

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

**Geometria Projetiva: Um Caminho Axiomático ao
Estudo das Cônicas**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Eric Zettermann Dias de Azevedo

Florianópolis, Fevereiro de 2009.

Eric Zettermann Dias de Azevedo


Geometria Projetiva: Um Caminho Axiomático ao Estudo das Cônicas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura
- do Departamento de Matemática do Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade
Federal de Santa Catarina.

Orientador: Prof. José Luis Rosas Pinho

Florianópolis, Fevereiro de 2009.

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n 10/CCM/2009.


Prof. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora responsável pela disciplina

Banca Examinadora:


Prof. José Luis Rosas Pinho
Orientador


Prof. Danilo Royer


Prof. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

Florianópolis, 09 Fevereiro de 2009.

Sumário

1	Apresentação	5
1.1	Estrutura do trabalho	5
1.2	O que é a geometria projetiva?	6
1.3	Aspectos históricos	8
2	Noções Preliminares	10
2.1	Termos primitivos	10
2.2	Notações de incidência	11
2.3	Primeiras definições	12
3	Axiomas e Suas Consequências Diretas	20
3.1	Axiomas da geometria projetiva no plano	20
3.2	Primeiros teoremas	21
3.3	Conjuntos quadrangulares e harmônicos	25
4	Princípio da Dualidade	29
4.1	O princípio	29
4.2	A dualidade dos conjuntos harmônicos	30
5	Teorema Fundamental	35
5.1	O teorema e suas aplicações	35
5.2	Eixo de uma projetividade	39
5.3	Pappus e Desargues: Uma abordagem bem projetiva	42
6	Projetividades	46
6.1	Projetividades na reta	46
6.2	Projetividades no Plano	56
6.2.1	Colineações	56
6.2.2	Correlações projetivas	66
6.3	Polaridades	68
6.3.1	A reta polar de um ponto	74

6.3.2	O pentágono auto-polar e o quadrilátero auto-conjugado	75
6.3.3	O produto de duas polaridades	77
7	Cônicas	81
7.1	Definição de cônica	82
7.2	Polaridade induzida por uma cônica	85
7.3	Algumas construções	87
7.4	Teorema de Brianchon e teorema de Pascal	92
7.5	Dois triângulos auto-polares	95
7.6	Cônicas degeneradas	98
8	Considerações Finais	99
	Referências Bibliográficas	101
A	A Razão Cruzada	102
B	O Teorema de Desargues	106
C	O Círculo é uma Cônica?	111

Capítulo 1

Apresentação

1.1 Estrutura do trabalho

Geometria Projetiva: Um Caminho Axiomático ao estudo das Cônicas foi pensado com o objetivo de conhecer a geometria projetiva. Aproveitamos o interessante tratamento que essa geometria não-euclideana dá às cônicas para passear pelos axiomas, definições e teoremas dessa teoria. Ou seja, não faremos aqui o estritamente necessário para se estudar cônicas, afinal queremos introduzir a geometria projetiva além de simplesmente falarmos das cônicas e sua abordagem projetiva.

Nossos estudos têm forte influência no livro do *H.S.M. Coxeter, Projective Geometry*, tanto na parte de organização dos capítulos quanto na construção das figuras. A abordagem que iremos dar à geometria durante todo o tempo, e assim faz também *Coxeter* na maioria do livro, é essencialmente geométrica. Portanto quando se ouvir a palavra reta não devemos pensar em equação alguma assim como ponto não será associado a um único par ordenado. Ponto e reta, aqui, serão entidades sem definição, termos primitivos, assim como a relação de incidência.

Todo nosso estudo será realizado no plano. Nossa lista de axiomas, baseada no livro de *Coxeter* anteriormente citada, é restrita a esse objetivo. Apresentaremos também uma lista de axiomas para se trabalhar no espaço, mas não com outro motivo senão a curiosidade do leitor.

Usaremos ao longo do trabalho axiomas, definições, teoremas e corolários afim de demonstrar os resultados na medida em que evoluímos nosso estudo. Exemplos e observações também serão utilizadas para fixar idéias ou direcionar raciocínios.

É importante deixar claro que o objetivo aqui não é fazer comparações entre geometria projetiva e geometria euclideana, embora alguns resultados aqui mostrados possam ser demonstrados também usando a geometria de Euclides. Ou seja, seguiremos um caminho paralelo a esta última, por mais irônico que isso seja, fazendo

associações (não comparações) quando necessário ou conveniente.

1.2 O que é a geometria projetiva?

A origem da palavra geometria é bem simples. “geo” quer dizer Terra e “metria” quer dizer medida. Podemos então pensar a geometria como uma espécie de estudo das medidas da Terra. Basta abrirmos os olhos para ver que somos cercados por tais medidas: ângulos para lá, uns metros aqui outros centímetros ali, tudo ao nosso redor. Surge então uma pergunta: Será que é possível estudar geometria sem usar essas medidas? Ou seja, será que conseguimos desenvolver uma geometria consistente abandonando o compasso, instrumento responsável pelo transporte de medidas necessário na verificação de congruência de segmentos e ângulos, isto é, será que conseguimos desenvolver uma geometria consistente usando somente uma régua não graduada? A resposta é sim. E é isso que vamos fazer aqui nesse trabalho, construir, sem noções de distância, uma geometria capaz de provar muitos resultados importantes.

Bom, é comum nessa altura se perguntar sobre o nome “projetiva” que acompanha a palavra geometria. A resposta, veremos com mais detalhes na parte da história, é que podemos olhar para esta teoria como uma que estuda as propriedades que não se alteram numa projeção. Projeção aqui, por enquanto, num sentido intuitivo mesmo. A figura 1.1 mostra dois pontos A e B sendo projetados, de uma reta r em uma reta s por um ponto O , onde A' e B' em s são suas projeções. Veja que a distância entre dois pontos como conhecemos perde totalmente a validade pois se distorce após a projeção.

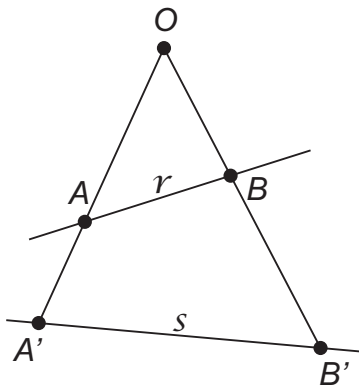


Figura 1.1: Projeção de A e B em A' em B'

A força dessa geometria nasce ao observarmos o mundo real. As coisas não mantêm sua forma quando mudamos de lugar ou quando as observamos sobre outro

ponto. E as retas paralelas, alguém já viu um par delas? Claro que não!(assim como ninguém nunca viu uma reta, a pergunta foi só para provocar.) Qualquer coisa sem fim que consideramos paralelas, no “nosso mundo”, podemos ver, ou imaginar, ao horizonte uma união entre elas. Os trilhos de trem são um exemplo clássico, em nossa cabeça imaginamos de um jeito paralelos, olhando para eles e os seguindo com os olhos veremos as margens se cruzarem no infinito. A figura 1.2 tenta mostrar essa idéia.

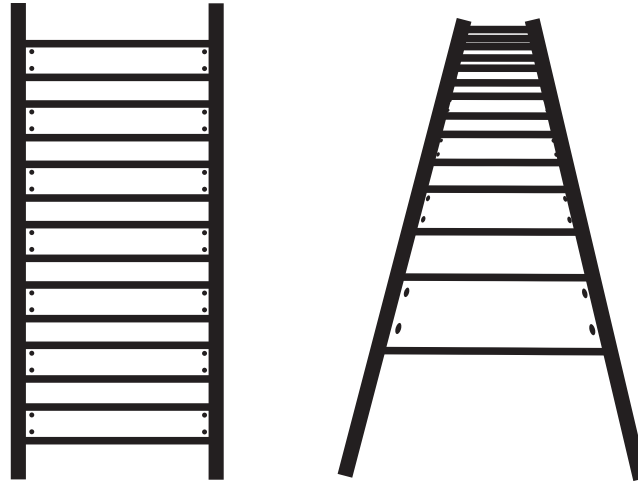


Figura 1.2: Os trilhos do trem

Na geometria projetiva os axiomas são construídos de modo que não se admita retas paralelas, ou seja, toda reta no plano se cruza, sem exceção alguma. Esse fato faz com que a teoria ganhe uma certa simetria. Cada duas retas determinam um ponto e cada dois pontos determinam uma reta. Se trocarmos “ponto” e “reta” na primeira frase chegamos na segunda e vice-versa. Estudando mais a fundo essa simetria ganhamos o chamado princípio da dualidade onde cada afirmação tem uma dual (basta trocar pontos por retas, e vice-versa, em seu enunciado.). Se a afirmação for verdadeira sua dual também será, ou seja, a cada teorema que se prova, ganham-se dois resultados.

Baseando-se na incidência de pontos e retas, como o princípio da dualidade, ganha-se uma certa simplicidade. Todos os pontos e retas são tratados igualmente, sem exceções. As cônicas, por exemplo, não recebem distinção entre parábola, elipse ou hipérbole em sua definição, são simplesmente cônicas.

A geometria projetiva demonstra vários resultados já provados na geometria euclidiana mas agora sem o uso de medidas, ou seja, só o uso de incidências já é suficiente para criar uma geometria consistente.

1.3 Aspectos históricos

Da antiguidade até a idade média era comum para os pintores e artistas desenhar objetos e pessoas de uma forma irreal e distorcida. Nessa época muito da arte se entrelaçava com a mitologia. As formas expressavam poder, importância. Se fossemos desenhar Einstein seguindo essa idéia, nosso Einstein de tintas teria a cabeça bem avantajada em virtude de sua inteligência.

Conforme o tempo passava, os artistas buscavam mais realismo em suas obras. Queriam desenhar as coisas do jeito que elas realmente eram vistas. Alguns pintores começaram a trabalhar com essa idéia a partir de 1425 quando o arquiteto *Brunelleschi* discutia perspectiva nos desenhos. Em *Della Pittura*, trabalho de Alberti em 1435, faz-se a pergunta: Quando vemos o mesmo objeto de pontos distintos, quais são as propriedades preservadas? A teoria, embora iniciada no séc.XVII, só ganha fama dois séculos depois quando começaram ser estudados os trabalhos do também arquiteto, considerado fundador da geometria projetiva, *Girard Desargues(1591-1661)*.

Por que será que o trabalho de *Desargues* só foi “aberto” dois séculos depois de sua existência? Bem, existem teorias que apontam a abordagem analítica nos trabalhos como fator desestimulante para época. O mundo ainda não estava pronto para a geometria projetiva, a geometria analítica tinha de vir antes. Outra corrente afirma que matemáticos da época consideraram os trabalhos de *Desargues* como um manual para se usar perspectiva em desenhos. Sem contar as reclamações sobre a nomenclatura, diziam que ele introduzia muitos termos e conceitos. Independente do motivo, *Desargues* se aposenta por falta de entusiasmo.

Não foram todos os matemáticos que ignoraram os trabalhos do pai da geometria projetiva. Um de seus trabalhos, o projeto *Brouillon*, tratava das cônicas de *Apolônio* numa maneira mais simples usando projeções para provar os mesmos teoremas. Cinquenta cópias do *Brouillon* foram distribuídas, uma delas para *Fermat* que o consagrou como fundador das seções cônicas. *Blaise Pascal* e *Philippe de la Hire* foram fortemente influenciados pelo trabalho de *Desargues*.

No século XIX quando os trabalhos de *Desargues*, pelas mãos de *J. V. Poncelet(1788–1867)*, *K. G. C. von Staudt(1798–1867)*, *Arthur Cayley(1821–1895)*, *Felix Klein(1849–1925)*, entre outros, trouxeram a geometria projetiva das profundezas do tempo, uma das primeiras (re)descobertas foi a invariância da razão cruzada .

Esta invariância é a idéia mais próxima de distância na geometria projetiva e diz que se quatro retas por um ponto O interceptam uma reta r nos pontos A, B, C e D e uma reta s nos pontos A', B', C' e D' (ou se A', B', C' e D' em s são projeções de A, B, C e D em r por um ponto O) (Figura 1.3), então, para toda r e s não incidentes

à O temos:

$$\frac{AC/BC}{AD/BD} = \frac{A'C'/B'C'}{A'D'/B'D'}.$$

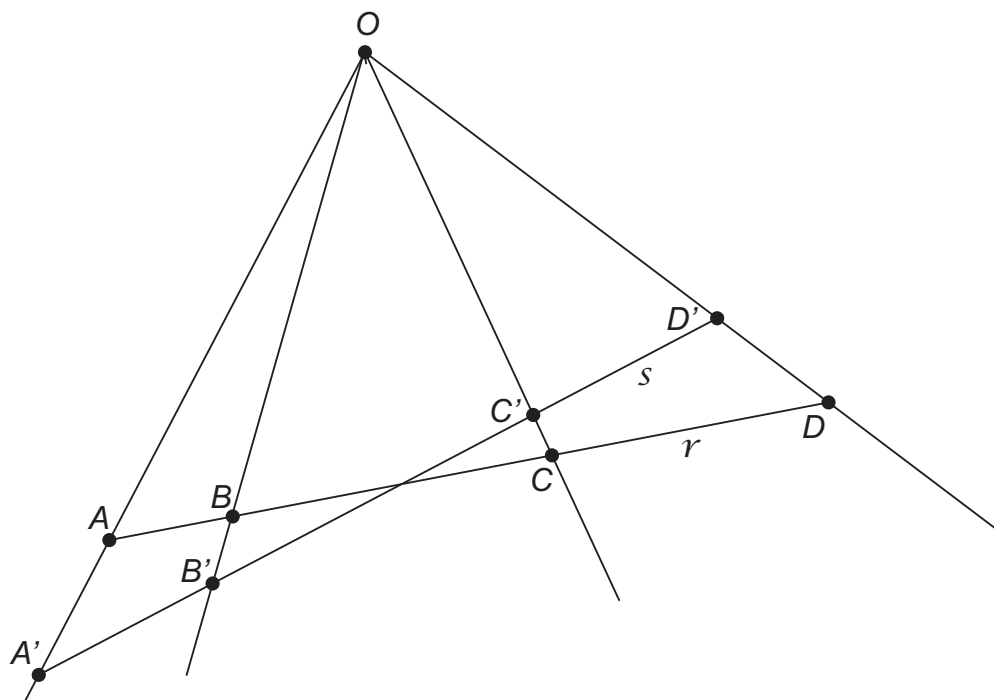


Figura 1.3: A razão cruzada

A demonstração da invariância da razão cruzada envolve triângulos com base em r e vértice O e está no apêndice A. Não se sabe ao certo quem descobriu a razão cruzada. Porém, *Pappus* é considerado o descobridor dos primeiros teoremas projetivos. A invariância da razão cruzada foi registrada por *Pappus* como comentário em um livro de *Euclides*, por isso suspeitam que *Euclides* já sabia da invariância antes.

A partir daí começaram a se desenvolver idéias sobre geometria projetiva como teoria. A primeira lista de axiomas foi proposta por *Gino Fano* em 1892 e a segunda pouco depois por *Mario Pieri* em 1899.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Antes de começar o nosso estudo axiomático e mais rigoroso, vamos estabelecer algumas convenções e fixar uma notação conveniente. Vamos aproveitar esse capítulo de noções preliminares para treinar nossa intuição, ou seja, obteremos alguns resultados simples nesse começo, mas sem fazer provas muito rigorosas, apenas para acostumar nosso raciocínio à um jeito projetivo de se pensar. Algumas definições precisam aparecer antes dos axiomas, afinal de contas, precisamos saber o nome das coisas para poder falar delas. No entanto, precisamos de algumas palavras para dar nomes às coisas, chamamos essas palavras de termos primitivos que também terão sua vez nesse capítulo.

2.1 Termos primitivos

Assim como na geometria de Euclides, pontos e retas são entidades que dispensam definições, mas quem resiste tentar falar delas? Ponto é a entidade mínima, invisível, adimensional. Reta, como nossa intuição já é acostumada, é alguma coisa parecida com um traço reto infinito no plano. (lembre que para nós não existe nada além do plano).

Por falar em plano, chegou a hora da nossa primeira definição. Na realidade, definimos apenas quando que uma reta (ou ponto) está no plano, ou seja, plano acaba sendo outro termo primitivo usado para representar nosso universo bidimensional totalmente preenchido com retas e pontos. Podemos, intuitivamente, pensar no plano como uma placa metálica muito fina e infinita.

Definição 2.1 *Seja r uma reta qualquer e seja P um ponto não incidente à r . Um ponto X é dito estar no **plano** Pr se a reta PX é a mesma reta que PR para algum ponto R na reta r . Uma reta é dita estar no plano Pr se é determinada por dois pontos deste plano.*

Observação: Se r , da definição anterior, passar por A e B , podemos denotar o plano Pr como o plano PAB .

Temos três entidades prontas para serem relacionadas, porém falta o verbo que faz esse papel. A relação de incidência é o nosso termo primitivo que faltava. Estar em, passar por, fazer parte de, encontrar com, interceptar, concorrentes, colineares, enfim, todos esses verbos e adjetivos são termos primitivos usados para relacionar retas com pontos, pontos com retas, pontos com pontos e retas com retas que usaremos daqui para frente. Mas como toda área da matemática, utilizaremos alguns símbolos para expressar essas incidências.

2.2 Notações de incidência

Depois de estabelecer nossos termos primitivos, vamos definir uma notação que nos poupe palavras e facilite a nossa vida. Usaremos letras maiúsculas para pontos, para retas letras minúsculas. Ao invés de falarmos que o ponto P é a interseção das retas r e s , escreveremos simplesmente $P = r \cdot s$. A reta s formada pelos pontos A e B é a reta $AB = s$.

A partir da notação podemos tirar informações sobre nossos pontos e retas, veremos alguns exemplos:

Exemplo 1 Se A, B, C e D são pontos distintos então $AB = CD$ implica em $AC = DB$.

Com efeito, se AB e CD são a mesma reta e os pontos A, B, C e D são distintos, então estes quatro pontos são colineares e aí $AC = DB$.

Exemplo 2 Se $r = AB$ e $s = CB$ então $r \cdot s = B$. Com efeito, $r \cdot s = AB \cdot CB$. Ora se B está na reta r e também na reta s é claro que B estará na interseção (Provaremos que essa interseção é um unico ponto).

Exemplo 3 Se $A = BC \cdot DE$ então $AB = AC = BC$ e $AD = AE = DE$. Com efeito, A esta na interseção de BC com DE então a reta BC passa pelo ponto A e também por B logo $BC = AB$ e analogamente para $BC = AC$, $DE = AD$ e $DE = AE$.

Exemplo 4 Se $A = BC \cdot DE$ e $F = GH \cdot DJ$ então $AE \cdot FJ = D$. Com efeito, pelo exemplo anterior temos $AE = AD$ e $FJ = FD$, logo $AE \cdot FJ = AD \cdot FD = D$.

Durante nossos estudos usaremos esses resultados, disfarçados de exemplos, para provarmos teoremas sem depender de um desenho (os desenhos serão dados para visualização dos resultados, nada será concluído a partir deles).

2.3 Primeiras definições

Agora vamos conhecer os elementos que vão construir a geometria projetiva. Começaremos com o mais simples, o triângulo. O triângulo PQR é composto por três pontos P , Q e R não colineares chamados de vértices e as três retas construídas a partir desses, a saber, PQ , QR e PR , chamados de lados do triângulo. A princípio pode haver confusão com o plano PQR (definição 2.1), mas podemos provar que todo triângulo define um plano, por isso a mesma notação. Além disso, não usaremos quase nenhuma notação de plano, pois trabalharemos com a geometria plana. Note que dados três pontos podemos ligá-los aos pares afim de construir um triângulo. O mesmo acontece quando nos são dadas três retas, a união de cada par determina um vértice do triângulo. Essa interessante simetria não é tão simples quando falamos de figuras com mais de três vértices ou lados. Aqui vão as primeiras definições que já têm uma cara mais projetiva (Usando o esquema de duas colunas de *Poncelet* reforçando o princípio da dualidade).

<p>Definição 2.2 <i>Se quatro pontos A, B, C e D, dois a dois, determinam seis retas, então eles são ditos vértices de um quadrângulo completo, onde estas seis retas são chamadas de lados. Se o ponto de interseção entre dois lados não for um vértice, então chamamos esses lados de lados opostos e o ponto de ponto diagonal.</i></p>	<p>Definição 2.3 <i>Se quatro retas a, b, c e d se interceptam, duas a duas, em seis pontos, então elas são ditas lados de um quadrilátero completo, onde estes seis pontos são chamados de vértices. Se a reta determinada por dois vértices não for um lado, então chamamos esses vértices de vértices opostos e a reta de reta diagonal.</i></p>
---	---

Exemplo: No quadrângulo completo $ABCD$ (Figura 2.1) A , B , C e D são os vértices; AB , AC , AD , BC , BD e CD são os lados e P , Q e R são os pontos diagonais.

No quadrilátero completo $abcd$ (Figura 2.1) a , b , c e d são os lados; $a \cdot b$, $a \cdot c$, $a \cdot d$, $b \cdot c$, $b \cdot d$ e $c \cdot d$ são os vértices e p , q e r são as retas diagonais.

Observação: Não faz muito sentido falar em triângulo completo e trilátero completo, já que essas figuras coincidem, ou seja, a figura formada por três pontos e as três retas determinadas por eles é a mesma formada pelas três retas e os pontos que elas determinam, como vimos. Dizemos, por isso, que o triângulo é uma figura auto-dual. O axioma 3.2 na seção 3.1 garante a existência de quadrângulos completos,

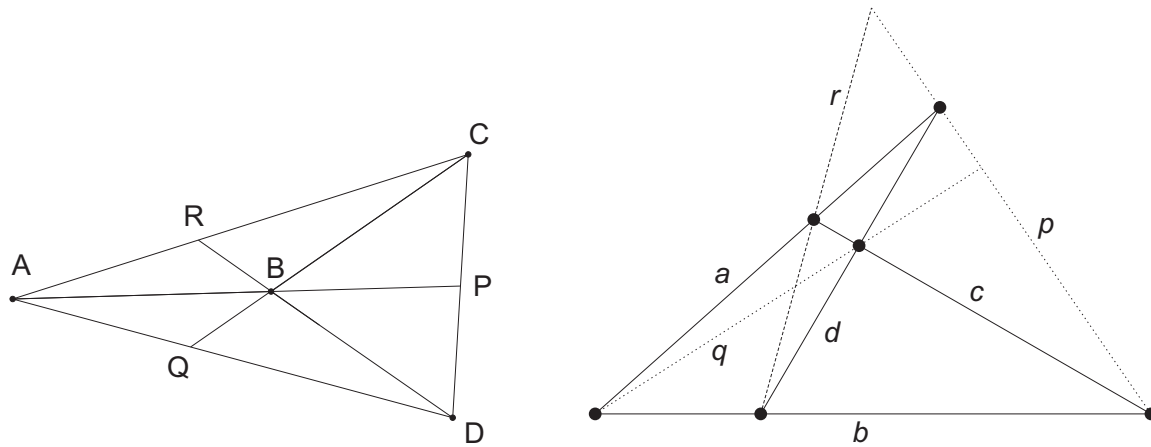


Figura 2.1: quadrângulo completo e quadrilátero completo.

mais tarde, o teorema 3.7 irá garantir a do quadrilátero completo.

Usamos a palavra “completo” para diferenciarmos de quadriláteros de outras geometrias, com definições diferentes, no entanto, desde que a ambiguidade não esteja presente, podemos omitir a palavra completo e falarmos apenas de quadrângulos e quadriláteros.

Como vimos nas definições anteriores, existem três retas diagonais num quadrilátero completo e três pontos diagonais num quadrângulo completo. Então faz sentido definirmos mais um objeto.

Definição 2.4 *Sejam A, B e C (ou a, b e c) os **pontos diagonais** de um quadrângulo completo (ou as **retas diagonais** de um quadrilátero completo). Chamaremos de **triângulo diagonal**, o triângulo de vértices ABC (ou de lados abc).*

Agora vejamos uma idéia que já é intuitiva em nossa cabeça, mas de uma maneira mais formalizada para podermos estudá-la de fato. Essas próximas definições vão embasar a maioria de nosso estudo sobre geometria projetiva.

É conveniente na geometria projetiva pensarmos em pontos como feixes de retas, e em retas como fileiras de pontos. Assim, veremos que um feixe de retas P projeta uma fileira de pontos sobre uma reta, ou ainda, a fileira de pontos r é uma seção do feixe P (Figura 2.2). Isso de uma maneira intuitiva, pois não sabemos ainda o que é projetar, ou não sabíamos.

Definição 2.5 *Dizemos que o ponto X **projeta** a reta x se $X = x \cdot o$, onde x passa por O distinto de X e o é uma reta não incidente a O e diferente da reta x . Neste*

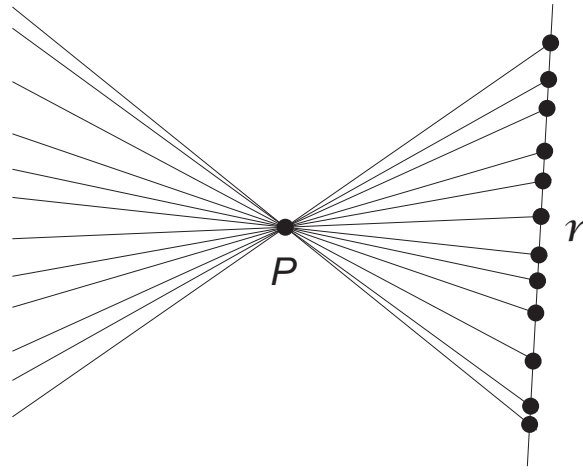


Figura 2.2: Feixe de retas e fileira de pontos

*caso dizemos também que a reta x projeta o ponto X . Chamaremos esse fato de **correspondência elementar** e denotaremos da seguinte forma:*

$$X \bar{\wedge} x \text{ ou } x \bar{\wedge} X.$$

Observação: Se, como na Figura 2.3, $A \bar{\wedge} a$, $B \bar{\wedge} b$ e $C \bar{\wedge} c$ com A , B e C incidentes à o e com a , b e c passando por O , podemos escrever:

$$ABC \bar{\wedge} abc \text{ ou } abc \bar{\wedge} ABC$$

Nesse caso dizemos que a fileira ABC é uma seção do feixe abc pelo ponto O .

Agora de uma maneira mais geral:

Definição 2.6 Chamaremos de **projetividade** uma combinação finita de correspondências elementares:

$$X \bar{\wedge} x \bar{\wedge} X' \bar{\wedge} x' \bar{\wedge} X'' \bar{\wedge} x'' \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} X^n \bar{\wedge} x^n$$

Escreveremos simplesmente:

$$X \bar{\wedge} x^n \text{ ou } x \bar{\wedge} X^n \text{ ou } X \bar{\wedge} X^n \text{ ou } x \bar{\wedge} x^n$$

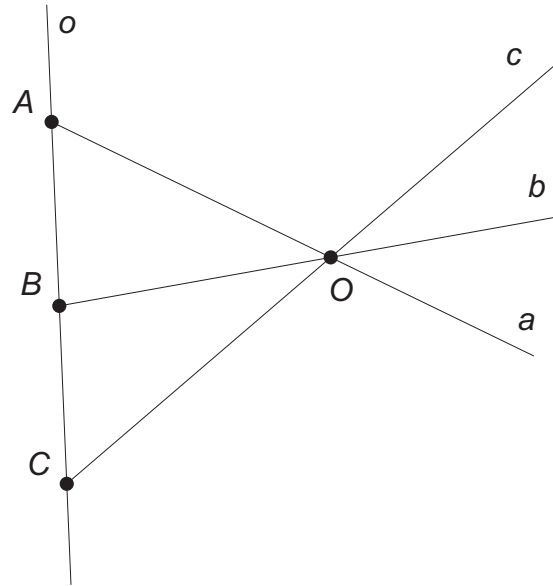


Figura 2.3: $ABC \bar{\wedge} abc$

Observação: Veja que pela definição 2.5, as retas o_n e os pontos O_n envolvidos não são incidentes, assim como $o_n \neq o_{n+1}$ e $O_n \neq O_{n+1}$. E note que quando escrevemos a projetividade em sua forma simplificada, podemos começar, assim como terminar, tanto pelo ponto quanto pela reta.

Podemos pensar na projetividade, como uma transformação de um ponto X incidente à o em uma reta x^n passando por O_n por exemplo. Com os axiomas da seção 3.1, podemos facilmente provar que toda reta cruza uma outra um único ponto e que todo par de pontos determina uma única reta. Isso é suficiente para provarmos que a projetividade é uma correspondência biunívoca.

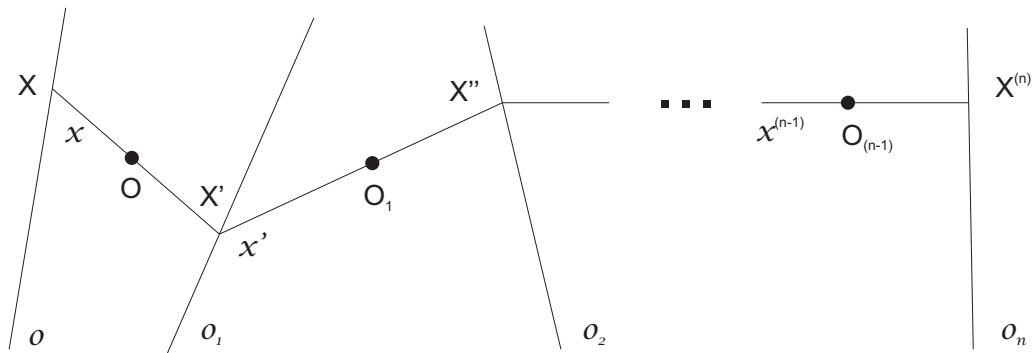


Figura 2.4: Projetividade.

Definição 2.7 Duas fileiras são relacionadas por uma perspectividade de centro O se estas são seções de um feixe de retas por O com duas retas distintas o e o_1 . Ou seja, para toda reta XX' de pontos correspondentes o centro O é incidente à XX' . Denotaremos da seguinte forma:

$$X \bar{\wedge} X' \quad \text{ou} \quad X \stackrel{O}{\wedge} X'$$

Definição 2.8 Dois feixes de retas são relacionados por uma perspectividade de eixo o se estes projetam de dois pontos distintos O e O_1 uma fileira de pontos em o . Ou seja, para todo ponto $x \cdot x'$ de retas correspondentes o eixo o passa por $x \cdot x'$. Denotaremos da seguinte forma:

$$x \bar{\wedge} x' \quad \text{ou} \quad x \stackrel{o}{\wedge} x'$$

Exemplo: Na figura 2.5 os pontos A, B e C assim com as retas a, b , e c são posições particulares do ponto X e da reta x das definições 2.7 e 2.8. Nas figuras podemos encontrar as seguintes perspectividades:

$$ABC \stackrel{O}{\wedge} A'B'C' \quad \text{e} \quad abc \stackrel{o}{\wedge} a'b'c'$$

Podemos ver as perspectividades acima como correspondências elementares do tipo:

$$ABC \bar{\wedge} abc \bar{\wedge} A'B'C' \quad \text{e} \quad abc \bar{\wedge} A'B'C' \bar{\wedge} a'b'c'$$

Logo a perspectividade é uma projetividade (Definição 2.6).

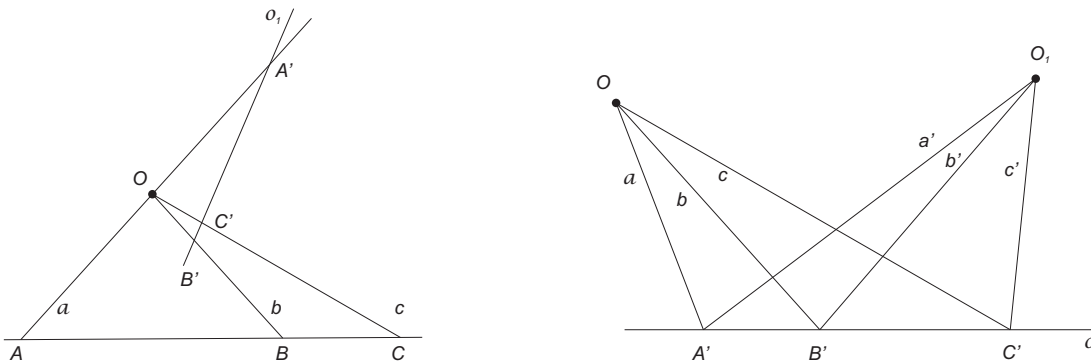


Figura 2.5: Perspectividade.

Observação: Veja que, pela definição 2.7, mostrar que $ABC \stackrel{O}{\wedge} A'B'C'$ onde A', B' e C' estão na reta o_1 , é o mesmo que mostrar que $AO \cdot o_1 = A', BO \cdot o_1 = B'$ e $CO \cdot o_1 = C'$. Analogamente para as retas usando a definição 2.8.

Definição 2.9 Um ponto X é dito ser *invariante* por uma determinada projetividade se para essa projetividade pudermos escrever $X \bar{\wedge} X$, assim como uma reta x é dita invariante por uma projetividade se pudermos escrever $x \bar{\wedge} x$.

Exemplo: Na projetividade

$$X \bar{\wedge} a \bar{\wedge} A \bar{\wedge} b \bar{\wedge} B \bar{\wedge} x \bar{\wedge} X$$

o ponto X é invariante.

Já temos algumas ferramentas interessantes, que tal provarmos nosso primeiro teorema? Lembre-se que ainda não conhecemos nossos axiomas, estamos fazendo um exercício de intuição. Assim que conhecermos os axiomas, se quiserem voltar a este ponto para justificar rigorosamente as passagens, sintam-se a vontade.

Teorema 2.1 Quatro pontos colineares sempre podem ser relacionados aos pares por uma projetividade.

Demonstração: Sejam A, B, C e D quatro pontos colineares. Tome por D uma reta l qualquer e tome um ponto R fora da reta AB . Defina $T = AR \cdot l$, $Q = BR \cdot l$, $W = CR \cdot l$ e $Z = AQ \cdot CR$ (Figura 2.6). Note que W está em CR e Z também está em CR . Assim temos:

$$AQ \cdot ZR = Z; \text{ Pois } AQ = AZ, \text{ já que } Z = AQ \cdot CR.$$

$$BQ \cdot ZR = R; \text{ Pois } BQ = BR, \text{ já que } Q = BR \cdot l.$$

$$CQ \cdot ZR = C; \text{ Pois } ZR = ZC, \text{ já que } Z = AQ \cdot CR.$$

$$DQ \cdot ZR = W; \text{ Pois } ZR = CR, \text{ já que } Z = AQ \cdot CR. \text{ Além disso, } D \text{ e } Q \text{ estão em } l \text{ então } l = DQ, \text{ logo } DQ \cdot ZR = l \cdot CR = W.$$

Assim, provamos que $ABCD \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} ZRCW$. Pela definição de l e dos pontos T, Q e W concluímos que $l = DQ = TW$. Logo:

$$ZA \cdot DQ = Q; \text{ Pois } ZA = ZQ, \text{ já que } Z = AQ \cdot CR.$$

$$RA \cdot DQ = T; \text{ Pois } DQ = l \text{ e } T = AR \cdot l.$$

$$CA \cdot DQ = D; \text{ Pois } A, B, C \text{ e } D \text{ são colineares, logo } AC = DA.$$

$WA \cdot DQ = W$; Pois $DQ = TW$.

Assim, mostramos que $ZRCW \stackrel{A}{\wedge} QTDW$. Finalmente voltaremos à reta AB com mais uma perspectividade:

$QR \cdot AB = B$; Pois $QR = QB$, já que $Q = BR \cdot l$.

$TR \cdot AB = A$; Pois $TR = AT$ já que $T = AR \cdot l$.

$DR \cdot AB = D$; Pois A, B, C e D são colineares, logo $AB = AD$.

$WR \cdot AB = C$; Pois $AB = AC$ e além disso $WR = WC$, já que $W = CR \cdot l$.

Assim fica provado que $QTDW \stackrel{R}{\wedge} BADC$. De todas as perspectividades que construímos ficamos com:

$$ABCD \stackrel{Q}{\wedge} ZRCW \stackrel{A}{\wedge} QTDW \stackrel{R}{\wedge} BADC$$

Como perspectividades são projetividades temos:

$$ABCD \bar{\wedge} BADC.$$

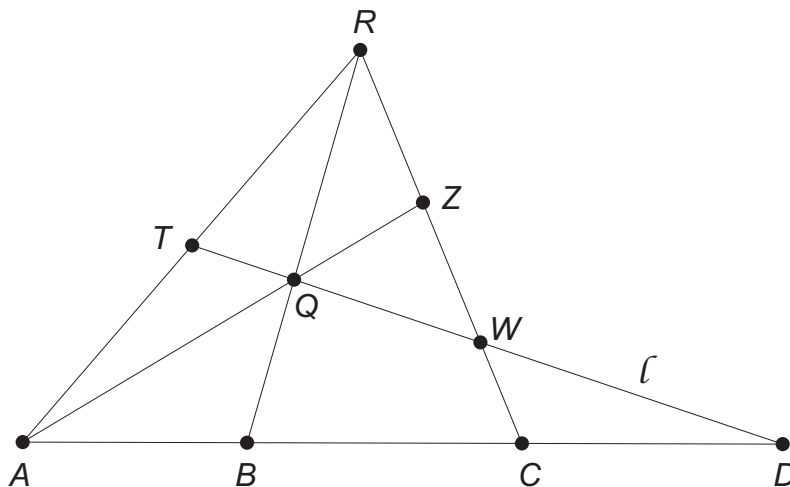


Figura 2.6: Teorema 2.1

Observação: Veja que o desenho de nossa construção foi absolutamente desnecessário para a demonstração do teorema. No entanto, olhá-lo pode nos dar idéias de como

fazer a demonstração.

Antes de propor a lista de axiomas vamos definir figuras perspectivas, afinal, é uma famosa definição (triângulos perspectivos) que é usada no teorema de *Desargues* que adotamos aqui como axioma.

Definição 2.10 *Duas figuras distintas, formadas de pontos e retas, são ditas **perspectivas** se para cada par de pontos correspondentes associa-se uma reta que concorre em um ponto O , (figuras perspectivas por um ponto, O é o centro dessa perspectividade) ou, se para cada par de retas correspondentes associa-se um ponto sobre uma reta o (figuras perspectivas por uma reta, o é o eixo dessa perspectividade)*

Observação: Então se PQR e $P'Q'R'$ são triângulos perspectivos por um ponto, existe $O = PP' \cdot QQ' \cdot RR'$. Se esses mesmo são perspectivos por uma reta então os pontos $PQ \cdot P'Q'$, $PR \cdot P'R'$ e $QR \cdot Q'R'$ são colineares.

Capítulo 3

Axiomas e Suas Consequências

Diretas

Depois de exercitar um pouco nossa intuição para essa nova geometria, começaremos uma abordagem mais rigorosa. Provaremos teoremas usando unicamente axiomas e outros teoremas já provados. Aqui começa, de fato, o nosso estudo.

Numa teoria como essa é preciso dar sentido às definições. Definimos vários objetos no capítulo anterior, entre esses um triângulo que consistia em três pontos não colineares... Espere um pouco! Será que existem três pontos não colineares? Caso não exista, essa definição não faz sentido algum. É a mesma coisa que chamarmos maçã voadora de “brolépto”, temos uma palavra, mas ela não faz o mínimo sentido, pois não existem, até onde sabemos, maçãs voadoras.

3.1 Axiomas da geometria projetiva no plano

A idéia dos axiomas é dar o ponto de partida à uma teoria. São resultados assumidos como verdades sem demonstração alguma. Espera-se que uma lista de axiomas seja sempre consistente, nenhum axioma deve contradizer o outro, por exemplo. A escolha dessa lista é uma questão de preferência. Claro que quanto menos axiomas se tem numa teoria com vários resultados, mais elegante ela é. Axiomas simples e independentes também são indicados para uma boa lista.

Esta lista é uma lista proposta no livro *Projective Geometry* de Coxeter para estudarmos a geometria projetiva no plano.

Axioma 3.1 *Duas retas têm no mínimo um ponto em comum.*

Axioma 3.2 *Existem quatro pontos de modo que não existam 3 desses colineares.*

Axioma 3.3 *Dados dois pontos distintos existe uma única reta incidente à eles.*

Axioma 3.4 *Os pontos diagonais de um quadrângulo completo nunca são colineares.*

Axioma 3.5 *Se dois triângulos são perspectivos por um ponto então eles são perspectivos por uma reta.*

Axioma 3.6 *Se uma projetividade deixa invariante três pontos distintos de uma fileira, então ela deixa invariante toda a fileira.*

O axioma 3.5 já bem conhecido na geometria euclídeana como Teorema de *Desargues*. A prova desse teorema pode ser feita a partir de axiomas da geometria projetiva no espaço. Essa demonstração, juntamente com uma sugestão de lista de axiomas da geometria projetiva no espaço, está no apêndice B. Faremos uma demonstração deste teorema com elementos bem projetivos no capítulo 5.

3.2 Primeiros teoremas

Eis uma característica marcante dessa geometria, o axioma 3.1 exclui a possibilidade de duas retas não se cruzarem, ou seja, não existem retas paralelas na geometria projetiva. Quando desenhamos retas “paralelas” no plano, interpretamos como se elas se cruzassem no infinito (Cabe lembrar aqui do trilho do trem, comentado na seção 1.2). Então, para cada feixe de retas paralelas existe um ponto no infinito onde todas elas se cruzam. Todos esses pontos no infinito estão sobre uma mesma reta no infinito. Esse é um dos modelos na hora de se construir o plano projetivo.

O axioma 3.2 garante a existência dos quadrângulos. A existência dos quadriláteros vai ser garantida daqui a alguns parágrafos.

Segue uma lista de primeiros teoremas que podemos provar usando nossa lista de axiomas e nossas definições até então. Às vezes ficaremos tentados a usar métodos analíticos ou nosso conhecimento já acumulado sobre geometria. No entanto, lembre que para se começar uma teoria é necessário uma certa ingenuidade para que ela se torne consistente. Logo nossas únicas afirmações devem ser baseadas em axiomas, definições ou teoremas que já provamos.

Teorema 3.1 *Existe um ponto e uma reta não incidentes.*

Demonstração: Pelo axioma 3.2, existem quatro pontos A , B , C e D . Sejam A , B , e C três destes pontos. O mesmo axioma nos diz que esses pontos não são colineares. Pelo axioma 3.3 temos que A e B determinam uma reta. Como C não é colinear a A e B então C não é incidente à reta AB .



Teorema 3.2 *Toda reta é incidente a pelo menos três pontos distintos.*

Demonstração: Seja l uma reta qualquer. Segundo o axioma 3.2 existem A, B, C e D sendo que três deles nunca são colineares. Se apenas A for incidente à l então BC e CD determinam dois pontos em l , conforme o axioma 3.1, P e Q . Note que P e Q são diferentes de A , caso contrário A, B e C ou A, C e D seriam colineares. Então neste caso l tem três pontos. Se por acaso A e B estiverem em l então CD determina o terceiro ponto de l analogamente. Se l não for incidente a nenhum dos quatro pontos, então as retas AB, BC e CD determinam, do mesmo jeito, três pontos em l . Veja que l não pode conter três ou quatro desses pontos, caso contrário teríamos três daqueles pontos colineares. Logo para qualquer l conseguimos determinar pelo menos três pontos incidentes à l .



Teorema 3.3 *Se r é uma reta, então existe um ponto não incidente à r .*

Demonstração: Suponhamos que não, ou seja, suponhamos que para toda reta r não exista nenhum ponto fora de r . Pelo teorema 3.2 cada reta é incidente a pelo menos três pontos, então só pode existir uma reta. Caso contrário iríamos contradizer a hipótese de absurdo, pois haveriam pontos fora de uma reta dada. Essa construção contradiz o teorema 3.1. Portanto dada uma reta r , existe um ponto não incidente à r .



Teorema 3.4 *Se P é um ponto, então existe uma reta não incidente à P .*

Demonstração: Seja P um ponto qualquer. Pelo axioma 3.2 existem quatro pontos sendo três deles sempre não colineares. Se P for um deles então um par dos outros três determina, conforme o axioma 3.3, uma reta que não incide P , pois se incidisse iríamos contra o axioma 3.2. Se P não for nenhum deles tome um par qualquer dos quatro pontos para determinar uma reta não incidente à P . Pode acontecer desse par determinar uma reta incidente à P . Nesse caso tome um terceiro ponto dos quatro (que obviamente não estará na reta por P) e determine uma nova reta usando este ponto e um ponto do primeiro par escolhido. Como esse último par não é colinear

com P , essa última reta não passa por ele. Logo, para todo ponto P existe uma reta não incidente à esse.

■

Teorema 3.5 *Se P é um ponto, então existem três retas distintas que passam por P .*

Demonstração: Seja P um ponto qualquer. Pelo teorema 3.4 existe uma reta r não incidente à P . Sejam A , B , e C três pontos distintos e incidentes à r garantidos pelo teorema 3.2. O axioma 3.3 nos permite determinar três retas distintas por P a saber: PA , PB e PC . Logo, para todo ponto P existem três retas que passam por esse ponto.

■

Teorema 3.6 *Duas retas distintas têm somente um ponto em comum.*

Demonstração: O axioma 3.1 já nos garante que dadas duas retas distintas r e s , elas têm no mínimo um ponto comum que chamaremos de P . Se por acaso houvesse outro ponto Q que estivesse tanto em r como em s então os pontos P e Q determinariam duas retas distintas r e s o que contradizeria o axioma 3.3. Logo r e s têm um e somente um ponto em comum.

■

Teorema 3.7 *Existem quatro retas sendo três delas sempre não concorrentes.*

Demonstração: Seja r uma reta qualquer e sejam P e Q dois pontos incidentes a r (teorema 3.2). Tome agora duas retas p e m incidentes à P e outras duas q e n incidentes à Q (teorema 3.5). p , m e n não são concorrentes. Se fossem, seriam em P , pois $p \cdot m = P$ e n concorre com m e n (Teorema 3.6). Como Q está em n e P também, chegamos a uma contradição. Os pontos P e Q determinam duas retas. Assim p , m e n não são concorrentes, e analogamente para p , m e q ; p , q e n e m , q

e n . Logo p , m , q e n são quatro retas sendo que três delas nunca são concorrentes. ■

Observação: Aqui está garantida a existência de quadriláteros.

Teorema 3.8 *As retas diagonais de um quadrilátero completo nunca são concorrentes.*

Demonstração: Seja pqr um quadrilátero completo onde $p \cdot q = A$, $p \cdot r = B$, $p \cdot s = C$, $q \cdot r = D$, $q \cdot s = E$ e $r \cdot s = F$. Tome t , u , v como sendo as retas diagonais de modo que $t = (p \cdot q)(r \cdot s)$, $u = (p \cdot r)(q \cdot s)$, $v = (p \cdot s)(q \cdot r)$.

Agora suponha, por absurdo, que t , u e v se encontrem no ponto I . Se olharmos para o quadrângulo completo $ABEF$ veremos que seus pontos diagonais são $AB \cdot EF = (p \cdot q)(p \cdot r) \cdot (q \cdot s)(r \cdot s) = (p \cdot s) = C$, $AE \cdot BF = (p \cdot q)(q \cdot s) \cdot (p \cdot r)(r \cdot s) = (q \cdot r) = D$ e $AF \cdot BE = (p \cdot q)(r \cdot s) \cdot (p \cdot r)(q \cdot s) = t \cdot u = I$. Como $v = (p \cdot s)(q \cdot r) = CD$ e v passa por I então C , D e I são colineares contradizendo o axioma 3.4. Logo, as retas diagonais de pqr não são concorrentes. ■

Observação: Esse teorema é uma versão do axioma 3.4 para quadriláteros.

Para terminar nossa lista, provaremos a recíproca do teorema de *Desargues*. Essa recíproca quando usamos axiomas do espaço pode ser provada antes do próprio teorema de *Desargues*.

Teorema 3.9 *Se dois triângulos são perspectivos por uma reta, então eles são perspectivos por um ponto.*

Demonstração: Sejam PQR e $P'Q'R'$ os triângulos perspectivos por uma reta o . Logo, pela definição 2.10 os lados correspondentes PQ e $P'Q'$; QR e $Q'Q'$ e PR e $P'R'$ se encontram em pontos F , D e E sobre a reta o (Figura 3.1). Seja $O = PP' \cdot RR'$. Resta saber se a reta QQ' também passa por O . Vamos olhar agora para os triângulos $QQ'D$ e $PP'E$. Note que como D , E e F são colineares e $F = PQ \cdot P'Q'$ então as retas PQ , $P'Q'$ e ED concorrem em F . Então, os triângulos $QQ'D$ e $PP'E$ são perspectivos pelo ponto F . Portanto pelo axioma 3.5 eles são perspectivos por uma reta, logo $R = QD \cdot PE$, $R' = Q'D \cdot P'E$ e $X = QQ' \cdot PP'$ são colineares. Se X está

em PP' e X está também RR' então X só pode ser o ponto O , a interseção de PP' e RR' . Finalmente temos que $O = X = QQ' \cdot PP'$, ou seja, a reta QQ' também passa por O .

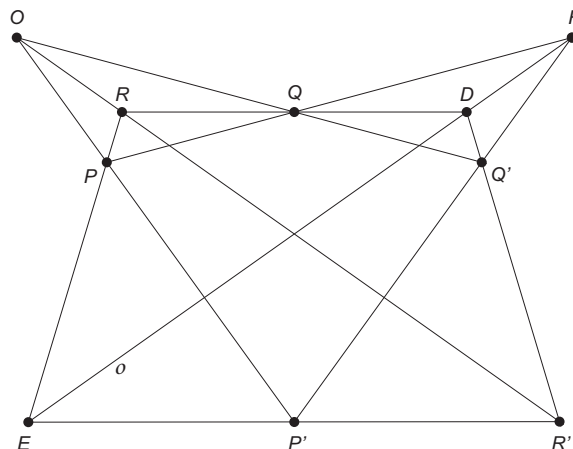


Figura 3.1: Teorema 3.9



3.3 Conjuntos quadrangulares e harmônicos

Definição 3.1 Um conjunto quadrangular é uma seção de um quadrângulo dado por uma reta g de modo que g não passa por nenhum dos vértices do quadrângulo.

Observação: A maioria dos conjuntos quadrangulares possuem 6 pontos, (Um em cada lado do quadrângulo) porém pode ocorrer da reta g passar por algum(ns) dos pontos diagonais do quadrângulo (No máximo dois conforme o axioma 3.4) deixando o conjunto com cinco ou até quatro pontos.

Para denotar um conjunto quadrangular usaremos a seguinte notação:

$$(AD)(BE)(CF)$$

onde A e D ; B e E e C e F estão em lados opostos do quadrângulo (Figura 3.2).

Uma das propriedades interessantes do conjunto quadrangular, é que dado cinco pontos numa reta podemos construir um conjunto quadrangular que contenha esses pontos. A garantia disso é o teorema que segue:

Teorema 3.10 Dados A, B, C, D e E distintos e colineares, então sempre podemos determinar um conjunto quadrangular que contenha todos esses cinco pontos.

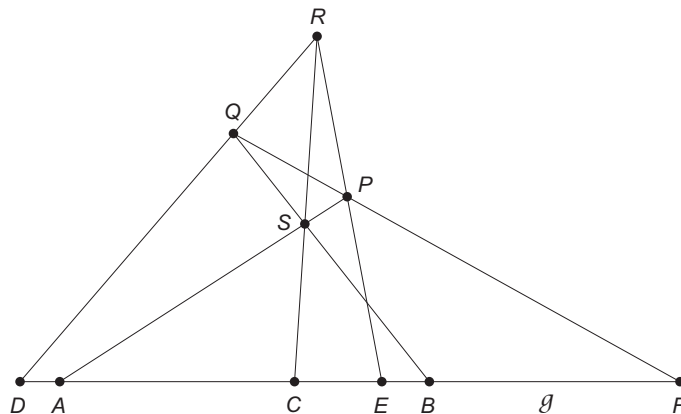


Figura 3.2: Conjunto Quadrangular.

Demonstração: Tome por C , B e D , separadamente, três retas distintas que não concorrem num mesmo ponto. Então as interseções dessas retas vão determinar três pontos, que aos pares determinam novamente as três retas. Seja RS a reta que passa por C , QS a reta que passa por B e QR a reta que passa por D (Figura 3.2). Suponha que A esteja no lado oposto ao lado que passa por D , logo se chamarmos o quadrângulo que queremos construir de $PQRS$, A estará em PS (já que D está em QR). Já sabemos, daí, que P está em AS . Suponha agora que E está em um lado oposto ao ponto B , então analogamente, como B está em QS então E estará em PR . Como P está em AS e, agora vimos, que P está também em ER , podemos determinar P pois $P = AS \cdot ER$ e em seguida determinamos F pois $F = QP \cdot g$. Portanto $(AD)(BE)(CF)$ é um conjunto quadrangular que contém os cinco pontos A , B , C , D e E . ■

Uma pergunta muito pertinente pode surgir em nossa cabeça, será que existe um único ponto F para esta construção?

Teorema 3.11 *O ponto F determinado pelo teorema anterior é único.*

Demonstração: Como as três retas da construção anterior são quaisquer, podemos determinar um outro quadrângulo, de maneira análoga ao do teorema anterior, de vértices $P'Q'R'S'$ (Figura 3.3). Então os triângulos PRS e $P'R'S'$ são perspectivos pela reta g , pois $PR \cdot P'R' = E$, $PS \cdot P'S' = A$ e $RS \cdot R'S' = C$. Pelo teorema 3.9 existe um ponto O_1 tal que $PP' \cdot RR' \cdot SS' = O_1$. Analogamente, olhando agora para os triângulos PQR e $P'Q'R'$, existe O_2 tal que $PP' \cdot RR' \cdot QQ' = O_2$ como $PP' \cdot RR' = O_1$ e $PP' \cdot RR' = O_2$ então $O_1 = O_2 = O$. Portanto PQ cruza g no mesmo ponto F em que $P'Q'$ cruza a reta g . Logo, não importa o quadrângulo que se construa, o ponto F é unicamente determinado pelos cinco pontos A , B , C , D e

E dados.

Corolário: Cada ponto de um conjunto quadrangular é unicamente determinado pelos outros pontos.

Demonstração: Basta fixarmos os cinco pontos que sobram e aplicar o teorema 3.11.

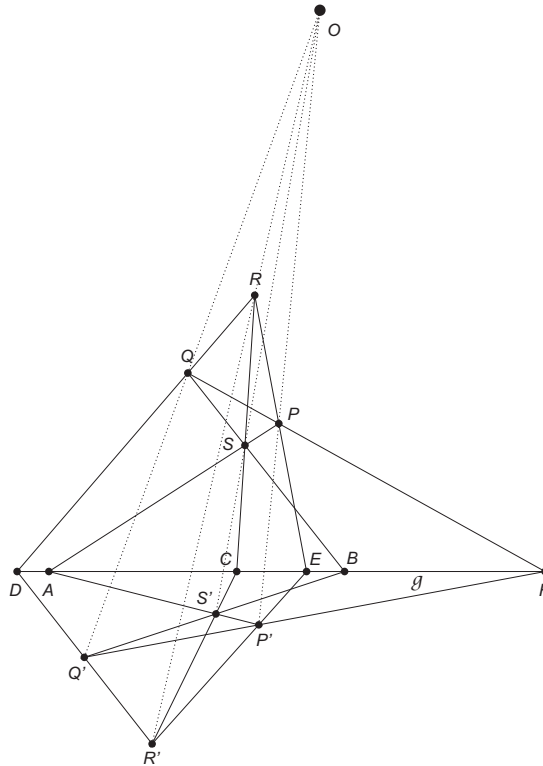


Figura 3.3: Teorema 3.11

■

O axioma 3.4 nos garante que os pontos diagonais de um quadrângulo nunca são colineares. Isso exclui a possibilidade de uma seção do quadrângulo passar por estes três pontos. Mas se esta seção passar por apenas dois deles já teremos uma construção bem interessante.

Definição 3.2 Definimos como **conjunto harmônico**, os casos especiais de conjuntos quadrangulares quando a reta g (da definição 3.1) cruza o quadrângulo em dois de seus pontos diagonais.

Observação: Um conjunto harmônico tem sempre quatro pontos. Para não usarmos

$(AA)(BB)(CF)$, denotaremos o conjunto harmônico da figura 3.4 como sendo:

$$H(AB, CF)$$

onde A e B são pontos diagonais e C e F estão em lados opostos que formarão o terceiro ponto diagonal do quadrângulo $PQRS$

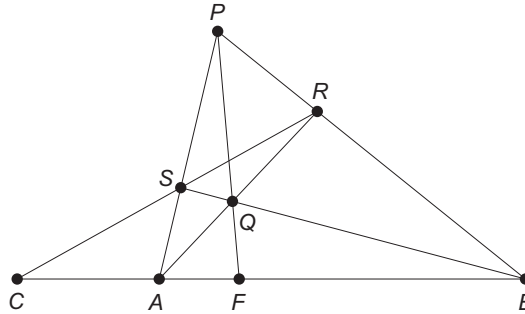


Figura 3.4: Conjunto Harmônico.

Um conjunto harmônico não deixa de ser um conjunto quadrangular, então cada ponto do conjunto harmônico pode ser unicamente determinado pelos outros três (para tanto, basta fazer $A = D$ e $B = E$ na construção do teorema 3.10). Isso faz com que a construção de um conjunto harmônico relacione seus pontos da seguinte forma:

Definição 3.3 Dizemos que C é o **conjugado harmônico** de F em relação à A e B quando A, B, C e F forem tais que $H(AB, CF)$ é um conjunto harmônico.

Uma outra forma de ver o efeito do axioma 3.4 num conjunto harmônico é:

Teorema 3.12 Sejam A, B e C distintos, então $H(AB, CF)$ implica que F é diferente de C .

Demonstração: Como A e B são os pontos diagonais do quadrângulo, C distinto de A e B não pode ser igual a F , pois se assim fosse o ponto C ou F seria o terceiro ponto diagonal (Definição 3.1). E esses, pelo axioma 3.4, não podem ficar na mesma reta. Logo C e F são pontos distintos. ■

Voltaremos a falar desse conjunto ao longo do nosso estudo. Conjuntos harmônicos serão muito importantes para se estudar as projetividades e depois, na hora de provar resultados sobre as cônicas.

Capítulo 4

Princípio da Dualidade

Na seção 3.1 consta uma lista com seis axiomas do plano. Os axiomas 3.1 e 3.3, em especial, induzem na geometria projetiva uma poderosa simetria entre as construções geométricas e seus resultados. Essa simetria é a chamada de princípio da dualidade.

4.1 O princípio

Devido aos axiomas mencionados anteriormente somos capazes de fazer duas afirmações:

“cada dois pontos determinam uma única reta”

“cada duas retas determinam um único ponto”

Se trocarmos na primeira afirmação a palavra “ponto” pela palavra “reta” (respeitando a concordância verbal quando necessário), obtemos a segunda afirmação e vice-versa.

Esse fenômeno é mais que uma casualidade. Na geometria projetiva, tudo que acontece com um ponto, pode acontecer também, igualmente, com uma reta. Podemos usar dessa simetria para fazer novas construções. Veja o caso dos quadrângulos e quadriláteros, as definições são praticamente idênticas se ignorarmos as palavras ponto e reta (e todas as outras que fazem referência a eles, por exemplo, colineares e concorrentes). Quando isso acontece entre duas figuras, dizemos que elas são duais. Dessa forma o dual de um quadrângulo é um quadrilátero, assim como, o dual de três retas concorrentes são três pontos colineares. Para cada construção, podemos achar uma dual, e as vezes elas coincidem. No triângulo por exemplo, são três retas determinando três pontos ou três pontos determinando três retas. O triângulo, por isso, é uma figura auto-dual.

Na figura 4.1, por exemplo, temos duas construções duais. Usamos as letras em auxílio à compreensão, ou seja, a letra P ou p corresponde ao mesmo objeto, porém dualizado de uma figura para outra.

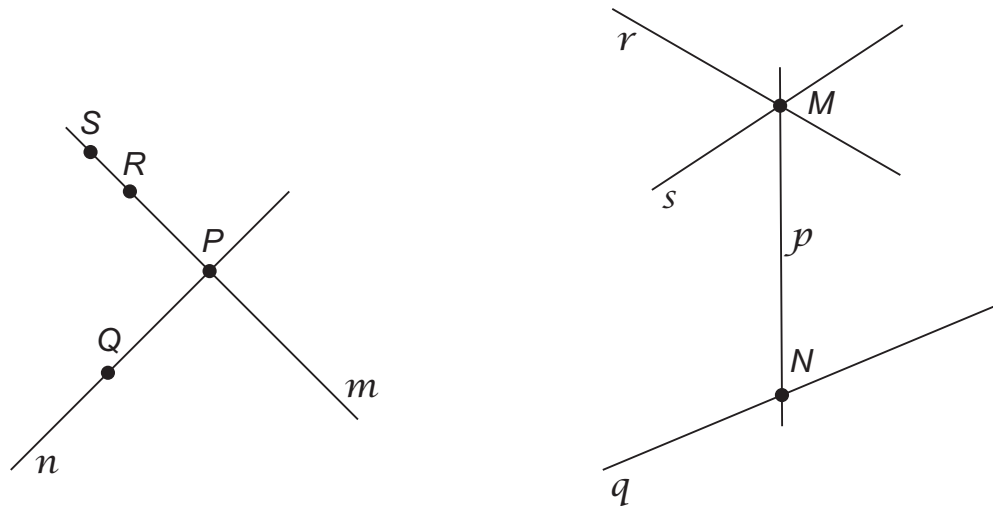


Figura 4.1: Construções duais.

Veja que como as retas m e n se cruzam no ponto P , então, na outra figura, os pontos M e N determinam a reta p . E assim analogamente para os outros pontos e retas.

Quando dualizamos uma afirmação, devemos trocar todas as palavras que relacionam pontos por aquelas correspondentes que se referem a retas. A afirmação: *dois triângulos são perspectivos por um ponto quando as retas determinadas pelos vértices correspondentes são concorrentes* pode ser dualizada da seguinte forma: *dois triângulos são perspectivos por uma reta quando os pontos determinados pelos lados correspondentes são colineares*. As palavras “vértice” e “concorrentes” foram substituídas pelas palavras “lado” e “colineares”.

A grande vantagem desse princípio é que podemos mecanicamente dualizar os enunciados e as provas de teoremas afim de obter novos resultados sem mínimos esforços.

Na seção seguinte vamos conhecer na prática a utilidade desse princípio.

4.2 A dualidade dos conjuntos harmônicos

Acabamos, há algumas seções atrás, de definir conjunto harmônico de pontos. Nessa seção, com a ajuda do princípio da dualidade, vamos estudar os conjuntos harmônicos de retas. Primeiro definiremos o dual do conjunto quadrangular

Definição 4.1 *O dual do conjunto quadrangular, é o conjunto formado pelas retas determinadas por um ponto que não está em nenhum dos lados de um quadrilátero e todos os vértices do mesmo.*

Observação: Da mesma forma que nos conjuntos quadrangulares, podemos ter seis, cinco, ou quatro retas. Isso depende do ponto que escolhermos incidir, ou não, uma das retas diagonais do quadrilátero.

Definição 4.2 Chamaremos de **conjunto harmônico de retas**, a dualização do conjunto harmônicos, porém usando quadriláteros em vez de quadrângulos. Ou seja, é quando o ponto escolhido é incidente à duas das três retas diagonias do quadrilátero.

Na figura 4.2 $H(ab, cf)$ é um conjunto harmônico de retas(a, b, c e f) em relação ao quadrilátero pqr onde G é o ponto escolhido. Usamos a mesma notação do conjunto harmônico de pontos.

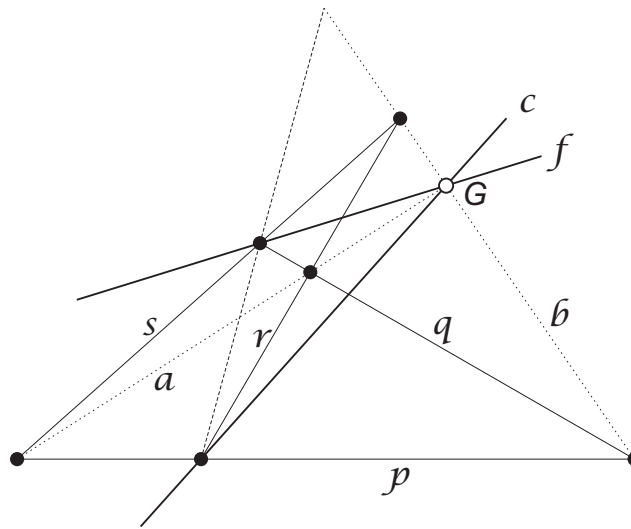


Figura 4.2: Construções duais.

Veja agora a dualização do teorema 3.10 quando o conjunto quadrângular é um conjunto harmônico:

Teorema 4.1 Dadas as retas a, b e c distintas e concorrentes, existe f de modo que a, b, c e f formem um conjugado harmônico.

Demonstração: Sejam a, b e c três retas concorrentes em um ponto G . Tome q, r e s , não concorrentes, de forma que os pontos $q \cdot r, q \cdot s$ e $s \cdot r$ sejam incidentes, respectivamente às retas a, b e c . Fazendo uma construção análoga ao teorema 3.10, tomaremos $p = (a \cdot s)(b \cdot r)$ e $f = (a \cdot b)(p \cdot q)$. Olhando para o quadrilátero pqr temos:

$$a = (q \cdot r)(p \cdot s) \text{ , pois } p \text{ passa por } a \cdot s$$

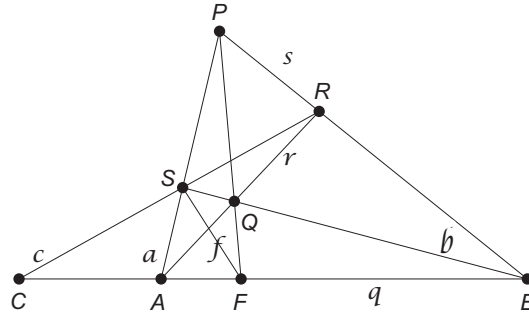


Figura 4.4: Teorema 4.2

Dualizando o teorema 4.2 temos, com uma nova formulção do enunciado:

Teorema 4.3 *Qualquer seção de um conjunto harmônico de retas que não passa pelo ponto de concorrência é um conjunto harmônico de pontos.*

Demonstração: Dual do teorema 4.2.

Esses dois teoremas nos permitem concluir que a projetividade é uma relação que preserva os conjuntos harmônicos.

Teorema 4.4 *Se $ABCF \bar{\wedge} A'B'C'F'$ e $H(AB, CF)$, então $H(A'B', C'F')$.*

Demonstração: Se $ABCF \bar{\wedge} A'B'C'F'$ então existe um ponto S onde $AA' \cdot BB' \cdot CC' \cdot FF' = S$. Como $H(AB, CF)$ então AS, BS, CS e FS formam, segundo o teorema 4.2 um conjunto harmônico de retas. Além disso, já que $AA' \cdot BB' \cdot CC' \cdot FF' = S$ os pontos A', B', C' e F' são a seção do conjunto harmônico de retas anterior por uma reta que não passa por S logo, pelo teorema 4.3, $H(A'B', C'F')$.

Teorema 4.5 *Se $ABCF \bar{\wedge} A'B'C'F'$ e $H(AB, CF)$, então $H(A'B', C'F')$.*

Demonstração: Os teoremas 4.2 e 4.3 garantem que a cada correspondência elementar da projetividade $ABCF \bar{\wedge} A'B'C'F'$ teremos uma conjunto harmônico de retas ou de pontos.

Agora, a garantia de uma liberdade de notação.

Teorema 4.6 *Se $H(AB, CF)$ então:*

i $H(FC, BA)$

ii $H(CF, BA)$

iii $H(FC, AB)$

iv $H(CF, AB)$

Demonstração: Basta combinarmos os teoremas [4.5](#) e [2.1](#)



Capítulo 5

Teorema Fundamental

Já conhecemos, através da definição 2.6, como funciona uma projetividade. Mas para se trabalhar com ela precisamos ter uma certa segurança, ou seja, quantos pares de pontos correspondentes são necessários para se determinar uma projetividade, se é que isso é possível.

Uma projetividade entre duas fileiras fica determinada quando, dado um ponto X pertencente a primeira fileira, conseguimos determinar exatamente o ponto, na segunda fileira, correspondente a X .

Para responder a esse tipo de questão vamos enunciar e provar o teorema fundamental da geometria projetiva, que fala como podemos determinar projetividades. Desse teorema seguem vários resultados inclusive o teorema de *Desargues* que adotamos com axioma.

5.1 O teorema e suas aplicações

Teorema 5.1 (*Teorema Fundamental da Geometria Projetiva*) *Uma projetividade é unicamente determinada quando são dados três pontos colineares e seus respectivos correspondentes.*

Demonstração: Dados A, B e C colineares e A', B' e C' , seus respectivos correspondentes em uma projetividade qualquer, deveremos determinar um ponto X' de modo que $ABCX \bar{\cap} A'B'C'X'$ para um ponto X qualquer na reta AB .

Para facilitar as coisas vamos dividir as possíveis situações em dois casos: quando os pontos A, B e C estão em uma reta distinta de A', B' e C' , sendo que a interseção dessas retas não é nenhum desses pontos e quando isso não acontece.

Caso 1 Os pontos A, B e C e os pontos A', B' e C' estão em retas distintas que não se cruzam em nenhum dos pontos anteriores.

Seja $N = AB' \cdot BA'$ e $M = AC' \cdot CA'$, as retas AA' e XA' interceptam a retas MN em dois pontos distintos, a saber, respectivamente, G e Q .

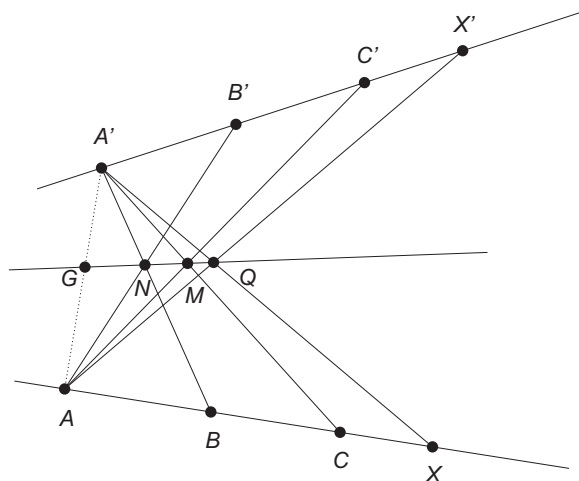


Figura 5.1: Teorema 5.1, Caso 1

Finalmente o ponto X' que procurávamos fica determinado pela interseção das retas AQ e $A'B'$. Por que deveríamos acreditar que este ponto X' é, de fato, o ponto que queríamos?

Afirmção: $ABCX \bar{\wedge} A'B'C'X'$.

Demonstração: Primeiro note que:

$AA' \cdot MN = G$; pela construção.

$BA' \cdot MN = N$; pois N está na reta BA' ($N = AB' \cdot BA'$).

$CA' \cdot MN = M$; pois M está na reta CA' ($M = AC' \cdot CA'$).

$XA' \cdot MN = Q$; pela construção.

Então, $ABCX \stackrel{A'}{\bar{\wedge}} GNMQ$, agora veja que:

$GA \cdot A'B' = A'$; pois $GA = GA'$ já que $G = AA' \cdot MN$, daí, $GA \cdot A'B' = GA' \cdot A'B' = A'$.

$NA \cdot A'B' = B'$; pois $NA = NB'$ já que $N = BA' \cdot AB'$, daí, $NA \cdot A'B' = NB' \cdot A'B' = B'$.

$MA \cdot A'B' = C'$; pois $MA = MC'$ já que $M = CA' \cdot AC'$, daí, como A' , B' e C' são colineares, $MA \cdot A'B' = MC' \cdot A'C' = C'$.

$QA \cdot A'B' = X'$; pois $QA = QX'$ e $A'B' = A'X'$ já que $X' = AQ \cdot A'B'$, daí, $QA \cdot A'B' = QX' \cdot A'X' = X'$.

Então, $GNMQ \stackrel{A}{\sim} A'B'C'X'$. Combinando esse resultado com o anterior temos $ABCX \stackrel{A'}{\sim} GNMQ \stackrel{A}{\sim} A'B'C'X'$, ou ainda, $ABCX \bar{\sim} A'B'C'X'$.

Caso 2 Quando qualquer coisa diferente do primeiro caso acontecer, por exemplo, se A , B , C , A' , B' e C' estiverem na mesma reta, usaremos uma perspectividade auxiliar para podermos voltar ao caso 1, como ilustra a figura 5.2:

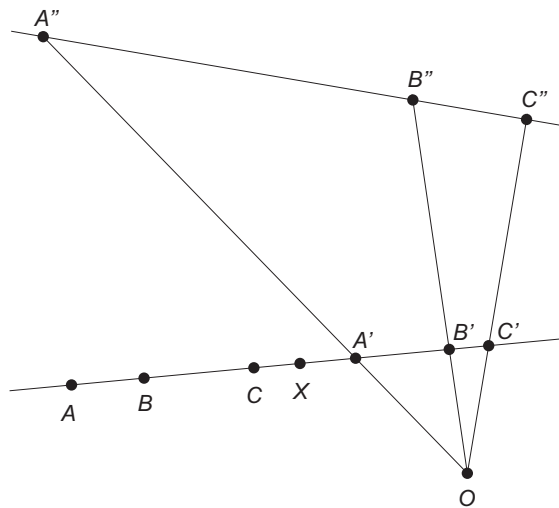


Figura 5.2: Teorema 5.1, Caso 2

Pela construção teremos $A'B'C' \stackrel{O}{\sim} A''B''C''$. Usando o caso 1 para os pontos A , B , C , X , A'' , B'' e C'' ficamos com $ABCX \bar{\sim} A''B''C''X''$. Desses dois resultados temos $ABCX \bar{\sim} A'B'C'X'$ onde X' é o ponto que OX'' intercepta a reta $A'B'$. Outros casos podem acontecer, o ponto A' , por exemplo, pode coincidir com o ponto A ; O ponto A' pode ser também, citando mais um caso possível, o ponto de interseção das retas AB e $B'C'$. Todas essas possibilidades, estão contempladas no caso 2 descrito anteriormente, o que garante a consistência deste teorema.

Agora que provamos que este ponto X' existe, devemos dar sentido a palavra “unicamente” deste teorema, ou seja, devemos nos perguntar: Será que X' é único? Vamos supor que não, ou seja, suponhamos exista um X'' tal que:

$$ABCX \bar{\wedge} A'B'C'X' \text{ e } ABCX \bar{\wedge} A'B'C'X''$$

Daí concluímos que $A'B'C'X' \bar{\wedge} ABCX \bar{\wedge} A'B'C'X''$, ou ainda $A'B'C'X' \bar{\wedge} A'B'C'X''$. Como esta projetividade deixa invariante os três pontos A' , B' e C' , pelo axioma 3.6, $X' = X''$, ou seja, o ponto X' é único. ■

Agora já sabemos como construir uma projetividade, dado três pares de pontos correspondentes. É claro que o teorema fundamental vale para o caso dual, ou seja, *uma projetividade entre feixes de retas é determinada quando são dados três pares de retas correspondentes*. A prova desse resultado é tão dual à do teorema fundamental quanto o enunciado.

Alguns resultados decorrem diretamente do teorema fundamental:

Teorema 5.2 *Uma projetividade entre duas fileiras em duas retas distintas é uma perspectividade se, e somente se, o ponto de interseção das retas for invariante pela projetividade.*

Demonstração: (\Rightarrow)

Seja uma projetividade qualquer entre duas fileiras em duas retas r e s distintas. Suponha esta uma perspectividade. Então existe um centro O desta perspectividade tal que se X e X' são pontos correspondentes, (X em uma reta e X' na outra) a reta XX' passa por O . Seja I o ponto tal que $I = r \cdot s$, em particular, I está em r , então, seu correspondente em s deve ser tal que a reta II' passe pelo centro O , daí concluímos que $I = I'$, pois caso contrário teríamos duas retas distintas por I e I' , a reta s e a reta $OI = OI'$. Logo o ponto de interseção das retas r e s é invariante pela perspectividade dada.

(\Leftarrow)

Seja agora uma projetividade qualquer entre duas fileiras distintas em duas retas r e S distintas. Seja I o ponto de interseção entre r e s de modo que I seja invariante por esta projetividade. Podemos, de acordo com o teorema fundamental (5.1), determinar esta projetividade por três de seus pares de pontos correspondentes da seguinte forma:

$$ABI \bar{\wedge} A'B'I.$$

Seja $O = AA' \cdot BB'$ então temos também:

$$ABI \stackrel{O}{\bar{\wedge}} A'B'I.$$

(lembre que I é ponto invariante, e portanto, a reta OI passa por seu correspondente, que o próprio ponto I). Como o teorema fundamental garante que uma projetividade é **unicamente** determinada por três de seus pares de pontos correspondentes, estas últimas projetividades (Lembre que uma perspectividade é, em particular, uma projetividade) são, na realidade, a mesma. Portanto, a projetividade dada é uma perspectividade. ■

Teorema 5.3 *Qualquer dois conjuntos harmônicos são relacionados por uma única projetividade.*

Demonstração: Seja $H(AB, CF)$ e $H(A'B', C'F')$ dois conjuntos harmônicos quaisquer. Para cada um desses conjuntos o ponto F (ou F') é determinado unicamente como já vimos anteriormente. Determinemos, pelo teorema fundamental, a projetividade $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$. Suponha que essa projetividade leve o ponto F num ponto F'' . O teorema 4.5 garante que, como $H(AB, CF)$ é um conjunto harmônico, então, $H(A'B', C'F'')$ também o é. Mas F' é único, portanto $F'' = F'$ e por isso existe a projetividade $ABCF \bar{\wedge} A'B'C'F'$ que relaciona os dois conjuntos harmônicos. ■

5.2 Eixo de uma projetividade

Construímos na demonstração do teorema fundamental uma projetividade a partir de três pares de pontos correspondentes. Essa foi determinada como produto de duas perspectividades que tinham como destino e depois origem a reta MN (Figura 5.1). Esta reta foi construída a partir de dois pontos: $A'C \cdot AC'$ e $A'B \cdot AB'$.

Se eu afirmasse que a reta MN ficaria exatamente no mesmo lugar independente da escolha dos pontos A, B, C, A', B' e C' acreditariam em mim?...Bem, é para isso que servem os teoremas.

Teorema 5.4 *Toda projetividade que relaciona fileiras de pontos em retas distintas determina uma outra reta especial, o eixo, que contém todas as interseções das uniões cruzadas de cada dois pares de pontos correspondentes. (Na projetividade $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$ o ponto $I = AB' \cdot A'B$ é uma interseção das uniões cruzadas dos pares AA' e BB' de pontos correspondentes)*

Demonstração: Seja uma projetividade relacionando fileiras em retas distintas. Sejam A, B e C em r e A', B' e C' em s de modo que $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$. A reta formada pelos pontos $N = AB' \cdot A'B$ e $M = AC' \cdot A'C$ é uma reta formada por duas interseções de uniões cruzadas de pares de pontos correspondentes. O que resta sabermos é se todas as outras dessas interseções incidirão em MN . Seja E o ponto de interseção entre r e s . Vamos dividir os nossos casos em dois.

Caso 1 O ponto E é invariante na projetividade $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$.

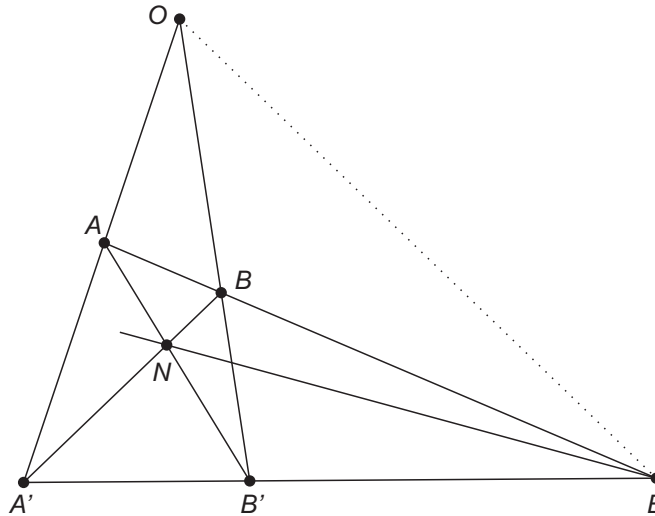


Figura 5.3: Teorema 5.4 Caso 1

Neste caso, se $N = AB' \cdot A'B$ e $E = E'$ é invariante, podemos descrever o eixo como a reta EN já que $AE' \cdot A'E = AE \cdot A'E = E$ (figura 5.3). Note que E sempre será esta interseção independente do par de pontos correspondentes que colocarmos no lugar de AA' . Pelo teorema 5.2 chamaremos de O o centro da perspectividade $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$. Ora, se essa projetividade é uma perspectividade então cada reta XX' deverá passar pelo ponto O . Portanto a reta EN pode ser definida como o conjugado harmônico da reta EO em relação as retas EB e EB' (ou, respectivamente, r e s). Finalmente, qualquer quadrilátero $(XX')(XY')(YX')(YY')$, onde XX' e YY' são pares de pontos correspondentes, terá como vértice o ponto O . Portanto o ponto $XY' \cdot X'Y$

(uma interseção das uniões cruzadas de pares correspondentes) passará pelo conjugado harmônico de EO em relação à $EB = r$ e $EB' = s$, ou seja, toda interseção dessa forma passará por esta reta, que o teorema define como eixo.

Caso 2 O ponto E **não** é invariante na projetividade $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$.

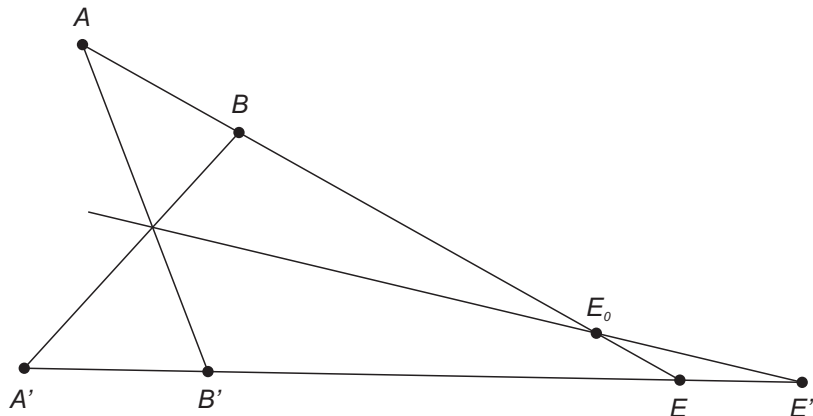


Figura 5.4: Teorema 5.4 Caso 2

Se E não é invariante existem os pontos E_0 em r e E' em s de modo que $ABCE_0E \bar{\wedge} A'B'C'EE'$. Como E está nas duas retas temos que, para qualquer par XX' de pontos correspondentes, $r = E_0X = EX$ e $s = E'X' = EX'$. Então, $EX' \cdot E'X = E'X' \cdot E'X = E'$ e também $E_0X' \cdot EX = E_0X' \cdot E_0X = E_0$. Logo, E_0 e E' são interseções de uniões cruzadas de pares de pontos correspondentes. (os primeiros dois pares são XX' e EE' ; os seguintes dois pares são XX' e E_0E). Com isso podemos definir o eixo como a reta E_0E' . Podemos provar que o ponto $I = AB' \cdot A'B$ está nesse eixo, usando a construção do teorema fundamental. ■

De acordo com a nossa construção, um corolário rápido e direto pode ser enunciado da seguinte forma:

Corolário: Se E , E_0 e E' formam um triângulo, então o eixo da projetividade $AE_0E \bar{\wedge} A'EE'$ é a reta E_0E' .

O teorema de *Pappus*, também famoso e demonstrado na geometria euclidiana, pode ser provado usando a idéia de eixo de uma projetividade quase como um corolário.

Teorema 5.5 (Teorema de Pappus) Se os vértices de um hexágono se alternam em duas retas, os três pares de lados opostos se encontram em pontos colineares.

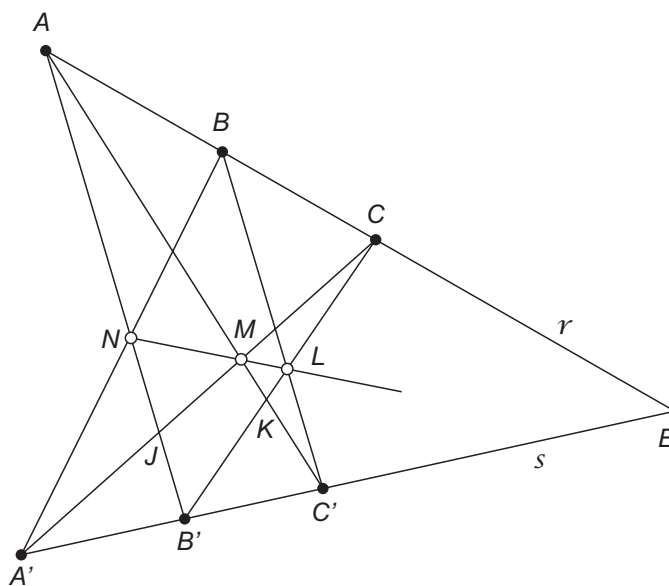


Figura 5.5: Teorema 5.5

Demonstração: Seja $AB'CA'BC'$ um hexágono onde A , B e C estão numa reta r e A' , B' e C' estão numa reta s (figura 5.5). Dados AA' , BB' e CC' , três pares de pontos correspondentes, podemos determinar uma projetividade única (teorema fundamental) $ABC \bar{\cap} A'B'C'$. As interseções dos lados opostos $L = BC' \cdot B'C$, $M = AC' \cdot A'C$ e $N = AB' \cdot A'B$ são interseções de uniões cruzadas de pares de pontos correspondentes. Assim pelo teorema 5.4 os pontos L , M e N estão no eixo da projetividade e por isso são colineares. ■

5.3 Pappus e Desargues: Uma abordagem bem projetiva

Aproveitando a figura 5.5 do teorema anterior, podemos (re)demonstrar o teorema de *Pappus*, porém agora usando ferramentas bem projetivas e bem elementares.

Demonstração(2): Seja $AB'CA'BC'$ um hexágono onde A , B e C estão numa reta r e A' , B' e C' estão numa reta s . As interseções dos lados opostos são $L =$

$BC' \cdot B'C$, $M = AC' \cdot A'C$ e $N = AB' \cdot A'B$. Podemos definir agora:

$$J = AB' \cdot CA' \quad , \quad E = AB \cdot A'B' \quad \text{e} \quad K = AC' \cdot CB'.$$

Com estes pontos construímos as seguintes perspectividades:

$$ANJB' \stackrel{A'}{\bar{\wedge}} ABCE \stackrel{C'}{\bar{\wedge}} KLCB'.$$

Como B' é ponto invariante da projetividade resultante $ANJ \bar{\wedge} KLC$ esta é uma perspectividade e o centro dela é o ponto $M = AK \cdot JC$, Mas:

$$AK = AC' = AM; \text{ Pois } K = AC' \cdot CB' \text{ e } M = AC' \cdot A'C$$

$$JC = CA' = CM; \text{ Pois } J = AB' \cdot CA' \text{ e } M = AC' \cdot A'C$$

Logo $AK \cdot JC = AM \cdot CM = M$. Ou seja, M é o centro da perspectividade $ANJ \bar{\wedge} KLC$. Assim, L , M e N são colineares.

■

Pouco além das nossas primeiras conversas sobre perspectividades e, é claro, o teorema fundamental foram necessários para esta demonstração.

Podemos usar uma idéia como esta para demonstrar um de nossos axiomas mais famosos. Enunciaremos, desta vez, o teorema de *Desargues* sem falar de triângulos perspectivos.

Teorema 5.6 (Teorema de Desargues) *Sejam P, P', Q, Q', R e R' pontos distintos (PQR e $P'Q'R'$ formam um triângulo) tais que $PP' \cdot QQ' \cdot RR' = O$. Sejam, também, os pontos $D = QR \cdot Q'R'$, $E = RP \cdot R'P'$ e $F = PQ \cdot P'Q'$ então D, E e F são colineares.*

Demonstração: Defina os pontos $A = OP \cdot DE$, $B = OQ \cdot DE$ e $C = OR \cdot DE$. Note que, por construção, A, B e C estão na reta DE (figura 5.6).

Queremos mostrar que o ponto F também está nessa mesma reta DE . Para tanto observe que:

$$OE \cdot OR = O;$$

$$PE \cdot OR = R; \text{ pois } PE = PR \text{ já que } E = RP \cdot R'P'.$$

e pelo teorema 5.2, como O é o ponto de interseção das retas PP' e RR' e é invariante nessa projetividade, concluímos que essa última é uma perspectividade. Como $F = PQ \cdot P'Q'$, o ponto F é o centro da perspectividade, logo a reta AB passa por F . Como $AB = DE$, os pontos D , E e F são colineares.

■

Dois importantes teoremas conhecidos foram demonstrados usando resultados totalmente diferentes dos usuais. É interessante analisar como duas teorias diferentes chegam ao um mesmo resultado de caminhos tão diferentes. Mais resultados como esses estão por ser provados nas próximas seções. Por agora, vamos continuar conhecendo as intimidades da geometria projetiva plana.

Capítulo 6

Projetividades

Neste capítulo vamos conhecer a fundo as propriedades das projetividades. Para tanto, dividimos este capítulo em três seções: projetividades na reta é a primeira delas e vai tratar daquelas projetividades que relacionam duas fileiras numa mesma reta. A segunda seção trata das projetividades no plano. Aqui veremos transformações de objetos (pontos e retas) no plano que preservam as relações de incidência. A parte referente a polaridades deveria estar na seção das projetividades no plano, entretanto, a partir das polaridades é que vamos definir uma cônica, por isso, uma seção separada.

Como era de se esperar, neste capítulo está concentrada a maior parte de nossos teoremas e resultados que nos dará uma base consistente para discutirmos cônicas.

6.1 Projetividades na reta

Como foi dito anteriormente, trataremos agora unicamente das projetividades na reta, ou seja, as fileiras relacionadas pela projetividade estão na mesma reta. Um exemplo de tal projetividade é aquela construída na demonstração do teorema 2.1.

Sabemos que qualquer projetividade que deixa invariante mais de dois pontos na reta, deixa invariante toda a reta. Essa é a afirmação proposta pelo axioma 3.6. Então não seria problema se existisse uma projetividade que não houvesse nenhum ponto invariante ou apenas um ou dois destes pontos. Sem afirmar nada sobre a existência destas projetividades vale a seguinte definição:

Definição 6.1 *Uma projetividade que leva uma fileira de pontos de uma reta para uma fileira de pontos dessa mesma reta é classificada como:*

i **Elíptica**, se a projetividade não deixa pontos invariantes.

ii **Parabólica**, se a projetividade deixa somente um ponto invariante.

iii **Hiperbólica**, se a projetividade deixa dois pontos invariantes.

As projetividades parabólicas e hiperbólicas vão gastar um pouco mais de nosso tempo por serem “diferentes” das projetividades “normais”. Não sabemos ainda se estas projetividades existem de fato, estamos apenas classificando-as. Porém, chegou a hora de sanar um pouco esta dúvida cruel.

Teorema 6.1 *Sejam A, B, C, D e E pontos distintos em r . $AECF \bar{\wedge} BDCF$ se e somente se $(AD)(BE)(CF)$, mesmo quando $C = F$.*

Demonstração: (\Leftarrow)

Dados A, B, C, D e E pontos distintos em r , podemos construir um conjunto quadrangular $(AD)(BE)(CF)$. Esta construção é garantida pelo teorema 3.10, onde:

$$PS \cdot AB = A$$

$$QS \cdot AB = B$$

$$RS \cdot AB = c$$

$$QR \cdot AB = D$$

$$PR \cdot AB = E$$

$$PQ \cdot AB = F \text{ (Figura 6.1)}$$

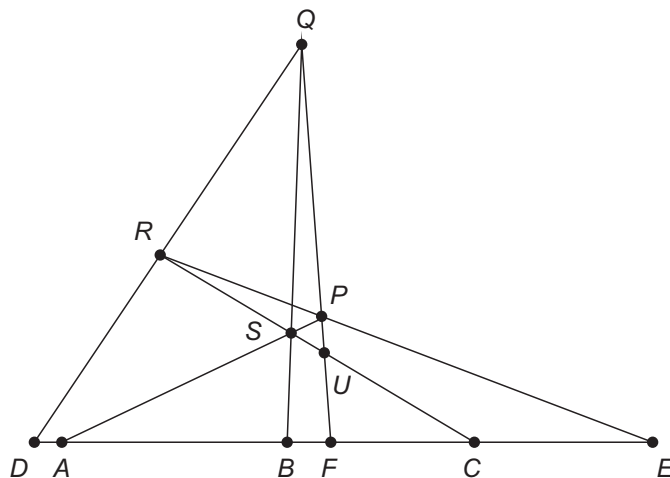


Figura 6.1: Teorema 6.1: Quando $C \neq F$

Agora veja que:

$$AP \cdot RS = S; \text{ Pois } AP = AS, \text{ já que } PS \cdot AB = A.$$

$$EP \cdot RS = R; \text{ Pois } EP = ER, \text{ já que } PR \cdot AB = E.$$

$$CP \cdot RS = C; \text{ Pois } RS = RC, \text{ já que } RS \cdot AB = C.$$

Isso significa que $AEC \stackrel{P}{\bar{\wedge}} SRC$. Por outro lado:

$SQ \cdot AB = B$; Por construção.

$RQ \cdot AB = D$; Por construção.

$CQ \cdot AB = C$; Pois C está em $r = AB$.

E daí temos que $SRC \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} BDC$. Após determinada esta projetividade (Teorema Fundamental), vamos ver qual é o efeito dela sobre o ponto F . Vamos chamar de U o ponto correspondente de F na perspectividade $AEC \stackrel{P}{\bar{\wedge}} SRC$. Logo $U = FP \cdot RS$. Qual será agora o correspondente de U na perspectividade $SRC \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} BDC$, ou seja, qual é o ponto $UQ \cdot AB$?

Ora, U está na reta PF , pois $U = FP \cdot RS$. Assim como o ponto Q está em PF , pois $PQ \cdot AB = F$. Se U e Q estão em PF então $PF = UQ$. E, finalmente, $AB = AF$, pois F está em AB . Concluimos disso que:

$$UQ \cdot AB = PF \cdot AF = F$$

ou seja:

$$AECF \stackrel{P}{\bar{\wedge}} SRCU \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} BDCF$$

e por fim:

$$AECF \bar{\wedge} BDCF$$

.

Agora, se $C = F$ (Figura 6.2) então C será um ponto diagonal do quadrângulo $PQRS$, porém nada mudará, pois o teorema fundamental garante a projetividade com apenas três pares de pontos correspondentes.

(\Rightarrow)

Dado $AECF \bar{\wedge} BDAF$ tome A, B, C, D e E e construa o conjunto harmônico $(AD)(BE)(CX)$ segundo o teorema 3.10. Usando a primeira parte deste teorema, temos o seguinte resultado: $AECX \bar{\wedge} BDCX$, Como o teorema garante que a projetividade $AECF \bar{\wedge} BDAF$ é única então $F = X$.

■

A sutil observação: *mesmo quando* $C = F$; no enunciado do teorema 6.1 garante a

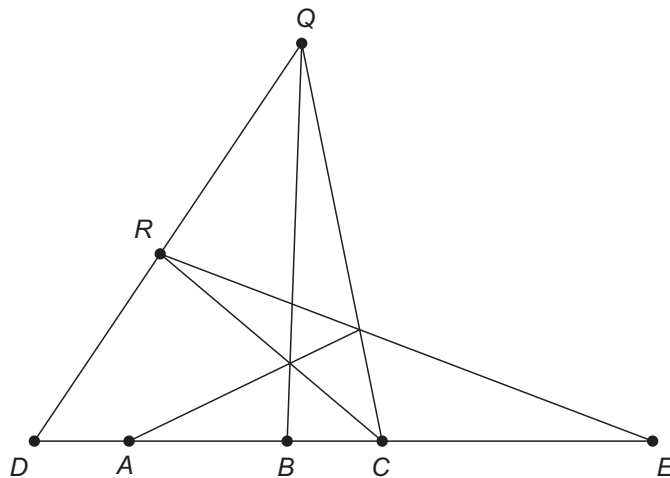


Figura 6.2: Teorema 6.1: Quando $C = F$

existência, além da projetividade hiperbólica, de uma projetividade parabólica (basta construirmos o conjunto quadrangular $(AD)(BE)(CC)$).

Estas projetividades podem ser determinadas quando são dados um par de pontos correspondentes e seu(us) ponto(s) invariante(s), como mostra o teorema que segue.

Teorema 6.2 *Dados quatro pontos colineares A, B, C e F podemos determinar uma projetividade hiperbólica.*

Demonstração: Como sabemos, uma projetividade hiperbólica deixa dois de seus pontos invariantes, são eles, sem perda de generalidade, C e F . Assim estamos a procura da projetividade $ACF \bar{\wedge} BCF$. Sejam Q, P e S tais que A está em PS , B está em QS e F está QP . Chame de U o ponto $QP \cdot CS$ (Figura 6.3).

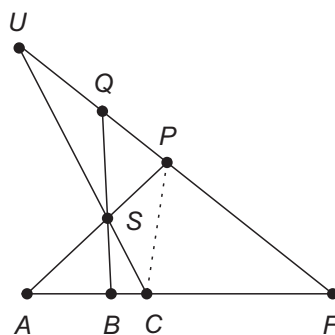


Figura 6.3: Teorema 6.2

Veja que:

$AP \cdot CS = S$; Pois $AP = PS$, já que o ponto A está em PS .

$CP \cdot CS = C$.

$FP \cdot CS = U$; pois $AP = PS$, já que o ponto A está em PS ; pois $FP = QP$, já que o ponto F está em QP . Então $FP \cdot CS = QP \cdot CS = U$.

Ou seja, $ACF \stackrel{P}{\wedge} SCU$. Da mesma forma veja que: Como,

$SQ \cdot AB = B$; Pois $SQ = BQ$ já que B está em QS ,

$CQ \cdot AB = C$; pois $AB = BC$ já que C está em AB e

$UQ \cdot AB = F$; pois $AB = BF$ e $UQ = QP$ já que F está em AB e $U = QP \cdot CS$. Como, além disso, $QP = QF$ (pois F está em QP) temos $UQ \cdot AB = QP \cdot BF = QF \cdot AF = F$

temos $SCU \stackrel{Q}{\wedge} BCF$. Juntando essa perspectividade com o resultado anterior ficamos com $ACF \stackrel{P}{\wedge} SCU \stackrel{Q}{\wedge} BCF$ ou ainda, como queríamos, $ACF \bar{\wedge} BCF$ uma projetividade hiperbólica.

■

Corolário: *Podemos determinar uma projetividade parabólica quando nos são dados um par de pontos correspondentes e o ponto invariante dessa mesma.*

Demonstração: A demonstração deste corolário consiste em fazer a mesma construção do teorema 6.2 porém considerando $C = F$, ou seja, os dois pontos invariantes, na verdade, são o mesmo.

■

Observação: Com esse corolário podemos escrever a projetividade parabólica que leva A em B e possui C como ponto invariante da seguinte forma: $ACC \bar{\wedge} BCC$.

Vimos que a projetividade é uma bijeção, e definimos perspectividade, à grosso modo, como o produto de duas projetividades. Um produto entre duas projetividades é uma idéia que nada difere daquela usada para compor funções. A primeira projetividade leva o ponto A no ponto B , por exemplo, e a segunda leva o ponto B em C . Se essas duas projetividades forem determinadas, o produto delas é aquela projetividade (podemos pensar aqui na aplicação de todas as correspondências elementares de uma projetividade seguidas das correspondências da outra) que levará o

ponto A no ponto C .

Podemos agora pensar sobre o produto de duas projetividades parabólicas, será que elas continuam parabólicas? Será que depende do ponto invariante delas? Bem...

Teorema 6.3 *Se o produto de duas projetividades parabólicas com o mesmo ponto invariante não for a identidade, então ele é também uma projetividade parabólica.*

Demonstração: Ora, como tratamos de duas projetividades parabólicas com o mesmo ponto invariante já podemos deduzir que o produto delas possuirá pelo menos um ponto invariante, ou seja, será uma projetividade parabólica ou hiperbólica (o teorema, basta reler o enunciado, exclui a projetividade identidade). Suponhamos que este produto seja hiperbólico. Então, sejam A e C os pontos invariantes desse produto. Se C é o ponto invariante da primeira projetividade parabólica que leva A num ponto B , por exemplo, teremos a projetividade $ACC \bar{\wedge} BCC$. Mas A é um ponto invariante do produto, logo a segunda projetividade parabólica é obrigada a ser $BCC \bar{\wedge} ACC$. Fazendo o produto encontraremos, contradizendo a hipótese de que o produto era hiperbólico, a identidade. Assim o produto deve ser parabólico. ■

Observação: Podemos “iterar” uma projetividade parabólica $ACC \bar{\wedge} A'CC$ da seguinte forma (Figura 6.4):

Usando a idéia do teorema 6.2 construímos a projetividade $ACC \bar{\wedge} A'CC$ de modo que A esteja em PS , A' esteja em QS e C esteja em QP . Então, $ACC \stackrel{P}{\bar{\wedge}} SCC \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} A'CC$, já que A está em PS e A' está em QS . Para “iterar” a projetividade, devemos ver que efeito a projetividade $ACC \bar{\wedge} A'CC$ causa no ponto A' , ou seja, o ponto A é levado no ponto A' mas para onde é levado o ponto A' ? Se S' é o correspondente de A' na primeira perspectividade, então $S' = A'P \cdot CS$. Da mesma forma, se A'' é o correspondente de S' na segunda perspectividade então $A'' = S'Q \cdot A'C$. Logo $AA'CC \stackrel{P}{\bar{\wedge}} SS'CC \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} A'A''CC$, ou ainda, $AA'CC \bar{\wedge} A'A''CC$. Agora repetimos o processo pesquisando o efeito desta projetividade sobre o ponto A'' e assim por diante obtendo uma projetividade da seguinte forma:

$$CCAA'A''A''' \dots \bar{\wedge} CCA'A''A'''A'''' \dots$$

Teorema 6.4 *A projetividade $AA'C \bar{\wedge} A'A''C$ é parabólica se $H(A'C, AA'')$. Caso contrário ela é hiperbólica.*

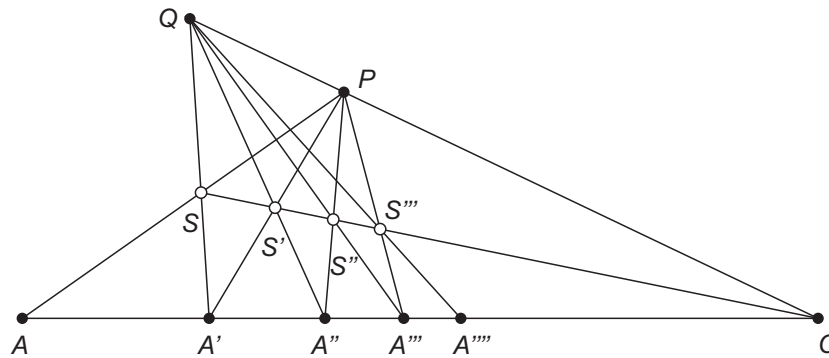


Figura 6.4: Iterando uma projetividade parabólica

Demonstração: De acordo com o teorema 6.1 a projetividade $AA'''CF \bar{\wedge} A'A''CF$ equivale ao conjunto quadrangular $(AA'')(A'A''')(CF)$. Como estamos estudando a projetividade $AA'C \bar{\wedge} A'A''C$ usaremos $C = F$ e $A''' = A'$ para deduzir que $AA'CC \bar{\wedge} A'A''CC$ é equivalente à $H(A'C, AA'')$. O fato de C ser igual F garante que a projetividade seja parabólica. Se o conjunto harmônico não existisse teríamos $C \neq F$ o que resultaria numa projetividade hiperbólica.

Corolário: Se a projetividade $ACC \bar{\wedge} A'CC$ leva A' em A'' , então A'' é o conjugado harmônico de A em relação a A' e C .

Demonstração: É apenas uma reformulação do enunciado do teorema 6.4. ■

Um caso especial e muito útil a ser estudado, é o das projetividades que trocam pares de pontos.

Definição 6.2 Uma *involução* é uma projetividade que troca pares de pontos, ou seja, se o ponto X é levado ao ponto X' então X' será levado em X pela mesma involução, ou ainda, $XX' \bar{\wedge} X'X$.

Observação: Mais adiante, quando definirmos período de uma projetividade, apresentaremos uma definição mais formal para uma involução.

Não devemos esquecer em nenhum momento que, se falarmos de projetividades nesta seção, estaremos nos referindo àquelas que relacionam duas fileiras de pontos numa mesma reta.

Teorema 6.5 Qualquer projetividade que trocar dois pontos distintos, é uma involução.

Demonstração: Sejam A e A' dois pontos distintos trocados por uma projetividade. Nessa mesma, seja X um ponto qualquer e X' seu correspondente, ou seja, $AA'X \bar{\wedge} A'AX'$. Queremos saber que efeito a projetividade tem sobre o ponto X' . Se mostrarmos que essa projetividade leva X' em X então ela será uma involução, pois X é um ponto qualquer. Ora, como A , A' , X e X' são colineares, pelo teorema 2.1 podemos determinar a seguinte projetividade:

$$AA'XX' \bar{\wedge} A'AX'X$$

O teorema fundamental garante que essa projetividade é igual a primeira. X' , então, é levado em X , o que caracteriza essa projetividade como uma involução. ■

Após reler o enunciado do teorema 2.1 podemos enunciar um importante corolário bem direto desse teorema.

Teorema 6.6 *Uma involução é determinada por qualquer dois de seus pares.*

Demonstração: Sejam A e A' pontos correspondentes de uma involução, assim como B e B' . Então, pelo teorema 2.1, temos que $AA'BB' \bar{\wedge} A'AB'B$, o que determina a involução.

Observação: Já que dois pares de pontos correspondentes determinam uma involução, usaremos $(AA')(BB')$ para denotar uma involução que troca A por A' e B por B' , ou ainda $(AA')(BB)$, se por acaso B for ponto invariante ($B = B'$). ■

Podemos associar um conjunto quadrangular com uma involução como afirma o seguinte teorema:

Teorema 6.7 *Se os lados de um quadrângulo se interceptam em uma reta que não passa por nenhum de seus vértices (conjunto quadrangular), então, pares de lados opostos "geram" pares de pontos correspondentes de uma involução e vice-versa.*

Demonstração: (\Rightarrow)

Seja $PQRS$ um quadrângulo e $(AD)(BE)(CF)$ um conjunto quadrangular qualquer

de $PQRS$. Segue do teorema que 6.1 $AECF \bar{\wedge} BDCF$. Já que B, D, C e F são colineares podemos dizer que $BDCF \bar{\wedge} DBFC$, segundo o teorema 2.1. Fazendo o produto dessas projetividades ficamos com $AECF \bar{\wedge} DBFC$. Como esta última troca C por F podemos chamá-la de involução pelo teorema 6.5.

(\Leftarrow)

Sejam A, B, C, D, E e F pontos colineares de forma que $ABCDEF \bar{\wedge} DEFABC$. Agora tome o conjunto quadrangular $(AD)(BE)(CX)$, garantido pelo teorema 3.10. Da primeira parte desse teorema temos que $ABCDEX \bar{\wedge} DEXABC$ é uma involução, logo $X = F$ (teorema fundamental). Então $(AD)(BE)(CF)$ é um conjunto quadrangular.

■

Agora três propriedades bem importantes das involuções, uma delas é peça chave na definição das cônicas.

Teorema 6.8 *Se MN é um par das involuções $(AA')(BB')$ e $(AA_1)(BB_1)$, então MN é um par da involução $(A'B_1)(B'A_1)$.*

Demonstração: Se o par MN está na involução $(AA')(BB')$ então pelo teorema 6.7 $(AA')(BB')(MN)$ é um conjunto quadrangular e pelo teorema 6.1 temos que $AB'MN \bar{\wedge} BA'MN$. Analogamente, como MN também está na involução $(AA_1)(BB_1)$ segue que $AB_1MN \bar{\wedge} BA_1MN$. Como $AMN \bar{\wedge} BMN$ é unicamente determinada pelo teorema fundamental, temos que $AB'B_1MN \bar{\wedge} BA'A_1MN$, ou se preferirmos, $B'B_1MN \bar{\wedge} A'A_1MN$. Novamente pelo teorema 6.1 temos que $(A'B_1)(B'A_1)(MN)$ é um conjunto quadrangular o que implica, segundo o teorema 6.7, que MN faz parte da involução $(A'B_1)(B'A_1)$.

■

Teorema 6.9 *Qualquer projetividade de dimensão 1, ou seja, que relaciona fileiras de pontos numa mesma reta, pode ser escrita como um produto de duas involuções.*

Demonstração: Vamos escrever a projetividade $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$, onde A e B não são pontos invariantes, como o produto de duas involuções. Pelo teorema 6.6 construímos a involução $(AB')(BA')$ que troca o ponto C por um ponto D . Pelo mesmo teorema

determinamos uma outra involução, a saber, $(A'B')(C'D)$. Com isso podemos escrever a projetividade $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$ como segue:

$$ABC \bar{\wedge} B'A'D \bar{\wedge} A'B'C'$$

■

Teorema 6.10 *Qualquer involução que possuir um ponto B invariante, tem também um outro ponto A invariante. A é o conjugado harmônico de B em relação a qualquer par de pontos distintos correspondentes.*

Demonstração: Seja B o ponto invariante de uma involução que troca C por C' , ou simbolicamente, $BCC' \bar{\wedge} BC'C$. Seja A o conjugado harmônico de B em relação a C e C' então:

$$H(CC', BA) \quad \text{ou} \quad H(C'C, BA).$$

Segundo o teorema 5.3 esses conjuntos harmônicos se relacionam através da projetividade $CC'BA \bar{\wedge} C'CBA$. O teorema fundamental garante que essa última projetividade é a involução $(CC')(BB)$, logo o ponto A também é invariante nesta involução.

■

Corolário: *Não existem involuções parabólicas.*

Demonstração: Sempre que uma involução possuir um ponto invariante, o teorema 6.10 garante a existência de outro o que exclui a possibilidade de termos uma involução com um único ponto invariante.

Observação: Denotaremos por $(AA)(BB)$ a involução hiperbólica onde A e B são pontos invariantes.

Esse último teorema dá sentido a uma definição peculiar.

Definição 6.3 *Qualquer ponto é seu próprio conjugado harmônico em relação a si mesmo e a um ponto qualquer.*

Observação: À primeira vista, esta definição parece não ter muito sentido. Mas se pensarmos que achar o conjugado harmônico de um ponto C com relação a A e B é a mesma coisa que achar o par de C na involução $(AA)(BB)$ a definição fica, de

certo modo, mais confortável.

6.2 Projetividades no Plano

Para estudar o que podemos fazer com as projetividades no plano, definiremos algumas transformações no plano. Primeiro vamos falar daquelas que são ponto a ponto e reta a reta.

Definição 6.4 *Uma transformação T onde $X \mapsto X'$, ponto à ponto, é tal que associa a cada ponto X um ponto X' de modo que exista um único X' para cada X e um único X para cada X' .*

Lembre que já sabemos que a projetividade é uma transformação ponto à ponto, desde os primeiros capítulos.

Definição 6.5 *Uma transformação T onde $x \mapsto x'$, reta à reta, é a dualização da definição 6.4.*

Podemos falar também de transformações ponto à reta e reta à ponto

Definição 6.6 *Uma transformação T onde $X \mapsto x'$, ponto à reta, é tal que associa a cada ponto X uma reta x' de modo que exista uma única reta x' para cada ponto X e um único X para cada x' .*

Definição 6.7 *Uma transformação T onde $x \mapsto X'$, reta à ponto, é a dualização da definição 6.6.*

Duas dessas transformações receberão um pouco da nossa atenção.

6.2.1 Colineações

Definição 6.8 *Chamaremos de **colineação** uma relação ponto à ponto e reta à reta que preservar as relações de incidência.*

Observação: Como definimos a colineação por uma transformação denotaremos por $T(A) = B$ quando a colineação T levar o ponto A no ponto B . Nesse caso, dizer que uma colineação T preserva as relações de incidências significa dizer que se $T(A) = B$, $T(r) = s$ e A está em r , então B está em s . Logo, uma colineação transforma fileiras de pontos em fileiras de pontos, feixes de retas em feixes de retas, quadrângulos em quadrângulos. O dual de uma colineação é também uma colineação,

assim como o produto de duas delas.

Estamos interessados em somente um tipo de colineação.

Definição 6.9 Uma colineação T é uma **colineação projetiva** quando T transforma fileiras e feixes projetivamente, ou seja quando

$$T(A) = A' \Rightarrow A \bar{\wedge} A'.$$

Algumas consequência da definição:

Teorema 6.11 Qualquer colineação que transforma uma fileira de pontos projetivamente é uma colineação projetiva

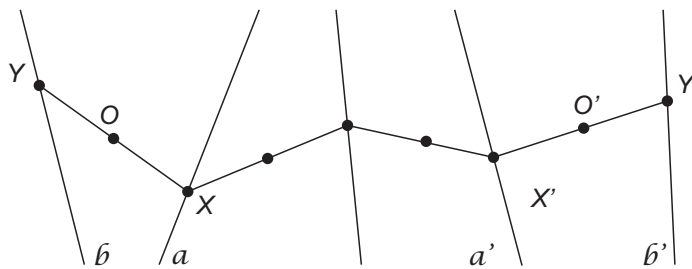


Figura 6.5: Teorema 6.11

Demonstração: Seja T uma colineação que relaciona projetivamente as fileiras a e a' , onde $T(a) = a'$. Dadas duas retas b e b' quaisquer, onde $T(b) = b'$, queremos mostrar que b e b' também são relacionadas projetivamente. Tome Y qualquer em b e O um ponto qualquer fora de a e de b (Figura 6.5). Chamaremos de X o ponto onde OY encontra a reta a , até aqui temos apenas $X \stackrel{O}{\bar{\wedge}} Y$. Agora tome O', Y' e x' onde $T(O) = O', T(Y) = Y'$ e $T(X) = X'$. Como T preserva as incidências temos que a reta $O'Y'$ (com Y' em b') encontra a reta a' em X' tiramos disso que $X' \stackrel{O'}{\bar{\wedge}} Y'$. Ora se a reta a está projetivamente relacionada com a' então $X \bar{\wedge} X'$, já que X está em a e X' está em a' . Basta juntar todos os resultados para concluir que

$$Y \stackrel{O}{\bar{\wedge}} X \bar{\wedge} X' \stackrel{O'}{\bar{\wedge}} Y' \quad \text{ou seja,} \quad Y \bar{\wedge} Y'.$$

Como Y é um ponto qualquer numa reta b qualquer e definimos que $Y' = T(Y)$, podemos concluir que a colineação T é projetiva.



Observação: Podemos obter a dualização desse teorema e de sua prova usando ao invés de pontos Y e Y' , retas y e y' como sendo união de pontos B e B' correspondentes, com pontos O e O' analogamente ao que acabamos de fazer.

Teorema 6.12 *A única colineação projetiva que deixa invariante quatro retas que formam um quadrilátero ou quatro pontos que formam um quadrângulo é a identidade.*

Demonstração: Lembremos que o axioma 3.6 nos diz que se uma projetividade deixa invariante três pontos numa reta então essa projetividade deixa invariante todos os pontos dessa reta.

Sabendo disso, seja pqr um quadrilátero qualquer com seus quatro lados invariantes pela colineação projetiva T . Devemos mostrar que T na realidade é a identidade. se $A = p \cdot q$ é um vértice do quadrilátero então $T(A)$ deve estar sobre $T(p)$ e $T(q)$ pois T preserva as incidências. Como $T(p) = p$ e $T(q) = q$ então $T(A) = T(p) \cdot T(q) = p \cdot q = A$, ou seja, A também é invariante. Analogamente todos os outros cinco vértices deste quadrilátero também são invariantes por T . Como cada lado do quadrilátero passa por três vértices, todos os pontos sobre esses lados são invariantes segundo o axioma 3.6 (Lembre que T é projetiva, por isso estamos usando axiomas de projetividades.). Seja l uma reta qualquer diferente de qualquer um dos lados de pqr . Como l passa por quatro pontos invariantes ($l \cdot p$, $l \cdot q$, $l \cdot r$ e $l \cdot s$), o mesmo axioma 3.6 garante que todos os pontos de l são invariantes. Já que l é uma reta qualquer, a colineação T é a identidade, pois todos os pontos são invariantes por T .



Agora um probleminha de construção. Como será que podemos construir uma colineação projetiva? O teorema que segue afirma que as únicas coisas que precisamos são dois quadrângulos.

Teorema 6.13 *Dados dois quadriláteros completos (ou quadrângulo completo) com seus quatro lados (ou vértices) em uma certa ordem de correspondência, só existe uma colineação projetiva que transforma o primeiro no segundo.*

Demonstração: Sejam $DEFPQR$ e $D'E'F'P'Q'R'$ os dois quadriláteros, com a ordem de correspondência induzida pela notação, de modo que:

$$p = DEF, q = DQR, r = PRE, s = PFQ$$

e

$$p' = D'E'F', q' = D'Q'R', r' = P'R'E', s' = P'F'Q'.$$

Vamos aos poucos construir esta colineação. Seja a uma reta qualquer. Se para formar um quadrilátero os lados não podem ser, três deles, concorrentes, existem dois pontos em lados distintos do quadrilátero $DEFPQR$ que estão também em a . Sejam eles X e Y onde, sem perda de generalidade, X está em DE e Y está em DQ . (Figura 6.6)

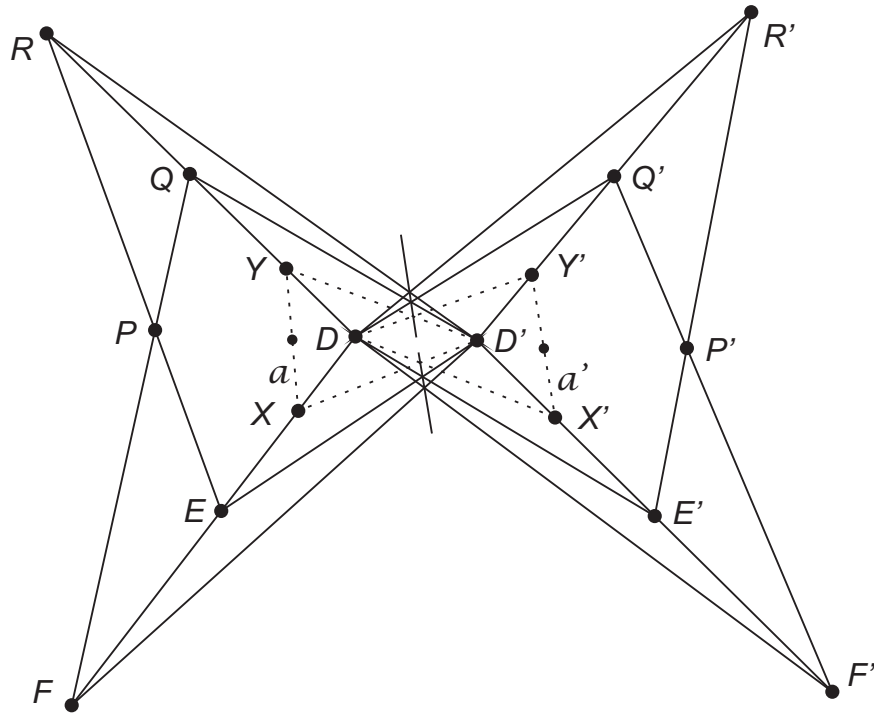


Figura 6.6: Teorema 6.13

De acordo com o teorema fundamental, podemos estabelecer duas projetividades:

$$DEF \bar{\wedge} D'E'F' \quad \text{e} \quad DQR \bar{\wedge} D'Q'R'.$$

Se as projetividades já estão determinadas, existem X' e Y' (Note que X está em DE e Y está em DQ) tais que:

$$DEFX \bar{\wedge} D'E'F'X' \quad \text{e} \quad DQRY \bar{\wedge} D'Q'R'Y'.$$

Seja $a' = X'Y'$.

Será que T tal que $T(a) = a'$ é uma colineação projetiva? Segundo a definição 6.8 devemos mostrar, para tanto, que T leva ponto em ponto preservando as relações de incidência (Já provamos que T leva reta em reta preservando as incidências.). Seja C um ponto de a . Podemos, portanto fazer a variar no feixe de retas C . Dessa forma teremos $X \stackrel{C}{\bar{\wedge}} Y$ e ainda, dos resultados anteriores teremos:

$$X' \bar{\wedge} X \stackrel{C}{\bar{\wedge}} Y \bar{\wedge} Y'.$$

Veremos o efeito que esta última projetividade causa no ponto D' :

$X' \bar{\wedge} X$ leva D' em D como definimos.

$X \stackrel{C}{\bar{\wedge}} Y$ leva D em D pois a interseção de DE , onde está o ponto X com a reta DQ , onde está o ponto Y , é o ponto D .

$Y \bar{\wedge} Y'$ leva D em D' como definimos.

Conclusão: D' é ponto invariante da projetividade $X' \bar{\wedge} Y'$. E Como $D' = D'E' \cdot D'Q'$ temos, pelo teorema 5.2, que X' e Y' estão relacionados por uma perspectividade com centro C' , onde C' assim com C é um feixe de retas. Daí concluímos que T leva retas concorrentes em retas concorrentes (duas retas que concorrem no ponto C são levadas em duas retas concorrentes em C'). Então T leva ponto em ponto, preservando as incidências (Lembre-se que todo ponto pode ser escrito como interseção de duas retas.). A definição 6.8 já nos diz que T é uma colineação e como $X \bar{\wedge} X'$ o teorema 6.11 garante que T é uma colineação projetiva. Como $p = DE$, $q = DQ$, $r = ER$, $s = FQ$, $p' = D'E'$, $q' = D'Q'$, $r' = E'R'$ e $s' = F'Q'$ a colineação T , de fato, leva o primeiro quadrilátero no segundo, mas será que T é única?

Suponha que T_1 tal que $T_1(a) = a_1$ também leve $DEFPQR$ em $D'E'F'P'Q'R'$. Como T_1 é uma colineação, a definição 6.8 garante que existe uma T_1^{-1} tal que $T_1^{-1}(a_1) = a$ que leva $T_1(a_1)$ em a . Seja P onde $P(a_1) = a'$ o produto de T_1^{-1} com T (Estamos na realidade compondo funções.). Note que P leva $D'E'F'P'Q'R'$ em $D'E'F'P'Q'R'$, ou seja, P deixa invariante os quatro lados deste quadrilátero. Portanto, pelo teorema 6.12, P é a identidade, ou seja, $a_1 = a'$ e T é, logo, única.



Dualizando essa mesma argumentação obteremos um resultado análogo para quadrângulos.

Provamos alguns resultados para colineações projetivas em geral. Agora vamos conhecer um caso especial de colineação projetiva.

Definição 6.10 Dizemos que uma colineação projetiva é **perspectiva** quando deixa invariante todos os pontos de uma reta o , chamada de eixo da colineação, e todas as retas através de um ponto O , chamado de centro da colineação.

Definição 6.11 Uma **homologia** é uma colineação perspectiva cujo centro não é incidente ao seu eixo.

Definição 6.12 Uma **elação** é uma colineação perspectiva cujo centro incide no seu eixo.

Como já era de se esperar temos:

Teorema 6.14 Quaisquer dois triângulos perspectivos estão relacionados por uma colineação perspectiva.

Demonstração: Sejam PQR e $P'Q'R'$ dois triângulos perspectivos, defina $D = QR \cdot Q'R'$, $E = PR \cdot P'R'$ e $F = PQ \cdot P'Q'$ (Figura 6.7).

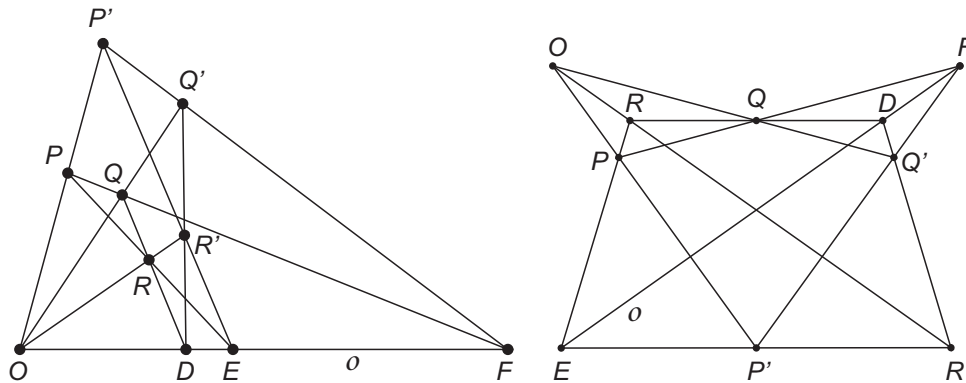


Figura 6.7: Teorema 6.14: O ponto O pode, ou não, estar sobre a reta o .

Segundo o teorema 6.13, podemos determinar uma colineação T , projetiva e única, que leva o quadrângulo $DEPQ$ no quadrângulo $DEP'Q'$. A reta $o = DE$ é invariante por T pois $T(DE) = T(D)T(E) = DE$. Como os triângulos são perspectivos, podemos afirmar que o ponto F está em o , portanto $F = o \cdot PQ$ então

$T(F) = T(o \cdot PQ) = T(o) \cdot T(PQ) = o \cdot T(P)T(Q) = o \cdot P'Q' = F$, ou seja, F é também invariante o que juntamente com o axioma 3.6 nos garante que todos os pontos sobre o são invariantes.

Seja XX' uma reta qualquer onde $T(X) = X'$. Se I é o ponto onde XX' encontra a reta o então, $T(XX') = T(XI) = T(X)T(I) = X'I = XX'$, isto é, a reta XX' é invariante para todo X e X' . Se $O = PP' \cdot QQ'$ então, $T(O) = T(PP' \cdot QQ') = T(PP') \cdot T(QQ') = PP' \cdot QQ' = O$ o que faz de O um ponto invariante. E mais, qualquer reta por O , por exemplo OY , será invariante, pois OY encontrará o em um ponto K invariante, (pois está em o) assim $T(OY) = T(OK) = OK = OY$. Concluimos até aqui, juntamente com a definição 6.10, que T é uma colinação perspectiva mas ainda resta saber, se $T(R) = R'$.

Ora, Se $D = QR \cdot Q'R'$ e $E = PR \cdot P'R'$ então $DQ = RQ$ $DQ' = R'Q'$, $EP = ER$ e $EP' = ER'$, portanto $DQ \cdot EP = RQ \cdot ER = R$ e daí temos que:

$$T(R) = T(EP \cdot DQ) = T(EP) \cdot T(DQ) = T(E)T(P) \cdot T(D)T(Q) = EP' \cdot DQ' = ER' \cdot R'Q' = R'.$$

Como $T(PQR) = P'Q'R'$, T é uma colinação perspectiva que relaciona os triângulos PQR e $P'Q'R'$. Note que se O estiver em o o teorema não perde nenhum sentido, apenas trataremos de uma homologia ao invés de uma elação (Figura 6.7).

■

Podemos determinar uma elação ou uma homologia? Que objetos são necessários para tal construção?

Teorema 6.15 *Uma homologia é determinada quando são dados seu centro, seu eixo, e um par de pontos correspondentes (colineares ao centro).*

Demonstração: Sejam O o centro, o o eixo e P e P' o par de pontos correspondentes colineares a O . Se R é um ponto qualquer, fora de o e de OP (Figura 6.8), deveremos ser capazes de encontrar o correspondente R' de R perante esta homologia H para que esta seja dita determinada. Note que a reta PR determina em o o ponto E , invariante. Ora, se H preserva as incidências e sabemos que R está na reta EP , então R' estará na reta $H(EP) = EP'$. A reta OR determina em o o ponto I , invariante, analogamente ao caso anterior, o ponto R' deve estar na reta $H(OI) = OI = OR$, já que R está em OI . Bem, se R' está em EP' e também em OR é claro que $R' = EP' \cdot OR$.

Se, por algum acaso, R estiver na reta OP (Figura 6.8), usaremos um ponto Q fora desta e acharemos Q' conforme a construção anterior para depois, já que R estará

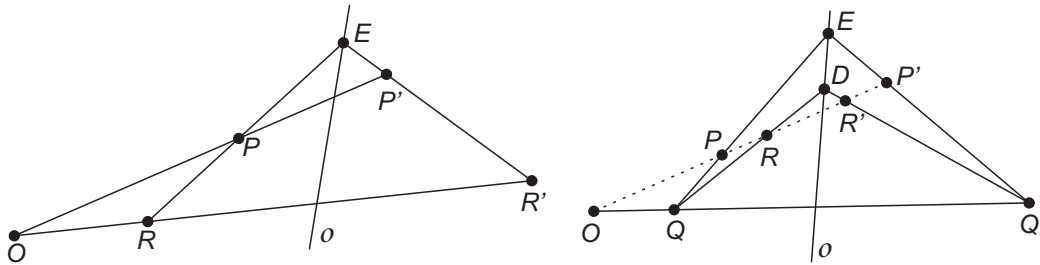


Figura 6.8: Teorema 6.14: O ponto R pode, ou não, estar sobre a reta OP .

fora de OQ , repetir a construção usando o par Q e Q' para achar R' e determinar a homologia.

■

Teorema 6.16 *Uma elação é determinada pelo seu eixo e um par de pontos correspondentes.*

Demonstração: Seja o o eixo de uma elação Te e P e P' um par correspondente da mesma. Se O está em PP' e também em o então $O = o \cdot PP'$. Analogamente a construção do teorema anterior, se R é um ponto fora de OP então $R' = OP \cdot EP'$. Se R estiver OP usaremos Q e Q' um novo par de pontos correspondentes onde Q não está em OP e Q' é determinado usando a mesma construção do R' anterior.

■

Observação: Já que uma elação é determinada por seu eixo o e um par P e P' de pontos correspondentes, podemos denotá-la, convenientemente, por $[o; P \rightarrow P']$.

A seguir um importante teorema que, com seus corolários, nos ajudarão a reconhecer aspectos sobre colineações perspectivas analisando algumas de suas características.

Teorema 6.17 *Qualquer colineação que tem somente uma fileira invariante é perspectiva.*

Demonstração: Seja T uma colineação onde somente a fileira o é invariante. Note que T é projetiva, pelo teorema 6.11 pois relaciona a fileira o , com ela mesma, projetivamente com a identidade. Se A é um ponto fora de o então $A' = T(A)$ também o será, caso contrário A' teria que ser invariante. Analogamente o ponto $B' = T(B)$,

com B fora da reta o não incide a mesma. Sejam X e Y os pontos de interseção das retas AA' e BB' com o , respectivamente. Como X e Y estão em o , então $T(AA') = T(AX) = A'X = AA'$ e $T(BB') = T(BY) = B'Y = BB'$, ou seja, AA' e BB' são invariantes e por isso o ponto $O = AA' \cdot BB'$ também deve ser (O' deve estar em $T(AA') = AA'$ e em $T(BB') = BB'$ logo $O' = O$). Seja CC' uma reta construída da mesma forma que AA' e BB' onde $CC' \cdot o = Z$. Certamente CC' cruza AA' e BB' :

Caso 1 O ponto O está na reta o : Então, $X = Y = O$. Sejam P e Q os pontos que CC' cruza AA' e BB' , respectivamente. P e Q são invariante, já que AA' , BB' e CC' também o são. Se olharmos para a reta CC' veremos, com a ajuda do axioma 3.6, que todos os pontos sobre essa reta são invariantes, pois Z , P e Q já o são. Mas, a única fileira invariante é o , então $Z = P = Q = O$, ou seja, CC' cruza o em O o que caracteriza uma relação que em particular é uma colineação perspectiva.

Caso 2 O ponto O não está sobre o : Seja P o ponto de interseção das duas retas invariantes AA' e CC' , logo AA' três pontos invariantes, a saber P , O e X , o que segundo o axioma 3.6, garante que toda a fileira AA' seja invariante. Mas como a única fileira invariante é o , o ponto O é o ponto P , ou seja, AA' e CC' (e BB') se cruzam em O . Portanto T é uma homologia que em particular é uma colineação perspectiva.

■

Corolário(1): *Se uma colineação tem uma fileira invariante então tem um feixe de retas invariante.*

Demonstração: É apenas uma reformulação do enunciado do teorema 6.17.

■

Corolário(2): *Todos os pontos invariantes de uma relação estão sobre o eixo.*

Demonstração: Se existir um ponto P invariante fora do eixo, toda reta r por P será invariante pois P e o ponto de encontro entre r e o eixo são invariantes. Como qualquer ponto pode ser escrito como interseção de uma reta por P com uma reta por O , então todos os pontos seriam invariantes.



Corolário(3): *Numa homologia, o centro é o único ponto invariante que não está no eixo.*

Demonstração: Se houvessem dois pontos invariantes O e P fora do eixo então a reta OP iria encontrar o eixo num terceiro ponto Q também invariante o que faria de OP , conforme o axioma 3.6, uma fileira invariante diferente de o . Aí, todas as retas seriam invariantes pois teriam um ponto em o e um em OP .



Podemos fazer uma associação interessante entre um conjugado harmônico de pontos e a homologia. Nesta homologia, fica mais fácil construir pares de pontos correspondentes.

Definição 6.13 *Uma **homologia harmônica** é uma homologia onde o conjugado harmônico do centro em relação à dois pontos correspondentes está no eixo desta homologia.*

Como fizemos com todas as outras colineações é sempre importante saber como podemos determinar aquilo que estamos definindo, para assim, darmos significado àquilo que estamos fazendo.

Teorema 6.18 *Uma homologia harmônica é determinada quando são dados o seu centro e o seu eixo.*

Demonstração: Sabemos que três pontos determinam um quarto ponto através de um conjunto harmônico. Logo seja P uma ponto qualquer, para determinar P' basta fazermos o conjugado harmônico de P em relação à O e a $I = OP \cdot o$.



Para discutirmos mais uma propriedade das homologias harmônicas, precisaremos falar em período de uma transformação. Tocamos no assunto quando falamos de involução, entretanto não foi definido o que de fato é o período de uma transformação.

Definição 6.14 *Uma transformação T ponto à ponto onde $T(X) = X'$, $T(X') = X''$, $T(X'') = X'''$, ..., $T(X^{n-1}) = X^n$ e $T(X^n) = X$ é dita **periódica** e seu período é dado pelo menor n que satisfaça estas condições.*

Teorema 6.19 *Toda homologia harmônica é uma colineação de período 2 e vice-versa.*

Demonstração: (\Rightarrow)

Toda homologia harmônica é uma colineação de período 2 já que $H(PP', O(o \cdot OP)) \Rightarrow H(O(o \cdot OP), PP')$.

(\Leftarrow)

Seja T uma colineação projetiva de período dois, ou seja, se P e P' e também Q e Q' são pares de pontos correspondentes não colineares, então $T(P) = P'$, $T(P') = P$, $T(Q) = Q'$ e $T(Q') = Q$ (Figura 6.9). Pelo teorema 6.13, T é a única colineação que leva o quadrângulo $PP'QQ'$ no quadrângulo $P'PQ'Q$. As retas PP' e QQ' são invariantes pois $T(PP') = P'P$ e $T(QQ') = Q'Q$. Se $O = PP' \cdot QQ'$ então O também é invariante. Como $T(PQ) = P'Q'$ e $T(PQ') = P'Q$ temos:

$$M = PQ \cdot P'Q' \Rightarrow T(M) = T(PQ \cdot P'Q') = P'Q' \cdot PQ = M$$

e

$$N = PQ' \cdot P'Q \Rightarrow T(N) = T(PQ' \cdot P'Q) = P'Q \cdot PQ' = N$$

ou seja, M e N são invariantes, assim como o ponto $L = MN \cdot PP'$ (L é a interseção de duas retas invariantes). Se L , M e N são invariantes então, pelo axioma 3.6, todos os pontos de MN não invariantes. Logo, pelo teorema 6.17, T é perspectiva. $M = PQ \cdot P'Q'$ e $N = PQ' \cdot P'Q$ são dois pontos diagonais do quadrângulo $PP'QQ'$ logo o terceiro deles, a saber $O = PP' \cdot QQ'$, não pode estar na mesma reta dos dois primeiros, conforme o axioma 3.4 garantindo assim que T seja uma homologia. E, finalmente, se olharmos para o quadrângulo $MQQ'N$ veremos que como L está em MN , O está em QQ' , $MQ \cdot Q'N = MP \cdot NP = P$ e $QN \cdot MQ' = P'N \cdot P'M = P'$, temos $H(PP', OL)$, logo T é também harmônica pela definição 6.13. ■

6.2.2 Correlações projetivas

Definição 6.15 *Uma **correlação** é uma transformação ponto-reta e reta-ponto que respeita as relações de incidência de acordo com o princípio de dualidade.*

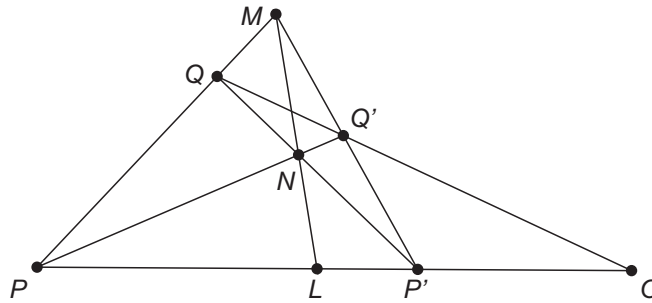


Figura 6.9: Teorema 6.19

Observação: Como definimos a correlação por uma transformação denotaremos por $T(A) = b$ quando a correlação T levar o ponto A na reta b . Nesse caso, dizer que uma correlação T preserva as relações de incidências de acordo com o princípio de dualidade significa dizer que se $T(A) = b$, $T(c) = D$ e A está em c , então D está em b . Logo, uma correlação transforma fileiras de pontos em feixes de retas, feixes de retas em fileiras de pontos, quadrângulos em quadriláteros. O dual de uma correlação é também uma correlação, mas não o produto de duas delas, este é uma colineação.

Trabalhando com correlações o princípio da dualidade vai se mostrar muito importante. Como preservamos as incidências, esta transformação dualiza as figuras que transforma. Mas, analogamente às colineações, não estamos interessados em todos os tipos de correlação.

Definição 6.16 *Uma correlação projetiva é uma correlação que transforma pontos em retas e retas em pontos através de uma projetividade.*

Abusaremos um pouco do princípio da dualidade para enunciar teoremas cujas demonstrações, o que poupa trabalho, já foram quase feitas, basta apenas dualizarmos parte delas.

Teorema 6.20 *Qualquer correlação que transforma uma fileira de pontos projetivamente é uma correlação projetiva.*

Demonstração: A demonstração é análoga ao do teorema 6.11 usando a dualidade entre colineações e correlações para trocar pontos e retas da demonstração quando necessário. ■

Teorema 6.21 *Dados um quadrilátero completos(ou quadrângulo completo) e um quadrângulo completo(ou quadrilátero completo), com seus quatro lados e vértices (ou*

vértices e lados) em uma certa ordem de correspondência, só existe uma correlação projetiva que transforma o primeiro no segundo.

Demonstração: Análoga ao do teorema 6.13 trocando o quadrângulo $PQRS$ pelo quadrilátero $pqrs$ e fazendo as adaptações necessárias.

■

Estudaremos, na próxima seção, um tipo especial de correlação projetiva que muito vai nos interessar para o estudo das cônicas. As proposições anteriores são apenas para contextualizar as correlações.

6.3 Polaridades

Definição 6.17 Uma **polaridade** Tp é uma correlação projetiva de período 2, ou seja, se $Tp(r) = R$ então $Tp(R) = r$. Chamaremos r de polar do ponto R e esse de pólo da reta r .

Observação: A polaridade é uma correlação projetiva, logo preserva as incidências. Dado, por exemplo, uma reta a , o conjunto de polares dos pontos sobre a formarão um feixe de retas pelo ponto $A = T(a)$. Veja ainda que Tp é projetiva, portanto, a relação entre os pontos sobre a e as retas por A é uma projetividade.

Definição 6.18 Sejam A e B pontos quaisquer e Tp uma polaridade onde $Tp(A) = a$ e $Tp(B) = b$. Então os pontos A e B são ditos **pontos conjugados** se A estiver em b e B estiver em a . Dizemos também, neste caso, que a e b são **retas conjugadas**.

Definição 6.19 Dizemos que um ponto A é **auto-conjugado** se A for incidente à seu polar.

Já dá para perceber, intuitivamente, que os pontos auto-conjugados são pontos especiais. De fato,

Teorema 6.22 A união de dois pontos auto-conjugados não pode ser uma reta auto-conjugada.

Demonstração: Sejam A e B dois pontos auto-conjugados na polaridade Tp onde $Tp(A) = a$ e $Tp(B) = b$ (Note que $a \neq b$, caso contrário uma reta teria dois pólos distintos). Se r é a reta AB então o pólo R de r deverá estar em $Tp(A) = a$ e

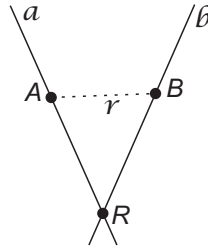


Figura 6.10: Teorema 6.22

$Tp(B) = b$, logo $R = a \cdot b$, ou seja R não está em r , por isso r não é auto-conjugada (Figura 6.10). ■

Teorema 6.23 *Uma reta não pode ser incidente à mais de dois pontos auto-conjugados.*

Demonstração: Sejam A e B dois pontos auto-conjugados, sobre uma reta r , de acordo com uma polaridade T_p onde $T_p(A) = a$, $T_p(B) = b$ e $T_p(r) = R$. É claro que $R = a \cdot b$ pois $r = AB$ e T_p preserva as incidências. Seja C um outro ponto auto-conjugado também em r , com $T(C) = c$. Ou a reta c cruza a em R , ou não. Se não cruzar então o ponto $K = a \cdot c$ terá como polar a reta $AC = r$, o que não é possível pois r já é polar de R . Se, por outro lado, a reta c cruzar a em R teremos $AR \cdot BC = AR \cdot AB = A$, $AC \cdot BR = AB \cdot BR = B$ e $AB \cdot CR = AC \cdot CR = C$, ou seja, A , B e C são os três pontos diagonais do quadrângulo $ABCR$. Ora, A , B e C são colineares e isso contradiz o axioma 3.4, logo C não pode ser auto-conjugado. Analogamente para qualquer ponto diferente de A e B , garantindo que não é possível ter, em uma mesma reta, mais de dois pontos auto-conjugados. ■

Os pontos conjugados são de extrema importância no momento de falar das cônicas. Veremos mais adiante que uma cônica pode ser definida como o lugar geométrico de um ponto auto-conjugado em determinadas condições. Mas isso são coisas do próximo capítulo.

Por agora vamos continuar estudando os resultados das polaridades. Vocês ainda lembram o que é uma involução? (Definição 6.2)

Teorema 6.24 *Uma polaridade determina uma involução em qualquer reta que não é auto-conjugada. (dizemos que nessa reta a polaridade induz uma involução.)*

Demonstração: Seja c uma reta e A um ponto que não são auto-conjugados na polaridade T_p onde $T_p(A) = a$ e $T_p(c) = C$. Se $B = a \cdot c$ então $b = T_p(B) = AC$ pois as incidências são preservadas por T_p . Da mesma forma $T(c) = T(AB) = a \cdot b = C$, ou seja $a \cdot b = C$. Agora vamos contruir uma involução na reta c . Dado X em c temos que $x = T_p(X)$ passa por C . Se $Y = c \cdot x$ então $y = T_p(Y) = T_p(c \cdot x) = CX$. Note que se X for auto-polar teremos $X = Y$ (lembre que o teorema 6.23 afirma que não existe mais de dois pontos auto-conjugados em c). De acordo com a definição 6.17, como T_p é polaridade, $X \bar{\wedge} x$ e como $Y = c \cdot x$ temos que $x \bar{\wedge} Y$ assim $X \bar{\wedge} Y$ e analogamente $Y \bar{\wedge} X$ pois $Y \bar{\wedge} y$ e $X = y \cdot c$. Então pelo teorema 6.6 $(AB)(XY)$ é uma involução assim como $(ab)(xy)$ no feixe C .

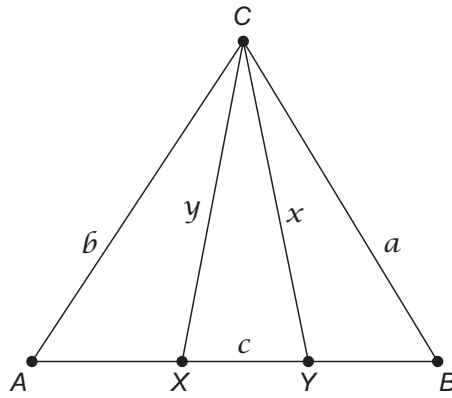


Figura 6.11: Teorema 6.24

■

Chegou a hora de começarmos a nos preocupar com a determinação de uma polaridade. Como será que se determina uma delas e como será que se constrói uma? Será que dado um ponto, somos capazes de construir a reta polar deste? Falta muito pouco para responder essas perguntas, pois ainda falta definir e apresentar algumas ferramentas para que consigamos dominar de vez as polaridades.

Definição 6.20 *Um triângulo é dito **auto-polar** quando cada vértice é pólo de seu lado oposto(ou cada lado é polar de seu vértice oposto).*

Observação: Claro que, segundo a definição, dois vértices de um triângulo auto-polar vão ser sempre pontos conjugados.

Teorema 6.25 *Qualquer correlação projetiva que relaciona cada vértice de um triângulo com seu lado oposto é uma polaridade.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo de lados a , b e c onde $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$ e P um ponto fora de a , b e c . Seja Tc uma correlação projetiva dada por $ABCP \rightarrow abcp$ (teorema 6.21) em que p não passa por A , B ou C . Sejam $P_a = a \cdot AP$, $P_b = b \cdot BP$, $P_c = c \cdot CP$, $A_p = p \cdot a$, $B_p = p \cdot b$ e $C_p = p \cdot c$ (Figura 6.12).

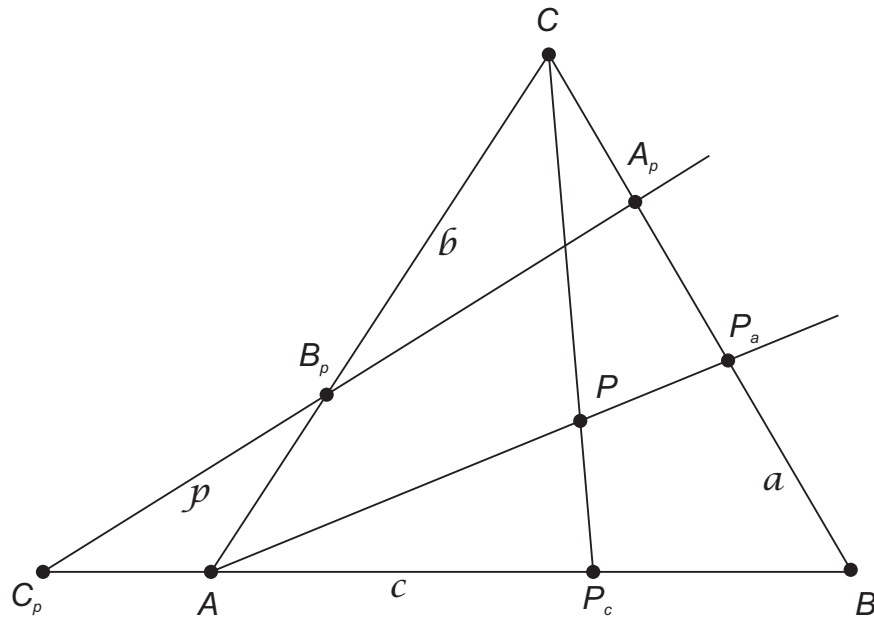


Figura 6.12: Teorema 6.25

Note que:

$$Tc(a) = Tc(BC) = b \cdot c = AC \cdot AB = A$$

e assim também para $Tc(b) = B$ e $Tc(c) = C$;

E ainda que:

$$Tc(AP) = a \cdot p = A_p$$

e assim $Tc(BP) = B_p$ e $Tc(CP) = C_p$ e por último,

$$Tc(P_a) = Tc(a \cdot AP) = A(a \cdot p) = AA_p$$

e assim $Tc(P_b) = BB_p$ e $Tc(P_c) = CC_p$.

Como P é um ponto qualquer, queremos saber, qual é o efeito de Tc sobre p . Pois se $Tc(p) = P$ (já sabemos que $Tc(P) = p$ por construção) aí mostraremos que Tc tem período 2, o que basta para podermos chamar Tc de polaridade (definição 6.17).

Seja X um ponto na reta c , então temos, para todo ponto Y que $Tc(X) \cdot c = Y \Rightarrow X \bar{\wedge} Y$, pois Tc é projetiva logo $X \bar{\wedge} Tc(X)$ (e claro: $Tc(X) \bar{\wedge} Y$ já que $Tc(X) \cdot c = Y$). Se $X = A$ então $Tc(A) \cdot c = a \cdot c = B$ e se $X = B$ temos $Tc(B) \cdot c = b \cdot c = A$, portanto a

projetividade $X \bar{\wedge} Y$ troca A por B caracterizando, de acordo com o teorema 6.5, uma involução. Se fizermos $X = P_c$ teremos $Y = Tc(Pc) \cdot c = CC_p \cdot c = C_p$ (pois $C_p = c \cdot p$, ou seja, C_p está em c). Da involução temos que $C_p \bar{\wedge} P_c$ ou ainda $Tc(C_p) \cdot c = P_c$, ou seja, P_c está na reta $Tc(C_p)$, mas o ponto C deve passar também por $Tc(C_p)$, já que C_p está em c , então $Tc(C_p) = CP_c = CP$ ($P_c = c \cdot CP$). Analogamente para $Tc(A_p) = AP$ e $Tc(B_p) = BP$. Sabendo que A_p e C_p estão em p ($A_p = p \cdot a$ e $C_p = p \cdot c$) podemos dizer que $p = A_p B_p$ e finalmente:

$$Tc(p) = Tc(A_p C_p) = AP \cdot BP = P.$$

■

Observação: Uma polaridade é determinada por um triângulo auto-polar ABC e um par P e p de ponto e reta correspondentes, onde P não está em nenhum dos lados do triângulo. Assim é conveniente usarmos a notação $(ABC)(Pp)$ para determinar essa polaridade. Lembre-se que o teorema 6.21 nos ensina a determinar a correlação $ABCP \rightarrow abcp$.

Agora, voltaremos àquela involução que mostramos ser induzida por uma polaridade. Com a polaridade determinada podemos especificar exatamente a involução da qual falamos.

Teorema 6.26 *Na polaridade $(ABC)(Pp)$, onde P não está em p , a involução de pontos conjugados em P é a involução determinada em p pelo quadrângulo $ABCP$.*

Demonstração: O teorema 6.24 nos diz que como P não está em p (ou p não é uma reta auto-conjugada), existe uma involução em p de pontos conjugados. Usando a mesma construção do teorema anterior:

$$Tc(A_p) = AP \quad , \quad Tc(B_p) = BP \quad , \quad T(C_p) = CP$$

então, o quadrângulo $ABCP$ determina a involução da seguinte maneira: Veja que $AB \cdot p = c \cdot p = C_p$ e $CP \cdot p = K$. Como K está em CP então $Tc(K)$ passa por $Tc(CP) = C_p$ logo C_p e K são conjugados e portanto pares da involução. Isto é: As interseções de lados opostos de $ABCP$ com p são pares da involução.

■

Estamos a um passo, ou melhor, a um teorema de podermos construir a reta polar de um ponto dado numa polaridade dada. O senhor *M. Chasles* é quem vai nos ceder esta última ferramenta. O ponto de partida é perceber que se um triângulo não é auto-polar então os pólos de seus lados formarão um outro triângulo. Podemos dizer que o segundo triângulo é um triângulo polar do primeiro.

Teorema 6.27 (Teorema de Chasles) *Se as retas polares dos vértices de um triângulo não coincidem com seus lados opostos, então eles encontram estes lados em três pontos colineares (um triângulo não auto-polar e seu polar são perspectivos).*

Demonstração: Seja PQR um triângulo e T_p uma polaridade tal que $T_p(P) = p \neq QR$, $T_p(Q) = q \neq PR$ e $T_p(R) = r \neq PQ$. Sejam $P_1 = p \cdot QR$, $Q_1 = q \cdot PR$ e $R_1 = r \cdot PQ$. É fácil notar que P_1 , Q_1 e R_1 são as interseções dos lados do triângulo PQR e de seu polar pqr , portanto, devemos provar que P_1 , Q_1 e R_1 são colineares. (Figura 6.13)

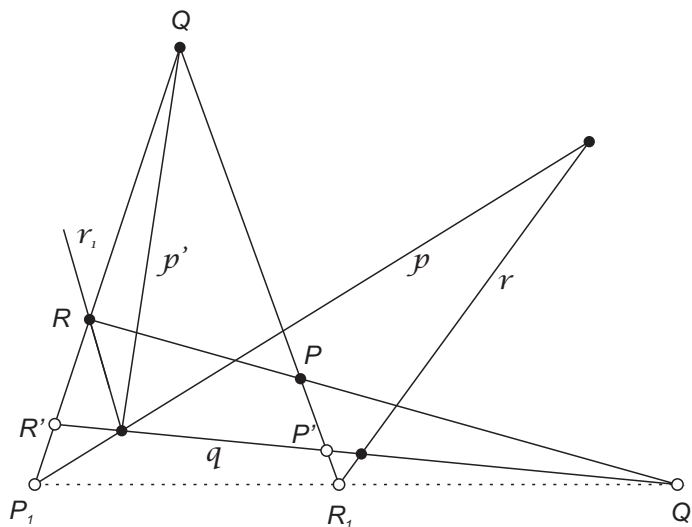


Figura 6.13: Teorema 6.27

Veja que $T_p(R_1) = T_p(PQ \cdot r) = (p \cdot q)R = r_1$. Sejam $P' = PQ \cdot q$, $R' = QR \cdot q$, então $T(P') = T(PQ \cdot q) = (p \cdot q)Q = p'$. Daí tiramos que P , Q , R_1 e P' estão na reta PQ , logo, pelo teorema 2.1 temos $R_1PP'Q \bar{\wedge} PR_1QP'$ e por T_p temos $PR_1QP' \bar{\wedge} pr_1qp'$ Mas:

$$p \cdot QR = P_1; \text{ Por construção.}$$

$$r_1 \cdot QR = R; \text{ Pois } r_1 = (p \cdot q)R.$$

$q \cdot QR = R'$; Por construção.

$p' \cdot QR = Q$; Pois $p' = (p \cdot q)Q$.

ou seja, $pr_1qp' \bar{\wedge} P_1RR'Q$ e assim:

$$R_1PP'Q \bar{\wedge} PR_1QP' \bar{\wedge} pr_1qp' \bar{\wedge} P_1RR'Q$$

ou ainda $R_1PP'Q \bar{\wedge} P_1RR'Q$.

Já que $P' = PQ \cdot q$ e $R' = QR \cdot q$ temos, respectivamente, $PP' = PQ$ e $RR' = QR$. Daí $RR' \cdot PP' = PQ \cdot QR = Q$. Como Q , o ponto invariante dessa última projetividade é o ponto de interseção das fileiras da mesma, então, pelo teorema 5.2, $R_1PP' \bar{\wedge} P_1RR'$ é uma perspectividade. Q_1 é o centro da perspectividade $R_1PP' \stackrel{Q'}{\bar{\wedge}} P_1RR'$, já que $P' = PQ \cdot q$ e $R' = QR \cdot q$ implicam em $q = P'R'$ e também $PR \cdot P'R' = PR \cdot q = Q_1$. Logo os pontos R_1 , Q_1 e P_1 são colineares (R_1 e Q_1 são correspondentes na perspectividade).

Note que se P_1 estiver em q , então $P_1 = p \cdot QR = q \cdot QR = R'$ e $R_1 = P'$, como R' e P' estão em q então $R_1 = P'$, Q_1 e $P_1 = R'$ são colineares.

E se Q estiver em q basta chamarmos PQR de pqr e vice-versa. ■

6.3.1 A reta polar de um ponto

Teorema 6.28 *A reta polar de um ponto X (não incidente a AP , BP ou p) na polaridade $T = (ABC)(Pp)$ é a reta X_1X_2 onde:*

$$A_1 = a \cdot PX, P_1 = p \cdot AX, X_1 = AP \cdot A_1P_1,$$

$$B_1 = b \cdot PX, P_2 = p \cdot BX, X_2 = BP \cdot B_2P_2.$$

Demonstração: Sejam A , B e C tais que $T(a) = A$, $T(b) = B$ e $T(c) = C$ com $T = (ABC)(Pp)$. Seja X um ponto qualquer, fora de AP , BP e p , queremos determinar, $x = T(X)$, a reta polar desse ponto (Figura 6.14). De acordo com o teorema 6.27 o triângulo PAX (que não é auto-polar, pois $PX \neq a$) tem seus lados AP , AX e XP encontrando os polares de seus vértices opostos p , a e x em três pontos colineares, logo $P_1 = AX \cdot p$, $A_1 = PX \cdot a$ e mais um ponto $AP \cdot x$ são colineares. Ou seja, tem um ponto de x na reta A_1P_1 , a saber $X_1 = A_1P_1 \cdot AP$.

Analogamente, usando agora o triângulo PBX determinamos mais três pontos, $B_1 = b \cdot PX$, $P_2 = p \cdot BX$ e $X_2 = BP \cdot B_2P_2$. Aí como X_1 e X_2 estão em x , $x = X_1X_2$.

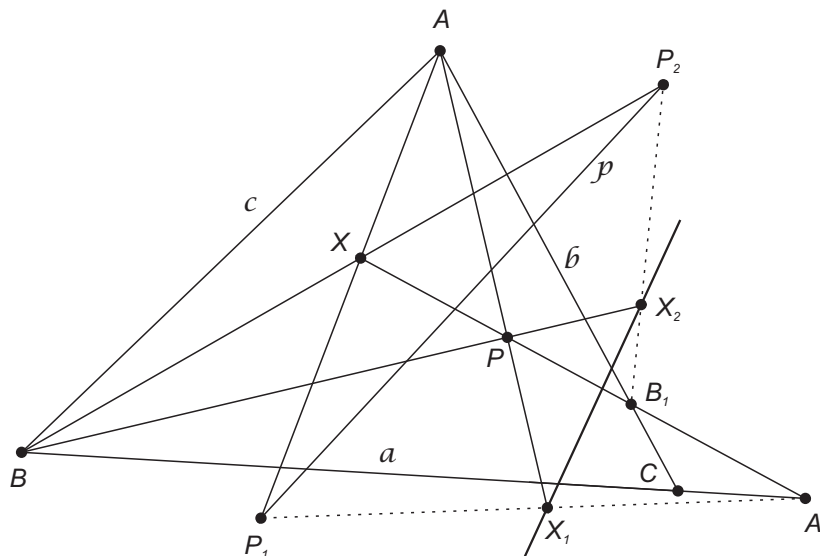


Figura 6.14: Teorema 6.28

Observação: Se, por acaso, X estiver em AP , x passará por $a \cdot p = A_p$. Portanto $x = A_p \cdot X_2$ (se o ponto X estiver em AP ele não estará em BP).

O mesmo para quando X estiver em BP , aí $x = B_p \cdot X_1$ onde $B_p = b \cdot p$.

Se X estiver em p , então x passa por P . O outro ponto de x pode ser determinado utilizando o dual do teorema 6.28 para achar um ponto Y , pólo da reta y que passa por X (que não seja p ou PX), aí $x = PY$, já que y passa por X .

■

Desenhe num papel (ou em algum software geométrico) um triângulo ABC uma reta p que não passa por nenhum vértice e um ponto P fora da reta p e dos lados do triângulo ABC . Usando esse teorema, podemos construir a reta polar de qualquer ponto que desenharmos no papel. Essa idéia é importante e fundamenta a construção das cônicas. É claro que o dual deste teorema nos permite construir o pólo de uma reta r dada.

6.3.2 O pentágono auto-polar e o quadrilátero auto-conjugado

Podemos pensar num pentágono auto-polar tal como um triângulo auto-polar. Ou seja, os pólos dos vértices de um pentágono auto-polar devem ser seus respectivos lados opostos. Dessa maneira, uma polaridade pode ser determinada usando esses pentágonos ao invés dos triângulos auto-polares que utilizamos.

Teorema 6.29 *Uma correlação projetiva que leva quatro vértices de um pentágono*

em seus respectivos lados opostos é uma polaridade e transforma o quinto vértice em seu respectivo lado oposto.

Demonstração: Seja $PQRST$ um pentágono onde a correlação projetiva Tc é tal que:

$$Tc(Q) = q = ST,$$

$$Tc(R) = r = TP,$$

$$Tc(S) = s = PQ,$$

$$Tc(T) = t = QR,$$

$$p = RS \text{ e}$$

$$A = q \cdot t \text{ (Figura 6.15).}$$

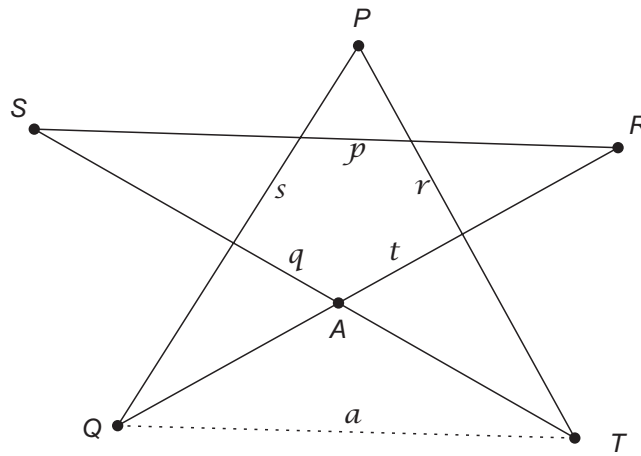


Figura 6.15: Teorema 6.29

Então:

$$Tc(t) = Tc(QR) = q \cdot r = ST \cdot TP = T,$$

$$Tc(p) = Tc(RS) = r \cdot s = TP \cdot PQ = P,$$

$$Tc(q) = Tc(ST) = s \cdot t = PQ \cdot QR = Q \text{ e}$$

$$Tc(A) = Tc(q \cdot t) = QT = a.$$

Logo Tc é a polaridade $(AQT)(Pp)$ pelo teorema 6.25. Aí $Tc(P) = Tc(TP \cdot PQ) = T(r \cdot s) = RS = p$.

■

O quadrilátero auto-conjugado é uma simples consequência do teorema de *Chasles*.

Teorema 6.30 (Teorema de Hesse) *Se dois pares de vértices opostos de um quadrilátero são também pares de pontos conjugados em uma polaridade, então o*

terceiro par de vértices é também um par de pontos conjugados da mesma polaridade.

Demonstração: Seja $PQR P_1 Q_1 R_1$ um quadrilátero onde $T(P) = p$, $T(Q) = q$, $T(R) = r$, $T(P_1) = p_1$, $T(Q_1) = q_1$ e $T(R_1) = r_1$ numa polaridade T , onde P está em p_1 e P_1 está em p assim como Q está em q_1 e Q_1 está em q .

Pelo teorema 6.27, r deve passar por um ponto $R_1 = PQ \cdot P_1 Q_1$. Logo r_1 passa por R_1 e os pontos R e R_1 são conjugados. ■

6.3.3 O produto de duas polaridades

Na subseção 6.2.2 vimos que o produto de dois correlações é uma colineação. Sabemos também que uma polaridade é, em particular, uma correlação. Logo o produto de duas polaridades é uma colineação. Podemos provar um resultado bem geral a respeito disso.

Teorema 6.31 *Qualquer colineação projetiva pode ser escrita como o produto de duas polaridades.*

Demonstração: Vamos dividir nossa demonstração em três casos:

Afirmção 1: Uma homologia pode ser escrita como o produto de duas polaridades.

Seja Th uma homologia de centro O e eixo o com o par P e P' de pontos correspondentes. Como Th já está determinada (teorema 6.15), temos $Th(Q) = Q'$, $Th(R) = R'$ para Q e R quaisquer. Sejam $F = PQ \cdot P' Q'$ e $D = QR \cdot Q' R'$. Claro, pelo corolário 3 teorema 6.17, que $FD = o$. Seja p é uma reta qualquer que não passa por O , D e F (escolhido para triângulo auto-polar).

Veja que $Th(O) = O$, $Th(D) = D$, $Th(F) = F$ e $Th(P) = P'$, assim Th leva $ODFP$ em $ODFP'$. Seja $Tp_1 = (ODF)(Pp)$ uma polaridade, então $Tp_1(O) = o$, $Tp_1(D) = OF = d$, $Tp_1(F) = OD = f$ e $Tp_1(P) = p$. Portanto Tp_1 leva $ODFP$ em $odfp$.

Já em $Tp_2 = (ODF)(Pp')$, uma segunda polaridade, temos: $Tp_2(o) = O$, $Tp_2(d) = Tp_2(OF) = o \cdot f = DF \cdot OD = D$, $Tp_2(f) = Tp_2(OD) = o \cdot d = DF \cdot OF = F$ e $Tp_2(p) = P'$ o que faz Tp_2 levar $odfp$ em $ODFP'$.

Dessa maneira $Tp_1 \cdot Tp_2$ leva, assim como Th , $ODFP$ em $ODFP'$, então, pelos

teoremas 6.13 e 6.21 Tp_1 , Tp_2 e Th são únicas, o que nos permite escrever $Th = Tp_1 \cdot Tp_2$.

Afirmção 2: Toda colineação perspectiva pode ser escrita como o produto de duas polaridades.

Como esse caso, passamos a considerar também as elações, além das homologias. Seja Tc uma colineação perspectiva de centro O e de eixo o onde A e A' é um par de pontos correspondentes de Tc (Tc , com esses dados, já é determinada pelos teoremas 6.15 e 6.16). Chamremos $OA = OA'$ de c e tomaremos C e P em o aleatoriamente, assim $o = CP$ (Não sabemos se O está em o). Seja $b = CA$ e $b' = CA'$. Agora por O construímos a reta p que em b e b' determina os pontos Q e Q' respectivamente (Veja que $Tc(Q) = Q'$, pois $AQ \cdot A'Q' = C$ que está em o e também QQ' passa por O). Tome, agora em c , um ponto B arbitrário (Figura 6.16). Em Tc temos $Tc(A) = A'$, $Tc(P) = P$, $Tc(O) = O$ e $Tc(Q) = Q'$, logo Tc leva $APOQ$ em $A'POQ'$.

Seja $Tp_1 = (ABC)(Pp)$ uma polaridade, então: $Tp_1(A) = BC = a'$,

$$Tp_1(P) = p,$$

$$Tp_1(O) = Tp_1(c \cdot p) = CP = o \text{ e}$$

$$Tp_1(Q) = Tp_1(b \cdot p) = BP = q'.$$

Portanto Tp_1 leva $APOQ$ em $a'poq'$.

Seja $Tp_2 = (A'BC)(Pp)$ uma polaridade, então: $Tp_2(a') = Tp_2(BC) = A'$,

$$Tp_2(p) = P,$$

$$Tp_2(o) = Tp_2(CP) = c \cdot p = O \text{ e}$$

$$Tp_2(q') = Tp_1(BP) = b' \cdot p = Q'.$$

Portanto Tp_2 leva $a'poq'$ em $A'POQ'$.

Logo, assim como Tc , o produto $Tp_1 \cdot Tp_2$ leva $APOQ$ em $A'POQ'$. Então, pelo teorema 6.21 temos $Tc = Tp_1 \cdot Tp_2$.

Afirmção 3: Qualquer colineação projetiva não perspectiva pode ser escrita como o produto de duas polaridades.

Seja T uma colineação projetiva que não é perspectiva. A e l são não invariantes em T de modo que l passa por A e ainda $T(A) = A'$, $T(A') = A''$, $T(l) = l'$, $T(l') = l''$ e $T(l'') = l'''$.

Como T não é perspectiva, então a reta $A'A$, assim como o ponto $l \cdot l'$, não é invariante. Se A' estivesse em l então $T(l) = T(AA') = A'A = l$, mas l é não invariante, logo A' não está em l e nem em l'' e l''' pelo mesmo motivo. A'' , analogamente, não está em l . E, claro, A não está nem em l' ou l'' (Figura 6.17). Se $B = l'' \cdot l$ e $C = l''' \cdot l'$, então, como $T(A) = A'$ e $T(A') = A''$, temos $T(B) = T(l'' \cdot l) = l''' \cdot l' = B'$ e $T(C) = T(l''' \cdot l') = l'''' \cdot l'' = C'$. Portanto T

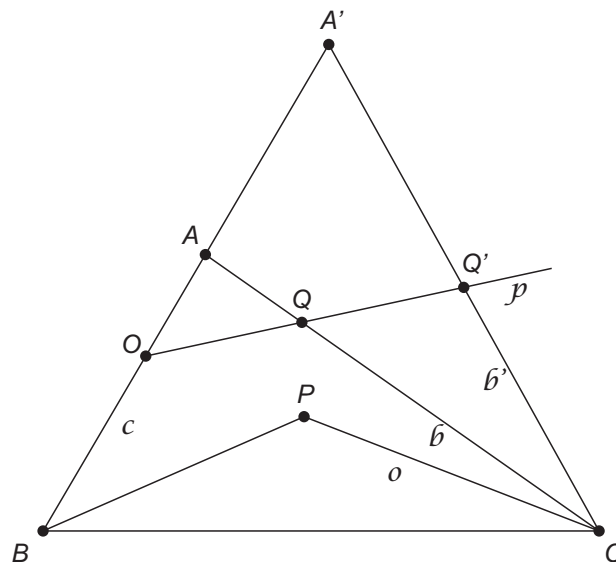


Figura 6.16: Teorema 6.31: Afirmação 2(Não se sabe se é homologia ou elação).

leva $AA'BC$ em $A'A''B'C'$.

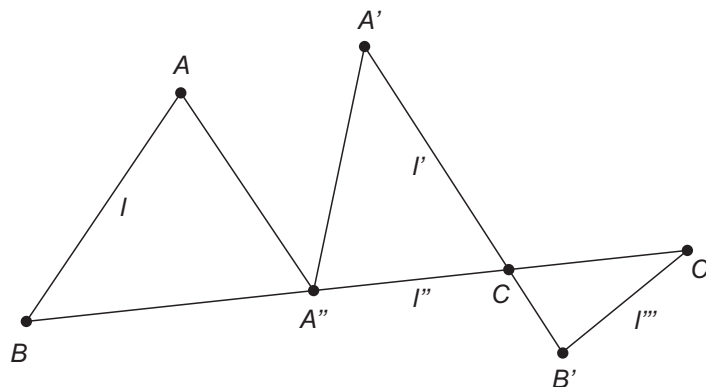


Figura 6.17: Teorema 6.31: Afirmação 3.

Seja $T_{p1} = (AA''B)(A'l')$ uma polaridade, então:

$T_{p1}(A) = A''B = l''$; Pois $B = l'' \cdot l'$ assim como A'' está em l'' , já que A está em l ;

$T_{p1}(A') = l'$;

$T_{p1}(B) = AA''$;

$T_{p1}(C) = T_{p1}(l'' \cdot l') = AA'$.

Portanto a polaridade T_{p1} leva $AA'BC$ em $l''l'(AA'')(AA')$.

Seja agora $T_{p2} = (A'A''C)(Al''')$ outra polaridade, logo:

$T_{p2}(l'') = T_{p2}(A''C) = A'$; Pois A'' está em l'' e $Cl'' \cdot l'$

$T_{p2}(l') = T_{p2}(A'C) = A''$; Pois A' está em l' e $C = l'' \cdot l'$

$$Tp_2(AA'') = l''' \cdot (A'C) = l''' \cdot l' = B'$$

$$Tp_2(AA') = l''' \cdot (A''C) = l''' \cdot l'' = C'$$

Portanto Tp_2 leva $l''l'(AA'')(AA')$ em $A'A''B'C'$. O produto $Tp_1 \cdot Tp_2$, assim como T , leva $AA'BC$ em $A'A''B'C'$, logo, pelo teorema 6.21, $Tc = Tp_1 \cdot Tp_2$.

Como toda colineação projetiva só pode ser, ou não, perspectiva, mostramos, através das afirmações 2 e 3, que toda colineação pode ser escrita como o produto entre duas polaridades.



Capítulo 7

Cônicas

Após construir com todo cuidado nossas ferramentas da geometria projetiva, estamos prontos para conhecer essa abordagem original que veremos sobre as cônicas. A própria definição de cônica da geometria projetiva, dada por *von Staudt* em *Geometrie der Lage*(1847) já causa um certo impacto.

O estudo das cônicas começou por volta do ano 430 antes de Cristo com o famoso problema da duplicação do cubo. O povo de Athenas, na Grécia, deveria duplicar o altar cúbico de Apolo para escapar da praga pela qual passavam. Ao duplicar a aresta do cubo (e assim aumentar 2^3 o volume do altar) eles fizeram da praga uma verdadeira catástrofe. Uma primeira solução geométrica foi por volta do ano 400 antes de Cristo. Esta solução usava uma curva na construção. Uma solução bem mais simples foi encontrada por *Menaechmus* no ano 340 antes de Cristo com o uso das cônicas. A partir daí as cônicas começaram a ser estudadas à sério.

Apolônio de Perga foi quem deu os nomes parábola, elipse e hipérbole que usamos até hoje. Entretanto nossa definição de cônica não faz diferença entre parábola, elipse ou hipérbole. Mas antes, precisamos falar de uma polaridade especial.

Definição 7.1 *Uma polaridade é dita **hiperbólica** quando admite pontos auto-conjugados. Caso contrário ela é elíptica.*

Observação: Toda polaridade hiperbólica admite uma reta auto-conjugada, a reta polar do ponto auto-conjugado.

A partir do próximo teorema, que fala ainda da polaridade hiperbólica, é que iremos definir cônica.

Teorema 7.1 *Toda reta passando por um ponto P auto conjugado na polaridade $T = (ABC)(Pp)$ admite outro ponto auto-conjugado.*

Demonstração: O teorema 6.22 garante que a união de dois pontos auto-conjugados não é uma reta auto-conjugada. Logo, em uma reta auto-conjugada o único ponto auto-conjugado é o seu pólo. Dualmente, por um ponto auto-conjugado passa apenas uma reta auto-conjugada, a reta polar deste.

Assim, todas as retas que passam por P , diferente de p , não são auto-conjugadas, assim como todos os pontos sobre p com exceção de P .

Chamaremos l uma reta qualquer por P , diferente de p . Já que l , como vimos, não é auto-conjugada, existe uma involução $X \bar{\wedge} Y$, garantida pelo teorema 6.24, onde X e Y são pontos conjugados. Nessa involução o ponto P é invariante, pois é o seu próprio conjugado. Logo, pelo teorema 6.10 existe outro ponto K , invariante nesta involução, que é o conjugado harmônico de P em relação a dois pontos correspondentes nesta. Se a involução relaciona pontos conjugados e K em l é ponto invariante desta, então K é auto-conjugado assim como P .

■

7.1 Definição de cônica

Definição 7.2 *Seja uma polaridade hiperbólica onde P é auto-conjugado. Chamaremos de **cônica** o lugar geométrico dos pontos X tais que, $X \neq P$ é auto-conjugado sobre uma reta por P (diferente de p). Chamaremos de tangente as retas polares de todos os pontos X .*

Observação: A partir de agora, todas as polaridades que estudaremos serão hiperbólicas, ou seja, toda polaridade determina uma cônica. Podemos falar, então, em polar em relação a uma cônica, ou ponto conjugado em relação a uma cônica. Essa definição de cônica pode ser dualizada, de modo que podemos também chamar de cônica a envoltória de retas auto-conjugadas por pontos sobre p (pontos estes diferentes de P). A figura 7.1 mostra a mesma cônica determinada pela definição 7.2 e depois pela definição dual a esta.

Você deve estar pensando se esta definição atende as “três cônicas” que você conhece, afinal, estamos usando o mesmo nome. Não faremos aqui essa prova, ou seja, as curvas geradas pela nossa definição de cônica são, de fato, muito parecidas com hipérbolas, elipses ou parábolas, mas nada podemos garantir de que de fato são as mesmas. Na realidade, podemos até classificar as cônicas usando os nomes elipse, parábola e hipérbole de acordo com o número de pontos que a cônica possui

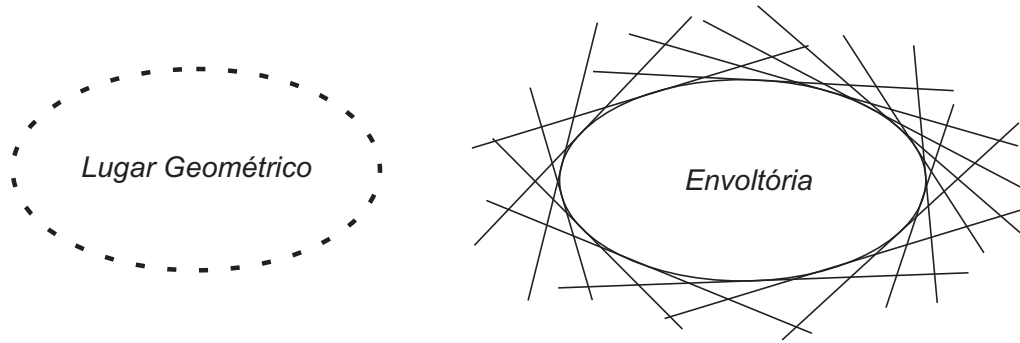


Figura 7.1: Cônicas.

na reta no infinito, porém, como pontos no infinito não têm qualquer diferenciação dos outros, essa classificação não se faz necessária.

Agora, mais algumas definições e consequências das cônicas.

Definição 7.3 *Seja l uma reta que não é auto-conjugada e T uma cônica. A reta l é dita **secante** quando a involução induzida por T sobre l for hiperbólica e **não-secante** quando esta involução for elíptica.*

Observação: Visto que a cônica é o lugar geométrico dos pontos auto-conjugados, então l é tangente se toca a cônica em um ponto (uma reta auto-conjugada passa por apenas um ponto auto-conjugado), secante se toca a cônica em dois pontos (toda involução hiperbólica induzida por uma cônica possui dois pontos invariantes que são auto-conjugados) e não-secante se não toca a cônica. Logo, se P e Q são pontos de uma cônica, a reta PQ é secante à esta.

Definição 7.4 *Um ponto, que não está na cônica, é dito **exterior** a ela quando é a interseção de duas tangentes e **interior** a ela quando não passa por nenhuma destas.*

Observação: Podemos, também, pensar num ponto P exterior como sendo um ponto, cuja involução de retas sobre P induzida pela cônica é hiperbólica ou interior se esta involução for elíptica.

Teorema 7.2 *O pólo de uma secante é um ponto exterior.*

Demonstração: Seja PQ uma secante da cônica T (com P e Q pertencentes à T), logo $T(PQ) = T(P) \cdot T(Q)$. Como P e Q fazem parte de T , $T(P)$ e $T(Q)$ são tangentes (definição 7.2), portanto o pólo $T(PQ)$ de PQ é a interseção de duas tangentes, o que nos garante pela definição 7.4, que $T(PQ)$ é ponto exterior (Figura 7.2).

■

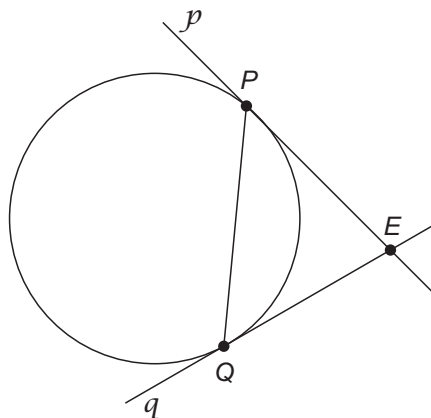


Figura 7.2: Teorema 7.2

Teorema 7.3 *O pólo de uma não-secante é ponto interior.*

Demonstração: Se PQ é uma reta não-secante de uma cônica T , então PQ não tem nenhum ponto da cônica, logo o ponto $T(PQ)$ não passa por nenhuma tangente de T , ou seja, $T(PQ)$ é interior (Figura 7.3).

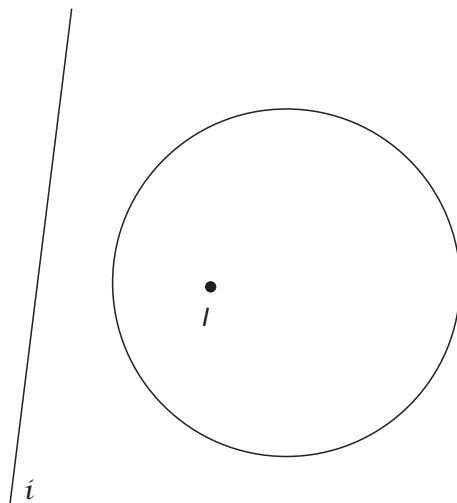


Figura 7.3: Teorema 7.3

■

Teorema 7.4 *Quaisquer dois pontos conjugados numa secante PQ de uma cônica T (Com P e Q na cônica) são conjugados harmônicos com relação a P e Q .*

Demonstração: Este teorema, como a involução induzida por T em PQ é hiperbólica, é um corolário do teorema 6.10, já que numa involução induzida, pontos conjugados equivalem a pontos correspondentes.



Teorema 7.5 *Numa secante PQ à uma cônica T (com P e Q em T) qualquer par de conjugados harmônicos em relação a P e Q são pontos conjugados perante T .*

Demonstração: É a recíproca do teorema 7.5 e é provado analogamente usando a equivalência entre pontos correspondentes de uma involução induzida e pontos conjugados em relação a uma cônica.



Teorema 7.6 *Qualquer par de retas conjugadas por um ponto exterior $p \cdot q$ a uma cônica T (com p e q tangentes à T) são conjugados harmônicos com relação a p e q e também qualquer par de conjugados harmônicos em relação as tangentes p e q de uma cônica T é um par de retas conjugadas em relação a T .*

Demonstração: Este teorema, assim como sua demonstração, é a dualização do teorema 7.4 e de sua recíproca, o teorema 7.5.



Esta chuva de teoremas e definições, primeiras consequências da definição de cônica combinadas com outras definições e resultados, são os primeiros passos à caminhada de propriedades mais complexas das cônicas.

7.2 Polaridade induzida por uma cônica

Cada cônica induz uma polaridade, como já vimos. Esta polaridade que vai nos ajudar a fazer construções. Construção de uma tangente por um dado ponto, por exemplo. Para tanto, devemos analisar as características dessa polaridade induzida pela cônica.

Teorema 7.7 *Se um quadrângulo está inscrito em uma cônica, ou seja, seus quatro vértices tocam a cônica, então seu triângulo diagonal é auto-polar em relação a esta cônica.*

Demonstração: Seja $PQRS$ um quadrângulo inscrito em uma cônica T . Sejam $A = PQ \cdot RS$, $B = PR \cdot QS$ e $C = PS \cdot QR$ os três pontos diagonais deste quadrângulo.

A reta AB encontra as retas QR e PS respectivamente nos pontos C_1 e C_2 . Veja agora o quadrângulo $ABQR$:

$$AQ \cdot BR = AP \cdot BP = P; \text{ Pois } A = PQ \cdot RS \text{ e } B = PR \cdot QS;$$

$$AR \cdot QR = AS \cdot BS = S; \text{ Pois } A = PQ \cdot RS \text{ e } B = PR \cdot QS;$$

C_2 está em AB ;

C está em QR ;

P, S, C e C_2 estão na mesma reta PS ; Pois $C = PS \cdot QR$ e $C_2 = PS \cdot AB$.

Logo $H(PS, CC_2)$, aí, pelo teorema 7.5, C e C_2 são pontos conjugados em T (Já que PS é secante a T). Portanto, a reta $T(C)$ passa por C_2 .

Agora olharemos para o quadrângulo $ABPS$:

$$AP \cdot BS = AQ \cdot BQ = Q; \text{ Pois } A = PQ \cdot RS \text{ e } B = PR \cdot QS;$$

$$AS \cdot BP = AR \cdot BR = R; \text{ Pois } A = PQ \cdot RS \text{ e } B = PR \cdot QS;$$

C_1 está em AB ;

C está em PS ;

Q, R, C e C_1 estão na mesma reta QR ; Pois $C = PS \cdot QR$ e $C_1 = AB \cdot QR$.

Logo $H(QR, CC_1)$, aí, pelo teorema 7.5, C e C_1 são pontos conjugados em T (Já que QR é secante a T). Portanto, a reta $T(C)$ passa por C_1 .

Ora, Se $T(C)$ passa por C_1 e por C_2 então $T(C) = C_1C_2 = AB(C_1 = AB \cdot QR$ e $C_2 = AB \cdot PS)$. Analogamente $T(A) = BC$ e $T(B) = AC$, portanto ABC , o triângulo diagonal de $PQRS$, inscrito a cônica, é auto-polar. ■

Corolário: A reta polar de um ponto C dado, fora da cônica, é a reta formada por $PS \cdot QR$ e $PR \cdot QS$ onde PQ e RS são secantes à cônica por C .

Demonstração: Se $C = PQ \cdot RS$ então C é um dos pontos diagonais de $PQRS$, logo a sua reta polar é formada pela reta que passa pelos outros dois, a saber $PS \cdot QR$ e $PR \cdot QS$. ■

Na figura 7.4, determinamos a reta polar AB de um ponto C interior e exterior à cônica.

Teorema 7.8 Para construir a tangente por um ponto P da cônica, basta pegarmos a reta que une P com o pólo de qualquer secante por ele.

Demonstração: Seja C o pólo da secante PQ , onde P e Q são pontos da cônica. C é exterior pelo teorema 7.2, logo PC e QC são duas tangentes à cônica por C .

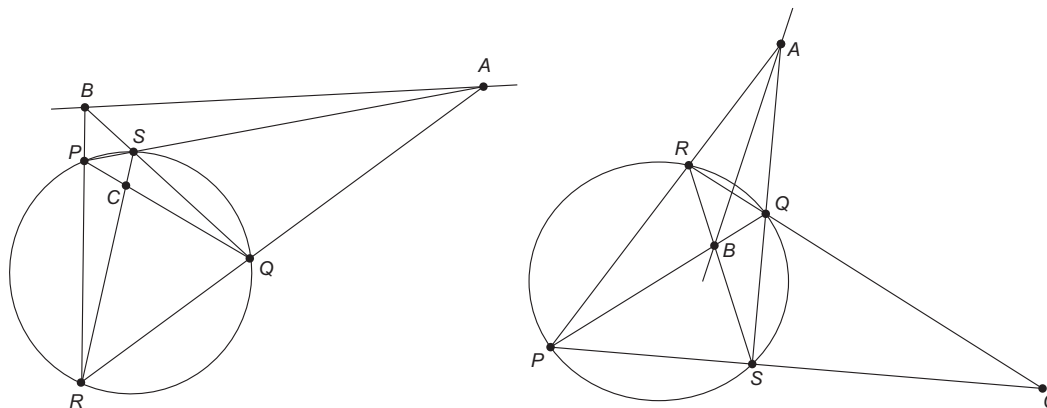


Figura 7.4: Polar de um ponto usando a cônica

■

Na próxima seção, veremos como as projetividades envolvidas na cônica podem nos ajudar a construí-la a partir de pontos ou retas dadas.

7.3 Algumas construções

Nessa seção vamos demonstrar teoremas muito “íntimos” das cônicas. Através deles teremos base suficiente para construir cônicas sob diversas condições impostas. Claro que pelo fato da nossa definição de cônica envolver lugar geométrico e envoltória, fica bem limitado para fazer esse tipo de construção a mão. Porém com o auxílio de um software computacional, podemos realizar belíssimas construções relativas às cônicas. Isso graças à alguns teoremas.

Teorema 7.9 (Teorema de Seydewitz) *Em um triângulo inscrito numa cônica, qualquer reta conjugada a um dos lados encontra os outros dois em pontos conjugados.*

Demonstração: Seja PQR um triângulo inscrito à uma cônica T , e seja c uma reta conjugada ao lado PQ do triângulo. Logo, existe um ponto $C = T(c)$ em PQ . Se S é a interseção de RC com a cônica, então $C = PQ \cdot RS$. Sejam agora $A = PR \cdot QS$ e $B = PS \cdot QR$. Note que A , B e C são os pontos diagonais do quadrângulo $PQRS$ inscrito em T , portanto, pelo teorema 7.7, o triângulo ABC é auto-polar. $AB = c$, isto é, $A = c \cdot PR$ e $B = c \cdot QR$, onde PR e QR são dois lados do triângulo. Como ABC é auto-polar, A e B são pontos conjugados.

■

Teorema 7.10 (Teorema de Steiner) *Sejam x e y duas retas que unem um ponto variável da cônica a dois pontos fixo dessa mesma, então $x \bar{\wedge} y$*

Demonstração: Sejam P e Q fixos numa cônica T e R um ponto variável na mesma. Sejam agora x e y retas tais que $x = PR$ e $y = QR$. As tangentes $p = T(P)$ e $q = T(Q)$ se cruzam em $D = T(PQ)$. Pelo ponto D tome uma reta c , não incidente a P ou Q . Sejam $A = c \cdot x$ e $B = c \cdot y$ (Figura 7.5).

A reta c , por passar por $D = T(PQ)$ é conjugada ao lado PQ do triângulo PQR , então, pelo teorema 7.9, os pontos A e B são conjugados em T , e por isso $A \bar{\wedge} B$ é uma involução. Como $A = c \cdot x$ e $B = c \cdot y$, então $x \bar{\wedge} A \bar{\wedge} B \bar{\wedge} y \Rightarrow x \bar{\wedge} y$.

Observação: Nessa mesma construção (Figura 7.5), seja $d = PQ$ e $C_1 = c \cdot d$. Quando $R = P$ então $y = RQ = PQ = d$ e $A = c \cdot y = c \cdot d = C_1$. B é o conjugado de $A = C_1$. Já que $B = c \cdot x$ e x é uma reta por P que não é secante ($x = PR$, mas $P = R$), então $B = D$, portanto $p = x$. Analogamente, se $R = Q$ teremos $y = q$, ou seja, podemos considerar as tangentes p e q como posições particulares de x e y .

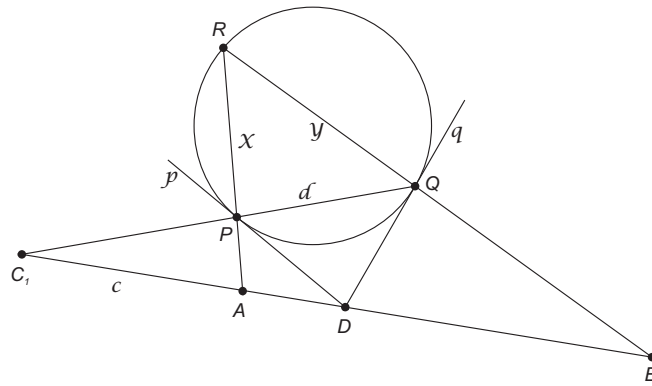


Figura 7.5: Teorema 7.10: Veja que p e q são posições particulares de x e y

■

A partir desses resultados é que vamos mostrar várias construções de cônicas.

Teorema 7.11 *Uma cônica é determinada quando são dados três de seus pontos e as tangentes de dois deles.*

Demonstração: Sejam P , Q e R pontos de uma cônica T e sejam $p = T(P)$ e $q = T(Q)$ duas tangentes dadas. Se $D = p \cdot q$ e $C = PQ \cdot RD$ então podemos determinar C_1 de maneira que $H(PQ, CC_1)$ (Figura 7.6), logo pelo teorema 7.5, C e C_1 são pontos conjugados a T , ou seja, $c = T(C)$ passa por C_1 . Mas C está em $d = PQ$, logo $c = T(C)$ deve passar por $D = p \cdot q = T(PQ)$, portanto $T(C) = c = C_1D$.

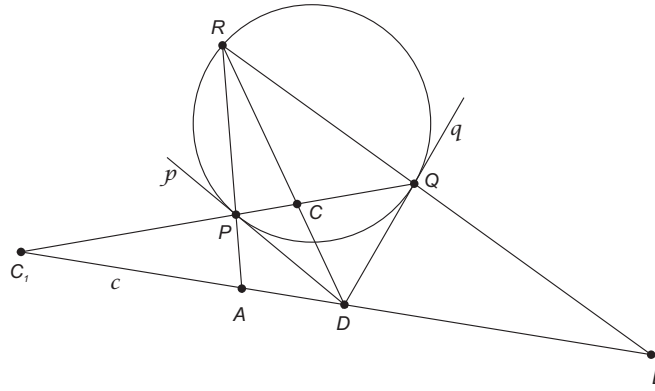


Figura 7.6: Teorema 7.11

Se $A = PR \cdot c$ e $B = RQ \cdot c$, então o triângulo ABC é auto-polar (teorema 7.7). Assim a cônica T é determinada pela polaridade $(ABC)(Pp)$. ■

Teorema 7.12 *Sejam duas retas x e y tais que x passa por P e y passa por Q de modo que $x \bar{\wedge} y$, mas não através de uma perspectividade ($x \bar{\bar{\wedge}} y$ não acontece). Então, o lugar geométrico de $R = x \cdot y$ é uma cônica que passa por P e Q . Se $pdx \bar{\wedge} dqy$, onde $d = PQ$, então p e q são tangentes em P e Q .*

Demonstração: Sejam x e y duas retas onde P e Q estão, respectivamente, em x e y . Se, por acaso, $d = PQ$ fosse uma reta invariante, então, pelo teorema dual do teorema 5.2, $x \bar{\bar{\wedge}} y$, mas $x \bar{\wedge} y$ não é uma perspectividade, por hipótese, logo a reta d não é invariante em $x \bar{\wedge} y$, ou seja, existem retas p e q tais que $pdx \bar{\wedge} dqy$. Pelo teorema 7.11, só existe uma cônica T passando pelos três pontos P , Q e $R = x \cdot y$ onde p e q são tangentes à T por P e Q respectivamente. T , pelo teorema 7.10, determina uma projetividade $x \cdot y$ para qualquer $R = x \cdot y$, que leva retas por P em retas por Q . Vimos também no teorema 7.10 que quando $R = P$ tínhamos $y = d$ e $x = p$ e que quando $R = Q$ tínhamos $x = d$ e $y = q$, portanto $pdx \bar{\wedge} dqy$. Como, pelo teorema fundamental, falamos da mesma projetividade $x \bar{\wedge} y$, T é o lugar geométrico dos pontos $R = x \cdot y$. ■

Nunca podemos esquecer que temos um fortíssimo princípio que “duplica” todos os resultados que provamos.

Teorema 7.13 *Sejam X e Y pontos que variam em duas retas p e q (X em p e Y em q) de modo que $X \bar{\wedge} Y$, mas não através de uma perspectividade. Então, a*

envoltória da reta XY é uma cônica T onde p e q são tangentes. Se a projetividade levar PDX em DQY onde $D = p \cdot q$, então P e Q serão pontos de T .

Demonstração: Esse teorema, assim como sua demonstração, é a dualização do teorema 7.12. ■

Teorema 7.14 *Quaisquer cinco retas, sendo três a três não concorrentes, determinam uma única cônica onde todas essas são tangentes.*

Demonstração: Sejam p e q retas fixas e X_1, X_2 e X_3 pontos em p . Tome em q os pontos Y_1, Y_2 e Y_3 de modo que $X_1X_2X_3 \bar{\wedge} Y_1Y_2Y_3$, mas não através de uma perspectividade. Veja que essa projetividade já está determinada pelo teorema fundamental (se por acaso for uma perspectividade troque Y_3 por Y_4 diferente dos demais de modo que isso não aconteça mais). Assim, se X é um ponto de p , podemos achar um único Y em q de modo a termos $X_1X_2X_3X \bar{\wedge} Y_1Y_2Y_3Y$.

A envoltória da reta XY , segundo o teorema 7.13, determina uma cônica T . E como evitamos a perspectividade, nenhuma reta XY (com X variando em p) passa por $p \cdot q$ e dadas três posições de XY , elas não são concorrentes. Portanto T foi determinada pelas cinco retas p, q, X_1Y_1, X_2Y_2 e X_3Y_3 . ■

Teorema 7.15 *Se os vértices de um triângulo variável estão em três retas fixas e não concorrentes onde dois dos lados do triângulo passam por pontos A e B fixos e não colineares com $p \cdot q$, então a envoltória do terceiro lado variável deste triângulo é uma cônica.*

Demonstração: Seja XYZ um triângulo variável de modo que seus vértices X, Y e Z passam, respectivamente, por três retas não concorrentes p, q e r . Os lados YZ e ZX passam, respectivamente, por dois pontos fixos A e B de maneira que A, B e $D = p \cdot q$ não são colineares (Figura 7.7).

Como B está em ZX e A está em ZY temos $X \frac{B}{\wedge} Z \frac{A}{\wedge} Y \Rightarrow X \bar{\wedge} Y$. $X \bar{\wedge} Y$ não é uma perspectividade pois r não concorre com p e q e os pontos A, B e D não são colineares. Portanto, pelo teorema 7.13 existe uma cônica, a envoltória da reta XY , onde p e q são tangentes.

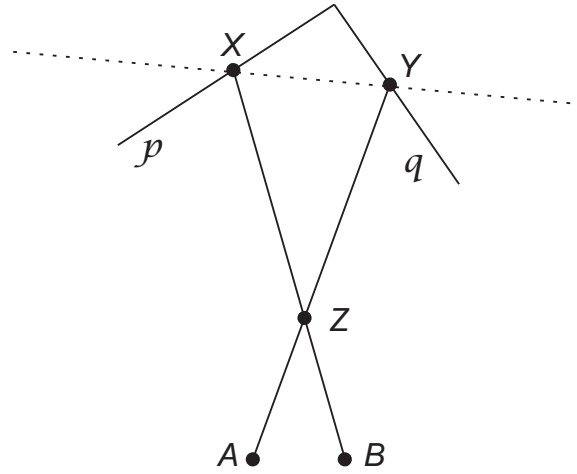


Figura 7.7: Teorema 7.15

E dualmente:

Teorema 7.16 *Quaisquer cinco pontos, sendo três a três não colineares, determinam uma única cônica por estes.*

Demonstração: Esse teorema, assim como sua demonstração, é a dualização do teorema 7.14.

Embora o próximo teorema seja dual do teorema 7.15, ele foi descoberto independentemente em 1733 por *William Braikenridge* e *Colin Maclaurin*

Teorema 7.17 *Se os lados de um triângulo variável passam por três pontos fixos não colineares P , Q e R de modo que dois destes vértices estão em duas retas a e b fixas e não concorrentes com PQ , então o lugar geométrico do terceiro ponto é uma cônica.*

Demonstração: Esse teorema, assim como sua demonstração, é a dualização do teorema 7.15.(Figura 7.8)

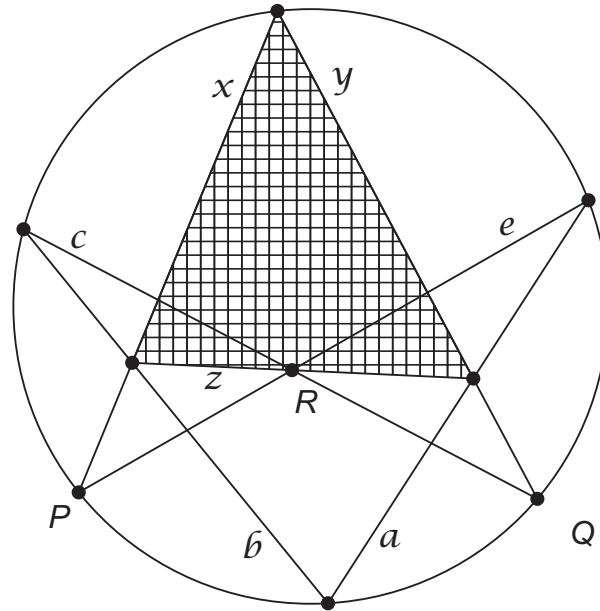


Figura 7.8: Teorema 7.17

7.4 Teorema de Brianchon e teorema de Pascal

Depois de uma série de construções vamos agora provar dois dos teoremas da geometria euclidiana usando a geometria projetiva. Mas primeiro usaremos um teorema auxiliar.

Teorema 7.18 *Seja Z um ponto variável da diagonal CE de um pentágono $ABCDE$ dado. Então os pontos $X = ZB \cdot DE$ e $Y = ZA \cdot CD$ determinam uma reta XY cuja envoltória é uma cônica inscrita em $ABCDE$.*

Demonstração: Seja $ABCDE$ um pentágono onde $CE = r$, $DE = p$ e $CD = q$ e sejam três pontos $X = ZB \cdot DE$, $Y = ZA \cdot CD$ e Z um ponto que varia na diagonal CE do pentágono (Figura 7.9). Note que X está em p e Y está em q e além disso X está em ZB (ou seja, ZX passa por B) e Y está em AZ (ou seja, YZ passa por A). Então, pelo teorema 7.15, as retas XY , do triângulo XYZ têm como envoltória uma cônica T onde p e q são tangentes. Agora precisamos saber se esta cônica está inscrita no pentágono $ABCDE$.

Sejam $G = AB \cdot r$, $I = AB \cdot p$ e $J = AB \cdot q$. Se $Z = E$ (Z varia em CE) então:
 $X = ZB \cdot DE = EB \cdot DE = E$ e
 $Y = ZA \cdot CD = EA \cdot CD$, ou seja, Y está em $AE = AX$, ou ainda, $AE = XY$.
 Portanto AE é tangente à T .
 Quando $Z = C$ temos:

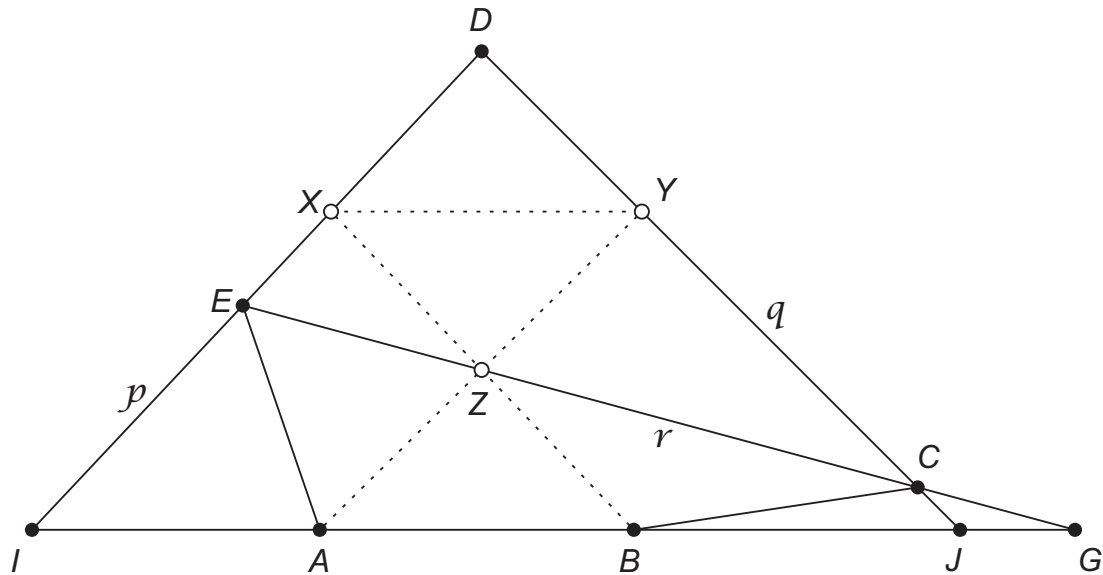


Figura 7.9: Teorema 7.18

$Y = ZA \cdot CD = CA \cdot CD = C$ e

$X = ZB \cdot DE = CB \cdot DE$, ou seja, X está em $CB = YB$, ou ainda, $CB = XY$. Portanto CB é tangente à T . Se $Z = G$ então $G = AB \cdot r = AB \cdot CE = Z$, ou seja, $AB = ZB$, então:

$X = ZB \cdot DE = AB \cdot DE = AB \cdot p = I$ e

$Y = ZA \cdot CD = AB \cdot CD = AB \cdot q = J$, portanto $XY = JI = AB$ (J e I estão em AB), isto é, AB é tangente à T .

Mostramos que as retas AB , BC , $CD = q$, $DE = p$ e EA são tangentes à cônica T , mas estas são os lados do pentágono $ABCDE$, logo T é inscrita ao pentágono $ABCDE$.

■

Agora sim, o teorema de *Brianchon* (Na geometria euclideana esse resultado é enunciado somente para circunferências.)

Teorema 7.19 (Teorema de Brianchon) *Se um hexágono é circunscrito a uma cônica, então as três diagonais deste são concorrentes. (e reciprocamente)*

Demonstração: Olharemos primeiro a recíproca. Fazendo a construção do teorema 7.18 temos um pentágono $ABCDE$ circunscrito a uma cônica T . Tome Z de modo que X fique entre D e E (lembre que $X = ZB \cdot DE$) e Y fique entre C e D ($Y = ZA \cdot CD$). Dessa maneira, o hexágono $ABCYXE$ é circunscrito a cônica, já que $CY = CD$, $EX = ED$ e XY é sempre tangente à T . As retas AY , BX e CE unem vértices

opostos do hexágono $ABCYXE$ e por isso são chamadas de diagonais do mesmo.

Z está em AY pois $Y = ZA \cdot CD$,

Z está em BX pois $X = ZB \cdot DE$ e

Z está em CE pela construção da cônica T .

Então, pelo teorema 7.18, se as diagonais AY , BX e CE concorrem em Z , então o hexágono tem seus lados tangentes à cônica. Até aqui provamos que se um hexágono tem suas diagonais concorrentes então existe um cônica que o circunscreve. Agora mostraremos sua recíproca.

Seja um hexágono cujos lados são tangentes a uma cônica T . Logo, em particular, cinco desses lados, a saber DE , EA , AB , BC e CD (o pentágono anterior) são tangentes à T . Como só uma cônica passa por estas cinco retas, de acordo com o teorema 7.14, o outro lado desse hexágono deve coincidir com alguma posição de XY do teorema anterior, logo AY , BX e CE se cruzam em um único ponto. ■

Veja na figura 7.10 dois exemplos desse importante resultado que na geometria euclideana prova-se apenas para circunferências.

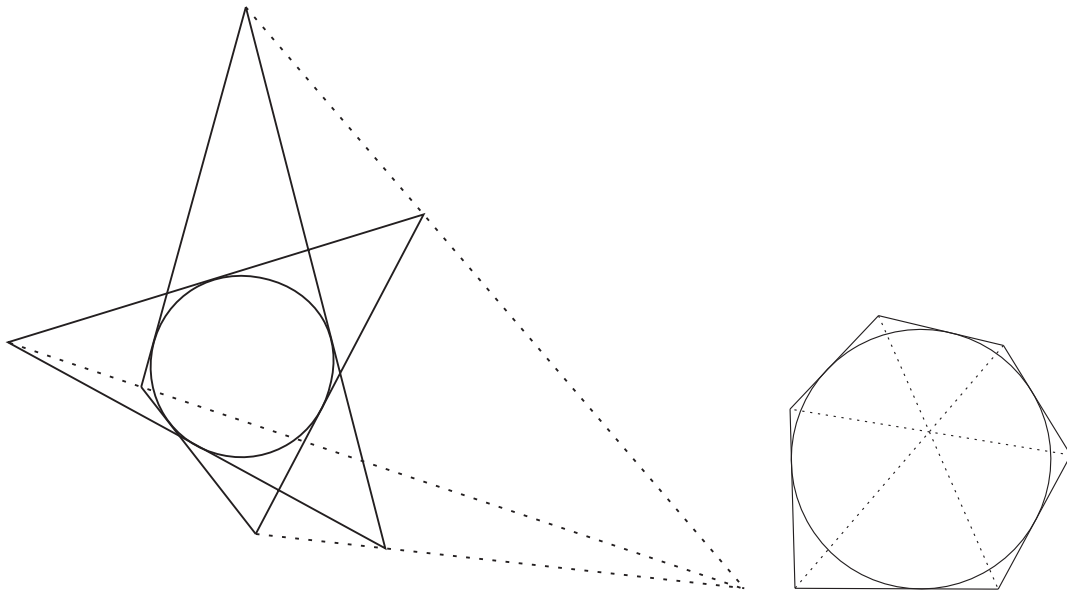


Figura 7.10: Teorema 7.19

O teorema de *Pascal* na geometria projetiva vem de brinde, pois é a dualização do teorema de *Brianchon*.

Teorema 7.20 (Teorema de Pascal) *Se um hexágono é inscrito em uma cônica, os três pares de lados opostos se encontram em pontos colineares.*

Demonstração: Esse teorema, assim como sua demonstração, é a dualização do teorema 7.19. ■

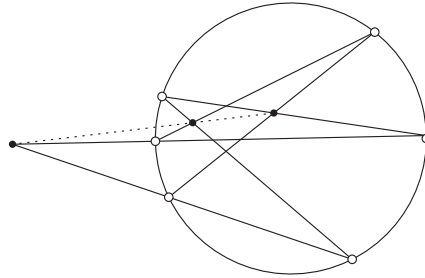


Figura 7.11: Teorema 7.20

7.5 Dois triângulos auto-polares

Podemos relacionar dois triângulos auto-polares em uma mesma polaridade com a cônica determinada por ela. Para tanta, *Desargues* desenvolveu uma ferramenta eficiente.

Teorema 7.21 (Teorema da involução de Desargues) *Dentre todas as cônicas que passam pelos vértices de um quadrângulo dado, aquelas que interceptam uma reta dada (que não passa por nenhum vértice), o fazem em pares de uma involução.*

Demonstração: Seja $PQRS$ um quadrângulo dado e seja g uma reta dada. Sejam $A = PS \cdot g$, $B = QS \cdot g$, $D = QR \cdot g$ e $E = PR \cdot g$. K e U são os pontos em que a reta g cruza uma cônica T . (Figura 7.12)

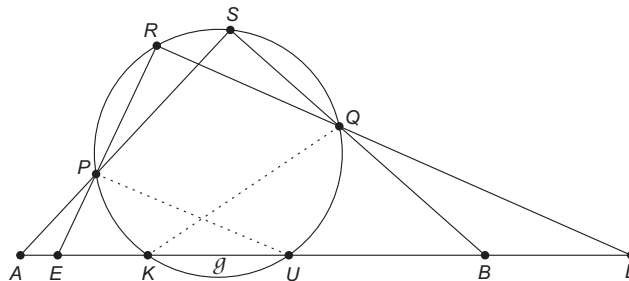


Figura 7.12: Teorema 7.21

Pelo teorema 7.10, onde P e Q são os pontos fixos e S , R , K e U quatro posições de um ponto variável da cônica, temos que as retas de P até S , R , K e U e as retas

de S , R , K e U até Q são relacionadas projetivamente, ou seja:

$$PS \bar{\wedge} SQ, PR \bar{\wedge} RQ, PK \bar{\wedge} KQ \text{ e } PU \bar{\wedge} UQ.$$

Se $PS \cdot g = A$, $QS \cdot g = B$, $QR \cdot g = D$ e $PR \cdot g = E$, então, $A \bar{\wedge} PS$, $B \bar{\wedge} QS$, $D \bar{\wedge} QR$ e $PR \bar{\wedge} E$ e aí, com os resultados anteriores

$$A \bar{\wedge} PS \bar{\wedge} SQ \bar{\wedge} B \text{ e } E \bar{\wedge} PR \bar{\wedge} QR \bar{\wedge} D \Rightarrow AE \bar{\wedge} BD.$$

K e U são pontos da cônica e também pontos de g , então $T \bar{\wedge} PT \bar{\wedge} QT \bar{\wedge} T \Rightarrow T \bar{\wedge} T$ e $U \bar{\wedge} UP \bar{\wedge} UQ \bar{\wedge} U \Rightarrow U \bar{\wedge} U$, logo $TU \bar{\wedge} TU$ e portanto $AETU \bar{\wedge} BDTU$. Pelo teorema 2.1, como B , D , T e U são colineares então $BDTU \bar{\wedge} DBTU$. Portanto

$$AETU \bar{\wedge} BDTU \bar{\wedge} DBTU \Rightarrow AETU \bar{\wedge} DBTU.$$

Acabamos de mostrar que na involução $(AD)(BE)$ (lembre que apenas dois pares de pontos correspondentes já determina uma involução) os pontos T e U se correspondem. Visto que A , B , D e E dependem unicamente do quadrângulo, o mesmo ocorrerá para todas as cônicas que tiverem seus vértices neste. ■

Corolário: *De todas as cônicas tangentes à uma reta em um ponto dado, passando por outros dois pontos dados (numa mesma reta), o fazem em pares de uma involução*

Demonstração: Basta fazermos $Q = S$ no teorema anterior, aí B será determinado pela tangente por Q . ■

Teorema 7.22 *Se dois triângulos têm seis vértices em uma cônica, então existe uma polaridade no qual os dois triângulos são auto-polares.*

Demonstração: Sejam P , R , S , Q , K e U (do teorema 7.21) os vértices destes triângulos em uma cônica. Então podemos dizer que a cônica passa pelos vértices do quadrângulo $PQRS$ e cruza uma reta $KU = g$ em K e U . Portanto, pelo teorema 7.21, existe uma involução $(AD)(BE)$. Como esta involução foi determinada pelo quadrângulo $PQRS$ na reta g então existe, segundo o teorema 6.26, uma polaridade $T = (PQR)(Sg)$ onde os pares de da involução $(AD)(BE)$ são pontos conjugados de

T .

Veja que PQR é auto-polar em T . Como K está em g então $T(K) = k$ passa por $T(g) = S$, mas k também passa por U , pois U e K são pares da involução e portanto conjugados, logo $t = US$. Da mesma forma $T(U) = u$ é a reta SK . Portanto o triângulo SKU também é auto-polar em T .

■

Teorema 7.23 *Se dois triângulos, sendo que nenhum vértice de um está sobre o lado de outro, são auto-polares com relação a uma polaridade dada, então os seis vértices estão sobre uma cônica e os seis lados são tangentes a uma outra cônica.*

Demonstração: Sejam PQR e SKU dois triângulos cujos vértices não estão sobre nenhum dos lados do outro triângulo, de modo que estes são auto-polares com relação à uma polaridade dada T .

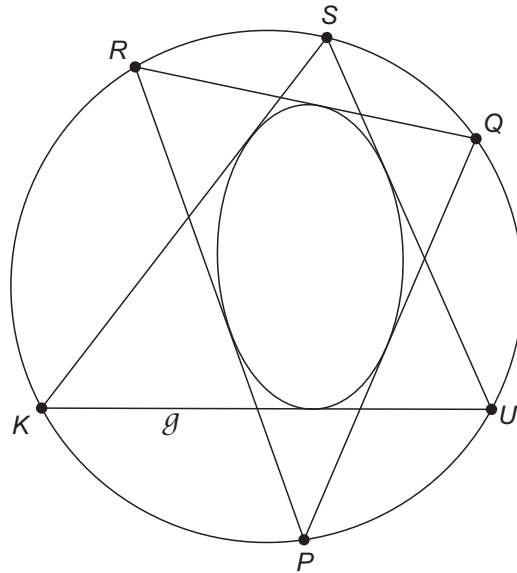


Figura 7.13: Teorema 7.23

Se SKU é auto-polar então $T(S) = KU = g$ e S não está em g , por isso T pode ser denotada, segundo o teorema 6.7, por $T = (PQR)(Sg)$. Pelo teorema 6.26, o quadrângulo $PQRS$ determina em g uma involução de pontos conjugados em T . Como a cônica construída pelo teorema 7.21 usando o mesmo quadrângulo e a mesma reta g induz a mesma involução, essa cônica passa por $PQRSKU$. Os lados destes triângulos são tangentes a uma cônica por um motivo dual a este.



Você deve ter notado que na maioria dos nossos resultados ilustramos usando um círculo. O motivo é a comodidade de um desenho mais limpo e didático. No apêndice C apresentamos uma demonstração tirada do livro *Projective Geometry* de *H. S. M. Coxeter* que o círculo de fato é uma de “nossas” cônicas.

7.6 Cônicas degeneradas

Pense numa elipse, tal qual se conhece. Agora imagine todas as suas tangentes. Conforme vamos achatando a elipse suas tangentes vão parecer dois feixes de retas, um em cada extremidade da elipse.

Falar em cônicas degeneradas é admitir como cônicas um par de retas (como lugar geométrico) e um par de pontos (como envoltória).

Omitindo dos teoremas a condição *mas que não aconteça* $x \bar{\wedge} y$ ganharemos estas novas cônicas. Podemos afirmar, por exemplo, que quaisquer cinco pontos sendo, quatro a quatro não colineares, determinam uma cônica (se três forem concorrentes teremos um par de retas). Ou dualmente, que cinco retas, sendo quatro a quatro não concorrentes determinam também uma cônica (se forem três colineares teremos um par de pontos ou um só ponto).

Dessa forma podemos enunciar os teoremas de *Brianchon* e de *Pascal* da seguinte forma:

Se num hexágono $ABCDEF$ circunscrito a uma cônica temos que AB , CD , EF são concorrentes, assim como DE , FA e BC também são concorrentes, então, AD , BE e CF são concorrentes. (*Brianchon*)

Se num hexágono $abcdef$ inscrito a uma cônica temos que $a \cdot b$, $c \cdot d$, $e \cdot f$ são colineares assim como $d \cdot e$, $f \cdot a$ e $b \cdot c$ também são colineares, então, $a \cdot d$, $b \cdot e$ e $c \cdot f$ são colineares. (*Brianchon*)

Basta olharmos para o teorema de *Pappus* (Teorema 5.5) e vemos que estes três são equivalentes.

Capítulo 8

Considerações Finais

Chegamos ao fim da nossa pequena viagem ao universo da geometria projetiva. Testemunhar uma construção como essa, com certeza, é uma experiência muito valiosa, pois trata de uma realidade completamente diferente daquela que estávamos acostumados e construída passo a passo, axioma a axioma, definição a definição.

Passar por coisas já vistas durante o caminho (teoremas da geometria euclideana) é outra coisa que valoriza essa construção. Ver as mesmas coisas sob outros olhares, sob um olhar mais ingênuo. A abordagem dada às cônicas com certeza vale à pena, chega a ser estranho uma coisa que estávamos a ver de um jeito ser definido de outro totalmente distinto.

Daqui, podemos sugerir dois caminhos que podem ser realmente interessantes e que não foram tratados aqui por não ser o objetivo. Um deles é tentar provar as propriedades euclidianas das cônicas por meios projetivos. Teoremas sobre tangentes e focos, por exemplo. O primeiro passo já foi dado, já conhecemos como a geometria projetiva encara as cônicas, basta agora estudar essa relação da cônica “projetiva” com a cônica “euclideana” (A propósito, será que estas duas definições se equivalem?).

Outro caminho é refazer toda nossa construção tendo como base uma estrutura algébrica, com equações e expressões algébricas que substituem palavras e afirmações. A abordagem usando vetores e o sistema de coordenadas homogêneas consta no livro do *Coxeter, Projective Geometry*.

A idéia que a geometria projetiva traz, de tratar o mundo como nós o vemos é usada como base para um dos estudos mais atuais: a computação gráfica. Quando vemos um filme de animação temos a impressão de que existe de fato uma câmera, que se movimenta como se fosse um filme real. As propriedades projetivas é que criam esse efeito de um objeto permanecer o mesmo embora o ponto de vista se mexa constantemente.

Foi um enorme prazer conhecer uma pequena introdução dessa teoria. Instiga-nos

uma curiosidade de estudar as aplicações e as relações que podemos fazer com tudo aquilo que já sabemos e a geometria projetiva. A inocência foi, com certeza, a maior dificuldade. Fingir que não sabíamos de nada ou fingir que o desenho não existe é uma tarefa que requer uma certa maturidade e paciência.

Inúmeras construções de cônicas foram realizadas em software geométrico (*Cabri Géomètre II*) a partir de teoremas provados aqui. São belíssimas e simples construções de cônicas que fazem todo esse trabalho valer a pena.

Referências Bibliográficas

- [1] Coxeter, H.S.M. *Projective Geometry*, 2ª edição. Springer Verlag, 1987.
- [2] Auffinger, A.C.T.C. & Valentim, F.J.S. *Introdução a Geometria Projetiva*, UFES, Vitória, 2003
- [3] Coxeter, H.S.M. *The Real Projective Plane*. Springer Verlag, 1993.
- [4] Ayres Jr., Frank *Schaum's Outline of Theory and Problems of Projective Geometry*. Schaum Publishing Co.,1967.

Apêndice A

A Razão Cruzada

Para demonstração da razão cruzada vamos precisar de um resultado sobre triângulos. Considere um triângulo de vértices A , B e C . A altura h relativa ao lado AB intercepta o mesmo no ponto G . Seja $\alpha = \widehat{ACG}$, $\beta = \widehat{BCG}$ e $\hat{C} = \widehat{ACB}$ (Figura A.1).

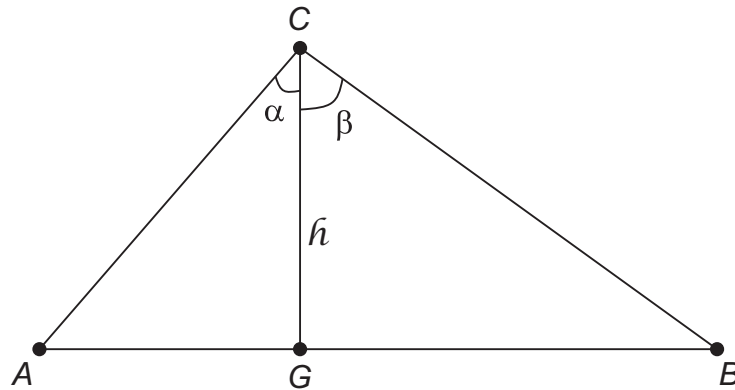


Figura A.1: Triângulo ABC

veja que:

$$\text{sen}\hat{C} = \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha\text{cos}\beta + \text{sen}\beta\text{cos}\alpha.$$

Como ACG e BCG são triângulos retângulos temos:

$$\text{sen}\alpha = \frac{AG}{AC}, \text{sen}\beta = \frac{BG}{BC}, \text{cos}\alpha = \frac{h}{AC} \text{ e } \text{cos}\beta = \frac{h}{BC}.$$

Então:

$$\text{sen}\hat{C} = \frac{AG}{AC} \cdot \frac{h}{BC} + \frac{BG}{BC} \cdot \frac{h}{AC} = \frac{h}{AC \cdot BC} \cdot (AG + GB)$$

Como $AG + GB = AB$ ficamos com:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\hat{C} &= \frac{h \cdot AB}{AC \cdot BC} \\ \operatorname{sen}\hat{C} \cdot AC \cdot BC &= h \cdot AB \\ \left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}\hat{C} \cdot AC \cdot BC &= \left(\frac{1}{2}\right)h \cdot AB \end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo ABC é tal que $A_{ABC} = \left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}\hat{C} \cdot AC \cdot BC$.

Mostremos agora que se quatro retas por um ponto O interceptam uma reta r nos pontos A, B, C e D então, para toda r não incidente à O :

$$\frac{AC/BC}{AD/BD} \text{ é invariante.}$$

O primeiro passo é notar que a altura h , em relação ao lado oposto à O , dos triângulos ACO, BCO, ADO e BDO são a mesma e corresponde à distância de O até r (Figura A.2).

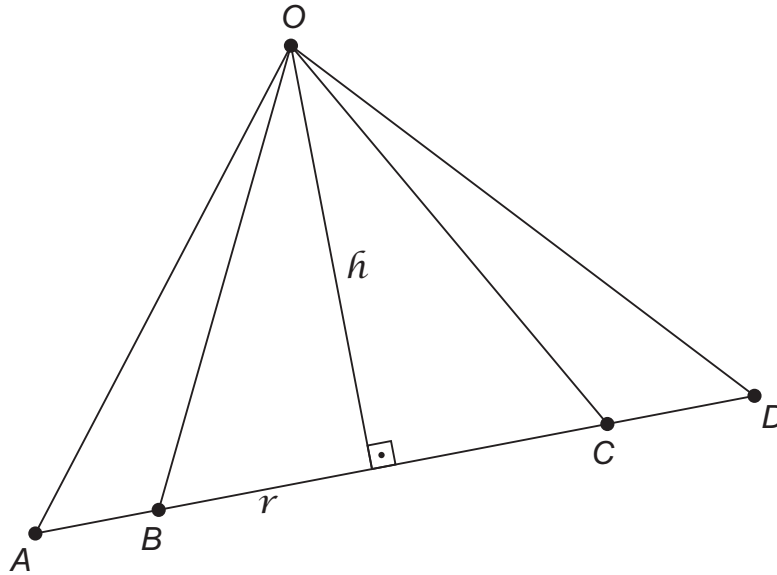


Figura A.2: h é a distância de O até r

Então pelo resultado anterior:

$$A_{ACO} = \left(\frac{1}{2}\right)AC \cdot h = \left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}(\hat{AOC}) \cdot AO \cdot OC,$$

$$A_{BCO} = \left(\frac{1}{2}\right)BC \cdot h = \left(\frac{1}{2}\right)\text{sen}(\widehat{BOC}) \cdot BO \cdot OC,$$

$$A_{ADO} = \left(\frac{1}{2}\right)AD \cdot h = \left(\frac{1}{2}\right)\text{sen}(\widehat{AOD}) \cdot AO \cdot OD \quad \text{e}$$

$$A_{BDO} = \left(\frac{1}{2}\right)BD \cdot h = \left(\frac{1}{2}\right)\text{sen}(\widehat{BOD}) \cdot BO \cdot OD.$$

Isolando AC , BC , AD e BD em suas respectivas igualdades temos:

$$AC = \frac{\text{sen}(\widehat{AOC}) \cdot AO \cdot OC}{h},$$

$$BC = \frac{\text{sen}(\widehat{BOC}) \cdot BO \cdot OC}{h},$$

$$AD = \frac{\text{sen}(\widehat{AOD}) \cdot AO \cdot OD}{h} \quad \text{e}$$

$$BD = \frac{\text{sen}(\widehat{BOD}) \cdot BO \cdot OD}{h}.$$

Então:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\frac{\text{sen}(\widehat{AOC}) \cdot AO \cdot OC}{h}}{\frac{\text{sen}(\widehat{BOC}) \cdot BO \cdot OC}{h}} = \frac{\text{sen}(\widehat{AOC}) \cdot AO}{\text{sen}(\widehat{BOC}) \cdot BO} \quad \text{e}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\frac{\text{sen}(\hat{A}OD) \cdot AO \cdot OD}{h}}{\frac{\text{sen}(\hat{B}OD) \cdot BO \cdot OD}{h}} = \frac{\text{sen}(\hat{A}OD) \cdot AO}{\text{sen}(\hat{B}OD) \cdot BO}.$$

Assim:

$$\frac{AC/BC}{AD/BD} = \frac{\frac{\text{sen}(\hat{A}OC) \cdot AO}{\text{sen}(\hat{B}OC) \cdot BO}}{\frac{\text{sen}(\hat{A}OD) \cdot AO}{\text{sen}(\hat{B}OD) \cdot BO}} = \frac{\text{sen}(\hat{A}OC) \cdot \text{sen}(\hat{B}OD)}{\text{sen}(\hat{B}OC) \cdot \text{sen}(\hat{A}OD)}$$

Ou seja, acabamos de mostrar que a razão cruzada depende unicamente dos ângulos $\hat{A}OC$, $\hat{B}OC$, $\hat{A}OD$ e $\hat{B}OD$. Como esses ângulos não dependem da escolha de r , pois já estão determinados pelas quatro retas por O , a razão se mantém invariante para toda reta r escolhida.



Apêndice B

O Teorema de Desargues

Para provarmos o teorema de Desargues, vamos precisar usar uma lista de axiomas para geometria projetiva espacial. Vamos usar a lista de axiomas proposta por *Coxeter* que segundo ele, tem pouca diferença da lista proposta por *Vebber and Young* em 1966:

Axioma B.1 *Existe um ponto e uma reta não incidentes.*

Axioma B.2 *Toda reta é incidente a pelo menos três pontos distintos.*

Axioma B.3 *Quaisquer dois pontos são incidentes a uma única reta.*

Axioma B.4 *Se A, B, C e D são pontos distintos de modo que AB cruza CD então AC cruza BD .*

Axioma B.5 *Quaisquer dois planos têm pelo menos uma reta em comum.*

Axioma B.6 *Se ABC é um plano então existe pelo menos um ponto que não está no plano ABC .*

Axioma B.7 *Os três pontos diagonais de um quadrângulo completo nunca são colineares.*

Axioma B.8 *Se uma projetividade deixa invariante cada um dos três pontos distintos de uma reta, então essa deixa todos os pontos da reta invariantes.*

A definição de plano que usaremos é a definição [2.1](#) proposta no capítulo [2](#). Antes de provarmos o teorema de Desargues, provaremos outros três resultados:

Teorema B.1 *Se r é uma reta, então existe um ponto não incidente à r .*

Demonstração: Suponhamos que não, ou seja, suponhamos que para toda reta r não exista nenhum ponto fora de r . Pelo axioma B.2 cada reta é incidente à pelo menos três pontos, então só pode existir uma reta. Caso contrário iríamos contradizer a hipótese de absurdo, pois haveriam pontos fora de uma reta dada. Essa construção contradiz o axioma B.1. Portanto dada uma reta r , existe um ponto não incidente à r .

■

Teorema B.2 *Duas retas que se cruzam o fazem em um único ponto.*

Demonstração: Suponha que as retas distintas AB e CD se cruzem em dois pontos P e Q , então $AB \cdot CD = P$ e $AB \cdot CD = K$, Assim P está em AB e K está em AB , logo $AB = PK$. Mas P está também em CD assim como K está em CD , então $CD = PK$. Contradição! Temos $CD = PK = AB$, mas AB são e CD são retas distintas, logo não pode existir dois pontos de interseção entre duas retas. Assim, se duas retas se cruzam em algum ponto, ele é único.

■

Teorema B.3 *Duas retas coplanares sempre se interceptam.*

Demonstração: Seja r uma reta. Então, como consequência do teorema B.1, existe um ponto E fora da reta AB . Seja l uma reta no plano Er , então existem C e D em l tal que $AE \cdot l = C$ e $BE \cdot l = D$, onde A e B estão em r (definição 2.1). Veja que $AC \cdot BD = AE \cdot BE = E$, logo as retas AC e BD se cruzam. Finalmente, pelo axioma B.4, $AB = r$ cruza $CD = l$.

■

Não precisamos enunciar o teorema de Desargues usando triângulos perspectivos, porém, como já temos a definição 2.10, enunciaremos da seguinte forma, primeiro sua recíproca:

Teorema B.4 *Se dois triângulos são perspectivos por uma reta, então eles são perspectivos por um ponto.*

Demonstração: Sejam PQR e $P'Q'R'$ dois triângulos perspectivos por uma reta. Ou seja os pontos $D = QR \cdot Q'R'$, $E = RP \cdot R'P'$ e $F = PQ \cdot P'Q'$ são colineares (Figura B.1).

Consideraremos dois casos:

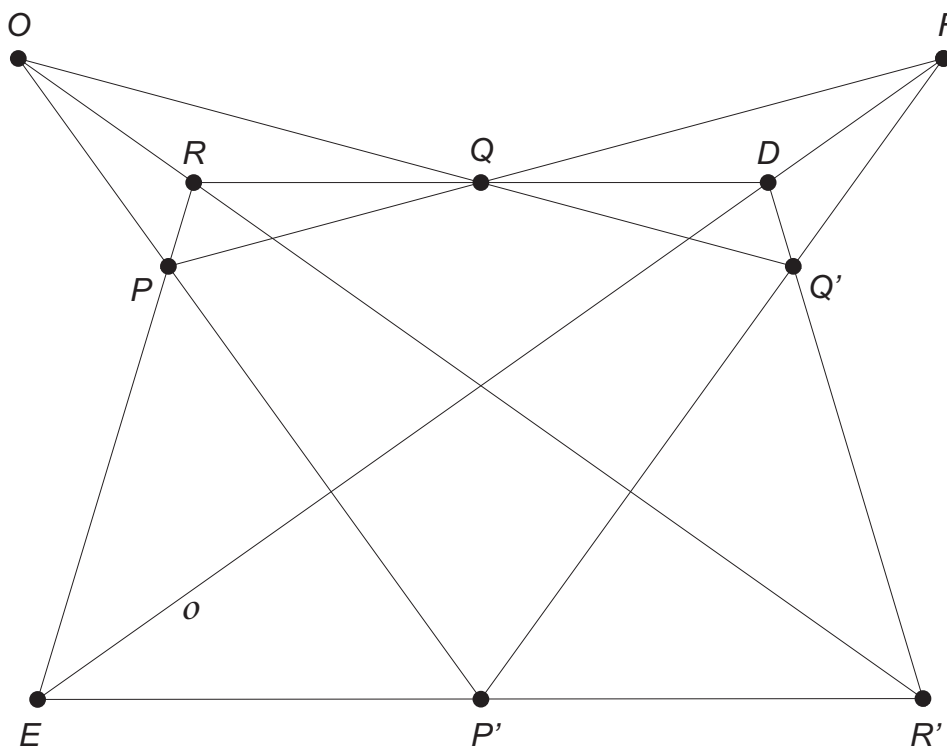


Figura B.1: Teorema B.4

Caso 1 Os triângulos PQR e $P'Q'R'$ estão em planos distintos.

Pelo axioma B.4 temos que se $D = QR \cdot Q'R'$ então, ou seja, se QR cruza $Q'R'$ então QQ' cruza RR' . Analogamente para E e F temos que PP' cruza QQ' e que PP' cruza RR' . Quereamos mostrar que estas três retas PP' , QQ' e RR' se cruzam em um único ponto. (Definição 2.10)

Vamos supor que não, assim, sejam $K = RR' \cdot PP'$, $L = QQ' \cdot RR'$ e $M = QQ' \cdot PP'$. Se considerarmos o plano formado por KLM veremos que PP' , QQ' e RR' são retas desse plano (veja que $KL = RR'$, $LM = QQ'$ e $KM = PP'$). Neste caso as retas PR , $P'R'$, QR , $Q'R'$, PQ e $P'Q'$ também fazem parte do plano KLM , ou seja, PQR e $P'Q'R'$ estão no mesmo plano. Contradição! Pois por hipótese esses triângulos estão em planos distintos. Logo as retas PP' , QQ' e RR' se cruzam em um único ponto e é por esse ponto que os triângulos PQR e $P'Q'R'$ são perspetivos.

Caso 2 Os triângulos PQR e $P'Q'R'$ estão no mesmo plano.

Pelo axioma B.6, existe um ponto P_1 fora do plano dos triângulos. Na reta P_1E (Axioma B.3) tome o ponto R_1 diferente de P_1 e E garantido pelo axioma B.2 (Note que R_1 também não está no plano dos triângulos, se estivesse a reta P_1E também estaria, pois E é um ponto desse plano). Seja Q_1 o ponto de interseção das retas DR_1 e FP_1 determinadas pelo axioma B.2 (DR_1 e FP_1 se

cruzam pelo axioma B.4, pois $DF \cdot P_1R_1 = EF \cdot P_1E = E$). Note que:

$$E = R_1P_1 \cdot RP = R_1P_1 \cdot R'P'$$

$$D = Q_1R_1 \cdot QR = Q_1R_1 \cdot Q'R'$$

$$F = Q_1P_1 \cdot QP = Q_1P_1 \cdot Q'P'$$

Então o triângulo $P_1Q_1R_1$ é perspectivo aos triângulos PQR e $P'Q'R'$ pela reta DE . Pelo primeiro caso deste teorema, existem S e S' tais que $PP_1QQ_1RR_1 = S$ e $P'P_1Q'Q_1R'R_1 = S'$.

Se S ou S' estivessem no plano do triângulo PQR , as retas PS e $P'S'$ também estariam, como $PS = P_1S$ e $P'S' = P_1S'$ e sabemos que P_1 não está no plano de PQR , então nem S e nem S' estão nesse plano.

O axioma B.4 garante que PP' , QQ' e RR' cruzam SS' , pois $P_1 = PS \cdot P'S'$, $Q_1 = QS \cdot Q'S'$ e $R_1 = RS \cdot R'S'$.

Se dois pontos de SS' ($SS' \cdot PP'$ e $SS' \cdot QQ'$, por exemplo) estivessem no plano PQR , então a reta toda estaria (Definição 2.1), o que de fato não acontece pois S e S' não estão lá. Logo existe apenas um ponto de SS' no plano PQR e é nele, no ponto O , que as retas PP' , QQ' e RR' interceptam SS' . Logo $O = PP' \cdot QQ' \cdot RR'$. Então, os triângulos PQR e $P'Q'R'$ são perspectivos pelo ponto O .

■

Teorema B.5 (*Teorema de Desargues*) *Se dois triângulos são perspectivos por um ponto, então eles são perspectivos por uma reta.*

Demonstração: Sejam dois triângulos PQR e $P'Q'R'$ perspectivos pelo ponto O , então $O = PP' \cdot QQ' \cdot RR'$. Por isso e pelo axioma B.4 podemos concluir que existem D , E e F tais que:

$$D = QR \cdot Q'R', \quad E = RP \cdot R'P' \quad \text{e} \quad F = PQ \cdot P'Q'$$

Queremos mostrar que D , E e F são colineares (Definição 2.10). Para tanto veja que:

$$R' = Q'D \cdot P'E, \quad R = QD \cdot PE \quad \text{e} \quad O = PP' \cdot QQ'$$

Mas RR' passa por O , então R , R' e O são colineares, ou seja, os triângulos EPP' e DQQ' são perspectivos pela reta RR' . Logo, pelo teorema B.4, existe um ponto

que está em PQ , $P'Q'$ e DE ao mesmo tempo. Naturalmente, F é este ponto pois $PQ \cdot P'Q' = F$. Então F está em DE , ou seja, D , E e F são colineares e finalmente os triângulos PQR e $P'Q'R'$ são perspectivos pela reta DE .



Apêndice C

O Círculo é uma Cônica?

Essa demonstração, como dissemos, consta no livro de *Coxeter*, entretanto é devida à *S. L. Greitzer*. A idéia é compararmos a construção do teorema 7.17, com a teoria da geometria euclídeana para provar que o ponto $X = x \cdot y$, que varia nesse teorema, tem como lugar geométrico uma cônica e também um círculo. Logo o círculo é uma cônica.

Tomaremos, para tanto, cinco pontos em um círculo, por convêniência pegaremos A, P, B, Q e C como sendo cinco dos seis vértices de um hexágono regular inscrito em um círculo.

Em seguida tome R como sendo $AQ \cdot CP$ (note que R é o centro do círculo pois num hexágono regular inscrito num círculo, o segmento que liga os vértices opostos são também diâmetros). Por R tome um diâmetro variável que intercepta AB em M e BC em N . E finalmente faça $X = PM \cdot QN$ (Figura C.1).

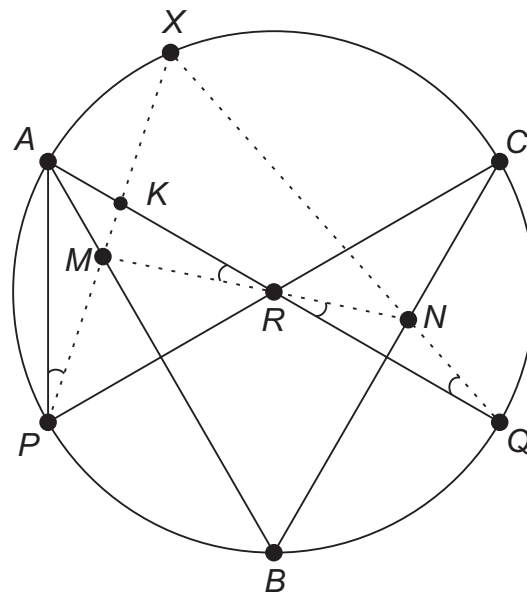


Figura C.1: O círculo é uma cônica.

Pelo fato do hexágono ser inscrito em um círculo, então AP , AR , PB , RB , QB , RC e CQ têm medida igual à do raio do círculo, e portanto são congruentes entre si por transitividade. Logo a diagonal AB do losango $APBR$ é mediatriz do segmento PR (a outra diagonal), assim como a diagonal CB do losango $BQCR$ é mediatriz do segmento RQ (a outra diagonal), pois as diagonais de um losango se interceptam ao meio formando um ângulo reto.

A mediatriz de um segmento GH é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de G e H . Logo $AP = AR$ e $MP = MR$ pois A e M estão na mediatriz do segmento PR . Analogamente $NR = NQ$ pois N está na mediatriz de RQ .

Veja que os triângulos AMP e AMR são congruentes pois $AM = AM$, $MP = MR$, e $AP = AR$. Veja também que o triângulo QRN é isósceles pois $NR = NQ$. Dáí tiramos algumas congruências de ângulos, a saber:

$$\hat{A}PM = \hat{A}RM \quad \text{e} \quad \hat{N}RQ = \hat{N}QR$$

mas, os ângulos $\hat{N}RQ$ e $\hat{A}RM$ são opostos pelo vértice e portanto também são congruentes, logo:

$$\hat{A}PM = \hat{A}RM = \hat{N}RQ = \hat{N}QR \quad \Rightarrow \quad \hat{A}PM = \hat{N}QR.$$

Agora vamos olhar para os triângulos APK e XQK . Note que $\hat{A}KP$ e $\hat{X}KQ$ são congruentes pois são opostos pelo vértice. Como $K = MP \cdot QR$ e N está na reta QX , então

$$\hat{A}PK = \hat{A}PM = \hat{N}QR = \hat{X}QR = \hat{X}KQ,$$

ou seja, $\hat{A}PK = \hat{X}KQ$. Logo os triângulos APK e XQK são semelhantes e por isso

$$P\hat{A}Q = P\hat{A}K = Q\hat{X}K = Q\hat{X}P,$$

ou ainda, $P\hat{A}Q = P\hat{X}Q$.

Como os ângulos $P\hat{A}Q$ e $P\hat{X}Q$ “olham” para o mesmo segmento PQ e são congruentes, então X deve estar no arco capaz do ângulo de medida $P\hat{A}Q$, ou seja, o lugar geométrico de X é o círculo que passa por APQ . Por outro lado, pelo teorema 7.17, o lugar geométrico de X é a cônica que passa por $APBQC$. Visto que para qualquer círculo é possível realizar a construção acima, podemos afirmar que o círculo é uma cônica. ■