

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Curso de Licenciatura em Matemática

Tópicos em Teoria dos Grafos

Autor: Dyan Carlo Pamplona
Orientador: Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

Florianópolis
Dezembro 2008

Dyan Carlo Pamplona

Tópicos em Teoria dos Grafos

Trabalho acadêmico de graduação apresentado
à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II,
do Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura,
do centro de Ciências Físicas e Matemáticas da
Universidade Federal de Santa Catarina.

Professora: Carmem Susane Comitre Gimenez

Florianópolis
Dezembro 2008

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 54/CCM/08.



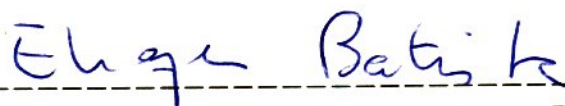
Prof^a Carmem Suzane Comitre Gimenez

Professora da disciplina

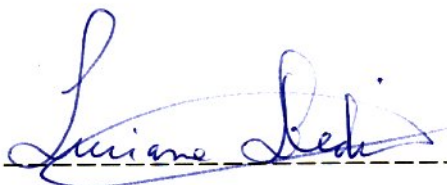
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa (Orientador)



Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)



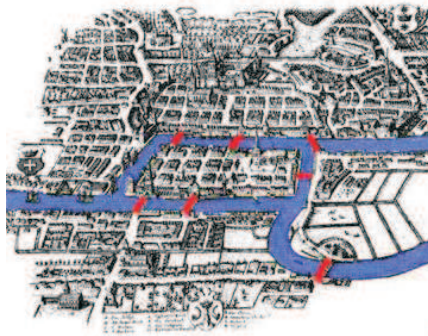
Prof. Dr. Luciano Bedin (UFSC)

Sumário

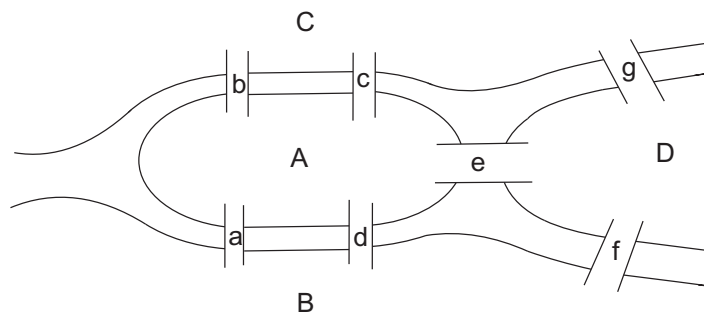
Introdução	5
1 Definições Básicas	7
1.1 Tipos de Grafo	9
2 Planaridade	13
3 Cadeias de Euler e Cadeias de Hamilton	20
3.1 Multigrafos	25
3.2 Solução de Labirintos	27
3.3 O problema do Caixeiro Viajante	30
4 Coloração de Grafos	32
4.1 A primeira fórmula de Euler	33
4.2 A conjectura das 4 cores	37
4.3 Coloração de Mapas	39
4.4 O Problema da coloração de Mapas	40
5 O Gênero de um Grafo	41
5.1 A segunda fórmula de Euler	44
6 Biografias	47
Bibliografia	51

Introdução

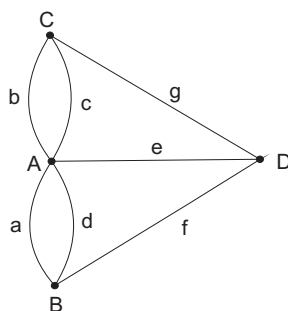
A Teoria dos Grafos surgiu em 1736. Neste ano Leonhard Euler (1707-1783) publicou seu trabalho resolvendo o problema das pontes de Königsberg. Esse problema consistia no seguinte: na cidade de Königsberg (atual Kaliningrado), se dizia ser possível atravessar as 7 pontes sobre o rio Pregel passando apenas uma vez por cada ponte.



Para mostrar a impossibilidade de tal façanha Euler utilizou o seguinte diagrama do rio Pregel e de suas pontes:



Em seguida, Euler considerou outro diagrama mais simples, mas que representa corretamente o problema.



Este diagrama é um exemplo do que é hoje chamado de multigrafo, mas que historicamente foi o primeiro grafo da história.

Os pontos A, B, C e D são chamados vértices e as linhas a, b, \dots, g , são chamados de arestas do multigrafo. Euler provou que é possível percorrer todas as suas arestas uma única vez se, e somente se, seus vértices são todos pares, ou se o multigrafo possui apenas dois vértices ímpares, isto é, o número de arestas é ímpar em cada um desses vértices (Teoremas 3.6 e 3.7 do capítulo 3). O multigrafo que representa o problema das pontes tem os 4 vértices ímpares.

Após a publicação de Euler, nos 150 anos seguintes até a última década do século XIX, apenas poucos trabalhos haviam sido publicados sobre grafos, até que em 1847 G.R. Kirchhoff(1824-1887) aplicou-os no estudo de circuitos elétricos, e fazendo isso deu início às investigações sobre grafos na forma de árvores. Dez anos mais tarde Arthur Cayley (1821-1895), aplicou-os à química orgânica. Em 1869 Jordan desenvolveu a teoria das árvores de modo estritamente matemático. Muitos outros problemas, como os problemas das cadeias de Hamilton e de Euler, começaram a ter aplicações a partir do desenvolvimento de áreas como a pesquisa operacional, e também com as tentativas de demonstração da conjectura das 4 cores. Após o desenvolvimento da informática, o número delas tem crescido, esse crescimento é notado através do grande número de publicações após 1970 sobre assuntos relacionados a teoria dos grafos.

Neste trabalho abordamos alguns temas relacionados com a teoria dos grafos. No capítulo 1 serão estabelecidas definições que servirão de base para os outros capítulos. No capítulo 2 será abordada a discussão sobre grafos planares e não-planares, que terá continuidade no capítulo 5 onde a noção de planaridade é generalizada com o conceito de gênero de um grafo. No capítulo 3 do texto abordamos as cadeias de Euler e de Hamilton, e no capítulo 4 a coloração de grafos e o problema das 4 cores.

Capítulo 1

Definições Básicas

Neste capítulo serão enunciadas algumas definições, que irão servir de base nos próximos capítulos.

Definição 1.1. (*Grafo*) Um grafo $G(V, E)$, é definido por um conjunto $V = v_1, v_2, \dots, v_n$ de pontos, chamados de vértices, e um conjunto E de pares ordenados de V , chamados de arestas.

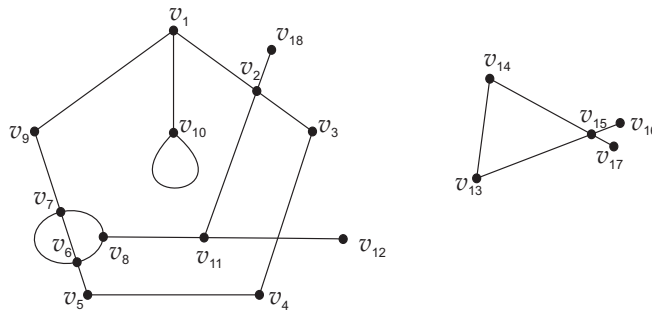


Figura 1.1:

Exemplo 1.1. No grafo da figura 1.1 temos

$$V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{18}\}$$

e

$$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_{10}), (v_1, v_9), (v_2, v_{18}), (v_2, v_3), (v_2, v_{11}), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_6, v_8), (v_7, v_8), (v_7, v_9), (v_8, v_{11}), (v_{11}, v_{12}), (v_{10}, v_{10}), (v_{13}, v_{14}), (v_{13}, v_{15}), (v_{14}, v_{15}), (v_{15}, v_{16}), (v_{15}, v_{17})\}$$

Definição 1.2. (*Diagrama*): Um diagrama é uma representação gráfica do grafo, podendo existir infinitos diagramas para representar o mesmo grafo.

Definição 1.3. (*Cruzamento de arestas*): Um cruzamento de arestas é a intersecção de duas arestas no diagrama de um grafo, sem que haja um vértice na intersecção. Um cruzamento, às vezes, pode ser eliminado desenhando-se outro diagrama para o grafo. Esse fato será comentado em mais detalhe no Capítulo 2.

Exemplo 1.2. As arestas (v_1, v_3) e (v_1, v_4) se cruzam no diagrama da esquerda.

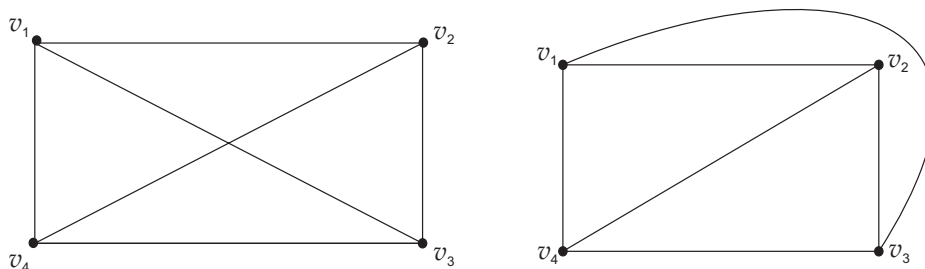


Figura 1.2:

Definição 1.4. (*Incidência*) Uma aresta é dita incidente a um vértice v , quando essa aresta está ligada a v .

Exemplo 1.3. As arestas (v_1, v_{10}) , (v_1, v_2) e (v_1, v_9) são incidentes ao vértice v_1 , na figura 1.1.

Definição 1.5. (*Adjacência*) Dois vértices são chamados de adjacentes quando são ligados por uma mesma aresta.

Exemplo 1.4. Na figura 1.1 o vértice v_{11} é adjacente aos vértices v_2 , v_8 e v_{12} .

Definição 1.6. (*Grau de um Vértice*) O grau de um vértice v , indicado por $gr(v)$, é o número de arestas incidentes a v .

Exemplo 1.5. O vértice v_2 na figura 1.1 possui grau 4.

Definição 1.7. (*Laço*) Um laço, é um par ordenado do tipo (v, v) , ou seja, é uma aresta que liga um vértice a ele próprio. O laço é uma aresta que deve ser contada duas vezes quando estamos verificando o grau de um vértice.

Exemplo 1.6. A aresta (v_{10}, v_{10}) da figura 1.1 é um laço.

Definição 1.8. (*Cadeia*) Uma cadeia P em um grafo G é uma sequência v_1, v_2, \dots, v_n de vértices não necessariamente distintos de G sendo que v_i e v_{i+1} , $i = 1, \dots, n - 1$ está ligado por uma aresta.

Definição 1.9. (*Cadeia fechada*) Uma cadeia que possui o primeiro vértice igual ao último é chamada de cadeia fechada. Caso contrário, ela é dita uma cadeia aberta.

Exemplo 1.7. Na figura 1.1 a sequência de vértices $v_{10}, v_{10}, v_1, v_2, v_{18}$ é uma cadeia aberta, e $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{11}, v_2, v_1$ é uma cadeia fechada.

1.1 Tipos de Grafo

Definição 1.10. (*Grafo Caminho*) Um grafo que representa uma cadeia em um grafo G é chamado grafo caminho.

Definição 1.11. (*Grafo Nulo*) Um grafo que não possui arestas é chamado de grafo nulo. Emprega-se o símbolo N_k para indicar um grafo nulo com k vértices.

Exemplo 1.8. O grafo N_5 é um exemplo de grafo nulo.

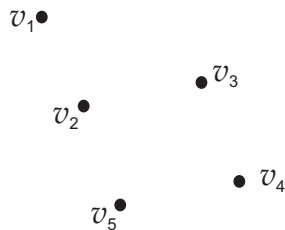


Figura 1.3:

Definição 1.12. (*Grafo Completo*) Um grafo onde cada par de vértices de V é ligado por uma aresta, é chamado grafo completo. Um grafo completo com n vértices é chamado K_n .

Exemplo 1.9. Os diagramas da figura 1.2 representam o grafo completo K_4 .

Definição 1.13. (*Grafo Conexo*) Um grafo G é dito conexo quando dado qualquer par de vértices de G , é possível encontrar uma cadeia ligando esses dois pontos. Caso não seja possível estabelecer uma cadeia entre um par de vértices do grafo este será chamado de grafo desconexo.

Exemplo 1.10. O grafo K_6 é um exemplo de grafo conexo. O grafo apresentado no exemplo 1.1 é desconexo.

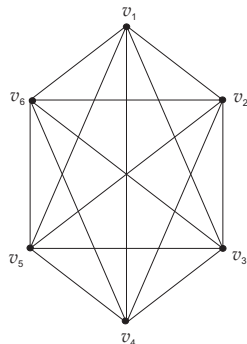


Figura 1.4:

Definição 1.14. (*Partes Conexas*) Um grafo desconexo pode ter seus vértices divididos em conjuntos com a seguinte propriedade: todos os vértices de um conjunto são ligados por alguma aresta a pelo menos um dos vértices desse conjunto. Esses conjuntos são chamados partes conexas do grafo.

Exemplo 1.11. No grafo da figura 1.1 podemos obter as seguintes partes conexas: $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{18}\}$ e $\{v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\}$

Definição 1.15. (*Grafo Bipartido*) Um grafo $G(V, E)$ é chamado de grafo bipartido se é possível separar V em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2 de tal forma que cada par ordenado de E possua um vértice em V_1 e o outro em V_2 .

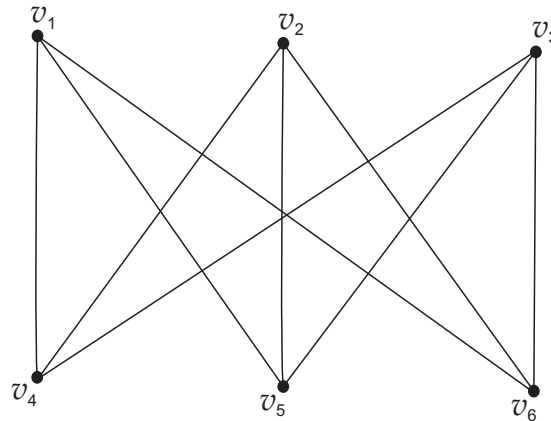


Figura 1.5:

Exemplo 1.12. O grafo $K_{3,3}$ da figura 1.5 pode ser dividido em dois conjuntos : $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$, com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e

$$E = \{(v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_1, v_6), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_2, v_6), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_3, v_6)\}$$

Um grafo bipartido com k vértices em um conjunto de pontos e com l vértices no outro conjunto é chamado $K_{k,l}$

Definição 1.16. (*Grafo Complementar*) Dado um grafo $G(V, E)$, dizemos que $\overline{G}(V, E)$ é o conjugado (ou complementar) de G se:

- (i) o conjunto de vértices de G é igual ao de \overline{G} .
- (ii) o conjunto de arestas de \overline{G} é composto por todos os pares de vértices não utilizados no conjunto de arestas de G .

Exemplo 1.13. O grafo complementar do grafo $k_{3,3}$ é o mostrado na figura 1.6.

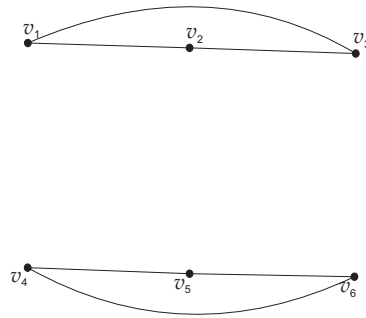


Figura 1.6:

Definição 1.17. (*Subgrafo*) Um grafo $H(V', E')$ é um subgrafo de $G(V, E)$ se V' é um subconjunto de V e E' é um subconjunto de E .

Exemplo 1.14. O grafo $H(V', E')$ com $H' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9\}$ e $E' = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_7, v_9), (v_9, v_1)\}$ é um subgrafo de G na figura 1.1.

Definição 1.18. (*Supergrafo*) Um grafo H é um supergrafo de G se G é subgrafo de H .

Definição 1.19. (*Hipergrafo*) Um grafo H é um hipergrafo de G se ele é obtido adicionando-se vértices e ou arestas a G .

Definição 1.20. (*Grafo equivalente*) Dizemos que dois grafos G e H são equivalentes (ou iguais) se eles possuem o mesmo conjunto de vértices V e o mesmo conjunto de arestas E .

Exemplo 1.15. Os diagramas da figura 1.2 representam grafos equivalentes.

Definição 1.21. (*Isomorfismo de Grafos*) Dois grafos G e H são ditos isomorfos se pode ser estabelecida uma correspondência biunívoca entre os seus conjuntos de vértices de tal maneira, que se dois vértices são adjacentes em G também o são em H . Se dois grafos são isomorfos denotamos $G \cong H$

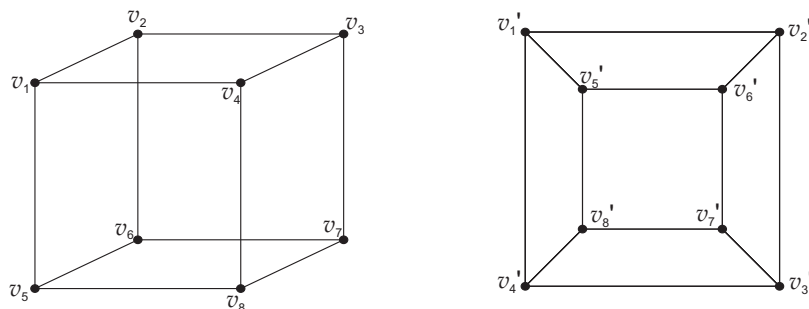


Figura 1.7:

Exemplo 1.16. O cubo $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$ é isomorfo ao grafo $v'_1, v'_2, v'_3, v'_4, v'_5, v'_6, v'_7, v'_8$, pois pode ser estabelecida a seguinte relação biunívica: $v_1 \longleftrightarrow v'_1, v_2 \longleftrightarrow v'_2, v_3 \longleftrightarrow v'_3, v_4 \longleftrightarrow v'_4, v_5 \longleftrightarrow v'_5, v_6 \longleftrightarrow v'_6, v_7 \longleftrightarrow v'_7, v_8 \longleftrightarrow v'_8$.

O isomorfismo entre grafos preserva algumas propriedades:

- (i) O número de vértices (por ser uma aplicação um a um).
- (ii) O número de arestas (pois vértices adjacentes em um grafo também o são no outro).
- (iii) Vértices correspondentes possuem o mesmo grau.
- (iv) O número de partes do grafo também é preservado (um grafo desconexo é dividido em partes conexas).

Capítulo 2

Planaridade

Neste capítulo iremos tratar do problema de cruzamentos de arestas em grafos planos, fazendo menção à alguns teoremas, entre eles o Teorema de Kuratowsky que ajudam a decidir sobre a planaridade de um grafo.

Definição 2.1. (*Grafo planar*) Um grafo é planar quando é isomorfo a um grafo que tenha sido traçado em um plano sem cruzamento de arestas. Caso não haja um isomorfismo desse tipo o grafo é dito não planar.

Exemplo 2.1. Os grafo A da figura 1.2 é planar pois é isomorfo ao grafo B da mesma figura.

Definição 2.2. Uma curva fechada c em um plano é dita simples se c não intersecta a si mesma.

Exemplo 2.2.

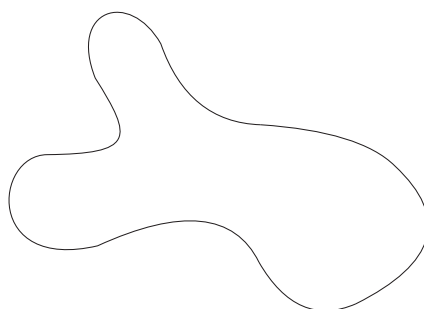


Figura 2.1:

Uma importante propriedade das curvas fechadas e simples é dada pelo seguinte teorema de Jordan:

Teorema 2.1. (*Teorema da Curva de Jordan*) Se c é uma curva contínua, simples e fechada no plano, então c divide o plano em duas regiões distintas tendo c como

fronteira. Dados os pontos P e Q , em regiões distintas, se unirmos P e Q por uma curva contínua l no plano, então l intersecta c .

A prova deste teorema será omitida neste trabalho, mas pode ser encontrada em [5].

Exemplo 2.3. A curva c não é uma curva simples pois intersecta a si mesma.

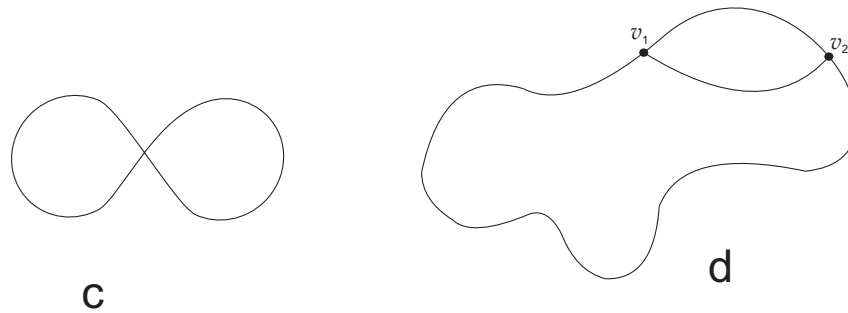


Figura 2.2:

Corolário 2.1. Se c é uma curva simples e fechada em um plano, e dois pontos de c são ligados por uma curva contínua, então esta curva, não tendo nenhum outro ponto em comum com c , está inteiramente contida em uma das regiões definidas por c .

Exemplo 2.4. A curva v_1v_2 está contida "dentro" da curva d na figura 2.2

Teorema 2.2. (Princípio das gavetas de Dirichlet) Se n objetos forem colocados em l gavetas então pelo menos uma gaveta conterá $\lceil \frac{n-1}{l} \rceil + 1$ objetos.

A prova deste teorema está em [4].

Teorema 2.3. O grafo $K_{3,3}$ não é planar.

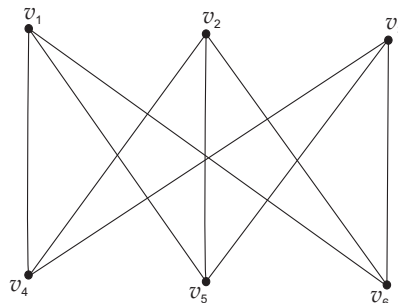


Figura 2.3: O grafo $K_{3,3}$

Prova: O grafo $K_{3,3}$ é representado usando a figura 2.3, vamos tentar a partir da figura 2.4 construir uma representação para $K_{3,3}$ sem cruzamentos de arestas.

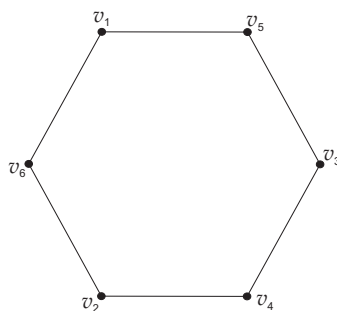


Figura 2.4:

Vamos usar o grafo da figura 2.4 para representar $K_{3,3}$, chame o grafo da figura 2.4 de G . Note que G é uma curva planar simples contínua e fechada. Ligue v_1 a v_4 , v_2 a v_5 e v_3 a v_6 por curvas contínuas, no mesmo plano de G .

Vamos aplicar o corolário 2.1 aos pares de curvas v_1v_4 e G , v_2v_5 e G , e v_3v_6 e G . Concluindo assim que cada uma das curvas está inteiramente contida em uma das regiões definidas por G (com exceção dos pontos pertencentes a G).

Considere as curvas v_1v_4 , v_2v_5 , v_3v_6 , usando o princípio das gavetas de Dirichlet chegamos a conclusão de que podemos ter no máximo duas dessas curvas em uma das regiões definidas por G sem que haja um cruzamento de arestas.

Para provar isso consideraremos dois casos:

Caso I: Existem pelo menos duas curvas "dentro" de G .

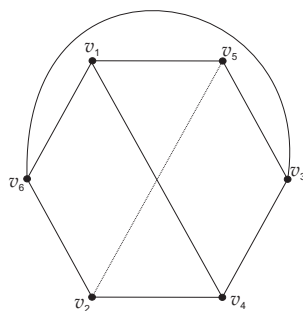


Figura 2.5:

Considere sem perda de generalidade que v_1v_4 e v_2v_5 sejam traçadas dentro de G sem cruzamento de arestas entre elas (veja figura 2.5). Tome agora w_1 um ponto de v_2v_5 próximo o suficiente de v_2 , tal que não haja cruzamento de arestas entre w_1 e v_1 , portanto $v_1v_6v_2v_4v_1$ é uma curva contínua simples e fechada no plano, w_1 é um ponto dentro e v_5 é um ponto fora da região delimitada por essa curva, portanto pelo teorema da curva de Jordan v_2v_5 intersecta $v_1v_6v_2v_4v_1$. Sendo assim não podemos traçar v_1v_4 e v_2v_5 sem cruzamentos de arestas no interior de G .

Caso II: Existem pelo menos duas curvas "fora" de G .

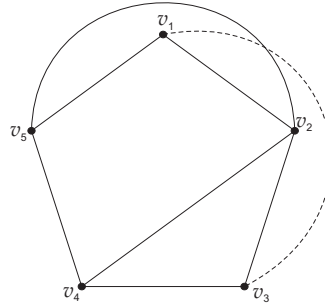


Figura 2.6:

Novamente, sem perda de generalidade, tome v_1v_4 e v_3v_6 , curvas traçadas fora de G sem cruzamento de arestas entre elas, seja w_2 um ponto de v_3v_6 próximo de v_3 . Assim $v_1v_2v_3v_4v_1$ é uma curva contínua simples e fechada no plano, w_2 é um ponto na região dentro da curva e v_6 é um ponto fora da curva, pelo teorema da curva de Jordan, toda curva ligando w_2 a v_6 intersecta $v_1v_5v_3v_4v_1$, portanto não é possível traçar v_1v_4 e v_3v_6 do lado de fora de g sem que haja cruzamento de arestas. Como não há mais casos possíveis, o teorema está provado.

Teorema 2.4. *O grafo K_5 não é planar.*

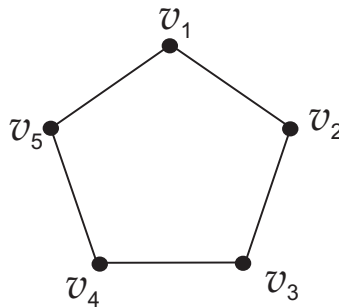


Figura 2.7:

Prova: Usando a mesma idéia do teorema anterior, seja H a curva que representa o grafo da figura 2.7, note que H é uma curva contínua, simples e fechada no plano. Ligue v_1 a v_3 , v_1 a v_4 , v_2 a v_4 , v_2 a v_5 , e v_3 a v_5 . Aplicando o corolário 2.1 aos pares de curvas: v_1v_3 e H , v_1v_4 e H , v_2v_4 e H , v_2v_5 e H , e v_3v_5 e H . Chegamos a conclusão que ou cada uma das curvas estão na região interior de H , ou estão na região exterior de H .

Usando novamente o princípio das gavetas de Dirichlet, podemos afirmar o seguinte: temos 3 curvas "dentro" de H e 2 curvas "fora" de H , ou temos 3 curvas

"fora" de H e 2 curvas "dentro" de H . Repetindo o raciocínio da demonstração anterior temos dois casos:

Caso I: Existem pelo menos 3 curvas dentro de H .

Digamos, sem perda de generalidade, que sejam v_1v_3 , v_1v_4 e v_3v_5 . Seja w_1 um ponto de v_1v_4 , próximo o suficiente de v_1 tal que não haja cruzamento de arestas entre w_1 e v_1 . Tome a curva $v_3v_4v_5v_3$. Ela é planar, contínua, simples e fechada, como Q está na região interna e v_1 está na região externa da curva, pelo Teorema da Curva de Jordan, temos que v_1v_4 deve intersectar $v_3v_4v_5v_3$.

Portanto nesse caso K_5 não pode ser traçado em um plano sem cruzamento de arestas.

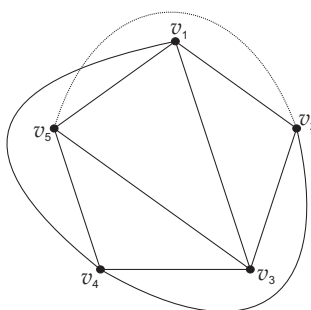


Figura 2.8:

Caso II: Existem 3 curvas fora de H .

Suponha, sem perda de generalidade, v_1v_4 , v_2v_5 e v_2v_4 fora de H . Seja w_2 um ponto de v_2v_4 , próximo o suficiente de v_2 , tal que não haja cruzamento de arestas entre w_2 e v_2 . Considere a curva $v_5v_3v_2v_5$ ela é uma curva planar, simples, contínua e fechada, e seja Q um ponto de v_1v_4 próximo de v_1 , como Q está dentro e v_2 está fora de $v_5v_4v_3v_5$, usando o Teorema da Curva de Jordan concluímos que v_2v_4 intersecta $v_5v_4v_3v_5$ em algum ponto, e portanto não podemos traçar 3 curvas "fora" de H sem que elas se intersectem. Como **I** e **II** são os únicos casos possíveis, temos que k_5 não é planar.

Teorema 2.5. *Todo subgrafo de um grafo planar é planar.*

Prova: Seja G uma representação de um grafo planar qualquer, sem cruzamento de arestas. Todo subgrafo de G é obtido pela remoção de vértices e arestas de G , mas observe que a remoção de vértices ou arestas nunca criará um cruzamento de arestas, sendo assim fica provado que todo subgrafo de um grafo planar é planar.

Corolário 2.2. *Todo supergrafo de um grafo não planar é não planar.*

Prova: Seja G um grafo não planar qualquer, e seja H um supergrafo de G . Caso H fosse planar, pelo teorema 2.5, G também o seria, contradizendo a hipótese de que G não seja planar.

Definição 2.3. *Uma expansão de um grafo G , é obtida de G adicionado-se novos vértices às arestas do diagrama que representa G .*

Exemplo 2.5. Na figura 2.8 os vértices k_1, k_2, \dots, k_6 foram adicionados formando uma expansão do grafo.

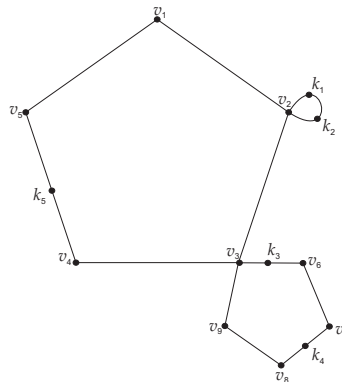


Figura 2.9:

Teorema 2.6. *Toda expansão de $K_{3,3}$ ou K_5 é não planar.*

Prova: Seja H uma expansão de $K_{3,3}$ ou de K_5 , suponha que H seja planar, portanto H pode ser representado em um plano sem que haja cruzamento de arestas, considere tal representação. Retire dessa expansão todos os novos vértices adicionados. Note que tanto $K_{3,3}$ quanto K_5 não possuem vértices de grau 2, e este processo não cria nenhum cruzamento de arestas, ou seja, após retirarmos esses vértices teremos uma representação planar de $K_{3,3}$ ou K_5 , o que contradiz os teoremas 2.3 e 2.4. Portanto toda expansão de $K_{3,3}$ e K_5 é não planar.

Corolário 2.3. *Todo supergrafo de uma expansão de $K_{3,3}$ ou de K_5 é não planar.*

Prova: Seja H uma expansão de $K_{3,3}$ ou K_5 e seja G um supergrafo de H , pelo teorema 2.6 H não é planar, e portanto G não é planar pelo corolário 2.2.

Teorema 2.7. *(Teorema de Kuratowski:) Todo grafo não planar é um supergrafo de uma expansão de $K_{3,3}$ ou de K_5 .*

Observação: Esse teorema é não trivial, por esse motivo a sua demonstração será omitida neste trabalho. Uma prova para esse teorema pode ser encontrada em [6].

Corolário 2.4. *O conjunto de todos os grafos não planares é igual ao conjunto de todos os grafos que são supergrafos de expansões de $K_{3,3}$ ou K_5 .*

Prova: Seja N o conjunto de todos os grafos não planares e seja E o conjunto de todos os grafos que são supergrafos de expansões de $K_{3,3}$ ou de K_5 . N é subconjunto de E pelo Teorema de Kuratowsky, e E é subconjunto de N pelo Corolário 2.3.

Capítulo 3

Cadeias de Euler e Cadeias de Hamilton

Definição 3.1. (*Cadeia de Euler*) Uma cadeia $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}$ em um grafo $G(V, E)$ é dita uma cadeia de Euler caso essa cadeia percorra todas as arestas de G uma única vez. Caso tenhamos $v_{i_1} = v_{i_n}$ então essa cadeia é chamada Cadeia de Euler fechada, caso contrário será chamada Cadeia de Euler aberta.

Exemplo 3.1. A cadeia $v_2, v_1, v_4, v_5, v_6, v_4, v_3, v_2$ é uma cadeia de Euler fechada.

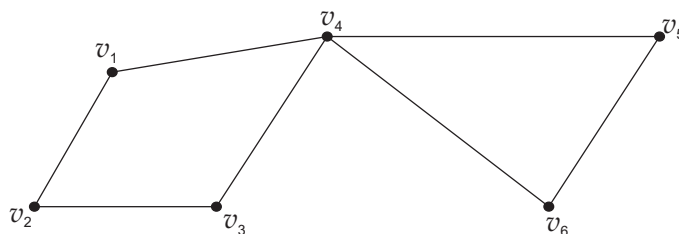


Figura 3.1:

Teorema 3.1. *Seja $G(V, E)$ um grafo conexo. Então G possui uma cadeia de Euler fechada se, e somente se, todo vértice de G tem grau par.*

Prova: Vamos separar a prova deste teorema em duas partes:

(I) Suponha que G tenha uma cadeia de Euler fechada. Então escolha um vértice qualquer v_1 de G . Como G é conexo e possui uma cadeia de Euler fechada c , comece a percorrer c através de uma aresta arbitrária ligada a v_1 , chegando ao próximo vértice. Como a cadeia é fechada ela não poderá terminar em nenhum vértice de G diferente de v_1 , e como a cadeia é de Euler ela passará por todas as arestas de G apenas uma única vez. Em todo vértice de G diferente de v_1 que passamos temos que usar duas arestas, uma para entrar e outra para sair do vértice, e assim podemos concluir que

todos os vértices de G diferentes de v_1 possuem grau par. Agora como c é um caminho fechado e saímos de v_1 utilizando uma aresta, devemos terminar de percorrer c por uma aresta diferente e assim v_1 também é par.

(II) Suponha que todos os vértices de G tenham grau par. Primeiro selecione um vértice arbitrário v_1 e deixe esse vértice, percorrendo qualquer uma de suas arestas, deixando cada um dos vértices seguintes por uma aresta que ainda não foi percorrida. Dessa forma, cada aresta é percorrida apenas uma vez, proceda dessa maneira até retornar a v_1 . Caso v_1 ainda possua arestas não percorridas, repita os passos anteriores até que não restem arestas não utilizadas em v_1 .

Agora mostraremos que c é uma cadeia fechada. Como todos os vértices de G possuem grau par, então em cada vértice que é percorrido resta sempre um número par de arestas nesse vértice, e como v_1 foi o único vértice que restou com um número ímpar de arestas, pois utilizamos uma aresta apenas para começar a cadeia em v_1 então c só pode terminar em v_1 . Portanto c é uma cadeia fechada.

Atente para o fato de que c pode não incluir todas as arestas de G , nesse caso tome um vértice v_2 em c tal que v_2 possua pelo menos uma aresta não utilizada, e repita o mesmo procedimento usado no caminho c para traçar um novo caminho d . Esse novo caminho também é fechado e percorreu apenas uma vez cada uma de suas arestas por usar o mesmo procedimento utilizado em c . Agora como v_2 é um vértice de c e possui um caminho fechado d começando e terminando nele, podemos começar um caminho f em v_1 que engloba os caminhos c e d . Agora, caso f não percorra todas as arestas de G podemos usar o procedimento do passo anterior utilizando um de seus vértices com arestas disponíveis, e assim como G possui um número finito de vértices e arestas, encontraremos uma cadeia fechada que passa exatamente uma vez por cada uma de suas arestas, ou seja, uma Cadeia de Euler fechada, o que conclui a demonstração.

Teorema 3.2. *Um grafo conexo $G(V, E)$ possui uma Cadeia de Euler aberta se, e somente se, G possui exatamente dois vértices com grau ímpar.*

Prova: A prova será feita em duas partes:

(I) Considere um grafo conexo G com uma cadeia de Euler aberta começando no vértice v_1 e terminando no vértice v_2 . Adicione agora um novo vértice k e duas novas arestas $\{v_1, k\}$ e $\{v_2, k\}$. Una a cadeia de Euler v_1, \dots, v_2 com a cadeia v_1, k, v_2 resultando no hipergrafo $H(V', E')$, $V' = V \cup \{k\}$ e $E' = \{(v_1, k)(v_2, k)\} \cup E$. Note que o resultado é uma cadeia de Euler fechada, e, portanto, pelo teorema 3.1, todos os vértices de H são pares, e G possui exatamente dois vértices ímpares v_1 e v_2 .

(II) Tome agora um grafo G que possua exatamente dois vértices de grau

ímpar, v_1 e v_2 . Adicione um novo vértice k e duas novas arestas (v_1, k) e (v_2, k) , resultando em um hipergrafo H de G . Como vértices de H , v_1 e v_2 possuem grau par. Então, pelo teorema 3.1 esse hipergrafo H possui um caminho de Euler fechado, e sendo assim, se retirarmos k , (v_1, k) e (v_2, k) notamos que G possui um caminho de Euler aberto iniciando em v_1 e terminando em v_2 , finalizando assim a demonstração.

Definição 3.2. (*Cadeia de Hamilton*) Uma cadeia v_1, v_2, \dots, v_n de um grafo G é dita uma cadeia de Hamilton, se essa cadeia percorre todos os vértices do grafo exatamente uma única vez. Caso tenhamos $v_1 = v_n$ essa cadeia é chamada cadeia de Hamilton fechada (note que no caso da cadeia ser fechada o vértice inicial é usado duas vezes e os demais vértices são usados uma única vez), caso contrário é chamada Cadeia de Hamilton aberta.

Exemplo 3.2. O grafo K_6 (figura 3.2), possui uma cadeia de Hamilton fechada $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$, e o grafo da figura 3.3 possui uma cadeia de Hamilton aberta $v_1v_2v_3v_5v_4$

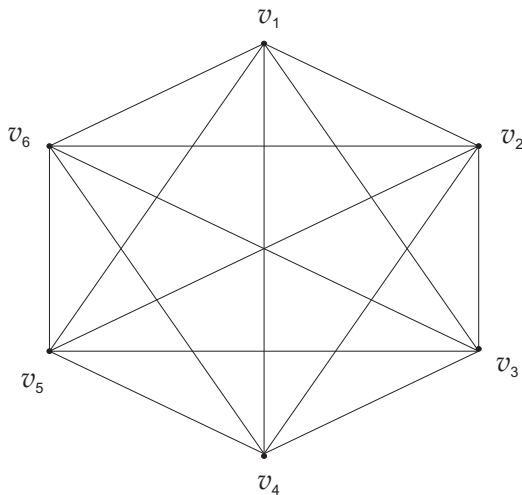


Figura 3.2:

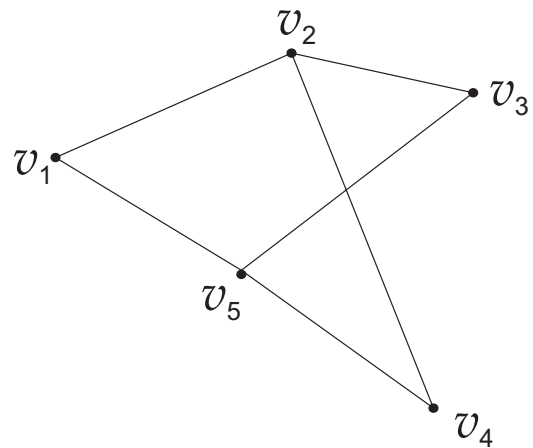


Figura 3.3:

Teorema 3.3. Seja v o número de vértices de um grafo $G(V, E)$, então caso a soma dos graus de cada par de vértices de G for maior ou igual a $v-1$ então vale o seguinte:

- (I) G é conexo.
- (II) Todos pares de vértices de G são adjacentes ou possuem um vértice comum entre si.

Prova:

(i) A demonstração desse item será feita por contradição. Vale ressaltar que devemos analisar apenas um caso geral para grafos desconexos com v vértices.

O caso geral ocorre quando temos n partes conexas com k vértices cada.

Suponha que G seja desconexo, e que o grafo pode ser dividido em n subgrafos desconexos, com k vértices cada, totalizando $n \times k$ vértices. Note que devemos apenas analisar o caso onde um vértice em cada subgrafo é ligado a todos os outros n vértices (caso contrário a soma dos graus desse vértice com qualquer outro já seria menor do que $(n \times k) - 1$), chame esses vértices que são ligados a todos os outros em cada subgrafo de v_1, v_2, \dots, v_n , para cada um dos n subgrafos note que grau de v_1 ($gr(v_1)$) é igual a $k - 1$ e que $gr(v_1) = gr(v_2) = \dots = gr(v_n)$. Todos os outros vértices do grafo diferentes de v_1, v_2, \dots, v_n tem grau menor do que $n - 1$ (em particular possuem grau 1). Então analisando qualquer par de vértices do conjunto v_1, v_2, \dots, v_n , tomando sem perda de generalidade o par v_1, v_2 , nota-se que a soma de seus graus é $2k - 2$, e $2k - 2 < n \times k - 1$ para todo $n > 1$ e $k > 1$, $n, k \in \mathbb{N}$, o que contradiz a hipótese, portanto G é conexo.

(ii) Suponha por contradição que hajam dois vértices v_1 e v_2 que não são adjacentes um ao outro nem a um terceiro vértice. Note também que para cada aresta que liga v_1 a um determinado vértice w , deixamos de ter uma aresta ligando w a v_2 (pois eles não possuem nenhum vértice comum), portanto a soma máxima $gr(v_1) + gr(v_2)$ é $v - 2$ e $v - 2 < v - 1$ o que contradiz a hipótese de que a soma dos graus de cada par de vértices é maior ou igual a $v - 1$.

Teorema 3.4. *Se a soma dos graus de cada par de vértices de um grafo G é maior ou igual a $v - 1$ (onde v é o número de vértices de G), então G possui uma cadeia de Hamilton aberta.*

Prova: Tome o maior inteiro w tal que o grafo caminho P_w seja um subgrafo de G . Note que caso w fosse igual a v , P_w seria uma cadeia de Hamilton aberta em G , então devemos mostrar que $w = v$. Suponha então, por contradição, que $w < v$, e tome um grafo caminho P_w obedecendo as condições acima. Como $w < v$, G possui vértices que não estão incluídos em P_w e como G é conexo (pelo Teorema 3.3), G também possui vértices que não estão em P_w . Chame de c e d os vértices onde começa e termina P_w .

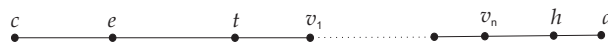


Figura 3.4:

(i) Note que c e d podem ser adjacentes somente a outros vértices de P_w , pois se fossem adjacentes a um outro vértice f de G então o grafo caminho f, c, \dots, d seria um subgrafo de G P_{w+1} , o que contradiz o fato de w ser o maior inteiro tal que P_w é subgrafo de G .

(ii) Suponha então que c e d sejam adjacentes, e tome um vértice q de G que não está incluído em P_w . Pelo teorema 3.3 temos que c e q ou são adjacentes um ao outro (o que não é possível pois c é adjacente somente a vértices de P_w), ou são adjacentes a um vértice em comum. Chame esse vértice de n , como n é adjacente a c , n deve pertencer a P_w . Note que o grafo caminho $q, n, \dots, c, d = P_{w+1}$ também é um subgrafo de G , contradizendo a maximalidade de w . Portanto c e d não podem ser adjacentes.

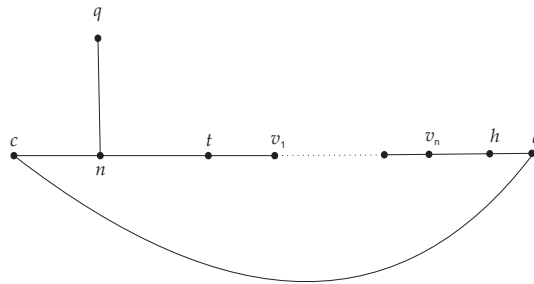


Figura 3.5:

Sendo assim suponha que c e d não sejam adjacentes, para a próxima parte da demonstração vamos estabelecer uma direção no caminho P_w , no sentido de c para d , por exemplo o vértice n está a direita de c e f está a direita de n , h está a esquerda de d .

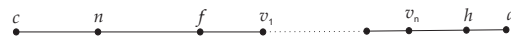


Figura 3.6:

Agora seja y o número de vértices diferentes de h que são adjacentes a d , portanto $y = gr(d) - 1$, por (i) temos que esses y vértices são vértices de P_w . Agora vamos estabelecer um limite superior para o grau de c . Suponha que c não é adjacente a nenhum dos y vértices a direita dos y vértices adjacentes a d . Podemos afirmar que $gr(c) \leq w - 1$ e usando (ii) c não é adjacente aos y vértices citados acima, chegando a seguinte conclusão: $gr(c) \leq w - 2 - y$. Pela maneira como y foi definido temos que $gr(d) = y + 1$, e sendo assim:

$$gr(c) + gr(d) \leq w - 2 - y + y + 1 = w - 1 < v - 1$$

O que contradiz a hipótese do teorema. Portanto c deve ser adjacente a algum vértice z de P_w , que é adjacente a q , portanto tome a cadeia $q, z, c, \dots, d = P_{w+1}$ o que

contradiz a suposição de que $w < v$ e portanto chegamos a conclusão de que $w = v$ como queríamos provar.

Teorema 3.5. *Se a soma dos graus de cada par de vértices de um grafo G for maior ou igual a v , então G possui uma cadeia de Hamilton fechada.*

Prova: Tome um grafo G satisfazendo a hipótese, pelo Teorema 3.4 esse grafo possui uma cadeia de Hamilton aberta w , como w é uma cadeia de Hamilton aberta ela contém todos os vértices de G , mas não necessariamente todas as arestas. Vamos analisar dois casos então:

(I) Os vértices c e d são adjacentes. Nesse caso existe uma cadeia de Hamilton fechada trivial.

(II) Os vértices c e d não são adjacentes. Nesse caso c é adjacente a um vértice n a direita de um vértice adjacente a d , caso não fosse teríamos:

$$gr(c) \leq v - 2 - gr(d) + 1$$

Então

$$gr(c) + gr(d) \leq v - 2 - gr(d) + 1 + gr(d) \implies gr(c) + gr(d) < v - 1$$

o que contradiz a hipótese.

Deve-se ressaltar que esses dois teoremas não nos dão muitas garantias sobre as cadeias de Hamilton já que podem haver grafos que não cumprem as hipóteses de nenhum dos dois teoremas e ainda assim possuem uma cadeia de Hamilton, fato que não ocorre com as cadeias de Euler.

3.1 Multigrafos

Definição 3.3. *Um grafo G é dito um multigrafo se existir mais de uma aresta ligando um mesmo par de vértices de G .*

Exemplo 3.3. O grafo da figura 3.7 é um multigrafo pois possui mais de uma aresta ligando os pares de vértices v_2 e v_3 , e v_3 e v_4 .

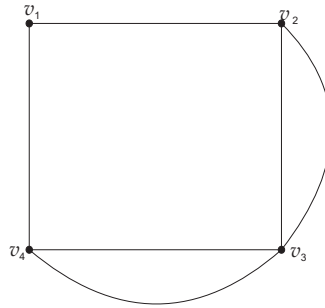


Figura 3.7:

Definição 3.4. *Uma cadeia em um multigrafo G é uma sequência alternada de vértices não necessariamente distintos, tal que cada vértice é conectado ao próximo vértice da sequência através de uma aresta. No caso do primeiro vértice da sequência ser igual ao último temos uma cadeia fechada.*

Exemplo 3.4. A sequência de vértices $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_5$ é uma cadeia no multigrafo da figura 3.8.

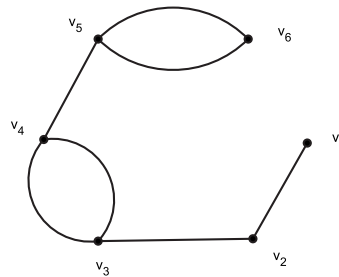


Figura 3.8:

Definição 3.5. *O grau de um vértice em um multigrafo é igual ao número de arestas ligadas ao vértice.*

Definição 3.6. *Uma cadeia de Euler em um multigrafo é uma cadeia que utiliza cada aresta do multigrafo uma única vez.*

Teorema 3.6. *Um multigrafo conexo possui uma cadeia de Euler fechada se, e somente se, todos os seus vértices possuem grau par.*

Prova:

(I) Tome um multigrafo conexo G , agora em cada par de vértices com mais de uma aresta interligando-os escolha uma dessas arestas, e assim defina os subgrafos W_1, W_2, \dots, W_n , utilizando todas as combinações de arestas possíveis. Essas combinações de arestas são obtidas escolhendo em cada par de vértices ligado por

mais de uma aresta, uma das arestas que ligam esse par. No exemplo 3.4 podemos obter quatro subgrafos W_1, W_2, W_3 e W_4 utilizando cada uma das arestas que ligam v_3 a v_4 e v_5 a v_6 .

Note agora que como G é conexo, todos os subgrafos W_1, \dots, W_n possuem todos os seus vértices com grau par, e sendo assim pelo teorema 3.1, temos que cada subgrafo possui uma cadeia de Euler fechada, e agora unindo cada um dos subgrafos, chegamos a conclusão que o multigrafo G também possui uma cadeia de Euler fechada.

(II) Tome agora um multigrafo G com uma cadeia de Euler fechada, estabeleça subgrafos W_1, \dots, W_n de G como feito em (i), utilizando o teorema 3.1, conclui-se que cada um dos subgrafos é conexo, e portanto unindo-se todos os subgrafos temos que G é conexo.

Teorema 3.7. *Um multigrafo conexo G possui uma cadeia de Euler aberta se, e somente se, G possui exatamente dois vértices de grau ímpar.*

Prova:

(I) Tome um multigrafo conexo G com exatamente 2 vértices ímpares. Ligue os dois vértices ímpares através de uma nova aresta, criando assim um hipermultigrafo H (a definição de hipermultigrafo é análoga a definição de hipergrafo), note que H possui todos os vértices pares, e portanto pelo teorema 3.6, possui uma Cadeia de Euler fechada. removendo a nova aresta e retornando ao multigrafo G , conclui-se que G possui uma cadeia de Euler aberta começando em um dos vértices ímpares, e terminando no outro.

(II) Tome agora um multigrafo G com uma cadeia de Euler aberta. Ligue o vértice inicial da cadeia com o vértice final através de uma nova aresta, formando um novo hipermultigrafo H . Note que H possui uma cadeia de Euler fechada e, pelo teorema 3.6, possui todos os vértices com grau par, ou seja, se retirarmos a nova aresta e retornarmos a G , podemos ver que os vértices inicial e final possuem grau ímpar, como queríamos demonstrar.

3.2 Solução de Labirintos

Uma aplicação da teoria de grafos é na solução de Labirintos, encontrando uma maneira de como encontrar a saída de um labirinto a partir de uma entrada, ou caso estarmos dentro do labirinto, estabelecer um método que nos leve a uma saída. Aqui iremos analisar o caso de estarmos dentro do labirinto sem termos idéia do formato ou tamanho do labirinto, mas com a condição de podermos fazer marcações

nas paredes e no chão do labirinto, esse algoritmo é chamado: *Algoritmo de busca em profundidade para Labirintos*.

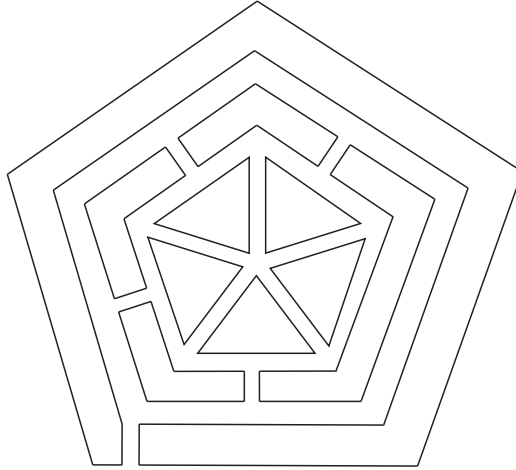


Figura 3.9:

Tendo como o labirinto da figura acima, vamos utilizar o algoritmo para encontramos uma saída.

A idéia desse algoritmo é transformar os corredores do labirinto em arestas, e os cruzamentos em vértices, da seguinte maneira:

(i) Em cruzamentos é atribuído um vértice para o lugar onde os corredores se encontram e um vértice para cada um dos corredores ligados a esse cruzamento.

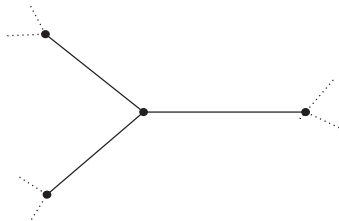
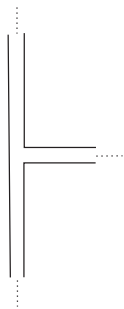


Figura 3.10:

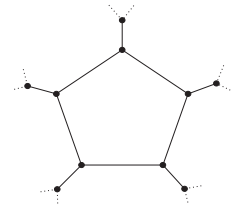
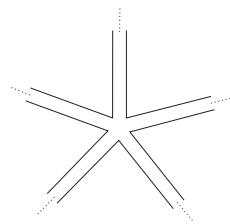


Figura 3.11:

(ii) Caso tenhamos um corredor sem saída, adicione um vértice e um laço a esse corredor.

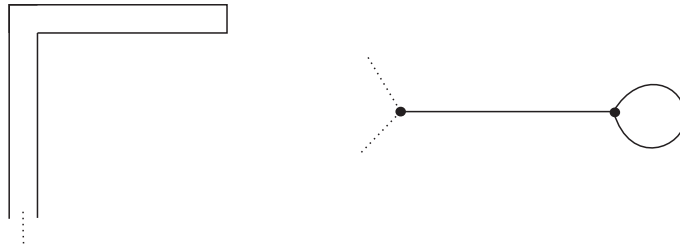


Figura 3.12:

Executando-se essas associações, podemos utilizar o seguinte algoritmo para encontrar a saída do Labirinto:

- 1- Escolha um caminho de partida.
- 2- Dirija-se a um vértice vizinho do seu atual ponto e que ainda não foi visitado.
- 3- Repita o passo 2 tantas vezes quanto possível.
- 4- Se você já investigou todos os vértices vizinhos de seu atual ponto, percorra a sequência dos vértices já visitados para trás (voltando por onde veio), até chegar a um vértice vizinho ainda não visitado. Visite-o.
- 5- Assinale todas as arestas que você revisitou (para fins de melhor visibilidade).
- 6- Repita os passos 2 a 5 até achar a saída do labirinto.

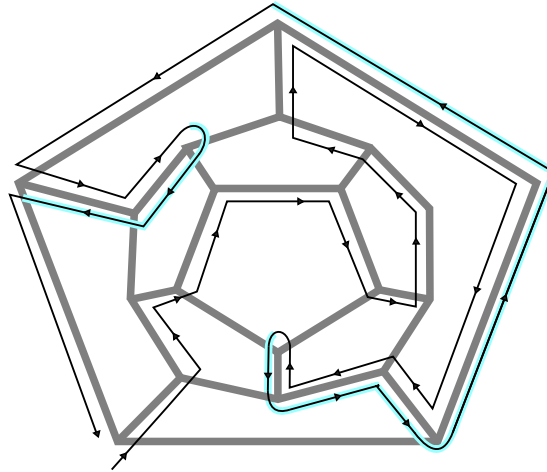


Figura 3.13:

O grafo da figura 3.13 representa o labirinto da figura 3.9. Nele o caminho percorrido utilizando o algoritmo é indicado por setas, as setas em azul, indicam o caminho feito voltando, após encontra um vértice que não era adjacente a nenhum novo vértice.

3.3 O problema do Caixeiro Viajante

Esse problema, que foi estudado por Hamilton, consiste em dada uma quantidade n de cidades ligadas por estradas, encontrar o menor caminho que passa por todas as cidades, podendo ou não repetir alguma delas.

Exemplo 3.5.

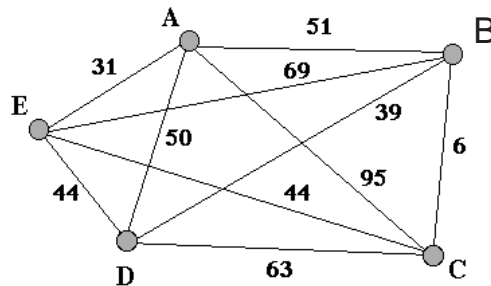


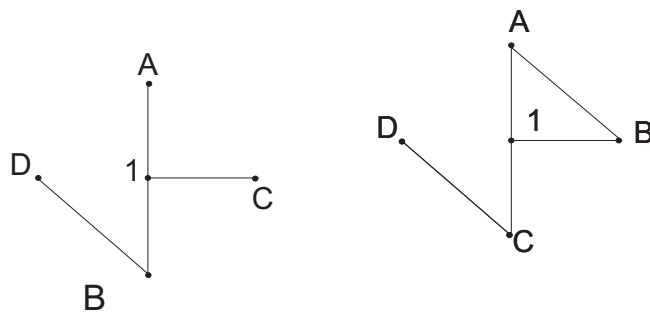
Figura 3.14:

No exemplo 3.5 para achar o menor caminho podemos usar o método de tentativa e erro, ou algum processo computacional para resolvê-lo, o que pode ser demorado pois o número de soluções possíveis é de $5!$, ou seja, 120 soluções.

Em um grafo completo com n cidades, o problema do caixeiro viajante, admite $n!$ soluções, ou seja, em um problema com 20 cidades teríamos $20!$ soluções possíveis.

Uma abordagem mais simples do problema pede para encontrar um caminho que percorra todas as cidades do diagrama, sem repetir nenhuma cidade. Para encontrar a solução para esse problema podemos utilizar cadeias de Hamilton, pois se existe uma cadeia de Hamilton no grafo, é possível encontrar um caminho que percorra todos os vértices do grafo passando apenas uma única vez em cada vértice.

Exemplo 3.6.



Se tivermos um problema onde o caixeiro tenha que viajar entre as cidades $1, A, B, C, D$ sem passar duas vezes pela mesma cidade, facilmente pode-se perceber que o grafo da esquerda na figura 3.5 não admite solução para o problema. Mas adicionando uma nova estrada ligando quaisquer duas cidades, conseguimos resolver o problema, pois com a nova estrada se torna possível encontrar uma cadeia de Hamilton no grafo que representa as cidades.

Capítulo 4

Coloração de Grafos

Definição 4.1. *Colorir um grafo é atribuir elementos de um conjunto qualquer, por exemplo, de cores ou de números, de modo que vértices adjacentes não possuam o mesmo símbolo.*

Exemplo 4.1. O grafo da figura 4.1 foi colorido utilizando os elementos do conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$

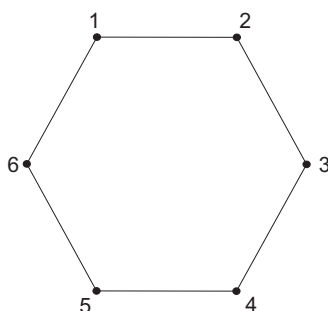


Figura 4.1:

Definição 4.2. *O número cromático χ de um grafo é o menor número de cores necessário para colorir um grafo.*

Exemplo 4.2. O grafo da figura 4.1 possui $\chi = 2$

Alguns fatos podem ser citados sobre o número cromático:

- (i) Um grafo pode ser sempre colorido utilizando-se uma cor diferente para cada vértice, ou seja $\chi \leq V$, onde V é o número de vértices do grafo. (ii)

O menor número cromático possível é $\chi = 1$ (somente nos grafos nulos), portanto podemos chegar a seguinte inequação $1 \leq \chi \leq V$.

Teorema 4.1. *Os grafos completos são os únicos com $\chi = V$ e os grafos nulos são os únicos com $\chi = 1$.*

Prova: A prova será feita em duas partes:

(i) No caso dos grafos N_v é imediato que $\chi(G) = 1$ pois não existem vértices adjacentes. Também é imediato que os grafos nulos são os únicos com $\chi(G) = 1$ pois qualquer grafo que não seja um grafo nulo, possui pelo menos um par de vértices adjacentes, e pela definição de coloração precisaria de pelo menos duas cores diferentes para ser colorido.

(ii) Como nos grafos completos cada vértice é adjacente a todos os outros vértices do grafo, é imediato que $\chi(G) = V$. Note que K_v são os únicos grafos onde isso ocorre, pois caso um grafo não seja completo, então ele possui pelo menos dois vértices não adjacentes, e que por esse motivo podem ser coloridos com a mesma cor.

4.1 A primeira fórmula de Euler

Definição 4.3. *(FACES de um grafo) Quando um grafo é traçado em um plano sem que arestas se cruzem, ou seja, o grafo é planar, ele divide o plano em regiões chamadas faces. As faces de um grafo são indicadas pela letra f .*

Observação: A região "em volta" do grafo, que não é limitada por duas arestas, é chamada de face exterior do grafo, e contamos ela como uma face em qualquer grafo.

Exemplo 4.3.

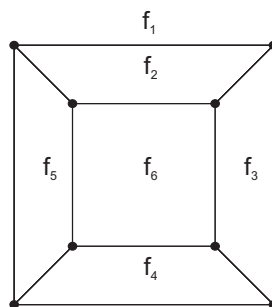


Figura 4.2:

Definição 4.4. *Um grafo é dito ser **poligonal** se ele é: planar, conexo e cada uma de suas arestas faz fronteira com duas faces diferentes.*

Exemplo 4.4. O grafo da figura 4.3 é um exemplo de grafo não poligonal.

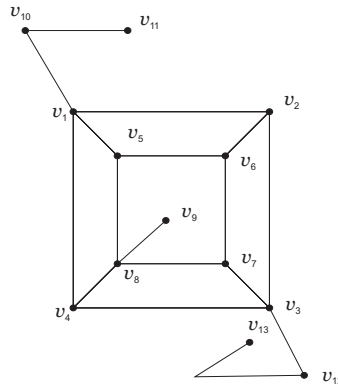


Figura 4.3:

Teorema 4.2. (*Fórmula de Euler*) Dado um grafo $G(V, E)$, planar, conexo e poligonal os números v, f e e de vértices, faces e arestas, respectivamente, satisfazem a relação:

$$v + f - e = 2$$

.

Prova: Usando o princípio de indução matemática:

(i) a afirmação vale para $f = 1$. O único grafo poligonal com uma face é N_1 . O grafo nulo com um único vértice, $v = 1, f = 1, e = 0$, ou seja

$$v + f - e = 1 + 1 - 0 = 2$$

.

(ii) Suponha, por indução, que o teorema seja válido para $f = k$.

$$v + f - e = 2$$

(iii) Vamos mostrar que a afirmação é válida para $f = k + 1$.

Seja G um grafo poligonal qualquer com $k + 1$ faces. Seja H um outro grafo poligonal obtido de G pela remoção das arestas e dos vértices de G que são adjacentes a face externa de G , portanto H tem k faces. Como H tem k faces pela hipótese de indução é válido o seguinte:

$$v_H + f_H - e_H = 2$$

Temos que:

$$f_G = f_H + 1$$

Seja $x := e_G - e_H$ de modo que $e_G = x + e_H$. x é o número de arestas que foram removidas de G).

Também note que sempre que removemos um número x de arestas de um grafo removemos um número $x-1$ de vértices do grafo. Portanto, em G obtemos o seguinte:

$$v_G = v_H + x - 1$$

.

Considere agora a seguinte relação:

$$v_G + f_G - e_G = (v_H + x - 1) + (f_H + 1) - (x + e_H)$$

Substituindo as relações encontradas acima obtemos:

$$v_G + f_G - e_G = v_H + x - 1 + f_H + 1 - x + e_H = v_H + f_H - e_H = 2.$$

E assim demonstramos por indução a fórmula de Euler.

Os próximos teoremas vão ser necessários para demonstrar o teorema das 5 cores.

Teorema 4.3. *Se G é planar e conexo com $v \geq 3$, então $\frac{3}{2}f \leq e \leq 3v - 6$.*

Prova: Seja G um grafo planar, conexo e com 3 ou mais vértices. Vamos separar a demonstração em 2 casos:

(i) G possui uma face limitada por menos do que 3 arestas, mas note que para que isso aconteça G teria que ser o grafo caminho P_3 , ou algum outro grafo caminho P_n $n \geq 3$, aqui vamos mostrar utilizando P_3 , a demonstração é similar para P_n .

Para P_3 , $v = 3$, $f = 1$, e $e = 2$. Portanto temos $\frac{3}{2}f = \frac{3}{2}$, $e = 2$, $3v - 6 = 3$, ou seja, $\frac{3}{2}f \leq e \leq 3v - 6$.

(ii) Todas as faces de G são limitadas por 3 ou mais arestas. Sendo assim numerando as faces de G de 1 a f podemos elaborar a seguinte série de afirmações: Se k é o número de arestas que limitam determinada face do grafo:

$$\begin{aligned} 3 &\leq k(1) \\ 3 &\leq k(2) \\ &\vdots \\ 3 &\leq k(f) \end{aligned}$$

Somando as duas colunas chegamos a seguinte afirmação $3f \leq D$, onde D é a soma da segunda coluna. Se G fosse poligonal, $D = 2e$ pois em um grafo poligonal

cada aresta faz fronteira com exatamente 2 faces, e sendo assim teríamos contado 2 vezes cada aresta, resultado em $D = 2e$. Agora caso G não fosse poligonal, teríamos $D < 2e$, pois existiria pelo menos 1 aresta que não faria fronteira com duas faces distintas. Portanto podemos afirmar que $D \leq 2e$. Substituindo em $3f \leq D$, temos $3f \leq 2e, \frac{3}{2}f \leq e$, concluindo para a primeira parte do teorema.

Para demonstrar a segunda parte do teorema vamos utilizar o fato de que $\frac{3}{2}f \leq e$ que acabamos de provar. Multiplicando ambos os lados por $\frac{2}{3}$, temos que $f \leq \frac{2}{3}e$. Somando $v - e$ temos que:

$$v + f - e \leq \frac{2}{3}e + v - e$$

Utilizando a fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} 2 &\leq v + \frac{2e}{3} - e \\ 2 &\leq v - \frac{e}{3} \\ \frac{e}{3} &\leq v - 2 \\ e &\leq 3v - 6 \end{aligned}$$

Concluindo assim a demonstração do teorema.

Corolário: K_5 não é planar.

Prova: Suponha por contradição que K_5 fosse planar. é sabido que K_5 é um grafo conexo, então pelo teorema 11 K_5 deveria satisfazer $e \leq 3v - 6$. Mas K_5 possui 10 arestas e 5 vértices, portanto teríamos $10 \leq 9$, o que é uma contradição. Portanto K_5 não é planar.

Teorema 4.4. *Se G é planar e conexo então G possui um vértice de grau menor ou igual a 5.*

Prova: Seja G um grafo planar e conexo, vamos dividir a prova em dois casos:

(i) G possui menos de 3 vértices.

Nesse caso G deveria ser K_1 ou K_2 e nesses grafos a hipótese é válida.

(ii) G possui 3 ou mais vértices.

Suponha por contradição que todo vértice de G possua grau ≥ 6 , então numerando os vértices de 1 a v , podemos afirmar o seguinte:

$$\begin{aligned} 6 &\leq gr(1) \\ 6 &\leq gr(2) \\ &\vdots \\ 6 &\leq gr(v) \end{aligned}$$

Somando as duas colunas, temos que:

$$\begin{aligned}6v &\leq 2e \\3v &\leq e\end{aligned}$$

Pelo teorema anterior temos que como G é planar e conexo $e \leq 3v - 6$, substituindo:

$$3v \leq 3v - 6$$

Chegando a uma contradição, portanto G deve possuir pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.

4.2 A conjectura das 4 cores

A conjectura das 4 cores diz o seguinte:

"Todo grafo planar possui número cromático $\chi \leq 4$ ".

Essa conjectura foi proposta pela primeira vez por Francis Guthrie (1831-1899) enquanto tentava colorir o mapa dos condados da Inglaterra. Em 1879 Alfred Kempe (1849-1922) apresentou uma prova para a conjectura, prova essa que foi mostrada ser falsa por Percy Heawood (1861-1955), em 1891, mas as falhas apontadas na demonstração de Kempe por Heawood, levaram este último a estabelecer e demonstrar o teorema das 5 cores. No ano de 1976, Keneth Appel (1932 -) e Wolfgang Haken (1928 -) demonstraram a conjectura, mas necessitaram de computadores para a verificação de vários grafos no processo. Por esta razão sua demonstração não foi aceita por vários matemáticos, já que a demonstração não poderia ser verificada somente utilizando cálculos manuais.

Teorema 4.5. (*Teorema das 5 cores*) *Todo grafo planar possui $\chi \leq 5$.*

Observação: Essa prova é dividida em várias partes, por isso o grande número de passos na demonstração.

Prova: Vamos utilizar o princípio de indução sobre o número de vértices para essa demonstração:

(i) A proposição é válida para $v = 1$ pois precisamos de somente uma cor para colorir 1 grafo com um único vértice, ou seja, $\chi = 1 \leq 5$.

(ii) Estabelecendo a hipótese de indução suponha que a afirmação seja válida para um grafo com k vértices, ou seja, $\chi \leq 5$ para um grafo planar com k vértices.

(iii) Seja $G(V, E)$ um grafo planar com $k+1$ vértices, pelo Teorema 4.4 temos que G possui um vértice a com grau ≤ 5 .

Definimos o Grafo $G - A$ como o grafo G , excluindo o vértice a e as arestas incidentes a a , portanto $G - A$ possui k vértices e pode ser colorido com 5 cores ou menos. Vamos agora tratar as possibilidades de coloração do grafo W formado pelo vértice A e pelos vértices de $G - A$ adjacentes a A (colorindo assim o grafo G).

i W possui $\chi \leq 5$

Nesse caso basta colorir o vértice A com um cor ainda não utilizada em $G - A$, chegando a conclusão que mesmo que $\chi(G - A) = 4$, $\chi(G) \leq 5$.

ii $G - A$ tem $\chi = 5$ e $gr(\mathbf{a}) < 5$.

Nesse caso, A é adjacente a no máximo 4 vértices, bastando colorir A com uma cor distinta de cada uma das cores utilizadas nos vértices adjacentes a A .

iii $G - A$ tem $\chi = 5$ e $gr(\mathbf{a}) = 5$. Este é o caso mais complexo e requer atenção pois será necessário mudar a cor de alguns vértices gerando assim vários casos para analisar.

(a) Se dois vértices adjacentes a A possuem a mesma cor, há uma quinta cor não utilizada e podemos utilizá-la para colorir A .

(b) Sejam 1, 2, 3, 4 e 5 as 5 cores, e sejam, P, Q, R, S e T os vértices adjacentes a A , coloridos da seguinte forma: $P(1), Q(2), R(3), S(4), T(5)$.

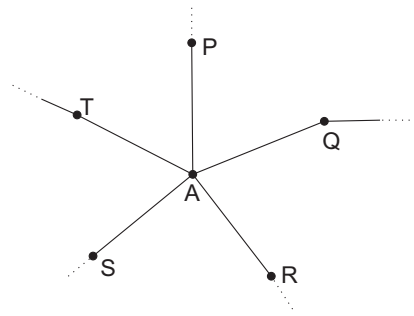


Figura 4.4:

(i) Não existe uma cadeia ligando P a R consistindo de vértices coloridos com 1 e 3. Portanto não é possível ir de P para R através de uma cadeia como essa, sendo assim troque a cor de P de 1 para 3 e em cada vértice subsequente nessa cadeia faça a seguinte troca $1 \rightarrow 3$ e $3 \rightarrow 1$, dessa maneira teremos 2 vértices adjacentes a a coloridos com a mesma cor 3 e podemos usar a cor 1 para colorir o vértice a .

(ii) Há uma cadeia ligando P a R formada somente por vértices coloridos com 1 e 3. Se esse fato é verdadeiro, suponha que exista uma cadeia ligando Q a S formada

somente por vértices coloridos com 2 ou 4. Note que não é possível existir tal cadeia ligando Q a S , pois: como o grafo G é planar Q é cercado por um subgrafo cíclico de G iniciando em P e terminando em R , mas como nenhum dos vértices desse subgrafo usando as cores 2 ou 4 (pois o subgrafo foi construído utilizando somente as cores 1 e 3). Usando o fato de G ser planar chegamos a conclusão de que qualquer cadeia ligando Q a S deve passar por um dos vértices do subgrafo de G , o que é impossível pois a cadeia que liga Q a S é composta por vértices coloridos com 2 e 4 e o subgrafo possui vértices coloridos somente com 1 e 3. Portanto não existe tal cadeia ligando Q a S .

Usando o mesmo raciocínio do subcaso anterior, vamos recolorir Q com a cor 4 e executar a troca $4 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4$, conseguindo assim dois vértices adjacentes a a coloridos com a cor 4 e assim a pode ser colorido com a cor 2, terminando a demonstração para $k + 1$ vértices.

4.3 Coloração de Mapas

Definição 4.5. *Colorir um mapa é atribuir cores para cada região de modo que regiões adjacentes não possuam cores iguais.*

Quando estamos colorindo um mapa podemos representá-lo por um grafo, onde cada região é representada por um vértice e as fronteiras que separam as regiões são as arestas do grafo. Logo após é feito um grafo dual do grafo que representa o mapa e assim, colorindo o grafo dual, encontramos uma coloração para o mapa.

Definição 4.6. *Um grafo dual do grafo G , é um grafo baseado em G , da seguinte maneira: cada vértice do grafo dual, representa uma face de G , e as arestas do grafo dual ligam os vértices correspondentes a faces adjacentes.*

Exemplo 4.5. O grafo G representa um mapa e o grafo H é o dual do grafo G .

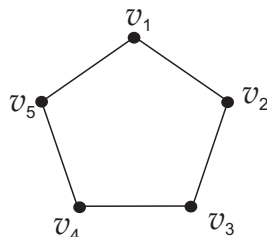


Figura 4.5:

4.4 O Problema da coloração de Mapas

O problema da coloração de mapas se trata de achar o número mínimo de cores necessárias para se colorir um determinado mapa. Esse problema surgiu da necessidade de se utilizar um número mínimo de cores para colorir o mapa de determinada região, já que utilizando-se menos cores, diminuiria o custo de impressão desses mapas.

A resolução desse problema torna-se simples após a leitura deste capítulo pois o número mínimo de cores é 4 (utilizando-se a conjectura das 4 cores) ou 5 (utilizando o teorema das 5 cores). Para verificar que o teorema pode ser utilizado, basta usar o seguinte método:

Primeiro traça-se o grafo que representa o mapa a ser colorido (utilizando o método descrito no início desta seção), logo após constrói-se um novo grafo a partir deste. Este novo grafo possui seus vértices localizados em cada uma das faces do grafo anterior, e as faces adjacentes são ligadas por arestas, gerando assim um grafo dual ao grafo que representa o mapa. Este grafo dual sempre será planar e conexo.

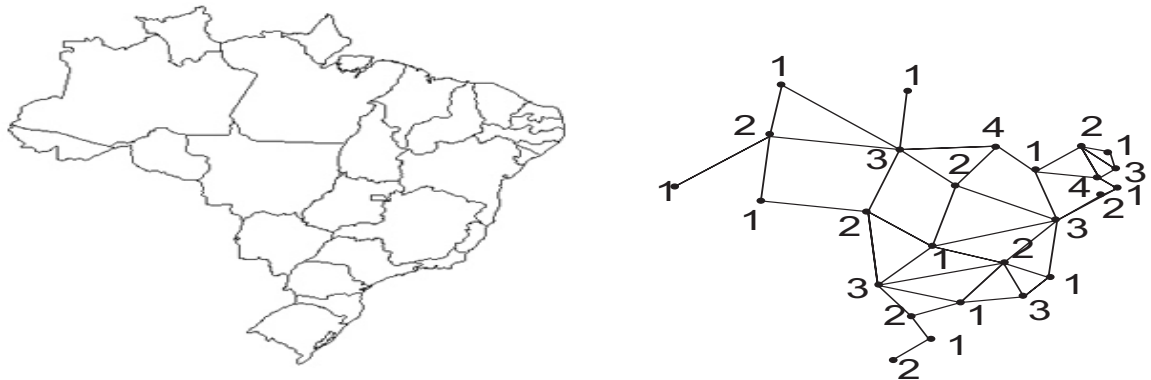


Figura 4.6:

Capítulo 5

O Gênero de um Grafo

No capítulo 2 definimos um grafo planar como sendo o grafo:

a) que pode ser representado por um diagrama no plano e;

b) sem cruzamento de arestas.

Neste capítulo consideramos grafos que podem ser representados por diagramas desenhados:

a) sobre outras superfícies e;

b) sem cruzamento de arestas.

Considere a família de superfícies no \mathbb{R}^3 , indicadas pelo símbolo S_g , formada pela superfície esférica (S_0), o toro (S_1), o 2-toro, \dots , g-toro, \dots como mostra a figura 5.1. O índice g, chamado de gênero da superfície S_g , é o número de "buracos" na superfície. Desse modo, S_0 indica a superfície esférica, que não tem "buracos".

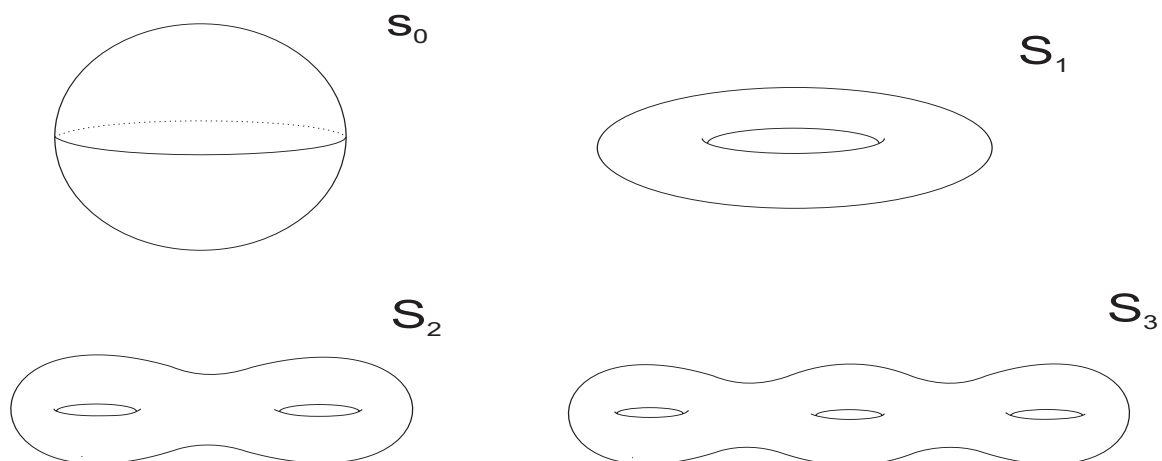


Figura 5.1:

Definição 5.1. O gênero de um grafo, denotado " g ", é o índice da primeira superfície na sequência S_0, S_1, \dots , na qual o grafo pode ser traçado sem um cruzamento de arestas.

É intuitivo que localmente, isto é, numa vizinhança de um ponto qualquer de qualquer superfície S_g , $g = 0, 1, 2, \dots$, podemos desenhar o diagrama de qualquer grafo planar. A superfície S_0 , portanto, é a primeira onde isso pode ser feito. Logo, um grafo planar tem gênero $g = 0$. Podemos provar o seguinte:

Teorema 5.1. O conjunto dos grafos planares é igual ao conjunto de todos os grafos com $g = 0$.

Prova:

(i) Todo grafo que possui $g = 0$ é planar.

Seja G um grafo traçado em uma esfera sem cruzamento de arestas. Selecione um ponto pertencente à face exterior desse grafo e retire esse ponto. Em seguida, deforme a superfície resultante até obter um círculo sobre o plano, como mostrar a figura 5.2. Após esse processo teremos um círculo no plano com o grafo G no interior desse círculo. Apagando o círculo teremos G traçado no plano sem cruzamento de arestas.

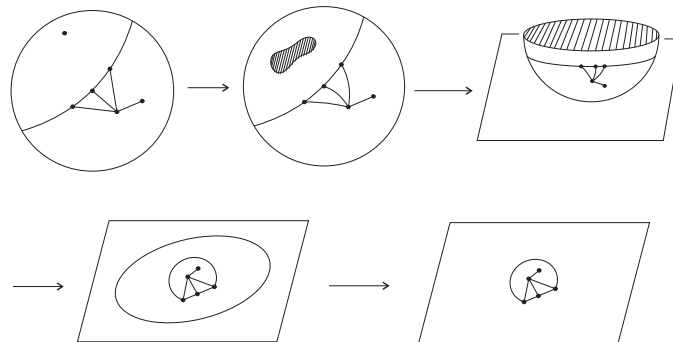


Figura 5.2:

(ii) Todo grafo planar possui $g = 0$.

Seja G um grafo planar. Trace-o no interior de um círculo. Em seguida, deforme-o até formar um hemisfério. Continue o processo até obter uma superfície esférica na qual falta um ponto. Esse procedimento é o inverso do feito em (i). Complete a esfera e temos G traçado em S_0 , portanto G possui $g = 0$.

Teorema 5.2. *Todo grafo possui um gênero.*

Prova: Seja G um grafo qualquer. Se G é planar, então $g = 0$ pelo teorema anterior. Caso G não seja planar, então trace G sobre S_0 . Para cada cruzamento de arestas adicione uma "alça" (uma deformação que elimina o cruzamento de arestas criando um "buraco" em S_0) de modo que seja desfeito esse cruzamento. Seja n o número de alças, note que n é finito (pois G possui um número finito de arestas). S_0 com essas n "alças" pode ser deformado até termos S_n .

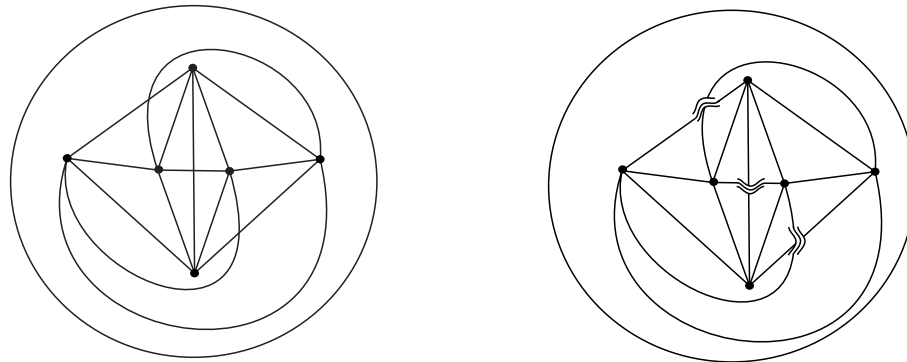


Figura 5.3:

Na sequência de superfícies S_0, S_1, S_2, \dots temos que o gênero g de qualquer grafo G é a primeira superfície da sequência na qual G pode ser traçado sem cruzamento de arestas.

Teorema 5.3. *Se um grafo G possui gênero g , então G pode ser traçado sem cruzamento de arestas em toda superfície S_n com $g \leq n$*

Prova: Tome o grafo G e S_g , e considere um diagrama de G em S_g sem cruzamento de arestas. Localize uma região de S_g onde não passem arestas de G , note que essa região pode ser deformada, acrescentando novos "furos" a S_g , fazendo isso, podemos deformar S_g em S_n , conseguindo assim traçar G sem cruzamento de arestas em qualquer superfície S_n com $g \leq n$.

A partir deste resultado podemos ver que o gênero de um grafo divide a sequência de superfícies S_0, S_1, \dots em duas sequências distintas: S_0, S_1, \dots, S_{g-1} de superfícies onde não se pode traçar G sem um cruzamento de arestas, e a sequência S_g, S_{g+1}, \dots em que se pode traçar G sem um cruzamento de arestas.

A noção de gênero também nos permite classificar os grafos quanto a sua "proximidade" com a planaridade, no sentido de que um grafo com $g = 100$ é mais afastado da planaridade do que um grafo com $g = 10$.

Também podemos reescrever o corolário do teorema de Kuratowsky (corolário 2.4) utilizando o conceito de gênero de um grafo:

"O conjunto dos grafos com $g = 0$ é igual ao conjunto dos grafos que não são expansões de $K_{3,3}$ ou K_5 "

O que nos leva a pensar que possam existir outros grafos, como $K_{3,3}$ e K_5 que possam estabelecer relações semelhantes com grafos com $g > 0$.

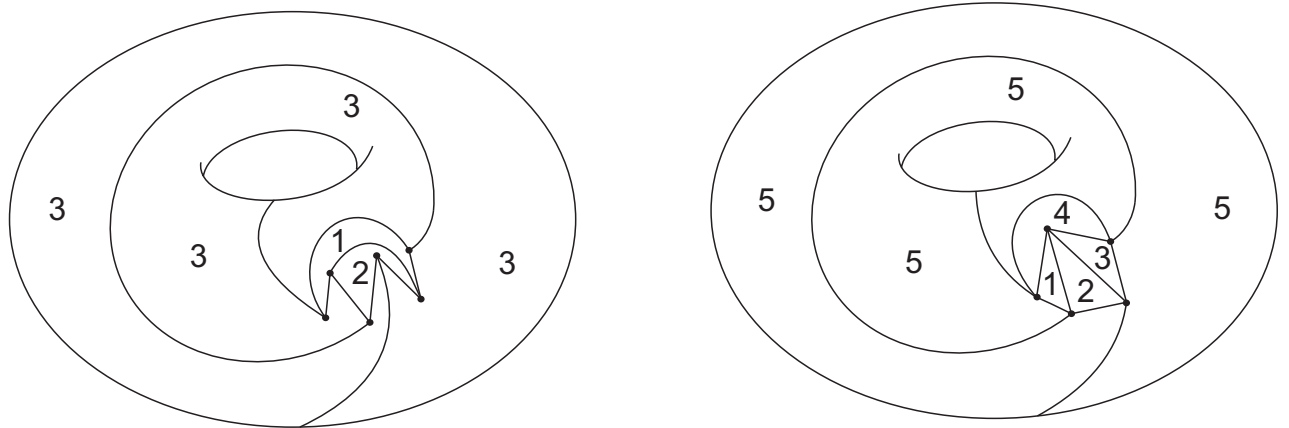
De fato em 1968 um matemático chamado Volmerhauss, provou que para cada inteiro $g \leq 0$ existem finitos grafos H_1, H_2, \dots, H_r tais que é verdadeira a seguinte afirmação:

"O conjunto dos grafos com geno g é igual ao conjunto dos grafos que não são expansões de supergrafos de H_1 ou H_2 ou H_3 ou \dots ou H_r "

No caso de $g = 0$ temos que $r = 2$ $H_1 = K_{3,3}$ e $H_2 = K_5$

Definição 5.2. Dado um grafo G com gênero g traçado como um diagrama sem cruzamento de arestas em S_g , esse diagrama divide a superfície S_g em regiões chamadas faces do grafo G . Denota-se o número de faces do grafo pela letra f .

Exemplo 5.1.



5.1 A segunda fórmula de Euler

A segunda fórmula de Euler generaliza a primeira fórmula de Euler para grafos de gênero g e é a seguinte: $v - e + f = 2 - 2g$.

Note que quando o grafo é planar temos $g = 0$ e a fórmula se reduz a fórmula de Euler para grafos planos, $v - e + f = 2$.

Para demonstrar essa fórmula será necessário assumir uma afirmação:

Afirmação: Se G é um grafo conexo de gênero g , então G pode ser traçado sem cruzamento de arestas em S_g , de tal maneira que em cada um dos g buracos de S_g

seja traçado um anel composto por vértices e arestas de G .

Exemplo 5.2.

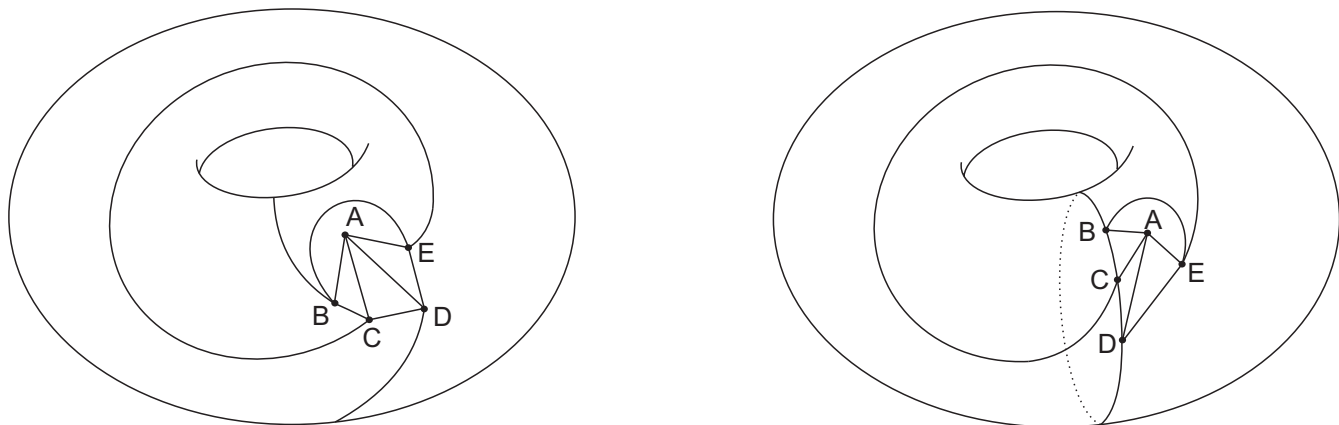


Figura 5.4:

Note que essa afirmação é razoável pois, se G foi traçado em S_g sem cruzamento de arestas, então pelo menos uma aresta de G passa por dentro de cada buraco de S_g . Como a representação de um grafo independe do diagrama utilizado, podemos usar um grafo onde um anel como o da afirmação é traçado.

Teorema 5.4. (Segunda Fórmula de Euler:) *Se G é um grafo conexo com v vértices, f faces, e arestas e gênero g , então:*

$$v + f - e = 2 - 2g$$

Demonstração: Seja G um grafo conexo de gênero g . Então segundo a afirmação que assumimos como verdadeira, G pode ser traçado em S_g , de uma maneira que tenhamos um anel composto por vértices e arestas de G , passando por cada um dos buracos de S_g . Agora corte S_g em cada um desses anéis (dividindo-os em dois anéis). Como haviam primeiramente g anéis, agora temos $2g$ anéis, cubra esses novos anéis com uma superfície em forma de disco.

Agora essa nova superfícies pode ser continuamente deformada em uma esfera, resultando em um novo grafo H em S_0 , como G não possuía cruzamento de arestas, H também não os possui, portanto temos que H é planar e conexo, pela fórmula de Euler temos que: $v_H - e_H + f_H = 2$.

Agora relacionando o número de vértices de G e H temos: $x = v_H - v_G$. Como todas as novas arestas foram criadas quando cortamos os anéis em dois, e os anéis são grafos cíclicos(mesmo número de vértices e arestas), temos que: $x = e_H - e_G$.

As únicas faces criadas cobriam os novos anéis, portanto: $f_H = f_G + 2g$. Sendo assim temos:

$$\begin{aligned}v_G + f_G - e_G &= (v_H - x) + (f_H + 2g) - (e_H - x) = \\&= v_H - x + f_H + 2g - e_H + x = \\&= v_H + f_H + 2g - e_H = 2 - 2g\end{aligned}$$

Capítulo 6

Biografias

ALFRED KEMPE



Alfred Bray Kempe (1849-1922) Nasceu em Londres na Inglaterra, e estudou em Cambridge, onde se dedicou a música e a matemática, Kempe publicou vários artigos em geometria, e sua contribuição a teoria dos grafos veio com sua prova do Teorema das 4 cores, que foi considerada verdadeira por 11 anos até que Heawood mostrou haver um erro na prova.

CAMILLE JORDAN



Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) Nasceu em Lyon na França, e estudou matemática na École Polytechnique. Jordan trabalhou com Topologia (chamada Analysis situs na época) e com teoria dos grupos. Jordan foi o primeiro

pesquisador a tratar de modo estritamente matemático a teoria das árvores, além de contribuir indiretamente com o teorema da curva de Jordan.

FRANCIS GUTHRIE



Francis Guthrie (1831-1899) nasceu em Londres, mas viveu na África do Sul, foi um matemático e Botânico que estudou o teorema das 4 cores, além de colecionar e catalogar espécimes da flora sul-africana.

GUSTAV KIRCHHOFF



Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), Nasceu Königsberg na Prússia, estudou na Albertus University de Königsberg, ele é mais conhecido pelas Leis de Kirchhoff, mas apresentou outros trabalhos em eletricidade. Ele utilizou a teoria de grafos em alguns de seus textos.

KAZIMIERZ KURATOWSKI



Kazimierz Kuratowski (1896-1980) Nasceu em Varsóvia na Polônia, e teve dificuldades para iniciar seus estudos pois a polônia estava sobre domínio soviético, e a educação em escolas polonesas apresentava dificuldades. Ele acabou estudando em Glasgow na escócia, mas por problemas causados pela primeira guerra mundial acabou conseguindo seu doutorado na então recém criada universidade de Varsóvia. Kuratowsky estudou principalmente topologia, e sua maior contribuição para a teoria dos grafos foi o Teorema de Kuratowsky.

LEONHARD EULER



Leonhard Euler(1707-1783) Nasceu em Basileia na Suíça, e recebeu educação para se tornar um ministro protestante durante sua vida universitária. Euler lecionou por vários anos na universidade de São Petesburgo na Rússia e na Academia de Berlin. Euler trabalhou com diversos temas, entre eles: ótica, análise, lançamento de projéteis, teoria dos números, cálculo variacional entre muitos outros tópicos. A contribuição de Euler para a teoria dos grafos se deu através do problema das pontes de Königsberg, onde ele acabou criando os primeiros teoremas sobre grafos na história, e na solução de labirintos, onde buscava métodos para resolução de labirintos clássicos.

PERCY HEAWOOD



Percy John Heawood (1861-1955) Nasceu em Newport na Inglaterra, e estudou no Exeter College, e ministrou aulas na Universidade de Durham na Inglaterra. Ele estudou por 60 anos de sua vida a conjectura das 4 cores, publicando vários artigos sobre o assunto, e reescrevendo a conjectura de várias formas diferentes, apesar de não ter conseguido obter uma demonstração.

WILLIAM HAMILTON



William Rowan Hamilton (1788-1856) Nasceu em Glasgow na Escócia, e começou a estudar matemática aos 12 anos de idade, por conta própria, entrando no Trinity College, quando completou 18 anos. Ele estudou várias áreas da física como a ótica, na matemática ele ficou conhecido pelo desenvolvimento dos quaternions, e contribuiu para a teoria dos grafos com as cadeias de Hamilton.

Referências Bibliográficas

- [1] TRUDEAU, Richard J., Introduction to graph Theory. Dover Publications INC., New York, 1993.

- [2] STEWART, Ian, "A verdade sobre o Minotauro", MATEMÁTICA n^o1. Págs. 34-39. Edição especial da Scientific American Brasil, 2007

- [3] BOAVENTURA NETO, Paulo O. Grafos: teorias, modelos e algoritmos. 4 edição. E. Blücher. São Paulo, 2006

- [4] MORGADO, Augusto C. de O. et al, Análise Combinatória e Probabilidade. Sexta edição. Rio de Janeiro, 2004.

- [5] HENLE, Michael, A Combinatorial Introduction to Topology. Dover Publications INC., New York, 1994.

- [6] HARARY, Frank, Graph Theory. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

- [7] Teoria dos Grafos - Aplicações Práticas, <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/matematica/acc>
Acessado em 17-11-2008, 15:20

- [8]<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Euler.html>, Acessado em: 17-11-2008, 15:06

- [9]<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jordan.html>, Acessado em: 17-11-2008, 15:07

- [10]<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Heawood.html>, Acessado em: 17-11-2008, 15:08
- [11]<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kempe.html>, Acessado em: 17-11-2008, 15:08
- [12]http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hamilton_William.html, Acessado em: 17-11-2008, 15:10
- [13]<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Kirchhoff.html>, Acessado em: 17-11-2008, 15:11
- [14]<http://www.adb.online.anu.edu.au/biogs/A090138b.htm>, Acessado em: 17-11-2008, 15:12
- [15]<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Kuratowski.html>, Acessado em 17-11-2008, 15:14
- [16]<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cayley.html>, Acessado em 17-11-2008, 15:15