Universidade Federal de Santa Catarina
Bacharelado em Matemática e
Computação Científica

Introdução às teorias de coálgebras e comódulos

Bernardo Vieira Emerick

Orientadora: Prof^a Virgínia Silva Rodrigues

Florianópolis
Novembro de 2008

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Bacharelado em Matemática e Computação Científica, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n⁰ 52/CCM/2008.

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da Disciplina

Banca Examinadora

Virgínia Silva Rodrigues
Orientadora

Luiz Augusto Saeger

Alveri Alves Sant'Ana

Índice

Introdução

Desenvolvemos neste trabalho alguns aspectos básicos da teoria de coálgebras e comódulos. O contexto do nosso estudo é mais restrito do que seria necessário. Aqui, todas as coálgebras são tomadas sobre um corpo; as coálgebras podem ser definidas mais geralmente sobre anéis comutativos com unidade. Porém, nesse contexto mais geral, perde-se muito por não se ter mais a comodidade de trabalhar com produtos tensoriais de espaços vetoriais, que também são espaços vetoriais.

Coálgebra é uma noção dual de álgebra. O uso do termo "dual"é justificado pelo uso da linguagem categórica. Dualidade refere-se à inversão do sentido das flechas de certos diagramas comutativos. Portanto, para se dualizar a noção de uma k-álgebra, faz-se necessário antes transformar a definição de k-álgebra em termos de diagramas. Da mesma forma, dualizamos a noção de morfismos de álgebras, obtendo morfismos de coálgebras.

Álgebras e coálgebras não são apenas noções duais. De certo modo, são objetos duais. Objetos duais no seguinte sentido. Dada uma k-coálgebra C, então conseguimos "naturalmente" – num sentido que ficará claro no decorrer da apresentação – uma estrutura de k-álgebra sobre o k-espaço vetorial dual $C^* = Hom(C, k)$, o espaço dos funcionais k-lineares.

A dualidade de objetos, porém, não é geral. Se o espaço dual de uma coálgebra é uma álgebra, não conseguimos atribuir "naturalmente"uma estrutura de coálgebra sobre o espaço dual de uma álgebra. No caso de uma álgebra de dimensão finita, isso é sempre possível, como será demonstrado. No entanto, quando a álgebra possui dimensão infinita, não conseguimos utilizar a técnica para definir a estrutura de coálgebra. Não obstante, conseguimos contornar esse obstáculo. Não conseguimos definir a estrutura de coálgebra sobre todo o espaço dual de uma álgebra, mas podemos fazê-lo sobre um subespaço do dual, chamado de dual finito da álgebra.

Em suma, esse é o conteúdo do primeiro capítulo. No segundo, tratamos da teoria básica de comódulos. Um comódulo sobre uma coálgebra é uma noção dual à de um módulo sobre uma álgebra. Depois de provarmos alguns resultados, partimos para a definição de módulos racionais. Nosso resultado principal será a demonstração de um isomorfismo entre a categoria dos comódulos à direita sobre uma coálgebra C e a categoria dos C^*-módulos à esquerda racionais (observe que aqui usamos o resultado citado acima, de que, sendo C uma k-coálgebra, C^* é uma k-álgebra).

Nesse trabalho, assumimos como conhecida a teoria básica de grupos, anéis e módulos. Alguns resultados sobre produtos tensoriais são apresentados no Apêndice B. Além disso, fazemos uma introdução básica à teoria das categorias no Apêndice A. Apesar de não ser absolutamente necessário, este apêndice serve para familiarizar o leitor com a linguagem de diagramas, o que pode facilitar bastante a compreensão do texto.

Capítulo 1

Coálgebras

Neste capítulo, álgebras e coálgebras são definidas sobre um corpo k. Isto é uma restrição, já que se poderia substituir k por um anel comutativo R; neste caso, perder-se-ia a conveniência de se trabalhar com produtos tensoriais de espaços vetoriais. No segundo apêndice deste trabalho, algumas das facilidades de se trabalhar com produtos tensoriais de espaços vetoriais serão explicitadas. Todos os produtos tensoriais não adornados são considerados sobre o corpo k. Expressaremos a composição de funções de forma simplificada. Isto é, ao invés de $f \circ g$, colocaremos apenas fg nos próximos dois capítulos.

1.1 Definições e exemplos

Definição 1.1. *Uma k-álgebra é uma tripla $(A,\ M,\ u)$, em que A é um k-espaço vetorial, $M : A \otimes A \to A$ e $u : k \to A$ são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I\otimes M"] \arrow[d, "M\otimes I"'] & A \otimes A \arrow[d, "M"] \\
A \otimes A \arrow[r, "M"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "M"] & \\
k \otimes A \arrow[ur, "u\otimes I"] \arrow[dr, "\sim"'] & & A \otimes k \arrow[ul, "I\otimes u"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Essa definição pode parecer estranha à primeira vista. De fato, é mais fácil e intuitivo definir uma k-álgebra A como sendo um anel A que tem uma estrutura de k-espaço vetorial de modo que haja compatibilidade entre a multiplicação por escalar e a multiplicação dentro do anel. Em outras palavras:

Definição 1.2. *Uma k-álgebra é um anel $(A, +, .)$ com unidade tal que $(A, +)$ possui uma estrutura de k-espaço vetorial e $\forall r \in k$ e $\forall a_1, a_2 \in A$, $r(a_1a_2) = (ra_1)a_2 = a_1(ra_2)$.*

Proposição 1.3. *As duas definições de k-álgebra são equivalentes.*

Demonstração: Suponha que A seja uma k-álgebra no sentido "tradicional", i.e., A é um anel com unidade e um k-espaço vetorial tal que $r(a_1a_2) = (ra_1)a_2 = a_1(ra_2)$, $\forall r \in k$, $\forall a_1, a_2 \in A$. Temos que definir funções $M : A \otimes_k A \to A$ e $u : k \to A$ tais que os diagramas da definição de álgebra comutem.

Seja $u : k \to A$ dada por $u(r) = r1_A$ – o que implica que $u(1_k) = 1_A$. É claro que u é k-linear.

Seja $g : A \times A \to A$ dada por $g(a, b) = ab$. É imediato verificar que g é balanceada. Logo, pelo Teorema **??**, existe um único homomorfismo de grupos $M : A \otimes A \to A$ tal que $M(a \otimes b) = ab$. Além disso, M também é k-linear.

Verifiquemos que os diagramas comutam, começando com o primeiro. Sejam $a, b, c \in A$. Por um lado,

$$\begin{aligned} M(I \otimes M)(a \otimes b \otimes c) &= M(a \otimes M(b \otimes c)) \\ &= M(a \otimes (bc)) \\ &= a(bc). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} M(M \otimes I)(a \otimes b \otimes c) &= M(M(a \otimes b) \otimes c) \\ &= M((ab) \otimes c) \\ &= (ab)c. \end{aligned}$$

Como A é anel, então $(ab)c = a(bc)$. Portanto, $M(I \otimes M) = M(M \otimes I)$, que é precisamente a comutatividade do primeiro diagrama.

Seja $\psi : k \otimes A \to A$ o isomorfismo canônico, dado por $\psi(r \otimes a) = ra$. Vamos mostrar que $M(u \otimes I) = \psi$, ou seja, que o lado esquerdo do segundo diagrama comuta. A comutatividade do outro lado é inteiramente análoga. Pela linearidade, só precisamos verificar a comutatividade para $1_k \otimes a \in k \otimes A$.

Temos que $M(u \otimes I)(1_k \otimes a) = M(u(1_k) \otimes a) = u(1_k)a = 1_A a = a$. Por outro lado, $\psi(1_k \otimes a) = 1_k a = a$, pois A é k-álgebra.

Portanto, (A, M, u) é k-álgebra, no sentido da definição via diagramas.

Mostremos agora o inverso, isto é, que se (A, M, u) é uma k-álgebra, então A é uma k-álgebra no sentido "tradicional".

Defina a multiplicação $\cdot : A \times A \to A$ dada por $\cdot(a, b) = ab = M(a \otimes b)$. Com essa multiplicação, A é um anel com unidade $u(1_k) = 1_A$. De fato, sejam $a, b, c \in A$. Então $M(I \otimes M)(a \otimes b \otimes c) = M(a \otimes M(b \otimes c)) = M(a \otimes bc) = a(bc)$. Por outro lado, $M(M \otimes I)(a \otimes b \otimes c) = M(M(a \otimes b) \otimes c) = M(ab \otimes c) = (ab)c$. Como $M(M \otimes I) = M(I \otimes M)$ – por hipótese –, então $(ab)c = a(bc)$.

A comutatividade do segundo diagrama significa que $u(1_k) = 1_A$. De fato, $M(u \otimes I)(1 \otimes a) = M(u(1_k) \otimes a) = u(1_k)a$. Por outro lado, $\psi(1_k \otimes a) = 1_k a = a$. Daí, $u(1_k)a = a$, $\forall a \in A$. Analogamente, $au(1_k) = a$. Assim, $u(1_k)$ é unidade em A.

Falta ainda mostrar que $\forall r \in k$, $a, b \in A$, $r(ab) = (ra)b = a(rb)$. De fato, $r(ab) = rM(a \otimes b) = M(r(a \otimes b)) = M(ra \otimes b) = (ra)b$ – usamos a k-linearidade de M. Além disso, $(ra)b = M(ra \otimes b) = M(ar \otimes b) = M(a \otimes rb) = a(rb)$. Isso termina a demonstração. $\square$

A importância da definição de álgebra via diagramas está no fato de que os diagramas podem ser dualizados, invertendo-se o sentido das flechas. Assim, obtemos a definição de coálgebra por dualização da definição de álgebra.

Definição 1.4. *Uma k-coálgebra é uma tripla (C, Δ, ϵ), em que C é um k-espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\epsilon : C \to k$ são morfismos de k-espaços* *vetoriais tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C\otimes C \arrow[d, "I\otimes\Delta"] \\
C\otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes I"'] & C\otimes C\otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
k\otimes C & & C\otimes k \\
& C\otimes C \arrow[ul, "\epsilon\otimes I"] \arrow[ur, "I\otimes\epsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

As aplicações Δ *e* ϵ *são chamadas, respectivamente, de comultiplicação e counidade da coálgebra* C*. A comutatividade do diagrama esquerdo é chamada de coassociatividade.*

Exemplo 1.5. Sejam S um conjunto não-vazio e kS o k-espaço vetorial com base S. Então kS é uma coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ϵ definidas por $\Delta(s) = s\otimes s$ e $\epsilon(s) = 1$, para qualquer $s \in S$ e estendidas por linearidade.

Para ver que kS de fato é uma coálgebra, temos que verificar que a comutatividade dos diagramas. Por linearidade, só precisamos verificar para qualquer $s \in S$. Então, temos, por um lado, $(I\otimes\Delta)\Delta(s) = (I\otimes\Delta)(s\otimes s) = s\otimes\Delta(s) = s\otimes s\otimes s$; por outro, $(\Delta\otimes I)\Delta(s) = (\Delta\otimes I)(s\otimes s) = \Delta(s)\otimes s = s\otimes s\otimes s$. Portanto, $(\Delta\otimes I)\Delta = (I\otimes\Delta)\Delta$, o que prova a comutatividade do primeiro diagrama.

Verificamos apenas um lado do diagrama da counidade, sendo a do outro análoga. Seja $\psi : k\otimes kS \to kS$ o isomorfismo canônico, $\psi(r\otimes s) = rs$. Queremos mostrar que $(\epsilon\otimes I)\Delta\psi = I_{k\otimes kS}$. Pela linearidade, só precisamos mostrar que $(\epsilon\otimes I)\Delta\psi(r\otimes s) = r\otimes s$, com $s \in S$ e $r \in k$. Calculando:

$$
\begin{aligned}
(\epsilon\otimes I)\Delta\psi(r\otimes s) &= (\epsilon\otimes I)\Delta(rs) \\
&= (\epsilon\otimes I)(r\Delta(s)) \\
&= r(\epsilon\otimes I)(s\otimes s) \\
&= r(\epsilon(s)\otimes s) \\
&= r(1\otimes s) \\
&= r\otimes s.
\end{aligned}
$$

Logo, tal como definida, kS realmente é uma coálgebra sobre k.

Exemplo 1.6. Como caso particular do exemplo acima, se $S = \{1\}$, vemos que k é uma coálgebra com comultiplicação dada por $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1$, para todo $\alpha \in k$, e counidade $\epsilon(\alpha) = \alpha$, i.e., $\epsilon = I_k$.

Exemplo 1.7. Seja H um k-espaço vetorial com base $\{c_m : m \in \mathbb{N}\}$. Então H é uma coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ϵ definidas por $\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i}$ e $\epsilon(c_m) = \delta_{0,m}$, em que $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker. Novamente, as funções, tal como definidas acima, só dão o resultado quando aplicadas na base. Portanto, elas devem ser entendidas estendendo-as por linearidade.

Mostremos que H é uma coálgebra. Primeiro observamos que $\Delta(c_m) = \sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i} = \sum_{i=0}^{m} c_{m-i} \otimes c_i$. Agora, calculamos

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes I)\Delta(c_m) &= (\Delta \otimes I)(\sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \Delta(c_i) \otimes c_{m-i} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I \otimes \Delta)\Delta(c_m) &= (I \otimes \Delta)(\sum_{i=0}^{m} c_{m-i} \otimes c_i) \\ &= \sum_{i=0}^{m} c_{m-i} \otimes \Delta(c_i) \quad (2) \end{aligned}$$

Desenvolvendo (1) e (2), chegamos à igualdade desejada $(\Delta \otimes I)\Delta = (I \otimes \Delta)\Delta$.

Vejamos agora a igualdade do segundo diagrama – novamente, só mostramos um lado, pois o outro é inteiramente análogo:

$$\begin{aligned} (\epsilon \otimes I)\Delta\psi(1 \otimes c_m) &= (\epsilon \otimes I)\Delta(c_m) \\ &= (\epsilon \otimes I)(\sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \epsilon(c_i) \otimes c_{m-i} \\ &= \sum_{i=0}^{m} \delta_{0,i} \otimes c_{m-i} \\ &= 1 \otimes c_m. \end{aligned}$$

Logo, H é uma coálgebra.

Exemplo 1.8. Sejam $n \geq 1$ inteiro e $M^c(n,k)$ um k-espaço vetorial de dimensão n^2. Denotamos por $\{e_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ uma base de $M^c(n,k)$. Definimos sobre $M^c(n,k)$ uma comultiplicação $\Delta(e_{ij}) = \displaystyle\sum_{1\leq p\leq n} e_{ip}\otimes e_{pj}$ e uma counidade $\epsilon(e_{ij}) = \delta_{ij}$. Desta maneira, $M^c(n,k)$ é uma coálgebra – chamada de coálgebra de matrizes.

Provemos que isto realmente define uma coálgebra. Temos que

$$\begin{aligned}(I\otimes\Delta)\Delta(e_{ij}) &= (I\otimes\Delta)(\sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes e_{pj})\\ &= \sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes\Delta(e_{pj})\\ &= \sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes\sum_{q=1}^{n} e_{pq}\otimes e_{qj}\\ &= \sum_{1\leq p,q\leq n} e_{ip}\otimes e_{pq}\otimes e_{qj}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes I)\Delta(e_{ij}) &= (\Delta\otimes I)(\sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes e_{pj})\\ &= \sum_{p=1}^{n} \Delta(e_{ip})\otimes e_{pj}\\ &= \sum_{1\leq p,q\leq n} e_{iq}\otimes e_{qp}\otimes e_{pj}\\ &= \sum_{1\leq p,q\leq n} e_{ip}\otimes e_{pq}\otimes e_{qj}.\end{aligned}$$

Portanto, o primeiro diagrama comuta. Basta verificar o segundo. Mostremos que $(\epsilon\otimes I)\Delta\psi = I_{k\otimes M^c(n,k)}$:

$$\begin{aligned}
(\epsilon\otimes I)\Delta\psi(1\otimes e_{ij}) &= (\epsilon\otimes I)\Delta(e_{ij})\\
&= (\epsilon\otimes I)(\sum_{p=1}^{n} e_{ip}\otimes e_{pj}\\
&= \sum_{p=1}^{n}\epsilon(e_{ip})\otimes e_{pj}\\
&= \sum_{p=1}^{n}\delta_{ip}\otimes e_{pj}\\
&= 1\otimes e_{ij}.
\end{aligned}$$

Portanto, $M^c(n,k)$ é uma coálgebra com a comultiplicação e a counidade definidas acima.

Nas definições acima, sempre falamos em morfismos de k-espaços vetoriais. Em particular, isso supõe que $A\otimes A$ e $C\otimes C$ são k-espaços vetoriais. Na construção de produtos tensoriais de módulos, este é definido como um grupo abeliano. O que nos permite tratar esses produtos tensoriais como k-espaços vetoriais é o fato de que todo espaço vetorial é um módulo à direita e à esquerda sobre um corpo. Isso implica que o produto tensorial é k-espaço vetorial (ver Proposição **??**).

Uma das vantagens disso é que o produto tensorial, sendo um k-espaço vetorial, tem uma base. Isso significa que podemos facilitar os cálculos, computando sobre a base. Isso será muito importante mais à frente, particularmente na demonstração do Lema **??**.

Como foi dito anteriormente, neste trabalho estamos restringindo nossas definições a espaços vetoriais. Num caso mais geral, teríamos álgebras e coálgebras sobre um anel comutativo R, em que, ao invés de considerarmos A e C como k-espaços vetoriais, teríamos R-módulos. Ainda assim, o produto tensorial teria uma estrutura de módulo, pois, sendo R comutativo, A e C seriam módulos à direita e à esquerda.

Interrompemos o desenvolvimento das idéias da teoria de coálgebras para apresentar a notação de Sweedler, de grande utilidade para cálculo de longas composições envolvendo a comultiplicação Δ.

A definição recursiva da seqüência de aplicações $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ é definida como $\Delta_1 = \Delta$ e, para $n \geq 2$, $\Delta_n : C \to C \otimes \cdots \otimes C$, $n+1$ vezes, tem-se $\Delta_n = (\Delta \otimes I^{n-1})\Delta_{n-1}$.

A notação de Sweedler para Δ se escreve como $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$, para qualquer $c \in C$, evitando assim a escrita $\Delta(c) = \sum\limits_{i,j} c_i \otimes c_j$. Indutivamente, $\Delta_n(c) = \sum c_1 \otimes \cdots \otimes c_{n+1}$, $\forall n \geq 2$. Para mais detalhes, (ver [**?**], p. 4).

Pela definição de Δ_n, quanto maior for n, mais "carregada"torna-se a escrita de $\Delta_n(c)$. Para $n = 2$, por exemplo, temos

$$\Delta_2(c) = \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.$$

Além disso, $c = \sum \epsilon(c_1)c_2 = \sum c_1\epsilon(c_2)$. Essa igualdade é chamada de propriedade da counidade, que expressa a comutatividade do segundo diagrama da definição de coálgebra; a primeira reflete a comutatividade do primeiro.

Definição 1.9. *Uma álgebra (A, M, u) é dita comutativa se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "M"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "M"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

é comutativo, em que $T : A \otimes A \to A \otimes A$ é função twist, dada por $T(a \otimes b) = b \otimes a$.

É fácil ver que essa definição coincide com a noção usual de álgebra comutativa. Por dualização, definimos coálgebras comutativas.

Definição 1.10. *Uma coálgebra (C, Δ, ϵ) é dita cocomutativa se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ C \otimes C \arrow[rr, "T"'] & & C \otimes C \end{tikzcd}$$

é comutativo. Isto significa que $\sum c_1 \otimes c_2 = \sum c_2 \otimes c_1$, $\forall c \in C$.

1.2 Subcoálgebras e coálgebras quociente

Queremos agora definir os mofismos de coálgebras. Para isto, partiremos da definição usual de morfismos de álgebras; em seguida, daremos uma formulação equivalente usando diagramas para, enfim, dualizarmos e obtermos a definição de morfismo de coálgebras.

Um morfismo de duas álgebras A e B é uma função $f : A \to B$ tal que $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(xa) = xf(a)$, $f(ab) = f(a)f(b)$ e $f(1_A) = 1_B$, $\forall a, b \in A$, $\forall x \in k$. Em outras palavras, é um morfismo de k-espaços vetoriais que "abre"na multiplicação da álgebra e manda unidade em unidade.

Definição 1.11. *Sejam (A, M_A, u_A) e (B, M_B, u_B) duas k-álgebras. Uma função k-linear $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras se os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "M_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "M_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & k \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd}$$

Definição 1.12. *Sejam $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ duas k-coálgebras. Uma função k-linear $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras se os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\epsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\epsilon_D"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

A comutatividade do primeiro diagrama pode ser expressa como: $\Delta_D(f(c)) = \sum f(c)_1 \otimes f(c)_2 = \sum f(c_1) \otimes f(c_2) = (f \otimes f)(\Delta(c))$, $\forall c \in C$.

Uma subálgebra B de uma álgebra A é um subconjunto de A tal que B é uma álgebra. Isto é, $B \subseteq A$ é subespaço vetorial tal que a multiplicação da álgebra, quando restrita aos elementos de B é fechada. Se (A, M, u) é uma k-álgebra, então $M(B \otimes B) \subseteq B$. "Dualizando", obtemos a seguinte definição:

Definição 1.13. *Seja (C, Δ, ϵ) uma coálgebra. Um k-subespaço D de C é dito uma subcoálgebra se $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.*

É claro que $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ é uma coálgebra, com $\Delta_D = \Delta|_D$ e $\epsilon_D = \epsilon|_D$.

Proposição 1.14. *Se $\{C_i\}_{i \in I}$ é uma família de subcoálgebras de C, então $\sum_{i \in I} C_i$ é uma subcoálgebra.*

Demonstração: $\Delta(\sum_{i \in I} C_i) = \sum_{i \in I} \Delta(C_i) \subseteq \sum_{i \in I} C_i \otimes C_i \subseteq (\sum_{i \in I} C_i) \otimes (\sum_{i \in I} C_i)$. □

Ainda nesta idéia de dualização, podemos definir um coideal à direita (à esquerda) assim como um coideal numa coálgebra C.

Definição 1.15. *Sejam (C, Δ, ϵ) uma coálgebra e I um k-subespaço de C, então I é dito:*

i) Um coideal à esquerda (à direita) se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$ (respectivamente, $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$.

ii) Um coideal se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\epsilon(I) = 0$.

Ao contrário do que se espera, um coideal não é necessariamente um coideal à direita e/ou à esquerda. Considerando o anel de polinômios $k[X]$ que é uma coálgebra com comultiplicação e counidade dadas por

$$\begin{aligned} \Delta(X^n) &= (X \otimes 1 + 1 \otimes X)^n, \quad & \epsilon(X^n) &= 0 \text{ para } n \geq 1 \\ \Delta(1) &= 1 \otimes 1, & \epsilon(1) &= 1 \end{aligned}$$

e o k-subespaço $I = kX$ – o subespaço gerado por X –, claramente temos $\Delta(I) = I \otimes 1 + 1 \otimes I$ e $\epsilon(I) = 0$, mas I não pode ser coideal à direita e nem à esquerda.

Enunciamos a seguir um resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em ([**?**], p. 25):

Lema 1.16. *Sejam $f : V_1 \to V_2$ e $g : W_1 \to W_2$ dois morfismos de k-espaços vetoriais. Então $ker(f \otimes g) = ker(f) \otimes W_1 + V_1 \otimes ker(g)$.*

Proposição 1.17. *Seja $f : C \to D$ um morfismo de coálgebras. Então $Im(f)$ é uma subcoálgebra de D e $ker(f)$ é um coideal de C.*

Demonstração: Como f é morfismo de coálgebras, então $(f \otimes f)\Delta_C = \Delta_D f$, ou seja, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd}$$

Logo, $\Delta_D(Im(f)) = \Delta_D(f(C)) = (\Delta_D f)(C) = (f \otimes f)\Delta_C(C) \subseteq (f \otimes f)(C \otimes C) = f(C) \otimes f(C) = Im(f) \otimes Im(f)$. Ou seja, $\Delta_D(Im(f)) \subseteq Im(f) \otimes Im(f)$, o que é dizer que $Im(f)$ é subcoálgebra de D.

Mostremos agora que $ker(f)$ é coideal de C. É claro que $(\Delta_D f)(ker(f)) = \Delta_D(f(ker(f)) = 0$. Como f é morfismo de coálgebras, o diagrama acima comuta, o que implica que $(f \otimes f)\Delta_C(ker(f)) = 0$. Logo,

$$\Delta_C(ker(f)) \subseteq ker(f \otimes f) = ker(f) \otimes C + C \otimes ker(f).$$

Usamos o Lema **??** na última igualdade. Ademais, como $\epsilon_C = \epsilon_D f$, segue que $\epsilon_C(ker(f)) = \epsilon_D f(ker(f)) = 0$. Portanto, $ker(f)$ é coideal de C. $\square$

Teorema 1.18. *Sejam C uma coálgebra, I um coideal e $\pi : C \to C/I$ a projeção canônica de espaços vetoriais. Então:*

i) Existe uma única estrutura de coálgebras sobre C/I – chamada de coálgebra quociente – tal que π é um morfismo de coálgebras.

ii) Se $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras tal que $I \subseteq ker(f)$, então existe um único morfismo de coálgebras $\bar{f} : C/I \to D$ tal que $\bar{f}\pi = f$.

Demonstração: i) Como I é coideal, $(\pi \otimes \pi)\Delta(I) \subseteq (\pi \otimes \pi)(I \otimes C + C \otimes I) = 0$. Logo, pela versão mais geral do Teorema do Homomorfismo (para espaços vetoriais) aplicado à função $(\pi\otimes\pi)\Delta$, existe uma única função k-linear

$\bar{\Delta} : C/I \to C/I \otimes C/I$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "(\pi\otimes\pi)\Delta"] & C/I \arrow[d, "\bar{\Delta}"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\pi\otimes\pi"'] & C/I \otimes C/I \end{tikzcd}$$

Esta função é definida por $\bar{\Delta}(\bar{c}) = \sum \bar{c_1} \otimes \bar{c_2}$, em que $\bar{c} = c + I = \pi(c)$. É fácil ver que

$$(\bar{\Delta} \otimes I)\bar{\Delta}(\bar{c}) = (I \otimes \bar{\Delta})\bar{\Delta}(\bar{c}) = \sum \bar{c_1} \otimes \bar{c_2} \otimes \bar{c_3}.$$

Portanto, $\bar{\Delta}$ é coassociativa. Além disso, como I é coideal, então $\epsilon(I) = 0$; novamente, pelo Teorema do Homomorfismo (para espaços vetoriais), existe uma única função k-linear $\bar{\epsilon} : C/I \to k$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\epsilon"'] & & C/I \arrow[dl, "\bar{\epsilon}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Tem-se, então, $\bar{\epsilon}(\bar{c}) = \epsilon(c)$, para qualquer $c \in C$. Logo,

$$\sum \bar{\epsilon}(\bar{c_1})\bar{c_2} = \pi(\sum \epsilon(c_1)c_2) = \pi(c) = \bar{c}.$$

Isto é a propriedade da counidade para $\bar{\epsilon}$. Portanto, $(C/I, \bar{\Delta}, \bar{\epsilon})$ é uma coálgebra. Além disso, os diagramas acima mostram também que $\pi : C \to C/I$ é morfismo de coálgebras. A unicidade de $\bar{\Delta}$ e $\bar{\epsilon}$ segue da unicidade das funções determinadas pelo Teorema do Homomorfismo.

ii) Mais uma vez, usando o Teorema do Homomorfismo (para espaços vetoriais), existe uma (única) função k-linear $\bar{f} : C/I \to D$ tal que $\bar{f}\pi = f$

tal que $\bar{f}(\bar{c}) = f(c)$, para qualquer $c \in C$. Como f é morfismo de coálgebras,

$$\begin{aligned}
(\Delta_D \bar{f})(\bar{c}) &= \Delta_D(\bar{f}(\bar{c})) \\
&= \Delta_D(f(c)) \\
&= (\Delta_D f)(c) \\
&= (f \otimes f)\Delta_C(c) \\
&= (f \otimes f)(\sum c_1 \otimes c_2) \\
&= \sum f(c_1) \otimes f(c_2) \\
&= \sum \bar{f}(\bar{c_1}) \otimes \bar{f}(\bar{c_2}) \\
&= (\bar{f} \otimes \bar{f})(\sum \bar{c_1} \otimes \bar{c_2}) \\
&= (\bar{f} \otimes \bar{f})(\bar{\Delta}(\bar{c})).
\end{aligned}$$

Além disso, $\epsilon_D \bar{f}(\bar{c}) = \epsilon_D(f(c)) = \epsilon_C(c) = \bar{\epsilon}(\bar{c})$. Logo, $\bar{f}$ é morfismo de coálgebras. □

Em particular, tem-se o

Corolário 1.19. (Teorema do isomorfismo para coálgebras) *Seja $f : C \to D$ um morfismo de coálgebras. Então $\bar{f} : C/ker(f) \to Im(f)$ é um isomorfismo.*

1.3 A álgebra e a coálgebra duais

No que segue, se W é um k-espaço vetorial, então W^* denotará o k-espaço vetorial dual, $Hom(W, k)$.

Lema 1.20. *Sejam k um corpo, M, N e V três k-espaços vetoriais. Defina* *as seguintes funções lineares:*

$$\begin{array}{rcl} \phi : M^* \otimes V & \longrightarrow & Hom(M,V) \\ f \otimes g & \longmapsto & \phi(f \otimes v) : \quad \begin{array}{rcl} M & \longrightarrow & V \\ m & \longmapsto & f(m)v \end{array} \\ \phi' : Hom(M,N^*) & \longrightarrow & (M \otimes N)^* \\ g & \longmapsto & \phi'(g) : \quad \begin{array}{rcl} M \otimes N & \longrightarrow & k \\ m \otimes n & \longmapsto & g(m)(n) \end{array} \\ \rho : M^* \otimes N^* & \longrightarrow & (M \otimes N)^* \\ f \otimes g & \longmapsto & \rho(f \otimes g) : \quad \begin{array}{rcl} M \otimes N & \longrightarrow & k \\ m \otimes n & \longmapsto & f(m)g(n) \end{array} \end{array}$$

Então:
i) ϕ é injetiva. Além disso, se V tem dimensão finita, então ϕ é um isomorfismo;
ii) ϕ' é um isomorfismo e
iii) ρ é injetiva. Ademais, se N tem dimensão finita, então ρ é um isomorfismo.

Demonstração: Antes de tudo, provemos que as funções realmente são lineares. Para verificar que ϕ é linear construímos uma função balanceada $g : M^* \times V \to Hom(M,V)$ dada por $g(f,v)(m) = f(m)v$. Sejam $f, f_1, f_2 \in M^*$, $v, v_1, v_2 \in V$ e $r \in k$. Verifiquemos que se trata de uma aplicação balanceada:

$$\begin{aligned} g(f_1 + f_2, v)(m) &= (f_1 + f_2)(m)v \\ &= f_1(m)v + f_2(m)v \\ &= g(f_1, v)(m) + g(f_2, v)(m) \\ &= (g(f_1, v) + g(f_2, v))(m); \\ g(f, v_1 + v_2)(m) &= f(m)(v_1 + v_2) \\ &= f(m)v_1 + f(m)v_2 \\ &= g(f, v_1)(m) + g(f, v_2)(m) \\ &= (g(f, v_1) + g(f, v_2))(m); \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g(fr,v)(m) &= (fr)(m)v \\
&= (f(m)r)v \quad \text{(pela linearidade de f)} \\
&= f(m)(rv) \\
&= g(f,rv)(m).
\end{aligned}
$$

Assim, pelo Teorema **??**, existe um (único) homomorfismo de grupos ϕ : $M^* \otimes V \rightarrow Hom(M,V)$ tal que $\phi(f \otimes v)(m) = f(m)v$. É fácil ver que também é homomorfismo de k-espaços vetoriais.

A verificação de que $\phi' : Hom(M,N^*) \rightarrow (M \otimes N)^*$ é k-linear é trivial. Mostremos que $\rho : M^* \otimes N^* \rightarrow (M \otimes N)^*$ é k-linear. Sejam $f, f_1, f_2 \in M^*$, $g, g_1, g_2 \in N^*$ e $r \in k$ e defina $h : M^* \times N^* \rightarrow (M \otimes N)^*$ por $h(f,g)(m \otimes n) = f(m)g(n)$. Então,

$$
\begin{aligned}
h(f_1+f_2,g)(m \otimes n) &= (f_1+f_2)(m)g(n) \\
&= f_1(m)g(n) + f_2(m)g(n) \\
&= h(f_1,g)(m \otimes n) + h(f_2,g)(m \otimes n) \\
&= (h(f_1,g) + h(f_2,g))(m \otimes n); \\
h(f,g_1+g_2)(m \otimes n) &= f(m)(g_1+g_2)(n) \\
&= f(m)g_1(n) + f(m)g_2(n) \\
&= h(f,g_1)(m \otimes n) + h(f,g_2)(m \otimes n) \\
&= (h(f,g_1) + h(f,g_2))(m \otimes n); \\
h(fr,g)(m \otimes n) &= (fr)(m)g(n) \\
&= (f(m)r)g(n) \\
&= f(m)(rg(n)) \\
&= f(m)(rg)(n) \\
&= h(f,rg)(m \otimes n).
\end{aligned}
$$

Novamente, pelo Teorema **??**, existe um único homomorfismo de grupos ρ : $M^* \otimes N^* \rightarrow (M \otimes N)^*$ tal que $\rho(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m)g(n)$. É trivial verificar que ρ também é morfismo de k-espaços. Provemos, agora, os três itens do Lema.

i) Seja $x \in M^* \otimes V$, com $\phi(x) = 0$. Para provar que ϕ é injetiva, temos que mostrar que $x = 0$. Todo $x \in M^* \otimes V$ pode ser escrito na forma $x = \sum_i f_i \otimes v_i$, com $f_i \in M^*$, $v_i \in V$ e $\{v_i\}_i$ linearmente independente (esta soma é finita).

Se $\phi(x) = 0$ – a função nula $M \to V$ –, então $0 = \phi(x)(m) = \sum_i f_i(m)v_i$, $\forall m \in M$. Pela independência linear de $\{v_i\}_i$, resulta $f_i(m) = 0$ para qualquer i e qualquer m. Daí, cada $f_i = 0$ e, então, $x = 0$. Portanto, ϕ é injetiva.

Agora, suponha que V tem dimensão finita n. Então $V \simeq k^n = k \oplus k \oplus \cdots \oplus k$, n vezes. Daí,

$$M^* \otimes V \simeq M^* \otimes (\sum_{i=1}^{n} k) \simeq \sum_{i=1}^{n} (M^* \otimes k) = (M^* \otimes k)^n.$$

Ou seja, existe um isomorfismo $\phi_1 : M^* \otimes V \to (M^* \otimes k)^n$. Por outro lado,

$$Hom(M, V) \simeq Hom(M, k^n) \simeq Hom(M, k) \oplus \cdots \oplus Hom(M, k) = (Hom(M, k))^n.$$

Logo, existe um isomorfismo $\phi_2 : (Hom(M, k))^n \to Hom(M, V)$.

Seja $\varphi : M^* \otimes k \to Hom(M, k) = M^*$ o isomorfismo canônico dado por $\varphi(f \otimes r) = rf$, que é a função ϕ quando $V = k$.

Então existe um isomorfismo $\phi_3 : (M^* \otimes k)^n \to (Hom(M, k))^n$. Além disso, $\phi = \phi_2 \phi_3 \phi_1$. Como todos são isomorfismos, então ϕ é isomorfismo.

ii) Se $\{X_i\}_{i \in I}$ e Y são k-espaços vetoriais, então existe um isomorfismo canônico

$$Hom(\oplus_{i \in I} X_i, Y) \simeq \prod_{i \in I} Hom(X_i, Y).$$

Em particular, se I é uma base de M, então $M \simeq k^{(I)}$. Portanto, existem isomorfismos $u_1 : Hom(M, N^*) \to (Hom(k, N^*))^{(I)}$ e $u_2 : ((k \otimes N)^*)^{(I)} \to (M \otimes N)^*$.

Para $M = k$, a função ϕ' é um isomorfismo. Assim, obtemos um isomorfismo $u_3 : (Hom(k, N^*))^{(I)} \to ((k \otimes N)^*)^{(I)}$.

Além disso, $\phi' = u_2 u_3 u_1$. Portanto, ϕ' é um isomorfismo.

iii) Basta notar que $\rho = \phi' \phi_0$, em que ϕ_0 é o morfismo ϕ quando $V = N^*$. O resultado segue dos dois itens anteriores. $\square$

Por indução, usando o item (iii) do Lema anterior, obtemos:

Corolário 1.21. *Sejam $M_1, \cdots, M_n$ k-espaços vetoriais. Então a aplicação $\theta : M_1^* \otimes \cdots \otimes M_n^* \to (M_1 \otimes \cdots M_n)^*$ definida por $\theta(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = f_1(m_1) \cdots f_n(m_n)$ é injetiva. Além disso, se todos os espaços M_i são de dimensão finita, então θ é um isomorfismo.*

No Lema **??**, bastava que um dos espaços fosse de dimensão finita para que ρ fosse isomorfismo. No Corolário, exigimos que todos os espaços tenham dimensão finita. Essa requisição é necessária tendo em vista o processo de indução. De fato, se exigíssemos que apenas um espaço tivesse dimensão finita, digamos, M_1, então não conseguiríamos aplicar a indução para provar que a função $\theta : M_1^* \otimes M_2^* \otimes M_3^* \to (M_1 \otimes M_2 \otimes M_3)^*$ é isomorfismo, pois $M_1 \otimes M_2$ teria dimensão infinita.

Provamos anteriormente que a função

$$\begin{array}{rcl} \rho : M^* \otimes N^* & \longrightarrow & (M \otimes N)^* \\ f \otimes g & \longmapsto & \rho(f \otimes g) : \begin{array}{rcl} M \otimes N & \longrightarrow & k \\ m \otimes n & \longmapsto & f(m)g(n) \end{array} \end{array}$$

é injetiva e que, se N ou M tiver dimensão finita, então ρ é um isomorfismo. Essa função ρ é útil para definir uma multiplicação na álgebra dual de uma coálgebra.

Sejam V e W dois k-espaços vetoriais e $v : V \to W$ um morfismo. Então podemos definir uma função $v^* : W^* \to V^*$ por $v^*(f) = f \circ v$.[1]

Dada uma coálgebra (C, Δ, ϵ), queremos dar uma estrutura de álgebra a $C^* = Hom(C, k)$. Então precisamos definir funções $M : C^* \otimes C^* \to C^*$ e $u : k \to C^*$ que satisfaçam os axiomas de álgebra.

Defina $M : C^* \otimes C^* \to C^*$ por $M = \Delta^* \rho$:

$$C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*$$

[1] $(-)^* : k - Esp \to k - Esp$ é um funtor contravariante da categoria dos k-espaços vetoriais em si mesma.

Defina $u : k \to C^*$ por $u = \epsilon^*\psi$, em que $\psi : k \to k^*$ é o isomorfismo canônico:

$$k \xrightarrow{\psi} k^* \xrightarrow{\epsilon^*} C^*$$

Observe que, como Δ^*, ρ, ϵ^* e ψ são lineares, M e u também são.

Proposição 1.22. *(C^*, M, u) é uma álgebra.*

Demonstração: É preciso mostrar que os diagramas abaixo comutam:

$$\begin{tikzcd}
C^* \otimes C^* \otimes C^* \arrow[r, "M\otimes I"] \arrow[d, "I\otimes M"'] & C^* \otimes C^* \arrow[d, "M"] \\
C^* \otimes C^* \arrow[r, "M"] & C^*
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C^* \otimes C^* \arrow[dd, "M"] & \\
k \otimes C^* \arrow[ur, "u\otimes I"] \arrow[dr, "\sim"'] & & C^* \otimes k \arrow[ul, "I\otimes u"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
& C^* &
\end{tikzcd}$$

Mostremos que $M(I \otimes M) = M(M \otimes I)$. Denotando $M(f \otimes g)$ por $f * g$.

$$\begin{aligned}
M(f \otimes g)(c) &= \Delta^*\rho(f \otimes g)(c) \\
&= \rho(f \otimes g)(\Delta(c)) \\
&= \rho(f \otimes g)(\textstyle\sum(c_1 \otimes c_2)) \\
&= \textstyle\sum f(c_1)g(c_2).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(c) &= \textstyle\sum(f * g)(c_1)h(c_2) \\
&= \textstyle\sum f(c_{1_1})g(c_{1_2})h(c_2) \\
&= \textstyle\sum f(c_1)g(c_2)h(c_3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f * (g * h))(c) &= \textstyle\sum f(c_1)(g * h)(c_2) \\
&= \textstyle\sum f(c_1)g(c_{2_1})h(c_{2_2}) \\
&= \textstyle\sum f(c_1)g(c_2)h(c_3).
\end{aligned}$$

Logo, $(f * g) * h = f * (g * h)$. Resta provar que u é "unidade". De fato, isso fica provado se for mostrado que $u(1)$ é a identidade na multiplicação definida por M, ou seja, se mostrarmos que $u(1) * f = f * u(1) = f$, $\forall f \in C^*$.

Mas $u(\alpha)(c) = \epsilon^*\psi(\alpha)(c) = \psi(\alpha)(\epsilon(c)) = \alpha\epsilon(c)$. Em particular, se $\alpha = 1$, então $u(1) = \epsilon$.

$$\begin{array}{rcl} (u(1) * f)(c) & = & \sum u(1)(c_1)f(c_2) \\ & = & \sum \epsilon(c_1)f(c_2) \\ & = & \sum f(\epsilon(c_1)c_2) \\ & = & f(\sum \epsilon(c_1)c_2) \\ & = & f(c), \end{array}$$

pela propriedade da counidade. □

Definição 1.23. *Seja (C, Δ, ϵ) uma coálgebra. Então a álgebra (C^*, M, u) construída acima é dita a álgebra dual da coágebra C. A multiplicação de C^* é chamada de convolução.*

Pelo que fizemos acima, à toda coálgebra podemos associar uma álgebra dual. Surge, naturalmente, uma pergunta inversa: dada uma álgebra (A, M, u), podemos associar "canonicamente"uma estrutura de coálgebra a A^*?

No caso anterior, a definição da multiplicação vinha de Δ e da função ρ definida no Lema **??**:

$$M = \Delta^*\rho : C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*$$

Poderíamos tentar definir uma comultiplicação de forma análoga:

$$\Delta : A^* \xrightarrow{M^*} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\rho^{-1}} A^* \otimes A^*$$

Ou seja, queremos definir Δ como sendo $\rho^{-1}M^*$.

A dificuldade ao fazer isto é que ρ não é necessariamente invertível. O Lema **??** só nos garante isso no caso em que A tem dimensão finita.

Seja (A, M, u) uma álgebra de dimensão finita. Definimos $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$, $\Delta = \rho^{-1}M^*$, e $\epsilon : A^* \to k$, $\epsilon = \psi u^*$, em que $\psi : k^* \to k$ é o isomorfismo canônico, $\psi(f) = f(1)$. Com estas notações, temos o seguinte resultado:

Lema 1.24. *Se $f \in A^*$ e $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$, então $f(ab) = \sum_i g_i(a)h_i(b)$. Além disso, se $f(ab) = \sum_j g_j^{'}(a)h_j^{'}(b)$, então $\sum_i g_i \otimes h_i = \sum_j g_j^{'} \otimes h_j^{'}$.*

Demonstração: Temos que $\rho(\Delta(f))(a \otimes b) = \sum_i g_i(a)h_i(b)$. Mas $\Delta = \rho^{-1}M^*$. Logo, $M^*(f)(a \otimes b) = f(M(a \otimes b)) = f(ab) = \sum_i g_i(a)h_i(b)$.

Agora, se $\sum_j g_j^{'}(a)h_j^{'}(b) = f(ab)$, então $\rho(\sum_j g_j^{'} \otimes h_j^{'})(a \otimes b) = \rho(\sum_i g_i \otimes h_i)(a \otimes b)$. Pela injetividade de ρ, $\sum_j g_j^{'} \otimes h_j^{'} = \sum_i g_i \otimes h_i$. $\square$

Lembramos o corolário do Lema **??**: se $M_1, M_2, ..., M_n$ são k-espaços vetoriais, então a função

$$\begin{array}{rcl} \theta : M_1^* \otimes \cdots \otimes M_n^* & \longrightarrow & (M_1 \otimes \cdots \otimes M_n)^* \\ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n & \longmapsto & \theta(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) : \begin{array}{rcl} M_1 \otimes \cdots \otimes M_n & \longrightarrow & k \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_n & \longmapsto & f_1(m_1)\cdots f_n(m_n) \end{array} \end{array}$$

é injetiva.

Proposição 1.25. *Se (A, M, u) é uma álgebra de dimensão finita, então (A^*, Δ, ϵ) é uma coálgebra, com Δ e ϵ como definidas acima.*

Demonstração: Seja $f \in A^*$. Então $\Delta(f) = \sum_i h_i \otimes g_i$, $\Delta(g_i) = \sum_j g_{ij}^{'} \otimes g_{ij}^{''}$ e $\Delta(h_i) = \sum_j h_{ij}^{'} \otimes h_{ij}^{''}$. Daí,

$$\begin{array}{rclcl} (\Delta \otimes I)\Delta(f) & = & (\Delta \otimes I)(\sum_i h_i \otimes g_i) & = & \sum_{i,j} h_{ij}^{'} \otimes h_{ij}^{''} \otimes g_i \quad \text{e} \\ (I \otimes \Delta)\Delta(f) & = & (I \otimes \Delta)(\sum_i h_i \otimes g_i) & = & \sum_{i,j} h_i \otimes g_{ij}^{'} \otimes g_{ij}^{''}. \end{array}$$

Seja $\theta : A^* \otimes A^* \otimes A^* \to (A \otimes A \otimes A)^*$, $\theta(u \otimes v \otimes w)(a \otimes b \otimes c) = u(a)v(b)w(c)$. Vamos provar a coassociatividade de Δ usando a injetividade de θ - conforme o corolário citado.

$$\begin{array}{rcl} \theta((\Delta \otimes I)\Delta(f))(a \otimes b \otimes c) & = & \theta(\sum_{i,j}(h_{ij}^{'} \otimes h_{ij}^{''} \otimes g_i)(a \otimes b \otimes c) \\ & = & \sum_{i,j} h_{ij}^{'}(a)h_{ij}^{''}(b)g_i(c) \\ & = & \sum_i h_i(ab)g_i(c) \\ & = & f(abc). \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\theta((I\otimes\Delta)\Delta(f))(a\otimes b\otimes c) &= \theta(\sum_{i,j}(h_i\otimes g'_{ij}\otimes g''_{ij})(a\otimes b\otimes c)\\
&= \sum_{i,j} h_i(a)g'_{ij}(b)g''_{ij}(c)\\
&= \sum_{i} h_i(a)g_i(bc)\\
&= f(abc).
\end{aligned}
$$

Como $a, b, c \in A$ e $f \in A^*$ são arbitrários, pela injetividade de θ, temos a coassociatividade.

Além disso, como $\epsilon(f) = \psi u^*(f) = \psi(fu) = (fu)(1) = f(1)$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_i \epsilon(g_i)h_i\right)(a) &= \sum_i g_i(1)h_i(a)\\
&= f(1.a) = f(a) \quad \text{e}\\
\left(\sum_i \epsilon(h_i)g_i\right)(a) &= \sum_i h_i(1)g_i(a)\\
&= f(1.a) = f(a).
\end{aligned}
$$

Logo, $\sum_i \epsilon(g_i)h_i) = f = \sum_i \epsilon(h_i)g_i$, o que prova a propriedade da counidade.

□

Proposição 1.26. *i) Se $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras, então $f^* : D^* \to C^*$ é um morfismo de álgebras.*
ii) Se $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras de dimensão finita, então $f^* : B^* \to A^*$ é um morfismo de coálgebras.

Demonstração: i) Sejam $g, h \in D^*$ e $c \in C$. Sendo f morfismo de coálgebras, temos

$$
\begin{aligned}
(f^*(g*h))(c) &= (g*h)(f(c))\\
&= \sum g(f(c)_1)h(f(c)_2)\\
&= \sum g(f(c_1))h(f(c_2))\\
&= \sum (f^*(g))(c_1)(f^*(h))(c_2)\\
&= (f^*(g))*(f^*(h))(c).
\end{aligned}
$$

Portanto, $f^*(g * h) = (f^*(g)) * (f^*(h))$. Além disso, $f^*(\epsilon_D) = \epsilon_D f = \epsilon_C$, pois f é morfismo de coálgebras. Logo, f^* é morfismo de álgebras.

ii) Temos que provar que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} B^* \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\Delta_{B^*}"'] & A^* \arrow[d, "\Delta_{A^*}"] \\ B^* \otimes B^* \arrow[r, "f^* \otimes f^*"] & A^* \otimes A^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B^* \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr, "\epsilon_{B^*}"'] & & A^* \arrow[dl, "\epsilon_{A^*}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Seja $s \in B^*$. Então $(\Delta_{A^*} f^*)(s) = \Delta_{A^*}(sf) = \sum_i g_i \otimes h_i$. Sejam também $\Delta_{B^*}(s) = \sum_j p_j \otimes q_j$ e $\rho : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ a injeção canônica, tal como definida no Lema **??** – que é injetiva. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Tem-se que

$$\rho((\Delta_{A^*} f^*)(s))(a \otimes b) = \sum_i g_i(a) h_i(b) = (sf)(ab).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \rho((f^* \otimes f^*)\Delta_{B^*}(s))(a \otimes b) &= \rho(\sum_j p_j f \otimes q_j f)(a \otimes b) \\ &= \sum_j (p_j f)(a)(q_j f)(b) \\ &= \sum_j p_j(f(a)) q_j(f(b)) \\ &= s(f(a)f(b)) \\ &= s(f(ab)). \end{aligned}$$

A última igualdade decorre de f ser morfismo de álgebras. Como ρ é injetiva, o primeiro diagrama comuta.

Além disso,

$$(\epsilon_{A^*} f^*)(s) = \epsilon_{A^*}(sf) = (sf)(1) = s(f(1)) = s(1) = \epsilon_{B^*}(s).$$

Portanto, o segundo diagrama comuta e, daí, f^* é morfismo de coálgebras. $\square$

Corolário 1.27. *i)* $(-)^* : k - Cog \to k - Alg$ *é funtor contravariante.*
ii) $(-)^* : f.d.k - Alg \to k - Cog$ *é funtor contravariante.*

1.4 O dual finito de uma álgebra

Dada uma coálgebra (C, Δ, ϵ), conseguimos definir uma álgebra dual C^*, com $M = \Delta^*\rho$ e $u = \epsilon^*\psi$. No entanto, só obtivemos a dualização de uma álgebra A para uma coálgebra dual A^* no caso em que A tem dimensão finita. Vamos mostrar que, dada uma álgebra A, podemos "naturalmente"associar uma estrutura de coálgebra, agora não a A^*, mas a um subespaço $A^\circ \subseteq A^*$, que é chamado de dual finito de A.

Definição 1.28. *Seja (A, M, u) uma álgebra. O dual finito de A é o conjunto $A^\circ = \{f \in A^* : \exists I \lhd A; I \subseteq ker(f) \text{ e } dim(A/I) < \infty\}$.*

Quando um ideal I de A é tal que $dim(A/I) < \infty$, dizemos que I possui codimensão finita.

Lema 1.29. *Sejam V um espaço vetorial e $X, Y \subseteq V$ subespaços. Se X e Y possuem codimensão finita, então $X \cap Y$ também possui codimensão finita.*

Demonstração: Seja $\gamma : V \to V/X \times V/Y$ o morfismo de k-espaços vetoriais dado por $\gamma(v) = (v + X, v + Y)$. Então é fácil ver que $ker(\gamma) = X \cap Y$. Daí, pelo teorema do homomorfismo, $V/ker(\gamma) \simeq Im(\gamma) \subseteq V/X \times V/Y$. Mas $dim(V/X) < \infty$ e $dim(V/Y) < \infty$. Logo, $dim(V/ker(\gamma)) = dim(V/X \cap Y) < \infty$, isto é, $X \cap Y$ tem codimensão finita. □

Proposição 1.30. *A° é subespaço vetorial de A^*.*

Demonstração: Temos que mostrar que $0 \in A^\circ$; que, se $f, g \in A^\circ$, então $f+g \in A^\circ$ e que, se $\alpha \in k$ e $f \in A^\circ$, então $\alpha f \in A^\circ$. $0 \in A^\circ$, pois $ker(0) = A$ e, daí, $A/ker(0) = A/A = 0$, que possui dimensão finita. Tomando $I = ker(0)$, vê-se que I possui codimensão finita e, portanto, $0 \in A^\circ$.

Sejam $f, g \in A^\circ$. Por definição, existem ideais $I_f \lhd A$ e $I_g \lhd A$, com $I_f \subseteq ker(f)$ e $I_g \subseteq ker(g)$, tais que $dim(A/I_f) < \infty$ e $dim(A/I_g) < \infty$. Logo, $I_f \cap I_g \subseteq ker(f) \cap ker(g) \subseteq ker(f + g)$, ou seja, $I_f \cap I_g \lhd A$, com $I_f \cap I_g \subseteq ker(f + g)$. Além disso, pelo lema anterior, $dim(A/I_f \cap I_g) < \infty$. Portanto, $f + g \in A^\circ$. Sejam, agora, $\alpha \in k$ e $f \in A^\circ$. Para ver que $\alpha f \in A^\circ$, basta notar que $I_f \subseteq ker(f) \subseteq ker(\alpha f)$. □

Lema 1.31. *Seja $f : A \to B$ um morfismo de álgebras. Se $J \triangleleft B$ é tal que $dim(B/J) < \infty$, então $f^{-1}(J) \triangleleft A$ e $dim(A/f^{-1}(J)) < \infty$. Em outras palavras, imagem inversa de um ideal de codimensão finita é um ideal de codimensão finita.*

Demonstração: Considere $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} B/J$, com $\pi : B \to B/J$ a projeção canônica. Temos que $ker(\pi f) = \{a \in A : (\pi f)(a) = 0\} = \{a \in A : f(a) \in J\} = f^{-1}(J)$. Logo, $f^{-1}(J)$ é ideal (pois o kernel é ideal) e, pelo teorema do homomorfismo, $A/f^{-1}(J) = A/ker(\pi \circ f) \simeq Im(\pi \circ f) \subseteq B/J$. Mas $dim(B/J) < \infty$. Portanto, $dim(A/f^{-1}(J)) < \infty$. $\square$

Lema 1.32. *Seja $f : A \to B$ morfismo de álgebras. Então:*
i) $f^*(B^\circ) \subseteq A^\circ$.
ii) $\rho(A^\circ \otimes B^\circ) = (A \otimes B)^\circ$.
iii) $M^*(A^\circ) \subseteq \rho(A^\circ \otimes A^\circ)$.

A função ρ acima é aquela definida no Lema **??**, que é usada para definir a multiplicação da álgebra dual. Evidentemente, os conjuntos sobre os quais ela está definida em cada item acima varia no contexto. Mantivemos a mesma notação, para uma melhor assimilação das operações, visto que já usamos a função ρ diversas vezes anteriormente, sempre com a mesma notação.

Demonstração: i) Seja $g \in B^\circ$. É preciso mostrar que $\exists J \triangleleft A$ tal que $J \subseteq ker(f^*(g))$ e $dim(A/J) < \infty$. Por hipótese, $\exists I \triangleleft B$ tal que $I \subseteq ker(g)$ e $dim(B/I) < \infty$. Pelo Lema **??**, $f^{-1}(I) \triangleleft A$ e $dim(A/f^{-1}(I)) < \infty$. Lembrando que $f^*(g) = gf$ e tomando $J = f^{-1}(I)$, só falta mostrar que $J \subseteq ker(f^*(g)) = ker(gf)$. De fato, temos $(gf)(J) = g(f(f^{-1}(I))) \subseteq g(I) = 0$, pois $I \subseteq ker(g)$.

ii) Primeiro mostraremos que $\rho(A^\circ \otimes B^\circ) \subseteq (A \otimes B)^\circ$. Sejam $f \in A^\circ$ e $g \in B^\circ$. Então existem ideais $I \triangleleft A$ e $J \triangleleft B$ tais que $I \subseteq ker(f)$, com $dim(A/I) < \infty$, e $J \subseteq ker(g)$, com $dim(B/J) < \infty$.

Afirmação: $I \otimes B + A \otimes J \triangleleft A \otimes B$.

Sejam $\alpha, \beta \in I \otimes B + A \otimes J$. Então $\alpha = \sum_i \alpha_i^I \otimes \beta_i + \sum_j \alpha_j \otimes \beta_j^J$ e $\beta =$

$\sum_i \gamma_i^I \otimes \sigma_i + \sum_j \gamma_j \otimes \sigma_j^J$.

$$\alpha+\beta = \sum_i(\alpha_i^I \otimes \beta_i + \gamma_i^I \otimes \sigma_i)+\sum_j(\alpha_j \otimes \beta_j^J + \gamma_j \otimes \sigma_j^J) \in I \otimes B + A \otimes J.$$

Sejam $\alpha \in I \otimes B + A \otimes J$ e $\xi \in A \otimes B$. Então,

$$\begin{aligned} \xi\alpha &= \left(\sum_i \xi_i^A \otimes \xi_i^B\right)\left(\sum_j \alpha_j^I \otimes b_j + \sum_k a_k \otimes \alpha_k^J\right) \\ &= \sum_{i,j} \xi_i^A\alpha_j^I \otimes \xi_i^B b_j + \sum_{i,k} \xi_i^A a_k \otimes \xi_i^B \alpha_k^J. \end{aligned}$$

Como $I \triangleleft A$ e $J \triangleleft B$, então $\xi_i^A\alpha_j^I \in I$ e $\xi_i^B\alpha_k^J \in J$. Portanto, a primeira soma do lado direito está em $I \otimes B$ e a segunda, em $A \otimes J$. Ou seja, $\xi\alpha \in I \otimes B + A \otimes J$. Isso prova a afirmação.

Seja $T = I \otimes B + A \otimes J$ e considere o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} A \otimes B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_I \otimes \pi_J"'] & (A \otimes B)/T \arrow[dl, dashed, "h"] \\ A/I \otimes B/J & \end{tikzcd}$$

Para mostrar a existência de h, pelo teorema do homomorfismo, é suficiente mostrar que $T \subseteq ker(\pi_I \otimes \pi_J)$. O Lema **??** nos diz que, dados $f : V_1 \to V_2$ e $g : W_1 \to W_2$ morfismos de k-espaços vetoriais, tem-se $ker(f \otimes g) = ker(f) \otimes W_1 + V_1 \otimes ker(g)$. Tomando $f = \pi_I$, $V_1 = A$, $V_2 = A/I$, $g = \pi_J$, $W_1 = B$ e $W_2 = B/J$, temos $ker(\pi_I) = I$ e $ker(\pi_J) = J$. Assim, $T = ker(\pi_I \otimes \pi_J)$.

Daí, pelo teorema do homomorfismo, $(A \otimes B)/T \simeq A/I \otimes A/J$ e, pelo Corolário **??**, $dim(A/I \otimes A/J) < \infty$. Portanto, $dim((A \otimes B)/T) < \infty$. Logo, T possui codimensão finita. Se mostrarmos que $T \subseteq ker(\rho(f \otimes g))$, teremos provado que $\rho(f \otimes g) \in (A \otimes B)^\circ$. De fato,

$$\rho(f \otimes g)(\sum_i \alpha_i^I \otimes b_i + \sum_j a_j \otimes \beta_j^J) = \sum_i f(\alpha_i^I)g(b_i) + \sum_j f(a_j)g(\beta_j^J) = 0,$$

pois $\alpha_i^I \in I \subseteq ker(f)$ e $\beta_j^J \in J \subseteq ker(g)$. Logo, $\rho(f \otimes g) \in (A \otimes B)^\circ$.

Temos ainda que provar a inclusão contrária, ou seja, mostrar que $(A \otimes B)^\circ \subseteq \rho(A^\circ \otimes B^\circ)$.

Seja $h \in (A \otimes B)^\circ$. Então $\exists\, \Omega \lhd A \otimes B$ tal que $\Omega \subseteq ker(h)$ e $dim((A \otimes B)/\Omega) < \infty$. Consideremos $I = \{a \in A : a \otimes 1 \in \Omega\}$ e $J = \{b \in B : 1 \otimes b \in \Omega\}$. Então $I \lhd A$ e $J \lhd B$ (se $a \in A$ e $\alpha \in I$, $a\alpha \in I$, pois $a\alpha \otimes 1 = (a \otimes 1)(\alpha \otimes 1)$ e $\alpha \otimes 1 \in \Omega$ e $\Omega \lhd A \otimes B$; analogamente, $\alpha a \in I$).

Definindo $\varphi : A \to A \otimes B$, por $\varphi(a) = a \otimes 1$, segue que φ é morfismo de álgebras e $\varphi^{-1}(\Omega) = \{a \in A : \varphi(a) \in \Omega\} = \{a \in A : a \otimes 1 \in \Omega\} = I$. Pelo Lema **??**, I possui codimensão finita. Analogamente, definindo $\sigma : B \to A \otimes B$, por $\sigma(b) = 1 \otimes b$, tem-se $J = \sigma^{-1}(\Omega)$ e, daí, J tem codimensão finita.

Seja $T = I \otimes B + A \otimes J$. Então T possui codimensão finita, pois $(A \otimes B)/T \simeq A/I \otimes B/J$. Mostremos que $T \subseteq \Omega$. Seja $x \in T$. Então $x = \displaystyle\sum_i \alpha_i^I \otimes b_i + \sum_j a_j \otimes \beta_j^J = \sum_i (\alpha_i^I \otimes 1)(1 \otimes b_i) + \sum_j (a_j \otimes 1)(1 \otimes \beta_j^J)$. Como $\alpha_i^I \otimes 1 \in \Omega$ e $1 \otimes \beta_j^J \in \Omega$, segue que $x \in \Omega$, pois Ω é ideal de $A \otimes B$. Além disso, $h(T) = 0$, pois $T \subseteq \Omega \subseteq ker(h)$. Podemos, pelo teorema do homomorfismo, considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "\pi_I \otimes \pi_J"] \arrow[d, "h"'] & A/I \otimes B/J \arrow[r, "\sim", "\tau"'] \arrow[dl, dashed, "\bar{h} = h'\tau"] & (A \otimes B)/T \arrow[dll, "\exists! h'"] \\
k & &
\end{tikzcd}$$

Daí, $\bar{h} \in (A/I \otimes B/J)^*$. Como $A/I, B/J$ são de dimensão finita, segue que a função definida no Lema **??** $\theta : (A/I)^* \otimes (B/J)^* \to (A/I \otimes B/J)^*$ é isomorfismo. Portanto, existem $\{\gamma_i\}_i \subseteq (A/I)^*$ e $\{\delta_i\}_i \subseteq (B/J)^*$ tais que

$\bar{h} = \theta(\sum_i \gamma_i \otimes \delta_i)$. Então,

$$\begin{array}{rcl} h(a \otimes b) & = & (\bar{h}(\pi_I \otimes \pi_J))(a \otimes b) \\ & = & \bar{h}((a+I) \otimes (b+j)) \\ & = & \theta(\sum_i \gamma_i \otimes \delta_i)((a+I) \otimes (b+J)) \\ & = & \sum_i \gamma_i(a+I)\delta_i(b+J) \\ & = & \sum_i (\gamma_i \pi_I)(a)(\delta_i \pi_J)(b) \\ & = & \rho(\sum_i (\gamma_i \pi_I) \otimes (\delta_i \pi_J))(a \otimes b). \end{array}$$

Portanto, $h = \rho(\sum_i (\gamma_i \pi_I) \otimes (\delta_i \pi_J))$. Falta mostrar que $\gamma_i \pi_I \in A^\circ$ e $\delta_i \pi_J \in B^\circ$. Isso ocorre, pois $(\gamma_i \pi_I)(I) = 0$ e $(\delta_i \pi_J)(J) = 0$, isto é, $I \lhd A$ e $J \lhd B$, $I \subseteq ker(\gamma_i \pi_I)$ e $J \subseteq ker(\delta_i \pi_J)$, com $dim(A/I) < \infty$ e $dim(B/J) < \infty$. Destarte, $h \in \rho(A^\circ \otimes B^\circ)$.

iii) Seja $f \in A^\circ$. Então existe $I \lhd A$, com $I \subseteq ker(f)$ e $dim(A/I) < \infty$. Observe que $M^*(f) = fM : A \otimes A \to k$, ou seja, $fM \in (A \otimes A)^*$.

Temos $I \otimes A + A \otimes I$ é um ideal de $A \otimes A$, que possui codimensão finita. Pelo item (ii), $\rho(A^\circ \otimes A^\circ) = (A \otimes A)^\circ$. Mostremos que $I \otimes A + A \otimes I \subseteq ker(fM)$. De fato,

$$\begin{array}{rcl} (fM)\left(\sum_i \alpha_i^I \otimes a_i + \sum_j a'_j \otimes \alpha_j'^I\right) & = & f\left(\sum_i \alpha_i^I a_i + \sum_j a'_j \alpha_j'^I\right) \\ & = & \sum_i f(\alpha_i^I a_i) + \sum_j f(a'_j \alpha_j'^I) = 0. \end{array}$$

A última igualdade ocorre porque $\alpha_i^I a_i \in I$, $a'_j \alpha_j'^I \in I$ e $I \subseteq ker(f)$. Portanto, $M^*(f) \in (A \otimes A)^\circ = \rho(A^\circ \otimes A^\circ)$. $\square$

Por este último resultado, sabemos que $\rho : A^\circ \otimes A^\circ \to (A \otimes A)^\circ$ é isomorfismo e, portanto, invertível. Como havíamos dito, a nossa dificuldade para definir uma estrutura de coálgebra sobre o espaço dual de uma álgebra surgia de não podermos inverter a função ρ para os casos de dimensão infinita. Agora, mostramos que é possível invertê-la, desde que a restrinjamos ao dual finito – cuja dimensão não é necessariamente finita. Além disso, sabemos que $M^*|_{A^\circ} : A^\circ \to M^*(A^\circ) \subseteq \rho(A^\circ \otimes A^\circ)$. Logo, podemos fazer a composição $A^\circ \to \rho(A^\circ \otimes A^\circ) \to A^\circ \otimes A^\circ$, dada por $\rho^{-1}M^*|_{A^\circ}$. Definimos, então, $\Delta : A^\circ \to A^\circ \otimes A^\circ$ por $\Delta = \rho^{-1}M^*|_{A^\circ}$; definimos também $\epsilon : A^\circ \to k$, $\epsilon(f) = f(1)$. Ao invés de escrevermos $M^*|_{A^\circ}$, abreviaremos por M^*, ficando clara a restrição da aplicação ao dual finito pelo contexto.

Teorema 1.33. *$(A^\circ, \Delta, \epsilon)$ é uma coálgebra.*

Demonstração: Sejam $\rho : A^\circ \otimes A^\circ \to (A \otimes A)^\circ \subseteq (A \otimes A)^*$, $j : A^\circ \hookrightarrow A^*$ e $\theta : A^\circ \otimes A^\circ \otimes A^\circ \to (A \otimes A \otimes A)^*$. Vamos provar a comutatividade do seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & & (A \otimes A)^* \arrow[r, "(I \otimes M)^*"] & (A \otimes A \otimes A)^* \\
A^* \arrow[r, "M^*"'] \arrow[urr, "M^*"] & (A \otimes A)^* \arrow[urr, "(M \otimes I)^*"'] & & \\
 & & A^\circ \otimes A^\circ \arrow[r, "I \otimes \Delta"] \arrow[uu, "\rho"] & A^\circ \otimes A^\circ \otimes A^\circ \arrow[uu, "\theta"'] \\
A^\circ \arrow[r, "\Delta"'] \arrow[uu, "j"] \arrow[urr, "\Delta"] & A^\circ \otimes A^\circ \arrow[uu, "\rho"'] \arrow[urr, "\Delta \otimes I"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Observe que o diagrama da face inferior do cubo é exatamente o da coassociatividade de Δ. O objetivo é mostrar, através da comutatividade das outras faces do diagrama, que $\theta(\Delta \otimes I)\Delta = \theta(I \otimes \Delta)\Delta$, o que, pela injetividade de θ, implica $(\Delta \otimes I)\Delta = (I \otimes \Delta)\Delta$.

Diagrama frontal (DF): seja $f \in A^\circ$. Note que $M^*(f) = (M^*j)(f)$. Além disso, $(\rho\Delta)(f) = (\rho\rho^{-1}M^*)(f) = M^*(f) = (M^*j)(f)$. Logo, $\rho\Delta = M^*j$. Observe que este diagrama é igual ao diagrama lateral esquerdo.

Diagrama lateral direito (DLD): tem-se que mostrar que $\theta(\Delta \otimes I) = (M \otimes I)^*\rho$. Seja $f \in A^\circ$. Então $\Delta(f) = \sum_i f_i^1 \otimes f_i^2$ e $\rho^{-1}M^*(f) = \sum_i f_i^1 \otimes f_i^2$. Logo, $fM = M^*(f) = \sum_i \rho(f_i^1 \otimes f_i^2)$. Portanto, $\forall a, b \in A$, $f(ab) = \sum_i \rho(f_i^1 \otimes f_i^2)(a \otimes b) = \sum_i f_i^1(a) f_i^2(b)$.

Sejam $f, g \in A^\circ$ e $a, b, c \in A$. Então tem-se:

$$\begin{aligned}
(\theta(\Delta \otimes I)(f \otimes g))(a \otimes b \otimes c) &= \theta(\sum_i f_i^1 \otimes f_i^2 \otimes g)(a \otimes b \otimes c) \\
&= \sum_i f_i^1(a) f_i^2(b) g(c) \\
&= f(ab)g(c). \\
((M \otimes I)^* \rho)(f \otimes g)(a \otimes b \otimes c) &= (M \otimes I)^*(\rho(f \otimes g))(a \otimes b \otimes c) \\
&= (\rho(f \otimes g))((M \otimes I)(a \otimes b \otimes c)) \\
&= \rho(f \otimes g)(ab \otimes c) \\
&= f(ab)g(c).
\end{aligned}$$

Logo, $\theta(\Delta \otimes I) = (M \otimes I)^* \rho$.

Diagrama traseiro (DT): é semelhante ao diagrama lateral direito.

Diagrama superior (DS): lembrando que M é a multiplicação da álgebra e que $(-)^*$ é contravariante, tem-se $(M \otimes I)M^* = (M(M \otimes I))^* = (M(I \otimes M))^* = (I \otimes M)^* M^*$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\theta(\Delta \otimes I)\Delta &= (M \otimes I)^* \rho \Delta && (DLD) \\
&= (M \otimes I)^* M^* j && (DF) \\
&= (I \otimes M)^* M^* j && (DS) \\
&= (I \otimes M)^* \rho \Delta && (DF) \\
&= \theta(I \otimes \Delta)\Delta && (DT)
\end{aligned}$$

Para provar a propriedade da counidade, seja $f \in A^\circ$ e $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$. Então $sum_i(\epsilon(g_i)h_i)(a) = \sum_i (g_i(1)h_i)(a) = \sum_i g_i(1)h_i(a) = f(1.a) = f(a)$, $\forall a \in A$. Analogamente, para o outro caso. $\square$

Capítulo 2

Comódulos

No capítulo anterior, apresentamos as coálgebras como objetos duais das álgebras. Agora, dualizaremos a noção de módulo. Um módulo é um módulo sobre um anel R; na dualização, um comódulo será um comódulo sobre uma coálgebra C.

2.1 Definições e exemplos

Definição 2.1. *Seja (A, M, u) uma k-álgebra. Um A-módulo à esquerda é um par (X, μ), em que X é um k-espaço vetorial e $\mu : A \otimes X \to X$ é um morfismo de k-espaços vetoriais tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes X \arrow[r, "I\otimes\mu"] \arrow[d, "M\otimes I"'] & A \otimes X \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes X \arrow[r, "\mu"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes X \arrow[dd, "\mu"] \\
k \otimes X \arrow[ur, "u\otimes I"] \arrow[dr, "\sim"'] & \\
 & X
\end{tikzcd}
$$

Nos diagramas acima não indicamos precisamente quais são as identidades I em cada caso, ficando claro pelo contexto. Sempre que não houver possibilidade de confusão, faremos o mesmo.

A definição de A-módulo à direita é análoga, diferindo apenas na definição da função μ que seria agora $\mu : X \otimes A \to X$. Chamaremos essa função μ de aplicação de estrutura. Quando dualizarmos a noção de módulo para comódulo, a função que fará o papel dessa μ também será chamada aplicação de estrutura. Isso não levará a confusões.

Na definição de A-módulo, partimos de um k-espaço vetorial dado e de uma k-álgebra dada e, essencialmente, definimos uma operação que relaciona as duas estruturas. Para a dualização, partiremos também de um espaço vetorial, mas agora usaremos uma coálgebra no lugar de uma álgebra - o que está no espírito da idéia de dualização, já que coálgebra é uma noção dual de uma álgebra.

Definição 2.2. *Seja (C, Δ, ϵ) um k-coálgebra. Um C-comódulo à direita é um par (M, ρ), em que M é um k-espaço vetorial e $\rho : M \to M \otimes C$ é um morfismo de k-espaços vetoriais tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "I\otimes\Delta"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\rho\otimes I"'] & M \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "\sim"] \arrow[dd, "\rho"'] & \\
& M \otimes k \\
M \otimes C \arrow[ur, "I\otimes\epsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

A comutatividade dos diagramas diz que $(\Delta \otimes I)\rho = (I \otimes \rho)\rho$ e que $(\epsilon \otimes I)\rho$ é o isomorfismo canônico.

Como no caso das coálgebras, também temos uma notação de Sweedler para comódulos. Se $m \in M$, então escrevemos $\rho(m) = \sum m_0 \otimes m_1$, em que $m_0 \in M$ e $m_1 \in C$.

Explicitamente, o significado da comutatividade do primeiro diagrama nos diz que $\sum m_0 \otimes m_{1_1} \otimes m_{1_2} = \sum m_{0_0} \otimes m_{0_1} \otimes m_1 = \sum m_0 \otimes m_1 \otimes m_2$. O segundo diagrama diz que $\sum m_0 \, \epsilon(m_1) = m$.

Exemplo 2.3. Toda coálgebra (C, Δ, ϵ) é um C-comódulo à direita e à esquerda, com a aplicação de estrutura dada por Δ. De fato, o primeiro diagrama é exatamente o diagrama da comultiplicação da coálgebra (substituindo ρ por Δ), que comuta – pois C é coálgebra; o segundo diagrama é um dos lados do diagrama da counidade da coálgebra.

Exemplo 2.4. Sejam (C, Δ, ϵ) uma k-coálgebra e X um k-espaço vetorial. Então $X \otimes C$ é um C-comódulo à direita, com a aplicação de estrutura $\rho : X \otimes C \to X \otimes C \otimes C$ dada por $\rho = I_X \otimes \Delta$, em que I_X é a identidade em X.

Temos que verificar que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes C \arrow[r, "I_X \otimes \Delta"] \arrow[d, "I_X \otimes \Delta"'] & X \otimes C \otimes C \arrow[d, "I_{X \otimes C} \otimes \Delta"] \\
X \otimes C \otimes C \arrow[r, "I_X \otimes \Delta \otimes I"] & X \otimes C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}$$

De fato, sejam $x \in X$ e $c \in C$, então

$$\begin{aligned}
(I_X \otimes \Delta \otimes I)(I_X \otimes \Delta)(x \otimes c) &= (I_X \otimes \Delta \otimes I)(x \otimes \Delta(c)) \\
&= (I_X \otimes \Delta \otimes I)(x \otimes (\sum c_1 \otimes c_2)) \\
&= \sum (I_X \otimes \Delta \otimes I)(x \otimes c_1 \otimes c_2) \\
&= \sum x \otimes \Delta(c_1) \otimes c_2 \\
&= \sum x \otimes c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 \\
&= \sum x \otimes c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(I_{X \otimes C} \otimes \Delta)(I_X \otimes \Delta)(x \otimes c) &= (I_{X \otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes \Delta(c)) \\
&= (I_{X \otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes (\sum c_1 \otimes c_2)) \\
&= \sum (I_{X \otimes C} \otimes \Delta)(x \otimes c_1 \otimes c_2) \\
&= \sum x \otimes c_1 \otimes \Delta(c_2) \\
&= \sum x \otimes c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} \\
&= \sum x \otimes c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.
\end{aligned}$$

Portanto, $(I_X \otimes \Delta \otimes I)(I_X \otimes \Delta) = (I_{X \otimes C} \otimes \Delta)(I_X \otimes \Delta)$, o que mostra a comutatividade do primeiro diagrama. Resta mostrar a comutatividade do segundo diagrama, isto é,

$$\begin{tikzcd}
X \otimes C \arrow[dr, "\sim"] \arrow[dr, "\psi"'] \arrow[dd, "I_X \otimes \Delta"'] & \\
& X \otimes C \otimes k \\
X \otimes C \otimes C \arrow[ur, "I_{X\otimes C} \otimes \epsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
(I_{X\otimes C} \otimes \epsilon)(I_X \otimes \Delta)(x \otimes c) &= (I_{X\otimes C} \otimes \epsilon)(x \otimes (\sum c_1 \otimes c_2)) \\
&= (I_{X\otimes C} \otimes \epsilon)(\sum x \otimes c_1 \otimes c_2) \\
&= \sum (I_{X\otimes C} \otimes \epsilon)(x \otimes c_1 \otimes c_2) \\
&= \sum x \otimes c_1 \otimes \epsilon(c_2) \\
&= \sum x \otimes c_1\epsilon(c_2) \otimes 1 \\
&= x \otimes \sum c_1\epsilon(c_2) \otimes 1 \\
&\overset{(*)}{=} x \otimes c \otimes 1 \\
&= \psi(x \otimes c).
\end{aligned}$$

Na igualdade $(*)$ foi usada a propriedade da counidade.

Definição 2.5. *Sejam A uma k-álgebra, (X, ν) e (Y, μ) dois A-módulos à esquerda. Uma aplicação k-linear $f : X \to Y$ é dita um morfismo de A-módulos se o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes X \arrow[r, "I\otimes f"] \arrow[d, "\nu"'] & A \otimes Y \arrow[d, "\mu"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Definição 2.6. *Sejam C uma k-coálgebra, (M, ρ) e (N, ϕ) dois C-comódulos à direita. Uma função k-linear $g : M \to N$ é dita um morfismo de C-*

comódulos se o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho"'] & N \arrow[d, "\phi"] \\ M \otimes C \arrow[r, "g\otimes I"'] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

A comutatividade do diagrama pode ser escrita na notação sigma como

$$\phi(g(c)) = \sum g(c_{(0)}) \otimes c_{(1)}.$$

Os C-comódulos (à direita) com os morfismos definidos como acima determinam uma categoria, a categoria dos C-comódulos (à direita), denotada por $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$.

2.2 Subcomódulos e comódulos quociente

Definição 2.7. *Seja (M, ρ) um C-comódulo à direita. Um k-subespaço $N \subseteq M$ é dito um C-subcomódulo à direita se $\rho(N) \subseteq N \otimes C$.*

Proposição 2.8. *Sejam M um C-comódulo à direita e $N \subseteq M$ um C-subcomódulo. Então existe uma única estrutura de C-comódulo à direita em M/N tal que $\pi : M \to M/N$ é um morfismo de comódulos.*

Demonstração: O teorema do homomorfismo (de espaços vetoriais) diz que, se $f : M \to A$ é um homomorfismo de espaços vetoriais e $N \subseteq ker(f)$ é um subespaço, então existe um único homomorfismo $\bar{f} : M/N \to A$ tal que $\bar{f}\pi = f$.

Agora, $(\pi \otimes I)\rho(N) \subseteq (\pi \otimes I)(N \otimes C) \subseteq \pi(N) \otimes C = 0$, pois $\pi(N) = 0$. Logo, $N \subseteq ker((\pi \otimes I)\rho)$. Portanto, existe um único homomorfismo $\bar{\rho}$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\pi"] \arrow[d, "\rho"'] \arrow[drr, "(\pi\otimes I)\rho"] & & M/N \arrow[d, "\bar{\rho}"] \\ M\otimes C \arrow[rr, "\pi\otimes I"] & & (M/N)\otimes C \end{tikzcd}$$

Daí, para qualquer $m \in M$,

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\bar{m}) &= \bar{\rho}\pi(m) \\ &= (\pi\otimes I)\rho(m) \\ &= (\pi\otimes I)(\sum m_0\otimes m_1) \\ &= \sum \pi(m_0)\otimes m_1 \\ &= \sum \bar{m}_0\otimes m_1. \end{aligned}$$

Portanto, $\bar{\rho}(\bar{m}) = \sum \bar{m}_0 \otimes m_1$. Afirmamos que $(M/N, \bar{\rho})$ é um C-comódulo à direita.

É preciso verificar que $(I\otimes\Delta)\bar{\rho} = (\bar{\rho}\otimes I)\bar{\rho}$.

$$(I\otimes\Delta)\bar{\rho}(\bar{m}) = (I\otimes\Delta)(\sum \bar{m}_0\otimes m_1) = \sum \bar{m}_0\otimes m_1\otimes m_2;$$

$$(\bar{\rho}\otimes I)\bar{\rho}(\bar{m}) = (\bar{\rho}\otimes I)(\sum \bar{m}_0\otimes m_1) = \sum \bar{\rho}(\bar{m}_0)\otimes m_1 = \sum \bar{m}_0\otimes m_1\otimes m_2$$

Portanto, $(I\otimes\Delta)\bar{\rho} = (\bar{\rho}\otimes I)\bar{\rho}$, como queríamos.

A unicidade da estrutura decorre da unicidade de $\bar{\rho}$ para que o diagrama comute.

Resta ainda mostrar que $\pi : M \to M/N$ é morfismo de comódulos. Para isto, o seguinte diagrama tem que comutar:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"'] & M/N \arrow[d, "\bar{\rho}"] \\ M\otimes C \arrow[r, "\pi\otimes I"] & (M/N)\otimes C \end{tikzcd}$$

Mas este é exatamente o diagrama anterior que sabemos que comuta. $\square$

Proposição 2.9. *Sejam M e N dois C-comódulos à direita e $f : M \to N$ um morfismo de comódulos. Então $Im(f)$ é um C-subcomódulo de N e $Ker(f)$ é um C-subcomódulo de M.*

Demonstração: Sejam $\rho_M : M \to M \otimes C$ e $\rho_N : N \to N \otimes C$ as respectivas aplicações de estrutura dos dois C-comódulos. Como f é morfismo de comódulos, temos $(f \otimes I)\rho_M(Ker(f)) = \rho_N f(Ker(f)) = 0$.

Logo, $\rho_M(Ker(f)) \subseteq Ker(f \otimes I) = Ker(f) \otimes C$. Esta última igualdade decorre do Lema **??**. Destarte, $Ker(f)$ é subcomódulo de M.

Por outro lado, $\rho_N(Im(f)) = (\rho_N f)(M) = (f \otimes I)\rho_M(M) \subseteq Im(f) \otimes C$. Portanto, $Im(f)$ é subcomódulo de N. $\square$

Teorema 2.10. (Teorema do isomorfismo) *Sejam $\pi : M \to M/Ker(f)$, $i : Im(f) \hookrightarrow N$ e $f : M \to N$ morfismos de C-comódulos à direita. Então existe um único isomorfismo de C-comódulos $\bar{f} : M/Ker(f) \to Im(f)$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\
M/Ker(f) \arrow[r, "\bar{f}"] & Im(f) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Demonstração: Pelo teorema do isomorfismo de espaços vetoriais, existe uma única função k-linear $\bar{f} : M/Ker(f) \to Im(f)$ tal que o diagrama comuta, i.e., $\bar{f}(\bar{m}) = f(m)$. Além disso, essa função é isomorfismo de espaços vetoriais. Para provar o teorema, então, só precisamos verificar que $\bar{f}$ é morfismo de comódulos.

Sejam $\omega : M/Ker(f) \to (M/Ker(f)) \otimes C$ e $\vartheta : Im(f) \to Im(f) \otimes C$ as aplicações de estrutura dos respectivos comódulos. É preciso mostrar que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
M/Ker(f) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\omega"'] & Im(f) \arrow[d, "\vartheta"] \\
(M/Ker(f)) \otimes C \arrow[r, "\bar{f}\otimes I"] & Im(f) \otimes C
\end{tikzcd}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\bar{f} \otimes I)\omega(\bar{m}) &= (\bar{f} \otimes I)(\sum \bar{m}_0 \otimes m_1) \\
&= \sum \bar{f}(\bar{m}_0) \otimes m_1 \\
&= \sum f(m_0) \otimes m_1 \\
&= \sum f(m)_0 \otimes f(m)_1 \\
&= \vartheta(f(m)) \\
&= (\vartheta\bar{f})(\bar{m})
\end{aligned}$$

A quarta igualdade ocorre, pois f é morfismo de comódulos. Como isto vale para todo $\bar{m} \in M/Ker(f)$, segue que $(\bar{f} \otimes I)\omega = \vartheta\bar{f}$, ou seja, o diagrama comuta. Isto termina a demonstração. □

2.3 Módulos racionais

Sejam C uma coálgebra e C^* sua álgebra dual. Se M é um k-espaço vetorial e $\omega : M \to M \otimes C$ é uma aplicação k-linear, defina $\psi_\omega : C^* \otimes M \to M$ por $\psi_\omega = \phi(\gamma \otimes I_M)(I_{C^*} \otimes T)(I_{C^*} \otimes \omega)$, em que $\phi : k \otimes M \to M$ é o isomorfismo canônico, $T : M \otimes C \to C \otimes M$ é a função"twist", $T(m \otimes c) = c \otimes m$ (ver Exemplo **??**) e $\gamma : C^* \otimes C \to k$ é dada por $\gamma(f \otimes c) = f(c)$.

Proposição 2.11. *Existe $\gamma : C^* \otimes C \to k$ k-linear dada por $\gamma(f \otimes c) = f(c)$.*

Demonstração: Seja $h : C^* \times C \to k$ dada por $h(f, c) = f(c)$. Temos que h é balanceada. De fato, sejam $f, f_1, f_2 \in C^*$ e $c, c_1, c_2 \in C$. Então $h(f_1 + f_2, c) = (f_1 + f_2)(c) = f_1(c) + f_2(c) = h(f_1, c) + h(f_2, c)$; $h(f, c_1 + c_2) =$

$f(c_1+c_2) = f(c_1)+f(c_2) = h(f,c_1)+h(f,c_2)$, pela linearidade de f, e $h(fr,c) = (fr)(c) = f(c)r = rf(c) = f(rc) = h(f,rc)$, $\forall\, r \in k$. Portanto, existe um único homomorfismo $\gamma : C^* \otimes C \to k$ tal que $\gamma(f \otimes c) = f(c)$. $\square$

Isso nos mostra que ψ_ω é k-linear, pois é composição de funções lineares. Definida ψ_ω, queremos dar uma expressão para $\psi_\omega(f \otimes m)$ sabendo que $\omega(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$. Calculando explicitamente, sejam $m \in M$ e $f \in C^*$:

$$\begin{aligned}
\psi_\omega(f \otimes m) &= \phi(\gamma \otimes I_M)(I_{C^*} \otimes T)(I_{C^*} \otimes \omega)(f \otimes m) \\
&= \phi(\gamma \otimes I_M)(I_{C^*} \otimes T)(f \otimes (\sum_i m_i \otimes c_i)) \\
&= \phi(\gamma \otimes I_M)(f \otimes (\sum_i c_i \otimes m_i)) \\
&= \phi(\gamma \otimes I_M)(\sum_i (f \otimes c_i \otimes m_i)) \\
&= \phi(\sum_i f(c_i) \otimes m_i) = \sum_i f(c_i) m_i
\end{aligned}$$

Portanto, se $\omega(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$, então $\psi_\omega(f \otimes m) = \sum_i f(c_i) m_i$.

Proposição 2.12. *(M,ω) é um C-comódulo à direita se, e somente se, (M,ψ_ω) é um C^*-módulo à esquerda.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que (M,ω) seja um C-comódulo à direita. Denotando $f \cdot m = \psi_\omega(f \otimes m) = \sum f(m_1)m_0$, tem-se que $1_{C^*} \cdot m = \epsilon \cdot m = \sum \epsilon(m_1)m_0 = m$, pela comutatividade do segundo diagrama. Além disso, sejam $f, g \in C^*$ e $m \in M$:

$$\begin{aligned}
f \cdot (g \cdot m) &= f \cdot \sum g(m_1)m_0 \\
&= \sum g(m_1)(f \cdot m_0) \text{ (pela linearidade de } \psi_\omega) \\
&= \sum g(m_1) f(m_0)_1 (m_0)_0 \\
&= \sum g(m_2) f(m_1) m_0 \\
&= \sum f(m_1) g(m_2) m_0 \\
&= \sum (fg)(m_1) m_0 \\
&= (fg) \cdot m
\end{aligned}$$

É claro, pela linearidade de ψ_ω, que $(f+g)\cdot m = f\cdot m + g\cdot m$ e que $f\cdot(m_1+m_2) = f\cdot m_1 + f\cdot m_2$. Logo, (M,ψ_ω) é um C^*-módulo à esquerda.

($\Leftarrow$) Suponha que (M,ψ_ω) seja um C^*-módulo à esquerda. Precisamos mostrar que (M,ω) é um C-comódulo à direita. Escrevemos $\omega(m) = \sum m_0 \otimes m_1$, com $m_0 \in M$ e $m_1 \in C$.

Como $\epsilon\cdot m = m$, segue que $\sum \epsilon(m_1)m_0 = m$; daí,

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(I\otimes\epsilon)\omega(m) &= \varphi^{-1}(I\otimes\epsilon)(\sum m_0\otimes m_1)\\
&= \varphi^{-1}(\sum m_0\otimes\epsilon(m_1))\\
&= \sum m_0\epsilon(m_1)\\
&= \sum \epsilon(m_1)m_0\\
&= m.
\end{aligned}$$

$\varphi : M \to M\otimes k$ é o isomorfismo canônico. Isto prova a comutatividade do segundo diagrama da definição de comódulo. Resta provar que $(\omega\otimes I)\omega = (I\otimes\Delta)\omega$. Para isso, consideremos o isomorfismo canônico $\phi : M\otimes k\otimes k \to M$ e usemos o fato de que $(fg)\cdot m = f\cdot(g\cdot m)$, que ocorre devido a (M,ψ_ω) ser C^*-módulo à esquerda.

$$\begin{aligned}
(fg)\cdot m &= \sum (fg)(m_1)m_0\\
&= \sum f((m_1)_1)g((m_1)_2)m_0\\
&= \sum f(m_1)g(m_2)m_0
\end{aligned}$$

Por outro lado, $(I\otimes\Delta)\omega(m) = (I\otimes\Delta)(\sum m_0\otimes m_1) = \sum m_0\otimes m_1\otimes m_2$. Daí,

$$\begin{aligned}
\phi(I\otimes f\otimes g)(I\otimes\Delta)\omega(m) &= \phi(I\otimes f\otimes g)(\sum m_0\otimes m_1\otimes m_2)\\
&= \sum m_0 f(m_1)g(m_2)\\
&= \sum f(m_1)g(m_2)m_0\\
&= (fg)\cdot m.
\end{aligned}$$

Ou seja, $(fg) \cdot m = \phi(I \otimes f \otimes g)(I \otimes \Delta)\omega(m)$. Agora,

$$\begin{aligned}
f \cdot (g \cdot m) &= f \cdot (\sum g(m_1)m_0) \\
&= \sum g(m_1)f((m_0)_1)(m_0)_0 \\
&= \sum g(m_2)f(m_1)m_0 \text{ e} \\
\phi(I \otimes f \otimes g)(\omega \otimes I)\omega(m) &= \phi(I \otimes f \otimes g)(\omega \otimes I)(\sum m_0 \otimes m_1) \\
&= \phi(I \otimes f \otimes g)(\sum m_0 \otimes m_1 \otimes m_2) \\
&= \sum m_0 f(m_1)g(m_2).
\end{aligned}$$

Isto é, $f \cdot (g \cdot m) = \phi(I \otimes f \otimes g)(\omega \otimes I)\omega(m)$. Mas, como $f \cdot (g \cdot m) = (fg) \cdot m$, segue que $\phi(I \otimes f \otimes g)(\omega \otimes I)\omega(m) = \phi(I \otimes f \otimes g)(I \otimes \Delta)\omega(m)$. Pela injetividade de ϕ, segue que $(I \otimes f \otimes g)(\omega \otimes I)\omega(m) = (I \otimes f \otimes g)(I \otimes \Delta)\omega(m)$.

Seja $y = (\omega \otimes I)\omega(m) - (I \otimes \Delta)\omega(m)$. O resultado fica provado se mostrarmos que $y = 0$. Já sabemos que $(I \otimes f \otimes g)(y) = 0$, para quaisquer $f, g \in C^*$. Seja $\{e_i\}_{i \in I}$ uma base de C. Como $y \in M \otimes C \otimes C$, então $y = \sum_{i,j} m_{ij} \otimes e_i \otimes e_j$, com $m_{ij} \in M$. Fixando i_0 e j_0, considere as funções $f_i : C \to k$, dada por $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ (estendida por linearidade). Então:

$$\begin{aligned}
(I \otimes f_{i_0} \otimes f_{j_0})(y) &= (I \otimes f_{i_0} \otimes f_{j_0})(\sum_{i,j} m_{ij} \otimes e_i \otimes e_j) \\
&= \sum_{ij} m_{ij} \otimes f_{i_0}(e_i) \otimes f_{j_0}(e_j) \\
&= m_{i_0 j_0} \otimes 1_C \otimes 1_C
\end{aligned}$$

Aplicando ϕ, segue que $m_{i_0 j_0} = 0$. Mas i_0 e j_0 são arbitrários. Logo, $m_{ij} = 0$ e, assim, $y = 0$. $\square$

Seja (M, ψ_ω) um C^*-módulo à esquerda, com $\psi_\omega : C^* \otimes M \to M$. Definimos $\rho_M : M \to Hom(C^*, M)$, $\rho_M(m)(f) = f \cdot m = \psi_\omega(f \otimes m)$, $m \in M$, $f \in C^*$. Sejam $j : C \to C^{**}$ a inclusão canônica, $j(c)(f) = f(c)$, $c \in C$, $f \in C^*$.

Seja $h_M : M \otimes C^{**} \to Hom(C^*, M)$ dada por $h_M(m \otimes g)(f) = g(f)m$. Observe que

$$h_M : M \otimes C^{**} \xrightarrow{T} C^{**} \otimes M \xrightarrow{\phi} Hom(C^*, M)$$

T é isomorfismo e ϕ é a função definida no ítem (i) do Lema **??**, que é injetiva. Portanto, h_M é injetiva.

Seja $\mu_M : M \otimes C \to Hom(C^*, M)$ definida por $\mu_M(m \otimes c)(f) = h_M(I \otimes j)(m \otimes c)(f)$. Assim,

$$\begin{aligned} \mu_M(m \otimes c)(f) &= h_M(I \otimes j)(m \otimes c)(f) \\ &= h_M(m \otimes j(c))(f) \\ &= j(c)(f)m \\ &= f(c)m. \end{aligned}$$

Ou seja, $\mu_M(m \otimes c)(f) = f(c)m$, $\forall m \in M$, $\forall c \in C$ e $\forall f \in C^*$.

Definição 2.13. *Um C^*-módulo à esquerda é dito um módulo racional se $\rho_M(M) \subseteq \mu_M(M \otimes C)$.*

Exemplo 2.14. Seja C uma coálgebra de dimensão finita. Então C^* é um C^*-módulo à esquerda racional. De fato, se C tem dimensão finita, a aplicação $\theta : C \to C^{**}$ dada por $\theta(c)(f) = f(c)$, com $c \in C$ e $f \in C^* = Hom(C, k)$, é um isomorfismo de coálgebras (ver [**?**], pp. 22-3). A função $f_{C^*} : C^* \otimes C^{**} \to Hom(C^*, C^*)$ – que é como a função ϕ no Lema **??** – é isomorfismo.

Tem-se, então, $\mu_{C^*}(C^* \otimes C) = Hom(C^*, C^*)$. Portanto, $\rho_{C^*}(C^*) \subseteq Hom(C^*, C^*) = \mu_{C^*}(C^* \otimes C)$. Assim, C^* é racional.

Proposição 2.15. *M é um C^*-módulo racional se, e somente se, para todo $m \in M$ existirem duas famílias finitas $\{m_i\}_i \subseteq M$ e $\{c_i\}_i \subseteq C$ tais que $f \cdot m = \sum_i f(c_i)m_i$, para todo $f \in C^*$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se M é racional, então $\rho_M(M) \subseteq \mu_M(M \otimes C)$, i.e., dado $m \in M$, existem $\{m_i\}_i \subseteq M$ e $\{c_i\}_i \subseteq C$ tais que $\rho_M(m)(f) = \mu_M(\sum_i m_i \otimes c_i)(f)$, ou seja, $f \cdot m = \sum_i f(c_i)m_i$.

($\Leftarrow$) Se $f \cdot m = \sum_i f(c_i)m_i$, então $\rho_M(m)(f) = \mu_M(\sum_i m_i \otimes c_i)(f)$, para qualquer $f \in C^*$. Daí, $\rho_M(M) \subseteq \mu_M(M \otimes C)$, i.e., M é módulo racional. $\square$

Denotemos as catagorias dos C-comódulos à direita e dos C^*-módulos racionais à esquerda, respectivamente, por $\mathcal{M}^C$ e $Rat({}_{C^*}\mathcal{M})$.

Teorema 2.16. *As categorias $\mathcal{M}^C$ e $Rat({}_{C^*}\mathcal{M})$ são isomorfas.*

Demonstração: A demonstração será feita em três etapas: i) construímos um funtor $T : \mathcal{M}^C \to Rat({}_{C^*}\mathcal{M})$, que associa a cada objeto (M, ω) em $\mathcal{M}^C$ o objeto (M, ψ_ω); ii) construímos outro funtor, $S : Rat({}_{C^*}\mathcal{M}) \to \mathcal{M}^C$, com $S((M, \psi)) = (M, \omega_\psi)$ e iii) mostramos que $S \circ T = Id_{\mathcal{M}^C}$ e $T \circ S = Id_{Rat({}_{C^*}\mathcal{M})}$.

i) Seja (M, ω) um C-comódulo à direita. Então (M, ψ_ω) é um C^*-módulo racional. Pois, dado $m \in M$, com $\omega(m) = \sum m_0 \otimes m_1$, $\psi_\omega(f \otimes m) = f \cdot m = \sum f(m_1)m_0$ e, pela proposição anterior, M é racional, já que a soma é finita.

Sejam M e N dois C-comódulos à direita e $f : M \to N$ um morfismo de comódulos. Mostremos que, considerando M e N como C^*-módulos, f é morfismo de C^*-módulos. Sejam $m \in M$ e $g \in C^*$. Então,

$$\begin{aligned} f(g \cdot m) &= f(\sum g(m_1)m_0) \\ &= \sum g(m_1)f(m_0) \\ &\overset{(*)}{=} \sum g(f(m)_1)f(m)_0 \\ &= g \cdot f(m). \end{aligned}$$

A igualdade $(*)$ é devida ao fato de f ser morfismo de comódulos.

Assim, definimos um funtor $T : \mathcal{M}^C \to Rat({}_{C^*}\mathcal{M})$ dado por $T(M, \omega) = (M, \psi_\omega)$ e $T(f) = f$.

ii) Seja (M, ψ) um C^*-módulo à esquerda racional. Como $\mu_M : M \otimes C \to Hom(C^*, M)$ é injetiva, então $\tilde{\mu}_M : M \otimes C \to \mu_M(M \otimes C)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais – assim, é invertível. Defina $\omega_\psi : M \to M \otimes C$ por

$\omega_\psi(m) = \tilde{\mu}_M^{-1}(\rho_M(m))$. A função está bem definida, pois $\rho_M(M) \subseteq \mu_M(M \otimes C) = \tilde{\mu}_M(M \otimes C)$.

Se $\omega_\psi(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$, então $\sum_i f(c_i)m_i = f \cdot m$, $\forall f \in C^*$, pois:

$$\begin{aligned}
(\mu_M\omega_\psi(m))(f) &= (\mu_M(\sum_i m_i \otimes c_i))(f) \\
&= (\mu_M\tilde{\mu}_M^{-1}\rho_M(m))(f) \\
&= \rho_M(m)(f) \\
&= f \cdot m.
\end{aligned}$$

Mas $\mu_M(\sum_i m_i \otimes c_i)(f) = \sum_i \mu_M(m_i \otimes c_i)(f) = \sum_i f(c_i)m_i$.

Para mostrar que (M, ω_ψ) é um C-comódulo à direita, provemos que $\psi_{\omega_\psi} = \psi$. Como (M, ψ) é um C^*-módulo, então, pela Proposição **??**, (M, ω_ψ) é um C-comódulo.

Seja $\omega_\psi(m) = \sum_i m_i \otimes c_i = \tilde{\mu}_M^{-1}\rho_M(m)$. Daí, $\rho_M(m) = \sum_i \mu_M(m_i \otimes c_i)$. Mas $\rho_M(m)(f) = \psi(f \otimes m) = f \cdot m = \sum_i f(c_i)m_i$.

Por outro lado, sendo $\omega_\psi(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$, tem-se (por construção) que $\psi_{\omega_\psi}(f \otimes m) = \sum_i f(c_i)m_i$. Portanto, $\psi_{\omega_\psi} = \psi$ e, destarte, (M, ω_ψ) é um C-comódulo.

Sejam (M, ψ_M) e (N, ψ_N) dois C^*-módulos à esquerda racionais e $f : M \to N$ um morfismo de C^*-módulos. Mostremos que f é morfismo de C-comódulos, $f : (M, \omega_{\psi_M}) \to (N, \omega_{\psi_N})$.

Sejam $m \in M$ e $\omega_{\psi_M}(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$. Temos que provar $(f \otimes I)\omega_{\psi_M} = \omega_{\psi_N} f$. Para isso, vejamos que $\mu_N((f \otimes I)\omega_{\psi_M}) = \mu_N(\omega_{\psi_N} f)$. Se assim for, segue o resultado, pela injetividade de μ_N. Seja $g \in C^*$. Então,

$$\begin{aligned}
\mu_N((f\otimes I)\omega_{\psi_M}(m))(g) &= \mu_N((f\otimes I)(\sum_i m_i\otimes c_i))(g)\\
&= \mu_N(\sum_i f(m_i)\otimes c_i)(g)\\
&= \sum_i g(c_i)f(m_i)\\
&= f(\sum_i g(c_i)m_i)\\
&= f(g\cdot m) \ \text{ e}\\
\mu_N(\omega_{\psi_N}f(m))(g) &= \mu_N(\tilde{\mu}_N^{-1}\rho_N f(m))(g)\\
&= (\rho_N(f(m)))(g)\\
&= g\cdot f(m)
\end{aligned}$$

Como f é morfismo de módulos, $f(g\cdot m) = g\cdot f(m)$. Portanto, obtivemos o que queríamos, donde f é morfismo de C-módulos.

Construímos, assim, um funtor $S : Rat({}_{C^*}\mathcal{M}) \to \mathcal{M}^C$ tal que $S(M,\psi) = (M,\omega_\psi)$ e $S(f) = f$.

iii) Mostremos que $S\circ T = Id$ e que $T\circ S = Id$ - omitimos a especificação das categorias, pois fica evidente pelo contexto.

a) $S\circ T = Id$: temos que mostrar que $(S\circ T)(M,\omega) = (M,\omega)$ e que $(S\circ T)(f) = f$. Esta última igualdade é óbvia: $(S\circ T)(f) = S(T(f)) = S(f) = f$. Resta provar que $\omega_{\psi_\omega} = \omega$, em que $\omega_{\psi_\omega}(m) = \tilde{\mu}_M^{-1}(\rho_M(m))$. Daí, $\mu_M(\tilde{\mu}_M^{-1}(\rho_M(m)))(g) = \rho_M(m)(g) = g\cdot m$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\mu_M\omega(m))(g) &= (\mu_M(\sum m_{(0)}\otimes m_{(1)}))(g)\\
&= \sum g(m_{(1)})m_{(0)}\\
&= \psi_\omega(g\otimes m)\\
&= g\cdot m.
\end{aligned}$$

Como μ_M é injetiva, segue que $\omega = \omega_{\psi_\omega}$ e, daí, $S\circ T = Id$.

b) Analogamente, para mostrar que $T\circ S = Id$, é suficiente provar que $\psi_{\omega_\psi} = \psi$. Mas isto já foi mostrado no ítem (ii). $\square$

Apêndice A

Categorias

Neste apêndice, apresentaremos alguns aspectos da teoria das categorias. Por ser um assunto pouco ou nada estudado nos cursos de graduação, faremos uma exposição mais longa do que se esperaria numa seção como esta. No entanto, pensamos ser isto importante para o leitor não familiarizado com a linguagem das categorias. Por isso, também daremos vários exemplos.

A.1 Resultados básicos

Definição A.1. *Uma categoria é uma classe $\mathcal{C}$ de objetos (A, B, ...) junto com:*
i) uma classe de conjuntos disjuntos, denotados por $hom(A, B)$, um para cada par de objetos em $\mathcal{C}$ ($f \in hom(A, B)$ é chamado um morfismo de A para B e escrevemos $f : A \to B$;
ii) para cada tripla (A, B, C) de objetos de $\mathcal{C}$, uma função $hom(B, C) \times hom(A, B) \to hom(A, C)$ (para morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$, esta função é escrita $(g, f) \mapsto g \circ f$ e $g \circ f : A \to C$ é chamada de composta de f e g) sujeita aos dois axiomas seguintes:
1) Associatividade: se $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ são morfismos de $\mathcal{C}$, então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
2) Identidade: para cada objeto B de $\mathcal{C}$ existe um morfismo $1_B : B \to B$ tal

que, para quaisquer $f : A \to B$ e $g : B \to C$, $1_B \circ f = f$ e $g \circ 1_B = g$.

A classe dos objetos de uma categoria $\mathcal{C}$ será denotada por $Ob(\mathcal{C})$ e a classe de seus conjuntos de morfismos será designada por $Mor(\mathcal{C})$.

Definição A.2. *Um morfismo $f : A \to B$ é uma equivalência se existe em $\mathcal{C}$ um morfismo $g : B \to A$ tal que $f \circ g = 1_B$ e $g \circ f = 1_A$.*

Exemplo A.3. Seja $\mathcal{S}$ a classe de todos os conjuntos. Para $A, B \in \mathcal{S}$, defina $hom(A, B)$ como o conjunto de todas as funções $f : A \to B$. Então $\mathcal{S}$, com estes morfismos, é uma categoria.

Exemplo A.4. Tomando como objetos os grupos e como morfismos os homomorfismos de grupos, tem-se uma categoria. Do mesmo modo, obtém-se uma categoria cujos objetos são grupos abelianos.

Exemplo A.5. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Construiremos, a partir dela, uma outra categoria $\mathcal{D}$, tal que $Obj(\mathcal{D}) = Mor(\mathcal{C})$. Se $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são morfismos de $\mathcal{C}$, então $hom(f, g)$ consiste de todos os pares (α, β), em que $\alpha : A \to C$, $\beta : B \to D$ são morfirmos de $\mathcal{C}$ tais que $g \circ \alpha = \beta \circ f$, i.e., o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

A composição de morfismos é dada por $hom(f, g) \times hom(h, f) \to hom(h, g)$, $((\alpha, \beta), (\gamma, \sigma)) \mapsto (\alpha \circ \gamma, \beta \circ \sigma)$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & F \arrow[d, "\sigma"] \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha\circ\gamma"'] & F \arrow[d, "\beta\circ\sigma"] \\ C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

A identidade 1_f, com $f : A \to B$, é dada pelo par $(1_A, 1_B)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Definição A.6. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de objetos de $\mathcal{C}$. Um produto para a família $\{A_i\}_{i\in I}$ é um objeto P de $\mathcal{C}$ junto com uma família de morfismos $\{\pi_i : P \to A_i\}_{i\in I}$ tal que, para quaisquer objeto B e família de morfismos $\{\phi_i : B \to A_i\}_{i\in I}$, existe um único morfismo $\phi : B \to P$ tal que $\pi_i \circ \phi = \phi_i$, $\forall i \in I$, isto é, o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & P \arrow[d, "\pi_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

Teorema A.7. *Se $(P, \{\pi_i\})$ e $(Q, \{\psi_i\})$ são ambos produtos da família $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos de uma mesma categoria $\mathcal{C}$, então P e Q são equivalentes.*

Demonstração: Como P e Q são ambos produtos, existem morfismos $f : P \to Q$ e $g : Q \to P$ tais que os diagramas abaixo comutam:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & Q \arrow[d, "\psi_i"] \\ & A_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & P \arrow[d, "\pi_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

Ou seja, $\psi_i \circ f = \pi_i$ e $\pi_i \circ g = \psi_i$, $\forall i \in I$. Compondo os diagramas, obtemos $\pi_i \circ (g \circ f) = \pi_i$, $\forall i \in I$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & P \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

Logo, $g \circ f : P \to P$ é um morfismo tal que $\pi_i \circ (g \circ f) = \pi_i$. Por outro lado, $1_P : P \to P$ também é um morfismo com essa propriedade, i.e., $\pi_i \circ 1_P = \pi_i$. Pela unicidade, segue que $g \circ f = 1_P$.

Analogamente, conclui-se que $f \circ g = 1_Q$. Portanto, $f : P \to Q$ é uma equivalência. $\square$

Definição A.8. *Um coproduto para a família $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos de uma categoria $\mathcal{C}$ é um objeto S de $\mathcal{C}$ junto com uma família de morfismos $\{\iota_i : A_i \to S\}_{i\in I}$ tal que, para quaisquer objeto B e família de morfismos $\{\psi_i : A_i \to B\}_{i\in I}$, existe um único morfismo $\psi : S \to B$ tal que $\psi \circ \iota_i = \psi_i$, $\forall i \in I$, isto é, o diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & S \arrow[d, "\psi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Observe que a noção de um coproduto é a inversão do sentido das flechas no diagrama do produto. Ou seja, coproduto é uma noção dual do produto.

Teorema A.9. *Se $(S, \{\iota_i\})$ e $(R, \{\lambda_i\})$ são ambos coprodutos para a família $\{A_i\}$ de objetos de uma categoria $\mathcal{C}$, então S e R são equivalentes.*

Demonstração: É análoga à demonstração do teorema anterior. $\square$

Exemplo A.10. Seja $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de objetos na categoria dos conjuntos. Então $(\prod\limits_{i\in I} A_i, \{\pi_j\}_{j\in I})$ é um produto para $\{A_i\}_{i\in I}$, em que $\pi_j : \prod\limits_{i\in I} A_i \to A_j$, $\pi_j((a_i)_{i\in I}) = a_j$, é a projeção.

De fato, seja $\{\varphi_j : B \to A_j\}_{j\in I}$ uma família de funções (morfismos). Temos que mostrar que existe uma única função $\varphi : B \to \prod\limits_{i\in I} A_i$ tal que $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j$, $\forall j \in I$.

Tomando $\varphi(x) = (\varphi_i(x))_{i\in I}$, $\forall x \in B$ e $\forall j \in I$, tem-se $(\pi_j \circ \varphi)(x) = \pi_j((\varphi_i(x))_{i\in I}) = \varphi_j(x)$.

Para provar a unicidade, suponha que $\psi : B \to \prod\limits_{i\in I} A_i$ também seja um morfismo tal que $\pi_j \circ \psi = \varphi_j$, $\forall j \in I$. Então $\pi_j \circ \varphi = \pi_j \circ \psi$, $\forall j \in I$. Aplicando num ponto $x \in B$ qualquer, isso significa que a j-ésima componente de $\varphi(x)$ é igual à j-ésima componente de $\psi(x)$. Como vale para todas as componentes, segue que $\varphi(x) = \psi(x)$. Pela arbitrariedade de $x \in B$, segue que $\varphi = \psi$.

Exemplo A.11. Analogamente, $(\prod\limits_{i\in I} A_i, \{\pi_j\}_{j\in I})$ é um produto para a família $\{A_i\}_{i\in I}$ na categoria de grupos.

Exemplo A.12. Na categoria dos R-módulos (à esquerda ou à direita) $(\prod\limits_{i\in I} A_i, \{\pi_j\}_{j\in I})$ e $(\sum\limits_{i\in I} A_i, \{\pi_j\}_{j\in I})$ são, respectivamente, um produto e um coproduto para a família $\{A_i\}_{i\in I}$.

Definição A.13. *Uma categoria concreta é uma categoria $\mathcal{C}$ junto com uma função σ que associa a cada objeto A de $\mathcal{C}$ um conjunto $\sigma(A)$, chamado conjunto subjacente de A, de tal modo que:*
i) todo morfismo $A \to B$ de $\mathcal{C}$ é uma função nos conjuntos subjacentes $\sigma(A) \to \sigma(B)$;
ii) o morfismo identidade de cada objeto A de $\mathcal{C}$ é a função identidade no conjunto subjacente $\sigma(A)$ e
iii) composição de morfismos em $\mathcal{C}$ coincide com composição de funções nos conjuntos subjacentes.

Exemplo A.14. A categoria dos grupos com a função σ que associa a cada grupo $(G, \cdot)$ o seu conjunto subjacente G é uma categoria concreta.

Definição A.15. *Sejam F um objeto numa categoria concreta $\mathcal{C}$, X um conjunto não-vazio e $i : X \to F$ uma aplicação (de conjuntos). Diz-se F é livre no conjunto X se, para cada objeto A de $\mathcal{C}$ e cada aplicação (de conjuntos) $f : X \to A$, existe um único morfismo de $\mathcal{C}$, $\bar{f} : F \to A$, tal que $\bar{f} \circ i = f$ (como aplicação de conjuntos):*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Teorema A.16. *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria concreta, F e F' são objetos de $\mathcal{C}$ tais que F é livre no conjunto X e F' é livre no conjunto X' e $|X| = |X'|$, então F é equivalente a F'.*

Demonstração: Como F e F' são livres e $|X| = |X'|$, existem uma bijeção $f : X \to X'$ e aplicações $i : X \to F$ e $j : X' \to F'$. Considere a aplicação $j \circ f : X \to F'$. Como F é livre no conjunto X, existe um morfismo $\varphi : F \to F'$

tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varphi"] & F' \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] & X' \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

Similarmente, como f é bijeção, sua inversa $f^{-1} : X' \to X$ existe, e, como F' é livre no conjunto X', existe um morfismo $\psi : F' \to F$ tal que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "\psi"] & F \\ X' \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f^{-1}"'] & X \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Combinando os diagramas, tem-se o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\psi\circ\varphi"] & & F \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[rr, "f^{-1}\circ f=1_X"'] & & X' \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Logo, $(\psi \circ \varphi) \circ i = i \circ (f^{-1} \circ f) = i \circ 1_X = i$. Pela propriedade de unicidade de objetos livres, tem-se $\psi \circ \varphi = 1_F$.

Analogamente, mostra-se que $\varphi \circ \psi = 1_{F'}$. Portanto, F é equivalente a F'. □

Definição A.17. *Um objeto I numa categoria $\mathcal{C}$ é dito universal (ou inicial) se, para cada objeto C de $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $I \to C$. Um objeto T de $\mathcal{C}$ é dito couniversal (ou terminal) se, para cada objeto C de $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $C \to T$.*

Teorema A.18. *Quaisquer dois objetos universais (couniversais) numa categoria $\mathcal{C}$ são equivalentes.*

Demonstração: Sejam I e J dois objetos universais em $\mathcal{C}$. Então existem um único morfismo $f : I \to J$ e um único morfismo $g : J \to I$. Compondo, tem-se $g \circ f : I \to I$. Como I é universal, segue que $g \circ f$ é o único morfismo $I \to I$. Mas $1_I : I \to I$ também é um morfismo $I \to I$. Logo, $g \circ f = 1_I$.

Analogamente, usando que J é universal, resulta que $f \circ g = 1_J$. Portanto, I e J são objetos equivalentes.

A demonstração para o caso em que I e J são couniversais é feita de forma inteiramente análoga. $\square$

Exemplo A.19. O grupo trivial $< e >$ é tanto universal quanto couniversal na categoria dos grupos. Ou seja, dado um grupo A qualquer, o único homomorfismo de grupos que existe de A para $< e >$ é dado por $f(x) = e$, para qualquer $x \in A$; o único homomorfismo de grupos que existe de $< e >$ para A é dado por $f(e) = e_A$.

Exemplo A.20. Seja F um objeto livre no conjunto X (com $i : X \to F$) numa categoria concreta $\mathcal{C}$. Defina a categoria $\mathcal{D}$ do seguinte modo: os objetos de $\mathcal{D}$ são as funções $f : X \to A$, sendo $A \in Ob(\mathcal{C})$, entendida como função no conjunto subjacente de A. Um morfismo em $\mathcal{D}$ de $f : X \to A$ para $g : X \to B$ é definido como um morfismo $h : A \to B$ de $\mathcal{C}$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "h"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & B \end{tikzcd}$$

Se $f : X \to A$ é um objeto de $\mathcal{D}$, então o morfismo identidade de f em $\mathcal{D}$ é $1_A : A \to A$:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "1_A"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & A \end{tikzcd}$$

Como F é livre no conjunto X, para cada aplicação $f : X \to A$, existe um único morfismo $\bar{f} : F \to A$ tal que $\bar{f} \circ i = f$, isto é, $i : X \to F$ é objeto universal (inicial) na categoria $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dd, "\bar{f}"] \\
X \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \\
 & A
\end{tikzcd}$$

A.2 Funtores e transformações naturais

A idéia de funtor entre duas categorias é análoga à idéia de função entre dois conjuntos. Se temos uma função $f : A \to B$ entre dois conjuntos, então associamos a cada $a \in A$ um único elemento $b \in B$. No caso de uma categoria, temos sempre duas classes, a classe dos objetos e a classe dos morfismos. Assim, um funtor T associa a cada objeto C em $\mathcal{C}$ um único objeto $T(C) \in \mathcal{D}$ e associa a cada morfismo $f : C \to D$ um morfismo na outra categoria. Definindo mais formalmente:

Definição A.21. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor covariante T de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$ é um par de funções (ambas denotadas por T): uma função objeto que associa a cada objeto C de $\mathcal{C}$ um objeto $T(C)$ de $\mathcal{D}$ e uma função morifsmo que associa a cada morfismo $f : C \to C'$ de $\mathcal{C}$ um morfismo $T(f) : T(C) \to T(C')$ de $\mathcal{D}$ tal que:*
i) $T(1_C) = 1_{T(C)}$ para todo morfismo identidade 1_C em $\mathcal{C}$ e
ii) $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ para quaisquer dois morfismos f e g em $\mathcal{C}$ cuja composição esteja bem definida.

Exemplo A.22. Seja R um anel e fixe um R-módulo à esquerda A. Para cada R-módulo C, seja $T(C) = Hom_R(A, C)$. Para cada R-homomorfismo de módulos $f : C \to C'$, seja $T(f)$ a aplicação induzida usual:

$$\begin{array}{rccc} T(f) = f_* : & Hom_R(A, C) & \longrightarrow & Hom_R(A, C') \\ & h & \longmapsto & f_*(h) = f \circ h \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f_*(h)=f\circ h"] & \\ C \arrow[r, "f"'] & C' \end{tikzcd}$$

Então é fácil ver que T é um funtor covariante da categoria dos R-módulos à esquerda para a categoria dos grupos abelianos.

Exemplo A.23. Seja A um objeto fixado numa categoria $\mathcal{C}$. Define-se um funtor covariante $h_A : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$, em que $\mathcal{S}$ é a categoria dos conjuntos, associando a cada objeto C de $\mathcal{C}$ o conjunto $h_A(C) = hom(A, C)$ de todos morfismos de A para C em $\mathcal{C}$. Se $f : C \to C'$ é um morfismo de $\mathcal{C}$, seja $h_A(f) : hom(A, C) \to hom(A, C')$ a função dada por $h_A(f)(g) = f \circ g$. Este funtor h_A é chamado de funtor covariante hom.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h_A(f)(g)=f\circ g"] & \\ C \arrow[r, "f"'] & C' \end{tikzcd}$$

Observe que $h_A(f \circ g) = h_A(f) \circ h_A(g)$. De fato,

$$\begin{aligned} h_A(f \circ g)(h) &= (f \circ g) \circ h \\ &= f \circ (g \circ h) \\ &= h_A(f)(g \circ h) \\ &= h_A(f)(h_A(g)(h)) \\ &= (h_A(f) \circ h_A(g))(h). \end{aligned}$$

Além disso, $h_A(1_C) = 1_{h_A(C)}$, pois $h_A(f) \circ h_A(1_C) = h_A(f \circ 1_C) = h_A(f)$ e $h_A(1_C) \circ h_A(g) = h_A(1_C \circ g) = h_A(g)$. Isso mostra que h_A realmente é um funtor covariante.

Definição A.24. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor contravariante S de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$ é um par de funções (ambas denotadas por S): uma função objeto que associa a cada objeto C de $\mathcal{C}$ um objeto $S(C)$ de $\mathcal{D}$ e uma função morifsmo que associa a cada morfismo $f : C \to C'$ de $\mathcal{C}$ um morfismo $S(f) : S(C') \to S(C)$ de $\mathcal{D}$ tal que:*

i) $S(1_C) = 1_{S(C)}$ para todo morfismo identidade 1_C em $\mathcal{C}$ e
ii) $S(g \circ f) = S(f) \circ S(g)$ para quaisquer dois morfismos f e g em $\mathcal{C}$ cuja composição esteja bem definida.

Exemplo A.25. Seja B um objeto fixado numa categoria $\mathcal{C}$. Definimos um funtor contravariante $h^B : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ que associa a cada objeto C de $\mathcal{C}$ o conjunto $h^B(C) = hom(C, B)$ de todos os morfismos em $\mathcal{C}$ de C para B. Se $f : C \to C'$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, seja $h^B(f) : hom(C', B) \to hom(C, B)$ a função dada por $h^B(f)(g) = g \circ f$. Este funtor é chamado de funtor contravariante hom.

$$\begin{tikzcd} & B \\ C \arrow[ur, "h^B(f)(g)=g\circ f"] \arrow[r, "f"'] & C' \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

A verificação de que $h^B(1_C) = 1_{h^B(C)}$ é análoga à que fizemos no caso do funtor covariante hom. Mostremos a contravariância do funtor h^B:

$$\begin{aligned} h^B(f \circ g)(h) &= h \circ (f \circ g) \\ &= (h \circ f) \circ g \\ &= h^B(g)(h \circ f) \\ &= h^B(g)(h^B(f)(h)) \\ &= (h^B(g) \circ h^B(f))(h) \end{aligned}$$

Exemplo A.26. Seja X um espaço topológico. Um pré-feixe $\mathcal{F}$ de grupos abelianos sobre X consiste dos seguintes dados:
i) para cada aberto $U \subseteq X$, $\mathcal{F}(U)$ é um grupo abeliano e
ii) para cada inclusão $V \subseteq U$ de subconjuntos abertos de X,

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

é um homomorfismo de grupos abelianos sujeito às seguintes condições:
a) $\mathcal{F}(\phi) = 0$, em que ϕ é o conjunto vazio;
b) ρ_{UU} é a aplicação identidade $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ e
c) se $W \subseteq V \subseteq U$ são três subconjuntos abertos, então $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Podemos reformular esta definição de pré-feixe em termos categóricos. Seja $\mathcal{T}op(X)$ a categoria cujos objetos são os subconjuntos abertos de X - i.e., a classe dos objetos é a topologia de X - e cujos únicos morfismos são as inclusões. Seja $\mathcal{A}b$ a categoria dos grupos abelianos. Então um pré-feixe de grupos abelianos sobre X é simplesmente um funtor contravariante $\mathcal{F} : \mathcal{T}op(X) \to \mathcal{A}b$.

Definição A.27. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. A categoria produto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é definida da seguinte maneira: seus objetos são todos os pares ordenados (C, D), em que $C \in Ob(\mathcal{C})$ e $D \in Ob(\mathcal{D})$; seus morfismos são pares ordenados $(f, g) : (C, D) \to (C', D')$, em que $f : C \to C'$ e $g : D \to D'$ são morfismos nas respectivas categorias. A composição de morfismos é dada por $(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$.*

Pode-se definir analogamente a categoria produto de mais de duas categorias. Podemos, agora, definir funtores de mais de uma variável. Dizíamos que um funtor era covariante se $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$ e contravariante se $T(f \circ g) = T(g) \circ T(f)$. No caso de funtores de mais de uma variável, as noções de covariância e contravariância associam-se a cada uma das variáveis. Assim, um funtor pode ser covariante numa variável e contravariante em outra.

Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ três categorias. Um funtor $T : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ associa a cada par de objetos $(C, D) \in Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ o objeto $T(C, D) \in Ob(\mathcal{E})$ e a cada morfismo (f, g) o morfismo $T(f, g)$, de modo que $T(1_C, 1_D) = 1_{T(C,D)}$ e que em cada uma das variáveis T seja covariante ou contravariante. Por exemplo, se $T(f \circ f', g \circ g') = T(f, g') \circ T(f', g)$, então a primeira variável é covariante e a segunda é contravariante.

Podemos dizer que a primeira variável é covariante pois, se fixarmos um objeto $D \in Ob(\mathcal{D})$, tem-se $T(-, D)$ e $T(-, 1_D)$ vistos como funções objeto e morfismo, respectivamente, constituem um funtor covariante $\mathcal{C} \to \mathcal{E}$. Da mesma forma podemos entender a contravariância da segunda variável.

Exemplo A.28. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Considere o funtor que associa a cada par (A, B) de objetos de $\mathcal{C}$ o conjunto $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ e a cada par de morfismos (f, g), com $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$, a função $hom(f, g) : hom_{\mathcal{C}}(A', B) \to$

$hom_{\mathcal{C}}(A, B')$, dada por $hom(f, g)(h) = g \circ h \circ f$. Então

$$hom_{\mathcal{C}}(-,-) : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{S}$$

é um funtor contravariante na primeira variável e covariante na segunda.

De fato, fixando $A \in Ob(\mathcal{C})$, tem-se que $hom_{\mathcal{C}}(A,-)$ é simplesmente o funtor covariante hom, h_A, e $h_A(g) = hom(1_A, g)$. Analogamente, fixando $B \in Ob(\mathcal{C})$, $hom_{\mathcal{C}}(-, B)$ é o funtor contravariante hom, h^B, e $h^B(f) = hom(f, 1_B)$.

Exemplo A.29. Como caso particular do exemplo anterior, $Hom_R(-,-)$ é funtor da categoria dos R-módulos à esquerda (ou melhor, na categoria produto dessa categoria por ela mesma) na categoria dos grupos abelianos. Este funtor é contravariante na primeira variável e covariante na segunda.

Exemplo A.30. *Sejam R um anel comutativo com unidade e A_i, $i = 1, \cdots, n$, R-módulos. Então o funtor dado por*

$$T(A_1, \cdots, A_n) = A_1 \otimes_R \cdots \otimes_R A_n, T(f_1, \cdots, f_n) = f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$$

é um funtor covariante nas n variáveis da categoria dos R-módulos em si mesma.

Definição A.31. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias, $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores covariantes. Uma transformação natural $\alpha : S \to T$ é uma função que associa a cada objeto C de $\mathcal{C}$ um morfismo $\alpha_C : S(C) \to T(C)$ de $\mathcal{D}$ tal que, para cada morfismo $f : C \to C'$ de $\mathcal{C}$, o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f"'] & S(C) \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "S(f)"'] & T(C) \arrow[d, "T(f)"] \\ C' & S(C') \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] & T(C') \end{tikzcd}$$

Se α_C é uma equivalência para todo objeto C de $\mathcal{C}$, então α é dito um isomorfismo natural (ou equivalência natural) dos funtores S e T.

Transformações naturais de funtores contravariantes $\beta : S \to T$ são definidas de modo semelhante, invertendo-se o sentido das flechas verticais no diagrama anterior:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "f"'] & S(C) \arrow[r, "\beta_C"] & T(C) \\
C' & S(C') \arrow[u, "S(f)"'] \arrow[r, "\beta_{C'}"'] & T(C') \arrow[u, "T(f)"]
\end{tikzcd}$$

Apêndice B

Produtos Tensoriais

Neste apêndice, faremos a construção do produto tensorial de módulos e provaremos alguns resultados. Destacaremos, em particular, algumas propriedades especiais que possuem os produtos tensoriais de espaços vetoriais. Isso é relevante para nossos propósitos, pois nossa construção das coálgebras se dão sobre k-espaços vetoriais.

Sejam A_R e $_RB$ módulos à direita e à esquerda, respectivamente, sobre um anel R e C um grupo abeliano (usaremos a notação aditiva).

Definição B.1. *Uma aplicação balanceada de $A \times B$ para C é uma função $f : A \times B \to C$ com as seguintes propriedades:*
i) $f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b)$*;*
ii) $f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2)$ *e*
iii) $f(ar, b) = f(a, rb)$*,* $\forall a, a_1, a_2 \in A, \forall b, b_1, b_2 \in B$ *e* $\forall r \in R$*.*

Fixados os módulos A e B como acima, podemos considerar a categoria cujos objetos são todas as funções balanceadas de $A \times B$, a qual denotaremos por $\mathcal{M}(A, B)$. Um morfismo de $f : A \times B \to C$ para $g : A \times B \to D$ é um homomorfismo de grupos abelianos $h : C \to D$ tal que $h \circ f = g$, i.e., tal que o diagrama abaixo comuta:

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dd, "h"] \\
A \times B \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
 & D
\end{tikzcd}
$$

A verificação de que $\mathcal{M}(A, B)$ é uma categoria é simples, porém a omitiremos. Introduzimos essa carategoria, pois via o produto tensorial de A e B construiremos um objeto universal nela. Definimos agora o que vem a ser o produto tensorial.

Definição B.2. *Seja A_R e $_RB$ módulos (resp. à direita e à esquerda) sobre um anel R. Seja F o grupo abeliano livre sobre o conjunto $A \times B$. Seja K o subgrupo (normal) de F gerado por todos os elementos das seguintes formas:*
i) $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$;
ii) $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$ e
iii) $(ar, b) - (a, rb)$, $\forall a, a' \in A$, $\forall b, b' \in B$ e $\forall r \in R$.

O grupo quociente F/K é dito o produto tensorial de A e B e é denotado por $A \otimes_R B$. A classe $(a, b) + K$ do elemento (a, b) é denotada por $a \otimes b$ e a classe do $(0, 0)$ é simplesmente escrita como 0.

A forma geral de um elemento de $A \otimes_R B$ é $\displaystyle\sum_i a_i \otimes b_i$. Além disso, é fácil mostrar que $(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$, $a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'$ e $ar \otimes b = a \otimes rb$. Também se tem que $a \otimes 0 = 0$ e que $0 \otimes b = 0$. Ademais, é possível ocorrer $a \otimes b = a' \otimes b'$, de modo que $a \neq a'$ e $b \neq b'$. Observe que um morfismo é uma equivalência se, e só se, for um isomorfismo de grupos. Também se pode ter $A \otimes_R B = 0$, sem que A ou B sejam 0, como no caso em que $A = \mathbb{Z}_p$, $B = \mathbb{Z}_q$ e $R = \mathbb{Z}$, em que p e q são relativamente primos.

Os produtos tensoriais têm a características de serem difíceis de serem tratados diretamente. Se somarmos dois elementos $a \otimes b$ e $a' \otimes b'$, não temos uma expressão simplificada para o resultado. Em geral, não será $(a + a') \otimes (b + b')$. Só podemos afirmar que terá a forma geral $\sum a_i \otimes b_i$ (soma finita).

Em particular, se queremos construir homomorfismos, necessitamos de um procedimento indireto para verificação. A proposição seguinte nos dá isso. Antes, precisamos definir uma função especial.

Definição B.3. *A função* $i : A \times B \to A \otimes_R B$ *dada por* $i(a, b) = a \otimes b$ *é chamada aplicação balanceada canônica.*

É fácil verificar que ela é de fato uma aplicação balanceada.

Teorema B.4. *Sejam* A_R *e* ${}_RB$ *módulos sobre um anel* R *e* C *um grupo abeliano. Se* $g : A \times B \to C$ *é uma aplicação balanceada, então existe um único homomorfismo de grupos* $\bar{g} : A \otimes_R B \to C$ *tal que* $\bar{g} \circ i = g$*, em que* $i : A \times B \to A \otimes_R B$ *é a aplicação balanceada canônica. Ou seja, existe um único homomorfismo* $\bar{g}$ *tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} & A \otimes_R B \arrow[dd, "\bar{g}"] \\ A \times B \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & C \end{tikzcd}$$

Além disso, $A \otimes B$ *fica univocamente determinado - a menos de isomorfismo (equivalência) - por essa propriedade. Isto é, a aplicação balanceada canônica* $i : A \times B \to A \otimes_R B$ *é um objeto universal na categoria* $\mathcal{M}(A, B)$*.*

Demonstração: Sejam F o grupo abeliano livre sobre o conjunto $A \times B$ e K o subgrupo descrito na definição de produto tensorial. Como g está definida nos geradores de F, segue que g pode ser estendida de forma única a um homomorfismo $g_1 : F \to C$.

Se aplicarmos g_1 sobre os geradores de K, vê-se que $g_1(K) = 0$, pela hipótese de g ser balanceada. De fato, mostremos um caso (os outros dois ficam a cargo do leitor). Sejam $a, a' \in A$ e $b \in B$. Então

$$\begin{aligned} g_1((a + a', b) - (a, b) - (a', b)) &= g_1(a + a', b) - g_1(a, b) - g_1(a', b) \\ &= g(a + a', b) - g(a, b) - g(a', b) = 0. \end{aligned}$$

Logo, tem-se $K \subseteq ker(g_1)$. Portanto, g_1 induz um homomorfismo $\bar{g} : F/K \to C$, dado por $\bar{g}((a,b) + K) = g_1(a,b) = g(a,b)$ – esse é um resultado um pouco mais geral que a versão usual do Teorema do Homomorfismo. Mas, por definição, $F/K = A \otimes_R B$ e $(a,b) + K = a \otimes b$. Daí, $\bar{g} : A \otimes_R B \to C$ é um homomorfismo tal que $\bar{g}(i(a,b)) = \bar{g}(a \otimes b) = g(a,b)$, $\forall (a,b) \in A \times B$. Ou seja, $\bar{g} \circ i = g$. Isso completa a prova de existência.

Provemos agora a unicidade. Suponha $h : A \otimes_R B \to C$ é um homomorfismo tal que $h \circ i = g$. Então $h(a \otimes b) = h \circ i(a,b) = g(a,b) = \bar{g} \circ i(a,b) = \bar{g}(a \otimes b)$, para todo gerador $a \otimes b$ de $A \otimes_R B$. Como as funções coincidem nos geradores, elas são iguais em todos os elementos de $A \otimes_R B$, isto é, $h = \bar{g}$, o que prova a unicidade. Isso também prova que $i : A \times B \to A \otimes_R B$ é um objeto universal em $\mathcal{M}(A,B)$ - ou seja, dado qualquer objeto g de $\mathcal{M}(A,B)$, existe um único morfismo s tal que $s \circ i = g$, a saber, $s = \bar{g}$. $\square$

No exemplo a seguir, a importância desse teorema ficará mais clara.

Exemplo B.5. Sejam ${}_RA_R$ e ${}_RB_R$ módulos. A função $g : A \times B \to B \otimes_R A$, dada por $(a,b) \mapsto b \otimes a$ é balanceada. Pelo Teorema **??**, isso implica a existência de um único homomorfismo $T : A \otimes_R B \to B \otimes_R A$ tal que $T(a \otimes b) = b \otimes a$. Essa função T é chamada função *twist*.

Observe que não precisamos definir o valor de T sobre um elemento genérico de $A \otimes_R B$, mas apenas nos geradores. Ademais, não precisamos fazer uma verificação direta de que T é homomorfismo. Isso significaria que teríamos que avaliar $T(a \otimes b + c \otimes d)$ e mostrar que o resultado é o mesmo que $T(a \otimes b) + T(c \otimes d)$ - mostrando para geradores arbitrários, implicaria homomorfismo, é claro. No entanto, não sabemos se $a \otimes b + c \otimes d$ pode ser expresso na forma $e \otimes f$, i.e., como um gerador de $A \otimes B$; só temos o resultado estipulado para geradores. Isso mostra que - pelo menos, à primeira vista - não teríamos como provar diretamente que T é homomorfismo. O teorema, portanto, nos permite fazer essa afirmação. Além disso, só precisamos verificar que a função g é balanceada, o que, em geral, é algo que não oferece maiores complicações.

Nas constuções dos exemplos de coálgebras, sempre fazemos esse caminho indireto, utilizando o teorema. Daí a importância crucial dele para nossos propósitos - além de seu interesse por si mesmo.

Corolário B.6. *Se A_R, A'_R, ${}_RB$ e ${}_RB'$ são módulos sobre um anel R e se $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$ são homomorfismos de R-módulos, então existe um único homomorfismo de grupos $h : A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$ tal que $h(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$, $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$. Esse homomorfismo único será denotado por $f \otimes g$.*

Demonstração: Seja $s : A \times B \to A' \otimes_R B'$ dado por $s(a, b) = f(a) \otimes g(b)$. Por f e g serem homomorfismos de R-módulos, s é balanceada (verificação a cargo do leitor). Pelo teorema, existe um único homomorfismo de grupos $\bar{s} : A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$ tal que $\bar{s}(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$. □

Escrevemos, então, $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$. Também é fácil verificar que, se $f' : A'_R \to A''_R$ e $g' : {}_RB' \to {}_RB''$ são homomorfismos de R-módulos, então a composição $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$ é dada por $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$. Segue, imediatamente, que se f e g são isomorfismos de R-módulos, então $f \otimes g$ é isomorfismo de grupos, com inversa $f^{-1} \otimes g^{-1}$.

Até o momento, sabemos que o produto tensorial de dois módulos é um grupo abeliano (por definição). Sendo um módulo um grupo abeliano no qual há uma "multiplicação por escalar"definida entre um anel e o grupo, podemos tentar associar uma estrutura de módulo ao produto tensorial. O produto tensorial considerado até aqui é de um R-módulo à direita com um R-módulo à esquerda. Se algum deles for um bimódulo, então podemos associar naturalmente uma estrutura de S-módulo ao produto tensorial, como se verá na proposição seguinte.

Proposição B.7. *Sejam R e S anéis e ${}_SA_R$, ${}_RB$, C_R e ${}_RD_S$ (bi)módulos conforme indicado. Então tem-se:*
i) $A \otimes_R B$ é um S-módulo à esquerda, com a multiplicação por escalar definida por $s(a \otimes b) = sa \otimes b$, para quaisquer $a \in A$, $b \in B$ e $s \in S$.
ii) Se $f : A \to A'$ é um homomorfismo de (S, R)-bimódulos e $g : B \to B'$ é um

homomorfismo de R-módulos, então a aplicação induzida $f \otimes g : A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$ é um homomorfismo de S-módulos à esquerda.
iii) $C \otimes_R D$ é um S-módulo à direita, com a multiplicação por escalar definida por $(c \otimes d)s = c \otimes ds$, para quaisquer $c \in C$, $d \in D$ e $s \in S$.
iv) Se $f : C \to C'$ é um homomorfismo de (S, R)-bimódulos e $g : D \to D'$ é um homomorfismo de R-módulos, então a aplicação induzida $f \otimes g : C \otimes_R D \to C' \otimes_R D'$ é um homomorfismo de S-módulos à direita.

Demonstração: Demonstraremos apenas os dois primeiros ítens, sendo os dois últimos análogos.

(i) Para cada $s \in S$, defina a aplicação $A \times B \to A \otimes B$ por $(a, b) \mapsto sa \otimes b$. É fácil ver que esta aplicação é R-balanceada. Portanto, pelo Teorema **??**, isto define um homomorfismo $\alpha_s : A \otimes_R B \to A \otimes_R B$ tal que $\alpha_s(a \otimes b) = sa \otimes b$.

Para cada $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in A \otimes_R B$, defina su como sendo o elemento $\alpha_s(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_s(a_i \otimes b_i) = \sum_{i=1}^{n} sa_i \otimes b_i$. Essa ação de S está bem definida, pois α_s é um homomorfismo.

Deixamos ao leitor a verificação de que, com a "multiplicação por escalar"definida deste modo, $A \otimes_R B$ realmente é um S-módulo à esquerda.

(ii) Já sabemos que $f \otimes g : A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$ é um homomorfismo de grupos abelianos. Para mostrar que é homomorfismo de S-módulos, basta verificar que $(f \otimes g)(s(a \otimes b)) = s(f \otimes g)(a \otimes b)$, para quaisquer $s \in S$, $a \in A$ e $b \in B$.

Seja $s \in S$. Temos que

$$
\begin{aligned}
(f \otimes g)(s(a \otimes b)) &= (f \otimes g)(sa \otimes b) \\
&= f(sa) \otimes g(b) \\
&= sf(a) \otimes g(b) \\
&= s(f(a) \otimes g(b)) \\
&= s(f \otimes g)(a \otimes b)
\end{aligned}
$$

□

Provamos, a seguir, um teorema de importância fundamental para nosso estudo. Ele é usado na própria definição de coálgebra; provaremos um isomorfismo, que foi chamado, ao longo do texto, de isomorfismo canônico.

Teorema B.8. *Seja R um anel com identidade e A_R, ${}_RB$ R-módulos unitários. Então existem isomorfismos de R-módulos $A \otimes_R R \simeq A$ e $R \otimes_R B \simeq B$.*

Demonstração: Provaremos apenas o primeiro deles, sendo a demonstração do segundo inteiramente análoga.

Como R é um (R, R)-bimódulo, então $A \otimes_R R$ é um R-módulo à direita, pelo teorema anterior. Além disso, $g : A \times R \to A$ dada por $g(a, r) = ar$ define uma aplicação balanceada. Portanto, pelo Teorema **??**, existe um único homomorfismo (de grupos abelianos) $\alpha : A \otimes_R R \to A$ tal que $\alpha(a \otimes r) = ar$. É fácil ver que esse homomorfismo também é de R-módulos à direita.

Por outro lado, a função $\beta : A \to A \otimes_R R$ dada por $\beta(a) = a \otimes 1_R$ também é um homomorfismo de R-módulos à direita. Basta verificar que $\alpha\beta = I_A$ e $\beta\alpha = I_{A \otimes_R R}$.

De fato, $(\alpha\beta)(a) = \alpha(a \otimes 1_R) = a1_R = a$ e $(\beta\alpha)(a \otimes r) = \beta(ar) = ar \otimes 1_R = a \otimes r$. $\square$

Proposição B.9. *Sejam R e S anéis e A_R, ${}_RB_S$ e ${}_SC$ módulos conforme indicado. Então existe um isomorfismo (de grupos abelianos)*

$$(A \otimes_R B) \otimes_S C \simeq A \otimes_R (B \otimes_S C).$$

Demonstração: Cada elemento $v \in (A \otimes_R B) \otimes_S C$ é uma soma finita $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes c_i$, com $u_i \in A \otimes_R B$ e $c_i \in C$. Mas cada u_i também é uma soma finita $\displaystyle\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \otimes b_{ij}$, com $a_{ij} \in A$ e $b_{ij} \in B$. Portanto, v é uma soma finita $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}[(a_{ij} \otimes b_{ij}) \otimes c_i]$.

Logo, $(A \otimes_R B) \otimes_S C$ é gerado por todos os elementos da forma $(a \otimes b) \otimes c$, com $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$. Analogamente, $A \otimes_R (B \otimes_S C)$ é gerado por todos os elementos da forma $a \otimes (b \otimes c)$, com $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$.

Seja

$$g : (A \otimes_R B) \times C \to A \otimes_R (B \otimes_S C)$$

dada por $g(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i, c) = \sum_{i=1}^{n}[a_i \otimes (b_i \otimes c)]$. Então g é uma aplicação S-balanceada e, pelo Teorema **??**, induz um único homomorfismo

$$\alpha : (A \otimes_R B) \otimes_S C \to A \otimes_R (B \otimes_S C)$$

tal que $\alpha([(a \otimes b) \otimes c]) = a \otimes (b \otimes c)$, para quaisquer $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$.

Analogamente, temos uma aplicação R-balanceada

$$A \times (B \otimes_S C) \to (A \otimes_R B) \otimes_S C,$$

que induz um único homomorfismo

$$\beta : A \otimes_R (B \otimes_S C) \to (A \otimes_R B) \otimes_S C$$

tal que que $\beta([a \otimes (b \otimes c)]) = (a \otimes b) \otimes c$.

Para cada gerador $(a \otimes b) \otimes c$ de $(A \otimes_R B) \otimes_S C$, temos $(\beta\alpha)([(a \otimes b) \otimes c]) = \beta([a \otimes (b \otimes c)]) = (a \otimes b) \otimes c$. Donde $\beta\alpha = I_{(A \otimes_R B) \otimes_S C}$.

Similarmente, mostra-se que $\alpha\beta = I_{A \otimes_R (B \otimes_S C)}$. Portanto, α e β são inversas uma da outra. Daí, α é o isomorfismo desejado. $\square$

Evidentemente, esse resultado pode ser estendido indutivamente para um número finito de módulos que sejam "compatíveis", no sentido de que os produtos tensoriais fiquem bem definidos. Por conta deste isomorfismo, não precisamos usar parânteses para especificar a ordem dos produtos tensoriais.

Teorema B.10. *Seja R um anel, A e $\{A_i\}_{i \in I}$ R-módulos à direita, B e $\{B_j\}_{j \in J}$ R-módulos à esquerda. Então existem isomorfismos (de grupos abelianos)*

$$(\sum_{i \in I} A_i) \otimes_R B \simeq \sum_{i \in I}(A_i \otimes_R B);$$

$$A \otimes_R (\sum_{j \in J} B_j) \simeq \sum_{j \in J}(A \otimes_R B_j).$$

Demonstração: Sejam $\iota_k : A_k \to \sum_{i\in I} A_i$ e $\pi_k : \sum_{i\in I} A_i \to A_k$, respectivamente, a inclusão e a projeção canônicas. Então a família de homomorfismos $\iota_k \otimes 1_B : A_k \otimes B \to (\sum_{i\in I} A_i) \otimes_R B$ induz um homomorfismo

$$\alpha : \sum_{i\in I}(A_i \otimes_R B) \to (\sum_{\imath\in I} A_i) \otimes_R B$$

tal que $\alpha((a_i \otimes b)_{i\in I}) = \sum_{i\in I_0}(\iota_i(a_i) \otimes b) = (\sum_{i\in I_0} \iota_i(a_i)) \otimes b$, em que $I_0 = \{i \in I : a_i \otimes b \neq 0\}$.

Seja $g : (\sum_{i\in I} A_i) \times B \to \sum_{i\in I}(A_i \otimes_R B)$ dada por $g(u, b) = (\pi_i(u) \otimes b)_{i\in I}$ é balanceada. Logo, pelo Teorema **??**, g induz um homomorfismo

$$\beta : (\sum_{i\in I} A_i) \otimes_R B \to \sum_{i\in I}(A_i \otimes_R B)$$

tal que $\beta(u \otimes b) = (\pi_i(u) \otimes b)_{i\in I}$.

Mostraremos que α e β são inversas uma da outra, o que prova o primeiro isomorfismo. A demonstração do outro é inteiramente análoga, de modo que será omitida.

Se $u \in \sum_{i\in I} A_i$ e $I_0 = \{i \in I : a_i \otimes b \neq 0\} = \{i \in I : \pi_i(u) \neq 0\}$, então $u = \sum_{i\in I_0} \iota_i\pi_i(u)$. Portanto, para cada gerador $u \otimes b$ de $(\sum_{i\in I} A_i) \otimes_R B$, temos

$$(\alpha\beta)(u \otimes b) = \alpha((\pi_i(u) \otimes b)_{i\in I_0}) = (\sum_{i\in I_0} \iota_i\pi_i(u)) \otimes b = u \otimes b.$$

Daí, $\alpha\beta = I_{(\sum_{i\in I} A_i)\otimes_R B}$.

Para cada $j \in I$, defina $\iota_j^* : A_j \otimes_R B \to \sum_{i\in I}(A_i \otimes B)$ a inclusão canônica. Então é fácil ver que $\sum_{i\in I}(A_i \otimes_R B)$ é gerado por todos elementos da forma $\iota_j^*(a \otimes b) = (\pi_i\iota_j(a) \otimes b)_{i\in I}$, com $j \in I$, $a \in A_j$ e $b \in B$. Destarte, para cada gerador, temos $(\pi_i\iota_j(a)) \otimes b = 0$, se $i \neq j$, e $(\pi_j\iota_j(a)) \otimes b = a \otimes b$. Portanto,

$$\begin{aligned}
(\beta\alpha)(\iota_j^*(a \otimes b)) &= (\beta\alpha)((\pi_i\iota_j(a) \otimes b)) \\
&= \beta(\iota_j\pi_j\iota_j(a) \otimes b) \\
&= \beta(\iota_j(a) \otimes b) \\
&= (\pi_i\iota_j(a) \otimes b)_{i\in I} \\
&= \iota_j^*(a \otimes b).
\end{aligned}$$

Logo, $\beta\alpha = I_{\sum_{i\in I}(A_i \otimes_R B)}$. □

Teorema B.11. *Seja R um anel com identidade. Se A é um R-módulo à direita unitário e F é um R-módulo à esquerda livre com base Y, então cada elemento $u \in A \otimes_R F$ pode ser escrito de forma única como $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i$, em que $a_i \in A$ e os $y_i's$ são elementos distintos de Y.*

Demonstração: Como $F = \sum_{y\in Y} Ry$, para cada $y \in Y$, seja $A_y = A$ e considere a soma direta $\sum_{y\in Y} A_y$. Como cada $\{y\}$ é linearmente independente – por Y ser base –, então cada epimorfismo $\varphi : R \to Ry$, dado por $\varphi(r) = ry$, é também isomorfismo. Portanto, para cada $y \in Y$ temos um isomorfismo

$$A \otimes_R Ry \overset{1_A\otimes\varphi^{-1}}{\longrightarrow} A \otimes_R R \simeq A = A_y.$$

Pelo Teorema anterior, podemos construir um isomorfismo $\theta : A \otimes_R F \to \sum_{y\in Y} A_y$:

$$A \otimes_R F = A \otimes_R (\sum_{y\in Y} Ry) \overset{\simeq}{\longrightarrow} \sum_{y\in Y}(A \otimes_R Ry) \overset{\simeq}{\longrightarrow} \sum_{y\in Y} A_y.$$

Deixamos ao leitor a verificação de que $\theta(a \otimes y) = \iota_y(a)$, para $a \in A$ e $y \in Y$, em que $\iota_y : A_y \to \sum_{z\in Y} A_z$ é a inclusão canônica.

Como cada $v \in \sum_{y\in Y} A_y$ é uma soma finita $v = \iota_{y_1}(a_1) + \cdots + \iota_{y_n}(a_n) = \theta(a_1 \otimes y_1) + \cdots + \theta(a_n \otimes y_n)$, com $y_i \in Y$ distintos. Os elementos a_i são univocamente determinados na expressão acima. Portanto, cada elemento de

$A \otimes_R F$ é univocamente determinado – já que cada um será da forma $\theta^{-1}(v)$ –, sendo escrito, pois, na forma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i$. $\square$

Corolário B.12. *Se R é um anel com identidade e A_R e ${}_RB$ são R-módulos livres com bases X e Y, respectivamente, então $A \otimes_R B$ é um R-módulo (à direita) livre com base $W = \{x \otimes y : x \in X, y \in Y\}$ de cardinalidade $|X||Y|$.*

Antes de provarmos o corolário, observamos que, sendo R um (R, R)-bimódulo, então toda soma direta de cópias de R também será. Em particular, todo R-módulo à direita livre é um R-módulo à esquerda livre e vice-versa. Por isso, faz sentido tratar, no próprio enunciado do corolário, $A \otimes_R B$ como sendo um R-módulo (à direita e à esquerda).

Demonstração: Pela demonstração do Teorema **??**, existe um isomorfismo de grupos

$$\theta : A \otimes_R B \xrightarrow{\simeq} \sum_{y \in Y} A_y = \sum_{y \in Y} A = \sum_{y \in Y}(\sum_{x \in X} xR),$$

já que B é gerado por Y e $A = \displaystyle\sum_{x \in X} xR$.

Como dissemos antes da demonstração, todo módulo à esquerda livre também é módulo à direita. Assim, B é um (R, R)-bimódulo. Assim, $A \otimes_R B$ é um R-módulo. É fácil ver que θ é homomorfismo de módulos. Sendo $W = \{x \otimes y : x \in X, y \in Y\}$, é claro que $\theta(W)$ gera $A \otimes_R B$.

Provemos que W é linearmente independente. Sejam $X_0 \subseteq X$ e $Y_0 \subseteq Y$ subconjuntos finitos de X e Y, respectivamente, e sejam $\alpha_{xy} \in R$ tais que $\displaystyle\sum_{x \in X_0} \sum_{y \in Y_0} \alpha_{xy} x \otimes y = 0$. Como θ é injetiva, $\theta(\displaystyle\sum_{x \in X_0} \sum_{y \in Y_0} \alpha_{xy} x \otimes y) = 0$. Mas $\theta(x \otimes y) = \iota_y(x)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\theta(\sum_{x \in X_0} \sum_{y \in Y_0} \alpha_{xy} x \otimes y) &= \sum_{x \in X_0} \sum_{y \in Y_0} \alpha_{xy} \theta(x \otimes y) \\
&= \sum_{x \in X_0} \sum_{y \in Y_0} \alpha_{xy} \iota_y(x) = 0.
\end{aligned}$$

Isto implica que $\alpha_{xy} \iota_y(x) = 0$, para quaisquer $x \in X_0$ e $y \in Y_0$. Como as inclusões são injetivas, segue que $\iota_y(x) \neq 0$, se $x \neq 0$. Por conseguinte,

$\alpha_{xy} = 0$. Portanto, $\theta(W)$ é uma base de $A \otimes_R B$. Pelo Teorema **??**, todos os elementos de W são distintos e, daí, todos de $\theta(W)$ também o são. Logo, $|W| = |X||Y|$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BRZEZINSKI, Tomasz, WISBAUER, Robert, *"Corings and Comodules"*, Cambridge University Press, Lecture Note Series 309, 2003.

[2] DĂSCĂLESCU, Sorin, NĂSTĂSESCU, Constantin, RAIANU, Serban, *"Hopf algebras: An Introduction"*, Marcel Dekker, A Series of Monographs and Textbooks, 2001.

[3] HARTSHORNE, Robin, *"Algebraic Geometry"*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[4] HUNGERFORD, Thomas H., *"Algebra"*, Graduate texts in Mathematics, 73, Springer Verlag, New York, 1974.