}.(a+b)$$

$$a.b+\frac{c^2}{2}=\frac{a^2+2.a.b+b^2}{2}$$
$$a.b+\frac{c^2}{2}=\frac{a^2}{2}+a.b+\frac{b^2}{2}$$
$$\frac{c^2}{2}=\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$$
$$c^2=a^2+b^2$$

■

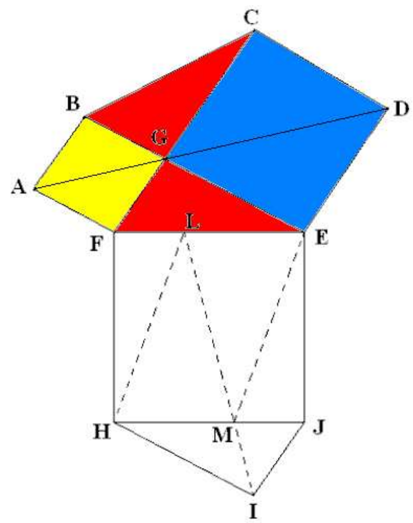
1.2 Demonstração de da Vinci

Leonardo da Vinci *(*1452 - 1519) era um gênio renascentista, com conhecimentos sobre campos muito variados, tinha pensamento ousado e original, sendo um homem tanto de ação quanto de contemplação, ao mesmo tempo artista e engenheiro. É freqüentemente considerado um matemático, mas não fez nenhuma contribuição importante para o desenvolvimento desta ciência. Ele realizou uma prova do teorema de pitágoras baseada na figura abaixo:



Demonstração 1.2. ***I)*** *Vamos provar que os quadriláteros* $\square ABCD$ *e* $\square DEFA$ *são congruentes.*

Seja a figura abaixo:



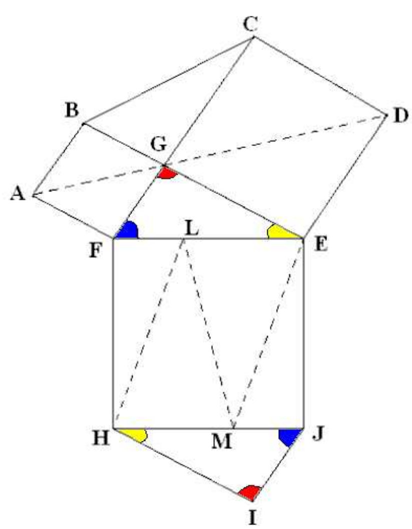
Como os triângulos $\triangle ABG$ *e* $\triangle AFG$ *tem os três lados iguais , então, pelo caso LLL de congruência de triângulos, eles são congruentes.*

Analogamente os triângulos $\triangle BGC$ *e* $\triangle FGE$ *são congruentes e os triângulos* $\triangle GCD$ *e* $\triangle GED$ *são congruentes.*

Assim os quadriláteros $\square ABCD$ *e* $\square DEFA$ *são congruentes.*

II) *Vamos provar que os quadriláteros* $\square GFHI$ *e* $\square IJEG$ *são congruentes.*

Observe a figura abaixo:



Os triângulos $\triangle FGE$ e $\triangle HIJ$ tem os três lados iguais , então pelo caso LLL de congruência de triângulos:

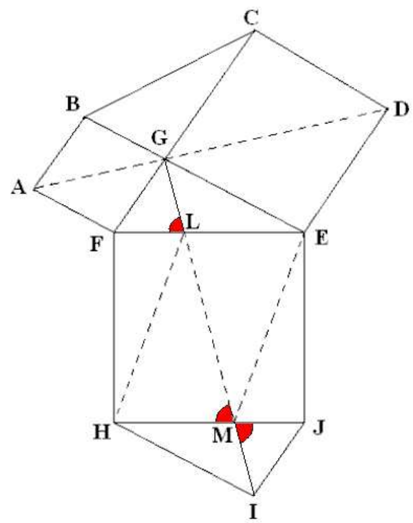
$$\angle FGE \cong \angle JIH \tag{1.2}$$

$$\angle EFG \cong \angle IJH \tag{1.3}$$

$$\angle FEG \cong \angle IHJ \tag{1.4}$$

Queremos agora mostrar que os triângulos $\triangle IJM \cong \triangle FGL$ são congruentes.

Observe a figura abaixo:



Por construção, o quadrilátero $\square FEHJ$ é um quadrado, e portanto $\overline{FE} \parallel \overline{HJ}$, assim, usando o teorema de Tales temos:

$$\angle FLG \cong \angle HML \tag{1.5}$$

Como os ângulos $\angle HML$ e $\angle IMJ$ são opostos pelo vértice, então:

$$\angle IMJ \cong \angle HML \cong \angle FLG \tag{1.6}$$

No triângulo $\triangle JMI$:

$$\angle JMI + \angle IJM + \angle JIM = 180^o \tag{1.7}$$

No triângulo $\triangle FGL$:

$$\angle FLG + \angle GFL + \angle FGL = 180^o \tag{1.8}$$

Usando as equações (1.5) e (1.3), pois os angulos $\angle GFL$ e $\angle EFG$ são os mesmos, bem como os angulos $\angle IJH$ e $\angle IJM$ também são os mesmos.

Logo:

$$\angle JIM = \angle FGL \tag{1.9}$$

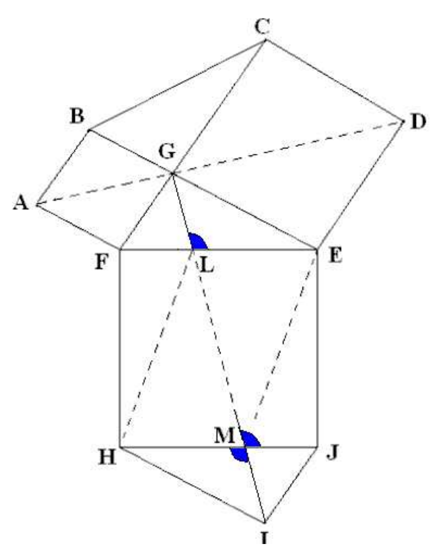
E pela equação (1.6):

$$\angle IMJ \cong \angle FLG \tag{1.10}$$

Das equações (1.9) e (1.10) e como $\overline{IJ} \cong \overline{FG}$, temos que pelo caso ALA de congruência de triângulos $\triangle IJM \cong \triangle FGL$.

Queremos agora mostrar que os triângulos $\triangle HIM \cong \triangle EGL$ são congruentes.

Observe a figura abaixo:



Por construção, o quadrilátero $\square FEHJ$ *é um quadrado, e portanto* $\overline{FE} \parallel \overline{HJ}$, *assim, usando o teorema de Tales temos:*

$$\angle ELG \cong \angle JML \tag{1.11}$$

Como os ângulos $\angle JML$ *e* $\angle HMI$ *são opostos pelo vértice, então*

$$\angle ELG \cong \angle JML \cong \angle HMI \tag{1.12}$$

No triângulo $\triangle HIM$*:*

$$\angle HMI + \angle IHM + \angle HIM = 180^o \tag{1.13}$$

No triângulo $\triangle EGL$*:*

$$\angle ELG + \angle GEL + \angle EGL = 180^o \tag{1.14}$$

Usando as equações (1.4) e (1.12), pois os angulos $\angle GEL$ *e* $\angle GEF$ *são os mesmos, bem como os angulos* $\angle JML$ *e* $\angle HMI$ *também são os mesmos.*

Logo:

$$\angle HIM = \angle EGL \tag{1.15}$$

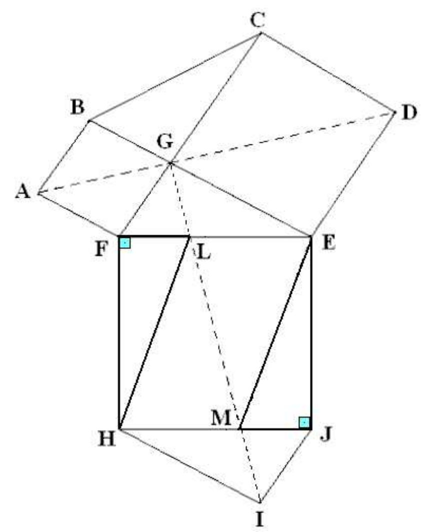
E pela equação (1.12):

$$\angle HMI \cong \angle ELG \tag{1.16}$$

Das equações (1.15) e (1.16) e como $\overline{IH} \cong \overline{GE}$, *temos que pelo caso ALA de congruência de triângulos* $\triangle HIM \cong \triangle EGL$.

Queremos agora mostrar que os triângulos $\triangle HFL \cong \triangle EJM$ *são congruentes.*

Observe a figura abaixo:



Os triângulos $\triangle MIJ$ *e* $\triangle FGL$ *são congruentes, então,* $\overline{FL} \cong \overline{MJ}$.

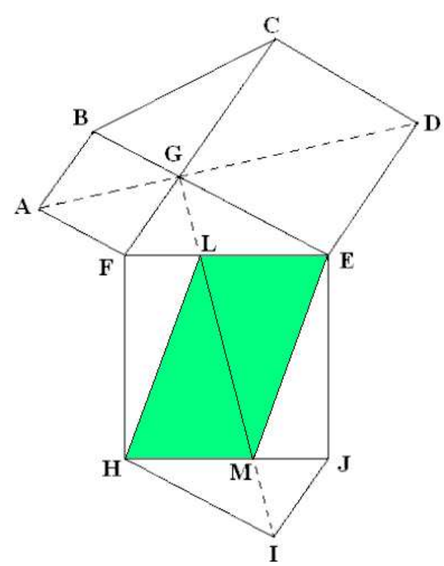
Mas os ângulos $\angle HFL \cong \angle EJM$ *pois são ângulos reto, por construcão.*

Os lados $\overline{FH}$ *e* $\overline{EJ}$ *são congruentes, lados do quadrado* $\square EFHJ$.

Portanto, pelo caso LAL de congruência de triângulos $\triangle HFL \cong \triangle EJM$.

Queremos agora mostrar que os triângulos $\triangle EML \cong \triangle LHM$ *são congruentes.*

Observe a figura abaixo:



Os triângulos $\triangle HMI$ *e* $\triangle ELG$ *são congruentes, então,* $\overline{HM} \cong \overline{EL}$.

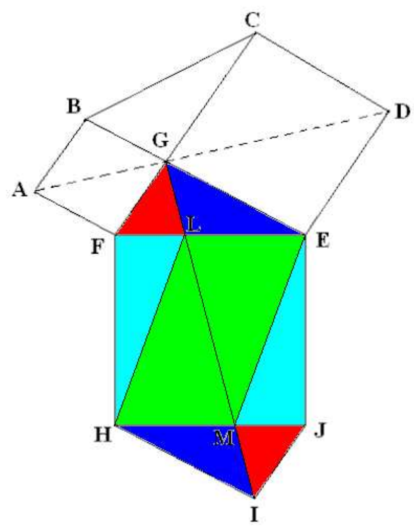
Os triângulos $\triangle HFL$ *e* $\triangle EMJ$ *são congruentes, então,* $\overline{EM} \cong \overline{HL}$.

O lado $\overline{LM}$ é comum aos triângulos $\triangle EML \cong \triangle LHM$.

Portanto, pelo caso LLL de congruencia de triângulos $\triangle EML \cong \triangle LHM$.

Assim como: $\triangle IJM \cong \triangle FGL$, $\triangle HIM \cong \triangle EGL$, $\triangle HFL \cong \triangle EJM$ e $\triangle EML \cong \triangle LHM$.

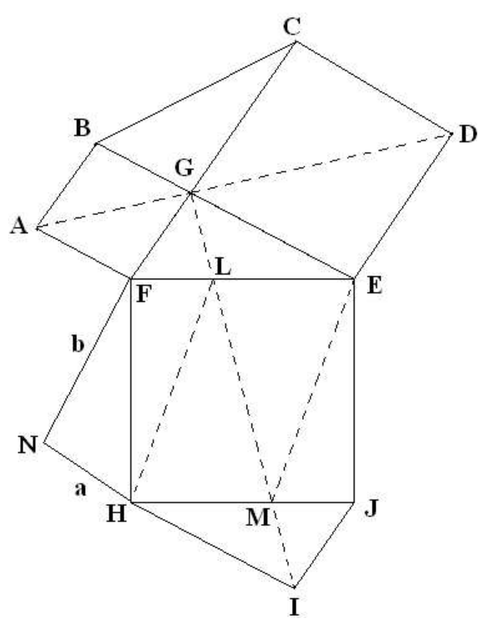
Observe a figura abaixo:



Os quadriláteros $GFHI$ e $IJEG$ são congruentes como queriamos mostrar.

III) *Vamos provar que os quadriláteros $\square AFED$ e $\square GFHI$ são congruentes.*

Construa um triângulo retângulo $\triangle FHN$ de lados a, b e c, como na figura:



Queremos mostrar que $\overline{GF}$ e $\overline{FN}$ são colineares, $\overline{IH}$ e $\overline{NH}$ tambem são colineares.

Por construção, o triângulo $\triangle HFN$ e $\triangle EFG$ são congruentes, então: $\angle HFN \cong \angle GEF$ e $\angle FHN \cong \angle EFG$, mas os ângulos $\angle FNH \cong \angle EGF$ são retos, assim:

$$\angle HFN + \angle FHN + \angle FNH = 180°$$

$$\angle HFN + \angle GFE + 90° = 180°$$

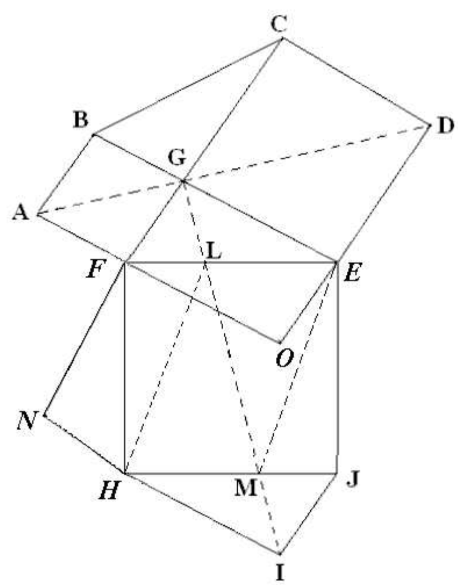
Como o ângulo $\angle HFE$ é reto, pois é um dos ângulos do quadrado, então:

$$\angle HFN + \angle GFE + \angle HFE = 180°$$

E portanto $\overline{GF}$ e $\overline{FN}$ estão na mesma reta.

Análogamente $\overline{HI}$ e $\overline{HN}$ são colineares.(não será provado)

Construa um triângulo retângulo $\triangle FOE$ de lados a, b e c, como na figura:



Queremos mostrar que $\overline{AE}$ e $\overline{EO}$ são colineares, $\overline{DE}$ e $\overline{EO}$ tambem são colineares.

Por construção, o triângulo $\triangle EFO$ e $\triangle EFG$ são congruentes, então: $\angle EFO \cong \angle GEF$ e $\angle FEO \cong \angle EFG$, mas os ângulos $\angle EOF \cong \angle EGF$ são retos, assim:

$$\angle EFO + \angle FEO + \angle EOF = 180°$$

$$\angle EFO + \angle EFG + \angle EOF = 180°$$

Como o ângulo $\angle AFG$ é reto, pois é um dos ângulos do triângulo $\triangle AFG$, então:

$$\angle HFN + \angle GFE + \angle AFG = 180°$$

E portanto $\overline{AF}$ e $\overline{FO}$ estão na mesma reta.

Análogamente $\overline{DE}$ e $\overline{EO}$ são colineares.(não será provado)

Considere os agora os triângulos $\triangle GIN$ e $\triangle ADO$ que são congruentes, pois:

$$\overline{GN} = a + b = \overline{AO}$$

$$\overline{IN} = a + b = \overline{DO}$$

$$\angle EOF \cong \angle ENH \text{ (retos)}$$

Mas os triângulos $\triangle EFG \cong \triangle EHN$, por construção.

Assim os quadriláteros $\square AFED$ e $\square GFHI$ são congruentes.

*Temos $\square ABCD \cong \square AFED$ por **I)**, $\square GFHI \cong \square IJEG$ por **II)**, assim são congruentes entre si, por **III)**.*

Logo os hexagonos $ABCDEF$ e $GFHIJE$ tem áreas iguais.

Portanto:

$$\frac{a.b}{2} + a^2 + b^2 + \frac{a.b}{2} = \frac{a.b}{2} + c^2 + \frac{a.b}{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$\blacksquare$

Capítulo 2

Teorema de Pitágoras no Cálculo

Na física elementar, estuda-se o movimento harmônico simples de uma partícula presa a uma mola com força restauradora $F = -kx$. Nesta seção deduziremos, usando o Teorema de Pitágoras, que um bloco com massa m forçado a se mover em um canal horizontal sobre a ação de uma mola de constante elastica k sofre uma força do tipo $F = -\lambda x^3$. Também calcularemos o volume de uma cunha cilindrica.

2.1 O oscilador não-linear x^3

Seja m a massa do bloco e l_0 o comprimento da mola de constante elastica k (como na figura).

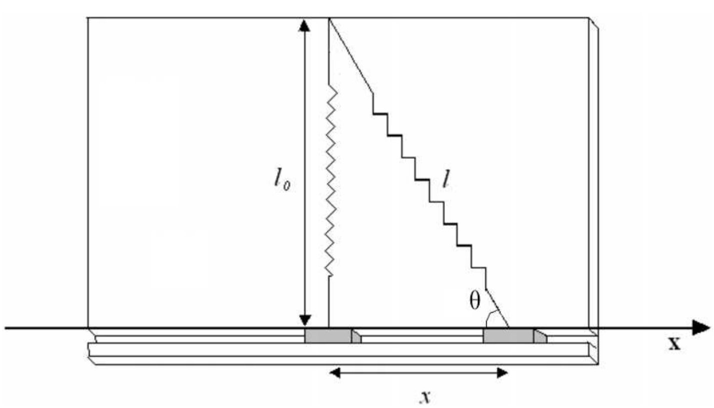


Figura 2.1: Diagrama do oscilador x^3

Demonstração 2.1. *Assuma a força de atrito desconsiderável e que o limite elástico* *da mola nunca é excedido.*

Seja l o comprimento da mola quando a massa m é deslocada uma distância x de sua posição de equilibrio.

Pelo Teorema de Pitágoras (conforme a figura 2.1) $l = \sqrt{x^2 + l_0^2}$.

Pela Lei de Hook, a força que a mola exerce sobre a massa m tem magnitude:

$$F = -k\Delta l = -k\left(l - l_0\right) = -k\left(\sqrt{x^2 + l_0^2} - l_0\right) = -kl_0\left(\sqrt{\frac{x^2}{l_0^2} + 1} - 1\right) \qquad (2.1)$$

Do cálculo Diferencial sabe-se que:

$$(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2}z^2 + ... \qquad \text{quando } p \in \mathbb{R} \text{ e } -1 < z < 1$$

Tomando-se $p = \frac{1}{2}$ e $z = \left(\frac{x}{l_0}\right)$ tem-se

$$\sqrt{1 + \left(\frac{x}{l_0}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l_0}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}\left(\frac{x}{l_0}\right)^4 + ...$$

Usaremos agora a aproximação

$$\sqrt{1 + \left(\frac{x}{l_0}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l_0}\right)^2$$

Assim,

$$F = -kl_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{l_0^2} - 1\right) = -kl_0\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{l_0^2}\right) = -\frac{kx^2}{2l_0} \qquad (2.2)$$

A força responsável pelo movimento da massa m, ao longo do canal, é a componente de F paralela ao canal, isto é, $F_x = -F.cos\theta$, onde

$$cos\theta = \frac{x}{\sqrt{l_0^2 + x^2}} = \frac{x}{l_0.\sqrt{1 + \left(\frac{x}{l_0}\right)^2}} = \frac{x}{l_0}\left[1 + \left(\frac{x}{l_0}\right)^2\right]^{-1/2}$$

$$= \frac{x}{l_0}\left(1 + \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{x}{l_0}\right)^2 + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2} - 1\right)}{2}\left(\frac{x}{l_0}\right)^4 + ...\right) \approx \frac{x}{l_0}$$

Finalmente

$$F_x = -F cos\theta$$

$$F_x \approx -\frac{k}{2l_0}x^2\frac{x}{l_0} = \frac{-kx^3}{2l_0^2}$$

ou

$$F_x \approx -\lambda x^3 \text{ ,}onde\ \frac{k}{2l_0^2} = \lambda$$

■

2.2 Volume de uma cunha cilindrica $V = \frac{2R^3 tg\alpha}{3}$

O sólido que está acima do plano XY, abaixo do plano γ que passa pela origem e faz um angulo α com o plano XY e dentro do cilindro circular de raio R e centro na reta perpendicular ao plano XY que passa pela origem é chamado de cunha cilindrica.

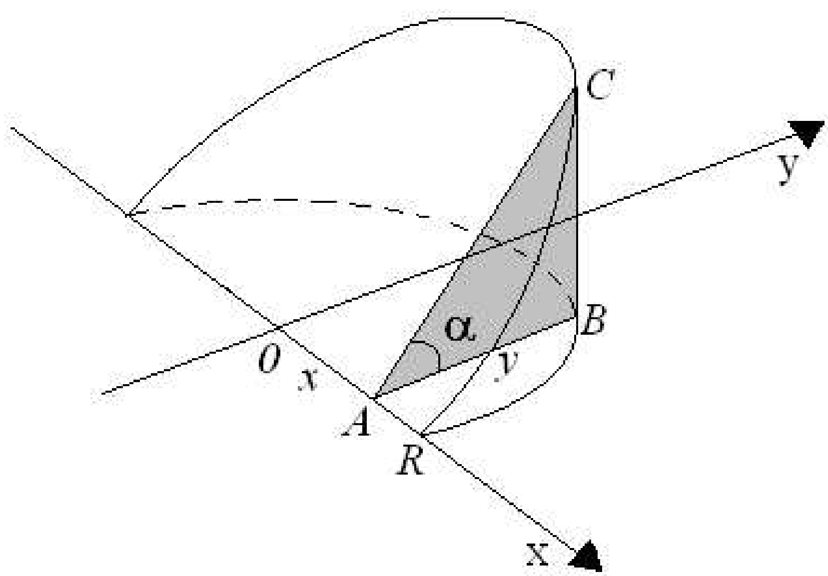


Figura 2.2: Cunha cilindrica

Demonstração 2.2. *Tomamos como eixo OX a reta interseção do plano γ com o plano XY e OY a reta perpendicular ao plano XY e que passa pela origem O.*

A intercseção do plano XY com o cilindro circular é uma circunferência e sua equação será $x^2 + y^2 = R^2$

A fórmula para o volume da cunha é obtida por fatiamento.

A área da seção ABC*, onde* $\overline{AB} \parallel \overline{OY}$ *e* $\overline{BC} \perp \overline{XY}$*, assim* $\triangle ABC$ *é retângulo, e:*

$$A_{\triangle} = \frac{\overline{AB}.\overline{BC}}{2} \tag{2.3}$$

Sendo l *a hipotenusa do* $\triangle ABC$ *e como* $\overline{AB} = y$*,temos:*

$$\cos\alpha = \frac{y}{l} \Rightarrow l = \frac{y}{\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{l} \Rightarrow \overline{BC} = l.\sin\alpha$$

$$\overline{BC} = \frac{y\sin\alpha}{\cos\alpha} = y\tan\alpha$$

Portanto:

$$A_{\triangle} = \frac{y.y\tan\alpha}{2} = \frac{y^2\tan\alpha}{2} \tag{2.4}$$

Considere o $\triangle OBA$ *que é retângulo, com hipotenusa* R *e catetos* x *e* y*.*

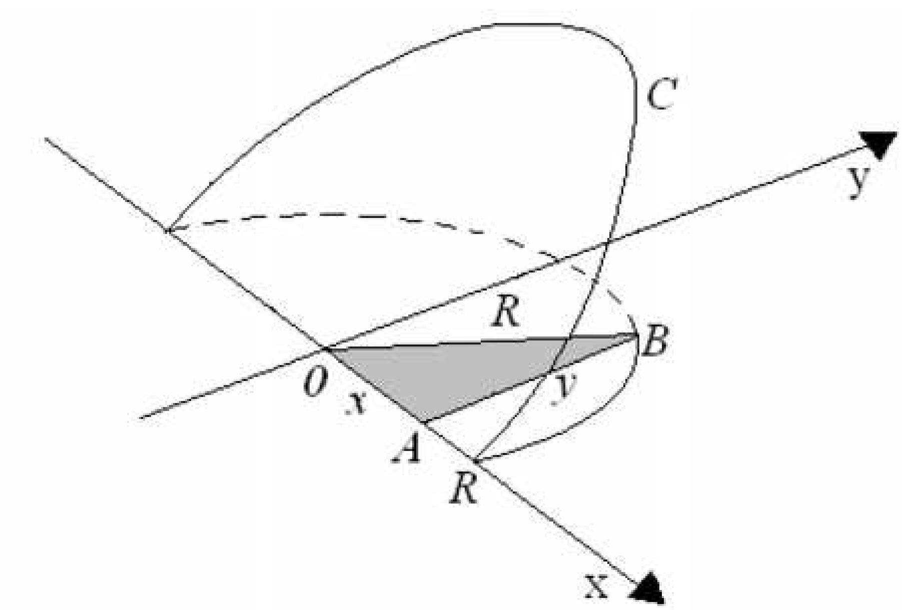


Figura 2.3: Aplicando Pitágoras

Assim pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$R^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = R^2 - x^2 \tag{2.5}$$

Pelo seguinte teorema (Tomas G.B. Cálculo - vol I - 10º edição, 2002 pág 398. Finney-Weir-Geordano)*: O volume de um sólido compreendido entre os planos $x = a$ e $x = b$, cuja área da seção transversal por x é uma função integrável $S(x)$ é o número:*

$$v = \int_a^b S(x)dx$$

Assim o volume da cunha cilindrica será:

$$V = 2\int_0^R \frac{(R^2 - x^2)\tan\alpha}{2}\ dx \tag{2.6}$$

$$V = \tan\alpha \int_0^R (R^2 - x^2)\ dx = \tan\alpha(R^2x - \frac{x^3}{3})|_0^R$$

$$V = \tan\alpha(R^3 - \frac{R^3}{3} - \tan\alpha(0 - 0) = \frac{2R^3\tan\alpha}{3}$$

■

Capítulo 3

Teorema de Pitagoras na Trigonometria

section Lei dos Cossenos

Seja o triangulo $\triangle ABC$ cujos lados opostos aos vértice A B e C medem respectivamente a b e c,onde α é o ângulo entre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$,então:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc.\cos\alpha$$

Demonstração 3.1. ***Caso 1)*** *Lei dos cossenos em um triângulo acutângulo.*

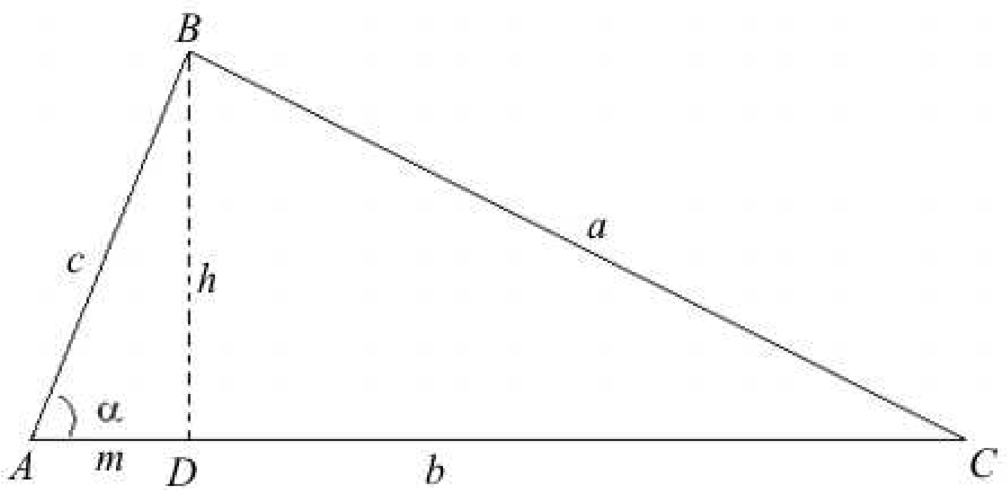


Figura 3.1: triângulo acutângulo

Consideremos os $\triangle DCB$ e $\triangle ADB$ onde h é a altura e m a medida do *segmento $\overline{AD}$, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:*

$$a^2 = h^2 + (b-m)^2 \tag{3.1}$$

$$c^2 = h^2 + m^2 \tag{3.2}$$

Agora isolando h^2 na equação (3.1), obtemos:

$$h^2 = c^2 - m^2$$

Substituindo h^2 na equação (3.1):

$$a^2 = c^2 - m^2 + (b-m)^2 = c^2 - m^2 + (b^2 - 2bm + m^2) =$$
$$= c^2 - m^2 + b^2 - 2bm + m^2 = c^2 + b^2 - 2bm$$

Então:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bm \tag{3.3}$$

$$\cos\alpha = \frac{m}{c} \;\Rightarrow\; m = \cos\alpha . c \tag{3.4}$$

Logo por (3.3) e (3.4):

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc.\cos\alpha$$

Caso2) *Lei dos cossenos em um triangulo obtusângulo.*

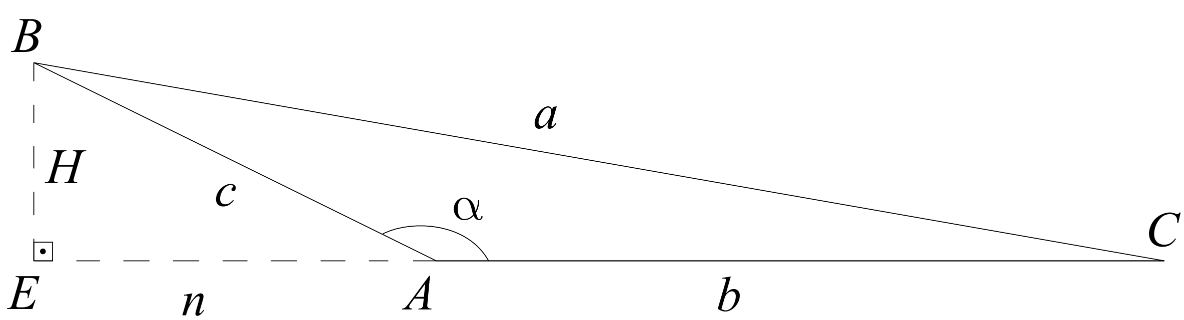


Figura 3.2: triângulo obtusângulo

Consideremos os $\triangle ECB$ *e* $\triangle AEB$ *onde* H *é a altura e* n *a medida do segmento* $\overline{AE}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = H^2 + (b+n)^2 \tag{3.5}$$

$$c^2 = H^2 + n^2 \;\Rightarrow\; H^2 = c^2 - n^2 \tag{3.6}$$

Substituindo H^2 *na equação (3.5):*

$$a^2 = c^2 - n^2 + (b+n)^2 = c^2 - n^2 + (b^2 + 2bn + n^2) =$$

$$= c^2 - n^2 + b^2 + 2bn + n^2 = c^2 + b^2 + 2bn$$

Então:

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2bn \tag{3.7}$$

Temos também que:

$$cos(\pi - \alpha) = \frac{n}{c} \;\;\Rightarrow\;\; n = cos(\pi - \alpha).c$$

Sabemos que $cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$, *então:*

$$n = -cos\alpha.c \tag{3.8}$$

logo por (3.7) e (3.8):

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2bc.(-\cos\alpha)$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc.\cos\alpha$$

$\blacksquare$

Aplicação do Teorema da Lei dos Cosenos: Lemniscata

Um ponto se desloca de tal modo que o produto de suas dinstâncias a $A(-a, 0)$ e $B(a, 0)$ dá sempre a^2.Encotrar o lugar geométrico desses pontos.

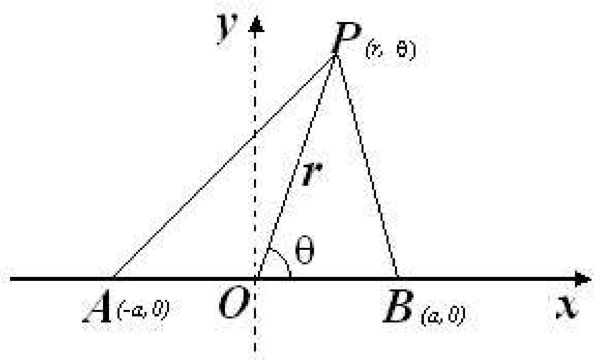


Figura 3.3: Lemniscata

Demonstração 3.2. *seja a distância entre a origem $O(0, 0)$ e o ponto P igual a r e θ o ângulo formado entre $\overline{OB}$ e $\overline{OP}$, então $P(r, \theta)$.*

Assim, aplicando a lei dos cossenos temos:

$$\overline{AP}^2 = \overline{AO}^2 + r^2 - 2ar.\cos(\pi - \theta)$$

Como $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$*, então:*

$$\overline{AP}^2 = a^2 + r^2 + 2ar.\cos\theta$$

$$\overline{AP} = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar.\cos\theta} \tag{3.9}$$

$$\overline{PB}^2 = \overline{BO}^2 + r^2 - 2ar.\cos\theta$$

$$\overline{PB} = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar.\cos\theta} \tag{3.10}$$

Portanto:

$$\overline{AP}.\overline{PB} = \sqrt{(a^2 + r^2 + 2ar.\cos\theta)}.\sqrt{(a^2 + r^2 + 2ar.\cos\theta)}$$

Como por hipótese $\overline{AP}.\overline{PB} = a^2$, *então:*

$$a^2 = \sqrt{(a^2 + r^2 + 2ar.\cos\theta).(a^2 + r^2 - 2ar.\cos\theta)}$$

$$a^4 = (a^2 + r^2 + 2ar.\cos\theta)^2.(a^2 + r^2 - 2ar.\cos\theta)$$

$$(a^2 + r^2 + 2ar.\cos\theta).(a^2 + r^2 - 2ar.\cos\theta) - a^4 = 0$$

$$a^4 + a^2r^2 - 2a^3\cos\theta + a^2r^2 + r^4 - 2ar^3\cos\theta + 2a^3\cos\theta + 2ar^3\cos\theta - 4a^2r^2\cos^2\theta - a^4 = 0$$

$$2a^2r^2 + r^4 - 4a^2r^2\cos^2\theta = 0$$

$$r^2(2a^2 + r^2 - 4a^2\cos^2\theta) = 0$$

$$r^2(r^2 - 2a^2((-1) + 2\cos^2\theta) = 0$$

Como $\cos 2\theta = [(-1) + 2\cos^2\theta]$,*então:*

$$r^2(r^2 - 2a^2cos2\theta) = 0$$

$$r^2 - 2a^2cos2\theta = 0$$

$$r^2 = 2a^2cos2\theta$$

Portanto o lugar geométrico desse pontos será a curva dada em coordenadas polares $r^2 = 2a^2 cos 2\theta$. Que mostramos na figura abaixo (com $a = 1$):

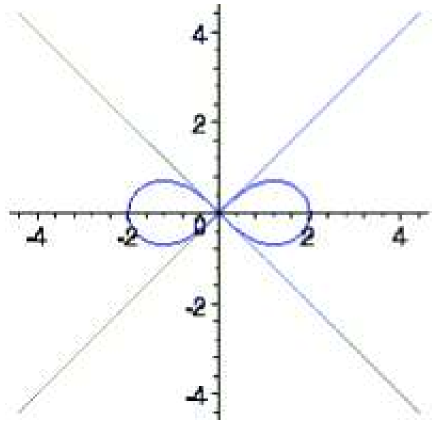


Figura 3.4: Lemniscata

■

Capítulo 4

Resolvendo Problemas Propostos Utilizando o Teorema de Pitagoras

4.1 Problema I

Água mineral foi encontrada em um sítio retângular quando se perfurava um poço artesiano.Cisternas foram construidas como na figura abaixo. Foram medidas as distância entre o poço e três das quatro cisternas.Qual a distância entre poço e a quarta cisterna?

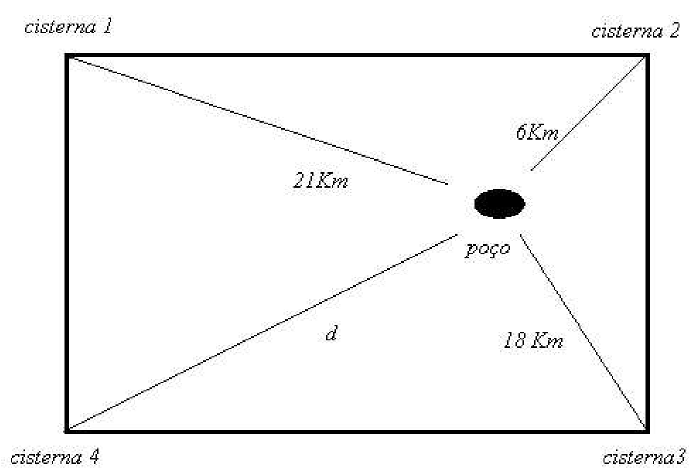


Figura 4.1: sítio retângular

Sejam $a = 21$, $b = 18$ e $c = 6$.A distância d entre o poço e a cisterna 4 será:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} = \sqrt{21^2 + 18^2 - 6^2} = \sqrt{729} = 27Km$$

De fato iremos provar que a relação $a^2 + b^2 = d^2 + c^2$ é sempre válida.

Demonstração 4.1. *Sejam m a medida dos segmentos $\overline{DG}$ e $\overline{AH}$, n a medida dos segmentos $\overline{GC}$ e $\overline{HB}$, o a medida dos segmentos $\overline{FC}$ e $\overline{GE}$ e p a medida dos segmentos $\overline{HE}$ e $\overline{BF}$, como na figura:*

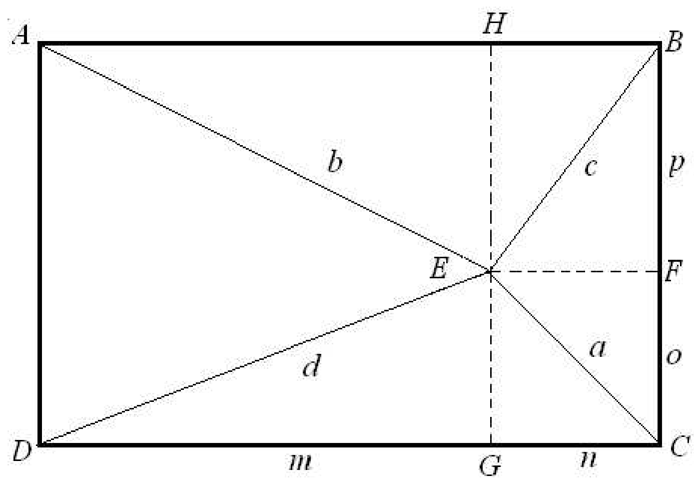


Figura 4.2: sítio retângular

Considere os triângulos $\triangle DGE$, $\triangle CGE$, $\triangle EFB$ e o $\triangle AEH$, aplicando o Teorema de Pitágoras temos respectivamente as seguintes relações:

$$a^2 = n^2 + o^2 \tag{4.1}$$

$$d^2 = m^2 + o^2 \tag{4.2}$$

$$c^2 = p^2 + n^2 \tag{4.3}$$

$$b^2 = p^2 + m^2 \tag{4.4}$$

Se subtrairmos (4.2) de (4.1) somarmos com (4.4) e novamente subtrairmos (4,3), teremos:

$$a^2 - d^2 + b^2 - c^2 = n^2 + o^2 - (m^2 + o^2) + (p^2 + m^2) - (p^2 + n^2)$$

$$a^2 - d^2 + b^2 - c^2 = n^2 + o^2 - m^2 - o^2 + p^2 + m^2 - p^2 - n^2)$$

$$a^2 - d^2 + b^2 - c^2 = 0$$

$$a^2 + b^2 = d^2 + c^2$$

■

E se a cisterna estiver fora do sítio retângular ainda será válida a relação $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$?

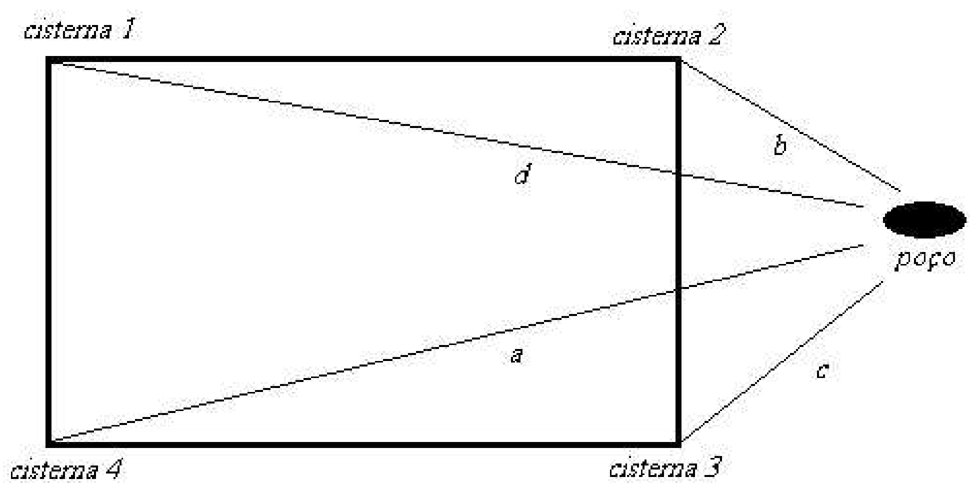


Figura 4.3: sítio retângular

A resposta é sim, como mostraremos a seguir:

Demonstração 4.2. *Sejam m a medida dos segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{AB}$, o a medida do segmento $\overline{CG}$ e a medida do segmento $\overline{BF}$, q a medida dos segmentos $\overline{EG}$ e e $p\overline{FE}$ como na figura:*

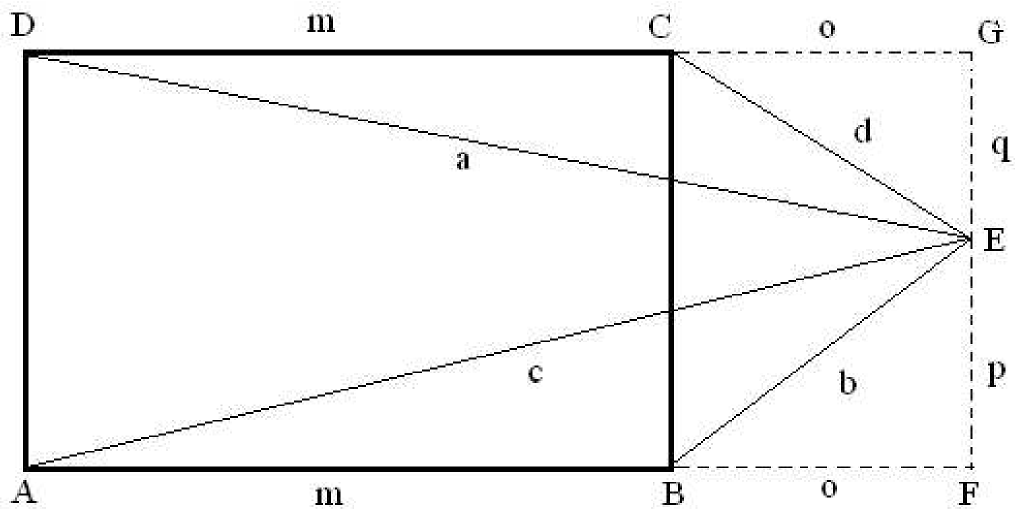


Figura 4.4: sítio retângular

Considere os triângulos $\triangle CGE$, $\triangle DGE$, $\triangle AFE$ e o $\triangle BEF$, aplicando o Teorema de Pitágoras temos respectivamente as seguintes relações:

$$d^2 = q^2 + o^2 \tag{4.5}$$

$$a^2 = (m + o)^2 + q^2 \tag{4.6}$$

$$c^2 = p^2 + (m + o)^2 \tag{4.7}$$

$$b^2 = p^2 + o^2 \tag{4.8}$$

Se subtrairmos (4.5) de (4.6) somarmos com (4.7) e novamente subtrairmos (4.8), teremos:

$$d^2 - a^2 + c^2 - b^2 = q^2 + o^2 - [(m+o)^2 + q^2] + p^2 + (m+o)^2 - p^2 - o^2$$

$$d^2 - a^2 + c^2 - b^2 = q^2 + o^2 - (m+o)^2 - q^2] + p^2 + (m+o)^2 - p^2 - o^2$$

$$d^2 - a^2 + c^2 - b^2 = 0$$

$$d^2 + c^2 = b^2 + a^2$$

■

Note que neste problema I conseguimos duas formas de expressar o número inteiro 729 como soma de dois quadrados:

$$729 = 18^2 + 21^2$$

$$729 = 27^2 + 6^2$$

O problema de escrever um número inteiro como soma de quadrados tem sido objeto de estudo de vários grandes matemáticos, como Fermat, Euler, Lagrange, Gauss e neste século por H. Minkowski, e é parte importante da teoria de números.

Apresentaremos três resultados decorentes deste estudo e cujas provas podem ser encontradas em [3], como:

R I: Sejam m e n dois inteiros positivos que podem ser escritos como soma de dois quadrados(isto é, existem a,b,c,d ϵ Z tais que $m = a^2 + b^2$, $n = c^2 + d^2$). Então $m.n$ também pode ser escrito como soma de dois quadrados.

Demonstração 4.3. *Se temos a,b,c,d ϵ Z tais que:*

$$m = a^2 + b^2 \text{ e } n = c^2 + d^2$$

Então:

$$m.n = (a^2 + b^2).(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd - 2abcd =$$

$$= (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 + -2abcd + b^2c^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

E portanto:

$$m.n = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$\blacksquare$

R II:(**Euler)**Todo primo p da forma $4k + 1$ pode ser decomposto de uma única maneira como

$$p = a^2 + b^2$$

onde a,b ϵ Z e $0 < a, b < \sqrt{p}$.

R III:Seja n em Z, existem a, b em Z, tais que $n = a^2 + b^2$, se e somente se, todos os fatores primos de n que são da forma $4k + 1$ aparecem na decomposição em fatores primos de primos de n com expoente par.

Exemplo: Ache o número inteiro positivo que tem pelo menos três representações diferentes como soma de dois quadrados(independente do sinal e ordem de representação).

O ponto de partida para achar este número é a escolha um inteiro positivo que tenha três fatores primos distintos na forma padrão, cada um da forma $4k + 1$.

Resolução:seja os números primos da forma $4k + 1$:

$29 = 4.7 + 1$ $\qquad$ $13 = 4.3 + 1$ $\qquad$ $5 = 4.1 + 1$

então número procurado é:

$$1885 = 29.13.5$$

De fato o número 1885 pode ser escrito de três formas diferentes como soma de dois quadrados. Se usarmos o **R II**, obteremos:

$$29 = 5^2 + 2^2 \qquad 13 = 3^2 + 2^2 \qquad 5 = 2^2 + 1^2$$

então

$$1885 = 29.13.5 = (5^2 + 2^2).(3^2 + 2^2).(2^2 + 1^2) \tag{4.9}$$

agora por **R I**:

1º forma:

$$1885 = 29.13.5 = (5^2 + 2^2).(3^2 + 2^2).(2^2 + 1^2) =$$

$$= [(5.3 + 2.2)^2 + (5.2 - 2.3)^2].(2^2 + 1^2) =$$

$$= [(15 + 4)^2 + (10 - 6)^2].(2^2 + 1^2) = (19^2 + 4^2).(2^2 + 1^2) =$$

$$= [(19.2 + 4.1)^2 + (19.1 - 4.2)^2] = (38 + 4)^2 + (19 - 8)^2 = 42^2 + 11^2$$

2º forma:

$$1885 = 29.13.5 = (5^2 + 2^2).(3^2 + 2^2).(2^2 + 1^2) =$$

$$= (5^2 + 2^2).[(3^2 + 2^2).(2^2 + 1^2)] =$$

$$= (5^2+2^2).[(3.2+2.1)^2+(3.1-2.2)^2] = (5^2+2^2).[(6+2)^2+(3-4)] = (5^2+2^2).[8^2+(-1)^2] =$$

$$= [5.8 + 2.(-1)]^2 + [5.(-1) - 2.8]^2 = (40 - 2)^2 + [(-5) - 16]^2 = 38^2 + (-21)^2$$

3º forma:

$$1885 = 29.5.13 = (5^2 + 2^2).(2^2 + 1^2).(3^2 + 2^2) =$$

$$= [(5^2 + 2^2).(2^2 + 1^2)].(3^2 + 2^2) =$$

$$= [(5.2+2.1)^2+(5.1-2.2)^2].(3^2+2^2) = [(10+2)^2+(5-4)^2].(3^2+2^2) = [12^2+(-1)^2].(3^2+2^2) =$$

$$= [12.3 + (-1).2]^2 + [12.2 - (-1).3]^2 = (36 - 2)^2 + (24 + 3)^2 = 34^2 + 27^2$$

Portanto as tres formas de escrever 1885 como soma de dois quadrados, são:

$$1885 = 42^2 + 11^2 = 1764 + 121 \tag{4.10}$$

$$1885 = 38^2 + (-21)^2 = 1444 + 441 \tag{4.11}$$

$$1885 = 34^2 + 27^2 = 1156 + 729 \tag{4.12}$$

Alguns exercícios propostos ao leitor:

1. Mostre que os números da forma 2^n, com $n = 1, 2, 3, ..$, podem ser escritos como soma de dois quadrados.

2. Um número n é chamado ´número trângular quando n $= \frac{m(m+1)}{2}$ para algum $m \in \mathbb{Z}^+$.Mostre que quando n é número triângular então $4n + 1$ é soma de dois quadrados.

3. Números naturais da forma $f_n = 2^{2n} + 1$, com$n \in \mathbb{N}$ são chamados Números de Fermat. Mostre que os números de fermat podem ser escritos como soma de dois quadrados.

4. Mostre que entre quaisquer quatro números inteiros consecutivos pelo menos um não pode ser escrito como soma de dois quadrados.

Capítulo 5

Ternos Pitagóricos

5.1 Ternos Pitagóricas

Os números inteiros positivos a, b e c formam um terno pitagórico quando:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Um problema interessante é encontrar um terno pitagórico em que a hipotenusa é um número consecutivo a um dos catetos.

O procedimento abaixo apresentado ensina como obter uma terno pitagórico com esta propriedade:

1º)Escolha um número inteiro ímpar $a > 0$;

2º)Seja $b = \lfloor \frac{a^2}{2} \rfloor =$ maior inteiro menor que ou igual a $\frac{a^2}{2}$

3º)Seja $c = \lceil \frac{a^2}{2} \rceil =$ menor inteiro maior que ou igual a $\frac{a^2}{2}$;

Agora faça $c^2 = a^2 + b^2$ e certamente a, b e c serão uma terna pitagórico.

Exemplo:

Se $a = 17$, que é ímpar, então:

$$b = \frac{17^2}{2} = \frac{289}{2} = 144,5$$

onde o maior inteiro menor ou igual a $144,5$ será 144.

$$c = \frac{17^2}{2} = \frac{289}{2} = 144,5$$

e o menor inteiro maior ou igual a $144,5$ é 145.

Como $a = 17$, $b = 144$ e $c = 145$, então:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 17^2 + 144^2 \;\Rightarrow\; c = \sqrt{289 + 20736} = \sqrt{21025} = 145$$

Logo a, b e c formam um terno pitagórico.

De fato vamos mostrar que esta fórmula é sempre válida.

$$\lceil\frac{a^2}{2}\rceil = a^2 + \lfloor\frac{a^2}{2}\rfloor$$

Demonstração 5.1. *Considere $a = 2n+1$, que é um número ímpar e n um número inteiro positivo.Então pelo procedimento apresentado:*

$$b = \lfloor\frac{a^2}{2}\rfloor = \lfloor\frac{(2n+1)^2}{2}\rfloor = \lfloor\frac{4n^2+4n+1}{2}\rfloor = \lfloor 2n^2+2n+\frac{1}{2}\rfloor = 2n^2+2n$$

$$c = \lceil\frac{a^2}{2}\rceil = \lceil\frac{(2n+1)^2}{2}\rceil = \lceil\frac{4n^2+4n+1}{2}\rceil = \lceil 2n^2+2n+\frac{1}{2}\rceil = 2n^2+2n+1$$

Como n é um número inteiro positivo então $2n^2+2n$ e $2n^2+2n+1$ também são números inteiros positivos. Bem como é fácil perceber que c e b são números consecutivos.

Resta ainda provar que $c^2 = a^2 + b^2$:

$$c^2 = (2n+1)^2+(2n^2+2n)^2 = 4n^2+2n+1+4n^4+8n^3+4n^2 = 4n^4+8n^3+8n^2+2n+1 = (2n^2+2n+1)^2$$

Logo o procedimento será válido sempre.

■

O assunto de ternos pitagóricos é abrangente, muitos são os problemas e resultados existentes nesta área da matemática.

Ainda explorando o problema anterior ,por exemplo, até o presemte momento níguém apresentou uma solução para o seguinte problema:

"Existem infinitos trios pitagóricos onde a hipotesusa e um dos catetos são números primos. "

Exemplo: os trios (3,4,5) e (5,12,13) satisfazem o problema.

Abaixo enunciamos alguns dos muitos problemas sobre triângulos pitagóricos que tomaram a atenção de muitos matemáticos através dos séculos.

Definição 5.1. *Se em um triângulo retângulo as medidas dos três lados são números inteiros $a, b, c > 0$ então este triângulo é dito ser um triângulo pitagórico.*

Note que se três números $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $a^2 + b^2 = c^2$ então dado $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $(\alpha.a)^2 + (\alpha.b)^2 = (\alpha.c)^2$. Este fato motiva a seguinte definição:

Definição 5.2. *Um triângulo pitagórico primitivo é um triângulo pitagórico cujos comprimentos dos lados a, b, c são primos entre si.*

5.2 Problemas

Como alguns problemas relacionados com triângulos Pitagóricos. Alguns dos problemas abaixo, apesar do enunciado simples, são muito difíceis de resolver. A solução destes não é dada neste trabalho (alguns não tem solução descoberta ainda).

1. Se A é um inteiro dado, de quantos triângulos pitagóricos primitivos ele pode ser um cateto?

2. Se A é um inteiro dado, de quantos triângulos pitagóricos, quer primitivos ou não primitivos, ele pode ser um cateto?

3. Que forma deve ter um inteiro para ser a hipotenusa de um triângulo pitagórico, primitivo ou não primitivo, e de quantos triângulos ele pode ser a hipotenusa em cada caso?

4. Se A é um inteiro dado, de quantos triângulos pitagóricos ele pode ser um cateto ou a hipotenusa?

5. Encontre um número, digamos o menor, que pode ser cateto de um número específico de triângulos pitagóricos, por exemplo, 1000 deles.

6. Encontre um número que pode ser a hipotenusa somente, ou de novo, ou um cateto ou a hipotenusa de talvez exatamente 1000000 tais triângulos.

7. Encontre triângulos Pitagóricos cujos catetos diferem pela unidade e encontre fórmulas para obte-los sistematicamente. Encontre os primeiros 100 destes triângulos.

8. Encontre três ou mais triângulos Pitagóricos que tenham áreas iguais.

9. Encontre o triângulo pitagórico primitivo com perímetro minimo cuja área exceda 1000000.

10. Encontre o único triângulo Pitagórico primitivo no qual cada uma das medidas dos três lados está entre 2000 e 3000.

Capítulo 6

Teorema de Pitot

6.1 Teorema de Pitot

Em todo quadrilátero circunscritível, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois lados.

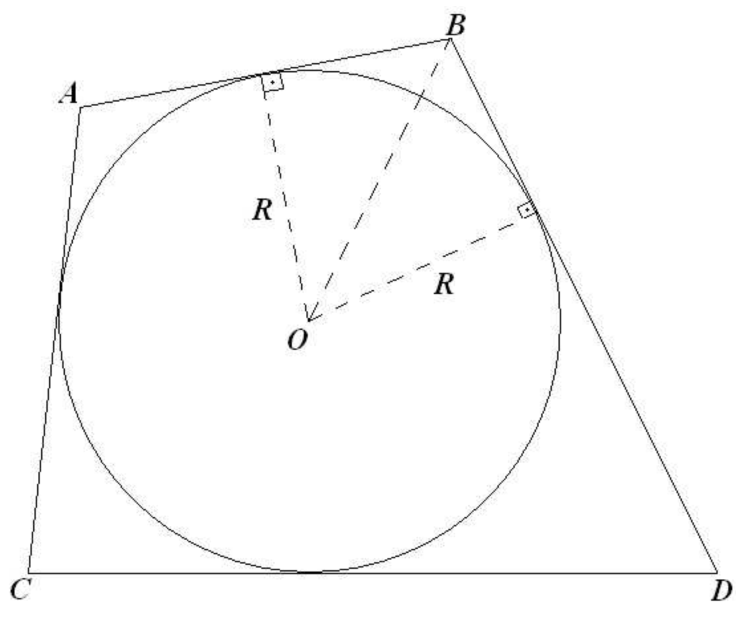


Figura 6.1: quadrilátero circunscrito

$$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$$

Demonstração 6.1. *O quadrilátero* $\square ABCD$ *circuncrito a circunferência* C_R *centrada em* O *de raio* R.

Seja E *o ponto de interceção do lado* $\overline{AB}$ *e a circunferência* C_R, F *o ponto de interceção do lado* $\overline{BD}$ *e a circunferência* C_R, G *o ponto de interceção do lado* $\overline{DC}$ *e a circunferência* C_R *e* H *o ponto de interceção do lado* $\overline{CA}$ *e a circunferência* C_R, *como na figura abaixo:*

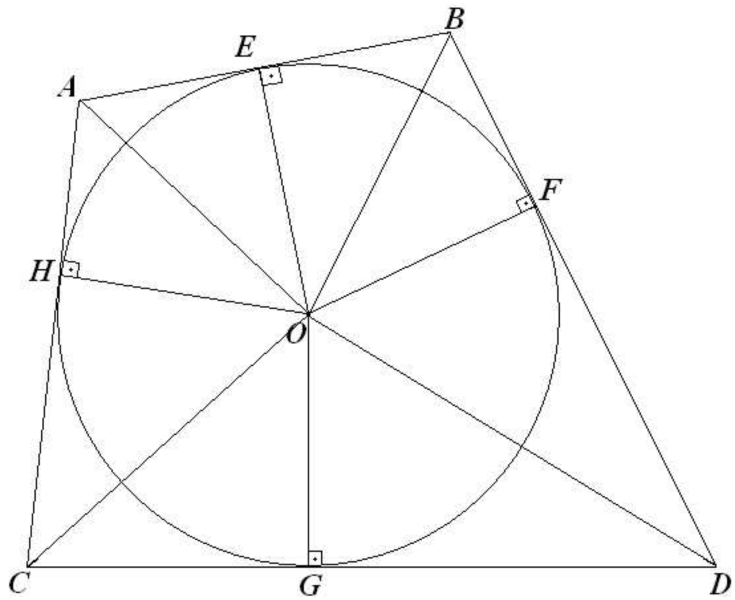


Figura 6.2: quadrilátero circunscrito

Considere as medidas:

$$AE = a_1 \quad EB = a_2 \quad BF = b_1 \quad FD = b_2$$
$$DG = c_1 \quad GC = c_2 \quad CH = d_1 \quad HA = d_2$$

Então:

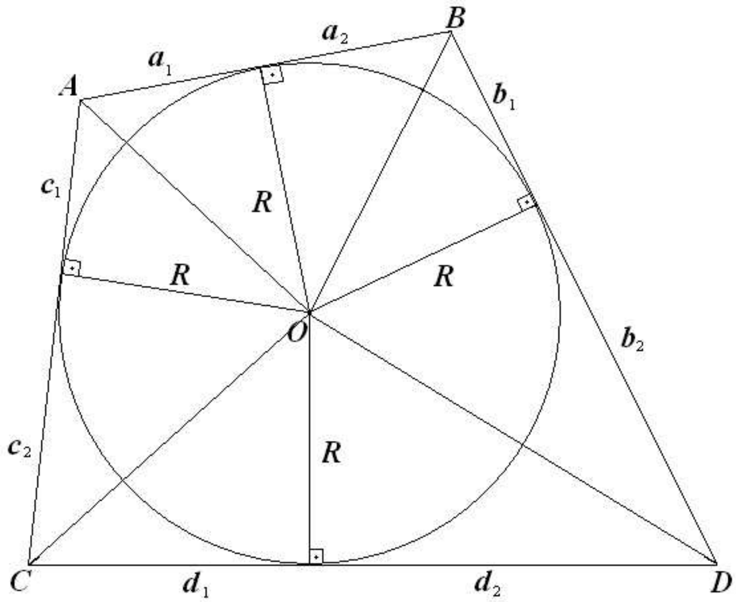


Figura 6.3: quadrilátero circunscrito

Considere os oito triângulos retângulos $\triangle EOB$, $\triangle BOF$, $\triangle FOD$, $\triangle DOG$, $\triangle GOC$,$\triangle COH$, $\triangle HOA$ *e* $\triangle AOE$, *aplicando o teorema de pitágoras em cada um deles obteremos respectivamente as seguintes relações:*

$$OB^2 = R^2 + a_2^2 \Rightarrow a_2^2 = OB^2 - R^2$$

$$OB^2 = R^2 + b_1^2 \Rightarrow b_1^2 = OB^2 - R^2$$

$$OD^2 = R^2 + b_2^2 \Rightarrow b_2^2 = OD^2 - R^2$$

$$OD^2 = R^2 + d_1^2 \Rightarrow d_1^2 = OD^2 - R^2$$

$$OC^2 = R^2 + d_2^2 \Rightarrow d_2^2 = OC^2 - R^2$$

$$OC^2 = R^2 + c_1^2 \Rightarrow c_1^2 = OC^2 - R^2$$

$$OA^2 = R^2 + c_2^2 \Rightarrow c_2^2 = OA^2 - R^2$$

$$OA^2 = R^2 + a_1^2 \Rightarrow a_1^2 = OA^2 - R^2$$

Assim pelas equações acima temos:

$$a_1^2 = OB^2 - R^2 = c_2^2 \Rightarrow a_1 = c_2 \tag{6.1}$$

$$a_2^2 = OB^2 - R^2 = b_1^2 \Rightarrow a_2 = b_1 \tag{6.2}$$

$$d_1^2 = OB^2 - R^2 = b_2^2 \Rightarrow d_1 = b_2 \tag{6.3}$$

$$d_2^2 = OB^2 - R^2 = c_1^2 \Rightarrow d_2 = c_1 \tag{6.4}$$

somarmos as equações 6.1, 6,6.3 e 6.4, obtemos:

$$a_2 + a_1 + d_1 + d_2 = b_1 + b_2 + c_1 + c_2$$

$$(a_2 + a_1) + (d_1 + d_2) = (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2)$$

$\blacksquare$

Capítulo 7

A recíproca do Teorema de Pitágoras

Teorema 7.1. *Se a, b, c são números positivos tais que $c^2 = a^2 + b^2$, então existe um triângulo retângulo $\triangle ABC$ tal que $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$*

Demonstração 7.1. *Vamos provar que existe um triângulo de lados a, b e c. Usando o fato que a, b, c são maiores que 0 temos:*

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 < a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow c^2 < (a+b)^2 \Rightarrow c < a + b$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a^2 < c^2 \Rightarrow a < c \Rightarrow a < b + c$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 < c^2 \Rightarrow b < c \Rightarrow b < a + c$$

Como o comprimento de cada lado é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados é possivel construir um triângulo de lados a, b e c.

Seja $\triangle ABC$ um triângulo cujos lados medem a, b e c tal que o vértice C está sobre a origem e o lado $\overline{BC}$ está sobre o eixo x como na figura. (Marcamos o ponto A no lado direito do eixo y mas este pode estar do lado esquerdo do eixo ou sobre ele)

Escrevendo os pontos A, B e C em coordenadas cartesianas temos:

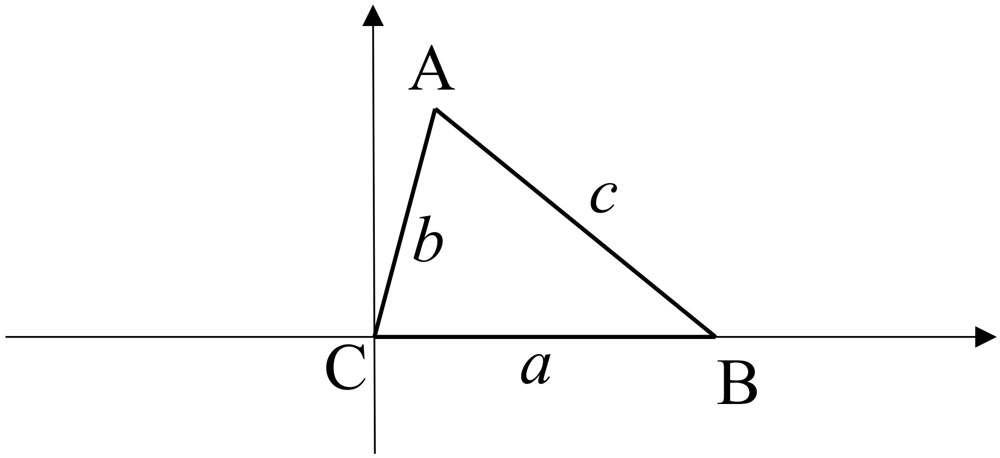


Figura 7.1: Triângulo $\triangle ABC$

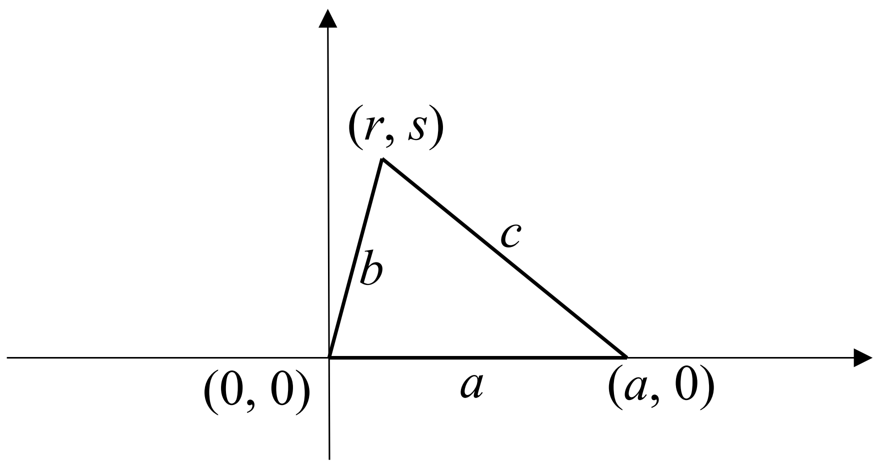


Figura 7.2: Triângulo $\triangle ABC$ em coordenadas cartesianas

Vamos mostrar que A está sobre o eixo y.

$$b^2 = [dist((r,s),(0,0))]^2 = (r-0)^2 + (s-0)^2 \Rightarrow b^2 = r^2 + s^2$$

$$c^2 = [dist((r,s),(a,0))]^2 = (r-a)^2 + (s-0)^2 \Rightarrow c^2 = r^2 + s^2 + a^2 - 2ar$$

Por hipotese, $a^2 + b^2 = c^2$. Dai,

$$a^2 + b^2 = r^2 + s^2 + a^2 - 2ar \Rightarrow a^2 + r^2 + s^2 = r^2 + s^2 + a^2 - 2ar$$

$$-2ar = 0 \Rightarrow a = o \text{ } ou \text{ } r = 0.$$

Por hipotese $a \neq 0$, então $r = 0$, ou seja o vértice A está sobre o eixo y e *assim* $\triangle ABC$ *é retângulo.*

Capítulo 8

Generalização de Thabit ibn Qurra*(836 - 901)* do Teorema de Pitágoras

Teorema 8.1. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer. Se B' e C' estão no segmento $\overline{BC}$ e $\angle AB'B = \angle AC'C = \angle A$, então $AB^2 + AC^2 = BC(BB' + CC')$.*

Demonstração 8.1. *Podemos ter B' a direita de C', $B' = C'$ ou B' a esquerda de C', como mostra a figura*

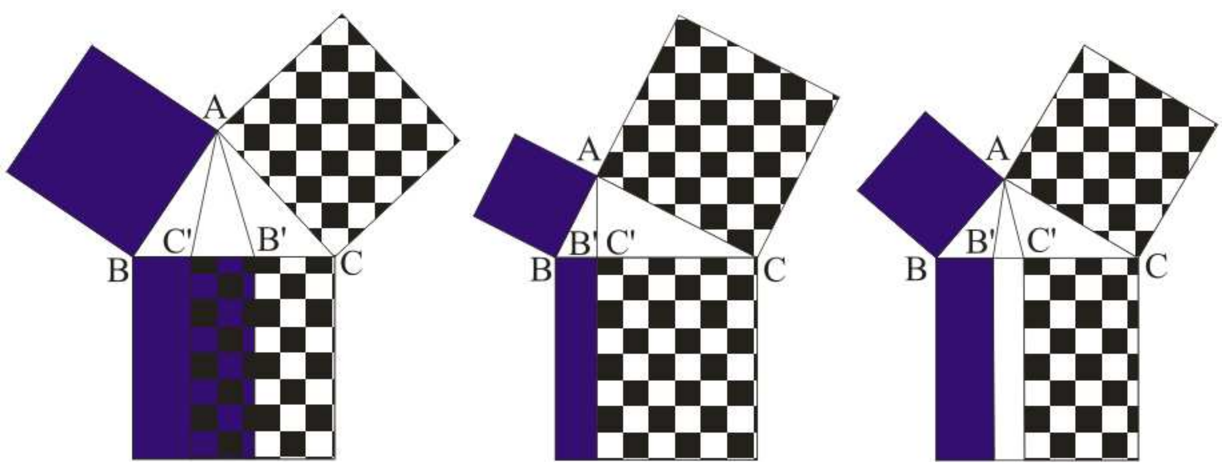


Figura 8.1: Posições relativas de B' e C'

Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABB'$ são semelhantes pois $\angle ABB' \cong \angle ABC$ e $\angle AB'B \cong \angle BAC$. Então

$$\frac{AB}{BB'} = \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{B'A} \Rightarrow AB^2 = BC.B'B \tag{8.1}$$

Por outro lado os triângulos $\triangle ABC$ *e* $\triangle ACC'$ *são semelhantes pois* $\angle ACC' \cong \angle ACB$ *e* $\angle AC'C \cong \angle BAC$. *Então*

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CC'} \Rightarrow AC^2 = BC.CC' \tag{8.2}$$

Desta maneira, das equações 8.1 e 8.2, temos:

$$AB^2 + AC^2 = BC.BB' + BC.CC' = BC(BB' + CC')$$

$\blacksquare$

Capítulo 9

Lei do paralelogramo

Teorema 9.1. *Seja* $\square ABCD$ *um paralelogramo de diagonais* $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$ *e lados medindo* a *e* b*,como na figura então*

$$a^2 + a^2 + b^2 + b^2 = AC^2 + BD^2 \tag{9.1}$$

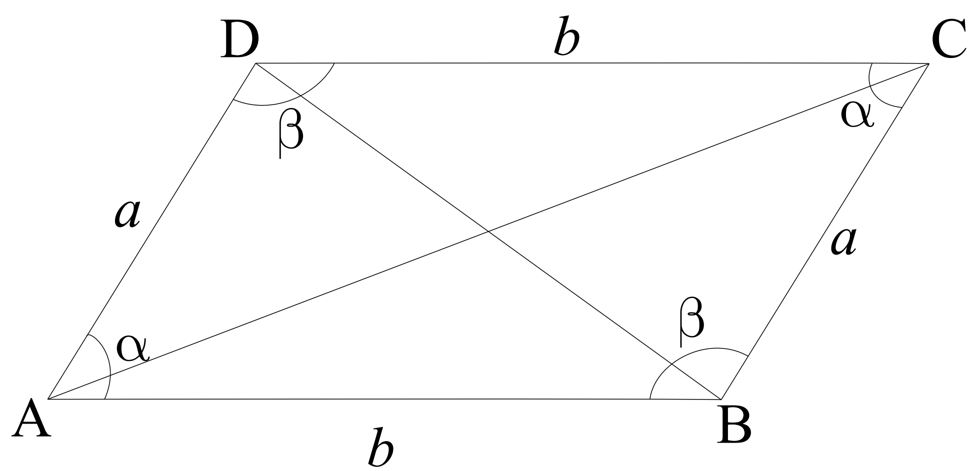


Figura 9.1: Triângulo $\triangle ABC$

Demonstração 9.1. *A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é* 2π*, assim*

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 2\pi \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 2\pi \Rightarrow \alpha + \beta = \pi \Rightarrow \alpha = \pi - \beta.$$

Usando a lei dos cossenos no triângulos $\triangle ABD$ *e* $\triangle BCA$ *temos*

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab.cos\alpha \tag{9.2}$$

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab.cos\beta = a^2 + b^2 - 2ab.(-cos(\pi - \beta)) = a^2 + b^2 + 2ab.cos\alpha. \tag{9.3}$$

Somando as equações temos

$$BD^2 + AC^2 = a^2 + b^2 - 2cos\alpha + a^2 + b^2 + 2cos\alpha = a^2 + a^2 + b^2 + b^2.$$

■

O teorema a seguir é uma consequência da lei do paralelogramo e expressa o comprimento de uma mediana do triângulo em função dos lados a, b, c deste.

Teorema 9.2. *Seja* $\triangle ABC$ *um triângulo e* M *o ponto médio do segmento* $\overline{AB}$*, como na figura, então:*

$$CM = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2} \tag{9.4}$$

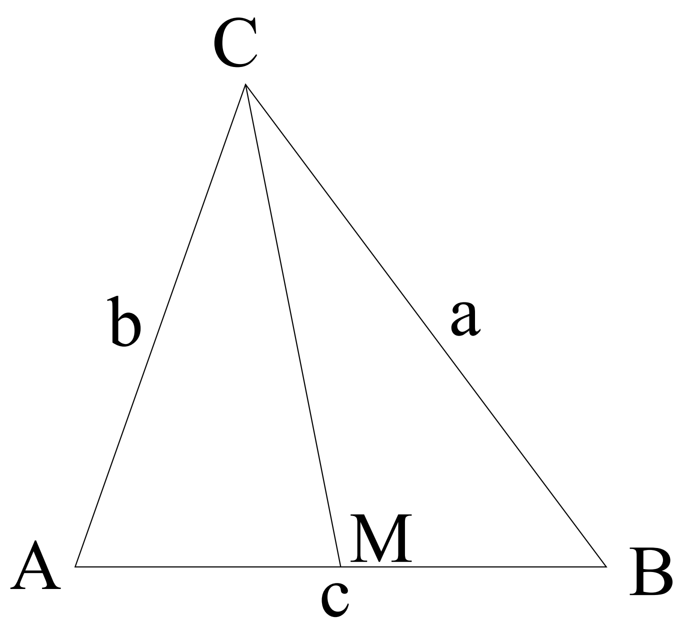


Figura 9.2: Triângulo $\triangle ABC$

Demonstração 9.2. *Seja D o simétrico de C em relação a M como na figura abaixo*

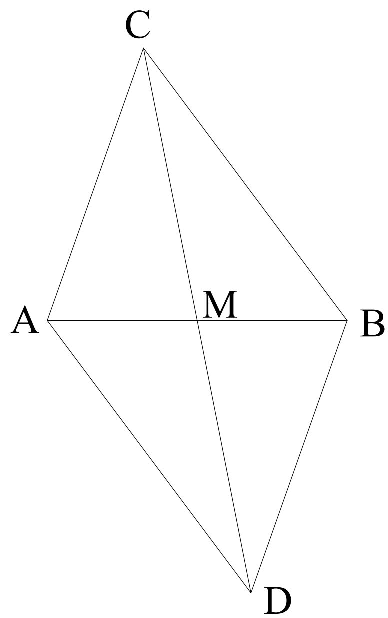


Figura 9.3: Triângulo $\triangle ABC$

Como $ABCD$ é convexo, $CM = MD$ e $AM = MB$, ou seja as diagonais do quadrilátero $ADBC$ se interseptam nos respectivos pontos médios, então $ADBC$ é um paralelogramo. Portanto pela Lei do Paralelogramo temos

$$CD^2 + AB^2 = AC^2 + AD^2 + BD^2 + BC^2$$

$$(2CM)^2 + c^2 = b^2 + a^2 + b^2 + a^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$CM = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2}$$

■

Conclusão

Durante minha vida escolar sempre tive dificuldades em trigonometria e disposição para estudar geometria.

Quando proposto o assunto deste trabalho, percebi que seria a oportunidade de enfrentar obstáculos e preencher algumas lacunas da minha formação matemática. Bem como, adquirir conhecimentos em diversas áreas da matemática.

Hoje sinto-me satisfeita com os resultados obtidos e deslumbrada com a diversidade de problemas qua são solucionados utilizando o Teorema de pitágoras.

Tentamos escrever este trabalho de forma sutil e de agradável leitura, o que o tornou prazeroso sua realização.

Aprendi que se há limites, eles foram feitos para serem superados sempre.

Referências Bibliográficas

[1] Boyer, Carl B. - *História da Matemática.* Editora Edgard Blücher 1996.

[2] Beiler, Albert H. - *Recreations in the theory of numbers.* Editora Dover publications; 1964.

[3] S. Shokranian, M. Soares e H. Godinho - *Teoria dos Números.* Editora Universidade de Brasília, 2ª edição, 1999.

[4] Dolce, Osvaldo e Pompeo, José N. - *Fundamentos de Matemática Elementar*, 7ª edição, volume 9. Atual, 1993.

[5] Thomas, George B. - *Cálculo Vol.1.* Editora Prentice-Hall, 2002.

[6] Cromer, Alan *The x3 Oscillator.* The Physics Teacher 30: 249-250, 1992.

[6] Lima, Elon L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Editora SBM, 1997.

Referencias na WWW (World Wide Web)

[W1] Wikipedia

www.wikipedia.org

[W2] Pythagorean Theorem and its many proofs

www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml