UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LEONARDO ALVES DA SILVA

O LEGADO DE EULER NA SÉRIE DE FOURIER

FLORIANÓPOLIS
2009

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Félix Pedro Quispe Gómez

FLORIANÓPOLIS 2009

Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº. 32/CCM/09.

Florianópolis, 09 de Julho de 2009.

Prof. Nereu Estanislau Burin

Banca examinadora:

Prof. Félix Pedro Quispe Gómez
Orientador – Departamento de Matemática (CFM)
UFSC

Prof. Márcio Rodolfo Fernandes
1° examinador – Departamento de Matemática (CFM)
UFSC

Prof. Sergio Eduardo Michelin
2° examinador – Departamento de Física (CFM)
UFSC

Dedico este trabalho a todos meus familiares e amigos, e especialmente a minha mãe Ivanir e a minha namorada Vânia.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por não me deixar desistir e me dar força pra seguir em frente.

A minha família: minha mãe Ivanir, meu pai Ademir, por me apoiarem em todos os momentos e me dando força pra seguir em frente.

A minha namorada Vânia por todo carinho, afeto e confiança.

A meu amigo e professor Félix Pedro Quispe Gómes, pela paciência e apoio no decorrer desta monografia, agradeço muito a ele.

A todos meus amigos de faculdade, que de alguma forma me ajudaram a não disisitir do meu objetivo.

Obrigado!

“A inteligência é uma espécie de paladar que nos dá a

capacidade de saborear idéias”

Susan Sontag

RESUMO

Este trabalho visa apresentar um pouco da história de um dos mais brilhantes matemáticos do século dezoito, Leonhard Euler. O trabalho mostrará como era a vida de Euler como ele ingressou no meio acadêmico e qual sua formação, bem como suas principais obras dentro de diversas áreas que não ficam somente no campo da Matemática. Além da história de Euler o trabalho visa mostrar a identidade trigonométrica de Euler na série de Fourier e algumas aplicações desta série numérica.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Há quatro Bilhões de anos um asteróide chocou-se com a lua e produziu uma enorme cratera de 1250 km de diâmetro. Quinhentos milhões de ano depois grandes quantidades de lava haviam recheado essa cratera e destruído suas paredes, produzindo o *mar das chuvas*. Sobre esse fundo de lava caiu um objeto celeste e produziu uma cratera de pouco mais de 20 km de diâmetro, que se chama *Cratera de Euler* e que não guarda a proporção com relação ao conhecimento matemático de Leonhard Euler, pois atravessou a fronteira do conhecimento em todos os campos durante o século XVIII, sendo a figura destacada dos matemáticos nascidos e mortos nesse século.

CAPÍTULO 1

LEONHARD EULER (1707-1783)

1.1 A SITUAÇÃO DE SUA ÉPOCA

Junto com Arquimedes, Newton e Gauss, Leonhard Euler é por sua qualidade e quantidade de sua obra um dos matemáticos mais brilhantes anteriores ao século XX.

Euler produziu mais de 800 livros e artigos e suas obras completas, que foram reeditadas com o nome de Opera Ommia e ocupam 73 volumes.

A excelente valorização de Euler no mundo matemático se deve mais a riqueza, originalidade, beleza de sua obra que de seu volume. Seu gênio é equiparado ao de Shakespeare, porém segue desconhecido por um grande publico, desconhecedores da história da matemática. Se conhecêssemos quantos resultados que utilizamos se devem a Euler, sua figura seria mais valorizada e seria visto por um grande público, e se situaria no topo da história Matemática.

A obra de qualquer cientista não depende exclusivamente de seu gênio pessoal, pois as circunstâncias políticas, sociais e culturais determinam de forma conclusiva sua produção. Euler teria sido um brilhante matemático em qualquer outra época, esta marcado por ter vivido no século XVIII, o século das Luzes, marcado por dois movimentos contínuos: O das Tropas e das Idéias.

Euler nasce em 1707 e a Europa esta em guerra. A disputa pela coroa espanhola entre Felipe de Anjou e o Arqueduque Carlos de Habsburgo desencadeou uma guerra européia que colocou a França e a Castilla contra Áustria, Inglaterra, Holanda, Prusia, Portugal e Saboya. O motivo sucessório escondia na realidade o interesse das grandes potencias em acabar com a hegemonia francesa na Europa durante o reinado de Luis XIV, o Rei Sol. A paz de Utrecht (1713) seria a entrega de Gibraltar a Inglaterra, a divisão das possessões espanholas na Europa e ao dar ao eleitor de Brandeburgo o titulo de Rei da Prusia, no que seria o nascimento de uma nova potência na qual Euler passaria 25 anos trabalhando na corte de Frederico II.

No extremo oriente da Europa, Pedro I começa a tarefa de modernizar o vasto império russo. Uma de suas medidas Europeutizantes foi a fundação de San Petersburgo, e de sua academia na qual

Euler trabalhou a metade de sua vida. Estas novas potencias emergentes, depois da divisão da Polônia, vão disputar o Gênio.

Outra conflagração européia foi a guerra da sucessão da Áustria (1740- 1748), originada aparentemente pela sucessão ao trono da Áustria, porém gerada realmente pela política de expansão de Frederico II da Prusia com a anexação da Silesia. Na metade desta batalha, Euler abandona a fria Prusia para ocupar uma praça na Academia de Berlin.

Não será a ultima guerra européia de que Euler será testemunha. Uma nova batalha geral, a guerra dos Sete anos, colocou a Prusia e Inglaterra contra a França, Espanha, Rússia, Polônia e Suécia, redefinindo o instável mapa político do velho continente. O exercito russo saqueou uma propriedade de Euler. A corte russa ordenou ao general que fosse restituído os danos causados, pagando-lhe 4000 florines. O grande prestigio de Euler em toda Europa determinou sua indenização.

O segundo movimento, não de tropas, mas sim de idéias, descrita como "Sabedoria", surgiu na França e se espalhou pela Europa, penetrando em todas as cortes européias, inclusive as que estavam em guerra com a França. Frederico II da Prusia e Catarina II da Rússia rodearam-se de filósofos, cientistas, artistas, músicos e literários, mas prestigiados do continente.

Catarina II convidou para trabalhar em San Petersburgo Diderot, os irmãos Jacob e Nicolau Bernoulli, e Goldbach e o próprio D'Alembert, que recusou a oferta.

1.2 A OBRA MATEMÁTICA DE EULER

Leibniz morreu em 1716, sozinho e abandonado por todos, quando Euler tinha nove anos. Newton foi enterrado na abadia de westminster, com honradez e com a assistência de Voltaire, Onze anos depois, justo quando Daniel e Nicolas Bernoulli convidaram Euler a se juntar em uma aventura na academia de San Petersburgo. Nesse momento Euler já tinha prestigio internacional, pois havia ganhado dois prêmios da Academia de ciências de Paris.

Porém não pense que o cálculo diferencial e integral, estava difundido por toda a Europa no começo do século XVIII, pois as contribuições de Newton, seu cálculo de fluxos, aparecem brevemente no apêndice "*Tractatus de quadratura curvarum*" sua obra de óptica, publicada em 1704. Suas idéias sobre desenvolvimento em séries infinitas eram conhecidas por alguns de seus poucos amigos e na obra que aparecem seus resultados *de analysis per equtiones numero terminorum* infinitas a luz em 1711; seu sistema de cálculo diferencial e integral esta em *Methodus fluxionum et serierum* i*nfinitarum*, publicado em 1727, depois de sua morte.

Por outro lado Leibniz apresentou seu cálculo diferencial e integral através de artigos publicados na revista *Acta Eruditorum*, também publicou artigos sobre o mesmo tema de Jean e Jacob Bernoulli. Em 1684 aparece a primeira parte do cálculo diferencial e na década de noventa Leibniz e os Bernoulli publicaram nessa revista a solução de problemas famosos, como o de Catenária, a Braquistócrona, e os Isoperimétricos, Que vão demonstrar a potência da nova ferramenta matemática.

No primeiro manual de cálculo diferencial com aplicações ao estudo de curvas, *Ansalyse des infiniment petits*, com o marques de L'Hôspital em 1696, recopilando algumas lições de Jean Bernoulli, cuja publicação completa se deu em 1742.

Antes do século XVIII poucas pessoas conheciam a valiosa ferramenta do cálculo e muitos menos haviam se preocupado por validar seus fundamentos. Somente alguns conheciam seu potencial para resolver problemas completos de mecânica, astronomia, náutica e acústica. A matemática, e sobre tudo seu ultimo invento, o calculo infinitesimal, se convertiam assim em uma ciência útil, distante das meras especulações estéticas. Ao longo do século XVIII, as matemáticas entraram nos salões da França e nas cortes européias através das academias de ciências. Nesse ambiente pouco importava se o cimento sobre o que se apoiavam na análise eram sólidos e contavam com um rigor suficiente. Implicitamente se admitia sua validade por sua capacidade de resolver problemas práticos até os insolúveis. Ninguém questionava a eficácia matemática: eram uma arma de progresso longe do rigor atua. Por isso não devemos estranhar que o mesmo Euler, matemático por excelência desse século, trabalhasse com expressões do tipo:

$$1 + .\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + = 0{,}66215\ldots + \frac{1}{2}\ln(\infty) \qquad \frac{1-x^0}{0} + \ln x$$

Que encontramos formalmente incorretas, se bem que Euler entendia que quando n é muito grande e quando t é um número positivo muito próximo de zero os valores:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2}\ln n, \qquad \frac{1-x^t}{t} + \ln x$$

são muito próximos de 0,66215... e a 0. Ao julgar uma obra, nunca se deve esquecer da época e de que o rigor matemático havia sido uma variável dependente do tempo.

Para provarmos esta proposição $\frac{1-x^t}{t} + \ln x$,primeiramente devemos considerar somente a seqüência $\frac{1-x^t}{t}$ ou seja, devemos considerar o limite quando t se aproxima de zero.

Seja o $\lim_{t\to 0}\frac{1-x^t}{t}$, aplicando a regra de L'Hôspital teremos que $\lim_{t\to 0}\frac{1-x^t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-e^{t\ln x}\cdot\ln x}{1}$, note que quando t é igual a zero a seqüência $\lim_{t\to 0}\frac{1-x^t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-e^{t\ln x}\cdot\ln x}{1}=\frac{-e^{o}\cdot\ln x}{1}=-\ln x$. Logo a seqüência $\lim_{t\to 0}\frac{1-x^t}{t}+\ln x=\lim_{t\to 0}\frac{-e^{t\ln x}\cdot\ln x}{1}+\ln x=\frac{-e^{o}\cdot\ln x}{1}\ln x=-\ln x=\ln x=0$.

Vamos analisar a seguinte série numérica $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2p-1}$. O teste da integral para convergência de séries nos diz o seguinte: Seja f uma função contínua, positiva e decrescente em $\int_1^{\infty}\frac{1}{2x-1}$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e convergente se e somente se a integral imprópria $\int_1^{\infty}f(x)dx$ for convergente. Em outras palavras:

(i) Se $\int_1^{\infty}f(x)dx$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é convergente.

(ii) Se $\int_1^{\infty}f(x)dx$ for divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é divergente.

Observe a função $f(x)=\frac{1}{2x-1}$, note que a função é contínua positiva e decrescente em $[1,\infty)$, portanto podemos utilizar o teste da integral.

Dada a integral imprópria $\int_1^{\infty}\frac{1}{2x-1}dx$, pelo método de substituição teremos que

$$u=2x-1\Rightarrow du=2dx\Rightarrow dx=\frac{du}{2}$$

Logo

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{2x-1}dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ \ln(\infty)-\ln(1)\ =\infty$$

ou seja, a função $f(x)=\frac{1}{2x-1}$ É divergente.Logo a série $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2p-1}$ é divergente, porém Euler afirmou que a série $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}\ln n$ para um n muito grande, converge para um número próximo de 0,66215..., utilizando métodos numéricos podemos nos aproximar deste número.

Vamos somar os trinta primeiros termos da série $\sum_{p=1}^{30} \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2}\ln 30$ ou seja,

$\sum_{p=1}^{30} \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2}\ln 30 = [1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{57}+\frac{1}{59}] - \ln 30$. Temos que $\frac{1}{2}\ln 30 = 1,700598691$ e que a soma dos trinta primeiros termos da série é 2,610857052 Ou seja,

$\sum_{p=1}^{30} \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2}\ln 30 = [1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{57}+\frac{1}{59}] - \ln 30 = 0,910258361$,onde o erro é de 0, 2481.

Portanto para um n muito grande a série $\sum_{p=1}^{30} \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2}\ln 30$ converge para 0,66215.

Euler teve a sorte de introduzir-se desde sua juventude no círculo seleto de conhecedores da obra de Newton e Leibniz e receber lições do próprio Jean Bernoulli, talvez o melhor conhecedor do cálculo de Leibniz no continente. A vida de Euler não foi especialmente excitante, já que foi uma pessoa completamente convencional, sempre amável e generoso. Carecia da aureola de alguns de seus mais conhecidos contemporâneos, como Washington (1732- 1799), que conduziu exércitos a vitória, Robespirre (1758-1799) que liderou uma revolução política que o levou a morte, e o capitão Cook (1728) que cruzou os mares para explorar continentes desconhecidos. Euler foi um grande aventureiro intelectual através da maravilhosa paisagem matemática.

Leonhard Euler nasceu nos arredores da Basiléia, na suíça. Seu pai, um modesto pastor protestante, acariciava a idéia de que seu filho leonhard lhe sucedesse no púlpito, e que parecia estar destinado a Euler, já que sua mãe também era de uma família de pastores. Foi um jovem precoce, com um dom especial para as línguas, uma extraordinária e uma incrível capacidade de cálculo mental.

Aos 14 anos entrou na universidade da Basiléia, onde o professor mais famoso que teve foi Jean Bernoulli (1667-1748), homem orgulhoso e arrogante, tão rápido em depreciar o trabalho dos demais como em se vangloriar a si próprio, o que teria certo fundamento, pois em 1721 Jean Bernoulli podia proclamar-se como o melhor matemático em atividade, já que Leibniz havia morrido e o velho ancião havia deixado de trabalhar com matemática já havia algum tempo. Jean vivia na Basiléia no mesmo momento que Euler necessitava de um tutor.

Bernoulli não foi um professor para Euler no sentido moderno da palavra, mas sim um guia que lhe sugeria leituras matemáticas e estava disposto a discutir com ele aqueles pontos que pareciam especialmente difíceis. Pronto Jean Bernoulli se deu conta de que seu jovem aluno era especial. Foram-se transcorrendo os anos e a relação entre os dois foi se amadurecendo, foi Bernoulli que pareceu converter-se cada vez mais no discípulo, por ele Bernoulli, homem não dado a relacionamentos, em uma ocasião escreveu a Euler:

“Eu represento a analise superior como se estivesse em sua infância, pior que você esta chegando a seu estado adulto”.

A educação matemática de Euler não foi em matemática, se licenciou em filosofia, sendo seus primeiros escritos sobre a temperança (virtude de quem é moderado) e sobre a história da lei. Logo ingressou na escola de teologia para converter-se em pastor, Porém sua vocação era matemática, anos mais tarde escreveu:

“*Tive que matricular-me na faculdade de teologia e dedicar-me ao estudo do grego e do hebreu, porem não progredi muito, pois a maior parte do tempo eu dedicava aos estudos de matemática e, por sorte, as visitas nos sábados de Jean Bernoulli continuaram”.*

Terminou o ministério com o propósito de converter-se em matemática. Seu progresso foi rápido e aos 20 anos de idade quase ganhou um premio da academia de ciências de Paris em competição por suas analises sobre o lugar dos mastros de um barco de guerra, pressentimento do que viria mais tarde. Seu trabalho ficou em segundo lugar.

Em 1725, Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de Jean, chegou à Rússia para ocupar uma cadeira de matemática na nova academia de San Petersburgo e, no ano seguinte, Euler recebeu o convite para acompanhá-lo. A única cadeira em aberto era em mecânica aplicada à fisiologia, que Euler aceitou pela escassez de cadeiras. Como não sabia nada das artes medicas focou-se a estudar fisiologia com suas características laboratoriais, talvez a partir de um ponto de vista mais geométrico que clínico.

Quando chegou a San Petersburgo em 1727, Euler supôs que havia sido designada à física no lugar da fisiologia, troca que favoreceu a ele e para todos que poderiam ter sido operado com sua habilidade de régua e compasso. Durante seus primeiros anos na Rússia residiu na casa de Daniel Bernoulli e ambos se envolveram em amplas discussões sobre física e matemática, que antecederam o curso de ciência européia nas décadas seguintes.

Em 1733 Daniel Bernoulli mudou-se para a Suíça para ocupar um posto acadêmico. A partida de seu bom amigo produziu um vazio na vida de Euler, porém deixou livre sua cadeira que prontamente Euler ocupou.

Casou-se com Katharina Gsell, filha de um pintor Suíço que vivia na Rússia. Nas quatro décadas que durou o matrimônio tiveram 13 filhos, dos quais apenas 5 alcançaram a adolescência e pelo menos três sobreviveram a seus pais.

Na Academia de San Petersburgo. Euler dedicou-se muito tempo na investigação, estando à disposição do estado Russo, que era quem pagava seu salário. Preparava mapas, auxiliava o exército russo e propôs desenhos de bombas contra incêndios. Sua fama crescia, sendo um dos seus primeiros triunfos a resolução do chamado “Problema da Basiléia” onde os matemáticos estavam lutando a um século, que consistia em encontrar o valor exato da série infinita.

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{k^2}$$

As aproximações numéricas haviam revelado que a soma desta série era um valor próximo à 8/5, porém a resposta exata havia resistido a Pietro Mengoli (1625-1686) que havia delineado o problema em 1644 a Jacob Bernoulli (1654-1705), irmão de Jean e tio de Daniel que o publicou para comunidade matemática em 1689. Bem, começado o Século seguinte, o problema seguia sem resolução. Em 1735 Euler demonstrou que a soma era $\frac{\pi^2}{6}$, resultado nada intuitivo que deu mais fama ainda a seu descobridor. Ainda que a maior contribuição de Euler na teoria dos números é o inicio da teoria analítica dos números primos, que iniciou com sua notável identidade que relacionava os números primos com a série das potências dos recíprocos números naturais. Em uma carta a Christian Goldbach, reconheceu sem demonstrá-lo a verdade da conjectura de Goldbach de que todo numero par é a soma de dois números primos, sendo uma proposição que ainda espera uma demonstração.

Dada à série harmônica $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}$,a propriedade do teste da integral para convergência, afirma que dada a serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ ela é convergente se $p \succ 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Logo a Série $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}$ é convergente. Segundo Euler a série $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}$ converge para um valor próximo de $\frac{\pi^2}{6}$ que corresponde a 1,644934067... Se somarmos os treze primeiros teremos como resultado $\sum_{p=1}^{13}\frac{1}{p^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{121}+\frac{1}{144}+\frac{1}{169}=1{,}570893798$.

Logo quanto mais interações, maior será a aproximação do valor correto da série que é 1,644934067...

Euler continuou suas pesquisas em um ritmo vertiginoso publicando seus artigos na revista da Academia de San Petersburgo, chegando em alguns casos a publicar metade dos artigos onde alguns números eram todos de Euler. Na álgebra, por exemplo, deu métodos originais de eliminação e de decomposição em frações simples.

Leonhard Euler é a figura representativa do período algorítmico no século da ilustração (sabedoria), também chamado século da razão, pela total confiança posta no poder da mente, que levou os matemáticos a crerem que com os algoritmos algébricos finitesimais e infinitesimais:

- Toda equação algébrica terá solução.
- Toda equação diferencial poderá integrar-se.
- E toda série poderá ser somada.

Esta confiança, em geral, benéfica deu a Euler uma capacidade de cálculo, poucas vezes vista em uma fecundidade maravilhosa. Seu espírito sábio o levou a buscar um método geral para resolver equações de qualquer grau. (Os sábios tinham confiança no poder ilimitado da razão, para resolver qualquer problema, o que é falso, pois hoje sabemos que é impossível encontrar um método geral para resolver equações de grau cinco).

Achou um novo método para resolver equações de grau quatro, incluindo um método geral que lhe dava a solução das equações de graus dois, três e quatro, porém nada mais. (algum ano mais tarde, já em Berlin, elaborou uma nova demonstração do teorema fundamental da Álgebra).

Três problemas o entristeceram neste fértil período matemático russo:

O primeiro foi a instabilidade política russa, que se estendia como um turbilhão que conduziu a morte de Catarina cujos efeitos foram a intolerância e a suspeita a estrangeiros, que nas palavras de Euler deixavam a situação "bastante difícil".

O segundo problema encontrado por Euler foi que a Academia estivesse sendo dirigida pelo burocrata Joham Schumacher cuja maior preocupação era "A eliminação do talento", onde pode despontar inconvenientemente.

O terceiro foi à perda da visão de seu olho direito em 1738, atribuída a seu intenso esforço em cartografia, se bem que uma severa infecção que sofreu a alguns meses antes foi a causa da cegueira do olho direito.

O impacto da perda da visão sobre sua dedicação a matemática foi nulo. Euler seguiu seu programa de estudos e seguiu escrevendo sobre construção de caixas acústica e teoria da harmonia musical.

No século XVII os campos que abrangeram a matemática eram muito mais amplos que na atualidade, na arvore da ciência representado na *l'enciclopedie*, do ramo genérico da matemática surgem outros ramos que hoje são matérias autônomas. Os enciclopedistas dividiam a matemática em dois ramos principais:

Matemática pura, que compreendiam a aritmética e a geometria. A aritmética dividia-se em aritmética numérica (teoria dos números) e álgebra (álgebra elementar, álgebra infinitesimal e cálculo diferencial e integral).

A geometria se dividia em geometria elementar, geometria transcendente (que englobava a teoria dos corpos), a tática militar e a arquitetura militar.

Físico-matemático ou matemática mista, que englobava disciplinas como a mecânica, a estática, a hidrostática, a dinâmica, a óptica, a pneumática e a geometria astronômica.

Não faltava a um matemático profissional do *século das luzes* áreas onde desenvolver seu trabalho. Por isso não devemos estranhar que só 58% das obras de Euler sejam entendidas como matemáticas (teoria dos números, em particular teoria analítica dos números, álgebra, analise, geometria, e geometria diferencial).

Além disso, escreveu sobre mecânica, óptica e acústica, (28% de sua obra), sobre astronomia (11%), sobre náutica, arquitetura e artilharia (2%) e sobre musica e filosofia (1%). Dos mais de 73 volumes reeditados de sua obra, que constituem sua *Opera Omnia*, só 29 constituem a Ópera matemática.

Nas suas contribuições na teoria dos números Euler contou com a ajuda de seu amigo Christian Goldbach (1670-1764).

Em sua resposta a uma carta de Philippe Naude (1684-1745), pos cimentos na teoria das partições. Neste período escreveu seu livro *Mechanica,* que apresentava as leis newtonianas do movimento desde o ponto de vista do cálculo, por isso que esta obra é considerada peça chave na história da física.

A produção de Euler produziu-lhe tal prestígio que Frederico O Grande da Prússia (1712-1786) lhe ofereceu um posto na revitalizada Academia de Berlin, unido a instável situação política da Rússia que euler descreveu como "Um pais em que a pessoa que fala é pendurada (enforcada)", originou a aceitação da oferta de Frederico da Prússia em 1741, Leonhard, Katharina e sua família se mudaram para Alemanha.

Viveu em Berlin um quarto do século, que coincidiu com a fase intermediária de sua carreira matemática. Neste período publicou duas de suas grandiosas obras: Um texto de 1748 sobre funções, *Introduction In Analysin Infinitorum* e um volume de 1755 sobre cálculo diferencial, *Instituciones Calculi Differentialis.*

Em seu *Introduction,* Euler usa a concepção de função na forma em que se manteve por muito tempo: "*Função de x é toda expressão analítica de uma variável obtida mediante combinação finita ou infinita de símbolos algébricos ou transcendentes*". Às vezes também se referiu a função como toda relação entre x e y que se representa no plano mediante uma curva traçada a mão livre, quer dizer uma curva continua no sentido intuitivo.

Na conexão com as funções transcendentes aparece uma das mais notáveis contribuições de Euler a analise: Os logaritmos como expoentes e a relação das potencias de base e com os números imaginários e com as funções circulares mediante a identidade ou formula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$$

Uma das fórmulas mais bela e útil da matemática que encerra todas as relações trigonométricas. O segundo volume do *introduction* é um tratado de geometria plana e espacial.

Para provarmos essa igualdade devemos utilizar as séries de Maclaurin. Não cabe neste trabalho provar a validade dessas afirmações.

Temos que a expressão e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin, isto é,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{Para todo x}$$

Seja $i\theta = x$ onde $i \in \mathbb{C}$, a expressão $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ será da forma $e^x = e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\theta^n}{n!}$.

Temos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$ Se substituirmos $i\theta = x$ a expressão será da forma

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\theta^n}{n!} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} \cdots = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \frac{i\theta^9}{9!} \cdots$$

Por outro lado temos que $\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$

e

$$i\text{sen}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)} = i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots) = i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \cdots$$

Ou seja

$$\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \frac{i\theta^9}{9!} + \cdots .$$

Logo $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$.

Sua *instituciones calculi differentialis,* livro escrito quando estava praticamente cego, constam de três volumes, a integração de equações diferenciais ordinárias e nas derivadas parciais, e noções de cálculo de variações. Além disso, uniu um quarto livro póstumo com uma seleção de memórias.

Enquanto estava em Berlin, dedicou-se a explicar as classes de ciências elementares à princesa Anhalt Dessau. O resultado foi uma obra expositiva que se publicou mais tarde com o titulo "*Cartas* *de Euler a uma princesa alemã sobre diferentes temas de filosofia natural*". Constam de umas 200 cartas sobre a Luz, o Som, a Gravidade, a Lógica, o Magnetismo e a Astronomia. Ao longo de sua obra Euler explica porque faz frio no alto de uma montanha dos trópicos, porque a lua parece maior quando surge no horizonte e porque o céu é azul. Do mesmo modo, Euler expõe sua preocupação por um dos maiores problemas filosóficos: *O problema do mal do mundo*, em cartas dedicadas a origem do demônio e a convivência com pecadores. Também dedicou carta ao então intrigante assunto da "Eletrização dos homens e dos animais".

Escreveu sobre a visão em uma carta fechada em agosto de 1760. Euler começava com estas palavras "*Estou agora em condições de explicar fenômenos da visão, que incontestavelmente são uma das grandes operações da natureza que a mente humana pode contemplar*". É surpreendente a comoção desta afirmação que vinha de um autor parcialmente cego. Porém Euler não era uma pessoa na qual seus infortúnios pessoais interferissem na sua atitude para com as maravilhas da natureza.

As *Cartas a uma princesa alemã* tornaram-se um sucesso internacional. O livro foi traduzido em vários idiomas na Europa e em 1833 foi publicado na EEUU. Nesta edição, o editor se rasgou em elogios a capacidade expositiva de Euler, dizendo que "A satisfação do leitor é, em cada passo, proporcional a seu progresso e a cada aquisição sucessiva de conhecimento se converter a uma fonte de maior satisfação". Este livro é um dos melhores exemplos de ciência popular.

Mesmo na Alemanha continuou publicando na revista da Academia de San Petersburgo e recebendo uma remuneração regularmente. Na Academia de Berlin, além de suas investigações matemáticas, estava profundamente envolvido nas tarefas administrativas, pois ainda que não fosse o diretor da Academia, desempenhava esse posto de maneira informal, assumindo responsabilidades que iam desde administrar os pressupostos ate vigiar os invernadeiros, porém talvez por um conflito de personalidades, Frederico O Grande havia desenvolvido um inexplicável desprezo por Euler, sem dúvida o acadêmico mais famoso de sua corte. Frederico se considerava um erudito e um intelectual irônico que gostava de filosofia, poesia e de qualquer coisa que fosse francesa. Por isso os assuntos da academia se tratavam em francês e não em alemão. Frederico II considerava que Euler reduzia seus interesses a certos termos científicos matemáticos, ignorando outros muitos e, em cruel referência a sua muito limitada vista, lhe chamava "*Meu sábio Ciclope*".

Euler era diferente dos reluzentes e sofisticados acadêmicos de Berlin, pois era muito convencional em seus gostos, caseiro, muito trabalhador e um protestante calvinista muito devoto, até quando perdeu a visão da vista, reunia todas as noites sua família para lerem e comentarem a bíblia. A teologia era um de seus estudos favoritos e as doutrinas que acreditava eram as mais rígidas dentro do calvinismo.

Outros fatos que piorava as coisas era a fria relação entre Euler e Voltaire, a outra estrela acadêmica. Voltaire desfrutou durante certo tempo certas preferências no circulo de Frederico O Grande. Era famoso como autor e como escritor satírico, era tão sofisticado como o rei e era inteiramente francês. O irônico Voltaire descrevia Euler como alguém que "*Nunca aprendeu filosofia, por que tinha que contentar-se com a fama de matemático que num certo tempo enchia mais folhas de papeis com calculo*".

Assim depois de ter elevado a Academia de Berlin a uma glória matemática que jamais voltaria alcançar, Euler teve que ir embora. As coisas na Rússia haviam melhorado durante sua ausência, particularmente com o acesso ao trono de Catarina A Grande (1729-1796), e Euler estava feliz com o regresso.

A Academia de San Petersburgo devia dar credito a sua boa sorte quando, em 1776, deu as boas vindas ao novo e então melhor matemático do mundo. Desta vez euler ficaria para sempre.

Ainda que sua vida científica continuou avançando rapidamente, nos anos seguintes iam trazer duas novas tragédias pessoais: A primeira foi a perda quase que completa do olho bom. Em 1771 estava praticamente cego, e só podia ler o que estava escrito com caracteres muito grandes. A segunda desgraça veio em 1773 com a morte de Katharina.

Esta segunda desgraça unida à cegueira poderia ter marcado o final dos anos produtivos de Euler, mas ele não era um homem fácil e não só manteve sua produção científica, como incrementou. Em 1775 escreveu metade de um artigo matemático da semana, considerando que eram os outros que liam os artigos matemáticos e que tinha que ditar suas idéias.

Quando estava ficando cego escreveu um texto de álgebra de 775 páginas, onde também explica o movimento da lua, e um enorme resumo em três volumes que explicava o cálculo integral, *institutiones calculi integralis*. Sua maravilhosa memória e sua excepcional capacidade de cálculo lhe foram mais úteis que nunca quando só podia ver com os olhos da mente. Podia dizer sem utilizar lápis nem papel, os 100 primeiros números primos, seus quadrados, cubos e até sua sexta potência. Com a ajuda de seus filhos e de seu colaborador Nikolaus Fuss publicou mais de 300 trabalhos durante seu período de cegueira. Havia sido sem dúvida o matemático mais brilhante da história.

Sua incrível obra se explica por seu amor a vida tranqüila familiar, por sua inteligência excepcional, por sua maravilhosa memória, pelo domínio incrível das técnicas algorítmicas e por uma disciplina de trabalho rígida. Porém durante seus anos com cegueira, infortúnios continuaram, e embora sua avançada idade continuou com grande vigor e entusiasmo seu trabalho, que é uma autentica lição para as gerações futuras. A coragem, determinação serve como motivação para matemáticos. *A historia da matemática nos proporciona em Euler o genuíno exemplo de vitória do espírito humano.*

Três anos depois da morte de sua mulher casou-se com sua cunhada, encontrando uma companheira para compartilhar seus últimos anos de vida que se estenderam até o dia 18 de Setembro de 1783. Neste período passou um tempo com seus netos e logo voltou a trabalhar em questões matemáticas relativas ao vôo de balões, tema que o interessou, provocado pela recente subida dos irmãos Montgolfier sobre o céu de Paris em um balão propulcionado por ar quente, acontecimento que foi testemunhado por Benjamin Franklin, diplomata dos recentes Estados Unidos da América.

Depois de feito alguns cálculos sobre a órbita do planeta Urano, cuja órbita parecia alterada pela existência de um planeta externo. Com efeito, nas décadas seguintes a peculiar órbita do planeta analisada na claridade das equações que Euler havia depurado, levou aos astrônomos a buscar, e descobrir, ate então o mais distante planeta Netuno. Se Euler tivesse tido mais tempo e se tivesse dedicado tempo de encontraria matematicamente o novo planeta. Porem não iria ter a oportunidade. Na metade da tarde dessa típica jornada atarefada, teve uma hemorragia grave que lhe provocou a morte no ato. Só a morte foi capaz de deter uma mente que havia passado a vida calculando.

Chorado por sua família, por seus colegas e pela comunidade científica universal, Leonhard Euler foi enterrado em San Petersburgo. Deixou um legado matemático de proporções épicas, que permitiu a Academia de San Petersburgo seguir publicando artigos inéditos 48 anos depois de sua morte.

Em seu elogio fúnebre, o marques de Condorcet disse que "*quem queria dedicar-se a matemática no futuro seria guiado e sustentado pelo gênio de Euler e que todos os matemáticos são seus discípulos*". Anos mais tarde Laplace diria "*estude Euler, estude Euler, ele é o professor de todos nos*". André Weil, um dos melhores matemáticos do século XX dizia "Durante toda sua vida... parece ter levado na cabeça a totalidade das matemáticas de sua época, tanto puras como aplicadas".

CAPÍTULO 2

ONDAS

2.1 MOVIMENTO ONDULATÓRIO

O movimento ondulatório pode ser imaginado como o transporte de energia e de momento, de um ponto espaço para outro, sem o transporte de matéria. Nas ondas mecânicas, como as ondas numa corda, ou as ondas sonoras no ar, a energia e o momento são transportados mediante a perturbação do meio. Numa corda de violino, dedilhada ou tocada pelo arco, a perturbação da forma da corda, assim provocada, se propaga para o restante da corda. Ao mesmo tempo, a corda vibrante provoca pequena alteração na pressão do ar adjacente a esta alteração de pressão se propaga como onda sonora através do ar. Nos dois casos, a perturbação se propaga em virtude das propriedades elásticas do meio. Uma onda na qual a perturbação é perpendicular à direção de propagação é denominada **Onda Transversal**. Uma onda na qual a perturbação é paralela a direção de propagação é uma **Onda Longitudinal.**

2.2 ONDAS HARMÔNICAS

Quando se move uma extremidade de uma corda, para cima e para baixo, num movimento harmônico simples (por exemplo, prendendo-se a extremidade a um diapasão vibrante), propaga-se ao longo da corda um trem de ondas senoidal. Esta onda é uma **Onda Harmônica**. A forma da corda, num certo instante, é a de uma função seno como mostra a figura 1. (Aqui, como antes, se a função é seno ou co-seno depende exclusiva e simplesmente da escolha da origem sobre o eixo x.) Esta figura pode ser observada tirando-se um instantâneo fotográfico da corda. A distancias entre dois máximos sucessivos da onda é o **Comprimento de onda** λ**.** O comprimento de onda é a distância em que a onda se repete no espaço. Quando a onda se propaga na corda, cada ponto da corda se move para cima e para baixo, ou seja, numa direção perpendicular à direção de propagação, num movimento harmônico simples, com a frequência f do diapasão excitador, ou do agente que estiver excitando a extremidade da corda. Há uma relação simples entre a frequência f, o comprimento λ e a velocidade v da onda harmônica. Durante um período $T = \frac{1}{f}$, a onda se move numa distância correspondente a um comprimento de onda, e então a velocidade é dada por

$$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda$$

A função que descreve o deslocamento que aparece na figura 1 é

$$y(x) = A\text{sen } \kappa x$$

Onde A é a **amplitude** e κ uma constante denominada **número de onda.** O número de onda está relacionado com o comprimento de onda. Se passarmos de um ponto x_1 para outro ponto x_2, a um comprimento de onda de distância, $x_2 = x_1 + \lambda$, o argumento da função seno se altera por 2π. Temos então

$$\kappa(x_1 + \lambda) = \lambda x_1 + 2\pi$$
$$\kappa\lambda = 2\pi$$

ou

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$$

A fim de descrever uma onda que se desloca para a direita com a velocidade v, substituímos x na equação $y(x) = A\text{sen}\kappa x$, por $x - vt$, então, a função de onda de uma onda que se move para a direita, com velocidade v, escreve-se,

$$u(x,t) = y\ \ x - vt\ \ = A\text{sen}[\kappa(x - vt)] = A\text{sen}(\kappa x - \kappa vt)$$

ou

$$u(x,t) = A\text{sen}(\kappa x - \omega t)$$

onde

$$\omega = f\lambda$$

é a frequência angular, que está relacionada à frequência f e ao período T. A função $y(x,t) = A\text{sen}(\kappa x - \omega t)$ é conhecida como Função de onda harmônica.

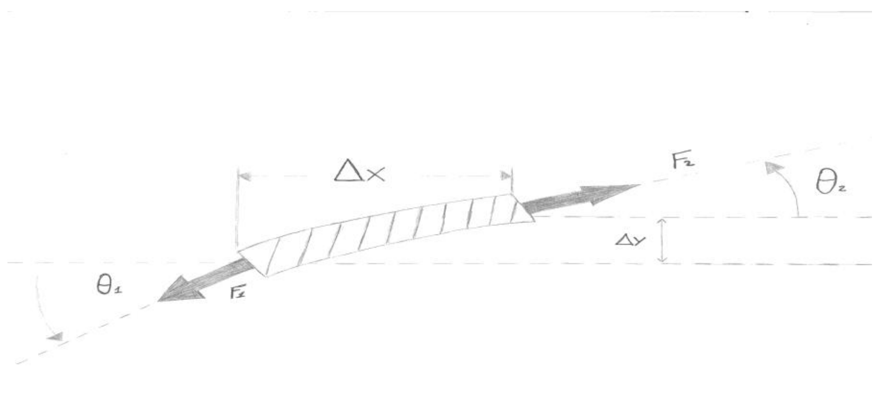
2.3 **A EQUAÇÃO DE ONDA**

Uma equação geral $y(x,t)$ é uma solução de uma equação diferencial denominada a equação de onda. A equação de onda é uma consequência imediata das leis de Newton. Na figura abaixo aparece isolado um segmento de corda. A nossa dedução só terá validade se a onda for suficientemente pequena, em amplitude, para que o ângulo entre a corda e a horizontal (que é a direção inicial da corda, na ausência de onda) seja pequeno. Neste caso, o comprimento do segmento é aproximadamente Δx e a sua massa $\mu\Delta x$. O segmento da corda se desloca na vertical. A sua aceleração é a derivada segunda de $y(x,t)$ em relação à t, com x constante, ou seja, a derivada segunda nada mais é que uma derivada parcial e denotamos como sendo $\partial_t^2 y$. A força vertical resultante é

$$\sum F = F\text{sen }\theta_2 - F\text{sen }\theta_1$$

onde θ_2 e θ_1 são ângulos na figura e F é a tensão na corda. Uma vez que os ângulos são por hipótese, pequenos podemos aproximar sen θ por tan θ. Então, a força vertical resultante, que atua sobre o segmento da corda, pode ser escrita como

$$\sum F = F\text{sen }\theta_2 - F\text{sen}(n\theta_1) \approx F(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$$



A tangente do ângulo do segmento da corda com a horizontal é o coeficiente angular da curva formada pela corda. Se simbolizarmos este coeficiente por S temos

$$S = \tan\theta = \partial_x y$$

então

$$\sum F = F(S_2 - S_1) = F\Delta S$$

onde S_1 e S_2 são os coeficientes angulares nas duas extremidades do segmento da corda, e ΔS é a variação deste segmento. Igualando esta força resultante ao produto da massa $u\Delta x$ pela aceleração $\partial_t^{\ 2} y$ vem

$$F\Delta S = \mu\Delta x\, \partial_t^{\ 2} y$$

ou

$$F\,\frac{\Delta S}{\Delta x} = \mu\, \partial_t^{\ 2} y$$

No limite quando $\Delta x \to 0$, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \partial_x S = \partial_x \partial_x y = \partial_x^{\ 2} y$$

então a equação fica

$$\partial_x^{\ 2} y = \frac{\mu}{F} \partial_t^{\ 2} y$$

Esta ultima equação é a **equação da onda** da corda tencionada. É importante mencionar, mais uma vez que esta equação vale apenas para ângulos pequenos e, portanto, se os deslocamentos $y(x,t)$ forem pequenos.

Mostraremos agora que a equação de onda é satisfeita por qualquer função do argumento $x - vt$, ou $x + vt$. Seja $\alpha = x - vt$ e consideremos qualquer função de onda

$$y = y(x - vt) = y(\alpha)$$

Usaremos o símbolo y' para a derivada de y em relação a α. Então, pela regra da cadeia para as derivadas, temos

$$\partial_x y = \partial_\alpha y \partial_x \alpha = y' \partial_x \alpha$$

e

$$\partial_t y = \partial_\alpha y \partial_t \alpha = y' \partial_y \alpha$$

Uma vez que $\partial_x \alpha = 1$ e $\partial_t \alpha = -v$, temos

$$\partial_x y = y'$$

e

$$\partial_t y = -vy'$$

Tomando as derivadas segundas vem

$$\partial_x^2 y = y'$$

$$\partial_t^2 y = -v\partial_t y' = -v\partial_\alpha y' \partial_t \alpha = +v^2 y'$$

e, portanto,

$$\partial_x^2 y = \frac{1}{v^2}\partial_t^2 y$$

esta ultima chamada de **equação de onda**.

Exemplo - Mostrar explicitamente, pelo cálculo das derivadas, que

$$y = A\text{sen}\,(\kappa x - \omega t)$$

satisfaz a equação da onda.

Solução. Tomando a derivada parcial de y em relação a x, obtemos

$$\partial_x y = \partial_x[A\text{sen}(\kappa x - \omega t)] = A\cos(\kappa x - \omega t)\partial_x \quad \kappa x \quad = \kappa A\cos(\kappa x - \omega t)$$

Tomando a derivada parcial segunda em relação à x, obtemos

$$\partial_x^2 y = -\kappa^2 A\text{sen}(\kappa x - \omega t)$$

Analogamente, as derivadas em relação a t são

$$\partial_t y = \partial_t [A\mathrm{sen}(\kappa x - \omega t)] = A\cos(\kappa x - \omega t)\,\partial_x \;\; -\omega t \;\; = -\omega A\cos(\kappa x - \omega t)$$

e

$$\partial_t^2 y = -\omega^2 A\mathrm{sen}(\kappa x - \omega t)$$

A equação dá então

$-\kappa^2 A\mathrm{sen}(\kappa x - \omega t) = \dfrac{1}{v^2}[-\omega^2 A\mathrm{sen}(\kappa x - \omega t)]$, Que vale se $v = \dfrac{\omega}{\kappa}$.

CAPÍTULO 3

SÉRIES DE FOURIER

3.1 SÉRIES DE FOURIER E SUAS APLICAÇÕES

As séries de Fourier são de grande importância na Matemática abstrata como na Matemática aplicada. As Séries de Fourier são uma família de funções ortonormais $\{\phi_n\}$, que podem aproximar periodicamente com precisão arbitrária, funções com valores complexos.

No século XVIII problemas físicos, como modelos de condução de calor e o estudo das vibrações e oscilações conduziam para o estudo da Série de Fourier.

3.2 INTRODUÇÃO A SÉRIE DE FOURIER

Basicamente a série de Fourier é uma soma infinita de funções trigonométricas, descrevendo polinômios complexos e sua relação para exponenciais complexas. Considere as expressões abaixo:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}[e^{ix} + e^{-ix}],$$

$$\text{sen(x)}= \frac{1}{2i}[e^{ix} - e^{-ix}]$$

onde a expressão $\cos(x)$ é a parte real de e^{ix} e $\text{sen}(x)$ parte imaginária.

Vamos mostrar que ambas as funções são periódicas com período 2π. Precisamos mostrar que

$$e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}$$

Demonstração:

$$e^{i(x+2\pi)} = e^{ix} \cdot e^{2i\pi} = e^{ix} \cdot e^{(i\pi)^2} = e^{ix} \cdot (-1)^2 = e^{ix}$$

Definimos um polinômio trigonométrico para números complexos $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$ e $\{b_1, b_2, ...\}$ e o número real x, como soma finita da seguinte forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{N} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen} \; nx \; \right],$$

para $n = 1, 2, 3...$ definimos

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n),$$

além disso, definimos $C_0 = a_0$.

Da identidade acima descrita, podemos escrever a expressão da seguinte forma,

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{inx} \tag{3.1}$$

Considere a função $\frac{e^{inx}}{in}$, claramente $f_1(x) = e^{inx}$ e $f_2(x) = \frac{e^{inx}}{in}$ ambas com período 2π.

Além disso

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \frac{e^{inx}}{in} = f_2$$

ao mesmo tempo $f_2(x) = f_2(x + 2\pi)$, $\int_{p}^{p+2\pi} f_1 \; x \; dx = 0$, para $n = 1, 2, 3...$

em particular

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\, dx = 0$$

e para $n = 0$

$$\int_{p}^{p+2\pi} f_1(x)\, dx = 2\pi$$

Multiplicando a equação (3.1) por e^{-imx}, onde m é um número inteiro, obteremos o seguinte

$$e^{-imx} f(x) = e^{-imx} \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{inx}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} [(C_n e^{inx}) \cdot (e^{-imx})]$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} (C_n e^{i(n-m)x})$$

Considere dois casos. Primeiramente suponha que $|m| \rangle |n|$.Neste caso para todo $-|N| \leq n \leq |N|$, $n - m \neq 0$. Neste caso, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = 0$.

Suponha agora que $|m| \leq |n|$.Neste caso, nesse ponto é exatamente n, $n \in \mathbb{Z}$, $-N \leq n \leq N$, $n = m$. Então $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = 2\pi$ quando $n = 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} C_n e^{i(m-n)} dx,$$

Onde $m = n$. Deste modo

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} f(x) dx = 2\pi C_n \text{ , e}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} \, dx.$$

como $m = n$

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} f(x) dx. \qquad (3.2)$$

.

Agora as séries trigonométricas são da forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \quad ,$$

onde a n-ésima soma parcial é

$$\sum_{n=-N}^{N} C_n e^{inx}.$$

Além disso, devemos definir as séries de Fourier para $f(x)$ como uma série trigonométrica, com coeficientes da forma proposta na equação (3.2).

3.3 SÉRIE DE FOURIER GERAL

Diante do foco sobre séries de Fourier com funções trigonométricas, daremos uma descrição das funções gerais de Fourier.

Vamos primeiramente à noção de sistemas ortogonal de funções. Seja $\{\phi_{1,}\phi_2,\phi_3,\ldots\}$ uma série de funções complexas. Dizemos que $\{\phi_n\}$ é um sistema ortogonal de funções sobre $[a,b]$,se para todos inteiros $m \neq n$,

$$\int_a^b \phi_m \;\; x \;\; \overline{\phi_n} \;\; x \;\; dx = 0 \qquad (3.3)$$

do mesmo modo, para todo inteiro $m \rangle 0$,

$$\int_a^b \phi_m \;\; x \;\; \overline{\phi_n} \;\; x \;\; dx = 1 \,,$$

Dizemos que $\{\phi_n\}$ é um sistema ortonormal de funções.

Podemos notar que a função e^{inx}, $n = 1, 2, 3 \ldots$ forma um sistema ortogonal de funções sobre $[-\pi, \pi]$, desde que $e^{-inx} = e^{inx}$, e para $m \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx = 0$.

Podemos definir os coeficientes de Fourier respectivamente como $\{\phi_n(x)\}$ segue que:

$$C_n = \int_a^b f(x)\overline{\phi}_n(x)\,dx \qquad (3.4)$$

Onde $\overline{\phi}_n(x)$ é o conjugado complexo do complexo-estimado da função $\phi_n(x)$.

Em termos de série de Fourier generalizada, definimos a série de Fourier de f como $\{\phi_n(x)\}$ sendo respectivamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n(x)$$

Podemos notar de nossa definição para a série de Fourier como funções trigonométricas respectivamente, que

$$\{\phi_n(x)\} = \{\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \phi_4(x)\}$$
$$= \{e^{ix}, e^{(-ix)}, e^{2ix}, e^{-2ix}\}$$

onde, $\phi_n(x) = e^{inx}$, $\overline{\phi}_n(x) = e^{(-inx)}$.

3.4 ALGUMAS PROPRIEDADES DA SÉRIE DE FOURIER

Teorema de Rudin: Suponha que ϕ_n um sistema ortonormal de funções no intervalo $-\pi, \pi$. Suponhamos dois conjuntos de números complexos, c_n e d_n, $n = 1, 2, 3...$ onde C_n e d_n são coeficientes de Fourier para ϕ_n, da equação (3.4). Agora considere duas séries de funções,

$$s_N(f, x) = \sum_{n=1}^{N} C_n \phi_n,$$

seja a n-ésima soma da série de Fourier para f, e

$$t_N \; f, x = \sum_{n=1}^{N} dn \; \phi_n .$$

então

$$\int_a^b |f - s_n(f,x)|^2 dx \leq \int_a^b |f - t_n(f,x)|^2 dx \, .$$

Este teorema mostra que, para soma de função periódica f e soma ortonormal de sistemas de funções ϕ_n , a série de Fourier fornece a menor aproximação do erro ao quadrado.

Prova: Admita $\phi_n \; x$,ser ortonormal no intervalo a, b . Considere:

$$\int_a^b f\,\overline{t}_n dx = \int_a^b f \sum_1^n \overline{dn}\,\overline{\phi}_n dx$$

Da definição de t_n . Podemos escrever expressão acima como:

$$\int_a^b f dx \sum_1^n \overline{d}_n\,\overline{\phi}_n = \sum_1^n \int_a^b f\,\overline{d}_n\,\overline{\phi}_n dx$$

Onde $\int_a^b f\phi_n = c_n$, podemos reescrever a expressão acima como:

$$\int_a^b f\,\overline{t}_n dx = \sum_1^n c_n \overline{d}_n \qquad (3.5)$$

Agora considere a integral de a até b do $|t_n|^2$. Onde

$$|t_n|^2 = t_n \overline{t}_n$$

e

$$t_n = \sum_1^n d_m \phi_m$$

$$\overline{t}_n = \sum_1^n \overline{d}_m \overline{\phi}_m ,$$

teremos:

$$\int_a^b |t_n|^2 \, dx = \int_a^b \sum_1^n d_m \phi_m \sum_1^n \overline{d}_k \overline{\phi}_k ,$$

Onde ϕ_n é um sistema ortogonal de funções em a, b , de acordo com a equação (3.3), então reescrevemos a expressão acima como

$$\int_a^b |t_n|^2 \, dx = \sum_1^n d_m \overline{d}_m$$

Agora podemos reescrever a expressão como:

$$\int_a^b |t_n|^2 dx = \sum_1^n |d_m|^2 \qquad (3.6)$$

Agora, considere o erro total quadrado entre f e t_n , $\int_a^b | f - t_n |^2$. Primeiramente reescrevemos como:

$$\int_a^b | f - t_n |^2 \, dx = \int_a^b \left(f - t_n \right) \left(\overline{f} - \overline{t}_n \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(f \, \overline{f} - f \, \overline{t}_n - \overline{f} \, t_n + t_n^2 \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(f^2 - f \, \overline{t}_n - \overline{f} \, t_n + t_n^2 \right)$$

Das equações (3.5) e (3.6) acima mencionadas, podemos escrever:

$$\int_a^b | f - t_n |^2 \, dx = \int_a^b (f^2) dx - \sum_1^n (c_m \overline{d}_m) - \sum_1^n \overline{c}_m d_m + \sum_1^n d_m \overline{d}_m$$

Uma vez que

$$|d_m - c_m|^2 = (d_m - c_m)(\bar{d}_m - \bar{c}_m)$$

$$= |d_m|^2 + |c_m|^2 - c_m\bar{d}_m - \bar{c}_m d_m$$

Podemos escrever a equação acima como:

$$\int_a^b |f - t_n|^2 dt = \int_a^b f^2 - \sum_1^n |c_m|^2 + \sum_1^n |d_m - c_m|^2 \qquad (3.7)$$

Da equação acima, podemos ver que o erro total quadrado é minimizado quando $d_m = c_m$, para $n = 1, 2, 3, 4...$

Teorema 2 de Rudin: Assumindo todas notações usadas no teorema anterior. Considere a sequência de termos $c_m = c_1, c_2, c_3...$ A série $\sum_1^n c_m$ é absolutamente convergente (em outros termos $\sum_1^n |c_m|$ converge).

Prova: Substituindo c_n por d_n na equação (3.6). Obteremos o seguinte:

$$\int_a^b |s_n|^2 (x) dx = \sum_1^n |c_m|^2$$

Agora considere a equação (3.7). Sabemos que $\int_a^b |f - t_n|^2 \geq o$, segue que

$$\sum_1^n |c_m|^2 \leq \int_a^b |f \quad x|^2 dx$$

Para indo para o infinito, teremos que:

$$\sum_1^\infty |c_n|^2 \leq \int_a^b |f \quad x|^2 dx$$

Dos estudos de convergência de séries, isto implica que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

Este resultado é bastante importante porque nos mostra os primeiros termos da série de Fourier esses são os mais importantes, e esses coeficientes de Fourier tornam-se arbitrariamente pequeno.

Exemplo: vamos aplicar a série de Fourier em um exemplo básico. Vamos primeiramente considerar a série de Fourier para $f_1(x)$, que é uma função de período 2π, e cujo valor no intervalo $-\pi, \pi$ é x.

Sabemos que os coeficientes de Fourier c_n são da forma:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \quad x \quad e^{-inx} dx$$

Como

$$\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx} dx = \left(\frac{1}{-in} xe^{-inx} + \frac{1}{n^2} e^{-inx} \right)$$

Sabemos que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-inx}}{n^2} \quad inx + 1 \quad \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-inx}}{n^2} \quad in\pi + 1 \quad - \frac{e^{in\pi}}{n^2} \quad -in\pi + 1$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos \quad n\pi \quad - i\,\text{sen} \quad n\pi \quad in\pi + 1 \quad - \quad \cos \quad n\pi \quad + i\,\text{sen} \quad n\pi \quad -in\pi + 1}{n^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{in\pi \cos \quad n\pi \quad - i\,\text{sen} \quad n\pi \quad + in\pi \cos \quad n\pi \quad - i\,\text{sen} \quad n\pi}{n^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{2n \cos \quad n\pi \quad \pi - sen \quad n\pi \quad i}{n^2}$$

e

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{inx}}{n^2} \quad -inx+1 \quad \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{in\pi}}{n^2} \quad -in\pi+1 \quad - \frac{e^{-in\pi}}{n^2} \quad in\pi+1$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{2 \quad -n\cos \quad n\pi \quad \pi + \operatorname{sen} \quad n\pi \quad i}{n^2}$$

Essas aproximações nos fornece aproximadamente todas informações da série de Fourier. Porém necessitamos calcular c_0, onde o método de integração e^0 é diferente. Assim,

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} xe^0 \quad = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \quad \pi^2 - \pi^2 \quad = 0$$

Agora podemos construir a série de Fourier para $f_1 \quad x$. Por exemplo, tomando os 9 primeiros termos (ou $n = 1, 2, 3, 4$).

Teremos: $c_0 = 0, c_1 = -i, c_{-1} = i, c_2 = \frac{i}{2}, c_{-2} = -\frac{i}{2}, c_3 = -\frac{i}{3}, c_{-3} = \frac{i}{3}, c_4 = \frac{i}{4}, c_{-4} = -\frac{i}{4}$, e a quarta soma parcial da série de Fourier de $f_1 \quad x$ é determinada por:

$$s_N \quad f_1, x \quad = 0 - ie^{-ix} + ie^{-ix} + \left(\frac{i}{2} e^{2ix} \right) - \frac{i}{2} e^{-2ix} \quad - \frac{i}{3} e^{3ix} \quad = \ldots$$

Agora podemos combinar os termos elevado ao expoente negativo de cada um, reescrevendo cada exponencial em termos de senos e co-senos. Feito isso, obtemos a seguinte fórmula,

$$s_N \quad f_1, x \quad = 0 + 2sen \quad x \quad - sen \quad 2x \quad + \frac{2}{3} sen \quad 3x \quad - \frac{1}{2} sen \quad 4x$$

Além disso, se calcularmos o erro total quadrado no intervalo $-\pi, \pi$,encontraremos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| x - s_N \quad f_1, x \quad \right|^2 \approx 2.781 \; .$$

Certamente, calcularmos os 41 primeiros termos da série de Fourier (a vigésima soma parcial), a função tornar-se-ia muito similar a f_1, x, e o erro quadrado entre $-\pi$ a π decresceria drasticamente.

Algumas vezes, partir dos coeficientes da forma $c_0, c_1, c_2, c_3 \ldots$ não é muito conveniente. Usaremos algumas propriedades para criar uma forma agradável para a serie de Fourier.

Primeiramente, o termo associado a c_0 na série de Fourier é $c_0 e^0$, podemos substituí-la por uma soma real constante. Chamaremos esta constante $a_0 = c_0$. Para c_n e c_{-n}, $n = 1, 2, 3 \ldots$, novamente da definição que

$$c_n = \frac{1}{2}\ a_n - ib_n$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

Neste caso,

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = i\ c_n - c_{-n}$$

Uma vez que c_{-n} é o conjugado complexo de c_n ,sabemos que a_n é duplamente a parte real de c_n ou c_{-n}, e b_n é duas vezes o coeficiente negativo da parte imaginaria de c_n ou c_{-n}.

Nestas relações aplicamos a série de Fourier na forma alternada, dado por:

$$f\ \ x\ = a_0 = \sum_{n=0}^{N}\ a_n \cos\ \ nx\ + b_n \operatorname{sen}\ \ nx$$

Onde a_n e b_n são determinados acima.

3.5 APLICAÇÕES DA SÉRIE DE FOURIER

Recapitulando, a série de Fourier simplifica a análise do período, de funções reais. Especificamente, dividi a função periódica em infinitas séries de seno e co-seno. Esta propriedade da série de Fourier é útil em muitas aplicações. Daremos algumas.

Considere a equação diferencial muito comum dada por:

$$x''(t) + ax'(t) + b = f(t)$$

Esta equação descreve o movimento de um oscilador harmônico amortecido e é impulsionado por alguma função. Ela pode ser utilizada como modelo em uma variedade de fenômenos físicos, como circuitos com capacitor, resistor, indutor, a frequência de uma corda vibrante.

Se $f(t)$ for uma função senoide, então a solução também é uma senoide que não é muito difícil de achar. O problema é que geralmente não é uma simples senoide, mas sim algumas funções periódicas.

A analise de Fourier nessa propriedade física do sistema oscilatório é útil na propriedade da superposição, em outras palavras, suponha uma força condutora $f_1(t)$, ao longo de algumas condições iniciais, fornece um resultado fixo $x_1(t)$, e outra força fornece como resultado a solução $x_2(t)$. Então a força resultante $f_3(t) = f_1(t) = f_2(t)$ em consequência disto terá que a força motriz será $x_3(t) = x_1(t) = x_2(t)$.

Então como queremos representar alguma função periódica como série de Fourier, a questão é simples encontrar a solução de um oscilador, onde o mesmo seja um oscilador senoide, queremos encontrar uma resposta arbitraria para a função motriz

$$f(x) = a_0 + \sum \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right]$$

Suponhamos que temos a equação quadrática da onda, onde $f(t)$ é o quadrado da função da onda. Podemos decompor a onda quadrática como componente senoidal, ou seja:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s(x)\, e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx} dx = \frac{i}{2n\pi}\left(e^{in\pi} - 1\right)$$

$$c_{-n} = -\frac{i}{2n\pi} \; e^{-in\pi} - 1$$

Então combinamos os termos c_n e c_{-n} como anteriormente. O resultado seria uma soma infinita de termos senos e co-senos, como nas equações vistas no começo deste capítulo.

CAPÍTULO 4

SÉRIES DE FOURIER E A EQUAÇÃO DA ONDA

4.1 A EQUAÇÃO DA ONDA: AS FÓRMULAS DE D'ALEMBERT e D. BERNOULLI

A equação da onda é sem duvida um dos exemplos mais clássicos e relevantes ao que se recorre nos estudos de equações em derivadas parciais (EDP). Não sendo um exemplo meramente acadêmico, nem muito menos. Os primeiros estudos sobre as equações aos que nos referimos mais adiante, se realizaram no século XVIII, época que estavam se estabelecendo os pilares fundamentais da análise matemática, tal como é entendida nos dias de hoje.

Os desenvolvimentos posteriores foram associados a avanços importantes na Análise de Fourier, Óptica Geométrica, Analise numéricas, etc. de modo que, pode-se dizer que a equação da onda tem sido um dos protagonistas, mas destacados da matemática nos últimos séculos.

Em uma dimensão espacial, a equação da onda é um modelo simples para a descrição das vibrações de uma corda, enquanto que em varias dimensões espaciais descreve vibrações de um tambor e a propagação das ondas acústicas.

Comecemos considerando a equação da onda:

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t^2 - u_x^2 = 0 & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & 0 < x < l \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

O sistema (4.1) acima é um modelo simples para a análise das vibrações de uma corda de longitude *l* ([que ocupa o intervalo espacial x em]*0, l[*) e seus extremos $x = 0$ e $x = l$. A incógnita $u = u(x,t)$, que depende do espaço *x* e do tempo *t*, denota a altura a que se encontra o ponto *x* da corda (no intervalo *]0, l [*), num instante de tempo *t.* Se trata de uma equação diferencial em derivadas parciais de ordem dois, complementada por duas condições de contorno que refletem que a corda esta fixada em seus extremos.

Na ultima equação de (4.1) se colocam as condições iniciais que a solução deve satisfazer no instante *t*. Tratar-se de uma equação diferencial de segunda ordem no tempo e impomos tanto a configuração inicial de *u*, u_0 , como a velocidade inicial u_1

Este é um dos modelos mais clássico que se analisa sistematicamente em todos os textos básicos de Equações em Derivadas Parciais.

Em 1747 D'Alembert propôs a seguinte expressão para a solução geral de uma equação da onda sem condições de contorno

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) \tag{4.2}$$

Convêm observar que a expressão da solução *u* que (4.2) proporciona não é mas que a superposição de duas ondas de *transporte*: *f(x + t)* que se desloca sem deformasse a velocidade um na direção negativa no eixo *x*, enquanto que *g(x - t)* desloca-se a direita. Não é difícil chegar a conclusão de que (4.2) proporciona a expressão de uma solução geral da equação da onda.

Em efeito, basta observar que o operador diferencial $\partial_t^2 - \partial_x^2$ envolvidos em uma equação de onda se pode fatorar como:

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x) \tag{4.3}$$

Vemos então que as duas ondas de transporte nas se decompõe a solução, correspondem as soluções das equações:

$$(\partial_t + \partial_x)u = 0; \qquad (\partial_t - \partial_x)u = 0 \tag{4.4}$$

respectivamente. Em efeito, a solução da primeira equação é da forma *u = g(x – t)* enquanto que a da segunda é *u = f (x + t).*

Posteriormente, D. Bernoulli em 1753 obteve a solução da equação de uma corda vibrante da seguinte forma:

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1}\left[C_r sen\left(\frac{k\pi}{l}t\right) + D_r \cos\left(\frac{k\pi}{l}t\right)\right] sen\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \tag{4.5}$$

Deste modo se deram os primeiros passos no estabelecimento do um dos métodos clássicos na resolução de uma EDP: o método de separação de variáveis de Fourier.

Cabe questionar por que este método leva o nome de J. Fourier se D. Bernoulli não é utilizado. Isto é porque somente no trabalho de 1822 de J. Fourier sobre a equação do calor ficou completamente estabelecido o programa a seguir na hora de resolver uma EDP através deste método que envolve varias etapas:

1) Decomposição dos dados do problema em series de Fourier.
2) Obtenção da evolução de cada coeficiente de Fourier em função da EDP e dos dados.
3) Reconstrução da solução como superposição de cada uma das componentes de Fourier (Série de Fourier).

Somente J. Fourier indicou com clareza como, dada uma função, se pode calcular os coeficientes de Fourier. Deste modo estabeleceu as bases de uma das heranças mais importantes da matemática: A análise de Fourier ou Análise Harmônica.

Uma primeira questão importante que se levantou de maneira natural é a coincidência das expressões do tipo (4.2) e (4.5). Na verdade, na medida em que para dados iniciais fixados (posição e velocidade inicial de uma corda) a solução de (4.1) é única, e se as representações (4.2) e (4.5) são validas, ambas tem de coincidir.

A afirmação anterior é verdadeira. Considerando um dos termos envolvidos em (4.5). Por exemplo $\cos\left(\frac{k\pi}{l}t\right) sen\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$. Utilizados nas formulas trigonométricas habituais vemos que

$$\cos\left(\frac{k\pi}{l}t\right) sen\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = \frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{k\pi}{l}(x+t)\right) + sen\left(\frac{k\pi}{l}(x-t)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f_k(x+t) + f_k(x-t)\right]$$

Da onde:

$$f_k(z) = sen\left(\frac{k\pi}{l}z\right)$$

Tratando de modo análogo os demais termos de (4.5) vemos que na verdade, a função desenvolvida em series de Fourier (4.5) pode ser escrita na forma de (4.2) como superposições de duas ondas de transporte.

Esta simples observação ilustrada o modo em que num desenvolvimento em séries de Fourier pode detectar-se a velocidade a que se propaga a função representada por aquela série. Efetivamente, como mencionamos anteriormente, como se desprende da formula de D’Alembert (4.2), a velocidade de propagação no modelo (4.1) é um.

Isto pode observar-se também no desenvolvimento das series de Fourier (4.5) por um simples fato de que a uma oscilação espacial $sen\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$ corresponde uma resposta temporal na forma

$$C_r sen\left(k\pi t/l\right) + D_r \cos\left(k\pi t/l\right).$$

Neste caso, o dado inicial é na forma:

$$u(x,0) = \sum_{k\geq 1} a_k e^{ik\pi x} \tag{4.6}$$

A solução correspondente é:

$$u(x,t) = \sum a_k e^{e k^3 \pi^3 t e^{ik\pi x}} \tag{4.7}$$

Observe então que as diferentes componentes de Fourier da solução são da forma

$$e^{ik^3\pi^3 t} e^{ik\pi x} = f_k\left(k^2\pi^2 t + x\right) \cos f_k(z) = e^{ik\pi z}$$

Portanto, cada componente de Fourier se propaga numa velocidade distinta $-k^2\pi^2$.

4.2 CÁLCULOS E DEDUÇÃO DAS PROPOSTAS DAS SOLUÇÕES DE D’ALAMBERT E BERNOULLI

Vamos utilizar agora o método de Fourier para achar a solução da equação diferencial parcial linear

$$\partial_x^2 u = \partial_t^2 u \tag{4.8}$$

mais conhecida como equação da onda unidimensional, com as seguintes condições de fronteiras de Dirichlet

$$\begin{aligned} &u(0,t) = u(l,t) = 0, && t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x), && 0 \leq x \leq l, \\ &\partial_t u(x,0) = g(x), && 0 \leq x \leq l, \end{aligned}$$

onde f e g são funções dadas, e l uma constante dada.

Solução: Para aplicar o método de Fourier vamos admitir uma solução que seja separável da forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

onde X é uma função de x e T uma função somente de t. Assim a equação (4.8) ficaria da seguinte forma:

$$\partial_x^2 X.T = \partial_t^2 T.X$$

vamos agora multiplicar ambos os lados por $\frac{1}{X.T}$, com $X.T \neq 0$ então teremos o seguinte:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}$$

Se analisarmos, veremos que do lado esquerdo da igualdade teremos uma função somente de x e do lado direito uma função que só depende de t, então podemos afirmar que para a igualdade ser verdadeira é necessário que

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = k,$$
$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = k,$$

onde k é uma constante de separação. Podemos notar agora que tanto a primeira equação como a segunda são equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2X}{dx^2} = kX, \tag{4.9}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} = kT, \tag{4.10}$$

podemos descobrir as funções X e T resolvendo cada uma destas equações diferencias ordinárias, mas não podemos esquecer que a equação $u(x,t) = X(x)T(t)$ deve satisfazer as condições de fronteira então

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \qquad \forall\, t,$$
$$u(l,t) = X(l)T(t) = 0, \qquad \forall\, t,$$

tomando $T \neq 0$, pois caso contrário iríamos nos deparar com a solução trivial $u(x,t) = 0$, temos

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{4.11}$$

caso k seja zero, temos como solução da equação

$$X(x) = Ax + B,$$

como $X(0) = X(l) = 0,$ concluímos que $A = B = 0$ e assim caímos novamente na solução trivial.

Caso k seja positivo $(k = w^2)$, como falamos vamos nos deparar com uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem (4.9), que tem o seguinte polinômio característico

$$r^2 + 0.r - w^2 = 0$$
$$r^2 - w^2 = 0$$

onde as raízes deste polinômio são $w,$ e $-w$ que são raízes reais, então duas soluções particulares da equação (4.9) são

$$X(x) = e^{wx}$$
$$X(x) = e^{-wx}$$

e pelo princípio da superposição temos que

$$X(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx},$$

também é solução da equação (4.9), e neste caso é o solução geral, pois e^{wx} $,e^{-wx}$ são linearmente independente, para confirmar isto basta calcular o Wronskiano e verificar que ele resulta em um número diferente de zero implicando que as duas funções são linearmente independentes.

$$\text{Wronskiano}(f,g) = \det\begin{bmatrix} f & g \\ f' & g' \end{bmatrix}$$

e retomando temos novamente por (4.11) que $A = B = 0$ e novamente nos deparamos com a solução $u(x,t) = 0$.

Caso k seja negativo $(k = -w^2)$, neste caso o polinômio característico da equação (4.9) é o seguinte

$$r^2 + 0.r + w^2 = 0$$
$$r^2 + w^2 = 0$$

onde as raízes deste polinômio são wi, e $-wi$ que são raízes complexas, então duas soluções particulares da equação (4.9) são

$$X(x) = \cos wx$$
$$X(x) = \operatorname{sen} wx$$

resolvendo novamente o Wronskiano das funções acima, veremos que elas são linearmente independentes e então encontramos como solução geral da equação (4.9)

$$X(x) = A\cos wx + B\operatorname{sen} wx,$$

e que pelas condições de fronteira, temos

$$X(0) = A\cos w0 + B\operatorname{sen} w0$$
$$0 = A\cos 0 + B\operatorname{sen} 0$$
$$0 = A$$

$$X(l) = A\cos wl + B\operatorname{sen} wl$$
$$0 = A\cos wl + B\operatorname{sen} wl$$
$$0 = B\operatorname{sen} wl$$

Como não queremos $B = 0$, pois senão teremos novamente a solução trivial, tiramos que

$$\operatorname{sen} wl = 0$$

Esta igualdade implica que

$$w = \frac{r\pi}{l}, \quad r = 1, 2, 3... \tag{4.12}$$

excluímos o caso $r = 0$, que nos dá $w = 0$ e resultaria novamente na solução trivial.

Resolvendo agora a equação (4.10), com $k=-w^2$, novamente o polinômio característico teria duas raízes complexas, $wci, -wci$, e fazendo os devidos passos, encontramos a seguinte equação geral.

$$T(t) = C\cos wct + D\,\mathrm{sen}\, wct$$

onde C e D são constantes de integração. Usando agora nossa idéia inicial que $u(x,t)=X(x)T(t)$ temos

$$u(x,t) = \mathrm{sen}\, wx.(C\cos wct + D\,\mathrm{sen}\, wct) \tag{4.13}$$

note que a constante arbitrária B foi igualada a 1, para facilitar os cálculos.

Mas olhando novamente para (4.12), notamos que w assume uma infinidade de valores, e pra cada valor de w formamos uma solução particular que tem a forma (4.13)

$$\begin{array}{l}
w_1 = \dfrac{\pi}{l}, \quad u_1(x,t) = \mathrm{sen}\,\dfrac{\pi x}{l}.(C_1\cos\dfrac{\pi ct}{l} + D_1\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi ct}{l}), \\
w_2 = \dfrac{2\pi}{l}, \quad u_2(x,t) = \mathrm{sen}\,\dfrac{2\pi x}{l}.(C_2\cos\dfrac{2\pi ct}{l} + D_2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2\pi ct}{l}), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\
w_r = \dfrac{r\pi}{l}, \quad u_r(x,t) = \mathrm{sen}\,\dfrac{r\pi x}{l}.(C_r\cos\dfrac{r\pi ct}{l} + D_r\,\mathrm{sen}\,\dfrac{r\pi ct}{l}), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots
\end{array} \tag{4.14}$$

onde $C_1, C_2, C_3 ..., C_r, ..., D_1, D_2, ..., D_r, ...$ são constantes arbitrárias. Cada uma destas expressões de $u(x,t)$ acima são soluções da EDP linear (4.8), e estas satisfazem a condição de fronteira $u(0,t)=u(l,t)=0, \quad t\geq 0$. Agora pelo princípio da superposição podemos afirmar que qualquer combinação linear destas soluções também é solução da equação da onda (3.1), ou seja, a seguinte combinação linear também é solução

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty}\left(C_r\cos\frac{r\pi ct}{l} + D_r\,\mathrm{sen}\,\frac{r\pi ct}{l}\right)\mathrm{sen}\,\frac{r\pi x}{l} \tag{4.15}$$

e esta é a solução geral, satisfazendo como dito antes, apenas a seguinte condição de fronteira $u(0,t)=u(l,t)=0, \quad t\geq 0$. Agora vamos satisfazer as condições

$$u(x,0)=f(x), \qquad 0\le x\le l,$$
$$\partial_t u(x,0)=g(x), \qquad 0\le x\le l,$$

e estas condições como veremos determinaram a constantes arbitrárias C_r e D_r. Consideramos primeiramente $u(x,0)=f(x), \quad 0\le x\le l,$ então temos (4.15) em $t=0$

$$u(x,0)=\sum_{r=1}^{\infty}\left(C_r\cos\frac{r\pi c.0}{l}+D_r\text{ sen }\frac{r\pi c.0}{l}\right)\text{sen }\frac{r\pi x}{l}$$
$$u(x,0)=\sum_{r=1}^{\infty}\ C_r\cos 0+D_r\text{ sen }0\ \text{ sen }\frac{r\pi x}{l}$$
$$u(x,0)=\sum_{r=1}^{\infty}C_r\text{ sen }\frac{r\pi x}{l}$$

e substituindo $u(x,0)=f(x)$ temos

$$f(x)=\sum_{r=1}^{\infty}C_r\text{ sen }\frac{r\pi x}{l} \tag{4.16}$$

Agora utilizando a última condição de fronteira $\partial_t u(x,0)=g(x), \quad 0\le x\le l,$ para descobrir D_r vamos derivar (4.15) em relação a t e aplicar em $t=0$. Assim teremos

$$u(x,t)=\sum_{r=1}^{\infty}\left(C_r\cos\frac{r\pi ct}{l}+D_r\text{ sen }\frac{r\pi ct}{l}\right)\text{sen }\frac{r\pi x}{l}$$
$$\partial_t u(x,t)=\sum_{r=1}^{\infty}\left(C_r.\left(\text{-sen }\frac{r\pi ct}{l}\right).\frac{r\pi c}{l}+D_r.\left(\cos\frac{r\pi ct}{l}\right).\frac{r\pi c}{l}\right)\text{sen }\frac{r\pi x}{l}$$

$$\partial_t u(x,0)=\sum_{r=1}^{\infty}\left(C_r.\left(\text{-sen }\frac{r\pi c.0}{l}\right).\frac{r\pi c}{l}+D_r.\left(\cos\frac{r\pi c.0}{l}\right).\frac{r\pi c}{l}\right)\text{sen }\frac{r\pi x}{l}$$
$$\partial_t u(x,0)=\sum_{r=1}^{\infty}\left(C_r.\left(\text{-sen }0\right).\frac{r\pi c}{l}+D_r.\left(\cos 0\right).\frac{r\pi c}{l}\right)\text{sen }\frac{r\pi x}{l}$$
$$\partial_t u(x,0)=\sum_{r=1}^{\infty}D_r.\frac{r\pi c}{l}\text{ sen }\frac{r\pi x}{l}$$
$$\partial_t u(x,0)=\frac{\pi c}{l}\sum_{r=1}^{\infty}D_r.r\text{ sen }\frac{r\pi x}{l}$$

e como $\partial_t u(x,0)=g(x), \quad 0\le x\le l,$ então

$$g(x)=\frac{\pi c}{l}\sum_{r=1}^{\infty}D_r.r\text{ sen }\frac{r\pi x}{l}. \tag{4.17}$$

Agora os coeficientes C_r e D_r podem ser determinados através de (4.16) e (4.1.10) respectivamente, para isso utilizaremos uma técnica de séries de Fourier e assim teremos,

$$C_r = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\text{sen}\,\frac{r\pi x}{l}\,dx \tag{4.18}$$

$$D_r = \frac{2}{r\pi c}\int_0^l g(x)\,\text{sen}\,\frac{r\pi x}{l}\,dx \tag{4.19}$$

onde $r = 1, 2, 3, \ldots$

Agora substituindo em (4.15) as constantes C_r e D_r temos

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{l}\int_0^l f(x')\,\text{sen}\,\frac{r\pi x'}{l}\,dx'\right]\cos\frac{r\pi ct}{l}\cdot\text{sen}\,\frac{r\pi x}{l} + \left[\frac{2}{r\pi c}\int_0^l g(x')\,\text{sen}\,\frac{r\pi x'}{l}\,dx'\right]\text{sen}\,\frac{r\pi ct}{l}\cdot\text{sen}\,\frac{r\pi x}{l}\right\}$$

onde x' é a variável de integração e denotamos assim para não confundirmos com x que é a variável independente. Esta função é solução geral da equação da onda (4.8) com as seguintes condições de fronteira

$$\begin{aligned} &u(0,t) = u(l,t) = 0, && t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x), && 0 \leq x \leq l, \\ &\partial_t u(x,0) = g(x), && 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Se observa assim mesmo que na equação da onda considerada existe uma ausência de *dispersão*, entendendo por *dispersão* o fenômeno segundo o qual os diferentes componentes de Fourier se propagam a velocidades distintas, tal como ocorre no clássico modelo de Korteweg-de Vries para o avanço das ondas ou na equação de Schrodinger.

Evidentemente, os efeitos dispersivos fazem que a forma da solução mude completamente no tempo, mas isso seria estudo para outro trabalho futuro.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como principal objetivo contar a história de um dos mais grandiosos matemáticos do século XVIII, estamos falando de Euler. Suas contribuições nas mais diversas áreas foram de grande importância para matemáticos e físicos de nossa atualidade.

Euler esteve além de seu tempo em todos os sentidos, sua inteligência superou todas as barreiras possíveis, tudo em busca de uma matemática perfeita.

A identidade trigonométrica de Euler teve grande importância neste trabalho, pois serviu de ferramenta matemática para que pudesse resolver a equação da onda através da series de Fourier.

As séries de Fourier são de grande importância na Matemática abstrata como na Matemática aplicada. No século XVIII problemas físicos, como modelos de condução de calor e o estudo das vibrações e oscilações foram resolvidos através da Série de Fourier.

Podemos concluir este trabalho como uma frase que mostra como Leonhard Euler foi importante, a citação foi de Laplace e diz o seguinte "*estude Euler, estude Euler, ele é o professor de todos nos*".

BIBLIOGRAFIA

1. BOURBAKI, N. **Elementos de la Historia de las Matemáticas.** Editora Alianza Universidad, 1996.
2. BOYER, C. B. **História da Matemática.** Editora Edgar Blücher Ltda., São Paulo, 1996. Traduzido por Elza F. Gomide do original em inglês: A History of Mathematics, John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1991.
3. COURANT, R. e ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Editora Ciência Moderna Ltda., Rio de Janeiro, 2000. Traduzido por Adalberto da Silva Brito do original em inglês: What is Mathematics?, 1941.
4. RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis,** Editora McGraw-Hill International Editions, 1996.
5. TIPLER. P. A. **Física para Cientistas e Engenheiros**. Editora LTC S.A, Rio de Janeiro,1995.Traduzido por Horacio Macedo do original em inglês: Physics for Scientistis and Engineers,1991.
6. WEISSTEN. E. W. **Fourier Series**. Por Mathworld-a Disponível na internet em: http//mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html.