Hemerson Monteiro

Integral de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$

Florianópolis

Novembro de 2009

Hemerson Monteiro

Integral de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$

Trabalho acadêmico de graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do titulo de licenciado em Matemática.

Orientador:Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

Universidade Federal De Santa Catarina

Florianópolis

Novembro de 2009

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática- Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n° 43/CCM/2009

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa
(MTM-UFSC, Orientador)

Prof. Dr. Danilo Royer
(MTM-UFSC)

Prof. Dr. Luciano Bedin
(MTM-UFSC)

Agradecimentos

Agradeço a minha família, em especial a minha mãe pelo apoio e incentivo.

Agradeço aos amigos e colegas, em especial ao meu amigo Michel por seu apoio e compreensão.

Agradeço ao meu orientador por seu apoio, dedicação e paciência.

Agradeço a Deus.

Agradeço a todos que me ajudaram direta ou indiretamente na elaboração deste trabalho.

Sumário

Resumo

Neste trabalho foi feito um estudo da Integral de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$, tendo como objetivo abordar sua construção e principais resultados.

Para cumprir esse objetivo foram estudados os conceitos necessários para sua construção nos capítulos iniciais, como por exemplo os conceitos de anel e σ-anel no capítulo 1 e o conceito de funções mensuráveis no capítulo 2, sendo que somente no capítulo 3 os resultados relativos a Integral de Lebesgue são desenvolvidos.

Introdução

Na presente monografia foi abordada a Integral de Lebesgue, sua construção e propriedades principais. O criador da Integral de Lebesgue foi Henri Léon Lebesgue, matemático francês nascido em 1875 na cidade Beauvais, estudou na "École Normale Supérieure"(que pode ser traduzido como "Escola Normal Superior"), onde estudou também Borel[1]. Completou seus estudos em 1897. Nos dois anos seguintes ele trabalhou na biblioteca da École, uma época produtiva para Lebesgue, resultando na publicação de vários artigos.

Entre Junho de 1899 e abril de 1901, a academia de ciências publicou uma série de cinco artigos de Lebesgue que mais tarde se tornariam a base para sua tese de doutorado na Sorbonne; e no quinto artigo Lebesgue fez o primeiro anúncio da sua generalização da Integral de Riemann.

Aos 27 anos fez uma tese de doutorado onde eram expostos resultados que, desenvolvidos posteriormente em outras publicações, estão na origem de uma renovação e de uma generalização do cálculo integral. Lebesgue apresentou sua tese sob o titulo "Intégrable, longueur, aire"(que pode ser traduzida como "Integral, comprimento, área"). Lebesgue fez certa junção das idéias de Borel e Jordan[2], sendo que ele não se limitou a isso generalizando as idéias de ambos. A teoria da medida de Lebesgue foi desenvolvida com muito mais clareza e generalidade que a de Borel, representando uma extensão natural das idéias de Borel. Algumas das idéias de Borel serão abordadas no capítulo 1, em especial os conjuntos borelianos. O crédito por aplicar a teoria da medida na teoria da integração, no entanto, foi para Lebesgue, que faleceu em 1941 na cidade de Paris.

No capítulo 1 nosso foco são as funções de conjuntos, pois as funções para ter propriedades interessantes não pode ter qualquer domínio. No capítulo 2 nosso olhar se volta para as funções mensuráveis e suas propriedades. Essas funções são de grande importância pois serão usadas na construção da Integral de Lebesgue. No capítulo 3 o objeto de estudo é a Integral de Lebesgue, começando com sua definição e depois a demonstração de resultados sobre ela. A Integral de Lebesgue além de possuir propriedades interessan-

[1]Émile Borel(1871-1956)
[2]Camille Jordan (1838-1922)

tes também pode ser aplicada sobre uma grande variedade de conjuntos, por exemplo, mostramos no capítulo 3 que em $\mathbb{R}$ a Integral de Lebesgue pode ser aplicada sobre uma classe maior de funções que a Integral própria de Riemann[3].

As informações históricas utilizadas, em sua grande maioria, foram retiradas da referência [2]. Essa monografia é um estudo detalhado do capítulo 10 da referência [1].

[3]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

1 Funções de conjuntos

A principal noção que foi introduzida neste capítulo é a de função de conjunto. Enquanto que uma função ordinária estudada no cálculo tem um conjunto numérico por domínio de definição, uma função de conjunto tem por domínio uma família de conjuntos.

A noção intuitiva de função de conjunto é naturalmente empregada quando se calcula o comprimento de um segmento de reta, ou a área ou um volume de uma região do plano ou do espaço. Nesses casos foram utilizadas funções implicitamente definidas sobre conjuntos da reta (intervalos), do plano (retângulos, por exemplo) e do espaço (paralelepípedos, por exemplo) e cuja imagem ou valor no conjunto fornece o seu comprimento, sua área ou volume. Neste capítulo esta idéia ou noção intuitiva foi formalizada.

As propriedades principais que uma família de conjuntos deve satisfazer para ser o domínio de uma função de conjunto, foram determinadas. Algumas dessas propriedades foram abstraídas da situação concreta. Por exemplo, se $\varphi(A)$ é uma função de conjunto, A um conjunto, queremos que $\varphi(A) \geq 0$ pois comprimento, área e volume são dados por números não negativos. Quando medimos o comprimento de dois intervalos (retângulos ou volumes) o comprimento total é a soma dos comprimentos se eles forem disjuntos. Isso significa que se A e B pertencem ao domínio de φ, $A \cup B$ e $A \cap B$ também devem estar no mesmo domínio e em especial, se $A \cap B = \emptyset$, devemos ter $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$. Estas propriedades levaram, naturalmente, a introduzir o conceito de anel de conjuntos e, mais geralmente, de σ-anel, relevantes para formalizarem a idéia de função de conjunto.

1.1 Anel e σ-Anel

Definição 1.1. *Uma família $\mathcal{A}$ de conjuntos é chamado de anel se para todo $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A}$ temos:*

$$A \cup B \in \mathcal{A} \tag{1.1}$$

e

$$A - B \in \mathcal{A}. \tag{1.2}$$

Teorema 1.1. *Sejam $\mathcal{A}$ um anel e $A, B, A_1, A_2, ..., A_n$ elementos quaisquer de $\mathcal{A}$ e $\emptyset$ o conjunto vazio. Então,*

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

b) $A \cap B \in \mathcal{A}$.

c) *O conjunto $\mathcal{A}$ é fechado pela união enumerável finita, ou seja:*

$$\bigcup_{j=1}^{N} A_j \in \mathcal{A}.$$

Demonstração:

a) Temos que $A - A = \emptyset, \forall A \in \mathcal{A}$. Logo, $\emptyset \in \mathcal{A}$.

b) Como $\mathcal{A}$ é anel, $A - B \in \mathcal{A}$. Segue do resultado **(P.1)** do **Apêndice A** que

$$A \cap B = A - (A - B).$$

Portanto, $A \cap B \in \mathcal{A}$.

c) Como $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, então $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Suponha, por indução, que para $k \leq N - 1$

$$\bigcup_{j=1}^{k} A_j \in \mathcal{A}.$$

Então,

$$\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j \right) \cup A_{k+1} \in \mathcal{A}.$$

Pois $A_{k+1} \in \mathcal{A}$, seguindo-se o resultado, por indução. $\square$

Exemplo 1.1 Seja X um conjunto qualquer. A família $\mathfrak{F}$ de todos os subconjuntos finitos de X é um anel. De fato, sejam $A, B \in \mathfrak{F}$. Então, $A \cup B$ é um conjunto finito e $A \cup B \in \mathfrak{F}$. O conjunto $A - B$ também é finito, logo, $A - B \in \mathfrak{F}$. Portanto, $\mathfrak{F}$ é anel.

Exemplo 1.2 A família $\mathfrak{J}$ dos intervalos da reta real da forma $I = [a, b]$, não é anel. Sejam $I_1 = [a_1, b_1]$ e $I_2 = [a_2, b_2]$ tais que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. A união $I_1 \cup I_2$ não é da forma de I e, portanto, $I_1 \cup I_2 \notin \mathfrak{J}$. Logo, $\mathfrak{J}$ não é anel.

Exemplo 1.3 Seja $\mathfrak{J}\,' = \{I\}$ a família de todos os intervalos limitados I da reta real, isto é, I pode ser qualquer um dos seguintes intervalos:

$$a \leq x \leq b,$$

$$a < x \leq b,$$

$$a \leq x < b,$$

$$a < x < b.$$

Os intervalos vazios da forma

$$a < x < a,$$

$$a < x \leq a,$$

$$a \leq x < a,$$

e os degenerados,

$$a \leq x \leq a,$$

também são permitidos. Os números a, b são reais quaisquer. Seja $\mathcal{E}_1 = \{E\}$ a família formada por todas as uniões finitas de intervalos $I \in \mathfrak{J}\,'$, isto é,

$$E = \bigcup_{i=1}^{N} I_i, I_i \in \mathfrak{J}\,'.$$

A família $\mathcal{E}_1$ é um anel. Para provar este resultado, sejam A e B elementos quaisquer de $\mathcal{E}_1$. Queremos mostrar que $A \cup B \in \mathcal{E}_1$ e $A - B \in \mathcal{E}_1$.

Temos que

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} I_i \text{ e } B = \bigcup_{j=1}^{M} K_j$$

onde $I_i, K_j \in \mathfrak{J}\,', \forall i, j$. Defina

$$C_k = \begin{cases} I_k & , \text{se } k = 1, ..., N \\ K_{k-N} & , \text{se } k = N+1, ..., N+M. \end{cases}$$

Portanto, $C_k \in \mathfrak{J}\,'$ e,

$$A \cup B = \bigcup_{k=1}^{N+M} C_k \in \mathcal{E}_1.$$

Para provar que $A - B \in \mathcal{E}_1$, consideremos três casos.

Caso 1. $A \cap B = \emptyset$. Nesse caso, $A - B = A \in \mathcal{E}_1$.

Caso 2. $A \cap B \neq \emptyset$. Para determinar os elementos que não estão em B basta tomar a diferença de cada intervalo I_k com todos os intervalos K_j. A união destas diferenças é igual a $A - B$:

$$A - B = \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{M} (I_i - K_j).$$

A diferença $I_i - K_j$ é sempre um ou dois intervalos. O caso de dois intervalos pode ocorrer se K_j está contido em I_i. Portanto, nesse caso, $A - B \in \mathcal{E}_1$.

Concluimos pelos três casos, que $\mathcal{E}_1$ é anel.

Observação. Daqui em diante o símbolo $\{a, b\}$ indica um intervalo limitado qualquer dos listados no exemplo anterior.

Definição 1.2. *Um anel $\mathcal{A}$ é chamado de σ-anel se, para toda família enumerável infinita $\{A_n\}$ de conjuntos de $\mathcal{A}$, tem-se*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}. \tag{1.3}$$

Exemplo 1.4 Sejam X e $\mathfrak{F}$ os conjuntos do **Exemplo (1.1)**. Suponha que X é infinito e enumerável. Por exemplo, $X = \mathbb{N}$. Seja $E_n = \{n\}, n = 1, 2, ...$. Os conjuntos E_n são finitos e, por consequência, $E_n \in \mathfrak{F}$. Contudo, a união

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \notin \mathfrak{F}$$

pois contém infinitos pontos e, portanto, $\mathfrak{F}$ não é σ-anel apesar de ser um anel.

Exemplo 1.5 Seja $\mathcal{P}(A)$ a família de todos os subconjuntos de A. O conjunto $\mathcal{P}(A)$ é σ-Anel pois uma união qualquer de subconjuntos de A é um subconjunto de A, logo, esta em $\mathcal{P}(A)$. A diferença de dois subconjuntos quaisquer de A também é um subconjunto de A e, portanto, esta em $\mathcal{P}(A)$. Lembramos que $\emptyset \subseteq A$, $\forall A$ e, assim, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$. Concluindo que $\mathcal{P}(A)$ é σ-anel.

Exemplo 1.6 No **Exemplo (1.1)**, provamos que a família de todos os subconjuntos finitos de um conjunto qualquer de X é um anel. No **Exemplo (1.4)**, provamos que se X é infinito, $\mathfrak{F}$ não é um σ-anel. Suponha agora que X é finito. Nesse caso, a união enumerável de conjuntos de $\mathfrak{F}$ é um subconjunto finito de X, já que para qualquer subconjunto de X o número máximo de elementos distintos é finito. Concluímos que quando X é finito, $\mathfrak{F}$ é σ-anel.

Teorema 1.2. *Se $\mathcal{A}$ é um σ-anel e $\{A_n\}$ é uma família enumerável de conjuntos de $\mathcal{A}$, então,*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}. \tag{1.4}$$

Demonstração:
Usando o resultado **(P.2)** do Apêndice **A**, segue que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 - A_n).$$

Como $A_1 \in \mathcal{A}$ e

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 - A_n) \in \mathcal{A}.$$

Resultado segue pois $\mathcal{A}$ é um σ-anel. $\square$

1.2 Funções finitamente aditivas e σ-aditivas

Definição 1.3. *Dado um anel $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um conjunto X, uma função:*

$$\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \tag{1.5}$$

é chamada finitamente aditiva se para todo $A, B \in \mathcal{A}$ tais que $A \cap B = \emptyset$ tem-se que

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B). \tag{1.6}$$

Uma função definida sobre um anel de conjuntos é chamada, em geral, de função de conjunto.

Nota. De agora em diante uma função de conjunto é suposta não negativa a menos que se diga o contrário. Para mais informações sobre as operações envolvendo números reais com os símbolos $+\infty$ ou $-\infty$ ver **Definição (A.1)** do **Apêndice A**.

Exemplo 1.7 Seja X um conjunto com infinitos elementos e $\mathcal{P}(X)$ a família de todos os subconjuntos de X, pelo **Exemplo (1.5)** sabemos que $\mathcal{P}(X)$ é σ-anel, em especial, um anel. Para E um subconjunto qualquer de X, defina

$$\varphi(E) = \begin{cases} 0 & \text{, se } E \text{ tem finitos elementos} \\ +\infty & \text{, se } E \text{ tem infinitos elementos.} \end{cases}$$

Essa função é finitamente aditiva. De fato, sejam $A, B \subseteq X$ com $A \cap B = \emptyset$. Consideremos os seguintes casos:

Caso 1. A e B tem finitos elementos, então $A \cup B$ tem finitos elementos, logo

$$\varphi(A \cup B) = 0 = 0 + 0 = \varphi(A) + \varphi(B).$$

Caso 2. A tem infinitos elementos, então $A \cup B$ tem infinitos elementos, logo

$$\varphi(A \cup B) = +\infty = +\infty + \varphi(B) = \varphi(A) + \varphi(B).$$

Exemplo 1.8 Sejam X um conjunto não-vazio e $\mathcal{P}(X)$ a família de todos os subconjuntos de X, então $\mathcal{P}(X)$ é σ-anel, em particular, um anel. Para E um subconjunto qualquer de X, defina

$$\varphi_c(E) = \begin{cases} \text{o número de elementos de } E & \text{, se } E \text{ tem finitos elementos} \\ +\infty & \text{, se } E \text{ tem infinitos elementos.} \end{cases}$$

Essa função conhecida como "medida de contagem" é finitamente aditiva. De fato sejam $A, B \subseteq X$ com $A \cap B = \emptyset$. Consideremos os seguintes casos:

Caso 1. A e B tem finitos elementos, respectivamente n e m elementos, então $A \cup B$ tem finitos elementos possuindo no total $n + m$ elementos, logo

$$\varphi_c(A \cup B) = n + m = \varphi_c(A) + \varphi_c(B).$$

Caso 2. A tem infinitos elementos, então $A \cup B$ tem infinitos elementos, logo

$$\varphi_c(A \cup B) = +\infty = +\infty + \varphi_c(B) = \varphi_c(A) + \varphi_c(B).$$

Exemplo 1.9 Seja X um conjunto não-vazio, seja $\mathcal{P}(X)$ a família de todos os subconjuntos de X e x_0 um elemento de X. Para E um subconjunto qualquer de X, defina

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{, caso } x_0 \in E \\ 0 & \text{, caso } x_0 \notin E. \end{cases}$$

Essa função conhecida como "medida de Dirac[1]" é finitamente aditiva. De fato, sejam $A, B \subseteq X$ com $A \cap B = \emptyset$

Caso 1. $x_0 \notin A$ e $x_0 \notin B$, então $x_0 \notin A \cup B$. Logo,

$$\delta_{x_0}(A \cup B) = 0 = 0 + 0 = \delta_{x_0}(A) + \delta_{x_0}(B).$$

Caso 2. $x_0 \in A$, então $x_0 \in A \cup B$ e $x_0 \notin B$, pois $A \cap B = \emptyset$. Logo,

$$\delta_{x_0}(A \cup B) = 1 = 1 + 0 = \delta_{x_0}(A) + \delta_{x_0}(B).$$

[1]Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984)

Teorema 1.3. *Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ uma função de conjunto finitamente aditiva e $A, B, A_1, ..., A_n$ subconjuntos de $\mathcal{A}$. Então:*

a) $\varphi(\emptyset) = 0$, *se* $\varphi(\emptyset) < +\infty$.

b) $\varphi(A_1) \leq \varphi(A_2)$ *se* $A_1 \subseteq A_2$.

c) $\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

d) $\varphi(B - A) = \varphi(B) - \varphi(A)$, *se* $A \subseteq B$ *e* $\varphi(A) < +\infty$.

e) *Se* $A_1, A_2, .., A_n \in \mathcal{A}$ *e* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *, para todo* $i \neq j$,

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(A_i).$$

Demonstração:

a) Como $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$, segue que

$$\varphi(\emptyset) = \varphi(\emptyset \cup \emptyset) = \varphi(\emptyset) + \varphi(\emptyset) = 2\varphi(\emptyset).$$

Portanto, $\varphi(\emptyset) = 0$.

b) Como $A_1 \subseteq A_2$, podemos escrever

$$A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$$

e

$$A_1 \cap (A_2 - A_1) = \emptyset.$$

Pela aditividade de φ,

$$\varphi(A_2) = \varphi(A_1 \cup (A_2 - A_1)) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2 - A_1) \geq \varphi(A_1)$$

pois $\varphi \geq 0$.

c) De acordo com o resultado (**P.6**) no **Apêndice A**,

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A).$$

Aplicando φ e a aditividade,

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A - B) + \varphi(A \cap B) + \varphi(B - A).$$

Pelo resultado **(P.7)** no **Apêndice A**, temos que

$$A = (A \cap B) \cup (A - B)$$

e, portanto,

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A - B).$$

Pelo mesmo resultado **(P.7)**,

$$B = (B \cap A) \cup (B - A)$$

donde

$$\varphi(B) = \varphi(B \cap A) + \varphi(B - A).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) &= \varphi(A - B) + \varphi(A \cap B) + \varphi(B - A) + \varphi(A \cap B) \\ &= \varphi(A) + \varphi(B). \end{aligned}$$

d) Como $A \subseteq B$,

$$B = A \cup (B - A)$$

e, pela aditividade de φ,

$$\varphi(B) = \varphi(A) + \varphi(B - A)$$

ou ainda,

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(B - A).$$

e) Seja $B_2 = A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n$. Então,

$$\varphi(A_1 \cup ... \cup A_n) = \varphi(A_1 \cup B_2).$$

O item **c)** já provado implica em

$$\varphi(A_1) + \varphi(B_2) = \varphi(A_1 \cup B_2) + \varphi(A_1 \cap B_2) = \varphi(A_1 \cup B_2)$$

pois $\varphi(A_1 \cap A_2) = \varphi(\emptyset) = 0$, pelo item **a)** deste **Teorema (1.3)**.

Seja $B_i = A_i \cup A_{i+1} \cup ... \cup A_n$, para algum i, $2 \leq i \leq n$. Suponhamos, por indução que

$$\varphi(A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_n) = \varphi(A_1) + .. + \varphi(A_{i-1}) + \varphi(B_i)$$

Mas,

$$\begin{aligned}\varphi(A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_n) &= \varphi(A_1) + .. + \varphi(A_{i-1}) + \varphi(B_i) \\ &= \varphi(A_1) + ... + \varphi(A_{i-1}) + \varphi(A_i \cup B_{i+1}).\end{aligned}$$

Pelo item **c)**,

$$\begin{aligned}\varphi(A_i) + \varphi(B_{i+1}) &= \varphi(A_i \cup B_{i+1}) + \varphi(A_i \cap B_{i+1}) \\ &= \varphi(A_i \cup B_{i+1}) + \varphi(\emptyset) \\ &= \varphi(A_i \cup B_{i+1}) \\ &= \varphi(B_i).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\varphi(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) &= \varphi(A_1) + ... + \varphi(A_{i-1}) + \varphi(B_i) \\ &= \varphi(A_1) + ... + \varphi(A_{i-1}) + \varphi(A_i) + \varphi(B_{i+1}).\end{aligned}$$

Logo, por indução, vale o resultado do item **e)**. □

Definição 1.4. *Sejam $\mathcal{A}$ um σ-anel e $\{A_n\}$, uma família infinita de conjuntos de $\mathcal{A}$, dois a dois disjuntos. Uma função de conjunto aditiva*

$$\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

é chamada σ-aditiva se

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n). \tag{1.7}$$

Exemplo 1.10 A função dada no **Exemplo (1.7)** não é σ-aditiva. De fato seja $\{A_n\}$ uma sequência de subconjuntos de X com finitos elementos e dois a dois disjuntos, então

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

tem infinitos elementos, logo

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty > 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Exemplo 1.11 A função dada no **Exemplo (1.8)** é σ-aditiva, o que provaremos a seguir. Seja $\{A_n\}$ uma sequência de subconjuntos de X dois a dois disjuntos.

Caso 1. Para todo n temos que A_n tem finitos elementos, seja m_n o número de elementos de A_n, logo o conjunto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

possui no total

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n$$

como número de elementos. Por consequência,

$$\varphi_c\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_c(A_n).$$

Caso 2. Para algum i temos que A_i tem infinitos elementos. Logo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

tem infinitos elementos. Concluímos que

$$\varphi_c\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty = +\infty + \sum_{n=1,\ n\neq i}^{\infty} \varphi_c(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_c(A_n).$$

Exemplo 1.12 A função dada no **Exemplo (1.9)** é σ-aditiva. De fato seja $\{A_n\}$ uma sequência de subconjuntos de X dois a dois disjuntos.

Caso 1. Para todo n temos que $x_0 \notin A_n$. Logo

$$x_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Portanto,

$$\delta_{x_0}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x_0}(A_n).$$

Caso 2. Para algum i temos que $x_0 \in A_i$, logo $x_0 \notin A_n$, para $n \neq i$, pois os conjuntos são dois a dois disjuntos, além disso

$$x_0 \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$

Portanto,

$$\delta_{x_0}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = 1 = 0 + 1 = \sum_{n=1,\ n \neq i}^{\infty} \delta_{x_0}(A_n) + \delta_{x_0}(A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x_0}(A_n).$$

Teorema 1.4. *Seja φ uma função σ-aditiva num σ-anel $\mathcal{A}$ de conjuntos e $\{A_n\}$, $n = 1, 2, ...$, uma sequência de conjuntos de $\mathcal{A}$ tais que $A_n \subseteq A_{n+1}$. Se*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \tag{1.8}$$

então:

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \to \infty} \varphi(A_n). \tag{1.9}$$

Demonstração:

Definimos $B_1 = A_1$ e $B_i = A_i - A_{i-1}$, se $i \geq 2$. Os conjuntos $B_i \in \mathcal{A}$ tem as seguintes propriedades:

a) $B_i \cap B_j = \emptyset$, se $i \neq j$. De fato, temos os seguintes casos,

Caso 1) $i < j$

Então $i \leq j - 1$, logo $A_i \subseteq A_{j-1}$. Como $B_j = A_j - A_{j-1}$, por consequência temos $B_j \cap A_{j-1} = \emptyset$, portanto $B_i \cap A_j = \emptyset$. Suponha por absurdo que não, então existe $x \in B_i \cap B_j$, logo $x \in B_j$ e $x \in A_{j-1}$, uma contradição pois $B_j \cap A_{j-1} = \emptyset$.

Caso 2) $j > i$

Então $j \leq i - 1$, logo $A_j \subseteq A_{i-1}$. Como $B_i = A_i - A_{i-1}$, por consequência temos $B_i \cap A_{i-1} = \emptyset$, portanto $B_j \cap A_i = \emptyset$. Suponha por absurdo que não, então existe $x \in B_j \cap B_i$, logo $x \in B_i$ e $x \in A_{i-1}$ uma contradição, pois $B_i \cap A_{i-1} = \emptyset$.

b) Se para todo $k \geq 1$,

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = A_k.$$

Por definição, $B_1 = A_1$ e $B_2 = A_2 - A_1 = A_2 - B_1$. Logo, $B_2 \cup B_1 = A_2$. Suponhamos, por indução, que o resultado vale para todo $n \leq k$. Provemos que o resultado vale para $n = k+1$. Usando que $B_{k+1} = A_{k+1} - A_k$, obtemos

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \cup B_{k+1} = A_k \cup B_{k+1} = A_k \cup (A_{k+1} - A_k) = A_{k+1},$$

pois $A_k \subseteq A_{k+1}$.

Segue da propriedade **b)** que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

e, portanto,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$$

e

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Usando o fato de que φ é σ-aditiva e $B_i \cap B_j = \emptyset$, para todo i$\neq j$, obtemos o resultado

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \varphi(B_n) = \lim_{N\to\infty} \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) = \lim_{N\to\infty} \varphi(A_N).$$

$\square$

1.3 Funções Regulares e Medida Exterior

Definição 1.5. *Um volume no $\mathbb{R}^n$ é um conjunto da seguinte forma:*

$$I_v = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n =: \prod_{j=1}^{n} I_j \tag{1.10}$$

onde $I_j = \{a_j, b_j\}$ é um intervalo limitado qualquer de $\mathbb{R}$, podendo ser degenerado ou vazio.

O conjunto I_v é um intervalo se $n = 1$; um retângulo se $n = 2$; um paralelepípedo, se $n = 3$.

Definição 1.6. *Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado elementar se A for a união de um número finito de volumes do $\mathbb{R}^n$, ou seja,*

$$A = \bigcup_{i=1}^{M} I_v^i$$

para algum M.

Os conjuntos elementares têm a seguinte propriedade fundamental que não demonstraremos.

Teorema 1.5. *Todo conjunto elementar pode ser expresso como a união disjunta e finita de volumes.*

Demonstração:
A demonstração desse teorema no caso da reta, $n = 1$, pode ser encontrada na referência [6].

Teorema 1.6. *A família $\mathcal{E}_n$ formada por todos os conjuntos elementares do $\mathbb{R}^n$, é um anel porém não é σ-anel.*

Demonstração:
Caso 1. $\mathcal{E}_n$ é anel.
O caso $n = 1$ já foi provado no **Exemplo (1.3)**. Para o caso $n \geq 2$, a demonstração é basicamente a mesma, basta trocar I_i por I_v^i e trocar K_i por K_v^i.

Caso 2. $\mathcal{E}_n$ não é σ-anel.
Definimos

$$E_j = I_v(j), j = 1, 2, ...$$

onde

$$I_v(j) = \{ \ x = (x_1, ..., x_n) | \ \frac{1}{j} \leq x_k \leq \frac{1}{j}, k = 1, ..., n\}.$$

O conjunto E_j é um volume no $\mathbb{R}^n$ e, portanto, $E_j \in \mathcal{E}_n$, $\forall j$. A união

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \left\{ \left(\frac{1}{j}, ..., \frac{1}{j} \right) \in \mathbb{R}^n, j = 1, 2, ... \right\}$$

não pode ser expressa como união finita de volumes donde $E \notin \mathcal{E}_n$. Logo, $\mathcal{E}_n$ não é σ-anel. $\square$

No que segue definimos em $\mathcal{E}_n$ uma função de conjunto chamada de função de Lebesgue. Nos casos $n = 1, 2, 3$ esta função corresponde às noções de comprimento, área e volume, de um conjunto do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.7. *Seja $m : \mathcal{E}_n \to \mathbb{R}_+$ a função de conjunto dada por:*

$$m(I_v) = m \left(\prod_{j=1}^{n} I_j \right) = \prod_{j=1}^{n} m(I_j) \tag{1.11}$$

onde

$$m(I_j) = m(\{a_j, b_j\}) = b_j - a_j. \tag{1.12}$$

Se A é um conjunto elementar, isto é,

$$A = \bigcup_{i=1}^{M} I_v^i \tag{1.13}$$

onde os volumes I_v^i são dois a dois disjuntos, definimos

$$m(A) = \sum_{i=1}^{M} m(I_v^i). \tag{1.14}$$

A função de conjunto m é chamada de função de Lebesgue.

Definição 1.8. *Sejam $A_1, ..., A_n$ conjuntos dois a dois disjuntos quaisquer. Dizemos que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \tag{1.15}$$

é uma decomposição do conjunto A se, e somente se,

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i. \tag{1.16}$$

Teorema 1.7. *Seja $A \in \mathcal{E}_n$. Então $m(A)$ não depende da particular decomposição de A como uma união finita disjunta de volumes do $\mathbb{R}^n$ e m é finitamente aditiva.*

Demonstração:

O fato de m ser finitamente aditiva é imediato de sua definição. Antes de provar que $m(A)$ independe da particular decomposição de A vamos provar um resultado auxiliar. A intersecção de dois volumes é um volume. De fato, sejam A_1 e A_2 dois volumes do $\mathbb{R}^n$, então

$$A_1 = \prod_{i=1}^{p} \{a_i, b_i\}$$

e

$$A_2 = \prod_{j=1}^{q} \{c_j, d_j\}$$

Caso 1. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Definimos $\{e_i, f_i\} = \{a_i, b_i\} \cap \{c_i, d_i\}$, basta mostrar que

$$A_1 \cap A_2 = \prod_{k=1}^{pq} \{e_i, f_i\}.$$

Tomemos $x \in A_1 \cap A_2$, então $x \in \{a_i, b_i\}$ para todo $i, i = 1, ..., n$, pois $x \in A_1$, de forma similar $x \in \{c_j, d_j\}$ para todo $j, j = 1, ..., n$, pois $x \in A_2$. Logo, $x \in \{e_k, f_k\}$ para todo $k = 1, ..., pq$, por consequência

$$x \in \prod_{k=1}^{pq} \{e_i, f_i\}.$$

Agora provaremos a outra inclusão. Seja

$$x \in \prod_{k=1}^{pq} \{e_i, f_i\},$$

então $x \in \{e_k, f_k\}$ para todo $k = 1, ..., pq$, por consequência $x \in \{a_i, b_i\}$ para todo $i, i = 1, ..., n$, o que implica $x \in A_1$, de forma similar $x \in \{c_j, d_j\}$ para todo $j, j = 1, ..., n$, logo $x \in A_2$. Agora iremos utilizar esse resultado auxiliar, sejam

$$A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$$

e

$$A = \bigcup_{j=1}^{q} B_j,$$

duas decomposições quaisquer do conjunto A. Então

$$\bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{j=1}^{q}(A_i \cap B_j)$$

é uma decomposição do conjunto A, pois os conjuntos $\{A_i \cap B_j\}$ são volumes pelo resultado auxiliar e são conjuntos dois a dois disjuntos por serem os conjuntos $\{A_i\}$ dois a dois disjuntos e os conjuntos $\{B_j\}$ dois a dois disjuntos. Pelas decomposições tomadas obtemos

$$m(A) = \sum_{i=1}^{p} m(A_i)$$

e

$$m(A) = \sum_{j=1}^{q} m(B_j).$$

Porém,

$$\sum_{i=1}^{p} m(A_i) = m\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = m\left(\bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{j=1}^{q}(A_i \cap B_j\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} m(A_i \cap B_j)$$

e

$$\sum_{j=1}^{q} m(B_j) = m\left(\bigcup_{j=1}^{p} B_j\right) = m\left(\bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{j=1}^{q}(A_i \cap B_j\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} m(A_i \cap B_j).$$

Portanto $m(A)$ independe da decomposição do conjunto A.

□

Definição 1.9. *Seja $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathbb{R}_+$. A função φ é chamada regular se, para todo $A \in \mathcal{E}_n$, e para todo $\epsilon > 0$, existem conjuntos $F \in \mathcal{E}_n$, $G \in \mathcal{E}_n$ tais que F é compacto, G é aberto, $F \subseteq A \subseteq G$ e*

$$\varphi(G) - \epsilon \leq \varphi(A) \leq \varphi(F) + \epsilon. \tag{1.17}$$

Teorema 1.8. *A função* $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathbb{R}_+$ *é regular se, e somente se,* $\forall A \in \mathcal{E}_n$, *vale*

$$\varphi(A) = Sup\{\ \varphi(K) \mid K \in \mathcal{E}_n, K \subseteq A, K \ compacto\}$$

$$\varphi(A) = Inf\{\ \varphi(U) \mid U \in \mathcal{E}_n, A \subseteq U, U \ aberto\}.$$

Demonstração:
Primeiramente suponhamos que φ é regular. Para todo $K \in \mathcal{E}_n$,$K \subseteq A$ temos

$$\varphi(K) \leq \varphi(A)$$

por aplicação do item **b)** do **Teorema (1.3)**, em especial para K compacto. Para $\epsilon > 0$, qualquer, existe $K \in \mathcal{E}_n, K \subseteq A$ e K compacto tal que

$$\varphi(A) \leq \varphi(K) + \epsilon$$

por ser φ regular. Portanto, pela **Proposição (B.1)** do **Apêndice B** concluímos que

$$\varphi(A) = sup\{\ \varphi(K) \mid K \in \mathcal{E}_n, K \subseteq A, K \text{ compacto } \}.$$

De forma similar, para todo $U \in \mathcal{E}_n$,$A \subset U$ temos

$$\varphi(A) \leq \varphi(U)$$

por aplicação do item **b)** do **Teorema (1.3)**, em especial para U aberto. Para $\epsilon > 0$, qualquer, existe $U \in \mathcal{E}_n, A \subseteq U$ e U aberto tal que

$$\varphi(U) \leq \varphi(A) + \epsilon$$

por ser φ regular. Portanto, pela **Proposição (B.2)** do **Apêndice B** concluímos que

$$\varphi(A) = inf\{\ \varphi(U) \mid U \in \mathcal{E}_n, A \subseteq U, U \text{ aberto } \}.$$

Agora suponhamos que para todo $A \in \mathcal{E}_n$ vale

$$\varphi(A) = sup\{\ \varphi(K) \mid K \in \mathcal{E}_n, K \subseteq A, K \text{ compacto } \}$$

e

$$\varphi(A) = inf\{\ \varphi(U) \mid U \in \mathcal{E}_n, A \subseteq U, U \text{ aberto } \}.$$

Pela **Proposição (B.1)** do **Apêndice B** obtemos que para $\epsilon > 0$, qualquer, existe

$K \in \mathcal{E}_n, K \subseteq A$ e K compacto tal que

$$\varphi(A) \leq \varphi(K) + \epsilon.$$

Pela **Proposição (B.2)** do **Apêndice B** obtemos que para $\epsilon > 0$, qualquer, existe $U \in \mathcal{E}_n, A \subseteq U$ e U aberto tal que

$$\varphi(U) - \epsilon \leq \varphi(A).$$

Portanto φ é regular.

□

Teorema 1.9. *A função de Lebesgue m é regular.*

Demonstração:
Seja $A \in \mathcal{E}_n$. Suponha, em primeiro lugar, que A é um volume do $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$A = \prod_{i=1}^{n} \{a_i, b_i\}$$

Caso 1. Suponha $a_i < b_i, \forall i = 1, ..., n$. Tomemos

$$K_j = \prod_{i=1}^{n} [a_i + \delta_j, b_i - \delta_j]$$

para algum δ_j, onde

$$2\delta_j \leq \min(b_i - a_i).$$

Então $K_j \subseteq A, K_j \in \mathcal{E}_n$ e K_j compacto. O caso $\delta_j = 0$ só pode ocorrer no caso extremo $\{a_i, b_i\} = [a_i, b_i]\ \forall i, i = 1, ..., n$. Porém,

$$\begin{aligned}
m(K_j) &= \prod_{i=1}^{n} m([a_i + \delta_j, b_i - \delta_j]) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i - 2\delta_j) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) - 2\delta_j \prod_{i=2}^{n} (b_i - a_i - 2\delta_j) \\
&= m(A) - 2\delta_j \prod_{i=2}^{n} (b_i - a_i - 2\delta_j).
\end{aligned}$$

Logo,

$$m(A) = m(K_j) + 2\delta_j \prod_{i=2}^{n} (b_i - a_i - 2\delta_j).$$

Como δ_j é arbitrário e o produtório que ele multiplica é limitado, para $\epsilon > 0$ qualquer podemos tomar δ_j tal que

$$m(A) \leq m(K_j) + \epsilon.$$

Tomemos

$$U_j = \prod_{k=1}^{n} (a_k - \delta_j, b_k + \delta_j).$$

Podemos perceber que $A \subseteq U_j$,$U_j \in \mathcal{E}_n$ e U_j aberto. Porém,

$$\begin{aligned} m(U_j) &= \prod_{k=1}^{n} m((a_k - \delta_j, b_k + \delta_j)) \\ &= \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k + 2\delta_j) \\ &= \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k) + 2\delta_j \prod_{k=2}^{n} (b_k - a_k + 2\delta_j) \\ &= m(A) + 2\delta_j \prod_{k=2}^{n} (b_k - a_k + 2\delta_j). \end{aligned}$$

Logo,

$$m(A) = m(U_j) - 2\delta_j \prod_{k=2}^{n} (b_k - a_k + 2\delta_j).$$

Como δ_j é arbitrário e o produtório que ele multiplica é limitado, para $\epsilon > 0$, qualquer podemos tomar δ_j tal que

$$m(A) \geq m(U_j) - \epsilon.$$

Caso 2. Suponha $a_i = b_i$, para algum $i = 1, ..., n$, onde $\{a_i, b_i\}$ não é fechado. Nesse caso, $A = \emptyset$, tome

$$F = \emptyset.$$

Então, $F \subseteq A, F \in \mathcal{E}_n$ e

$$m(F) = 0.$$

Dado $\epsilon > 0$, qualquer, temos que

$$m(A) = 0 < 0 + \epsilon = m(F) + \epsilon.$$

Seja, agora para

$$0 < \delta < \frac{\sqrt[n]{\epsilon}}{2}$$

onde ϵ é o mesmo que o anterior. Considere o conjunto

$$G = \prod_{i=1}^{n}(-\delta, \delta),$$

temos que $G \in \mathcal{E}_n$, $A \subseteq G$ e

$$m(G) = \prod_{i=1}^{n}(2\delta) < \prod_{i=1}^{n}\left(2\frac{\sqrt[n]{\epsilon}}{2}\right) = \prod_{i=1}^{n}(\sqrt[n]{\epsilon}) = \epsilon.$$

Logo

$$m(A) = 0 < m(G) < \epsilon.$$

E assim para $\epsilon > 0$, qualquer, temos que

$$m(G) - \epsilon < m(A) < m(F) + \epsilon.$$

Portanto, m é regular também nesse caso.

Caso 3. Suponha que para todo intervalo onde ocorra $a_i = b_i$, com $i = 1, ..., n$ tenhamos $\{a_i, b_i\}$ fechado. Então, A não é vazio. $\{a_i, b_i\} = \{a_i\}$ para todos os intervalos onde $a_i = b_i$, tome

$$K = \prod_{i=1}^{n}[a_i + \delta_i, b_i - \delta_i].$$

Com,

$$2\delta_i = 2\delta < \min(b_i - a_i)$$

se $a_i < b_i$ e

$$\delta_i = 0$$

se $a_i = b_i$. Então, $K \subseteq A, K \in \mathcal{E}_n$ e

$$m(K) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i - 2\delta_i).$$

No limite $\delta \to 0$, obtemos

$$m(A) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Seja, agora,

$$U = \prod_{i=1}^{n} (a_i - \delta, b_i + \delta).$$

Temos que $U \in \mathcal{E}_n$ e $A \subseteq U$ e

$$m(U) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i + 2\delta).$$

No limite $\delta \to 0$, resulta

$$m(A) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Portanto, nesse caso, m é regular.

Caso 4. Consideramos, agora, o caso em que A é a reunião finita disjunta de volumes do $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$A = \bigcup_{j=1}^{n} I_v^j.$$

Dado $\epsilon \geq 0$, qualquer, escolha para cada $j = 1, ..., n$ um compacto $K_v^j \subseteq I_v^j$ satisfazendo

$$m(K_k^j) \geq m(I_k^j) - \frac{\epsilon}{n}.$$

A união

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} K_v^j$$

é um conjunto compacto, $K \in \mathcal{E}_n$, e

$$m(K) = \sum_{j=1}^{n} m(K_v^j) \geq \sum_{j=1}^{n} m(I_v^j) - \epsilon = m(A) - \epsilon.$$

Portanto,

$$m(A) = Sup\{\ m(K) \mid K \in \mathcal{E}_n, K \subseteq A, K \text{ compacto}\}.$$

Dado $\epsilon \geq 0$, qualquer, tome para cada $j = 1, ..., n$ um aberto elementar U_v^j que contém I_v^j e tal que

$$m(U_v^j) \geq m(I_v^j) + \frac{\epsilon}{n}.$$

A união

$$U = \bigcup_{j=1}^{n} U_v^j$$

é um aberto, $U \in \mathcal{E}_n$, e

$$m(U) = m\left(\bigcup_{j=1}^{n} U_v^j\right) = \sum_{j=1}^{n} m(U_v^j) < \sum_{j=1}^{n} m(I_j) + \epsilon = m(A) + \epsilon.$$

Portanto,

$$m(A) = Inf\{\ m(U) \mid U \in \mathcal{E}_n, U \subseteq A, U \text{ aberto}\}.$$

$\square$

Definição 1.10. *Uma cobertura enumerável por abertos de um conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma coleção $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ tais que*

$$E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i. \tag{1.18}$$

Definição 1.11. *Seja μ uma função de conjunto finitamente aditiva, regular, não negativa*

$$\mu : \mathcal{E}_n \to \mathbb{R}_+. \tag{1.19}$$

Seja $\mathcal{C}$ a família de todas as coberturas enumeráveis de um conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ por conjuntos elementares abertos e $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das partes do $\mathbb{R}^n$. Defina

$$\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

a função dada por

$$\mu^*(E) = \inf_{\{A_n\}\in\ \mathcal{C}} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n). \tag{1.20}$$

A função μ^* é chamada de medida exterior de E relativa a μ.

Teorema 1.10. *Seja $\mu : \mathcal{E}_n \to \mathbb{R}_+$ finitamente aditiva e regular. Então:*
a) $\mu^*(A) = \mu(A), \forall A \in \mathcal{E}_n$
b) *Se $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma família de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, então:*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) \tag{1.21}$$

A desigualdade (1.21) é chamada de "propriedade de subaditividade".

Demonstração:

a) Seja $A \in \mathcal{E}_n$ e $\epsilon > 0$ qualquer. Como μ é regular, então, existe $G \in \mathcal{E}_n$, conjunto elementar aberto, tal que $A \subseteq G$ e

$$\mu(A) \geq \mu(G) - \epsilon$$

ou ainda,

$$\mu(G) \leq \mu(A) + \epsilon. \tag{1.22}$$

Como $A \subseteq G$, então:

$$\mu^*(A) \leq \mu(G),$$

pois G é uma cobertura de $\mathcal{A}$ e μ^* é tomado sobre o ínfimo das coberturas. De **(1.22)**,

$$\mu^*(A) \leq \mu(G) \leq \mu(A) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer, temos que:

$$\mu^*(A) \leq \mu(A). \tag{1.23}$$

Pela definição de μ^* existe uma cobertura $\{A_n\}$ de A tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon,$$

pois μ^* é um ínfimo. Como μ é regular, então, existe F compacto, $F \in \mathcal{E}_n$, tal que $F \subseteq A$ e

$$\mu(A) \leq \mu(F) + \epsilon. \tag{1.24}$$

Além disso,

$$F \subseteq A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Pelo **Teorema de Borel-Lebesgue**[4] se F é compacto, então, toda cobertura aberta enumerável de F admite uma subcobertura finita. Suponha sem perda de generalidade, que $A_1, A_2, ..., A_N$ formam esta subcobertura finita para algum N. Portanto,

$$F \subseteq A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_N$$

para algum N. Então, para todo ϵ>0:

$$\mu(A) \leq \mu(F) + \epsilon \leq \mu(A_1 \cup ... \cup A_N) + \epsilon \leq \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j) + \epsilon.$$

Para todo ϵ'>0 podemos tomar $\{A_j\}_1^N$ tal que:

$$\sum_{j=1}^{N} \mu(A_j) \leq \mu^*(A) + \epsilon'.$$

Como ϵ' é qualquer, seja $\epsilon' = \epsilon$. Logo, para todo ϵ>0, obtemos

$$\mu(A) \leq \mu^*(A) + 2\epsilon.$$

Portanto,

$$\mu(A) \leq \mu^*(A). \tag{1.25}$$

Pelas equações **(1.23)** e **(1.25)** obtemos:

$$\mu(A) = \mu^*(A).$$

b)Suponhamos

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{1.26}$$

Suponhamos $\mu^*(E_n) < \infty$, para todo n. Dado $\epsilon' > 0$, existe $\{A_{nk}\}$ cobertura de E_n por abertos elementares tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(E_n) + \epsilon'. \tag{1.27}$$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Tome

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{2^n}. \tag{1.28}$$

Por consequência da definição de $\{A_{nk}\}$,

$$\mu^*(E) = \inf_{\{A_n\} \in \ \mathcal{C}} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Onde $\{A_n\}$ é cobertura de E,

$$E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i.$$

Mas

$$\left\{\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{nk}\right\}$$

é uma cobertura de E. Logo

$$\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{nk}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_{nk}).$$

Aplicando na desigualdade acima a relação **(1.28)** obtemos

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mu^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right)$$

Então,

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right)$$

de modo que

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + 2\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer, podemos concluir que:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

O caso $\mu(E_n) = +\infty$ para algum n é trivial. $\square$

Observação. O item **a)** implica que μ^* é uma extensão de μ, definida em $\mathcal{E}_n$, para a família de todos os subconjuntos do $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.13 No caso $\mu = m$, a função de Lebesgue, e $E \in \mathcal{E}_n$,

$$m^*(E) = m(E) = \sum_{i=1}^{N} m(I_v^i)$$

onde E é a união disjunta finita dos volumes $I_v^i \subset \mathbb{R}^n$. Em particular, se $E = \{a, b\} \subset \mathbb{R}$,

$$m^*(E) = b - a.$$

Exemplo 1.14 Seja $A = \{a_n, n = 1, 2, ...\} \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto enumerável. Dado $\epsilon > 0$, qualquer, seja E_n um volume contendo a_n e tal que

$$m(E_n) = \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Então,

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

e

$$m^*(A) = \inf_{\{A_n\} \in \mathcal{C}} \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer e $m^* \geq 0$, segue que

$$m^*(A) = 0.$$

Portanto, a medida exterior de Lebesgue de um subconjunto enumerável qualquer do $\mathbb{R}^n$ é nula.

Teorema 1.11. *Sejam $A,\ B \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos quaisquer. Então,*
a) $\mu^*(\emptyset) = 0$.
b) *Se $A \subseteq B$, então, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*
c) $\mu^*(A) \geq 0$.

Demonstração:
a) Usando o fato de que $\emptyset \subseteq \mathcal{E}_n$, pelo item **a)** do **Teorema (1.10)** obtemos:

$$\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset).$$

e, pela **Definição (1.11)**, $\mu(\emptyset) < +\infty$. Assim, pelo item **a)** do **Teorema (1.3)**,

$$\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0.$$

b) Seja $\{B_i\}$ uma cobertura por abertos de $B \in \mathbb{R}^n$:

$$B \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i.$$

Para $A \subseteq B$ temos, então, que

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i.$$

Assim, $\{B_i\}$ é também cobertura por abertos de $A \subseteq \mathbb{R}^n$, de modo que:

$$\mu^*(A) = \inf_{\{A_n\}} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \leq \inf_{\{B_n\}} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) = \mu^*(B).$$

c) Usando o fato de que $\emptyset \subseteq A$ e o item **b)** obtemos:

$$\mu^*(\emptyset) \leq \mu^*(A).$$

Usando a equação anterior e o item **a)** obtemos:

$$0 \leq \mu^*(A).$$

□

Definição 1.12. *Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, defina:*

$$S(A,B) := (A - B) \cup (B - A). \tag{1.29}$$

O conjunto $S(A,B)$ tem as seguintes propriedades:

Teorema 1.12. *Sejam $A, B, C, A_1, A_2, A_3, A_4$ conjuntos quaisquer do $\mathbb{R}^n$. Então,*
a) *$S(A,B) = S(B,A)$ e $S(A,A) = \emptyset$.*
b) *$S(A,B) \subseteq S(A,C) \cup S(C,B)$.*
c) *$S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \subseteq S(A_1,B_1) \cup S(A_2,B_2)$.*
d) *$S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \subseteq S(A_1,B_1) \cup S(A_2,B_2)$.*
e) *$S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \subseteq S(A_1,B_1) \cup S(A_2,B_2)$.*

Demonstração:
a) Temos que

$$S(A,B) = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = S(B,A)$$

$$S(A,A) = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset.$$

b) Pela **Definição (1.12)**, temos

$$S(A,B) = (A - B) \cup (B - A)$$

$$S(A,C) = (A - C) \cup (C - A)$$

$$S(C,B) = (C - B) \cup (B - C).$$

Tomemos $x \in A$ tal que $x \notin B$, isto é, tome $x \in A - B$). Nesse caso, $x \in S(A,B)$. Se $x \in C$, então, $x \in C - B$. Se $x \notin C$, então, $x \in A - C$ e $x \in S(A,C)$. Assim,

$$x \in S(C,B) \cup S(A,C).$$

Tomemos $x \in B$ tal que $x \notin A$, isto é, tome $x \in B - A$. Nesse caso, $x \in S(A,B)$. Se $x \in C$, então, $x \in C - A$. Se $x \notin C$, então, $x \in B - C$.Assim,

$$x \in S(A,C) \cup S(C,B).$$

c) Pelos resultados **(P.3),(P.4)** e **(P.5)** do **Apêndice A**, temos que

$$(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2) = (A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2)^C,$$

$$(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2)^C = (A_1 \cup A_2) \cap (B_1^C \cap B_2^C)$$

e

$$\begin{aligned}(A_1 \cup A_2) \cap (B_1^C \cap B_2^C) &= (A_1 \cap (B_1^C \cap B_2^C)) \cap (A_2 \cap (B_1^C \cap B_2^C)) \\ &= [(A_1 \cap B_1^C) \cap (A_1 \cap B_2^C)] \cup [(A_2 \cap B_1^C) \cap (A_2 \cap B_2^C)].\end{aligned}$$

Aplicando **(P.3)** a este último resultado, segue-se:

$$[(A_1 \cap B_1^C) \cap (A_1 \cap B_2^C)] \cup [(A_2 \cap B_1^C) \cap (A_2 \cap B_2^C)] = [(A_1 - B_1) \cap (A_1 - B_2)] \cup [(A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2)].$$

Em seguida, usamos as inclusões

$$[(A_1 - B_1) \cap (A_1 - B_2)] \subseteq (A_1 - B_1)$$

$$[(A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2)] \subseteq (A_2 - B_2)$$

que permitem obter a seguinte relação

$$[(A_1 - B_1) \cap (A_1 - B_2)] \cup [(A_2 - B_1) \cup (A_2 - B_2)] \subseteq (A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2).$$

Como consequência das equações anteriores,

$$K_1 := (A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2) \tag{1.30}$$

e, de forma similar,

$$K_2 := (B_1 \cup B_2) - (A_1 \cup A_2) \subseteq (B_1 - A_1) \cup (B_2 - A_2). \tag{1.31}$$

Pelas equações **(1.30)** e **(1.31)** concluímos, então , que

$$k_1 \cup K_2 \subseteq (A_1 - B_1) \cup (B_1 - A_1) \cup (A_2 - B_2) \cup (B_2 - A_2).$$

Usando o fato de que:

$$S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) = [(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2)] \cup [(B_1 \cup B_2) - (A_1 \cup A_2)]$$

e

$$S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2) = (A_1 - B_1) \cup (B_1 - A_1) \cup (A_2 - B_2) \cup (B_2 - A_2)$$

obtemos o resultado desejado.

d) Pelos resultados **(P.8)** e **(P.9)** do **Apêndice A**, temos que

$$(A_1 \cap A_2) - (B_1 \cap B_2) = (B_1 \cap B_2)^C - (A_1 \cap A_2)^C \tag{1.32}$$

e

$$(B_1 \cap B_2)^C - (A_1 \cap A_2)^C = (B_1^C \cup B_2^C) - (A_1^C \cup A_2^C). \tag{1.33}$$

Pelas equações **(1.32)** e **(1.33)** obtemos:

$$(A_1 \cap A_2) - (B_1 \cap B_2) = (B_1^C \cup B_2^C) - (A_1^C \cup A_2^C) \tag{1.34}$$

e

$$(B_1 \cap B_2) - (A_1 \cap A_2) = (A_1^C \cup A_2^C) - (B_1^C \cup B_2^C). \tag{1.35}$$

Pelas equações **(1.34)** e **(1.35)** obtemos:

$$S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) = S(A_1^C \cup A_2^C, B_1^C \cup B_2^C).$$

A equação anterior e o item **c)** implicam

$$S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \subseteq S(A_1^C, B_1^C) \cup S(A_2^C \cup B_2^C).$$

Aplicando novamente o resultado **(P.8)** do **Apêndice A**, obtemos

$$S(A_1^C, B_1^C) = (A_1^C - B_1^C) \cup (B_1^C - A_1^C) = (B_1 - A_1) \cup (A_1 - B_1) = S(B_1, A_1)$$

$$S(A_2^C, B_2^C) = (A_2^C - B_2^C) \cup (B_2^C - A_2^C) = (B_2 - A_2) \cup (A_2 - B_2) = S(B_2, A_2).$$

Usando o item **a)** segue a igualdade na equação abaixo:

$$S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \subseteq S(B_1, A_1) \cup S(B_2, A_2) = S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2).$$

e) Por definição, temos

$$\begin{aligned} S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) &= [(A_1 - A_2) - (B_1 - B_2)] \cup [(B_1 - B_2) - (A_1 - A_2)] \\ &= [(A_1 \cap A_2^C) - (B_1 \cap B_2^C)] \cup [(B_1 \cap B_2^C) - (A_1 \cap A_2^C)] \\ &= [(A_1 \cap A_2^C) \cap (B_1 \cap B_2^C)^C] \cup [(B_1 \cap B_2^C) \cap (A_1 \cap A_2^C)^C]. \end{aligned}$$

Aplicando **(P.9)** do **Apêndice A** permite escrever que

$$\begin{aligned} S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) &= [(A_1 \cap A_2^C) \cap (B_1 \cap B_2^C)^C] \cup [(B_1 \cap B_2^C) \cap (A_1 \cap A_2^C)^C] \\ &= [(A_1 \cap A_2^C) \cap (B_1^C \cup B_2)] \cup [(B_1 \cap B_2^C) \cap (A_1^C \cup A_2)]. \quad (1.36) \end{aligned}$$

A propriedade (**P.5**) do **Apêndice A** permite escrever que

$$(A_1 \cap A_2^C) \cap (B_1^C \cup B_2) = [(A_1 \cap A_2^C) \cap B_1^C] \cup [(A_1 \cap A_2^C) \cap B_2].$$

Agora vamos mostrar o seguinte:

$$(A_1 \cap A_2^C) \cap (B_1^C \cup B_2) \subseteq (A_1 - B_1) \cup (B_2 - A_2). \quad (1.37)$$

De fato, se

$$x \in (A_1 \cap A_2^C) \cap B_1^C$$

então

$$x \in (A_1 \cap A_2^C) \text{ e } x \in B_1^C$$

ou seja,

$$x \in A_1 \text{ e } x \notin B_1$$

isto é,

$$x \in (A_1 - B_1).$$

Por outro lado, se

$$x \in (A_1 \cap A_2^C) \cap B_2$$

então

$$x \in (A_1 \cap A_2^C) \text{ e } x \in B_2$$

ou seja,

$$x \in A_2^C \text{ e } x \in B_2$$

isto é,

$$x \in (B_2 - A_2).$$

Pela propriedade (**P.5**) do **Apêndice A**, segue que

$$(B_1 \cap B_2^C) \cap (A_1^C \cup A_2) = [(B_1 \cap B_2^C) \cap A_1^C] \cup [(B_1 \cap B_2^C) \cap A_2].$$

De forma similar à prova de **(1.37)** obtemos que

$$(B_1 \cap B_2^C) \cap (A_1^C \cup A_2) \subseteq (B_1 - A_1) \cup (A_2 - B_2). \tag{1.38}$$

Usando **(1.37)** e **(1.38)** concluímos a demonstração:

$$\begin{aligned} S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) &\subseteq [(A_1 - B_1) \cup (B_2 - A_2)] \cup [(B_1 - A_1) \cup (A_2 - B_2)] \\ &= [(A_1 - B_1) \cup (B_1 - A_1)] \cup [(A_2 - B_2) \cup (B_2 - A_2)] \\ &= S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2). \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.15 Sejam $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ os conjuntos dos números racionais e irracionais, respectivamente, contidos no intervalo $E = [0, 1]$. O conjunto E é a união disjunta

$$E = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Mas

$$m^*(E) = m(E) = 1.$$

Além disso, usando o item **b)** do **Teorema (1.10)** e o exemplo anterior

$$1 = m^*(E) \leq m^*(\mathbb{Q}) + m^*(\mathbb{I}) = m^*(\mathbb{I}).$$

O item **b)** foi aplicado na relação acima definindo $E_1 = \mathbb{Q}$, $E_2 = \mathbb{I}$ e $E_j = \emptyset$ para todo $j \geq 3$. Como $\mathbb{I} \subset E$, aplicando o item **b)** do **Teorema (1.11)**

$$m^*(\mathbb{I}) \leq m^*(E) = 1$$

Segue, então, que

$$m^*(\mathbb{I}) = 1.$$

Definição 1.13. *Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, defina*

$$d(A,B) := \mu^*(S(A,B)). \tag{1.39}$$

Teorema 1.13. *Sejam $A, B, C, A_1, A_2, B_1, B_2$ conjuntos de $\mathcal{E}_n$. Então,*
a) $d(A,B) = d(B,A)$ *e* $d(A,A) = 0$.
b) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.
c) $d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$.
d) $d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$.
e) $d(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$.
f) $d(A,B) \geq 0$.
g) $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq d(A,B)$.

Demonstração:
a) Pelo item **a)** do **Teorema (1.12)** na segunda igualdade:

$$d(A,B) = \mu^*(S(A,B)) = \mu^*(S(B,A)) = d(B,A).$$

Usando item **a)** do **Teorema (1.12)** e o item **a)** do **Teorema (1.11)** na terceira igualdade, resulta

$$d(A,A) = \mu^*(S(A,A)) = \mu^*(\emptyset) = 0.$$

b) Pelo item **b)** do **Teorema (1.12)**:

$$S(A,B) \subseteq S(A,C) \cup S(C,B).$$

Usando o item **b)** do **Teorema (1.11)**:

$$\mu^*(S(A,B)) \leq \mu^*(S(A,C) \cup S(C,B)). \tag{1.40}$$

Seja

$$E = S(A,C) \cup S(C,B)$$

e defina a sequência de conjuntos $\{E_n\}$ como segue:

$$E_1 = S(A,C),$$

$$E_2 = S(C,B)$$

e $E_i = \emptyset$, para $i \geq 3$. Podemos expressar E como

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_n.$$

Usando o item **b)** do **Teorema (1.10)**:

$$\mu^*(S(A,C) \cup S(C,B)) \leq \mu^*(S(A,C)) + \mu^*(S(C,B)) + \sum_{j=3}^{\infty} \mu^*(\emptyset).$$

Usando o item **a)** do **Teorema (1.11)**, $\mu^*(\emptyset) = 0$ e, portanto,

$$\mu^*(S(A,C) \cup S(C,B)) \leq \mu^*(S(A,C)) + \mu^*(S(C,B)). \tag{1.41}$$

Pelas equações **(1.40)**, **(1.41)** e usando o item **a)** do **Teorema (1.12)** obtemos:

$$\mu^*(S(A,B)) \leq \mu^*(S(A,C)) + \mu^*(S(B,C)).$$

Logo, pela equação **(1.39)**, o resultado segue-se

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(B,C).$$

c)Pelo item **c)** do **Teorema (1.12)**

$$S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \subseteq S(A_1, B_1) \cup S(A_2 \cup B_2).$$

Usando o item **b)** do **Teorema (1.11)**:

$$\mu^*(S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)) \leq \mu^*(S(A_1, B_1) \cup S(A_2 \cup B_2)). \tag{1.42}$$

Seja

$$E = S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2)$$

e definimos os conjuntos

$$E_1 = S(A_1, B_1)$$

$$E_2 = S(A_2, B_2)$$

e $E_i = \emptyset$, se $i \geq 3$. Então,

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_n.$$

Usando o item **a)** do **Teorema (1.10)**:

$$\mu^*(S(A_1,B_1)\cup S(A_2,B_2)) \leq \mu^*(S(A_1,B_1)) + \mu^*(S(A_2,B_2)) + \sum_{j=3}^{\infty}\mu^*(\emptyset).$$

Usando o item **a)** do **Teorema (1.11)**,

$$\mu^*(S(A_1,B_1)\cup S(A_2,B_2)) \leq \mu^*(S(A_1,B_1)) + \mu^*(S(A_2,B_2)). \tag{1.43}$$

Usando as equações **(1.42)**, **(1.43)** obtemos,

$$\mu^*(S(A_1\cup A_2, B_1\cup B_2)) \leq \mu^*(S(A_1,B_1)) + \mu^*(S(A_2,B_2))$$

e, pela equação **(1.39)**, o resultado segue

$$d(S(A_1\cup A_2, B_1\cup B_2)) \leq d(S(A_1,B_1)) + d(S(A_2,B_2)).$$

d) Por definição,

$$d(A_1\cap A_2, B_1\cap B_2) = \mu^*(S(A_1\cap A_2, B_1\cap B_2)).$$

Pelo item **d)** do **Teorema (1.12)**:

$$S(A_1\cap A_2, B_1\cap B_2) \subseteq S(A_1,B_1)\cup S(A_2,B_2)$$

e, pelo item **b)** do **Teorema (1.11)**

$$\mu^*(S(A_1\cap A_2, B_1\cap B_2)) \leq \mu^*(S(A_1,B_1)\cup S(A_2,B_2)).$$

Usando esta desigualdade, a desigualdade **(1.43)** e o item **b)** do **Teorema (1.11)**

$$\mu^*(S(A_1,B_1)\cup S(A_2,B_2)) \leq \mu^*(S(A_1,B_1)) + \mu^*(S(A_2,B_2)).$$

O resultado segue usando-se a **(1.39)**:

$$d(A_1\cap A_2, B_1\cap B_2) \leq d(A_1,B_1)) + d(A_2,B_2).$$

e) Usando o item **e)** do **Teorema (1.12)**,

$$S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \subseteq S(A_1,B_1)\cup S(A_2,B_2).$$

Usando o item **b)** do **Teorema (1.11)**

$$\mu^*(S(A_1 - A_2, B_1 - B_2)) \leq \mu^*((S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2)).$$

Usando esta desigualdade , a desigualdade **(1.43)** e o item **b)** do **Teorema (1.11)**

$$\mu^*(S(A_1 - A_2, B_1 - B_2)) \leq \mu^*(S(A_1, B_1)) + \mu^*(S(A_2, B_2)).$$

Da relação **(1.39)**, o resultado segue:

$$d(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2).$$

f) Pelo item **b)** do **Teorema (1.13)** segue que

$$d(A, A) \leq d(A, B) + d(B, A).$$

Como $d(A, A) = 0$, pelo item **a)**,

$$0 = d(A, A) \leq d(A, B) + d(B, A) = 2d(A, B).$$

Logo,

$$d(A, B) \geq 0.$$

g)Pelo item **b)** do presente **Teorema (1.13)**,

$$d(A, \emptyset) \leq d(A, B) + d(B, \emptyset). \tag{1.44}$$

e

$$d(B, \emptyset) \leq d(B, A) + d(A, \emptyset). \tag{1.45}$$

Usando a relação **(1.39)** as **Definições (1.13)**, **(1.12)** e desigualdades **(1.44)** e **(1.45)**, resulta que

$$d(A, \emptyset) = \mu^*(S(A, \emptyset)) = \mu^*((A - \emptyset) \cup (\emptyset - A)) = \mu^*(A) \tag{1.46}$$

e

$$d(B, \emptyset) = \mu^*(S(B, \emptyset)) = \mu^*((B - \emptyset) \cup (\emptyset - B)) = \mu^*(B). \tag{1.47}$$

Usando as desigualdades **(1.44)** , **(1.46)** e **(1.47)** obtemos

$$\mu^*(A) \leq d(A, B) + \mu^*(B)$$

ou seja,

$$d(A,B) \geq \mu^*(A) - \mu^*(B). \tag{1.48}$$

A desigualdade **(1.45)**, o item **a)** do presente teorema e as desigualdades **(1.46)** e **(1.47)** implicam em

$$\mu^*(B) \leq d(A,B) + \mu^*(A)$$

donde

$$d(A,B) \geq -(\mu^*(A) - \mu^*(B)). \tag{1.49}$$

Os resultados **(1.48)** e **(1.49)** podem ser expressos na forma final

$$d(A,B) \geq |\mu^*(A) - \mu^*(B)|.$$

□

Definição 1.14. *Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado finitamente μ-mensurável se existir uma sequência$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos elementares tais que*

$$\lim_{n\to\infty} d(A, A_n) = 0 \tag{1.50}$$

e, nesse caso, indica-se $A_n \to A$. Indica-se por $\mathfrak{M}_F(\mu)$ a família dos conjuntos finitamente μ-mensuráveis do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.15. *Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado μ-mensurável se A é a união enumerável de conjuntos de $\mathfrak{M}_F(\mu)$. Indica-se por $\mathfrak{M}(\mu)$ a família dos conjuntos μ-mensuráveis do $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 1.14.
a) *$\mathcal{E}_n \subseteq \mathfrak{M}_F(\mu)$.*
b) *$\mathfrak{M}_F(\mu) \subseteq \mathfrak{M}(\mu)$.*
c) *Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mu^*(E) = 0$, então $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$.*

Demonstração:
a) Seja $A \in \mathcal{E}_n$, qualquer. Forme a sequência A_n de conjuntos elementares na qual $A_n = A$, para todo n. Temos que

$$\lim_{n\to\infty} d(A, A_n) = 0.$$

Logo,

$$A \in \mathfrak{M}_F(\mu), \forall A \in \mathcal{E}_n.$$

b) Todo $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ pode ser expresso como

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

onde $A_n = A$. Logo,

$$A \in \mathfrak{M}(\mu), \forall A \in \mathfrak{M}_F(\mu).$$

c) Seja $\{A_n\}$ a sequência de conjuntos elementares $A_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} d(E, A_n) &= \mu^*(S(E, \emptyset)) \\ &= \mu^*((E - \emptyset) \cup (\emptyset - E)) \\ &= \mu^*(E) = 0. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} d(E, A_n) = 0$$

e $E \in \mathfrak{M}_F(\mu)$.

□

Lema 1.1. *Sejam $A, B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, e as sequências $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ em $\mathcal{E}_n$ tal que $A_n \to A$ e $B_n \to B$. Então,*
a) *$A_n \cup B_n \to A \cup B$.*
b) *$A_n \cap B_n \to A \cap B$.*
c) *$A_n - B_n \to A - B$.*
d) *$\mu^*(A_n) \to \mu^*(A)$.*

Demonstração:
a) Usando o item **c)** do **Teorema (1.13)**:

$$d(A \cup B, A_n \cup B_n) \leq d(A, A_n) + d(B, B_n).$$

Tomando o limite em ambos os membros da desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} d(A \cup B, A_n \cup B_n) &\leq \lim_{n\to\infty} (d(A, A_n) + d(B, B_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(A, A_n) + \lim_{n\to\infty} d(B, B_n) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Pois $A_n \to A$ e $B_n \to B$. Pelo item **c)** do **Teorema (1.13)**, segue o resultado

$$\lim_{n\to\infty} d(A \cup B, A_n \cup B_n) = 0.$$

b) Pelo item **d)** do **Teorema (1.13)**:

$$d(A \cap B, A_n \cap B_n) \leq d(A, A_n) + d(B, B_n).$$

Tomando o limite em ambos os membros da desigualdade acima, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(A \cap B, A_n \cap B_n) &\leq \lim_{n\to\infty} (d(A, A_n) + d(B, B_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(A, A_n) + \lim_{n\to\infty} d(B, B_n) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

O item **d)** do **Teorema (1.13)**, implica, então, no resultado

$$\lim_{n\to\infty} d(A \cap B, A_n \cap B_n) = 0.$$

c) Pelo item **e)** do **Teorema (1.13)**:

$$d(A - B, A_n - B_n) \leq d(A, A_n) + d(B, B_n)$$

Tomando o limite em ambos os membros da desigualdade acima, resulta que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(A - B, A_n - B_n) &\leq \lim_{n\to\infty} (d(A, A_n) + d(B, B_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(A, A_n) + \lim_{n\to\infty} d(B, B_n) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $A_n \to A$ e $B_n \to B$, por hipótese. O item **e)** do **Teorema (1.13)**, implica no resultado

$$\lim_{n\to\infty} d(A - B, A_n - B_n) = 0.$$

d) Pelo item **g)** do **Teorema (1.13)** temos que

$$d(A, A_n) \geq |\mu^*(A) - \mu^*(A_n)|.$$

Aplicando, o limite em ambos os membros da desigualdade, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} d(A, A_n) \geq \lim_{n\to\infty} |\mu^*(A) - \mu^*(A_n)| \geq 0.$$

Como, por hipótese, $A_n \to A$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} |\mu^*(A) - \mu^*(A_n)| = 0,$$

o que implica no resultado desejado. $\square$

Corolário 1.1. *A família dos conjuntos finitamente μ-mensuráveis no $\mathbb{R}^n$ é um anel.*

Demonstração:
Os items **a)** e **c)** do lema anterior implicam que $\mathfrak{M}_F(\mu)$ é anel. $\square$

Teorema 1.15. *A família $\mathfrak{M}(\mu)$ dos conjuntos μ-mensuráveis do $\mathbb{R}^n$ é um σ-anel e a restrição de μ^* a $\mathfrak{M}(\mu)$ é σ-aditiva.*

Demonstração:
Sejam $A, B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Então existem sequências $\{A_i\}$, $\{B_i\}$ tais que $A_i, B_i \in \mathcal{E}_n$, $A_i \to A$ e $B_i \to B$. Pelo item **c)** do **Teorema (1.3)**,

$$\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n).$$

Mas, pelo item **a)** do **Teorema (1.10)**, $\mu^*(A_n) = \mu(A_n)$ e $\mu^*(B_n) = \mu(B_n)$, donde

$$\mu^*(A_n) + \mu^*(B_n) = \mu^*(A_n \cup B_n) + \mu^*(A_n \cap B_n). \tag{1.52}$$

Tomando o limite de n para o infinito na relação **(1.52)** e usando os items **a), b)** e **d)** do lema anterior, resulta

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B).$$

Se $A \cap B = \emptyset$, obtemos

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B).$$

Pois $\mu^*(\emptyset) = 0$. Logo, μ^* é aditiva em $\mathfrak{M}_F(\mu)$. Agora considere $A \in \mathfrak{M}(\mu)$. Podemos, então, expressar A como uma união disjunta de conjuntos $A'_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'.$$

Defina os conjuntos A_n como segue:

$$A_1 = A'_1 \tag{1.53}$$

$$A_n = A'_n - (A'_1 \cup ... \cup A'_{n-1}), n = 2, 3, ... \tag{1.54}$$

Os conjuntos A_n são dois a dois disjuntos. Vamos provar esta afirmação. Fixado $k, k \geq 1$, para todo $m \geq 1$,

$$A_k \cap A_{k+m} = \emptyset.$$

Suponha que não. Então, existe $x \in A_k \cap A_{k+m}$, e, portanto, $x \in A_k$ e $x \in A_{k+m}$. Pela relação **(1.54)** isto implica em $x \in A'_k$ e, como $x \in A_{k+m}$,

$$x \notin \bigcup_{n=1}^{k+m-1} A'_n = \left(\bigcup_{n=1,\ n\neq k}^{k+m-1} A'_n \right) \cup A'_k.$$

Deste último resultado obtemos que $x \notin {A_k}'$. Assim concluímos $x \in {A_k}'$ e $x \notin {A_k}'$. Um absurdo, portanto, $A_k \cap A_{k+m} = \emptyset$.

Vamos mostrar que definindo os conjuntos A_n com as relações **(1.53)** e **(1.54)** obtemos:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1.55}$$

Suponha, como hipótese de indução, que

$$\bigcup_{n=1}^{k} A_n = \bigcup_{n=1}^{k} A'_k \tag{1.56}$$

para algum k, $k \geq 1$. Para $k+1$, usando a hipótese de indução na segunda igualdade, notando que para conjuntos quaisquer X e Y, vale $(X \cap Y) \cup (X - Y) = X$ e usando o resultado (**P.6**) do **Apêndice A** na quarta igualdade,

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n=1}^{k+1} A_n &= \left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n \right) \cup A_{k+1} \\
&= \left(\bigcup_{n=1}^{k} {A_n}' \right) \cup A_{k+1} \\
&= \left(\bigcup_{n=1}^{k} {A_n}' \right) \cup \left(A'_{k+1} - \left(\bigcup_{n=1}^{k} {A_n}' \right) \right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{k+1} {A_n}'.
\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\bigcup_{n=1}^{k} A_n = \bigcup_{n=1}^{k} A'_n \tag{1.57}$$

para todo $k \geq 1$. Este último resultado implica em **(1.56)**. Portanto, obtemos a representação de A como uma união de uma coleção disjunta de conjuntos de $\mathfrak{M}_F(\mu)$.

Pelo item **b)** do **Teorema (1.10)**

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{1.58}$$

Porém, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \subseteq A$, pois

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Pela aditividade de μ^* em $\mathfrak{M}_F(\mu)$ obtemos que, para todo m,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + ... + \mu^*(A_m). \tag{1.59}$$

Pelas equações **(1.58)** e **(1.59)** obtemos que, para todo m,

$$\sum_{n=1}^{m} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Fazendo m tender ao infinito e usando o teorema do confronto,

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{1.60}$$

Suponha agora $\mu^*(A) < \infty$. Defina $B_n = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. Temos:

$$d(A, B_n) = \mu^*(S(A, B_n)) = \mu^*((A - B_n) \cup (B_n - A))$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = B_n \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i \right).$$

Pelas duas equações anteriores e usando a equação **(1.60)**,

$$d(A, B_n) = \mu^* \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Fazendo n tender ao infinito,

$$\lim_{n \to \infty} d(A, B_n) = 0.$$

De fato, pois

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) = A.$$

Portanto, $B_n \to A$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} d(A, B_n) = 0.$$

Como $B_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ implica que $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Suponhamos $A \notin \mathfrak{M}_F(\mu)$. Então algum elemento de A não está em $\mathfrak{M}_F(\mu)$, mas este elemento está em pelo menos um A_i que está em $\mathfrak{M}_F(\mu)$. Absurdo, logo devemos ter $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, pelo fato de μ^* ser σ-aditiva em $\mathfrak{M}(\mu)$. De fato, pois se

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

onde $\{A_n\}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos de $\mathfrak{M}(\mu)$,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A'_{n,\,k} = \bigcup_{n,\,k}^{\infty} A'_{n,\,k}$$

$\mathfrak{M}(\mu)$ é σ-anel. Se $A_n \in \mathfrak{M}(\mu)$, $n = 1, ...$ então $\cup A_n \in \mathfrak{M}(\mu)$.
Suponhamos $A, B \in \mathfrak{M}(\mu)$, $A = \cup A_n$ e $B = \cup B_n$ com $A_n, B_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Como

$$A_n \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_n \cap B_i),$$

logo $A_n \cap B \in \mathfrak{M}(\mu)$. Porém,

$$\mu^*(A_n \cap B) \leq \mu^*(A_n) < \infty,$$

então $A_n \cap B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. Como consequência do resultado **P.7** do **Apêndice A** obtemos

$$A_n - B = A_n - (A_n \cap B),$$

aplicando o**Corolário (1.1)** na identidade acima concluímos que $A_n - B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, portanto $A_n - B \in \mathfrak{M}(\mu)$. Agora consideremos $A - B$,

$$A - B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - B),$$

logo $A - B \in \mathfrak{M}(\mu)$.

$\square$

Definição 1.16. *De agora em diante denotaremos por μ a medida exterior μ^* restrita ao σ-anel $\mathfrak{M}(\mu)$.*

Definição 1.17. *Seja m a função de conjunto de Lebesgue. A função medida exterior m^* definida em $\mathfrak{M}(m)$ do $\mathbb{R}^n$ é chamada de medida de Lebesgue.*

O seguinte exemplo, conhecido como exemplo de Vitali[2], mostra que a medida de Lebesgue não pode ser definida para qualquer subconjunto do $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.16 Definimos em $\mathbb{R}$ a relação de equivalência $\sim$: se $x, y \in \mathbb{R}$, temos $x \sim y$ se, e somente se, $x - y \in \mathbb{Q}$. Por ser uma relação de equivalência ela divide $\mathbb{R}$ em classes de equivalência.
Se $x \in \mathbb{R}$, então existe $y \in (0,1)$ tal que $x \sim y$. De fato, considere os seguintes casos:

Caso 1. $x \in \mathbb{Q}$. Tomemos $y \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, assim obtemos $x - y \in \mathbb{Q}$.

Caso 2. $x \notin \mathbb{Q}$. Tomemos $z \in \mathbb{Q}$ tal que $z < x < z+1$, defina $y = x - z$. Então $x - y \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Pois

$$x - y = z \in \mathbb{Q}$$

e

$$1 = (z+1) - z > x - z > z - z = 0.$$

Tomemos um subconjunto E do intervalo $(0,1)$ que contenha exatamente um elemento de cada classe de equivalência (a existência de E é baseada no axioma da escolha, pois o conjunto das classes de equvalência pode ser um conjunto não-enumerável). As seguintes propriedades são satisfeitas:

i) Se $x \in (0,1)$, existe um racional r em $(-1,1)$ tal que $x \in (E+r)$. Isso é consequência de E ter um elemento de cada classe de equivalência. Pois para $x \in (0,1)$ existe $y \in E$ tal que $x \sim y$, além disso $y \in (0,1)$, pois $E \subseteq (0,1)$. Tomemos $r = x - y$, logo $r \in \mathbb{Q}$ e

$$1 \geq x - 0 \geq x - y \geq x - 1 \geq -1.$$

ii) Se $r, s \in \mathbb{Q}$, $r \neq s$, então $(E+r) \cap (E+s) = \emptyset$. De fato, suponha que existe

$$x \in (E+r) \cap (E+s).$$

[2]Giuseppe Vitali (1875-1932)

Então existem $y, z \in E$ tal que $x = y + r$ e $x = z + s$, porém $y - z = s - r \neq 0$, e portanto, E possui dois elementos diferentes de uma mesma classe de equivalência, uma contradição.

Suponhamos, por absurdo, que E tem definida sua medida de Lebesgue. Como a medida de Lebesgue corresponde a noção intuitiva de comprimento em $\mathbb{R}$, é razoável supor que ela é invariante por translação, logo $E + r$ e mensurável e além disso,

$$m(E) = m(E + r) \quad \forall r \in \mathbb{Q} \cap (-1, 1). \tag{1.61}$$

Como $\mathbb{Q} \cap (-1, 1)$ é enumerável, obtemos que

$$S = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} (E + r)$$

é uma união enumerável de conjuntos, conjuntos disjuntos pelo item **ii)** desse exemplo. Logo,

$$m(S) = \sum_{r \in (\mathbb{Q} \cap (-1,1)} m(E + r). \tag{1.62}$$

Porém, $m(S) < +\infty$, pois $S \subseteq (-1, 2)$. Pela equação anterior e pelas equações **(1.61)** e **(1.62)** obtemos que

$$m(E) = 0.$$

Por consequência

$$m(S) = 0.$$

Um absurdo, pois pelo item **i)**, desse exemplo, temos

$$(0, 1) \subseteq S.$$

o que implica pelo item **b)** do **Teorema (1.11)** em

$$m(S) \geq m((0, 1)) = 1.$$

Portanto, não tem sentido falar de medida de Lebesgue para o conjunto E.

Definição 1.18. *Uma família de abertos $\{V_\alpha\}$ de um espaço topológico X é uma base para X se para todo $x \in X$ e todo aberto $G \subset X$ tal que $x \in G$, tem-se $x \in V_\alpha \subset G$ para algum α.*

Exemplo 1.17 A família dos volumes abertos racionais do $\mathbb{R}^n$, isto é, volumes com aresta racional e centro num ponto de $\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}$ o conjunto dos racionais, é uma base enumerável para os abertos do $\mathbb{R}^n$.

Demonstração:
Tomemos $x \in \mathbb{R}^n$, x qualquer, ou seja, $x = (x_1, ..., x_n)$. Então para G qualquer tal que G é aberto e $x \in G$, temos que x é ponto interior de G, ou seja, existe $\delta' > 0$ tal que $B(x, \delta') \subseteq G$. Tomemos $y \in \mathbb{Q}^n$ tal que

$$d(x, y) = \epsilon < \frac{\delta'}{2\sqrt{n}}.$$

Agora, tomemos $\delta \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\epsilon < \delta < \frac{\delta'}{2\sqrt{n}}.$$

Definimos agora

$$V_\alpha = \prod_{i=1}^{n} (y_i - \delta, y_i + \delta),$$

onde $y = (y_1, ..., y_n)$. Então $x \in V_\alpha$. De fato, suponha que não, logo para algum $i, i = 1, ..., n$ temos $x_i < y_i - \delta$ ou $x_i > y_i + \delta$. No caso $x_i < y_i - \delta$ temos

$$d(x, y) > \sqrt{(y_i - x_i)^2} = \delta.$$

Uma contradição, pois $d(x, y) = \epsilon < \delta$. No caso $x_i > y_i + \delta$ temos

$$d(x, y) > \sqrt{(y_i - x_i)^2} = \delta.$$

Novamente uma contradição, pois $d(x, y) = \epsilon < \delta$. Também temos que $V_\alpha \subseteq G$, pois para $z \in V_\alpha$, z um elemento qualquer, temos que

$$d(x, y) < \sqrt{n(\delta)^2} = \sqrt{n\frac{(\delta')^2}{4n}} = \frac{\delta'}{2}$$

e

$$d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{\delta'}{2\sqrt{n}} + \frac{\delta'}{2} < \delta'.$$

A aresta desse volume V_α nada mais é do que 2δ, como δ é um número racional segue que 2δ também é um número racional. A base ser enumerável segue do fato de $\mathbb{Q}^n$ ser um conjunto enumerável.

$\square$

Nota. A demonstração acima requer do leitor algum conhecimento de análise, para quem deseja aprender os conceitos envolvidos nessa demonstração ver referência [7].

Teorema 1.16. *Todo subconjunto aberto (ou fechado) do* $\mathbb{R}^n$ *é* μ*-mensurável e, portanto,* $\mathbb{R}^n \in \mathfrak{M}(\mu)$.

Demonstração:
A família dos volumes racionais do $\mathbb{R}^n$ é uma base enumerável para os abertos do $\mathbb{R}^n$. Isso significa que qualquer aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ pode ser expresso como uma união de elementos dessa base. Lembrando que um volume é um conjunto elementar, e, portanto, está em $\mathfrak{M}_F(\mu)$, segue que E é uma união enumerável de conjuntos de $\mathfrak{M}_F(\mu)$. Logo, $E \in \mathfrak{M}(\mu)$ e, $\mathfrak{R}^n \in \mathfrak{M}(\mu)$. Seja F um conjunto fechado. Então,

$$F = \mathbb{R}^n - A$$

para algum aberto $A \in \mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n \in \mathfrak{M}(\mu)$ e $A \in \mathfrak{M}(\mu)$, então $F \in \mathfrak{M}(\mu)$. $\square$

Definição 1.19. *Seja* E *um conjunto obtido a partir de uma sequência enumerável de operações que consistem em formar uniões, intersecções ou complementos de conjuntos abertos. O conjunto* E *é chamado de conjunto de Borel ou boreliano. Indica-se por* $\mathfrak{B}$ *a família de todos os conjuntos de Borel no* $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.17.
a) $\mathfrak{B}$ *é um* σ*-anel.*
b) $\mathfrak{B}$ *é o menor* σ*-anel que contém todos os conjuntos abertos do* $\mathbb{R}^n$.
c) $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$

Demonstração:
a) Sejam $A, B \in \mathfrak{B}$. Então, A e B podem ser obtidos a partir de uma sequência enumerável de operações com conjuntos abertos de acordo com a **Definição (1.19)**. Logo, $A \cup B$ e $A - B$ também podem. Podemos concluir, então, que

$$A \cup B \in \mathfrak{B}$$

e

$$A - B \in \mathfrak{B}$$

e, portanto, $\mathfrak{B}$ é anel. Analogamente, seja $\{A_n\}$ uma sequência enumerável de conjuntos de $\mathfrak{B}$. Então,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

pode ser obtido a partir de uma sequência enumerável de operações a partir de conjuntos abertos. Portanto, $\mathfrak{B}$ é σ-anel.

b) Suponhamos que $\mathfrak{B}$ não seja o menor σ-anel que contém todos os abertos. Nesse caso, existe σ-anel X tal que, X contém todos os abertos do $\mathbb{R}^n$ e $\mathfrak{B}$ possui pelo menos um elemento $A \subset \mathbb{R}^n$ com $A \notin X$. Porém, A pode ser obtido usando-se somente uniões, intersecções e complementos de abertos, pois $\mathfrak{B}$ é σ-anel. Pelo fato de X ser σ-anel ele também é fechado pela união, intersecção e complemento de abertos, logo $A \subset X$. Portanto, obtemos uma contradição, o que implica que $\mathfrak{B}$ é o menor σ-anel que contém todos os abertos do $\mathbb{R}^n$.

c) Pelo **Teorema (1.16)** os conjuntos abertos estão em $\mathfrak{M}(\mu)$, logo, por ser $\mathfrak{M}(\mu)$ um σ-anel ele é fechado pela união, intersecção e complemento. Portanto, para todo $E \in \mathfrak{B}$ temos $E \in \mathfrak{M}(\mu)$. $\square$

Teorema 1.18. *Sejam $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ e $\epsilon > 0$. Existem conjuntos F fechado e G aberto, satisfazendo*

$$F \subset A \subset G$$

e

$$\mu(G - A) < \epsilon \tag{1.63}$$

$$\mu(A - F) < \epsilon \tag{1.64}$$

Teorema 1.19. *Se $A \in \mathfrak{M}(\mu)$, então existem conjuntos de Borel F e G tais que $F \subset A \subset G$, e*

$$\mu(G - A) = \mu(A - F) = 0.$$

Demonstração:

Pelo **Teorema (1.18)** tome $\epsilon = \frac{1}{n}$, então

$$\mu(G - A) < \frac{1}{n} \tag{1.65}$$

e

$$\mu(A - F) < \frac{1}{n} \tag{1.66}$$

tomando o limite de $n \to \infty$ nas equações (1.65) e (1.66) obtemos o resultado desejado.

□

Teorema 1.20. *Para todo μ, os conjuntos $Z \subset \mathfrak{M}(\mu)$ tais que $\mu(Z) = 0$ formam um σ-anel.*

Demonstração:

Denotemos por X_0 o conjunto formado por todos esses conjuntos Z. Sejam $A, B \in X_0$. Então $\mu(A) = \mu(B) = 0$. Pelo item **c)** do **Teorema (1.11)**, obtemos:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) = 0$$

e, portanto,

$$\mu(A \cup B) = -\mu(A \cap B).$$

Como μ é uma função não negativa,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cap B) = 0.$$

Logo, X_0 é um anel. Sejam $A'_1, A'_2, ...$ conjuntos de X_0, então defina:

$$A_1 = A'_1,$$

$$A_n = A'_n - (A'_1 \cup ... \cup A'_{n-1}), n = 2, 3, ...$$

Os conjuntos A_n são dois a dois disjuntos, a prova disso foi feita na demonstração do

Teorema (1.15). Pelo item **b)** do **Teorema (1.11)**,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$$

e, portanto, X_0 é σ-anel. □

Já provamos anteriormente no **Exemplo (1.13)** que todo conjunto enumerável tem medida de Lebesgue nula. Um exemplo de conjunto não-enumerável com medida de Lebesgue nula é o conjunto de Cantor ternário.

1.3.1 Conjuntos de Cantor

Existem vários conjuntos chamados de Cantor[3]. Abordaremos, inicialmente, o chamado conjunto de Cantor ternário, $C_{\frac{1}{3}}$, por ser o mais comum e simples, após abordaremos uma de suas generalizações.

Uma definição informal, porém muito comum do Conjunto ternário de Cantor é a seguinte. Tomemos o conjunto fechado $T_0 = [0,1]$, do qual retiramos o intervalo aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ que é um conjunto aberto de largura $\frac{1}{3}$ da largura de T_0 situado bem no meio de T_0. Obtemos assim o conjunto fechado $T_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, que consiste da união de dois intervalos fechados disjuntos. Após isso, retiramos de cada um desses intervalos fechados os conjuntos abertos situados no meio de ambos e cuja largura é $\frac{1}{3}$ da largura de cada um desses intervalos. O que obtemos é o conjunto fechado $T_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. O passo seguinte é uma repetição dos anteriores: retiramos de cada um desses intervalos fechados os conjuntos abertos situados no meio de ambos e cuja largura é $\frac{1}{3}$ da largura de cada um desses intervalos.

O conjunto que obtemos desse processo, depois de infinitos passos, é o que chamamos de conjunto de Cantor $C_{\frac{1}{3}}$. Esse conjunto não é vazio, pois os pontos das bordas dos intervalos fechados não são retirados, apesar do processo de subtração. $C_{\frac{1}{3}}$ é a intersecção de uniões finitas de intervalos fechados, pelo **Teorema (1.16)**, $C_{\frac{1}{3}} \in \mathfrak{M}(m)$. Então, tem sentido afirmar que esse conjunto possui uma medida no sentido de Lebesgue, mas que medida é essa?

Uma pergunta interessante. Definimos T_n como o conjunto T_0 após n processos. È fácil perceber que $m(T_{n+1}) = (\frac{2}{3})m(T_n)$, como $m(T_0) = 1$, segue que $m(T_n) = (\frac{2}{3})^n$.

[3]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)

Portanto, pelo **Teorema (1.4)**,

$$m(C_{\frac{1}{3}}) = \lim_{n\to\infty} m(T_n) = \lim_{n\to\infty} m\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Concluímos dessa forma que o conjunto $C_{\frac{1}{3}}$ tem medida de Lebesgue nula. Porém $C_{\frac{1}{3}}$ é não-enumerável, para provar isso precisamos antes de dois resultados auxiliares.

Lema 1.2. *O algarismo $0,t_1t_2...t_n1$ na base ternária pode ser representado como o algarismo $0,t_1t_2...t_n0222...$, no qual $t_j = 2$ para todo $j > n+1$.*

Lema 1.3. *$C_{\frac{1}{3}}$ é o conjunto de $[0,1]$ composto por todos os números c que podem ser escritos na forma*

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n}$$

sendo que cada t_n pode apenas assumir os valores 0 ou 2. Isso equivale a dizer que $c \in C_{\frac{1}{3}}$ se e somente se for representado na base ternária na forma $c = 0,t_1t_2t_3t_4...$ onde cada "dígito" t_n vale 0 ou 2.

Demonstração:

Considere um algarismo cujo n-ésimo "dígito"na base ternária é 1, sendo que entre os seguintes pelo menos um é não-nulo. Tais números são da forma $0,t_1...t_{n-1}1t_{n+1}...$, sendo que pelo menos um dos t_m com $m \geq n+1$ é não-nulo. Esse número se encontra no intervalo aberto entre $0,t_1...t_{n-1}1$ e $0,t_1...t_{n-1}2$. Porém,

$$0,t_1...t_{n-1}1 = 0,t_1...t_{n-1} + \frac{1}{3^n}$$

e

$$0,t_1...t_{n-1}1 = 0,t_1...t_{n-1} + \frac{2}{3^n}.$$

Dessa maneira, o intervalo $(0,t_1...t_{n-1}1, 0,t_1...t_{n-1}2)$ é o intervalo $\left(\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right)$ transladando de $0,t_1...t_{n-1}$. Observe-se, então, que esse intervalo $\left(\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right)$ é um dos intervalos abertos subtraídos de T_{n-1} quando do processo de construção do conjunto $C_{\frac{1}{3}}$, na verdade ele fica no meio do intervalo $\left[0, \frac{1}{3^{n-1}}\right]$. Como todos os números da forma $0,t_1...t_{n-1}1$ podem ser obtidos somando repetidamente o número $\frac{1}{3^n}$ concluímos que os intervalos podem ser obtidos transladando-se $\left(\frac{1}{3^n}\right)$ sucessivamente à direita. Os intervalos assim obtidos estarão contidos num intervalo já retirado em passos anteriores a n ou o segundo intervalo de um intervalo de T_n e portanto um intervalo subtraído no conjunto T_{n+1}, portanto esses intervalos não pertencem ao conjunto $C_{\frac{1}{3}}$.

Portanto, os números da forma $0, t_1...t_{n-1}1t_{n+1}...$, onde pelo menos um dos t_m com $m \geq n+1$ é não-nulo, não pertencem a $C_{\frac{1}{3}}$.

Porém, ainda resta a possibilidade de que $C_{\frac{1}{3}}$ tenha números da forma $0, t_1...t_{n-1}1$, com $t_j \in \{0, 2\}$, $j = 1, ..., n-1$. Estes números pertencem a $C_{\frac{1}{3}}$, pois formam uma das bordas de alguns conjuntos abertos retirados, $(0, t_1...t_{n-1}1,\ 0, t_1...t_{n-1}2)$, por exemplo. Porém o lema anterior garante que algarismos como esse podem ser escritos usando-se somente os dígitos 0 e 2, portanto o lema está provado. $\square$

Teorema 1.21. *O conjunto $C_{\frac{1}{3}}$ é não-enumerável.*

Demonstração:

Seja A um subconjunto enumerável de $C_{\frac{1}{3}}$, então A é composto das sequências $s_1, s_2, s_3, ...$, de forma que para n qualquer s_n é uma sequência $0, t_1t_2t_3...$ com $t_j \in \{0, 2\}$ para todo $j > 1$. Vamos construir a sequência s da seguinte forma, se o n-ésimo dígito após a vírgula da sequência s_n for 0 então o n-ésimo dígito após a vírgula da sequência s será 2, se o n-ésimo dígito após a vírgula da sequência s_n for 2 então o n-ésimo dígito após a vírgula da sequência s será 0. Nós obtemos assim uma sequência que não pertence ao conjunto A, pois é diferente de todas as outras sequências em pelo menos um dígito, porém essa sequência pertence ao conjunto $C_{\frac{1}{3}}$, portanto A é um subconjunto próprio de $C_{\frac{1}{3}}$. Por consequência $C_{\frac{1}{3}}$ é não-enumerável, pois se não o fosse teríamos que $C_{\frac{1}{3}}$ é um subconjunto próprio de $C_{\frac{1}{3}}$, um absurdo. $\square$

O conjunto ternário de Cantor é um exemplo de conjunto não-enumerável de medida nula, porém não é o único. Agora iremos trabalhar com uma generalização desse conjunto.

Diremos que um intervalo fechado $[a, b]$ é limitado se $-\infty < a < b < +\infty$. Indicaremos por $\mathfrak{F}_0$ a coleção de todos os subconjuntos da reta real que sejam formados por uniões finitas de intervalos fechados limitados e disjuntos. Portanto, se $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0$, então $\mathcal{F}$ é da forma

$$\mathcal{F} = F_1 \cup ... \cup F_k$$

para algum $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, no qual cada F_j é um intervalo fechado limitado $F_j = [a_j, b_j]$ com $-\infty < a_j < b_j < \infty$ e os conjuntos F_j são dois a dois disjuntos.

Por ser uma união finita de fechados, cada elemento $\mathfrak{F}_0$ é também um conjunto fechado. Seja $f \in \mathbb{R}$ tal que $0 < f < 1$. Para cada f definiremos uma aplicação $T_f : \mathfrak{F}_0 \to \mathfrak{F}_0$ da seguinte maneira: Para um intervalo limitado $F = [a, b]$ definimos

$$T_f(F) = T_f([a,b]) := \left[a, \frac{a(1+f)+b(1-f)}{2}\right] \cup \left[\frac{a(1-f)+b(1+f)}{2}, b\right] \tag{1.67}$$

Para um elemento genérico $\mathcal{F} = F_1 \cup ... \cup F_K$ de $\mathfrak{F}_0$, definimos

$$T_f(\mathcal{F}) = T_f(F_1 \cup ... \cup F_k) := T_f(F_1) \cup ... \cup T_f(F_k). \tag{1.68}$$

Desenvolvendo as equações obtemos,

$$\frac{a(1-f)+b(1+f)}{2} = \frac{a+b}{2} + f\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$\frac{a(1+f)+b(1-f)}{2} = \frac{a+b}{2} - f\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$\frac{b-a}{2} > \frac{a-a}{2} = 0.$$

Para $0 < f < 1$, tem-se desenvolvendo as equações acima

$$\frac{a(1-f)+b(1+f)}{2} < \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b$$

$$a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{a(1+f)+b(1-f)}{2}$$

e além disso,

$$\frac{a(1+f)+b(1-f)}{2} < \frac{a(1-f)+b(1+f)}{2}$$

que implicam em,

$$a < \frac{a(1-f)+b(1+f)}{2} < \frac{a(1+f)+b(1-f)}{2} < b.$$

Portanto, para todo intervalo finito F, tem-se

$$T_f(F) \subset F.$$

Logo,

$$T_f(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}.$$

De fato, $T_f(\mathcal{F})$ é um sub-conjunto próprio de $\mathcal{F}$. Seja $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0$,

$$T_f(\mathcal{F}) = T_f(F_1) \cup T_f(F_2) \cup ... \cup T_f(F_n) \subset F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n = \mathcal{F}.$$

Obtemos assim

$$T_f(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}.$$

Logo,

$$T_f([a,b]) = [a,b] \backslash \left(\frac{a(1+f)+b(1-f)}{2}, \frac{a(1-f)+b(1+f)}{2} \right).$$

Operando em $\mathcal{F} = F_1 \cup ... \cup F_k$, a operação T_f retira de cada F_j o intervalo aberto de largura f centrado no ponto intermediário de F_j.

É importante notar que se $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0$ é composto por k intervalos fechados finitos disjuntos então, $T_f(\mathcal{F})$ é composto por $2k$ intervalos fechados finitos disjuntos.

Como T_f é uma aplicação de $\mathfrak{F}_0$ em $\mathfrak{F}_0$, podemos compor T_f consigo mesma. Denotamos, para $n \in \mathbb{N}$,

$$T_f^n := \underbrace{T_f \circ ... \circ T_f}_{n \ vezes}.$$

Com isso, se F é um intervalo fechado finito, $T_f^n(F)$ é um elemento de $\mathfrak{F}_0$ composto por 2^n intervalos fechados finitos disjuntos, todos eles contidos em F.

Queremos determinar a medida de Lebesgue do conjunto $C_f(F)$, para isso precisamos antes determinar a medida dos conjuntos $T_f^n(F)$, que vem a ser a soma dos comprimentos dos 2^n intervalos fechados finitos disjuntos que formam ele. Se $F = [a,b]$, então

$$\begin{aligned}
m(T_f(F)) &= m(T_F([a,b])) = m\left(\left[a, \frac{a(1+f)+b(1-f)}{2}\right] \cup \left[\frac{a(1-f)+b(1+f)}{2}, b\right] \right) \\
&= m\left(\left[a, \frac{a(1+f)+b(1-f)}{2}\right] \right) + m\left(\left[\frac{a(1-f)+b(1+f)}{2}, b\right] \right) \\
&= \left(\frac{a(1+f)+b(1-f)}{2} - a \right) + \left(b - \frac{a(1-f)+b(1+f)}{2} \right) \\
&= (1-f)(b-a) = (1-f)m(F).
\end{aligned}$$

É também verdade que para todo $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0$ da forma $\mathfrak{F} = F_1 \cup ... \cup F_k$, onde os F_j são intervalos fechados finitos e disjuntos, tem-se

$$m(\mathcal{F}) = m(F_1) + ... + m(F_k).$$

Segue da relação **(1.68)** que se $\mathcal{F} = F_1 \cup ... \cup F_k$ então

$$\begin{aligned}
m(T_f(\mathcal{F})) &= m(T_f(F_1) \cup ... \cup T_f(F_k)) = m(T_f(F_1)) + ... + m(T_f(F_k)) \\
&= (1-f) \sum_{j=1}^{k} m(F_j) = (1-f)m(\mathcal{F}),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$m(T_f(\mathcal{F})) = (1-f)m(\mathcal{F}).$$

Provaremos por indução que

$$m(T_f^n(\mathcal{F})) = (1-f)^n m(\mathcal{F}).$$

Para o caso $n = 2$, $T_f^2(\mathcal{F}) \in \mathfrak{F}_0$, logo

$$m(T_f^2(\mathcal{F})) = (1-f)m(T_f(\mathcal{F})).$$

Voltamos ao caso $n = 1$, pois $T_f(F) \in \mathfrak{F}_0$, assim

$$m(T_f^2(\mathcal{F})) = (1-f)^2 m(\mathcal{F}).$$

Hipótese de indução: Suponhamos para algum n, $n \geq 2$ que

$$m(T_f^n(\mathcal{F})) = (1-f)^n m(\mathcal{F}_0).$$

Para $n+1$,

$$m(T_f^{n+1}(\mathcal{F}) = m(T_f^n(T_f(\mathcal{F}))).$$

Aplicando a hipótese de indução,

$$m(T_f^{n+1}(\mathcal{F})) = (1-f)^n m(T_f(\mathcal{F})).$$

Voltamos ao caso $n = 1$, pois $T_f(F) \in \mathfrak{F}_0$, assim

$$m(T_f^{n+1}(\mathcal{F})) = (1-f)^{n+1} m(\mathcal{F}).$$

É bastante evidente por **(1.68)**, que os pontos a e b de um intervalo finito $F = [a, b]$ satisfazem $a \in T_f(F)$ e $b \in T_f(F)$. Conclui-se disso, que a e b são elementos de todos os conjuntos $T_f^n(F)$. Assim,

$$U_{n,f}(F) := F \backslash T_f^n(F) = F \cap (T_f^n(F))^c = F^0 \cap (T_f^n(F))^c.$$

Aqui $F_0 := (a, b)$, o interior de F. Como os conjuntos $T_f^n(F)$ são fechados, os conjuntos $U_{n,f}(F)$ são subconjuntos abertos de F, por serem a intersecção de dois abertos: F_0 e $(T_f^n(F))^c$. Note-se que

$$U_{n,f}(F) \subset U_{n+1,f}(F), \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.69}$$

pois $T_f^{n+1}(F) = T_f(T_f^n(F)) \subset T_f^n(F)$. Teremos também que

$$m(U_{n,f}(F)) = m(F) - m(T_f^n(F)) = [1 - (1-f)^n]m(F).$$

Para um intervalo fechado finito $F = [a, b]$ e f, definimos o conjunto $C_f(F)$ por

$$C_f(F) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_f^n(F).$$

O conjunto de Cantor ternário $C_{\frac{1}{3}}$, que definimos informalmente antes, corresponde então a $C_{\frac{1}{3}}([0,1])$. $C_{\frac{1}{3}}$ não é vazio, pois os pontos a e b pertencem a esse conjunto.
Anteriormente foi dito que $C_f(F)$ é um subconjunto fechado de F, pois é uma intersecção de fechados. Definimos

$$U_f(F) := F - C_f(F) = F \cap (C_f(F))^c = F^0 \cap (C_f(F))^c, \tag{1.70}$$

que é um subconjunto aberto de F, por ser a intersecção de dois abertos: F^0 e $(C_f(F))^c$.
Veja que

$$U_f(F) = F^0 \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_f^n(F) \right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F_0 \cap (T_f^n(F))^c) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{n,f}(F).$$

Agora, obtemos a medida de Lebesgue de $C_f(F)$ e de $U_f(F)$. Por **(1.69)**, podemos aplicar o **Teorema (1.4)** e obter que

$$m(U_f(F)) = \lim_{n \to \infty} m(U_{n,f}(F)) = \lim_{n \to \infty} [1 - (1-f)^n]m(F) = m(F),$$

pois $0 < (1-f) < 1$. Por **(1.70)** temos também que $m(U_f(F)) = m(F) - m(C_f(F))$ e concluímos que

$$m(C_f(F)) = 0.$$

$C_f(F)$ é assim um subconjunto fechado não-enumerável e com medida de Lebesgue nula, $C_f(F)$ tem outras propriedades interessantes como ter a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$ e além disso, os conjuntos de Cantor podem ser generalizados ainda mais, porém esses aspectos não serão abordados por fugir dos objetivos dessa monografia.

2 Funções Mensuráveis

Nesse capítulo nosso foco são as funções mensuráveis, desde a definição até propriedades. Essas funções são de importância vital para a construção da Integral de Lebesgue, estando presentes desde a definição da Integral até a demonstração de suas propriedades.

A partir desse capítulo nosso estudo se restringe ao $\mathbb{R}^n$, embora as respectivas generalizações dos resultados sejam, na grande maioria das vezes, obtidos com esforço adicional.

Definição 2.1. *Um conjunto X é chamado de espaço de medida, se existe um σ-anel $\mathfrak{M}$ de subconjuntos de X, chamados de conjuntos mensuráveis, e uma função de conjunto σ-aditiva,*

$$\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

definida em $\mathfrak{M}$. No caso em que $X \in \mathfrak{M}$, diz-se que X é um espaço mensurável.

Exemplo 2.1 O conjunto $\mathbb{R}^n$ é um espaço de medida onde $\mathfrak{M}$ é o σ-anel dos conjuntos μ-mensuráveis do $\mathbb{R}^n$ e $\mu = m$ é a medida de Lebesgue.

Definição 2.2. *Seja X um espaço de medida. Então*

$$f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

é dita mensurável se o conjunto

$$\{\ x \mid f(x) > a\}$$

é mensurável para todo real a.

Observação. De agora em diante usaremos o $\mathbb{R}^n$ no lugar do conjunto X.

Lema 2.1. *Valem as seguintes igualdades:*

a)

$$\{\ x \mid f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\ x \mid f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}.$$

b)

$$\{\ x \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\ x \mid f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}.$$

Demonstração:

a) Suponhamos x tal que $f(x) \geq a$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $a > a - \frac{1}{n}$ e, portanto, $f(x) > a - \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\{x|f(x) \geq a\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\ x \mid f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}. \tag{2.1}$$

Suponhamos, agora, que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\ x \mid f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}.$$

Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $f(x) > a - \frac{1}{n}$. Logo, $f(x) \geq a$. Por consequência,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x|f(x) > a - \frac{1}{n}\right\} \subseteq \{x|f(x) \geq a\}. \tag{2.2}$$

Pelas relações **(2.1)** e **(2.2)** obtemos a igualdade.

b) Seja x tal que $f(x) \leq a$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $a < a + \frac{1}{n}$ e, por consequência, $f(x) < a + \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\{x|f(x) \leq a\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x|f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}. \tag{2.3}$$

Suponhamos, agora,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x|f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}.$$

Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $f(x) < a + \frac{1}{n}$. Logo $f(x) \leq a$ e, portanto,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x|f(x) < a + \frac{1}{n}\right\} \subseteq \{x|f(x) \geq a\}. \tag{2.4}$$

Pelas relações **(2.3)** e **(2.4)** provamos o item **b)**. $\square$

Teorema 2.1. *Cada uma das seguintes condições implica as outras três:*
i) $\{x|f(x) > a\}$ *é mensurável para todo real* a.
ii) $\{x|f(x) \geq a\}$ *é mensurável para todo real* a.
iii) $\{x|f(x) < a\}$ *é mensurável para todo real* a.
iv) $\{x|f(x) \leq a\}$ *é mensurável para todo real* a.

Demonstração:
A afirmação **(i)** implica em **(ii)**. De fato:

Suponhamos por hipótese, que $\{x|f(x) > a\}$ é mensurável para todo real a. Então, do item **a)** do **Lema (2.1)**, temos

$$\{x|f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x|f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}.$$

O conjunto

$$\left\{x|f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}$$

também é mensurável, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathfrak{M}$ é σ-anel, então,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x|f(x) > a - \frac{1}{n}\right\} \in \mathfrak{M}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathfrak{M}$ é fechado pela intersecção enumerável temos que $\{x|f(x) \geq a\}$ é mensurável.

A afirmação **(ii)** implica em **(iii)**. De fato:

Suponhamos $\{x|f(x) \geq a\}$ é mensurável para todo real a. Como $\mathfrak{M}$ é σ-anel e $\mathbb{R}^n$ é mensurável, temos que:

$$\mathbb{R}^n - \{x|f(x) \geq a\} \in \mathfrak{M}.$$

Portanto, temos que $\{x|f(x) < a\}$ é mensurável para todo real a.

A afirmação **(iii)** implica em **(iv)**. De fato:

Suponhamos $\{x|f(x) < a\}$ é mensurável para todo real a. Então,

$$\left\{x|f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}$$

é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathfrak{M}$ é σ-anel, então, pelo item **b)** do **Lema (2.1)** obtemos que $\{x|f(x) \geq a\}$ é mensurável para todo real a.

A afirmação **(iv)** implica em **(i)**. De fato:

Suponhamos $\{x|f(x) \leq a\}$ mensurável para todo real a. Como $\mathbb{R}^n$ é mensurável, então,

$$\{x|f(x) > a\} = \mathbb{R}^n - \{x|f(x) \leq a\} \in \mathfrak{M}.$$

Exemplo 2.2 Seja $X = \mathbb{R}^n$, e $\mathfrak{M}$ a família dos conjuntos m-mensuráveis do $\mathbb{R}^n$. Então, toda função contínua no $\mathbb{R}^n$ é uma função mensurável. De fato, pois, nesse caso o conjunto

$$\{x|f(x) > a\}$$

é uma união de intervalos abertos, logo, um aberto e, portanto, mensurável, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uma função mensurável. Então, $|f|$ é uma função mensurável.*

Demonstração:
Temos que

$$\{x||f(x)| < a\} = \{x|f(x) < a\} \cup \{x|f(x) > -a\}$$

Como f é mensurável, então, pelo **Teorema (2.1)**,

$$\{x|f(x) > -a\} \in \mathfrak{M}$$

e

$$\{x|f(x) < a\} \in \mathfrak{M}$$

são mensuráveis. Logo, $|f|$ é mensurável. □

Nota. Ficará implícito que quando lidamos com mais de uma função mensurável, elas estão definidas no mesmo domínio.

Teorema 2.3. *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções mensuráveis no* $\mathbb{R}^n$*. Para cada* $x \in \mathbb{R}^n$*, defina:*

a) $g(x) = sup\ \{f_1(x), f_2(x), ...\}$.

b) $h(x) = inf\ \{f_1(x), f_2(x), ...\}$.

c) $i(x) = \lim_{N\to\infty}\ g_N(x)$, *onde* $g_N(x) = \sup_{\{n \geq N\}} f_n(x)$.

d) $j(x) = \lim_{N\to\infty}\ h_N(x)$, *onde* $h_N(x) = \inf_{\{n \geq N\}} f_n(x)$.

As funções g, h, i *e* j *são mensuráveis.*

Demonstração:

Seja a um número real qualquer.

a) Para provar esse item, precisamos antes mostrar a seguinte igualdade,

$$\{\ x \mid g(x) > a\ \} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\ x \mid f_n(x) > a\ \}.$$

Seja x, um elemento qualquer do conjunto do membro direito da igualdade acima, ou seja,

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\ x \mid f_n(x) > a\}.$$

Isso implica em,

$$f_{n_o}(x) > a$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Logo,

$$g(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x), ...\} \geq f_{n_0}(x) > a.$$

Portanto,

$$x \in \{\ x \mid g(x) > a\}.$$

Obtemos assim, a seguinte inclusão,

$$\{\ x \mid g(x) > a\ \} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\ x \mid f_n(x) > a\ \}.$$

Resta provar a outra inclusão. De forma similar, tome x um elemento qualquer do outro conjunto, ou seja,

$$x \in \{\ x \mid g(x) > a\ \}.$$

Então,

$$g(x) = b = a + \epsilon, \ \epsilon > 0.$$

Porém,

$$g(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x), ...\}.$$

Pelo item **b)** da **Proposição (B.1)** do **Apêndice B**, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$a = b - \epsilon = g(x) - \epsilon < f_{n_0}(x).$$

Portanto, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$x \in \{ \ x \mid f_{n_0}(x) > a\}$$

e, por consequência,

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{ \ x \mid f_n(x) > a\}.$$

Podemos concluir que,

$$\{ \ x \mid g(x) > a \ \} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{ \ x \mid f_n(x) > a \ \}.$$

Seguindo de imediato que $g(x)$ é mensurável, do fato de $\mathfrak{M}$ ser σ-anel.

b) De forma semelhante a demonstração do item **a)** desse teorema, provaremos antes a seguinte igualdade,

$$\{ \ x \mid h(x) < a \ \} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{ \ x \mid f_n(x) < a \ \}.$$

De fato, seja

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{ \ x \mid f_n(x) < a\}.$$

Isto implica que $f_{n_o}(x) < a$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Logo,

$$h(x) = \inf\{f_1(x), f_2(x), ...\} \leq f_{n_0}(x) < a$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$x \in \{ \ x \mid h(x) < a\}.$$

Assim, obtemos a seguinte inclusão,

$$\{\ x \mid h(x) < a\ \} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\ x \mid f_n(x) < a\ \}.$$

Falta provar a outra inclusão. Seja

$$x \in \{\ x \mid h(x) < a\ \}$$

que implica em,

$$h(x) = b = a - \epsilon,\ \epsilon > 0.$$

Porém,

$$h(x) = \inf\{f_1(x), f_2(x), ...\}.$$

Pelo item **b)** da **Proposição (B.2)** do **Apêndice B**, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$a = b + \epsilon = h(x) + \epsilon > f_{n_0}(x).$$

Portanto, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$x \in \{\ x \mid f_{n_0}(x) < a\}$$

e, por consequência,

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\ x \mid f_n(x) < a\}.$$

Assim, concluímos que

$$\{\ x \mid h(x) < a\ \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\ x \mid f_n(x) < a\ \}.$$

Seguindo de imediato que $g(x)$ é mensurável do fato de $\mathfrak{M}$ ser σ-anel.

c) Queremos provar como resultado auxiliar que,

$$i(x) = \inf\{g_1(x), g_2(x), ...\}$$

onde

$$g_m(x) = \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), ...\}.$$

De fato, seja

$$a = \inf\{g_1(x), g_2(x), ...\}. \tag{2.5}$$

Então, dado $\epsilon > 0$, qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$g_{n_0}(x) < a + \epsilon, \tag{2.6}$$

porém,

$$g_{n_0}(x) = \sup\{f_{n_0}(x), f_{n_0+1}(x), ...\}. \tag{2.7}$$

Assim, aplicando a relação **(2.6)** na relação **(2.7)** obtemos,

$$a + \epsilon > \sup\{f_{n_0}(x), f_{n_0+1}(x), ...\}$$

que implica,

$$\epsilon > \sup\{f_{n_0}(x), f_{n_0+1}(x)\} - a. \tag{2.8}$$

Pela igualdade **(2.5)** e o item **a)** da **Proposição (B.2)** do **Apêndice B**,

$$a < g_{n_0}(x) + \epsilon.$$

Aplicando na relação acima, a relação **(2.7)** obtemos

$$a < \sup\{f_{n_0}(x), f_{n_0+1}(x), ...\} + \epsilon.$$

O que equivale a

$$\epsilon > a - \sup\{f_{n_0}(x), f_{n_0+1}(x), ...\}. \tag{2.9}$$

Usando as desigualdades **(2.8)** e **(2.9)** obtemos que, dado $\epsilon > 0$, qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|\sup\{f_{n_0}(x), f_{n_0+1}(x), ...\} - a| < \epsilon.$$

Portanto,

$$i(x) = \lim_{N\to\infty} g_N(x) = a = \inf g_m(x)$$

onde

$$g_N(x) = \sup_{\{n\geq N\}} f_n(x).$$

Provando assim o resultado auxiliar. Agora utilizando esse resultado provaremos esse item. Definimos para cada m,

$$f_{m,\ n-m+1}(x) = f_n(x)$$

que implica, que para todo m,

$$g_m(x) = \sup\{f_{m,\ 1}(x),\ \ f_{m,\ 2}(x), ...\}$$

$n \geq m$. Aplicando o item **a)**, já provado, obtemos que g_m é mensurável. Porém,

$$i(x) = \inf\{g_m(x), g_{m+1}(x), ...\}.$$

Aplicando o item **b)**, já provado, obtemos que i é mensurável.

d) De forma parecida a demonstração anterior, precisamos antes demonstrar o seguinte resultado auxiliar.

$$j(x) = \sup\{h_m(x), h_{m+1}(x), ...\}$$

onde $j(x) = h_m(x) = \inf\{f_m(x), f_{m+1}(x), ...\}$.

De fato, seja

$$a = \sup\{h_m(x), h_{m+1}(x), ...\}. \tag{2.10}$$

Dado $\epsilon > 0$, qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$h_{n_0}(x) > \sup\{h_m(x), h_{m+1}(x), ...\} - \epsilon = a - \epsilon.$$

Isso é garantido pelo item **b)** da **Proposição (B.1)** do **Apêndice B**. Porém,

$$h_{n_0}(x) = \inf\{f_{n_0}(x), f_{n_0+1}(x), ...\}.$$

Assim,

$$a - \epsilon < \inf\{f_{n_0}(x), f_{n_0+1}(x), ...\}.$$

Manipulando a equação anterior,

$$\epsilon > a - \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), ...\}. \tag{2.11}$$

Pela igualdade **(2.10)** e o item **a)** da **Proposição (B.1)** do **Apêndice B**,

$$a > h_{n_0}(x) - \epsilon,$$

ou seja,

$$a > \inf\{f_{n_0}(x), f_{n_0+1}(x), ...\} - \epsilon$$

que equivale a

$$\epsilon > \inf\{f_{n_0}(x), f_{n_0+1}(x), ...\} - a. \tag{2.12}$$

Usando as desigualdades **(2.11)** e **(2.12)** obtemos que, dado $\epsilon > 0$, qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$,

$$|\inf f_n(x) - a| < \epsilon.$$

Portanto,

$$j(x) = \lim_{N\to\infty} h_N(x) = a = \sup h_m(x)$$

onde

$$h_N(x) = \inf_{\{n\geq N\}} f_n(x).$$

Provando assim o resultado auxiliar. Defina para cada m,

$$f_{m,\ n-m+1}(x) = f_n(x)$$

que implica, que para todo m,

$$h_m(x) = \inf\{f_{m,\ 1}(x), f_{m,\ 2}(x), ...\}.$$

Aplicando o item **b)** já provado na relação acima obtemos que h_m é mensurável. Porém,

$$j(x) = \sup g_m(x).$$

Aplicando o item **a)** já provado obtemos que j é mensurável. $\square$

Corolário 2.1. *Se f e g são funções mensuráveis no $\mathbb{R}^n$. Então* $\max\{f(x), g(x)\}$ *e* $\min\{f(x), g(x)\}$ *são mensuráveis, onde o máximo e o mínimo são tomados com o elemento x fixado.*

Demonstração:
A idéia é definir funções de forma conveniente, para podermos utilizar o teorema anterior. Definimos,

$$f_1(x) := f(x)$$

e para $n \geq 2$,

$$f_n(x) := g(x).$$

Defina também as funções k e l como se segue,

$$k(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x), ...\} \text{ e } l(x) = \inf\{f_1(x), f_2(x), ...\}.$$

As funções f e g são mensuráveis, logo pelo teorema anterior, obtemos que as funções k e l são mensuráveis. Porém,

$$k(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x), ...\} = \sup\{f(x), g(x)\} = \max\{f(x), g(x)\}.$$

Logo $\max(f, g)$ é mensurável. De forma similar,

$$l(x) = \inf\{f_1(x), f_2(x), ...\} = \inf\{f(x), g(x)\} = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Logo, $\min(f, g)$ é mensurável. □

Lema 2.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, uma função constante. Então, f é mensurável.*

Demonstração:
Seja k, a constante da função, ou seja, $f(x) = k, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Considere os seguintes casos:

Caso 1. $k \in \mathbb{R}$. Para todo $a \geq k$, temos

$$\{\ x \mid f(x) > a\} = \emptyset \in \mathfrak{M}$$

Para todo $a < k$, temos

$$\{\ x \mid f(x) > a\} = \mathbb{R}^n \in \mathfrak{M}$$

Logo, f é mensurável.

Caso 2. $k = +\infty$. Para todo a real, temos

$$\{\ x \mid f(x) > a\} = \mathbb{R}^n \in \mathfrak{M}$$

Portanto, f é mensurável.

Caso 3. $k = -\infty$. Para todo a real, temos

$$\{\ x \mid f(x) > a\} = \emptyset \in \mathfrak{M}$$

Logo, f é mensurável. $\square$

Lema 2.3. *Se f é mensurável, então a função $g(x) = kf(x)$ é mensurável. Na qual k é uma constante real e $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração:
Considere os seguintes casos:

Caso 1. Se $k = 0$, $g(x) = 0$ é uma função constante, que é mensurável pelo **Lema 2.2**.

Caso 2. $k > 0$. Então, os seguintes conjuntos são iguais,

$$\{\ x \mid kf(x) > a\} = \left\{\ x \mid f(x) > \frac{a}{k}\right\}$$

O conjunto do membro direito da igualdade acima é mensurável, pois f é mensurável. Logo, o conjunto do membro esquerdo da igualdade acima é mensurável. Como a é um real qualquer, obtemos que g é mensurável.

Caso 3. $k < 0$. De forma similar, temos

$$\{\ x \mid kf(x) > a\} = \left\{\ x \mid f(x) < \frac{a}{k}\right\}.$$

O conjunto do membro direito da igualdade acima é mensurável, pois f é mensurável. Logo, o conjunto do membro esquerdo da igualdade acima é mensurável. Sendo a é um real qualquer, obtemos que g é mensurável.

Corolário 2.2. *Defina,* $f^+ = \max(f, 0)$ *e* $f^- = \min(f, 0)$*. Se* f *é mensurável, então* f^+ *e* f^- *são mensuráveis.*

Demonstração:
Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, g(x) = 0,\ \forall x \in X$. Pelo **Lema (2.2)**, g é mensurável. Nesse caso,

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \max\{f(x), g(x)\}.$$

Pelo **Corolário (2.1)**, temos que f^+ é mensurável. Da mesma forma,

$$f^-(x) = \min\{f(x), 0\} = \min\{f(x), g(x)\}$$

e, pelo **Corolário (2.1)** temos que f^- é mensurável. □

Corolário 2.3. *Suponhamos que a sequência* $\{f_n\}$ *de funções mensuráveis é convergente. A função*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

é mensurável.

Demonstração:
Sendo $\{f_n\}$ convergente,

$$\lim_{n\to\infty} \sup f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{2.13}$$

De fato,

$$\lim_{n\to\infty} \sup f_n(x) = \inf g_m(x)$$

onde $g_m(x) = \sup f_n(x)$, para $n \geq m$.

Seja

$$a = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$|f_n(x) - a| < \epsilon.$$

Então, para todo $n \geq n_0$,

$$a + \epsilon > f_n(x)$$

que implica em

$$a + \epsilon \geq g_{n_0}.$$

Logo,

$$\inf g_m(x) = a.$$

Suponhamos que a igualdade acima não seja verdadeira. Então $\inf g_m(x) > a$ ou $\inf g_m(x) < a$. Se $\inf g_m(x) = k, k < a$, tome $\epsilon = a - k$ e teremos que

$$g_{n_0}(x) > a - \epsilon = a - a + k = k.$$

Uma contradição. Se $\inf g_m(x) = k, k > a$, tome $\epsilon = \frac{k-a}{2}$ e teremos

$$g_{n_0}(x) \leq a + \epsilon = a + \frac{k}{2} - \frac{a}{2} = \frac{k}{2} + \frac{a}{2} = \frac{k+a}{2} < \frac{k+k}{2} = K$$

Outra contradição.

Usando a relação **(2.13)** e o item **c)** do **Teorema (2.3)** temos que f é mensurável, pois $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis. $\square$

Teorema 2.4. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, funções mensuráveis e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. A função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;*

$$h(x) = F(f(x), g(x))$$

é mensurável.

Demonstração:
Ver referência [1].

3 Integral de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$

Esse capítulo é destinado a Integral de Lebesgue propriamente dita. Começando por sua definição e depois provando resultados sobre ela, entre eles os importantes teoremas de convergência de Lebesgue.

No final será feita uma breve comparação entre a Integral de Lebesgue e a Integral própria de Riemann, onde será mostrado que a primeira é mais geral que a segunda.

3.1 Função Simples

Definição 3.1. *Seja $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que o conjunto imagem de s, é finito. Nesse caso, a função s é chamada de função simples.*

Definição 3.2. *Seja $E \subseteq \mathbb{R}^n$, e defina*

$$K_E(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in E \\ 0 & , \text{ se } x \notin E \end{cases} \tag{3.1}$$

K_E é chamada função característica de E.

A função característica é uma função simples.

Exemplo 3.1 Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \text{ é racional} \\ 0 & , \text{ se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

A função f é a função característica do conjunto dos racionais no intervalo $[0,1]$.

Teorema 3.1. *Toda função simples é uma combinação linear finita de funções características.*

Demonstração:

Seja s uma função simples e suponha que a imagem de s consiste dos números distintos $c_1, c_2, ..., c_n$. Seja

$$E_i = \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid s(x) = c_i\}.$$

Então, pela definição de função característica, segue que

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x).$$

Provando assim o teorema. □

Definição 3.3. *Seja E um conjunto. Por uma partição do conjunto E nós definimos os conjuntos disjuntos $E_1, E_2, ..., E_n$ tais que*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

Teorema 3.2. *Seja s um função simples com $E_i = \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid s(x) = c_i\}$, $i = 1, ..., n$ e $Im(s) = \{c_1, ..., c_n\}$, ou seja, a imagem de s consiste dos números distintos $c_1, c_2, ..., c_n$. A função s é mensurável se, e somente se, os conjuntos $E_1, ..., E_n$ são mensuráveis. Além disso, $\{E_i\}$ é uma partição do $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração:

Suponhamos que o conjunto $Im(s)$ esteja em ordem crescente. Suponhamos s é mensurável. Queremos provar que os conjuntos $E_i, i = 1, 2, ..., n$, são mensuráveis. De fato, para todo $i < n$, temos que

$$\begin{aligned} E_i &= \{\ x \mid s(x) = c_i\} \\ &= \{\ x \mid c_i \leq s(x) < c_{i+1}\} \\ &= \{\ x \mid s(x) \geq c_i\} \cap \{\ x \mid c_{i+1} > s(x)\}. \end{aligned}$$

No caso em que $i = n$, temos que

$$E_i = \{\ x \mid s(x) \geq c_n\}.$$

Pela hipótese e o **Teorema (2.1)**, segue que E_i é mensurável, pois a intersecção de conjuntos mensuráveis é mensurável.

Suponhamos que $E_1, ..., E_n$ sejam mensuráveis. Vamos provar que $s(x)$ é mensurável, ou seja, o conjunto $\{\ x \mid s(x) > a\}$ é mensurável para todo a. Considere os seguintes casos:

Caso 1. Se $a > c_n$, temos que

$$\{\ x \mid s(x) > a\} = \emptyset.$$

Caso 2. Se $a \leq c_1$, temos que

$$\{\ x \mid s(x) \geq a\} = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Caso 3. Para as possibilidades restantes existe j, onde $j = 2, ..., n$, tal que $c_{j-1} < a \leq c_j$. Nesse caso obtemos,

$$\{\ x \mid s(x) > a\} = \bigcup_{i=j}^{n} E_i.$$

Como a união de conjuntos mensuráveis é mensurável, segue que s é mensurável. Resta provar que $\{E_i\}$ é uma partição do $\mathbb{R}^n$. De fato, o domínio de s é o conjunto

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

Porém, o domínio de s é o $\mathbb{R}^n$ pela definição de função simples. Então, basta mostrar que $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Suponhamos que existe x, tal que $x \in E_i \cap E_j$ para $i \neq j$. Logo, $f(x) = c_i = c_j$, o que contradiz a hipótese de que c_i e c_j são distintos. $\square$

Teorema 3.3. *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Então,*

i) *Existe uma sequência* $\{s_n\}$ *de funções simples tal que*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$$

pontualmente em $\mathbb{R}^n$.

ii) *Se* $f \geq 0$, $\{s_n\}$ *pode ser escolhida como sendo uma sequência monótona crescente.*

iii) *Se* f *é mensurável,* $\{s_n\}$ *pode ser escolhida como sendo uma sequência de funções mensuráveis.*

Demonstração:

i) Considere os seguintes casos:

Caso 1. Suponhamos $f \geq 0$ e defina

$$E_{n,\ i} = \left\{ x \mid \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \text{e } F_n = \{ x \mid f(x) \geq n\}$$

onde $n = 1, 2, ...$ e $i = 1, 2, ..., n2^n$. Para cada n, o intervalo $[0, n]$ é dividido em $n2^n$ partes iguais de comprimento $\frac{1}{2^n}$. Estas partes são indexadas por i. Defina, também, as funções simples

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} K_{E_{n,\ i}}(x) + nK_{F_n}(x). \tag{3.2}$$

Queremos mostrar que, pontualmente, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = f(x)$$

ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$|f(x) - S_n(x)| < \epsilon.$$

Considere os seguintes subcasos.

Subcaso 1.1. Suponhamos f limitada em $x \in \mathbb{R}^n$ por $a > 0$. Tomando $n > a$ teremos que $f(x) \geq n$ não ocorre, logo, $x \notin F_n$ e, portanto, $x \in E_{n,\ i}$ para algum $i = i_0 \in \{1, 2, ..., n2^n\}$ do que segue

$$\frac{i_0 - 1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i_0}{2^n}$$

e

$$S_n(x) = \frac{i_0 - 1}{2^n}.$$

Logo,

$$\frac{1}{2^n} = \frac{i_0}{2^n} - \frac{i_0 - 1}{2^n} > f(x) - S_n(x) \geq \frac{i_0 - 1}{2^n} - \frac{i_0 - 1}{2^n} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2^n} > |f(x) - S_n(x)| \geq 0.$$

Dado $\epsilon > 0$, tome n tal que $\epsilon > \frac{1}{2^n}$, donde segue que

$$\log_2 \epsilon > \log_2 2^{-n},$$

ou seja,

$$n > (-1)\log_2 \epsilon = \log_2 \epsilon^{-1} = \log_2 \frac{1}{\epsilon}.$$

Logo, basta ter $n_0 > a$ e $n_0 > \log_2 \frac{1}{\epsilon}$, ou melhor, $n_0 = \max\left(\log_2 \frac{1}{\epsilon}, a+1\right)$. Portanto, para todo $n \geq n_0$,

$$\epsilon > \frac{1}{2^n} \geq |f(x) - S_n(x)|.$$

Subcaso 1.2. Se $f(x) = +\infty$ teremos que mostrar que para todo real m existe um natural n_0 tal que $n \geq n_0$ implica em $S_n(x) \geq m$. Tomando $n > m$ temos que

$$f(x) = +\infty > n$$

que implica em $x \in F_n$. Então,

$$S_n(x) = 0 + nK_{F_n}(x) = n.$$

Por consequência $S_n(x) \geq m$. Basta tomar $n_0 = m$, pois $n \geq n_0$ implica em $n \geq m$ e por consequência $S_n(x) \geq m$. E assim,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x); \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Caso 2. No caso em que f assume valores positivos e negativos defina

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{se } f \geq 0 \\ 0 & , \text{se } f < 0 \end{cases}$$

e

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & , \text{se } f \leq 0 \\ 0 & , \text{se } f > 0 \end{cases}$$

Então, $f = f^+ - f^-$ onde f^+ e f^- são sempre positivas. Podemos aplicar os casos anteriores a f^+ e f^- separadamente para aproximar, respectivamente, f^+ e f^- por sequências $\{S'_n\}$ e $\{S''_n\}$ de funções simples que convergem para f^+ e f^- no limite $n \to \infty$ de modo que $\{S'_n - S''_n\}$ converge para f quando $n \to \infty$.

Subcaso 2.1. Se $f(x) = -\infty$, proceda como no **Subcaso 1.2.** para f^+ e f^-.

ii) É suficiente pelo item **i)** provar que a sequência $\{S_n\}$ é uma sequência monótona crescente. De fato, tome x, n quaisquer, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $n = 1, 2, ...$ Se $f(x) \geq n + 1$

obtemos que

$$S_n(x) = n < n+1 = S_{n+1}(x).$$

Se $f(x) \in [n, n+1)$, então $S_n(x) = n$ e existe $j \in \{n2^{n+1}+1, ..., (n+1)2^{n+1}\}$ tal que $S_{n+1}(x) \in [\frac{j-1}{2^{n+1}}, \frac{j}{2^{n+1}})$. Logo

$$S_{n+1}(x) \geq n = S_n(x).$$

Se $f(x) \in [0, n]$, existe $i \in \{1, ..., n2^n\}$ tal que$f(x) \in [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})$, onde $S_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$. Porém em tal caso existe $j \in \{2i-1, 2i\}$ tal que $S_{n+1}(x) \in [\frac{j-1}{2^{n+1}}, \frac{j}{2^{n+1}}]$, assim obtemos

$$S_{n+1}(x) = \frac{j-1}{2^{n+1}} \geq \frac{2i-1-1}{2^{n+1}} = \frac{i-1}{2^n} = S_n(x).$$

iii) Suponhamos que f é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $i = 1, ..., n2^n$. Temos que

$$\left\{ x \mid f(x) \geq \frac{i-1}{2^n} \right\}$$

e

$$\left\{ x \mid f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}$$

são conjuntos mensuráveis, pois $\frac{i-1}{2^n}$ e $\frac{i}{2^n}$ são números reais. Logo,

$$E_{n,\ i} = \left\{ x \mid \frac{i}{2^n} > f(x) \geq \frac{i}{2^n} \right\} = \left\{ x \mid f(x) \geq \frac{i-1}{2^n} \right\} \cap \left\{ x \mid f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}$$

é mensurável para todo n e $i = 1, 2, ..., n2^n$. Além disso,$F_n = \{ x \mid f(x) \geq n\}$ é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$, pois n é um número real. Assim para todo n natural temos que S_n é mensurável, pois S_n é uma função simples, $E_{n,\ i}$ é mensurável para todo $i = 1, ..., n2^n$ e F_n é mensurável. Como f é mensurável então f^+ e f^- são mensuráveis pelo **Corolário (2.2)**. f^+ e f^- são funções não negativas então podem ser aproximadas por sequências de funções simples $\{S'_n\}$ e $\{S''_n\}$ respectivamente tal que $\{S'_n\} \to f^+$ e $\{S''_n\} \to f^-$ quando $n \to \infty$, além disso $\{S'_n\}$ e $\{S''_n\}$ são sequências de funções mensuráveis, pois f^+ e f^- são funções mensuráveis. Por consequência f pode ser aproximada por uma sequência de funções mensuráveis $\{S'_n - S''_n\} \to f$ quando $n \to \infty$.

Exemplo 3.2 Toda função característica de $E \subseteq \mathbb{R}^n$, onde E é mensurável, é uma função mensurável. De fato, seja f a função característica de E. Considere os seguintes casos:

Caso 1. Se $a < 0$.

$$\{\ x \mid f(x) > a\} = \mathbb{R}^n \in \mathfrak{M}$$

Pois $\mathbb{R}^n$ é mensurável. Então $\{\ x \mid f(x) > a\}$ é mensurável se $a < 0$.

Caso 2. Se $a \geq 1$.

$$\{\ x \mid f(x) > a\} = \emptyset \in \mathfrak{M}.$$

Então $\{\ x \mid f(x) > a\}$ é mensurável se $a \geq 1$.

Caso 3. Se $0 \leq a < 1$.

$$\{\ x \mid f(x) > a\} = E \in \mathfrak{M}$$

Então $\{\ x \mid f(x) > a\}$ é mensurável se $0 \leq a < 1$.

Definição 3.4. *Sejam $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, simples e mensurável dada por*

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x) \tag{3.3}$$

onde $c_i > 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$ e $E, E_i \in \mathfrak{M}$, e

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i m(E \cap E_i). \tag{3.4}$$

Se f é mensurável e não-negativa, a Integral de Lebesgue de f, sobre o conjunto E, relativa à medida de Lebesgue m, é definida por

$$\int_E f dm = \sup I_E(s). \tag{3.5}$$

O supremo é tomado sobre todas as funções simples s tal que $0 \leq s(x) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.4. *Seja f uma função simples, mensurável e não negativa, neste caso, temos que:*

$$\int_E f dm = I_E(f)$$

Demonstração:

Por consequência da hipótese $I_E(f) \geq I_E(s)$ para qualquer função simples s tal que $0 \leq s(x) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, ou seja, $I_E(f)$ é o máximo[1] do conjunto

$$\{ \ I_E(s) \mid 0 \leq s(x) \leq f(x) \ \}.$$

Quando o máximo de um conjunto existe ele coincide com o supremo desse mesmo conjunto pela **Proposição (B.1)** do **Apêndice B**, disso segue que $\sup I_E(s) = I_E(f)$ e portanto concluímos a demonstração.

Exemplo 3.3 Agora iremos calcular a Integral de Lebesgue da função característica dos racionais (função dada no **Exemplo (3.1)**) sobre o intervalo $[0,1]$. Utilizando a mesma notação da **Definição (3.2)** temos que,

$$K_{\mathbb{Q}}(x) = \sum_{i=1}^{2} c_i K_{E_i}(x),$$

onde $c_1 = 1, c_2 = 0, E_1 = \mathbb{Q}$ e $E_2 = \mathbb{I}$. Calculando a Integral de Lebesgue obtemos,

$$\int_0^1 K_{\mathbb{Q}} dm = 0$$

A equação acima é consequência de que,

$$\int_0^1 K_{\mathbb{Q}} dm = I_{[0,1]}(K_{\mathbb{Q}}) = 1 \cdot m([0,1] \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot m([0,1] \cap I) = 0$$

Definição 3.5. *Seja f mensurável, e considere as integrais*

$$\int_E f^+ dm \tag{3.6}$$

e

$$\int_E f^- dm \tag{3.7}$$

*onde $f^+ = \max(f,0)$ e $f^- = -\min(f,0)$. Suponhamos que uma das integrais **(3.6)** ou*

[1] Ver **Definição B.1**

(3.7) *é finita. Defina, então,*

$$\int_E f dm = \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm. \tag{3.8}$$

Se ambas as integrais ***(3.6)*** *e* ***(3.7)*** *são finitas, dizemos que f é integrável no sentido de Lebesgue no conjunto E, com respeito a m.*

As integrais das funções f^+ e f^- estão bem definidas. De fato, f^+ e f^- são não-negativas pelo **Corolário 2.2** são mensuráveis pois f é mensurável por hipótese, assim podemos utilizar a **Definição 3.4**.

Definição 3.6. *Definimos $\mathcal{L}(E)$ como sendo o conjunto das funções integráveis em E no sentido de Lebesgue, com respeito a m.*

Teorema 3.5. *Sejam f, g funções definidas num conjunto mensurável E do $\mathbb{R}^n$, com $E \in \mathfrak{M}$.*
a) *Se f é mensurável, limitada em E, e $m(E) < +\infty$, então $f \in \mathcal{L}(E)$.*
b) *Se f é mensurável e não negativa,*

$$\int_E f dm \geq 0.$$

c) *Se f e g são não negativas e mensuráveis em E, e se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então:*

$$\int_E f dm \leq \int_E g dm. \tag{3.9}$$

d) *Se $f \in \mathcal{L}(E)$, então $cf \in \mathcal{L}(E)$, para toda constante c, e*

$$\int_E cf dm = c \int_E f dm. \tag{3.10}$$

e) *Se $m(E) = 0$ e f é mensurável, então:*

$$\int_E f dm = 0. \tag{3.11}$$

f) *Se $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$, onde E e F são mensuráveis, $f \in \mathcal{L}(F)$, $E \in \mathfrak{M}$, então $f \in \mathcal{L}(E)$.*
g) *Se f é mensurável e $a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde a e b são constantes e, além disso, $m(E) < +\infty$, então:*

$$am(E) \leq \int_E f dm \leq bm(E). \tag{3.12}$$

h) *Se $f, g \in \mathcal{L}(E)$, e se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então:*

$$\int_E f dm \leq \int_E g dm. \tag{3.13}$$

Demonstração:

a) Considere os seguintes casos:

Caso 1: f é não negativa. Seja $0 \leq s \leq f$ onde s é simples, mensurável e não negativa. Escreva

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n, c_i > 0$, então:

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i m(E \cap E_i).$$

Como f é limitada e f é não negativa então existe $K > 0$ tal que $f(x) \leq K$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então $c_i \leq K$ para todo i donde

$$I_E(s) \leq K \sum_{i=1}^{n} m(E \cap E_i) = Km\left(\bigcup_{i=1}^{n}(E \cap E_i)\right).$$

Usando (**P.5**) do **Apêndice A**,

$$I_E(s) \leq Km\left(\bigcup_{i=1}^{n}(E \cap E_i)\right) = Km\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right).$$

Sendo s mensurável, então, $E_i \in \mathfrak{M}$, para todo i, pelo **Teorema (3.2)**. Ademais, $E \in \mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}$ é σ-anel, donde

$$E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \in \mathfrak{M}.$$

Como

$$E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \subseteq E$$

e m é σ-aditiva (em particular m é finitamente aditiva) então, pelo item **b)** do **Teorema (1.3)**,

$$m\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) \leq m(E)$$

que implica em

$$Km\left(E\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right)\leq Km(E)$$

e

$$I_E(s)\leq Km(E)<+\infty.$$

Logo,

$$\sup I_E(s)=\int_E fdm\leq Km(E)<+\infty. \tag{3.14}$$

Caso 2: Se f é limitada então f^+ e f^- são limitadas. Como f^+ e f^- são não negativas temos pelo caso 1 que

$$\int_E f^+dm<+\infty$$

e

$$\int_E f^-dm<+\infty.$$

Portanto,

$$\int_E fdm=\int_E f^+dm+\int_E f^-dm<+\infty.$$

Concluindo que $f\in\mathcal{L}(E)$.

b) Por consequência da **Definição (3.4)** quando f é mensurável e não negativa temos que:

$$\int_E fdm=\sup I_E(s)$$

onde o supremo é tomado sobre todas as funções simples tal que $0\leq s(x)\leq f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$ e

$$s(x)=\sum_{i=1}^{n}c_iK_{E_i}(x),\quad c_i\geq 0.$$

Temos ainda que $m(E\cap E_i)\geq 0$, o que implica

$$c_im(E\cap E_i)\geq 0$$

para todo i, e, portanto,

$$\sup I_E(s)\geq 0$$

que por sua vez implica

$$\int_E fdm\geq 0$$

c) Seja s uma função simples tal que $0 \leq s(x) \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então

$$g(x) \geq f(x) \geq s(x) \geq 0. \tag{3.15}$$

Seja p uma função simples tal que $0 \leq p(x) \leq g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, pela equação **(3.15)** obtemos que a função s satisfaz $0 \leq s(x) \leq g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo,

$$\{I_E(s) : 0 \leq s(x) \leq f(x)\} \subseteq \{I_E(p) : 0 \leq p(x) \leq g(x)\}.$$

Portanto,

$$\sup\{I_E(s) : 0 \leq s(x) \leq f(x)\} \leq \sup\{I_E(p) : 0 \leq p(x) \leq g(x)\}.$$

Por consequência,

$$\int_E f dm \leq \int_E g dm.$$

d) Considere os seguintes casos:

Caso 1. f não negativa, mensurável e $c \geq 0$.

Seja s uma função simples tal que $0 \leq s(x) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo,
$0 \leq cs(x) \leq cf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso cs é uma função simples mensurável e não negativa. De fato,

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}$$

implica

$$cs(x) = c\sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i} = \sum_{i=1}^{n} cc_i K_{E_i} = \sum_{i=1}^{n} d_i K_{E_i}$$

onde d_i é definido como cc_i, logo cs é simples. s é mensurável e $c \in \mathbb{R}$, pelo **Lema (2.3)** obtemos que cs é mensurável. Pela Integral de Lebesgue da função s obtemos

$$\int_E s dm = \sum_{i=1}^{n} c_i m(E \cap E_i)$$

que implica em

$$cI_E(s) = c\sum_{i=1}^{n} c_i m(E \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} cc_i m(E \cap E_i) = I_E(cs).$$

Por consequência

$$\int_E fdm = c\sup\{I_E(s) : 0 \leq s(x) \leq f(x)\} = \sup\{cI_E(s) : 0 \leq s(x) \leq f(x)\}.$$

Pela equação acima obtemos

$$\int_E fdm = \sup\{I_E(cs) : 0 \leq cs(x) \leq cf(x)\} = \sup\{I_E(t) : 0 \leq t(x) \leq cf(x)\} = \int_E cfdm$$

onde $t(x) = cs(x)$.

Caso 2. f é mensurável e c uma constante real. Pelo **Lema (2.3)** temos que cf é mensurável.

$$\int_E cfdm = \int_E (cf)^+dm - \int_E (cf)^-dm$$

Considere os seguintes subcasos:

Subcaso 2.1. Se $c \geq 0$, usando que f^+ e f^- são funções mensuráveis não negativas temos pelo caso 1 desse item que

$$\int_E (cf)^+dm - \int_E (cf)^-dm = c\int_E f^+dm - c\int_E f^-dm = c\left(\int_E f^+dm - \int_E f^-dm\right) = c\int_E fdm$$

Logo, se f for mensurável e $c \geq 0$ temos que

$$\int_E (cf)dm = c\int_E fdm. \tag{3.16}$$

Subcaso 2.2. Se $c < 0$ então $|c| \geq 0$ e usando que $-f$ é mensurável e a equação **(3.16)** obtemos

$$\int_E (cf)dm = \int_E |c|(-f)dm = |c|\left(\int_E (-f)^+dm - \int_E (-f)^-dm\right)$$

que implica em

$$\int_E (cf)dm = |c|\left(\int_E f^-dm - \int_E f^+dm\right) = -|c|\left(\int_E f^+dm - \int_E f^-dm\right) = c\int_E fdm.$$

Portanto, se f for mensurável e c uma constante real

$$\int_E (cf)dm = c\int_E fdm$$

f é mensurável, pois $f \in \mathcal{L}(E)$. Porém $f \in \mathcal{L}(E)$ implica em $cf \in \mathcal{L}(E)$, onde c é uma constante real. De fato, Se $c \neq 0$

$$\int_E (cf)^+ dm - \int_E (cf)^- dm = \int_E cf dm = c \int_E f dm < c(+\infty) \leq +\infty$$

o que implica em

$$\int_E (cf)^+ < +\infty$$

e

$$\int_E (cf)^- < +\infty.$$

Logo, $cf \in \mathcal{L}(E)$, se $c \neq 0$.

Se $c = 0$:

$$\int_E (cf)^+ dm - \int_E (cf)^- dm = \int_E cf dm = c \int_E f dm = 0 \leq +\infty$$

que implica

$$\int_E (cf)^+ < +\infty$$

e

$$\int_E (cf)^- < +\infty.$$

Logo, $cf \in \mathcal{L}(E)$, se $c = 0$.

e) Considere os seguintes casos:

Caso 1. f é não negativa. Seja s uma função simples mensurável tal que $0 \leq s(x) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i m(E \cap E_i).$$

Como $E_i \in \mathfrak{M}$ para todo i e $E \in \mathfrak{M}$, por ser $\mathfrak{M}$ σ-anel temos que $E \cap E_i \in \mathfrak{M}$ para todo i. Porém $E \cap E_i \subseteq E$ para todo i, $m(E) = 0$ e m é σ-aditiva (em particular m é finitamente aditiva) obtemos pelo item **b)** do **Teorema (1.11)** que para todo i

$$0 \leq m(E \cap E_i) \leq m(E) = 0.$$

Logo $m(E \cap E_i) = 0$ para todo i. Então

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i m(E \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i(0) = 0.$$

Por consequência

$$\int_E f dm = \sup\{I_E(s) : 0 \leq s(x) \leq f(x)\} = 0.$$

Caso 2. f é mensurável.

$$\int_E f dm = \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm = 0 - 0 = 0$$

pois f^+ e f^- são não negativas.

f) $f \in \mathcal{L}(F)$ então

$$\int_F f^+ dm < +\infty$$

e

$$\int_F f^- dm < +\infty.$$

Seja s uma função mensurável com $0 \leq s(x) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Pelo item **b)** do **Teorema (1.11)**

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i m(E \cap E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i m(F \cap E_i).$$

Porém,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i m(F \cap E_i) = I_F(s) \leq \int_F g dm < +\infty.$$

Logo,

$$I_E(s) \leq \int_F g dm.$$

Portanto,

$$\int_E f dm \leq \int_F g dm < +\infty.$$

Como consequência da equação acima

$$\int_E f^+ dm < +\infty$$

e

$$\int_E f^- dm < +\infty.$$

Logo $f \in \mathcal{L}(E)$.

g) Considere os seguintes casos:

Caso 1. $a \geq 0$. Considere a função: $s_a(x) = aK_{E_1}(x)$, com $E_1 = \mathbb{R}^n$. A função s_a

é simples e $0 \leq s_a(x) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então

$$I_E(s_a) \leq \int_E f dm.$$

Porém,

$$I_E(s_a) = am(E \cap E_1) = am(E \cap \mathbb{R}^n) = am(E).$$

Assim,

$$am(E) \leq \int_E f dm.$$

Como $f(x) \leq b$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então, f é limitada no $\mathbb{R}^n$, em especial em E, Como $m(E) < +\infty$ e f é mensurável assim satisfazendo as hipóteses do item **a)** desse teorema (ver equação **(3.14)** vem que

$$\int f dm \leq bm(E).$$

Caso 2: $0 \leq f - a \leq b - a$. Pelo caso 1 temos

$$0 \leq \int_E (f - a) dm \leq (b - a) m(E) \tag{3.17}$$

Pelo **Teorema (3.11)** que será provado mais adiante obtemos

$$\int_E (f - a) dm = \int_E f dm - \int_E a dm = \int_E f dm - am(E). \tag{3.18}$$

Usando as equações **(3.17)** e **(3.18)** obtemos

$$0 \leq \int_E (f - a) dm = \int_E f dm - am(E)$$

que implica em

$$am(E) \leq \int_E f dm.$$

Usando novamente as equações **(3.17)** e **(3.18)** obtemos

$$(b - a) m(E) \geq \int_E (f - a) dm = \int_E f dm - am(E)$$

que implica em

$$bm(E) \geq \int_E f dm.$$

Portanto,

$$am(E) \leq \int_E f dm \leq bm(E).$$

h) Perceba que esse item é basicamente uma generalização do item **c)** do mesmo teorema, porém com a hipótese adicional de que as integrais sejam finitas. Por hipótese

$$f(x) \leq g(x)$$

então

$$0 \leq g(x) - f(x).$$

Defina

$$h(x) := g(x) - f(x).$$

Portanto, h é não negativa. $f, g \in \mathcal{L}(E)$ então f e g são mensuráveis e logo h é mensurável. Pelo item **b)** deste teorema,

$$0 \leq \int_E hdm = \int_E (g - f)dm.$$

Pelo **Teorema (3.11)** que será provado mais adiante obtemos

$$0 \leq \int_E (g - f)dm = \int_E gdm + \int_E (-f)dm.$$

Pela equação anterior e o item **d)** deste teorema

$$0 \leq \int_E gdm - \int_E fdm$$

que implica

$$\int_E fdm \leq \int_E gdm.$$

$\square$

Teorema 3.6. *Seja f mensurável no $\mathbb{R}^n$ e $A \in \mathfrak{M}$.*
a) *Seja f não negativa no $\mathbb{R}^n$. Defina:*

$$\varphi(A) = \int_A fdm.$$

Então, φ é σ-aditiva em $\mathfrak{M}$. ***b)*** *Se $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, defina:*

$$\varphi(A) = \int_A fdm.$$

Então φ é σ-aditiva em $\mathfrak{M}$.

Demonstração:

a) Temos que mostrar que se

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

e $A_i \cap A_j = 0$ para $i \neq j$, temos

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

onde $A_n \in \mathfrak{M}$, $n = 1, 2, 3, ...$

Caso 1. f é uma função simples não negativa, ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $c_i > 0$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i K_{E_i}(x)$$

que implica em

$$\varphi(A) = \int_A f dm.$$

Pelo **Teorema (3.4)** do **Teorema (3.5)**

$$\varphi(A) = I_A(f) = \sum_{i=1}^{r} c_i m(A \cap E_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r} c_i m(A_n \cap E_i) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}(f).$$

Pelo **Teorema (3.4)**

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f dm = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Caso 2. Como f é uma função mensurável e não negativa no $\mathbb{R}^n$, para toda função s simples tal que $0 \leq s \leq f$ temos pelo **Teorema (3.4)**

$$\int_A s dm = I_A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}(s).$$

Novamente pelo **Teorema (3.4)**

$$\int_A s dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_n} s dm \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_n} f dm = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Pela equação anterior obtemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

é cota superior do conjunto Y, onde Y é definido como

$$Y := \{\ I_A(s) \mid s \text{ é função simples e } 0 \leq s \leq f\}.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) \geq \sup I_A(s) = \int_A f dm = \varphi(A),$$

onde a última igualdade é válida pois f é uma função mensurável e não negativa no $\mathbb{R}^n$. Pela equação anterior obtemos que

$$\varphi(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) \tag{3.19}$$

porém,

$$\varphi(A) = \int_A f dm = \sup I_A(s) = \sup \left(\sum_{i=1}^{r} c_i m(A \cap E_i) \right) = \sup \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r} c_i m(A_n \cap E_i) \right)$$

e

$$\varphi(A_n) = \int_{A_n} f dm = \sup I_{A_n}(s) = \sup \left(\sum_{i=1}^{r} c_i m(A_n \cap E_i) \right) \leq \sup \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r} c_i m(A_n \cap E_i) \right),$$

obtemos assim $\varphi(A) \geq \varphi(A_n)$. Se $\varphi(A_n) = \infty$ para algum n teremos que:

$$\varphi(A) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

que implica

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Se $\varphi(A_n) < \infty$ para todo n. Pelo teorema anterior para todo $\epsilon > 0$ nós podemos escolher uma função mensurável s tal que $0 \leq s \leq f$ de forma que

$$\int_{B_1} s dm \geq \int_{B_1} f dm - \epsilon$$

e

$$\int_{B_2} s dm \geq \int_{B_2} f dm - \epsilon.$$

Assim,

$$(B_1 \cup B_2) \geq \int_{B_1 \cup B_2} s dm$$

Pelo caso 1
$$(B_1 \cup B_2) = \int_{B_1} sdm + \int_{B_2} sdm \geq \varphi(B_1) + \varphi(B_2) - 2\epsilon$$
onde B_1 e B_2 são subconjuntos disjuntos quaisquer de A. Como $\epsilon > 0$ é qualquer, temos que:
$$\varphi(B_1 \cup B_2) \geq \varphi(B_1) + \varphi(B_2) \tag{3.20}$$
em particular
$$\varphi(A_1 \cup A_2) \geq \varphi(A_1) + \varphi(A_2).$$

Hipótese de indução: Para algum $k, k \geq 2$ temos que
$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{k} \varphi(A_i)$$
para $n+1$:
$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \varphi\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right)$$
usando a equação **(3.20)**
$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + \varphi(A_{k+1}).$$
usando a hipótese de indução
$$\sum_{i=1}^{k} \varphi(A_i) + \varphi(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \varphi(A_i).$$
Portanto, para todo k
$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{k} \varphi(A_i)$$
que implica
$$\varphi(A) = \varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{3.21}$$
Pelas desigualdades **(3.19)** e **(3.21)** obtemos
$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Logo φ é σ-aditiva em $\mathfrak{M}$ se f é mensurável e não negativa no $\mathbb{R}^n$.

b) Se $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\varphi(A) = \int_A f dm = \int_A f^+ dm - \int_A f^- dm.$$

Definimos

$$\varphi(A^+) := \int_A f^+ dm$$

$$\varphi(A^-) := \int_A f^- dm$$

$$\varphi(A_n^+) := \int_{A_n} f^+ dm$$

e

$$\varphi(A_n^-) := \int_{A_n} f^- dm.$$

Logo

$$\varphi(A) = \varphi(A^+) - \varphi(A^-).$$

Como f^+ e f^- são funções mensuráveis não negativas no $\mathbb{R}^n$ pelo item **a)** desse Teorema temos que

$$\varphi(A) = \varphi(A^+) - \varphi(A^-) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n^+) - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(A_n^+) - \varphi(A_n^-)) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

□

Corolário 3.1. *Se* $A \in \mathfrak{M}, B \subseteq A$, *e* $m(A - B) = 0$, *então*

$$\int_A f dm = \int_B f dm$$

Demonstração:

Usando **P.6** do **Apêndice A** e que $B \subseteq A$ obtemos $A = B \cup (A - B)$. Aplicando o item **b)** do **Teorema (3.6)** obtemos

$$\int_A f dm = \varphi(A) = \varphi(B) + \varphi(A - B) = \int_B f dm + \int_{A-B} f dm.$$

Por hipótese $m(A - B) = 0$, então pelo item **d)** do **Teorema (3.5)**

$$\int_A f dm = \int_B f dm.$$

□

Esse corolário mostra que conjuntos de medida de Lebesgue nula são ignorados na integração. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 3.7. *Indicamos $f \sim g$ em E se o conjunto*

$$\{\ x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$$

tem medida nula.

Teorema 3.7. *A relação $\sim$ em E para conjuntos de $\mathfrak{M}$ é uma relação de equivalência, ou seja, $f \sim f$; $f \sim g$ implica $g \sim f$; $f \sim g$ e $g \sim h$ implica $f \sim h$. Além disso*

$$\int_A f dm = \int_A g dm$$

para todo subconjunto mensurável A de E se $f \sim g$ em E.

Nota. Se uma propriedade P é válida para todo $x \in E - A$, e se $m(A) = 0$, é costume dizer que P é válida em quase todo $x \in E$, ou que P vale quase em todo ponto de E. Se $f \in \mathcal{L}(E)$, está claro que $f(x)$ deve ser finita em "quase todo ponto" de E. Portanto na maioria dos casos sem perda de qualquer generalidade nós iremos assumir que as funções dadas devem ter valores finitos a princípio.

Teorema 3.8. *Se $f \in \mathcal{L}(E)$, então $|f| \in \mathcal{L}(E)$ e*

$$\left|\int_E f dm\right| \leq \int_E |f| dm.$$

Demonstração:
Escrevemos $E = A \cup B$, onde $f(x) \geq 0$ em A e $f(x) < 0$ em B. Como $f \in \mathcal{L}(E)$, então f é mensurável e temos $|f|$ mensurável. Pelo item **a)** do **Teorema (3.5)**

$$\int_E |f| dm = \int_A |f| dm + \int_B |f| dm = \int_A f^+ dm + \int_B f^- dm < +\infty.$$

Logo $|f| \in \mathcal{L}(E)$, $f \leq |f|$ e $-f \leq |f|$. Pelo item **h)** do **Teorema (3.5)**

$$\int_E f dm \leq \int_E |f| dm.$$

Pelo item **d)** do **Teorema (3.5)**

$$-\int_E f dm = \int_E (-f) dm.$$

Usando o item **h)** do **Teorema (3.5)**

$$-\int_E f dm \leq \int_E |f| dm.$$

Portanto,

$$\left| \int_E f dm \right| \leq \int_E |f| dm.$$

□

Teorema 3.9. *Suponhamos f mensurável em E, $|f| \leq g$, e $g \in \mathcal{L}(E)$. Então $f \in \mathcal{L}(E)$.*

Demonstração:

Por hipótese f é mensurável, então f^+ e f^- são mensuráveis em E pelo item **c)** do **Teorema (3.5)**. Como $g \in \mathcal{L}(E)$ então g é mensurável em E e podemos usar o item **h)** do **Teorema (3.5)** pois f^+ e f^- são não negativas e além disso $f^+ \leq g$ e $f^- \leq g$, logo:

$$\int_E f^+ dm \leq \int_E g dm < +\infty$$

e

$$\int_E f^- dm \leq \int_E g dm < +\infty$$

Portanto $f \in \mathcal{L}(m)$.

□

Teorema 3.10. ***Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue***

Suponhamos $E \in \mathfrak{M}$. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que para cada $x \in E$

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ...$$

Seja f a função dada por

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

onde $x \in E$. Então,

$$\int_E f dm = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n dm.$$

Demonstração:

Por hipótese, $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis não negativas em E , usando o item **c)** do **Teorema (3.5)** obtemos

$$\int_E f_1 dm \leq \int_E f_2 dm \leq ... \,.$$

Usando o fato de que toda sequência monótona de números reais é convergente se for limitada[2],

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dm = \alpha \tag{3.22}$$

para algum α, podendo α ser $+\infty$ no caso da sequência não ser limitada. Defina o conjunto Y como segue,

$$Y = \left\{\int_E f_n dm, \text{ onde } n = 1, 2, ...\right\}.$$

Então, α é o supremo do conjunto Y. Além disso, para todo $x \in E$ e para todo n,

$$0 \leq f_n(x) \leq f(x).$$

Pelo item **c)** do **Teorema (3.5)** obtemos

$$\int_E f_n dm \leq \int_E f dm.$$

Logo, $\int_E f dm$ é cota superior do conjunto Y, e assim,

$$\int_E f dm \geq \alpha. \tag{3.23}$$

Escolha c tal que $0 < c < 1$, e seja s uma função mensurável tal que $0 \leq s \leq f$. Defina, para $n = 1, 2, ...$,

$$E_n = \{\ x \mid f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Então, $E_1 \subseteq E_2 \subseteq ...$, pois $f_1(x) \leq f_2(x) \leq ...$. Além disso, E_n é mensurável, para n qualquer, $n = 1, 2, ...$, pois $cs(x)$ é um número real e s é mensurável. Considere o conjunto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Este conjunto é o próprio E. De fato, dado $x \in E$, se $f(x) = 0$ temos que $x \in E_n$, para todo n, e

$$f_n(x) = 0$$

Se $f(x) > 0$, então

$$cs(x) < f(x),$$

e existe n_0 tal que

$$f_{n_0} > cs(x).$$

[2]Para demonstração ver referência [5]

Logo, $x \in E_{n_0}$, e portanto pertence a união dos E_n. Esse n_0 existe, pois

$$\sup\{f_1(x), f_2(x), ...\} = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Assim, basta aplicar o item **b)** da **Proposição (B.1) do Apêndice B**. Para n qualquer,

$$\alpha \geq \int_E f_n dm = \int_{E_n} f_n dm + \int_D f_n dm \geq \int_{E_n} f_n dm \geq c \int_{E_n} sdm$$

onde $D = E - E_n$. Pois, $E_n \subseteq E$ e f é não negativa e mensurável, podendo assim aplicar o **Teorema (3.6)**. Usando os **Teoremas (3.6)** e **(1.4)**,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} sdm = \int_E sdm.$$

Logo,

$$\alpha \geq c \int_E sdm$$

que implica

$$\alpha \geq \int_E sdm.$$

De fato, suponha, por absurdo, que

$$\alpha < \int_E sdm.$$

Então, $\alpha \neq +\infty$. Além disso, se

$$\int_E sdm \neq 0,$$

existe c real tal que $\alpha < c \int_E sdm < \int_E sdm$, com $0 < c < 1$. Uma contradição. No caso em que

$$\int_E sdm = 0,$$

temos

$$\alpha \geq c \int_E sdm = \int_E sdm$$

e, portanto provamos o resultado. Por consequência,

$$\alpha \geq \int_E sdm. \tag{3.24}$$

Pelas equações **(3.22)**, **(3.23)** e **(3.24)** obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n dm = \int_E f dm.$$

□

Teorema 3.11. *Suponhamos $f = f_1 + f_2$, onde $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E)$. Então $f \in \mathcal{L}(E)$, e*

$$\int_E f dm = \int_E f_1 dm + \int_E f_2 dm.$$

Demonstração:

Caso 1. Se f_1, f_2 são funções características. Sejam

$$f_1 = K_{A_1}$$

e

$$f_2 = K_{A_2}.$$

Fazendo a soma destas funções, obtemos a seguinte função simples:

$$f_1 + f_2 = K_{A_1} + K_{A_2} = K_{A_1 - A_2} + K_{A_1 \cap A_2} + K_{A_2 - A_1}$$

e, portanto,

$$\int_E (f_1 + f_2) dm = m((A_1 - A_2) \cap E) + 2m((A_1 \cap A_2) \cap E) + m((A_2 - A_1) \cap E).$$

Usando o fato de m ser σ-aditiva,

$$\int_E (f_1 + f_2) dm = m(A_1 \cap E) + m(A_2 \cap E) = \int_E f_1 dm + \int_E f_2 dm.$$

Caso 2. Se f_1, f_2 são funções simples, ou seja,

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i K_{A_i}(x)$$

e

$$f_2(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j K_{B_j}(x)$$

onde $\{A_i\}$ e $\{B_j\}$ são partições do $\mathbb{R}^n$. Todas as funções simples podem ser escritas dessa forma, o que foi provado no **Teorema (3.2)**. Fazendo a soma das funções simples f_1 e f_2,

$$f_1 + f_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) K_{A_i \cap B_j}.$$

Logo,

$$\int_E (f_1+f_2)dm = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j)m((A_i\cap B_j)\cap E). \tag{3.25}$$

Porém,

$$f_1 = a_i K_{A_i}$$

que implica

$$\int_E f_1 dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} a_i m((A_i \cap X)\cap E) = \sum_{i=1}^{n} a_i m\left(\left(A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right)\right)\cap E\right).$$

Por ser m σ-aditiva, ela em especial é aditiva, logo

$$\int_E f_1 dm = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} m((A_i\cap B_j)\cap E). \tag{3.26}$$

Usando um raciocínio semelhante para a outra função obtemos

$$\int_E f_2 dm = \sum_{j=1}^{m} b_j m(B_j \cap E) = \sum_{j=1}^{m} b_j m((B_j \cap X)\cap E) = \sum_{j=1}^{m} b_j m\left(\left(B_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right)\cap E\right).$$

Novamente, por ser m σ-aditiva, ela em especial é aditiva, logo

$$\int_E f_2 dm = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} m((A_i\cap B_j)\cap E). \tag{3.27}$$

Pelas equações **(3.25)**,**(3.26)** e **(3.27)** obtemos

$$\int_E (f_1+f_2)dm = \int_E f_1 dm + \int_E f_2 dm.$$

Caso 3. Se f, g são funções mensuráveis não negativas. Tomemos sequências $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ de funções mensuráveis simples, com $0 \leq f_n \leq f_{n+1}; 0 \leq g_n \leq g_{n+1}$ e $f_n \to f, g_n \to g$. O que é possível pelo **Teorema 3.3**. Pelo **Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue** obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dm = \int_E f dm \tag{3.28}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n dm = \int_E g dm. \tag{3.29}$$

Porém, pelo caso 2, obtemos

$$\int_E (f_n+g_n)dm = \int_E f_n dm + \int_E g_n dm. \tag{3.30}$$

Pelas equações **(3.28)**,**(3.29)** e **(3.30)** obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_E (f_n+g_n)dm = \int_E fdm + \int_E gdm.$$

Aplicando novamente o **Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue**

$$\lim_{n\to\infty}\int_E (f_n+g_n)dm = \int_E (f+g)dm.$$

Portanto,

$$\int_E (f+g)dm = \int_E fdm + \int_E gdm.$$

Caso 4. Se f, g são mensuráveis; $f \geq 0$ e $g \leq 0$. Sejam

$$E_+ = \{\ x \mid f(x)+g(x) \geq 0\}$$

e

$$E_- = \{\ x \mid f(x)+g(x) < 0\}.$$

Então,

$$\int_E (f+g)dm = \int_E (f+g)^+dm - \int_E (f+g)^-dm.$$

Pelo **Teorema (3.6)**

$$\int_E (f+g)^+dm = \int_{E^+} (f+g)^+dm + \int_{E^-} (f+g)^+dm = \int_{E^+} (f+g)^+dm.$$

Note que $(f+g)^+$ é a função nula sobre E^- e sobre E^+ as funções $f+g$ e $-g$ são não negativas. Assim, pelo caso 3,

$$\int_{E_+} fdm = \int_{E^+} (f+g)+(-g)dm = \int_{E^+} (f+g)dm + \int_{E^+} (-g)dm.$$

Pelo item **d)** do **Teorema (3.5)**

$$\int_{E_+} fdm = \int_{E_+} (f+g)dm - \int_{E_+} gdm$$

que implica em

$$\int_{E_+} (f+g)dm = \int_{E_+} fdm + \int_{E_+} gdm.$$

Além disso, por ser $f+g$ não negativa podemos utilizar novamente o caso 3,

$$\int_{E_+} (f+g)^+dm = \int_{E_+} (f+g)dm = \int_{E_+} fdm + \int_{E_+} gdm.$$

Note que $(f+g)^-$ é a função nula sobre E^+. Portanto,

$$\int_E (f+g)^- dm = \int_{E_+} (f+g)^- dm + \int_{E_+} (f+g)^- dm = \int_{E_-} (f+g)^- dm.$$

Sobre E_- as funções $-(f+g)$ e f são funções não negativas. Então, pelo caso 3

$$\int_{E_-} (-g) dm = \int_{E_-} -(f+g) + f dm = \int_{E_-} -(f+g) dm + \int_{E_-} f dm.$$

Pelo item **d)** do **Teorema (3.5)** e manipulando a equação anterior,

$$\int_{E_-} -(f+g) dm = -\int_{E_-} f dm + \int_{E_-} (-g) dm = -\int_{E_-} f dm - \int_{E_-} g dm.$$

Por ser $(f+g)$ não positiva em E_- obtemos

$$\int_{E_-} (f+g)^- dm = \int_{E_-} -(f+g) dm = -\int_{E^-} f dm - \int_{E_-} g dm. \tag{3.31}$$

Portanto, utilizando as equações **(3.28)** e **(3.29)**,

$$\int_E (f+g) dm = \int_{E_+} (f+g)^+ dm - \int_{E_-} (f+g)^- dm = \int_{E_+} f dm + \int_{E_+} g dm + \int_{E_-} f dm + \int_{E_-} g dm.$$

Então, pelo **Teorema (3.6)** aplicado na equação anterior,

$$\int_E (f+g) dm = \int_E f dm + \int_E g dm.$$

Caso 5. Sejam f, g funções mensuráveis. Definimos

$$E = E_{++} \cup E_{+-} \cup E_{-+} \cup E_{--}$$

onde

$$E_{++} = \{\ x \mid f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) \geq 0\},$$

$$E_{+-} = \{\ x \mid f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) < 0\},$$

$$E_{-+} = \{\ x \mid f(x) < 0 \text{ e } g(x) \geq 0\},$$

$$E_{--} = \{\ x \mid f(x) < 0 \text{ e } g(x) < 0\}.$$

Aplicando o **Teorema (3.6)**,

$$\int_E (f+g) dm = \int_{E_{++}} (f+g) dm + \int_{E_{+-}} (f+g) dm + \int_{E_{-+}} (f+g) dm + \int_{E_{--}} (f+g) dm.$$

Pelo caso 3,

$$\int_{E_{++}}(f+g)dm = \int_{E_{++}} fdm + \int_{E_{++}} gdm. \tag{3.32}$$

Pelo caso 4,

$$\int_{E_{+-}}(f+g)dm = \int_{E_{+-}} fdm + \int_{E_{+-}} gdm. \tag{3.33}$$

Porém $f+g = g+f$, então, novamente pelo caso 4,

$$\int_{E_{-+}}(f+g)dm = \int_{E_{-+}} fdm + \int_{E_{-+}} gdm. \tag{3.34}$$

Pelo caso 3,

$$\int_{E_{--}} -(f+g)dm = \int_{E_{--}} (-f)dm + \int_{E_{--}} (-g)dm.$$

Aplicando o item **d)** do **Teorema (3.5)**,

$$-\int_{E_{--}}(f+g)dm = -\int_{E_{--}} fdm - \int_{E_{--}} gdm,$$

que implica

$$\int_{E_{--}}(f+g)dm = \int_{E_{--}} fdm + \int_{E_{--}} gdm. \tag{3.35}$$

Pelo **Teorema (3.6)** e equações **(3.32)**,**(3.33)**,**(3.34)** e **(3.35)** obtemos

$$\int_E (f+g)dm = \int_E fdm + \int_E gdm.$$

Por hipótese $f = f_1 + f_2$, onde $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E)$. Basta considerarmos como no caso 5, $f_1 = f, f_2 = g$ e obtemos

$$\int_E fdm = \int_E f_1 dm + \int_E f_2 dm$$

isso por sua vez, implica em

$$\int_E fdm = \int_E f_1 dm + \int_E f_2 dm < +\infty$$

pois $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E)$, portanto $f \in \mathcal{L}(E)$. $\square$

Teorema 3.12. *Suponhamos $E \in \mathfrak{M}$. Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis não negativas, e para todo $x \in E$*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Então

$$\int_E f dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n dm$$

Demonstração:
Por hipótese,

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x). \tag{3.36}$$

Definimos a função

$$F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x).$$

Então, reescrevemos a função f como

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} F_N(x). \tag{3.37}$$

Definimos a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$F(y, z) = y + z,$$

onde y e z são reais quaisquer, logo F é contínua. Perceba que

$$F_1(x) = f_1(x)$$

e

$$F_{j+1} = F(F_j(x), f_{j+1}(x)),$$

para todo j,$j = 2, 3, \dots$. Como $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis temos que F_1 é mensurável e pelo uso do **Teorema (2.4)** obtemos que F_2 é mensurável. Suponha, por hipótese de indução que para algum $j, j \leq 2$ temos que F_j é mensurável. Para o caso $j + 1$ usando a hipótese de indução e o **Teorema (2.4)** obtemos que F_{j+1} é mensurável. Portanto $\{F_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis. Pelo fato de f ser o limite da sequência de funções mensuráveis $\{F_N\}$, temos que essa sequência é convergente, então pelo **Corolário (2.3)**, obtemos que f é mensurável. A sequência de funções $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis não negativas, então para todo $x \in E$

$$F_{N+1}(x) \geq F_N(x)$$

Assim, $\{F_N\}$ é uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis não negativas, pelas equações **(3.36)** e **(3.37)** e usando o **Teorema da Convergência Monótona de**

Lebesgue obtemos

$$\int_E f dm = \lim_{N\to\infty} \int_E F_N dm = \lim_{N\to\infty} \int_E \sum_{n=1}^{N} f_n dm.$$

Pelo **Teorema (3.11)**,

$$\lim_{N\to\infty} \int_E \sum_{n=1}^{N} f_n dm = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n dm.$$

□

Teorema 3.13. ***Teorema de Fatou***

Suponhamos $E \in \mathfrak{M}$. Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis não negativas e

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \inf_{\{n\geq N\}} f_n(x)$$

para todo $x \in E$, então,

$$\int_E f dm \leq \lim_{N\to\infty} \inf_{\{n\geq N\}} \int_E f_n(x).$$

Demonstração:

Definimos

$$g_n(x) = \inf_{K\geq n} f_K(x).$$

Como $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis, então pelo item **b)** do **Teorema (2.3)** obtemos que, $\{g_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis em E. Por ser $\{f_n\}$ uma sequência de funções não negativas, temos que para todo $x \in E$,

$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq g_3(x) \leq \ldots . \tag{3.38}$$

Porém, para todo $x \in E$,

$$f_n(x) \geq \inf_{\{K\geq n\}} f_K(x) = g_n(x).$$

Assim, temos que para todo $x \in E$,

$$g_n(x) \leq f_n(x). \tag{3.39}$$

Por consequência da definição de f,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x).$$

Pelo **Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue** temos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n dm = \int_E f dm. \tag{3.40}$$

Pelas relações **(3.38)**, **(3.39)** e o item **c)** do **Teorema (3.5)** obtemos

$$\int_E g_n dm \leq \int_E f_n dm. \tag{3.41}$$

Então, para todo $N \in \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ é verdade que

$$\inf_{\{n\geq N\}}\int_E g_n dm \leq \inf_{\{n\geq N\}}\int_E f_n dm.$$

Logo,

$$\lim_{N\to\infty}\inf_{\{n\geq N\}}\int_E g_n dm \leq \lim_{N\to\infty}\inf_{\{n\geq N\}}\int_E f_n dm. \tag{3.42}$$

Pela equação **(3.38)** e pelo item **c)** do **Teorema (3.5)**, temos que para todo $n, n = 1, 2, ...$

$$\inf_{\{n\geq N\}}\int_E g_n dm = \int_E g_N dm.$$

Portanto,

$$\lim_{N\to\infty}\inf_{\{n\geq N\}}\int_E g_n dm = \lim_{N\to\infty}\int_E g_N dm. \tag{3.43}$$

Pelas equações **(3.40)**,**(3.42)** e **(3.43)** provamos o teorema. $\square$

Teorema 3.14. ***Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue***

Suponhamos $E \in \mathfrak{M}$. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que para todo $x \in E$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x). \tag{3.44}$$

Se existe uma função $g \in \mathcal{L}(E)$, tal que para $x \in E$ e $n = 1, 2, 3, ...$

$$|f_n(x)| \leq g(x), \tag{3.45}$$

então

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n dm = \int_E f dm.$$

Demonstração:

Pelo **Teorema (3.9)** temos que $f_n \in \mathcal{L}(E)$ para todo n e pelo fato da sequência $\{f_n\}$ ser convergente temos pelo **Corolário (2.3)** que $f \in \mathcal{L}(E)$, pois $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in E$. De fato, suponha que $f(x) > g(x)$ para algum $x \in E$, então pela equação **(3.44)** existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ temos

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Tomemos $\epsilon = f(x) - g(x)$, portanto

$$f(x) - f_n(x) < f(x) - g(x)$$

que implica

$$f_n(x) > g(x).$$

Pela equação **(3.45)** obtemos $g(x) > 0$, por consequência

$$f_n(x) > 0$$

que implica

$$|f_n(x)| = f_n(x) > g(x),$$

o que contradiz a hipótese presente na equação **(3.45)**. Logo, $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in E$. Considere a sequência $\{f_n + g_n\}$, que é uma sequência de funções mensuráveis não negativas que converge para $f + g$ pontualmente. Pela demonstração do **Corolário (2.3)** obtemos que

$$\lim_{n \to N} \inf_{\{n \geq N\}} (f_n + g)(x) = \lim_{n \to N} (f_n + g)(x) = (f + g)(x).$$

Pelo **Teorema de Fatou**,

$$\int_E (f + g) dm \leq \lim_{n \to N} \inf_{\{n \geq N\}} \int_E (f_n + g) dm. \tag{3.46}$$

Aplicando o **Teorema (3.11)** na equação anterior, obtemos

$$\int_E f dm \leq \lim_{n \to N} \inf_{\{n \geq N\}} \int_E f_n dm.$$

Considere a sequência $\{g - f_n\}$, que é uma sequência de funções mensuráveis não negativas que converge pontualmente para $f + g$. Pela prova do **Corolário (2.3)** obtemos que

$$\lim_{n \to \infty} \inf_{\{n \geq N\}} (g - f_n) dm = \int_E (g - f_n)(x) = (g - f)(x).$$

Novamente pelo **Teorema de Fatou**,

$$-\int_E f dm \leq \lim_{n \to \infty} \inf_{\{n \geq N\}} \left(-\int_E f_n dm \right),$$

que implica

$$\int_E f dm \geq \lim_{n\to\infty} \inf_{\{n\geq N\}} . \tag{3.47}$$

Pela existência do limite da integral

$$\int_E f_n dm$$

quando $n \to \infty$, obtemos pelas equações **(3.46)** e **(3.47)**

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n dm = \int_E f dm.$$

□

Corolário 3.2. *Se $m(E) < +\infty$, $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis uniformemente limitada e $f_n(x) \to f(x)$ em E, então:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n dm = \int_E f dm.$$

Demonstração:

Como a sequência $\{f_n\}$ é uniformemente limitada, logo para todo n e para todo $x \in E$ existe M real, tal que,

$$|f_n(x)| < M.$$

Definamos g como a função constante M, temos pelo **Lema (2.2.)** que g é mensurável. Pelo item **b)** do **Teorema (3.5)** obtemos

$$\int_E g dm = Mm(E) < +\infty.$$

Portanto, $g \in \mathcal{L}(E)$. Pelo **Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue** provamos o teorema. □

3.2 Comparação da Integral de Riemann com a Integral de Lebesgue

O próximo teorema irá mostrar que toda função que é integrável no sentido de Riemann é também integrável no sentido de Lebesgue e que funções integráveis no sentido de Riemann são sujeitas a condições mais fortes de continuidade (o que será melhor explicado no item **b)** do próximo teorema). A teoria de Lebesgue nos permite integrar uma classe muito maior de funções e muitas operações com limites podem ser realizadas.

Uma das dificuldades que é encontrada na teoria da integração de Riemann é que o limite de funções integráveis no sentido de Riemann (ou sempre de funções contínuas) podem não ser integrável no sentido de Riemann. Essa dificuldade é agora eliminada pois limite de funções mensuráveis são sempre mensuráveis.
Seja $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, e $\mathfrak{M}$ a família dos conjuntos m-mensuráveis de $[a, b]$. Denotemos por

$$\int_a^b f dx$$

a Integral de Lebesgue de f sobre $[a, b]$ e indiquemos por

$$\mathfrak{R}\int_a^b f dx$$

a Integral de Riemann de f sobre $[a, b]$.

Se f é integrável em I no sentido de Riemann, indicaremos $f \in \mathfrak{R}(I)$.

Definição 3.8. *Seja $[a, b]$ um itervalo real. Por uma partição P_n de $[a, b]$ nós definimos o conjunto finito de pontos $x_0, x_1, ..., x_n$, onde*

$$a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_{n-1} \leq x_n = b.$$

Nós escrevemos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para $i = 1, 2, ...n$.

Teorema 3.15. *Seja $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$.*
a) *Se $f \in \mathfrak{R}(I)$ e f é limitada. Então $f \in \mathcal{L}(I)$ e*

$$\int_a^b f dx = \mathfrak{R}\int_a^b f dx$$

b) *Suponhamos f limitada em I. Então $f \in \mathfrak{R}(I)$ se, e somente se, f é contínua em quase todo ponto de I.*

Demonstração:

a) Seja P_j uma partição de $[a,b]$ em um conjunto finito de pontos $x_{0j}, x_{1j}, ..., x_{jj}$, onde:

$$a = x_{0j} \leq x_{1j} \leq ...x_{j-1j} \leq x_{jj} = b$$

nós escrevemos para $i = 1, ..., j$

$$\Delta x_{ij} = x_{ij} - x_{i-1j}$$

Como f é limitada por hipótese definimos

$$M_j(x) = \sup_{\{x_{i-1j} < x \leq x_{ij}\}} f_i(x)$$

onde $x \in (x_{i-1j}, x_{ij}]$ e $M_j(a) = f(a)$

$$L_j(x) = \inf_{\{x_{i-1j} < x \leq x_{ij}\}} f_i(x)$$

onde $x \in (x_{i-1j}, x_{ij}]$ e $L_j(a) = f(a)$. Está claro que:

$$L_j(x) \leq f(x) \leq M_j(x). \tag{3.48}$$

para todo $x \in [a,b]$ e para todo j. Seja P_{j+1} um "refinamento"da partição P_j, ou seja P_{j+1} é uma partição de $[a,b]$ em um conjunto finito de pontos: $x_{0j}, x_{1j}, ..., x_{jj}, x_{j+1j+1}$ onde

$$a = x_{0j+1} \leq x_{1j+1} \leq ... \leq x_{jj+1} \leq x_{j+1j+1} = b$$

tal que

$$\{x_{0j}, x_{1j}, ..., x_{jj}, x_{jj}\} \subset \{x_{0j+1}, x_{1j+1}, ..., x_{jj+1}, x_{j+1j+1}\}.$$

P_{j+2} é um "refinamento"da partição P_{j+1} e assim sucessivamente.

Então para todo $x \in [a,b]$, $M_n(x) \geq M_{n+1}(x)$ e $L_n(x) \leq L_{n+1}(x)$, pois $M_n(x)$ é o supremo no intervalo J e $M_{n+1}(x)$ é o supremo no intervalo I, $I \subseteq J$. De forma similar $L_n(x)$ é o ínfimo no intervalo J e $L_{n+1}(x)$ é o ínfimo no intervalo $I, I \subseteq J$. Seja:

$$M(x) = \lim_{n\to\infty} M_n(x) \tag{3.49}$$

e

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} L_n(x) \tag{3.50}$$

desde que $\Delta x_{ij} \to 0$. Pelo fato de M_n e L_n serem funções simples,

$$\int_a^b M_n(x)dm(x) = \sum_{i=1}^{n} M_n(x)m((x_{i-1n}, x_{in}]) = \mathfrak{R}\int_a^b M_n(x)dm(x)$$

e

$$\int_a^b L_n(x)dm(x) = \sum_{i=1}^{n} L_n(x)m((x_{i-1n}, x_{in}]) = \mathfrak{R}\int_a^b L_n(x)dm(x).$$

Como f é limitada existe $K > 0$ tal que, $-K \leq f(x) \leq K$ para todo $x \in [a, b]$, por consequência

$$-K \leq \sup_{\{x_{i-1j} < x \leq x_{ij}\}} f(x) \leq K$$

e

$$-K \leq \inf_{\{x_{i-1j} < x \leq x_{ij}\}} f(x) \leq K.$$

Logo, para todo $x \in [a, b]$

$$|L_n(x)| \leq K \tag{3.51}$$

e

$$|M_n(x)| \leq K. \tag{3.52}$$

A função constante K em $[a, b]$ é integrável em $[a, b]$ no sentido de Lebesgue. As sequências $\{M_n\}$ e $\{L_n\}$ são sequências de funções simples, onde os conjuntos E_i, que são definidos da mesma forma que no **Teorema (3.2)**, são respectivamente os intervalos $\{x_{i-1j} < x \leq x_{ij}\}$, que são conjuntos mensuráveis por serem intervalos. Aplicando o **Teorema (3.2)** obtemos que as sequências $\{M_n\}$ e $\{L_n\}$ são sequências de funções mensuráveis. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} M_n(x) = M(x) \tag{3.53}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = L(x). \tag{3.54}$$

Definimos $g(x) = K$ para todo $x \in [a, b]$, g por consequência é a função constante K que é integrável no sentido de Lebesgue. Pelas relações **(3.51)**,**(3.52)**,**(3.53)** e **(3.54)** e pelo **Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue** obtemos que

$$\mathfrak{R}\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_n(x)\Delta x_{ij} = \lim_{n\to\infty} \int_a^b M_n(x)dm(x) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} M_n(x)dm(x),$$

que implica em

$$\mathfrak{R}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b M(x)dm(x) \tag{3.55}$$

Novamente pelo **Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue** obtemos

$$\mathfrak{R}\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} L_n(x)\Delta x_{ij} = \lim_{n\to\infty}\int_a^b L_n(x)dm(x) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} L_n(x)dm(x),$$

que implica em

$$\mathfrak{R}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L(x)dm(x). \tag{3.56}$$

Obtemos assim três consequências:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b M_n(x)dm(x) = \int_a^b M(x)dm(x), \tag{3.57}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b L_n(x)dm(x) = \int_a^b L(x)dm(x), \tag{3.58}$$

e

$$\int_a^b (M(x) - L(x))dm(x) = 0.$$

Como

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} L_n(x) \leq f(x)$$

e

$$M(x) = \lim_{n\to\infty} M_n(x) \geq f(x),$$

temos que $M(x) - L(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então para quase todo $x \in [a, b]$

$$M(x) = L(x) = f(x) \tag{3.59}$$

Seja

$$E = \{x \in [a, b]; L(x) \neq M(x)\}.$$

Sabemos que $m(E) = 0$ e além disso quando $x \in [a, b]$ e $x \notin E$ temos $f(x) = L(x) = M(x)$. Então f é mensurável, de fato, para todo $c \in \mathbb{R}$,

$$\{\ x \in [a, b] \mid f(x) < c\} = \{\ x \in E \mid f(x) < c\} \cup \{\ x \in E^C \cap [a, b] \mid f(x) < c\},$$

que implica

$$\{\ x \in [a, b] \mid f(x) < c\} = \{\ x \in E \mid f(x) < c\} \cup \{\ x \in E^C \cap [a, b] \mid L(x) < c\}.$$

Na última igualdade o conjunto $\{\ x \in E \mid f(x) < c\}$ é mensurável pois E é mensurável e o conjunto $\{\ x \in E^C \cap [a,b] \mid L(x) < c\}$ é mensurável pois $E^C \cap [a,b] = [a,b] - E$, porém $[a,b]$ e E são mensuráveis. Como f é mensurável, limitada e $m([a,b]) < +\infty$ temos pelo item **a)** do **Teorema (3.5)** que $f \in \mathcal{L}(E)$ em $[a,b]$. Além disto, $f(x) = L(x)$ quase sempre e pela equação **(3.56)** obtemos

$$\int_a^b f(x)dm(x) = \int_a^b L(x)dm(x) = \mathcal{R}\int_a^b f(x)dm(x).$$

b) Por hipótese f é limitada. Suponhamos primeiramente que $f \in \mathcal{R}(I)$, então podemos utilizar todos os resultados obtidos na demonstração do item **a)**, vamos também utilizar definições introduzidas no item **a)** como as funções $M(x)$ e $L(x)$. Um dos resultados obtidos no item **a)** é que $M(x) = L(x)$ em quase todo $x \in I$. Vamos mostrar que f é contínua em $I - A$, onde $M(x) = L(x)$ para todo $x \in I - A$, $A \subset I$ e $m(A) = 0$. O que equivale a mostrar que f é contínua em quase todo ponto de I. Para f ser contínua em $I - A$ temos que mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $k \geq \delta, k \in \mathbb{N}$ temos que

$$|x - a| < k$$

implica em

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

para todo $x \in I - A$. Dado $\epsilon > 0$, pelas equações **(3.49)** e **(3.50)** existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ temos

$$|M(x) - M_k(x)| < \frac{\epsilon}{4}$$

e

$$|L(x) - L_k(x)| < \frac{\epsilon}{4}$$

que implicam pelo uso da desigualdade de **Cauchy-Schwarz**[3] em

$$\begin{aligned} |M_k(x) - L_k(x)| &\leq |M_k(x) - M(x)| + |M(x) - M_k(x)| \\ &\leq |M_k(x) - M(x)| + |M(x) - L(x)| + |L(x) - M_k(x)| \\ &\leq |M(x) - L(x)| + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Pelo uso de que $M(x) = L(x)$ para todo $x \in I - A$ obtemos

$$|M_k(x) - L_k(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

[3]Para mais detalhes ver **Apêndice B**

Como $x \in \Delta x_{ik}$ para algum i, considere $y \in \Delta x_{ik}$ com $y \neq x$, então pela desigualdade de **Cauchy-Schwarz**

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - L_k(x)| + |L_k(x) - f(y)|.$$

Logo,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - L_k(x)| + |f(y) - L_k(y)|.$$

Pela desigualdade acima e pela relação **(3.48)** obtemos

$$|f(x) - f(y)| \leq f(x) - L_k(x) + f(y) - L_k(y).$$

Pela equação **(3.48)**

$$|f(x) - f(y)| \leq f(x) - L_k(x) + f(y) - L_k(y) \leq M_k(x) - L_k(x) + M_k(y) - L_k(y) < \epsilon$$

Suponhamos $f \in \mathcal{R}$ em $[a, b]$ então procedendo de forma similar a do item **a)** desse Teorema obtemos a equação **(3.59)**. Pelo resultado que acabamos de mostrar temos que f é contínua quase sempre em $[a, b]$. Suponhamos f contínua quase sempre em $[a, b]$ então

$$L(x) = f(x) = M(x)$$

quase sempre, e teremos

$$\int_a^b L(x)dm(x) = \int_a^b M(x)dm(x) \tag{3.60}$$

quase sempre, e dado $\epsilon > 0$ pelas equações (3.57) e (3.58) obtemos que existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ temos

$$\left|\int_a^b M(x)dm(x) - \int_a^b M_k(x)dm(x)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\left|\int_a^b L(x)dm(x) - \int_a^b L_k(x)dm(x)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Usando algumas vezes a desigualdade de **Cauchy-Schwarz** e aplicando a equação **(3.60)** obtemos

$$\left|\int_a^b M_k(x)dm(x) - \int_a^b L_k(x)dm(x)\right| < \epsilon,$$

que implica

$$\int_a^b M_k(x)dm(x) - \int_a^b L_k(x)dm(x) < \epsilon.$$

Portanto, pela **Proposição (B.3)** do **Apêndice B** concluímos a demonstração. □

Exemplo 3.4 A função característica dos racionais

$$K_E(x) = \begin{cases} 1 & , \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{3.61}$$

não é integrável em $[0,1]$ no sentido de Riemann. De fato, para toda partição P_n de $[0,1]$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \begin{cases} 1 & , \text{se } c_i \in \mathbb{Q} \text{ para todo } i, \\ 0 & , \text{se } c_i \notin \mathbb{Q} \text{ para todo } i, \end{cases} \tag{3.62}$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $x_0, x_1, ..., x_n$ são os pontos da partição P_n. Logo,

$$\lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0,\ n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

não existe. Pois por menor que seja os intervalos sempre teremos números racionais e irracionais, assim sempre teremos que **(3.62)** é verdadeira. Portanto, f não é integrável em $[0,1]$ no sentido de Riemann.

Observação. Pelos exemplos **(3.3)** e **(3.4)** obtemos um exemplo de função que possue Integral de Lebesgue porém não possue Integral de Riemann. Portanto, pelo item **a)** do **Teorema (3.15)** concluímos que a Integral de Lebesgue é mais geral que a Integral própria de Riemann.

Exemplo 3.5 Definimos $f_n : [0,1] \to \{0,1\}$ como se segue,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & , \text{se } x \in \{1, ..., \frac{1}{n}\} \\ 0 & , \text{nos demais casos.} \end{cases} \tag{3.63}$$

Definimos $f : [0,1] \to \{0,1\}$ como se segue,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{se } x \in \{1, ..., \frac{1}{n}, ..., 0\} \\ 0 & , \text{nos demais casos.} \end{cases} \tag{3.64}$$

Então $f_n \to f$ quando n tende ao infinito. Para todo n temos que f_n é integrável no sentido de Riemann, porém

$$\lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0,\ n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

não existe. Pois por menor que seja o intervalo Δx_1 sempre podemos tomar n suficientemente grande tal que $\frac{1}{n} \in \Delta x_1$ e assim o somatório sempre vai depender da escolha dos pontos c_i.

Exemplo 3.6 Um exemplo de aplicação do **Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue**. Vamos mostrar que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{4}.$$

De fato, usando que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ .$$

é suficiente mostrar que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

De fato, para $0 < t < 1$ temos

$$\frac{1}{1+t^2} = (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots) = \sum_{i=0}^{\infty}(1-t^2)t^{4i}.$$

Definimos,

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^{n}(1-t^2)t^{4i}.$$

Então,

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots\ .$$

Definimos,

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t).$$

Logo,

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Temos, pelo **Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue**, que

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 (1-t^2)t^{4i}\, dt = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_0^1 t^{4i}\, dt - \int_0^1 t^{4i+2}\, dt \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4i+1}\; t^{4i+1}\Big|_0^1 - \frac{1}{4i+3}\; t^{4i+3}\Big|_0^1 \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4i+1} - \frac{1}{4i+3} \right) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.7 Agora iremos generalizar o exemplo anterior. Sejam $p, q > 0$, temos

$$
\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t^q}\, dt = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+2q} - \frac{1}{p+3q} + \ldots \, .
$$

De fato, para $0 < t < 1$ temos

$$
\frac{t^{p-1}}{1+t^q} = t^{p-1}(1 - t^q + t^{2q} - t^{3q} + \ldots) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-t^q)t^{p-1+2iq}.
$$

Definimos,

$$
f_n(t) = \sum_{i=0}^{n} (1-t^q)t^{p-1+2iq}.
$$

Então,

$$
0 \leq f_1(t) \leq f_2(t) \leq \ldots \, .
$$

Definamos,

$$
f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t).
$$

Logo,

$$
f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-t^q)t^{p-1+2iq}.
$$

Temos, pelo **Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue**, que

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t^q}\, dt &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 (1-t^q)t^{p-1+2iq}\, dt \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_0^1 t^{p-1+2iq}\, dt - \int_0^1 t^{p-1+(2i+1)q}\, dt \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2iq}\; t^{p-1+2iq+1}\Big|_0^1 - \frac{1}{p+(2i+1)q}\; t^{p-1+(2i+1)q+1}\Big|_0^1 \right)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2iq} - \frac{1}{p+(2i+1)q} \right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+2q} - \frac{1}{p+3q} + ...$$

Exemplo 3.8 Agora um exemplo de aplicação do **Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue**.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nt\ sen\ t}{1+n^2t^2}\ dt = 0$$

De fato, seja

$$f(t) = \frac{nt\ sen\ t}{1+n^2t^2}.$$

Definimos,

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t).$$

Porém, para todo $t \in [0,1]$ temos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0.$$

Definamos $x = nt$, fazendo a substituição de variável

$$\left| \frac{nt\ sen\ t}{1+n^2t^2} \right| = \left| \frac{x\ sen\ \frac{x}{n}}{1+x^2} \right|.$$

Porém,

$$\left| \frac{x\ sen\ \frac{x}{n}}{1+x^2} \right| \leq \left| \frac{1}{1+x^2} \right| = \frac{|x|}{|1+x^2|} \leq 1.$$

Aplicando o **Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue**, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nt\ sen\ t}{1+n^2t^2}\ dt = \int_0^1 f\ dt = 0.$$

Exemplo 3.9 Generalizando o exemplo anterior, tomemos $\alpha > 1$. Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nt\ sen\ t}{1+(nt)^\alpha}\ dt = 0.$$

De fato, seja

$$f(t) = \frac{nt\ sen\ t}{1+(nt)^\alpha}.$$

Definimos,

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t).$$

Porém, para todo $t \in [0,1]$ temos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0.$$

Definimos $x = nt$, fazendo a substituição de variável

$$\left|\frac{nt\ sen\ t}{1+(nt)^{\alpha}}\right| = \left|\frac{x\ sen\ \frac{x}{n}}{1+x^{\alpha}}\right|.$$

Porém,

$$\left|\frac{x\ sen\ \frac{x}{n}}{1+x^{\alpha}}\right| \leq \left|\frac{1}{1+x^{2}}\right| = \frac{|x|}{|1+x^{\alpha}|} \leq 1.$$

Aplicando o **Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue**, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nt\ sen\ t}{1+n^2t^2}\ dt = \int_0^1 f\ dt = 0.$$

Conclusão

Com este trabalho aprendi muito, esse aprendizado não se restringe apenas a Integral de Lebesgue incluindo também um melhor domínio sobre as ferramentas utilizadas na elaboração do trabalho e noções básicas sobre outros assuntos que se relacionam com ele.

O desenvolvimento da teoria me mostrou como uma demonstração iniciada por casos particulares pode ser útil, pois facilita o uso da intuição além de ser muito conveniente quando lidamos com definições que se baseiam em casos particulares.

A teoria propriamente dita por sua vez me mostrou como um mesmo assunto pode ter abordagens tão diferentes e como a matemática esta interligada, através de uma construção totalmente diferente da Integral própria de Riemann construímos uma Integral que não só é coerente com ela como a generaliza.

Concluo que apesar de aprender bastante esse trabalho me mostrou o quanto eu ainda tenho para aprender para dominar um assunto tão profundo e importante como a Integral de Lebesgue.

Referências

[1] RUDIN, Walter. **Principles of mathematical analysis,** 2nd. New York: McGraw-Hill; Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1964.

[2] HAWKINS, Thomas. **Lebesgue's theory of integration: its origins and development,** 2nd. New York: Chelsea, 1975.

[3] FOSSA, John A, et al. **Matemática e Medida-Três momentos históricos,** 1nd. São paulo: Livraria da Física, 2009.

[4] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**, v.1. Rio de janeiro: IMPA, 2002.

[5] BARTLE, Robert Gar. **Elementos de analise real,** 2nd. Rio de janeiro: Campus, 1983. Tradução de Alfredo A. de Farias.

[6] WILCOX, Howard. J.; MYERS, David. L. **An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series.** New York: Dover, 1994.

[7] KÜHLKAMP, Nilo. **Introdução a Topologia Geral,** 2nd. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2002.

[8] GATICA, Juan Antonio. **Introduccion a la Integral de Lebesgue en la recta.** Washington D.C: Eva V. Chesneau, 1977.

[9] HÖNIG, Chaim Samuel. **A Integral de Lebesgue e suas Aplicações**. Rio de janeiro: IMPA, 1977.

APÊNDICE A – Números reais extendidos e propriedades de conjuntos

Neste apêndice reunimos algumas propriedades básicas de conjuntos. Sejam A e B conjuntos de um universo U. Definamos

$$A - B = \{x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Proposição A.1. *Sejam $A, B, T, A_1, A_2, \ldots$ conjuntos de um universo U. Então,*

P.1

$$A - (A - B) = A \cap B.$$

P.2

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n).$$

P.3

$$A - B = A \cap B^C.$$

P.4

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

P.5

$$(A \cup B) \cap T = (A \cap T) \cup (B \cap T).$$

P.6

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A).$$

P.7

$$A = (A \cap B) \cup (A - B).$$

P.8

$$(A^C - B^C) = B - A.$$

P.9

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

Definição A.1. *O sistema extendido dos números reais consiste do sistema dos números reais com dois símbolos, $+\infty$ e $-\infty$, unidos de forma a possuir as seguintes propriedades:*
a) *Se x é real, então $-\infty < x < +\infty$, e*

$$x + \infty = +\infty, \quad x - \infty = -\infty, \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0.$$

b) *Se $x > 0$, então*

$$x \cdot (+\infty) = +\infty, \quad x \cdot (-\infty) = -\infty.$$

c) *Se $x < 0$, então*

$$x \cdot (+\infty) = -\infty, \quad x \cdot (-\infty) = +\infty.$$

APÊNDICE B – Definições e resultados auxiliares

Definição B.1. *Seja A um conjunto de números reais. O maior elemento de A, quando existe, é chamado de máximo de A.*

Definição B.2. *Seja A um conjunto de números reais. Dizemos que um número real m é cota superior de A, se m for o máximo de A ou se m for estritamente maior que todo número de A.*

Definição B.3. *Seja A um conjunto de números reais. Dizemos que um número real m é o supremo de A, se m for a menor das cotas superiores de A.*

Proposição B.1. *Seja A um conjunto de números reais. Se o máximo de A existe então necessariamente ele coincide com o supremo de A.*

Proposição B.2. *Sejam a e b números reais quaisquer, então*

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Essa desigualdade também é conhecida pelo nome de desigualdade de ***Cauchy-Schwarz****.*

Proposição B.3. *Seja $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ é supremo de X se, e somente se,*

a) $x \leq a$, *para todo* $x \in X$.

b) *Dado* $\epsilon > 0$, *existe* $x \in X$ *tal que* $a - \epsilon < x$.

Proposição B.4. *Seja $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$. Um elemento $b \in \mathbb{R}$ é ínfimo de X se, e somente se,*

a) *$b \leq x$, para todo $x \in X$.*

b) *Dado $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < b + \epsilon$.*

Proposição B.5. *Seja $I = [a, b]$, f uma função limitada. Então $f \in \mathcal{R}$ se, e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição P_n tal que*

$$\int_a^b M_k(x)dm(x) - \int_a^b L_k(x)dm(x) < \epsilon$$

Demonstração:

Ver referência [1].