UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANDERSON HOFFMANN

UMA INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DE N-CORPOS

Florianópolis, 18 de novembro de 2009

Esta Monografia foi julgada adequada como Trabalho de Conclusão de Curso no Curso de Matemática – Habilitação Bacharelado em Matemática e Computação Científica, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 42/CCM/09.

Prof. Nereu Estanislau Burin

Professor da Disciplina

Banca Examinadora

Prof. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa
Orientador

Prof. Antônio Vladimir Martins

Prof. Luiz Augusto Saeger

AGRADECIMENTOS

A minha família, principalmente a minha mãe Dilma Rosa Correia, por me apoiar em todos os momentos e também aos meus tios, Valdir Rosa Correia e Ranúsia Bonin Correia que me deram todo apoio desde o início da minha graduação.

A meu orientador Gustavo Adolfo Torres da Costa, pelo apoio no decorrer desta monografia.

A Antônio Vladimir Martins e Luiz Augusto Saeger, membros da banca examinadora, pelos esclarecimentos finais.

Obrigado!

Índice

Introdução

As civilizações da antiguidade, assim como os Babilônios, Egípcios e Gregos, tinham o interesse de estudar a Mecânica Celeste tanto para a curiosidade quanto para a necessidade de prever os movimentos dos astros, visando entre outras, a organização estatal e agricultura. Atualmente, a Mecânica Celeste é uma área de pesquisa muito ativa, com importantes contribuições, sendo um dos assuntos com bastante relevância o **Problema de *N*- Corpos**. Este problema tem por objetivo descrever o movimento de um número de ***N*** corpos sob a influência única da lei da gravitação de Newton. O presente trabalho de conclusão de curso é uma introdução a este problema.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: Expomos no capítulo 1 algumas Definições e Leis básicas da física, com grande ênfase nas Leis de Isaac Newton (1642-1727) e a Lei universal da Gravitação. No capítulo 2, formulamos o problema de N corpos como um problema de valor inicial para um sistema de equações diferenciais de 2ª ordem. O nosso objetivo principal será o de demonstrar a existência e unicidade de solução local do problema utilizando o teorema de existência e unicidade devido aos matemáticos A. J. Picard (1620-1682) e A. L. Cauchy (1789-1857). No capítulo 3 estudamos o problema para o caso de N=2 corpos, cuja solução foi obtida por Isaac Newton em 1687. No capítulo 4 estudamos e demonstramos as Leis de conservação, a identidade Lagrange – Jacobi (J. L. Lagrange (1736-1813) e C. G. J. Jacobi (1804-1851)) e a desigualdade de Jimmy Sundman. Para finalizar o nosso estudo, no capítulo 5 estudamos as singularidades para o problema de N corpos. Apresentaremos alguns resultados devidos aos matemáticos Paul Painlevé (1863-1933) e de K. T. W. Weierstrass (1815-1897). Além dos citados, vários outros matemáticos e físicos contribuiram para o estudo do problema de N corpos.

O nosso estudo baseia-se na monografia de Sérgio B. Volchan, “Uma Introdução à Mecânica Celeste”, apresentado no 26º Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa, 2007.

Capítulo 1

Definições e Leis básicas da física

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e leis básicas da física, necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

Definições Básicas

Definição 1.1. *A posição de um corpo varia no tempo* $t \in \mathbb{R}$ *de acordo com a função vetorial,*

$$r(t) = x_1(t), x_2(t), x_3(t) \tag{1.1}$$

Sua velocidade é dada pelo vetor

$$v = \frac{dr}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right) \tag{1.2}$$

Se v varia no tempo, o corpo tem uma aceleração a dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2}, \frac{d^2 x_2}{dt^2}, \frac{d^2 x_3}{dt^2} \right) \tag{1.3}$$

Definição 1.2. *Para um corpo de massa m e velocidade v, o momento linear p é definido por*

$$p = mv \tag{1.4}$$

Para um sistema de *N* corpos com massas $m_1, \ldots, m_N$, e velocidades $v_1, \ldots, v_N$, o momento linear total *P* do sistema é a soma dos momentos lineares parciais, isto é,

$$P = \sum_{I=1}^{N} m_i v_i \tag{1.5}$$

Definição 1.3. *A energia cinética de um corpo de massa m e velocidade* $v(t)$ *é a função escalar*

$$E_C(t) = \frac{1}{2} m v^2(t) \tag{1.6}$$

onde $v^2 = ||v||^2$ *e* $||.||$ *denota a norma euclidiana no* $\mathbb{R}^3$.

Para um sistema de N corpos de massas $m_1, ..., m_N$ com velocidades $v_1, ..., v_N$, respectivamente, a energia cinética total é

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 \tag{1.7}$$

Definição 1.4. *Suponha que sobre um corpo de massa m atua uma força* $F(r)$, *função da posição* r, *com a propriedade de que existe uma função escalar* $V(r)$ *tal que*

$$-\nabla V = F \tag{1.8}$$

Nos livros textos de física, ref.[2] por exemplo, a função V é chamada de *energia potencial* e ∇V é o *vetor gradiente* de V. Neste trabalho, no entanto, chamaremos de "energia potencial" à função $U = -V$.

Definição 1.5. *A energia mecânica de um corpo de massa m com energia cinética* E_c *e energia potencial V é a função escalar*

$$E(t) = E_C(t) + V \;\; r(t) \tag{1.9}$$

Definição 1.6. *Sejam N corpos com massas* $m_1, ..., m_N$ *cujas posições (e velocidades) no tempo t são* $r_1(t), ..., r_N(t)$ *e* $(v_1, ..., v_N)$, *respectivamente. Denotamos por* R_{CM} *e L os vetores definidos por*

$$R_{CM}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i(t)}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{1.10}$$

e

$$L(t) = \sum_{i=1}^{N} m_j r_j \times v_j \tag{1.11}$$

e chamados, respectivamente, de ***vetor centro de massa*** *e* ***vetor momento angular*** *do sistema. Definimos, também,* ***o momento de inércia*** $I(t)$ *do sistema como*

$$I(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j r_j^{\,2} \tag{1.12}$$

onde $r_j^{\,2} = ||\, r_j \,||^2$.

Na definição (1.11), $r_j \times v_j$ denota o produto vetorial dos vetores r_j e v_j. Nos livros textos de física, o momento de inércia é definido como *2I.*

Significado físico de m, L e I

Massa. Podemos entender a massa m de um corpo como sendo uma medida de sua resistência ao movimento, também chamada de inércia. Para ilustrar esta idéia, suponha que o corpo se desloca sob a ação de uma força F com aceleração a. Pela segunda lei de Newton,

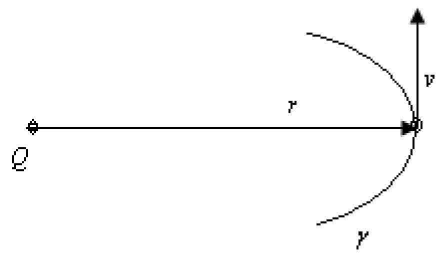
$$a = \frac{F}{m} \tag{1.13}$$

Mantendo F constante e variando a massa m, segue que quanto maior m, a massa do corpo menor é sua aceleração. Diz-se, então, que maior é a resistencia ou inércia ao movimento.

Momento angular e o momento de inércia. O momento angular de um corpo de massa m é o equivalente do momento linear $p = mv$ quando o corpo tem um movimento de rotação em relação a algum ponto. Seja Q este ponto. O corpo tem uma velocidade angular vetorial

$$W = \frac{d\theta}{dt} k \tag{1.14}$$

que é a taxa de variação do angulo de rotação θ com o tempo.



Na equação (1.14) k é um vetor unitário ortogonal a r e a v. Existe uma relação entre os vetores v e W

$$v = W \times r \qquad (1.15)$$

onde " $\times$ " denota o produto vetorial de W por r. Os vetores v e r são ortogonais e coplanares. Portanto, o vetor W é ortogonal a r e v. O momento angular do corpo é

$$L = r \times p = mr \times v$$

Usando a relação (1.15), obtemos

$$L = mr \times (W \times r) \qquad (1.16)$$

Pela fórmula do duplo produto vetorial dada pela ref.[3],

$$L = m\ (r \bullet r)W - (r \bullet W)r \qquad (1.17)$$

$$= mr^2 W$$

pois $r \bullet r = r^2$ e $r \bullet W = 0$. Defina

$$I = mr^2 \qquad (1.18)$$

Assim, o momento angular se expressa em termos da velocidade angular como

$$L = IW \qquad (1.19)$$

Portanto, um vetor angular não nulo é indicativo da existencia de movimento de rotação. Compare esta última relação com aquela para o momento linear $p = mv$. Elas tem a mesma forma. No caso do momento angular, o fator I, chamado de momento de inércia do corpo, desempenha o papel da massa. Por esta razão, podemos interpretar I como sendo uma medida da resistência do corpo a fazer uma rotação. Defina o vetor μ por

$$\mu = r \times F \tag{1.20}$$

onde $F = \dfrac{dp}{dt}$ é uma força atuando no corpo m. Segue que

$$\mu = \frac{d}{dt}(r \times p) - v \times p$$

Como $v \times p = 0$ pois v e p tem a mesma direção, resulta que

$$\mu = \frac{dL}{dt}$$

onde $L = r \times p$ é o momento angular do corpo. O vetor μ é chamado de força de torque, associada ao momento angular da mesma forma que $F = \dfrac{dp}{dt}$ está associada ao momento linear. Seguindo os princípios da mecânica de Newton, também chamada de mecânica clássica, vamos postular que o movimento de um corpo qualquer no espaço obedece às seguintes leis de Newton:

Leis de Newton

Seguindo os principios da mecânica de Newton, também chamada de Mecânica Clássica, vamos postular que o movimento de um corpo qualquer no espaço obedece às seguintes, leis conhecidas como leis de Newton.

1ª) Lei da inércia

Um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme a menos que seja compelido a modificar este estado pela ação de uma força.

2ª) Lei fundamental da mecânica

Seja F a resultante de todas as forças aplicadas sobre um corpo de massa m. A ação da força F sobre o seu movimento é tal que

$$\frac{dp}{dt} = F \tag{1.21}$$

O deslocamento ocorre ao longo da direção de F.

Se a massa m é uma constante, então podemos expressar (1.13) na forma

$$ma = F, \tag{1.22}$$

ou ainda,

$$m\frac{dv}{dt} = F, \tag{1.23}$$

ou ainda,

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F \tag{1.24}$$

Será suposto daqui em diante que a massa é uma constante.

3ª) Lei da ação e reação

Se um corpo exerce uma força sobre outro, este exerce uma força sobre o primeiro, da mesma magnitude, direção, mas de sentido oposto.

Newton também estabeleceu a seguinte lei fundamental:

Lei universal da gravitação

Dois corpos quaisquer exercem entre si uma força cuja direção é a da reta que passa por ambos e sentidos opostos; esta força é diretamente proporcional ao produto das massas e sua intensidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os corpos. Esta força é chamada de força gravitacional.

Podemos expressar esta lei quantitativamente como segue.

Sejam

$$r_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}) \tag{1.25}$$

e

$$r_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23}) \tag{1.26}$$

as posições dos corpos m_1 e m_2, respectivamente, e a distância entre eles dada por

$$r_{12} := || r_1 - r_2 || = \sqrt{(x_{11} - x_{21})^2 + (x_{12} - x_{22})^2 + (x_{13} - x_{23})^2} \tag{1.27}$$

Seja, também,

$$r = \frac{r_2 - r_1}{||r_2 - r_1||} \tag{1.28}$$

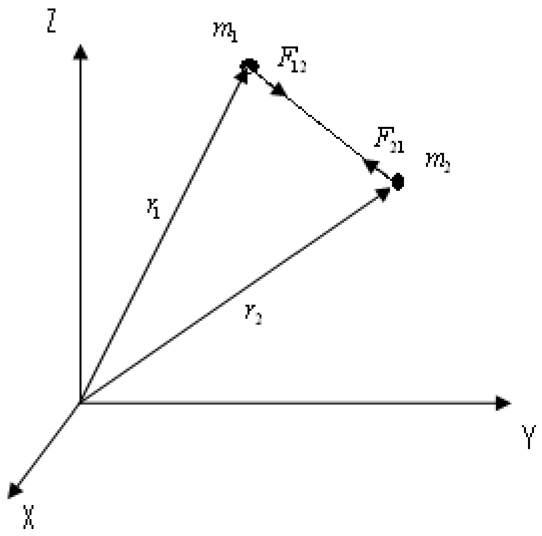
um vetor unitário. Este vetor tem a direção da reta que passa por m_1 e m_2 e sentido de m_1 para m_2. Denote por F_{21} (F_{12}) a força gravitacional que o corpo m_1(m_2) exerce sobre o corpo m_2 (m_1). Então,

$$F_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{||r_1 - r_2||^2} r = -G\frac{m_1 m_2}{||r_1 - r_2||^3}(r_2 - r_1) \tag{1.29}$$

e, como pela 3ª lei de Newton, $F_{21} = -F_{12}$, obtemos

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{||r_1 - r_2||^2} r = G\frac{m_1 m_2}{||r_1 - r_2||^3}(r_2 - r_1) \tag{1.30}$$

onde G é a constante universal da gravitação, cujo valor é $6,67.10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2}$.
As unidades são o newton *N* (unidade de força), o metro *m* e a massa em *kg*. Por definição, *1N* é a força que, quando aplicada a um corpo de massa *1kg*, faz com que este se desloque com aceleração igual a $1\frac{m}{s^2}$.



Considere um sistema de *N* corpos de massas $m_1, \ldots, m_N$ que exercem entre si a força gravitacional. Será suposto daqui por diante que esta é o único tipo de força que cada corpo exerce sobre os demais. Uma massa m_k do sistema exerce sobre a j *-ésima* massa m_j a força

$$F_{jk} = G\frac{m_j m_k}{r_{kj}^{\;3}}(r_k - r_j) \tag{1.31}$$

na qual

$$r_{kj} := || r_k - r_j || = \sqrt{(x_{k1} - x_{j1})^2 + (x_{k2} - x_{j2})^2 + (x_{k3} - x_{j3})^2} \tag{1.32}$$

Portanto, a força gravitacional resultante das *N-1* massas sobre a massa m_j, é

$$F_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} G\frac{m_j m_k}{r_{kj}^{\;3}}(r_k - r_j) \tag{1.33}$$

Capítulo 2

O problema de N corpos

Considere $N \geq 2$ corpos com massas $m_1, m_2, ..., m_N$ cujas posições em $\mathbb{R}^3$ são dadas pelas funções do tempo $r_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $j=1, 2, ..., N$:

$$r_j(t) = x_{j1}(t), x_{j2}(t), x_{j3}(t) \tag{2.1}$$

Uma hipótese matemática básica é a de que estas funções são de classe $C^2(\mathbb{R})$, pelo menos. Suponhamos que a única força de interação entre os corpos é a força da gravitação.Vimos, no capítulo anterior, que, de acordo com a Lei da Gravitação de Newton, a força gravitacional resultante das *N-1* massas sobre a massa m_j é

$$F_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} G \frac{m_j m_k}{r_{kj}^3} (r_k - r_j) \tag{2.2}$$

Aplicando a 2ª Lei de Newton, obtemos a equação de movimento do *j-ésimo* corpo:

$$m_j \ddot{r}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} G \frac{m_j m_k}{r_{kj}^3} (r_k - r_j) \text{ , } j= 1,2,...,N. \text{ ,} \tag{2.3}$$

onde

$$\ddot{r}_j := \frac{d^2 r_j}{dt^2} \tag{2.4}$$

A solução desta equação, se existir, fornece a trajetória ou órbita $r_j(t)$ da massa m_j. Note, porém, que o membro direito da equação (2.3) depende das demais funções r_k, $k \neq j$, que descrevem as órbitas das demais massas. Portanto, não é possível resolver a equação (2.3) sem resolver as demais equações associadas aos outros corpos. Como, para cada j, r_j tem três componentes, o sistema de equações é formado por $3N$ equações diferenciais ordinárias de 2^a ordem não lineares.

O problema de *N* corpos é um dos problemas mais importantes da Mecânica Celeste e consiste em estabelecer a existência local e / ou global e unicidade da solução do sistema formado pelas *3N* equações impondo-se condições iniciais $r_j(t_0)$ e $v_j(t_0)$,
e

$$r_j(t) \neq r_k(t),\ \forall\ t \in \mathbb{R}, \text{ e } k \neq j,\ \forall\ k, j = 1, 2, \ldots, N, \qquad (2.5)$$

bem como a análise das órbitas dos corpos, suas singularidades e seu comportamento assintótico quando $t \to \infty$. A condição (2.5) é necessária para que o membro direito das equações do sistema esteja bem definido.
Nosso objetivo principal neste capítulo será o de demonstrar a existência e unicidade de solução do problema de *N* corpos.

Existencia e unicidade de solução local

Definição 2.1. *Chama-se conjunto singular ao conjunto* $\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \Delta_{ij}$ *, sendo*

$$\Delta_{ij} := \left\{ x = \left(r_1, r_2, \ldots, r_N \right) \in \mathbb{R}^{3N} \mid r_i = r_j \right\} \qquad (2.6)$$

A imposição da condição (2.5) implica que, em cada instante t, as posições dos *N* corpos está em $\mathbb{R}^{3N}$ - Δ.

Definição 2.2. *Chama-se espaço de configuração do sistema de N corpos, ao espaço*

$$\mathbb{R}^{3N} - \Delta. \qquad (2.7)$$

A solução do sistema de *N*- corpos será procurada no espaço de configurações (2.7).

Definição 2.3. *Seja U*: $\mathbb{R}^{3N}-\Delta \to (0,+\infty)$ *, a função*

$$U(r_1,\ldots,r_N) = \sum_{1\le j<k\le N} \frac{Gm_j m_k}{\|r_k - r_j\|} \tag{2.8}$$

A somatória é sobre os índices j e k com *j, k =1,2, ..., N, tais que $j<k$.* A *função U é chamada de* ***função potencial gravitacional*** *do sistema de N corpos.*

Exemplo. Nos casos *N=2, N=3* e *N=4,* temos

$$U(r_1,r_2) = G\frac{m_1m_2}{\|r_1-r_2\|}$$

$$U(r_1,r_2,r_3) = G\frac{m_1m_2}{\|r_1-r_2\|} + G\frac{m_1m_3}{\|r_1-r_3\|} + G\frac{m_2m_3}{\|r_2-r_3\|}$$

$$U(r_1,r_2,r_3,r_4) = G\frac{m_1m_2}{\|r_1-r_2\|} + G\frac{m_1m_3}{\|r_1-r_3\|} + G\frac{m_1m_4}{\|r_1-r_4\|} +$$

$$+ G\frac{m_2m_3}{\|r_2-r_3\|} + G\frac{m_2m_4}{\|r_2-r_4\|} + G\frac{m_3m_4}{\|r_3-r_4\|}$$

Lema 2.1. *A função $U \in C^\infty(\mathbb{R}^{3N}-\Delta)$.*

Demonstração: Segue diretamente da definição.

Lema 2.2. *Defina*

$$\nabla_{r_j} U = \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_{j1}} \, , \, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_{j2}} , \, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_{j3}} \right) \tag{2.9}$$

Então,

$$\nabla_{r_j} U = \sum_{k \neq j} \frac{G m_k m_j (r_k - r_j)}{\| r_k - r_j \|^3} \tag{2.10}$$

onde a somatória é sobre todos os $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *distintos de j.*

Demonstração: Pode ser observado nas expressões para *U* nos casos *N=2,3* e *4*, do exemplo anterior, que somente as parcelas onde consta o vetor r_j são relevantes para o cálculo de $\dfrac{\partial U}{\partial x_{ji}}$ de modo que podemos expressar esta derivada na forma

$$\frac{\partial U}{\partial x_{ji}} = \frac{\partial}{\partial x_{ji}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \frac{G m_k m_j}{\| r_k - r_j \|}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x_{ji}} \frac{1}{\| r_k - r_j \|} = \frac{\partial}{\partial x_{ji}} \left(\sum_{i=1}^{3} (x_{ki} - x_{ji})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(x_{ki} - x_{ji})}{\| r_k - r_j \|^3}$$

obtemos

$$\nabla_{r_j} U = \sum_{k \neq j} G m_k m_j \left(\frac{(x_{k1} - x_{j1})}{\| r_k - r_j \|^3} , \frac{(x_{k2} - x_{j2})}{\| r_k - r_j \|^3} , \frac{(x_{k3} - x_{j3})}{\| r_k - r_j \|^3} \right)$$

$$= \sum_{k \neq j} G m_k m_j \, \frac{r_k - r_j}{\| r_k - r_j \|^3}$$

■

Resulta do Lema 2.2 que podemos expressar a equação (2.3) como

$$m_j \ddot{r}_j = \nabla_{r_j} U \tag{2.11}$$

Em termos das velocidades $v_j(t) = \dot{r}_j(t)$, temos que $\ddot{r}_j = \dot{v}_j$
e

$$\dot{v}_j = \frac{1}{m_j} \nabla_{r_j} U \tag{2.12}$$

Em seguida, defina as funções vetoriais

$$y(t) = \left(r_1(t), \ldots, r_N(t), v_1(t), \ldots, v_N(t) \right) \tag{2.13}$$

$$f\left(y \right) = \left(v_1, \ldots, v_N, \frac{1}{m_1} \nabla_{r_1} U, \ldots, \frac{1}{m_N} \nabla_{r_N} U \right) \tag{2.14}$$

e

$$y(t_0) = \left(r_1(t_0), \ldots, r_N(t_0), v_1(t_0), \ldots, v_N(t_0) \right) \equiv y_0 \in (\mathbb{R}^{3N} - \Delta) \times \mathbb{R}^{3N} \tag{2.15}$$

De forma mais compacta, o problema de N corpos pode, então, ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{y} = f\left(y \right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.16}$$

onde f é a (2.14) função continuamente diferenciável de y.

No que segue estudamos a existência e unicidade de solução do problema (2.16). A ferramenta básica neste estudo é o Teorema de Cauchy - Picard enunciado a seguir. Antes, porém, definimos o que é uma função de Lipschitz.

Definição 2.4. *Uma função f:* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω *aberto, é chamada função de Lipschitz em* Ω *se existe uma constante K tal que, para todo x, y* $\in \Omega$,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \tag{2.17}$$

A função é localmente de Lipschitz em Ω *se, para todo* $x_0 \in \Omega$, *a restrição de f à bola* $B_b(x_0)$ *de centro em* x_0 *e raio b, satisfaz a condição de Lipschitz* (2.17).

Lema 2.3. *Toda função continuamente diferenciável é localmente Lipschitz.*

Teorema 2.1. *(Cauchy-Picard). Seja f:* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω *aberto. Seja* $y_0 \in \Omega$ *e suponha que f é uma função contínua e de Lipschitz na bola* $B_b(y_0)$. *Suponha, também, que a função f é limitada em* Ω, *ou seja, existe* $M > 0$ *tal que*

$$\| f(y) \| \leq M, \ \forall y \in \Omega \tag{2.18}$$

Então, a equação

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad y \in \Omega \tag{2.19}$$

com a condição

$$y(t_0) = y_0 \tag{2.20}$$

tem uma única solução no intervalo $I_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right\}, \tag{2.21}$$

onde *K* é uma constante dada por (2.17).

Observação: Como a solução existe numa vizinhança I_δ de t_0, a solução é dita ser uma "solução local" ou "localmente definida".

Com base nesses resultados provaremos o seguinte:

Teorema 2.2. *O problema (2.16) admite uma única solução local.*

Demonstração : A afirmação segue da verificação de que as hipóteses do teorema de Cauchy – Picard são satisfeitas pelo problema (2.16). Como *f* é continuamente diferenciável, pelo Lema 2.3, *f* é localmente Lipschitz. Basta então provar que *f* é limitada.

Seja

$$r_{\min}(t_0) = Min \;\; r_{jk}(t_0), k, j = 1, ..., N, k \neq j \tag{2.22}$$

e $D > 0$ uma constante tal que

$$D < 2r_{mim}(t_0) \tag{2.23}$$

Considere a bola aberta $B_b(y_0)$ de raio $b = \dfrac{D}{8}$ e centro y_0. Seja $y \in B_b(y_0)$ tal que

$$\|y(t) - y_0\| < \text{D/8}. \tag{2.24}$$

Defina $x(t) = \; r_1(t), ..., r_N(t)$ e $v(t) = \; v_1(t), ..., v_N(t)$ sendo $x(t_0) = x_0$ e $v(t_0) = v_0$. Como

$$\|y - y_0\| = \sqrt{\|x - x_0\|^2 + \|v - v_0\|^2}$$

segue que

$$\|x - x_0\| \leq \|y - y_0\| < \frac{D}{8} \tag{2.25}$$

e

$$\|v - v_0\| \leq \|y - y_0\| < \frac{D}{8} \tag{2.26}$$

Temos, também, que

$$\|x - x_0\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \|r_j - r_j(t_0)\|^2}$$

e, portanto, para $j = 1, 2, ..., N$,

$$\left\| r_j(t) - r_j(t_0) \right\| \le \left\| x - x_0 \right\| < \frac{D}{8} \tag{2.27}$$

Além do mais,

$$\frac{D}{2} \le r_{\min}(t_0) \le \left\| r_j(t_0) - r_k(t_0) \right\| = r_{jk}(t_0) \tag{2.28}$$

e

$$r_j(t_0) - r_k(t_0) = r_j(t_0) - r_j(t) + r_j(t) - r_k(t) + r_k(t) - r_k(t_0) \tag{2.29}$$

Portanto, pela desigualdade triangular,

$$\left\| r_j(t_0) - r_k(t_0) \right\| \le \left\| r_j(t_0) - r_k(t) \right\| + \left\| r_j(t) - r_k(t) \right\| + \left\| r_k(t) - r_k(t_0) \right\|$$

implicando, no resultado

$$\left\| r_j(t) - r_k(t) \right\| \ge \frac{D}{2} - \left\| r_j(t_0) - r_j(t) \right\| - \left\| r_k(t) - r_k(t_0) \right\|$$

$$\ge \frac{D}{2} - \frac{D}{8} - \frac{D}{8} = \frac{D}{4}$$

ou seja,

$$\left\| r_j(t) - r_k(t) \right\| \ge \frac{D}{4} \tag{2.30}$$

Portanto,

$$r_{\min}(t) := \underset{j \ne k}{M\text{in}}\, r_{jk}(t) \ge \frac{D}{4} \tag{2.31}$$

ou ainda,

$$\frac{1}{r_{\min}(t)} \le \frac{4}{D} \tag{2.32}$$

Por outro lado, para $k = 1, 2, ..., N$,

$$\frac{1}{m_k} \nabla_{r_k} U = \sum_{j \ne k} G m_j \frac{(r_j - r_k)}{\left\| r_j - r_k \right\|^3}$$

de sorte que,

$$\frac{1}{m_k}\left\|\nabla_{r_k} U\right\| \leq \sum_{j\neq k} G\frac{m_j}{r_{jk}{}^2}$$

Usando (2.32), resulta

$$\frac{1}{m_k}\left\|\nabla_{r_k} U\right\| \leq \sum_{j\neq k} G\frac{m_j}{r_{\min}{}^2} \leq G\frac{16}{D^2}\sum_{j\neq k} m_j \tag{2.33}$$

A energia total do sistema no instante t_0 está dada por

$$E = T_{t_0} - U_{t_0} \tag{2.34}$$

onde

$$T_{t_0} = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{j}=1}^{N} m_j \|\mathrm{v_j}(\mathrm{t_0})\|^2 \geq \frac{1}{2} m_k \|\mathrm{v_k}(\mathrm{t_0})\|^2 \tag{2.35}$$

é a energia cinética total do sistema no instante t_0 e U_{t_0} é a energia potencial neste instante. Esta satisfaz

$$U_{t_0} = \sum_{1\leq j<k\leq N} G\frac{m_j m_k}{r_{jk}(t_0)} \leq \frac{1}{r_{\min}(t_0)}\sum_{1\leq j<k\leq N} G m_j m_k \tag{2.36}$$

Usando (2.28) obtemos

$$U_{t_0} \leq \frac{2G}{D}\sum m_j m_k =: A \tag{2.37}$$

onde A é uma constante que depende apenas de D, G e das massas. Reunindo as estimativas (2.35) e (2.37) segue para as velocidades que

$$\frac{1}{2} m_k \| v_k(t_0)\|^2 \leq T_{t_0} = E + U_{t_0} \leq A + E$$

ou ainda,

$$\| v_k(t_0)\| \leq \sqrt{\frac{2}{m_k}(A+E)} \tag{2.38}$$

Por outro lado, como

$$v(t_0) = \left(v_1(t_0),\ldots,v_N(t_0)\right)$$

temos, usando (2.38),

$$\| v(t_0) \|^2 = \sum_{k=1}^{N} \|v_k(t_0)\|^2 \leq 2(A+E) \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{m_k}$$

e

$$\|v(t_0)\| \leq C\sqrt{A+E} \qquad (2.39)$$

onde C é uma constante que depende das massas. Pela desigualdade triangular, e (2.6) e (2.39), segue:

$$\| v(t) \| = \| v(t) - v(t_0) + v(t_0) \| \leq \| v(t) - v(t_0) \| + \|v(t_0)\|$$

$$\leq \frac{D}{8} + C\sqrt{A+E} =: \alpha \qquad (2.40)$$

Com base nos resultados anteriores, podemos estimar $f(y)$ pois

$$\| f(y) \|^2 = \sum_{k=1}^{N} \|v_k(t)\|^2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{m_k} \| \nabla_{r_k} U \|^2$$

$$\leq \alpha^2 + N \frac{16G}{D^2} \sum_{j \neq k} m_j \equiv M^2$$

ou seja,

$$\| f(y) \| \leq M \qquad (2.41)$$

Portanto, *f* é uma função limitada.
Podemos aplicar, agora, o teorema de Cauchy-Picard segundo o qual existe uma única solução do problema de *N* corpos numa vizinhança do instante t_0.

Capítulo 3

O Problema de 2 – Corpos

De acordo com o Teorema de existência e unicidade de solução provado no capítulo anterior, o problema de *N* corpos tem uma única solução definida numa vizinhança do instante inicial t_0. Soluções explicitas e valendo para todo $t \geq t_0$ podem ser obtidas, porém, apenas em casos muito especiais. Em especial, no caso do problema de *2*-corpos, esta solução pode ser calculada explicitamente para todo $t \geq t_0$. A solução foi obtida por Isaac Newton em 1687. Neste capítulo, calculamos esta solução.

Consideremos dois corpos de massas *m* e *M*. Seja $r = \; x(t), y(t), z(t)$ o vetor posição de *m* e $r_M(t) \equiv 0, \forall t \in \mathbb{R}$, o vetor posição do corpo *M*, suposto, portanto, em repouso na origem do sistema de coordenadas.

Seja u_r o vetor unitário radial com mesma direção e sentido do vetor r. Suponha que a força gravitacional de *M* é a única atuando sobre *m*. Desse modo, o vetor $r(t\ )$ satisfaz a equação

$$m\ddot{r} = -G\frac{mMu_r}{\|r\|^2} \tag{3.1}$$

Vamos impor as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} r(t_0) = r_0 \\ v(t_0) = \dot{r}(t_0) = v_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $r_0 \neq 0$ e $v_0 \neq 0$ e $r_0 \times v_0 \neq 0$.

A força gravitacional,

$$F = -G\frac{mMu_r}{\|r\|^2} \ , \qquad (3.3)$$

e o vetor r tem a mesma direção. Portanto,

$$r \times F = 0 \, , \qquad (3.4)$$

e

$$m\left(r \times \ddot{r} \right) = 0$$

Como

$$\frac{d}{dt}\left(r \times \dot{r} \right) = r \times \ddot{r}$$

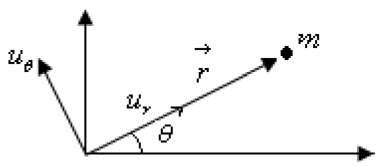
resulta que

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(mr \times \dot{r} \right) = 0 \, , \qquad (3.5)$$

ou seja, o momento angular $L(t)$ é uma constante do movimento. Esta constante é diferente de zero para todo t pois

$$L(t) = L(t_0) = mr(t_0) \times v(t_0) = mr_0 \times v_0 \neq 0 \qquad (3.6)$$

Como L é ortogonal a $r(t)$ e $v(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, isto significa que a trajetória, ou órbita, do corpo m está contida no plano que contém os vetores r e v.Vamos, no que segue, estudar o movimento do corpo m neste plano:



Considere os vetores

$$u_r = (\cos\theta, sen\theta) \, , \quad u_\theta = (-sen\theta, \cos\theta) \ , \qquad (3.7)$$

ambos unitários e ortogonais. Temos que

$$\frac{d\,u_r}{d\theta} = u_\theta \tag{3.8}$$

e

$$\frac{d\,u_\theta}{d\theta} = -u_r \tag{3.9}$$

Além disso,

$$\frac{d\,u_r}{dt} = \frac{d\,u_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,u_\theta \tag{3.10}$$

e

$$\frac{d\,u_\theta}{dt} = \frac{d\,u_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,u_r \tag{3.11}$$

Lembrando que $r = Ru_r$, onde $R = \| r \|$, obtemos

$$\dot{r} = \dot{R}\,u_r + R\frac{d\,u_r}{dt} = \dot{R}\,u_r + R\,\dot{\theta}\,u_\theta \tag{3.12}$$

e, por conseguinte,

$$\ddot{r} = \ddot{R}\,u_r + \dot{R}\,\dot{\theta}\,u_\theta + \dot{R}\,\dot{\theta}\,u_\theta + R\,\ddot{\theta}\,u_\theta - R\left(\dot{\theta}\right)^2 u_r$$

$$= \left[\ddot{R} - R\left(\dot{\theta}\right)^2\right]u_r + \left[2\,\dot{R}\,\dot{\theta} + R\,\ddot{\theta}\right]u_\theta \tag{3.13}$$

Mas

$$m\,\ddot{r} = F\ , \tag{3.14}$$

e, portanto, a direção de $\ddot{r}$ é a mesma de F que, por sua vez, é a mesma de r. Logo, $\ddot{r}$ tem componente nula na direção de u_θ, ou seja,

$$2\,\dot{R}\,\dot{\theta} + R\,\ddot{\theta} = 0 \tag{3.15}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(R^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0 \tag{3.16}$$

Portanto, como $R \neq 0$,

$$R^2\frac{d\theta}{dt}=k_1 \tag{3.17}$$

onde k_1 é uma constante. Observe que sendo $\frac{d\theta}{dt}$ a velocidade angular do corpo, a relação (3.17) implica que esta aumenta quando R diminui, ou seja, quando o corpo m se aproxima da massa M.

A constante k_1 pode ser determinada como segue. Temos que:

$$\begin{aligned} L = m\,r\times\dot{r} &= mR\,u_r\times\frac{d}{dt}(R\,u_r) \\ &= mR\,u_r\times\left(\dot{R}\,u_r + R\frac{du_r}{dt}\right) \\ &= mR\,\dot{R}\,u_r\times u_r + mR^2\,\dot{\theta}\,u_r\times u_\theta \\ &= mR^2\,\dot{\theta}\,u_r\times u_\theta \end{aligned} \tag{3.18}$$

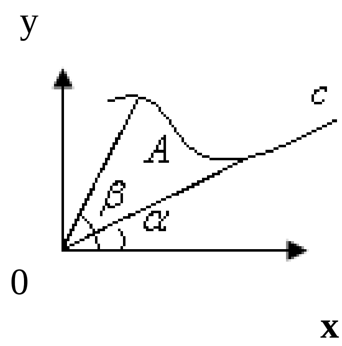
pois $u_r\times u_r = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|L\| &= mR^2\,\dot{\theta}\,\|u_r\times u_\theta\| \\ &= mR^2\,\dot{\theta}\,\|u_r\|\,\|u_\theta\|\,sen\frac{\pi}{2} \\ &= mR^2\,\dot{\theta} \end{aligned}$$

Portanto,

$$k_1 = R^2\,\dot{\theta} = \frac{\|L\|}{m} = \|r_0\times v_0\| \tag{3.19}$$

Da ref.[4], sabemos que a área A subentendida por uma curva c plana e ângulo central $\beta-\alpha$ (ver figura) é tal que



$$dA = \frac{1}{2} R^2 d\theta \qquad (3.20)$$

Mas,

$$dA = \frac{1}{2} R^2 \frac{d\theta}{dt} dt$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\|L\|}{m} dt \qquad (3.21)$$

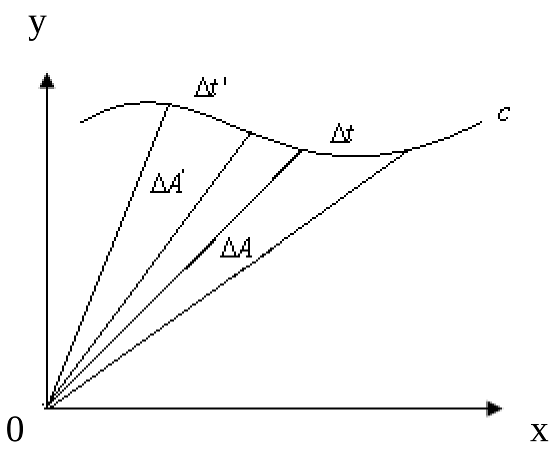
Portanto, a órbita de m é tal que a área varrida no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é

$$\int_{t_1}^{t_2} dA = \frac{1}{2} \frac{\|L\|}{m} \int_{t_1}^{t_2} dt$$

isto é,

$$\Delta A = A(t_2) - A(t_1) = \frac{\|L\|}{2m}(t_2 - t_1) = \frac{\|L\|}{2m} \Delta t \qquad (3.22)$$

Este último resultado expressa a ***Lei das Áreas*** de Kepler segundo a qual em intervalos de tempos iguais o corpo m varre áreas iguais. De fato, se $\Delta t = \Delta t^{'}$, então $\Delta A = \Delta A^{'}$.



Pelas relações (3.13), (3.14) e (3.15) segue que

$$\ddot{r} = \left(\ddot{R} - R\left(\dot{\theta}\right)^2 \right) u_r = -G\frac{M}{R^2}u_r \tag{3.23}$$

ou seja,

$$\ddot{R} - R\left(\dot{\theta}\right)^2 = -G\frac{M}{R^2} \tag{3.24}$$

Pela relação (3.17), segue

$$\ddot{R} - \frac{k_1^2}{R^3} = -G\frac{M}{R^2}, \tag{3.25}$$

ou ainda,

$$-\frac{R^2}{k_1^2}\ddot{R} + \frac{1}{R} = G\frac{M}{k_1^2} \tag{3.26}$$

Defina

$$u(t) := \frac{1}{R\ \ \theta(t)} \tag{3.27}$$

de modo que

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{d\theta}\frac{k_1}{R^2} \tag{3.28}$$

onde usamos (3.17). Também, pela relação (3.27),

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dR}\frac{dR}{dt} = -\frac{1}{R^2}\frac{dR}{dt} \tag{3.29}$$

De (3.28) e (3.29), obtemos

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{k_1}\frac{dR}{dt} \tag{3.30}$$

Ademais,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt} \tag{3.31}$$

Usando (3.30), o lado esquerdo de (3.31) é igual a

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{k_1}\frac{dR}{dt}\right) = -\frac{1}{k_1}\frac{d^2R}{dt^2} \tag{3.32}$$

de forma que

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{k_1}\frac{d^2R}{dt^2} \tag{3.33}$$

Usando, agora, que $\dot{\theta} = \frac{k_1}{R^2}$, obtemos

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{R^2}{k_1^2}\frac{d^2R}{dt^2} \tag{3.34}$$

Substituindo este último resultado em (3.26), deduz-se a equação seguinte para u:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{k_1^2} \tag{3.35}$$

A solução geral desta equação é a soma da solução geral da equação homogênea associada, que é da forma

$$u_h \;\; \theta(t) \;\; = k\cos \;\; \theta(t) - \theta_0 \tag{3.36}$$

onde k e θ_0 são constantes arbitrárias, com uma solução particular u_p da equação não homogênea. Por exemplo,

$$u_p = \frac{GM}{k_1^2} \tag{3.37}$$

A solução geral é, portanto,

$$u\ \theta(t)\ = k\cos\ \theta(t) - \theta_0\ \ + \frac{GM}{k_1^2} \tag{3.38}$$

onde as constantes k e θ_0 devem ser fixadas mediante aplicação das condições iniciais. Tome $\theta_0 = \theta(t_0) = 0$ e $k = u(\theta_0) = \|r_0\|^{-1}$. Usando (3.27), resulta

$$R(\theta) = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon\cos(\theta)} \tag{3.39}$$

onde

$$\alpha = \frac{L^2}{GMm^2} = \frac{\|r_0 \times v_0\|^2}{GM} \tag{3.40}$$

e

$$\varepsilon = \frac{L^2}{\|r_0\| GMm^2} = \frac{\|r_0 \times v_0\|^2}{\|r_0\| GM} \tag{3.41}$$

Da Geometria Analítica, sabemos que a equação (3.39) representa uma cônica em coordenadas polares sendo ε a sua excentricidade. Da geometria analítica também sabemos que os valores de ε determinam o tipo de cônica. A cônica é uma elipse se $\varepsilon < 1$; uma parábola, se $\varepsilon = 1$; e uma hipérbole, se $\varepsilon > 1$. O valor de ε e, portanto, a natureza da cônica, dependem das condições iniciais r_0 e v_0 e do valor de *M* e de *G*.

Capítulo 4

Leis de conservação para o problema de N - corpos

Neste capítulo, obtemos várias propriedades da solução do problema de N corpos. Em especial, são provadas as leis de conservação. Segundo estas leis, a energia, o momento linear e angular totais do sistema são constantes ao longo da solução. Também derivamos a identidade de Lagrange – Jacobi e a desigualdade de Sundman, importantes para o próximo capítulo.

Seja

$$y(t) = \ r_1(t),...,r_N(t),v_1(t),...,v_N(t)$$

a solução do problema de N corpos satisfazendo a condição inicial $y(t_0) = y_0$.

Definição 4.1. *Seja* $F\ \ y(t)$ *uma função real diferenciável satisfazendo*

$$\frac{dF}{dt} = 0\,, \tag{4.1}$$

ou seja,

$$F\ \ y(t)\ = C\,, \tag{4.2}$$

onde $C = F\ \ y(t_0)$ *. Portanto,* F *é constante ao longo da solução do problema de N corpos. Por esta razão, a equação (4.1) ou (4.2) é chamada de "lei de conservação da função* F *".*

Teorema 4.1. *(Lei de conservação da energia) Ao longo da solução* y, *a função energia mecânica total do sistema de N corpos* E *é constante:*

$$\frac{dE}{dt} = 0 \qquad (4.3)$$

Demonstração: Temos que $E = T - U$ onde T é a energia cinética total e U a energia potencial gravitacional do sistema.
Sendo,

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j\, v_j \cdot v_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j\, \dot{r}_j . \dot{r}_j$$

segue que

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j\, \ddot{r}_j \cdot \dot{r}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j\, \dot{r}_j \cdot \dot{r}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j\, \dot{r}_j \cdot \ddot{r}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \dot{r}_j \cdot (m_j\, \ddot{r}_j) = \sum_{j=1}^{N} \dot{r}_j \cdot \nabla_{r_j} U = \frac{dU}{dt},$$

ou seja,

$$\frac{dT}{dt} - \frac{dU}{dt} = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt} E = 0$$

Portanto, $E(y(t))$ é constante ao longo da solução $y(t)$ ■

Teorema 4.2. *(Lei de conservação do momento linear) Ao longo da solução* y, *o momento linear total é constante:*

$$\frac{d\,P}{dt} = 0. \qquad (4.4)$$

Demonstração: Sabemos que a função momento linear total do sistema se escreve como sendo:

$$P = \sum_{j=1}^{N} m_j\, v_j\ ,$$

mas também,

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{r}_j = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} G \frac{m_j m_k}{r_{kj}^{\ 3}} (r_k - r_j)\,, \tag{4.5}$$

onde $r_{kj} = \| r_k - r_j \|$. Cada termo no segundo membro direito de (4.5) é cancelado por um outro com sinal oposto. Resulta

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{r}_j = 0 \tag{4.6}$$

Portanto,

$$0 = \sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{r}_j = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{N} m_j v_j = \frac{d}{dt} P\,. \qquad \blacksquare$$

Corolário 4.1. *Seja M a massa total do sistema e*

$$R_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j r_j \tag{4.7}$$

o vetor posição do centro de massa. Então,

$$\ddot{R}_{CM} = 0\,, \tag{4.8}$$

ou seja,

$$R_{CM}(t) = V_{CM}\, t + R_0\,, \tag{4.9}$$

onde $V_{CM} = \dfrac{P}{M}$, $R_0 = R_{CM}(0)$, P *o momento linear total do sistema.*

Demonstração: Derivando (4.7) com respeito a t, obtemos

$$\dot{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{r}_j = \frac{P}{M}$$

e

$$\ddot{R}_{CM} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} P = 0$$

pelo Teorema 4.2. Logo,

$$R_{CM} = a_1 t + a_2,$$

e $V_{CM} = \dot{R}_{CM} = a_1 = \dfrac{P}{M}$ e $a_2 = R_{CM}(0) = R_0$.

Portanto, o centro de massa tem movimento retilíneo uniforme. ■

Teorema 4.3. *(lei de conservação do momento angular) Ao longo da solução* y *a função momento angular do sistema é constante, ou seja,*

$$\frac{d}{dt}L = 0. \tag{4.10}$$

Demonstração:
Sabemos que,

$$L = \sum_{j=1}^{N} m_j\, r_j \times \dot{r}_j$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}L = \sum_{j=1}^{N} m_j\, \dot{r}_j \times \dot{r}_j + \sum_{j=1}^{N} m_j\, r_j \times \ddot{r}_j = \sum_{j=1}^{N} r_j \times (m_j\, \ddot{r}_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} r_j \times \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{N} \frac{Gm_j m_k}{r_{kj}^{\;3}}(r_k - r_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{N} \frac{Gm_j m_k}{r_{kj}^{\;3}}\, r_j \times r_k = 0\,,$$

pois $r_j \times r_k = -r_k \times r_j$.

Portanto L é constante ao longo da solução y. ■

Definição 4.2. *Uma função* $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω *conjunto aberto, é homogênea de grau k se* $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}^n$, com $k\,x \in \Omega$.

Teorema 4.4. *(Euler) Se f é uma função homogênea de grau* k *em* Ω, *então:*

$$x \cdot \nabla f(x) = kf(x). \tag{4.11}$$

Lema 4.1. *A função potencial gravitacional é uma função homogênea de grau -1 e*

$$\sum r_j . \nabla_{r_j} U = -U \tag{4.12}$$

Demonstração: Pela definição 2.3 da energia potencial U, segue que U é homogênea de grau $k = -1$. Aplicando o Teorema de Euler, o resultado segue.

Lema 4.2. *(Identidade de Lagrange - Jacobi)*
Ao longo da solução do problema de N corpos, a função momento de inércia

$$I = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j r_j^{\,2}, \tag{4.13}$$

satisfaz

$$\ddot{I} = 2T - U = T + E = U + 2E. \tag{4.14}$$

Demonstração: Temos que

$$\dot{I} = \sum_{j=1}^{N} m_j \, r_j \cdot v_j$$

Logo, ao longo da solução,

$$\ddot{I} = \sum_{j=1}^{N} m_j v_j^{\,2} + \sum_{j=1}^{N} m_j \, r_j \cdot \ddot{r}_j$$

$$= 2T + \sum_{j=1}^{N} r_j \cdot \nabla_{r_j} U(x).$$

Mas como a função potencial U é homogênea de grau *-1* e usando o Teorema 4.4 , obtemos que $\ddot{I} = 2T - U$. ■

Lema 4.3. *(Desigualdade de Sundman)*

Seja $L = \sum_{j=1}^{N} m_j\, r_j \times v_j$ *o momento angular do sistema, então ao longo da solução do problema de N corpos temos que*

$$\|L\|^2 \leq 4I(\ddot{I} - E)\,, \tag{4.15}$$

Demonstração: Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz da álgebra linear, temos que:

$$\begin{aligned}\|L\| &\leq \sum_{j=1}^{N} m_j \| r_j \times v_j \| \leq \sum_{j=1}^{N} m_j \| r_j \| \| v_j \| = \sum_{j=1}^{N} (\sqrt{m_j} \| r_j \|)(\sqrt{m_j} \| v_j \|) \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{N} m_j r_j^{\,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{N} m_j r_j^{\,2}} = \sqrt{2I}\sqrt{2T} = \sqrt{4IT}\end{aligned}$$

Logo, o resultado segue do Lema 4.1 na forma $T = \ddot{I} - E$. ■

Capítulo 5

Singularidades

Seja $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω aberto, nas condições do Teorema de Cauchy – Picard do capítulo 2. Segundo este teorema o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

$$y(t_0) = y$$

tem solução única no intervalo $I_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ para δ suficiente pequeno.Um problema básico consiste em saber se a solução pode ser extendida para um intervalo de tempo maior ou se há um intervalo máximo de existência.

Definição 5.1. *Uma solução y definida num intervalo aberto J, é dita maximal e J é chamado intervalo maximal se, havendo outra solução w do mesmo problema de valor inicial, definida no intervalo I, então $I \subseteq J$, e, para todo $t \in I$, tem $y(t) = w(t)$.*

Um Teorema de existência afirma que se $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, é localmente Lipschitz no aberto Ω, então o PVI tem única solução maximal.

Quando o intervalo maximal não é toda a reta, por exemplo, $J = (-\infty, t^*)$ com $t^* < +\infty$, a solução não pode ser prolongada além deste intervalo e diz-se que a solução tem uma singularidade em $t = t^*$. Um **exemplo** simples é o seguinte: O problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 1$$

tem solução

$$y(t) = \frac{1}{1-t}$$

Não é possível prolongar esta solução para toda a reta $\mathbb{R}$. Seu intervalo maximal de existencia é o intervalo $(-\infty, 1)$. Em $t = 1$ a solução tem uma singularidade.

Um problema matemático importante consiste em saber se o problema de N – corpos tem ou não singularidades.

O problema de *2* corpos não tem singularidades. Sua solução, calculada explicitamente, existe para todo $t \in \mathbb{R}$. Em 1895, o matemático françês Paul Painlevé (1863-1933) provou que no caso do problema de *3* corpos existem singularidades e estas são do tipo colisões (definidas adiante). Painlevé também conjecturou que para $N \geq 4$, singularidades não colisionais também são possíveis. Sua conjectura foi provada apenas em 1992 por Z. Xia. Neste capítulo trataremos apenas das singularidades do tipo colisão.

Colisões

Definição 5.2. *Dizemos que ocorre uma colisão no instante t^* se existem os seguintes limites*

$$\lim_{t \to t^*} r_j(t), \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

e

$$\lim_{t \to t^*} r_j(t) = \lim_{t \to t^*} r_k(t)$$

para pelo menos um par j, k com $j \neq k$. Dito de outra forma, uma colisão ocorre no instante t^* se

$$\lim_{t \to t^*} x(t) = x^* \in \Delta, \tag{5.3}$$

onde $x(t) = r_1(t), \ldots, r_N(t)$.

Lema 5.1. *Seja M a massa total do sistema de N corpos, isto é,*

$$M = \sum_{j=1}^{N} m_j \tag{5.4}$$

com centro de massa em repouso na origem. Então, o momento de Inércia I *do sistema pode ser expresso em termos das distâncias* r_{jk} *como:*

$$I = \frac{1}{2M} \sum_{j<k}^{N} m_j m_k r_{jk}^{\ 2}, \tag{5.5}$$

onde $r_{jk} = || r_j - r_k ||$*, e a somatória é sobre todo* $j,k=1, 2,..., N$ *tal que* $j < k$.

Demonstração: Note que,

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \| r_j - r_k \|^2 = \sum_{j=1}^{N} m_j (r_j - r_k) \cdot (r_j - r_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j r_j^{\ 2} + \sum_{j=1}^{N} m_j r_k^{\ 2} - 2 r_k \cdot \sum_{j=1}^{N} m_j\, r_j\ . \tag{5.6}$$

Por hipótese, o centro de massa do sistema está em repouso na origem, daí

$$\sum_{j=1}^{N} m_j r_j = 0 \tag{5.7}$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \| r_j - r_k \|^2 = \sum_{j=1}^{N} m_j r_j^{\ 2} + M r_k^{\ 2}$$

$$= 2I + M r_k^{\ 2} \tag{5.8}$$

Logo,

$$m_k \sum_{j=1}^{N} m_j \| r_j - r_k \|^2 = 2 m_k I + M m_k r_k^{\ 2}$$

e

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} m_k m_j\, r_{jk}^{2} = 2MI + 2MI = 4MI \tag{5.9}$$

Mas,

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} m_k m_j r_{jk}^2 = 2\sum_{j<k}^{N} m_j m_k r_{jk}^2 = 4IM \tag{5.10}$$

e o resultado segue .

■

Corolário 5.1. *Sejam*

$$r = r_{\min} \equiv \min_{j \neq k} r_{jk} \tag{5.11}$$

e

$$R = r_{\max} \equiv \max_{j \neq k} r_{jk} , \tag{5.12}$$

a separação mínima e máxima entre os corpos num dado instante. Existem constantes positivas A, B, C, D que dependem apenas das massas $m_1, m_2, ..., m_N$ *tais que*

$$A\sqrt{I} \leq R \leq B\sqrt{I} \tag{5.13}$$

e

$$CU^{-1} \leq r \leq DU^{-1} , \tag{5.14}$$

onde U é a função potencial.

Demonstração: Seja

$$m_0 = \min_{1 \leq i \leq N} m_i \tag{5.15}$$

Temos que

$$\frac{m_0^2}{2M} R^2 = \frac{m_0^2}{2M} \max_{j \neq k} \left\| r_j - r_k \right\|^2 = \frac{m_0^2}{2M} \max_{j \neq k} || r_j - r_k ||^2$$

$$\leq \frac{m_0^2}{2M} \sum_{j<k} r_{jk}^2 \leq I \tag{5.16}$$

pois, pelo Lema 5.1,

$$I = \frac{1}{2M} \sum_{j<k}^{N} m_j m_k r_{jk}^2 \geq \frac{1}{2M} m_0^2 \sum_{j<k}^{N} r_{jk}^2 \tag{5.17}$$

Por outro lado,

$$I = \frac{1}{2M}\sum_{j<k} m_j m_k r_{jk}{}^2 \le \frac{R^2}{2M}\sum_{j<k} m_j m_k = \frac{R^2}{4M} 2\sum_{j<k} m_j m_k \tag{5.18}$$

Mas,

$$2\sum_{j<k} m_j m_k \le \sum_{j=1}^{N} m_j \sum_{k=1}^{N} m_k = M^2 \tag{5.19}$$

Portanto,

$$\frac{m_0{}^2 R^2}{2M} \le I \le \frac{R^2 M}{4}, \tag{5.20}$$

ou ainda,

$$\frac{2M}{m_0{}^2} I \ge R^2 \ge \frac{4I}{M}$$

e que prova (5.13) tomando-se $A = \dfrac{2}{\sqrt{M}}$ e $B = \dfrac{\sqrt{2M}}{m_0}$.

De (5.19), obtemos que:

$$U = \sum_{1\le j<k\le N} \frac{Gm_j m_k}{r_{jk}} \le \sum_{j<k} \frac{Gm_j m_k}{r} = \frac{G}{r}\sum_{j<k} m_j m_k \le \frac{GM^2}{2r}.$$

Além disso, para j, k tais que $r_{jk} = r$, temos:

$$U \ge \frac{Gm_j m_k}{r_{jk}} \ge \frac{Gm_0{}^2}{r_{jk}} = \frac{Gm_0{}^2}{r},$$

seguindo-se que

$$\frac{Gm_0{}^2}{r} \le U \le \frac{GM^2}{2r},$$

ou ainda,

$$Gm_0{}^2 U^{-1} \le r \le \frac{GM^2}{2} U^{-1},$$

que é (5.14), tomando $C = Gm_0{}^2$ e $D = \dfrac{GM^2}{2}$ ■

Corolário 5.2. *Suponha que ocorre colapso total em* $t = t^*$ *(*t^* *finito ou não). Então, ele ocorre na origem.*

Demonstração: Como por hipótese, o sistema colapsa, então para todo $j = 1, 2, ..., N,$ existem e coincidem os limites (5.1), ou seja,

$$r(t^*) = \lim_{t \to t^*} r_j(t), \ \forall j = 1, ..., N \tag{5.21}$$

Assim, para $j \neq k$,

$$\lim_{t \to t^*} r_{jk}(t) = \lim_{t \to t^*} \| r_j(t) - r_k(t) \| = \| r(t^*) - r(t^*) \| = 0 \tag{5.22}$$

Temos, ainda, que,

$$0 \leq r_{\min}(t) \leq r_{jk}(t), \ \ \forall j \neq k \,. \tag{5.23}$$

e

$$0 \leq \lim_{t \to t^*} r_{\min}(t) \leq \lim_{t \to t*} r_{jk}(t) = 0 \tag{5.24}$$

Então, pelo teorema do confronto, quando $t \to t^*$,
obtemos que

$$\lim_{t \to t^*} r_{\min}(t) = 0$$

Pelo Lema 5.1:

$$I = \frac{1}{2M} \sum_{j<k}^{N} m_j m_k r_{jk}{}^2 \,.$$

e

$$\lim_{t \to t*}(I) = \frac{1}{2M} \sum_{j<k} m_j m_k \lim_{t \to t^*} r_{jk}{}^2 = 0 \,,$$

Mas, por definição,

$$I(t) = \frac{1}{2M} \sum_{j=1}^{N} m_j r_j{}^2(t)$$

Portanto,

$$0 = \lim_{t \to t^*} I(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \lim_{t \to t^*} r_j{}^2(t)$$

se, e somente se,

$$\lim_{t \to t^*} r_j(t) = 0 \,, \ \forall j = 1, 2, ..., N.$$

Ou seja, o colapso ocorre na origem. ■

Teorema 5.1. *Suponha que ocorre o colapso em* $t = t^*$. *Então,* $t^* < \infty$.

Demonstração: Suponha que ocorre o colapso em $t^* = +\infty$. (A prova é análoga para $t^* = -\infty$)
Pelo, Corolário 5.2,

$$\lim_{t \to t^*} r_{jk}(t) = 0 ,$$

para todo $j \neq k$.

Como $t^* = +\infty$,

$$\lim_{t \to +\infty} r_{jk}(t) = \lim_{t \to +\infty} \left\| r_j(t) - r_k(t) \right\| = 0 ,$$

Temos que,

$$r_{jk}(t) \geq r_m(t) \geq 0$$

onde

$$r_m(t) = \min_{j \neq k} r_{jk}(t)$$

Pelo Corolário 5.1, em cada *t* temos que:

$$\frac{C}{U} \leq r_m \leq \frac{D}{U} ,$$

onde *C, D* > 0 e *U* é a função potencial $U(x(t))$, donde

$$\frac{C}{r_m(t)} \leq U(x(t)) \leq \frac{D}{r_m(t)}$$

Segue, então, por esta desigualdade que no limite $t \to +\infty$,

$$\lim_{t \to +\infty} U(x(t)) = +\infty . \qquad (5.25)$$

Pelo Lema 4.1, segundo o qual

$$\ddot{I}(t) = U(x(t)) + 2E ,$$

obtemos que

$$\lim_{t \to +\infty} \ddot{I}(t) = +\infty$$

Neste caso, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que $|t| > \delta$ implica $\ddot{I}(t) > \varepsilon$.
Como ε é qualquer, tome $\varepsilon = 1$ e seja $y = \dot{I}$. Então, existe $\delta > 0$ tal que para $|t| > \delta$,

$$\frac{dy}{dt} > 1 \tag{5.26}$$

Integrando resulta que

$$y(t) > t + a \tag{5.27}$$

onde a é constante arbitrária, donde obtemos, após integração, que

$$I(t) > \frac{t^2}{2} + at + b, \tag{5.28}$$

onde b é outra constante arbitrária. Logo,

$$\lim_{t \to +\infty} I(t) = +\infty. \tag{5.29}$$

Esse resultado contradiz o resultado segundo o qual:

$$\lim_{t \to +\infty} I(t) = 0.$$

Portanto, devemos ter $t^* < +\infty$. ■

O seguinte Teorema fornece uma condição necessária para haver colapso total do sistema de N corpos. A condição também é suficiente para N=2, mas não para $N \geq 3$.

Lema 5.2. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f duas vezes diferenciável em (a,b) onde f > 0 e $f'' > 0$. Se f(b) = 0, então $f'(x) < 0$ em (a,b).*

Teorema 5.2. *(Sundman-Weierstrass) Se ocorre o colapso total no problema de N corpos, então o momento angular total do sistema é nulo.*

Demonstração:

Seja $t^* < +\infty$ o instante do colapso total. Temos então, que

$$\lim_{t \to t^*} r_{\min}(t) = 0$$

e

$$\lim_{t \to t^*} U(x(t)) = +\infty$$

Além disso, pelo Lema 4.1,

$$\lim_{t \to t^*} \ddot{I} = +\infty \, .$$

Portanto, dado $M > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que $0 < \left| t - t^* \right| < \delta$ implica $\ddot{I} > M > 0$, ou seja, $\ddot{I}(t) > 0$ numa vizinhança de t^*. Ademais,

$$I(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j r_j(t)^2 > 0 \, .$$

As condições do Lema 5.2 estão assim satisfeitas no aberto $(t^* - \delta, t^*)$.
Logo,

$$\dot{I}(t) < 0 \text{ em } (t^* - \delta, t^*) \, .$$

Consideremos, agora, a desigualdade de Sundman:

$$C^2 \leq 4I(\ddot{I} - E) \qquad (5.30)$$

no intervalo $[t_1, t_2] \subset (t^* - \delta, t^*)$.

De (5.30),

$$\ddot{I}(t) \geq \frac{C^2}{4I} + E \qquad (5.31)$$

Multiplicando (5.31) por $-\dot{I}$ ($-\dot{I} > 0$), resulta

$$-\dot{I}\,\ddot{I} \geq -\frac{C^2}{4I}\dot{I} - E\,\dot{I}$$

ou ainda,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{I}^{2}) \geq -C^2\frac{d}{dt}\ln(I) - E\frac{dI}{dt} \qquad (5.32)$$

Integrando a equação (5.32) em $[t_1, t_2]$, segue

$$\frac{-1}{2}\left(\dot{I}^{2}(t_2) - \dot{I}^{2}(t_1)\right) \geq \frac{C^2}{4}\ln\left(\frac{I(t_1)}{I(t_2)}\right) - E\ \ I(t_2) - I(t_1)$$

ou ainda,

$$\frac{C^2}{4}\ln\left(\frac{I(t_1)}{I(t_2)}\right) \leq E\ \ I(t_2) - I(t_1)\ + \frac{1}{2}\left(\left(\dot{I}(t_1)\right)^2 - \left(\dot{I}(t_2)\right)^2\right).$$

Mas,

$$I(t_2) - I(t_1) \leq I(t_2) \text{ e } \left(\dot{I}(t_1)\right)^2 - \left(\dot{I}(t_2)\right)^2 \leq \left(\dot{I}(t_1)\right)^2,$$

o que implica

$$\frac{C^2}{4}\ln\left(\frac{I(t_1)}{I(t_2)}\right) \leq EI(t_2) + \left(\dot{I}(t_1)\right)^2.$$

Como $I(t)$ é estritamente decrescente, $I(t_2) < I(t_1)$, e assim,

$$\frac{I(t_1)}{I(t_2)} > 1.$$

Logo,

$$\ln\left(\frac{I(t_1)}{I(t_2)}\right) > 0.$$

Daí,

$$\frac{C^2}{4} \leq \frac{EI(t_2) + \left(\dot{I}(t_1)\right)^2}{\ln\left(\frac{I(t_1)}{I(t_2)}\right)}.$$

Como há colapso total,

$$\lim_{t\to t^*} I(t) = \lim_{t\to t^*}\frac{1}{2}\sum m_j r_j^{\,2}(t) = 0$$

pois $r_j(t^*) = 0$. Portanto, para t_1 fixado, no limite $t = t_2 \to t^*$, obtemos

$I(t_2) \to 0$ e $-\ln I(t_2) \to +\infty$ implicando

$$\frac{EI(t_2) - \left(I(t_1) \right)^2}{\ln I(t_1) - \ln I(t_2)} \to 0$$

e $C = 0$. ■

Definição 5.3. *Uma solução do problema de N corpos é estável se para todo $i \neq j$ e, todo $t \in \mathbb{R}$, e alguma constante k > 0, tem-se:*

(i) $r_{ij}(t) = \| r_i(t) - r_j(t) \| \neq 0$, *e*
(ii) $r_{ij}(t) \leq k$

Segundo esta definição, uma solução é estável na ausência de colisões, pela condição (i), e o movimento se dá numa região limitada do espaço, pela condição (ii).

Uma condição necessária para uma solução ser estável é a dada a seguir.

Definição 5.4. *Uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se convexa quando seu gráfico se situa abaixo de qualquer de suas secantes.*

Lema 5.3. *Uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, duas vezes derivável em Ω é convexa se, e somente se, $\ddot{f}(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$.*

Teorema 5.3. *(Critério de estabilidade de Jacobi)*
Se uma solução do problema de N corpos é estável então a energia total do sistema é negativa.

Demonstração: Suponhamos que o sistema tem energia total

$$E \geq 0 \tag{5.33}$$

Pela identidade de Lagrange – Jacobi, o momento de inércia I do sistema satisfaz

$$\ddot{I} = U + 2E$$

onde U é a energia potencial. Por (5.33),

$$\ddot{I} \geq U > 0$$

para todo $t \in$ ℝ. Daí, a função $I(t)$ é estritamente convexa em ℝ pelo Lema 5.3. Segue que $\dot{I}(t)$ é estritamente crescente em ℝ. Também temos, pela definição do momento de inércia, que $I \geq 0$.
Portanto, devemos ter

$$\lim_{t \to +\infty} I(t) = +\infty$$

Como, pelo Lema 5.1,

$$I = \frac{1}{2M} \sum_{j<k}^{N} m_j m_k r_{jk}{}^2$$

não pode existir $k > 0$ tal que $r_{jk}(t) \leq k$, para todo $i \neq j$ e todo $t \in$ ℝ. A hipótese inicial $E \geq 0$ não pode ser mantida. Devemos ter $E < 0$. ■

Observação:

A condição do Teorema é suficiente se N = 2, mas não para $N \geq$ 3.

Definição 5.5. *Seja f definida em* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *e limitada numa vizinhança do ponto* $x_0 \in \Omega$. *Defina:*

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in B(x_0, \varepsilon)} f(x) \tag{5.34}$$

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{x \in B(x_0, \varepsilon)} f(x) \tag{5.35}$$

Teorema 5.4. *Os limites (5.34) e (5.35) tem as seguintes propriedades:*

1) $\limsup_{x \to x_0} f(x) \geq \liminf_{x \to x_0} f(x)$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *se, e somente se,* $\limsup_{x \to x_0} f(x) = \liminf_{x \to x_0} f(x)$

3) *Se* $\limsup_{x \to x_0} f(x) = M$ *, então existe* $(x_n)_{n \in N}, x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x_0$ *tal que* $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = M$.

Teorema 5.5. (Painlevé, 1895)
Uma solução do problema de N corpos possui uma singularidade no instante t^* se, e somente se,

$$\lim_{t\to t^*} r_{\min}(t) = 0 \tag{5.36}$$

onde

$$r_{\min}(t) = \min_{j\neq k} r_{jk}(t) \tag{5.37}$$

Demonstração:
$(\Leftarrow)$ Suponha que

$$\lim_{t\to t^*} r_{\min}(t) = 0\,,$$

mas não ocorre singularidade no instante $t = t^*$. Isso significa que a solução

$$x(t) = \left(r_1(t),\ldots,r_N(t) \right)$$

é uma função suave num intervalo $[\varepsilon, t^*]$ e, portanto, neste intervalo existe $b_1 > 0$ tal que

$$\| \ddot{x}(t) \| \leq b_1, \tag{5.38}$$

para todo $t \in [\varepsilon, t^*]$. Segue, então, pelas equações de movimento, que

$$\nabla_{r_j} U\left(x(t) \right), \quad j=1, 2,\ldots, N,$$

são limitadas, ou seja,

$$\left| \nabla_{r_j} U \right| \leq b_2 \tag{5.39}$$

para todo $j=1,2,\ldots,N$, e $t \in [\varepsilon, t^*]$. Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\int_t^{t^*} \ddot{x}(s)ds = \dot{x}(t^*) - \dot{x}(t)$$

Usando (5.38),

$$\| \dot{x}(t^*) - \dot{x}(t) \| = \| \int_t^{t^*} \ddot{x}(s)ds \| \leq \int_t^{t^*} \| \ddot{x}(s) \| ds$$

$$\leq b_1(t^* - t)$$
$$\leq b_1(t^* - \varepsilon)$$

Portanto,

$$\| \dot{x}(t^*) - \dot{x}(t) \| \leq b_3, \tag{5.40}$$

onde $b_3 = b_1(t^* - \varepsilon)$ é constante. Pelas desigualdades triangular, (5.38) e (5.40), resulta que

$$\| \dot{x}(t) \| = \| \dot{x}(t) - \dot{x}(t^*) + \dot{x}(t^*) \| \leq \| \dot{x}(t) - \dot{x}(t^*) \| + \| \dot{x}(t^*) \| \leq b_4, \tag{5.41}$$

para todo $t \in [\varepsilon, t^*]$, donde

$$\| \dot{x}_j(t) \| \leq \| \dot{x}(t) \| \leq b_4 \tag{5.42}$$

Pela regra da cadeia, obtemos

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \nabla_{r_j} U \cdot \dot{r}_j \,.$$

Daí, pelas desigualdades de Schwartz, e as desigualdades (5.39) e (5.42),

$$\begin{aligned} \left| \frac{dU}{dt} \right| &\leq \sum_{i=1}^{N} \ |\nabla_{\vec{r}_j} U \cdot \dot{r}_j \,| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{N} \ |\nabla_{r_j} U \,|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{N} \ |\dot{r}_j \,|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\nabla U\| \|\dot{r}\| \leq b_5, \end{aligned}$$

onde b_5 é uma constante. Assim, U é limitado em $[\varepsilon, t^*]$. Pelo corolário 5.1, contudo, sabemos que existe $C > 0$ tal que

$$\frac{C}{U(x(t))} \leq r_{\min}(t),$$

e, portanto,

$$\frac{C}{r_{\min}(t)} \leq U(x(t))$$

Como $\lim_{t \to t^*} r_{\min}(t) = 0$, então devemos ter $U\ x(t) \to +\infty$ para $t \to t^*$.
Logo, U não pode ser limitada e, portanto, a solução tem que ser singular em t^*.

$(\Rightarrow)$ Suponha que a solução é singular em $t = t^*$ .Queremos provar que:

$$\lim_{t \to t^*} r_{\min}(t) = 0 .$$

Como $r_m \geq 0$, temos que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} r_m(t) \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{t \in B(t^*, \varepsilon)} r_m(t) \geq 0 .$$

Suponha, por absurdo, que

$$\limsup_{t \to t^*} r_m(t) = D > 0 .$$

Então, pela propriedade 3 do Teorema 5.4, existe a sequência $(t_r)_{r \geq 1}$ que converge para t^* quando $r \to +\infty$ tal que

$$\lim_{r \to +\infty} r_m(t_r) = D > \frac{D}{2}$$

para *r* suficientemente grande, e todo $j \neq k$.
Ademais,

$$r_{jk}(t_r) \geq r_{mim}(t_r) > \frac{D}{2} .$$

Fixando t_r, tome como condição inicial do problema de N corpos a condição

$$y(t_r) = (x(t_r), \dot{x}(t_r)).$$

O teorema de existência e unicidade garante a existência de solução suave no intervalo $(t_r - \delta, t_r + \delta)$ para algum $\delta > 0$. Em seguida, provamos que existe r_0 tal que $t^* \in (t_{r_0} - \delta, t_{r_0} + \delta)$. De fato, como $t_r \to t^*$ quando $r \to +\infty$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que $r \geq k$, implica $\left| t^* - t_r \right| < \varepsilon$, ou seja,

$$t^* \in (t_r - \varepsilon, t_r + \varepsilon) .$$

Tome $\delta = \varepsilon$ compatível com o Teorema de existência e unicidade. Assim, a solução é suave em t^* o que é uma contradição. Então, só podemos ter

$$\limsup_{t \to t^*} r_m(t) = 0$$

Como

$$\liminf_{t \to t^*} r_m(t) = 0 .$$

Temos que

$$\lim_{t \to t^*} r_m(t) = 0 \qquad \blacksquare$$

Para terminar , no que segue enunciamos alguns resultados clássicos sobre o problema de N – corpos, sem demonstrá-los.

Teorema 5.6. (Von Zeipel)
No problema de N – corpos, uma singularidade em $t = t^*$ *é uma colisão se, e somente se,* $\lim_{t \to t^*} I(t) < +\infty$.

Teorema 5.7. (*Painlevé, 1985)*
No problema de três corpos, todas as singularidades são colisões.

A conjectura de Painlevé

Conjectura *(Conjectura de Painlevé, 1895)*
O problema de N - corpos, para $N \geq 4$ *admite soluções com singularidades não colisionais.*

Teorema 5.8. (Xia, 1992, Gerver, 1991)
Existem soluções com singularidades não colisionais no problema de N – corpos, para $N \geq 5$.

O caso N=4 permanece em aberto.

Referências

[1] Sérgio B. Volchan, Uma introdução à Mecânica Celeste, 26ª Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa, 2007.

[2] H. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica, vol. 1, Ed. Edgard Blücher, 1981.

[3] P. Boulos e I. Camargo, Geometria Analítica, Pearson Education, 1987.

[4] H. Guidorizzi, Um curso de Cálculo, vol. 2, Ed. LTC, 1986.