LEONARDO MILIOLI MANGILI

LUGARES GEOMÉTRICOS FUNDAMENTAIS

Florianópolis

2004

LUGARES GEOMÉTRICOS FUNDAMENTAIS

Leonardo Milioli Mangili

Universidade Federal de Santa Catarina

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao

Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura

Departamento de Matemática

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Orientador: Lício Hernanes Bezerra

Junho/2004

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 35/SCG/04

Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Licio Hernanes Bezerra
Orientador

Prof. Gilson Braviano

Prof. Nereu Estanislau Burin

Resumo

Um lugar geométrico é uma figura formada por todos os pontos que obedecem a uma determinada condição, exclusiva deles.

Circunferência, mediatriz, retas paralelas, bissetriz e arco capaz formam 5 lugares geométricos fundamentais.

Este trabalho é constituído por uma série de problemas resolvidos que têm por finalidade auxiliar na resolução de problemas geométricos, utilizando os lugares geométricos fundamentais.

Todas as figuras contidas neste trabalho foram construídas com auxilio do sistema interativo *Cabri Geometre II*, fornecido pelo centro de informática do curso de matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Sumário

Introdução

As primeiras considerações que o homem fez a respeito da Geometria são, inquestionavelmente, muito antigas. Parecem ter se originado de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos.

No início o homem só considerava problemas geométricos concretos, que se apresentavam individualmente e entre os quais não era observada nenhuma ligação. Mais tarde, a inteligência humana, a partir de um certo número de observações relativas a formas, tamanhos e relações espaciais de objetos físicos específicos, tornou-se capaz de extrair certas propriedades gerais e relações que incluíam as observações anteriores como casos particulares. Isto acarretou a vantagem de se ordenarem problemas geométricos práticos em conjuntos tais que os problemas de um conjunto podiam ser resolvidos pelo mesmo procedimento geral. Chegou-se assim à noção de lei ou regra geométrica.

Construções com régua e compasso aparecem no século V a.C. e tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática grega. Na Grécia antiga, a palavra *número* era usada só para os inteiros e uma fração era considerada apenas uma razão entre números. Estes conceitos, naturalmente, causavam dificuldades nas medidas das grandezas. A noção de número real estava ainda muito longe de ser concebida, mas, na época de Euclides (século III a.C.*)* uma idéia nova apareceu. As grandezas, no lugar de serem associadas a números, passaram a ser associadas a segmentos de reta. Assim, o conjunto dos números continuava discreto e o das grandezas contínuas passou a ser tratado por métodos geométricos. Nasce então nesse período uma nova álgebra, completamente geométrica,em que a palavra *resolver* era sinônimo de construir.

Os primeiros geômetras gregos conhecidos, aproximadamente em 600 a.C., são filósofos como Pitágoras de Samos (582 a.C. a 500 a.C.), que traduz a geometria prática em um número limitado de postulados.

O grande organizador da geometria grega é Euclides (300 a.C.). A obra *Elementos*, de Euclides, é um marco de valor inestimável, na qual a Geometria é desenvolvida de modo bastante elaborado. Desde Euclides o estudo da geometria Euclidiana Plana é feito de forma dedutiva, e teve sua forma final com Hilbert. Um livro interessante para o estudo rigoroso de Geometria Euclidiana Plana é o livro *Euclidean and Non-Euclidean Geometries* de Marvin

Jay Greenberg, em que a teoria é construída a partir de três axiomas de incidência, quatro axiomas de ordem, seis axiomas de congruência, dois axiomas de continuidade e o famoso axioma das paralelas.

O Desenho Geométrico é uma forma construtiva de estudar Geometria Euclidiana. Com auxílio de dois instrumentos, régua e compasso, o Desenho Geométrico constitui-se de procedimentos de resolução de problemas geométricos. No entanto ele tem limitações, vide a impossibilidade da trissecção de um ângulo com régua e compasso, como mostrou Galois.

A resolução de um problema de construção geométrica, de um modo geral, compreende duas etapas:

1) a pesquisa das propriedades e da seqüência de operações que possibilitam realizar a construção;
2) a execução da construção pedida, servindo-se dos instrumentos de desenho.

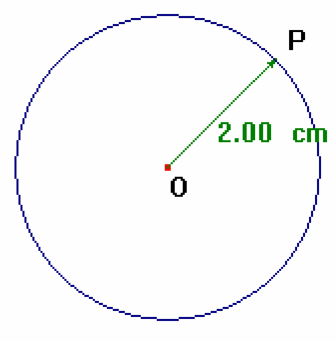
Quando a representação de um problema gráfico depende diretamente da obtenção de um ponto sujeito a duas condições conhecidas, o método geral de resolução consiste em pesquisar os dois lugares geométricos correspondentes a cada uma daquelas condições, construí-los e determinar sua interseção, que será o ponto procurado.

O objetivo deste trabalho é auxiliar o discente na resolução de problemas de construções geométricas, utilizando o método dos lugares geométricos fundamentais.

O trabalho está organizado como se segue. Primeiramente é definido lugar geométrico, a seguir são apresentados os lugares geométricos fundamentais e suas construções e por fim estão problemas resolvidos. Os problemas estão divididos em subtítulos conforme o(s) lugar(es) geométrico(s) fundamental(ais) utilizado(s) para resolvê-los.

1 Lugar Geométrico*

Considere uma circunferência de centro O e raio **r** = 2 cm.



Pergunta 1: Todo ponto P que pertence a essa circunferência dista 2 cm de O?

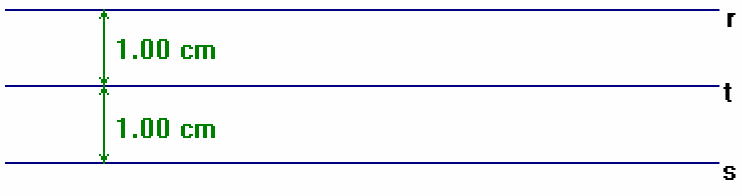
Pergunta 2: Somente os pontos que pertencem a essa circunferência distam 2 cm de O? (Não esquecer que estamos pensando no plano).

A resposta a cada uma das perguntas é, evidentemente , **sim**.

Pois bem. Notamos, então, que a circunferência de raio **r** e centro em O é uma figura cujos pontos satisfazem duas condições:

- todos os seus pontos distam **r** de O;
- somente seus pontos distam **r** de O.

Considere, agora, uma reta **t** e as retas **r** e **s** paralelas a **t**, distantes 1 cm da mesma.



Pergunta 1: Todo ponto P da **r** ou de **s** dista 1 cm de **t**?

Pergunta 2: Somente os pontos de **r** ou de **s** distam 1 cm de **t**?

Novamente a resposta a ambas as perguntas é **sim**.

De modo geral, duas paralelas **r** e **s** a uma reta **t**, distantes ***l*** de **t**, constituem uma figura cujos pontos satisfazem duas condições:

- todos os seus pontos distam ***l*** da reta **t**;
- somente os seus pontos distam ***l*** da reta **t**.

---

* Referência: [6]

Podemos agora apresentar a definição de lugar geométrico.

Definição

Uma figura é denominada **lugar geométrico** dos pontos que possuem uma propriedade j se, e somente se:

- **todos os pontos** desta figura possuem a propriedade j ;
- **somente os pontos** desta figura possuem a propriedade j .

Assim, a circunferência e as paralelas à reta **t**, examinadas anteriormente, são exemplos de figuras que podem receber o nome de **lugares geométricos**.

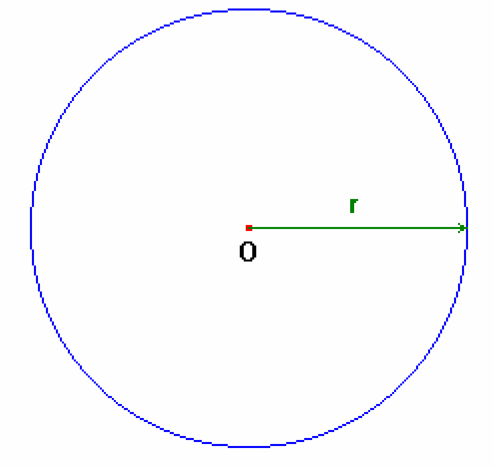
2 Lugares Geométricos Fundamentais

2.1 Lugar Geométrico 1 (LG 1): Circunferência

Pontos situados a uma distância dada de um ponto dado.

LG 1

O lugar geométrico dos pontos situados a uma distância **r** de um ponto fixo O é a circunferência de centro em O e raio igual a **r**.

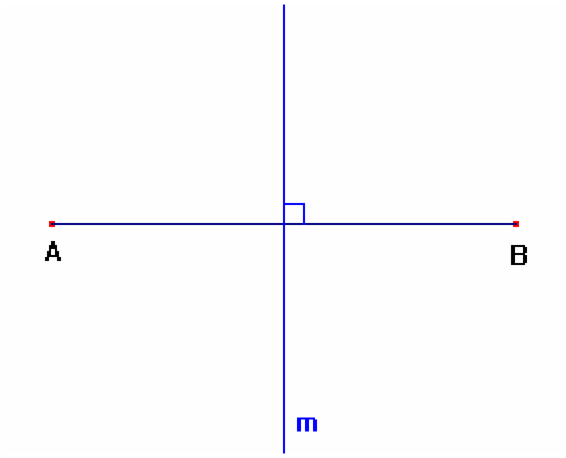


2.2 Lugar Geométrico 2 (LG 2): Mediatriz

Pontos equidistantes de dois pontos dados.

LG 2

O lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos A e B dados é a mediatriz **m** do segmento AB.



2.2.1 Construção da mediatriz

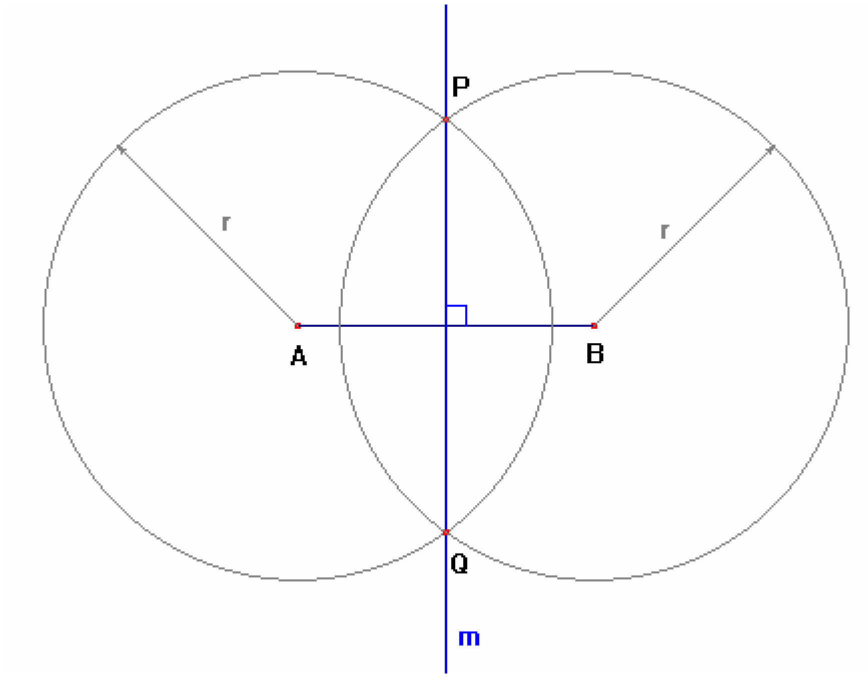
Sabemos que dois pontos distintos determinam uma reta. Portanto, para podermos traçar a mediatriz de um segmento AB, só precisamos conhecer dois pontos da mesma. Como todo ponto eqüidistante de A e B pertence a essa mediatriz, vamos obter dois pontos distintos, P e Q, que sejam equidistantes de A e B.

- Com auxílio do compasso, traçamos uma circunferência de centro em A e raio **r**, maior que $\frac{AB}{2}$.
- Com centro em B e o mesmo raio **r**, traçamos outra circunferência.

A interseção destas duas circunferências nos dá os pontos P e Q que são equidistantes de A e B.

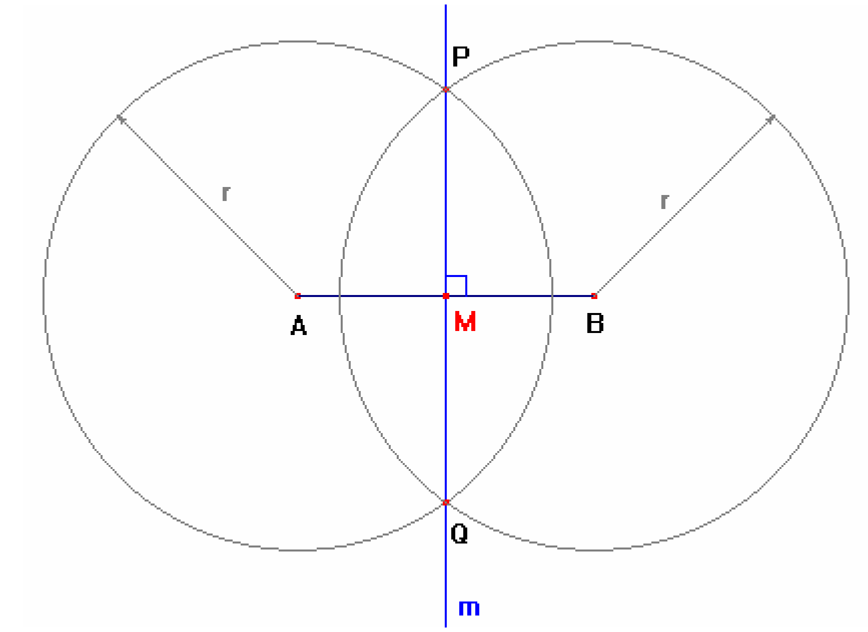
- Traçamos uma reta **m** passando pelos pontos P e Q.

A mediatriz é, então , a reta **m** que passa por P e Q.



2.2.2 Determinação do ponto médio de um segmento

O ponto médio M de um segmento AB é um ponto eqüidistante de A e B. Essa é a razão pela qual esse ponto pertence à mediatriz do segmento AB. Assim, para determinar o ponto médio de um segmento de reta, basta traçar a mediatriz desse segmento. O ponto de interseção entre a mediatriz e o segmento é o ponto médio.

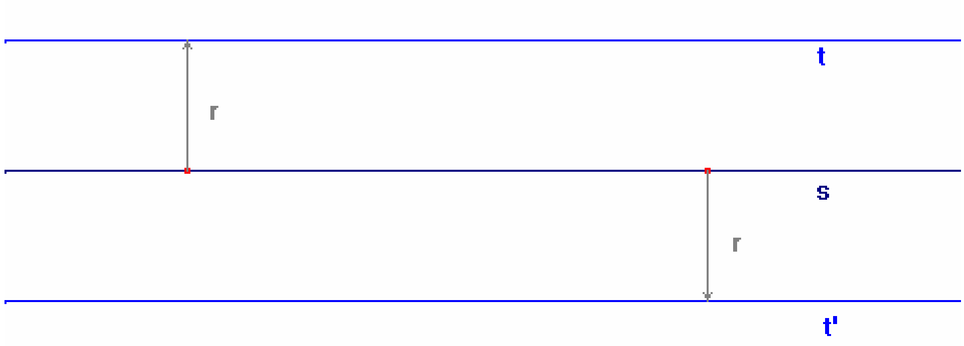


2.3 Lugar Geométrico 3 (LG 3): Retas Paralelas

Pontos situados a uma distância dada de uma reta dada.

LG 3

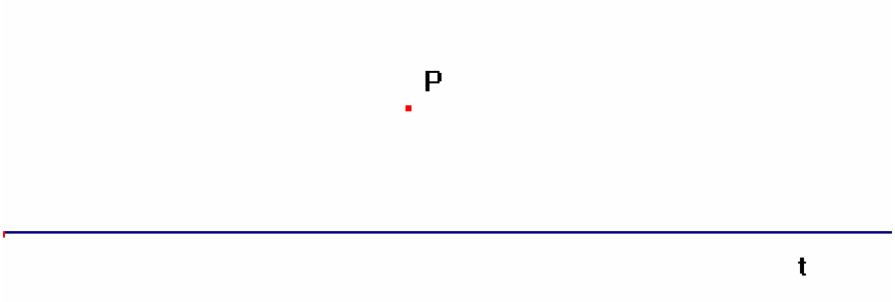
O lugar geométrico dos pontos situados a uma distância **r** de uma reta fixa **s** é constituído de duas retas, **t** e **t'**, paralelas à reta **s** e dela afastadas uma distância igual a **r**.



2.3.1 Traçado de retas paralelas

Uma construção fundamental

Problema: Dados uma reta **t** e um ponto P, fora de **t**, traçar por P a reta **s** paralela a **t**.



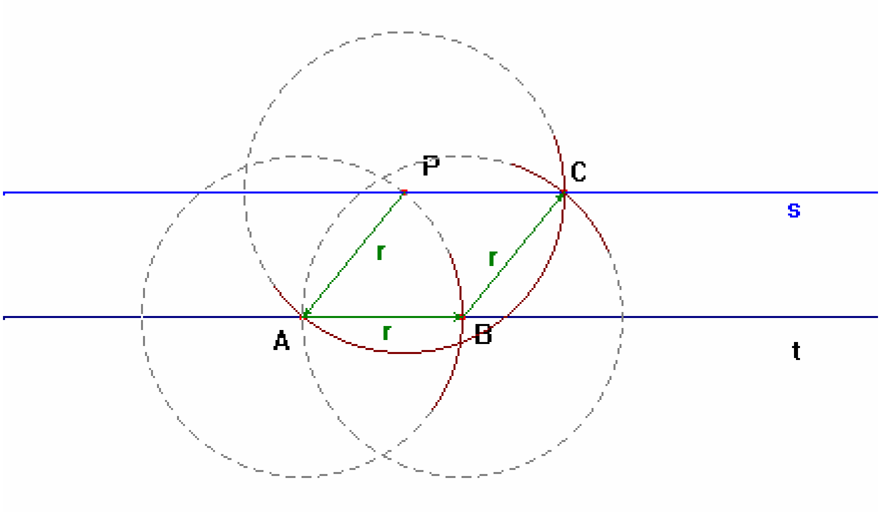
Primeiro processo

Todo quadrilátero que tem quatro lados congruentes é um paralelogramo, isto é, possui os lados opostos paralelos.

Vamos construir um losango que tem um vértice no ponto P e um lado contido na reta **t**.

Sempre com um mesmo raio **r**, cujo a circunferência intercepte a reta **t**, traçam-se os seguintes arcos de circunferências.

- Arco 1, com centro em P, determinando o ponto A em **t.**
- Arco 2, com centro em A, determinado o ponto B em **t**.
- Arco 3, com centro em B, determinando o ponto C no arco 1.



A reta que passa por P e C é a reta **s** procurada.

Como o quadrilátero PABC tem os quatro lados de comprimentos iguais a **r**, ele é um losango. Logo, os lados opostos PC e AB são paralelos, isto é, a reta **s** é paralela a **t** e passa por P.

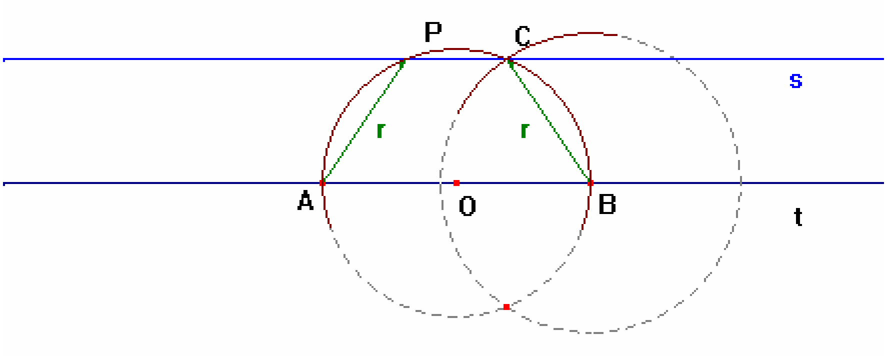
Segundo processo

- Com centro em um ponto O arbitrário da reta **t** e de modo que o segmento OP não seja perpendicular a **t**, traçamos um arco de circunferência que passa por P.

A interseção do arco com a reta **t** nos dá os pontos A e B.

- Traçamos um arco de circunferência com centro em B e raio de distância igual a AP.

A interseção dos dois arcos resulta no ponto C.

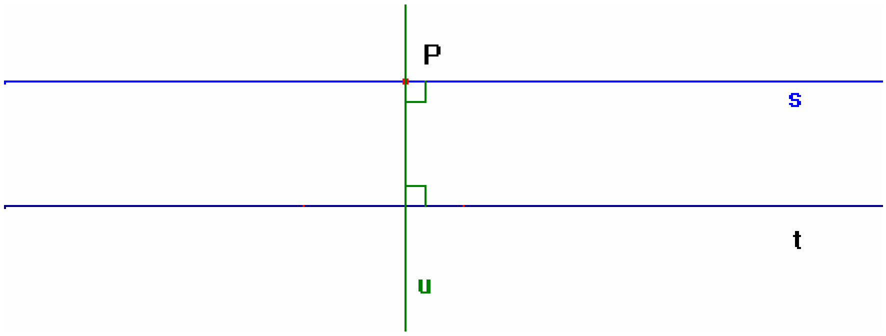


A reta que passa por P e C é a reta **s** procurada.

A justificativa dessa construção é imediata, pois as cordas AP e BC da circunferência O são congruentes. Logo, a reta **s** é paralela a **t** e passa pelo ponto P.

Terceiro processo

Um processo bem intuitivo para o traçado de paralelas é o que utiliza perpendiculares: por P traçamos uma perpendicular **u** à reta **t** e por P traçamos uma perpendicular **s** à reta **u**.



2.3.2 Traçado de retas perpendiculares

Problema: Dados um ponto P e uma reta **b**, traçar, por P, uma reta **a** perpendicular a **b**.

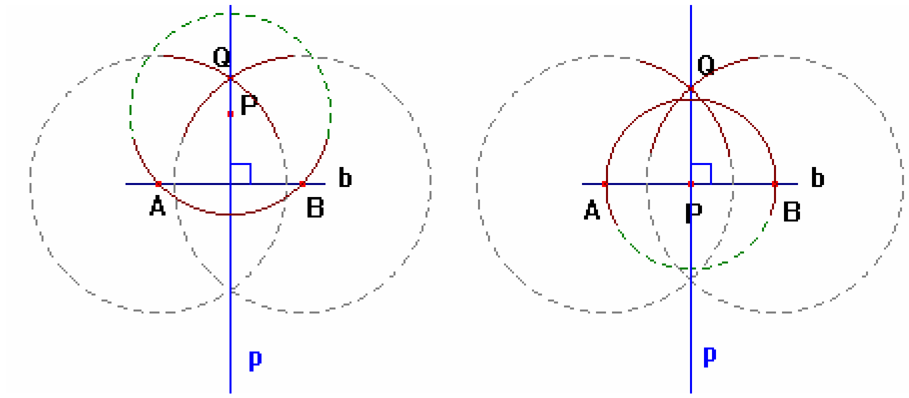
Não importa se P pertença ou não à reta **b**. Construímos a perpendicular da seguinte forma:

- Com centro em P descrevemos um arco de circunferência que intercepta a reta **b** nos pontos A e B.

Nos dois casos P é eqüidistante de A e B, isto é, P pertence à mediatriz do segmento AB. Mas a mediatriz de AB é perpendicular a este segmento. Logo, ela é perpendicular à reta **b**. Só resta, então, determinar um segundo ponto Q dessa mediatriz e conduzir a reta procurada por P e Q.

- Com centro em A e depois em B, traçamos arcos de circunferências de raio **r** maior que $\frac{AB}{2}$, os quais interceptam-se no ponto Q.
- Traçamos uma reta **a** passando pelos pontos P e Q.

A reta **a** é a perpendicular procurada.



Obs: Note que, entre os três processos de traçado de retas paralelas apresentados, o terceiro processo aparenta ser muito simples. No entanto, este processo exige uma quantidade maior de traçados que os outros dois. O terceiro processo exige o traçado de seis arcos de circunferências e um segmento de reta; o primeiro processo, três arcos de circunferência; e o segundo processo, dois arcos.

Levando em consideração a economia de traçados

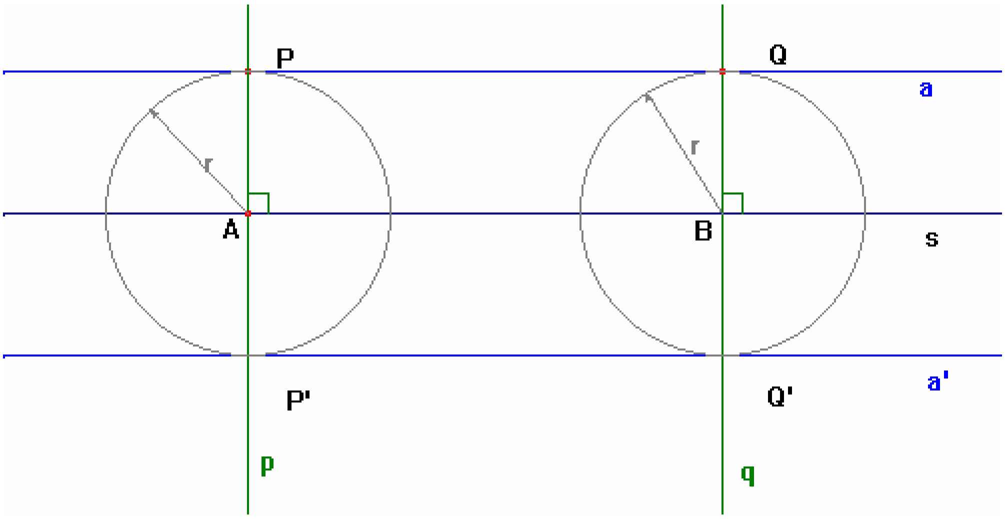
2.3.3 Construção do LG 3

Sejam dadas uma reta **s** e uma distância **r**. Queremos construir as retas **a** e **a’** paralelas a **s** e distantes **r** da mesma.

Primeiro processo

- Tomamos dois pontos distintos A e B sobre a reta **s**.
- Traçamos por A e B, respectivamente, as retas **p** e **q** perpendiculares a **s**.
- Com centro em A e depois em B, traçamos circunferências de raios iguais a **r**.

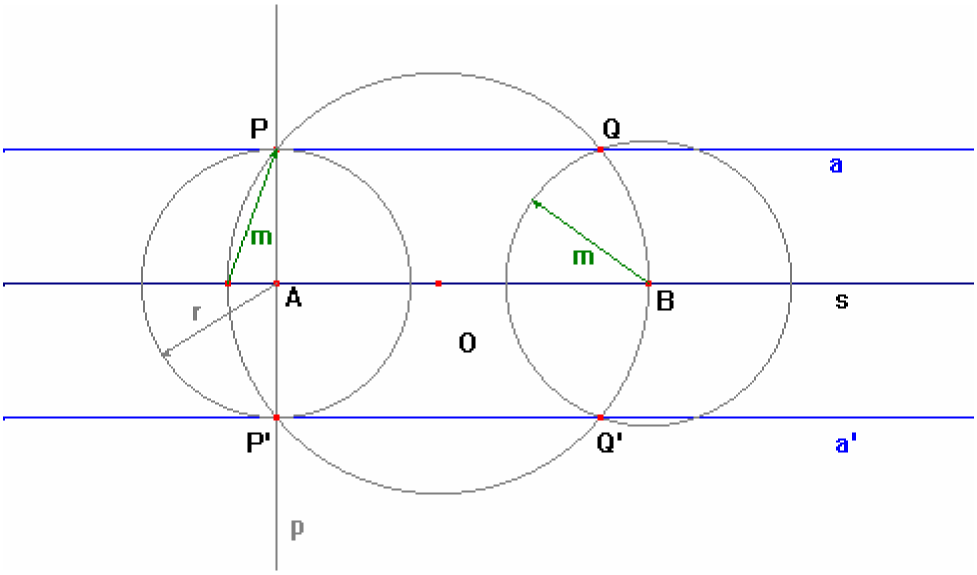
A interseção da circunferência de centro em A com a reta **p** resulta nos pontos P e P’ e a interseção da circunferência B com a reta **q** resulta nos pontos Q e Q’.



A reta **a**, passando por P e Q, e a reta **a’**, por P’ e Q’, constituem o lugar geométrico procurado.

Segundo processo

- Por um ponto A qualquer da reta **s** traçamos uma perpendicular **p** à mesma.
- Com centro em A e raio **r** traçamos uma circunferência que intercepta **p** nos pontos P e P’.
- Utilizando o segundo processo estudado para o traçado de paralelas, traçamos as retas **a** e **a’** por P e P’, respectivamente.



2.4 Lugar geométrico 4 (LG 4): Bissetriz

Pontos equidistantes de duas retas dadas.

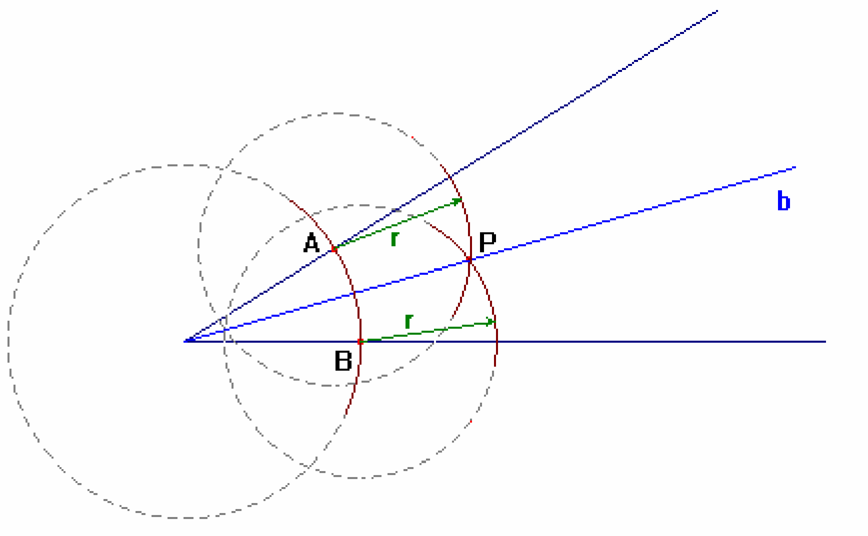
LG 4

O lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas concorrentes, **a** e **b**, constitui um par de retas perpendiculares, as quais contêm as bissetrizes dos ângulos determinados por **a** e **b**.

2.4.1 Construção de bissetriz

Seja dado um ângulo. Para construir sua bissetriz, fazemos o seguinte:

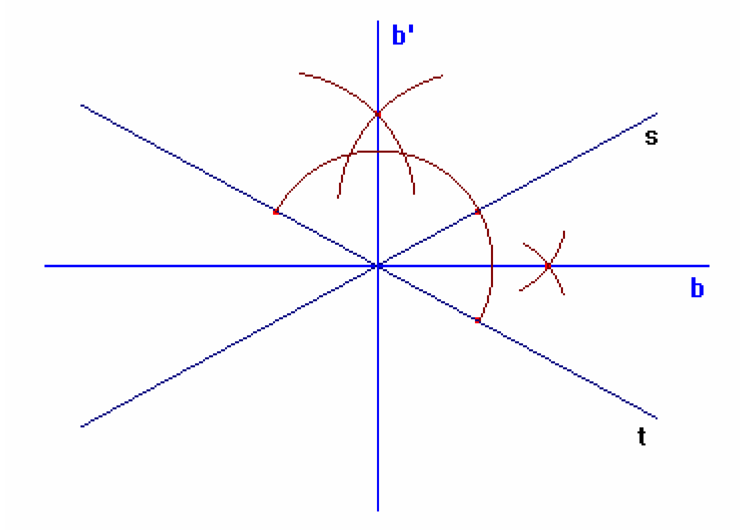
- Com centro no vértice do ângulo e raio qualquer, traçamos um arco de circunferência que intercepta os lados nos pontos A e B.
- Com centro em A e depois em B, com um mesmo raio **r**, maior que $\frac{AB}{2}$, traçamos dois arcos de circunferências, os quais interceptam-se no ponto P.



A bissetriz é a semi-reta **b** que tem origem no vértice do ângulo e passa pelo ponto P.

Observação:

Para traçar as bissetrizes dos quatro ângulos formados por duas retas, **s** e **t**, concorrentes, basta construir as bissetrizes de dois ângulos adjacentes quaisquer e prolongá-las pelo vértice.

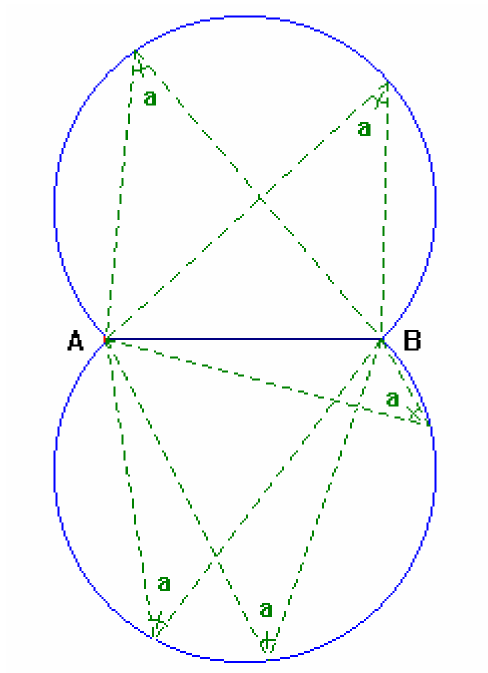

b'
s
b
t

2.5 Lugar Geométrico 5 (LG 5): Arco capaz

Pontos pelos quais se vê um segmento dado sobre um ângulo dado.

LG 5

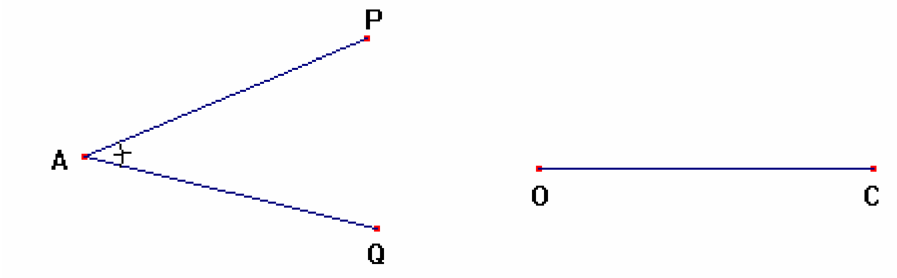
O lugar geométrico dos pontos que enxergam um segmento AB segundo um ângulo de medida **â** constante é o par de **arcos capazes** do ângulo **â** descrito sobre o segmento AB.



Antes de construir o arco capaz de um ângulo dado sobre um segmento dado, devemos saber como se transporta um ângulo de um lugar para outro.

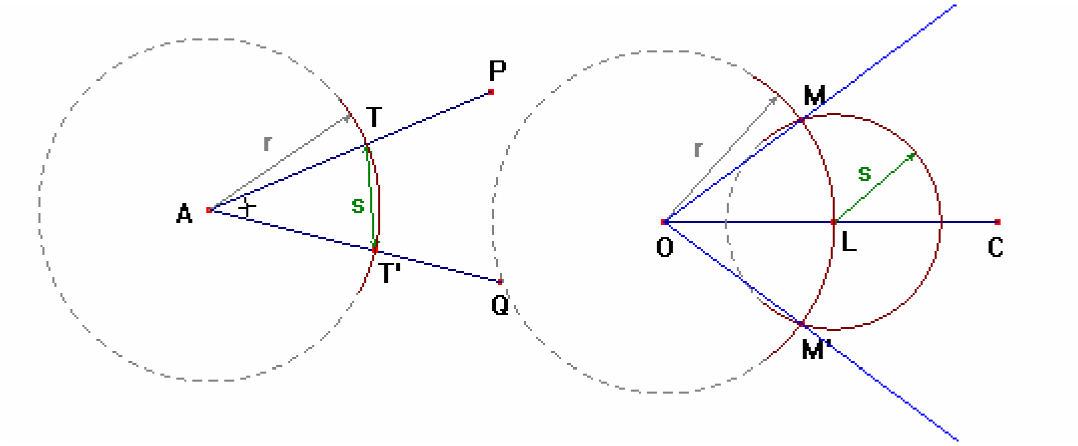
2.5.1 Transporte de ângulos

Problema: Transportar o ângulo PÂQ dado para o segmento OC, tendo como vértice do ângulo o ponto O do segmento.



Resolução:

- Com centro em A e raio **r** qualquer, traçamos um arco de circunferência 1, o qual intercepta os lados do ângulo PÂQ nos pontos T e T’. Seja **s** a distância entre T e T’.
- Com centro no ponto O do segmento e o mesmo raio **r** do arco 1, traçamos um arco de circunferência 2 que intercepta o segmento OC no ponto L.
- Com centro em L e raio igual a **s**, traçamos o arco de circunferência 3 que intercepta o arco 2 nos pontos M e M’.



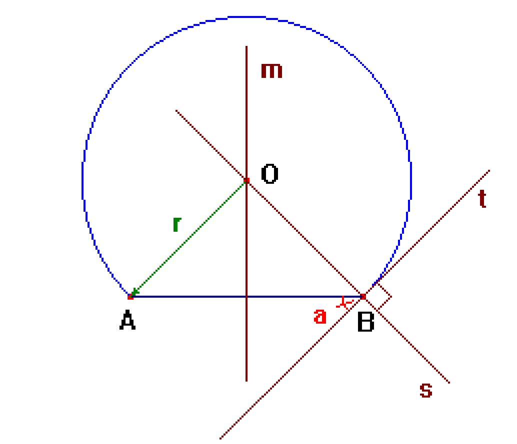
Os ângulos CÔM e CÔM’ são as soluções do problema.

2.5.2 Construção do arco capaz

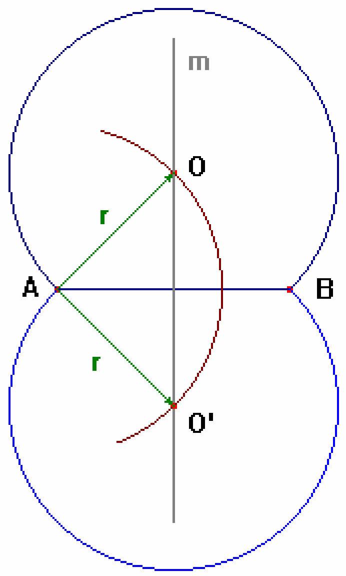
Problema: Sejam dados um segmento AB e um ângulo **â**. Vamos construir um arco capaz do ângulo **â** sobre o segmento AB.

Resolução:

- Por B traçamos uma reta **t**, que faz o ângulo **â** com o segmento AB.
- Traçamos a reta **s** perpendicular à reta **t** em B.
- Traçamos a mediatriz **m** do segmento AB, que intercepta a reta **s** no ponto O.
- Com centro em O e raio **r** igual a distância de A até O, traçamos o arco capaz.

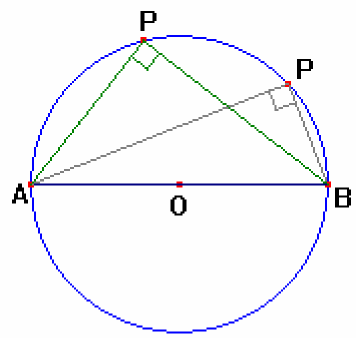


Uma vez construído o primeiro arco capaz, para obter o centro O’ do segundo arco capaz, basta fazer centro em A e com o mesmo raio **r** do primeiro arco traçar um arco de circunferência, o qual intercepta a mediatriz do segmento AB em O’. E com centro em O’ e raio **r** , traçar o segundo arco capaz.



2.5.3 Arco capaz de 90º

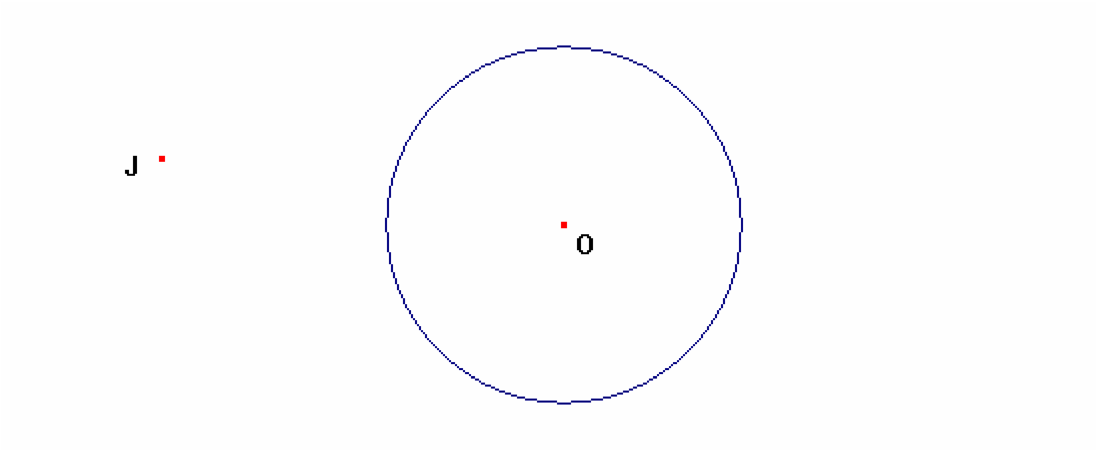
O lugar geométrico dos pontos P dos quais se enxerga um segmento dado AB sobre ângulo reto (90º) é a circunferência de diâmetro AB, exceto os pontos A e B.



Assim, a circunferência de diâmetro AB, exceto os pontos A e B, é o lugar geométrico dos vértices P dos ângulos retos de todos os triângulos retângulos PAB que têm a mesma hipotenusa AB.

2.5.4 Construção de Tangentes

Problema: Construir pelo ponto J as tangentes à circunferência dada.



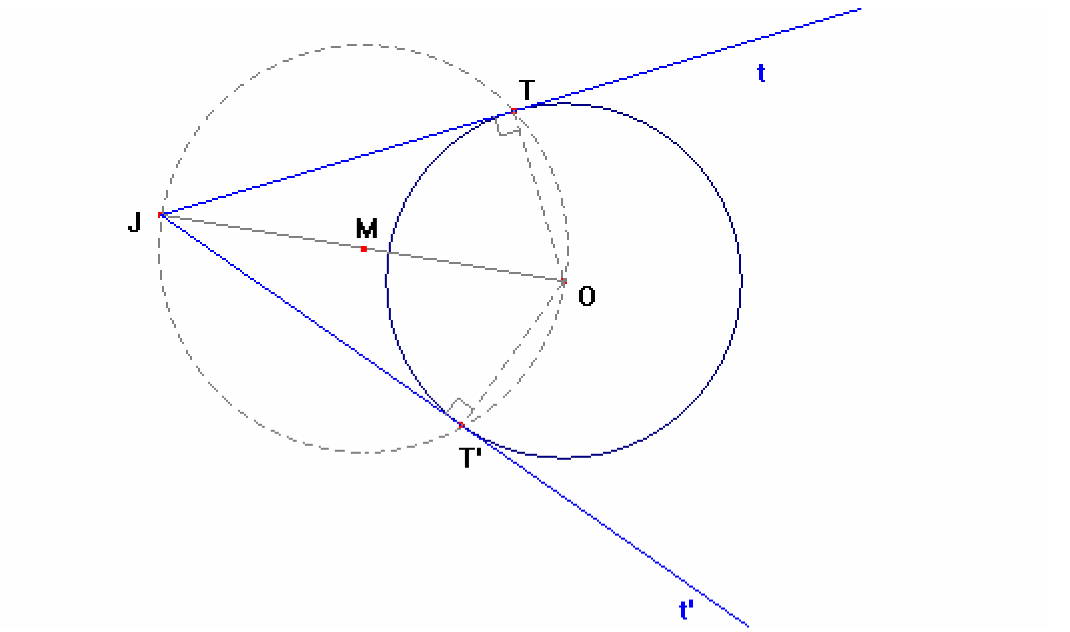
Resolução:

- Traçamos o segmento JO.
- Construímos o arco capaz de 90º do segmento JO, circunferência com centro no ponto médio M de JO.

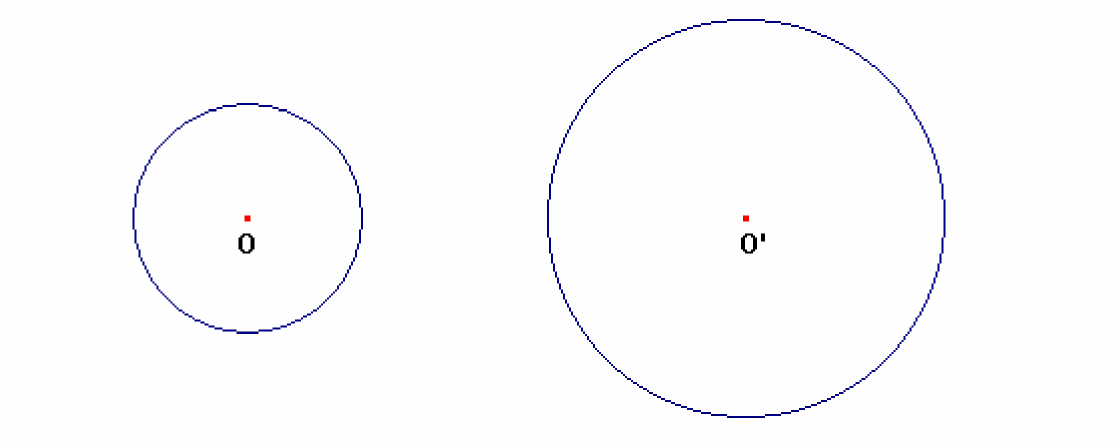
A interseção desta circunferência com a circunferência dada resulta nos ponto T e T'.
Os pontos T e T' são os pontos de tangência das retas que passam por J com a circunferência dada, pois todo ponto pertencente à circunferência de centro em M enxerga o segmento JO sobre um ângulo de 90º. (LG 5)

- Traçamos uma reta **t** passando por J e T e outra reta **t'** passando por J e T'.

As retas **t** e **t'** são as soluções do problema.



Problema: Traçar as tangentes comuns externas às duas circunferências da figura.



Resolução:

- Traçamos o segmento OO’ e encontramos seu ponto médio M.
- Traçamos uma circunferência interna à circunferência dada, de centro em O’ e raio **x**.

O raio **x** é a diferença entre o raio da circunferência O’,maior e da circunferência O, menor. Sugestão para encontrar o raio **x**: traçamos uma circunferência de raio **r** e centro na interseção da circunferência O’ com o segmento OO’. O raio **x** é a distância entre o ponto O’ e o ponto de interseção desta nova circunferência com o segmento OO’.

- Com centro em M, traçamos uma circunferência passando pelos pontos O e O’.

Esta circunferência é o arco capaz de 90° do segmento OO’.

Da interseção do arco capaz com a circunferência de raio **x** encontramos os pontos S e S’.

- Passando pelos pontos O e S Traçamos a reta **s** e passando pelos pontos O e S’ traçamos a reta **s’**.

As retas **s** e **s’** são tangentes à circunferência de raio **x**.

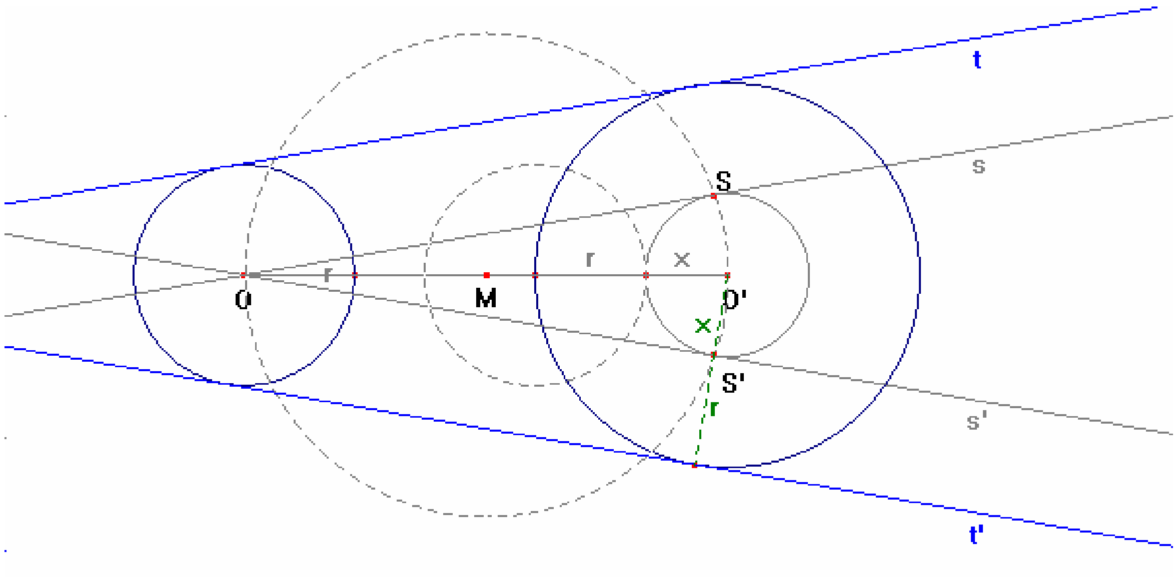
- Traçamos uma reta **t** paralela à reta **s** e a uma distância **r** de **s**.

A reta **t** tangencia as circunferências O e O’.

- Traçamos uma reta **t’** paralela à reta **s’** e a uma distancia **r** de **s’**.

A reta **t’** tangencia as circunferências O e O’.

As retas **t** e **t’** são as soluções do problema.

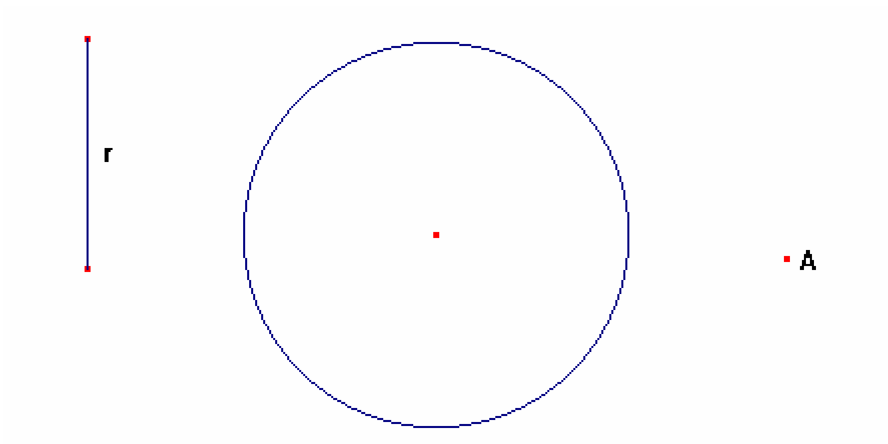


t
s
S
r
r
x
O
M
O'
x
S'
r
s'
t'

3 Problemas Resolvidos

3.1 Exercícios sobre Lugar Geométrico 1

1. São dados um ponto A, uma circunferência e uma distância **r**. Determine um ponto X pertencente a circunferência e que diste **r** de A.

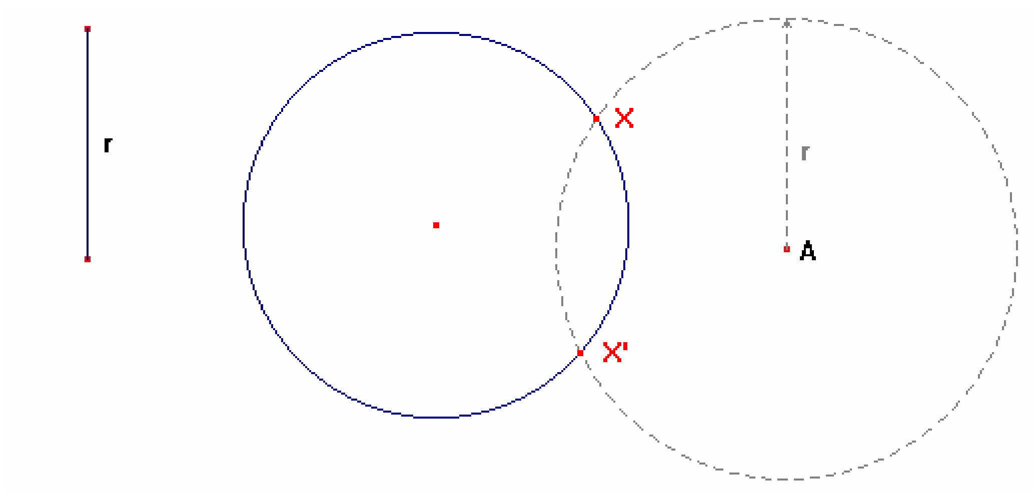


Resolução:

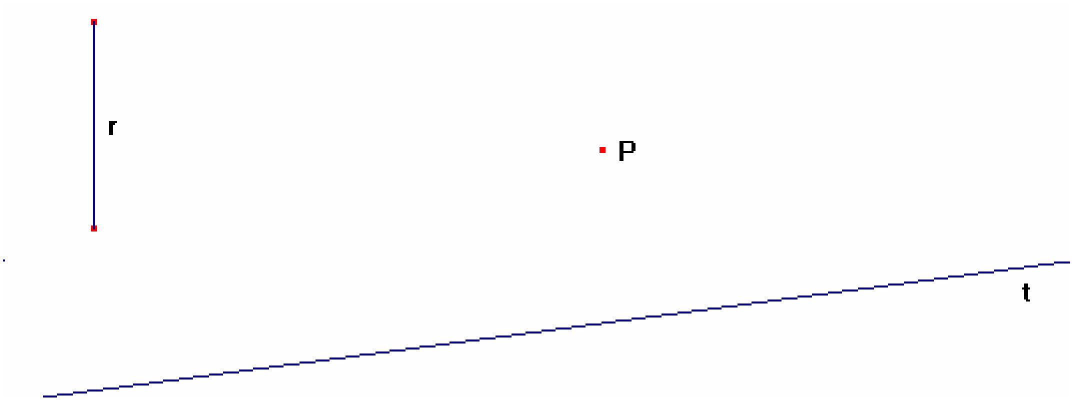
- Com auxílio do compasso, construímos uma circunferência de raio **r** e centro em A.

A interseção das duas circunferências nos dá os pontos X e X’. (LG1 nos garante que os pontos X e X’ distam **r** do ponto A).

Os pontos X e X’ são as soluções para o problema, pois pertencem à circunferência dada e distam **r** do ponto A.



2 . São dados um ponto P, uma reta **t** e uma distância **r**. Construir uma circunferência de raio **r**, passando pelo ponto P e tendo centro sobre a reta **t**.



Resolução:

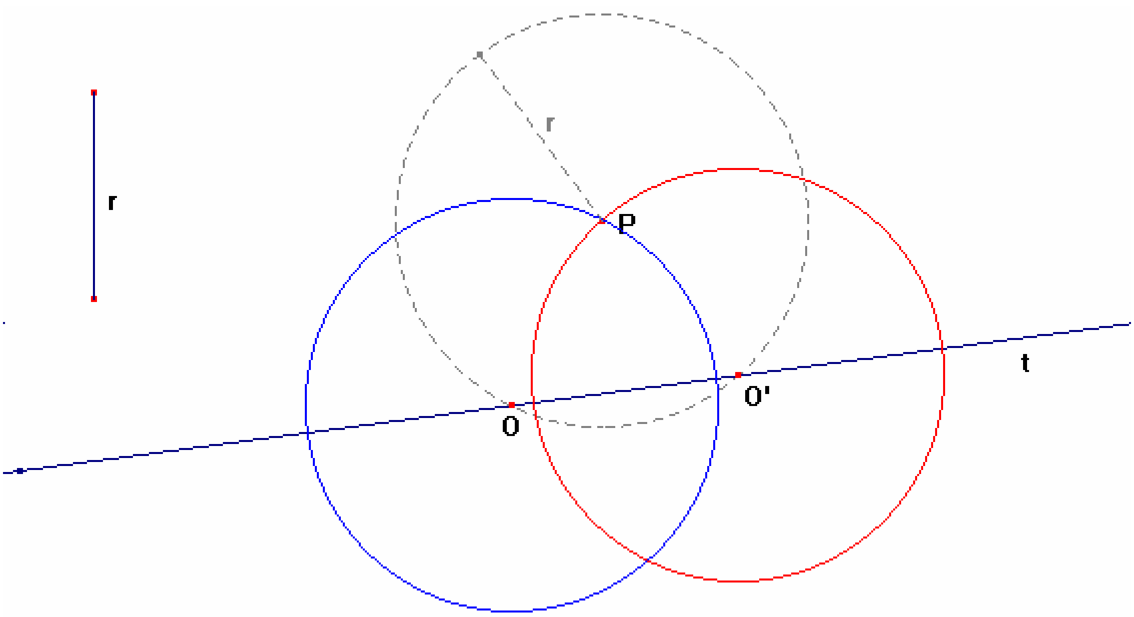
- Com auxílio do compasso, construímos uma circunferência de raio **r** e centro em P.

A interseção desta circunferência com a reta **t** resulta nos pontos O e O’.

Os pontos O e O’ distam **r** do ponto P.(LG 1)

- Construímos, então, uma circunferência de raio **r** e centro em O.
- Construímos outra circunferência de raio **r** e centro em O’.

As circunferências com centro em O e O’ são as soluções para o problema, pois têm centros sobre a reta **t** e passam pelo ponto P.



3. Construir uma circunferência de raio **r** que passe pelos pontos A e B.

Resolução:

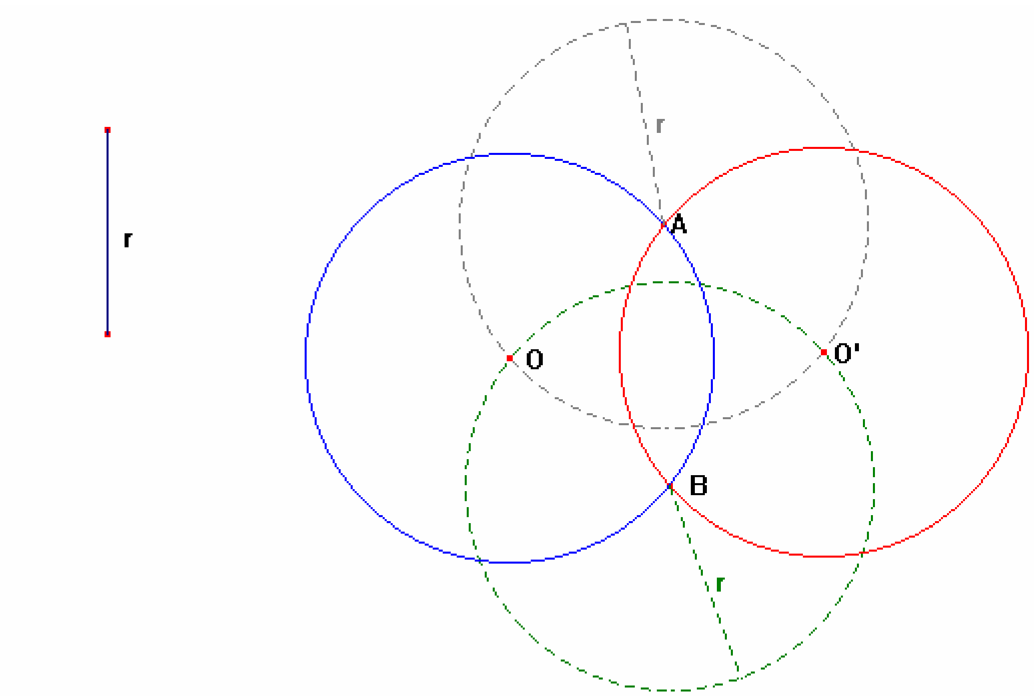
- Com auxílio do compasso, construímos uma circunferência de raio **r** e centro em A, e outra circunferência de raio **r** e centro em B.

A interseção das duas circunferências nos dá os pontos O e O'.

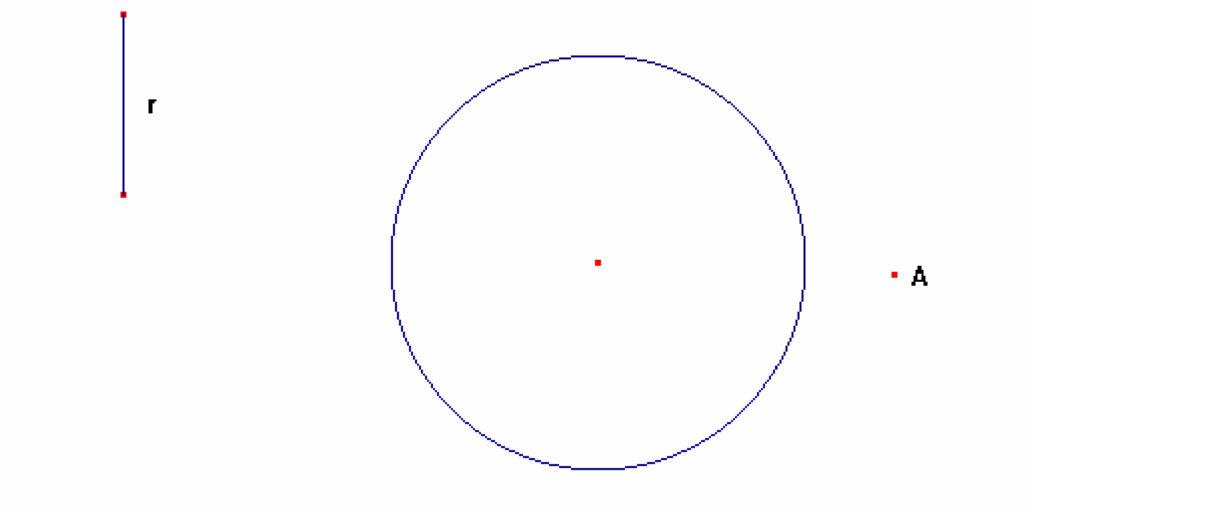
Os pontos O e O' distam **r** do ponto A, e os pontos O e O' distam **r** do ponto B. (LG 1)

- Construímos, então, uma circunferência de raio **r** e centro em O.
- Construímos outra circunferência de raio **r** e centro em O'.

As circunferências O e O' são as soluções para o problema, pois ambas possuem raio **r** e passam pelos pontos A e B.



4. São dados um ponto A, uma circunferência e uma distância **r**. Construir uma circunferência que passe por A, tenha raio **r** e cujo centro pertença à circunferência dada.



Resolução:

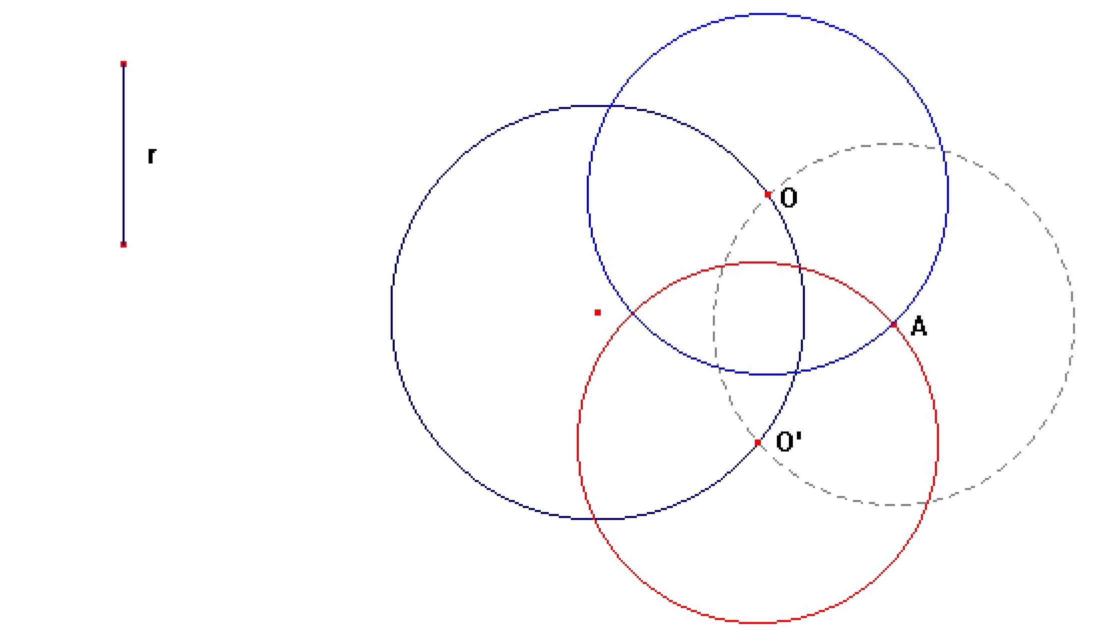
- Com auxílio do compasso, construímos uma circunferência de raio **r** e centro em A.

A interseção desta circunferência com a circunferência dada resulta nos pontos O e O'.

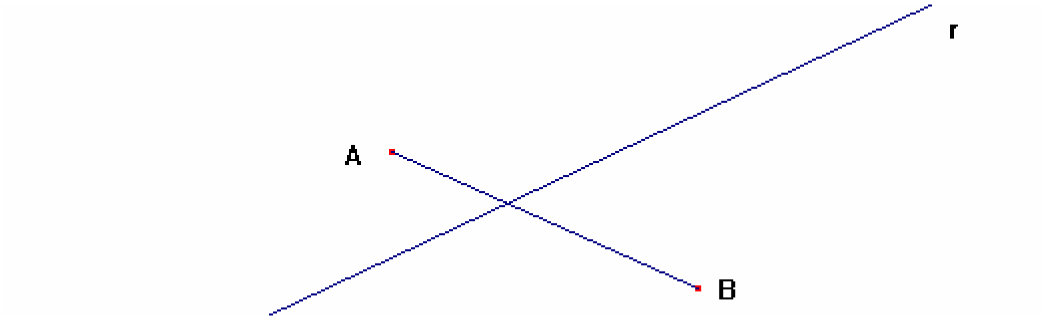
Os pontos O e O' distam **r** do ponto A. (LG 1)

- Construímos, então, uma circunferência de raio r e centro em O.
- Construímos outra circunferência de raio **r** e centro em O'.

As circunferências O e O' são as soluções para o problema, pois possuem raio **r**, têm centros sobre a circunferência dada e passam pelo ponto A.



5. Construir o triângulo isósceles ABC de base BC sabendo que C pertence a reta **r**.



Resolução:

Pela definição de triângulo isósceles, o lado AC tem que ser congruente ao lado AB.

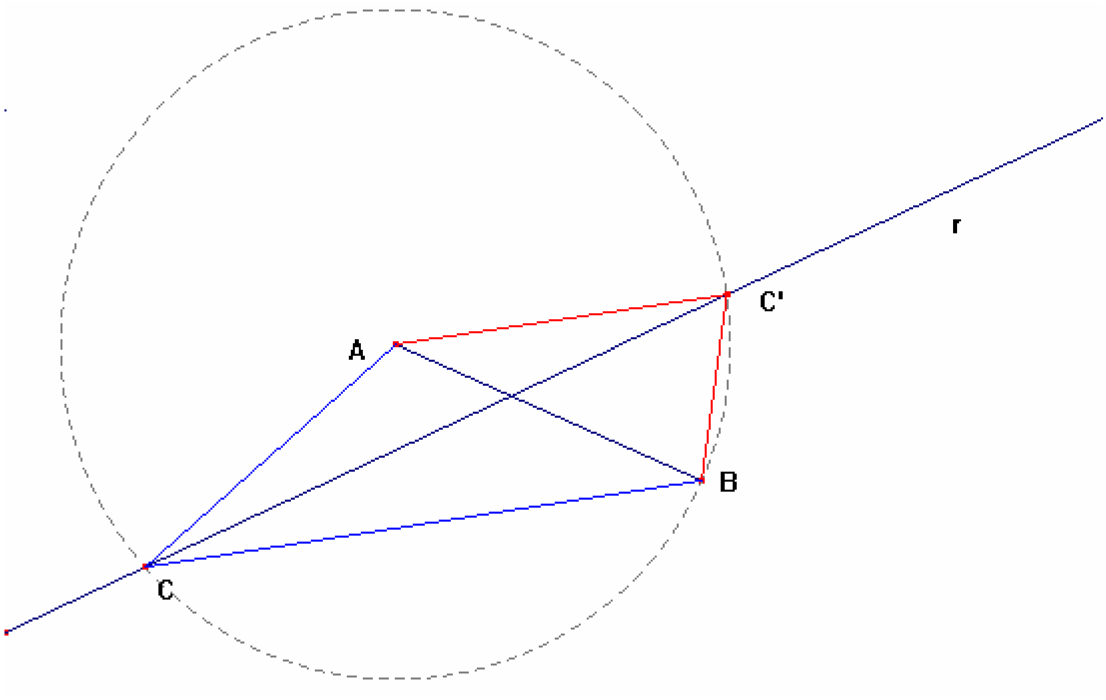
- Com auxílio do compasso, construímos uma circunferência de centro em A e raio AB.

Todos os pontos pertencentes à circunferência estão a uma distância AB do ponto A. (LG 1)

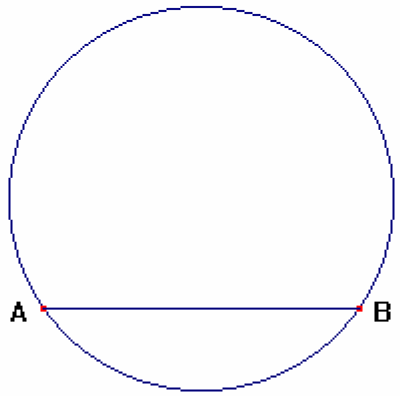
A interseção da circunferência com a reta **r** nos dá os pontos C e C'.

- Construímos os triângulos ABC e ABC'.

Os triângulos ABC e ABC' são as soluções para o problema.



6. Inscrever na circunferência da figura um triângulo isósceles ABC de base BC.



Resolução:

Pela definição de triângulo isósceles, o lado AC tem que ser congruente ao lado AB.

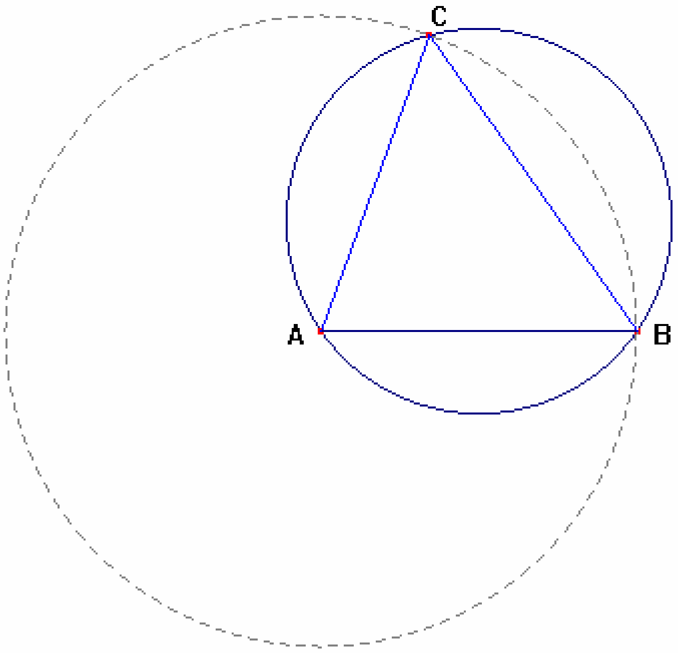
- Com auxílio do compasso, construímos uma circunferência de centro em A e raio AB.

Todos os pontos pertencentes à circunferência estão a uma distância AB do ponto A. (LG 1)

A interseção das duas circunferências resulta no ponto C.

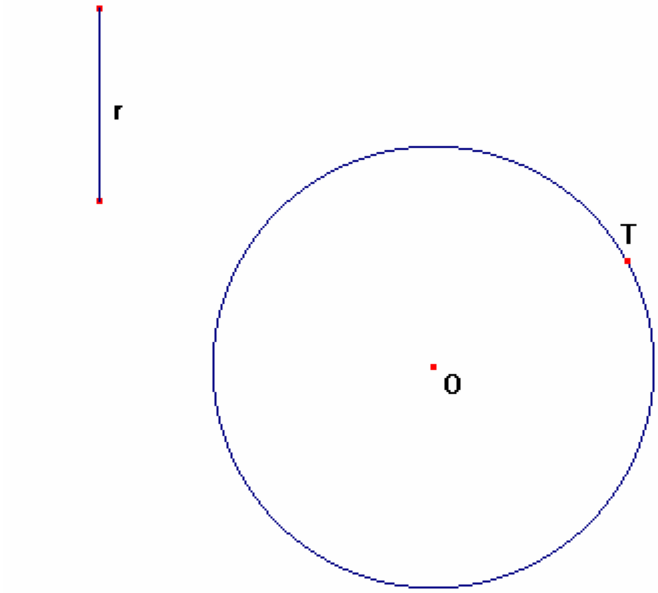
- Construímos o triângulo ABC.

O triângulo ABC é uma solução do problema.



Obs: Um outro triângulo ABC' pode ser traçado. Basta traçar uma circunferência de centro em B e raio AB. A intersecção das circunferências nos dá o ponto C'.

7. Construa uma circunferência de raio r que seja tangente externa à circunferência no ponto T.



Resolução:

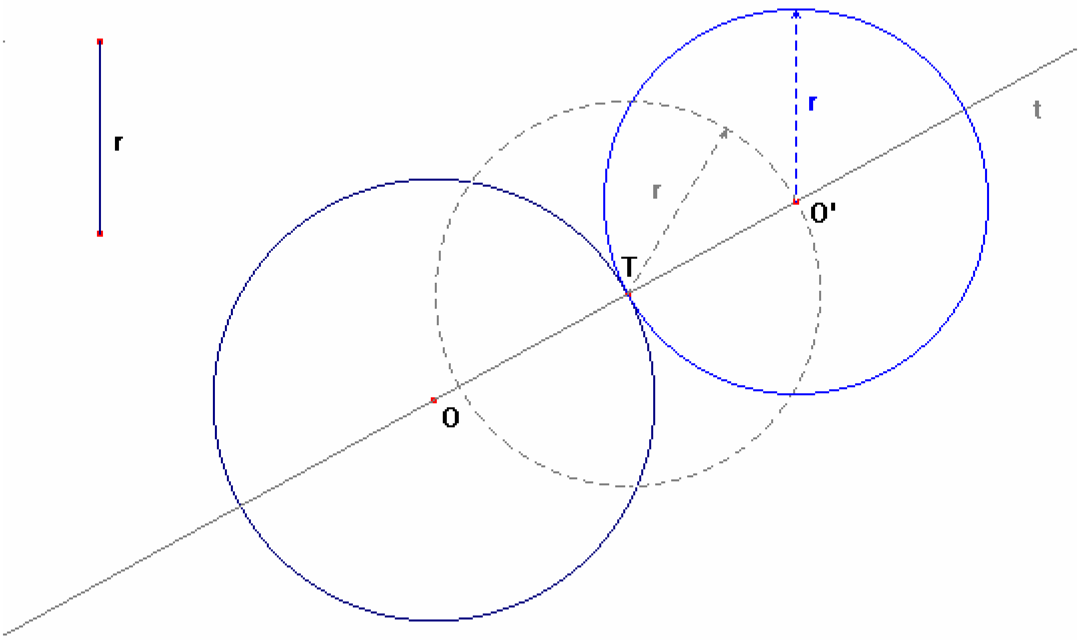
As duas circunferências são tangentes no ponto T, logo o ponto de tangência T e os centros das circunferências estão alinhados.

- Traçamos uma reta **t** passando pelos pontos O e T.
- Com centro em T e raio **r**, traçamos uma circunferência.

A interseção desta circunferência com a reta **t** resulta no ponto O'.

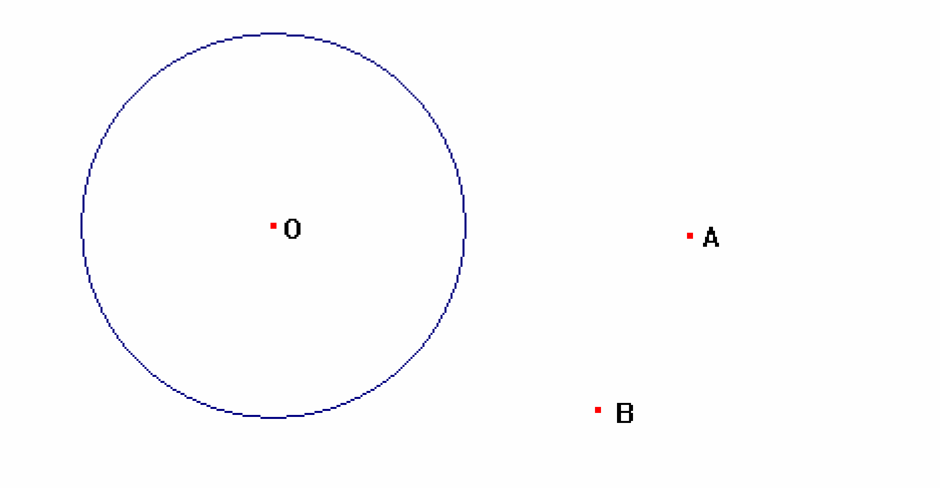
- Traçamos uma circunferência com centro em O' e raio **r**.

A circunferência O' é a solução do problema.



3.2 Exercícios sobre Lugar Geométrico 2

1. Determinar sobre a circunferência O, um ponto P eqüidistante dos dois pontos A e B.



Resolução:

Precisamos traçar a mediatriz do segmento AB.

- Com auxílio do compasso, traçamos uma circunferência de centro em A de raio **r** qualquer e traçamos outra circunferência de centro em B e raio igual a **r.**

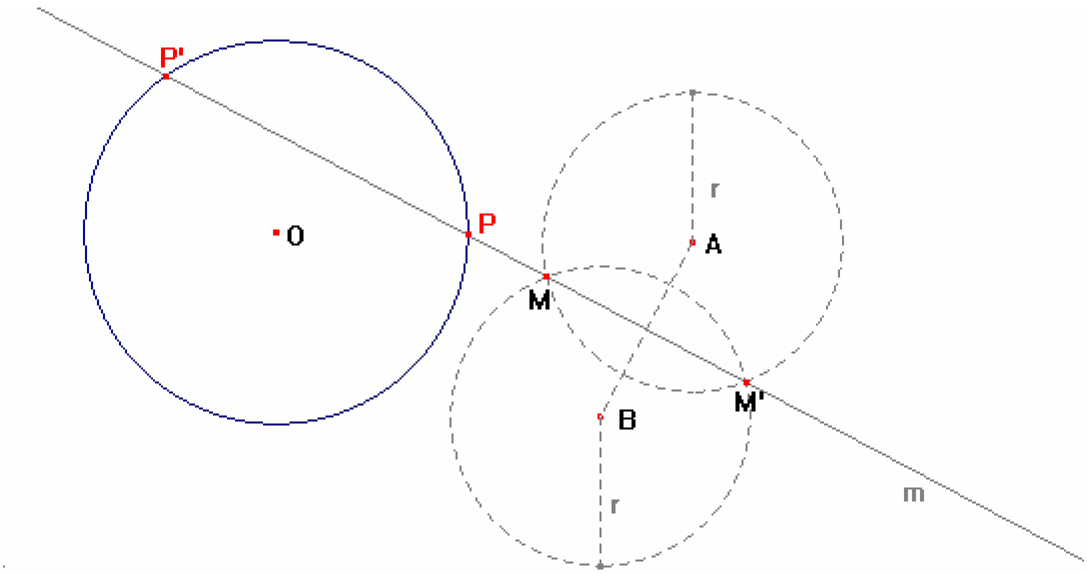
A interseção das duas circunferências resulta nos pontos M e M'.

- Traçamos uma reta **m** passando pelos pontos M e M'.

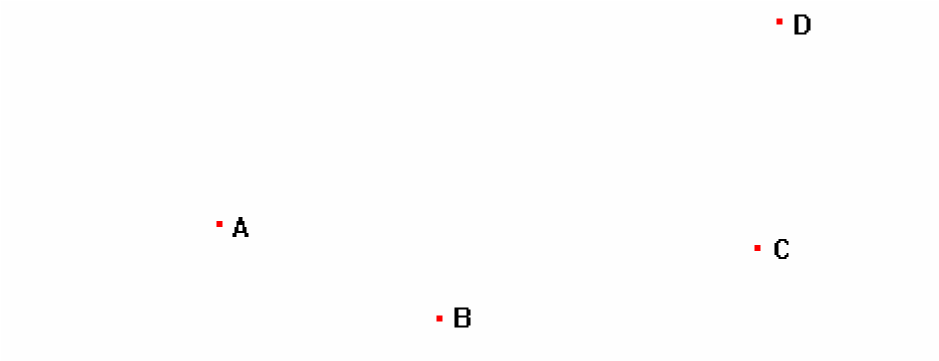
A reta **m** é a mediatriz do segmento AB. (LG2 nos garante que a mediatriz de um segmento AB é o lugar geométrico de todos os pontos eqüidistantes dos pontos A e B).

A interseção da reta **m** com a circunferência dada resulta nos pontos P e P'.

Os pontos P e P' são as soluções para o problema, pois estão eqüidistantes dos pontos A e B e pertencem à circunferência dada.



2. São dados quatro pontos A, B, C e D. Determinar um ponto X que seja eqüidistante de A e B, e que seja também eqüidistante de C e D.



Resolução:

- Traçamos a mediatriz **m** do segmento AB.

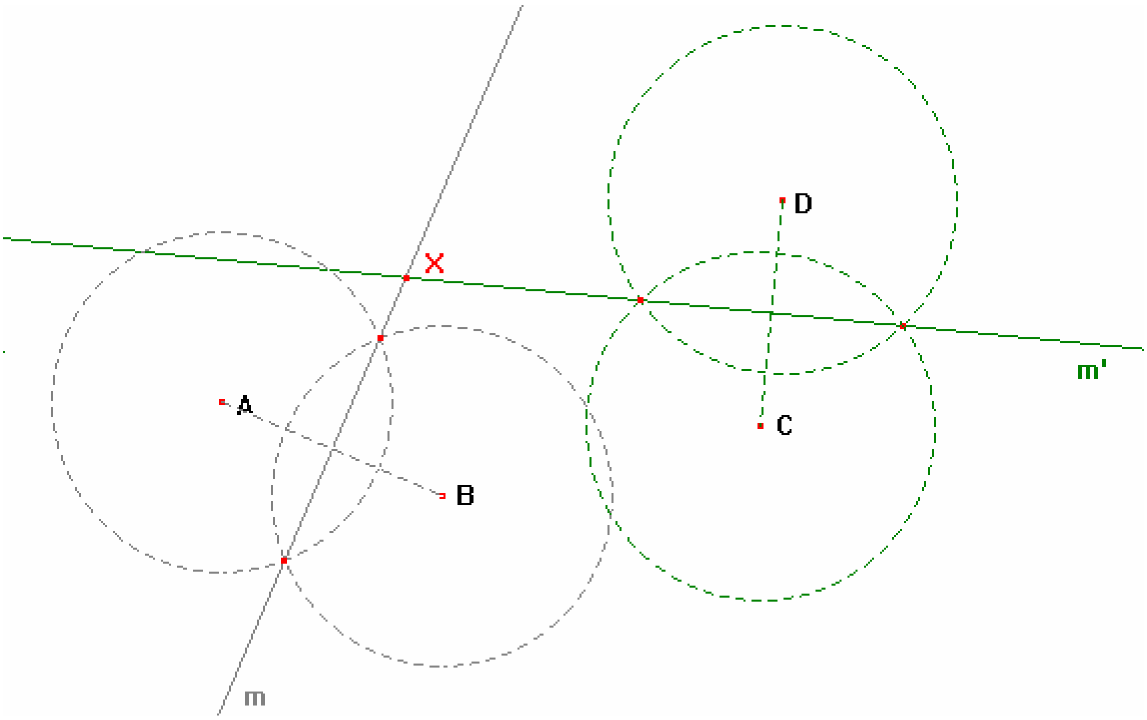
Todos os pontos pertencentes à reta **m** são eqüidistantes aos postos A e B. (LG 2)

- Traçamos a mediatriz **m’** do segmento CD.

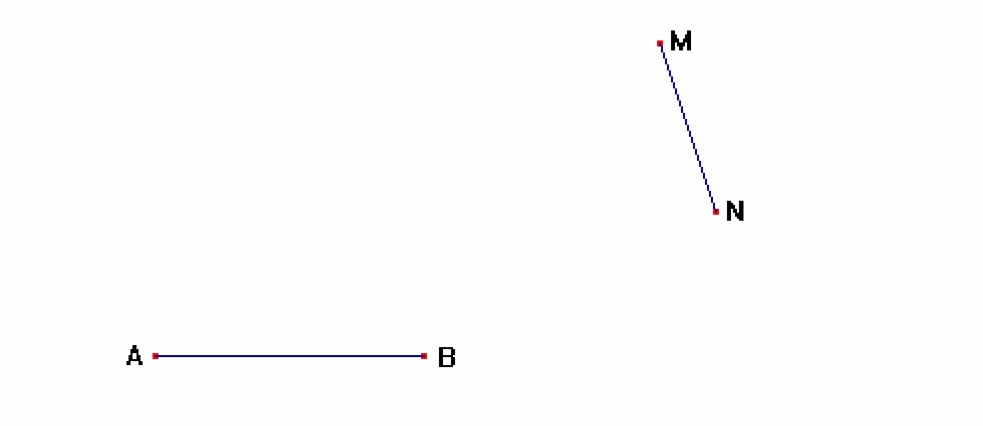
Todos os pontos pertencentes à reta **m’** são eqüidistantes aos postos C e D. (LG 2)

A interseção das retas **m** e **m’** nos dá o ponto X que é eqüidistante dos pontos A e B, e também eqüidistantes dos pontos C e D.

O ponto X é a solução do problema.



3. Determinar a posição do ponto P de tal modo que os triângulos PAB e PMN sejam isósceles, de bases AB e MN respectivamente.



Resolução:

Pela definição de triângulos isósceles, sabemos que os lados AP e PB são congruentes, e os lados MP e PM também são congruentes.

Temos que encontrar um ponto P que seja eqüidistante dos postos A e B e eqüidistante dos pontos M e N.

- Traçamos a mediatriz **m** do segmento AB.

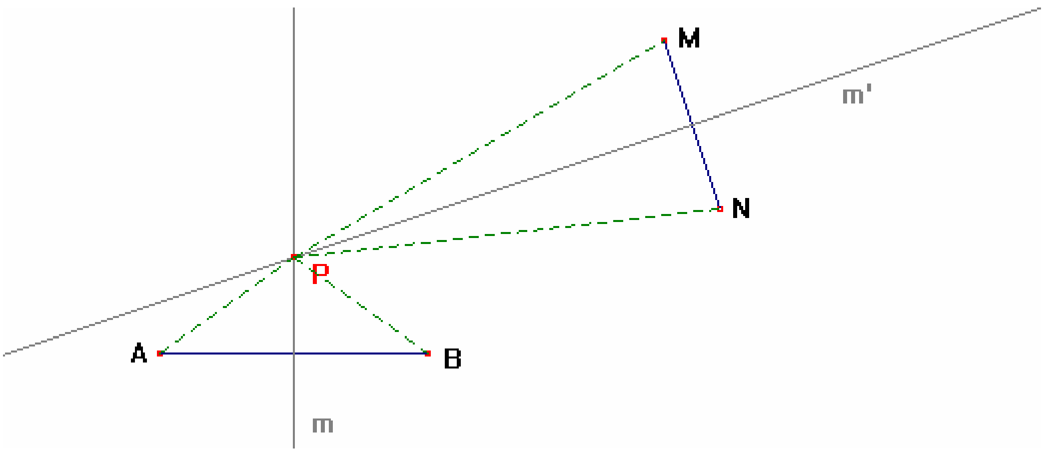
Todos os pontos pertencentes à reta **m** são eqüidistantes aos postos A e B. (LG 2)

- Traçamos a mediatriz **m’**do segmento MN.

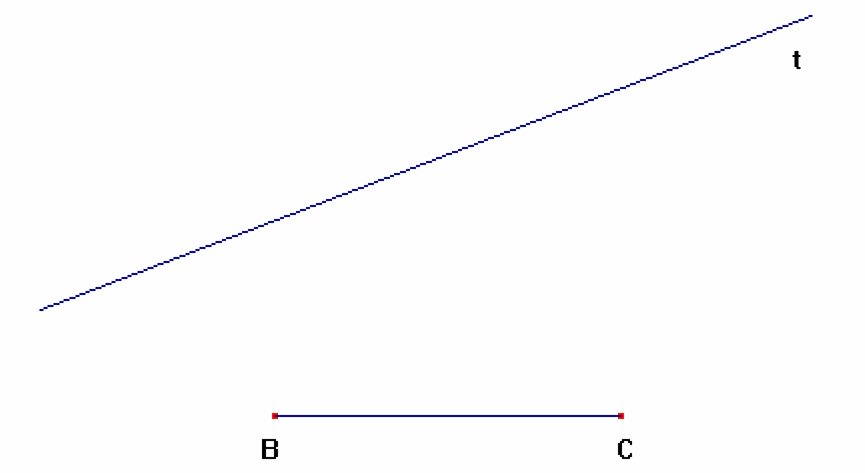
Todos os pontos pertencentes à reta **m’** são eqüidistantes aos postos M e N. (LG 2)

Logo, a interseção das retas **m** e **m’** nos dá o ponto P que é eqüidistante dos pontos A e B, e também eqüidistantes dos pontos C e D.

O ponto P é o ponto procurado.



4. Construir o triângulo isósceles ABC de base BC, sabendo que o vértice A pertence à reta **t.**



Resolução:

Sendo o segmento BC a base do triângulo isósceles, por definição os lados AB e AC são congruentes. Logo, o vértice A é eqüidistante dos pontos B e C.

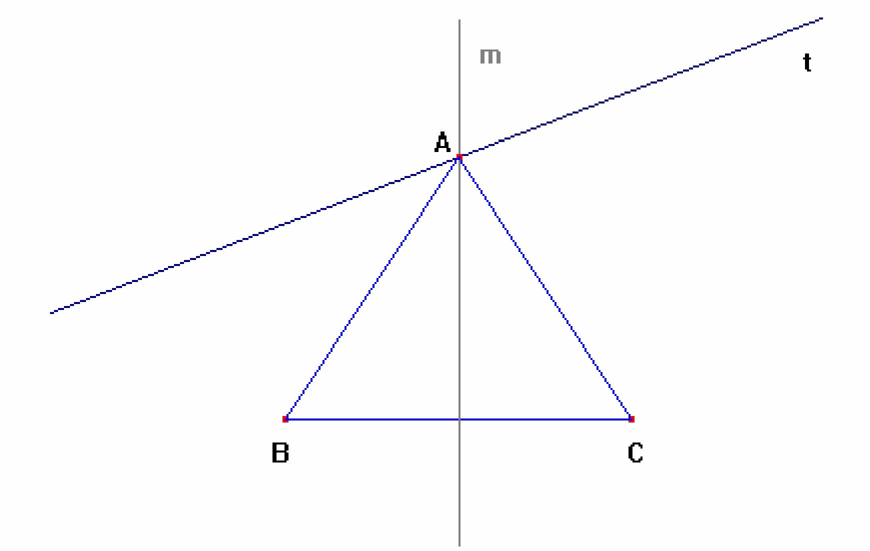
- Traçamos a mediatriz **m** do segmento BC.

Todos os pontos pertencentes à reta **m** são eqüidistantes dos pontos B e C. (LG 2)

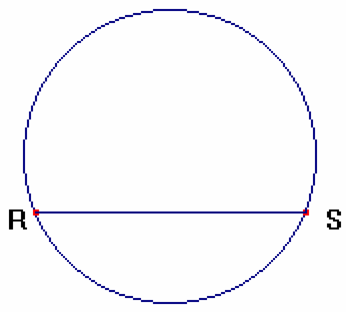
A interseção da reta **m** com a reta **t** resulta no ponto A, vértice procurado do triângulo.

- Construímos o triângulo ABC.

O triângulo ABC é a solução para o problema.



5. Inscrever na circunferência da figura o triângulo isósceles RST.



Resolução:

Podemos resolver o problema de duas formas, podemos considerar o segmento RS como sendo um dos lados congruentes do triângulo ou o segmento RS sendo a base do triângulo.

1º - Considerando o segmento RS sendo um dos lados congruentes.

Este primeiro caso já foi resolvido no exercício 6 sobre Lugar Geométrico 1.

2º - Considerando o segmento RS sendo a base do triângulo.

Pela definição de triângulo isósceles os outros dois lados são congruentes.

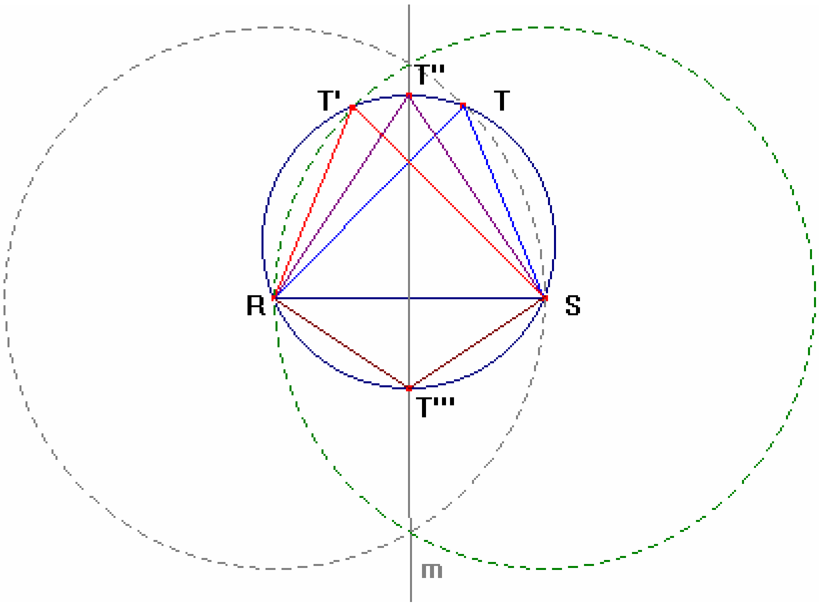
- Traçamos a mediatriz **m** do segmento RS.

Todos os pontos pertencentes à reta **m** são eqüidistantes aos postos R e S. (LG 2)

A interseção da reta **m** com a circunferência dada resulta nos pontos T’’ e T’’’.

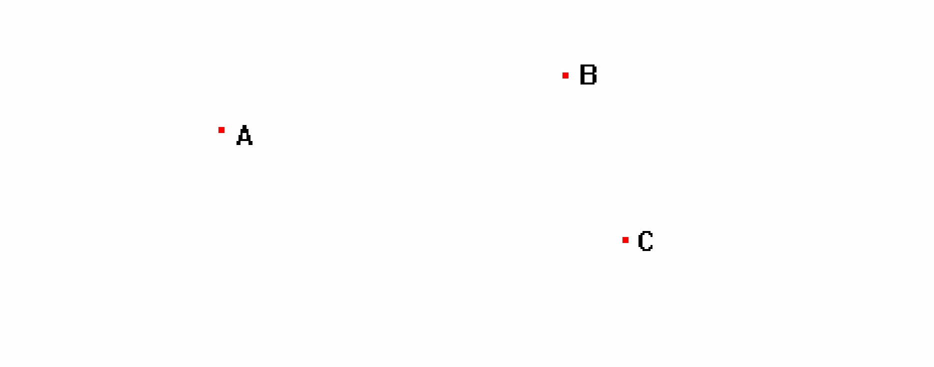
- Construímos os triângulos RST’’ e RST’’’.

Os triângulos RST, RST’, RST’’ e RST’’’ são as possíveis soluções do problema.



3.3 Exercícios sobre Lugar Geométrico 1 e Lugar Geométrico 2

1. Construir a circunferência que passa pelos pontos A, B e C.



Resolução:

Para construir a circunferência que passa pelos pontos A, B e C temos que encontrar o centro O, da circunferência, que é eqüidistante aos três pontos.(LG 1)

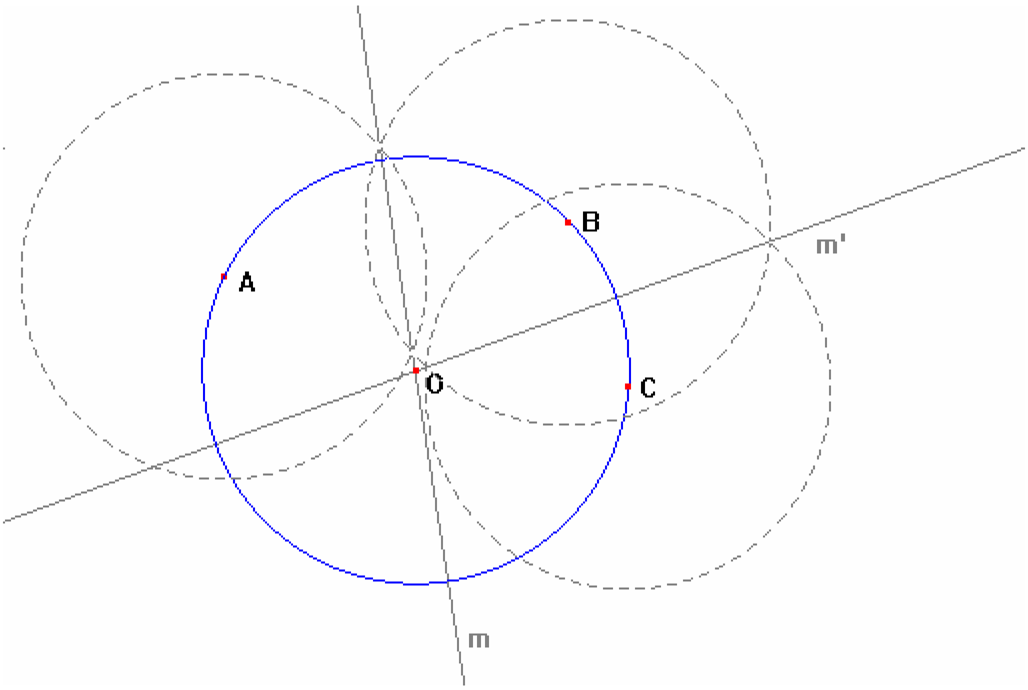
- Traçamos a mediatriz **m** do segmento AB e a mediatriz **m’** do segmento BC.

Todos os pontos pertencentes à reta **m** são eqüidistantes aos postos A e B, e que todos os pontos pertencentes à reta **m’** são eqüidistantes aos postos B e C. (LG 2)

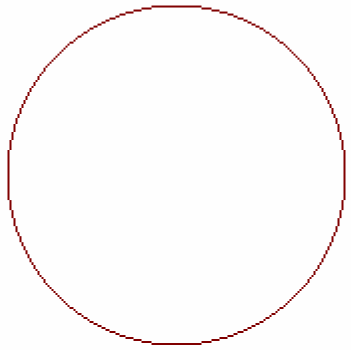
A interseção das retas **m** e **m’** resulta no ponto O que é eqüidistante dos pontos A e B e dos pontos B e C, ou seja é eqüidistante aos três pontos.

- Com auxílio do compasso, construímos a circunferência com centro em O e que passa pelos três pontos.

A circunferência O é a solução do problema.



2. Dada uma circunferência de centro desconhecido, obtenha seu centro.



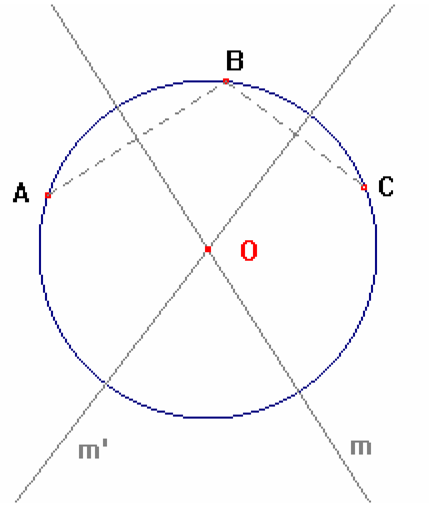
Resolução:

O centro O da circunferência é um ponto eqüidistante de todos os pontos da circunferência.(LG 1). Logo, o centro O é um ponto eqüidistante de três pontos quaisquer da circunferência.

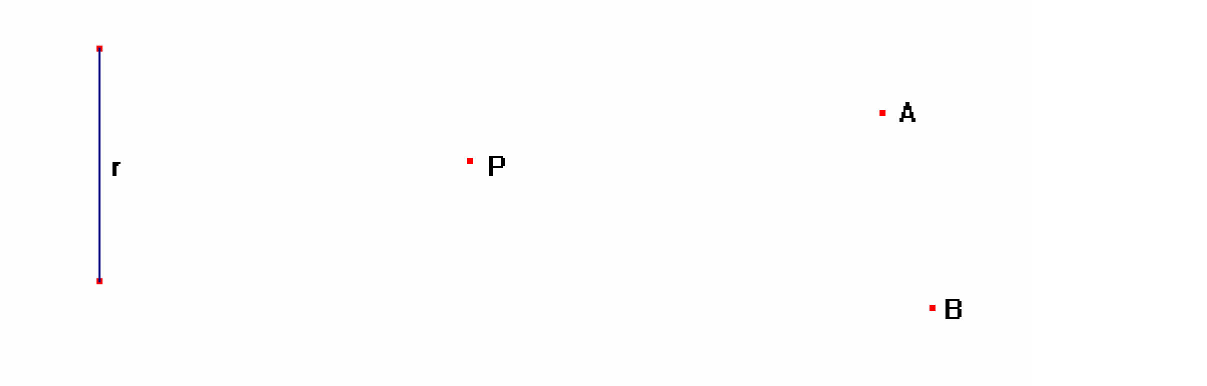
- Marcamos três pontos, A, B e C, quaisquer na circunferência.
- Traçamos a mediatriz **m** do segmento AB e traçamos a mediatriz **m’** do segmento BC.

Todos os pontos pertencentes à reta **m** são eqüidistantes dos pontos A e B e todos os pontos pertencentes à reta **m’** são eqüidistantes aos pontos BC. (LG 2)

A interseção das duas retas nos dá o ponto O eqüidistante aos três pontos. Logo , o ponto O é o centro da circunferência.



3. Construir uma circunferência de raio **r**, que passa pelo ponto P, sabendo que seu centro eqüidista dos pontos A e B.



Resolução:

- Traçamos a mediatriz **m** do segmento AB.

Todos os pontos pertencentes à reta **m** são eqüidistantes aos postos A e B. (LG 2)

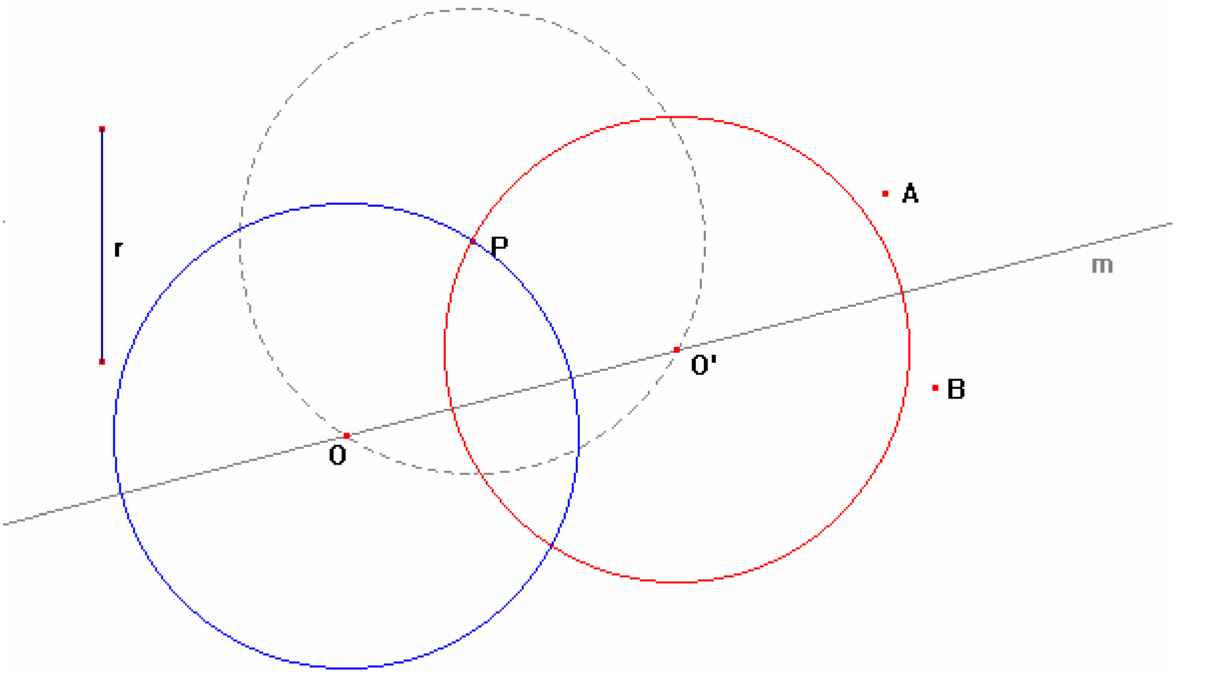
- Com auxílio do compasso, construímos uma circunferência de raio **r** e centro em P.

A interseção desta circunferência com a reta **m** resulta nos pontos O e O'.

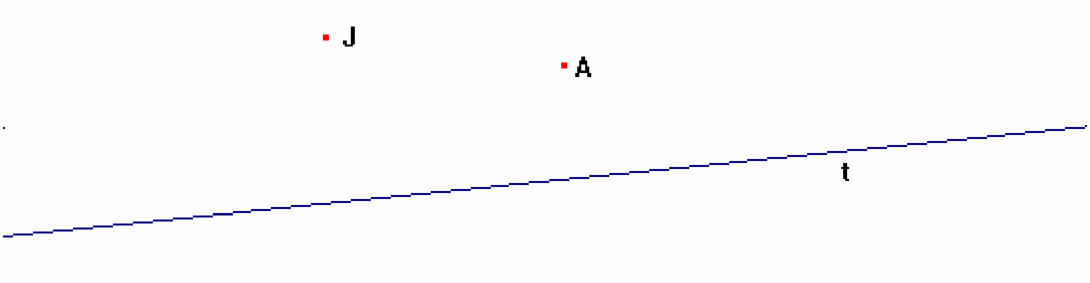
Os pontos O e O' distam **r** do ponto P. (LG 1)

- Construímos, então, uma circunferência de raio **r** e centro em O.
- Construímos outra circunferência de raio **r** e centro em O'.

As circunferências O e O' são as soluções para o problema, pois têm centros sobre a reta **m**, ou seja, eqüidistantes dos pontos A e B, e passam pelo ponto P.



4. Dada uma reta **t** e dados os pontos A e J não pertencentes a **t**, construir o segmento AB com B pertencente à reta **t**, cuja mediatriz passa pelo ponto J.



Resolução:

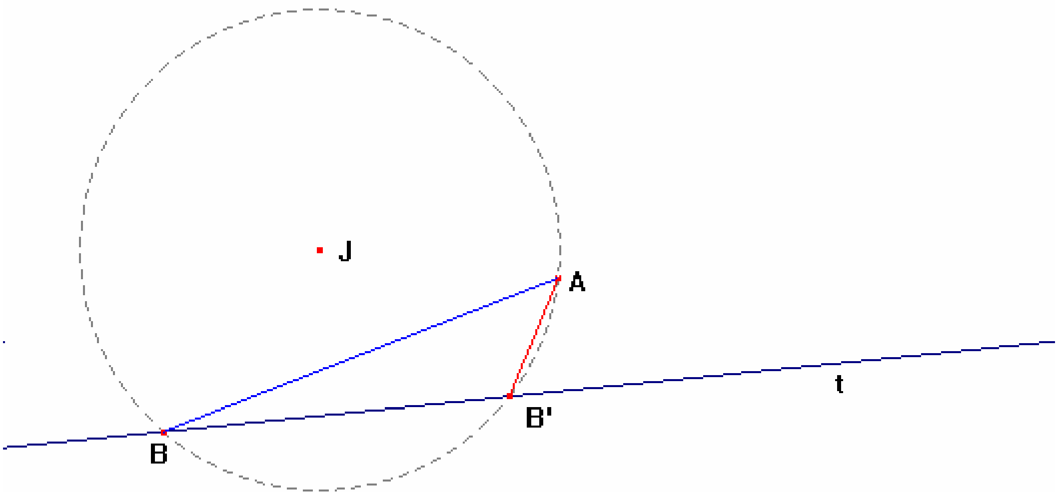
É fato que o ponto J pertence à mediatriz do segmento AB, logo J é eqüidistante dos pontos A e B (LG2). Então, precisamos encontrar um ponto B, pertencente à reta **t**, cuja distância até J seja igual à distância de A até J.

- Traçamos uma circunferência de raio igual ao segmento JA com centro em J.

Todo ponto pertencente à circunferência está a uma igual distância do centro J. (LG 1)

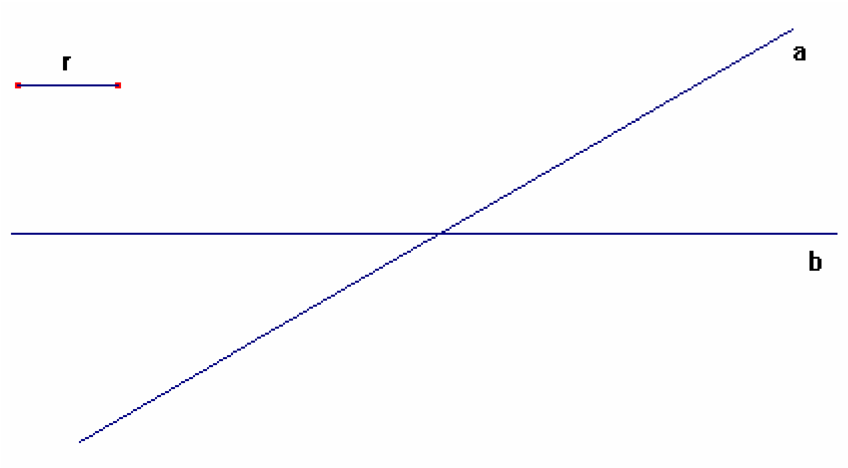
A interseção desta circunferência com a reta **t** resulta nos pontos B e B'.

Os segmentos AB e AB' são as soluções do problema.



3.4 Exercícios sobre Lugar Geométrico 3

1. São dadas duas retas concorrentes **a** e **b** e uma distância **r**. Construa uma circunferência de raio **r**, tangente à reta **b**, sabendo que seu centro pertence à reta **a**.



Resolução:

A circunferência procurada possui raio **r** e é tangente à reta **b.** Logo, o centro O da circunferência está a uma distância **r** da reta **b.**

- Traçamos as retas **p** e **p’** paralelas à reta **b** e a uma distância **r** de **b**. (Ver ‘2.3.3 Construção do LG 3’)

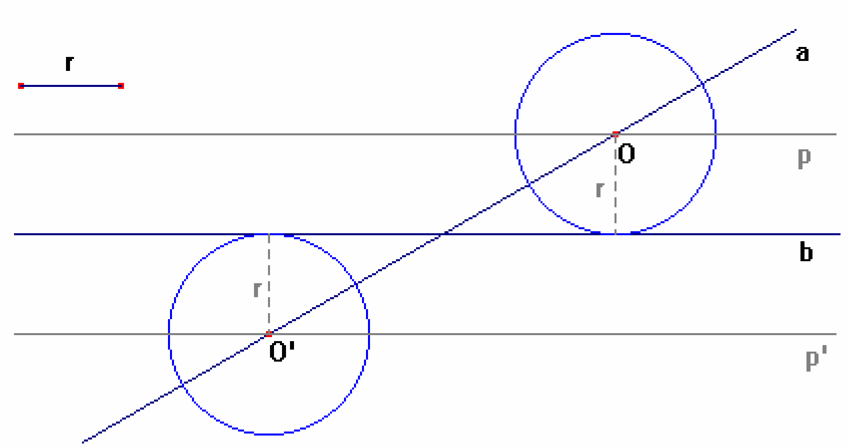
Todos os pontos pertencentes às retas **p** e **p’** distam **r** dos segmentos da reta **b**. (LG 3)

O ponto O pertence às retas **p** ou **p’**.

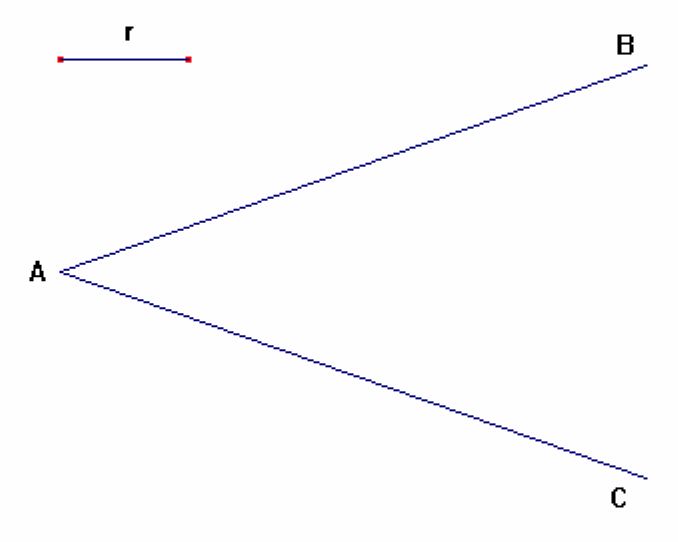
A interseção das retas **p** e **p’** com a reta **a** resulta nos pontos O e O’, respectivamente. Os pontos O e O’ são os centros das circunferências procuradas.

- Com centro em O e depois em O’ e raios iguais a **r** traçamos duas circunferências.

As circunferências traçadas são as soluções do problema.



2. São dados um ângulo BÂC e uma distância **r**. Construa uma circunferência de raio **r** tangente aos lados do ângulo dado.



Resolução:

A circunferência procurada possui raio **r** e é tangente aos segmentos AB e AC**.** Logo, o centro O da circunferência está a uma distância **r** dos segmentos AB e AC**.**

- Traçamos a reta **p** paralela ao segmento AB a uma distância **r** de AB e traçamos a reta **p'** paralela ao segmento AC a uma distância **r** de AC.(Ver '2.3.3 Construção de LG3')

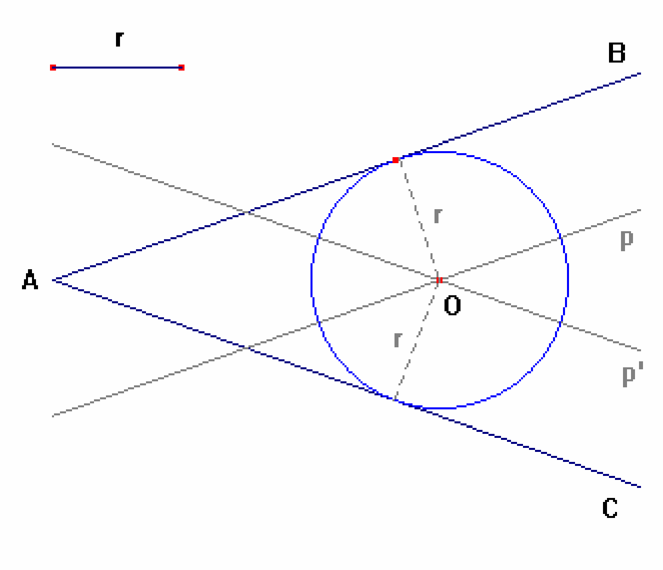
Todos os pontos pertencentes às retas **p** e **p'** distam **r** dos segmentos AB e AC. (LG 3)

O centro da circunferência pertence às retas **p** e **p'**.

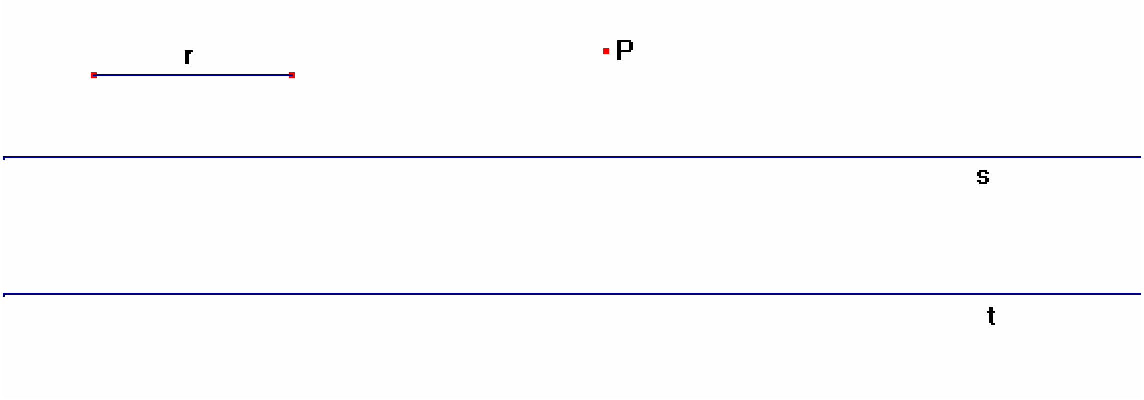
A interseção da reta **p** com a reta **p'** resulta no ponto O. O ponto O é o centro da circunferência procurada.

- Com centro em O e raio **r** traçamos uma circunferência.

A circunferência traçada é a solução do problema.


r
B
r
p
A
O
r
p'
C

3. Dados um ponto P, duas retas paralelas **s** e **t** e uma distância **r**, traçar pelo ponto P uma transversal às paralelas **s** e **t** que determina, entre elas, um segmento de distância igual a **r**.



Resolução:

Criamos um ponto O aleatório sobre a reta **s**.

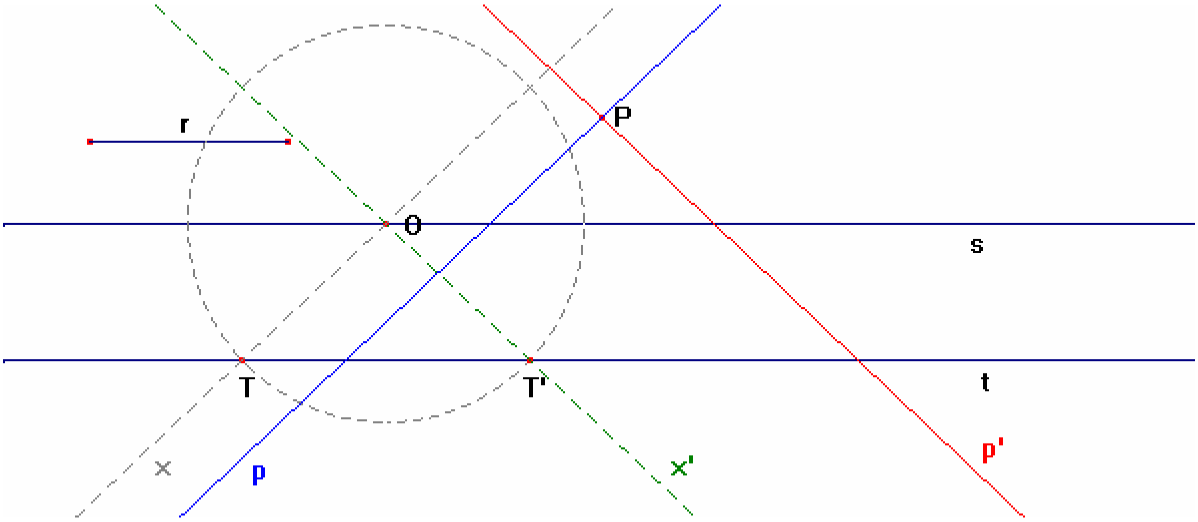
- Com auxílio do compasso, traçamos uma circunferência de centro O e raio **r**.

A interseção desta circunferência com e reta **t** resulta nos pontos T e T'.

A distância do ponto O ao ponto T e ao ponto T' é igual a **r**. (LG 1)

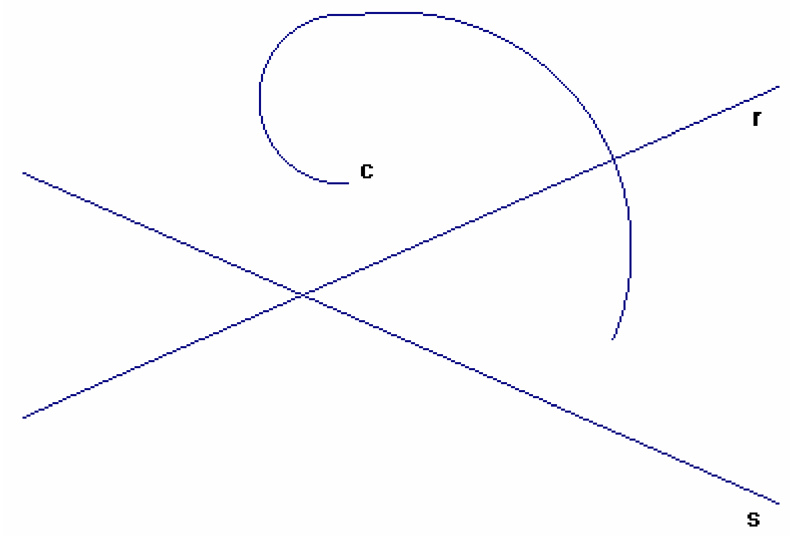
- Traçamos uma reta **x** que passa pelos pontos O e T.
- Traçamos outra reta **x'** que passa pelos pontos O e T'.
- Traçamos uma reta **p** paralela à reta **x** passando pelo ponto P, e outra reta **p'** paralela à reta **x'** passando pelo ponto P. (Ver '2.3.3 Construção do LG 3')

As retas **p** e **p'** são as soluções do problema.



3.5 Exercícios sobre Lugar Geométrico 4

1. Determinar na curva **c** o ponto X eqüidistante das retas **r** e **s**.



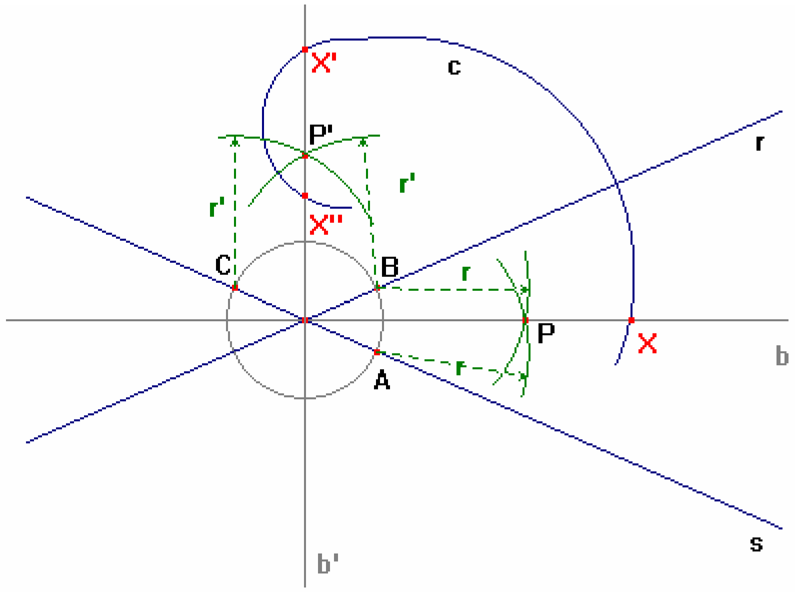
Resolução:

Traçamos as bissetrizes, **b** e **b’**, dos ângulos formados pelas retas **r** e **s**.(Ver ‘2.4.1 Construção de bissetriz’)

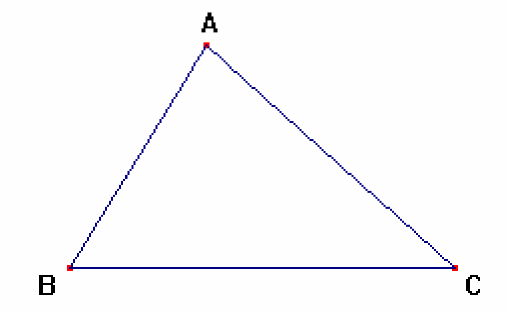
Todo ponto pertencente a **b** e **b’** é eqüidistante das retas **r** e **s**.(LG4)

A interseção da reta **b** com a curva **c** nos dá o ponto X e a intersecção da reta **b’** com a curva **c** resulta nos pontos X’ e X’’.

Os pontos X, X’, e X’’ são as soluções do problema .



2. Construa a circunferência inscrita num triângulo ABC dado.



Resolução:

Por definição o centro de uma circunferência inscrita num polígono é eqüidistante dos lados deste polígono.

- Traçamos a bissetriz **b** do ângulo BÂC e a bissetriz **b’** do ângulo ACB.

Os pontos pertencentes a **b** são eqüidistantes dos lados AB e AC e os pontos pertencentes a **b’** são eqüidistantes dos lados AC e CB.(LG 4)

Logo, a interseção das duas bissetrizes resulta no ponto I eqüidistante dos três lados.

O ponto I é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

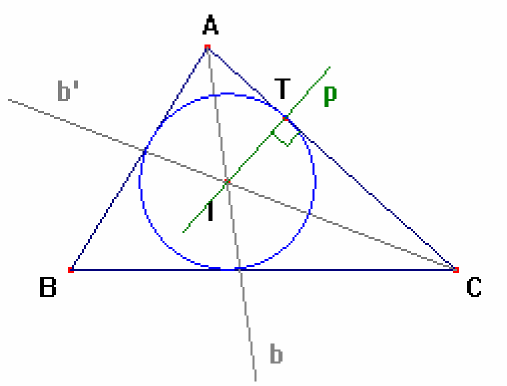
Precisamos encontrar o raio da circunferência.

- Traçamos, por I, uma perpendicular **p** ao lado AC.(Ver ‘2.3.2 Traçado de retas perpendiculares’)

O ponto T de interseção entre a reta **p** e o lado AC é o ponto de tangência entre a circunferência e o lado. Logo, a distância entre os pontos I e T é o raio **r** da circunferência.

- Traçamos uma circunferência de centro em I e raio **r**.

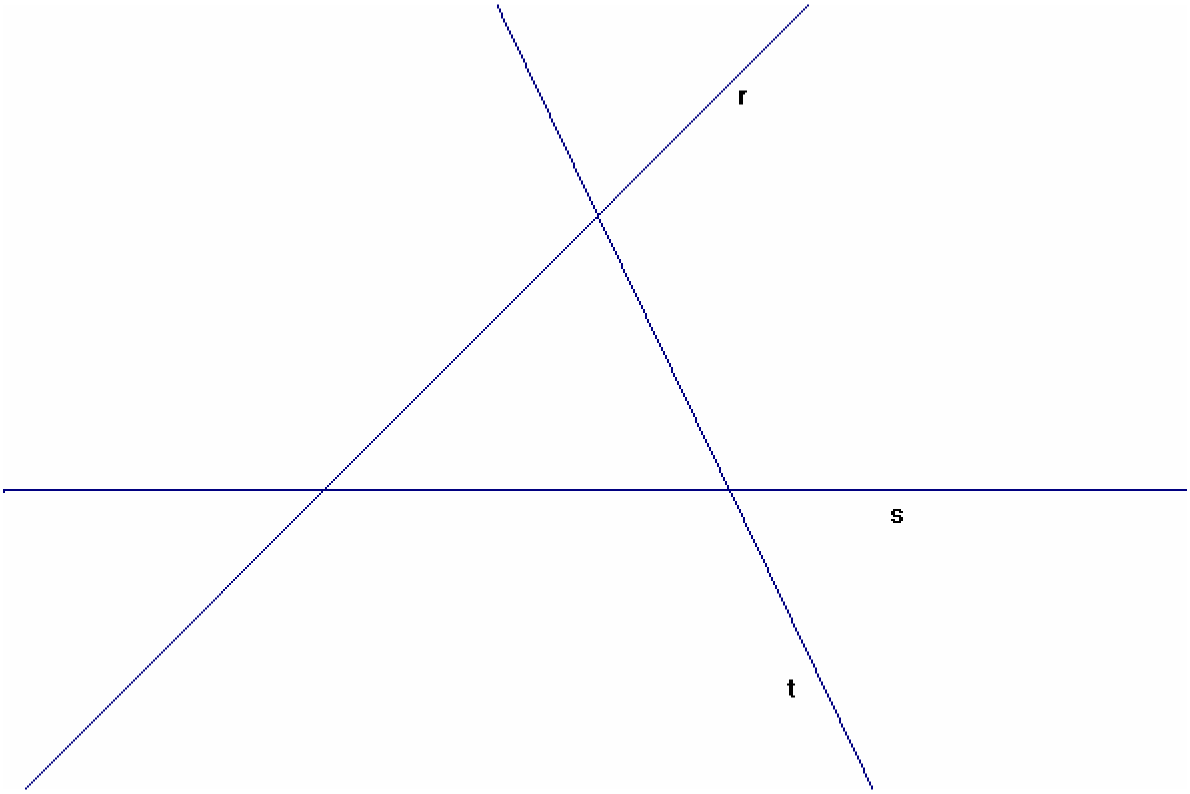
Esta circunferência é a solução para o problema.



Obs:

1. Para encontrarmos o raio **r** poderíamos ter traçado, por I, uma perpendicular a qualquer um dos lados.
2. O centro I da circunferência inscrita em um triângulo é denominado de **incentro**, encontro das bissetrizes internas de um triângulo.

3. Determinar a posição do ponto P eqüidistante das retas **r**, **s** e **t**.



Resolução:

- Traçamos as bissetrizes ,**b1** e **b2**, dos ângulos formados pelas retas **r** e **t**.

Todos os pontos pertencentes às retas **b1** e **b2** são eqüidistantes às retas **r** e **t**. (LG 4)

- Traçamos as bissetrizes ,**b3** e **b4**, dos ângulos formados pelas retas **s** e **t**.

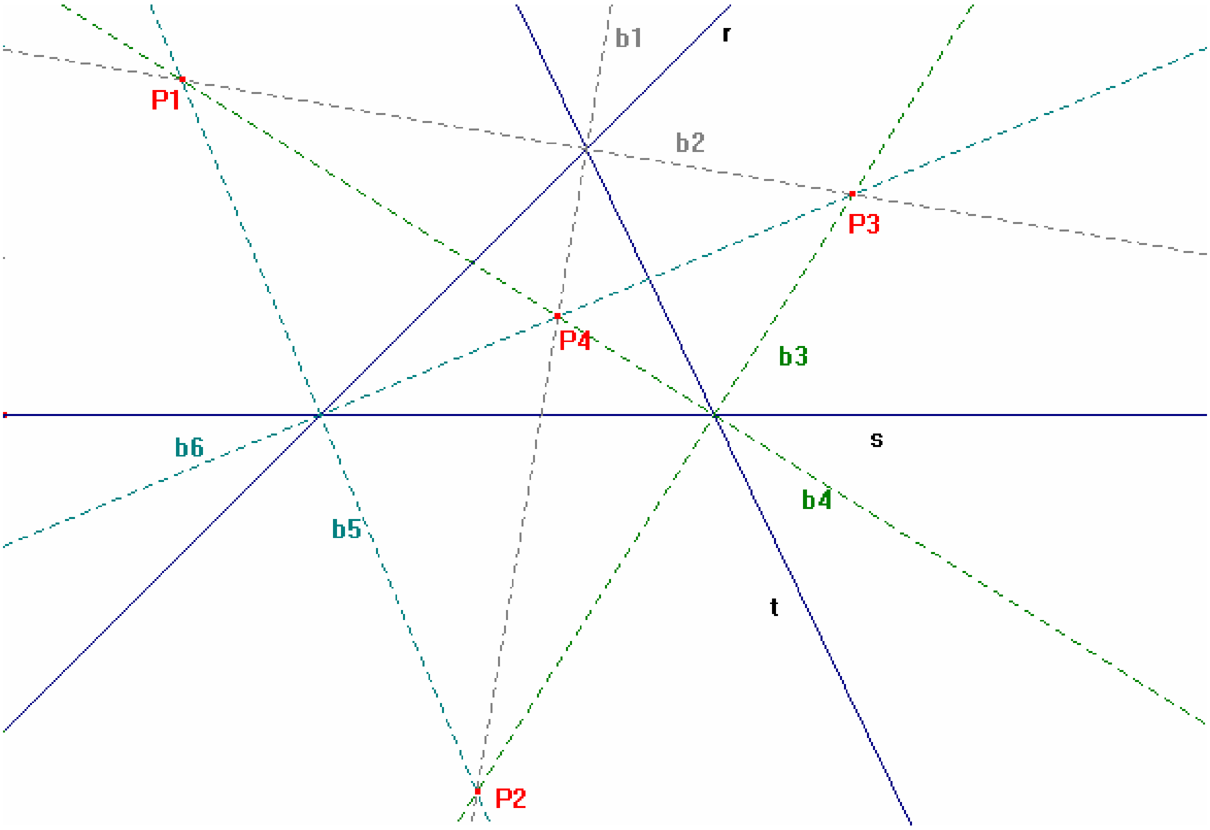
Todos os pontos pertencentes às retas **b3** e **b4** são eqüidistantes às retas **s** e **t**. (LG 4)

- Traçamos as bissetrizes ,**b5** e **b6**, dos ângulos formados pelas retas **r** e **s**.

Todos os pontos pertencentes às retas **b5** e **b6** são eqüidistantes às retas **r** e **s**. (LG 4)

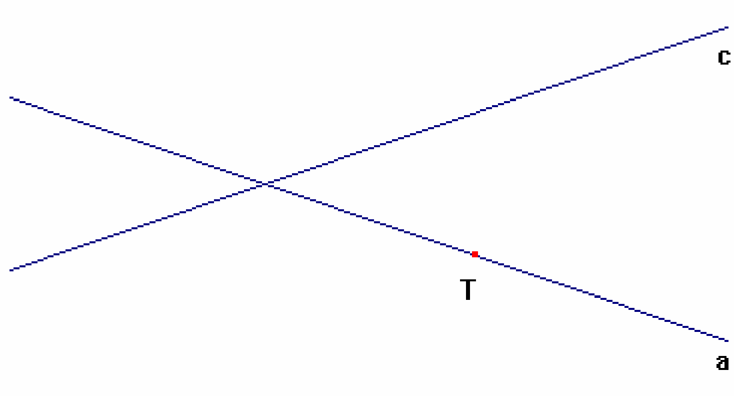
A intersecção das bissetrizes **b1, b2, b3, b4, b5** e **b6** nos dá os pontos P1, P2, P3 e P4.

Os pontos P1, P2, P3 e P4 são as soluções para o problema, pois cada um deles está eqüidistante das retas **r**, **s** e **t**.



Observe que P4 é o incentro do triângulo ABC.

4. Construa uma circunferência tangente às retas **a** e **c**, sabendo que T é o ponto em que ela tangencia a reta **a**.



Resolução:

- Traçamos, pelo ponto T, uma reta **t** perpendicular à reta **a**.(Ver '2.3.2 Traçado de retas perpendiculares')

O centro da circunferência procurada pertence à reta **t**, pois toda reta que passa pelo ponto de tangência e pelo centro de uma circunferência é perpendicular à reta tangente, neste ponto, à circunferência.

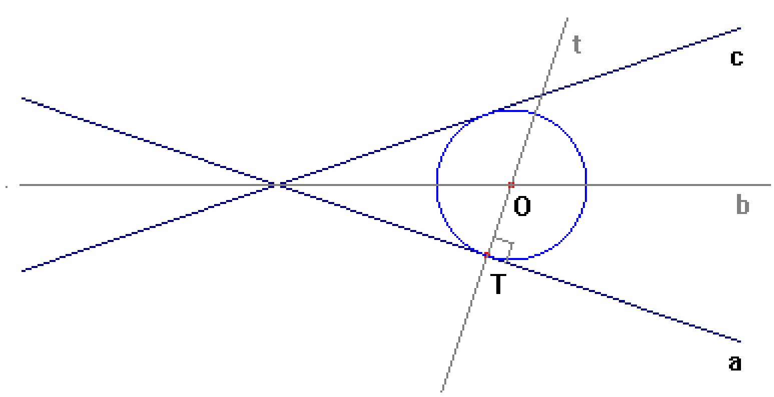
- Traçamos a bissetriz **b** do ângulo formado entre as retas **a** e **c**.

O centro da circunferência é eqüidistante das retas **a** e **c**. Temos, então, que o centro da circunferência pertence à bissetriz **b**.(LG 4).

A interseção da bissetriz **b** com reta **t** resulta no ponto O.

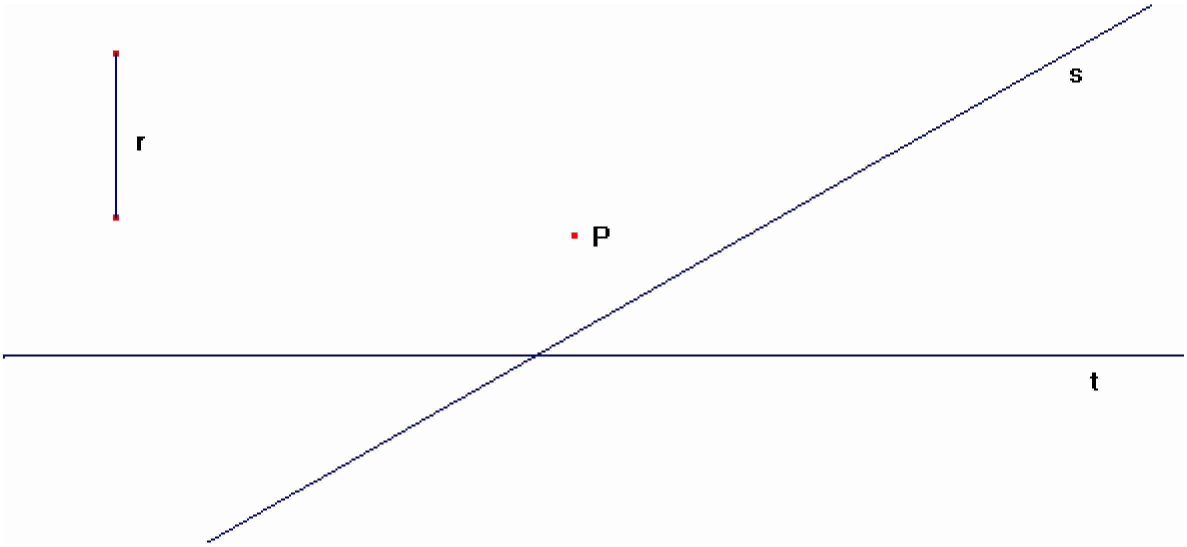
- Traçamos uma circunferência com centro em O e raio OT.

A circunferência O é a solução do problema.



3.6 Exercício sobre Lugar Geométrico 1 e Lugar Geométrico 4

1. Construir uma circunferência de raio **r**, que passa pelo ponto P e que tenha centro eqüidistante das retas **s** e **t**.



Resolução:

- Traçamos as bissetrizes, **b** e **b'**,dos ângulos formados pelas retas **s** e **t**.

Todos os pontos pertencentes às retas **b** e **b'** são eqüidistantes às retas **s** e **t**. (LG 4)

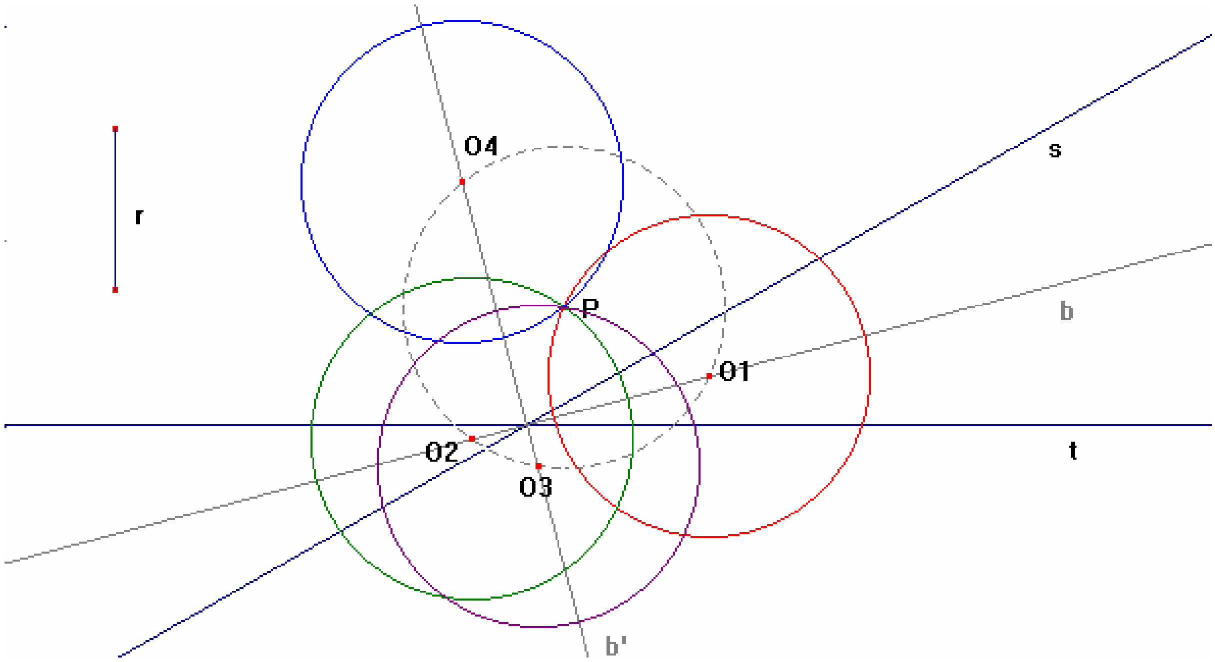
- Com auxílio do compasso, construímos uma circunferência de raio **r** e centro em P.

A interseção desta circunferência com as retas **b** e **b'** resulta nos pontos O1, O2, O3 e O4.

Os pontos O1, O2, O3 e O4 distam **r** do ponto P. (LG 1)

- Traçamos circunferências com centros em O1, O2, O3 e O4 e raios **r**.

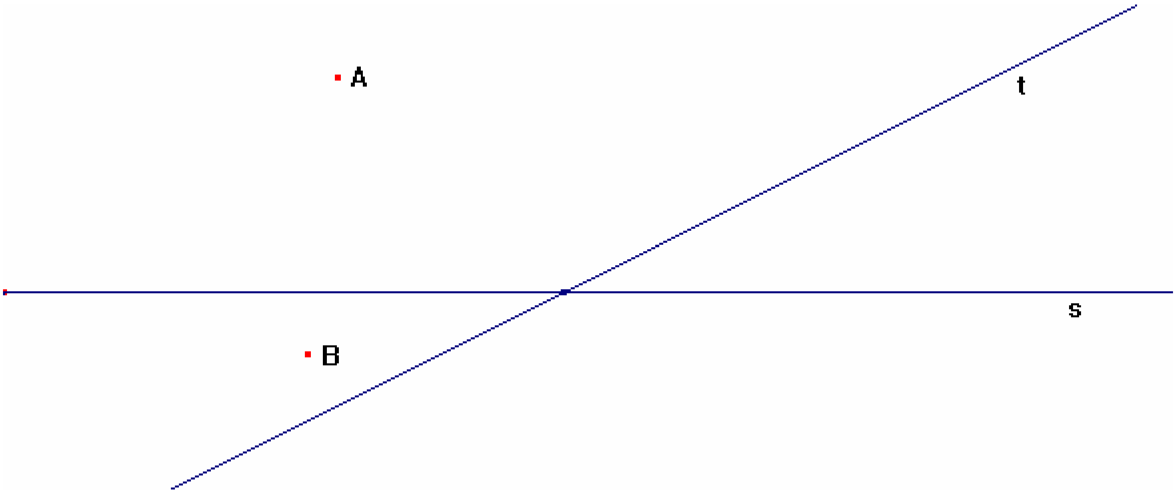
Há quatro soluções para o problema. As circunferências O1, O2, O3 e O4 são as soluções para o problema, pois passam pelo ponto P e têm centros eqüidistantes das retas **s** e **t**.



O4
r
s
P
b
O1
O2
t
O3
b'

3.7 Exercício sobre Lugar Geométrico 2 e Lugar Geométrico 4

1. Determinar a posição do ponto P eqüidistante dos pontos A e B e eqüidistante das retas **s** e **t**.



Resolução:

- Traçamos a mediatriz **m** do segmento AB.

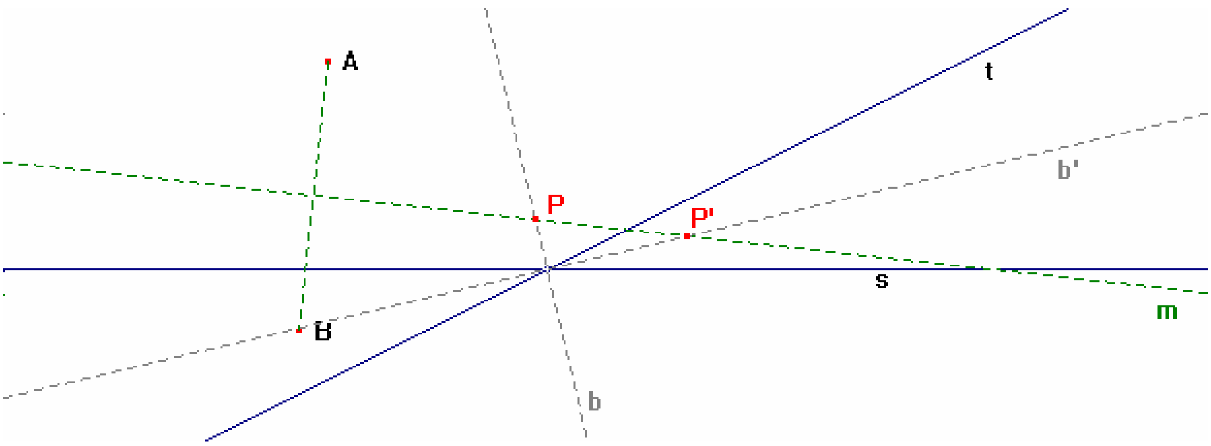
Todos os pontos pertencentes à reta **m** são eqüidistantes aos postos A e B. (LG 2)

- Traçamos as bissetrizes ,**b** e **b'**,dos ângulos formados pela intersecção das retas **s** e **t**.

Todos os pontos pertencentes às retas **b** e **b'** são eqüidistantes das retas **s** e **t**. (LG 4)

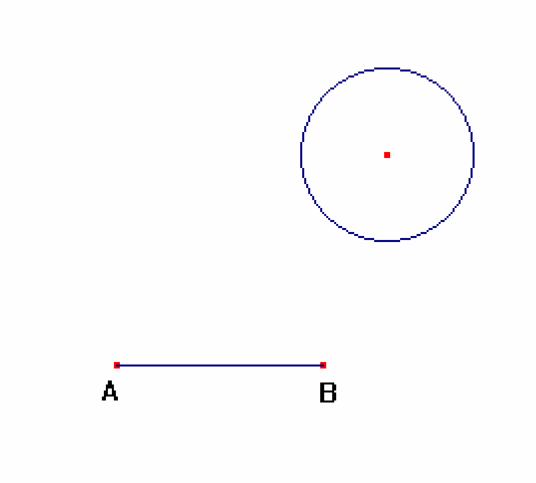
A interseção das retas **m** e **b** resulta no ponto P e a intersecção das retas **m** e **b'** resulta no ponto P'.

Os pontos P e P' são as soluções para o problema, pois estão eqüidistantes dos pontos A e B, e estão eqüidistantes das retas **s** e **t**.



3.8 Exercícios sobre Lugar Geométrico 5

1. Determinar sobre a circunferência , o ponto E tal que AÊB=30°.



Resolução:

Temos que construir um ângulo de 30º. Um triângulo equilátero possui os três ângulos de 60°. Podemos construir, então, um triângulo equilátero e traçar a bissetriz de um de seus ângulos para encontrarmos um ângulo de 30°.

- Com centro em B e raio igual a AB traçamos um arco de circunferência.
- Com centro em A e raio igual a AB traçamos outro arco de circunferência.

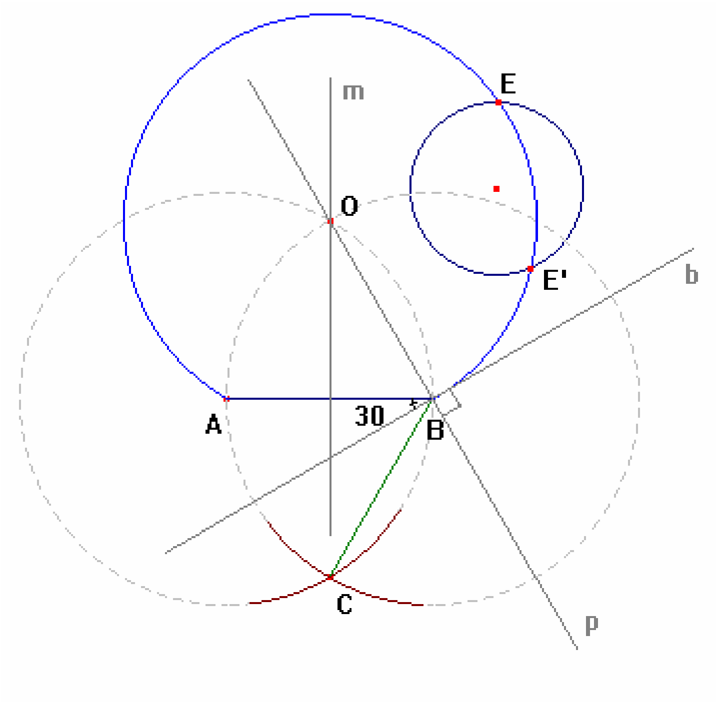
A interseção dos dois arcos resulta em C, o terceiro vértice do triângulo equilátero ABC.

- Traçamos um segmento BC e construímos a bissetriz **b** do ângulo ABC.

A reta **b** forma com o segmento AB um ângulo de 30°. Agora podemos traçar o arco capaz de 30° sobre BC.

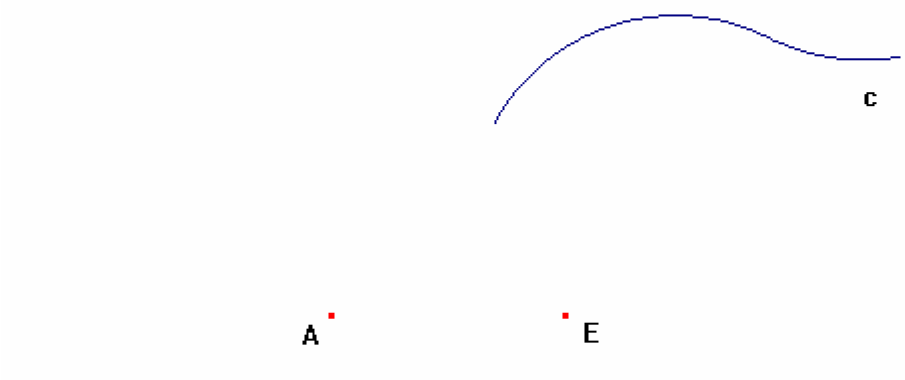
- Traçamos uma reta **p** perpendicular à reta **b** e traçamos a mediatriz **m** do segmento AB. A interseção de **p** com a reta **m** nos dá o ponto O.
- Com centro em O e raio AO, traçamos o arco capaz.

A interseção do arco capaz com a circunferência dada no problema nos dá os pontos E e E'. Os pontos E e E' são as soluções do problema pois pertencem à circunferência dada e AÊB=AÊ'B=30°.



Obs: Construímos a reta **b**, que faz um ângulo de 30º com o segmento AB, para traçarmos uma reta **p** perpendicular a ela. Note que a reta **p** faz um ângulo com o segmento AB e que este ângulo é complementar ao ângulo de 30°, pois juntos formam um ângulo reto. Poderíamos, então, ter traçado diretamente a reta **p** fazendo um ângulo de 60º com o segmento AB e ter economizado alguns traçados.

2. As retas **r** e **s** passam respectivamente pelos pontos A e E e formam um ângulo de 30°. Construir as retas sabendo que o ponto comum a elas pertence à curva **c**.



Resolução:

Analisando a observação do exercício anterior, vamos construir uma reta que faz um ângulo de 60º com o segmento AE.

- Com centro em E e raio igual a AE traçamos um arco de circunferência.
- Com centro em A e raio igual a AE traçamos outro arco de circunferência.
- Traçamos uma reta **p** passando pelo ponto E e pela interseção dos dois arcos.

A reta **p** forma com o segmento AE um ângulo de 60°.

- Tracemos a mediatriz **m** do segmento AE.

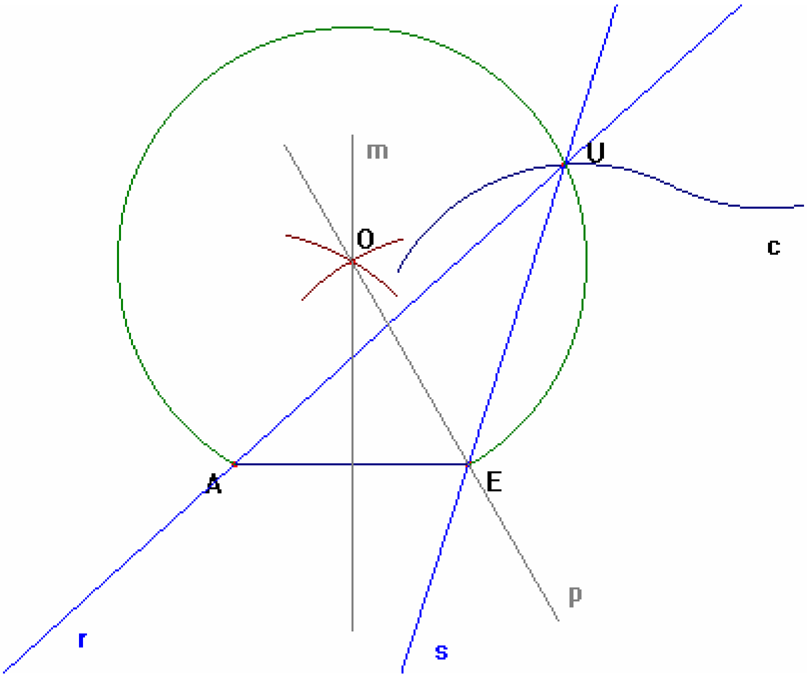
A interseção das retas **p** e **m** resulta no ponto O.

- Com centro em O e raio AO, traçamos o arco capaz de 30° do segmento AE.

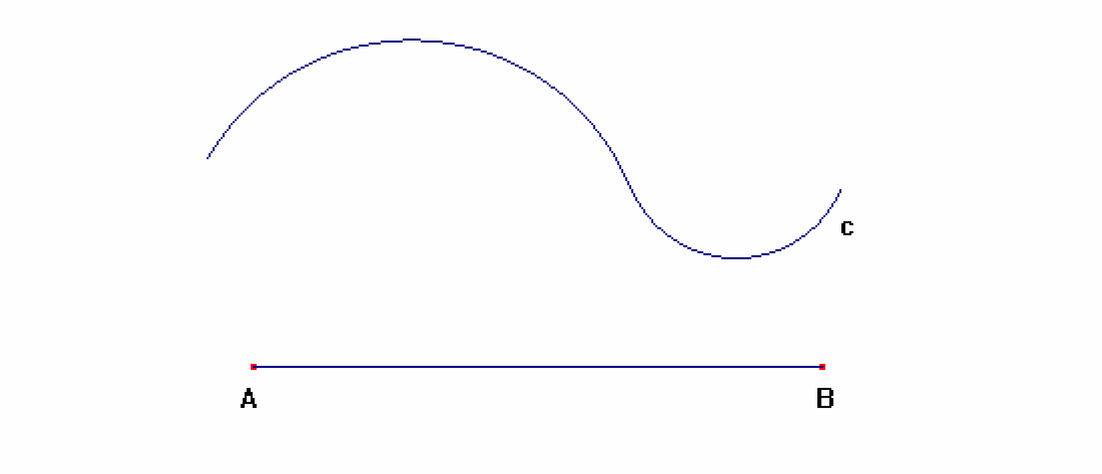
A interseção do arco capaz com a curva **c** nos dá o ponto U.

- Traçamos uma reta **r** passando pelos pontos A e U e traçamos uma reta **s** passando pelos pontos B e U.

As retas **r** e **s** são as soluções do problema pois formam um ângulo de 30º sob a curva **c**.


m
U
O
c
A
E
p
r
s

3. Construir, na figura dada, o triângulo retângulo ABC de hipotenusa AB. Sabendo que o vértice C pertence à curva **c**.



Resolução:

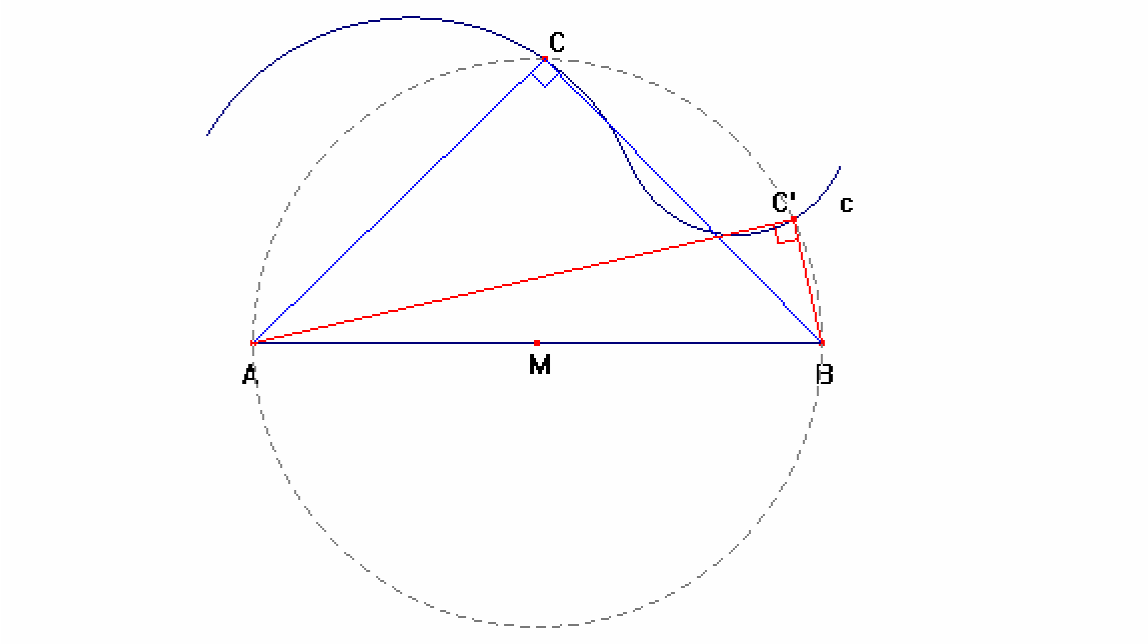
- Encontramos o ponto médio M do segmento AB.
- Com auxílio do compasso, traçamos uma circunferência de centro em M e passando pelos pontos A e B.

Todo ponto pertencente a esta circunferência enxerga o segmento AB sobre um ângulo de 90º. (LG 5)

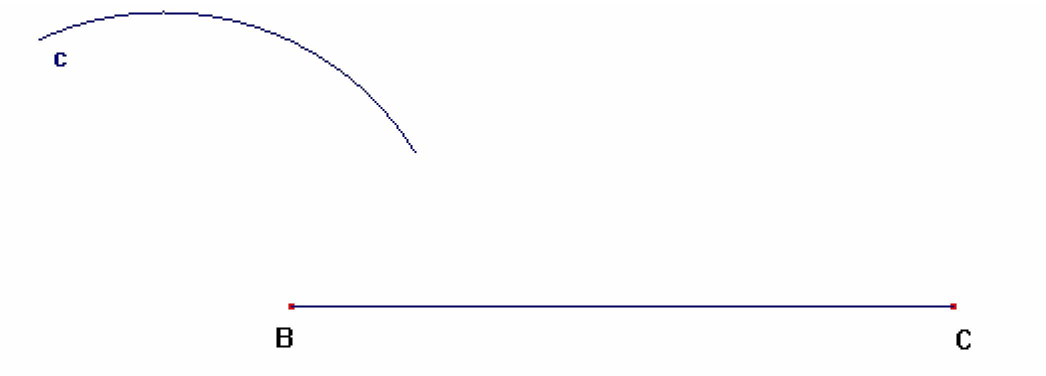
A interseção desta circunferência com a curva **c** resulta nos pontos C e C'.

- Construímos os triângulos ABC e ABC'.

Os triângulos ABC e ABC' são as soluções do problema.



4. Construir o triângulo isósceles ABC de base AB sabendo que o ponto médio da base pertence à curva **c**.



Resolução:

- Encontramos o ponto médio M do segmento BC.
- Traçamos uma circunferência de centro em M e passando pelos pontos B e C.

Esta circunferência é o arco capaz de 90° do segmento BC.

Todo ponto pertencente a esta circunferência enxerga o segmento BC sobre um ângulo de 90°. (LG 5)

Sabemos que M', ponto médio da base do triângulo, pertence ao arco capaz.

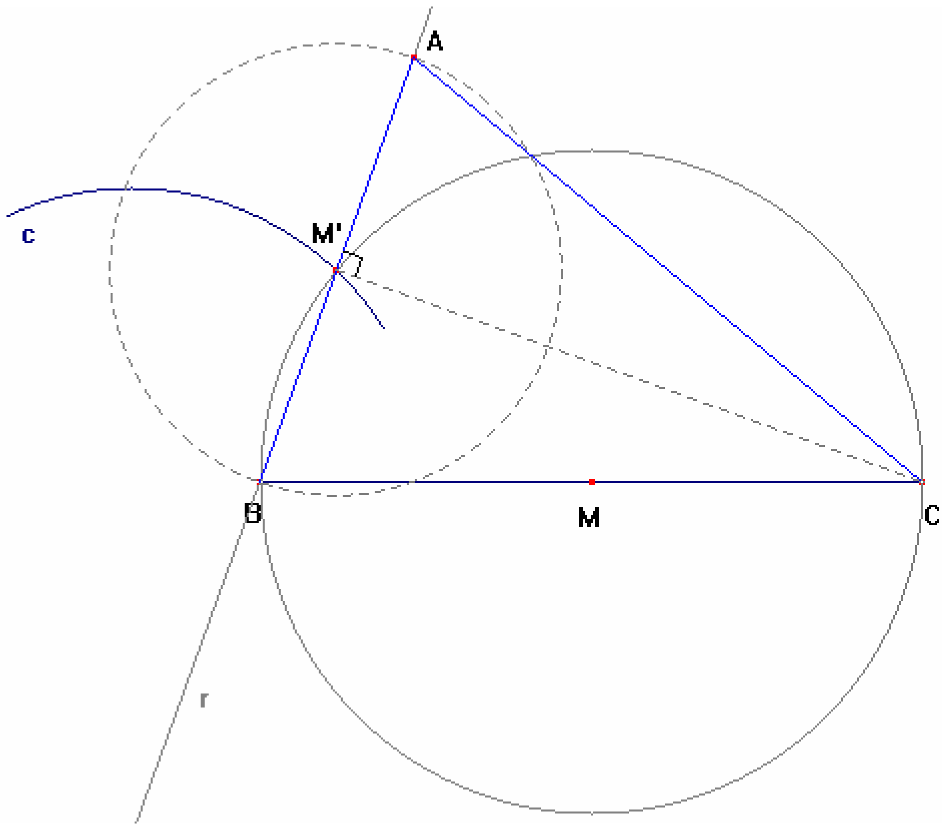
A interseção da circunferência com a curva **c** resulta no ponto M'.

- Traçamos uma reta **r** passando por B e M'.
- Com centro em M' e raio BM', traçamos uma circunferência.

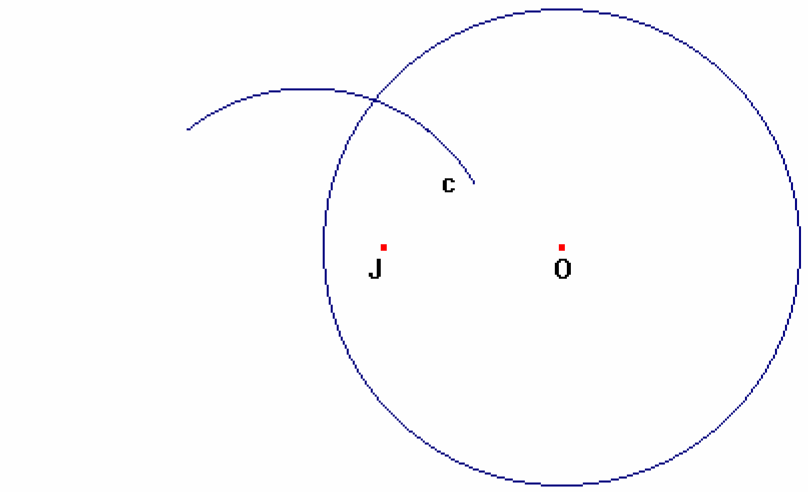
A interseção desta circunferência com a reta **r** nos dá o ponto A.

- Construímos o triângulo ABC.

O triângulo ABC é a solução para o problema.


A
c
M'
B
M
C
r

5. Determinar a corda da circunferência O, que passa pelo ponto J e tem o ponto médio sobre a curva **c**.



Resolução:

- Encontramos o ponto médio M do segmento JO.
- Traçamos uma circunferência de centro em M e passando pelos pontos J e O.

Esta circunferência é o arco capaz de 90° do segmento JO.

Todo ponto pertencente a esta circunferência enxerga o segmento JO sobre um ângulo de 90°. (LG 5)

A interseção da circunferência com a curva **c** resulta no ponto M'.

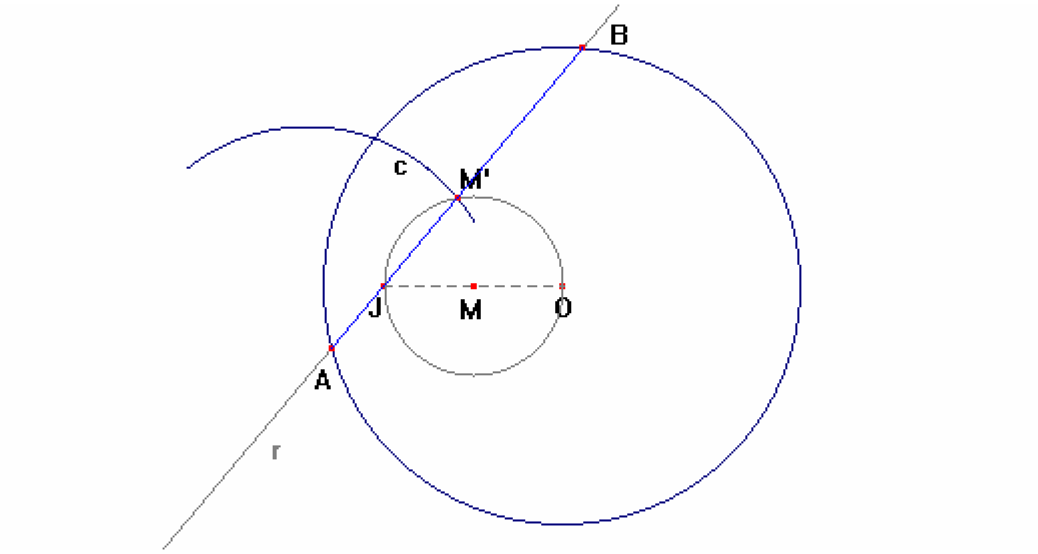
- Traçamos uma reta **r** passando por J e M'.

A reta que passa pelos pontos O e M' é perpendicular a reta **r**, logo M' é o ponto médio da corda procurada.

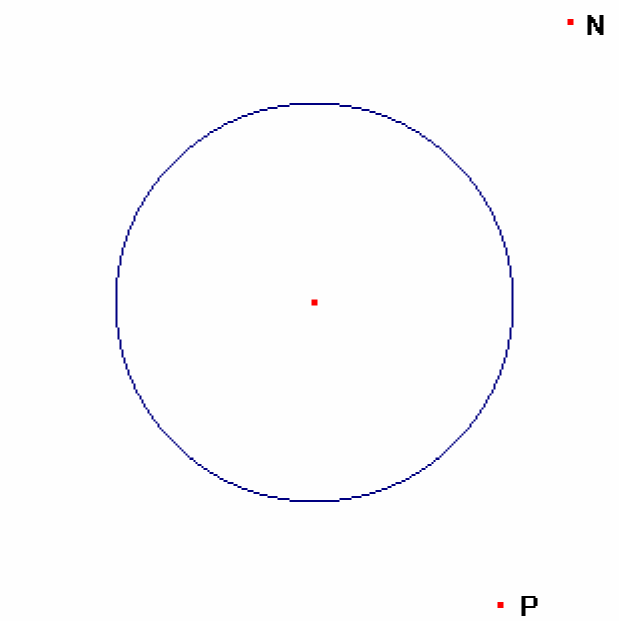
A interseção da circunferência O com a reta **r** resulta nos pontos A e B.

- Traçamos um segmento AB.

A corda AB é a solução para o problema.


B
c
M'
J
M
O
A
r

6. Inscrever na circunferência dada um triângulo retângulo cujos suportes dos catetos passam respectivamente pelos pontos P e N.



Resolução:

- Encontramos o ponto médio M do segmento PN.
- Traçamos uma circunferência de centro em M passando pelos pontos P e N.

Todo ponto pertencente à circunferência M enxerga o segmento PN sobre um ângulo de 90°. (LG 5)

A interseção da circunferência dada com a circunferência construída resulta nos pontos A e A'.

- Traçamos uma reta **s** passando pelos pontos P e A.
- Traçamos uma reta **r** passando pelos pontos N e A.

As retas **r** e **s** são perpendiculares.

A interseção da reta **r** com a circunferência dada resulta no ponto C e a interseção da reta **s** com a circunferência dada resulta no ponto B.

- Construímos o triângulo ABC.

O triângulo ABC é uma das soluções do problema.

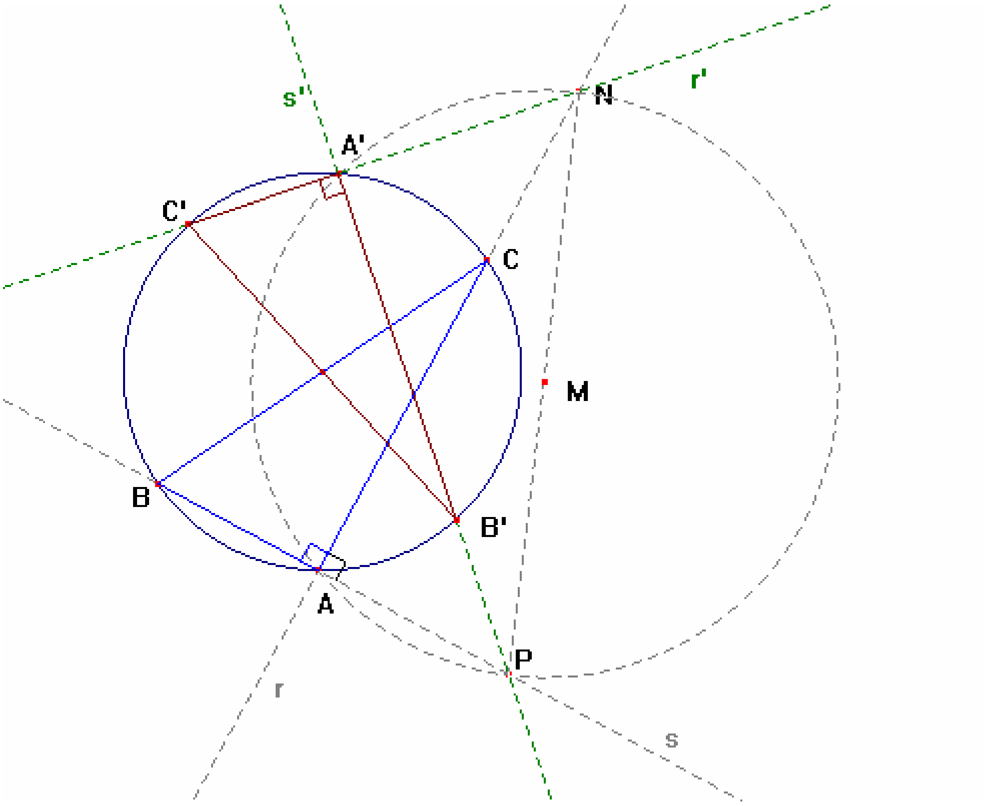
- Traçamos uma reta **s'** passando pelos pontos P e A'.
- Traçamos uma reta **r'** passando pelos pontos N e A'.

As retas **r'** e **s'** são perpendiculares.

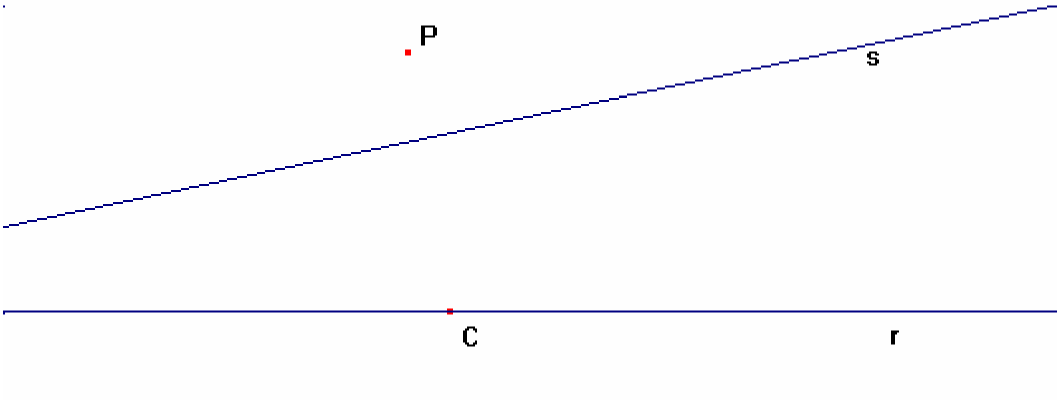
A interseção da reta **r'** com a circunferência dada resulta no ponto C' e a interseção da reta **s'** com a circunferência dada resulta no ponto B'.

- Construímos o triângulo A’B’C’.

O triângulo A’B’C’ é outra solução para o problema.



7. A hipotenusa BC de um triângulo retângulo ABC deve ficar contida na reta **r**, o vértice A deve pertencer à reta **s** e o ponto P ao suporte do cateto AB. Construir o triângulo.



Resolução:

- Traçamos o segmento PC.
- Construímos o arco capaz de 90º do segmento PC, circunferência de centro em M.

Todo ponto pertencente a esta circunferência enxerga o segmento PC sobre um ângulo de 90°. (LG 5)

A interseção da circunferência com a reta **s** resulta nos pontos A e A'.

- Traçamos uma reta **t** passando pelos pontos P e A .

A interseção da reta **t** com a reta **r** nos dá o ponto B.

- Construímos o triângulo ABC.

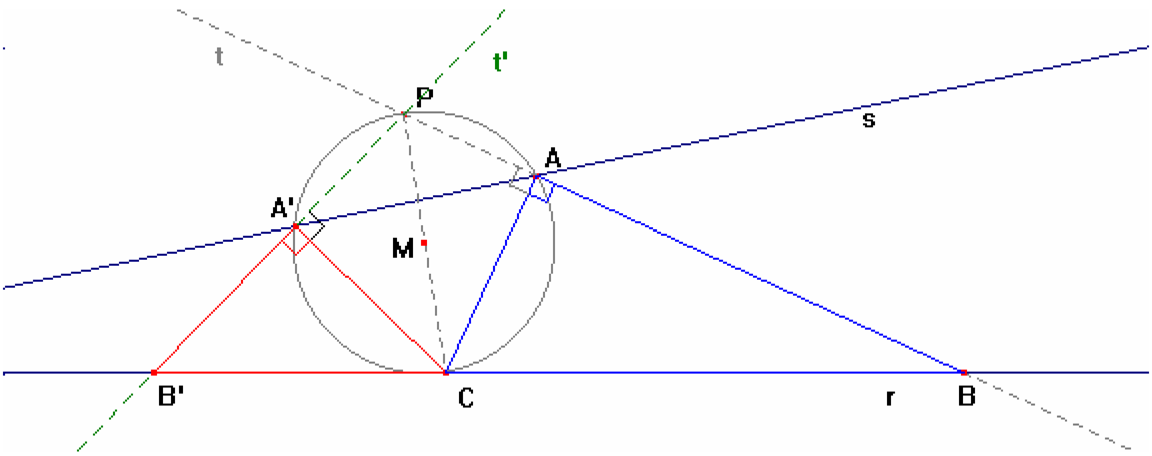
O triângulo ABC é uma das soluções do problema.

- Traçamos uma reta t' passando pelos pontos P e A'.

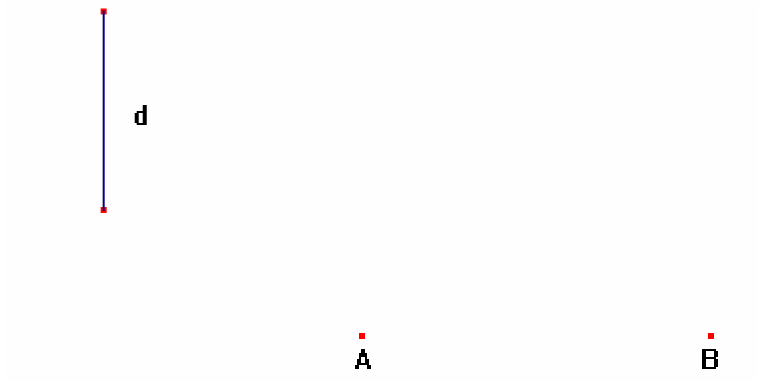
A interseção da reta **t'** com a reta **r** nos dá o ponto B'.

- Traçamos o triângulo A'B'C.

O triângulo A'B'C é outra solução para o problema.



8. Construir, respectivamente pelos pontos A e B, as paralelas **r** e **s** tais que **d** seja a distância entre elas.



Resolução:

- Traçamos uma circunferência passando pelos pontos A e B com centro no ponto médio M do segmento AB.

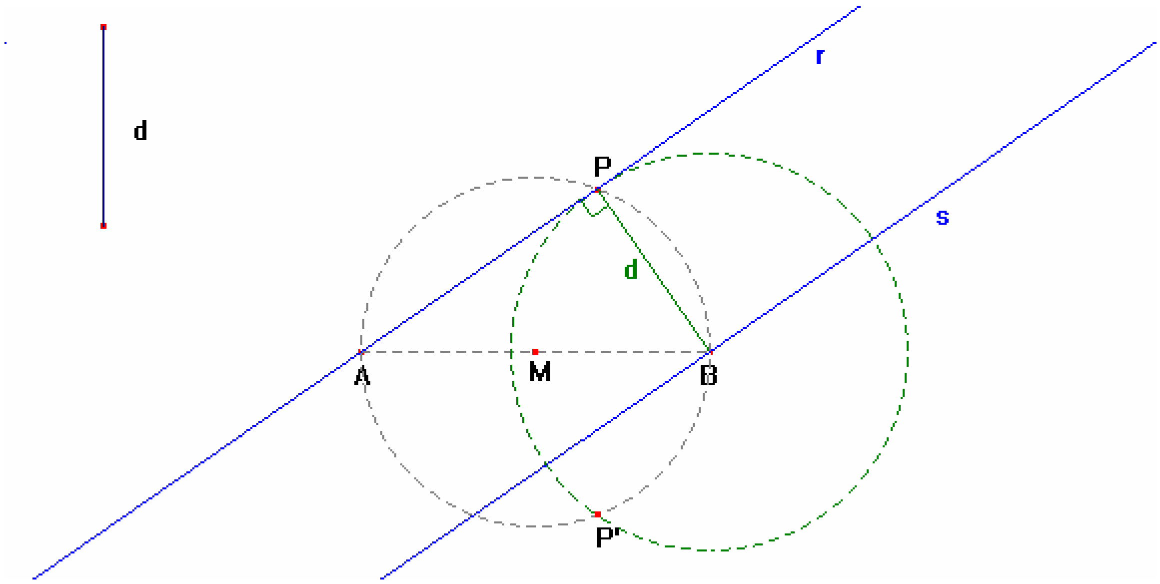
Todo ponto pertencente à circunferência M enxerga o segmento AB sobre um ângulo de 90°. (LG 5)

- Traçamos uma circunferência de raio **d** e centro em B.

A interseção das duas circunferências resulta nos pontos P e P'.

- Traçamos uma reta **r** passando pelos pontos A e P.
- Traçamos uma reta **s** paralela à reta **r** passando pelo ponto B.

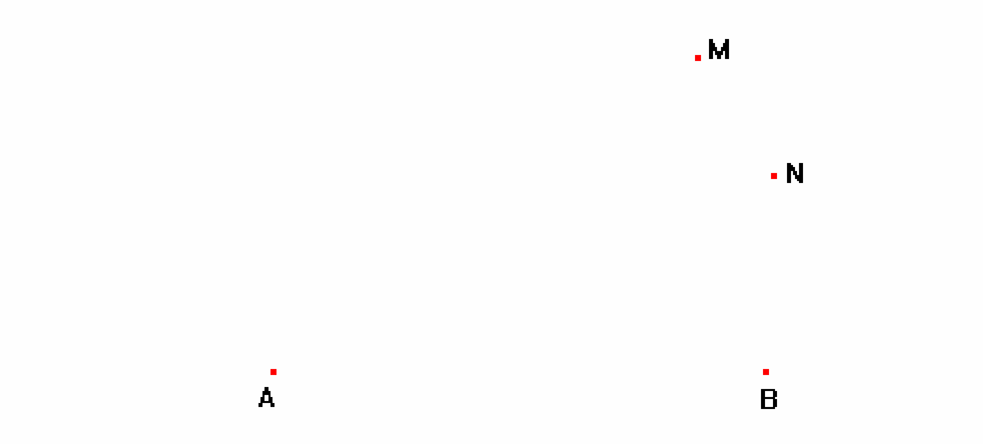
As retas **r** e **s** são uma solução para o problema.



Obs: Há uma outra solução análoga, **r'** e **s'**, **r'** passando por A e P', e **s'**, paralela a **r'** passando por B.

3.9 Exercícios sobre Lugar Geométrico 2 e Lugar Geométrico 5

1. Construir as retas perpendiculares **r** e **s** que passam respectivamente pelos pontos A e B sabendo que o ponto comum a elas eqüidista de M e N.



Resolução:

- Traçamos a mediatriz **m** do segmento MN.

A reta **m** é formada pelos pontos eqüidistantes de M e N. (LG 2)

- Encontramos o ponto médio M do segmento AB.
- Traçamos uma circunferência de centro em M e passando por A e B.

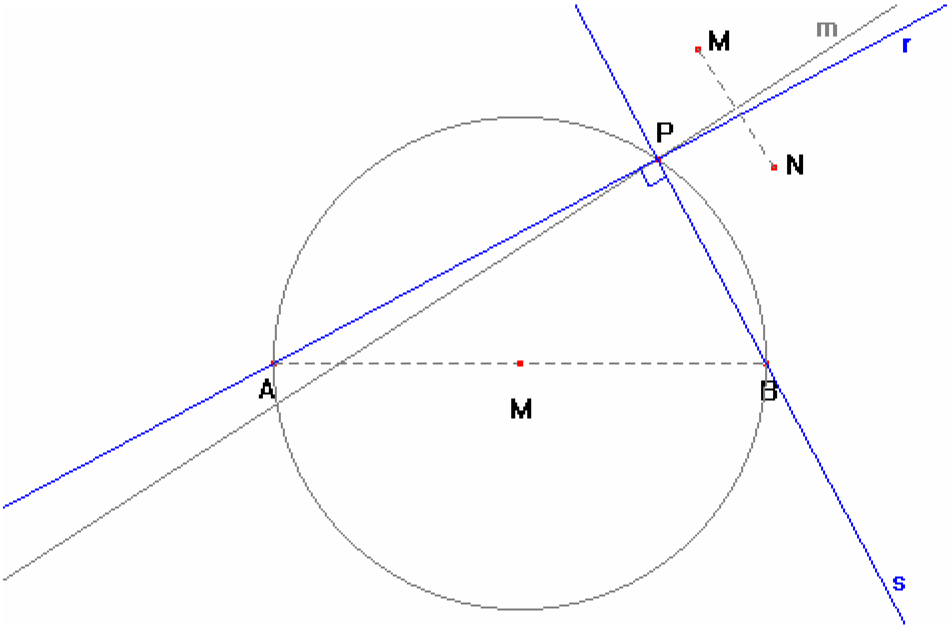
Todo ponto pertencente a esta circunferência enxerga o segmento AB sobre um ângulo de 90°. (LG 5)

A interseção da circunferência com a reta **m** nos dá o ponto P.

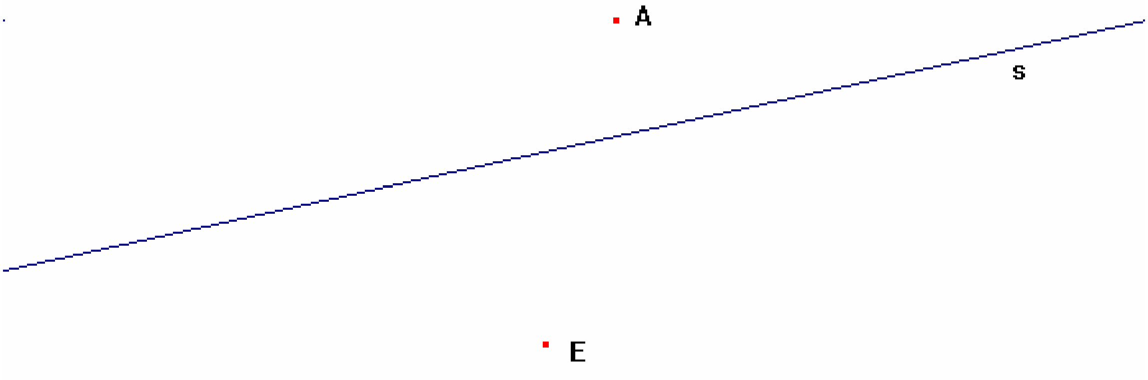
O ponto P é o ponto de interseção entre as retas perpendiculares procuradas.

- Traçamos uma reta **r** passando pelos pontos A e P.
- Traçamos outra reta **s** passando pelos pontos B e P.

As retas **r** e **s** são a solução para o problema.


M
m
r
P
N
A
M
B
s

2. A reta **s** é suporte da diagonal BD de um quadrilátero convexo ABED. Sabendo que Â=Ê=90º e que AB>AD, construa o quadrilátero.



Resolução:

- Traçamos a mediatriz **m** do segmento AE.

Todo ponto pertencente à reta **m** é eqüidistante dos pontos A e E. (LG 2)

A interseção da reta **m** com a reta **s** resulta no ponto O.

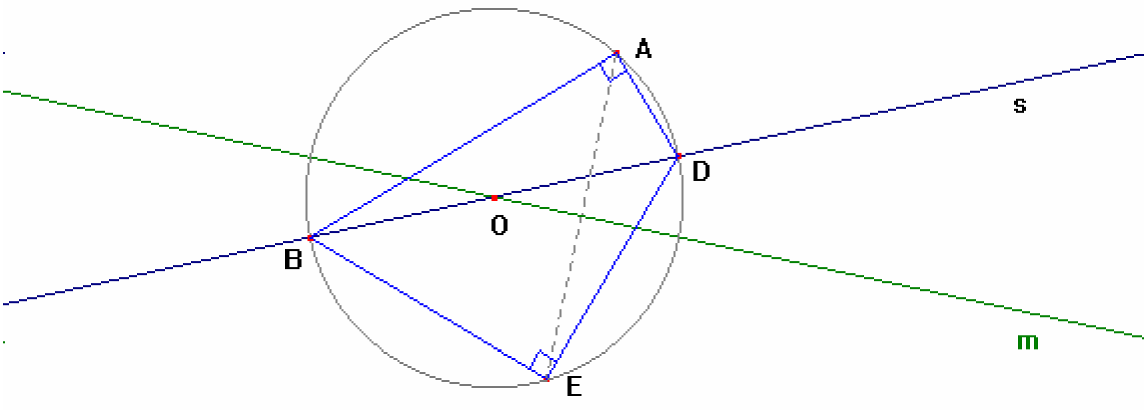
- Com centro em O traçamos uma circunferência passando pelos pontos A e E.

A interseção da circunferência com a reta **s** resulta nos pontos B e D.

Os pontos pertencentes à circunferência enxergam o segmento BD sobre o ângulo de 90° (LG5), logo os pontos A e E são os vértices de 90° do quadrilátero.

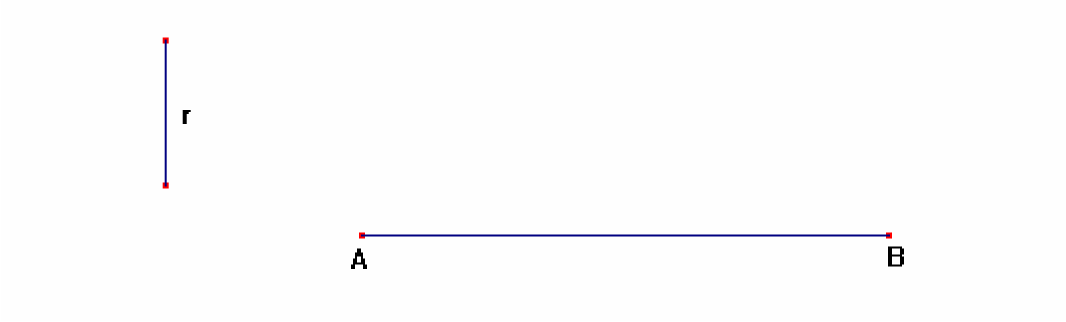
- Construímos o quadrilátero ABED.

O quadrilátero ABED é a solução para o problema.



3.10 Exercício sobre Lugar Geométrico 3 e Lugar Geométrico 5

1. Dados um segmento AB e uma distância **r**, construir o triângulo retângulo cuja hipotenusa é o segmento AB e cuja altura relativa à hipotenusa seja **r**.



Resolução:

- Traçamos a mediatriz **m** do segmento AB, encontramos o ponto médio M do segmento AB.
- Com auxílio do compasso, traçamos uma circunferência de centro em M e passando pelos pontos A e B.

Esta circunferência é o arco capaz de 90° do segmento AB.

Todo ponto pertencente a esta circunferência enxerga o segmento AB sobre um ângulo de 90º. (LG 5)

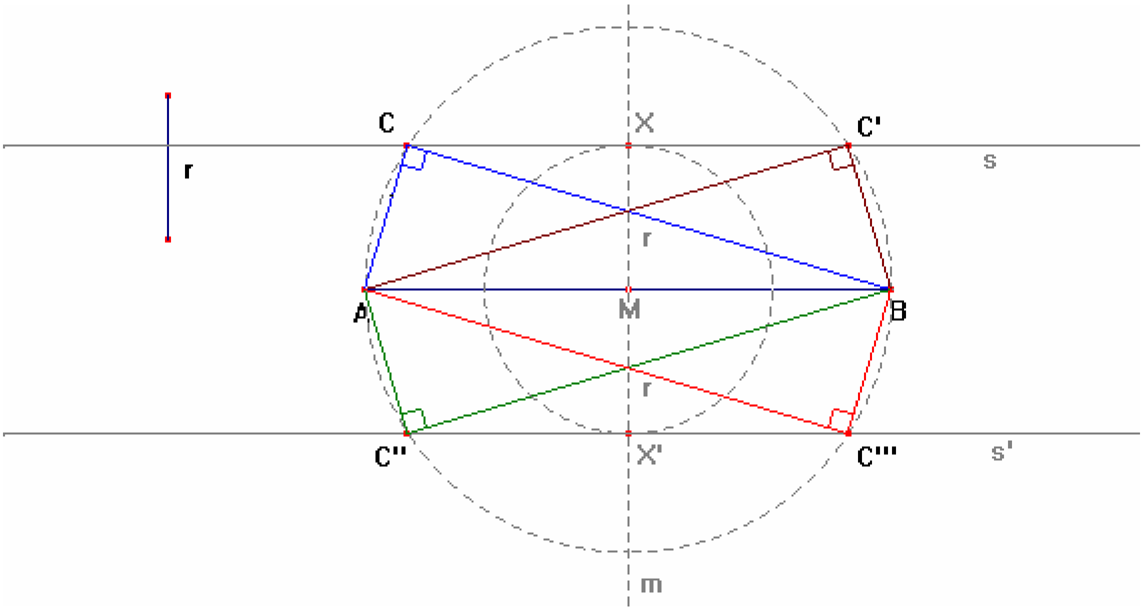
- Traçamos duas paralelas **s** e **s’** que distem **r** do segmento AB. (Ver ‘2.3.3 Construção de LG 3’)

Todos os pontos pertencentes às retas **s** e **s’** distam **r** do segmento AB. (LG 3)

A interseção das retas **s** e **s’** com a circunferência resulta nos pontos C, C’, C’’e C’’’.

- Construímos os triângulos ABC, ABC’, ABC’’ e ABC’’’.

Os triângulos ABC, ABC’, ABC’’ e ABC’’’ são as soluções do problema.


C
X
C'
r
s
r
A
M
B
r
C''
X'
C'''
s'
m

Conclusão

Os exercícios resolvidos apresentados neste trabalho podem ser uma ferramenta complementar para o estudo e resolução de problemas de construções geométricas, no Desenho Geométrico ou Geometria Quantitativa, utilizando o método dos lugares geométricos fundamentais.

A necessidade de conter construções geométricas neste trabalho, levou-me a conhecer, aprender e utilizar o sistema interativo *Cabri Geometre II* , um sistema simples de trabalhar e recomendado para construções contidas na disciplina de Desenho Geométrico.

Além da satisfação de pesquisar e resolver cada problema, tive a oportunidade e o prazer de trabalhar com *Cabri*.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, João Lucas Marques, *Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro: SBM, 2000.

[2] EVES, Howard, *Tópicos de HISTÓRIA DA MATEMÁTICA para uso em sala de aula – GEOMETRIA.* São Paulo: Atual, 1994.

[3] GREENBERG, Marvin Jay, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, second edition.* New York: W. H. Freeman and Company, 1980.

[4] GUELLI, Cid A.; IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo, *Geometria de Posição.* São Paulo: Moderna Ltda, 1981.

[5] OLIVEIRA, João Elton Tavares; VIANA, J. L. Aquino; AZEVEDO, Luiz Mário Mota, *Desenho Geométrico – Coleção Vetor.* Rio de Janeiro, 1970.

[6] PUTNOKI, José Carlos 'Jota', *Elementos de geometria & Desenho Geométrico, vol. 1, 4ª ed.* São Paulo: Scipione, 1993.

[7] WAGNER, Eduardo (com colaboração de José Paulo Q. Carneiro), *Construções Geométricas, 4ª ed.* Rio de Janeiro: SBM, 2000.