UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FERNANDO KAMERS

PITÁGORAS DE SAMOS E O TEOREMA DE PITÁGORAS

Florianópolis, dezembro de 2008.

FERNANDO KAMERS

PITÁGORAS DE SAMOS E O TEOREMA DE PITÁGORAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Nereu Estanislau Burin

Florianópolis, dezembro de 2008.

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº. 44/CCM/08.

Prof. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca examinadora:

Prof. Nereu Estanislau Burin
Orientador

Prof. Félix Pedro Quispe Gómez

Prof. Márcio Rodolfo Fernandes

AGRADECIMENTOS

Ao professor Nereu Estanislau Burin por ter aceitado ser meu orientador durante a realização deste trabalho.

Aos professores Márcio Rodolfo Fernandes e Félix Pedro Gomez que aceitaram prontamente em participar da banca do trabalho.

A todos os colegas que conheci ao longo do Curso de Matemática, que compartilharam e me ajudaram a vencer as dificuldades do curso.

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, me ajudando assim a vencer mais uma etapa em minha vida.

Sumário

Introdução

É muito pouco o que realmente conhecemos sobre a vida de Pitágoras, já que ele não deixou registros escritos e foi objeto de uma série de relatos tardios e fantasiosos. Chegou a se dizer até que ele nem existiu devido as lendas e mistérios que envolvem a sua pessoa.

Apesar disso, as hipóteses mais aceitas são de que o Filósofo e Matemático Grego nasceu no ano de 570 a.C na cidade de Samos, uma ilha grega situada no Mar Egeo. Foi o fundador da escola Pitagórica, cujos princípios foram determinantes para a evolução geral da matemática e da filosofia ocidental de seu tempo.

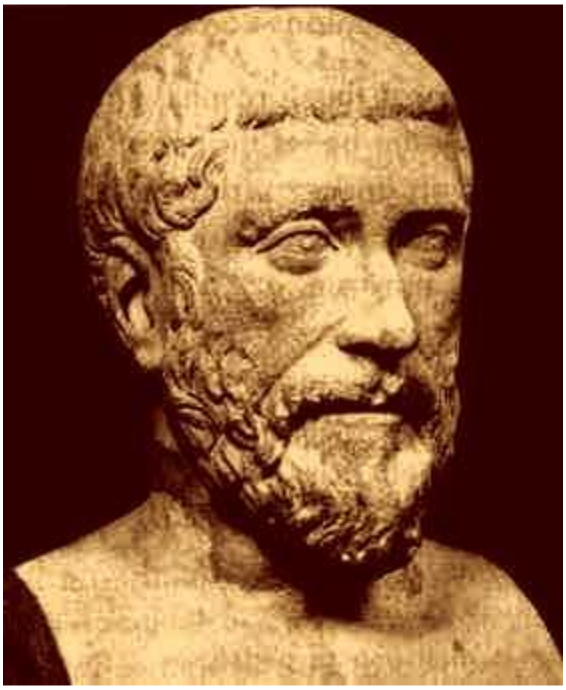
Mas quando falamos de Pitágoras lembramos imediatamente do teorema que leva o seu nome, o Teorema de Pitágoras, um dos mais importantes da matemática. Este teorema afirma que: "Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa."

Por fim este trabalho tem por objetivo tentar desvendar um pouco mais sobre a vida e obra de Pitágoras, bem como mostrar a importância do seu teorema para algumas áreas da matemática.

Capítulo 1

Dados históricos sobre Pitágoras

1.1 Um pouco da vida de Pitágoras



Da vida de Pitágoras quase nada pode ser afirmado com certeza, já que ela foi objeto de uma série de relatos tardios e fantasiosos. Algumas pessoas chegaram a dizer que ele não existiu e que seu nome teria sido criado para unificar os adeptos de uma seita filosófico-religiosa. A doutrina e a vida de Pitágoras, desde os tempos da antiguidade, vem envolta num véu de mistério. Dele não restou sequer um fragmento escrito. Apesar de todo o mistério que envolve a sua vida, as hipóteses mais aceitas por todos que se debruçaram a estudar sua vida são de que Pitágoras nasceu por volta do ano 570 a.C na cidade de Samos, uma Ilha Grega situada no Mar Egeu.

Relata a lenda que Pitágoras era filho de Menesarco - um rico comerciante de Samos - e de Partêmis. No início de sua juventude Pitágoras estudou filosofia sob os cuidados de um discípulo de Tales, o filósofo Ferecídio, tendo sido, posteriormente, aluno do próprio Tales, em Mileto. Tales era o maior sábio da época e considerado o fundador da matemática grega.

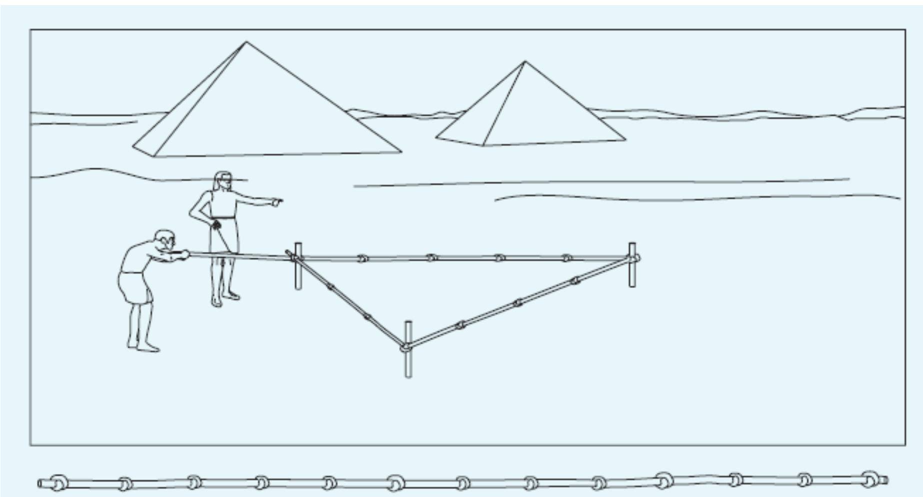
Ainda bem jovem, aconselhado por Tales foi para o Egito estudar geometria. Viajou também para a Babilônia e Caldéia. Mas em suas viagens ele não buscava diversão. Queria aprender matemática, pois Egípcios e Babilônios faziam cálculos complexos para construir prédios, por exemplo. Para eles os cálculos deviam dar a resposta certa. Por que isso acontecia era irrelevante. Esse modo de pensar incomodava Pitágoras. Ele queria entender os números e não apenas utilizá-los. Partiu então para Creta a fim de receber os ensinamentos do filósofo Epinêmides e finalmente retornou a Samos em 532 a.C. Mas nessa época a Ilha de Samos era governada pelo temível tirano Polícrates. As condições políticas da ilha o impediram de ensinar livremente sobre suas experiências. Ele condenou publicamente a tirania em Samos.

Polícrates o convidou para participar da corte, mas Pitágoras recusou a oferta pois sabia que o tirano queria silenciá-lo. Fugiu então para uma caverna onde estudava sem temer perseguições. Como queria transmitir conhecimentos pagava um aluno. Mas o estudante gostou muito das aulas e passou a seguí-lo sem ganhar dinheiro.

Na segunda metade do século VI a.C Pitágoras teve que deixar a ilha e ficou exilado em Crotona, no sul da Itália, onde naquela época a presença da linguagem grega era muito forte. O matemático fundou ali uma associação religiosa e secreta, foi perseguido por suas idéias e odiava ser contestado.

Na época em que visitou o Egito Pitágoras ficou impressionado com as pirâmides e desenvolveu o famoso "Teorema de Pitágoras". De acordo com este teorema é possível calcular o lado de um triângulo retângulo conhecendo os outros dois. Dessa forma ele conseguiu provar que num triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Sem dúvidas, "O Teorema de Pitágoras!" é a resposta mais freqüente que as pessoas dão quando perguntamos a elas do que se lembram das aulas de matemática. É também, provavelmente, o mais célebre dos teoremas da matemática. Existem, no entanto, indícios de que o chamado Teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$) já era conhecido dos Babilônios em 1600 a.C. Alguns povos antigos usavam um instrumento muito simples e prático para construir ângulos retos: uma corda. Na corda eles iam fazendo nós sempre em distâncias iguais e depois marcavam três nós a distâncias de três, quatro e cinco nós entre si. Em seguida juntavam o primeiro ao último nó. Quando esticavam a corda, fixando-a nos três nós marcados, obtinham um triângulo retângulo.



1.2 A Sociedade Secreta de Pitágoras

Quando retornou a Samos, por volta de 532 a.C, Pitágoras tinha o desejo de abrir uma escola para difundir seus conhecimentos adquiridos durante suas viagens e seu exílio às margens dos Rios Nilo e Eufrates. Mas Samos tinha mudado e não era mais aquela ilha aprazível dos tempos de sua juventude. O ditador Polícrates, que governava a ilha não queria saber nem de escolas nem de templos. Pitágoras tentou então fundar sua escola no Ocidente, em uma das colônias gregas do sul da Itália, na Magna Grécia.

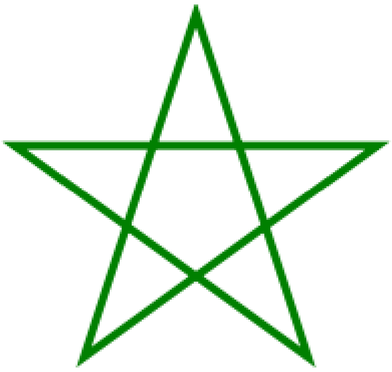
Em Crotona, colônia grega na Magna Grécia, Pitágoras foi bem recebido e fundou sua Escola, Instituto ou Ordem por volta de 530 a.C.

Pitágoras cunhado em moeda

Nesta cidade conheceu Milo, um homem forte que gostava de matemática e filosofia e que deu sua casa para Pitágoras fundar a Irmandade Pitagórica, com cerca de 600 membros, os Pitagóricos. Ali as melhores famílias da cidade lhe confiaram prazerosamente a educação de seus filhos. Em sua escola Pitágoras passou a ensinar aritmética, geometria, música e astronomia, que constituíam as artes liberais e cujo conteúdo tornou-se conhecido como o Quadrivum, que era considerado a bagagem cultural necessária de uma pessoa bem educada. Também havia aulas de religião e moral.

Na escola pitagórica podia ingressar qualquer pessoa, até mesmo mulheres. Nessa época e durante muito tempo, mesmo entre a maioria dos povos, as mulheres não eram admitidas em nenhuma espécie de escola. Conta a lenda que Pitágoras se casou com uma das alunas.

O símbolo da Escola Pitagórica era o pentágono estrelado. O modo de vida e as doutrinas atribuídas a Pitágoras, provenientes de sua escola, recebem o nome de pitagorismo.

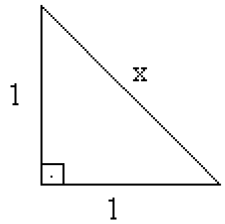


Pentágono Estrelado

Á Escola Pitagórica se concede a glória de ser a "primeira Universidade do mundo". Foi uma entidade parcialmente secreta. Os pitagóricos trocavam conhecimentos sobre temas variados. Eram inteligentes, deviam entender ensinamentos e dar novas idéias. Entre os conceitos que defendiam ou praticavam e entre suas principais descobertas destacam-se:

- A crença na doutrina da Metempsicose, isto é, na transmigração da alma após a morte, de um corpo para outro. Portanto acreditavam na imortalidade da alma e na reencarnação;
- A proibição de beber vinho e comer carne. Seus membros eram vegetarianos e alimentavam-se a base de feijões e lentilhas. Pitágoras se declarou contrário ao sacrifício de animais, muito comum em sua época;
- Lealdade entre seus membros e distribuição comunitária dos bens materias. Seus membros eram proibidos de aceitarem pagamentos em caso de partilhar seus conhecimentos com os outros. Os pitagóricos doavam seus bens para a Irmandade, e caso abandonassem a escola, receberiam o dobro daquilo que doavam e teriam uma lápide com as inscrições de seu nome. Também juravam não revelar descobertas científicas da sociedade para o mundo. A pena para os desobedientes era a morte;
- Austeridade e obediência à hierarquia da escola;
- A purificação da mente pelo estudo da geometria, aritmética, música e astronomia;
- Pitágoras descobriu em que proporções uma corda deve ser dividida para a obtenção das notas musicais dó, ré, mi, etc;

- A classificação dos números em: pares e ímpares, primos e compostos, figurados, perfeitos;
- O máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum;
- Que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos;
- O primeiro número irracional a ser descoberto foi a raiz quadrada de 2, que surgiu exatamente da aplicação do teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo com catetos valendo 1, conforme a figura abaixo:



Temos: $1^2 + 1^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$. Os gregos não conheciam o símbolo da raiz quadrada e diziam simplesmente: “o número que multiplicado por si mesmo é 2”.

Pitágoras proibia seus alunos de estudar ou divulgar números irracionais. Ele os odiava porque contradiziam a teoria dos números como representantes da harmonia do universo. Os irracionais não são inteiros (1, 2, etc.), frações (1/2, 2/3, etc.) ou números decimais que seguem um padrão (por exemplo no número 0,3333 ... o 3 é repetido infinitamente). O número irracional é irregular, como por exemplo, a raiz quadrada de 2, que é igual a 1,41421356 ... Um de seus alunos, Hipaso, descobriu que esse era um número diferente do que os gregos conheciam e contou ao mestre. Pitágoras o condenou a morte.

Durante um quarto de século, mais ou menos, Pitágoras dirigiu a escola fisicamente. Os alunos que se formavam em sua escola saiam para ocupar altos cargos do governo local. Muitos deles deslumbrados com sua sabedoria torciam o nariz para as massas ignorantes, apoiando o partido aristocrático. Relata a lenda que essas massas responderam com violência, incendiaram a escola, prenderam o professor e alguns de seus discípulos e os mataram. Segundo as melhores fontes, Pitágoras deve ter falecido por volta de 497 a.C. A Sociedade Pitagórica continuou após sua morte, tendo desaparecido quando ocorreu o famoso massacre de Metaponto, depois da derrota da liga Crotoniana. Após sua morte, Pitágoras assumiu proporções lendárias aos olhos das gerações que se seguiram.

Acredita-se que aproximadamente 100 anos após a morte de Pitágoras, o filósofo grego Filolau de Crotona (século V a.C.) tenha escrito um livro em que expunha a doutrina pitagórica (que era secreta e reservada apenas aos seus discípulos). Os fragmentos de seu livro influenciaram fortemente Platão, que, segundo relata a lenda, teria mandado comprar o referido livro pagando por ele uma razoável quantia.

1.3 Rituais Matemáticos

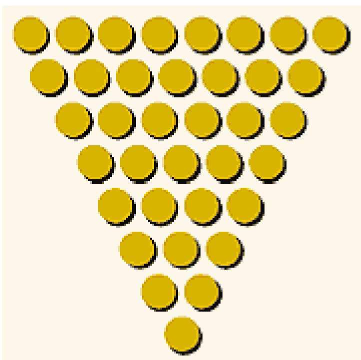
Pitágoras e seus discípulos imaginaram uma série de exercícios matemáticos que serviam como rituais para suas vidas. Quem estivesse interessado em participar da Sociedade Secreta de Pitágoras precisaria entender uma série de conceitos e passar por algumas provas.

a) A primeira prova

A primeira prova baseia-se no símbolo abaixo, que é também o símbolo das olimpíadas.

O objetivo dessa prova é preencher todas as seções definidas pelos círculos com um número de 1 a15, sem repetição. A soma dos números de cada círculo deve ser igual a um numero primo. O total dessas somas deve ser o mais alto possível. A pessoa que conseguir obter o valor mais alto é o vencedor da prova.

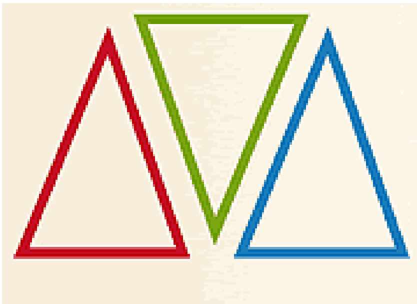
b) A segunda prova



Passando pela primeira prova o candidato está apto a enfrentar o segundo teste de Pitágoras. Imagine uma platéia de 36 lugares com dois tipos de pessoas: os que usam roupa vermelha e os que usam roupa azul. Quatro de cada tipo devem sentar na fila da frente. Os de roupa vermelha preferem sentar atrás de um sujeito de roupa vermelha e outro de roupa azul. Os de azul se sentem melhor sentando-se atrás de dois de roupa azul ou de dois de roupa vermelha. Fora os oito sujeitos da frente, existem 11 de roupa azul e 17 de roupa vermelha. Como ficaria a platéia ?

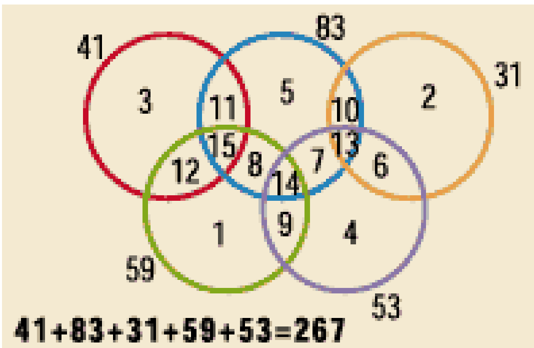
c) A terceira prova

Os pitagóricos tinham conceitos estranhos. Por exemplo, eles achavam que havia 17 tipos de alimentos proibidos, sendo 17 o mais divino dos números primos. Por isso, eles imaginaram o seguinte exercício: faça um arranjo colocando um triângulo em cima do outro de maneira que formem 17 intersecções com os números de 1 a 17. Essas intersecções seriam os locais dos alimentos proibidos.

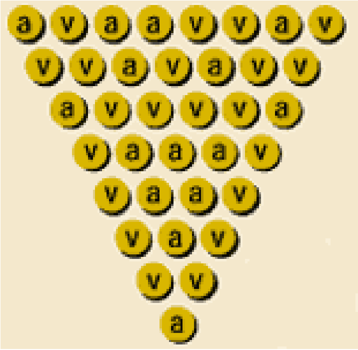


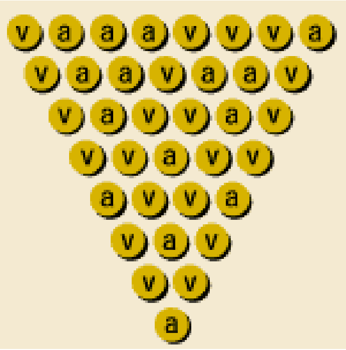
Veja agora as respostas da 3 provas acima:

Resposta da primeira prova de Pitágoras

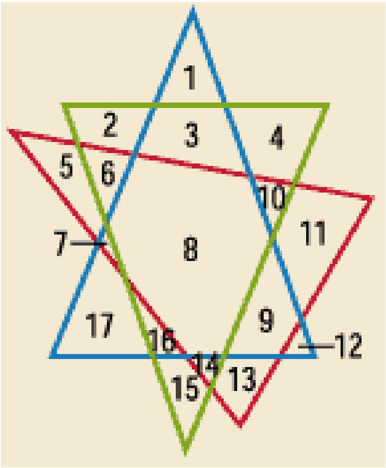


Resposta da segunda prova de Pitágoras





Resposta da terceira prova de Pitágoras



Capítulo 2

Geometria: uma ciência muito antiga

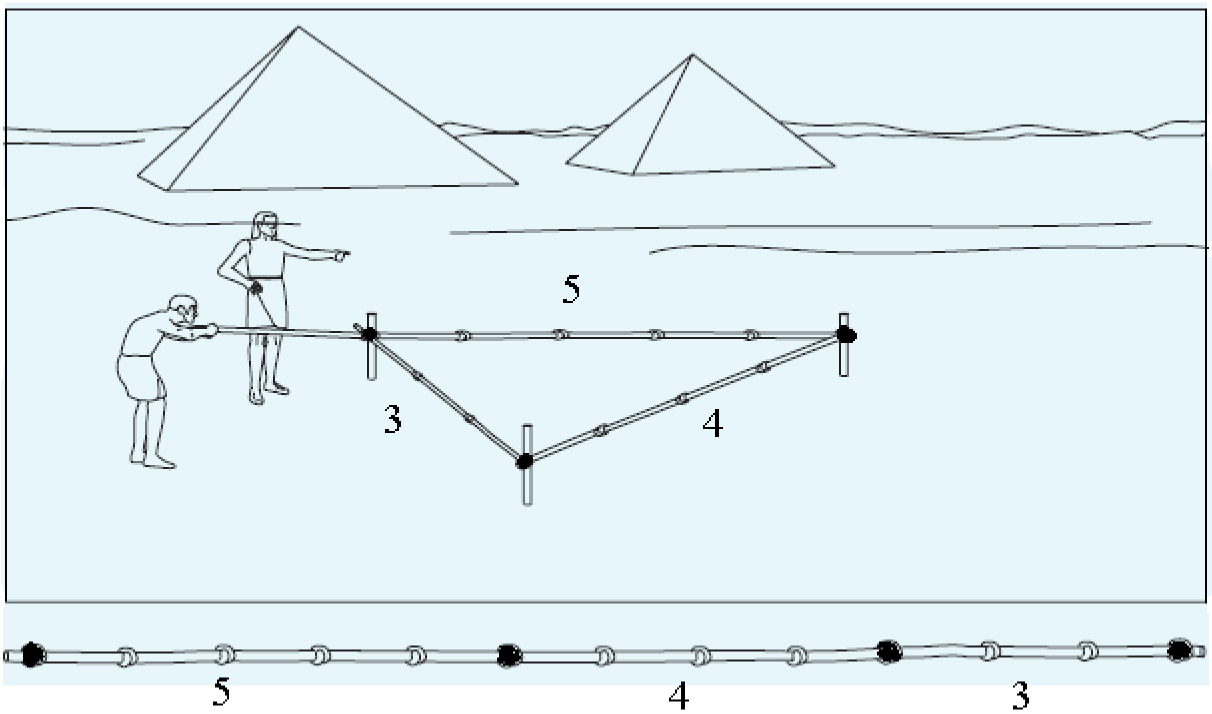
Desde épocas muito remotas, quando começou a erguer casas para se abrigar, o homem sentiu a necessidade de “construir” ângulos retos para verificar se as paredes estavam “no esquadro”, isto é, perpendiculares ao chão. Atualmente há instrumentos apropriados para isso, mas não foi sempre assim. Veremos o que a geometria tem a ver com tudo isso.

A geometria é uma ciência muito antiga

O triângulo de lados 3, 4 e 5 é utilizado há muitos séculos pelos construtores. Talvez você já tenha ouvido falar das famosas pirâmides egípcias: são enormes monumentos de pedra construídos há muitos séculos.

A maior dessas pirâmides, conhecida como Grande Pirâmide ou Pirâmide de Quéops, foi construída há cerca de 4.500 anos. Sua base é um enorme quadrado, cujo lado mede aproximadamente 230 m, dentro do qual caberiam quatro quarteirões. Sua altura, que é de 146 m, equivale à altura de um prédio de 50 andares. Veja na figura abaixo esta pirâmide.

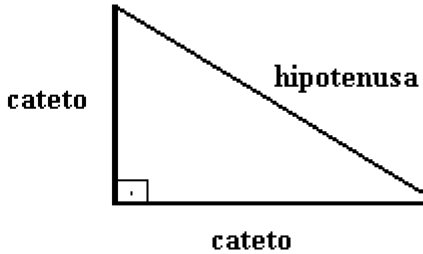
Os pesquisadores impressionaram-se com o alto grau de precisão dessas construções. A base da Grande Pirâmide é quase um quadrado perfeito: as diferenças entre as medidas de seus lados são muito pequenas e seus ângulos são todos praticamente iguais a 90º. Tais fatos nos levam a crer que os egípcios desenvolveram grandes conhecimentos de geometria. Os diversos documentos escritos naquela época revelam que, por exemplo, o triângulo de lados 3, 4 e 5 já era conhecido dos arquitetos e construtores egípcios. Diz a História que os construtores usavam uma corda, na qual davam nós a intervalos de igual distância, formando com ela esse tipo de triângulo.



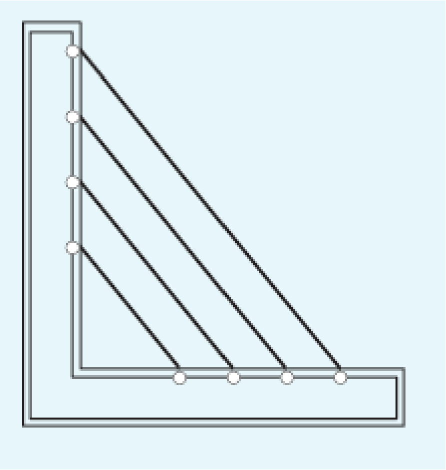
Os arquitetos do Egito Antigo construíam ângulos retos usando uma simples corda com nós.

O triângulo retângulo

Um triângulo que tem um ângulo de 90º (ângulo reto) é chamado de triângulo retângulo. Nele, os lados recebem os seguintes nomes:



A hipotenusa é o maior dos lados e é o lado oposto ao ângulo reto.

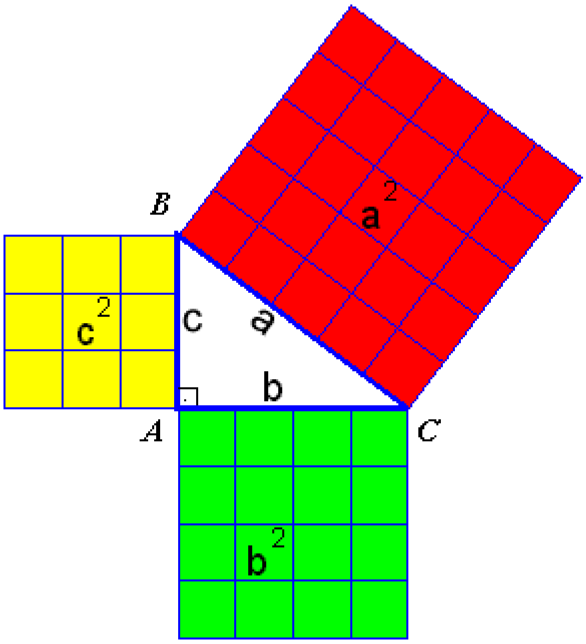


Curiosidade

Hipotenusa era o nome dado às cordas do instrumento musical chamado lira. Essas cordas formavam triângulos retângulos com os lados do instrumento.
A lira, assim como a harpa, são os mais antigos instrumentos de corda. Na Grécia, a invenção da lira era atribuída a Apolo, deus da mitologia grega.

Pitágoras e o triângulo retângulo

Quando falamos em triângulo retângulo, lembramos imediatamente de Pitágoras, o grande matemático que nasceu na Grécia Antiga, por volta do ano 570 a.C. Acredita-se que ele tenha obtido conhecimentos geométricos com agrimensores egípcios, que já usavam o triângulo de lados 3, 4 e 5.



Pitágoras percebeu que, construindo um quadrado sobre cada um dos lados de um triângulo de lados 3u, 4u e 5u (sendo u uma unidade de comprimento qualquer) como mostra a figura acima, apareceria a seguinte relação:
“A área do quadrado formado sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados formados sobre os catetos.”

No exemplo acima, podemos observar que a hipotenusa tem medida 5u e os catetos tem medidas 3u e 4u. Observa-se também que o quadrado vermelho construído sobre a hipotenusa possuí 25 unidades de área. Já os quadrados verde e amarelo construídos sobre os catetos possuem respectivamente 16 e 9 unidades de área. Como 25 = 16 + 9 ou $5^2 = 4^2 + 3^2$ então, neste caso particular verifica-se a veracidade do teorema de Pitágoras.

A seguir daremos algumas demonstrações de que o teorema de Pitágoras vale para quaisquer medidas de lados de um triângulo retângulo.

Capítulo 3

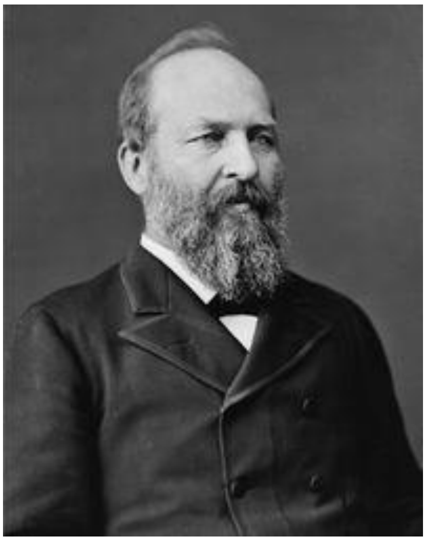
Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Em 1940 Elisha Scott Loomis, um professor de matemática que trabalhou em Cleveland, Ohio (Estados Unidos) publicou o livro *The Pythagorean Proposion,* um trabalho contendo 367 demonstrações do teorema de Pitágoras, incluindo a demonstração de James Garfield, vigésimo Presidente dos Estados Unidos, bem como de muitas outras demonstrações enviadas por correspondentes, alguns deles jovens.

Neste trabalho serão apresentadas 3 demonstrações do teorema de Pitágoras, duas geométricas e uma algébrica.

3.1 A demonstração do Presidente

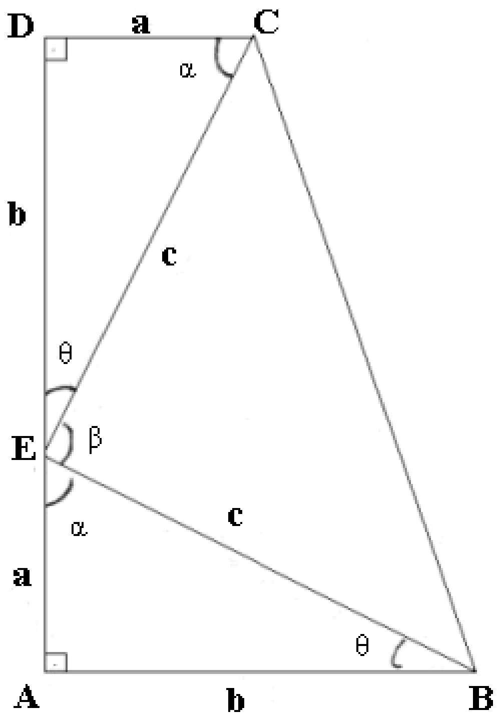
O teorema de Pitágoras e o Presidente Garfield



James Abran Garfield (1831-1881), um general americano, foi o vigésimo Presidente dos Estados Unidos em 1881, durante apenas 4 meses pois foi assassinado neste mesmo ano. Em resumo, no dia 2 de julho de 1881, em uma estação de trem em Washington, um americano atirou contra Garfield, que agonizou na Casa Branca por semanas. Garfield morreu dois meses depois por infecções e hemorragia interna.

Mas Garfield era um grande estudioso e entusiasta da matemática. Em 1876, alguns anos antes de tornar-se Presidente dos Estados Unidos, quando estava na câmara de representantes, ele rabiscou num papel uma interessante demonstração do Teorema de Pitágoras. O New England Journal Of Education publicou esta demonstração. Ele demonstrou o teorema de Pitágoras da seguinte forma:

Primeiramente construímos um trapézio retângulo de base maior b, base menor a e altura a + b.



Veja que o trapézio fica composto por 3 triângulos, sendo que dois deles por construção são retângulos, os triângulos ΔAEB e o ΔDEC idênticos e de lados a, b e c. O terceiro triângulo ΔBEC vamos provar que também será retângulo.

Como os triângulos ΔABE e ΔDEC tem os três lados ordenadamente iguais, então pelo caso LLL de congruência de triângulos eles são congruentes, logo as medidas de seus ângulos internos também são iguais, ou seja:

$$\angle ABE = \angle DEC = \theta \text{ e também } \angle AEB = \angle ECD = \alpha$$

Por definição a soma dos ângulos internos do triângulo ΔAEB é 180º, então:

$$\angle AEB + \angle ABE + \angle EAB = 180º$$

O ângulo $\angle$EAB é reto por construção e como $\angle AEB = \alpha$ e $\angle ABE = \theta$, logo:

$$\alpha + \theta + 90º = 180º \Rightarrow \alpha + \theta = 90º$$

Agora vamos chamar ângulo $\angle BEC = \beta$. Sabemos que o ângulo $\angle$DEA por construção é um ângulo raso, ou seja. $\angle DEA = 180º$. Mas também $\angle DEA = \alpha + \theta + \beta = 180º$.

$$\text{Como } \alpha + \theta = 90º \text{ então } 90º + \beta = 180º \Rightarrow \beta = 90º$$

Ou seja o ângulo $\angle$BEC é reto e o triângulo ΔCEB é retângulo.

Assim demonstramos que o trapézio é composto por 3 triângulos retângulos, ΔAEB, ΔBEC e ΔCED e suas respectivas áreas são:

$$\text{área } \Delta\text{AEB} = \frac{a.b}{2}\ ,\ \text{área } \Delta\text{BEC} = \frac{\text{c.c}}{2}\ \text{ e área } \Delta\text{CED} = \frac{a.b}{2}$$

A soma das áreas dos triângulos ΔAEB, ΔBEC e ΔCED será igual a área do trapézio ABCD com bases a, b e altura a + b, então:

$$\frac{a.b}{2} + \frac{\text{c.c}}{2} + \frac{a.b}{2} = \frac{(a+b).(a+b)}{2} \Rightarrow \frac{2ab}{2} + \frac{c.c}{2} = \frac{a.a+2ab+b.b}{2}$$

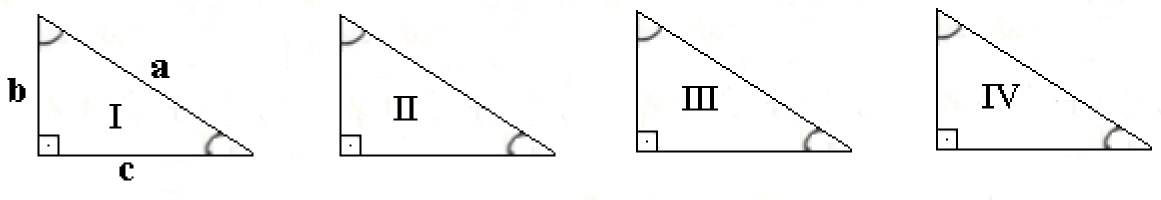
$$\Rightarrow \text{a.b} + \frac{\text{c.c}}{2} = \frac{a.a}{2} + \text{ab} + \frac{b.b}{2} \Rightarrow \frac{\text{c.c}}{2} = \frac{a.a}{2} + \frac{b.b}{2}$$

Logo $c^2 = a^2 + b^2$ o que conclui a demonstração.

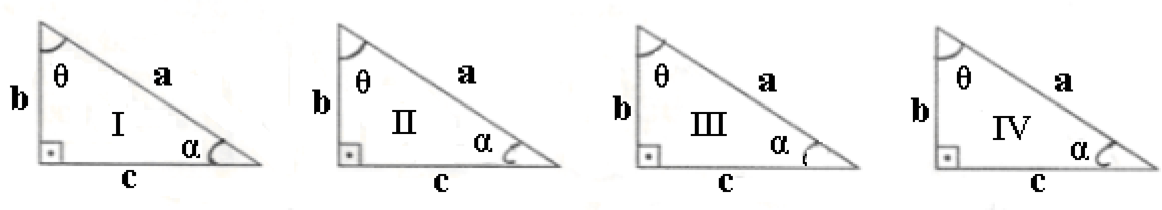
3.2 A demonstração Chinesa

Para esta segunda demonstração, vamos nos remeter a figura decorrente de uma demonstração apresentada por Zhõubì suànjing. Um chinês cujos escritos remontam à dinastia Hàn (206 a.C - 220 d.C) e sobrevivem até os dias atuais.

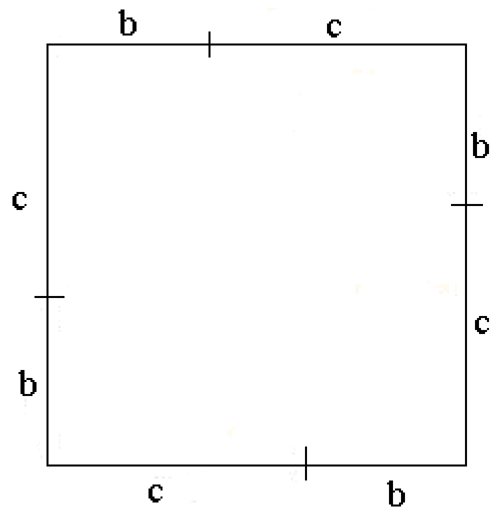
<u>Demonstração</u>: Primeiramente construímos 4 triângulos retângulos iguais, com catetos medindo b e c, e hiponetusa medindo a conforme a figura abaixo:



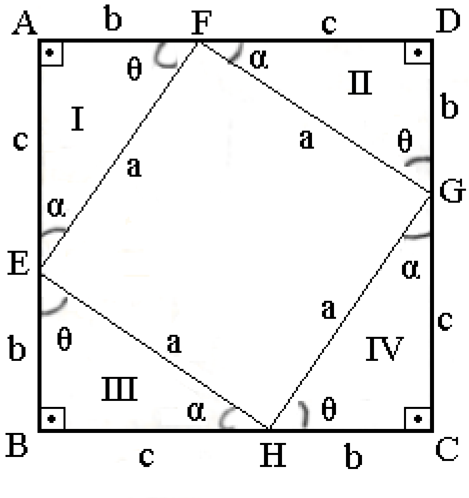
Por definição, um dos ângulos de cada triângulo retângulo mede 90º. Os outros 2 ângulos de cada triângulo retângulo vamos denotar por α e θ. Pela definição de soma dos ângulos internos de um triângulo temos que $\alpha + \theta + 90º = 180º$. Logo $\alpha + \theta = 90º$



Agora construímos um quadrado cujo lado é a soma dos 2 catetos do triângulo retângulo, ou seja, o lado do quadrado vale b + c conforme a figura abaixo:



Agora veja que dentro do quadrado de lado b + c podemos encaixar perfeitamente os 4 triângulos retângulos do início da nossa demonstração. Vamos então encaixar os 4 triângulos retângulos dando nome a todos os vértices formados pela intersecção dos lados de cada triângulo conforme a figura abaixo:



Veja agora que o nosso quadrado de lado b + c fica composto pelos 4 triângulos retângulos do início da demonstração, mais um quadrilátero EFGH de lado a que vamos demonstrar agora que se trata de um quadrado.

Como os 4 lados do quadrilátero EFGH são iguais, para demonstrarmos que é um quadrado basta provar que seus 4 ângulos internos são retos, ou seja, medem 90º cada um.

Começamos pelo ângulo $\angle$FEH. Veja que ele está apoiado no lado AB do quadrado.

Como o ângulo $\angle$AEB mede 180º e $\angle AEB = \alpha + \theta + \angle FEH$.

Logo $\alpha + \theta + \angle FEH = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \angle FEH = 180^\circ \Rightarrow \angle \mathbf{FEH = 90^\circ}$

De maneira análoga:

Ângulo $\angle$AFD mede 180º e $\angle AFD = \alpha + \theta + \angle EFG$.

Logo $\alpha + \theta + \angle EFG = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \angle EFG = 180^\circ \Rightarrow \angle \mathbf{EFG = 90^\circ}$

Ângulo $\angle$DGC mede 180º e $\angle DGC = \alpha + \theta + \angle FGH$.

Logo $\alpha + \theta + \angle FGH = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \angle FGH = 180^\circ \Rightarrow \angle \mathbf{FGH = 90^\circ}$

Ângulo $\angle$BHC mede 180º e $\angle BHC = \alpha + \theta + \angle EHC$.

Logo $\alpha + \theta + \angle EHC = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \angle EHC = 180^\circ \Rightarrow \angle \mathbf{EHC = 90^\circ}$

Dessa forma provamos então que o quadrilátero EFGH é um quadrado. Como a área do quadrado grande de lado b + c é igual a área dos 4 triângulos retângulos de lados a, b e c mais a área do quadrado EFGH de lado a, podemos então igualar as áreas.

A área do quadrado ABCD é $(b + c)^2$,

a área de cada triângulo retângulo é $\frac{b.c}{2}$

e a área do quadrado EFGH é a^2.

Igualando as áreas obtemos: $(b + c)^2 = 4.\frac{b.c}{2} + a^2$

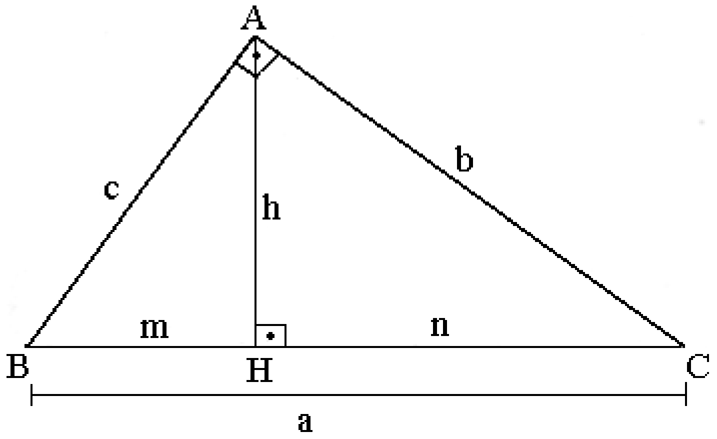
$$\Rightarrow\ b^2 + 2.b.c + c^2 = 2.b.c + a^2 \quad \Rightarrow\ a^2 = b^2 + c^2$$

Assim demonstramos o Teorema de Pitágoras.

3.3 Demonstração Algébrica

Esta demonstração é baseada no caso AA de semelhança de triângulos.

Demonstração: Seja ABC um triângulo retângulo em A, e considere os seguintes elementos do triângulo ABC conforme a figura abaixo:



$\overline{BC}$ = a : hipotenusa

$\overline{AC}$ = b : cateto

$\overline{AB}$ = c : cateto

$\overline{BH}$ = m : projeção do cateto c sobre a hipotenusa

$\overline{HC}$ = n : projeção do cateto b sobre a hipotenusa

$\overline{AH}$ = h : altura relativa a hipotenusa

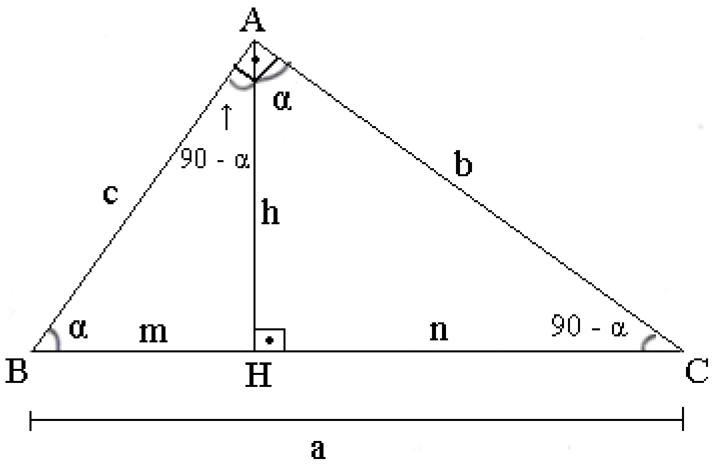
Vamos primeiro provar que os triângulos ΔABC, ΔABH e ΔAHC são semelhantes:

Seja o ângulo $\angle$ABH = α, logo como o triângulo ΔABH é retângulo, então $\angle$BAH = 90 - α pois é o complemento do ângulo $\angle$ABH.

O ângulo $\angle$A é reto, mas como temos $\angle$A = $\angle$BAH + $\angle$HAC e também $\angle$BAH = 90 - α, logo 90 = 90 - α + $\angle$HAC $\Rightarrow$ $\angle$HAC = α.

Agora como o triângulo ΔAHC também é retângulo então ângulo $\angle$HCA = 90 - α pois é o complemento do ângulo $\angle$HAC.

Repare agora na figura abaixo que os triângulos ΔABC, ΔABH e ΔAHC além de serem retângulos possuem em comum os ângulos $\angle\, \alpha$ e $\angle$ 90 - α .



Logo pelo caso AA de semelhança de triângulos, os triângulos ΔABC, ΔABH e ΔAHC são semelhantes, ou seja: ΔABC ~ ΔABH ~ ΔAHC.

Então podemos aplicar neles uma propriedade de triângulos semelhantes que diz que: “lados opostos à ângulos congruentes são proporcionais”.

O triângulo Δ ABC é semelhante ao Δ ABH.

No Δ ABC o lado oposto ao ângulo reto é o lado a ;

No Δ ABH o lado oposto ao ângulo reto é o lado c ;

No Δ ABC o lado oposto ao ângulo 90 - α é o lado c ;

No Δ ABH o lado oposto ao ângulo 90 - α é o lado m .

Logo pela propriedade de semelhança de triângulos temos $\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a.m$ **(1)**

O triângulo Δ ABC é semelhante ao Δ AHC.

No Δ ABC o lado oposto ao ângulo reto é o lado a ;

No Δ AHC o lado oposto ao ângulo reto é o lado b ;

No Δ ABC o lado oposto ao ângulo α é o lado b ;

No Δ AHC o lado oposto ao ângulo α é o lado n .

Logo pela propriedade de semelhança de triângulos temos: $\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a.n$ **(2)**

Somando membro a membro **(1) e (2)** obtemos:

$b^2 + c^2 = a.m + a.n \Rightarrow b^2 + c^2 = a.(m + n)$

Mas como m + n = a então temos $b^2 + c^2 = a.a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$

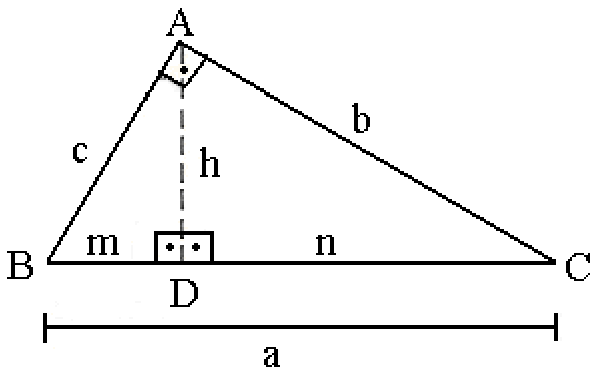
Logo está demonstrado o Teorema de Pitágoras.

Capítulo 4

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Neste capítulo vamos mostrar algumas relações métricas no triângulo retângulo que surgem da aplicação do Teorema de Pitágoras e da semelhança de triângulos.

Vamos considerar um triângulo ABC, retângulo em A, e conduzir um segmento $\overline{AD}$ perpendicular a $\overline{BC}$, com D em $\overline{BC}$. Podemos caracterizar os seguintes elementos neste triângulo retângulo:



$\overline{BC}$ = a : hipotenusa

$\overline{AC}$ = b : cateto

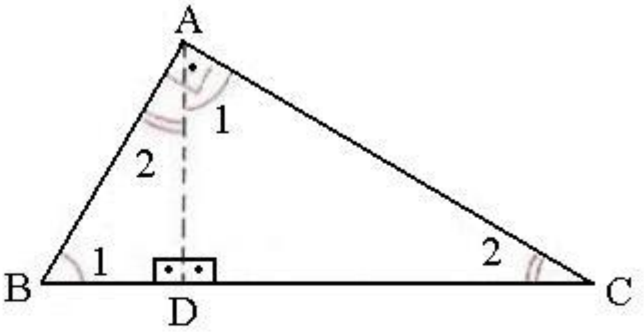
$\overline{AB}$ = c : cateto

$\overline{BD}$ = m : projeção do cateto c sobre a hipotenusa

$\overline{CD}$ = n : projeção do cateto b sobre a hipotenusa

$\overline{AD}$ = h : altura relativa a hipotenusa

Conduzindo a altura $\overline{AD}$ relativa a hipotenusa do triângulo retângulo ABC, obtemos dois triângulos retângulos ΔDBA e ΔDAC semelhantes ao triângulo ABC.
A semelhança dos triângulos se deve à congruência dos 2 ângulos indicados na figura abaixo:

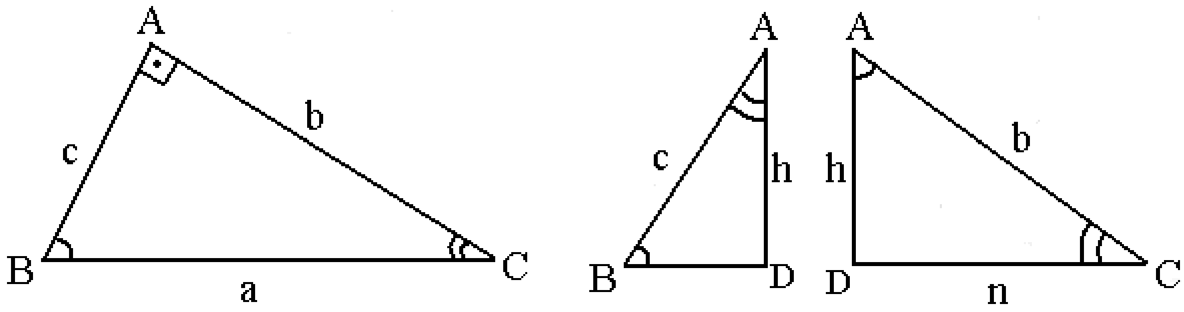


Veja que: $\angle B = 1$ (complemento do $\angle C$) $\Rightarrow$ $\angle B = 90 - C$ $\Rightarrow$ $\angle BAD = \angle C = 2$

$\angle C = 2$ (complemento do $\angle B$) $\Rightarrow$ $\angle C = 90 - B$ $\Rightarrow$ $\angle BAC = \angle B = 1$

Logo pelo caso AA de semelhança de triângulos temos:

$\Delta ABC \sim \Delta DBA$ $\quad\quad$ $\Delta ABC \sim \Delta DAC$ $\quad\quad$ $\Delta DBA \sim \Delta DAC$



Com base nessas semelhanças citadas podemos aplicar a propriedade de triângulos semelhantes que diz que: “lados opostos à ângulos congruentes são proporcionais”.

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow bc = ah \quad (4)$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am \quad (2)$$

$$\frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Rightarrow ch = bm \quad (6)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an \quad (1)$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow bc = ah \quad (4)$$

$$\frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Rightarrow bh = cn \quad (5)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{n} \Rightarrow bh = cn \quad (5)$$

$$\Delta DBA \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{m}{h} \Rightarrow ch = bm \quad (6)$$

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn \quad (3)$$

Resumindo as relações encontradas, e excluindo as repetidas, temos:

(1) $b^2 = a.n$	(3) $h^2 = m.n$	(5) $b.h = c.n$
(2) $c^2 = a.m$	(4) $b.c = a.h$	(6) $c.h = b.m$

Enunciados: Média proporcional dos segmentos r e s dados é o segmento x que, com os segmentos dados, forma as seguintes proporções:

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{s} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{r} = \frac{s}{x}$$

Dessas proporções segue que: $x^2 = r.s$ ou ainda $x = \sqrt{r.s}$

A média proporcional de r e s coincide com a média geométrica de r e s. Dessa forma podemos enunciar que em qualquer triângulo retângulo:

1º) cada cateto é média proporcional (ou média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.

$$b^2 = a.n \qquad\qquad c^2 = a.m$$

2º) a altura relativa à hipotenusa é média proporcional (ou média geométrica) entre os segmentos que ela determina sobre a hipotenusa .

$$h^2 = m.n$$

3º) o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

$$b.c = a.h$$

4º) o produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa.

$$b.h = c.n \qquad\qquad c.h = b.m$$

Capítulo 5

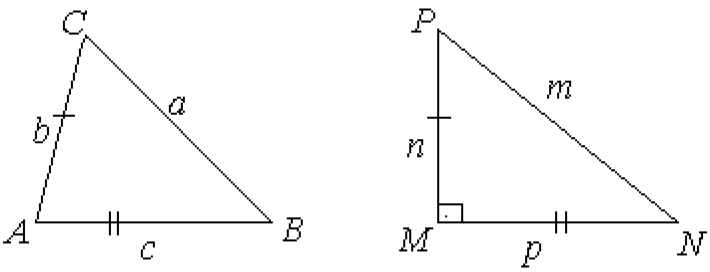
A recíproca do Teorema de Pitágoras

Já vimos no capítulo sobre demonstrações do teorema de pitágoras que: "Num triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa"

Vamos provar agora que a recíproca desta afirmação também é verdadeira, ou seja: "Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo."

Hipótese: Um ΔABC de lados a, b e c em que $a^2 = b^2 + c^2$

Tese: O ΔABC é retângulo.



Demonstração: Construindo um triângulo MNP, retângulo em M e cujos catetos $\overline{MN}$ e $\overline{MP}$ sejam respectivamente congruentes a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, como mostra a figura acima, temos que:

Como ΔMNP é retângulo em M $\Rightarrow$ $m^2 = n^2 + p^2$

Mas como n = b e p = c, temos então que $m^2 = b^2 + c^2$

Logo $m^2 = a^2$, ou seja, m = a.

Assim os triângulos ΔABC e ΔMNP possuem os 3 lados iguais. Então pelo caso LLL de congruência de triângulos, o $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ e, como ΔMNP é retângulo em M, consequentemente o ΔABC é retângulo em A.

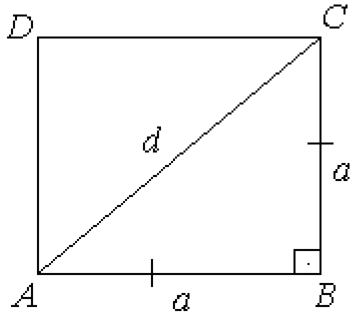
Dessa forma a recíproca do Teorema de Pitágoras é verdadeira.

Capítulo 6

Aplicações do Teorema de Pitágoras

Diagonal do Quadrado

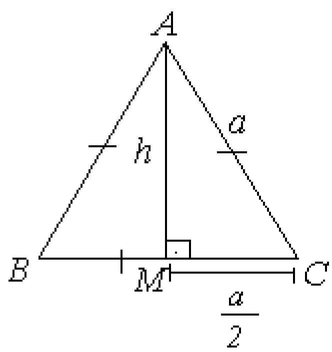
Dado um quadrado de lado a, podemos calcular sua diagonal d. Sendo ABCD o quadrado de lado a, aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔABC obtemos:



$d^2 = a^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad d^2 = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad d = a\sqrt{2}$

Altura do triângulo eqüilátero

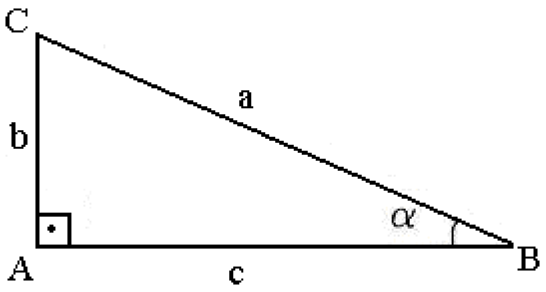
Dado um triângulo eqüilátero de lado a, podemos calcular sua altura h. Sendo ABC um triângulo eqüilátero de lado a, e M o ponto médio de $\overline{BC}$, calculamos $\overline{AM}$ = h aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔAMC.



Temos então: $h^2 + \left[\frac{a}{2}\right]^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = a^2 - a^2/4$

$\Rightarrow \quad h^2 = 3a^2/4 \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Seno, Cosseno e Tangente de 30º, 45º e 60º



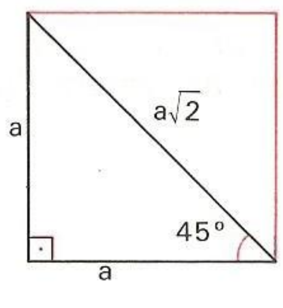
Seja α a medida de um dos ângulos do triângulo retângulo da figura acima. Definindo:

$$\text{seno } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{cosseno } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\text{tangente } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \quad \Rightarrow \quad \text{tg } \alpha = \frac{b}{c}$$

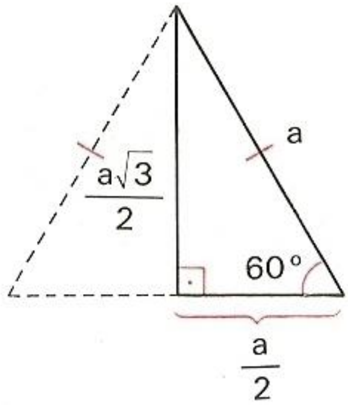
Agora com base nas figuras e deduções anteriores sobre diagonal do quadrado e altura do triângulo eqüilátero, obtemos:



$$\text{sen } 45^{\circ} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^{\circ} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

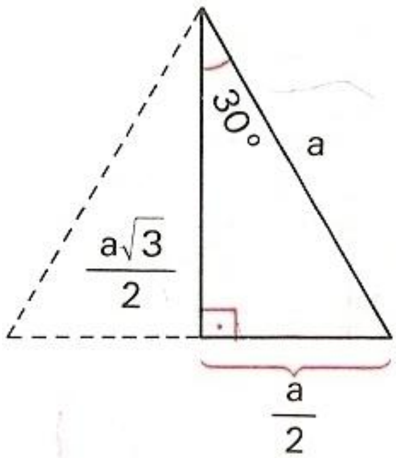
$$\text{tg } 45^{\circ} = \frac{a}{a} \quad \Rightarrow \quad \text{tg } 45^{\circ} = 1$$



$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{a} \quad \Rightarrow \quad \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$$



$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Capítulo 7

Exercícios Resolvidos

Neste capítulo você encontrará uma série de exercícios resolvidos que envolvem direta e indiretamente o Teorema de Pitágoras, bem como relações e identidades trigonométricas. A maioria dos exercícios é de simples resolução.

1 – Em um triângulo equilátero, a altura (h) mede $\sqrt{3}$ cm. Qual é seu perímetro ?

__Resolução__: Para saber o perímetro do triângulo precisamos da medida do lado do triângulo. Para isso vamos usar a relação entre altura (h) e lado (l) de um triângulo eqüilátero deduzida no capítulo sobre aplicações do Teorema de Pitágoras.

Temos que $h = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$, como $h = \sqrt{3}$ então:

$$\sqrt{3} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{3} = l\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad l = 2$$

Logo como é um triângulo o perímetro será $3.\ l = 3.(2) = 6$ cm

__Resposta__: Perímetro = 6 cm.

2 – Se a diagonal de um quadrado mede 17 cm, qual a área desse quadrado ?

__Resolução__: Num quadrado de lado l a diagonal d é dada por $d = l\sqrt{2}$.

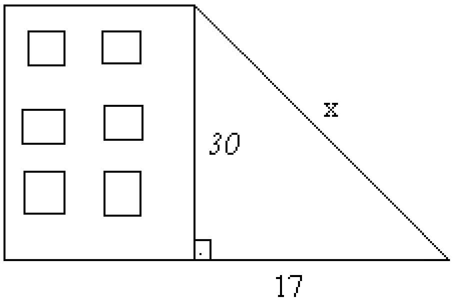
Como d = 17 temos: $17 = l\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad l = \dfrac{17}{\sqrt{2}}$ cm

Já que a área do quadrado é $A = l^2$ segue que $A = \left[\dfrac{17}{\sqrt{2}}\right]^2$ cm^2 $\Rightarrow$ $A = \dfrac{289}{4}$ cm^2

__Resposta__: Área = $\dfrac{289}{4}$ cm^2.

3 – O último andar de um prédio de 30 m de altura está em chamas. Para atingir o aparta- mento e tentar apagar o fogo os bombeiros colocaram uma escada à uma distância lateral de 17 m do prédio. Qual era o tamanho dessa escada ?

__Resolução__: Repare na figura abaixo que basta aplicarmos diretamente o teorema de Pitágoras para achar o tamanho x da escada.



Sendo x o tamanho (em metros) da escada, temos pelo teorema de Pitágoras que:

$$x^2 = 30^2 + 17^2$$

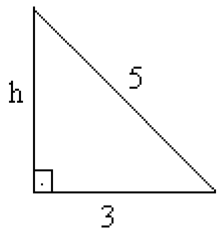
$$x^2 = 900 + 289$$

$$x^2 = 1189 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{1189}\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad x = 34{,}48\ \text{m (aproximadamente)}$$

Resposta: A escada tinha aproximadamente 34,48 metros.

4 – Uma escada de 5 m de comprimento está apoiada num muro. O pé da escada está afas-tado 3 m da base do muro. Qual é a altura no muro que a escada alcança ?

Resolução: Seja h a altura do muro. Analisando o problema vemos que ele corresponde a um triângulo retângulo, conforme a figura abaixo:



Aplicando Pitágoras temos: $5^2 = 3^2 + h^2$

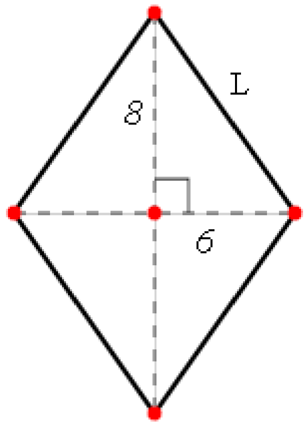
$$25 = 9 + h^2$$

$$25 - 9 = h^2 \quad \Rightarrow \quad 16 = h^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{16} \quad \Rightarrow \quad h = 4\ \text{m}$$

Resposta: h = 4 metros.

5 – Num losango, as diagonais medem 16 cm e 12 cm. Determine a medida do lado do losango.

Resolução: Como um losango possui os 4 lados iguais e suas diagonais são perpendiculares entre si cruzando-se no ponto médio e determinando 4 triângulos retângulos iguais, conforme a figura abaixo. Logo podemos aplicar Pitágoras:



Temos: $l^2 = 8^2 + 6^2$

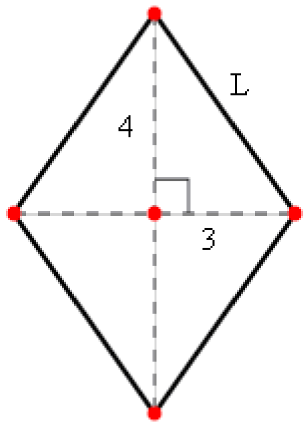
$l^2 = 64 + 36$

$l^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{100} \quad \Rightarrow \quad l = 10$ cm

Resposta: l = 10 cm

6 – As diagonais de um losango medem 6 cm e 8 cm. Qual é o perímetro desse losango ?

Resolução: Primeiramente vamos calcular o lado do losango.



Aplicando Pitágoras: $l^2 = 4^2 + 3^2$

$l^2 = 16 + 9$

$l^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{25} \quad \Rightarrow \quad l = 5$ cm

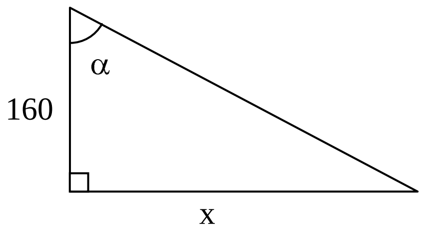
Como um losango possui os 4 lados iguais então seu perímetro será:

$$4.\ l = 4.(5) = 20 \text{ cm}$$

Resposta: Perímetro = 20cm.

7 - Num campeonato de asa-delta, um participante se encontra a uma altura de 160 m e vê o ponto de chegada a um ângulo α, conforme a figura. Calcular a componente

horizontal x da distância aproximada em que ele está desse ponto de chegada, sabendo que sen α = 0,8.



Resolução: Aplicando a identidade trigonométrica $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ vamos obter:

$$(0,8)^2 + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha = 1 - \frac{64}{100}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{100-64}{100} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{36}{100}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{36}{100}} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{6}{10}$$

Agora podemos obter $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = \dfrac{\frac{8}{10}}{\frac{6}{10}}$

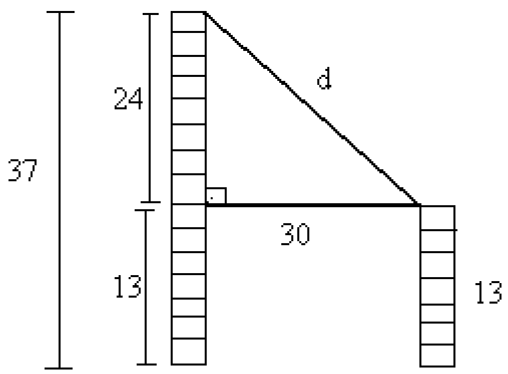
$$\Rightarrow \quad tg\alpha = \frac{8}{10} \text{ x } \frac{10}{6} \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = \frac{8}{6}$$

Mas como $tg\alpha = \dfrac{CO}{CA} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{8}{6} = \dfrac{x}{160} \quad \Rightarrow \quad 6x = 1280$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1280}{6} \quad \Rightarrow \quad x = 213,33$$

Resposta: O participante está a uma distância aproximada de 213,33 m do ponto de chegada.

8 – Duas torres, de 13 m e 37 m de altura, distam 30 m uma da outra. Qual é a distância entre os extremos dessas torres ? (as torres se localizam num terreno plano).



<u>Resolução</u>: Observe na figura acima que a torre maior mede 24 m a mais que a menor , e a distância entre os extremos das torres fica sendo a hipotenusa de um triângulo retângulo.

Logo aplicando o teorema de Pitágoras vamos obter:

$$d^2 = 30^2 + 24^2$$

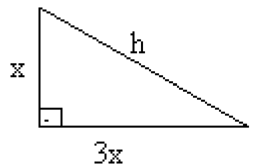
$$d^2 = 900 + 576$$

$$d^2 = 1476 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{1476} \quad \Rightarrow \quad d = 38{,}41 \text{ m}$$

<u>Resposta</u>: A distância entre os extremos das torres é de aproximadamente 38,41 metros.

9 – Calcule a área de um triângulo retângulo, sabendo que um de seus catetos mede o triplo do outro e que seu perímetro vale 8 + 2 $\sqrt{10}$ unidades.

<u>Resolução</u>: Seja um triângulo retângulo com um cateto medindo x e o outro consequentemente 3x conforme a figura abaixo:



Vamos primeiro achar a hipotenusa h em função de x.

Temos: $h^2 = x^2 + (3x)^2$

$h^2 = x^2 + 9x^2$

$h^2 = 10x^2 \quad \Rightarrow \quad h = x\sqrt{10}$

Como sabemos o perímetro vamos somar os 3 lados do triângulo para encontrar x:

Então teremos: $x + 3x + x\sqrt{10} = 8 + 2\sqrt{10}$

$\Rightarrow \quad 4x + x\sqrt{10} = 8 + 2\sqrt{10}$

$\Rightarrow \quad x.(4 + \sqrt{10}) = 2.(4 + \sqrt{10})$

Cancelando o termo $4 + \sqrt{10}$ vamos obter x = 2

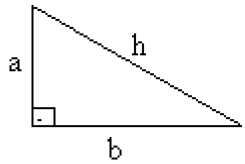
Logo o cateto x vale 2 e o cateto 3x vale 3.2 = 6

Como 3x é a base e x é a altura do triângulo vamos aplicar esses valores na fórmula da área de um triângulo:

$$\text{Área } \Delta = \frac{b.h}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Área } \Delta = \frac{6.2}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Área } \Delta = 6 \text{ unidades de área}$$

<u>Resposta</u>: Área do triângulo = 6 unidades de área.

10 – Calcule o comprimento dos catetos de um triângulo retângulo, sabendo que a razão entre eles é $\frac{4}{3}$ e que o perímetro é 36 m.



<u>Resolução</u>: Sejam a e b os catetos do triângulo retângulo, então pelo enunciado temos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad 3a = 4b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4b}{3}$$

Vamos agora calcular a hipotenusa h em função de b através de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$h^2 = \left(\frac{4.b}{3}\right)^2 + b^2$$

$$h^2 = 16b^2/9 + b^2 \quad \Rightarrow \quad 9h^2 = 16b^2 + 9b^2$$

$$\Rightarrow \quad 9h^2 = 25b^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 25b^2/9 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{5.b}{3}$$

Como sabemos o perímetro vamos somar os 3 lados do triângulo:

$$a + b + h = 36$$

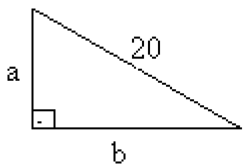
$$\frac{4b}{3} + b + \frac{5.b}{3} = 36 \quad \Rightarrow \quad 4.b + 3.b + 5.b = 108$$

$$\Rightarrow \quad 12.b = 108 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{108}{12} \quad \Rightarrow \quad b = 9$$

$$\text{Logo como } a = \frac{4b}{3} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4.9}{3} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{36}{3} \quad \Rightarrow \quad a = 12$$

<u>Resposta</u>: Os catetos medem 12 m e 9 m.

11 – Determine a medida dos catetos de um triângulo retângulo sabendo que a razão entre suas medidas é $\frac{3}{4}$ e que a hipotenusa mede 20 cm.



<u>Resolução</u>: Como a razão entre os catetos é $\frac{3}{4}$, então $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \quad 4.a = 3.b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3.b}{4}$$

Agora aplicando Pitágoras obtemos:

$$20^2 = a^2 + b^2$$

$$400 = \left(\frac{3.b}{4}\right)^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad 400 = 9b^2/16 + b^2$$

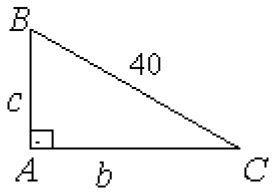
$$\Rightarrow \quad 400.16 = 9b^2 + 16\,b^2 \quad \Rightarrow \quad 6400 = 25b^2$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = \frac{6400}{25} \quad \Rightarrow \quad b^2 = 256 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{256} \quad \Rightarrow \quad b = 16$$

$$\text{Mas como } a = \frac{3.b}{4} \text{ então } a = \frac{3.16}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{48}{4} \quad \Rightarrow \quad a = 12$$

Resposta: Os catetos medem 16 cm e 12 cm.

12 – Num triângulo ABC retângulo em A, determine a medida dos dois catetos, sabendo que a hipotenusa mede 40 cm e que sen B = $\frac{3}{5}$.



Resolução: Sabemos que o seno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

$$\text{Então como sen B} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{40} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \quad 5.b = 120 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{120}{5} \quad \Rightarrow \quad b = 24$$

Agora para achar o cateto c podemos aplicar Pitágoras.

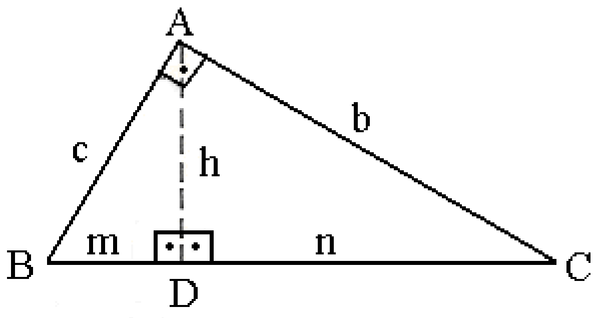
Temos: $40^2 = 24^2 + c^2$

$$1600 - 576 = c^2$$

$$c^2 = 1024 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{1024} \quad \Rightarrow \quad c = 32$$

Resposta: Os catetos medem 24 cm e 32 cm.

13 – Considere o triângulo retângulo $\triangle$ABC da figura abaixo. Se a medida de m é 2 cm e a medida de n é 4 cm, determine a altura h relativa a hipotenusa $\overline{BC}$ e a medida b do cateto $\overline{AC}$.



<u>Resolução</u>: Primeiramente aplicamos a relação deduzida no capítulo sobre relações métricas que diz que: $h^2 = m.n$

Então temos: $h^2 = 4.(2)$ $\Rightarrow$ $h^2 = 8$ $\Rightarrow$ $h = \sqrt{8}$ cm.

Agora aplicamos o teorema de pitágoras no triângulo ΔADC para achar a medida b do cateto $\overline{AC}$.

Temos então: $b^2 = h^2 + n^2$ $\Rightarrow$ $b^2 = (\sqrt{8})^2 + 4^2$ $\Rightarrow$ $b^2 = 8 + 16$

$\Rightarrow$ $b^2 = 24$ $\Rightarrow$ $b = \sqrt{24}$ cm.

<u>Resposta</u>: $h = \sqrt{8}$ cm e $b = \sqrt{24}$ cm.

Conclusão

Apesar de Pitágoras ser considerado uma figura imprecisa historicamente e de sua vida estar envolta num véu de mistério, não há como negar a sua grande contribuição para a evolução da matemática.

Pitágoras nasceu na pequena Ilha de Samos, no Mar Egeo, por volta de 570 a.C. Em Crotona, na costa sudoeste do que hoje é a Itália, fundou a Sociedade Secreta de Pitágoras, cuja base era o estudo da matemática e da filosofia. Os Pitagóricos se interessavam pelo estudo dos números, que era considerado por eles como a essência de todas as coisas.

A escola pitagórica tinha um código de conduta rígido. Acreditavam na reencarnação das almas e, portanto, que não se devia matar ou comer um animal pois ele poderia ser a moradia de um amigo morto.

Entre as principais descobertas sobre a matemática atribuídas aos Pitagóricos podemos citar:

- a classificação dos números em: primos e compostos, pares e ímpares, perfeitos e figurados;
- o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum;
- que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos;

Mas a principal descoberta foi sem dúvida o Teorema de Pitágoras.

Pitágoras morreu por volta de 497 a.C e assumiu proporções lendárias aos olhos das gerações que se seguiram.

Referências Bibliográficas

BOYER, Carl B. - **História da Matemática.** Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1996.

DI PIERRO NETTO, Scipione. **Matemática – conceitos e histórias**. São Paulo: Editora Scipione, 1996.

DOLCE, Osvaldo, NICOLAU POMPEO, José – **Fundamentos de Matemática elementar vol 9**. São Paulo: Editora Atual, 7ª edição, 1998.

EVES, Howard - **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Editora Unicamp, São Paulo, 2ª Edição, 1997.

Jornal do Telecurso 1º Grau. Fundação Roberto Marinho, Ministério da Educação e Cultura, Fundação da Universidade de Brasília, 1989.

LIMA, Elon Lages, ***Meu professor de Matemática e outras história***s. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.

REALE, Giovanni. **História da Filosofia Antiga**. São Paulo, vol. I, Edições Loyola, 1993.

STRATHERN, Paul, ***Pitágoras e seu Teorema em 90 minutos***; tradução Marcus Penchel - Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

Referências na Internet

1 www.mundodosfilosofos.com.br/pitagoras.htm

Acesso em: 28 de Julho de 2008.

2 http://pt.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras

Acesso em: 28 de Julho de 2008.

3 Revista Galileu - Editora Globo S.A. Disponível em:

< http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT640739-2680-1,00.html >

Acesso em: 28 de Julho de 2008.

4 Enciclopédia Simpózio. Disponível em:

< http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/Pitagora.html > Acesso em: 28 de Julho de 2008.