Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Licenciatura em Matemática

Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem
Existência e Unicidade de Soluções

Diogo Martins Galvão

Florianópolis, 28 de Novembro de 2008.

"Procure ser uma pessoa de valor,

em vez de procurar ser uma pessoa de sucesso.

O sucesso é consequência."

Albert Einstein

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 51/CCM/2008.

Prof. Carmem Suzane Comitre Gimenez

Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Danilo Royer (Orientador)

Prof. Nereu Estanislau Burin

Prof. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

Agradecimentos

A todos os professores que contruíram para minha formação, em especial ao Professor Danilo Royer onde além de orientador, foi um excelente docente nas outras cinco disciplinas na qual cursei.

A Deus que me iluminou durante esta trajetória acadêmica e também a minha família por ter dado a vida e a educação necessária para que possa atingir meus objetivos.

Aqueles amigos que compartilhamos momentos bons e difíceis. Vocês provaram a verdadeira amizade, pois amigos não se acham, se conquistam.

Em especial a minha namorada e agora esposa, que durante esses quatro anos de graduação foi compreensiva, paciente e genorosa.

Obrigado.

Diogo Martins Galvão

Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem
Existência e Unicidade de Soluções

Sumário

Introdução

Durante o curso de Cálculo, vimos muito pouco sobre Equações Diferenciais Ordinárias e muito menos se falou em existência e unicidade de soluções.

Será que em uma Equação diferencial Ordinária (EDO) 1^a Ordem existe solução?

Se existir, será que ela é única?

Veremos no trabalho que uma EDO terá uma família de soluções e mostraremos que para uma EDO com Problema de Valor Inicial (PVI), existirá uma, e somente uma solução.

O primeiro capítulo aborda alguns tipos de equações e métodos para encontrar as soluções. O segundo capítulo contêm algumas definições e teoremas sobre espaços normados que servirão para demonstração do Teorema de Existência e Unicidade de soluções para PVI no terceiro capítulo.

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de 1ª Ordem

Em matemática, uma equação diferencial é uma equação cuja incónigta é uma função que aparece na equação em forma de suas derivadas. Ela é dita ordinária, pois as funções são apenas de uma variável. Essas equações são muito estudadas em Física, Matemática pura e Aplicada. As EDO'S têm propriedades intrísecas bem interessantes, como se as soluções existem ou não, e se existir, se ela é unica.

Essa primeira parte do trabalho, apresentará alguns tipos de equações diferenciais ordinárias e métodos para encontrar as soluções.

1.1 EDO de 1ª Ordem

Uma EDO de 1ª ordem é uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \ (ou \ y' = f(x,y)),$$

onde $f(x,y)$ é uma função definida em um aberto Ω do $\mathbb{R}^2$. Uma função $y = y(x)$ definida em um intervalo aberto I é uma solução dessa equação se, para todo $x \in I$, temos $y'(x) = f(x, y(x))$.

Exemplo 1: A função $y(x) = e^{x^k}$, $x, k \in \mathbb{R}$, é uma solução da equação diferencial $y' = kx^{k-1}y$.

De fato, veja que neste exemplo $f(x,y) = kx^{k-1}y$ e que $\Omega = \mathbb{R}^2$. Vamos verificar se $y'(x) = f(x, y(x))$. De fato, $y'(x) = kx^{k-1}e^{x^k} = kx^{k-1}y$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Portanto, $y(x) = e^{x^k}$ é uma solução da equação $y' = kx^{k-1}y$.

Exemplo 2: Vamos determinar todas as soluções (ou seja, a solução geral) de $y = y(x)$ da equação

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \pi. \tag{1.1}$$

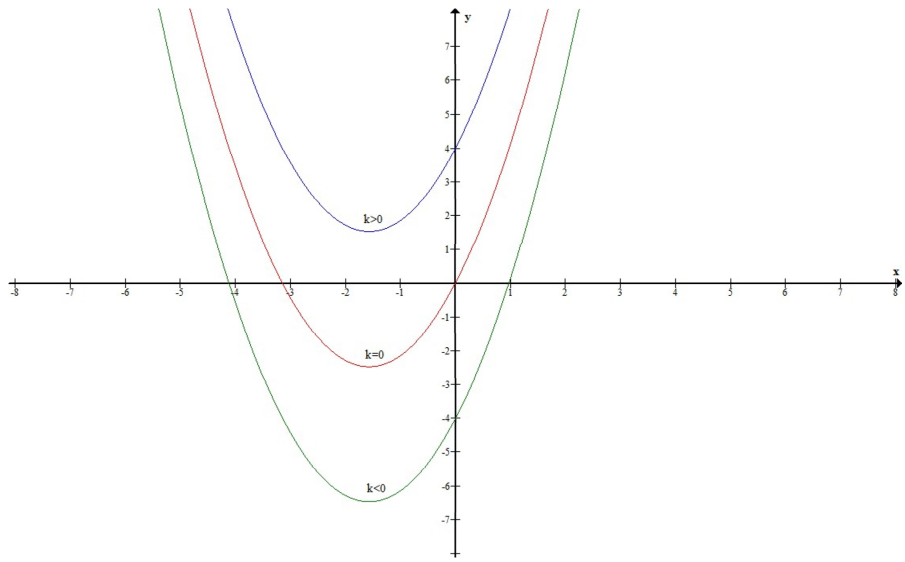
Suponha que y seja solução da equação (1.1). Então integrando em ambos os lados (ou seja, considerando as primitivas em ambos os lados), temos:

$$\int \frac{dy}{dx}\, dx = \int (2x + \pi)\, dx,$$

ou seja,

$$y(x) = x^2 + \pi x + k, \ \ k \text{ constante.}$$

Isto mostra que se y é solução da equação (1.1), então $y(x) = x^2 + \pi x + k$, $k \in \mathbb{R}$. Por outro lado, note que qualquer função da forma $y(x) = x^2 + \pi x + k$ é solução da equação(1.1). Veja a seguir o gráfico com a solução geral onde k é uma constante.



No exemplo acima, obtemos infinitas soluções. Porém, note que existe apenas uma solução y, por exemplo, tal que $y(0) = 0$. Tal condição é chamada de condição inicial.

1.2 EDO de Variáveis Separáveis

Uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y), \tag{1.2}$$

em que g e h, são funções contínuas definidas em intervalos I_1 e I_2, respectivamente, é chamado de equação de variáveis separáveis.

Observe que uma solução de 1.2 é uma função $y = y(x)$ definida num intervalo aberto I, com $I \subset I_1$, tal que para todo x em I, $y'(x) = g(x)h(y(x))$.

Exemplo 1: A equação $y' = x + y$ não é uma equação de variáveis separáveis, pois considerando $g(x) = x$ e $h(y) = y$, temos

$$\frac{dy}{dx} \neq g(x)h(y).$$

Exemplo 2: A equação

$$\frac{dy}{dx} = xy^2.$$

é uma equação de variáveis separáveis, e a função

$$y(x) = -\frac{2}{x^2+1}$$

é solução da equação.

De fato, derivando $y(x)$, temos:

$$y'(x) = (-2).(-1).(x^2+1)^{-2}.2x = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = x\left(\frac{2}{x^2+1}\right)^2 = xy^2(x)$$

Portanto, $y'(x) = xy^2(x)$, ou seja,

$$y(x) = -\frac{2}{x^2+1}$$

é solução da equação.

1.2.1 Soluções Constantes de uma Equação de Variáveis Separáveis

Suponha $g(x)$ não identicamente nula em I_1. A função $y(x) = a$, x em I_1, será solução constante de

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

se a for raiz da equação h(y)=0.

Exemplo 1: A solução constante de

$$\frac{dy}{dx} = xy^2.$$

é a função nula.

Para encontrarmos a solução constante devemos ter $h(y) = 0$. Nesse exemplo temos $h(y) = y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Portanto, $y(x) = 0$ é a solução constante.

Exemplo 2: A equação

$$\frac{dx}{dt} = t(1 + x^2).$$

não admite solução constante.

Esse exemplo é igual ao anterior, pois devemos ter $h(x) = 1 + x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1,$ mas não admite solução. Portanto, a equação

$$\frac{dx}{dt} = t(1 + x^2)$$

não admite solução constante.

1.2.2 Soluções Não Constantes de uma Equação de Variáveis Separáveis

Suponha g não identicamente nula em I_1. A função $y = y(x)$, x em I_1, será <u>solução não constante</u> de

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

se $h(y) \neq 0$.

<u>**Método para Determinação das Soluções Não-Constantes**</u>

Seja

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y),$$

então

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx. \tag{1.3}$$

Integrando 1.3, ou seja, considerando as primitivas em ambos os lados, temos:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx,$$

segue que $H(y) = G(x) + k$, onde $H(y)$ e $G(x)$ são as primitivas de

$$\frac{1}{h(y)}$$

e $g(x)$ respectivamente.

Observação: Note que as primitivas de

$$\frac{1}{h(y)}$$

e g de fato existem[1] (Teorema Fundamental do Cálculo), pois estamos supondo que h e g são funções contínuas.

Exemplo 1: Vamos determinar as soluções de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},\ x > 0.$$

Primeiramente, vamos determinar as soluções constantes. Como $h(y) = y$, segue que $h(y) = 0,$ se e somente se, $y = 0$.

Portanto, $y(x) = 0$ é a solução constante.

Agora, vamos determinar as soluções não-constantes. Consideremos aqui

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

e $h(y) = y$, então

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}. \tag{1.4}$$

Calculando as primitivas em ambos os lados 1.4, temos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

Então $\ln(y) = \ln(x) + k$, ou seja, $\ln(y) - \ln(x) = k$, segue que

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = k,$$

então, $e^{\ln\left(\frac{y}{x}\right)} = e^k$, portanto, $y = xe^k$.

Logo, as soluções são $y(x) = 0$ e $y(x) = xe^k$.

[1] Demonstração no livro Curso de Análise, volume 1, 7ª edição, pág. 255, Elon Lages Lima.

1.3 Equações Lineares de 1ª Ordem

Uma equação diferencial de 1ª ordem é uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x)$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas definidas num mesmo intervalo I. Se $g(x) = 0$ para todo x em I, então a equação torna-se

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y$$

e é chamado equação linear homogênea de 1ª ordem.

Exemplo 1: A equação

$$\frac{dy}{dx} = ex^2y + 2\pi$$

é uma equação linear de 1ª ordem, onde $f(x) = ex^2$ e $g(x) = 2\pi$. Veja que a equação é linear mas não é homogênea, pois $g(x) = 2\pi \neq 0$.

Exemplo 2: A equação

$$\frac{dy}{dx} = ey^\pi + \ln(2)$$

não é uma equação linear de 1ª ordem, uma vez que não pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x).$$

Método para Determinação das Soluções de Equações Diferenciais Lineares de 1ª Ordem

Seja

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x),$$

então a solução da equação é dada por

$$y(x) = e^{\int f(x)dx} \left[\int g(x)e^{-\int f(x)dx}dx + k \right], \ k \text{ em } \mathbb{R}.$$

Para chegar a esta fórmula, escrevemos a equação na forma

$$y'(x) - f(x)y(x) = g(x). \tag{1.5}$$

Seja $\int f(x)dx$ a primitiva de f.

Agora, multiplicando 1.5 por

$$e^{-\int f(x)dx},$$

em ambos os lados da equação, temos:

$$e^{-\int f(x)dx}(y'(x) - f(x)y(x)) = e^{-\int f(x)dx}g(x).$$

Segue que,

$$e^{-\int f(x)dx}y'(x) - e^{-\int f(x)dx}f(x)y(x) = e^{-\int f(x)dx}g(x) \tag{1.6}$$

Note que considerando

$$r = y(x) \ \text{ e } s = e^{-\int f(x)dx},$$

com

$$s' = -e^{-\int f(x)dx}.f(x),$$

temos do lado esquerdo da equação 1.6 $r's + rs'$, que é igual à $(rs)'$, ou seja,

$$y(x)e^{-\int f(x)dx)'}$$

Portanto,

$$\left(y(x)e^{-\int f(x)dx}\right)' = e^{-\int f(x)dx}.g(x). \tag{1.7}$$

Calculando as primitivas em ambos os lados de 1.7, temos:

$$y(x)e^{-\int f(x)dx} = \int e^{-\int f(x)dx}g(x)dx + k.$$

Portanto,

$$y(x) = e^{\int f(x)dx}\left[\int e^{-\int f(x)dx}g(x)dx + k\right],\ k \text{ em } \mathbb{R}.$$

Exemplo 1: Vamos encontrar a solução da equação

$$y' = sen(x)y + e^{x-cos(x)}$$

que satisfaça a condição inicial $y(0) = 1$. Essa solução é chamada se solução do problema de valor inicial (PVI).

Temos nesse exemplo $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = e^{x-cos(x)}$, então pelo método temos:

$$y(x) = e^{\int sen(x)dx}\left[k + \int e^{x-cos(x)}e^{-\int sen(x)dx}dx\right] = e^{-cos(x)}\left[k + \int e^{x-cos(x)}e^{-(-cos(x))}dx\right] =$$

$= e^{-cos(x)}\left[k + \int e^{x-cos(x)}e^{cos(x)}dx\right] = e^{-cos(x)}\left[k + \int e^{x}dx\right]$

$= e^{-cos(x)}\left[k + e^{x}\right] = e^{x-cos(x)} + ke^{-cos(x)}.$

Portanto, $y(x) = e^{x-cos(x)} + ke^{-cos(x)}$.

Como $y(0) = 1$, segue que $y(0) = e^{0-cos(0)} + ke^{-cos(0)}$,

então, $e^{-1} + ke^{-1} = 1$, ou seja, $k = e - 1$.

Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = e^{x-cos(x)} + (e-1)e^{-cos(x)}.$$

Note que a equação para o problema de valor inicial tem solução única. Nosso trabalho tem como objetivo principal demonstrar que para toda equação diferencial de 1ª ordem com condição inicial existe uma, e somente uma solução.

Capítulo 2

Espaços Normados

O objetivo principal do trabalho é demonstrar a existência e unicidades de soluções de equações diferenciais de primeira ordem. Os resultados deste capítulo serão utilizados na demonstração do teorema de existência e unicidade, que será estudado no capítulo 3.

2.1 Norma

Definição 2.1.1 *Seja V espaço um vetorial real. Uma norma em V é uma função $\| \ \|$: $V \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tenhamos:*

1) $\|u\| \geqslant 0$ e $\|u\| = 0$ se e somente $u = 0$;

2) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ (Desigualdade triangular);

3) $\|\lambda u\| = |\lambda| \ \|u\|$.

Definição 2.1.2 *O par $(V, \| \ \|)$, em que V é um espaço vetorial e $\| \ \|$ uma norma em V, é chamado espaço normado.*

Observação: Quando a norma $\| \ \|$ for facilmente subentendida, podemos escrever apenas V para indicar o espaço normado $(V, \| \ \|)$.

2.2 Sequências

Definição 2.2.1 (Sequências) *Seja V um espaço normado. Uma sequência em V é uma função $v: \mathbb{N} \to V$.*

A imagem do natural n pela função v será representada por v_n e chamada de enésimo termo da sequência. Para representar uma sequência usaremos as notações $(v_1,\ v_2,\ v_3, ...)$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definição 2.2.2 (Convergências) *Sejam V um espaço normado e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em V. Diremos que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $v \in V$ se para cada $\varepsilon > 0$ pudermos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|v_n - v\| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$.*

Definição 2.2.3 (Sequências de Cauchy) *Uma sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ é de Cauchy se $\forall\ \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|v_n - v_m\| < \varepsilon\ \forall\ m, n \geq n_0$.*

Definição 2.2.4 (Funções Contínuas) *Sejam M, N espaços vetoriais reais. Uma função $f: M \to N$ é contínua em $v_0 \in M$ se vale a propriedade: Se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ tal que $v_n \to v_0$, então $f(v_n) \to f(v_0)$.*

Definição 2.2.5 *Consideremos $C(X) = \{f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: f contínua e limitada$\}$. Definimos $\|\ \|_\infty:\ C(X) \to \mathbb{R}^+$ por $\|h\|_\infty = \sup\{|h(x)| : x \in X\}$.*

Na definição anterior, note primeiramente que $C(X)$ é um espaço vetorial real. Mostraremos que $\|\ \|_\infty$ é uma norma em $C(X)$. Para isso, verificaremos as três propriedades da definição de norma.

Para cada $h \in C(X)$,

$$\|h\|_\infty = \sup\{|h(x)| : x \in X\} \geqslant 0,$$

e

$$\|h\|_\infty = \sup\{|h(x)| : x \in X\} = 0$$

se e somente se $|h(x)| = 0$. Portanto, vale a primeira propriedade.

Agora, vamos verificar a desigualdade triangular:

$$\|h + f\|_\infty = \sup\{|(h + f)(x)| : x \in X\} = \sup\{|h(x) + f(x)| : x \in X\}$$

$$\leqslant \sup\{|h(x)| : x \in X\} + \sup\{|f(x)| : x \in X\} = \|h\|_\infty + \|f\|_\infty.$$

Portanto, $\|h + f\|_\infty \leqslant \|h\|_\infty + \|f\|_\infty$.

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ então,

$$\|\lambda\ h\|_\infty = \sup\{|\lambda\ h(x)| : x \in X\} = \sup\{|\lambda|\ |h(x)| : x \in X\}$$

$$= |\lambda|\ [\sup\{|h(x)| : x \in X\}] = |\lambda|\ \|h\|_\infty.$$

Portanto, $\|\lambda\ h\|_\infty = |\lambda|\ \|h\|_\infty$.

Como valem as três propriedades, segue que $\|\ \|_\infty$ é uma norma.

Observação: Vamos usar $C(X)$ para indicar o espaço normado $(C(X), \|\ \|_\infty)$.

Proposição 2.2.6 *Se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente num espaço normado V, então $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy*[1].

Observação: Em geral não é verdade que toda sequência de Cauchy é convergente.

Por exemplo, considere o espaço $\mathbb{Q}$ e a norma euclidiana. Tome uma sequência

[1] Deixo ao leitor verificar a demonstração no livro Introdução à Topologia Geral, 2ª edição, página 207.

$$x_1 = 3;\ x_2 = 3,1;\ x_3 = 3,14;\ x_4 = 3,141;\ x_5 = 3,1415; ...$$

Suponha que $x_n \to b \in \mathbb{Q}$. Em $\mathbb{R}$, note que $x_n \to \pi$. Portanto, em $\mathbb{R}$, $x_n \to \pi$ e $x_n \to b$, absurdo. Portanto, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge em $\mathbb{Q}$. Note que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

2.3 Espaços Normados Completos

Definição 2.3.1 *Um espaço normado $(V, \|\ \|)$ é completo se toda sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ de Cauchy converge.*

Exemplo: O espaço $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, não é completo, pois se tomarmos a sequência da observação da proposição 2.2.6, note que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, mas não converge.

Exemplo: $\mathbb{R}$ é completo. Este fato segue da seguinte proposição:

Proposição 2.3.2 *Em $\mathbb{R}$, toda sequência de Cauchy converge*[2].

O teorema seguinte, que é o principal teorema deste capítulo, será fundamental para a demonstração do teorema da existência de soluções que será estudada do capítulo 3.

Teorema 2.3.1 *O espaço $(C(X), \|\ \|_\infty)$ é completo.*

Demonstração: Vamos mostrar que toda sequência de Cauchy em $C(X)$ converge para uma função de $C(X)$.

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(X)$ uma sequência de Cauchy. Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0$ tal que $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$, $\forall\ m, n \geqslant n_0$. Logo, $\forall\ x \in X$, temos $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $\forall\ m, n \geqslant n_0$.

[2]Deixo ao leitor verificar a demonstração no livro Introdução à Topologia Geral, 2ª edição, página 212.

Então, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Como $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é completo, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e, portanto, fixo $x \in X$, existe

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Defina

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Assim obtemos uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Vamos mostrar que $f \in C(X)$ e que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

que será indicado por $f_n \stackrel{\|\ \|_\infty}{\longrightarrow} f$.

Afirmação 1: $f_n \stackrel{\|\ \|_\infty}{\longrightarrow} f$.

Demonstração Af. 1: Como $(f_n)_n$ é de Cauchy, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, m, n \geqslant n_0.$$

Segue que

$$\sup_{x\in X} |(f_m - f_n)(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como, para cada $x \in X$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \sup_{x\in X} |(f_m - f_n)(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Segue que,

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall\ x \in X.$$

Fixe $x \in X$. Seja $m \geqslant n_0$ tal que

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{tal } m \text{ existe pois } f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x))$$

Então, se $n \geqslant n_0$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Note que a escolha do n independe da escolha do x.

Portanto, mostramos que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall\ x \in X,\ \forall\ n \geqslant n_0.$$

Desta forma, $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon\ \forall\ n \geqslant n_0$, ou seja, $f_n \stackrel{\|\ \|_\infty}{\longrightarrow} f$.

Afirmação 2: *f é limitada.*

Demonstração Af. 2: Como $f_n \stackrel{\|\ \|_\infty}{\longrightarrow} f$, então existe n_0 tal que $\forall\ n \geqslant n_0$ $\|f_n - f\|_\infty \leqslant 1$. Em particular $\|f_{n_0} - f\|_\infty \leqslant 1$.

Logo,

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leqslant 1 + \|f_{n_0}\|_\infty,\ \forall\ x \in X.$$

Portanto,

$$\|f\|_\infty \leqslant 1 + \|f_{n_0}\|_\infty, \text{ ou seja, } f \text{ é limitada.}$$

Afirmação 3: *f é contínua.*

Demonstração Af. 3: Tome $x_0 \in X$ e $(x_n)_n \subseteq X$ tal que $x_n \to x_0$. Vamos mostrar que $f(x_n) \to f(x_0)$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $f_m \to f$, existe m_0 tal que para todo $m \geqslant m_0$

$$\|f_m - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Em particular $\|f_{m_0} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Como f_{m_0} é contínua, então $f_{m_o}(x_n) \to f_{m_0}(x_0)$. Logo, existe n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$,

$$|f_{m_0}(x_n) - f_{m_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Então,

$$|f(x_n) - f(x_0)| \leqslant |f(x_n) - f_{m_0}(x_n)| + |f_{m_0}(x_n) - f_{m_0}(x_0)| + |f_{m_0}(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leqslant \|f - f_{m_0}\|_\infty + \frac{\varepsilon}{3} + \|f_{m_0} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \ \forall\ n \geqslant n_0.$$

Portanto, $\forall\ n \geqslant n_0$, $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, isto siginifica que $f(x_n) \to f(x_0)$. Segue que f é contínua em x_0. Mostramos que a sequência de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f e $f \in C(X)$. Assim toda sequência de Cauchy em $C(X)$ converge, ou seja, $C(X)$ é completo. ■

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Soluções

No primeiro capítulo, vimos que as equações diferenciais com problema de valor inicial (PVI), tem solução única. Aqui, chegamos ao objetivo principal do trabalho que é demonstrar que para as equações de PVI existe uma, e somente uma, solução.

Este capítulo é dividido em lemas, teorema da existência e da unicidade de soluções. Os lemas serão as preliminares para a demonstração dos teoremas.

Antes de iniciarmos os lemas, vamos lembrar uma definição importante de integral, que é o seguinte:

$$\int_{x_0}^{x} g(s)ds = -\int_{x}^{x_0} g(s)ds.$$

3.1 Lemas Auxiliares

Nesta seção veremos resultados importantes que serão utilizados na demonstração do teorema de existência e unicidades de soluções.

Lema 3.1.1 *Seja a equação*

$$y' = f(x, y) \tag{3.1}$$

em que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é contínua no aberto* Ω. *Seja* $(x_0,\ y_0) \in \Omega$. *Nestas condições,* $y = y(x)$, $x \in I$, *será uma solução satisfazendo a condição inicial* $y(x_0) = y_0$, *com* x_0 *no intervalo* I, *se, e somente se,*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds,$$

para todo $x \in I$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se $y = y(x)$, $x \in I$, é solução de (3.1) então temos

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Integrando em ambos os lados temos:

$$\int_{x_0}^{x} y'(s)ds = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

Como

$$\int_{x_0}^{x} y'(s)ds = y(x) - y(x_0)$$

Segue que

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

Portanto,

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

($\Leftarrow$) Suponha que

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \ \forall \ x \in I$$

Defina

$$T(x) = \int_{x_0}^{x} g(s)ds,$$

em que $g(s) = f(s, y(s))$.

Afirmação: *Se g é contínua em um intervalo I e se*

$$T(x) = \int_{x_0}^{x} g(s)ds, \ \forall \ x \ \in I \ (x_0 \in \ I \ \textit{é fixo})$$

Então $T'(x) = g(x)$.

Demonstração Af.: Suponha $h \to 0^+$. Por definição,

$$T'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{T(x+h) - T(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\int_{x_0}^{x+h} g(s)ds - \int_{x_0}^{x} g(s)ds}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\int_{x_0}^{x} g(s)ds + \int_{x}^{x+h} g(s)ds - \int_{x_0}^{x} g(s)ds}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\int_{x}^{x+h} g(s)ds}{h}.$$

Como g é contínua em I, g é contínua em $[x, x+h]$.

Pelo Teorema de Weierstrass[1], existe

$$m_h = min\{g(s) : s \in [x, x+h]\}$$

[1]Ver Apêndice, Teorema (A.1).

$$M_h = max\{g(s) : s \in [x, x+h]\}.$$

Logo, em $[x, x+h]$, $m_h \leqslant g(s) \leqslant M_h$. Segue que,

$$\int_x^{x+h} m_h ds \leqslant \int_x^{x+h} g(s)ds \leqslant \int_x^{x+h} M_h ds,$$

ou seja,

$$hm_h \leqslant \int_x^{x+h} g(s)ds \leqslant hM_h.$$

Se $h \to 0^+$, temos $m_h \to g(x)$ e $M_h \to g(x)$. Portanto, pelo Teorema do Confronto[2]

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\int_x^{x+h} g(s)ds}{h} = g(x)$$

No caso em que $h \to 0^-$ a demonstração é análoga.

Portanto, $T'(x) = g(x)$.

Pela afirmação, $T'(x) = f(x, y(x))$.

Então,

$$y'(x) = \left[y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds\right]',$$

ou seja,

$$y'(x) = 0 + \left[\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds\right]' = T'(x) = f(x, y(x)).$$

Portanto, $y'(x) = f(x, y(x))$. ■

[2]Ver Apêndice, Teorema (A.2).

Para o lema seguinte é importante lembrar que se um conjunto Ω é aberto, então todo ponto de Ω é ponto interior[3].

Lema 3.1.2 *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω aberto, f uma função contínua e tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ seja, também, contínua em Ω. Seja $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sendo Ω aberto, existem $a > 0$ e $b > 0$ tais que o retângulo*

$$Q = \{(x, y)|x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$

está contido em Ω. Nestas condições, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

quaisquer que sejam (x, y_1) e (x, y_2) no retângulo Q.

Demonstração: Por hipótese, $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em Ω, então segue a continuidade no retângulo Q. Pelo teorema de Weierstrass[4], existe $K > 0$ tal que

$$-K \leqslant \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \leqslant K, \ \forall \ (x, y) \in Q,$$

ou seja,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leqslant K, \ \forall \ (x, y) \ \in \ Q. \tag{3.2}$$

[3]Deixo ao leitor, verificar a definição mais formal no livro Introdução à Topologia Geral, 2ª edição, página 30.

[4]Ver Apêndice, Teorema (A.1).

Sejam (x, y_1) e (x, y_2) dois pontos quaisquer de Q. Temos pelo teorema do valor médio[5], aplicado à função $h(y) = f(x, y)$ (para x fixo)

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, c)(y_1 - y_2)$$

para algum c $\in (y_1, y_2)$. De (3.2) obtemos que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, c)\right| \leqslant K.$$

Como,

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, c)(y_1 - y_2),$$

então

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, c)\right| |y_1 - y_2| \leqslant K|y_1 - y_2|.$$

Portanto, segue que $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant K|y_1 - y_2|$, $\forall\ y_1 \in Q$ e $\forall\ y_2 \in Q$. ■

Para provarmos o lema seguinte e, por fim, o teorema de existência e unicidade de solução, é essencial conhecer a seguinte afirmação:

Afirmação 1: Se $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $x_0 \in [a, b]$, então

$$\left|\int_{x_0}^{x} g(s)ds\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |g(s)|ds\right|$$

para cada x em $[a, b]$.

Demonstração Af. 1: Sabemos que $g(x) \leqslant |g(x)|$. Vamos separar a demonstração em dois casos, $x > x_0$ e $x < x_0$:

[5]Ver Apêndice, Teorema (A.3).

1) Se $x > x_0$, então pelo teorema visto em Cálculo[6], temos,

$$\left|\int_{x_0}^{x} g(s)ds\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |g(s)|ds.$$

Como $\int_{x_0}^{x} |g(s)|ds \geqslant 0$, então

$$\int_{x_0}^{x} |g(s)|ds = \left|\int_{x_0}^{x} |g(s)|ds\right|.$$

Portanto,

$$\left|\int_{x_0}^{x} g(s)ds\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |g(s)|ds\right|.$$

2) Se $x < x_0$, então

$$\left|\int_{x_0}^{x} g(s)ds\right| = \left|\int_{x}^{x_0} g(s)ds\right| \leqslant \left|\int_{x}^{x_0} |g(s)|ds\right| = \left|\int_{x_0}^{x} |g(s)|ds\right|,$$

onde a desigualdade acima vem do caso (1).

Portanto,

$$\left|\int_{x_0}^{x} g(s)ds\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |g(s)|ds\right|.$$

$\blacksquare$

Lema 3.1.3 *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω aberto, f contínua e seja $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sejam $a > 0$ e $b > 0$ tais que o retângulo*

$$Q = \{(x, y)|x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$

[6]Demonstração no livro Curso de Análise, volume 1, 7^a edição, pág. 251, Elon Lages Lima.

esteja contido em Ω. Seja $M > 0$ tal que $|f(x,y)| \leqslant M$ em Q. (Tal M existe, pois f é contínua em Q, pelo Teorema de Weierstrass[7]*) Seja $r > 0$ tal que $r \leqslant a$ e $Mr \leqslant b$. Seja $y_{n-1} : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}$, contínua e cujo gráfico esteja contido em Q. Seja*

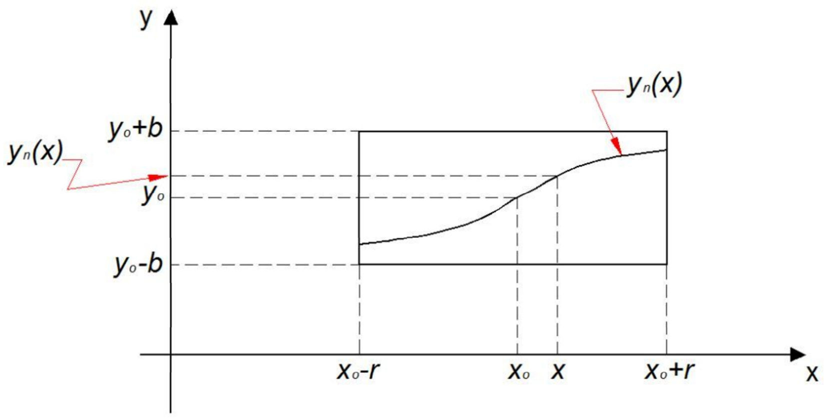
$$y_n : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}$$

dada por

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_o}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds.$$

Nestas condições, o gráfico de y_n também está contido em Q.

Demonstração: Para provar que o gráfico de y_n está contido em Q, devemos mostrar que $|y_n(x) - y_0| \leqslant b, \ \forall \ x \in [x_0 - r, x_0 + r]$.



Temos, $\forall \ x \in [x_0 - r, x_0 + r].$,

$$y_n(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds$$

[7]Ver Apêndice, Teorema (A.1).

Segue que,

$$|y_n(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}(s))|ds \right|$$

Observe que a desigualdade do lado direito vem da afirmação (1).

Como para todo $s \in [x_0 - r, x_0 + r], \ (s, y_{n-1}(s)) \in Q$,

resulta,

$$|f(s, y_{n-1}(s))| \leqslant M, \forall \ s \in [x_0 - r, x_0 + r].$$

Segue que,

$$\int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}(s))| \ ds \leqslant \int_{x_0}^{x} M \ ds, \ \text{se } x \geqslant x_0$$

e

$$\int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}(s))| \ ds \geqslant \int_{x_0}^{x} M \ ds, \ \text{se } x < x_0.$$

Portanto,

$$\left| \int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}(s))| \ ds \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} M \ ds \right|,$$

Como

$$|y_n(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}(s))| \ ds \right|$$

segue que,

$$|y_n(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} M \ ds \right|, \ \forall \ x \in [x_0 - r, x_0 + r],$$

Como,

$$\left| \int_{x_0}^{x} M \ ds \right| = M|x - x_0|,$$

pois M é uma constante, segue que $|y_n(x) - y_0| \leqslant M|x - x_0|$.

Sabemos que $|x - x_0| \leqslant r$, logo, como $M > 0$, segue que $M|x - x_0| \leqslant Mr \leqslant b$. Portanto, $|y_n(x) - y_0| \leqslant Mr \leqslant b$, logo, $|y_n(x) - y_0| \leqslant b, \forall\ x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. ■

3.2 Teorema de Existência de Soluções

Esta é a principal seção do trabalho, onde enunciaremos e demonstraremos um teorema que de fato existe a solução para PVI.

Teorema 3.2.1 *: Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Ω, aberto, e seja $(x_0, y_0) \in \Omega$. Suponhamos f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em Ω. Nestas condições, a equação $y' = f(x, y)$ admite uma solução $y = y(x)$ definida em um intervalo $[x_0 - r, x_0 + r]$ e satisfazendo a condição inicial $y(x_0) = y_0$.*

Demonstração: Sejam r e Q como no lema (3.1.3). Seja $K > 0$ conforme lema (3.1.2). Vamos provar que a sequência de Picard

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\ ds,\ n = 1,\ 2,\ 3, ...,$$

converge para alguma função y na norma $\|\ \|_\infty$, em $[x_0 - r, x_0 + r]$. Note que, para todo $n \in \mathbb{N},\ y_n \in C([x_0 - r, x_0 + r])$ se y_n for contínua.

Afirmação 1: A função y_n é contínua.

Demonstração Af. 1: Tome $(v_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq [x_0 - r, x_0 + r]$, tal que $v_m \to c$.

Vamos mostrar que $y_n(v_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} y_n(c)$.

De fato,

$$|y_n(v_m) - y_n(c)| = \left|\int_{x_0}^{v_m} f(s, y_{n-1}(s))ds - \int_{x_0}^{c} f(s, y_{n-1}(s))ds\right| = \left|\int_{c}^{v_m} f(s, y_{n-1}(s))ds\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{c}^{v_m} |f(s, y_{n-1}(s))|ds\right| \leqslant \left|\int_{c}^{v_m} M\ ds\right| = M|v_m - c|.$$

Como $v_m \to c$, então dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0$ tal que $\forall\ m \geqslant m_0$,

$$|v_m - c| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Segue que,

$$|y_n(v_m) - y_n(c)| \leqslant M|v_m - c| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Portanto, $|y_n(v_m) - y_n(c)| < \varepsilon$, e então $y_n(v_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} y_n(c)$. Logo, mostramos que y_n é contínua. Pelo teorema de Weierstrass[8], y_n também é limitada, para todo n.

Agora, para mostrarmos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (na norma $\|\ \|_\infty$), pelo teorema 2.3.1, é suficiente mostrar que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Afirmação 2: *$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.*

Demonstração Af. 2: Temos

$$y_2(x) - y_1(x) = \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))ds$$

Então, para todo $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$,

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))|ds \text{ (supondo } x > x_0).$$

[8] Ver Apêndice, Teorema (A.1).

Segue do lema (3.1.2) que

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant K \int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_0(s)| ds.$$

Seja M o valor máximo de $|y_1(s) - y_0(s)|$ em $[x_0 - r, x_0 + r]$ (tal M existe pois $y_1 - y_0$ é contínua). Portanto, nesse intervalo $|y_1(s) - y_0(s)| \leqslant M$. Segue que

$$\int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_0(s)| ds \leqslant \int_{x_0}^{x} M ds = M(x - x_0)$$

Logo, $|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant KM(x - x_0)\ \forall\ x\ \in\ [x_0 - r, x_0 + r]$, com $x > x_0$. Se $x \leqslant x_0$, então $|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant KM(x_0 - x)$.

Agora temos, supondo $x > x_0$,

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(s, y_2(s))\ -\ f(s, y_1(s))| ds \leqslant \int_{x_0}^{x} K|y_2(s) - y_1(s)| ds.$$

Segue que

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} K|y_2(s) - y_1(s)| ds\ \forall\ x \in [x_0 - r, x_0 + r],\ \text{com } x > x_0.$$

Como $|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant MK(x - x_0)$ então,

$$K \int_{x_0}^{x} |y_2(s) - y_1(s)| ds \leqslant K^2 M \int_{x_0}^{x} (s - x_0) ds,$$

segue que

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} K|y_2(s) - y_1(s) ds$$

$$\leqslant K^2M\int_{x_0}^{x}(s-x_0)ds = K^2M\left[\frac{s^2}{2}-x_0s\right]_{x_0}^{x}$$

$$= K^2M\left(\frac{x^2}{2}-xx_0-\frac{{x_0}^2}{2}+{x_0}^2\right) = K^2M\left(\frac{x^2}{2}-xx_0+\frac{{x_0}^2}{2}\right)$$

$$= K^2M\frac{(x^2-2xx_0+{x_0}^2)}{2} = K^2M\frac{(x-x_0)^2}{2}.$$

Portanto,

$$|y_3(x)-y_2(x)| \leqslant K^2M\frac{(x-x_0)^2}{2}.$$

Para $x \leqslant x_0$, vale que

$$|y_3(x)-y_2(x)| \leqslant K^2M\frac{(x_0-x)^2}{2}.$$

Continuando o cálculo, concluímos que

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)| \leqslant MK^n\frac{|x-x_0|^n}{n!}\ \forall\ x\ \in[x_0-r,x_0+r].$$

Note que $|x-x_0| \leqslant r$, então

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)| \leqslant M\frac{(Kr)^n}{n!}, \forall\ n\geqslant 1 \text{ e } \forall\ x\ \in[x_0-r,x_0+r].$$

Seja $m > n$.

Tome $x \in [x_0-r,x_0+r]$. Então,

$$|y_m(x)-y_n(x)| = |y_m(x)-y_{m-1}(x)+y_{m-1}(x)-y_n(x)|$$

$$\leqslant |y_m(x)-y_{m-1}|+|y_{m-1}-y_n(x)|$$

$$\leqslant |y_m(x) - y_{m-1}| + |y_{m-1}(x) - y_{m-2}| + \ \dots \ + |y_{n+1} - y_n(x)|$$

$$\leqslant \ M\frac{(Kr)^{m-1}}{(m-1)!} + M\frac{(Kr)^{m-2}}{(m-2)!} + \ \dots + M\frac{(Kr)^n}{n!} \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \frac{M(K.r)^i}{i!}.$$

Portanto,

$$|y_m(x) - y_n(x)| \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \frac{M(K.r)^i}{i!}.$$

Afirmação 3: *A série*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{M(K.r)^i}{i!}, \ \textit{converge.}$$

Demonstração Af. 3: Vamos mostrar pelo teste da razão[9], que a série,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{M(K.r)^i}{i!}$$

converge. Para tanto, note que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\frac{M(Kr)^{i+1}}{(i+1)!}}{} \frac{M(Kr)^i}{i!} = \lim_{i\to\infty} \frac{M(Kr)^{i+1}}{(i+1)!} \frac{i!}{M(Kr)^i}$$

$$= \lim_{i\to\infty} \frac{(Kr)^i(Kr)}{(i+1)i!} \frac{i!}{(Kr)^i} = \lim_{i\to\infty} \frac{Kr}{i+1} = 0 < 1.$$

Portanto, pelo teste da razão a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{M(K.r)^i}{i!}$$

[9] Ver Apêndice, Teorema (A.4).

converge.

Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0$ tal que $\forall\ n \geqslant n_0$,

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{M(K.r)^i}{i!} < \varepsilon.$$

Desta forma, $\forall\ m,\ n \geqslant n_0$, e $\forall\ x \in [x_0 - r, x_0 + r]$,

$$|y_m(x) - y_n(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M(K.r)^i}{i!} < \varepsilon.$$

Segue que

$$\sup_{x \in [x_0 - r, x_0 + r]} |y_m(x) - y_n(x)| < \varepsilon, \text{ isto é, } \|y_m - y_n\|_\infty < \varepsilon,\ \forall\ n, m \geqslant n_0.$$

Logo, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Portanto, como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, temos pelo teorema 2.3.1 que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Seja $y \in C([x_0 - r, x_0 + r])$ o limite da sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Então,

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x),\ \forall\ x \in [x_0 - r, x_0 + r].$$

Vamos mostrar que

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds,\ \forall\ x\ \in [x_0 - r, x_0 + r].$$

Como

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds,$$

segue que

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds$$

Portanto,

$$y(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds.$$

Note que, $\forall\ x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, $y(x)$ está contida no retângulo Q, pois $y_n(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ e $\forall\ x \in [x_0 - r, x_0 + r]$.

Segue então que

$$|f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y(s))| \leqslant K|y_{n-1}(s) - y(s)|$$

$\forall\ n \geqslant 1$ e $\forall\ s \in [x_0 - r, x_0 + r]$, pelo lema (3.1.2).

Dado $\varepsilon > 0$, tome n_0 tal que $\forall\ n \geqslant n_0$,

$$\|y_n - y\|_\infty < \frac{\varepsilon}{Kr}.$$

Portanto, $\forall\ n \geqslant n_0$

$$\begin{aligned} &\left|\int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))ds - \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds\right| \\ &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))|ds\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} K|y_n(s) - y(s)|ds\right| \\ &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} K\|y_n - y\|_\infty ds\right| \leqslant \|y_n - y\|_\infty K \left|\int_{x_0}^{x} ds\right| \\ &= \|y_n - y\|_\infty K|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{Kr} Kr = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\forall\ n \geqslant n_0$,

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))ds - \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds\right| < \varepsilon$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds.$$

Segue que

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \ \ \forall\ x \ \in [x_0 - r, x_0 + r].$$

Pelo lema (3.1.1), $y = y(x),\ x \ \in \ [x_0 - r, x_0 + r]$ é solução da equação $y' = f(x, y)$ e satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$. ■

3.3 Teorema Unicidade de Soluções

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos um teorema que garante a unicidade da solução para um PVI.

Teorema 3.3.1 *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, Ω aberto, e seja $(x_0, y_0) \in \Omega$. Suponhamos f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em Ω. Sejam $y_1 = y_1(x), x \in I$, e $y_2 = y_2(x), x \in J$, onde I e J são intervalos abertos contendo x_0, duas soluções da equação $y' = f(x, y)$ e tais que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$. Nestas condições, existe $d > 0$ tal que $y_1(x) = y_2(x)$ em $[x_o - d, x_0 + d]$.*

Demonstração: Seja Q o conjunto $\{(x, y) : x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a,\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$, isto é,

$$Q = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b].$$

Da continuidade de y_1 e y_2, $\exists\ d_1 > 0$ tal que $(x, y_1(x))$ e $(x, y_2(x))$ pertecem ao conjunto Q e $|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| \leqslant K|y_1(s) - y_2(s)|,\ \forall\ s \in [x_0 - d_1, x_0 + d_1]$, conforme lema (3.1.2). Tomemos $d > 0$ tal que $d \leqslant d_1$ e $Kd < 1$. Como $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$ são soluções da equação tais que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$, segue que

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds \text{ e } y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))ds$$

para $x \in [x_0 - d, x_0 + d]$. Temos então que

$$|y_1(x) - y_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) ds \right|.$$

Pela afirmação 1, lema (3.1.3), segue que

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) ds \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \right|$$

Pelo lema (3.1.2), temos:

$$\left| \int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \right| \leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)| ds \right|,$$

$\forall\ x \in [x_0 - d, x_0 + d]$. Portanto,

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)| ds \right|. \tag{3.3}$$

Tome $M_1 = \text{máx}\{|y_1(x) - y_2(x)| : x \in [x_0 - d, x_0 + d]\}$. Assim,

$$|y_1(s) - y_2(s)| \leqslant M_1, \tag{3.4}$$

$\forall\ s \in [x_0 - d, x_0 + d]$. Integrando (3.4) em ambos os lados no intervalo de x_0 a x, temos:

$$\int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)|\ ds \leqslant \int_{x_0}^{x} M_1\ ds = M_1 |x - x_0|.$$

Segue que

$$\int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)|\ ds \leqslant M_1 |x - x_0|,$$

como $K > 0$, então
$$K\int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)|\; ds \leqslant KM_1|x - x_0|.$$
Da inequação (3.3) obtemos que $|y_1(x)-y_2(x)| \leqslant KM_1|x-x_0|$. Agora, como $|x-x_0| \leqslant d$, e como $M_1 \geqslant 0$ e $K > 0$, segue que $KM_1|x - x_0| \leqslant KM_1d$. Portanto, $|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant KM_1d$. $\forall\ x \in [x_0 - d, x_0 + d]$. Como $M_1 = \text{máx}\{|y_1(x) - y_2(x)| : x \in [x_0 - d, x_0 + d]\}$, segue que $M_1 \leqslant M_1Kd$.
Se $M_1 \neq 0$, temos $1 \leqslant Kd$. Absurdo, pois por hipótese $Kd > 1$.
Portanto, $M_1 = 0$, $|y_1(x) - y_2(x)| = 0\ \forall\ x \in\ [x_0 - d, x_0 + d]$ e então $y_1(x) = y_2(x)$, no intervalo $[x_0 - d, x_0 + d]$. ■

3.4 Exemplo Usando o Teorema de Existência de Soluções

O teorema de existência de soluções de EDO para problema de valor inicial apresenta a sequência de Picard, onde provamos que ela converge. O exemplo a seguir é uma aplicação do teorema. Através do gráfico mostraremos a convergência para a solução da equação.

Exemplo 1: Usando o teorema 3.2.1, vamos encontrar a solução da equação $y' = x + y$ que satisfaça a condição inicial $y(0) = 1$.
Pelo teorema temos uma sequência da seguinte forma:
$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds.$$
Usando no exemplo,
$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))ds = 1 + \int_{0}^{x} f(s, 1)ds = 1 + \int_{0}^{x} (s + 1)ds = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

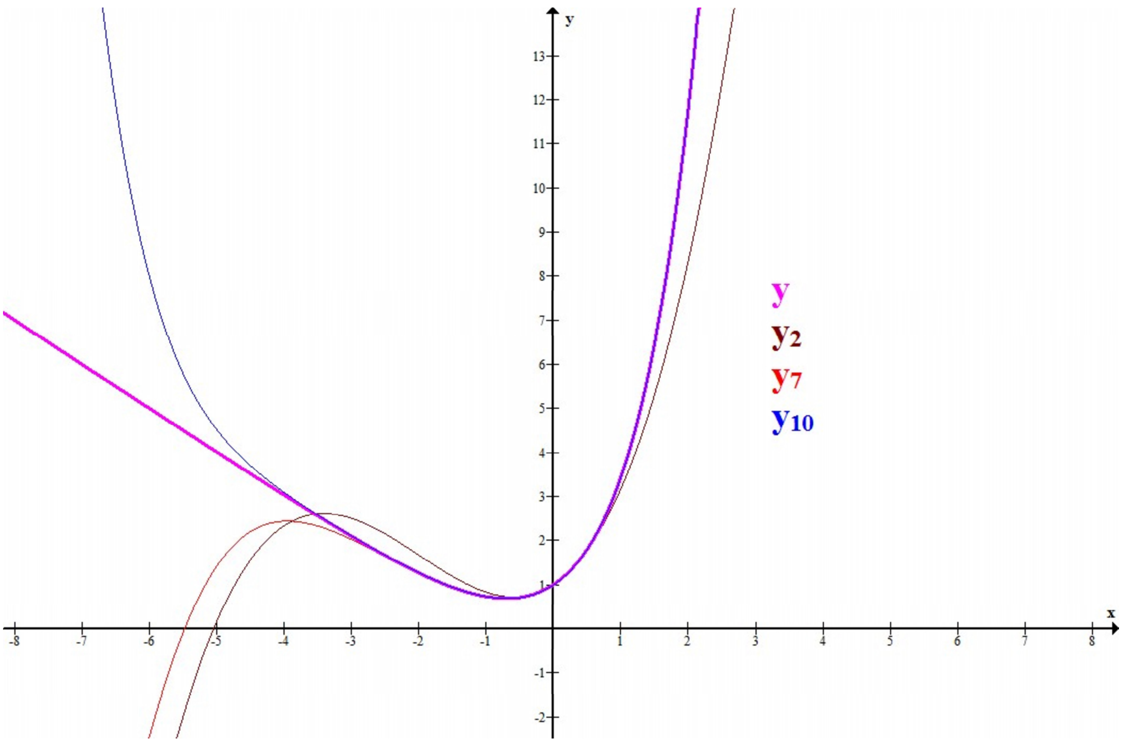
$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds = 1 + \int_{0}^{x} f\left(s, 1 + x + \frac{x^2}{2}\right) ds = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3!}$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))ds = 1 + \int_{0}^{x} f\left(s, 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3!}\right) ds = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

Portanto, $y_n(x) = 1 + \int_{0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds = 1 + x + 2\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

Veja a convergência no gráfico a seguir, para alguns y_n (y_2, y_7, y_{10}), onde a função $y(x) = -x - 1 + 2e^x$ é a solução da equação usando o método para EDO de 1ª ordem.



Apêndice A

Teoremas Utilizados

Teorema A.1 (de Weierstrass) *Se f for contínua em $[a,b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que*

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$$

para todo x em $[a,b]$.[1]

Teorema A.2 (do Confronto) *Sejam f, g, h, três funções e suponhamos que exista $r > 0$ tal que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para $0 < |x - p| < r$. Nestas condições, se*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x)$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$[2]

[1]Demonstração no livro Um Curso de Cálculo, volume 1, 5^a edição, pág. 513, Autor Hamilton Luiz Guidorizzi.

[2]Demonstração no livro Um Curso de Cálculo, volume 1, 5^a edição, pág. 98, Autor Hamilton Luiz Guidorizzi.

Teorema A.3 (do Valor Médio) *Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existirá pelo menos um c em (a, b) tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$ [3]

Teorema A.4 (Teste da Razão) *Seja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} an$$

uma série tal que $a_n \neq 0 \ \forall \ n$. Então:

1. $$Se \ \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \ \text{então a série} \ \sum_{n=1}^{\infty} an, \ \text{converge.}$$

2. $$Se \ \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \ \text{então a série} \ \sum_{n=1}^{\infty} an, \ \text{diverge.}$$

3. $$Se \ \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \ \text{o teste não revela se a série} \ \sum_{n=1}^{\infty} an \ \text{converge ou diverge.}$$ [4]

[3]Demonstração no livro Um Curso de Cálculo, volume 1, 5^a edição, pág. 460, Autor Hamilton Luiz Guidorizzi.

[4]Demonstração no Livro Um Curso de Cálculo, volume 4, 5ª edição, pág. 67, Autor Hamilton Luiz Guidorizzi.

Considerações Finais

O trabalho de conclusão de curso serve ao formando como uma forma de incentivá-lo a pesquisa, dando autonomia para o estudo de determinado conteúdo de seu interesse. É nele que colocamos em prática o que aprendemos nas diversas disciplinas da graduação, que aprimoramos muitos conceitos e idéias.

Durante o período de elaboração do TCC identifiquei algumas dificuldades em determinadas disciplinas como o Cálculo, a Álgebra Linear e a Introdução à Análise. Tal dificuldade não era por defasagem do conteúdo visto e sim pelo amadurecimento de certos conceitos aprendidos, onde o trabalho foi essencial para despertar uma visão matemática. Percebi também, com o tempo de elaboração do trabalho, que ainda faltava um raciocínio lógico mais organizado, onde a contribuição do orientador foi fundamental.

Como já mencionado na introdução do trabalho, durante o curso de Cálculo vimos pouco sobre Equações Diferenciais Ordinárias, logo pensei num estudo mais aprofundado, visto que elas têm muitas aplicações tanto em Geometria, quanto em Física. Nessas equações demonstramos que para um problema de valor inicial existe solução e que ela é única, onde para fazer tal demonstração precisei revisar muitas definições e teoremas vistos em análise e em Cálculo. Foi essencial também distinguir bem a diferença entre sequências de funções e sequências de números reais, onde tinha muita dificuldade.

Sintetizando, esse trabalho contribuiu muito para minha formação e espero que seja útil nos cursos de graduação e pós-graduação.

Referências Bibliográficas

[1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz, *Um Curso de Cálculo - Volumes 1 e 2,* Livros Técnicos Científicos Editora, 5^a Edição, 2001.

[2] KUHLKAMP, Nilo, *Introdução à Topologia Geral,* Editora da UFSC, 2^a Edição, 2002.

[3] LAGES LIMA, Elon, *Curso de Análise,* Editora LTC, Livros Técnicos e Científicos, 7^a edição, 1992.

[4] LAGES LIMA, Elon, *Espaços Métricos,* Editora LTC, Livros Técnicos e Científicos, 3^a edição, 1993.