

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC

MATEMÁTICA - LICENCIATURA

RONY CRISTIANO

TEORIA DO CONTROLE EXATO

Florianópolis - SC

2009

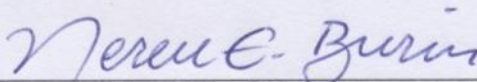
RONY CRISTIANO

TEORIA DO CONTROLE EXATO

Trabalho de conclusão de Curso submetido
à Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC,
como parte dos requisitos necessários para a
obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.
Orientador: Professor Doutor Félix Pedro Quispe Gómez.

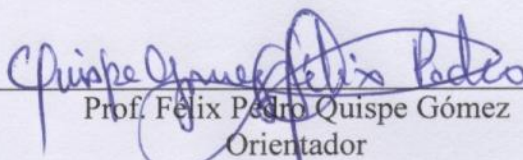
Florianópolis - SC, 2009

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática-Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n° 29/CCM/09.

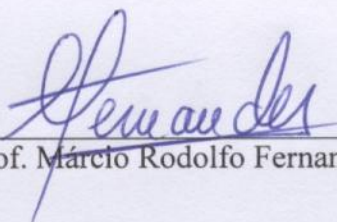


Pof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

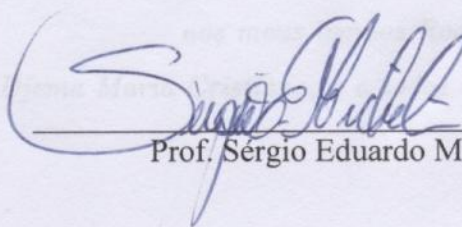
Banca Examinadora:



Prof. Felix Pedro Quispe Gómez
Orientador



Prof. Márcio Rodolfo Fernandes



Prof. Sérgio Eduardo Michelin

*Dedico este trabalho aos meus pais
João Navalte Cristiano e Zoê F. Pereira Cristiano,
aos meus irmãos Rodrigo Cristiano e
Djema Maria Cristiano, e a todos os meus amigos.*

AGRADECIMENTOS

*Agradeço a todos que me ajudaram
de alguma forma na elaboração deste trabalho.
Aos professores Dr. Márcio Rodolfo Fernandes e
Dr. Sérgio Eduardo Michelin por participarem da banca.
E em especial, ao meu orientador professor
Dr. Félix Pedro Quispe Gómez, que foi muito importante
durante toda a elaboração deste trabalho.*

“O valor das coisas não está no tempo em que elas duram, mas na intensidade com que acontecem. Por isso existem momentos inesquecíveis, coisas inexplicáveis e pessoas incomparáveis”. (Fernando Pessoa)

Resumo

Neste trabalho mostramos alguns aspectos recorrentes da Teoria do Controle Exato aplicado à equação da onda e à equação do pêndulo. No controle exato da equação da onda (dimensão infinita) abordamos o problema da corda vibrante, onde duas pessoas estão segurando uma corda em movimento e a partir de certo instante começam a agir sobre os extremos dessa corda, a fim de levá-la ao repouso através de movimentos transversais. Mostramos então, que existe uma forma de agir sobre a corda para que ela fique em repouso o mais rapidamente possível, e que podemos calcular essa forma de agir nos extremos da corda através de controles na forma de funções iguais as forças de tensões nos extremos da corda, uma delas tomada em sentido contrário para ir eliminando o movimento. No controle exato do pêndulo (dimensão finita) abordamos um problema de robótica, onde queremos controlar um braço rígido giratório através de um motor localizado no extremo que o conecta ao resto da estrutura, aplicando um controle u ao sistema, para conter as oscilações e a velocidade desse braço.

Abstract

In this work is presented some recurring aspects of the Theory of the Exact Control applied to the wave equation and to the pendulum equation. On the exact control of wave equation (control in infinite dimension) our approach was based on the vibrating string problem, where two people are holding a moving string and at certain moment they start to act at the ends of this string, in order to lead it to repose through transversal movements. We will show that there is a way of acting at the string so that it stays in repose as fast as possible. We are also able to calculate this way of acting at the ends of the string through controls in the form of equal functions the forces of tensions in the extremities of the string, one of them taken in contrary direction to go eliminating the movement. In the pendulum exact control (control in finite dimension), a problem usually found in robotics is addressed, in which one wants to control a rigid gyratory arm by a rotor located at the end that connects it to the rest of the structure, applying a control u to the system, to contain the oscillations and speed of the robotic arm.

Sumário

Introdução	1
1 Noções de Análise	4
1.1 Preliminares	4
1.2 Espaço das Distribuições	8
1.3 Espaço de Sobolev de Ordem Um	10
2 Solução da Equação da Onda	13
3 Controlabilidade Exata da Equação da Onda	17
3.1 Controle Exato da Corda Vibrante	17
3.2 Existência de Soluções Fracas.	18
3.3 Método de Unicidade Hilbertiana.	35
4 Controlabilidade de um Sistema Linear Finito	42
5 Controle Exato do Pêndulo	47
Considerações Finais	56
Referências Bibliográficas	59

Lista de Figuras

5.1	Pêndulo Estável	48
5.2	Pêndulo a esquerda e Pêndulo a direita	49

Introdução

O estudo da Teoria do Controle existe há muito tempo, mesmo antes de ter esse nome. Sua essência está baseada em algumas noções que nos são familiares. Por exemplo: Quando, em alta velocidade, tentamos frear o carro, não fazemos de uma só vez se não as rodas travariam e nós perderíamos o controle do carro. Devemos frear de forma intermitente. Controlar os sistemas que surgem na natureza ou no desenvolvimento tecnológico, frequentemente muito complexos e com um grande número de parâmetros, não se trata simplesmente de forçar o sistema para conduzi-lo de maneira monótona e ininterrupta ao objetivo procurado, mas que, frequentemente, temos primeiro que nos afastar do objetivo procurado em harmonia com o sistema para depois alcançar o objetivo com um esforço adequado mas não excessivo. O processo de controle consiste em direcionar uma solução do sistema do estado inicial para o estado final, num tempo finito de acordo com ação do controle sobre o sistema.

Nos trabalhos de Christian Huygens e Robert Hooke sobre a oscilação do pêndulo ao final do século XVII, cujo objetivo final era uma medição precisa do tempo, surgem elementos do que hoje conhecemos como a Teoria do Controle. O objetivo era proporcionar instrumentos que servissem a navegação. Estes trabalhos foram depois adaptados ao controle da velocidade nos moinhos de vento. Era utilizado um sistema mecânico de esferas girando em torno de um eixo cuja velocidade de rotação era proporcional a do moinho. A medida que a velocidade de giro aumentava, as esferas se afastavam do eixo, acionando as asas do moinho através de mecanismos engenhosos. James Watt adaptou este tipo de mecanismo a máquina de vapor. Neste caso, a medida que a velocidade das esferas aumentava, as válvulas se abriam, deixando escapar o vapor. Ao diminuir a pressão na caldeira, a velocidade diminuía. O problema era então manter a velocidade da

máquina constante. O astrônomo inglês Georges Airy foi o primeiro a tentar fazer uma análise do regulador das esferas de Watt. Mas foi somente em 1868 que o físico escocês James C. Maxwell fez a primeira análise matemática convincente da máquina de vapor. Ele explicou alguns dos comportamentos irregulares observados nas máquinas e propôs mecanismos diversos do controle.

Em 1930 se produziu um importante avanço. As aplicações eram numerosas. E deste modo foram surgindo conceitos sólidos, e ao final dessa década já haviam dois modos de abordar os problemas de controle. Um, era baseado na utilização de equações diferenciais e, portanto, os desenvolvimentos matemáticos notáveis que se haviam produzido nos séculos XVIII e XIX pelos cientistas mais célebres da história tinham um papel central. O outro, baseado na análise frequencial, seria impensável sem a utilização das técnicas desenvolvidas pelo genial matemático francês Joseph Fourier.

Durante a Segunda Guerra Mundial os mecanismos de controle tiveram um importante desenvolvimento. A partir de 1960 começa uma nova era, os modelos utilizados até esse momento eram inadequados para representar a complexidade do mundo real posto que os sistemas reais são não lineares e estão sujeitos frequentemente a perturbações não determinadas. As contribuições de Richard E. Bellman (programação dinâmica), de R. E. Kalman (filtros e análise algébrica de problemas de controle e teoria de sistemas) nos Estados Unidos e de Lev Semenovitch Pontryagin (princípio do máximo no controle ótimo não linear) na antiga União Soviética estabeleceram os pilares fundamentais da Teoria do Controle nas últimas décadas.

Neste trabalho abordamos alguns tópicos sobre a Teoria do Controle Exato. No primeiro capítulo mostramos alguns aspectos preliminares, com definições importantes utilizadas no decorrer do trabalho e algumas propriedades do espaço de Sobolev de ordem um, necessárias ao estudo do problema misto da equação da onda. No segundo capítulo apresentamos a solução clássica da equação da onda. No terceiro capítulo aplicamos o controle exato na equação da onda, abordando o problema da corda vibrante, onde duas pessoas estão segurando uma corda em movimento e a partir de certo instante começam a agir sobre os extremos dessa corda, a fim de levá-la ao repouso através de movimentos transversais, o mais rapidamente possível. Queremos então, descobrir se

existe uma forma de agir sobre a corda para que ela fique em repouso, e como podemos calcular essa forma de agir nos extremos da corda. E qual o tempo mínimo para isso. Nesse capítulo estudamos a existência de soluções fracas para o problema e o método de unicidade Hilbertiana. No quarto capítulo estudamos a controlabilidade de um sistema linear em dimensão finita, onde apresentamos as condições de controle de Kalman e a propriedade de observabilidade. Finalmente, no capítulo 5, apresentamos o Controle Exato do Pêndulo, através de um problema de robótica, onde queremos controlar um braço rígido giratório através de um motor localizado no extremo que o conecta ao resto da estrutura. Nesse capítulo estudamos controles do tipo digitais e do tipo bang-bang. Com isso mostramos alguns aspectos recorrentes da Teoria do Controle.

Capítulo 1

Noções de Análise

1.1 Preliminares

Nesta seção trazemos algumas definições importantes que serão utilizadas no decorrer do nosso trabalho.

Definição 1.1 *Seja E um espaço vetorial. Uma distância sobre E é uma aplicação d de $E \times E$ no conjunto dos números reais satisfazendo as seguintes propriedades,*

i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$, se e só se $x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z$ em E .

Espaço Métrico é um espaço vetorial E juntamente com uma distância sobre E .

Definição 1.2 *Uma norma em um espaço vetorial E é uma aplicação $\| \cdot \|: E \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

i) $\| x \| \geq 0$ e $\| x \| = 0$, se e só se $x = 0$

ii) $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$

iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$, $\forall x, y$ em E e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Destas propriedades resulta que a função definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica em E . Um espaço vetorial munido com uma norma é dito espaço vetorial normado.

Definição 1.3 *Uma sequência $\{x_n\}$ de pontos de um espaço vetorial normado E é uma sequência de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon)$ tal que, para*

$$m, n > N(\epsilon) \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \epsilon \quad \text{em } E.$$

Toda sequência convergente é de Cauchy.

Observação 1.1 *A volta não é verdadeira, só é válida quando o espaço é completo.*

Definição 1.4 *Um espaço E é completo quando toda sequência de Cauchy em E é convergente.*

Definição 1.5 *Um espaço vetorial normado completo chama-se espaço de Banach.*

Definição 1.6 *Sejam X, Y espaços vetoriais normados. Representamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial das transformações lineares contínuas de X em Y . Chamamos $\mathcal{L}(E, K)$ de dual, ou adjunto, do espaço vetorial normado E , e representamos por E' .*

O dual E' de um espaço vetorial normado E , também tem, por sua vez, um dual que denotaremos por E'' .

Definição 1.7 *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} . Um produto interno sobre E é um função $(\cdot, \cdot): E \times E \rightarrow \mathbb{K}$, que associa a cada par ordenado de vetores $x, y \in E$ um número real (x, y) , chamado o produto interno de x por y , que satisfaz as seguintes propriedades:*

$$i) (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

$$ii) (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

$$iii) (x, y) = (y, x)$$

iv) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$ se e só se $x = 0$ $\forall x, y, z$ em E e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Das três primeiras propriedades resultam

$$\begin{aligned}(x, y + z) &= (x, y) + (x, z), \\ (x, \lambda y) &= \lambda(x, y) \quad \text{e} \quad (0, y) = 0.\end{aligned}$$

Observação 1.2 O produto interno pode ser chamado também de produto escalar e muitas vezes é representado pelo símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Observação 1.3 Um espaço vetorial munido de um produto interno é chamado de espaço pré-hilbertiano.

Definição 1.8 Um espaço de Hilbert H é um espaço de Banach cuja norma deriva de um produto interno, isto é $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$, $\forall x \in E$.

Definição 1.9 Um espaço de Hilbert é chamado de separável se ele possui um subconjunto enumerável denso.

Definição 1.10 Seja S um subconjunto do espaço de Hilbert H . Definimos seu complemento ortogonal como o conjunto S^\perp dado por

$$S^\perp = \{x \in H \mid (s, x) = 0 \quad \forall s \in S\}.$$

Teorema 1.1 Um subespaço $S \subseteq H$ é denso em H se, e somente se, $v = 0$ é o único elemento de H ortogonal a S .

Definição 1.11 Um conjunto S de vetores de um espaço de Hilbert diz-se ortogonal quando $x \perp y$, isto é, $(x, y) = 0$ para todo par de elementos distintos x, y de S . Se além disso $\|x\| = 1$ para todo x de S , S é dito ortonormal.

Definição 1.12 [**O espaço L^p**]. Seja p um número real tal que $1 \leq p < \infty$ e Ω um aberto do \mathbb{R}^n , a qual pode ser o espaço \mathbb{R}^n todo. Denotaremos por $L^p(\Omega)$, ao espaço de Banach das funções u definidas em Ω com valores em \mathbb{K} (\mathbb{K} é corpo dos números reais), tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω , com norma definida por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

Quando $p = 2$, temos o espaço $L^2(\Omega)$, com a norma definida por:

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Denotaremos por (\cdot, \cdot) e $\| \cdot \|$ o produto interno e a norma, respectivamente, deste espaço. Assim

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

com $u, v \in L^2(\Omega)$ e

$$\| u \|^2 = (u, u).$$

Proposição 1.1 (Desigualdade de Holder). *Seja $u \in L^p$ e $v \in L^q$, então $uv \in L^1$ e tem-se a desigualdade:*

$$\left| \int uv \right| \leq \| u \|_p \| v \|_q,$$

onde $1 < p < \infty$ e q é definido por $q = \frac{p}{p-1}$, e portanto satisfaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposição 1.2 (Desigualdade de Minkowski). *Se $u, v \in L^p$, então*

$$\| u + v \|_p \leq \| u \|_p + \| v \|_p$$

onde $1 \leq p < \infty$

Proposição 1.3 (Identidade de Parseval). *Seja V um espaço de Hilbert com produto escalar $(\cdot, \cdot)_V$ e norma $\| \cdot \|_V$. Uma condição necessária e suficiente para que uma sucessão $\{w_v\}$ de vetores ortonormais em V , seja completa em V , é que para todo $v \in V$ se tenha:*

$$\| v \|_V^2 = \sum_{v=1}^{\infty} |(v, w_v)_V|^2$$

A identidade acima denomina-se *identidade de Parseval*.

Teorema 1.2 *Se $x \perp y$ implica que*

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2.$$

Definição 1.13 (Convergência Fraca no Espaço L^2). Suponhamos que $\{u_n\}$ seja uma sucessão de funções em L^2 que converge forte para uma função $u \in L^2$. Então $\{u_n\}$ satisfaz as seguintes condições:

i) Para toda função $v \in L^2$, tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n v = \int uv.$$

ii) As normas dos elementos da sucessão,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \|u\|.$$

Dizemos que a função $\{u_n\}$ converge fracamente para u em L^2 se satisfaz a condição (i) acima. Portanto as funções que convergem forte em L^2 são sucessões fracamente convergentes.

1.2 Espaço das Distribuições

Definição 1.14 Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n . Representa-se por $C^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções numéricas definidas em Ω que são indefinidamente diferenciáveis em Ω .

Definição 1.15 Seja $u : \Omega \mapsto K$ contínua, definimos o suporte de u , o qual denotaremos por $\text{supp}(u)$, como o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$.

Definição 1.16 Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ ao conjunto das funções $u : \Omega \mapsto K$ que são indefinidamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto, sendo que este suporte depende de u .

Noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$; dizemos que uma sucessão $\{\varphi_\nu\}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, quando satisfaz as seguintes condições:

i) Se existe um compacto K de Ω tal que $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K$, $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\forall \nu$.

ii) A sucessão $\{\varphi_\nu\}$ converge uniformemente para zero em Ω juntamente com todas as suas derivadas.

Dizemos que uma sucessão $\{\varphi_\nu\}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, quando a sucessão $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

Definição 1.17 *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima, denominamos o espaço de funções testes e o representamos por $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Denominamos distribuições sobre Ω a toda forma linear T contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. E Representamos por $\langle T, \varphi \rangle$ o valor de T em φ .

Representamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ ao espaços dos funcionais lineares definidos em $\mathcal{D}(\Omega)$ com valores em K tais que se

$$\varphi_\nu \rightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{então} \quad \langle T, \varphi_\nu \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

Seja $\{T_\nu\}$ uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então dizemos que:

$$T_\nu \rightarrow T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{se} \quad \langle T_\nu, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

O espaço $\mathcal{D}'(\Omega)$ munido da convergência acima é denominado o espaço das distribuições sobre Ω .

A seguir veremos a noção de derivada fraca no sentido das distribuições.

Definição 1.18 *Seja T uma distribuição sobre um aberto Ω do \mathbb{R}^n denominamos de derivada primeira de T em relação a x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ao funcional linear representado por $\partial_{x_i} T$ e definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ do seguinte modo:*

$$\langle \partial_{x_i} T, \varphi \rangle = - \langle T, \partial_{x_i} \varphi \rangle,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.19 *Seja $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $1 \leq N \leq n$, um multi-índice de números inteiros não negativos. Define-se a derivada de ordem k de uma distribuição sobre Ω como sendo o funcional $D^k T$ definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por:*

$$\langle D^k T, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, D^k \varphi \rangle,$$

para toda φ em $\mathcal{D}(\Omega)$.

Toda distribuição sobre Ω , possui derivadas de todas as ordens, derivadas estas que são, também distribuições sobre Ω .

Observação 1.4 *Uma função do $L^p(\Omega)$ é uma função que é definida quase sempre em Ω , ou seja, é uma função que é definida em todo Ω a menos de um conjunto de medida nula. Em geral, uma função de L^p não é nem sequer contínua muito menos derivável no sentido clássico.*

Logo a derivada de uma função do L^p , não pode ser no sentido clássico, o sentido é o das distribuições. Nesse sentido, o das distribuições, a derivada de uma função do L^p fica bem definida, uma vez que toda função do L^p define uma distribuição. Como toda distribuição possui derivada fraca de todas as ordens, isto é, derivada no sentido das distribuições, temos que toda função do L^p terá derivada fraca de todas as ordens.

1.3 Espaço de Sobolev de Ordem Um

Representamos por $H^1(0, L)$ o espaço das funções $u \in L^2(0, L)$, cuja derivada no sentido das distribuições pertence a $L^2(0, L)$.

Em $H^1(0, L)$ o produto escalar $((\cdot, \cdot))$ é definido por:

$$((u, v)) = \int_0^L uv dx + \int_0^L \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx,$$

para todo par $u, v \in H^1(0, L)$

e a norma $\| \cdot \|$ é definida por

$$\| v \|^2 = \int_0^L v^2 dx + \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx.$$

O espaço $H^1(0, L)$ denomina-se espaço de Sobolev de ordem um sobre o aberto $\Omega =]0, L[$.

A seguir veremos algumas propriedades do espaço $H^1(0, L)$ necessárias ao estudo do problema misto da equação da onda.

Proposição 1.4 *O espaço de Sobolev $H^1(0, L)$ é um espaço de Hilbert.*

Proposição 1.5 *O espaço de Sobolev $H^1(0, L)$ é um espaço separável.*

Proposição 1.6 *O espaço de Sobolev $H^1(0, L)$ está imerso em $C^0([0, L])$, espaço das funções contínuas em $[0, L]$.*

Sendo as funções u de $H^1(0, L)$ contínuas em $[0, L]$, faz sentido falar em $u(0)$ e $u(L)$. Assim definimos o espaço $H_0^1(0, L)$, formado pelas funções $u \in H^1(0, L)$ tais que os valores $u(0) = u(L) = 0$.

Proposição 1.7 *Seja $u \in H^1(\Omega)$ com suporte compacto então $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Representamos o produto escalar $((\cdot, \cdot))$ de $H_0^1(0, L)$ por

$$((u, v)) = \int_0^L \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx,$$

para todo par $u, v \in H_0^1(\Omega)$

e a norma $\| \cdot \|$ é definida por

$$\| v \|^2 = \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx.$$

Considere uma forma linear contínua f sobre $H_0^1(\Omega)$, isto é, $f : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, uma aplicação linear e contínua. A continuidade equivale a existência de uma constante $c > 0$ tal que $|f(v)| \leq c \| v \|_{H^1(\Omega)}$ para todo v em $H_0^1(\Omega)$.

Em seguida faremos uma caracterização do dual do espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$.

Proposição 1.8 *Se f for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n + 1$ funções $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ de $L^2(\Omega)$ tais que*

$$f = v_0 + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} v_i.$$

Definição 1.20 *O espaço vetorial das formas lineares contínuas sobre $H_0^1(\Omega)$ denomina-se o dual de $H_0^1(\Omega)$ e representa-se por $[H_0^1(\Omega)]'$ ou $H^{-1}(\Omega)$.*

Observação 1.5 *O espaço definido acima é também um espaço de Hilbert, pois é o dual do espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$.*

Representamos por $L^2(]0, T[; L^2(0, L))$, o espaço vetorial das funções $u(x, t)$ tais que para cada t em $]0, T[$ pertencem a $L^2(0, L)$ sendo a norma de $u(x, t)$ em $L^2(0, L)$ uma função de $L^2(0, T)$. Definimos o produto escalar em $L^2(]0, T[; L^2(0, L))$:

$$(u, v)_{L^2(]0, T[; L^2(0, L))} = \int_0^T (u, v) ds,$$

onde (u, v) é o produto escalar em $L^2(0, L)$ e a norma definimos:

$$\|u\|_{L^2(]0, T[; L^2(0, L))}^2 = \int_0^T |u(s)|^2 ds.$$

O espaço acima representado é um espaço de Hilbert.

Definimos $L^2(]0, T[; H_0^1(0, L))$ como o espaço vetorial das funções $u(x, t)$ tais que para todo t em $]0, T[$ a função $u(x, t)$ pertence a $H_0^1(0, L)$ sendo a norma de $H_0^1(0, L)$ das funções pertencentes a $L^2(0, T)$. Representamos o produto interno neste espaço por:

$$((u, v))_{L^2(]0, T[; H_0^1(0, L))} = \int_0^T ((u, v)) ds$$

e a norma:

$$\|u\|_{L^2(]0, T[; H_0^1(0, L))}^2 = \int_0^T \|u(s)\|^2 ds.$$

O espaço que acabamos de definir também é um espaço de Hilbert.

De maneira análoga definimos $C^0([0, T]; L^2(0, L))$, o espaço vetorial das funções $u(x, t)$ tais que para todo $t \in [0, T]$, $u(x, t)$ pertence a $L^2(0, L)$ e a função $t \rightarrow \|u(x, t)\|$, norma $L^2(0, L)$ de $u(x, t)$, pertence a $C^0([0, T])$. Este espaço vetorial com a norma :

$$\|u(x, t)\|_{C^0([0, T]; L^2(0, L))} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|$$

é um espaço de Banach.

Capítulo 2

Solução da Equação da Onda

Para encontrar a solução da equação da onda utilizando o método clássico de Fourier, devemos resolver o seguinte sistema;

$$u \in C^2(]0, L[\times]0, \infty[) \cap C([0, L] \times [0, \infty[) \quad (2.1)$$

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t), \quad (x, t) \in]0, L[\times]0, \infty[\quad (2.2)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

$$u(x, 0) = f(x) \in C^2([0, L]) \quad (2.4)$$

$$\partial_t u(x, 0) = g(x) \in C^1([0, L]) \quad (2.5)$$

$$f(0) = f(L) = f'(0) = f'(L) = g(0) = g(L) = 0 \quad (2.6)$$

A função $u(x, t)$ descreve neste caso o deslocamento vertical de uma corda vibrante com extremos fixos $u(0, t) = u(L, t) = 0$, $t \geq 0$, forma inicial $u(x, 0) = f(x) \in C^2([0, L])$ e velocidade inicial $\partial_t u(x, 0) = g(x) \in C^1([0, L])$.

Em primeiro lugar vamos resolver o problema homogêneo

$$u \in C^2(]0, L[\times]0, \infty[) \cap C([0, L] \times [0, \infty[)$$

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t), \quad (x, t) \in]0, L[\times]0, \infty[$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0$$

utilizando o método de separação de variáveis, escrevemos a função u candidato a solução como um produto

$$u(x, t) = \phi(x)T(t)$$

Assim sendo, derivando com relação a variável x e t duas vezes e substituindo na equação diferencial, obtemos,

$$\phi(x)\ddot{T}(t) = c^2\phi''(x)T(t) \quad \text{onde } c \text{ é a velocidade da onda}$$

Portanto, supondo que $\phi(x)T(t) \neq 0$ temos

$$\frac{\ddot{T}(t)}{c^2T(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = -\alpha, \quad \text{com } \alpha \text{ constante real.}$$

Obtém-se então as seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} T &\in C^2(]0, \infty[) \cap C([0, \infty[) \\ \ddot{T}(t) &= -\alpha c^2 T(t), \quad t \in]0, \infty[\end{aligned}$$

e o famoso problema de autovalores para o laplaciano

$$\begin{aligned} \phi &\in C^2(]0, L[) \cap C([0, L]) \\ \phi''(x) &= -\alpha\phi(x), \quad x \in]0, L[\\ \phi(0) &= \phi(L) = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

No problema (2.7) temos $\alpha > 0$, pois do contrário teríamos apenas a solução trivial. Para provar essa afirmação vamos introduzir o produto interno

$$\langle f | g \rangle = \int_0^L f(x)\overline{g(x)}dx,$$

onde $f, g \in C([0, L])$ e \bar{g} significa o complexo conjugado de g .

LEMA 1: Sejam $f, g \in C^2(]0, L[) \cap C([0, L])$ tais que $f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0$.

Suponha que f'' e g'' são limitadas. Então

$$\langle -f'' | g \rangle = \langle f' | g' \rangle = \langle f | -g'' \rangle. \tag{2.8}$$

DEMONSTRAÇÃO: Fazendo integração por partes,

$$\begin{aligned} \langle -f'' | g \rangle &= - \int_0^L f''(x)\overline{g(x)}dx \\ &= -f'(x)\overline{g(x)}\Big|_0^L + \int_0^L f'(x)\overline{g'(x)}dx = \langle f' | g' \rangle \\ &= f(x)\overline{g'(x)}\Big|_0^L - \int_0^L f(x)\overline{g''(x)}dx = \langle f | -g'' \rangle \end{aligned}$$

Agora, se ϕ é uma solução de (2.7), é fácil verificar que as condições do lema são satisfeitas, e (2.8) mostra então que,

$$\alpha \langle \phi | \phi \rangle = \langle -\phi'' | \phi \rangle = \langle \phi | -\phi'' \rangle = \bar{\alpha} \langle \phi | \phi \rangle \quad (2.9)$$

$$\alpha \langle \phi | \phi \rangle = \langle \phi' | \phi' \rangle \quad (2.10)$$

Como ϕ não é identicamente nula, a relação (2.9) implica que $\alpha = \bar{\alpha}$, portanto α é real. Como $\langle \phi | \phi \rangle > 0$ e $\langle \phi' | \phi' \rangle \geq 0$, a relação (2.10) mostra que devemos ter $\alpha \geq 0$. Mas se $\alpha = 0$ temos

$$\int_0^L |\phi'(x)|^2 dx = 0.$$

Consequentemente, $\phi'(x) = 0$ em $]0, L[$, de modo que $\phi(x)$ deve ser constante. Mas $\phi(0) = \phi(L) = 0$, e portanto $\phi \equiv 0$.

Agora basta procurar soluções não triviais no caso $\alpha > 0$. Dessa forma, a solução geral de

$$\phi''(x) + \alpha\phi(x) = 0$$

com $\alpha > 0$ é dada por

$$\phi(x) = B_1 \cos(\sqrt{\alpha}x) + B_2 \sin(\sqrt{\alpha}x),$$

onde B_1 e B_2 são constantes complexas arbitrárias.

Em particular, toda solução de (2.7) deve ter esta forma. Impondo as condições de contorno, $\phi(0) = \phi(L) = 0$, obtem-se,

$$\phi(0) = B_1 = 0 \quad (2.11)$$

$$\phi(L) = B_1 \cos(\sqrt{\alpha}L) + B_2 \sin(\sqrt{\alpha}L) = 0 \quad (2.12)$$

Substituindo (2.11) em (2.12), temos que $B_2 \sin(\sqrt{\alpha}L) = 0$. Como $B_2 \neq 0$, para poder obter soluções não triviais, é preciso impor $\sin(\sqrt{\alpha}L) = 0$. Daí tiramos que $\sqrt{\alpha}L = k\pi$, portanto $\sqrt{\alpha} = \frac{k\pi}{L}$ e $\alpha = \frac{k^2\pi^2}{L^2}$, com $k = 1, 2, 3, \dots$

Portanto temos

$$\phi_k(x) = B_2 \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

E tomando $B_2 = 1$ temos

$$\phi_k(x) = \text{sen} \frac{k\pi x}{L}.$$

A equação $T(t)$ tomará a forma

$$T_k(t) = A'_k \cos \frac{ck\pi t}{L} + A''_k \text{sen} \frac{ck\pi t}{L}.$$

Assim, a solução satisfazendo as condições de contorno será

$$u_k(x, t) = \left[A'_k \cos \frac{ck\pi t}{L} + A''_k \text{sen} \frac{ck\pi t}{L} \right] \text{sen} \frac{k\pi x}{L}.$$

Falta agora determinar as constantes A'_k e A''_k . Como a equação proposta é linear e homogênea, sabemos que

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A'_k \cos \frac{ck\pi t}{L} + A''_k \text{sen} \frac{ck\pi t}{L} \right] \text{sen} \frac{k\pi x}{L} \quad (2.13)$$

também é solução. Aplicando as condições iniciais em (2.13), segue que

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A'_k \text{sen} \frac{k\pi x}{L} = f(x)$$

e

$$\partial_t u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A''_k \frac{ck\pi}{L} \text{sen} \frac{k\pi x}{L} = g(x).$$

Os coeficientes A'_k e A''_k poderão ser determinados expandindo, em série de Fourier em senos, $f(x)$ e $g(x)$. Dessa forma temos:

$$A'_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \text{sen} \frac{k\pi x}{L} dx \quad (2.14)$$

e

$$A''_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{k\pi x}{L} dx. \quad (2.15)$$

Assim, a função definida por (2.13) com os coeficientes A'_k e A''_k dados por (2.14) e (2.15), respectivamente, é um candidato à solução do problema (2.1)-(2.6).

Capítulo 3

Controlabilidade Exata da Equação da Onda

3.1 Controle Exato da Corda Vibrante

Pretendemos divulgar de uma maneira simples o conceito de controlabilidade exata de sistemas de equações diferenciais parciais. A guisa de motivação colocaremos o seguinte problema. Se duas pessoas seguram uma corda em movimento e a partir de um certo instante $t = 0$ elas começam a agir nos extremos, pretendendo levar a corda a posição de equilíbrio através de movimentos transversais, o mais rapidamente possível.

Será que existe uma forma de agir sobre a corda, para que ao final de um determinado tempo T ela esteja equilibrada? E se isto for possível, como pode-se calcular explicitamente esta forma de agir nos extremos da corda? Qual é o tempo mínimo em que a situação de equilíbrio é alcançada? Todas estas perguntas serão respondidas ao longo desse capítulo.

Se $u(x, t)$ define a posição do ponto x da corda no instante t , então u deve ser solução da equação:

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad \text{em }]0, L[\times]0, T[\quad (3.1)$$

$$u(0, t) = f(t), \quad u(L, t) = g(t) \quad \text{em }]0, T[\quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em }]0, L[\quad (3.3)$$

onde $f(t)$ e $g(t)$ são funções que definem os movimentos transversais dos bordos $x = 0$ e $x = L$ em cada instante de tempo t . As funções $u_0(x)$ e $u_1(x)$ são a posição e a velocidade inicial do ponto x respectivamente, e assumindo desprezíveis as forças externas.

A posição inicial e a velocidade inicial de cada ponto da corda são conhecidos. Devemos encontrar quais devem ser as funções f e g que definem os movimentos transversais nos extremos da corda, para que ao final de um tempo T , o menor possível, seja válida a igualdade:

$$u(x, T) = \partial_t u(x, T) = 0 \quad \forall x \in]0, L[. \quad (3.4)$$

Quando a relação anterior é satisfeita, para quaisquer que sejam a posição e a velocidade inicial da corda, definida pelos dados iniciais u_0 e u_1 tomados num espaço que definiremos posteriormente, diremos que o *sistema é exatamente controlável*.

O conceito de controlabilidade é novo, e tomou maior ênfase quando o matemático francês Jacques-Louis Lions introduziu o método da Unicidade Hilbertiana, que será explicitado posteriormente. Esse método permite conhecer novas propriedades de regularidade inclusive para modelos não lineares (ver Lions [2]) e também novos resultados de unicidade para equação linear da onda.

3.2 Existência de Soluções Fracas.

Estudaremos agora a existência de soluções fracas para o problema (3.1)-(3.3) quando os dados iniciais são tais que u_0 e u_1 pertencem a $L^2(0, L)$ e $H^{-1}(0, L)$, respectivamente. Vamos definir primeiro o que entenderemos como solução fraca.

Definição 1 Sejam as funções u_0, u_1 tais que

$$u_0 \in L^2(0, L), \quad u_1 \in H^{-1}(0, L) \quad \text{e as funções} \quad f, g \in L^2(0, T).$$

Diremos que u é solução fraca do problema (3.1)-(3.3) se

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L u(x, t) F(x, t) dx dt &= - \int_0^L u_0(x) \partial_t \psi(x, 0) dx + \langle u_1(x), \psi(x, 0) \rangle \\ &+ \int_0^T [f(t) \partial_x \psi(0, t) - g(t) \partial_x \psi(L, t)] dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

para todo par ψ e F satisfazendo

$$\begin{aligned}\partial_t^2 \psi - \partial_x^2 \psi &= F & \text{em }]0, L[\times]0, T[\\ \psi(x, T) = \partial_t \psi(x, T) &= 0 & \text{em }]0, L[\\ \psi(0, t) = \psi(L, t) &= 0 & \text{em }]0, T[\end{aligned}$$

Verificando a equação (3.5) mostrada acima:

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^L u(x, t) F(x, t) dx dt &= \int_0^T \int_0^L u(x, t) [\partial_t^2 \psi(x, t) - \partial_x^2 \psi(x, t)] dx dt & (3.6) \\ &= \int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_t^2 \psi(x, t) dx dt - \int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_x^2 \psi(x, t) dx dt\end{aligned}$$

Resolvendo a integral dupla $\int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_t^2 \psi(x, t) dx dt$:

$$\int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_t^2 \psi(x, t) dx dt = \int_0^L \left[\int_0^T u(x, t) \partial_t^2 \psi(x, t) dt \right] dx$$

Como

$$\begin{aligned}\int_0^T u(x, t) \partial_t^2 \psi(x, t) dt &= u(x, t) \partial_t \psi(x, t) \Big|_0^T - \int_0^T \partial_t u(x, t) \partial_t \psi(x, t) dt \\ &= u(x, T) \partial_t \psi(x, T) - u(x, 0) \partial_t \psi(x, 0) - \int_0^T \partial_t u(x, t) \partial_t \psi(x, t) dt \\ &= -u(x, 0) \partial_t \psi(x, 0) - \int_0^T \partial_t u(x, t) \partial_t \psi(x, t) dt \\ &= -u(x, 0) \partial_t \psi(x, 0) - \partial_t u(x, t) \psi(x, t) \Big|_0^T + \int_0^T \partial_t^2 u(x, t) \psi(x, t) dt \\ &= -u(x, 0) \partial_t \psi(x, 0) - \partial_t u(x, T) \psi(x, T) \\ &+ \partial_t u(x, 0) \psi(x, 0) + \int_0^T \partial_t^2 u(x, t) \psi(x, t) dt \\ &= -u(x, 0) \partial_t \psi(x, 0) + \partial_t u(x, 0) \psi(x, 0) + \int_0^T \partial_t^2 u(x, t) \psi(x, t) dt \\ &= -u_0(x) \partial_t \psi(x, 0) + u_1(x) \psi(x, 0) + \int_0^T \partial_t^2 u(x, t) \psi(x, t) dt\end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_t^2 \psi(x, t) dx dt &= \\ \int_0^L \left[-u_0(x) \partial_t \psi(x, 0) + u_1(x) \psi(x, 0) + \int_0^T \partial_t^2 u(x, t) \psi(x, t) dt \right] dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_t^2 \psi(x, t) dx dt = \\
& - \int_0^L u_0(x) \partial_t \psi(x, 0) dx + \langle u_1(x), \psi(x, 0) \rangle + \int_0^T \int_0^L \partial_t^2 u(x, t) \psi(x, t) dx dt \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Agora resolvendo a integral dupla $-\int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_x^2 \psi(x, t) dx dt$:

$$- \int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_x^2 \psi(x, t) dx dt = - \int_0^T \left[\int_0^L u(x, t) \partial_x^2 \psi(x, t) dx \right] dt$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_0^L u(x, t) \partial_x^2 \psi(x, t) dx &= u(x, t) \partial_x \psi(x, t) \Big|_0^L - \int_0^L \partial_x u(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx \\
&= u(L, t) \partial_x \psi(L, t) - u(0, t) \partial_x \psi(0, t) - \int_0^L \partial_x u(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx \\
&= u(L, t) \partial_x \psi(L, t) - u(0, t) \partial_x \psi(0, t) \\
&\quad - \partial_x u(x, t) \psi(x, t) \Big|_0^L + \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \psi(x, t) dx \\
&= u(L, t) \partial_x \psi(L, t) - u(0, t) \partial_x \psi(0, t) - \partial_x u(L, t) \psi(L, t) \\
&\quad + \partial_x u(0, t) \psi(0, t) + \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \psi(x, t) dx \\
&= u(L, t) \partial_x \psi(L, t) - u(0, t) \partial_x \psi(0, t) + \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \psi(x, t) dx \\
&= g(t) \partial_x \psi(L, t) - f(t) \partial_x \psi(0, t) + \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \psi(x, t) dx
\end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_x^2 \psi(x, t) dx dt = \\
& - \int_0^T \left[g(t) \partial_x \psi(L, t) - f(t) \partial_x \psi(0, t) + \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \psi(x, t) dx \right] dt \\
& - \int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_x^2 \psi(x, t) dx dt = \int_0^T [f(t) \partial_x \psi(0, t) - g(t) \partial_x \psi(L, t)] dt \\
& \quad - \int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \psi(x, t) dx dt \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.7) e (3.8) em (3.6) temos,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^L u(x, t) F(x, t) dx dt = \\
& - \int_0^L u_0(x) \partial_t \psi(x, 0) dx + \langle u_1(x), \psi(x, 0) \rangle + \int_0^T \int_0^L \partial_t^2 u(x, t) \psi(x, t) dx dt \\
& + \int_0^T [f(t) \partial_x \psi(0, t) - g(t) \partial_x \psi(L, t)] dt - \int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \psi(x, t) dx dt \\
\\
& \int_0^T \int_0^L u(x, t) F(x, t) dx dt = \\
& - \int_0^L u_0(x) \partial_t \psi(x, 0) dx + \langle u_1(x), \psi(x, 0) \rangle + \int_0^T [f(t) \partial_x \psi(0, t) - g(t) \partial_x \psi(L, t)] dt \\
& + \int_0^T \int_0^L [\partial_t^2 u(x, t) \psi(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) \psi(x, t)] dx dt \\
\\
& \int_0^T \int_0^L u(x, t) F(x, t) dx dt = \\
& - \int_0^L u_0(x) \partial_t \psi(x, 0) dx + \langle u_1(x), \psi(x, 0) \rangle + \int_0^T [f(t) \partial_x \psi(0, t) - g(t) \partial_x \psi(L, t)] dt \\
& + \int_0^T \int_0^L [\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t)] \psi(x, t) dx dt
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^L u(x, t) F(x, t) dx dt = \\
& - \int_0^L u_0(x) \partial_t \psi(x, 0) dx + \langle u_1(x), \psi(x, 0) \rangle + \int_0^T [f(t) \partial_x \psi(0, t) - g(t) \partial_x \psi(L, t)] dt
\end{aligned}$$

Observação 1. Essa definição de solução é também chamada de solução por transposição, para mais informações ver Magenes [3]. Note que se u for uma função $C^2(]0, L[\times]0, T[)$, então u é solução clássica de (3.1)-(3.3). De fato, considere ψ uma função de $C_0^\infty(]0, L[\times]0, T[)$, então teremos que

$$\partial_t \psi(x, 0) = \partial_x \psi(0, t) = \partial_x \psi(L, t) = 0,$$

e tomando $F = \partial_t^2 \psi - \partial_x^2 \psi$ em (3.5) e integrando por partes em $]0, L[\times]0, T[$ temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L u(x, t) [\partial_t^2 \psi(x, t) - \partial_x^2 \psi(x, t)] dx dt &= - \int_0^L u_0(x) \partial_t \psi(x, 0) dx + \langle u_1(x), \psi(x, 0) \rangle \\
&+ \int_0^T [f(t) \partial_x \psi(0, t) - g(t) \partial_x \psi(L, t)] dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L u(x,t) \partial_t^2 \psi(x,t) dx dt - \int_0^T \int_0^L u(x,t) \partial_x^2 \psi(x,t) dx dt &= - \int_0^L u_0(x) \partial_t \psi(x,0) dx \\
&+ \langle u_1(x), \psi(x,0) \rangle \\
&+ \int_0^T [f(t) \partial_x \psi(0,t) - g(t) \partial_x \psi(L,t)] dt
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Resolvendo a integral dupla $\int_0^T \int_0^L u(x,t) \partial_t^2 \psi(x,t) dx dt$.

$$\int_0^T \int_0^L u(x,t) \partial_t^2 \psi(x,t) dx dt = \int_0^L \left[\int_0^T u(x,t) \partial_t^2 \psi(x,t) dt \right] dx$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_0^T u(x,t) \partial_t^2 \psi(x,t) dt &= u(x,t) \partial_t \psi(x,t) \Big|_0^T - \int_0^T \partial_t u(x,t) \partial_t \psi(x,t) dt \\
&= u(x,T) \partial_t \psi(x,T) - u(x,0) \partial_t \psi(x,0) - \int_0^T \partial_t u(x,t) \partial_t \psi(x,t) dt \\
&= -u(x,0) \partial_t \psi(x,0) - \int_0^T \partial_t u(x,t) \partial_t \psi(x,t) dt \\
&= -u(x,0) \partial_t \psi(x,0) - \partial_t u(x,t) \psi(x,t) \Big|_0^T + \int_0^T \partial_t^2 u(x,t) \psi(x,t) dt \\
&= -u(x,0) \partial_t \psi(x,0) - \partial_t u(x,T) \psi(x,T) + \partial_t u(x,0) \psi(x,0) \\
&+ \int_0^T \partial_t^2 u(x,t) \psi(x,t) dt \\
&= -u(x,0) \partial_t \psi(x,0) + \partial_t u(x,0) \psi(x,0) + \int_0^T \partial_t^2 u(x,t) \psi(x,t) dt
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L u(x,t) \partial_t^2 \psi(x,t) dx dt &= \\
\int_0^L \left[-u(x,0) \partial_t \psi(x,0) + \partial_t u(x,0) \psi(x,0) + \int_0^T \partial_t^2 u(x,t) \psi(x,t) dt \right] dx \\
\int_0^T \int_0^L u(x,t) \partial_t^2 \psi(x,t) dx dt &= - \int_0^L u_0(x) \partial_t \psi(x,0) dx + \langle u_1(x), \psi(x,0) \rangle \\
&+ \int_0^T \int_0^L \partial_t^2 u(x,t) \psi(x,t) dx dt
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Agora resolvendo a integral dupla $-\int_0^T \int_0^L u(x,t) \partial_x^2 \psi(x,t) dx dt$.

$$-\int_0^T \int_0^L u(x,t) \partial_x^2 \psi(x,t) dx dt = - \int_0^T \left[\int_0^L u(x,t) \partial_x^2 \psi(x,t) dx \right] dt$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_0^L u(x,t) \partial_x^2 \psi(x,t) dx &= u(x,t) \partial_x \psi(x,t) \Big|_0^L - \int_0^L \partial_x u(x,t) \partial_x \psi(x,t) dx \\
&= u(L,t) \partial_x \psi(L,t) - u(0,t) \partial_x \psi(0,t) - \int_0^L \partial_x u(x,t) \partial_x \psi(x,t) dx \\
&= u(L,t) \partial_x \psi(L,t) - u(0,t) \partial_x \psi(0,t) \\
&\quad - \partial_x u(x,t) \psi(x,t) \Big|_0^L + \int_0^L \partial_x^2 u(x,t) \psi(x,t) dx \\
&= u(L,t) \partial_x \psi(L,t) - u(0,t) \partial_x \psi(0,t) \\
&\quad - \partial_x u(L,t) \psi(L,t) + \partial_x u(0,t) \psi(0,t) + \int_0^L \partial_x^2 u(x,t) \psi(x,t) dx \\
&= u(L,t) \partial_x \psi(L,t) - u(0,t) \partial_x \psi(0,t) + \int_0^L \partial_x^2 u(x,t) \psi(x,t) dx
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_0^L u(x,t) \partial_x^2 \psi(x,t) dx dt = \\
& - \int_0^T \left[u(L,t) \partial_x \psi(L,t) - u(0,t) \partial_x \psi(0,t) + \int_0^L \partial_x^2 u(x,t) \psi(x,t) dx \right] dt \\
& - \int_0^T \int_0^L u(x,t) \partial_x^2 \psi(x,t) dx dt = \int_0^T [u(0,t) \partial_x \psi(0,t) - u(L,t) \partial_x \psi(L,t)] dt \\
& \quad - \int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x,t) \psi(x,t) dx dt \\
& - \int_0^T \int_0^L u(x,t) \partial_x^2 \psi(x,t) dx dt = \int_0^T [f(t) \partial_x \psi(0,t) - g(t) \partial_x \psi(L,t)] dt \\
& \quad - \int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x,t) \psi(x,t) dx dt \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.10) e (3.11) em (3.9) temos:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L u_0(x) \partial_t \psi(x,0) dx + \langle u_1(x), \psi(x,0) \rangle + \int_0^T \int_0^L \partial_t^2 u(x,t) \psi(x,t) dx dt \\
& + \int_0^T [f(t) \partial_x \psi(0,t) - g(t) \partial_x \psi(L,t)] dt - \int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x,t) \psi(x,t) dx dt = \\
& - \int_0^L u_0(x) \partial_t \psi(x,0) dx + \langle u_1(x), \psi(x,0) \rangle + \int_0^T [f(t) \partial_x \psi(0,t) - g(t) \partial_x \psi(L,t)] dt \\
& \quad \int_0^T \int_0^L \partial_t^2 u(x,t) \psi(x,t) dx dt - \int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x,t) \psi(x,t) dx dt = 0 \\
& \quad \int_0^T \int_0^L [\partial_t^2 u(x,t) \psi(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) \psi(x,t)] dx dt = 0
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^T \int_0^L [\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t)] \psi(x, t) dx dt = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(]0, L[\times]0, T[).$$

Do lema de Du bois Raymond segue que

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0, \quad \text{em }]0, L[\times]0, T[.$$

Tomando $\psi = \theta(t)\phi(x)$, onde $\theta'(0) = 1$, $\theta(0) = 0$ e $\phi \in C_0^\infty(]0, L[)$, substituindo a relação $F = \partial_t^2 \psi - \partial_x^2 \psi$ em (3.5) e integrando por partes em $]0, L[\times]0, T[$ temos:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L u(x, t) [\ddot{\theta}(t)\phi(x) - \theta(t)\phi''(x)] dx dt &= - \int_0^L u_0(x) \dot{\theta}(0) \phi(x) dx \\ &+ \langle u_1(x), \theta(0)\phi(x) \rangle + \int_0^T [f(t)\theta(t)\phi'(0) - g(t)\theta(t)\phi'(L)] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L u(x, t) \ddot{\theta}(t)\phi(x) dx dt - \int_0^T \int_0^L u(x, t)\theta(t)\phi''(x) dx dt &= - \int_0^L u_0(x)\phi(x) dx \\ &+ \int_0^T [f(t)\theta(t)\phi'(0) - g(t)\theta(t)\phi'(L)] dt \quad (3.12) \end{aligned}$$

Resolvendo a integral dupla $\int_0^T \int_0^L u(x, t)\ddot{\theta}(t)\phi(x) dx dt$.

$$\int_0^T \int_0^L u(x, t)\ddot{\theta}(t)\phi(x) dx dt = \int_0^L \phi(x) \left[\int_0^T u(x, t)\ddot{\theta}(t) dt \right] dx$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^T u(x, t)\ddot{\theta}(t) dt &= u(x, t)\dot{\theta}(t) \Big|_0^T - \int_0^T \partial_t u(x, t)\dot{\theta}(t) dt \\ &= u(x, T)\dot{\theta}(T) - u(x, 0)\dot{\theta}(0) - \int_0^T \partial_t u(x, t)\dot{\theta}(t) dt \\ &= u(x, T)\dot{\theta}(T) - u(x, 0) - \int_0^T \partial_t u(x, t)\dot{\theta}(t) dt \\ &= u(x, T)\dot{\theta}(T) - u(x, 0) - \partial_t u(x, T)\theta(T) \\ &+ \partial_t u(x, 0)\theta(0) + \int_0^T \partial_t^2 u(x, t)\theta(t) dt \\ &= u(x, T)\dot{\theta}(T) - u(x, 0) - \partial_t u(x, T)\theta(T) + \int_0^T \partial_t^2 u(x, t)\theta(t) dt \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^L u(x, t) \ddot{\theta}(t) \phi(x) dx dt = \\
& \int_0^L \phi(x) \left[u(x, T) \dot{\theta}(T) - u(x, 0) - \partial_t u(x, T) \theta(T) + \int_0^T \partial_t^2 u(x, t) \theta(t) dt \right] dx \\
& \int_0^T \int_0^L u(x, t) \ddot{\theta}(t) \phi(x) dx dt = \int_0^L u(x, T) \dot{\theta}(T) \phi(x) dx \\
& - \int_0^L u(x, 0) \phi(x) dx - \int_0^L \partial_t u(x, T) \theta(T) \phi(x) dx + \int_0^T \int_0^L \partial_t^2 u(x, t) \theta(t) \phi(x) dx dt \\
& \int_0^T \int_0^L u(x, t) \ddot{\theta}(t) \phi(x) dx dt = \int_0^L u(x, T) \partial_t \psi(x, T) dx \\
& - \int_0^L u(x, 0) \phi(x) dx - \int_0^L \partial_t u(x, T) \psi(x, T) dx + \int_0^T \int_0^L \partial_t^2 u(x, t) \psi(x, t) dx dt \\
& \int_0^T \int_0^L u(x, t) \ddot{\theta}(t) \phi(x) dx dt = - \int_0^L u(x, 0) \phi(x) dx + \int_0^T \int_0^L \partial_t^2 u(x, t) \psi(x, t) dx dt \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Agora resolvendo a integral dupla $-\int_0^T \int_0^L u(x, t) \theta(t) \phi''(x) dx dt$.

$$- \int_0^T \int_0^L u(x, t) \theta(t) \phi''(x) dx dt = - \int_0^T \theta(t) \left[\int_0^L u(x, t) \phi''(x) dx \right] dt$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_0^L u(x, t) \phi''(x) dx &= u(x, t) \phi'(x) \Big|_0^L - \int_0^L \partial_x u(x, t) \phi'(x) dx \\
&= u(L, t) \phi'(L) - u(0, t) \phi'(0) - \int_0^L \partial_x u(x, t) \phi'(x) dx \\
&= g(t) \phi'(L) - f(t) \phi'(0) - \partial_x u(x, t) \phi(x) \Big|_0^L \\
&+ \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \phi(x) dx \\
&= g(t) \phi'(L) - f(t) \phi'(0) - \partial_x u(L, t) \phi(L) \\
&+ \partial_x u(0, t) \phi(0) + \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \phi(x) dx
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_0^L u(x, t) \theta(t) \phi''(x) dx dt = \\
& - \int_0^T \theta(t) \left[g(t) \phi'(L) - f(t) \phi'(0) - \partial_x u(L, t) \phi(L) + \partial_x u(0, t) \phi(0) + \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \phi(x) dx \right] dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_0^L u(x,t)\theta(t)\phi''(x)dxdt = \int_0^T [f(t)\theta(t)\phi'(0) - g(t)\theta(t)\phi'(L)]dt \\
& + \int_0^T \partial_x u(L,t)\theta(t)\phi(L)dt - \int_0^T \partial_x u(0,t)\theta(t)\phi(0)dt - \int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x,t)\theta(t)\phi(x)dxdt \\
& - \int_0^T \int_0^L u(x,t)\theta(t)\phi''(x)dxdt = \int_0^T [f(t)\partial_x \psi(0,t) - g(t)\partial_x \psi(L,t)]dt \\
& + \int_0^T \partial_x u(L,t)\psi(L,t)dt - \int_0^T \partial_x u(0,t)\psi(0,t)dt - \int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x,t)\psi(x,t)dxdt \\
& - \int_0^T \int_0^L u(x,t)\theta(t)\phi''(x)dxdt = \int_0^T [f(t)\partial_x \psi(0,t) - g(t)\partial_x \psi(L,t)]dt \\
& \qquad \qquad \qquad - \int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x,t)\psi(x,t)dxdt \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.13) e (3.14) em (3.12) temos:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L u(x,0)\phi(x)dx + \int_0^T \int_0^L \partial_t^2 u(x,t)\psi(x,t)dxdt \\
& + \int_0^T [f(t)\partial_x \psi(0,t) - g(t)\partial_x \psi(L,t)]dt - \int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x,t)\psi(x,t)dxdt = \\
& - \int_0^L u_0(x)\phi(x)dx + \int_0^T [f(t)\theta(t)\phi'(0) - g(t)\theta(t)\phi'(L)]dt
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\int_0^L u(x,0)\phi(x)dx = \int_0^L u_0(x)\phi(x)dx$$

de onde, pelo lema de Du bois Raymond, concluimos que

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \text{em }]0, L[.$$

De forma análoga provam-se as outras condições.

Antes de mostrar a existência de soluções fracas para o problema (3.1)-(3.3) provaremos um resultado de regularidade de soluções fracas para a equação da onda homogênea.

TEOREMA 1. Seja $\psi_0 \in H_0^1(0, L)$, $\psi_1 \in L^2(0, L)$ e $F \in L^1(]0, T[; L^2(0, L))$. Se ψ é solução do problema

$$\partial_t^2 \psi(x, t) - \partial_x^2 \psi(x, t) = F(x, t) \quad \text{em }]0, L[\times]0, T[\tag{3.15}$$

$$\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 \quad \text{em }]0, T[\tag{3.16}$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x) \quad \text{em }]0, L[\tag{3.17}$$

então são válidas as seguintes identidades:

$$\int_0^L |\partial_t \psi(x, t)|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \psi(x, t)|^2 dx = \int_0^L |\psi_1(x)|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \psi_0(x)|^2 dx + 2 \int_0^t \int_0^L F(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{L}{4} \int_0^T [|\partial_x \psi(L, t)|^2 + |\partial_x \psi(0, t)|^2] dt &= \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} dx \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L [\partial_t \psi(x, t)^2 + \partial_x \psi(x, t)^2] dx dt &- \int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2}) F(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Demonstração. Tome ψ_0 e $\psi_1 \in C_0^\infty(]0, L[)$. Multiplicando a equação (3.15) por $\partial_t \psi$, com ψ de (3.15)-(3.17), e integrando por partes nas variáveis x e t obtemos (3.18).

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L [\partial_t^2 \psi(x, t) - \partial_x^2 \psi(x, t)] \partial_t \psi(x, t) dx dt &= \int_0^t \int_0^L F(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt \\ \int_0^t \int_0^L \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt &- \int_0^t \int_0^L \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt \\ &= \int_0^t \int_0^L F(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (3.20)$$

Resolvendo a integral dupla $\int_0^t \int_0^L \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt$.

$$\int_0^t \int_0^L \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt = \int_0^L \left[\int_0^t \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dt \right] dx$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^t \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dt &= \partial_t \psi(x, t)^2 \Big|_0^t - \int_0^t \partial_t^3 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dt \\ &= \partial_t \psi(x, t)^2 - \partial_t \psi(x, 0)^2 - \int_0^t \partial_t^3 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dt \\ &= \frac{1}{2} \partial_t \psi(x, t)^2 - \frac{1}{2} \partial_t \psi(x, 0)^2 \end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt &= \int_0^L \left[\frac{1}{2} \partial_t \psi(x, t)^2 - \frac{1}{2} \partial_t \psi(x, 0)^2 \right] dx \\ \int_0^t \int_0^L \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt &= \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_t \psi(x, t)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L |\psi_1(x)|^2 dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

Agora resolvendo a integral dupla $-\int_0^t \int_0^L \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt$.

$$-\int_0^t \int_0^L \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt = -\int_0^L \left[\int_0^t \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dt \right] dx$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^t \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dt &= \psi(x, t) \partial_x^2 \psi(x, t) \Big|_0^t - \int_0^t \psi(x, t) \partial_x^2 \partial_t \psi(x, t) dt \\ &= \psi(x, t) \partial_x^2 \psi(x, t) - \psi(x, 0) \partial_x^2 \psi(x, 0) - \int_0^t \psi(x, t) \partial_x^2 \partial_t \psi(x, t) dt \end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned} &-\int_0^t \int_0^L \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt = \\ &-\int_0^L \left[\psi(x, t) \partial_x^2 \psi(x, t) - \psi(x, 0) \partial_x^2 \psi(x, 0) - \int_0^t \psi(x, t) \partial_x^2 \partial_t \psi(x, t) dt \right] dx \\ &-\int_0^t \int_0^L \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt = -\int_0^L \psi(x, t) \partial_x^2 \psi(x, t) dx + \int_0^L \psi(x, 0) \partial_x^2 \psi(x, 0) dx \\ &+ \int_0^t \int_0^L \psi(x, t) \partial_x^2 \partial_t \psi(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

E como

$$\begin{aligned} -\int_0^L \psi(x, t) \partial_x^2 \psi(x, t) dx &= -\psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) \Big|_0^L + \int_0^L |\partial_x \psi(x, t)|^2 dx \\ &= -\psi(L, t) \partial_x \psi(L, t) + \psi(0, t) \partial_x \psi(0, t) + \int_0^L |\partial_x \psi(x, t)|^2 dx \\ &= \int_0^L |\partial_x \psi(x, t)|^2 dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \psi(x, 0) \partial_x^2 \psi(x, 0) dx &= \psi(x, 0) \partial_x \psi(x, 0) \Big|_0^L - \int_0^L |\partial_x \psi(x, 0)|^2 dx \\ &= \psi(L, 0) \partial_x \psi(L, 0) - \psi(0, 0) \partial_x \psi(0, 0) - \int_0^L |\partial_x \psi(x, 0)|^2 dx \\ &= -\int_0^L |\partial_x \psi_0(x)|^2 dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^L \psi(x, t) \partial_x^2 \partial_t \psi(x, t) dx dt &= \int_0^t \left[\psi(x, t) \partial_x \partial_t \psi(x, t) \Big|_0^L - \int_0^L \partial_x \psi(x, t) \partial_x \partial_t \psi(x, t) dx \right] dt \\
&= - \int_0^t \int_0^L \partial_x \psi(x, t) \partial_x \partial_t \psi(x, t) dx dt \\
&= - \int_0^t \left[\partial_x \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) \Big|_0^L - \int_0^L \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx \right] dt \\
&= \int_0^t \int_0^L \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt
\end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}
- \int_0^t \int_0^L \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt &= \int_0^L |\partial_x \psi(x, t)|^2 dx - \int_0^L |\partial_x \psi_0(x)|^2 dx \\
&\quad + \int_0^t \int_0^L \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt \\
- \int_0^t \int_0^L \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt &= \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_x \psi(x, t)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_x \psi_0(x)|^2 dx \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.21) e (3.22) em (3.20) temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^L |\partial_t \psi(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_x \psi(x, t)|^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^L |\psi_1(x)|^2 dx \\
+ \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_x \psi_0(x)|^2 dx + \int_0^t \int_0^L F(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^L |\partial_t \psi(x, t)|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \psi(x, t)|^2 dx &= \int_0^L |\psi_1(x)|^2 dx \\
+ \int_0^L |\partial_x \psi_0(x)|^2 dx + 2 \int_0^t \int_0^L F(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt
\end{aligned}$$

Multiplicando agora a equação (3.15) por $(x - \frac{L}{2}) \partial_x \psi$, com ψ de (3.15)-(3.17), e integrando por partes nas variáveis x e t obtemos (3.19).

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L [\partial_t^2 \psi(x, t) - \partial_x^2 \psi(x, t)] (x - \frac{L}{2}) \partial_x \psi(x, t) dx dt &= \int_0^T \int_0^L F(x, t) (x - \frac{L}{2}) \partial_x \psi(x, t) dx dt \\
\int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt - \int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt &= \\
\int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2}) F(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt &\quad (3.23)
\end{aligned}$$

Resolvendo a integral dupla $\int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt$.

$$\int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt = \int_0^L \left[\int_0^T (x - \frac{L}{2}) \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dt \right] dx$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^T (x - \frac{L}{2}) \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dt &= (x - \frac{L}{2}) \partial_t \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) \Big|_0^T - \int_0^T \partial_t \psi(x, t) \partial_x \partial_t \psi(x, t) dt \\ &= (x - \frac{L}{2}) \partial_t \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) \Big|_0^T \\ &\quad - \int_0^T (x - \frac{L}{2}) \partial_t \psi(x, t) \partial_x \partial_t \psi(x, t) dt \end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt &= \\ \int_0^L \left[(x - \frac{L}{2}) \partial_t \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) \Big|_0^T - \int_0^T (x - \frac{L}{2}) \partial_t \psi(x, t) \partial_x \partial_t \psi(x, t) dt \right] dx & \\ \int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt = \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} dx & \\ - \int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t \psi(x, t) \partial_x \partial_t \psi(x, t) dx dt & \end{aligned}$$

E como

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t \psi(x, t) \partial_x \partial_t \psi(x, t) dx dt &= - \int_0^T \left[(x - \frac{L}{2}) \partial_t \psi(x, t)^2 \Big|_0^L \right. \\ &\quad \left. - \int_0^L \partial_t \psi(x, t) [\partial_t \partial_x (x - \frac{L}{2}) + \partial_t(x, t)] dx \right] dt \\ &= - \int_0^T \left[\frac{L}{2} \partial_t \psi(L, t)^2 + \frac{L}{2} \partial_t \psi(0, t)^2 \right] dt + \int_0^T \int_0^L \partial_t \psi(x, t) \partial_t \partial_x (x - \frac{L}{2}) dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^L \partial_t(x, t)^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{L}{2} \int_0^T [\partial_t \psi(L, t)^2 + \partial_t \psi(0, t)^2] dt \right] + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L \partial_t(x, t)^2 dx dt \\ &= -\frac{L}{4} \int_0^T [\partial_t \psi(L, t)^2 + \partial_t \psi(0, t)^2] dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L \partial_t(x, t)^2 dx dt \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt &= \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t \psi(x, t) \partial_x(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} dx \\ &\quad - \frac{L}{4} \int_0^T [\partial_t \psi(L, t)^2 + \partial_t \psi(0, t)^2] dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L \partial_t(x, t)^2 dx dt \end{aligned}$$

Mas

$$\int_0^T [\partial_t \psi(L, t)^2 + \partial_t \psi(0, t)^2] dt = 0$$

Então

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt &= \tag{3.24} \\ \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t \psi(x, t) \partial_x(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} dx &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L \partial_t(x, t)^2 dx dt \end{aligned}$$

Agora resolvendo a integral dupla $-\int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt$.

$$-\int_0^T \int_0^L \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt = -\int_0^T \left[\int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx \right] dt$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx &= (x - \frac{L}{2}) \partial_x \psi(x, t)^2 \Big|_0^L \\ &- \int_0^L \partial_x \psi(x, t) [(x - \frac{L}{2}) \partial_x^2(x, t) + \partial_x \psi(x, t)] dx \\ &= \frac{L}{2} \partial_x \psi(L, t)^2 + \frac{L}{2} \partial_x \psi(0, t)^2 \\ &- \int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_x \psi(x, t) \partial_x^2(x, t) dx \\ &- \int_0^L \partial_x \psi(x, t)^2 dx \\ &= \frac{L}{4} [\partial_x \psi(L, t)^2 + \partial_x \psi(0, t)^2] - \frac{1}{2} \int_0^L \partial_x \psi(x, t)^2 dx \end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_0^L \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt &= \\ -\int_0^T \left[\frac{L}{4} [\partial_x \psi(L, t)^2 + \partial_x \psi(0, t)^2] - \frac{1}{2} \int_0^L \partial_x \psi(x, t)^2 dx \right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \int_0^L \partial_x^2 \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt &= -\frac{L}{4} \int_0^T [\partial_x \psi(L, t)^2 + \partial_x \psi(0, t)^2] dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L \partial_x \psi(x, t)^2 dx dt
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Substituindo (3.24) e (3.25) em (3.23) temos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_t \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L \partial_t \psi(x, t)^2 dx dt \\
&- \frac{L}{4} \int_0^T [\partial_x \psi(L, t)^2 + \partial_x \psi(0, t)^2] dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L \partial_x \psi(x, t)^2 dx dt = \\
&\int_0^T \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) F(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{L}{4} \int_0^T [\partial_x \psi(L, t)^2 + \partial_x \psi(0, t)^2] dt = \\
&\int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_t \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L [\partial_t \psi(x, t)^2 + \partial_x \psi(x, t)^2] dx dt \\
&- \int_0^T \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) F(x, t) \partial_x \psi(x, t) dx dt
\end{aligned}$$

Por densidade as identidades continuam sendo válidas para todo $\psi_0 \in H_0^1(0, L)$ e para todo $\psi_1 \in L^2(0, L)$, concluindo assim o resultado.

Desigualdade de Gronwall. Seja $u \in C^0([0, T]; \mathbb{R})$, não negativa em $[0, T]$ e que satisfaça

$$u(t) \leq K + \int_0^t u(s) ds.$$

Então

$$u(t) \leq K e^t, \quad t \in [0, T]. \tag{3.26}$$

Em particular tem-se $u \equiv 0$ se a constante $K = 0$.

Ver a demonstração no texto de Adams [1].

Da identidade (3.18) e da desigualdade de Gronwall (3.26) acima temos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^L |\partial_t \psi(x, t)|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \psi(x, t)|^2 dx \leq \\
&\left[\int_0^L |\psi_1(x)|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \psi_0(x)|^2 dx + \int_0^t \int_0^L |F(x, t)|^2 dx dt \right] e^T.
\end{aligned}$$

Demonstração. Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz na integral dupla

$2 \int_0^t \int_0^L F(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt$, da identidade (3.18), temos

$$2 \int_0^t \left(\int_0^L F(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx \right) dt \leq 2 \int_0^t \left(\int_0^L |F(x, t)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^L |\partial_t \psi(x, t)|^2 dx \right)^{1/2} dt,$$

e aplicando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ obtemos

$$2 \int_0^t \left(\int_0^L F(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx \right) dt \leq \int_0^t \int_0^L |F(x, t)|^2 dx dt + \int_0^t \int_0^L |\partial_t \psi(x, t)|^2 dx dt.$$

Dessa forma temos que

$$\begin{aligned} \int_0^L |\partial_t \psi(x, t)|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \psi(x, t)|^2 dx &\leq \int_0^L |\psi_1(x)|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \psi_0(x)|^2 dx \\ &\quad + \int_0^t \int_0^L |F(x, t)|^2 dx dt + \int_0^t \int_0^L |\partial_t \psi(x, t)|^2 dx dt \end{aligned}$$

e assim podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^L |\partial_t \psi(x, t)|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \psi(x, t)|^2 dx &\leq \int_0^L |\psi_1(x)|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \psi_0(x)|^2 dx \\ &\quad + \int_0^t \int_0^L |F(x, t)|^2 dx dt + \int_0^t \int_0^L |\partial_t \psi(x, t)|^2 dx dt + \int_0^t \int_0^L |\partial_x \psi(x, t)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Utilizando agora a desigualdade de Gronwall (3.26) temos

$$\begin{aligned} \int_0^L |\partial_t \psi(x, t)|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \psi(x, t)|^2 dx &\leq \\ \left[\int_0^L |\psi_1(x)|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \psi_0(x)|^2 dx + \int_0^t \int_0^L |F(x, t)|^2 dx dt \right] e^T. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Observação 2. A relação anterior nos diz que o traço da derivada de ψ se identifica com um elemento de $L^2(0, L)$. De fato, de (3.19) segue que

$$\begin{aligned} \frac{L}{4} \int_0^T [|\partial_x \psi(L, t)|^2 + |\partial_x \psi(0, t)|^2] dt &\leq \frac{L}{2} \sup_{[0, T]} \int_0^L [|\partial_t \psi(x, t)|^2 + |\partial_x \psi(x, t)|^2] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L [|\partial_t \psi(x, t)|^2 + |\partial_x \psi(x, t)|^2] dx dt + \frac{L}{4} \int_0^T \int_0^L |F(x, t)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Demonstração. Aplicando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ e tomando $\sup(x - \frac{L}{2}) = \frac{L}{2}$ na integral $\int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} dx$, da identidade (3.19), temos

$$\int_0^L (x - \frac{L}{2}) \partial_t \psi(x, t) \partial_x \psi(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} dx \leq \frac{L}{2} \sup_{[0, T]} \int_0^L [|\partial_t \psi(x, t)|^2 + |\partial_x \psi(x, t)|^2] dx.$$

Utilizando agora a desigualdade de Cauchy-Schwarz na integral dupla

$-\int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2})F(x, t)\partial_x\psi(x, t)dxdt$, da identidade (3.19), tomando $\sup(x - \frac{L}{2}) = \frac{L}{2}$ e sabendo que $x \leq |x|$, temos

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2})F(x, t)\partial_x\psi(x, t)dxdt &\leq \frac{L}{2} \int_0^T \int_0^L F(x, t)\partial_x\psi(x, t)dxdt \\ &\leq \frac{L}{2} \int_0^T \left(\int_0^L |F(x, t)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^L |\partial_x\psi(x, t)|^2 dx \right) dt, \end{aligned}$$

e aplicando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ obtemos

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_0^L (x - \frac{L}{2})F(x, t)\partial_x\psi(x, t)dxdt &\leq \frac{L}{4} \int_0^T \left[\int_0^L |F(x, t)|^2 dx + \int_0^L |\partial_x\psi(x, t)|^2 dx \right] dt \\ &\leq \frac{L}{4} \int_0^T \int_0^L |F(x, t)|^2 dxdt + \frac{L}{4} \int_0^T \int_0^L |\partial_x\psi(x, t)|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Dessa forma temos que

$$\begin{aligned} \frac{L}{4} \int_0^T [|\partial_x\psi(L, t)|^2 + |\partial_x\psi(0, t)|^2] dt &\leq \frac{L}{2} \sup_{[0, T]} \int_0^L [|\partial_t\psi(x, t)|^2 + |\partial_x\psi(x, t)|^2] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L [\partial_t\psi(x, t)^2 + \partial_x\psi(x, t)^2] dxdt \\ &\quad + \frac{L}{4} \int_0^T \int_0^L |F(x, t)|^2 dxdt + \frac{L}{4} \int_0^T \int_0^L |\partial_x\psi(x, t)|^2 dxdt. \end{aligned}$$

E com (3.27) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{L}{4} \int_0^T [|\psi_x(L, t)|^2 + |\psi_x(0, t)|^2] dt &\leq \\ \frac{L+2}{4} \left[\int_0^L |\psi_1(x)|^2 dx + \int_0^L |\psi_{0,x}(x)|^2 dx + \int_0^T \int_0^L |F(x, t)|^2 dxdt \right] &T\mathbf{e}^T \end{aligned}$$

concluindo assim nossa afirmação. Este é o novo resultado de regularidade. Observe que esta regularidade não pode ser deduzida diretamente da equação, por isto alguns autores referem-se a ela como *regularidade escondida*.

$$\sup_{[0, T]} \text{ess} \left(\int_0^L |u(x, t)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \left[\left(\int_0^L |u_0|^2 dx \right)^{1/2} + \|u_1\|_{-1} + \left(\int_0^T [f^2 + g^2] dt \right)^{1/2} \right]$$

Da linearidade do problema e da convergência em $L^\infty([0, T[; L^2(0, L))$ segue que a função u deve pertencer a $C([0, T[; L^2(0, L))$ o que prova totalmente o teorema.

3.3 Método de Unicidade Hilbertiana.

A ideia de resolução do problema é estudar o sistema (3.1)-(3.3) não por ele próprio, mas como o seguinte problema retrógrado, isto é,

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad \text{em }]0, L[\times]0, T[\quad (3.28)$$

$$u(0, t) = f(t), \quad u(L, t) = g(t) \quad \text{em }]0, T[\quad (3.29)$$

$$u(x, T) = u_t(x, T) = 0 \quad \text{em }]0, L[\quad (3.30)$$

Para que o sistema (3.1)-(3.3) seja exatamente controlável falta que u , solução do problema acima, satisfaça a condição (3.3),

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em }]0, L[$$

Estudaremos então o comportamento da função, que a cada par (f, g) associa o par $(u(x, 0), u_t(x, 0))$. Se esta aplicação for uma bijeção entre os espaços onde tomaremos os controles (f, g) e os dados iniciais $(u(x, 0), \partial_t u(x, 0))$ então teremos resolvido nosso sistema, pois assim teríamos mostrado que para quaisquer par de dados iniciais escolhidos, digamos (u_0, u_1) , existirão condições de contorno (f, g) (formas de agir sobre a fronteira) tal que

$$(f, g) \mapsto (u(x, 0), \partial_t u(x, 0)) = (u_0(x), u_1(x)).$$

Teremos encontrado assim, uma solução u de (3.1)-(3.3) satisfazendo (3.4). Até agora (f, g) são elementos que não estão necessariamente relacionados entre si, na verdade estas funções não precisam ser totalmente arbitrárias, o que faremos será escolher estas funções como sendo iguais as forças de tensões existentes (uma delas tomada em sentido contrário para ir eliminando o movimento) nos extremos de uma corda que se encontra numa posição ϕ_0 e que inicia seu movimento a uma velocidade inicial ϕ_1 . Isto é, se ϕ é solução do problema

$$\partial_t^2 \phi(x, t) - \partial_x^2 \phi(x, t) = 0 \quad \text{em }]0, L[\times]0, T[\quad (3.31)$$

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \partial_t \phi(x, 0) = \phi_1(x) \quad \text{em }]0, L[\quad (3.32)$$

$$\phi(0, t) = \phi(L, t) = 0 \quad \text{em }]0, T[\quad (3.33)$$

então, tomaremos

$$f(t) = -\partial_x \phi(0, t), \quad g(t) = \partial_x \phi(L, t).$$

E $-\tau \partial_x \phi(0, t)$ e $\tau \partial_x \phi(L, t)$ representam as componentes verticais da força exercida pela corda nos pontos $x = 0$ e $x = L$, cujo movimento esta definido pelo sistema (3.31)-(3.33). Por τ estamos denotando a tensão horizontal da corda que é considerada no modelo como constante. Note que, se ϕ_0 e ϕ_1 pertencem a $C_0^\infty(]0, L[)$ é simples de verificar que $\partial_x \phi(0, t)$ e $\partial_x \phi(L, t)$ pertencem a $C^\infty(]0, T[)$ consequentemente existe uma única solução para o problema,

$$\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 \quad \text{em }]0, L[\times]0, T[\quad (3.34)$$

$$u(0, t) = -\partial_x \phi(0, t), \quad u(L, t) = \partial_x \phi(L, t) \quad \text{em }]0, T[\quad (3.35)$$

$$u(x, T) = \partial_t u(x, T) = 0 \quad \text{em }]0, L[\quad (3.36)$$

Neste caso agora a função que associa as condições de contorno aos dados iniciais é dada por:

$$(\partial_x \phi(0, t), \partial_x \phi(L, t)) \mapsto (u(0), \partial_t u(0)).$$

Mas a função $\partial_x \phi$ esta univocamente determinada pelos dados iniciais (ϕ_0, ϕ_1) , assim para simplificar definiremos agora a função que associa os dados iniciais do problema (3.31)-(3.33) aos valores iniciais do problema (3.34)-(3.36). Dessa forma temos:

$$(\phi_0(x), \phi_1(x)) \mapsto (-\partial_t u(x, 0), u(x, 0)) = \Lambda\{\phi_0, \phi_1\}. \quad (3.37)$$

Como já tínhamos discutido acima o problema aqui se reduz a mostrar que o operador Λ definido acima é sobrejetivo. De início isto não é verdade. O que faremos será estender o espaço $C_0^\infty(]0, L[) \times C_0^\infty(]0, T[)$ (completá-lo com uma norma apropriada), para isto multiplicamos agora a equação (3.34), por ϕ , de (3.31)-(3.33), depois integramos por partes nas variáveis x e t .

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^L [\partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t)] \phi(x, t) dx dt = 0 \\ & \int_0^T \int_0^L \partial_t^2 u(x, t) \phi(x, t) dx dt - \int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \phi(x, t) dx dt = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Resolvendo a integral dupla $\int_0^T \int_0^L \partial_t^2 u(x, t) \phi(x, t) dx dt$:

$$\int_0^T \int_0^L \partial_t^2 u(x, t) \phi(x, t) dx dt = \int_0^L \left[\int_0^T \partial_t^2 u(x, t) \phi(x, t) dt \right] dx$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^T \partial_t^2 u(x, t) \phi(x, t) dt &= \partial_t u(x, t) \phi(x, t) \Big|_0^T - \int_0^T \partial_t u(x, t) \partial_t \phi(x, t) dt \\ &= \partial_t u(x, T) \phi(x, T) - \partial_t u(x, 0) \phi(x, 0) \\ &\quad - \int_0^T \partial_t u(x, t) \partial_t \phi(x, t) dt \end{aligned}$$

integrando por partes novamente

$$\begin{aligned} &= -\partial_t u(x, 0) \phi(x, 0) - u(x, t) \partial_t \phi(x, t) \Big|_0^T \\ &\quad + \int_0^T u(x, t) \partial_t^2 \phi(x, t) dt \\ &= -\partial_t u(x, 0) \phi(x, 0) - u(x, T) \partial_t \phi(x, T) \\ &\quad + u(x, 0) \partial_t \phi(x, 0) + \int_0^T u(x, t) \partial_t^2 \phi(x, t) dt \\ &= -\partial_t u(x, 0) \phi(x, 0) + u(x, 0) \partial_t \phi(x, 0) \\ &\quad + \int_0^T u(x, t) \partial_t^2 \phi(x, t) dt \end{aligned}$$

temos após integrar com relação a variável espacial,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \partial_t^2 u(x, t) \phi(x, t) dx dt &= \\ \int_0^L \left[-\partial_t u(x, 0) \phi(x, 0) + u(x, 0) \partial_t \phi(x, 0) + \int_0^T u(x, t) \partial_t^2 \phi(x, t) dt \right] dx \\ \int_0^T \int_0^L \partial_t^2 u(x, t) \phi(x, t) dx dt &= \int_0^L [-\partial_t u(x, 0) \phi_0(x) + u(x, 0) \phi_1(x)] dx \\ &\quad + \int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_t^2 \phi(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (3.39)$$

Agora resolvendo a integral dupla $-\int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \phi(x, t) dx dt$:

$$-\int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \phi(x, t) dx dt = -\int_0^T \left[\int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \phi(x, t) dx \right] dt$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \phi(x, t) dx &= \partial_x u(x, t) \phi(x, t) \Big|_0^L - \int_0^L \partial_x u(x, t) \partial_x \phi(x, t) dx \\
&= \partial_x u(L, t) \phi(L, t) - \partial_x u(0, t) \phi(0, t) \\
&\quad - \int_0^L \partial_x u(x, t) \partial_x \phi(x, t) dx \\
&= - \int_0^L \partial_x u(x, t) \partial_x \phi(x, t) dx
\end{aligned}$$

integrando novamente por partes

$$\begin{aligned}
&= -u(x, t) \partial_x \phi(x, t) \Big|_0^L + \int_0^L u(x, t) \partial_x^2 \phi(x, t) dx \\
&= -u(L, t) \partial_x \phi(L, t) + u(0, t) \partial_x \phi(0, t) \\
&\quad + \int_0^L u(x, t) \partial_x^2 \phi(x, t) dx
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \phi(x, t) dx dt = \\
&- \int_0^T \left[-u(L, t) \partial_x \phi(L, t) + u(0, t) \partial_x \phi(0, t) + \int_0^L u(x, t) \partial_x^2 \phi(x, t) dx \right] dt \\
&- \int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \phi(x, t) dx dt = \\
&\int_0^T [u(L, t) \partial_x \phi(L, t) - u(0, t) \partial_x \phi(0, t)] dt - \int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_x^2 \phi(x, t) dx dt
\end{aligned}$$

e utilizando a relação (3.35)

$$\begin{aligned}
- \int_0^T \int_0^L \partial_x^2 u(x, t) \phi(x, t) dx dt &= \int_0^T [|\partial_x \phi(L, t)|^2 + |\partial_x \phi(0, t)|^2] dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_x^2 \phi(x, t) dx dt. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.39) e (3.40) em (3.38) temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^L [-\partial_t u(x, 0) \phi_0(x) + u(x, 0) \phi_1(x)] dx + \int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_t^2 \phi(x, t) dx dt \\
&+ \int_0^T [|\partial_x \phi(L, t)|^2 + |\partial_x \phi(0, t)|^2] dt - \int_0^T \int_0^L u(x, t) \partial_x^2 \phi(x, t) dx dt = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L [-\partial_t u(x, 0)\phi_0(x) + u(x, 0)\phi_1(x)]dx + \int_0^T [|\partial_x \phi(L, t)|^2 + |\partial_x \phi(0, t)|^2]dt \\
& \quad + \int_0^T \int_0^L u(x, t)\partial_t^2 \phi(x, t)dxdt - \int_0^T \int_0^L u(x, t)\partial_x^2 \phi(x, t)dxdt = 0 \\
& \int_0^L [-\partial_t u(x, 0)\phi_0(x) + u(x, 0)\phi_1(x)]dx + \int_0^T [|\partial_x \phi(L, t)|^2 + |\partial_x \phi(0, t)|^2]dt \\
& \quad + \int_0^T \int_0^L [\partial_t^2 \phi(x, t) - \partial_x^2 \phi(x, t)]u(x, t)dxdt = 0
\end{aligned}$$

Portanto, teremos

$$\int_0^T [|\partial_x \phi(L, t)|^2 + |\partial_x \phi(0, t)|^2]dt = - \int_0^L [-\partial_t u(x, 0)\phi_0(x) + u(x, 0)\phi_1(x)]dx.$$

De onde segue que,

$$\int_0^L [\Lambda\{\phi_0(x), \phi_1(x)\}] \cdot \{\phi_0(x), \phi_1(x)\}dx = \int_0^T [|\partial_x \phi(L, t)|^2 + |\partial_x \phi(0, t)|^2] dt.$$

Denotemos por $\|\cdot\|_*$ o seguinte funcional:

$$\|\{\phi_0, \phi_1\}\|_*^2 = \int_0^L \Lambda\{\phi_0(x), \phi_1(x)\} \cdot \{\phi_0(x), \phi_1(x)\}dx \quad (3.41)$$

O operador Λ esta estritamente vinculado as propriedades do funcional $\|\cdot\|_*$ definido acima. Isto é, se $\|\cdot\|_*$ for uma norma, Λ será injetor (pela linearidade). Mas o que acontece com a sobrejetividade? Para isto precisamos que o espaço $C_0^\infty(]0, L[) \times C_0^\infty(]0, T[)$, seja completo. De fato suponhamos que $\|\cdot\|_*$ seja uma norma e denotemos por E a completação deste espaço com relação a $\|\cdot\|_*$. Neste caso Λ pode ser estendida continuamente como uma aplicação

$$\Lambda : E \rightarrow E',$$

onde E' é o espaço dual de E (estamos denotando da mesma forma ao operador que na realidade é a extensão de Λ a E). Se $\|\cdot\|_*$ é uma norma então Λ é sobrejetor entre E e E' , pois se $\omega \in E'$, pelo teorema da representação de Riesz, existe um elemento, digamos, $\{\phi_0, \phi_1\} \in E$ tal que

$$\langle \omega, \{\varphi_0, \varphi_1\} \rangle = (\{\phi_0, \phi_1\}, \{\varphi_0, \varphi_1\})_E,$$

mas

$$(\{\phi_0, \phi_1\}, \{\varphi_0, \varphi_1\})_E = \langle \Lambda\{\phi_0, \phi_1\}, \{\varphi_0, \varphi_1\} \rangle,$$

de onde concluímos que,

$$\langle \Lambda\{\phi_0, \phi_1\}, \{\varphi_0, \varphi_1\} \rangle = \langle \omega, \{\varphi_0, \varphi_1\} \rangle, \quad \forall \{\varphi_0, \varphi_1\} \in E.$$

Temos assim que $\Lambda\{\phi_0, \phi_1\} = \omega$ em E' . Por tanto Λ é bijetora.

Para que isso faça sentido temos que provar primeiro que $\|\cdot\|_*$ é uma norma. Segundo, determinar uma forma apropriada do espaço E , e finalmente, estudar a existência de soluções fracas do problema (3.1)-(3.3) quando os dados iniciais são tomados em E' e f, g em $L^2(0, T)$. Em geral $\|\cdot\|_*$ é apenas uma seminorma, mas no caso em que $T > L$ temos o seguinte teorema.

TEOREMA 2. Para $T > L$ o funcional $\|\cdot\|_*$ é uma norma em E e este espaço é $E = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$.

Demonstração - Aplicando a identidade (3.19) a ϕ , de (3.31)-(3.33), temos

$$\begin{aligned} \frac{L}{4} \int_0^T [|\partial_x \phi(L, t)|^2 + |\partial_x \phi(0, t)|^2] dt &= \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_t \phi(x, t) \partial_x \phi(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L [\partial_t \phi(x, t)^2 + \partial_x \phi(x, t)^2] dx dt. \end{aligned} \quad (3.42)$$

O sistema que determina a posição de cada ponto da corda é um sistema conservativo, em outras palavras a energia potencial mais a energia cinética é constante durante todo o período em que se realiza o experimento. Para visualizar isto analiticamente, basta considerar o Teorema 2. Temos assim que:

$$\int_0^L |\partial_t \phi(x, t)|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \phi(x, t)|^2 dx = \int_0^L |\phi_1(x)|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \phi_0(x)|^2 dx. \quad (3.43)$$

Denotemos por $E(t)$ a energia, isto é:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_t \phi(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_x \phi(x, t)|^2 dx.$$

De (3.42) e utilizando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ obtemos:

$$\int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_t \phi(x, t) \partial_x \phi(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} dx \geq -\frac{L}{2} E(0). \quad (3.44)$$

De (3.42)-(3.44) temos:

$$\frac{L}{4} \int_0^T [|\partial_x \phi(L, t)|^2 + |\partial_x \phi(0, t)|^2] dt \geq \frac{1}{2}(T - L)E(0) \quad (3.45)$$

e

$$\frac{L}{4} \int_0^T |\partial_x \phi(L, t)|^2 + |\partial_x \phi(0, t)|^2 dt \leq \frac{1}{2}(T + L)E(0). \quad (3.46)$$

Assim de (3.45) quando $T > L$, a seminorma definida acima, constitui realmente uma norma, o que implica que o operador Λ é uma bijeção entre E e E' . Finalmente de (3.45) e (3.46) e sendo que as funções $C_0^\infty(]0, L[)$ são densas em $H_0^1(0, L)$ e $L^2(0, L)$ temos

$$c_1 \int_0^L |\phi_1|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \phi_0|^2 dx \leq \|\{\phi_0, \phi_1\}\|_* \leq c_2 \int_0^L |\phi_1|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \phi_0|^2 dx.$$

Por tanto,

$$E = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$$

provando assim o resultado.

Observação 4. Da relação (3.45), temos para $T > L$, um novo resultado de unicidade, pois se o traço das derivadas nos extremos do intervalo $]0, L[$ são iguais então as soluções deveram ser iguais, isto é,

$$\partial_x \phi(L, t) = \partial_x \phi(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi \equiv 0.$$

Conclusão. Sendo a aplicação Λ sobrejetiva, para $\{-u_1, u_0\} \in H^{-1}(0, L) \times L^2(0, L)$ existe $\{\phi_0, \phi_1\} \in L^2(0, L) \times H_0^1(0, L)$ tal que $\Lambda\{\phi_0, \phi_1\} = \{-u_1, u_0\}$, o que significa que existe uma forma de agir nos extremos da corda, de tal forma que o sistema vão ao repouso mesmo que a posição inicial assim como a velocidade inicial sejam muito irregulares.

Capítulo 4

Controlabilidade de um Sistema

Linear Finito

Um dos resultados mais importantes em que se caracterizam os sistemas lineares em dimensão finita que são controláveis, é devido a Kalman.

Consideramos o sistema

$$x' = Ax + Bu, \quad t > 0 \tag{4.1}$$

$$x(0) = x_0 \tag{4.2}$$

em que o estado $x = (x_1, \dots, x_N)$ é um vetor de \mathbb{R}^N dependente do tempo t e o controle $u = (u_1, \dots, u_M)$ é um vetor de M componentes que também depende do tempo. A matriz A é quadrada de dimensão $N \times N$ e de coeficientes constantes de modo que o sistema subjacente é autônomo. A matriz B é também de coeficientes constantes e de dimensão $N \times M$.

Suponhamos que $1 \leq M \leq N$. Na prática, são especialmente significativos os casos em que M é muito menor que N podendo chegar na extremidade em que $M = 1$ e, não obstante, N é muito grande. Neste caso nós teríamos um único controle para controlar um número N muito grande de componentes do estado.

Dizemos que o sistema é controlável em um tempo $T > 0$ se para cada dado inicial $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e estado final ou objetivo pré-estabelecido $x_1 \in \mathbb{R}^N$ existe ao menos um controle

$u \in C([0, T]; \mathbb{R}^M)$ tal que a solução de (4.1)-(4.2) satisfaça

$$x(T) = x_1. \quad (4.3)$$

Segundo R. E. Kalman, “a condição necessária e suficiente para que o sistema (4.1)-(4.2) seja controlável em algum tempo $T > 0$ é que o posto da matriz (número de linhas não nulas do sistema)

$$[B, AB, \dots, A^{N-1}B] \quad (4.4)$$

seja N .

Além disso, se o posto é N , o sistema é controlável em todo tempo $T > 0$.

Quando o posto dessa matriz é k com $1 \leq k \leq N$ o sistema não é controlável e para cada $x_0 \in \mathbb{R}^N$ o conjunto de soluções de (4.1) em cada instante $T > 0$ recorre a um subespaço afim de \mathbb{R}^N de dimensão k ”.

Cabe fazer as seguintes observações:

- O posto da matriz (4.4) determina o grau de controlabilidade do sistema (4.1). Este mede o número de componentes do sistema que são afetados pelo controle.
- A matriz (4.4) é de dimensão $(N \times M) \times N$ de modo que quando se dispões de um só controle ($m = 1$) a matriz é $N \times N$. O sistema é mais facilmente controlável quando há mais controles.
- O sistema é controlável em um tempo $T > 0$ se, e somente se, for em todo intervalo temporal. Isto indica que no sistema (4.1) a informação se propaga a velocidade infinita.

O sistema adjunto de (4.1) possui um papel central na Teoria do Controle. Este adota a forma

$$\varphi' = -A^t \varphi, \quad t > 0 \quad (4.5)$$

$$\varphi(T) = \varphi_0 \quad (4.6)$$

Nele o sentido do tempo é invertido, a matriz A foi substituída por sua transposta A^t , e a condição inicial do sistema (4.1) no instante inicial $t = 0$ foi substituído por uma

condição no instante final $t = T$. O estado adjunto $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ é também um vetor de N componentes dependentes do tempo t . Obviamente, o posto da matriz (4.4) é N se, e somente se, for também da matriz transposta

$$[B^t, B^t A^t, \dots, B^t (A^t)^{N-1}]. \quad (4.7)$$

Se pode comprovar que o posto da matriz (4.7) é N se, e somente se, para cada tempo $T > 0$, existe uma constante $C(T) > 0$ tal que

$$\|\varphi_0\|^2 \leq C(T) \int_0^T |B^t \varphi|^2 dt \quad (4.8)$$

para toda solução de (4.5).

A Desigualdade (4.8) é conhecida como a *desigualdade de observabilidade*. É a propriedade “dupla” da controlabilidade do sistema (4.1). Nela se estabelece que a totalidade do sistema pode ser “observado” através de $B^t \varphi$ que proporciona M combinações lineares do estado adjunto. Quando (4.8) se cumpre podemos garantir que a matriz B^t captura adequadamente todas as componentes do estado adjunto φ e isto é equivalente a controlabilidade do sistema original (4.1) desde que neste caso, o controle u , através da matriz B , atue de maneira efetiva sobre todas as componentes do estado x .

A propriedade de observabilidade (4.8) é excelente no contexto do controle de sistemas pois é equivalente a controlabilidade do sistema (4.1). Mas sua relevância vai além da Teoria do Controle. Estas desigualdades possuem também um papel central na Teoria dos Problemas Inversos onde se trata de reconstruir as propriedades dos meios com as medidas parciais realizadas sobre o mesmo. A desigualdade de observabilidade vem dizer quando as medidas realizadas são suficientes ou não para detectar todas as propriedades do meio.

A demonstração dos resultados que acabamos de mencionar é relativamente simples. Ela repousa sobre a descrição da solução de um sistema mediante a fórmula de variação das constantes e o Teorema de Cayley-Hamilton que assegura que toda matriz anula seu polinômio característico.

Para provar que (4.8) se cumpre, basta ver que $\left(\int_0^T |B^t \varphi|^2 dt\right)^2$ define uma norma em \mathbb{R}^N . Para isto é suficiente comprovar que se verifica o seguinte resultado de unicidade ou

continuação única: Se $B^t\varphi = 0$, para todo $0 \leq t \leq T$, então necessariamente $\varphi \equiv 0$. É na prova desse resultado onde a condição do posto da matriz (4.7) é necessário. Mas uma vez que sabemos que isto se cumpre, podemos provar numerosas variantes da desigualdade de observabilidade (4.8). Em particular, teremos:

$$\|\varphi_0\| \leq C(T) \int_0^T |B^t\varphi| dt. \quad (4.9)$$

Isto nos permite construir controles distintos aos deduzidos de (4.8). De fato, vemos como a partir de (4.8) se pode construir os controles de (4.1), o qual nos dará outra ideia das conexões que existem entre os problemas de controlabilidade e de controle ótimo.

Supondo que se cumpra a condição do posto da matriz (4.4) ou (4.7) sabemos que se cumpre a desigualdade (4.8). Então, dados os estados iniciais e finais x_0, x_1 e um tempo de controle T , consideramos o funcional quadrático:

$$J(\varphi_0) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^t\varphi|^2 dt - \langle x_1, \varphi_0 \rangle + \langle x_0, \varphi(0) \rangle, \quad (4.10)$$

sendo φ a solução do sistema adjunto (4.5) associado ao dado φ_0 .

Se trata de um funcional estritamente convexo e contínuo em \mathbb{R}^N . Por causa de (4.8) é também coercivo porque admite um único mínimo em \mathbb{R}^N que denotamos por $\hat{\varphi}_0$. Escrevendo a equação de Euler-Lagrange associada ao problema da minimização do funcional (4.10) é fácil comprovar que o controle $u = B^t\hat{\varphi}$, onde $\hat{\varphi}$ é a solução do sistema adjunto (4.5), é um controle para (4.1) que faz com que (4.3) se cumpra.

Consideramos agora o seguinte funcional

$$J_{bb}(\varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\int_0^T |B^t\varphi| dt \right)^2 - \langle x_1, \varphi_0 \rangle + \langle x_0, \varphi(0) \rangle. \quad (4.11)$$

Novamente, se trata de um funcional estritamente convexo, contínuo e coercivo. Admite por tanto um único ponto de mínimo $\hat{\varphi}_{bb_0}$ que conduz a uma nova solução do sistema adjunto que denotaremos por $\hat{\varphi}_{bb}$. O controle correspondente é agora da forma

$$u = \int_0^T |B^t\hat{\varphi}_{bb}| dt \operatorname{sgn}(B^t\hat{\varphi}_{bb}), \quad (4.12)$$

sendo sgn a função sinal. Se trata de um controle do tipo *bang-bang* que só toma dois valores

$$\pm \int_0^T |B^t\hat{\varphi}_{bb}| dt$$

e que oscila de acordo com o sinal de $B^t \hat{\varphi}_{bb}$, de modo que só muda de sinal um número finito de vezes.

Visto que o controle obtido minimizando J é o de norma mínima em $L^2(0, T)$, este último é de norma mínima em $L^\infty(0, T)$. Visto que o primeiro é regular o segundo apresenta descontinuidades mas, as vezes, apresenta também a vantagem de ser mais simples na medida que alterna entre dois valores constantes.

Ambos são, em qualquer caso, ótimos com respeito a um critério de optimalidade. Devemos escolher um controle levando em conta um critério desse tipo com o objetivo de criar metodologias de controle mais econômicas.

Acabamos de ver que, quando a controlabilidade se cumpre, o cálculo efetivo do controle se realiza resolvendo um problema de minimização. Isto é também relevante de um ponto de vista computacional pois nos indica o modo de construir esquemas numéricos eficientes para o cálculo dos controles.

Capítulo 5

Controle Exato do Pêndulo

Um dos problemas de robótica mais básicos que se tem é o de controle de um braço rígido giratório através de um motor localizado no extremo que o conecta ao resto da estrutura. Supondo que toda a massa m está localizada no extremo livre, que a barra tenha comprimento 1 e ignorando o atrito, aplicando a segunda lei de Newton para os objetos que giram, obtemos a equação

$$m\ddot{\theta}(t) + mg \operatorname{sen}[\theta(t)] = u(t) \quad (5.1)$$

onde $\theta = \theta(t)$ é o ângulo do braço em relação a vertical medido em sentido anti-horário, g é a aceleração da gravidade e u é o momento de torção externo aplicado. O estado do sistema é nesse caso $(\theta, \dot{\theta})$ visto que u é o controle. Veja a figura 5.1

Para simplificar a análise consideramos que $m = g = 1$. A posição vertical estacionária ($\theta = \pi, \dot{\theta} = 0$) é um ponto de equilíbrio na ausência de controle, isto é, com $u \equiv 0$. Mas, obviamente, é instável. Analisemos o sistema em torno da dita configuração com o objetivo de compensar esta instabilidade mediante o controle u .

Como $\operatorname{sen}[\theta] \sim (\pi - \theta)$ em torno de $\theta = \pi$, em uma primeira aproximação, o sistema linearizado correspondente na variável $\varphi = \theta - \pi$ pode ser escrita na forma

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u. \quad (5.2)$$

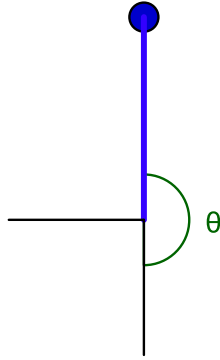


Figura 5.1: Pêndulo Estável

Verificando o que foi citado acima ($\text{sen}[\theta] \sim (\pi - \theta)$) através da série de Taylor.

$$\text{sen}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}^{(n)}(\pi)}{n!} (\theta - \pi)^n$$

Para $n = 1$ temos

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta) &= \frac{\text{sen}(\pi)}{0!} (\theta - \pi)^0 + \frac{\text{sen}'(\pi)}{1!} (\theta - \pi) \\ &= 0 + \cos(\pi)(\theta - \pi) = -(\theta - \pi) = \pi - \theta. \end{aligned}$$

Condições de controle de Kalman: Vamos verificar agora as condições de controle de Kalman para o sistema (5.2). O sistema

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u$$

pode ser escrito como

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \varphi + u \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u,$$

com $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Fazendo $x = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$ teremos

$$x' = Ax + Bu.$$



Figura 5.2: Pêndulo a esquerda e Pêndulo a direita

Dessa forma temos a matriz

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

com o número de linhas não nulas igual a $n = 2$. Portanto o sistema é controlável.

O objetivo é então conduzir φ e $\dot{\varphi}$ a zero para dados iniciais pequenos e fazê-lo mais rápido possível e sem que o ângulo e a velocidade se tornem muito grandes ao longo da trajetória controlada.

Quando a massa se encontra a esquerda da vertical, veja figura 5.2, isto é, quando $\varphi > 0$, tomamos $u < 0$.

Conseqüentemente, quando $\varphi < 0$ tomamos $u > 0$.

Uma possibilidade é então eleger uma solução proporcional:

$$u = -\alpha\varphi \tag{5.3}$$

com $\alpha > 0$. Obtemos assim,

$$\ddot{\varphi} + (\alpha - 1)\varphi = 0 \tag{5.4}$$

cujos polinômio característico é $z^2 + \alpha - 1 = 0$.

As raízes desse polinômio são: $z = \pm\sqrt{1 - \alpha}$.

Para $\alpha < 1$, temos:

$$\varphi(t) = c_1 e^{\sqrt{1-\alpha}t} + c_2 e^{-\sqrt{1-\alpha}t}$$

Para $\alpha > 1$, temos: $z = \pm i\sqrt{\alpha - 1}$, então

$$\varphi(t) = c_1 \cos \sqrt{\alpha - 1}t + c_2 \sin \sqrt{\alpha - 1}t$$

Analisando essas raízes vemos que as soluções desta equação diferencial são oscilantes quando $\alpha > 1$ e que, quando $\alpha < 1$, todas as soluções divergem para $\pm\infty$, exceto aquelas em que $\dot{\varphi}(0) = -\sqrt{1 - \alpha}\varphi(0)$. De fato, pois

$$\varphi(0) = c_1 + c_2 \quad \text{e} \quad \dot{\varphi}(0) = -\sqrt{1 - \alpha}(c_2 - c_1).$$

Para $\dot{\varphi}(0) = -\sqrt{1 - \alpha}\varphi(0)$, temos que $c_1 = 0$ e assim, φ toma a forma

$$\varphi(t) = c_2 e^{-\sqrt{1 - \alpha}t}.$$

E portanto convergem.

Quando $\alpha = 1$ cada ponto em que $\dot{\varphi} = 0$ é um estado de equilíbrio do sistema.

Portanto, em nenhum dos casos podemos garantir que o sistema alcance a configuração buscada. Embora nós tenhamos comprovado este fato no sistema linearizado, o mesmo ocorre no modelo não linear. A explicação é a seguinte. Consideramos em primeiro lugar o caso $\alpha < 1$. Quando $\varphi(0)$ é positiva e pequena, para $\dot{\varphi}(0) = 0$, da equação (5.4) se deduz que $\ddot{\varphi}(0) > 0$. Portanto $\dot{\varphi}$ e, conseqüentemente, φ são crescentes e, por conseqüência, o pêndulo se afasta da posição vertical. Quando $\alpha > 1$ o controle atua na direção correta mas introduz excessiva inércia.

A solução mais natural é manter $\alpha > 1$ mas introduzindo um novo termo que contenha a oscilação penalizando a velocidade. Obtemos assim uma nova solução proporcional-derivada:

$$u = -\alpha\varphi - \beta\dot{\varphi} \tag{5.5}$$

com $\alpha > 1$ e $\beta > 0$. Deste modo deduzimos o novo sistema

$$\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + (\alpha - 1)\varphi = 0, \tag{5.6}$$

cujo polinômio característico é $z^2 + \beta z + \alpha - 1 = 0$, com raízes

$$z = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2}. \tag{5.7}$$

Como $\alpha > 1$, temos que

$$\begin{aligned}\alpha - 1 > 0 &\Rightarrow 4(\alpha - 1) > 0 \Rightarrow -4(\alpha - 1) < 0 \\ \beta^2 - 4(\alpha - 1) < \beta^2 &\Rightarrow \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)} < \beta \Rightarrow \frac{\sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2} < \frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

e portanto,

$$-\frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2} < 0$$

E como $\beta > 0$, então $-\frac{\beta}{2} < 0$. E ainda $-\sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)} < 0$. Portanto,

$$-\frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2} < 0.$$

Como a parte real de ambas raízes é negativa, todas as soluções tendem a zero.

Com $\beta^2 > 4(\alpha - 1)$:

$$\varphi(t) = c_1 \mathbf{e}^{\left(-\frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2}\right)t} + c_2 \mathbf{e}^{\left(-\frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2}\right)t} \quad (5.8)$$

Com $\beta^2 < 4(\alpha - 1)$:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= c_1 \mathbf{e}^{\left(-\frac{\beta}{2} + \frac{i\sqrt{4(\alpha - 1) - \beta^2}}{2}\right)t} + c_2 \mathbf{e}^{\left(-\frac{\beta}{2} - \frac{i\sqrt{4(\alpha - 1) - \beta^2}}{2}\right)t} \\ \varphi(t) &= c_1 \mathbf{e}^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \mathbf{e}^{\frac{i\sqrt{4(\alpha - 1) - \beta^2}}{2}t} + c_2 \mathbf{e}^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \mathbf{e}^{-\frac{i\sqrt{4(\alpha - 1) - \beta^2}}{2}t} \\ \varphi(t) &= c_1 \mathbf{e}^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \left[\cos\left(\frac{\sqrt{4(\alpha - 1) - \beta^2}}{2}t\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4(\alpha - 1) - \beta^2}}{2}t\right) \right] \\ &+ c_2 \mathbf{e}^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \left[\cos\left(\frac{\sqrt{4(\alpha - 1) - \beta^2}}{2}t\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4(\alpha - 1) - \beta^2}}{2}t\right) \right]\end{aligned}$$

Se nós impusermos a condição

$$\beta^2 > 4(\alpha - 1), \quad (5.9)$$

fazem-na de forma monótona, sem oscilar, pela equação (5.8)

Apesar da simplicidade deste modelo já vemos nele alguns aspectos recorrentes da Teoria do Controle:

- A linearização do sistema pode ser uma boa maneira para determinar seu controle, embora os resultados obtidos deste modo terão apenas uma validade local.

- É possível obter controles na forma de realimentação mas o efeito que estes introduzem no sistema nem sempre obedecem a mais simples intuição, é preciso fazer um estudo cuidadoso da estabilidade do sistema obtido.
- Aumentando a dissipação podemos conseguir que desapareçam as oscilações, tal como se indicou em (5.9). Neste caso é introduzido trajetórias em que a velocidade de convergência é mais lenta. De fato, analisando (5.7) se observa que a escolha de β que faz com que essa abscissa espectral σ , isto é, máximo das partes reais das raízes do polinômio característico (5.6), seja mínima é quando

$$\beta^2 = 4(\alpha - 1),$$

em cujo caso seu valor é:

$$z = \sigma^* = -\sqrt{\alpha - 1}.$$

Demonstração: Se $\beta^2 = 4(\alpha - 1)$, então $z = \frac{-\beta}{2}$. E ainda $\beta = 2\sqrt{\alpha - 1}$, portanto

$$z = -\sqrt{\alpha - 1}.$$

Ao aumentar β é fácil comprovar que a raiz de (5.7) correspondente ao sinal positivo é maior:

$$\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2} > -\sqrt{\alpha - 1}.$$

Este é o fenômeno da *sobredissipação*.

A implementação dos controles (5.5) que acabamos de mostrar não é tão simples, pois o cálculo de u exige o “conhecimento” da posição φ e da velocidade $\dot{\varphi}$ em cada instante. Uma alternativa para conhecê-los é avaliar φ e $\dot{\varphi}$ em um conjunto discreto de instantes de tempo

$$0, \delta, 2\delta, \dots, k\delta, \dots$$

e reajustar o controle em cada um destes instantes. O controle obtido deste modo se mantém constante durante o intervalo $[k\delta, k\delta + \delta]$.

Resolvendo o sistema (5.2) vemos que o resultado ao aplicar um controle constante v_k no sistema durante o intervalo $[k\delta, k\delta + \delta]$ é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} \varphi(k\delta + \delta) \\ \dot{\varphi}(k\delta + \delta) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \varphi(k\delta) \\ \dot{\varphi}(k\delta) \end{bmatrix} + Bv_k,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \cosh \delta & \sinh \delta \\ \sinh \delta & \cosh \delta \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \cosh \delta - 1 \\ \sinh \delta \end{bmatrix}.$$

Desta forma temos:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bv_k.$$

Seja F um vetor tal que

$$v_k = Fx_k.$$

Então, $x_{k+1} = Ax_k + BFx_k$, e deste modo obtemos o sistema discreto

$$x_{k+1} = (A + BF)x_k.$$

É fundamental observar que se o vetor F é tal que a matriz $A + BF$ é nilpotente, isto é,

$$[A + BF]^2 = 0,$$

então em duas etapas nós teremos alcançado o equilíbrio em que o sistema permanecerá indefinidamente. Um simples cálculo mostra que esta propriedade se cumpre quando $F = (f_1, f_2)$ com

$$f_1 = \frac{1 - 2 \cosh \delta}{2(\cosh \delta - 1)}; \quad f_2 = -\frac{1 + 2 \cosh \delta}{2 \sinh \delta}. \quad (5.10)$$

Observa-se que a vantagem da utilização deste tipo de controle é que se obtém a estabilização completa do sistema em tempo finito e não assintoticamente. Se trata de um *controle digital* cuja robustez e a facilidade com que pode ser implementado e mantido fazem-no extramamente útil.

Os controles digitais que acabamos de introduzir são de algum modo semelhantes aos controles *bang-bang*.

Controles Bang-Bang:

Uma vez fixado $\alpha > 1$, por exemplo $\alpha = 2$, podemos supor que

$$u = -2\varphi + v \quad (5.11)$$

de modo que o sistema (5.2) pode ser escrito na forma

$$\ddot{\varphi} + \varphi = v. \quad (5.12)$$

Se trata da lei de Newton para a vibração de uma mola.

Neste caso buscamos controles abaixo de um nível de custo admissível pré-fixado. Por exemplo,

$$|v| \leq 1$$

O controle com estas características que estabiliza o sistema em tempo mínimo, o controle óptimo, é necessariamente da forma

$$v(t) = \operatorname{sgn}[\eta(t)],$$

onde η é uma solução de

$$\ddot{\eta} + \eta = 0.$$

No caso,

$$\eta(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t).$$

Tomando $c_1 = c_2 = 1$, temos

$$\eta(t) = \cos(t) + \operatorname{sen}(t),$$

e

$$v(t) = \operatorname{sgn}[\eta(t)] = \begin{cases} 1 & \text{se } \eta(t) > 0 \\ -1 & \text{se } \eta(t) < 0 \end{cases}$$

Portanto, o controle só toma os valores ± 1 e basta determinar os instantes em que alterna entre um e outro sinal. Para determiná-lo construímos trajetórias que se obtém com os controles extremos ± 1 , isto é, resolvemos as equações diferenciais,

$$\ddot{\varphi} + \varphi = 1 \quad \text{e} \quad \ddot{\varphi} + \varphi = -1.$$

Fazendo $\varphi = x$ e $\dot{x} = y$, podemos escrever as equações anteriores como sistemas,

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 1 \end{cases}$$

As soluções são circunferências concêntricas com centros em $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, respectivamente.

O lugar geométrico dos pontos em que o sinal do controle alterna é a união da semicircunferência

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1, \quad y < 0$$

junto com todos seus translados de raio 1 ao longo do semi-eixo positivo dos x , com a semicircunferência

$$(x + 1)^2 + y^2 = 1, \quad y > 0$$

e todos seus translados de raio 1 ao longo do semi-eixo negativo dos x .

A trajetória ótima consiste então em percorrer semicircunferências alternando entre os valores ± 1 do controle ao atravessar esse conjunto. Deste modo alcançamos o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ em tempo finito. Obtemos assim um mecanismo de controle na forma de realimentação que pode ser escrito da forma

$$\ddot{\varphi} + \varphi = F(\varphi, \dot{\varphi})$$

onde F é a função que vale -1 por cima da curva de alternância de sinal do controle e 1 por baixo. Com respeito ao sistema original (5.2) teríamos então

$$\ddot{\varphi} - \varphi = -2\varphi + F(\varphi, \dot{\varphi}).$$

O interessante desses controles é seu caráter bang-bang que, mesmo sendo grosseiro, os fazem facilmente implementáveis e são os que realizam o controle do sistema em tempo mínimo.

Embora o problema mecânico considerado neste capítulo e o modelo matemático correspondente sejam muito simples, as ideias aqui introduzidas são recorrentes da Teoria do Controle.

Considerações Finais

No Controle do Pêndulo vimos que o controle u deve conter as oscilações e a velocidade através de uma força elástica $-\alpha\varphi$ e uma força amortecedora $-\beta\dot{\varphi}$ tomando a forma $u = -\alpha\varphi - \beta\dot{\varphi}$, com $\alpha > 1$ e $\beta > 0$. As soluções do sistema obtido com esse controle devem convergir de forma monótona, sem oscilar. Portanto as soluções são da forma

$$\varphi(t) = c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t}$$

onde,

$$z_1 = -\frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = -\frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2},$$

com $\beta^2 > 4(\alpha - 1)$.

Para a implementação desses controles devemos ter o “conhecimento” da posição φ e da velocidade $\dot{\varphi}$ em cada instante. Uma alternativa para conhecê-los é avaliar φ e $\dot{\varphi}$ em um conjunto discreto de instantes de tempo $(0, \delta, 2\delta, \dots, k\delta, \dots)$ e reajustar o controle em cada um destes instantes. O controle obtido deste modo se mantém constante durante o intervalo $[k\delta, k\delta + \delta]$.

Observa-se que a vantagem da utilização deste tipo de controle, o controle Digital, é que se obtém a estabilização completa do sistema em tempo finito e não assintoticamente.

Já nos controles Bang-Bang, tomamos $\alpha = 2$ e $u = -2\varphi + v$, tendo assim um novo sistema:

$$\ddot{\varphi} + \varphi = v$$

onde, v só toma os valores ± 1 .

É necessário, então, determinar os instante em que se alterna entre um sinal e outro.

Para isso construímos trajetórias que consistem em percorrer semicircunferências,

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1, \quad y < 0$$

e

$$(x + 1)^2 + y^2 = 1, \quad y > 0,$$

alternando entre os valores ± 1 do controle ao atravessar esse conjunto. Deste modo alcançamos o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ em tempo finito. Obtemos assim um controle na forma de realimentação.

Vimos também as condições de controle de Kalman que diz que: “a condição necessária e suficiente para que um sistema linear em dimensão finita seja controlável em algum tempo $T > 0$ é que o posto da matriz (número de linhas não nulas do sistema)

$$[B, AB, \dots, A^{N-1}B]$$

seja N . Além disso, se o posto da matriz é N , o sistema é controlável em todo tempo $T > 0$ ”.

No controle exato da equação da corda vibrante vimos que o sistema é exatamente controlável se u , solução do problema, satisfaz a condição

$$u(x, T) = \partial_t u(x, T) = 0 \quad \text{em }]0, L[,$$

para quaisquer que sejam a posição e a velocidade inicial da corda. E que u deve pertencer a $C(]0, T[; L^2(0, L))$.

Vimos também a existência de soluções fracas para a equação da onda quando os dados iniciais são tais que u_0 e u_1 pertencem a $L^2(0, L)$ e $H^{-1}(0, L)$, respectivamente. E as funções f, g pertencem a $L^2(0, T)$. Dessa forma, u é solução fraca do problema se

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L u(x, t) F(x, t) dx dt &= - \int_0^L u_0(x) \partial_t \psi(x, 0) dx + \langle u_1(x), \psi(x, 0) \rangle \\ &+ \int_0^T [f(t) \partial_x \psi(0, t) - g(t) \partial_x \psi(L, t)] dt. \end{aligned}$$

Para resolver o problema devemos mostrar que para quaisquer par de dados iniciais escolhidos, digamos (u_0, u_1) , existem condições de contorno (f, g) tal que

$$(f, g) \mapsto (u(x, 0), \partial_t u(x, 0)) = (u_0(x), u_1(x)).$$

Para isso devemos ter uma bijeção entre os espaços onde tomamos os controles (f, g) e os dados iniciais $(u(x, 0), \partial_t u(x, 0))$. E devemos escolher (f, g) como sendo iguais as forças de tensões existentes nos extremos de uma corda que se encontra numa posição ϕ_0 e que inicia seu movimento a uma velocidade inicial ϕ_1 . Uma delas tomada em sentido contrário para ir eliminando o movimento.

Temos também que para $T > L$ o funcional $\|\cdot\|_*$ é uma norma em E e este espaço é $E = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$. E temos para $T > L$, um novo resultado de unicidade, pois se o traço das derivadas nos extremos do intervalo $]0, L[$ são iguais então as soluções deveram ser iguais.

E sendo a aplicação Λ sobrejetiva, para $\{-u_1, u_0\} \in H^{-1}(0, L) \times L^2(0, L)$ existe $\{\phi_0, \phi_1\} \in L^2(0, L) \times H_0^1(0, L)$ tal que $\Lambda\{\phi_0, \phi_1\} = \{-u_1, u_0\}$, o que significa que existe uma forma de agir nos extremos da corda, de tal forma que o sistema vão ao repouso mesmo que a posição inicial assim como a velocidade inicial sejam muito irregulares.

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Lions, J.-L.; *Hidden Regularity in some Nonlinear Hyperbolic Equations*, Comp. and Appli. Math., vol. 6, number 1, pp 7-17, (1987).
- [3] Magenes, E., & Lions, J.-L.; *Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications*, New York, Springer-Verlag, (1972).
- [4] Goldstein, J. A.; *Semigroups of Linear Operator and Applications*, Oxford University Press, (1985).
- [5] Huang, F.; *Characteristic Conditions for Exponential Stability of the Linear Dynamical Systems in Hilbert Spaces*, Annals of Differential Equations, vol 1 (1), pp. 43-56, (1985).
- [6] Dautray, R. & Lions, J.-L.; *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 1,2 and 4, Springer-Verlag, Berlin, (1990).
- [7] Athanasiadis, C. & Stratis, I. G.; *On Some Elliptic Transmission Problems*, Annales Polonici Mathematici, LXIII.2, (1996).
- [8] Neerven, J. V.; *The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators*, Operator Theory; vol 88. Berlin, Birkhäuser, (1996).
- [9] Muñoz Rivera, J. E. & Vila Bravo, J. C.; *Asymptotic Stability of Semigroups Associated to the Linear Weak Dissipative Systems*, Mathematical and Computer Modelling, vol. 40, (4), pp. 387-392, (2004).

- [10] Liu, Z. & Liu, Z.; *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, CRC Research Notes Mathematics, 398 (3), Chapman & Hall, (1999)
- [11] Chen, S. & Liu, K. & Liu, Z.; *Spectrum and Stability Elastic System with Global or Local Kelvin-Voigt Damping*, SIAM Journal of Applied Mathematics Vol. 59(2), pp. 651-668,(1998).
- [12] Bennet, S.; *A history of control engineering 1930-1955*, IEE Control Engineering Series 47, Peter Peregrinus Ltd., Londres, 1993.
- [13] Bennet, S.; *A history of control engineering 1800-1930*, IEE Control Engineering Series 8, Peter Peregrinus Ltd., Londres, 1979.
- [14] Eastham, M. S. P.; *The spectral theory of periodic differential equations*, Scottish Academic Press, Edinburgh, 1973.
- [15] Campbell, S. L. & Haberman, R.; *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con problemas de valor frontera*, McGrawHill, México, 1998.
- [16] Evans, L. C.; *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Graduate Texts in Mathematics, 19, 1998.
- [17] Hegenberg, L.; *Equações Diferenciais*, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Almeida Neves-Editora, Rio de Janeiro, 1970.
- [18] Fattorini, H. O.; *Infinite Dimensional Optimization and Control Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 62, Cambridge University Press, 1999.
- [19] Sontag, E. D.; *Mathematical control theory. Deterministic finite-dimensional systems*, Second edition, Texts in Applied Mathematics, 6, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [20] Russell, D. L.; *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations*. Recent progress and open questions, SIAM Rev., 20 (1978), 639-739.
- [21] Lions, J. L.; *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systèmes distribués*. Tomes 1& 2. Masson, RMA 8 & 9, Paris, 1988.

- [22] Li, X. & Yong, J.; *Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems*, Birkhäuser, Boston, 1995.
- [23] Kalman, R. E.; *Optimization, mathematical theory of, control theory*, en *Encyclopaedia Britannica*, Fifteenth ed., 1974, 636-638.
- [24] Alonso, M. & Finn, E. J.; *Física, um curso universitário*. Vol. 1, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1972.