UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

Equações Polinomiais Matriciais

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

FLORIANÓPOLIS - SC
NOVEMBRO - 2004

Edinéia Zarpelon

Equações Polinomiais Matriciais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Matemática para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática na Universidade Federal de Santa Catarina.

Professor Dr. Fermín Viloche Bazán

Orientador

FLORIANÓPOLIS - SC
NOVEMBRO - 2004

Esta Monografia foi julgada adequada como Trabalho de Conclusão de Curso no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n^o $44/SCG/04$.

Professora Ms. Carmen Comitre Gimenez

Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Professor Dr. Fermín Viloche Bazán (Orientador)

Professor Ms. Antônio Vladimir Martins (Co-orientador)

Professor Dr. Mário César Zambaldi

Professora Drª. Joana Benedita de Oliveira Quandt

Os ousados começam, mas só os determinados terminam.
George Bernard Shaw

Agradeço a meus pais por terem pavimentado parte do caminho que seria por mim percorrido; às minhas irmãs pelo incentivo durante todo o curso; às companheiras da Casa da Estudante Universitária por terem me acolhido de braços abertos; a Gilberto pelos conselhos, pelo apoio e por ter me auxiliado nessa etapa final do curso; aos meus colegas de graduação que partilharam comigo bons e maus momentos, em especial à amiga Daiani. Ao professor, amigo e orientador Fermín, suas críticas e conselhos me fizeram crescer e amadurecer muito.

Sumário

Introdução

É indescritível o número de aplicações existentes nas diversas áreas da ciência em que os conteúdos de Álgebra Linear estão presentes.

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo oferecer aos alunos de graduação a possibilidade de conhecerem um novo conteúdo relacionado à Álgebra Linear: equações polinomiais matriciais. Mais adiante será visto que uma equação polinomial matricial nada mais é do que uma equação polinomial cujos coeficientes são matrizes quadradas.

O trabalho está dividido em cinco capítulos, sendo que o primeiro conterá definições, teoremas, proposições e observações de conteúdos vistos nas disciplinas de Álgebra Linear. Os mesmos serão de fundamental importância para a abordagem efetiva de polinômios matriciais.

O segundo capítulo apresenta algumas formas de resolução de equações polinomiais de terceiro e quarto grau, contendo também fatos históricos que envolveram estas descobertas de resoluções. O mesmo tem como objetivo servir de motivação para o estudo de equações polinomiais matriciais. Afinal, se existe solução para equações polinomiais com coeficientes escalares por que não se questionar a respeito de soluções de equações polinômios com coeficientes matriciais?

O terceiro capítulo contém algumas relações entre equações polinomiais e Álgebra Linear. Nele é introduzido o conceito de matriz companheira que não é apresentado no decorrer do curso de graduação. Este conceito é de extrema importância para que de fato o tema central possa ser estudado.

E por fim, os dois últimos capítulos apresentam definições, observações, teoremas, corolários e a resolução de algumas equações polinomiais matriciais de primeiro e segundo grau. Com o decorrer do quarto capítulo ficará claro o quão difícil e trabalhoso pode vir a se tornar o objetivo de encontrar a solução de uma equação polinomial matricial. Assim sendo, o trabalho ficará restrito à equações polinomiais matriciais quadráticas, cuja abordagem das soluções acontece efetivamente no quinto capítulo.

De modo geral, a expectativa é que este estudo sugira novos trabalhos nesta área, de forma que soluções de equações polinomiais de grau superior possam também ser estudadas.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo apresenta um conjunto de conceitos e resultados preliminares que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

Serão citadas algumas definições, alguns teoremas e conseqüências que servirão de alicerce nos próximos capítulos. Vale salientar que a apresentação dos teoremas é puramente descritiva, uma vez que parte-se do pressuposto que as demonstrações são vistas nas disciplinas de Álgebra e Álgebra Linear.

1.1 Equações Polinomiais

O objetivo desta seção é de apresentar algumas definições e resultados teóricos que explicam o problema de encontrar soluções de equações polinomiais.

Definição 1 *Uma equação polinomial algébrica de grau n é toda igualdade matemática da forma $P(x) = 0$, em que*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

é um polinômio de grau n e $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ são números reais ou complexos chamados coeficientes.

Definição 2 *Raiz ou zero da equação $P(x)$ são os valores reais ou complexos da variável x que, quando substituídos, tornam verdadeira a equação $P(x) = 0$.*

Exemplo 1 *A raiz de equação de primeiro grau $ax + b = 0, \quad a \neq 0$ é $x = -\dfrac{b}{a}$.*

Exemplo 2 *As raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$ são $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.*

O problema de determinar as raízes de uma equação polinomial de grau maior que dois é mais complexo e nem sempre possível de expressar via fórmulas envolvendo radicais. Ainda assim, existem resultados teóricos que fornecem informações sobre o número de raízes existentes. Isto é explicado nos teoremas seguintes:

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Álgebra) *Toda equação algébrica a uma variável, de grau n $(n > 1)$ admite pelo menos uma raiz complexa.*

Demonstração: A demonstração do teorema, pode ser encontrada em [7] e [8].

Agora será enunciado um teorema relacionado à decomposição de uma equação polinomial algébrica.

Teorema 2 (Teorema da Decomposição) *Todo polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ de grau n $(n \geq 1)$, pode ser decomposto em um fator igual ao coeficiente de x^n e n fatores de forma $(x - \alpha_i)$, onde α_i são raízes de $P(x)$, isto é:*

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$$

Demonstração: É conseqüência direta do Teorema 1 e do algoritmo da divisão para polinômios.

O teorema seguinte trata das raízes conjugadas de uma equação polinomial.

Teorema 3 *Se um número complexo $(a + bi)$ é raiz da equação algébrica $P(x) = 0$, de coeficientes reais, o complexo conjugado $(a - bi)$ é também raiz da mesma equação.*

Demonstração:

Seja a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ de coeficientes reais que admite a raiz $z = a + bi$, isto é $P(z) = 0$. Será provado que $\overline{z} = a - bi$ também é raiz desta equação, isto é, $P(\overline{z}) = 0$.

Substituindo $z = a + bi$ em $P(z) = 0$, tem-se: $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$

$$\begin{aligned} 0 = \overline{0} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n}\ \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\ \overline{z^{n-1}} + ... + \overline{a_1}\ \overline{z} + \overline{a_0} \\ &= a_n\ \overline{(z)}^n + a_{n-1}\overline{(z)}^{n-1} + ... + a_1\overline{(z)} + a_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \overline{z} = a - bi$ satisfaz a equação $P(x) = 0$. $\square$

Conseqüências do teorema (3):

- Se o número $(a + bi)$ é uma raiz com multiplicidade m, o número conjugado $(a - bi)$ é também raiz com a mesma multiplicidade.
- As raízes complexas não reais ocorrem aos pares. Portanto, toda equação de grau ímpar, com coeficientes reais, admite pelo menos uma raiz real.

1.2 Alguns Conceitos da Álgebra Linear

Esta seção destina-se a descrever conceitos, definições e teoremas da Álgebra Linear. Serão enfatizados alguns tópicos relacionados à matrizes, determinantes, sistemas lineares, autovalores e autovetores, entre outros.

1.2.1 Matrizes

Primeiramente serão abordados conceitos e teoremas que envolvem uma das ferramentas mais importantes da Matemática: matrizes. Esta será essencial para abordarmos o problema do polinômio matricial. Porém, ficará subentendido que o leitor conheça as notações, operações e conceitos básicos como diagonal principal de matrizes e transposta de uma matriz, além de como transformar uma matriz na forma escada e trabalhar com matrizes em bloco.

Uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é dita:

- **Identidade**

  Se $\begin{cases} a_{ij} = 1, & i = j \\ a_{ij} = 0, & i \neq j. \end{cases}$

  Isto é, os elementos da diagonal principal são iguais a um e os demais elementos são iguais a zero. A matriz identidade será denotada por I.

- **Triangular Superior**

  Se $a_{ij} = 0, \quad i > j.$

  Ou seja, se os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

- **Triangular Inferior**

  Se $a_{ij} = 0, \quad i < j.$

  Ou seja, se os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero.

- **Diagonal**

  Se $a_{ij} = 0$, sempre que $i \neq j$.

  Isto é, os elementos fora da diagonal principal são iguais a zero. A matriz diagonal é triangular inferior e triangular superior e será denotada por Λ.

- **Ortogonal**

  Se $AA^T = A^TA = I$.

  Ou seja, a matriz multiplicada pela sua transposta, ou vice-versa, é igual à matriz identidade.

- **Simétrica**

  Se $A = A^T$

  Ou seja, a matriz é igual a sua transposta, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$.

- **Definida Positiva**

  Uma matriz simétrica real A é dita definida positiva se $x^T Ax > 0$ para todo vetor x em $\mathbb{R}^n$ diferente de zero.

  São válidos os seguintes resultados sobre matrizes definidas-positiva:

  1. Seja A uma matriz real simétrica de ordem n. Então, A é definida positiva se e somente se todos os seus autovalores são positivos.

  2. A é definida positiva se e somente se é simétrica e a forma escalonada de A tem todos os pivôs maiores que zero.

A característica de que todos os autovalores de uma matriz simétrica positiva definida são positivos pode ser usada, segundo [12], para provar algumas propriedades dentre as quais destacam-se as seguintes (veja [10, 12, 13]):

- Se A é uma matriz simétrica definida positiva, então A é invertível.
- Se A é uma matriz simétrica definida positiva, então $det(A) > 0$.

Outro importante tópico que será tratado aqui será a inversão de matrizes. Com o decorrer dos próximos capítulos a percepção de que este fator é extremamente necessário para a resolução do problema polinomial matricial ficará evidente.

Definição 3 *Uma matriz $A_{n\times n}$ é chamada não-singular (ou invertível) se existe uma matriz $B_{n\times n}$ tal que*

$$AB = BA = I.$$

A matriz B é chamada de inversa de A. Se não existe uma tal matriz B satisfazendo as igualdades acima, então A é chamada singular (ou não invertível). A inversa da matriz A é denotada por A^{-1}.

Assim, quando A é invertível, tem-se $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Outro assunto de grande importância e que é necessário fazer algumas referências está relacionado a determinantes. Determinante nada mais é do que um número real associado a toda matriz quadrada. O valor do determinante vai esclarecer se a matriz é invertível ou não. Como este trabalho fará uso de resultados que envolvem determinantes, serão revistos alguns destes resultados, porém os métodos de calcular o determinante de uma matriz não serão apresentados, mas citados em algumas passagens do trabalho. Fica subentendido que o leitor conheça tais métodos uma vez que os mesmos são trabalhados desde o ensino médio.

Listamos a seguir alguns resultados sobre determinantes e cujas demonstrações podem ser encontradas em [9, 12, 13].

- Uma matriz $A_{n\times n}$ é singular se e somente se $det(A) = 0$.
- Se A e B são matrizes quadradas de ordem n então $det(AB) = det(A)det(B)$.
- Os determinantes de uma matriz e de sua transposta são iguais.

- Se duas linhas (colunas) da matriz A forem iguais então $det(A) = 0$.
- Se uma linha (coluna) da matriz A consiste de zeros, então $det(A) = 0$.
- Se uma matriz A é triangular inferior ou superior, então o determinante é o produto dos elementos sobre a diagonal principal.

1.2.2 Sistemas de Equações Lineares

A revisão tratará agora de sistemas lineares, um instrumento que é utilizado em mais de $\frac{1}{4}$ de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações da ciência e indústria [12]. A resolução de tais sistemas está presente, entre outras, em áreas como Administração, Economia, Sociologia, Ecologia,Engenharia e Física.

Definição 4 *Uma equação linear em n incógnitas é uma equação da forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$ *e* b *são números reais e* $x_1, x_2, ..., x_n$ *são variáveis.*

Um sistema linear de m equações e n incógnitas é um sistema da seguinte forma:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \tag{1.1}$$

sendo $x_1, x_2, ..., x_n$ *as incógnitas,* a_{ij} *os coeficientes e* b_i *os termos independentes do sistema linear.*

Matricialmente, o sistema acima pode ser escrito como

$$Ax = b,$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}.$$

O vetor b é dito "lado direito"do sistema (1.1).

A matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \vdots b \end{bmatrix}$$

é chamada matriz aumentada do sistema.

Definição 5 *O posto de uma matriz A – denotado por posto(A) – é a dimensão do seu espaço linha, ou melhor, é o número de linhas não nulas da matriz, após colocá-la na forma escada.*

Teorema 4 *Considere o sistema $Ax = b$, onde A é uma matriz quadrada de ordem n. Então:*

Se o posto de $\left[\begin{array}{c} A \vdots b \end{array}\right] >$ posto(A), o sistema de equações é inconsistente ou incompatível, ou seja, não admite solução.

Se o posto de $\left[\begin{array}{c} A \vdots b \end{array}\right] =$ posto$(A) = n$, sendo n o número de incógnitas do sistema, então o sistema é chamado consistente ou compatível e tem solução única.

Se o posto de $\left[\begin{array}{c} A \vdots b \end{array}\right] =$ posto$(A) < n$ então o sistema é dito consistente ou compatível e admite infinitas soluções que dependem de $[n -$ posto$(A)]$ variáveis livres.

Os conceitos de espaços linha e coluna são úteis no estudo de sistemas lineares. Por este motivo esta será a próxima definição a ser mencionada. Deve-se lembrar que conceitos como vetores, espaço e subespaço vetorial e dimensão não serão revistos, ficando assim, a pesquisa, a cargo do leitor caso surjam dúvidas.

Definição 6 *Se A é uma matriz $m \times n$, o subespaço de R^n gerados pelos vetores linha de A é chamado de espaço linha de A. O subespaço de R^m gerado pelos vetores coluna de A é chamado de espaço coluna de A.*

O sistema $Ax = b$ pode ser escrito na forma:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

Segue de (1.2) que o sistema $Ax = b$ é compatível, ou seja, admite solução se e somente se b pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores colunas de A. Temos então, a seguinte caracterização de sistemas compatíveis [12]:

$$Ax = b \text{ é compatível se e somente se } b \text{ pertence ao espaço coluna de } A,$$

que é uma outra forma de descrever o segundo item do teorema 4.

Os próximos conceitos a serem trabalhados serão os de dependência e independência linear.

Definição 7 *Os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ em um espaço vetorial V são ditos linearmente dependentes se existem escalares $c_1, c_2, ..., c_n$ não todos nulos, tais que:*

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n = 0.$$

Os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ em um espaço vetorial V são ditos linearmente independentes se os únicos escalares $c_1, c_2, ..., c_n$, tais que:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$$

são $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Teorema 5 *Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$, n vetores em R^n. Se $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ é a matriz cuja $j-$ésima coluna é x_j, então os vetores $x_1, x_2, ..., x_n$ são linearmente dependentes se e somente se X é singular.*

Demonstração: A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [12].

1.2.3 Autovalores e Autovetores

Agora serão abordados resultados referentes à autovalores e autovetores. Estes possuem muitas aplicações em Engenharia, principalmente no que se refere às telecomunicações, análise de turbulência, equilíbrio(resistência de materiais), entre outros [10, 12, 13].

Informalmente falando, um autovetor é um vetor que não muda a sua direção quando multiplicado por A, e seu autovalor é o tamanho da sua expansão ou contração neste processo [1].

Definição 8 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Um escalar λ é um autovalor ou valor característico de A se existe um vetor não-nulo x tal que $Ax = \lambda x$. O vetor x é um autovetor ou vetor característico associado a λ.*

Definição 9 *Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, matriz $n \times n$ cujas entradas são números complexos. O par (x, λ) é chamado autopar da matriz A, se $x \neq 0$ e $Ax = \lambda x$.*

Observações

- Qualquer múltiplo não-nulo de x é um autovetor.
- A equação $Ax = \lambda x$ pode ser colocada na forma $(A - \lambda I)x = 0$. Esta equação terá uma solução não-trivial se e somente se $A - \lambda I$ for singular ou, equivalentemente,

  $$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{1.3}$$

  Expandindo o determinante obtém-se um polinômio de grau n na variável λ:

  $$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

  Esse polinômio é chamado de *polinômio característico* e a equação (1.3) é a *equação característica* da matriz.
- Os autovalores da matriz A e de A^T são os mesmos.

- Os autovalores de uma matriz diagonal, triangular inferior ou triangular superior estão na sua diagonal principal.

- O conjunto de autovalores de A é chamado de *espectro* de A, é denotado por $\lambda(A)$. Isto é,

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \{\lambda \mid Ax = \lambda x\} \\ &= \{\text{Conjunto dos autovalores de } A\} \\ &= \text{Espectro da matriz}\end{aligned}$$

A relação entre o polinômio característico de uma matriz com seus autovalores pode ser percebida no teorema abaixo:

Teorema 6 *Os autovalores de A são as raízes do polinômio característico de A.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [9].

Definição 10 (Auto-Espaço associado a um autovalor de uma matriz A) *Seja λ um autovalor fixo de A. O conjunto formado por todos os autovetores de A associados com λ e o vetor nulo é um subespaço de R^n, chamado auto-espaço associado com λ. O auto-espaço associado a λ será denotado por V_λ.*

Multiplicidade algébrica de λ é o número de vezes que λ aparece como raiz da equação característica.

Multiplicidade geométrica de λ é a dimensão do auto-espaço associado a λ, isto é, a dimensão de V_λ.

Um resultado importante com relação a autovetores é que em certos casos eles podem formar um conjunto LI (linearmente independentes). Isto é descrito no teorema a seguir.

Teorema 7 *Se $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ são autovalores distintos de uma matriz $A_{n\times n}$, com autovetores associados $x_1, x_2, ..., x_k$, então $x_1, x_2, ..., x_k$ são linearmente independentes.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [10, 12, 13].

Definição 11 (Diagonalização) *Uma matriz $A_{n\times n}$ é diagonalizável se existirem uma matriz invertível V e uma matriz diagonal Λ satisfazendo $V^{-1}AV = \Lambda$. Neste caso, diz-se que V diagonaliza a matriz A.*

Seguem alguns teoremas importantes que explicam melhor quando uma matriz pode ser diagonalizável e cujas demonstrações podem ser encontradas em [12].

Teorema 8 *Uma matriz $A_{n\times n}$ é diagonalizável se e somente se A tem n autovetores linearmente independentes.*

Observações

- Se A é diagonalizável, então os vetores colunas da matriz V que diagonaliza A são os autovetores de A e os elementos diagonais de Λ são os autovalores associados.
- Se A é $n \times n$ e tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável. Se os autovalores não forem distintos, A pode ou não ser diagonalizável, dependendo se tem ou não n autovetores linearmente independentes.
- Se A é diagonalizável, então A pode ser fatorada num produto $V\Lambda V^{-1}$.

Baseado nos Teoremas 7 e 8 obtém-se o seguinte resultado:

Teorema 9 *Uma matriz A é diagonalizável se todas as raízes de seu polinômio característico forem reais e distintas.*

Existem casos de matrizes quadradas em que $AB = BA$. Quando isto ocorrer, será dito que as matrizes A e B são matrizes comutáveis. Este será um fator importante para resolver um caso muito particular do problema de encontrar as raízes de uma equação polinomial matricial quadrática. Para que duas matrizes comutem é necessário, porém não suficiente, que as matrizes A e B sejam quadradas e de mesma ordem.

O resultado abaixo fornece condições necessárias e suficientes para que duas matrizes comutem.

Proposição 1 *Sejam A e B duas matrizes quadradas diagonalizáveis. Então, A e B comutam, ou seja, $AB = BA$, se e somente se A e B tem os mesmos autovetores.*

Demonstração: Suponha que A e B têm os mesmos autovetores. Como A e B são diagonalizáveis, então deve-se ter $A = V\Lambda_1 V^{-1}$ e $B = V\Lambda_2 V^{-1}$, onde Λ_1 é a matriz diagonal de autovalores de A e Λ_2 é a matriz diagonal de autovalores de B. Portanto,

$$\begin{aligned} AB &= (V\Lambda_1 V^{-1})(V\Lambda_2 V^{-1}) \\ &= V\Lambda_1 (V^{-1}V)\Lambda_2 V^{-1} \\ &= V\Lambda_1\Lambda_2 V^{-1} \\ &= V\Lambda_2\Lambda_1 V^{-1} \\ &= (V\Lambda_2 V^{-1})(V\Lambda_1 V^{-1}) \\ &= BA. \end{aligned}$$

Isto demonstra que as matrizes A e B comutam. A prova da condição suficiente é mais elaborada e não será incluída aqui; ela pode ser encontrada em [10, pag. 421]. □

Teorema 10 (Teorema Espectral para Matrizes Simétricas) *Uma matriz simétrica A pode ser fatorada em $A = Q\Lambda Q^T$, com autovetores ortogonais e unitários na matriz Q e os autovalores na matriz diagonal Λ.*

Demonstração: A demonstração do teorema enunciado acima bem como definições referentes a autovetores ortogonais e unitários podem ser encontrados em [12, 13].

Capítulo 2

Notas históricas e a resolução das equações cúbicas e quárticas

Neste capítulo serão abordadas as resoluções das equações de terceiro e quarto graus. Primeiramente será apresentado, de forma resumida, um pouco do contexto histórico que envolve esta grande descoberta. A história, detalhada por completo, pode ser encontrada em [2] e [3].

2.1 Introdução

Talvez o feito matemático mais importante do século XVI tenha sido a descoberta, por matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbica e quártica.

Em síntese, o que parece ter acontecido foi que, por volta de 1515, Scipione del Ferro (1465-1562), professor de matemática da Universidade de Bolonha, resolveu algébricamente a equação cúbica

$$x^3 + ax = b.$$

Scipione não publicou o resultado mas, antes de morrer, revelou a solução de tal problema a Antônio Fior, seu discípulo.

Por volta de 1535, Nicolo Fontana de Brescia(1500-1557), mais conhecido como Tartaglia(gago, em italiano), devido a um ferimento sofrido na região da garganta quando criança, ferimento este que afetou sua fala, anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica

$$x^3 + cx^2 = d.$$

Fior não acreditou que Tartaglia soubesse realmente resolver tais equações e por isso o desafiou para uma disputa que envolvia a resolução de equações cúbicas. Tais confrontos eram freqüentes na época e, muitas vezes, para um matemático permanecer atuando como professor era necessário que o mesmo tivesse um bom desempenho nesses encontros. Nesta disputa, Tartaglia conseguiu resolver todos os problemas propostos por Fior, que por sinal eram do tipo $x^3 + ax = b$. Fior, ao contrário não havia resolvido a maior parte dos propostos por Tartaglia.

Assim, no dia marcado, constatou-se que Tartaglia sabia resolver dois tipos de cúbicas, sendo que Fior só sabia um. Por esse motivo, Tartaglia triunfou plenamente.

Essa notícia chegou até Girolamo Cardano (1501-1576) praticante de Medicina em Milão. Cardano convidou Tartaglia para ir até sua casa, e lá, com muita insistência, conseguiu que lhe fosse revelado o segredo da resolução das equações do terceiro grau[2]. Tartaglia lhe ensinou a regra, embora não tenha fornecido a demonstração, pedindo em troca o juramento de que Cardano jamais publicaria esse segredo.

Conhecendo esse método, Cardano achou uma demonstração que a justificasse. Ele também estimulou seu secretário e discípulo Ludovico Ferrari (1522-1565) a trabalhar com a equação de quarto grau. Este, encontrou o método de resolução com a devida demonstração.

Com a posse de ambas as soluções, no ano de 1545 em Nuremberg, Cardano publicou uma obra intitulada "Ars Magna", um grande tratado em latim de Álgebra, e lá estavam as regras de resolução das equações do terceiro e quarto graus.

2.2 Resolução de Tartaglia para a equação de terceiro grau

Nesta primeira seção será apresentada a maneira com que Tartaglia obteve a solução da equação de terceiro grau. Obviamente, houve a utilização de métodos e notações atuais para que o entendimento do processo ficasse mais simples para o leitor. A explicação também pode ser obtida em [3].

Seja a equação de terceiro grau:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0. \tag{2.1}$$

Primeiramente deve-se tornar a equação (2.1) na forma $y^3 + py = q$. Para que isso possa acontecer, é necessário seguir os seguintes passos:

- Dividir a equação geral (2.1) por a, obtendo assim uma nova equação:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \tag{2.2}$$

- Substituir x de (2.2) por $y - \dfrac{b}{3a}$ com o objetivo de anular o termo de 2^o grau.

Então, fazendo a mudança de variáveis em (2.2) obtém-se:

$$\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0$$

Desenvolvendo as potências indicadas tem-se:

$$y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)y = \left(-\frac{2b^3}{27a^3} + \frac{bc}{3a^2} - \frac{d}{a}\right)$$

Tome agora:

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \qquad \text{e} \qquad q = -\frac{2b^3}{27a^3} + \frac{bc}{3a^2} - \frac{d}{a}.$$

Depois de realizadas as transformações citadas acima, recaí-se numa equação de terceiro grau, escrita na forma:

$$y^3 + py = q \tag{2.3}$$

Será necessário recordar agora a fórmula do cubo de um binômio:

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

$$(u - v)^3 = -3uv(u - v) + (u^3 - v^3)$$

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3 \tag{2.4}$$

Comparando a equação (2.3) com a equação (2.4), tem-se:

$$\begin{cases} p = 3uv & \Rightarrow \quad uv = \dfrac{p}{3} \\ q = u^3 - v^3 \end{cases}$$

Se for possível escolher u e v de modo que verifiquem: $uv = \dfrac{p}{3}$ e $q = u^3 - v^3$, a relação (2.4) ficará:

$$(u - v)^3 + p(u - v) = q$$

o que significa que, se forem encontrados valores de u e v que satisfaçam o sistema acima e tomando $y = u - v$, esta será uma solução da equação dada.

Para que se encontre os valores de u e v deve-se considerar novamente as equações:

$$\begin{cases} uv = \dfrac{p}{3} \\ \\ u^3 - v^3 = q \end{cases}$$

Elevando-se a primeira equação ao cubo, obtém-se:

$$\begin{cases} u^3v^3 = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \\ \\ u^3 - v^3 = q \end{cases}$$

Fazendo agora: $u^3 = U$ e $v^3 = V$, tem-se:

$$\begin{cases} UV = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \\ \\ U - V = q \end{cases}$$

Basta agora tomar U e $-V$ como raízes de uma equação. Assim, de acordo com o Teorema 2 do Capítulo 1, tem-se:

$$(Y - U)(Y + V) = 0$$

$$Y^2 + YV - YU - UV = 0$$
$$Y^2 + Y(V - U) - UV = 0$$

Lembre que: $\begin{cases} UV = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad U(-V) = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \\ \\ U - V = q \end{cases}$, então essa equação ficará da forma:

$$Y^2 - qY - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

Ao resolver esta equação pela fórmula de Báskara, obtém-se:

$$Y = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4(\frac{-p}{3})^3}}{2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

sendo que as duas raízes, U e $-V$, mencionadas acima serão:

$$U = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad e \quad -V = \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)$$

Sabe-se também que $y = u - v$ e

$$u^3 = U \Rightarrow u = \sqrt[3]{U}$$

e, além disso, que

$$v^3 = V \Rightarrow v = \sqrt[3]{V}.$$

Então: $y = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}$ é a solução enunciada por Tartaglia.

Desta maneira, substituindo os respectivos valores de U e V, será obtida a seguinte expressão:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

E esta é a conhecida fórmula de Tartaglia ou de Cardano, envolvendo apenas algumas mudanças de variáveis.

Depois de encontrado o valor da variável y basta substituí-lo na equação $x = y - \frac{a}{3}$ para encontrar assim o valor das raízes da equação (2.1). Esta transformação era conhecida somente por Tartaglia, ou seja, ele sabia um método que poderia resolver qualquer equação de terceiro grau. E foi esse o fator decisivo no duelo com Fior.

Veja dois exemplos de como encontrar as raízes de uma equação de terceiro grau utilizando a resolução de Tartaglia:

Exemplo 3

Seja a equação polinomial:

$$x^3 + 9x^2 + 24x + 16 = 0 \tag{2.5}$$

Observe que: $a = 1,\ b = 9,\ c = 24$ e $d = 16$.

O primeiro passo será fazer a mudança de variável $x = y - \frac{9}{3}$, ou simplesmente $x = y - 3$.

Tem-se assim:

$(y-3)^3 + 9(y-3)^2 + 24(y-3) + 16 = 0$

$(y^3 - 9y^2 + 27y - 27) + 9y^2 - 54y + 81 + 24y - 72 + 16 = 0$

$y^3 - 3y - 2 = 0$

$y^3 - 3y = 2$

De acordo com Tartaglia , uma das raízes de (2.5) é fornecida pela fórmula:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

onde, neste caso, $p = -3$ e $q = 2$.

$$y = \sqrt[3]{\frac{2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2} - \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{(1)^2 + (-1)^3}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{(1)^2 + (-1)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} \implies y = 2$$

Portanto $y_1 = 2$ é raiz de $y^3 - 3y = 2$. Como $x = y - 3 \Rightarrow x_1 = -1$ é raiz de (2.5).

Agora, utilizando o teorema (2) tem-se: $x^2 + 8x + 16$. As raízes desta nova equação podem ser encontradas pela fórmula de Báskara. Realizando os respectivos cálculos é obtida a raíz $x_2 = -4$, cuja multiplicidade é dois.

Exemplo 4

Considere a equação polinomial:

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 45 = 0 \tag{2.6}$$

Tem-se: $a = 1,\ b = 3,\ c = -3$ e $d = -45$.

Fazendo a mudança de variável $x = y - 1$, obtém-se uma nova equação, porém sem o termo de segundo grau. Esta equação é:

$$y^3 - 6y - 40 = 0.$$

De acordo com a resolução de Tartaglia para equações de terceiro grau, esta seria uma nova equação, onde $p = -6$ e $q = 40$.

Para que o método fique realmente claro, o processo será realizado passo a passo, mas sempre visando obter as raízes da equação (2.6).

Usando a fórmula de Tartaglia, cujo desenvolvimento foi mostrado anteriormente, tem-se:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{\tfrac{40}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{40}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{-6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{40}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{40}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{-6}{3}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{20 + \sqrt{400 - 8}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{400 - 8}}$$

$$y = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$$

$$y = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

$$y = 3,414213562 + 0,585786437$$

$$y = 4$$

Portanto $y_1 = 4$ é uma raiz de $y^3 - 6y - 40 = 0$.

Como foi realizada a mudança de variável $x = y - 1$, tem-se que $x_1 = 4 - 1 = 3$ é uma das raízes de (2.6).

Após, usando o teorema (2) obtém-se um novo polinômio de segundo grau, $x^2 + 6x + 15$, cujas raízes (2.6) podem ser calculadas agora através da fórmula de Báskara.

Realizando esses cálculos, obtém-se: $x_2 = -3 + \sqrt{6}i$ e $x_3 = -3 - \sqrt{6}i$.

2.3 Uma outra abordagem das equações de terceiro grau

Esta e a próxima seção apresentam uma outra maneira de resolver as equações de terceiro e quarto graus. A forma de resolução que será citada a seguir foi apresentada a Elon Lages Lima em 1987, por um de seus alunos. O artigo poderá ser encontrado em [4].

Dada a equação geral de 2^o grau:

$$x^2 + bx + c = 0 \tag{2.7}$$

Primeiramente é necessário relembrar a seguinte propriedade: se x_1 e x_2 são as raízes da equação(2.7), sabe-se que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 x_2 = c \end{cases} \quad \text{ou ainda que:} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 x_2 = P \end{cases}$$

de modo que $S=$ soma das raízes e $P=$ produto das raízes.

A afirmação acima pode ser facilmente verificada. Ora, se x_1 e x_2 são raízes da equação (2.7), então de acordo com o Teorema 2 visto no Capítulo 1, a mesma pode ser escrita como $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Resolvendo esta expressão obtém-se: $(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2) = 0$, e esta pode ser reescrita como:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 \tag{2.8}$$

Usando as variáveis S e P, conforme visto acima, podemos escrever a equação (2.8) da seguinte forma:

$$x^2 - Sx + P = 0 \tag{2.9}$$

A motivação deste método de resolução de equações do terceiro grau vem do cálculo da expressão $y = \sqrt[3]{x}_1 + \sqrt[3]{x}_2$, onde x_1 e x_2 são raízes da equação (2.9). De fato,

$$\begin{array}{rcl} y = \sqrt[3]{x}_1 + \sqrt[3]{x}_2 \;\Rightarrow\; y^3 & = & (\sqrt[3]{x}_1 + \sqrt[3]{x}_2)^3 \\ y^3 & = & x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1x_2}(\sqrt[3]{x}_1 + \sqrt[3]{x}_2) \\ y^3 & = & S + 3\sqrt[3]{P}y \end{array}$$

Esta igualdade também pode ser expressa como:

$$y^3 - 3\sqrt[3]{P}y - S = 0 \tag{2.10}$$

Desta forma, para encontrar o valor de y será necessário resolver a equação cúbica acima. Então, dada uma equação de terceiro grau é possível escrever suas raízes como soma de raízes cúbicas de raízes de uma equação de segundo grau. Isso pode ser feito seguindo-se o esquema abaixo:

Dada a equação de terceiro grau $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, o primeiro passo é a mudança de variável, $x = y - \frac{a}{3}$, a fim de anular o termo de segundo grau. Fazendo essa substituição recai-se numa equação do tipo:

$$y^3 + py + q = 0 \tag{2.11}$$

semelhante a equação da resolução do método de Tartaglia.

Comparando as equações (2.10) e (2.11) , é necessário obter:

$$p = -3\sqrt[3]{P} \qquad e \qquad q = -S,$$

ou, em outras palavras, deve-se determinar P e S de forma que se x_1 e x_2 são raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$, então $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ satisfaz a equação $y^3 + py + q = 0$.

Assim, obtém-se:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{P} = \dfrac{-p}{3} \quad \Rightarrow \quad P = \left(\dfrac{-p}{3}\right)^3 \\ \\ S = -q \end{cases}$$

ou seja, x_1 e x_2 são raízes de $x^2 + qx - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

Daí, por Báskara, encontra-se os valores das raízes x_1 e x_2 como segue abaixo:

$$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \Rightarrow x = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Desta maneira segue-se que:

$$x_1 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$
$$x_2 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Assim, como $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$, segue que:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

satisfaz $y^3 + py + q = 0$.

2.4 Uma abordagem para resolver as equações de quarto grau

A última seção deste capítulo transcreve a solução da equação de quarto grau, partindo do mesmo princípio da seção anterior. Este artigo encontra-se em [4], e antes dele ser publicado, o aluno de Elon descobriu que este método de resolução da equação de quarto grau também havia sido estudado, desenvolvido e publicado por Euler em [5].

Considere a equação do terceiro grau:

$$x^3 - Sx^2 + S_d x - P = 0 \tag{2.12}$$

de raízes x_1, x_2, x_3, que satisfazem:

- $x_1 + x_2 + x_3 = S$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = S_d$
- $x_1x_2x_3 = P$

A análise das afirmações acima segue o raciocínio análogo visto anteriormente na abordagem das equações de terceiro grau. Por este motivo os cálculos ficarão a cargo do leitor, caso haja necessidade.

Seja $y = \sqrt{x}_1 + \sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_3$, então

$$y^2 = (\sqrt{x}_1 + \sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_3)^2 \Rightarrow y^2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}).$$

Como a soma das raízes foi chamada de S, tem-se:

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = (\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3})^2.$$

Desenvolvendo o quadrado obtém-se:

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2(\sqrt{x_1x_2x_3})(\sqrt{x}_1 + \sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_3),$$

ou seja:

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = S_d + 2\sqrt{P}y.$$

Desenvolvendo este binômio obtém-se a seguinte expressão:

$$y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}y + S^2 - 4S_d = 0 \tag{2.13}$$

Portanto, dada a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, o método inicia com a mudança de variável $x = y - \dfrac{a}{4}$, a fim de obter uma equação do tipo:

$$y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0. \tag{2.14}$$

Comparando as equações (2.13) e (2.14), deve-se tomar S, P, e S_d tal que:

- $k_1 = -2S \Rightarrow S = \dfrac{-k_1}{2}$
- $k_2 = -8\sqrt{P} \Rightarrow P = \left(\dfrac{k_2}{8}\right)^2$
- $k_3 = S^2 - 4S_d \Rightarrow S_d = \dfrac{k_1^2 - 4k_3}{16}$.

Assim, voltando para a equação original (2.12) tem-se:

$$x^3 - \frac{k_1}{2}x^2 + \left(\frac{k_1^2 - 4k_3}{16}\right)x - \left(\frac{k_2}{8}\right)^2 = 0,$$

e resolvendo-a, pelo processo visto na seção anterior, as raízes x_1, x_2 e x_3 são obtidas tais que: $y = \sqrt{x}_1 + \sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_3$ satisfaz a equação: $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$.

Capítulo 3

Relacionando equações polinomiais e Álgebra Linear

Neste capítulo, a conexão entre Equações Polinomiais e conteúdos da Álgebra Linear, como autovalores e autovetores, se tornarão evidentes.

3.1 Matriz Companheira

É fundamental neste trabalho, que se defina uma nova modalidade de matriz - matriz companheira - cuja abordagem não é introduzida no decorrer das disciplinas de Álgebra Linear. Após, será enunciado e demonstrado um teorema indispensável ao estudo que será feito nos próximos capítulos.

Definição 12 *Uma matriz $C_{n\times n}$ é dita* MATRIZ COMPANHEIRA *se ela é da forma:*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

onde $a_0,\ a_1, \ldots, a_{n-1}$ *são números reais.*

Uma importante propriedade desta matriz é que ela permite estabelecer uma conexão entre o problema de encontrar raízes de polinômios mônicos e o problema de autovalores matriciais, como pode ser visto no próximo teorema. Um polinômio na variável t é dito mônico se o coeficiente da potência de maior ordem em t é a unidade.

Teorema 11 *As raízes do polinômio* $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \cdots + a_1 t + a_0,\ a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,\ 1, \ldots, n-1$ *são os autovalores da matriz companheira* C.

Demonstração: Será assumido que $a_0 \neq 0$, caso contrário $p(t)$ teria uma raiz nula e a análise poderia ser feita utilizando-se um polinômio mônico de grau $n-1$.

Os autovalores de uma matriz A são calculados ao resolver $\det(A-\lambda I)=0$. Portanto, será utilizado este fato para efetivamente começar a provar o teorema enunciado acima.

Basta provar que $p(t)$ é o polinômio característico de C, ou seja

$$p(t) = \det(C-\lambda I).$$

Para isto, observe que:

$$\det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & \cdots & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & \cdots & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix}_{n\times n}$$

Se $\lambda \neq 0$, então será realizada uma operação elementar para zerar o elemento na posição (2,1). Com esta operação obtém-se:

$$\det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & -\frac{a_0}{\lambda}-a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & \cdots & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & \cdots & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix}_{n\times n}$$

Repetindo esse processo "$(n-2)$"vezes, e aplicando o desenvolvimento do determinante pela expansão em cofatores tem-se:

$$\begin{aligned} \det(C-\lambda I) &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & -\frac{a_0}{\lambda}-a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & -a_2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \\ &= (-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & -\frac{a_0}{\lambda^2}-\frac{a_1}{\lambda}-a_2 \\ 1 & -\lambda & \cdots & -a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} \end{aligned}$$

Após "$(n-2)$"passos obtém-se a seguinte igualdade:

$$
\begin{aligned}
\det(C-\lambda I) &= (-\lambda)^{n-2}\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & (-\frac{a_0}{\lambda^{n-2}}-\frac{a_1}{\lambda^{n-3}}-\cdots-a_{n-2}) \\ & \\ 1 & (-a_{n-1}-\lambda) \end{vmatrix} \\
&= (-\lambda)^{n-2}\cdot \left[\ -\lambda\cdot(-a_{n-1}-\lambda) \quad - \quad (-\frac{a_0}{\lambda^{n-2}}-\frac{a_1}{\lambda^{n-3}}-\cdots-a_{n-2})\ \right] \\
&= (-\lambda)^{n-2}\cdot \left[\ \lambda^2+a_{n-1}\cdot\lambda \quad +\frac{a_0}{\lambda^{n-2}}+\frac{a_1}{\lambda^{n-3}}+\cdots+a_{n-2}\ \right] \\
&= (-1)^{n-2}(\lambda)^{n-2}\cdot \left[\ \lambda^2+a_{n-1}\cdot\lambda \quad +\frac{a_0}{\lambda^{n-2}}+\frac{a_1}{\lambda^{n-3}}+\cdots+a_{n-2}\ \right] \\
&= (-1)^{n}\cdot \left[\ \lambda^n+a_{n-1}\cdot\lambda^{n-1}+a_{n-2}\cdot\lambda^{n-2}+a_{n-3}\cdot\lambda^{n-3}+\cdots+a_1\cdot\lambda+a_0\ \right]
\end{aligned}
$$

Fazendo agora $\det(C-\lambda I)=0$, verifica-se que:

$$\lambda^n+a_{n-1}\cdot\lambda^{n-1}+a_{n-2}\cdot\lambda^{n-2}+a_{n-3}\cdot\lambda^{n-3}+\cdots+a_1\cdot\lambda+a_0=0$$

E então pode-se concluir que λ é raiz do polinômio $p(t)$.

Conseqüências:

1. As raízes do polinômio podem ser calculadas através dos autovalores da matriz companheira associada. Na prática, isto pode ser feito utilizando-se pacotes computacionais tais como MATLAB ou MATHEMATICA.

2. Outra matriz companheira associada a $p(t)$ é:

$$E = C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times n} .$$

   As raízes de $p(t)$ são os autovalores de E pois, como foi citado no primeiro capítulo, os autovalores de uma matriz e sua transposta são os mesmos.

3. Se todas as raízes de $p(t)$ são simples, ou seja, se a multiplicidade algébrica de cada raíze de $p(t)$ é igual a um, então E e C têm autovalores distintos e portanto, de acordo com o Teorema 7 do Capítulo 1, têm n autovetores linearmente independentes. Logo E pode ser diagonalizada (veja Teorema 8).

   Neste caso E é diagonalizável com matriz de autovetores dada por:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ {\lambda_1}^2 & {\lambda_2}^2 & {\lambda_3}^2 & \cdots & {\lambda_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underbrace{{\lambda_1}^{n-1}}_{v_1} & \underbrace{{\lambda_2}^{n-1}}_{v_2} & \underbrace{{\lambda_3}^{n-1}}_{v_3} & \cdots & \underbrace{{\lambda_n}^{n-1}}_{v_n} \end{bmatrix}$$

Isto é, $E = V\Lambda V^{-1}$ em que Λ é a matriz diagonal formada pelos n autovalores de E, ou seja:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Para verificar isto, observe que:

$E = V\Lambda V^{-1} \Longleftrightarrow EV = V\Lambda$

$$\Longleftrightarrow E \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} Ev_1 & Ev_2 & Ev_3 & \cdots & Ev_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \lambda_3 v_3 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow Ev_i = \lambda_i v_i \quad \text{onde,} \quad i = 1, 2, ..., n \ \text{ e } \ v_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ {\lambda_i}^2 \\ \vdots \\ {\lambda_i}^{n-2} \\ {\lambda_i}^{n-1} \end{bmatrix}_{n\times 1} .$$

De fato,

$$Ev_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ {\lambda_i}^2 \\ \vdots \\ {\lambda_i}^{n-2} \\ {\lambda_i}^{n-1} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$Ev_i = \begin{bmatrix} \lambda_i \\ {\lambda_i}^2 \\ {\lambda_i}^3 \\ \vdots \\ {\lambda_i}^{n-1} \\ -a_0 - a_1\lambda_i - \cdots - a_{n-1}{\lambda_i}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Como λ_i é raiz de $p(t)$ (visto no Teorema 11), segue-se que:

$$\lambda_i^n + a_{n-1}{\lambda_i}^{n-1} + a_{n-2}{\lambda_i}^{n-2} + \cdots + a_2{\lambda_i}^2 + a_1\lambda_i + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i^n = -a_0 - a_1\lambda_i - a_2{\lambda_i}^2 - \cdots - a_{n-2}{\lambda_i}^{n-2} - a_{n-1}{\lambda_i}^{n-1} \tag{3.1}$$

Substituindo a equação (3.1) na última linha da matriz Ev_i, calculada anteriormente, obtém-se:

$$Ev_i = \begin{bmatrix} \lambda_i \\ {\lambda_i}^2 \\ {\lambda_i}^3 \\ \vdots \\ {\lambda_i}^{n-1} \\ {\lambda_i}^n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \lambda_i \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ {\lambda_i}^2 \\ \vdots \\ {\lambda_i}^{n-2} \\ {\lambda_i}^{n-1} \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

Portanto, $Ev_i = \lambda_i v_i$. $\square$

Capítulo 4

Equações Polinomiais Matriciais

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas idéias introdutórias que permitam, primeiramente, entender o problema de encontrar soluções de certas equações polinomiais com coeficientes matriciais, e em segundo lugar, apresentar alguns resultados que ajudarão a descrever um método de resolução de equações polinomiais matriciais quadráticas, que será abordado no próximo capítulo.

Para tanto, inicia- se com alguns fatos históricos sobre equações polinomiais com coeficientes escalares, e em seguida serão apresentados dois exemplos que tornarão evidente os obstáculos que são encontrados no estudo do problema. O estudo de equações polinomiais matriciais quadráticas virá após uma breve apresentação de alguns conceitos e resultados teóricos sobre polinômios matriciais.

4.1 Motivação e formulação do problema

Nos capítulos anteriores mostrou-se que se as equações forem de 2^o, 3^o ou 4^o grau, então suas raízes são encontradas por radicais, fazendo-se apenas algumas mudanças de variáveis, no caso de equações de 3^o e 4^o graus. Quanto às equações de quinto grau, Euler(1707-1783), baseado no fato de que a resolução de uma equação quártica se reduz à resolução de uma cúbica associada a ela, tentou igualmente, porém desta vez sem sucesso, reduzir a resolução de uma equação quíntica geral à de uma quártica associada. Após muitos anos de estudos, o médico italiano Paolo Ruffini(1765-1822) procurou provar, embora sem muito êxito, que as raízes das equações gerais de grau cinco, ou maior, não podem ser expressas por meio de radicais em termos dos coeficientes respectivos. Então, em 1797, Carl Friedrich Gauss, durante sua tese de doutorado deu a primeira demonstração satisfatória do Teorema Fundamental da Álgebra[2], veja Teorema 1.

Mas, a questão principal e que é foco deste trabalho é como encontrar soluções para equações polinomiais de grau m do tipo

$$P_m(X) = A_m X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \cdots + A_1 X + A_0 = 0, \tag{4.1}$$

com $A_i \in \mathbb{R}^{q\times q}, i = 0, \ldots, m,\ A_m \neq 0$, e $X \in \mathbb{R}^{q\times q}$.

Ou seja, qual a matriz X que satisfaz $P_m(X) = 0$, $0 \in \mathbb{R}^{q \times q}$?

Conforme será apresentado mais adiante, o problema é difícil e pode ou não ter solução. Quando uma tal X existe satisfazendo a equação (4.1), ela é dita *solvente* de $P_m(X)$. Para ilustrar o grau de dificuldade do problema serão considerados dois exemplos envolvendo equações polinomiais matriciais de primeiro grau.

Exemplo 5

Seja $P_1(X) = A_1X + A_0$, com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } A_0 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$$

Observe que $P_1(X) = 0 \Leftrightarrow A_1X + A_0 = 0 \Leftrightarrow A_1X = -A_0$.

$A_1X = -A_0$ pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$$

Note que este é um sistema da forma $AX = B$, onde $A = A_1$ e $B = -A_0$. Considere agora:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \vdots X_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \vdots B_2 \end{bmatrix},$$

de forma que

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$$

Então, é claro que $A_1X = -A_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1X_1 \vdots A_1X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \vdots B_2 \end{bmatrix}$. Portanto, para se obter a solução de $A_1X = -A_0$ será necessário encontrar soluções que satisfaçam:

$$I)\ A_1X_1 = B_1 \qquad \text{e} \qquad II)\ A_1X_2 = B_2$$

Análise do primeiro sistema de equações:

$I)$ $A_1X_1 = B_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Repare que $\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ são soluções da equação I.

Perceba que o sistema I admite infinitas soluções. Para que isto fique claro, é necessário fazer algumas operações elementares com o objetivo de encontrar o posto da matriz $\left[\ A_1\ \right]$ e de $\left[\ A_1 \vdots B_1\ \right]$.

Primeiramente será realizado o cálculo do posto da matriz A_1, $posto(A_1)$.

$$\left[\ A_1\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow posto(A_1) = 1.$$

Agora será feito o cálculo do $posto\,(\,A_1 \vdots B_1\,)$:

$$\left[\ A_1 \vdots B_1\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & -3 \\ -3 & 6 & \vdots & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow posto\,(\,A_1 \vdots B_1\,) = 1.$$

Observe que o posto da matriz aumentada é igual ao posto da matriz A_1, além disso, o posto de ambas é menor que o número de incógnitas do sistema(que é dois) e por esse motivo o sistema I admite infinitas soluções, conforme visto no Teorema 4 do Capítulo 1.

Agora será resolvida a segunda equação:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Será necessário, novamente, utilizar o posto das matrizes para chegar a alguma conclusão. É sabido que o posto da matriz A_1 é 1, calculado anteriormente. Portanto, basta encontrar o $posto\,(\,A_1 \vdots B_2\,)$. Realizando as mudanças adequadas encontra-se que:

$$\left[\ A_1 \vdots B_2\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 2 \\ -3 & 6 & \vdots & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow posto\,(\,A_1 \vdots B_2\,) = 2.$$

Já que neste segundo caso, o posto da matriz aumentada $(A_1 \vdots B_2)$ é maior que o posto da matriz A_1, o sistema de equações é inconsistente, ou seja, não admite solução alguma.

O sistema geral foi decomposto em dois sistemas "menores", a fim de facilitar o trabalho. Como uma das duas equações que compõem o sistema geral não admite solução, embora a outra possua infinitas soluções, então podemos concluir que o problema original também não possui solução.

Exemplo 6

Seja agora $P_1(X) = A_1X + A_0$, com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } A_0 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$$

Analogamente ao exemplo anterior, tem- se que $P_1(X) = 0 \Leftrightarrow A_1X+A_0 = 0 \Leftrightarrow A_1X = -A_0$.

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$$

Novamente este é um sistema da forma $AX = B$, onde $A = A_1$ e $B = -A_0$. Para obter as soluções desejadas deve-se considerar agora os seguintes sistemas de equações lineares e fazer o mesmo estudo do exemplo anterior:

$$I)\ A_1X_1 = B_1 \qquad \text{e} \qquad II)\ A_1X_2 = B_2$$

O primeiro sistema de equações é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Novamente será preciso calcular o posto de $\begin{bmatrix} A_1 \end{bmatrix}$ e de $\begin{bmatrix} A_1 \vdots B_1 \end{bmatrix}$. Seguindo o mesmo raciocínio do exemplo anterior o primeiro cálculo será o $posto(A_1)$.

$$\begin{bmatrix} A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow posto(A_1) = 2.$$

O segundo passo será calcular o $posto\,(\,A_1 \vdots B_1\,)$:

$$\begin{bmatrix} A_1 \vdots B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & -3 \\ -3 & 5 & \vdots & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow posto\,(\,A_1 \vdots B_1\,) = 2.$$

Agora será necessário resolver a segunda equação:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Como o posto da matriz A_1 já foi encontrado acima, agora será encontrado o posto de $\begin{bmatrix} A_1 \vdots B_2 \end{bmatrix}$. Efetuando as operações elementares apropriadas obtém-se:

$$\begin{bmatrix} A_1 \vdots B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 2 \\ -3 & 5 & \vdots & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow posto\,(\,A_1 \vdots B_2\,) = 2.$$

Repare que o posto da matriz $\begin{bmatrix} A_1 \end{bmatrix}$ é igual ao posto da matriz aumentada. Além disso, o número de linhas não-nulas em cada um dos sistemas após a transformação para a forma escada é igual ao número de incógnitas do sistema original. Por isso, de acordo com o Teorema 4 do Capítulo 1, o sistema admite uma única solução e assim, a equação polinomial $P_1(X) = 0$ também tem uma única solução.

Estes exemplos simples mostram que o problema de encontrar raízes para equações polinomiais com coeficientes matriciais pode não ter solução sendo, portanto, um problema difícil de ser resolvido. Por isso, o foco deste trabalho ficará restrito unicamente à equações polinomiais matriciais quadráticas.

4.2 Noções básicas sobre polinômios matriciais

O estudo de equações polinomiais matriciais começou por volta de cinco séculos atrás. Porém, a preocupação com equações polinomiais envolvendo matrizes e/ou polinômios com coeficientes matriciais é relativamente recente [1]. Um polinômio matricial de grau m (também chamado de λ-matriz) é uma função de valor matricial da forma

$$P_m(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0, \tag{4.2}$$

em que os coeficientes A_i são matrizes $q \times q$ e $A_m \neq 0$. (Aqui, obviamente 0 é a matriz nula). Além disso, $P_m(\lambda)$ será uma matriz $q \times q$ cujas entradas são polinômios escalares de grau menor ou igual a m.

No que se refere a polinômios matriciais, existem dois problemas que destacam-se. O primeiro, no qual este trabalho foi direcionado, tem o objetivo de encontrar matrizes $X \in \mathbb{C}^{q\times q}$ tal que

$$P_m(X) = A_mX^m + A_{m-1}X^{m-1} + ... + A_0 = 0 \tag{4.3}$$

e o segundo, que fornecerá auxílio para que o problema acima seja resolvido, é de encontrar escalares λ tal que

$$\det\big(\mathrm{P_m}(\lambda)\big) = 0. \tag{4.4}$$

Como este trabalho tratará unicamente de equações polinomiais matriciais quadráticas, o problema de encontrar um solvente (ou raiz) para $P_m(X)$ reduz-se a:

$$P_2(X) = A_2X^2 + A_1X + A_0 = 0$$

Observação

Se A_m é não-singular a equação $P_m(X) = 0$ pode ser transformada numa outra equivalente da forma:

$$M(X) = X^m + B_{m-1}X^{m-1} + ... + B_0 = 0, \tag{4.5}$$

onde $B_i = A_m^{-1}A_i$, para $i = 0, \dots, m$. Neste caso, $M(X)$ é dito polinômio mônico.

Se X é uma matriz escalar, $X = \lambda I$, então P na equação (4.3) torna-se a λ-matriz ou um polinômio matricial na variável complexa λ descrito em (4.2), e o problema de encontrar pares (λ, x), $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^q$, $x \neq 0$, tal que

$$P_m(\lambda)x = 0, \tag{4.6}$$

é chamado de *problema de autovalor polinomial matricial.*

O principal obstáculo ao se encontrar os solventes (ou raízes) de um polinômio matricial está no fato de que não há um resultado que garanta a existência de soluções, como o Teorema

Fundamental da Álgebra, válido para polinômios escalares. Para estudar como isto pode ser feito, necessita-se formalizar o conceito de autovalor para polinômios matriciais.

Definição 13 *Dizemos que λ é um autovalor do polinômio matricial quadrático $P_m(\lambda)$ se $det\big(P_m(\lambda)\big) = 0$. Este será chamado de polinômio característico de $P_m(\lambda)$ e denotado por $\mathsf{p}(\lambda)$. Dizemos também que $x \neq 0$ (vetor $q \times 1$) é um autovetor associado a λ se $P_m(\lambda)x = 0$.*

Observações:

- Resolver $P_m(\lambda)x = 0$ é o mesmo que resolver um sistema homogêneo com q equações.
- Como os coeficientes A_i são $q \times q$, a equação característica,

$$\mathsf{p}(\lambda) = \det(P_m(\lambda)) = 0$$

  possui grau menor ou igual a mq, onde m é o grau do polinômio $P_m(\lambda)$ e q é o tamanho dos coeficientes A_{is}. Assim, o número de autovalores existentes também será dado pelo grau de $\mathsf{p}(\lambda)$. Como o trabalho restringe-se à equações polinomiais quadráticas, o grau de $\mathsf{p}(\lambda)$ será menor ou igual a $2q$. Ou seja, considerando a equação quadrática existirá, no máximo, $2q$ autovalores.
- Se A_2 for igual à matriz nula ($A_2 = 0$) e $A_1 = -I$, a equação característica reduz-se a $\det(\mathrm{A_0} - \lambda \mathrm{I}) = 0$. Neste caso, $P_m(\lambda)$ possui grau um e o problema de autovalor é simplesmente o problema de autovalor- autovetor matricial padrão. Analogamente, se x é um autovetor associado a λ, $P_m(\lambda)x = 0$ reduz-se a $(A_0 - \lambda I)x = 0$ ou equivalentemente $A_0 x = \lambda x$ (veja Definição 9).

Um exemplo que ilustra o último item acima é o seguinte:

Exemplo 7

Seja $P_2(\lambda) = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$, com $A_2 = 0, A_1 = -I$, e $A_0 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$.

Então $P_2(\lambda) = -\lambda I + A_0 \iff P_2(\lambda) = A_0 - \lambda I$. Inicialmente será necessário encontrar os autovalores da matriz. Para isso será utilizada a equação característica.

$$\det(\mathrm{A_0} - \lambda \mathrm{I}) = 0 \quad \iff \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \iff \quad (2-\lambda)(-5-\lambda) - (2)(-3) = 0$$

Efetuando os cálculos obtém-se a seguinte equação: $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$. As raízes desta, encontradas a partir da fórmula de Báskara, são: $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 1$.

Agora, serão calculados os autovetores associados aos dois autovalores encontrados acima. Para tal procedimento será usada a equação: $(A_0 - \lambda I)x = 0$. Os autovetores x_i serão denotados neste exemplo por $x_i = [u_1\ u_2]^T$.

O autovetor associado a $\lambda_1 = -4$ é dado por: $(A_0 + 4I)x_1 = 0$, ou posto na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 2+4(1) & -3 \\ 2 & -5+4(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ao resolver este sistema homogêneo obtém-se que o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -4$ é $x_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ 2u_1 \end{bmatrix}$, tomando-se $u_1 = 1$ tem-se: $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Procedendo analogamente, obtém-se que o autovetor x_2 associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$ é $x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Veja que os autovalores são distintos. Desta maneira, de acordo com o Teorema 7 visto no Capítulo 1, concluí-se que os autovetores são linearmente independentes e, por isso, a matriz A_0 é diagonalizável e pode ser decomposta em $V^{-1}A_0V = \Lambda$ ou $A_0 = V\Lambda V^{-1}$.

• No Capítulo 3 foi visto que a todo polinômio escalar mônico (ou seja, com o coeficiente do termo de maior grau igual a um) está associada uma matriz companheira. Por exemplo, se $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ é um polinômio escalar quadrático, a matriz companheira associada é:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Neste caso, se λ_1 e λ_2 são raízes distintas de $p(\lambda)$, então os autovetores de C, correspondentes respectivamente aos autovalores acima, serão:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Desta forma, os autovetores são linearmente independentes e C pode ser escrita como $C = V\Lambda V^{-1}$, ou seja,

$$C = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

No caso de polinômios matriciais mônicos, isto é, quando o coeficiente do termo de maior grau é a matriz identidade, existe um resultado análogo, mas envolvendo matrizes companheiras em blocos. Assim, caso o polinômio seja um polinômio quadrático mônico, isto é, $P_2(\lambda) = \lambda^2 I + A_1\lambda + A_0$, a matriz companheira associada em bloco será da forma:

$$C_A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -A_0 & -A_1 \end{array}\right]_{2q\times 2q}$$

Se x_i é um autovetor de $P_2(\lambda)$ associado a um autovalor λ_i, isto é, se $P_2(\lambda_i)x_i = 0$, então os λ_i são autovalores de C_A com autovetores associados v_i da forma:

$$v_i = \begin{bmatrix} x_i \\ \lambda_i x_i \end{bmatrix}_{2q\times 1} \tag{4.7}$$

Analogamente ao polinômio escalar quadrático, se todos os λ_i de $P_2(\lambda)$ são simples, então C_A é diagonalizável. Ainda mais, se $v_i \in \mathbb{C}^{2q}$ é um autovetor de C_A associado a λ_i, então vale que:

$$C_A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{2q} \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_{2q} x_{2q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{2q} \end{bmatrix} V^{-1}$$

ou seja, $C_A = V \Lambda V^{-1}$.

A nível de curiosidade, uma vez que não será estudado este caso, se o polinômio matricial fosse de terceiro grau, ou seja, $P_3(\lambda) = \lambda^3 I + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$ então a matriz companheira associada seria:

$$C_A = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \\ \hline -A_0 & -A_1 & -A_2 \end{array}\right]_{3q\times 3q} .$$

Os autovetores v_i desta matriz seriam encontrados da mesma maneira, isto é, $C_A v_i = \lambda_i v_i$ e teriam a seguinte forma:

$$v_i = \begin{bmatrix} x_i \\ \lambda_i x_i \\ (\lambda_i)^2 x_i \end{bmatrix}_{3q\times 1}$$

Da mesma maneira que os outros exemplos citados acima, se os autovalores forem todos distintos então a matriz companheira de um polinômio de terceiro grau poderá ser diagonalizada em $C_A = V\Lambda V^{-1}$. A matriz dos autovetores estará apresentada como segue:

$$V = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{3q} \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_{3q} x_{3q} \\ (\lambda_1)^2 x_1 & (\lambda_2)^2 x_2 & \dots & (\lambda_{3q})^2 x_{3q} \end{bmatrix}_{3q\times 3q}$$

Com o seguinte exemplo, de um polinômio quadrático mônico, ficará claro como os autovalores de $P_2(\lambda)$ são os mesmos que o da matriz companheira a ele associado. Além disso, os autovetores do polinômio também apresentarão relação com os autovetores da matriz companheira, como foi citado anteriormente. Acompanhe o exemplo abaixo:

Exemplo 8

Seja $P_2(\lambda) = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$, com $A_1 = \begin{bmatrix} -1.2 & 0.3 \\ 1.2 & 1.2 \end{bmatrix}$ e $A_0 = \begin{bmatrix} -1.6 & 0.6 \\ -2.4 & -1.6 \end{bmatrix}$

Ao substituir os respectivos valores e fazendo os cálculos obtém-se:

$$P_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} -1.2 & 0.3 \\ 1.2 & 1.2 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -1.6 & 0.6 \\ -2.4 & -1.6 \end{bmatrix}$$

$$P_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1.2\lambda - 1.6 & 0.3\lambda + 0.6 \\ 1.2\lambda - 2.4 & \lambda^2 + 1.2\lambda - 1.6 \end{bmatrix}$$

• Cálculo dos autovalores:

Para que λ seja autovalor de $P_2(\lambda)$ é necessário que $\det\big(\mathrm{P}_2(\lambda)\big) = 0$. Desta forma:

$$\begin{aligned} \det\big(\mathrm{P}_2(\lambda)\big) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda^2 - 1.2\lambda - 1.6 & 0.3\lambda + 0.6 \\ 1.2\lambda - 2.4 & \lambda^2 + 1.2\lambda - 1.6 \end{bmatrix}\right) \\ &= (\lambda^2 - 1.2\lambda - 1.6)(\lambda^2 + 1.2\lambda - 1.6) - (1.2\lambda - 2.4)(0.3\lambda + 0.6) \\ &= \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 \end{aligned}$$

Fazendo agora $\det\big(\mathrm{P}_2(\lambda)\big) = 0$ tem-se que:

$$\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0 \tag{4.8}$$

Fazendo $a = \lambda^2$, tem-se: $a^2 - 5a + 4 = 0$. Ao resolver esta equação de segundo grau encontra-se como raízes os seguintes valores: $a_1 = 1$ e $a_2 = 4$. Voltando para a equação em função de λ obtém-se as raízes de $(\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4) = 0$. Estas são dadas por: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ e $\lambda_4 = -2$. Estes são os autovalores de $P_2(\lambda)$.

• Cálculo dos autovetores:

A maneira com que os autovetores de $P_2(\lambda)$ são encontrados é análoga ao do exemplo anterior, por este motivo apenas será calculado um dos autovetores (o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$), enquanto que os demais serão citados, ficando o cálculo a critério do leitor, caso haja necessidade. Colocando $P_2(\lambda_1)x_1$ na forma matricial tem-se:

$$\begin{aligned} P_2(\lambda_1)x_1 &= \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1.2\lambda - 1.6 & 0.3\lambda + 0.6 \\ 1.2\lambda - 2.4 & \lambda^2 + 1.2\lambda - 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1)^2 - 1.2(1) - 1.6 & 0.3(1) + 0.6 \\ 1.2(1) - 2.4 & (1)^2 + 1.2(1) - 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1.8 & 0.9 \\ -1.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim sendo, o autovetor associado a $\lambda_1 = 1$ é obtido resolvendo-se o sistema $P_2(\lambda_1)x_1 = 0$, ou seja, basta resolver o sistema homogêneo com duas equações e duas incógnitas a seguir:

$$\begin{cases} -1.8u_1 + 0.9u_2 = 0 \\ -1.2u_1 + 0.6u_2 = 0 \end{cases}$$

Fazendo isto, obtém-se que o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ é $x_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ 2u_1 \end{bmatrix}$. Tomando-se $u_1 = 1$, obtém-se: $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Procedendo de maneira análoga, encontra-se que os autovetores de $P_2(\lambda)$ associados, respectivamente, a seus autovalores são:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 \rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad & \lambda_2 = -1 \rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \lambda_3 = 2 \rightarrow x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad & \lambda_4 = -2 \rightarrow x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Outra maneira de encontrar os autovalores e autovetores é através de C_A. Primeiramente será formada a matriz companheira. Neste caso, ela é dada por:

$$C_A = \left[\begin{array}{r|r} 0 & I \\ \hline -A_0 & -A_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rr|rr} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1.6 & -0.6 & 1.2 & -0.3 \\ 2.4 & 1.6 & -1.2 & -1.2 \end{array}\right]$$

- Cálculo dos autovalores associados a C_A:

Para obter os autovalores é necessário que $\det(C_A - \lambda I) = 0$. Sendo assim, $(C_A - \lambda I)$ é dada por:

$$(C_A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1.6 & -0.6 & 1.2-\lambda & -0.3 \\ 2.4 & 1.6 & -1.2 & -1.2-\lambda \end{bmatrix}$$

Usando o desenvolvimento do determinante pelo cofator para iniciar o cálculo de $\det(C_A - \lambda I)$ obtém-se:

$$\begin{aligned} \det(C_A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1.6 & -0.6 & 1.2-\lambda & -0.3 \\ 2.4 & 1.6 & -1.2 & -1.2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2(-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -0.6 & 1.2-\lambda & -0.3 \\ 1.6 & -1.2 & -1.2-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^4\begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 1.6 & -0.6 & -0.3 \\ 2.4 & 1.6 & -1.2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -0.6 & 1.2-\lambda & -0.3 \\ 1.6 & -1.2 & -1.2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 1.6 & -0.6 & -0.3 \\ 2.4 & 1.6 & -1.2-\lambda \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Convém lembrar que existem várias formas de calcular o determinante acima. A regra utilizada para obter os resultados neste trabalho foi a de Sarrus. Calculando o primeiro determinante tem-se:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -0.6 & 1.2-\lambda & -0.3 \\ 1.6 & 1.2 & -1.2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3.4\lambda - 1.20$$

Calculando o outro determinante, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 1.6 & -0.6 & -0.3 \\ 2.4 & 1.6 & -1.2-\lambda \end{vmatrix} = -1.6\lambda^2 - 1.20\lambda + 4$$

Voltando ao determinante original (4.10) e substituindo os valores calculados acima tem-se que:

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{C_A} - \lambda\mathrm{I}) &= (-\lambda)[-\lambda^3 + 3.4\lambda - 1.20] + [-1.6\lambda^2 - 1.20\lambda + 4] \\ &= \lambda^4 - 3.4\lambda^2 + 1.20\lambda - 1.6\lambda^2 - 1.20\lambda + 4 \\ &= \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 \end{aligned}$$

Fazendo $\det(\mathrm{C_A} - \lambda\mathrm{I}) = 0$ obtém-se:

$$\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0 \tag{4.11}$$

Comparando-se (4.8) com (4.11) verifica-se que $\det(P_2(\lambda)) = \det(C_A - \lambda I) = 0$. Logo conclui-se que os autovalores de $P_2(\lambda)$ são os mesmos que o da matriz companheira associada.

- Cálculo dos autovetores:

Para verificar que os autovetores de C_A são como em (4.7) serão utilizados os procedimentos dos exemplos anteriores. Os autovetores de C_A serão denotados por $v_i = [t_1\ t_2\ t_3\ t_4]^T$.

Então para $\lambda_1 = 1$ tem-se

$$(C_A - \lambda I)v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1.6 & -0.6 & 0.2 & -0.3 \\ 2.4 & 1.6 & -1.2 & -2.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema homogêneo obtém-se que:

$$v_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ 2t_1 \\ t_1 \\ 2t_1 \end{bmatrix}. \text{ Tomando-se } t_1 = 1, \text{ obtém-se } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Isto verifica que o autovetor associado a λ_1 é da forma: $v_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda_1 x_1 \end{bmatrix}_{4\times 1}$, com $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sendo o autovetor de $P_2(\lambda)$, conforme visto em (4.9).

Procedendo analogamente prova-se que todos os autovetores de C_A são de fato como em (4.7).

Como os autovalores são simples, ou seja, possuem multiplicidade algébrica igual a um, de acordo com o Teorema 7, visto no Capítulo 1, se os autovalores são todos distintos então os autovetores da matriz são linearmente independentes. Assim, de acordo com o Teorema 8, também do Capítulo 1, pode-se diagonalizar a matriz companheira, tornando-a da forma:

$$\begin{aligned} C_A &= V\Lambda V^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot V^{-1} \end{aligned}$$

Vale ressaltar que neste processo, a matriz V é formada pelos autovetores e a matriz Λ é formada pelos autovalores associados à matriz companheira C_A.

Caso os autovalores não fossem todos distintos, a matriz poderia ou não ser diagonalizável. Existem casos em que a multiplicidade algébrica de um autovalor é maior que um, mas mesmo assim, os autovetores correspondentes formam um conjunto linearmente independentes. Estes aspectos fogem dos objetivos deste trabalho e não serão abordados.

Capítulo 5

Existência e construção de solventes

Conforme foi comentado no capítulo anterior, encontrar solventes para uma equação polinomial matricial é um problema difícil. Por isso, apenas o caso quadrático será analisado, incluindo uma generalização da bem conhecida *fórmula de Báskara* (válida para para equações escalares quadráticas) para resolver equações matriciais quadráticas.

5.1 A fórmula de Báskara para equações polinomiais matriciais quadráticas

Uma questão natural que aparece é se a fórmula usual para as raízes de uma equação escalar quadrática pode ser generalizada para encontrar solventes de equações polinomiais matriciais quadráticas. Isto é, a questão é se equação matricial quadrática

$$AX^2 + BX + C = 0, \tag{5.1}$$

pode ser resolvida usando a fórmula de Báskara. A resposta é sim, mas sob certas condições. Para discutir o assunto necessita-se de alguns conceitos.

Definição 14 *Uma matriz real $B_{n\times n}$ é raiz quadrada de uma matriz real $A_{n\times n}$ quando $B^2 = A$.*

O exemplo mais trivial que pode ser dado é de uma matriz diagonal com entradas positivas. Apenas será necessário extrair a raiz dos elementos de sua diagonal. Veja a verificação disto no exemplo a seguir:

Se $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$, então, dentre várias possibilidades, uma raiz quadrada de A é:

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{9} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{16} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

visto que,

$$B^2 = BB = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} = A.$$

Repare também que outra raiz quadrada de A que poderia ser tomada é:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Este exemplo simples mostra que uma matriz quadrada pode admitir muitas raízes quadradas. A partir disso, se B é uma raiz quadrada de A, ela será denotada por $A^{1/2}$.

Proposição 2 *Toda matriz quadrada diagonalizável com autovalores positivos admite raiz quadrada.*

Demonstração: Seja A uma matriz quadrada diagonalizável. Então:

$$\begin{aligned} A &= V\Lambda V^{-1} \\ &= V\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}V^{-1} \\ &= V\Lambda^{\frac{1}{2}}V^{-1}V\Lambda^{\frac{1}{2}}V^{-1} \\ &= BB \\ &= B^2. \end{aligned}$$

Desta forma, se $B = V\Lambda^{\frac{1}{2}}V^{-1}$, então pode-se concluir que $B^2 = A$, ou seja, $B = V\Lambda^{\frac{1}{2}}V^{-1}$ é uma raiz quadrada de A.

Veja agora um exemplo que ilustra a Proposição 2 enunciada acima:

Exemplo 9

Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

- Cálculo dos autovalores de A:

$$\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} &\Rightarrow (5-\lambda)(4-\lambda) - 2 = 0 \\ &\Rightarrow 20 - 5\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 2 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0 \end{aligned}$$

Ao resolver esta equação de segundo grau, obtém-se os seguintes valores para o escalar lambda: $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 3$. Note que A é uma matriz quadrada com autovalores positivos.

• Cálculo dos autovetores: Seja $x_1 = [u_1\ u_2]^T$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 6$. Então

$$(A - 6I)x_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} 5-6 & 1 \\ 2 & 4-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema homogêneo com duas equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} -u_1 + u_2 = 0 \\ 2u_1 - 2u_2 = 0 \end{cases},$$

obtém-se que o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 6$ é da forma $x_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \end{bmatrix}$ e será tomado o autovetor, $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Procedendo de maneira análoga, verifica-se que um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$ é $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Portanto, uma matriz de autovetores de A é: $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Observe que os autovetores de V são linearmente independentes, portanto A pode ser diagonalizada.

• Cálculo de V^{-1}:

Será considerado o fato de que para obter-se a inversa da matriz V deve-se satisfazer a igualdade:

$$VV^{-1} = I \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ao desenvolver a multiplicação de matrizes obtém-se as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} c + d = 0 \\ c - 2d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo estes sistemas obtém-se:

$a = \dfrac{2}{3}$, $b = \dfrac{1}{3}$, $c = \dfrac{1}{3}$ e $d = -\dfrac{1}{3}$. Portanto, a matriz inversa de V é $V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Realizando-se as operações básicas com estas matrizes, fica fácil verificar que:

$$V\Lambda V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = A.$$

• Cálculo de B, ou seja, matriz raiz quadrada de A.

De acordo com a demonstração da Proposição 2, pôde se verificar que a matriz raiz quadrada de A é dada por: $V\Lambda^{\frac{1}{2}}V^{-1}$. Isto é:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{2\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}-1 \\ 2\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 \end{bmatrix}$$

• Verificação de que $A = BB$.

Agora será verificado que a matriz B encontrada acima realmente é raiz quadrada de A, ou seja, $A = BB$.

$$BB = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}-1 \\ 2\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}-1 \\ 2\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 \end{bmatrix}$$

$$BB = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A.$$

Proposição 3 *Toda matriz simétrica real com autovalores positivos possui raiz quadrada.*

Demonstração: Basta usar o Teorema Espectral para Matrizes Simétricas (visto no Capítulo 1) e a Proposição 2.

Observe uma ilustração da Proposição 3 citada, lembrando que o objetivo será encontrar $B = V\Lambda^{\frac{1}{2}}V^{-1}$, tal que $A = BB$.

Exemplo 10

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, uma matriz simétrica real.

• Cálculo dos autovalores de A:

$$\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} &\Rightarrow (2-\lambda)(5-\lambda)-4=0 \\ &\Rightarrow 10-2\lambda-5\lambda+\lambda^2-4=0 \\ &\Rightarrow \lambda^2-7\lambda+6=0 \end{aligned}$$

Analogamente ao exemplo anterior, ao resolver-se esta equação de segundo grau, são obtidas as seguintes raízes: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$. Note que A é uma matriz quadrada com autovalores positivos.

• Cálculo dos autovetores: Considere $x_1 = [u_1 \ u_2]^T$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} (A-1I)x_1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2-1 & -2 \\ -2 & 5-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema homogêneo com duas equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} u_1 - 2u_2 = 0 \\ -2u_1 + 4u_2 = 0 \end{cases},$$

obtém-se que os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são da forma $x_1 = \begin{bmatrix} 2u_2 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e será tomado o autovetor $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Procedendo de maneira análoga, verifica-se que um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 6$ é $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Portanto, uma matriz de autovetores de A é $V = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Note que os autovetores de V são linearmente independentes, portanto A pode ser diagonalizada.

• Cálculo de V^{-1}:

Procedendo como no exemplo anterior verifica-se que a matriz inversa de V é

$V^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$, e portanto $V\Lambda V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} = A.$

• Cálculo da matriz raiz quadrada de A:

Como A é quadrada, ela tem autovalores positivos e pode ser diagonalizada, então de acordo com a Proposição 2, A admite raiz quadrada. Esta é dada por $B = V\Lambda^{\frac{1}{2}}V^{-1}$, ou seja:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4+\sqrt{6}}{5} & \frac{2-2\sqrt{6}}{5} \\ \frac{2-2\sqrt{6}}{5} & \frac{1+4\sqrt{6}}{5} \end{bmatrix}.$$

- Verificação de que $A = BB$.

$$BB = \begin{bmatrix} \dfrac{4+\sqrt{6}}{5} & \dfrac{2-2\sqrt{6}}{5} \\ \dfrac{2-2\sqrt{6}}{5} & \dfrac{1+4\sqrt{6}}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{4+\sqrt{6}}{5} & \dfrac{2-2\sqrt{6}}{5} \\ \dfrac{2-2\sqrt{6}}{5} & \dfrac{1+4\sqrt{6}}{5} \end{bmatrix}$$

$$BB = \begin{bmatrix} 50/25 & -50/25 \\ -50/25 & 125/25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = A.$$

O seguinte resultado descreve sob quais condições a fórmula de Báskara vale para a equação matricial quadrática.

Teorema 12 (Generalizando a fórmula de Báskara) *Se $A = I$, B e C são diagonalizáveis e B comuta com C, ou seja, $BC = CB$, e $B^2 - 4C$ tem uma raiz quadrada, então podemos encontrar um solvente da equação (5.1) através da fórmula:*

$$S = -\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4C}. \tag{5.2}$$

Demonstração: Basta provar que (5.2) satisfaz $P(S) = IS^2 + BS + C = 0$. De fato, como B e C comutam, usando a Proposição (1) do capítulo (1), elas tem os mesmos autovetores. Seja então

$$B = V\Lambda_1 V^{-1}, \quad C = V\Lambda_2 V^{-1}, \tag{5.3}$$

Agora observe que para duas matrizes quadradas arbitrárias M, N tem-se:

$$(M - N)^2 = M^2 - MN - NM + N^2.$$

Usando este resultado segue

$$\begin{aligned} S^2 &= \tfrac{1}{4}B^2 - \tfrac{1}{4}B\sqrt{B^2 - 4C} - \tfrac{1}{4}\sqrt{B^2 - 4C}B + \tfrac{1}{4}(B^2 - 4C). \\ &= \tfrac{1}{2}B^2 - \tfrac{1}{4}B\sqrt{B^2 - 4C} - \tfrac{1}{4}\sqrt{B^2 - 4C}B - C. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Agora repare que, como $B^2 - 4C$ possui uma raiz quadrada, usando (5.3), tem-se que

$$B^2 - 4C = V\Lambda_1^2 V^{-1} - 4V\Lambda_2 V^{-1} = (V\sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}V^{-1})(V\sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}V^{-1}),$$

e portanto

$$\sqrt{B^2 - 4C} = V\sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}\, V^{-1}. \tag{5.5}$$

Usando (5.5) segue que

$$\begin{aligned} B\sqrt{B^2-4C} &= V\Lambda_1 V^{-1} V \sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}\; V^{-1} \\ &= V\Lambda_1 \sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}\; V^{-1} \\ &= V\sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}\; \Lambda_1 V^{-1} \\ &= V\sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}\; V^{-1} V \Lambda_1 V^{-1} \\ &= \sqrt{B^2-4C}\; B. \end{aligned}$$

Na terceira igualdade foi usado o fato de que Λ_1 e $\sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_2}$ comutam porque elas são diagonais. Usando este fato e (5.4), tem-se que

$$S^2 = \frac{1}{2}B^2 - \frac{1}{2}B\sqrt{B^2-4C} - C. \tag{5.6}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(S) &= IS^2 + BS + C \\ &= \frac{1}{2}B^2 - \frac{1}{2}B\sqrt{B^2-4C} - C + B[-\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\sqrt{B^2-4C}] + C \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o valor de S dado em (5.2) é de fato um solvente (ou solução) da equação polinomial matricial quadrática. $\square$

Será abordado agora um exemplo que irá ilustrar este caso especial para o cálculo da solução de uma equação polinomial matricial.

Exemplo 11

Considere as seguintes matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$, e $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

• Comutatividade das matrizes B e C:

Primeiramente será verificado que B e C comutam, ou seja, $BC = CB$.

$$BC = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26+7 & 13+14 \\ 14+13 & 7+26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 27 \\ 27 & 33 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26+7 & 14+13 \\ 13+14 & 7+26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 27 \\ 27 & 33 \end{bmatrix}$$

Portanto $BC = CB$.

• Cálculo dos autovalores e autovetores de $B^2 - 4C$:

Por simplicidade a matriz $B^2 - 4C$ passará a ser chamada de matriz G.

$$G = B^2 - 4C = \begin{bmatrix} 218 & 182 \\ 182 & 218 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 & 178 \\ 178 & 210 \end{bmatrix}.$$

A equação característica é:

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{G} - \lambda\mathrm{I}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 210-\lambda & 178 \\ 178 & 210-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad & \Rightarrow (210-\lambda)(210-\lambda) - (178)(178) = 0 \\ & \Rightarrow 44100 - 210\lambda - 210\lambda + \lambda^2 - 31684 = 0 \\ & \Rightarrow \lambda^2 - 420\lambda + 12416 = 0 \end{aligned}$$

Assim, os autovalores são $\lambda_1 = 388$ e $\lambda_2 = 32$. Verifica-se que a matriz V de autovetores de G e sua inversa são:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Observe que $V\Lambda V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 388 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 & 178 \\ 178 & 210 \end{bmatrix} = G.$

Note que G é uma matriz simétrica real com autovalores positivos, portanto de acordo com a Proposição 3 a matriz A possui raiz quadrada. Esta é dada por:

$$\begin{aligned} G^{\frac{1}{2}} = V\Lambda^{\frac{1}{2}}V^{-1} \quad &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{388} & 0 \\ 0 & \sqrt{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{97}+2\sqrt{2} & \sqrt{97}-2\sqrt{2} \\ \sqrt{97}-2\sqrt{2} & \sqrt{97}+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, de acordo com o Teorema 12, a solução da equação polinomial $AX^2 + BX + C = 0$, onde $A = I,\ BC = CB,\ e\ B^2 - 4C$ admite raiz quadrada, é dada por:

$$S = -\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}(B^2 - 4C)^{\frac{1}{2}}$$

No exemplo que está sendo considerado, a solução é:

$$\begin{aligned} S \quad &= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{97}+2\sqrt{2} & \sqrt{97}-2\sqrt{2} \\ \sqrt{97}-2\sqrt{2} & \sqrt{97}+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{-13+\sqrt{97}+2\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-7+\sqrt{97}-2\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{-7+\sqrt{97}-2\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-13+\sqrt{97}+2\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Suponha agora que $A = B = I$. Então a equação (5.1) será:

$$X^2 + X + C = 0.$$

Neste caso, se $(I^2 - 4C)$ possui uma raiz quadrada, a fórmula (5.2) é aplicável e a solução será dada por $S = -\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}(I - 4C)^{\frac{1}{2}}$. Veja dois exemplos abaixo que ilustram esta situação:

Exemplo 12

Considere as seguintes matrizes: $A = B = I$ e $C = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$.

$$G = I^2 - 4C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}.$$

• Cálculo dos autovalores e autovetores de G:

Como G é uma matriz triangular inferior, os autovalores a ela associados são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 9$. Usando esses autovalores, verifica-se que a matriz V de autovetores de G é:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que os autovetores de G são linearmente independentes, portanto, G pode ser diagonalizada, isto é, pode ser decomposta como: $G = V\Lambda V^{-1}$.

• Matriz inversa de V:

Procedendo analogamente como nos exemplos anteriores tem-se:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

• Cálculo de $G^{\frac{1}{2}}$:

De acordo com a Proposição 2, $G = I^2 - 4C$ admite raiz quadrada. Esta é dada por:

$$\begin{aligned} G^{\frac{1}{2}} = V\Lambda^{\frac{1}{2}}V^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 0 \\ 0 & \sqrt{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 3 \end{bmatrix} \\ &= (I - 4C)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

• Solução:

A solução da equação polinomial matricial: $X^2 + X + C = 0$ será:

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \\ -\frac{2}{5} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

• Verificação de que $S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$ é solução de $X^2 + X + C = 0$.

$$\begin{aligned} S^2 + S + C &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \\ -\frac{3}{10} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \\ \frac{3}{10} & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, fica verificado que a matriz S acima é solução da equação polinomial matricial: $X^2 + X + C = 0$.

Exemplo 13

Considere agora as seguintes matrizes: $A = B = I$ e $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Neste caso $G = I^2 - 4C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$.

• Autovalores e autovetores:

Os cálculos dos autovalores e autovetores serão omitidos, mas o processo para obter os mesmos é análogo aos exemplos anteriores. Através da equação característica verifica-se que os autovalores são $\lambda_1 = 13$ e $\lambda_2 = 1$. A matriz V formada pelos autovetores associados aos autovalores encontrados acima é:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pode-se decompor a matriz G em $V\Lambda V^{-1}$, afinal seus autovetores são linearmente independentes.

• Matriz inversa de V:

Ao realizar-se os cálculos necessários encontra-se que a matriz inversa de V é:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

• Cálculo de $G^{\frac{1}{2}}$:

A Proposição 2, garante que $G = V\Lambda V^{-1}$ admite raiz quadrada. Esta é obtida ao efetuar-se: $V\Lambda^{\frac{1}{2}}V^{-1}$.

$$\begin{aligned} G^{\frac{1}{2}} = V\Lambda^{\frac{1}{2}}V^{-1} \quad &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{13} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{13} & 1 \\ -\sqrt{13} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}+1}{3} & -\frac{\sqrt{13}+1}{3} \\ \\ -\frac{2\sqrt{13}+2}{3} & \frac{\sqrt{13}+2}{3} \end{bmatrix} \\ &= (I - 4C)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

• Solução:

A solução da equação polinomial matricial: $X^2 + X + C = 0$ será:

$$\begin{aligned} X \quad &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}+1}{3} & -\frac{\sqrt{13}+1}{3} \\ \\ -\frac{2\sqrt{13}+2}{3} & \frac{\sqrt{13}+2}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}+1}{6} & -\frac{\sqrt{13}+1}{6} \\ \\ -\frac{2\sqrt{13}+2}{6} & \frac{\sqrt{13}+2}{6} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}-2}{6} & -\frac{\sqrt{13}+1}{6} \\ \\ -\frac{2\sqrt{13}+2}{6} & \frac{\sqrt{13}-1}{6} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}-1}{3} & -\frac{\sqrt{13}+1}{6} \\ \\ -\frac{\sqrt{13}+1}{3} & \frac{\sqrt{13}-1}{6} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• Verificação de que $X = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}-1}{3} & -\frac{\sqrt{13}+1}{6} \\ -\frac{\sqrt{13}+1}{3} & \frac{\sqrt{13}-1}{6} \end{bmatrix}$ é solução de $X^2 + X + C = 0$.

$$
\begin{aligned}
X^2 + X + C &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}-1}{3} & -\frac{\sqrt{13}+1}{6} \\ -\frac{\sqrt{13}+1}{3} & \frac{\sqrt{13}-1}{6} \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}-1}{3} & -\frac{\sqrt{13}+1}{6} \\ -\frac{\sqrt{13}+1}{3} & \frac{\sqrt{13}-1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{6-\sqrt{13}+\sqrt{13}}{3} & -\frac{6+\sqrt{13}-\sqrt{13}}{6} \\ \frac{-6+\sqrt{13}-\sqrt{13}}{3} & \frac{6-\sqrt{13}+\sqrt{13}}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Logo, a matriz X encontrada é solução da equação polinomial matricial: $X^2 + X + C = 0$.

Uma observação pertinente a ser feita refere-se ao fato que se $I - 4C$ for positiva definida, então o solvente também é.

5.2 Existência e construção de solventes para a equação matricial quadrática baseado no problema quadrático de autovalores

Devido ao grau de dificuldade do problema, serão descritas apenas condições suficientes que garantam a existência de soluçao. No caso geral será feito uso do seguinte teorema.

Teorema 13 *Se $P_m(\lambda)$ tem n autovetores linearmente independentes, $x_1, x_2, ..., x_n$, correspondentes a autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, então $V\Lambda V^{-1}$ é um solvente de $P_m(X)$, onde V é a matriz formada pelos autovetores colocados em coluna e Λ é a matriz diagonal formada pelos autovalores correspondentes.*

A prova do teorema pode ser encontrada em [11]. O seguinte corolário, cuja prova também pode ser encontrada em [11], descreve algumas condições sob as quais o número de solventes pode ser conhecido exatamente.

Corolário 1 *Se $P_m(\lambda)$ tem mn autovalores distintos, e o conjunto dos autovetores satisfazem a condição de Haar (isto é: cada subconjunto de n autovetores é linearmente independentes), então existem exatamente $\begin{pmatrix} mn \\ n \end{pmatrix}$ solventes (ou soluções) diferentes.*

O polinômio quadrático é neste caso

$$P_2(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C = 0.$$

Serão considerados os coeficientes $n \times n$. É conhecido da seção (4.2) que se A é não singular, então o polinômio matricial possui $2n$ autovalores já que neste caso, a equação característica $\mathsf{p}(\lambda) = \det\big(P_m(\lambda)\big) = 0$ é de grau $2n$. Se A é singular, então $\det(P_m(\lambda))$ tem grau menor que $2n$ e portanto $P_m(\lambda)$ possui um número menor que $2n$ de autovalores.

O seguinte resultado mostra como soluções podem ser construídas através dos auto-pares de $P_m(\lambda)$. Este é um teorema muito especial.

Teorema 14 *Se o problema quadrático de autovalores possui n autovetores linearmente independentes $x_i, i = 1, ..., n$ correspondendo a autovalores $\lambda_i, i = 1, ..., n$, então uma solução é dada por:*

$$S = V\Lambda V^{-1}, \qquad V = [x_1, ..., x_n], \qquad \Lambda = diag(\lambda_i) \tag{5.7}$$

Demonstração: Como $\{\lambda_i, x_i\}$ são autopares do polinômio quadrático, tem-se que

$$(\lambda_i^2 A + \lambda_i B + C)x_i = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.8}$$

Isto pode ser escrito como

$$[A\ B\ C] \begin{bmatrix} x_i\lambda_i^2 \\ x_i\lambda_i \\ x_i \end{bmatrix} = 0 \tag{5.9}$$

Colocando as n relações (5.8) em n colunas vem

$$[Ax_1\lambda_1^2 + Bx_1\lambda_1 + Cx_1 \mid Ax_2\lambda_2^2 + Bx_2\lambda_2 + Cx_2 \mid \cdots \mid Ax_n\lambda_n^2 + Bx_n\lambda_n + Cx_n] = [0 \mid 0 \mid \cdots \mid 0].$$

Usando a igualdade (5.9), a igualdade acima pode ser reescrita como

$$AV\Lambda^2 + BV\Lambda + CV = 0.$$

Multiplicando por V^{-1} (pois por definição de V, provém que V é não-singular) obtém-se:

$$AV\Lambda^2V^{-1} + BV\Lambda V^{-1} + C = 0.$$

Introduzindo $S = V\Lambda V^{-1}$ e observando que $S^2 = V\Lambda^2V^{-1}$, segue da relação acima que S é um solvente de $P_2(\lambda)$, o que conclui a prova do teorema. $\square$

Observação 1 *O teorema acima sugere que para encontrar solventes da equação matricial quadrática, autopares $\{\lambda_i, x_i\}$ de $P_2(\lambda)$ devem ser calculados. É conveniente lembrar que neste caso, existem no máximo $2n$ autopares, sendo n a dimensão dos coeficientes do polinômio. Feito isto, devem ser escolhidos grupos diferentes de n autovetores linearmente independentes e seus respectivos autovalores associados. Cada grupo é então utilizado para formar uma matriz S como em (5.7) que é, pelo teorema acima, um solvente para a equação quadrática.*

A seguir alguns exemplos numéricos serão dados para ilustrar o cálculo de solventes seguindo o resultado do teorema e o espírito da observação acima.

Exemplo 14

Considere o polinômio $P_2(\lambda) = I\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$, sendo

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$$

Repare que neste caso $m = 2$ e $n = 2$. Assim, $P_2(\lambda)$ é uma matriz com seus elementos sendo polinômios de grau menor ou a 2. Isto é: $P_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - \lambda & -6\lambda + 12 \\ 2\lambda - 2 & \lambda^2 - 9\lambda + 14 \end{bmatrix}$

A equação característica deste polinômio matricial $\det(\mathrm{P}_2(\lambda)) = 0$ é dada por:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \lambda & -6\lambda + 12 \\ 2\lambda - 2 & \lambda^2 - 9\lambda + 14 \end{vmatrix} = 0 \iff [(\lambda^2 - \lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 14)] - [(2\lambda - 2)(-6\lambda + 12)] = 0$$
$$\iff \lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24 = 0.$$

Ao resolver a equação acima pelo método de Ruffini, encontra-se como raízes: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ e $\lambda_4 = 4$. Estas raízes de acordo com o que foi visto anteriormente são os autovalores de $P_2(\lambda)$. Observe que o grau de $\det(\mathrm{P}_2(\lambda)) = \mathrm{mn} = 4$ e o número de autovalores encontrados também foi 4.

- Cálculo dos autovetores associados (os autovetores são elementos do $\mathbb{R}^2$):

1) $\lambda_1 = 1 \Rightarrow P_2(\lambda_1)x_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} (1)^2 - 1 & -6(1) + 12 \\ 2(1) - 2 & (1)^2 - 9(1) + 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0u_1 + 6u_2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = \text{arbitrário} \\ u_2 = 0 \end{array}$$

Portanto, $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é autovetor associado a $\lambda_1 = 1$

2) $\lambda_2 = 2 \Rightarrow P_2(\lambda_2)x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2u_1 + 0u_2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = \text{arbitrário} \end{array}$$

Portanto, $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é autovetor associado a $\lambda_2 = 2$

3) $\lambda_3 = 3 \Rightarrow P_2(\lambda_3)x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 6u_1 - 6u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

Portanto, $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é autovetor associado a $\lambda_3 = 3$

4) $\lambda_4 = 4 \Rightarrow P_2(\lambda_4)x_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 12u_1 - 12u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

Portanto, $x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é autovetor associado a $\lambda_4 = 4$

Resumindo, os autovalores e autovetores associados são descritos por:

i	1	2	3	4
λ_i	1	2	3	4
x_i	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Procedendo conforme sugerido segundo na Observação 1, como neste caso $n = 2$, procura-se grupos diferentes de 2 autovetores linearmente independentes e respectivos autovalores. Segue então que existem as seguintes possibilidades:

- ▷ $\{x_1, x_2\}$ e $\{\lambda_1, \lambda_2\}$
- ▷ $\{x_1, x_3\}$ e $\{\lambda_1, \lambda_3\}$
- ▷ $\{x_1, x_4\}$ e $\{\lambda_1, \lambda_4\}$
- ▷ $\{x_2, x_3\}$ e $\{\lambda_2, \lambda_3\}$
- ▷ $\{x_2, x_4\}$ e $\{\lambda_2, \lambda_4\}$

Observe que os autovetores dos pares x_1 e x_3 são iguais aos de x_1 e x_4, porém os autovalores associados a cada um deles são distintos. Isto permitirá formar dois solventes diferentes. Considere então, as seguintes matrizes cujas colunas são os autovetores segundo as associações feitas acima.

$$\hat{X}_1 = [x_1 \vdots x_2]_{2\times 2} \qquad \hat{X}_3 = [x_2 \vdots x_3]_{2\times 2} \qquad \hat{X}_5 = [x_1 \vdots x_4]_{2\times 2}$$
$$\hat{X}_2 = [x_1 \vdots x_3]_{2\times 2} \qquad \hat{X}_4 = [x_2 \vdots x_4]_{2\times 2}$$

Agora observe que da primeira possibilidade, isto é, dos autopares $\{\lambda_1, x_1\}$ e $\{\lambda_2, x_2\}$, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} 1^o\text{auto} - \text{par} : \{\lambda_1, x_1\} \longrightarrow \begin{cases} P_2(\lambda_1)x_1 = 0 \\ (I\lambda_1^2 + A_1\lambda_1 + A_0)x_1 = 0 \end{cases} \\ \\ 2^o\text{auto} - \text{par} : \{\lambda_2, x_2\} \longrightarrow \begin{cases} P_2(\lambda_2)x_2 = 0 \\ (I\lambda_2^2 + A_1\lambda_2 + A_0)x_2 = 0 \end{cases} \end{array}\right\} (\star)$$

Os auto-pares $(\star)$ podem ser escritos numa forma mais conveniente como

$$\left[\begin{array}{ccc}(I\lambda_1^2 + A_1\lambda_1 + A_0)x_1 & \vdots & (I\lambda_2^2 + A_1\lambda_2 + A_0)x_2\end{array}\right] = [0 \vdots 0]$$

Separando o primeiro membro como a soma de três parcelas vem

$$[Ix_1\lambda_1^2 \vdots Ix_2\lambda_2^2] + [A_1x_1\lambda_1 \vdots A_1x_2\lambda_2] + [A_0x_1 \vdots A_0x_2] = [0 \vdots 0]$$

Esta equação é equivalente a

$$I\,[x_1 \vdots x_2]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}^2 + A_1[x_1 \vdots x_2]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} + A_0[x_1 \vdots x_2] = [0 \vdots 0]$$

Em forma matricial tem-se

$$I\hat{X}_1\Lambda_1^2 + A_1\hat{X}_1\Lambda_1 + A_0\hat{X}_1 = 0, \tag{5.10}$$

em que $\hat{X}_1$ é a matriz de autovetores introduzida anteriormente e Λ_1 a matriz de autovalores correspondentes. Note que $\hat{X}_1$ é invertível, pois é uma matriz formada por dois vetores linearmente independentes. Multiplicando ambos os termos da equação (5.10) por $\hat{X}_1^{-1}$ obtém-se:

$$\hat{X}_1\Lambda_1^2\hat{X}_1^{-1} + A_1\hat{X}_1\Lambda_1\hat{X}_1^{-1} + A_0\hat{X}_1\hat{X}_1^{-1} = 0$$

$$\hat{X}_1\Lambda_1^2\hat{X}_1^{-1} + A_1\hat{X}_1\Lambda_1\hat{X}_1^{-1} + A_0 = 0 \tag{5.11}$$

Seja $S = \hat{X}_1\Lambda_1\hat{X}_1^{-1}$ então tem-se que:

$$S^2 = \left(\hat{X}_1\Lambda_1\hat{X}_1^{-1}\right)\left(\hat{X}_1\Lambda_1\hat{X}_1^{-1}\right) = \hat{X}_1\Lambda_1^2\hat{X}_1^{-1}$$

Daí, substituindo em (5.11) tem-se:

$$\boxed{I\,S^2 + A_1S + A_0 = 0}$$

Isto demonstra que $S = \hat{X}_1\Lambda_1\hat{X}_1^{-1}$ é um solvente da equação matricial quadrática. Como

$$\hat{X}_1 = [x_1 \vdots x_2] = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{X}_1^{-1} = I,$$

obtém-se que

$$S = \hat{X}_1\Lambda_1\hat{X}_1^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Verificação numérica:

$$\begin{aligned}IS^2 + A_1S + A_0 &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix}-1 & -6\\ 2 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 12\\ -2 & 14\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & -12\\ 2 & -14\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 12\\ -2 & 14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento, agora podem ser consideradas as outras possibilidades:

$$\hat{X}_2 = \left[\begin{array}{ccc} x_1 & \vdots & x_3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}_3 = \left[\begin{array}{ccc} x_2 & \vdots & x_3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}_4 = \left[\begin{array}{ccc} x_2 & \vdots & x_4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}_5 = \left[\begin{array}{ccc} x_1 & \vdots & x_4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Observe que $\hat{X}_6 = \left[\begin{array}{ccc} x_3 & \vdots & x_4 \end{array}\right]$ não pode ser considerado, pois os autovetores que formam esta matriz são linearmente dependentes, ou seja, $\det(\hat{\mathrm{X}}_6) = 0$ e portanto, a matriz é singular e não admite inversa. Note também que apesar de que $\hat{X}_2 = \hat{X}_5$ e $\hat{X}_3 = \hat{X}_4$, devido ao fato das matrizes dos autovalores associados serem distintas, as soluções também serão distintas.

Veja a resolução das demais soluções, sendo que os cálculos das matrizes inversas correspondentes serão omitidos:

- A segunda possibilidade surge ao serem associados os auto-pares $\{\lambda_1, x_1\}$ e $\{\lambda_3, x_3\}$. Veja:

$$\hat{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{X}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\triangleright$ Cálculo de $Z = \hat{X}_2 \Lambda_2 \hat{X}_2^{-1}$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\triangleright$ Verificação de que Z é solução de $P_2(\lambda)$, ou seja, $Z^2 + A_1 Z + A_0 = 0$

$$\begin{aligned} Z^2 + A_1 Z + A_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -20 \\ 2 & -23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 2 & -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, $Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ é a segunda solução encontrada!

• Observe agora que a terceira solução pode ser encontrada ao associar os seguintes autopares: $\{\lambda_2, x_2\}$ e $\{\lambda_3, x_3\}$.

$$\hat{X}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{X}_3^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

▷ Cálculo de $Y = \hat{X}_3 \Lambda_3 \hat{X}_3^{-1}$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

▷ Verificação de que Y é solução de $Y^2 + A_1 Y + A_0 = 0$

$$\begin{aligned} Y^2 + A_1 Y + A_0 &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ -3 & -18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, $Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é outra solução!

• A próxima solução pode ser encontrada ao associar os autopares $\{\lambda_2, x_2\}$ e $\{\lambda_4, x_4\}$.

$$\hat{X}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{X}_4^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

▷ Cálculo de $W = \hat{X}_4 \Lambda_4 \hat{X}_4^{-1}$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

▷ Verificação de que W é solução de $W^2 + A_1 W + A_0 = 0$

$$\begin{aligned} W^2 + A_1 W + A_0 &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 12 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & -12 \\ -10 & -18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 2 & -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, $W = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ é mais uma solução do problema!

• A última solução do problema é obtida ao considerar os autopares $\{\lambda_1, x_1\}$ e $\{\lambda_4, x_4\}$.

$$\hat{X}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{X}_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▷ Cálculo de $U = \hat{X}_5 \Lambda_5 \hat{X}_5^{-1}$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

▷ Verificação numérica de que U é solução de $U^2 + A_1 U + A_0 = 0$

$$\begin{aligned} U^2 + A_1 U + A_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -27 \\ 2 & -30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 2 & -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim sendo, $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ é outra solução para o exemplo!

Resumindo, as possíveis soluções para o problema, cuja apresentação foi citada acima, são:

$S = \hat{X}_1 \Lambda_1 \hat{X}_1^{-1}$ $\quad$ $Y = \hat{X}_3 \Lambda_3 \hat{X}_3^{-1}$ $\quad$ $U = \hat{X}_5 \Lambda_5 \hat{X}_5^{-1}$

$Z = \hat{X}_2 \Lambda_2 \hat{X}_2^{-1}$ $\quad$ $W = \hat{X}_4 \Lambda_4 \hat{X}_4^{-1}$

Portanto, são 5 soluções!

Um outro exemplo que ilustra esta situação, porém abordado de forma resumida, é o que segue abaixo:

Exemplo 15

Considere o polinômio matricial $P_2(\lambda) = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$, sabendo que:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso $m = 2$ e $n = 3$. Assim, $P_2(\lambda)$ é uma matriz com seus elementos sendo polinômios de grau menor ou igual a 2. Isto é:

$$P_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 6\lambda^2 - 6\lambda & 0 \\ 2\lambda & 6\lambda^2 - 7\lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + 1 \end{bmatrix}$$

- Cálculo dos autovalores;

$$\det(\mathrm{P}_2(\lambda)) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda+1 & 6\lambda^2-6\lambda & 0 \\ 2\lambda & 6\lambda^2-7\lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} = 0$$

Usando a expansão em cofatores obtém-se:

$$(-1)^{3+3}(\lambda^2+1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & 6\lambda^2-6\lambda \\ 2\lambda & 6\lambda^2-7\lambda+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2+1)[(\lambda+1)(6\lambda^2-7\lambda+1)-(2\lambda)(6\lambda^2-6\lambda)] = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2+1)[6\lambda^3-7\lambda^2+\lambda+6\lambda^2-7\lambda+1-12\lambda^3+12\lambda^2)] = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2+1)[-6\lambda^3+11\lambda^2-6\lambda+1] = 0$$

Utilizando a propriedade $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, vista no primeiro capítulo, tem-se: $\det(A)\det(B) = 0$, ou seja, $\det(A) = 0$ ou $\det(B) = 0$. Considere $\det(A) = \lambda^2+1$ e $\det(B) = -6\lambda^3+11\lambda^2-6\lambda+1$. Assim,

- Caso $\det(A) = 0$:

  Então as raízes da equação $\lambda^2+1 = 0$ são: $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$.

- Caso $\det(B) = 0$:

  Então: $-6\lambda^3+11\lambda^2-6\lambda+1 = 0$. As raízes desta equação são encontradas através da resolução de Tartaglia, vista no Capítulo 2. Ao aplicar a mesma, obtém-se as seguintes raízes: $\lambda_3 = \dfrac{1}{2}$, $\lambda_4 = \dfrac{1}{3}$ e $\lambda_5 = 1$.

Note que, neste exemplo, o grau de $\det(\mathrm{P}_2(\lambda))$ e o número de autovalores encontrados são iguais a 5.

- Verificação dos autovalores de $\det(A) = \lambda^2+1 = 0$:

1. $\lambda_1 = i$

   $(\sqrt{-1})^2+1 = 0$

2. $\lambda_2 = -i$

   $(-\sqrt{-1})^2+1 = 0$

- Verificação dos autovalores de $\det(B) = -6\lambda^3+11\lambda^2-6\lambda+1 = 0$:

1. $\lambda_3 = \frac{1}{2}$

   $$\left[-6\left(\frac{1}{2}\right)^3+11\left(\frac{1}{2}\right)^2-6\left(\frac{1}{2}\right)+1\right] = -\frac{6}{8}+\frac{11}{4}-\frac{6}{2}+1 = \frac{-30+30}{8} = 0$$

2. $\lambda_4 = \frac{1}{3}$

$$\Big[-6\Big(\frac{1}{3}\Big)^3 + 11\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 - 6\Big(\frac{1}{3}\Big) + 1\Big] = -\frac{6}{27} + \frac{11}{9} - \frac{6}{3} + 1 = 2 - 2 = 0$$

3. $\lambda_5 = 1$

$$[-6(1)^3 + 11(1)^2 - 6(1) + 1] = -6 + 11 - 6 + 1 = -12 + 12 = 0$$

- Cálculo dos autovetores associados (os autovetores são elementos do $\mathbb{R}^3$):

1) $\lambda_1 = i \Rightarrow P_2(\lambda_1)x_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1+i & -6(i)-6 & 0 \\ 2i & -7i-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ao resolver o sistema linear formado por essas matrizes, obtém-se que: $u_2 = 0$ e $u_1 = 0$. Além disso, é fácil observar que u_3 pode assumir qualquer valor.

Portanto, $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é autovetor associado a $\lambda_1 = i$.

2) $\lambda_2 = -i \Rightarrow P_2(\lambda_2)x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-i & -6(i)+6 & 0 \\ -2i & 7i+5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que: $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é autovetor associado a $\lambda_2 = -i$.

3) $\lambda_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow P_2(\lambda_3)x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 3/2 & -3/2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ao resolver este sistema, obtém-se $u_1 = u_2$ e $u_3 = 0$.

Portanto, $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é autovetor associado a $\lambda_3 = \frac{1}{2}$.

4) $\lambda_4 = \frac{1}{3} \Rightarrow P_2(\lambda_4)x_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} 4/3 & -4/3 & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 10/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observando o sistema matricial formado acima é fácil verificar que: $u_1 = u_2$ e $u_3 = 0$.

Portanto, $x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é autovetor associado a $\lambda_4 = \frac{1}{3}$.

5) $\lambda_5 = 1 \Rightarrow P_2(\lambda_5)x_5 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso, observa-se que: $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ e u_2 pode assumir valor arbitrário.

Portanto, $x_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é autovetor associado a $\lambda_5 = 1$.

Resumindo, tem-se:

i	1	2	3	4	5
λ_i	i	$-i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1
x_i	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Trios de autovetores linearmente independentes:

- $\triangleright$ x_1 , x_3 e x_5
- $\triangleright$ x_2 , x_3 e x_5
- $\triangleright$ x_1 , x_4 e x_5
- $\triangleright$ x_2 , x_4 e x_5

Note que os autovetores que formam os trios x_1 , x_3 e x_5 são iguais aos de x_1 , x_4 e x_5, porém os autovalores associados a cada um deles são distintos.

Como $x_i \in \mathbb{R}^3$, então existem no máximo grupos de três vetores cada que são linearmente independentes.

Considere as matrizes $\hat{X}_{is}$ com as matrizes de seus respectivos autovalores.

$$\hat{X}_1 = \left[\begin{array}{ccccc} x_1 & \vdots & x_3 & \vdots & x_5 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \Lambda_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}_2 = \left[\begin{array}{ccccc} x_1 & \vdots & x_4 & \vdots & x_5 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \Lambda_2 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}_3 = \left[\begin{array}{ccccc} x_2 & \vdots & x_3 & \vdots & x_5 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \Lambda_3 = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}_4 = \left[\begin{array}{ccccc} x_2 & \vdots & x_4 & \vdots & x_5 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \Lambda_4 = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estas, de acordo com o exemplo anterior, fornecem as soluções para o problema. O estudo mais detalhado das possíveis soluções é abordado abaixo:

- A primeira solução é por:

$$S = \hat{X}_1 \Lambda_1 \hat{X}_1^{-1},$$

Realizando os cálculos necessários, encontra-se que a matriz inversa de $\hat{X}_1$ é dada por:

$$\hat{X}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\triangleright$ Cálculo de $S = \hat{X}_1 \Lambda_1 \hat{X}_1^{-1}$

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\triangleright$ Verificação:

Agora, será verificado que a matriz S encontrada acima é solução de $P_2(\lambda) = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0$, ou seja, se $A_2S^2 + A_1S + A_0 = 0$.

$$P_2(S) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/2 & -6 & 0 \\ 9/2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9/2 & 6 & 0 \\ -9/2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9/2 & -6 & 0 \\ 9/2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $S = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$ é um solução da equação polinomial matricial $P_2(\lambda) = 0$.

• Outra possível solução é encontrada ao considerar-se a matriz $\hat{X}_2$. Note que $\hat{X}_1 = \hat{X}_2$, portanto $\hat{X}_1^{-1} = \hat{X}_2^{-1}$.

▷ Cálculo de $Z = \hat{X}_2 \Lambda_2 \hat{X}_2^{-1}$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

▷ Verificação de que Z é solução de $A_2Z^2 + A_1Z + A_0 = 0$

$$P_2(Z) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ -8/9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13/3 & -6 & 0 \\ 16/3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -48/9 & 6 & 0 \\ -48/9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16/3 & -6 & 0 \\ 16/3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $Z = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$ é outra solução para o exemplo.

• A terceira solução é encontrada ao considerar-se a matriz $\hat{X}_3$. Note que a matriz inversa é a mesma que a considerada anteriormente.

$\triangleright$ Cálculo de $Y = \hat{X}_3 \Lambda_3 \hat{X}_3^{-1}$

$$\begin{aligned} Y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\triangleright$ Verificação de que Y é solução de $A_2 Y^2 + A_1 Y + A_0 = 0$

$$\begin{aligned} P_2(Y) &= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/2 & -6 & 0 \\ 9/2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -18/4 & 6 & 0 \\ -18/4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9/2 & -6 & 0 \\ 9/2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, $Y = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$ é outra solução para o exemplo.

• A última solução para o problema está relacionada à matriz $\hat{X}_4$. A matriz inversa também é a mesma que a considerada anteriormente.

▷ Cálculo de $W = \hat{X}_4 \Lambda_4 \hat{X}_4^{-1}$

$$\begin{aligned}
W &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

▷ Verificação de que W é solução de $P_2(\lambda)$, isto é, $A_2W^2 + A_1W + A_0 = 0$

$$\begin{aligned}
P_2(W) &= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ -8/9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13/3 & -6 & 0 \\ 16/3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -48/9 & 6 & 0 \\ -48/9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16/3 & -6 & 0 \\ 16/3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Logo, $W = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$ também é solução para o problema.

Existem casos que não formam solução para o problema. Um exemplo disso é: $\hat{X}_5 = \begin{bmatrix} x_1 & \vdots & x_2 & \vdots & x_3 \end{bmatrix}$. Observe que dois dos autovetores que formam esta matriz são linearmente dependentes. Com isto, $\det(\hat{X}_5) = 0$ e portanto, a matriz é singular e não admite inversa.

Portanto, conclui-se que o problema admite quatro soluções.

No problema quadrático de autovalores, os autovetores associados a autovalores distintos podem não ser linearmente independentes, e neste caso a teoria se complica. Por isto, a determinação precisa do número de solventes da equação matricial quadrática é um problema que precisa de mais estudo e foge do objetivo inicial deste trabalho. O leitor pode encontrar referências adicionais sobre isto em [10, 11].

Considerações Finais

O maior benefício gerado por uma pesquisa, como o trabalho de conclusão de curso, é a possibilidade criada para aperfeiçoar alguns conhecimentos matemáticos adquiridos, especialmente durante a graduação, e a oportunidade de adquirir outros conhecimentos mais complexos, cuja abordagem não ocorre neste período.

O objetivo primordial deste trabalho foi possibilitar às pessoas interessadas a obtenção de uma pequena parte de conhecimento a respeito de equações polinomiais matriciais quadráticas e difundir parte da teoria fundamental utilizada para tratar de tal assunto.

Embora não estejam presentes, as aplicações envolvendo esse tema são inúmeras, especialmente no que se refere a controle de sistemas dinâmicos/análise. Entretanto, foi observado que o problema de encontrar os solventes de uma equação polinomial com coeficientes matriciais é de difícil resolução. Em diversas situações verificou-se que existem casos especiais, com matrizes específicas que amenizam o trabalho e cuja solução é citada, mas nem sempre é simples e de fácil compreensão. Por esse motivo, o trabalho ficou restrito à equações polinomiais matriciais de segundo grau.

Espera-se que novos trabalhos surjam a partir deste, e que o problema de encontrar solventes para equações polinomiais matriciais possa ser ampliado para equações de grau superior.

Por fim, constatou-se que realmente os conhecimentos matemáticos formam um emaranhado, uma teia. Todos eles estão interligados e a construção de um novo conhecimento só acontece pelo fato de existirem outros que o justificam e o sustentam.

Referências Bibliográficas

[1] Bazán, Fermín S. V.; *Autovalores de Polinômios Matriciais: Sensibilidade, Computação e Aplicações* - IMPA; Rio de Janeiro, RJ - 2003.

[2] Eves,Howard; *Introdução à História da Matemática*, tradução: Hygino H. Dominguez, Editora da UNICAMP; Campinas, SP - 1995.

[3] Milies, César Polcino; *A solução de Tartaglia para a Equação do terceiro grau*, pg. 15 à 22. Revista do Professor de Matemática, número 25, Sociedade Brasileira de Matemática- primeiro semestre de 1994.

[4] Moreira, Carlos Gustavo Tamm de Araujo; *Uma solução das equações do terceiro e do quarto graus*, pg. 23 à 28. Revista do Professor de Matemática, número 25, Sociedade Brasileira de Matemática- primeiro semestre de 1994.

[5] Euler, L.; *Of a new method of resolving equations of the forth degree.*, pg. 282. Elements of Algebra. New York, Springer - 1972.

[6] Gonçalves, Adilson; *Introdução à Álgebra* - IMPA , Rio de Janeiro - 1979.

[7] Clifford W.H.; *Mathematical Papers* - 1968.

[8] L.H. Jacy Monteiro; *Elementos de Álgebra* - IMPA - 1969.

[9] Kolman, Bernard; *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações*, 4^a edição; Editora LTC; Rio de Janeiro - RJ, 1999.

[10] P. Lancaster and M. Tismenetsky, The Theory of Matrices, Second Edition, Academic Press, Inc. New York 1985.

[11] J.E. Dennis, Jr., J. F. Traub, and R. P. Weber; *The algebraic theory of matrix polynomials* - 1976.

[12] Leon, Steven J.; *Álgebra Linear com Aplicações*, LTC Editora; Rio de Janeiro - RJ - 1999.

[13] Strang, Gilbert.; *Linear Algebra and its Applications*, Harcourt Brace and Company International; Estados Unidos - 1988.

[14] Spivak, Michael; *Calculus*, 3^a edição; Editora Congresso - Houston, Texas -1994.

[15] Boldrini, José Luiz e outros; *Álgebra Linear*, Editora Harbra - 1986.

[16] Iezzi, Gelson; *Fundamentos da Matemática Elementar*, vol.6; Editora Atual; São Paulo - SP - 1993.